MODELO DE REACCION-DIFUSION APLICADO A LA GESTION DE PESQUERIAS

José M. Pacheco
Isabel Padilla

Facultad de Ciencias del Mar
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

RESUMEN

Se presenta una aproximación teórica al problema de determinar la dependencia entre la densidad de población explotable y la amplitud de una zona de exclusión pesquera a lo largo de las costas. Se extraen conclusiones acerca de la importancia de caracterizar con precisión los diferentes parámetros de reproducción y de difusión en áreas densamente explotadas, teniendo en cuenta las influencias en la Oceanografía Física debidas a la presencia del archipiélago canario.

ABSTRACT

A theoretical approach is made to the problem of determining the relationship between the density of exploitable fishing resources and the width of the exclusion zone along the coastline. Some consequences are drawn on the importance of characterizing various parameters (specific reproductive taxes, diffusion values,...) in the area affected by the wake of the Canaries, an intensively harvested zone in the Central Eastern Atlantic.

1. INTRODUCCION

La actualidad de las moratorias o paros biológicos que afectan a las pesquerías en el banco canario-sahariano hace que se plantee, al menos como ejercicio teórico, la necesidad de justificar de modo concluyente la existencia de zonas exclusivas, así como el planeamiento de las campañas para la determinación *in situ* de los parámetros pertinentes en la determinación de tales zonas.

En el caso del banco canario-sahariano, la corriente de Canarias es perturbada por el Archipiélago Canario (C. Bas, com. pers. 1990), y quedan modificados los factores de producción debido a esas variaciones oceanográficas. Esto motiva la presente nota, en la que se plantea un modelo simple como punto de partida para ulteriores complicaciones.

La figura 1, presenta de forma altamente idealizada la situación física. Las líneas rectas AB y A'B' son transectos en los que se va a establecer el modelo.

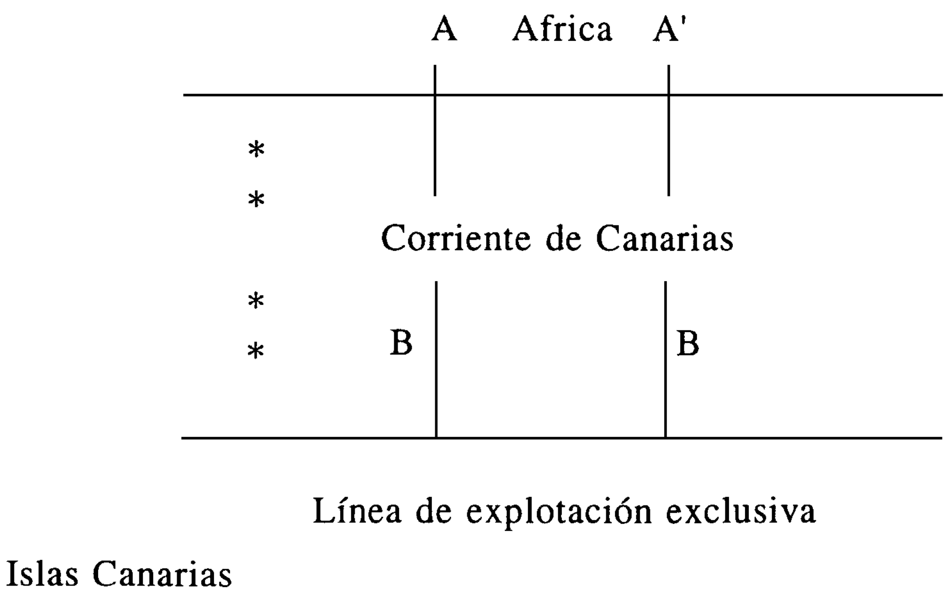

Fig. 1.

Las hipótesis básicas del modelo son las siguientes:

1.- La polación explotada $P(x,t)$ se halla distribuida espacialmente a lo largo de un transecto AB.

2.- No se consideran efectos d formación de bancos o cardumenes, por lo que la distribución espacial a lo largo de AB se considera continua.

3.- La dinámica de la población $P(x, t)$ está regida temporalmente por una expresión del tipo siguiente:

$$\mathrm{d}P/\mathrm{d}t = rf(P)$$

donde r es un coeficiente numérico y f es una cierta función de P. Por ejemplo, en el caso logístico tendremos, siendo K la capacidad de carga:

$$f(P) = (1-P/K)P$$

4.- En el punto A se impone la condición *natural* de contorno $P_x(O, t) = O$, y en el B la condición de *barrera absorbente* $P(l, t) = O$, donde se ha identificado el transecto AB con un intervalo $[O, l]$. La primera condición indica simplemente que la población explotada no puede salir a tierra, y la segunda, tal vez en exceso fuerte, implica que a partir de la distancia l de la costa es imposible la vida para la población explotada.

5.- Se supone que la población tiene cierta movilidad a lo largo del intervalo $[O, l]$, debida a las diferencias de concentración de alimento u otros factores, lo cual se representa mediante una *difusión:*

$$K^2 \nabla^2 P(x, t) = K^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

6.- Se conoce una distribución inicial de la población a lo largo del intervalo $P(x, O) = P_o$

Con estas hipótesis es posible formular el siguiente modelo simple:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = r f(P) + K^2 \nabla^2 P$$

$$P_x(O, t) = P(l, t) = O$$
$$P(x, O) = P_o$$

Este modelo, que contiene una variante de la ecuación de Fisher, consiste en una ecuación no lineal de reacción-difusión junto con las condiciones ya explicadas de contorno e inicial. La distribución P_o debe ser estimada mediante datos de campo, así como los coeficientes r y k^2. Lo que pretende el modelo es dar una justificación para seleccionar un l adecuado en función de los parámetros citados y de la forma particular de la función f.

2.- ANALISIS DEL MODELO

Desde el punto de vista de la gestión pesquera lo que interesa son los estados estacionarios de la población explotada, lo cual es el punto de partida de cualquier modelo bioeconómico. Aquí lo importante es conocer si los estados estacionarios son *estables o inestables.*

Los estados estacionarios vienen dados por las soluciones de la ecuación

$$\frac{\partial P}{\partial t} = O$$

y dependen del aspecto concreto de la función *f.* Vamos a suponer que la no linealidad de *f* no es excesiva y que posee, por tanto, un desarrollo de Taylor con término lineal. Esto engloba, en particular, el caso logístico y otros de intereses en la literatura.

Por lo tanto, hay estados estacionarios de dos clases:

a) El origen.
b) Las soluciones de la ecuación diferencial ordinaria

$$rf(P) + k^2\, d^2P/dx^2 = O$$

Cada tipo necesita un tratamiento diferente: el origen, para tener interés *pesquero,* ha de resultar *inestable,* pues si fuera estable estaríamos describiendo una población en extinción. Naturalmente la condición de inestabilidad se reflejará en alguna combinación de los parámetros que aparecen en el modelo. Las soluciones del tipo b) corresponden a distribuciones de población sobre el intervalo *[o, l]* de trabajo. En primer lugar hay que establecer su existencia, en segundo, si existe alguna relación entre el parámetro definidor de la situación estable/inestable del origen y éste nuevo tipo de estados estacionarios y, finalmente, analizar su estabilidad.

3.- ESTUDIO DE LA ESTABILIDAD

Con las hipótesis formuladas acerca de *f* es posible linealizar la ecuación del modelo en torno al origen:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \mathrm{r\ P} + \mathrm{K}^2\, \nabla^2\, \mathrm{P}$$

conservando las condiciones de contorno e iniciales. La resłución de esta ecuación lineal teniendo en cuenta las condiciones suplementarias es directa (V. p. ej. Tijonov y Samarski) y puede escribirse en la forma siguiente mediante un desarrollo de Fourier en la variable espacial:

$$P(x, t) = Co \exp[(1 - (\Pi K / 2 l)^2 / r) rt] \cos(\Pi x / 2 l) + \ldots$$

del cual consideramos sólo el término principal. Así pues, si $r<O$, entonces P tiende a O si t crece: se dirá, por tanto, que el estado estacionario $P = O$ es estable (asintóticamente), lo cual nos da una población en *proceso de extinción.* Cuando $r>O$ la estabilidad depende del signo de la expresión

$$1 - (\Pi K / 2 l)^2 / r$$

Para que ésta sea $>o$, debe de ocurrir que:

$$r / K^2 > (\Pi l / 2)^2$$

Esta expresión indica que si la tasa de reproducción r es mayor que un cierto múltiplo, *que depende de l,* del coeficiente de, difusión, entonces *la población explotada crecerá.* También puede escribirse en la forma siguiente:

$$l r^{1/2} / K > \Pi/2$$

De lo anterior se deduce que *podemos usar el valor de l como parámetro para marcar el comportamiento de la población explotada, y por tanto usarlo como elemento regulador en la gestión de la pesquería.*

Sin embargo, desde el punto de vista práctico es más interesante considerar distribuciones de población estables que no sean la distribución nula, esto es, las soluciones de la ecuación diferencial lineal ordinaria de segundo orden

$$rf(P) + k^2 d^2P/dx^2 = O$$

citada antes. Esta ecuación, al no depender de P' puede reducirse el orden y se integra obteniendo P en forma implícita (Ver p. ej. Elsgoltz) de ecuación integral:

$$x = (K/r^{1/2}) \int_{P}^{Po} (G(Po) - G(s))^{-1/2} ds$$

donde $2dG(s)/ds = f(s)$. Esta expresión presenta sus dificultades: No se conoce $P_o = P(O)$, la población en la costa, y además hay que conocer explícitamente $f(P)$. La condición de contorno $P(l) = O$ permite establecer una relación para el valor de la población en la línea de costa:

$$l = (K / r^{½}) \int_O^{Po} (G\ (Po) - G\ (s))^{-½}\ ds$$

o bien en la forma

$$l\ r^{½}/K = \int_o^{Po} (G\ (Po) - G\ (s))^{-½}\ ds$$

donde el miembro de la izquierda representa precisamente el parámetro que definía el carácter estable o no de la slución trivial. Para el caso de la logística

$$f(P) = (1\text{-}P/K)P$$

la expresión de $G(P)$ resulta ser

$$G(P) = P^2 - 2P^3/3K$$

con lo que las integrales anteriores son integrales elípticas, que en forma adimensional haciendo $\sigma = s/P_o$, $\lambda = P_o/K$, se expresan como:

$$x\ r^{½}/K = \int_w^1 [(1\text{-}\sigma^2) - 2\ \lambda\ (1\text{-}\sigma^3)\ /3]^{-½}\ d\sigma$$

$$l\ r^{½}/K = \int_0^1 [(1\text{-}\sigma^2) - 2\ \lambda\ (1\text{-}\sigma^3)\ /3]^{-½}\ d\sigma$$

Notamos aquí que las integrales anteriores dependen de los parámetros (población en la costa expresada como fracción de la capacidad de carga) y $lr^{1/2}/k$, parámetro de bifurcación de la cpacidad de carga) y $lr^{1/2}/k$, parámetro de bifurcación de la solución trivial. Si en la costa no hay población, $\lambda = O$, y el parámetro de bifurcación vale $\Pi/2$. Esto indica que éste es el valor para el cual se produce un salto cualitativo, separándose la solución trivial de una solución estacionaria no trivial.

No se ha determinado aquí si la solución estacionaria no trivial es estable o no: en todo caso, es posible que el método del parámetro pequeño sirva para establecer la estabilidad para valores del parámetro de bifurcación próximos a $\Pi/2$ el análisis no parece sencillo.

4.- CONCLUSIONES Y NOTAS

La conclusión principal de carácter biológico se resume en dos cuestiones:

a) Necesidad de establecer experimentalmente los coeficientes de crecimiento biológico r y de difusión k^2, especialmente en situaciones como las que se presentan en bancos muy explotados, v. g. el banco canario-sahariano, que motiva esta nota.

b) Hallados los valores anteriores puede procederse a la revisión local del límite l. En la actualidad el valor de *200* millas es el aceptado, más por razones políticas o económicas que en consideración a factores biológicos. La influencia del Archipiélago Canario en la corriente de Canarias debe, en principio, modificar la estructura de r, k, permitiendo así una optimización de l, lo que se traduce básicamente en una reestructuración de las flotas presentes en el banco.

Desde el punto de vista del matemático aplicado, el estudio de la estabilidad no debe resultar un problema arduo, aunque sí lo será, con toda seguridad, la interpretación. También es posible analizar la existencia de soluciones en forma de *trenes de ondas,* dado que la ecuación es una forma de la ecuación de Fisher (Murray).

Finalmente, se deja planteada la cuestión acerca de la inclusión de términos de difusión en un modelo bioeconómico de dos ecuaciones acopladas, una para la población P y otra para el esfuerzo pesquero E, (ver por ejemplo Schaeffer, Conrad, para este asunto) lo cual entra de lleno en el campo de ls ecuaciones diferenciales no lineales en derivadas parciales y puede analizarse por otros métodos (ver Leung).

5.- BIBLIOGRAFIA

CONRAD, J. (1986) "Bioeconomics and the management of renewable resources". *En*: Hallam & Levin (eds.), Mathematical Ecology: 381-404, Springer V., Berlin.

ELSGOLTZ, L. (1969) "Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional", Mir, Moscú.

LEUNG, A. (1989) "Systems of nonlinear partial differential equations", Kluwer, Dordrecht.

MURRAY, J. (1989) "Mathematical Biology", Springer, Berlin.

SCHAEFFER, M. (1957) "Some considerations of Population Dynamics and Economics in Relation to the Management of Marine Fisheries", *J. Fish. Res. Bd. Canada*, 14 (5): 669-681.

TIJONOV, A. y SAMARSKI, A. (1972) "Ecuaciones de la Física Matemática", Mir, Moscú.