MATEMÁTICAS, AUNQUE ES DE NOCHE

José Miguel Pacheco Castelao
Catedrático del Departamento de Matemáticas de la ULPGC

INTRODUCCIÓN

Hablar de Matemáticas para quienes no las utilizan habitualmente[1] es una posibilidad que se ofrece raras veces a los matemáticos profesionales. Además, tiene un cierto carácter de reto, motivado sobre todo por el estereotipo procedente de los cursos elementales de Matemáticas, que con excesiva frecuencia sólo sirven para fomentar un cierto odio –disfrazado de respeto, eso sí– hacia esta ciencia. La pregunta que se formula el matemático en esta situación es evidente: ¿conseguiré transmitir algo de lo que yo entiendo por Matemáticas sin recurrir a un lenguaje técnico en exceso? Lo intentaré, y para ello comentaré en primer lugar el título de esta intervención.

Es posible que Uds. hayan considerado el título como una especie de broma. No es así: *Aunque es de noche* es el estribillo de uno de los más famosos poemas de San Juan de la Cruz, el *«Cantar del alma que se huelga de conocer a Dios por Fe»*, y viene muy a cuento con nuestra ciencia. Así como la Fe permite ver –al alma citada por el poeta– *aunque es de noche*, las Matemáticas son, con toda seguridad, el medio intelectual más potente de que dispone el hombre para explorar la Naturaleza, cuyo carácter huidizo e inaprensible nos mantiene en esa larga *noche* del conocimiento.

A lo largo de estos minutos intentaré exponerles –para contestar a mi anterior cuestión– una serie de ideas y conceptos por lo general escamoteados en los cursos de Matemáticas, ya por considerarlas demasiado triviales o en exceso filosóficas, ya por poco «científicas» o por simple desconocimiento y dejadez de los profesores, y trataré de mostrarles un lado más humano de esta Ciencia, que como todas las crea-

1. Este texto corresponde a una conferencia pronunciada en el Master de Periodismo de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria en la edición del año 1995. Se presenta tal y como se redactó para aquella ocasión, salvo correcciones ortográficas menores.

ciones del hombre se halla sometida a modas y también a soberanas incoherencias. Por tanto, comencemos haciéndonos una serie de preguntas y tratando de construir las respuestas.

EL POR QUÉ DE UN PLURAL

Nuestra primera pregunta es bastante inocente: ¿Por qué las Matemáticas es un nombre plural? Observen Uds. que se habla de la Física, la Medicina, la Biología y otras muchas ciencias siempre en singular. Además es también cierto que cuando un área de una ciencia cualquiera alcanza cierto volumen, tiende a convertirse en una nueva ciencia. Existen hoy día Geofísicos, Bioquímicos, Oceanógrafos, etc., que hacen todo lo posible por distanciarse de sus ciencias de origen y marcar las diferencias. Sin embargo, quienes practican alguna de las ramas de las Matemáticas tienen a gala ser matemáticos, por alejados que sean los campos de conocimiento que cultiven. Si tal cosa ocurre, debe haber algo que lo justifique: Esa pluralidad reflejará la existencia de algún patrimonio común que unifique bajo el nombre de Matemáticas cosas tan diversas.

Hace algunos años, en el marco de alguna de las incesantes reformas educativas, se intentó popularizar la idea de que las Matemáticas son simplemente un lenguaje cómodo para el intercambio científico, que debería ser conocido por casi todo el mundo. Esta visión surgió de exagerar una cita clásica de Galileo acerca de que *el libro de la Naturaleza está escrito en el lenguaje de las Matemáticas*, y constituye, mal comprendida, uno de los errores más extendidos acerca de nuestra ciencia. Las Matemáticas no son un lenguaje, sino más bien un método, que –como de propina– ha generado un conjunto de lenguajes muy formales y estructurados que permiten su transmisión y conservación. Un equívoco similar sería confundir la Música con el Solfeo, salvando las distancias.

Por tanto, la contestación a nuestra primera pregunta es la siguiente: Las matemáticas son plurales porque constituyen un método cuya validez se extiende sobre muchos tipos de problemas de muy diferentes clases. Compartir ese método es lo que caracteriza a los matemáticos y por eso mantenemos –con cierto orgullo– el plural. Así pues, Matemáticas hay muchas, pero el método es único[2]. Podemos ya planteamos otra pregunta.

¿QUÉ SON MATEMÁTICAS Y QUÉ NO?

Establecido ya que dentro de las Matemáticas caben muchos campos, conviene disponer de algún criterio para distinguir entre lo que son Matemáticas y lo que no.

2. Hace tiempo que, por influencia de una cierta cultura germanizante (en alemán Mathematik es singular), quiso introducir *La Matemática*, en lugar de *Las Matemáticas*, con poco éxito popular. La idea era, desde luego, insistir en la unidad del método, pero creo que se pierde una gran riqueza expresiva, que el alemán no tiene.

La introducción de la idea de método nos va a permitir contestar a esta pregunta sin mucho esfuerzo. Para ello, observemos a un matemático en acción. El trabajo que realiza suele consistir en lo siguiente: Una vez seleccionado un problema, que puede proceder de otra ciencia o de las propias Matemáticas, trata de establecer una *Teoría* (palabra griega que significa «visión») que explique la naturaleza del mismo. Además, intentará que esa teoría sirva también para explicar otros problemas parecidos, o relacionados: Este proceso se llama generalización, y con él se consigue utilizar un mismo marco conceptual para diversos objetivos. Cuando el matemático, en su camino razonador, realiza alguna observación interesante, la plasma en un enunciado que por lo general denomina *Teorema* (palabra que significa «lo que se ve»). En principio, no parece nada demasiado emocionante y –salvo las palabras– parece igual que el trabajo en cualquier otra ciencia. Ahora es donde comienza la diferencia, precisamente.

Cuando el matemático cree que tiene un Teorema, debe de demostrarlo. Demostrar un Teorema es construir un razonamiento para convencernos de que lo que se dice es verdadero, y ello con el máximo de generalidad: He aquí la esencia del método, la demostración[3]. Ninguna otra ciencia posee esa herramienta: Por lo general, en las ciencias experimentales se obtiene el convencimiento mediante experimentos que confirman lo que se sospecha u observa en algunos –o muchos incluso– casos particulares. Pero el matemático no quedará satisfecho hasta que haya incluido en su Teorema *todos* los casos particulares, por lo cual podrá después olvidarse de ellos[4]. ¿No es verdaderamente maravilloso poder sobrevolar el conocimiento de tal vez una cantidad infinita de problemas con un único razonamiento?

Así las cosas, en las Matemáticas se podrán admitir todos aquellos campos del saber donde sea aplicable la demostración. Ello incluye amplias partes de la Física, algunas cuestiones de Biología y Química, muy poca Medicina (por desgracia), y poco más. Desde luego, en este reino de la verdad la Política, el Derecho y otras actividades más mundanas tienen poca cabida. Y esto nos lleva a plantearnos la siguiente pregunta.

¿EXISTE LA VERDAD EN LAS MATEMÁTICAS?

Esta es una cuestión complicada, hay que reconocerlo: Acabamos de decir que el método matemático consiste en utilizar la demostración como el elemento básico en el establecimiento de la verdad, y ahora nos permitimos dudar de su existencia.

La idea de verdad se puede rastrear en la Filosofía clásica, en particular en Aristóteles, donde representa la abstracción de la noción de «adecuación». En palabras más sencillas, un teorema sería verdadero si tras comprobar multitud de casos no nos fallara nunca su enunciado, esto es, se adecua a todas las observaciones. Lo

3. En la práctica, la demostración suele construirse al ir elaborando la teoría y los enunciados de los teoremas surgen de forma natural como recapitulaciones. Sólo a algunos genios está reservado «ver» los teoremas antes de ser demostrados.
4. Una broma habitual entre matemáticos cuenta que alguien descubrió una teoría tan general que no tenía casos particulares.

malo de este concepto de verdad es que pone a las Matemáticas en el mismo rango que las demás ciencias. Y, a pesar de todo, seguimos usando las Matemáticas –incluso en el habla vulgar es fácil oír la expresión «eso es matemático» para indicar algo de lo cual es imposible dudar– y confiamos en ellas para muchas de las actividades cotidianas. Ello nos hace pensar que el concepto de verdad que utilizan las Matemáticas es de una categoría superior, y deberíamos planteamos qué queremos decir al establecer esa superioridad.

La verdad en Matemáticas, la que merece nuestra confianza, es de carácter formal; esto quiere decir que se refiere no a la corrección de los razonamientos en su relación con el objeto estudiado, sino a la propia estructura lógica interna de los razonamientos. Ahí radica esa superioridad: al no depender del significado de las frases ni de las palabras, sino de la conformidad con ciertas reglas que permiten deducir de antecedentes verdaderos (en cualquier sentido que se dé a esta palabra) consecuencias de igual calidad. Esa independencia nos lleva un paso más allá a la hora de depositar nuestra confianza en las Matemáticas. Es muy posible –y con seguridad esto habrá sido estudiado seriamente alguna vez– que el código genético haya evolucionado hasta incorporar, por selección y mutación darwinianas, el automatismo de reconocer las estructuras válidas del razonamiento: Ello sería una consecuencia de la comprobación de la verdad –en sentido aristotélico– por las mentes primitivas en tal cantidad de casos, que propiciaría del desencadenamiento de los mecanismos evolutivos. Así establecemos una cadena Matemáticas $\rightarrow$ Lógica $\rightarrow$ Psicología $\rightarrow$ Evolución, que nos da una base física para nuestra ciencia.

Hemos apuntado que la validez última del razonamiento matemático está profundamente enraizada en la propia base de la mente del hombre; de ahí procede, con seguridad, el éxito del concepto de verdad utilizado por las Matemáticas a lo largo de muchos siglos. Por tanto, existe la verdad en Matemáticas, aunque su naturaleza no sea tan intuitiva como desearíamos. Podemos ya pasar a considerar qué efectos prácticos tiene la aplicación sistemática del concepto de verdad.

EL RIGOR MATEMÁTICO Y LOS FUNDAMENTOS DE LAS MATEMÁTICAS

Si hemos quedado convencidos de la necesidad de las demostraciones, deberemos también preocupamos de su compañero inseparable: el rigor. Se suele entender que las Matemáticas son rigurosas con un cierto sentido peyorativo, dando incluso a entender que ese rigor está reñido con la elegancia y la creatividad. He aquí una imagen estereotipada que, como es habitual, se aleja bastante de la realidad. Vamos, pues, a comentar y desmentir algunas de estas ideas preconcebidas.

¿Qué entendemos habitualmente por rigor en un razonamiento? Sin detallar mucho, solemos calificar a un razonamiento de riguroso cuando se consideran todas las posibilidades y variaciones del fenómeno que se esté observando y si el respeto a las normas lógicas es completo. Por tanto, en nuestra visión intuitiva hay dos aspectos: Uno, que conlleva un análisis de las informaciones disponibles, cargadas de significados, y otro puramente formal. Las dosis de uno u otro aspecto son determinantes a la hora de establecer el concepto de rigor. En efecto: Un conocimiento detallado de cualquier objeto, tanto real como mental, permite considerar evidencias cada vez más abundantes sobre su estructura, de forma que las relaciones lógicas entre ellas sean las más simples posibles. Según esta escuela de pensamiento, un tratamiento matemático absolutamente rigurosos consistiría en establecer los razonamientos y demostraciones sobre los principios más elementales a que puedan reducirse los objetos. Tal es una de las formas de rigor, que ha sido responsable de enormes desastres educativos al intentar su implantación indiscriminada en todos los grados de la enseñanza. El fracaso se debió al desconocimiento de que hicieron gala los diseñadores de la política educativa de los mecanismos psicológicos del razonamiento y su evolución. En el momento presente, los políticos alardean de conocer *demasiado bien* esos mecanismos e intentan reducir a los estudiantes a un estado rayano en la imbecilidad... El rigor, como casi todo, debe ser introducido de manera paulatina, pero sin pausa, hasta conseguir que sea un automatismo más del proceso razonador. Ni puede incorporarse desde el principio ni ser evitado hasta que sea ya demasiado tarde.

C

A pesar de su escaso éxito en el sistema educativo, ese concepto de rigor llevó –al poco tiempo de su implantación alrededor de 1870– a plantear problemas verdaderamente serios acerca de la fundamentación lógica y semántica de las Matemáticas. No es éste el lugar de describir tales problemas, pero sí reconocer su importancia: Si todo el edificio de las Matemáticas resultara incompleto o inconsistente porque sus bases –a pesar de hundirse profundamente en la Psicología– son movedizas, ¿qué nos quedaría?

Afortunadamente, el concepto de rigor cambia como cualquier otra creación del hombre, y hoy día se consideran construcciones muy artificiosas, en las que el rigor se establece de forma transitiva y el convencimiento aparece más bien por una vía sintáctica que por aplicación de métodos de demostración generales que exijan un reduccionismo total. En otras palabras, se considera que algo es riguroso porque se basa en otras situaciones que se supone que lo son, sin preocuparse demasiado de cuestiones de base. En cierto sentido, se trata de primar la creatividad libre frente a los escrúpulos reduccionistas, lo cual es reencontrarse con el espíritu histórico de la evolución matemática: antes de la explosión rigorista a que me refería hace un momento, una parte sustancial de las Matemáticas estaba basada en análisis intuitivos, y no por ello su aceptación era menor ni se entorpeció su evolución: Al contrario, las ideas intuitivas acabaron exigiendo formalización, y ésta se justificaba y nutría de la creatividad de aquéllas. He aquí un ciclo que se repite una y otra vez a lo largo de la historia de las Matemáticas. Y, ahora que conocemos un poco el interior de las Matemáticas, podemos ya tratar de acercarnos a los problemas más importantes que constituyen sus objetivos.

LOS PROBLEMAS BÁSICOS DE LAS MATEMÁTICAS

Si recordamos que etimológicamente la palabra «Matemáticas» viene a significar algo similar a «explicación», será más fácil hacernos un catálogo de los problemas principales, puesto que, como suele ocurrir en todas las ciencias verdaderamente serias, los problemas esenciales son muy sencillos de formular.

En principio, los problemas de las Matemáticas proceden de la vida real: La Agricultura, el Comercio, la Navegación, la Astronomía, fueron fuente inagotable de ellos y dieron trabajo a los primeros matemáticos. Pero la resolución de muchas situaciones similares condujo pronto a elaborar teorías –en el sentido que dije más arriba– generales para algunas categorías de problemas. Así surgieron grandes partes de la Geometría plana, los primeros sistemas de numeración y con ellos las bases de la Aritmética y del Cálculo, y se establecieron los primeros sistemas de referencia o de coordenadas. Así se fueron implantando las técnicas para una explicación matemática del mundo real. Sin embargo, pronto los problemas ligados a las aplicaciones prácticas dejan paso a otros más abstractos, planteados en el interior de las propias Matemáticas, cuyas soluciones –o intento de ellas– pueden utilizarse para interpretar desde un punto de vista nuevo aquellas cuestiones prácticas que constituyen su origen remoto. Este ciclo –conocido habitualmente como «modelización»– constituye una de las vías esenciales del desarrollo matemático y puede rastrearse a lo largo de la historia en multitud de casos[5].

Una vez dentro de las Matemáticas, los grandes temas se recogen en un catálogo sorprendentemente reducido: A mi entender, consta sólo de tres apartados. El primero consiste en los *problemas de clasificación*; el segundo, en los de *análisis*; y el tercero, en los de *síntesis*. Sin embargo, la riqueza que proporciona esta mínima clasificación es enorme. Vamos a pasar una breve revista.

La *clasificación*, sin duda el primer estadio de todo estudio científico, está bien representada en Matemáticas por un enorme conjunto de resultados que se suelen enmarcar bajo el nombre de Geometría y con diferentes calificativos (euclídea, proyectiva, algebraica, diferencial, etc.). Por tanto, podemos decir que el objetivo de la Geometría consiste en clasificar los diferentes aspectos que la experiencia proporciona a nuestros sentidos. No es ocioso recordar aquí que durante siglos se llamó «geómetras» a los matemáticos: En realidad, dentro de la Geometría –entendida en sentido amplio– caben casi todas las Matemáticas.

El *Análisis* Matemático conforma el «núcleo duro» de las Matemáticas, y los problemas a que se enfrenta están relacionados con uno de los pasos más arriesgados dados por los matemáticos a lo largo de los siglos: El manejo de la noción de infinito y sus consecuencias (los infinitésimos, la continuidad, el cálculo diferencial, el cálculo integral, etc.). Podríamos decir, y no nos equivocaríamos, que el infinito –a pesar de lo difícil que es de intuir– es la herramienta por excelencia, sin la cual el avance de las Matemáticas hubiera sido impensable durante muchos siglos. Esta reducción de los problemas a sus mínimos constituyentes justifica etimológicamente la expresión Análisis Matemático[6] y engarza directamente con la idea de rigor a la que dedicamos unos párrafos algo más arriba.

5. Es posible que el ejemplo más interesante sea el enorme desarrollo experimentado por las Matemáticas en el Siglo XIX debido a la necesidad de fundamentar las teorías de la Física ligadas a la evolución tecnológica generada por el auge de las máquinas de vapor y las primeras aplicaciones prácticas de la electricidad.
6. Recordemos que *análisis* quiere decir «descomposición», y esa es precisamente la forma de trabajo del analista: Conocer la estructura y función de un objeto a través del estudio de sus menores componentes.

También encontramos en Matemáticas cierto tipo de cuestiones que tienen más que ver con la manipulación sintáctica de objetos y relaciones que con su estructura fina: Ese es el campo del Algebra y los Algoritmos, donde lo macroscópico prima sobre lo microscópico. Este área no está en contradicción con la parte analítica; por el contrario, se complementa con ella produciendo interacciones en extremo fructíferas. El verdadero desarrollo de las Matemáticas en el Siglo XX ha ido ligado a esta visión *sintética* de las Matemáticas, que no hace sino resaltar la existencia de ese sustrato común que comentaba al principio de mi intervención.

Vemos, por tanto, que las Matemáticas son una ciencia en continua evolución, donde no es fácil diferenciar partes aisladas, dado que unas y otras se entremezclan, utilizándose las diversas técnicas de modo unitario. No es de extrañar que se hayan formulado proyectos muy ambiciosos a medio y largo plazo, como el llamado Programa Langlands, para probar la unidad esencial de las Matemáticas, tratando de hallar la conexión profunda entre los diferentes tipos de problemas. Esto nos lleva a explorar las relaciones entre Matemáticas y Cultura en general.

CULTURA, MODAS Y EL FUTURO DE LAS MATEMÁTICAS

La presencia constante de las Matemáticas en los planes educativos tiene sin duda una explicación razonable. El manejo del cálculo aritmético elemental, que hoy consideramos de dominio público, es un objetivo constante a lo largo de la historia educativa. Desde hace algunos años –más de los que se cree– la rutina del cálculo puede ser asumida provechosamente por máquinas de diferentes clases, pero siempre quedará la necesidad de explicar los fundamentos, la necesidad y la importancia del cálculo como elemento cultural: No debemos olvidar que las civilizaciones más avanzadas siempre dispusieron de sistemas de cálculos y medidas muy sofisticados, a veces enormemente diferentes de los que nosotros utilizamos hoy día: Tener esos elementos siempre implicó un conocimiento más profundo de muchas cuestiones de la Naturaleza, utilizadas después en el desarrollo social[7].

Debemos decir, por tanto, que las Matemáticas son un hecho cultural indudable en continua realimentación con el adelanto del conocimiento humano: Un ejemplo que nos invade día a día es el uso –y abuso– de la Estadística[8] en cualquier ámbito de vuestras vidas; para verlo no tenemos más que ver la importancia de las encuestas y estudios de opinión en el devenir de empresas, organizaciones económicas y políticas, etc. He aquí un ejemplo de moda, que no parece transitoria, sino más bien tiende a establecerse como pauta irrenunciable para el desarrollo de cualquier actividad.

7. Notemos aquí que por desarrollo social no queremos decir siempre «mejora de las condiciones de vida», tal como lo entenderíamos en nuestra civilización occidental. El avance de una civilización, por desgracia, no tiene por qué ir acompañado de un mayor respeto a los derechos de los individuos y las colectividades.
8. La Estadística fue originariamente (su propio nombre lo indica) uno de los elementos de análisis político utilizado por los teóricos del Estado como paradigma de organización social. A finales del siglo XIX se matematizó y hoy día es una parte de las Matemáticas profundamente enraizada en el Análisis Matemático.

Nuestra ciencia no es inmune a la proliferación de modas. Estas aparecen por diversas causas: Aparición de nuevos problemas, reconsideración de otros antiguos a la luz de los nuevos avances, posibilidad de publicar en revistas especializadas, ambiciones personales como la de crear campos donde no sea posible la competencia, y muchas más, casi todas demasiado humanas. Comentaré por encima algunos ejemplos.

Posiblemente no sepan Uds. que una de las fuentes originales del Cálculo Infinitesimal, que tanto hace sufrir a muchos estudiantes, fue la búsqueda de explicaciones a problemas teológicos[9]. Sin embargo, su aplicación a este campo fue pronto olvidada dado el formidable potencial que este cálculo demostró en el estudio de problemas más terrenales. Otro ejemplo: Algo más adelante, los avances del siglo XIX en Física pusieron de moda estudiar los llamados invariantes, hasta que se logró establecer una teoría general que los convirtió en un capítulo más del Algebra. Los problemas derivados de la teoría de las máquinas de vapor, que ya he citado antes, dieron origen a la moda de fundamentar las Matemáticas, moda que aún continúa en ciertos ambientes académicos. Más ejemplos: Muchos algoritmos de cálculo, sepultados y olvidados en las bibliotecas matemáticas, se ponen de moda repentinamente al descubrirse su facilidad de manejo en ordenadores. Ciertas cuestiones complejas procedentes de la Biología y la Mecánica, al pasar a las Matemáticas han originado modas sucesivas y recientes tales como la Teoría de Catástrofes (hoy casi en el olvido), y el Caos y los Fractales (hoy en la cresta de la ola), sustentadas por campañas casi publicitarias que las presentan en los medios de comunicación poco menos que como revoluciones del pensamiento. En realidad, no parece que ninguna de estas modas vaya a ser la panacea en ningún campo: Se mantienen en candelero, como ya dije antes, por intereses personales y comerciales muchas veces ajenos al avance de las Ciencias y del conocimiento. Esto nos lleva directamente a reflexionar sobre el futuro de las Matemáticas.

Finalizamos ya nuestro viaje por el mundo de las Matemáticas preguntándonos por su futuro. Mucha gente opina que las Matemáticas elementales son algo pasado de moda, cuya función puede ser asumida por máquinas, pero esa visión reduccionista sólo sirve para enviar el problema a un nivel más elevado: La Naturaleza todavía presenta innumerables misterios que requerirán nuevas Matemáticas para ser comprendidos, lo cual exigirá sin duda una legión de estudiosos cuyas capacidades intelectuales se verán notablemente aumentadas con el auxilio de sucesivas generaciones de ordenadores, que a su vez plantearán nuevos problemas. ¿Quién inventará las máquinas[10] del futuro, cómo serán éstas y quién enseñará a construirlas? No es fácil contestar a estas preguntas, pero es cierto que esta tarea no es sino una parcela pequeña de las capacidades aún no exploradas de la mente del hombre: Todavía es –intelectualmente hablando– de noche, y aunque es de noche, las Matemáticas nos ayudarán a esperar la luz de la mañana. Muchas gracias.

9. Leibnitz, en la Teodicea.
10. En Matemáticas el concepto de máquina no se reduce al de aparato físico capaz de realizar ciertas funciones. Incluye también, y esta es la idea cada vez más aceptada, los algoritmos que realiza la máquina física, esto es, la programación o «software».