



Francisco Javier Elorza Tenreiro, Secretario del Departamento de Matemática Aplicada y Métodos Informáticos de esta Escuela Técnica Superior,

**CERTIFICA:** Que el Profesor D. Rafael Montenegro Armas ha impartido en este Departamento el Seminario sobre los Métodos Adaptativos de Refinamiento Estructurado . Asimismo dicho Seminario será incluido en la publicación "Seminario de Análisis Numérico Curso 90-91".

Y para que así conste, a petición del interesado y a los efectos oportunos, expido el presente Certificado en Madrid a ocho de noviembre de mil novecientos noventa.

# SOBRE LOS METODOS ADAPTATIVOS DE REFINAMIENTO ESTRUCTURADO

*Rafael Montenegro Armas*

Departamento de Matemáticas

Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

## RESUMEN

En este trabajo se pretende mostrar la eficacia del método de elementos finitos adaptativo de refinamiento de mallado, utilizando mallas estructuradas, en 1-D y 2-D.

Se presentan diferentes estrategias de refinamiento y se aplican principalmente a formulaciones del problema de convección-difusión evolutivo, basadas en el método de las características, tras realizar un estudio numérico de las mismas que nos conduce a la elección del método y a la obtención de las restricciones sobre el paso de tiempo a medida que se refina la malla.

## 1. INTRODUCCION

En la actualidad, la mayor parte de los programas que utilizan el método de elementos finitos (M.E.F.), para la resolución de problemas de contorno que presenten una cierta singularidad en la solución, se apoyan en algún tipo de técnicas adaptativas; ver por ejemplo *Babuska y otros* [2] y [4], y *Zienkiewicz y otros* [9] y [10].

Podemos plantearnos entre las técnicas de refinamiento de mallado (refinamiento en  $h$ ), aquellas que trabajan con mallas estructuradas, consideradas en este trabajo, frente a las no estructuradas. Entre las principales ventajas que poseen las primeras se pueden destacar: la mayor facilidad para resolver mediante el método multimalla el sistema de ecuaciones asociado al problema, una mayor rapidez en el proceso de refinamiento y el no tener que recalcular las matrices elementales de los elementos que no se refinan, cuando tratamos un problema lineal. Ello es debido a la estructura de datos asociada al proceso de refinamiento en los diferentes niveles de malla; de esta forma, hablaremos de elemento "padre" e "hijos", al igual que cara "padre" e "hijas", etc.

Por otra parte, es fundamental en un método adaptativo disponer de una estimación del error global cometido con nuestra solución numérica, o al menos disponer de indicadores de error fiables que nos señalen dónde debe ser refinada la malla. En la actualidad, aún no se dispone de éstos para cualquier tipo de problema. Este aspecto ha sido estudiado con resultados más satisfactorios en el caso de problemas elípticos.

El método adaptativo de refinamiento de mallado puede ser considerado por sí solo, o

combinarse con el llamado refinamiento en  $p$ , una vez que hemos obtenido una malla suficientemente refinada en  $h$ .

## 2. REFINAMIENTO EN 1-D

Intuitivamente, se observa que la aproximación de la solución, obtenida mediante el método de los elementos finitos, no es la misma en todos los elementos del mallado. Esta dependerá entre otros aspectos del diámetro del elemento  $h_1$ ; si trabajamos con elementos lineales de dos nodos, la solución aproximada  $u_h = u_h(x)$  en dicho elemento será lineal, con lo que si en éste la solución exacta  $u = u(x)$  sufre grandes variaciones entorno a la aproximada, se cometerá un error superior que en otros elementos en los que la solución pueda ser fielmente aproximada por una recta. Las técnicas adaptativas de refinamiento de mallado localizan automáticamente las zonas del dominio donde existe una mala aproximación de la solución, e introduce en éstas un mayor número de elementos para mejorarla ( $h$ -convergencia), según una estrategia de refinamiento.

### 2.1. Estimación del error

Se nos plantea el problema de la evaluación del error cometido  $e = e(x) = u_h(x) - u(x)$  en función de la discretización realizada. Autores tales como *Babuska y Rheinboldt* [2], [3]; *Kelly, Gago y Zienkiewicz* [9], [10], estiman el error cometido en la norma de la energía  $\|e\|_E$ , en función de las aportaciones  $e_1$  de los  $N$  elementos del mallado, para un problema elíptico. Con elementos lineales de dos nodos resulta:

$$\|e\|_E^2 \approx \|e_e\|_E^2 = \sum_{i=1}^N e_1^2 = \sum_{i=1}^N \frac{h_1^2}{12 K_{\min}} \int_{\Omega_1} r^2 dx \quad (1)$$

donde  $e_e = e_e(x)$  es el llamado error estimado que nos aproxima el error exacto  $e = e(x)$ ;  $h_1$  es el diámetro del elemento  $\Omega_1$ ;  $K_{\min}$  es el valor mínimo de  $K = K(x)$  en  $\Omega_1$ ; y  $r = r(x)$  es el residuo de la ecuación diferencial. Para nuestro problema:

$$r(x) = - \frac{d}{dx} \left[ K(x) \frac{du_h(x)}{dx} \right] + v(x) \frac{du_h(x)}{dx} + b(x)u_h(x) - f(x)$$

Cada elemento  $\Omega_1$  aporta a nuestra medida global del error un valor llamado indicador de error  $e_1$  que además de ser útil para estimar el error global cometido en nuestra discretización, nos sirve para comparar los errores cometidos en cada uno de los elementos.

Podemos preguntarnos cuál es la exactitud con que el error estimado  $e_e$  aproxima al error exacto  $e$ . Para ello se define un coeficiente de efectividad  $\theta$ , que nos evalúa el cociente entre ambos, en la norma de la energía:  $\theta = \|e_e\|_E / \|e\|_E$ . Un buen estimador de error verifica al menos que: a)  $\theta \geq 1$ , b)  $\theta \rightarrow 1$  cuando  $h_1 \rightarrow 0$ . Si se verifica (a), podemos parar el proceso de refinamiento adaptativo atendiendo exclusivamente al error relativo estimado  $\|e_e\|_E / \|u_h\|_E$ , ya que aseguramos un error exacto menor. Si se verifica (b), se dice que el estimador de error es asintóticamente exacto.

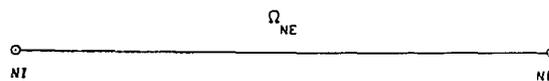
### 2.2. Estrategias de refinamiento

Nos planteamos cómo definir el proceso adaptativo de refinamiento de malla, centrándonos en el paso de una malla  $M_n$  a la malla refinada  $M_{n+1}$ . Para ello se propone responder, lo más eficazmente posible a: ¿Qué elementos se van a refinar?, ¿Cuál es el grado de refinamiento máximo? y ¿Cuál es el grado de refinamiento de cada elemento?.

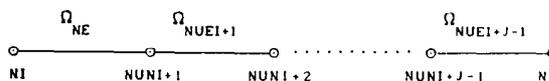
Se han considerado distintas opciones, ver Montenegro [11], para responder a cada una de estas preguntas, una vez calculados los indicadores de error  $e_i$  en cada elemento  $\Omega_i$  de la malla  $M_n$ , atendiendo a la distribución estadística de éstos y a ciertos parámetros de control introducidos al programa.

Sea el elemento  $\Omega_{NE}$  (NE: numeración global del elemento), perteneciente a la malla  $M_n$ , cuyos nodos poseen una numeración global dada por NI y NF, y consideremos que se ha determinado dividirlo en J subelementos. Para definir la numeración y conexiones nodales de los nuevos subelementos debemos conocer la numeración global del último nodo introducido, NUNI, y la del último elemento introducido, NUEI, antes de comenzar a refinar  $\Omega_{NE}$ . El proceso se resume en el siguiente esquema:

\* Malla  $M_n$  :

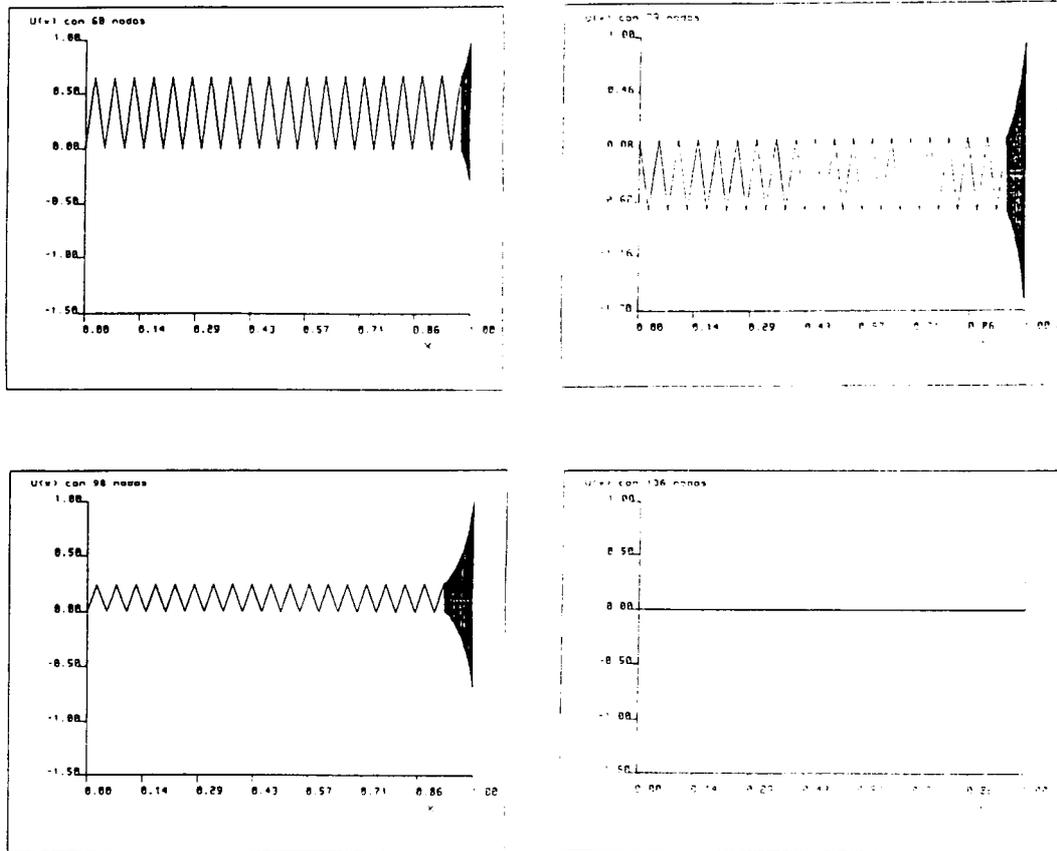


\* Malla  $M_{n+1}$  :



**2.3. Aplicaciones numéricas**

Se han contrastado diferentes estrategias de refinamiento en aplicaciones con fuertes singularidades partiendo de una malla inicial regular de tres nodos, observando que el coeficiente de efectividad  $\theta$  verifica las propiedades anteriormente indicadas, y mejora a medida que nos acercamos a la solución exacta. En las siguientes figuras (1) se exponen los resultados obtenidos, utilizando exclusivamente técnicas adaptativas con el M.E.F. estandar, en cuatro niveles de malla, para el problema de convección-difusión :  $-eu''+u'=0$  en  $(0,1)$ , con  $u(0)=0$  y  $u(1)=1$ . La solución numérica obtenida con 136 nodos es muy próxima a la exacta.



Figuras 1.- Soluciones obtenidas en diversas etapas adaptativas.

### 3. REFINAMIENTO EN 2-D

#### 3.1. Estimación del error

El estudio de la estimación del error dependerá en general del tipo de problema a resolver, y es un tema abierto en la actualidad. Autores tales como Babuska y Rheinboldt [2], [3] y [4], o Zienkiewicz, Kelly y Gago [9] y [10] han realizado un considerable esfuerzo en este estudio, para problemas elípticos de segundo orden en general. Trabajando con triángulos de tres nodos e interpolación lineal, resulta:

$$\|e\|_E^2 \propto \|e_o\|_E^2 = \sum_{i=1}^N \epsilon_i^2 = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{h_i^2}{24 K_{\min}} \int_{\Omega_i} r^2 d\Omega + \frac{h_i}{24 K_{\min}} \int_{\Gamma_i} \left[ K \frac{\partial u_h}{\partial n} \right]^2 d\Gamma \right] \quad (2)$$

donde  $h_i$  es el diámetro del elemento  $\Omega_i$  de frontera  $\Gamma_i$ ;  $K_{\min}$  es el valor mínimo de la difusión  $K=K(x)$  en  $\Omega_i$ ;  $\left[ K \frac{\partial u_h}{\partial n} \right]$  representa el salto de flujo de la solución numérica  $u_h = u_h(x)$ , obtenida en la malla a refinar, en la frontera  $\Gamma_i$  de  $\Omega_i$ ;  $r=r(x)=-\nabla \cdot (K \nabla u_h) - f$ , es el residuo de la ecuación.

No obstante, aunque no se disponga de una estimación de error para otros problemas, se pueden plantear posibles indicadores de error  $\epsilon_i$ , que nos muestren de forma efectiva los elementos que deben ser refinados en cada etapa del proceso adaptativo.

#### 3.2. Estrategias de refinamiento

Una vez conocida la distribución de los indicadores de error  $\epsilon_i$  ( $i=1,2,\dots,N$ ), siendo  $N$  el número de elementos de la malla  $M_n$ , estamos en disposición de determinar los elementos que deben ser refinados, utilizando criterios estadísticos de dicha distribución, o mediante la utilización de un parámetro  $\gamma \in [0,1]$ , propuesto por diferentes autores. Este valor se fija normalmente a priori para todas las etapas del proceso de refinamiento, tal que se refinan los elementos cuyo indicador de error sea superior o igual que  $\gamma$  veces el valor máximo de los indicadores de los elementos de  $M_n$ .

En 2-D trabajamos con elementos triangulares de tres nodos e interpolación lineal, y utilizaremos el algoritmo de refinamiento propuesto por Rivara [16] y [17], que divide el triángulo a refinar en cuatro subtriángulos introduciendo tres nuevos nodos en el punto medio de los lados, y uniendo el nodo situado en el lado mayor con el vértice opuesto y con los otros dos nuevos nodos. Una vez refinados todos los elementos que indique la estrategia, realizamos un refinamiento adicional según la técnica de Rivara para asegurar la conformidad del mallado.

**4. PROBLEMA DE CONVECCION-DIFUSION**

En este apartado se presenta parte del estudio realizado en [11] y [12], sobre el problema de convección-difusión evolutivo y estacionario.

**4.1. Formulación implícita y explícita**

Consideramos el problema de convección-difusión definido en un dominio  $\Omega$  bidimensional, de frontera  $\Gamma$  :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla u - \nabla \cdot (K \nabla u) = f \tag{3}$$

siendo  $u=u(\vec{x},t)$  la solución en un elemento de fluido situado en  $\vec{x}=x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j}$  en el instante  $t$ , y que posee una velocidad  $\vec{v}=\vec{v}(\vec{x})=v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j}$ ; estudiamos el modelo lineal,  $K=K(\vec{x})$ ;  $f=f(\vec{x},t)$  son las fuentes externas. Dicha ecuación está sometida a unas condiciones de contorno e iniciales que aseguren la existencia y unicidad de solución. Desarrollemos esta formulación clásica utilizando el método de las características. La ecuación (3) resulta:

$$\frac{du}{dt} - \nabla \cdot (K \nabla u) = f \quad \text{en } \Omega \tag{4}$$

Un elemento de fluido que se encuentra en un instante  $t_n$  en un punto  $P$ , de posición definida por  $\vec{x}$ , al trasladarse con una velocidad  $\vec{v}$ , después de un tiempo  $\Delta t$  pasará a la posición  $P$ , definida por  $\vec{x}$ , en el instante  $t_{n+1}$ , tal que  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$  y  $\Delta \vec{x} = \vec{x} - \vec{x}$ .

Aproximando la derivada total respecto del tiempo de la magnitud  $u$  mediante la expresión:

$$\frac{du}{dt} \approx \frac{u(\vec{x}, t_{n+1}) - u(\vec{x}, t_n)}{\Delta t} = \frac{u^{n+1}(\vec{x}) - u^n(\vec{x})}{\Delta t} \tag{5}$$

y sustituyendo ésta en la ecuación (4), según una aproximación de Euler implícita, se obtiene:

$$u^{n+1}(\vec{x}) - \Delta t \nabla \cdot (K(\vec{x}) \nabla u^{n+1}(\vec{x})) = \Delta t f^{n+1}(\vec{x}) + u^n(\vec{x}) \tag{6}$$

La ecuación anterior podría ser tratada mediante la técnica de los elementos finitos, pero se nos plantearía un problema en cada paso de tiempo en la evaluación de  $u^n(\vec{x})$ , ya que tendríamos que buscar en qué elemento del dominio  $\Omega$  discretizado se encontraba el elemento de fluido en un instante anterior. Pretendemos poner toda la ecuación (6) dependiente sólo de lo que ocurre en el

SOBRE LOS METODOS ADAPTATIVOS DE REFINAMIENTO ESTRUCTURADO

punto P en todo instante. Para ello, comenzamos aproximando  $\vec{x}$  supuesto conocido  $\vec{x}$ . Para todo  $i=1,2$ :

$$\underline{x}_i = x_i(t_n) = x_i(t_{n+1} - \Delta t) = x_i - v_i(\vec{x}) \Delta t + \frac{\Delta t^2}{2} \vec{v}(\vec{x}) \cdot \nabla v_i(\vec{x}) + O(\Delta t^3) \quad (7)$$

de donde podemos obtener la expresión de  $\Delta x_i = x_i - \underline{x}_i$ , que utilizaremos para aproximar  $u^n(\underline{x})$  mediante otro desarrollo,

$$\begin{aligned} u^n(\underline{x}) &= u^n(\vec{x} - \Delta \vec{x}) = u^n(x_1 - \Delta x_1, x_2 - \Delta x_2) = \\ &= u^n(\vec{x}) - \sum_{i=1}^2 \Delta x_i \frac{\partial u^n(\vec{x})}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \left[ 2 \Delta x_1 \Delta x_2 \frac{\partial^2 u^n(\vec{x})}{\partial x_1 \partial x_2} + \sum_{i=1}^2 \Delta x_i^2 \frac{\partial^2 u^n(\vec{x})}{\partial x_i^2} \right] + O(\|\Delta \vec{x}\|^3) \end{aligned} \quad (8)$$

Sustituyendo en la ecuación anterior las expresiones de  $\Delta x_i$  obtenidas a partir de (7), y despreciando a partir de los términos de tercer orden, resulta:

$$u^n(\underline{x}) = u^n(\vec{x}) - \Delta t \sum_{i=1}^2 v_i(\vec{x}) \frac{\partial u^n(\vec{x})}{\partial x_i} + \frac{\Delta t^2}{2} \sum_{i=1}^2 (\vec{v}(\vec{x}) \cdot \nabla v_i(\vec{x})) \frac{\partial u^n(\vec{x})}{\partial x_i} + \frac{\Delta t^2}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 v_i(\vec{x}) v_j(\vec{x}) \frac{\partial^2 u^n(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j} + O(\Delta t^3)$$

Finalmente, sustituyendo esta expresión en la ecuación (6), obtenemos la formulación que nos aproxima implícitamente el régimen transitorio del proceso de convección-difusión; de forma simplificada tenemos,

$$u^{n+1} - \Delta t \vec{\nabla} \cdot [K \vec{\nabla} u^{n+1}] = \Delta t f^{n+1} + u^n - \Delta t \vec{v} \cdot \nabla u^n + \frac{\Delta t^2}{2} \sum_i (\vec{v} \cdot \nabla v_i) \frac{\partial u^n}{\partial x_i} + \frac{\Delta t^2}{2} \sum_{i,j} v_i v_j \frac{\partial^2 u^n}{\partial x_i \partial x_j} \quad (9)$$

donde todos los términos están evaluados en un mismo punto P, definido por  $\vec{x}$ . El último término aportado en el segundo miembro equivale a una difusión artificial, y el penúltimo aparece debido a que hemos realizado una aproximación de segundo orden de la característica dada por la ecuación (7).

Si en lugar de haber realizado una aproximación de Euler implícita en la discretización temporal de la ecuación (4), realizamos una aproximación de Euler explícita, la formulación evolutiva (9) se transforma en:

$$u^{n+1} = \Delta t \vec{\nabla} \cdot [K \vec{\nabla} u^n] + \Delta t f^n + u^n - \Delta t \vec{v} \cdot \nabla u^n + \frac{\Delta t^2}{2} \sum_i (\vec{v} \cdot \nabla v_i) \frac{\partial u^n}{\partial x_i} + \frac{\Delta t^2}{2} \sum_{i,j} v_i v_j \frac{\partial^2 u^n}{\partial x_i \partial x_j} \quad (10)$$

**4.2. Estudio numérico en 1-D**

Trabajamos con las formulaciones (9) y (10) como esquemas implícito y explícito, particularizadas en 1-D, con coeficientes constantes y sin fuentes externas. Estudiamos diversas posibilidades según el tipo de integración (reducida o consistente) que se realice sobre los términos  $u^{n+1}$  y  $u^n$ . Exponemos a continuación los principales resultados obtenidos sobre estabilidad y consistencia, trabajando con una malla regular de elementos lineales de diámetro  $h$ , con dos nodos.

**4.2.1. Estabilidad**

Realizamos dicho estudio en el sentido de Von Neuman, obteniendo las siguientes cotas del número de Courant,  $C=v\Delta t/h$ , en función del número de Peclet,  $P_e =vh/K$ ,

$$C \leq \left( \frac{1}{P_e^2} + \rho \right)^{1/2} + (-1)^m \frac{1}{P_e} \tag{II}$$

donde  $\rho$  y  $m$  toman los siguientes valores según la formulación e integración escogida:

**A) FORMULACION EXPLICITA:  $m=1$**

- A.1) Integración reducida en  $u^{n+1}$  y  $u^n$ :  $\rho=1$
- A.2) Integración reducida en  $u^{n+1}$  y consistente en  $u^n$ :  $\rho=2/3$
- A.3) Integración consistente en todos los términos:  $\rho=1/3$

**B) FORMULACION IMPLICITA:  $m=2$**

- B.1) Integración reducida en  $u^{n+1}$  y  $u^n$ :  $\rho=1$
- B.2) Integración reducida en  $u^{n+1}$  y consistente en  $u^n$ :  $\rho=2/3$
- B.3) Integración consistente en todos los términos:  $\rho=1/3$

Fijado un determinado valor de la velocidad,  $v$ , y la difusión,  $K$ , al ir disminuyendo el diámetro de los elementos,  $h$ , en los procesos adaptativos de refinamiento de malla, decrece el valor del número de Peclet local de los elementos refinados. Por esta razón, desde el punto de vista de estabilidad serán mejores los métodos implícitos que los explícitos, para ser combinados con técnicas adaptativas. Podemos deducir que el método que posee un mejor comportamiento, en cuanto a estabilidad, es el (B.1).

**4.2.2. Consistencia**

Este análisis lo realizamos comparando el orden de aproximación de los desarrollos de las ganancias numéricas,  $G(\xi_m)$ , de las formulaciones estudiadas con la ganancia analítica,  $G_e(\xi_m)$ ,

asociadas a un modo de Fourier de ambas soluciones, de número de onda  $\xi_m$ . Llamando,  $\eta = \xi_m h = 2\pi h / \lambda_m = 2\pi / g$ , siendo  $\lambda_m$  la longitud de onda del modo de Fourier, y  $g = \lambda_m / h$  el número de elementos del mallado que contiene la longitud de onda asociada al modo (valor que aumenta a medida que se realizan las etapas de refinamiento), se obtiene el siguiente resultado de consistencia para los diferentes esquemas:

$$G(\eta) = G_0(\eta) + O(\eta^q) \quad (12)$$

donde  $q=3$  para los esquemas (A.1), (A.3), (B.1) y (B.3), y  $q=2$  para (A.2) y (B.2). Diremos por tanto que los primeros son globalmente exactos de segundo orden, y los últimos de primer orden.

#### 4.3. Estabilidad en 2-D

Al igual que en el estudio realizado en 1-D trabajamos con las formulaciones (9) y (10) como esquemas implícito y explícito, respectivamente, para coeficientes constantes y sin fuentes externas.

Pretendemos realizar un estudio de estabilidad numérica para los esquemas a que dan lugar las formulaciones explícita e implícita en 2-D, en los casos que se realice integración reducida o consistente en los términos  $u^{n+1}$  y  $u^n$ , correspondientes a los apartados (A.1), (A.3), (B.1) y (B.3). Excluimos los esquemas surgidos de una integración mixta en estos términos, correspondientes a (A.2) y (B.2), que poseen un peor comportamiento en cuanto a consistencia, según el estudio en 1-D.

Un estudio general de estabilidad en 2-D sería muy complejo, dadas las múltiples combinaciones de elementos que se nos pueden presentar en un proceso adaptativo. Por ello, consideramos un caso particular; trabajamos sobre una malla regular de triángulos rectángulos, longitud de catetos  $h$ , y cuyas hipotenusas están sobre la dirección de  $\pi/4$ . Consideraremos que la velocidad,  $\vec{v}$ , posee una dirección cualquiera definida por el ángulo  $\nu$  que forma con el eje  $x_1$ . Y en cuanto a la dirección de propagación de la onda definida por el vector de onda,  $\vec{\xi}_m$ , se tratará en un primer apartado cuando el ángulo formado por  $\vec{\xi}_m$  y el eje  $x_1$  sea nulo, y posteriormente el caso que este ángulo sea  $3\pi/4$ . A continuación se exponen los principales resultados obtenidos para las diferentes formulaciones y casos. Para simplificar, en las siguientes expresiones debe considerarse el parámetro  $m=1$  para las formulaciones explícitas, y  $m=2$  para las implícitas; y el parámetro  $\rho=1$  en el caso que se utilice integración reducida en todos los términos, y  $\rho=1/3$  cuando se tome integración consistente en todos los términos.

1) Caso que  $\xi_{1m} = \xi$  y  $\xi_{2m} = 0$ ,  $\forall \xi \in \mathbb{R}^+$ :

$$C \leq \frac{1}{\cos^2 \nu} \left[ \left( \frac{1}{p_e^2} + \rho \cos^2 \nu \right)^{1/2} + (-1)^m \frac{1}{p_e} \right] \quad (13)$$

Se comprueba fácilmente que esta cota sobre el número de Courant es más favorable que la obtenida en 1-D; salvo cuando  $\nu=0$  ó  $\nu=\pi$  (iguales direcciones de la velocidad y propagación), en cuyo caso coinciden las cotas en 1-D y 2-D.

2) Caso que  $\xi_{1m} = \xi$  y  $\xi_{2m} = -\xi$ ,  $\forall \xi \in \mathbb{R}^+$ :

$$C \leq \frac{1}{1 - \sin 2\nu} \left[ \left( \frac{4}{p_e^2} + \rho (1 - \sin 2\nu) \right)^{1/2} + (-1)^m \frac{2}{p_e} \right] \quad (14)$$

La cota más desfavorable en este caso se obtiene cuando  $\sin 2\nu = -1$ , es decir,  $\nu = 3\pi/4$  ó  $\nu = -\pi/4$  (igualdad en direcciones de la velocidad,  $\vec{v}$ , y de la propagación del modo, definida por  $\vec{\xi}_m$ ), dicha cota es:

$$C \leq \left( \frac{1}{p_e^2} + \frac{\rho}{2} \right)^{1/2} + (-1)^m \frac{1}{p_e} \quad (15)$$

Si comparamos la cota anterior con la obtenida en el estudio realizado en 1-D, resulta ser más desfavorable en cuanto a la obtención del paso de tiempo,  $\Delta t$ , el resultado obtenido en 2-D. Interpretando el parámetro de la discretización,  $h$ , como se ha definido en ambos casos para las expresiones de  $C$  y  $p_e$ . Pero podemos comprobar fácilmente que si en la cota obtenida en 1-D considero como el parámetro de la discretización la longitud de los catetos dividida por  $\sqrt{2}$  (distancia máxima entre dos puntos del elemento en la dirección de la velocidad y de propagación), obtendría la cota dada por (15). Esto mismo ocurría en el caso anterior en que la distancia máxima entre dos puntos de un elemento en la dirección de la velocidad y de propagación (caso más desfavorable cuando coincidían) era precisamente la longitud de los catetos, y por ello llegábamos a la misma cota que en 1-D. De todo esto podemos "intuir" que, para el modelo de malla escogido, el caso más

desfavorable será cuando las direcciones de la velocidad y propagación coincidan con la de la bisectriz del segundo y cuarto cuadrante. Según esto, indicamos como cota más desfavorable para las formulaciones la dada por (15). Se obtiene, por tanto, que el esquema implícito con integración reducida en todos los términos es el que presenta un mejor comportamiento en cuanto a estabilidad.

#### 4.4. Indicadores de error

En el estudio del problema de convección-difusión se han considerado cuatro indicadores de error, con el fin de comparar su comportamiento:

- Indicador 1: dado a partir de la estimación de error expresada por la ecuación (2), tomando como residuo el de nuestro problema.

- Indicador 2: igual que el anterior, pero sin considerar el término de saltos de flujo.

- Indicador 3:  $c_1 = h_1 | \vec{v} \cdot \nabla u_h |$ . Su valor es proporcional al residuo de la ecuación en problemas estacionarios de convección pura (o con fuerte convección con respecto a la difusión) sin fuentes externas.

- Indicador 4:  $c_1 = h_1 | \nabla u_h |$ . Nos mide la máxima variación experimentada por la solución numérica en el elemento  $\Omega_1$ , ya que  $| \nabla u_h |$  es constante en todo  $\Omega_1$  al trabajar con elementos triangulares de tres nodos, e interpolación lineal.

En las aplicaciones numéricas realizadas se compara el comportamiento de estos indicadores; se puede adelantar que el Indicador 4 es el más selectivo en cuanto a la localización de las capas límites provocando mayores refinamientos en torno a éstas.

#### 4.5. Aplicaciones al problema de convección-difusión

Nos planteamos la resolución mediante el método de elementos finitos adaptativo, utilizando diversas formulaciones y estrategias, del problema modelo de convección-difusión definido sobre un dominio  $\Omega$  bidimensional de forma cuadrada de lado unidad, en el que existe un medio en movimiento con un campo de velocidades giratorio,  $\vec{v}$ , con  $v_1 = \omega x_1(1-x_1)(x_2-0.5)$  y  $v_2 = \omega x_2(0.5-x_1)(1-x_2)$ , de divergencia nula, y considerando el origen en el vértice inferior izquierdo de  $\Omega$ . El medio posee una difusión  $K=1$ , y no está sometido a fuentes externas,  $f=0$ . Definimos condiciones de tipo Dirichlet en los lados verticales,  $u=1$  en el izquierdo, y  $u=0$  en el derecho; y de tipo Neuman nulas en el resto. Tomamos  $u=0$  en  $\Omega$  como condición inicial. Este problema ha sido considerado en [11], [12] y [13].

Hemos resuelto el régimen evolutivo y estacionario para distintos valores de  $\omega$ , utilizando diferentes estrategias de refinamiento con el código NEPTUNO [7], en un VAX-11/750.

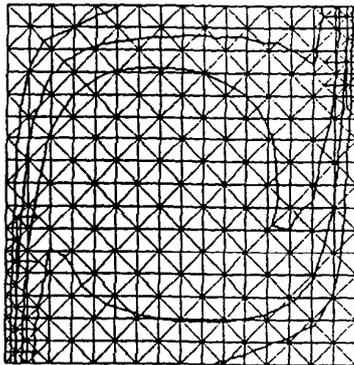
4.5.1. Problema evolutivo

En las figuras (2) se exponen salidas gráficas (mallas e isolíneas en el interior de  $\Omega$  para  $u=1/6, 2/6, \dots, 5/6$ ) obtenidas en la resolución del problema modelo evolutivo, con  $\omega=1000$ , resuelto mediante la formulación implícita con integración consistente en todos los términos, teniendo en cuenta los resultados del estudio numérico efectuado, partiendo de la Malla 1 regular con 289 nodos. La solución representada en la Malla 20 es próxima a la estacionaria.

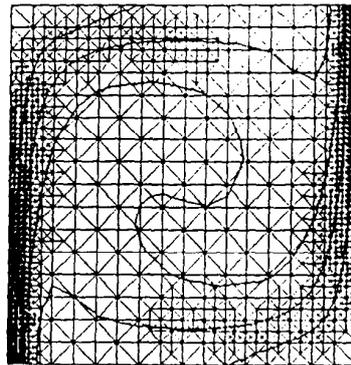
En el proceso de refinamiento utilizamos el Indicador 4 y  $\gamma=0.9$ , haciendo 300 pasos de tiempo sobre cada malla. El paso de tiempo se calcula automáticamente después de cada refinamiento, según la expresión:

$$\Delta t = k \frac{h_{\min}}{|\vec{v}|_{\max}} \left[ \frac{1}{6} \right]^{1/2}$$

siendo  $h_{\min}$  la longitud mínima de las caras de todos los elementos de la malla, y  $|\vec{v}|_{\max} = 125$  para esta aplicación ( $\omega = 1000$ ). Ambos valores son obtenidos automáticamente para la determinación de  $\Delta t$ , que puede o no variar en cada etapa de refinamiento en función de la zona donde éste se efectúe, esto dependerá en definitiva de si varía el valor de  $h_{\min}$  de una malla a otra. En las aplicaciones numéricas expuestas a continuación se ha tomado  $k = 0.9$ . De esta forma obtenemos para trabajar sobre la Malla 1,  $\Delta t = 0.18371 \cdot 10^{-3}$ . Así calculamos rápidamente un valor de  $\Delta t$  que puede ser algo más pequeño que la cota necesaria, pero evitamos realizar un barrido en todos los elementos de la malla para obtener la cota más desfavorable entre las cotas asociadas a cada uno de los elementos, en función de su número de *Peclet local*.



• MALLA 4 (Tiempo=0.13778) •



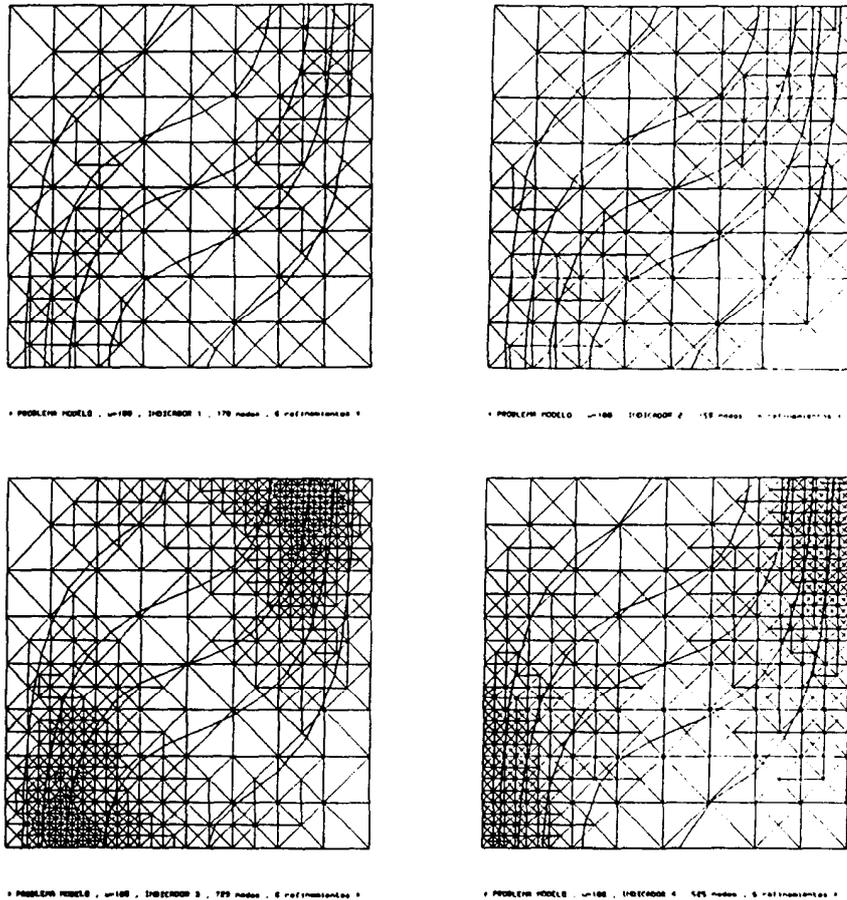
• MALLA 20 (Tiempo=0.30361) •

Figuras 2.- Soluciones obtenidas en diversas etapas adaptativas.

4.5.2. Problema estacionario

En este apartado se exponen salidas gráficas obtenidas en la resolución del problema modelo, para  $\omega=100$  y  $\omega=10000$ , encontrando directamente su régimen estacionario aplicando el método de la difusión artificial, ver por ejemplo Raviart [17], combinado con técnicas adaptativas según distintas estrategias e indicadores de error.

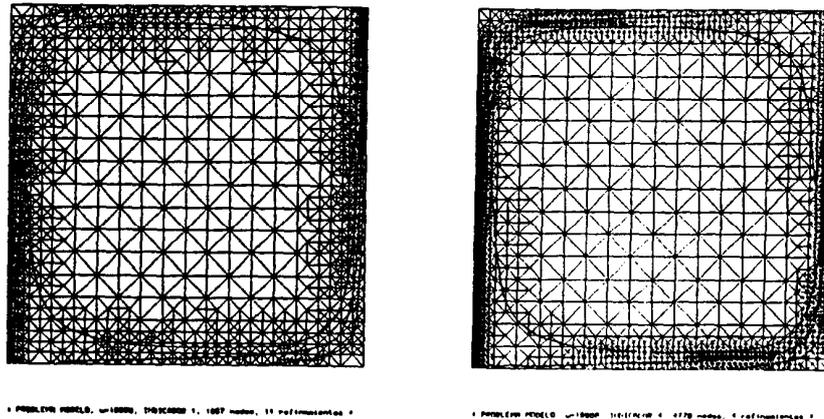
En las figuras (3) se representa la solución cuando trabajamos con poca convección, caso  $\omega=100$ ,  $|\vec{v}|_{\max}=12.5$ , para los cuatro indicadores de error propuestos tras realizar seis etapas de refinamiento, partiendo en todos los casos de la misma malla inicial y utilizando el mismo valor del parámetro  $\gamma=0.7$  para definir la estrategia de refinamiento. En este caso se representan las isolíneas de la solución para los mismos valores que en el caso anterior.



Figuras 3.- Solución obtenida, con  $\omega=100$ , para los distintos indicadores de error.

## SOBRE LOS METODOS ADAPTATIVOS DE REFINAMIENTO ESTRUCTURADO

En las figuras (4) se representa la solución cuando trabajamos con un fuerte predominio de la convección, caso  $\omega=10000$ ,  $|\vec{v}|_{\max}=1250$ , para los indicadores de error 1 y 4 propuestos, tras realizar, respectivamente, once y cuatro etapas de refinamiento, partiendo en ambos casos de la misma malla inicial y utilizando el mismo valor del parámetro  $\gamma=0.3$  para definir la estrategia de refinamiento. En este caso se representan las isolíneas de la solución para  $u=1/7, 2/7, \dots, 6/7$ .



Figuras 4.- Solución obtenida, con  $\omega=10000$ , para los indicadores de error 1 y 4.

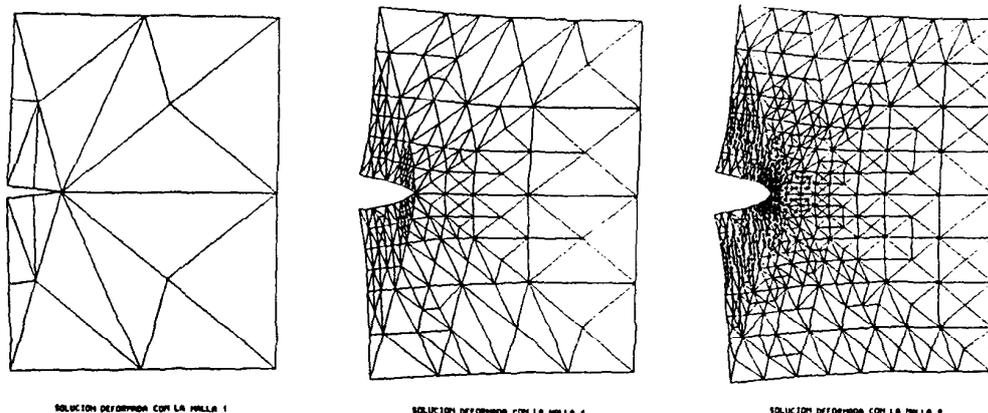
### 5. OTRAS APLICACIONES

La eficacia de los métodos adaptativos ha sido contrastada en otros tipos de problemas: problemas de ajuste de campos de viento, problemas de transmisión de calor no lineal, problemas de estudio de parámetros de líneas de transmisión microstrip, etc., ver [8] y [13]. Como ejemplo, en las figuras (5) se representa la solución deformada de un problema de elasticidad plana, planteado en [13], obtenida en diferentes etapas de refinamiento adaptativo; es el caso de una placa rectangular con una fractura situada transversalmente en la mitad de uno de sus lados verticales, y sometida a tracción sobre sus lados horizontales.

### RECONOCIMIENTOS

El trabajo presentado proviene de experiencias desarrolladas en métodos adaptativos con L. Ferragut, G. Winter y G. Montero. Asimismo, el autor desea mostrar su agradecimiento a S. de Vicente, por sus comentarios en el estudio numérico de las formulaciones del problema de convección-difusión.

SOBRE LOS METODOS ADAPTATIVOS DE REFINAMIENTO ESTRUCTURADO



Figuras 5.- Deformación de la placa para diferentes mallas.

REFERENCIAS

- [1] I. Babuska, J. Chandra y J. E. Flaherty. *Adaptive computational methods for partial differential equations*. SIAM Publications, Philadelphia, (1983).
- [2] I. Babuska y W.C. Rheinboldt. "A posteriori error analysis of finite element solutions for one-dimensional problems". *SIAM J. Numer. Anal.* 18, 565-589, (1981).
- [3] I. Babuska y W.C. Rheinboldt. "A-posteriori error estimates for the finite element method". *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 12, 1597-1615, (1978).
- [4] I. Babuska y W.C. Rheinboldt. "Error estimates for adaptive finite element computations". *SIAM J. Numer. Anal.* 15, (1978).
- [5] I. Babuska, O.C. Zienkiewicz, J. Gago y E.R.A. Oliveira. *Accuracy estimates and adaptive refinements in finite element computations*. Editorial J. Wiley & Sons, Gran Bretaña, (1986).
- [6] G.F. Carey y J.T. Oden. *Finite elements. Fluid mechanics. (VI)*. Editorial Prentice-Hall, Inc. New Jersey, (1986).
- [7] L. Ferragut. *NEPTUNO, un sistema adaptativo de elementos finitos*. Dpto. de Matemática Aplicada y Métodos Informáticos, E.T.S.I de Minas, Madrid, España (1987).
- [8] L. Ferragut, G. Montero, G. Winter y R. Montenegro. "Wind field adjustment: Resolution by adaptive mixed finite element and multigrid algorithm. Applications". *Proceedings of European Community Wind Energy Conference*, 140-144, Madrid (1990).
- [9] J. Gago, D.W. Kelly, O.C. Zienkiewicz y I. Babuska. "A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method: Part II - Adaptive mesh refinement". *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 19, 1621-1656, (1983).
- [10] D.W. Kelly, J. Gago, O.C. Zienkiewicz y I. Babuska. "A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method: Part I - Error analysis". *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 19, 1593-1619, (1983).
- [11] R. Montenegro. *Aplicación de métodos de elementos finitos adaptativos a problemas de convección-difusión*. Tesis Doctoral, E.T.S.I.I., Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, (1989).
- [12] R. Montenegro, G. Montero, G. Winter y L. Ferragut. "Aplicación de métodos de elementos finitos adaptativos a problemas de convección-difusión en 2-D". *Rev. Int. Mét. Numér. Cál. Dis. Ing.* Vol. 5, 4, pág. 535-560 (1989).
- [13] G. Montero, R. Montenegro, G. Winter y L. Ferragut. "Aplicación de esquemas EBE en procesos adaptativos". *Rev. Int. Mét. Numér. Cál. Dis.* Vol. 6, 2, pág. 311-332, (1990).
- [14] J. Peraire, O.C. Zienkiewicz y K. Morgan. "Shallow water problems: a general explicit formulation". *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 22, 547-574 (1986).
- [15] P.A. Raviart. *Les méthodes d'éléments finis en mécanique des fluides*. Editions Eyrolles, Paris, (1981).
- [16] M.C. Rivara. "A grid generator based on 4-triangles conforming. Mesh-refinement algorithms". *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 24, 1343-1354, (1987).
- [17] M.C. Rivara. "Algorithms for refining triangular grids suitable for adaptive and multigrid techniques". *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 20, 745-756, (1984).