LA TRANSFORMADA DE HARTLEY: APLICACIONES EN EL ANÁLISIS DE DATOS EN OCEANOGRAFIA FISICA

G.R. Rodríguez[1], F. Rubio-Royo[1] y G.H.R. Rodríguez[2]

[1]Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, Departamento de Fisica, Email: german.rodriguez@fisica.ulpgc.es
[2]Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, Departamento de Electrónica, Telemática y Automática

Resumen

En el presente trabajo se discuten las ventajas que presenta el uso de la transformada de Hartley [1], para analizar series temporales (espaciales) de datos en el campo de la Oceanografía Física, donde las señales a procesar poseen la característica de ser reales y, por tanto, no requerir el uso de aritmética compleja para traspasar la información desde el dominio del tiempo al dominio de las frecuencias, y viceversa.

Fundamentos Teóricos

Hartley [1] introdujo una transformada similar pero con propiedades de simetría superiores a las de la Transformada de Fourier (TF). La diferencia esencial de la transformada de Hartley (TH) respecto a la TF es que, en lugar de utilizar como base para la transformación las funciones trigonométricas seno y coseno, emplea una combinación de ambas. La transformada de Hartley para una función real *h(t)* se define como

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)\, cas(2\pi\omega t)\, d\omega$$

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, cas(2\pi\omega t)\, dt$$

donde

$$cas(x) = \cos(x) + \operatorname{sen}(x)$$

Las ecuaciones anteriores reciben el nombre de Transformadas de Hartley inversa y directa, respectivamente, y ambas conjuntamente constituyen un par transformado de Hartley.

La Transformada discreta de Hartley (TDH) para una secuencia de N valores reales $\{x(n),\ 0 \leq n \leq N-1\}$ viene definida por

$$H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, cas\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) \qquad 0 \leq k \leq N-1$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H(k)\, cas\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) \qquad 0 \leq k \leq N-1$$

En realidad, la TH y la TF presentan más similitudes que diferencias, de hecho el paso de una a otra resulta bastante simple [2], y siempre que trabajemos con series de datos reales, como en el caso de la Oceanografía Física, podemos sustituir el uso de la transformada discreta de Fourier (TDF) por la TDH. Así, denotando como $\Re$ e $\Im$ las partes real e imaginaria de la TDF de la serie $\{x(n)\}$, es fácil demostrar [3] que

$$TDH[x(n)] = \Re\{TDF[x(n)]\} - \Im\{TDF[x(n)]\}$$

No obstante, la TDH posee dos ventajas fundamentales frente a la TDF. Por una parte, no es necesario utilizar aritmética compleja por ser una transformada real, y por otro lado, la TDH es simétrica, de modo que la transformada directa e inversa son iguales. Así, por ejemplo, en aplicaciones como el filtrado o la simulación de una señal, donde se requieren una transformada directa y otra inversa, sólo es necesario el uso de una rutina para realizar ambas transformaciones.

Sin embargo, quizás la ventaja más destacable de la TDH frente a la TDF es que ésta puede ser implementada mediante algoritmos rápidos, denominados genéricamente transformadas rápidas de Hartley (FHT) [4], que son similares en complejidad a los algoritmos rápidos para la transformada de Fourier (FFT) y que requieren aproximadamente la mitad de tiempo de computación para realizar la transformación de una serie, por ser ésta real y no requerir el uso de aritmética compleja [5]. Además, dado que las series de datos con las que nos encontramos en Oceanografía Física son series reales, el uso de la FFT implica la utilización del doble de memoria para su procesamiento o, lo que es equivalente, la FHT puede trabajar con series de longitud doble a las utilizadas por la FFT con los mismos recursos de memoria, obteniéndose resultados idénticos.

En este trabajo se aplica la transformada rápida de Hartley para estimar la función de densidad espectral correspondiente a series temporales experimentales de oleaje y corrientes. Los resultados son comparados con los obtenidos mediante el uso de la FFT. Se observa que los resultados obtenidos mediante ambos procedimientos son exactamente iguales.

Referencias

[1] R.V.L.Hartley, *A More Symmetrical Fourier Analysis Applied to Transmission Problems*, Proc. of the I.R.E., **30**, (1942), 144-150

[2] R.N.Bracewell, *Discrete Hartley Transform*, J. Opt. Soc. Amer., **73**, (1983), 1832-1835

[3] S.R. Winterstein, *Random Process Simulation with the Fast Hartley Transform*, J. Sound and Vibration, **137**, (1990), 527-531

[4] S.K. Chandran, and Prabhu, K.M.M., *Computation of DWT via FHT-based implementation*, Electronics Letters, **32**, (1996), pp. 1437-1438

[5] O. Buneman, *Two Hartley Transforms for the price of one FFT*, (Sometido para publicación)