



Fac. CC. Económicas y Empresariales
Universidad de La Laguna



Fac. CC. Económicas y Empresariales
Univ. de Las Palmas de Gran Canaria

Optimización dinámica en la gestión del cultivo de dorada en la región mediterránea y Canarias

Juan Hernández Guerra*
Miguel León Santana*
Carmelo León González**

DOCUMENTO DE TRABAJO 2003-05

* Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Departamento de Métodos Cuantitativos en Economía y Gestión.

** Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Departamento de Análisis Económico Aplicado.

OPTIMIZACION DINÁMICA EN LA GESTIÓN DEL CULTIVO DE DORADA EN LA REGION MEDITERRANEA Y CANARIAS¹.

Juan Hernández Guerra^a, Miguel León Santana^b y Carmelo León González^c

^a Departamento de Métodos Cuantitativos en Economía y Gestión, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, c/Saulo Torón s/n, 35017 Las Palmas, tf: 928-458228, e-mail: juanh@empresariales.ulpgc.es

^b Departamento de Métodos Cuantitativos en Economía y Gestión, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, c/Saulo Torón s/n, 35017 Las Palmas, tf: 928-458228, e-mail: m_leon_santana@hotmail.com

^c Departamento de Análisis Económico Aplicado, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, c/Saulo Torón s/n, 35017 Las Palmas, tf: 928-452810, e-mail: carmelo@empresariales.ulpgc.es

¹ Los autores desean agradecer al evaluador anónimo sus valiosos comentarios y sugerencias que han mejorado sustancialmente el trabajo. Todos los demás errores son nuestros.

OPTIMIZACION DINÁMICA EN LA GESTIÓN DEL CULTIVO DE DORADA EN LA REGION MEDITERRÁNEA Y CANARIAS.

Resumen

El trabajo presenta un modelo de optimización dinámica aplicado a la gestión de un sistema de cultivo de la dorada en la región mediterránea española y canaria. El modelo incluye una función de crecimiento ajustada a partir de datos reales de cultivo de la especie. Las variables económicas incorporan las peculiaridades de ambas regiones, siendo el coste del transporte el factor diferenciador más relevante. Se obtienen recomendaciones de tasas de racionamiento a lo largo del periodo de engorde, que se encuentran siempre por debajo del nivel de saturación. Las tallas de mercado óptimas resultan mayores en la región canaria, debido a sus ventajas medioambientales, destacándose en esta decisión de producto la existencia de un factor de competitividad diferenciada.

Abstract

The paper presents a dynamic optimisation model applied to the seabream culture management in the Mediterranean area and the Canaries. The model includes a growth function estimated from field data of real culture of this species. The economic variables incorporate the special characteristics of both regions. One of them, the transport cost, is the most relevant economic difference between these areas. We obtain recommendations for rationing rates through the culture period. They are always below the satiation level. The optimal market sizes are higher in the canarian region, due to its environmental advantages. This fact shows the existence of a differential competitiveness factor for the culture in the islands.

Palabras clave: Acuicultura, diferenciación, gestión de la producción, optimización, racionamiento.

Codificación JEL: C610.

1. Introducción

La industria acuícola ha sido uno de los sectores que más desarrollo han experimentado en estos últimos años a nivel mundial. Su importancia relativa en la producción total de alimento acuático se ha incrementado considerablemente en la última década, habiendo pasado del 11.7% del total de la producción en 1989 al 18.5% en 1995, y hasta un 26.3% en 1999 (FAO 2000). De hecho, el incremento en la producción de carne de pescado en la década de los 90 tiene su origen casi exclusivamente en las granjas de acuicultura, habiéndose estabilizado el nivel de capturas. Las perspectivas futuras auguran un crecimiento aún mayor de la producción acuícola a nivel mundial, debido fundamentalmente a la demanda creciente de productos del mar y la disminución de las capturas por el agotamiento o preservación de los bancos de pesca (Tacon 1997, FAO 1997).

En particular, el cultivo de dorada (*Sparus aurata*) y lubina (*Dicentrarchus labrax*), llevada a cabo mayoritariamente en la región mediterránea, ha crecido muy rápidamente en los últimos 15 años, pasando de una producción de 17.000 tm. en 1984 a una de 75.000 tm. en 1998 que la ha situado como una industria consolidada. El cultivo está muy repartido entre todos los países de la región mediterránea, entre los que España ocupa el tercer lugar con un 10% del total producido (Lem 1999). De hecho, aunque la producción acuícola española actual gira fundamentalmente en torno al mejillón, los peces marinos manifiestan un crecimiento sostenido relevante, de un 12% anual. Entre ellos, la dorada y lubina representan la mitad del total, con unas 7.345 tm., aunque se prevé alcanzar una producción alrededor de las 14.439 tm. en el 2006 (JACUMAR 1999).

En general, a pesar de las perspectivas generales de crecimiento, el sector se ha encontrado en los últimos años con problemas de saturación en el mercado que han conducido a un declive muy acusado en los precios, de €15.97 en 1990 se ha pasado a aproximadamente €4.80 actualmente¹. Este acelerado descenso se atribuye a un mercado tradicional mucho menor que el que poseen otras especies y una no óptima gestión y orientación del mercado, con falta de diversificación del producto,

¹ Según precios en Mercamadrid, Enero-Febrero 2003.

implementación de avances tecnológicos que mejoren la eficiencia de la industria, mejores técnicas de cultivo, etc. (FAO 1997, Lem 1999).

La inversión en investigación y desarrollo tecnológico es sin duda una condición necesaria para superar los problemas que está atravesando el sector, como ya se ha realizado con otras especies de alto valor comercial y de tradicional consumo, situándolas actualmente como industrias altamente competitivas. Así, por ejemplo, podemos destacar el salmón, para el que Europa representa más del 60% de la producción mundial, o el pez gato, que goza de un amplio mercado en Estados Unidos, como algunas especies donde se ha efectuado una intensa labor investigadora, como se puede observar en la literatura especializada (Anderson 1985, Bjorndal 1988, Cacho et al. 1991, Hatch y Tie 1997 como fuente de referencias).

La literatura alrededor del cultivo comercial de dorada, aunque todavía insuficiente, ha cubierto aspectos muy variados. Así, existen importantes resultados a nivel de alevines y de cultivo (Porter et al. 1986, Barnabé 1991, Paspatis et al. 2000) y algunos estudios de viabilidad económica (Stephanis 1996, Mistaen and Strand 1999). Sin embargo, el rápido desarrollo de esta industria y los problemas con los que se encuentra demandan investigación más profunda aún desde los puntos de vista biológicos, tecnológicos y de gestión.

El presente trabajo contribuye al conocimiento de una empresa dedicada al cultivo de dorada a partir de la modelización de sus decisiones de gestión de la producción en un sistema integrado. El objetivo final consiste en establecer unas trayectorias dinámicas de algunas variables o factores que componen el sistema de forma que se alcance una óptima rentabilidad en la empresa. Estos factores son muy variados, algunos no muy controlables aunque previsibles, como son los relativos al entorno (temperatura, corrientes, etc.), y otros más controlables, como la composición y calidad en la alimentación, racionamiento, ciclos de siembra y cosecha, etc.

En concreto, en la resolución de este problema de optimización obtendremos recomendaciones generales para el racionamiento suministrado al pez y la talla final de mercado. Hemos elegido estos dos factores pues, por un lado, los costes de

alimentación suponen unos de los más importantes en esta industria, alrededor de un 40% de los costes totales de una empresa (Cho y Bureau 1998). Por otro lado, la talla final obtenida en el cultivo es un factor diferenciador del producto que puede introducir una ventaja competitiva para determinadas granjas de acuicultura.

Debido a la importancia de los factores de localización en el éxito de este tipo de empresa y dadas las peculiaridades del cultivo en España, se establecerán en los resultados del modelo de optimización dos escenarios diferentes: uno para empresas situadas en la región canaria y otra en el Mediterráneo. El número de empresas localizadas en Canarias no es desdeñable, pues supone más del 15% del total en España, con una participación en la producción del 9%. Las diferentes condiciones medioambientales entre las dos áreas de cultivo, así como la disparidad en la distancia a los centros de consumo pueden conducir a estrategias de producción particulares en cada región.

La metodología usada se basa en la optimización dinámica, en particular dentro del campo no lineal, como son los problemas de control óptimo. Estos han sido aplicados con éxito a cuestiones pesqueras desde hace dos décadas (Clark 1985). Extensiones de los modelos construidos al caso de explotación de especies en cautividad se han ido desarrollando en la década pasada, sobre todo a las especies más comerciales, como el salmón (Bjorndal 1988, Arnason 1992) y el pez gato (Cacho et al. 1991), y más recientemente han aparecido algunos trabajos para la dorada (Mistaen y Strand 1999).

2. El problema del racionamiento óptimo en el cultivo de la dorada.

La modelización matemática se ha erigido como un medio eficaz en el estudio y análisis de sistemas acuícolas. El interés de buena parte de los investigadores se ha centrado hasta ahora en el aspecto productivo de la industria, que viene determinado por la función de crecimiento del pez. Gran parte de los modelos así diseñados se basan en cuestiones bioenergéticas (Cacho 1990, Masser et al. 1991, Cho y Bureau 1998). Estos requieren de costosa información experimental y los resultados que se obtienen no tienen un alto grado de precisión. El uso del conocimiento teórico acerca del metabolismo animal, como hacemos en nuestro modelo, puede soslayar la

necesidad de una compleja experimentación y establecer una serie de recomendaciones prácticas en la gestión diaria de las granjas de acuicultura.

El modelo de crecimiento que a continuación presentamos utiliza resultados acerca de la fisiología del pez ya obtenidos en tratados clásicos (Brett y Groves 1979, Brett 1979). Estos ya han sido aplicados con éxito en algunos estudios previos para la trucha arcoíris (*Oncorhynchus mykiss*) (Muller-Feuga 1990) y la dorada (León et al. 2001). En estos modelos se supone que la función de crecimiento del pez viene determinada fundamentalmente y de una forma multiplicativa por tres componentes: el peso del pez (w), la temperatura del agua (θ) y el racionamiento suministrado (r). De esta manera, la ecuación de estado del peso viene determinada por la expresión:

$$\dot{w} = \Gamma f_1(w(t)) f_2(\theta) f_3(r(t)). \quad (1)$$

Las funciones $f_i(\cdot)$, con $i=1,2,3$, representan el efecto de cada variable correspondiente sobre el incremento de peso del pez. Por simplicidad, consideramos la temperatura constante ($\theta=\theta_0$) a lo largo de todo el periodo de crecimiento. La ración $r(t)$ está medida en términos normalizados, variando desde la ausencia de alimentación ($r(t)=0$) hasta la saturación ($r(t)=1$). La función $f_3(r)$, que mide el efecto sobre el crecimiento de los distintos niveles de racionamiento, está determinada por la fisiología animal (Brett 1979). Por simplificación, no hemos considerado el efecto de la densidad de cultivo sobre el crecimiento individual. El resto de las funciones han sido especificadas de acuerdo a contrastes estadísticos obtenidos a partir de datos empíricos y de la literatura. Un resumen de las expresiones concretas utilizadas en el modelo se presenta en el Apéndice A. Los detalles pueden ser consultados en León et al. (2001).

El objetivo de la empresa en nuestro problema es encontrar la trayectoria óptima de la tasa de ración $r(t)$ que optimice los beneficios obtenidos por medio del cultivo de $N(t)$ individuos desde el tamaño de alevín hasta el tamaño comercial. El ingreso unitario obtenido por la venta del pescado depende de la talla individual, como se ha observado por la diferente clasificación de tallas (Normal, Extralarge, etc.). Este precio variable está representado por la función $p(w(t))$. Por tanto, asumiendo un único ciclo de cultivo, la función a maximizar es

$$e^{-iT} p(w(T))w(T)N(T) - \int_0^T e^{-it} C(N, w, \theta_0, r) dt, \quad (2)$$

donde T es el tiempo total (en días) de cultivo e i la tasa de descuento². La función C(N,w,θ, r) representa los costes diarios totales de la empresa y depende de todas las variables que intervienen en el modelo.

El número de individuos no es constante a lo largo del cultivo, sino que decrece con una tasa de mortalidad constante δ. Por tanto:

$$N(t) = N_0 e^{-\delta t} \quad (3)$$

con N₀ el número inicial de alevines. Incorporando esta ecuación, el problema general de control se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \underset{r(t), T, w(T)}{\text{Max}} \quad & N_0 e^{-hT} p(w(T))w(T) - c_s N_0 - \int_0^T e^{-it} C(N, w, \theta_0, r) dt \\ \text{s.a.} \quad & \dot{w} = \Gamma f_1(w) f_2(\theta_0) f_3(r), \\ & w(0) = w_0, \\ & T \text{ libre}, w(T) \text{ libre}, \\ & 0 \leq r(t) \leq 1, \\ & w(t) \geq 0. \end{aligned} \quad (4)$$

El parámetro w₀ representa el peso inicial del pez y h=δ+i, la suma de la tasa de descuento y la tasa de mortalidad, que representa el riesgo total de la actividad. En la función objetivo hemos incluido también el coste individual de los alevines, c_s. La resolución de este problema establecerá una talla final del pez w(T), un tiempo de cultivo T y una determinada estrategia de racionamiento a lo largo del cultivo r(t) con los cuales obtenemos un máximo beneficio descontado.

La función de costes C(·) en la empresa incorpora multitud de factores, algunos de ellos con muchas dificultades en su modelización. En este modelo consideramos

² El tipo de descuento incorpora, además del tipo de interés existente en la economía, un factor de riesgo que conlleva esta actividad, como es comúnmente aceptado.

aquellos más fundamentales en una empresa de este tipo y los de carácter más diferenciador entre la zona mediterránea y canaria. Estos son la alimentación, el trabajo, el transporte, los alevines y otros costes, donde se incluyen el resto no considerado, como los costes sanitarios, de mantenimiento, etc.

Seguidamente describimos cada uno de ellos.

i) Costes de alimentación $C_f(\cdot)$.

Los costes de alimentación dependen del índice de conversión de alimento. Este representa la cantidad de alimento necesaria para que el pez aumente 1 g. de peso. Dada la formulación del modelo (1) (Apéndice A), podemos definir los costes de alimentación diarios de la siguiente manera (León et al. 2001):

$$C_f(N, w, \theta_0, r) = p_f N(t) I_C(w(t), \theta_0, r(t)) \dot{w}, \quad (5)$$

donde $I_C(w, \theta_0, r)$ es el índice de conversión de alimento para una ración dada $r(t)$ suministrada en el tiempo t con un peso determinado $w(t)$ y temperatura θ_0 ³. Se ajusta en base a resultados sobre fisiología del pez y datos de crecimiento real⁴. Multiplicado por el crecimiento del individuo y la población sobreviviente ($N(t)$) obtenemos la cantidad de alimento suministrado en ese día. El parámetro p_f indica el precio del pienso por gramo.

ii) Costes del trabajo $C_L(\cdot)$.

La función de costes del trabajo depende del número de trabajadores en la empresa, L , y del coste diario del trabajo, considerado constante, p_L . Así,

³ El índice de conversión representa la proporción de alimento necesaria para que el individuo aumente una unidad de peso. Representa el grado de eficiencia de la alimentación. Este índice depende, entre otros muchos factores, del peso del individuo, temperatura del agua, la ración y calidad del alimento. Suponemos en el modelo que la calidad del alimento es fija.

⁴ Más concretamente, $I_C(w, \theta, r) = Y(r)g(w, \theta)$, siendo $Y(r)$ el índice de conversión normalizado, cuya expresión concreta se encuentra en el Apéndice A. La función $g(w, \theta) = H(\theta)w^{\gamma(\theta)}$ transforma el índice de conversión normalizado en el índice de conversión real. Los parámetros H y γ están ajustados estadísticamente y dependen de la temperatura del agua. Para más detalles, ver León et al. (2001).

$$C_L(L) = p_L L. \quad (6)$$

iii) *Costes de alevines y de transporte* $C_\tau(\cdot)$.

El coste total de los alevines se efectúa al iniciar el cultivo y ya está considerado en el modelo (4). El coste de transporte se produce al finalizar el periodo de cultivo y comprende los costes desde los almacenes de origen hasta su destino. Depende de la biomasa total trasladada, por lo que su expresión funcional es

$$C_\tau(N(T), w(T)) = c_\tau N(T)w(T), \quad (7)$$

siendo c_τ el coste de transporte por unidad de peso.

iv) *Otros costes* $C_o(\cdot)$.

Los otros costes se contabilizan diariamente y van a depender también de la biomasa total existente en el cultivo. De esta manera,

$$C_o(N, w) = c_0 N(t)w(t), \quad (8)$$

donde c_0 indica los otros costes diarios.

De esta manera, desglosando la función de costes del problema (4) en las cuatro señaladas anteriormente, el problema de control puede ser re enunciado de la forma

$$\begin{aligned} \underset{r(t), T, w(T)}{\text{Max}} \quad & e^{-hT} p(w(T))w(T) - c_S - e^{-\delta T} w(T)c_\tau - \int_0^T e^{-ht} (p_f I_C(r, \theta_0, w)\dot{w}(t) + Ke^{\delta t} + c_0 w) dt. \\ \text{s.a.} \quad & \dot{w} = \Gamma f_1(w) f_2(\theta_0) f_3(r), \\ & w(0) = w_0, \\ & T \text{ libre, } w(T) \text{ libre,} \\ & 0 \leq r(t) \leq 1, \\ & w(t) \geq 0, \end{aligned} \quad (9)$$

donde $K=p_L L/N_0$ es el coste diario del trabajo por individuo. Hemos dividido la función objetivo por el número de individuos N_0 , que no altera la solución óptima.

La función de precio $p(\cdot)$ la suponemos creciente con la talla ($\dot{p} > 0$) y convexa ($\ddot{p} \geq 0$), ya que los tamaños mayores son más valorados en el mercado. El peso final está descontado por la mortalidad ocurrida durante el proceso productivo.

Seguidamente resolveremos el problema (9) por dos vías complementarias: analíticamente, haciendo uso de los resultados teóricos desarrollados para los problemas de control óptimo; numéricamente, partiendo de unos supuestos obtenidos de la observación real sobre los parámetros del modelo y utilizando algoritmos adecuados para su resolución. La resolución analítica ofrecerá una visión general de las distintas soluciones posibles, que estará completada con la numérica, que aportará datos cuantitativos sobre la producción, talla y beneficios.

3. Resolución analítica.

Utilizaremos la teoría desarrollada al respecto, en particular el Principio del Máximo de Pontryagin (Léonard y Van Long 1992), que presenta condiciones necesarias de existencia de óptimo. En primer lugar, el hamiltoniano del valor corriente asociado a esta problema es

$$H = -p_f \Gamma I_c(w, \theta_0, r) f_1(w) f_2(\theta_0) f_3(r) - K e^{\alpha} - c_0 w + \psi(t) \Gamma f_1(w) f_2(\theta_0) f_3(r) + \mu_1 r + \mu_2 (1-r), \quad (10)$$

donde $\psi(t)$ es la variable de coestado y $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ son multiplicadores ambos no negativos, con la propiedad $\mu_1(t)r(t)=0$, $\mu_2(t)(1-r(t))=0$ respectivamente. La restricción $w(t) \geq 0$ de (9) se cumple trivialmente por construcción de la función de crecimiento. Aplicando las condiciones necesarias obtenemos

$$H_r = \Gamma f_1(w) f_2(\theta_0) \frac{1}{Z(r_c)} (-p_f \cdot g(w, \theta_0) + \psi(t) Z'(r)) + \mu_1 - \mu_2 = 0. \quad (11)$$

La función $g(w, \theta_0)$ representa el inverso del índice de conversión en caso de un racionamiento del 100%; $Z(r)$ es la función de crecimiento normalizada⁵. Aplicando las condiciones sobre los multiplicadores $\mu_1(t)$ y $\mu_2(t)$ obtenemos los siguientes resultados,

$$\begin{aligned}
 \text{Si } 0 < r(t) < 1 &\Rightarrow -p_f \cdot g(w, \theta_0) + \psi Z'(r) = 0, \\
 \text{Si } r(t) = 0 &\Rightarrow -p_f \cdot g(w, \theta_0) + \psi Z'(0) \leq 0, \\
 \text{Si } r(t) = 1 &\Rightarrow -p_f \cdot g(w, \theta_0) + \psi Z'(1) \geq 0 \Leftrightarrow -p_f \cdot g(w, \theta_0) \geq 0.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Puesto que tanto p_f como la función $g(w, \theta_0)$ son positivas, la última condición nunca se verifica. Deducimos por tanto que en ningún caso es óptimo alimentar al pez al nivel de saturación.

La primera condición indica que la ración óptima ha de ser tal que la aportación al beneficio de un incremento marginal en el peso ($\psi Z'(r)$) ha de ser igual al coste relativo de la ración suministrada al 100% ($p_f g(w, \theta_0)$). Si este beneficio marginal es, para cualquier nivel de ración, menor que el coste relativo, la ración óptima sería la nula ($r=0$). Este caso, aunque técnicamente posible, difícilmente es aceptable en la realidad. Se darían en situaciones de altos precios relativos del alimento o muy altos índices de conversión en los cuales no sería rentable iniciar el cultivo con fines comerciales.

Por otro lado, imponiendo las condiciones de transversalidad tanto para $w(T)$ como para T (ver Apéndice B), deducimos lo siguiente⁶,

$$\begin{aligned}
 \psi(T) &= \dot{p}w + p - e^{iT} c_\tau \\
 \frac{\dot{w}(T)}{w(T)} &= \frac{c_0 + hp - \delta c_\tau e^{iT}}{2(\dot{p}w + p - e^{iT} c_\tau) - p_f I_C} + \frac{p_L L e^{\delta T}}{w N_0 [2(\dot{p}w + p - e^{iT} c_\tau) - p_f I_C]}
 \end{aligned} \tag{13}$$

De la primera ecuación se deduce que, al final del periodo de cultivo, T , la aportación al beneficio de dejar crecer un gramo más de peso en el pez ($\psi(T)$) es

⁵ Hemos aplicado que $f_3(r) = Z(r)/Z(r_c)$ (ver Apéndice A).

⁶ Hemos suprimido, por simplicidad en la notación, el argumento en las funciones del segundo miembro de cada ecuación.

directamente proporcional al rendimiento que se obtenga con esa ganancia de peso ($p + \dot{p} w$). El coste de transporte actúa como elemento amortiguador sobre la valoración de continuar con el engorde del pez en la jaula.

La segunda ecuación es algo más compleja, pero de ella se pueden obtener interesantes conclusiones. El primer sumando del segundo miembro de la ecuación indica que la tasa de crecimiento del pez en el momento de la cosecha ha de estar en una relación directamente proporcional a la tasa de descuento, el precio del alimento, los otros costes unitarios y el índice de conversión. Este hecho unido a que la tasa de crecimiento del pez es menor a pesos mayores (Apéndice A) conduce a una relación inversa entre la talla óptima final y los parámetros anteriores. Así, por ejemplo, si la tasa de descuento h aumentara, debido a un aumento en la mortalidad de los peces o en el riesgo de la actividad, la talla final óptima del pez debería reducirse. Se obtiene el mismo efecto ante un aumento en el precio relativo del alimento (p/p), un aumento en los otros costes o un empeoramiento de los índices de conversión.

El segundo sumando incorpora los factores relativos a los costes laborales y el tamaño de la granja, indicado por el número de alevines iniciales en cultivo. Como anteriormente, la tasa del crecimiento del pez está en una relación directamente proporcional al salario o número de trabajadores, de manera que si se produjera un aumento de éstos, la talla óptima final del pez habría de ser menor. Estas tallas óptimas sin embargo crecen con el tamaño de granja o ante un aumento del precio del producto.

Las recomendaciones que se extraen de este modelo son similares a las obtenidas en otros trabajos de optimización más simplificados para el cultivo del salmón o dorada (Arnason 1992, Mistaen y Strand 1999). En pocas palabras, se propone una estrategia de gestión a las empresas de cultivo conforme a la coyuntura económica o productiva de la empresa. Si ésta empeora o es más restrictiva, es preferible obtener rendimientos a la producción más rápidamente, lo que lleva a un despesque o cosecha a tallas finales menores, incluso aunque sean menos valoradas por el mercado.

Sin embargo, el efecto de los costes de transporte es paradójico. Incrementos en los mismos traen consigo un aumento en la tasa de crecimiento del pez en el momento del despesque, por lo que su efecto sobre la talla final es positivo. El transporte es uno de los elementos diferenciadores más relevantes en el coste total de empresas situadas en zonas cercanas o alejadas de los centros de consumo. De esta manera, el efecto señalado puede originar que para las regiones de cultivo más alejadas sea más rentable la producción a una talla mayor que para las regiones más cercanas. Ello también depende de que las condiciones medioambientales y de gestión hagan esta producción viable. En el caso de Canarias se dan estas condiciones como además la experiencia lo confirma. Ello supone la aparición de un elemento diferenciador en el producto para estas regiones.

Aplicando el Principio de Máximo obtenemos las siguientes ecuaciones diferenciales que gobiernan las variables de coestado y estado,

$$\dot{\psi} = h\psi + \frac{p_f \Gamma}{Z(r_c)} f_2(\theta_0) \left(g_w(w, \theta_0) f_1(w) + g(w, \theta_0) f_1'(w) - \frac{\psi}{p_f Y(r)} f_1'(w) \right) \cdot r + c_o \quad (14)$$

$$\dot{w} = \Gamma f_1(w) f_2(\theta_0) f_3(r)$$

Para estudiar este sistema hacemos uso del diagrama de fases (w, ψ) (Figura 1). Este diagrama muestra las trayectorias que deben seguir las variables del modelo partiendo de la representación de las isoclinas ($\dot{w} = 0$, $\dot{\psi} = 0$) y las curvas de nivel $r = \bar{r}$ (Hirsch y Smale 1974). También se incluye la condición de transversalidad sobre $w(T)$ expuesta en (13). Los detalles del cálculo de las isoclinas y el diagrama de fases se encuentran en el Apéndice B.

A partir del diagrama, existen varias posibilidades sobre la trayectoria del racionamiento óptimo de un pez en cultivo a partir de una talla dada w_0 :

- (a) El pez se alimenta a un ritmo constante y creciente en el nivel de ración. La valoración en términos de beneficio marginal es creciente a medida que el pez aumenta de peso y la cosecha se produce cuando esta valoración alcanza el nivel indicado en la primera ecuación de (13)⁷.

⁷ Existe otra posibilidad de trayectoria óptima teórica, que es aquella que parte de un racionamiento inicial por debajo del nivel de mantenimiento ($r=r_m$) para posteriormente incrementar la ración hasta

(b) El nivel óptimo de racionamiento empieza elevado a tallas pequeñas para ir disminuyendo paulatinamente a medida que el individuo va creciendo. Cerca de las tallas finales se vuelve a incrementar. En términos de valoraciones marginales, ésta decrece inicialmente para luego volver a crecer hasta alcanzar la condición de transversalidad.

La elección óptima entre estas dos trayectorias de racionamiento viene dada por la condición de transversalidad sobre T , expresada en la segunda ecuación de (13). Como veremos posteriormente en el ejemplo numérico, la posibilidad (b) es la más frecuente para un cultivo real.

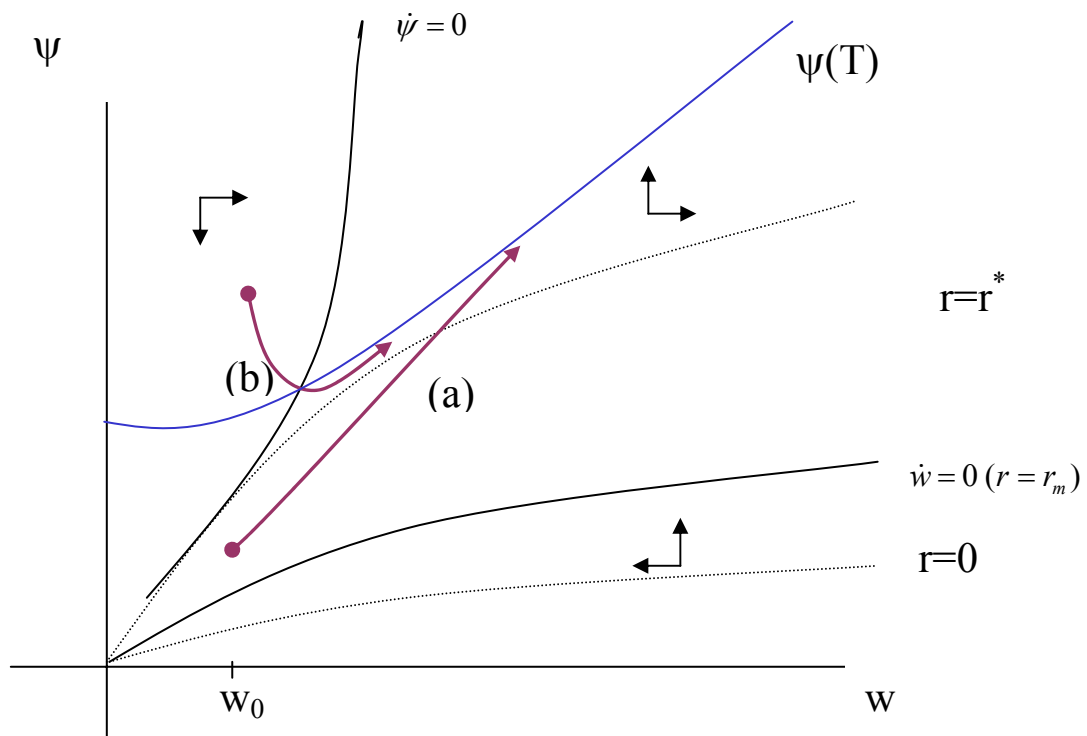


Figura 1. Diagrama de fases (w, ψ) . A partir de un peso inicial w_0 , pueden producirse dos trayectorias óptimas cualitativamente diferentes, (a), (b). El racionamiento óptimo depende de la talla final de cosecha, determinada por la segunda condición de transversalidad de (13). No obstante, la opción (b) es la más frecuente para las circunstancias reales. Los detalles del cálculo se encuentran en el Apéndice B.

alcanzar la condición de transversalidad. Sin embargo, esta posibilidad podemos desecharla como real, pues supondría unas condiciones para las cuales no es rentable iniciar el cultivo de la especie.

4. Resolución numérica

Los resultados expuestos en la sección anterior ilustran las distintas posibilidades de trayectorias de racionamiento y tallas finales para la empresa especializada en el cultivo de la dorada. La concreción de este modelo general a la realidad del cultivo de la dorada en España aportaría información más valiosa para los gestores de las granjas de acuicultura.

Presentamos en este apartado los resultados numéricos del modelo de optimización (9). Como indicamos en la introducción, vamos a considerar dos escenarios diferentes de acuerdo a la localización: una granja ubicada en Canarias y, de modo alternativo, en la región mediterránea. En cada uno de ellos incorporaremos las peculiaridades ambientales y económicas de la áreas de cultivo, como la temperatura media anual del agua, los costes de suministros y de comercialización.

Los valores fijados de los parámetros y condiciones iniciales que intervienen en el modelo para cada uno de los escenarios se presentan en la Tabla 1. Estos datos han de considerarse como aproximados y están basados en información suministrada en las granjas de acuicultura, mercados nacionales y bibliografía especializada. No obstante, el efecto que ocasionaría variaciones en dichos datos se analiza en la sección siguiente de análisis de sensibilidad.

Tabla 1. Parámetros del modelo, descripción y valores.

Parámetros	Descripción	Región de producción	
		Canarias	Mediterráneo
p_f	Precio de alimentación	0,60 €/kg.	0,55 €/kg.
p_L	Salario del trabajador	12621,25 €/año	12621,25 €/año
c_s	Coste de alevín	0,30 €	0,30 €
c_o	Otros costes	0,01 €/kg.	0,01 €/kg.
L	Número de trabajadores	*	*
N_0	Número de alevines	*	*
w_0	Peso inicial de la dorada	14 g.	14 g.
I	Tipo de interés	10 % anual	10 % anual
δ	Índice de mortalidad	5 % anual	5 % anual
h	Tasa de descuento	15 % anual	15 % anual
p	Precio comercial	**	**
c_t	Coste de transporte	1,50 €/Kg.	0,51 €/kg.
θ_0	Temperatura del agua	21° C.	17.5° C.

* Depende del tamaño de la granja.

** Precio variable, $p=4,80\text{€/kg.}$ para tallas de 400 g. (Normal) y $p=6,24\text{€/kg.}$ (incremento del 30%) para tallas de 700 g. (Extralarge). El precio para el resto de las tallas se ajusta linealmente.

Las Tablas 2 y 3 presentan los resultados óptimos obtenidos para una granja situada en uno y otro escenario⁸. Hemos destacado como factores característicos el tiempo de cultivo, la talla final, el índice de conversión (acumulado)⁹ y los beneficios óptimos. Estos han sido presentados para granjas con diferentes tamaños de producción, oscilando desde las 60 hasta las 800 tm. anuales.

⁸ El algoritmo utilizado en la resolución numérica del problema (9) consiste en determinar la trayectoria de la ración $r(t)$ con la que las variables de la ecuación (14) satisfacen las condiciones de transversalidad (13) con una tolerancia del orden de una centésima. Hemos utilizado para la aproximación del sistema diferencial el método de Runge-Kutta de orden 5 con tiempo de paso de 1 día. El ajuste a la solución real fue validado por medio del cálculo del error local, obteniendo resultados satisfactorios.

⁹ Este índice de conversión acumulado $I_{CA}(\cdot)$ representa la proporción de alimento suministrado en todo el periodo de cultivo sobre el peso final del individuo, a diferencia de la función $I_C(\cdot)$, que indica el índice de conversión para incrementos diarios de peso.

Tabla 2. Resultados del modelo de optimización para diferentes tamaños de granja. Condiciones de cultivo de dorada en Canarias. T=tiempo óptimo de cultivo; w_f =talla final; I_{CA} =índice de conversión (acumulado), J^* =beneficios descontados óptimos.

Producción ^a (Tm/año)	T (días)	w_f (gramos)	I_{CA}	J^* (€)
60 (4)	530	692,777	1,8514	10.361,45
100 (7)	532	696,222	1,8573	28.883,44
200 (10)	542	712,364	1,8758	117.437,77
300 (13)	546	718,845	1,8831	246.721,48
400 (15)	549	724,189	1,8931	376.834,59
600 (19)	551	727,442	1,8967	634.248,07
800 (25)	550	725,8152	1,8949	739.365,09

^a Entre paréntesis se indica el número de trabajadores fijado para cada tamaño de granja.

Tabla 3. Resultados del modelo de optimización para diferentes tamaños de granja. Condiciones de cultivo de dorada en el Mediterráneo. T=tiempo óptimo de cultivo; w_f =talla final; I_{CA} =índice de conversión (acumulado), J^* =beneficios descontados óptimos.

Producción ^a (Tm/año)	T (días)	w_f (gramos)	I_{CA}	J^* (€)
60 (4)	494	485,282	2,1914	-2.959,98
100 (7)	497	488,846	2,1994	3.432,08
200 (10)	510	504,512	2,2359	72.391,91
300 (13)	515	510,509	2,2491	150.884,09
400 (15)	519	515,3189	2,2597	243.788,54
600 (19)	523	520,139	2,2702	430.432,85
800 (25)	522	518,933	2,2676	494.272,35

^a Entre paréntesis se indica el número de trabajadores fijado para cada tamaño de granja.

De la observación de estas tablas podemos resaltar la elevada discrepancia entre los resultados obtenidos para granjas situadas en el Mediterráneo y Canarias. Los rendimientos económicos alcanzados en la región insular son sensiblemente mejores que los obtenidos en cultivos situados en la zona peninsular. Como ya se comentó en la resolución analítica, este hecho puede resultar paradójico, pues la inclusión de los costes de transporte, tanto en el suministro de insumos como en la comercialización de los productos, supone un handicap para las empresas más alejadas, como las canarias.

Sin embargo, debido a las condiciones climáticas más favorables, es posible alcanzar tallas de cultivo más altas en Canarias que en el Mediterráneo. Así, la producción óptima en la región insular se sitúa en tallas en torno a los 700 g., que entra dentro de una categoría superior (Extralarge) que las tallas óptimas alcanzadas en el otro escenario (Normal). Estas tallas superiores son más apreciadas que las menores, alcanzando precios en torno a un 30% más alto en el mercado. De esta manera, el factor lejanía es ampliamente compensado por los mayores ingresos obtenidos con un producto diferenciado del resto.

La combinación entre el factor temperatura del agua y la distancia a los centros de consumo establece por tanto estrategias óptimas de cultivo claramente diferenciadas. De hecho, se ha observado en el modelo que si no incluyéramos los costes de transporte, las tallas óptimas finales de cultivo, siendo aún mayores en Canarias, se encuentran en un rango similar (Normal). Sin embargo, los rendimientos obtenidos en al área insular aumentarían un 100% para granjas de tamaño medio y alto frente a un 20% para granjas localizadas en el Mediterráneo. El handicap de lejanía obliga entonces a las granjas canarias a producir a tallas más altas, que aunque originan un mayor coste, suponen también un mayor ingreso que hace mantener la industria como rentable. De hecho, las empresas localizadas en las islas aparecen como altamente rentables para cualquier tamaño, mientras que en la zona mediterránea los resultados son francamente menores. En concreto, las granjas con una reducida producción anual, como la que está en torno a 60 tm., han dejado de ser viables.

Ambos escenarios, sin embargo, presentan rendimientos a escala crecientes. La rentabilidad creciente según tamaños de granja es un hecho generalmente aceptado en la literatura (Stephanis 1996), situándose el óptimo tamaño de granja entre las 600 y 800 tm. anuales (Gasca-Leyva et al. 2001).

El número de días necesario para alcanzar la talla óptima no difiere significativamente para uno u otro escenario, lo que resalta las buenas condiciones medioambientales del cultivo insular. Sin embargo, los índices de conversión obtenidos en este caso son también más altos. Esto es debido a que las tallas más elevadas provocan un empeoramiento en la eficiencia de la alimentación, no suponiendo por ello una menor rentabilidad.

Las tallas óptimas recomendadas para el área peninsular pudieran considerarse exageradas. Una de las razones es la suposición de temperatura constante durante el año. Las oscilaciones reales de la temperatura que se producen en las aguas mediterráneas impiden que estos peces alcancen en un periodo razonable tallas muy altas. No obstante, los resultados destacan que a pesar de esta simplificación, los pesos óptimos finales de despesque no superan la categoría de Normal, como de hecho ocurre en la práctica real. La invariabilidad de los resultados para los diferentes tamaños de granja considerados, donde las tallas e índices de conversión no manifiestan grandes diferencias, aumenta la fiabilidad de los mismos.

Uno de los objetivos del trabajo es la determinación de una trayectoria óptima de racionamiento diario en el cultivo de la dorada. La Figura 2 presenta esta trayectoria para cuatro casos de empresas de tamaño medio y alto (200, 400, 600 y 800 tm./año) situadas en la región peninsular y atlántica. Las condiciones iniciales están dadas en la Tabla 1. Como puede observarse en esta figura, las curvas de racionamiento siguen para cualquier tamaño de granja el caso b) presentado en la sección anterior.

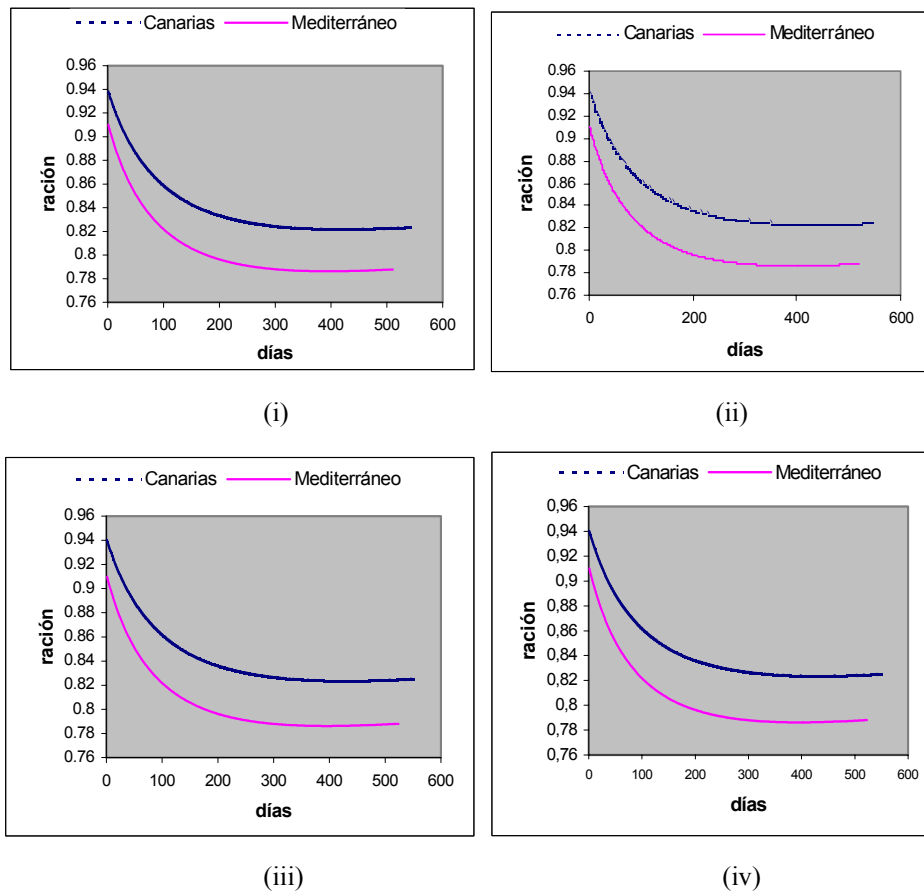


Figura 2. Trayectoria óptima del racionamiento para el caso de una granja con producción media anual de (i) 200 tm.; (ii) 400 tm.; (iii) 600 tm.; (iv) 800 tm. Distinguimos la granja situada en el área canaria (azul) y en el área mediterránea (rosa).

Como se observa en la Figura 2, la trayectoria óptima de racionamiento es prácticamente idéntica sea cual fuere el tamaño de producción que se considere. Esta consiste en suministrar alimento al alevín en tasas altas, de alrededor del 94% sobre el nivel de saturación, para ir paulatinamente reduciéndola a medida que el individuo engorde, nunca por debajo de un 78% sobre su saturación. El racionamiento se mantiene casi constante a tallas superiores a 300g. con un ligero aumento próximo al despesque. Este resultado completa otros trabajos a nivel estático que recomendaban un racionamiento durante todo el periodo de engorde en torno al 80% del nivel de saturación (Muller-Feuga 1990, León et al. 2001).

La estrategia de alimentación obtenida contrasta con la habitual observación en las granjas de acuicultura. Las prácticas generales en el sector, presentadas como válidas en algunos relevantes trabajos científicos (Azevedo et al. 1998, Glasser y

Oswald 2001), son la alimentación ad libitum del individuo. Este criterio se fundamenta en un sistema de alimentación no selectivo de los individuos que, con el fin de evitar carencias debidas a la competitividad entre individuos, obliga al suministro de alimento hasta la saturación. Sin embargo, los resultados del modelo ponen de manifiesto que esta práctica no es económicamente óptima.

Por otro lado, se puede observar también que para cualquier tamaño de granja los racionamientos en la región canaria son más elevados que en la región mediterránea. Así, por ejemplo, para un tamaño de granja de 200 tm. anuales, en el escenario de Canarias se oscila en un rango de racionamiento entre el 94 y 82%, mientras que en el escenario del Mediterráneo este rango se encuentra entre el 91 y 78%. La estrategia de producción a tallas más altas llevadas a cabo en las empresas canarias obligan a suministrar una ración más elevada a los individuos, con el fin de alcanzar mayor rapidez en el engorde.

5. Análisis de sensibilidad

El análisis de la sensibilidad tiene como objetivo encontrar indicadores acerca del efecto de perturbaciones en los valores de los parámetros o elementos que definen el sistema de gestión sobre los resultados óptimos del modelo. De esta manera se establece una categoría de los factores más influyentes que pueden alterar las conclusiones obtenidas.

Las Tablas 4 y 5 presentan los resultados de este análisis. Se ilustran dos columnas con los nuevos óptimos obtenidos en la talla final y los beneficios para un cambio de un 10% en el valor fijado de los parámetros más destacados del modelo. Se añaden los incrementos porcentuales de la variable por cada punto porcentual de incremento en el parámetro. Este indicador expresa el efecto multiplicativo que una perturbación en un factor determinado origina en la variable correspondiente. Hemos tomado como caso base un tamaño de granja de 200 tm. Se ha realizado independientemente para el escenario del Canarias y el Mediterráneo (Tablas 2 y 3).

Tabla 4. Análisis de sensibilidad para diferentes parámetros del modelo. Cultivo en Canarias. Caso base: tamaño de granja de 200 tm. (Tabla 3); w_{fp} =nueva talla final; J_p^* =nuevos beneficios descontados óptimos.

Parámetro	Talla		Beneficio	
	w_{fp} (g.) ^a	Variación porcentual ^b	J_p^* (€) ^a	Variación porcentual
(caso base)	712,364		117.437,77	
p_f	702,937	-0,1323	86.852,26	-2,6044
p_L	707,283	-0,0713	111.169,21	-0,5338
c_s	712,364	0	113.885,78	-0,3025
c_o	678,728	-0,4722	51.286,17	-5,6329
p^c	732,174	0,2781	260.556,78	12,1868
L	707,283	-0,0713	111.169,21	-0,5338
w_0	712,293	-0,001	133.418,68	1,3608
h	703,599	-0,1230	109.354,15	-0,6883

^a Nuevos valores óptimos al incrementar el valor del parámetro en un 10%.

^b Incremento porcentual de la variable por cada punto porcentual de incremento en el parámetro. Si denotamos por w_{fp} el peso obtenido con la variación del parámetro en un 10% y como w_f el peso final

en el caso inicial, este incremento porcentual se obtiene como $\frac{w_{fp} - w_f}{0,1 \cdot w_f}$.

^c Trazamos una trayectoria paralela de los precios a la del caso base.

Tabla 5. Análisis de sensibilidad para diferentes parámetros del modelo. Cultivo en el Mediterráneo. Caso base: tamaño de granja de 200 tm. (Tabla 4); w_{fp} =nueva talla final; J_p^* =nuevos beneficios descontados óptimos.

Parámetro	Talla		Beneficio	
	w_{fp} (g.)	Variación porcentual	J_p^* (€)	Variación porcentual
(caso base)	504,512		72.391,91	
p_f	494,511	-0,1982	38.993,06	-4,6136
p_L	500,928	-0,0710	54.835,14	-2,4252
c_s	504,521	0	54.662,05	-2,4252
c_o	481,248	-0,4611	24.176,91	-9,9999
p	520,579	0,3185	161.455,89	12,3030
L	500,928	-0,0710	54.835,14	-2,4252
w_0	505,268	0,0150	74.333,18	0,2682
H	497,976	-0,1295	57.539,70	-2,0516

Varios comentarios se extraen de los resultados del análisis de sensibilidad. En primer lugar, destacamos en ambas tablas cómo las perturbaciones en los parámetros no afectan muy sensiblemente a las tallas óptimas calculadas en la sección anterior. Por tanto, podemos considerar que las recomendaciones de diferenciación en el producto se mantienen para circunstancias económicas y productivas diferentes.

Sin embargo, los beneficios descontados óptimos se ven claramente afectados para pequeñas variaciones en las condiciones del sistema. En este sentido, comparando las Tablas 4 y 5 observamos que los indicadores de sensibilidad de las empresas situadas en el Mediterráneo, con temperaturas medias más frías, son más altos para la generalidad de los parámetros y condiciones iniciales del modelo que el caso canario. Esto indica que perturbaciones negativas en alguno de los parámetros influyen en mayor medida a granjas situadas en el área peninsular que a las situadas en el área canaria, donde se mantienen resultados más estables. Por tanto, podemos decir que la empresa de acuicultura en el área insular goza de una mayor estabilidad ante perturbaciones del entorno. Esto puede considerarse también como una ventaja diferenciada con respecto a los competidores mediterráneos.

De forma más específica, los parámetros más sensibles en los rendimientos de la empresa son el precio de mercado (p), el parámetro definido como otros costes por unidad de peso (c_o) y el precio del alimento (p_f), independientemente de la zona de cultivo. Por un lado, el precio del producto es lógicamente el elemento más influyente. Pequeñas variaciones de este factor se ven multiplicadas por 12 en los rendimientos de la empresa, de manera que puede ocasionar que empresas con rendimientos no muy elevados empiecen a incurrir en beneficios negativos. De hecho, como puede observarse en la cuarta columna de la Tabla 4 y 5, si se produjera una disminución de un 10% en el precio fijado a la dorada, una empresa situada en la zona mediterránea o canaria de producción anual de 200 tm. entraría en pérdidas. Esta alta sensibilidad explica la situación delicada que actualmente está atravesando el sector ante el descenso generalizado de precios.

Por otro lado, el precio del alimento también se manifiesta como un elemento destacado, al suponer una muy buena parte de los costes totales empresa, siendo el efecto en Canarias (-2,6044) aproximadamente la mitad que en la región peninsular

(-4,6136). La alta sensibilidad de los otros costes, con un efecto multiplicativo cercano a 10 en el Mediterráneo puede ser debida a que incorpora, además de los costes sanitarios y de mantenimiento, aquellos debidos a fluctuaciones en la temperatura del agua, no recogida en la formulación inicial del modelo.

El resto de los parámetros presentan sensibilidades más moderadas. Es de destacar que la tasa de descuento h no es en absoluto uno de los factores más influyentes en los rendimientos de la empresa, a pesar de la señalada importancia que se le daba en otros resultados sobre optimización dinámica en acuicultura para el salmón y dorada (Bjorndal 1988, Arnason 1992, Mistaen y Strand 1999). Estos trabajos, a diferencia de nuestro modelo, no incluyen un modelo de crecimiento específico y contrastado empíricamente de las especies a estudiar por lo que podemos considerar que la función de producción, que incorpora factores como el racionamiento o la temperatura, no estaba ampliamente especificada. Menos llamativos en comparación con otros estudios son las sensibilidades de los parámetros que definen el coste del trabajo. A pesar de ser un factor productivo esencial en cualquier empresa, sus perturbaciones no alteran excesivamente ni el tamaño óptimo final ni los beneficios obtenidos.

6. Conclusiones

La resolución del modelo de optimización aporta algunos criterios aplicables en la gestión del cultivo que no hemos encontrado hasta ahora en la literatura científica especializada. Uno de ellos es la trayectoria óptima del racionamiento a lo largo de un ciclo de cultivo. Se recomienda para cualquier tamaño de granja un racionamiento siempre por debajo del nivel de saturación, aunque más elevado a tallas pequeñas, reduciéndola a medida que el pez engorda. Estos racionamientos han de ser además más elevados para el caso de una empresa situada en aguas cálidas y estables, como las que encontramos en las aguas de Canarias.

La ubicación de la empresa es también un factor determinante para la elección de la estrategia de producción más adecuada. Así, las tallas finales de cultivo recomendadas son claramente diferentes según en la latitud en la que se encuentre la granja. Los factores que intervienen en esta diferenciación son las condiciones

climáticas, más adecuadas en las aguas canarias, y la lejanía, que supone unos mayores costes de transporte para el cultivo insular. Ello genera una estrategia óptima de producción en las islas de tallas de 700 g. (Extralarge), que alcanzan mejor cotización en el mercado, frente a las tallas inferiores (Normal) obtenidas en el caso del cultivo en el Mediterráneo. Por otro lado, la rentabilidad de las empresas es también diferente, mostrando mejores resultados las granjas situadas en la región atlántica.. No obstante, estas recomendaciones están lógicamente sujetas a la capacidad del mercado de absorber producciones de este tipo.

El precio del producto es el elemento más influyente en la rentabilidad de la empresa en ambos escenarios. Ligeros descensos sobre el precio actual ocasionarían que las granjas de menor tamaño incurran en pérdidas. Esto se manifiesta de forma más destacada en el escenario mediterráneo que en el canario, que presenta mayor robustez. Perturbaciones en el precio del alimento afecta considerablemente los resultados económicos de la empresa, en mayor medida incluso que otros factores, como la tasa de descuento.

Los resultados anteriores han de observarse con la lógica cautela que se ha de tener frente a un modelo que simplifica la realidad. Así, por ejemplo, no hemos incluido en el problema cuestiones como la densidad de cultivo, de tanta importancia en la práctica real. Además, la consideración de temperatura media constante en ambas regiones, necesaria para hallar estas primeras soluciones, influye en la respuesta del modelo. De hecho, la excesiva sensibilidad de los otros costes puede así ponerlo de manifiesto. No obstante, la robustez que se obtiene tanto en la trayectorias óptimas de racionamiento como en las tallas finales para diferentes tamaños de granja ubicadas en ambas regiones validan los resultados expuestos.

Este trabajo presenta una aplicación de los problemas de optimización dinámica a la gestión de un sistema de cultivo de la dorada. La utilización de otros métodos también completarán sin duda las necesidades de investigación que el sector actualmente demanda. Por otro lado, esquemas como el expuesto aquí pueden extenderse a otros ámbitos productivos y económicos de características similares, como la cría general de especies en cautividad, no sólo acuáticas, o la agricultura.

7. Bibliografía

Anderson, J.L. (1985): Private aquaculture and commercial fisheries: bioeconomics of salmon ranching. *Journal of Environmental Economics and Management*, Vol. 12, 353-370.

Arnason, R. (1992): Optimal Feeding Schedules and Harvesting Time in Aquaculture. *Marine Resource Economics*, Vol. 7(1), 15-35.

Azevedo, P.A., C.Y. Cho, S. Leeson and D. P. Bureau. (1998): Effects of feeding level and water temperature on growth, nutrient and energy utilization and waste outputs of rainbow trout (*Oncorhynchus mykiss*). *Aquatic Living Resources* Vol. 11, 227-238.

Barnabé, G. (1991): *Acuicultura, Vol. II*. Omega, España.

Bjorndal, T. (1988): Optimal harvesting of farmed Fish. *Marine Resource Economics*, Vol. 5, 139-159.

Brett, J.R. (1979): Environmental Factors and Growth. In: *Fish Physiology, Vol. 8* (eds. W.S. Hoar, D.J. Randall and J.R. Brett), pp 599-667. Academic Press, London.

Brett, J.R. and Groves, R.D.D. (1979): Physiological Energetics. In: W.S. Hoar, D.J. Randall and J.R. Brett (Editors), *Fish Physiology, Vol. 8*, Academic Press, London. pp 279-347.

Cacho, O.J. (1990): Protein and Fat Dynamics in Fish. A Bioenergetic Model Applied to Aquaculture. *Ecological Modelling*, Vol. 50, 33-56.

Cacho, O.J., Hatch, U. and Kinnucan, H. (1991): Optimal control of fish growth. *American Journal of Agricultural Economics*, Vol. 73, 174-183.

Cho, C.Y. and Bureau, D.P. (1998): Development of bioenergetic models and the *Fish-PrFEQ* software to estimate production, feeding ration and waste output in aquaculture. *Aquatic Living Resources* 11, Vol. 199-210.

Clark, C.W. (1985): *Bioeconomic Modelling and Fisheries Management*. John Wiley and Sons.

FAO (1997): *The World State of Fishery and Aquaculture*. Roma, Italy.

FAO (2000): *The State of the World Fisheries and Aquaculture*. Roma, Italy.

Gasca-Leyva, E., León, C., Hernández, J., Vergara, J.M. (2001): Análisis bioeconómico del impacto de la localización en el cultivo de la dorada. *Economía Agraria y Recursos Naturales* Vol. 1(1), 55-76.

Glasser, F. and Oswald, M. (2001): High stocking densities reduce *Oreochromis niloticus* yield: model building to aid the optimisation of production. *Aquatic Living Resources* Vol. 14, 319-326.

Hatch, U. and Tie, C.F. (1997): A survey of aquaculture production economics and management. *Aquaculture Economics & Management*, Vol. 1, 1, 13-28

Hirsch and Smale (1974): Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y álgebra lineal. *Alianza Universidad Textos*.

JACUMAR (1999): *Estadísticas de Producción en España*. MAPyA, España.

Lem, A. (1999): Aquaculture and Trade. In: *Conference on Aquaculture, Economics and Marketing*. FAO 2000.

León, C.J., Hernández, J.M. and Gasca-Leyva, E. (2001): Cost optimization and input substitution in the production of gilthead seabream. *Aquaculture Economics and Management*, Vol. 5 (3-4), 147-170.

Léonard, D. and Van Long, N. (1992): *Optimal Control Theory and Static Optimization in Economics*. Cambridge University Press, UK.

Masser, M.P., Grant, W.E., Neill, W.H. and Robinson, E.H. (1991): A simulation model representing effects on dietary/protein ratio and water temperature on growth of channel catfish (*Ictalurus punctatus*). *Ecological Modelling* Vol. 53: 17-35.

Mistiaen, J.A. and Strand, I. (1999): Optimal Feeding and Harvest Time for Fish Weight-Dependent Prices. *Marine Resource Economics* Vol. 13, 231-246.

Muller-Feuga, A., (1990): Modélisation de la croissance des poissons en élevage. Rapports scientifiques et techniques de l'IFREMER. Institut Français de Recherche pour l'Exploitation de la Mer.

Paspatis, M. Maragoudaki, D., Kentouri, M. (2000): Self-feeding activity patterns in gilthead sea bream (*Sparus Aurata*), red porgy (*Pagrus pagrus*) and their reciprocal hybrids. *Aquaculture*, Vol. 190, 389-401.

Porter, C.B., Krom, M.D. and Gordin, H. (1986): The effect of water quality on the growth of *Sparus Aurata* in Marine Fish Ponds. *Aquaculture*, Vol. 59: 299-315.

Stephanis, J. (1996): Mediterranean aquaculture industry trends in production, markets and marketing. *CIHEAM Cahiers Options Méditerranéennes*, Vol. 17, 93-102.

Tacon, A.G.J. (1997): Production and production trends In: *FAO Fisheries Circular No. 886. Review of the State of World Aquaculture*. Roma, Italy.

APÉNDICE A

En este apéndice presentamos las ecuaciones y parámetros que gobiernan el modelo de crecimiento (1). Más detalles pueden ser encontrados en León et al. (2001).

Tabla A.1. Ecuaciones que intervienen en el modelo de crecimiento.

Descripción	Expresión
Función de crecimiento	$\frac{dw}{dt} = \Gamma f_1(w) f_2(\vartheta) f_3(r)$
Función de peso	$f_1(w) = w^m$
Función de temperatura	$f_2(\theta) = D(e^{\alpha(\theta_M - \theta)} - e^{\beta(\theta_M - \theta)})$
Función de ración	$f_3(r) = \frac{Z(r)}{Z(r_c)}$
Índice de conversión normalizado	$Y(r) = r \left(1 + \frac{c(1-r)^2}{r_m(1-r_m)^2(r-r_m)} \right)$
Tasa de crecimiento normalizada	$Z(r) = \frac{r}{Y(r)}$
Transformación del índice de conversión	$I_C(w, \vartheta, r) = Y(r)g(w, \theta)$
Índice de conversión empírico	$g(w, \theta) = H(\theta)w^{\gamma(\theta)}$

Tabla A.2. Parámetros que intervienen en el modelo de crecimiento, descripción, valor y fuente.

Parámetro	Descripción	Valor	Fuente
m	Parámetro función de crecimiento	0.23	León et al. (2001)
ϑ_M	Temperatura letal máxima	32.9°C	Ravagnan (1984)
α	Parámetro función de temperatura	-0.12	Muller-Feuga (1990)
β	Parámetro función de temperatura	-0.15	Muller-Feuga (1990)
D	Parámetro de ajuste de temperatura	4.93	Calibración
r_0	Tasa de racionamiento óptimo	0.50	Brett and Groves (1979)
r_m	Tasa de racionamiento de mantenimiento	0.12	Muller-Feuga (1990)
r_c	Tasa de racionamiento de cultivo	0.80	Muller-Feuga (1990)
Γ	Parámetro de influencia de otros factores	1	Calibración
$H(\theta)$	Parámetro de ajuste del índice de conversión	D.T. ^a	León et al. (2001)
$\gamma(\theta)$	Parámetro de ajuste del índice de conversión	D.T. ^a	León et al. (2001)

^a Depende de la temperatura.

APÉNDICE B

1. Cálculo de las condiciones de transversalidad del problema (9).

Dada $\psi(t)$ la variable coestado del problema (9), las condiciones de transversalidad vienen dadas por

$$\psi(T) = e^{hT} \frac{\partial \phi}{\partial w(T)} \quad (\text{B.1})$$

con $\phi = e^{-hT} w(T)p(w(T)) - c_s - e^{-\delta T} c_\tau w(T)$. De aquí se deduce que

$$\psi(T) = p(w(T))w(T) + p(w(T)) - e^{iT} c_\tau. \quad (\text{B.2})$$

La segunda condición de transversalidad viene dada por la resolución de la expresión

$$e^{-hT} H_1(T) + \frac{\partial \phi}{\partial T} = 0, \quad (\text{B.3})$$

para H_1 el hamiltoniano expresado en (10) suprimiendo los dos últimos sumandos.

Estas expresiones se calculan separadamente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial T} &= e^{-hT} \left[-p(w(T))w(T)h + \dot{p}(w(T))\dot{w}(T)w(T) + p(w(T))\dot{w}(T) - c_\tau e^{iT} (-\delta w(T) + \dot{w}(T)) \right] \\ H_1(T) &= -p_f IC(w(T), \theta_0, r(T))\dot{w}(T) - c_0 w(T) - Ke^{\delta T} + \psi(T)\dot{w}(T) \\ &= -p_f IC(w(T), \theta_0, r(T))\dot{w}(T) - c_0 w(T) - Ke^{\delta T} + (\dot{p}(w(T))w(T) + p(w(T)) - e^{iT} c_\tau)\dot{w}(T) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

por lo que, aplicando (B.3), igualando y simplificando la expresión resultante, se tiene que

$$\frac{\dot{w}(T)}{w(T)} = \frac{c_0 + hp - c_\tau \delta e^{iT}}{2(\dot{p}w + p - e^{iT} c_\tau) - p_f IC} + \frac{p_L L e^{\delta T}}{wN_0 [2(\dot{p}w + p - e^{iT} c_\tau) - p_f IC]}. \quad (\text{B.5})$$

Por facilidad en la notación, hemos suprimido en el segundo miembro de esta expresión el argumento de las variables.

2. Diagrama de fases (w,ψ).

La representación del diagrama de fases (w,ψ) está basada en el cálculo de las isoclinas del sistema (14). Estas son:

-Isoclina $\dot{w} = 0$.

Igualando la ecuación de crecimiento a cero, obtenemos dos posibilidades: a) $f_1(w)=0$, que como es una función logaritmo lineal, se verifica si y sólo si $w=0$; b) $f_3(r)=0$, que se verifica si $r=r_m$, ración de mantenimiento. Incorporando la primera ecuación de (12) resulta $\psi = p_f \cdot g(w, \theta_0) / Z'(r_m)$, de la que derivando obtenemos $\psi_w > 0$, $\psi_{ww} < 0$, por lo que la isoclina en el espacio de fases (w, ψ) es creciente y cóncava, como ilustra la Figura 1.

-Isoclina $\dot{\psi} = 0$.

Esta isoclina no es posible calcularla analíticamente debido a la complejidad de las funciones que la integran. Sin embargo, podemos hacer un estudio del flujo para distintos valores de la ración. Para ello desarrollamos la ecuación diferencial de ψ sustituyendo las expresiones de $f_1(w)$ y $g(w, \theta_0)$, obteniendo la expresión

$$\dot{\psi} = h\psi + \frac{p_f \Gamma f_2(\theta_0) H(\theta_0)}{Z(r_c)} w^{m+\gamma(\theta_0)-1} \left(\gamma(\theta_0)r + mr - m \frac{Z(r)}{Z'(r)} \right) + c_0 \quad (\text{B.6})$$

En primer lugar, se puede demostrar que la expresión entre paréntesis admite un único nivel de ración $r^* > r_m$ tal que dicha expresión se anula. El signo de la derivada de la variable de coestado dependerá de este nivel de ración.

- i) $0 < r \leq r_m$. En este caso el segundo sumando de la ecuación de ψ es positivo, por lo que el flujo en ψ es positivo.
- ii) $r_m < r < r^*$. Para este rango de valores el flujo es positivo, aunque el segundo sumando se aproxima a cero a medida que nos acercamos al nivel r^* .
- iii) $r^* \leq r < 1$. En $r=r^*$ la ecuación es $\dot{\psi} = h\psi + c_0$, que es siempre positiva y creciente en w . No obstante, para niveles de ración superiores, el flujo es negativo en niveles de peso cercanos a cero a partir de un umbral determinado.

Entonces, la isoclina $\dot{\psi} = 0$ es una curva creciente en w dentro del plano de fases (w, ψ) y está situada por encima de la curva $r=r^*$, tal y como se ilustra en la Figura 1. La concavidad o convexidad de la curva depende de los valores de los exponentes $\gamma(\theta_0)$ y m .