Universidad de Las Palmas de Gran Canaria Insituto Universitario de Sistemas Inteligentes y Aplicaciones Numéricas en Ingeniería

Trabajo de Fin Máster :

Aplicación del análisis isogeométrico a un problema bidimensional de Poisson

Tutores: José María Escobar Sánchez, Rafael Alejandro Montenegro Armas

Marina Brovka Las Palmas de Gran Canaria, 18 de junio de 2012

Índice

1.	Intr	oducción	3
2.	Conceptos básicos		4
	2.1.	B-splines	4
	2.2.	Curvas y superficies B-spline	6
	2.3.	Non-uniform rational B-splines (NURBS) y T-splines	7
3.	Res	olución del problema mediante análisis isogeométrico	9
	3.1.	Problema a resolver	9
	3.2.	Parametrización del dominio	9
	3.3.	Concepto del análisis isogeométrico	11
	3.4.	Formulación variacional	13
	3.5.	Ensamblaje del sistema	13
4.	Res	ultados	16
	4.1.	Error y convergencia	16
5.	Otro	os ejemplos	19
	5.1.	Ejemplo 1	19
	5.2.	Ejemplo 2	20
	5.3.	Ejemplo 3	22

	5.4. Ejemplo 4	24
6.	Conclusiones y líneas futuras	26
Bi	bliografía	27

1. Introducción

El principal inconveniente del método de elementos finitos (FEM) clásico es el problema de precisión producido por la aproximación de la geometría. El análisis isogeométrico (IGA)[1, 2] surge en un intento de solucionar dicho inconveniente unificando FEM clásico con el campo del diseño asistido por ordenador (CAD). La principal idea de este método consiste en utilizar para el espacio de soluciones las mismas funciones de base que se han utilizado para modelado de la geometría del dominio. Otra ventaja de este método, comparado con FEM, es la mayor suavidad de la solución numérica obtenida. Utilizando las funciones de base NURBS de grado 3, por ejemplo, se consigue una solución de clase C^2 frente a C^0 del FEM.

Sin embargo, IGA es un método muy reciente que todavía tiene numerosos frentes abiertos. Por un lado la distorsión inherente a la parametrización del dominio puede llegar a producir elementos con jacobiano negativo, lo que dificultaría la aplicación del método. Por otro lado, no existe, por el momento, una manera completamente satisfactoria de simultanear condiciones de contorno de tipo Dirichlet y Neumann. Tampoco esta clara la convergencia del método en geometrías complejas.

Para la aplicación del análisis isogeométrico se pretende hacer uso de T-splines[3] que, a diferencia de NURBS [4], permiten hacer un refinamiento local de malla. Esto conlleva algunas dificultades a la hora de elaborar un código eficiente y deja abiertas muchas cuestiones de carácter técnico y teórico sobre la implementación del método. Todas estas cuestiones se pretende abordar conjuntamente en nuestro grupo de trabajo.

Como primer paso en estudio de análisis isogeométrico para abordar las cuestiones planteadas, se pretende desarollar un código para resolución de la ecuación de Poisson en 2-D mediante IGA, utilizando lenguaje de programación el paquete *Mathematica*. Paralelamente, en otros trabajos fin de máster, se va a elaborar un código para generación de una T-mesh y otro código para la optimización de la calidad de la malla, necesarios para obtener un código general y eficiente de elementos isogeométricos en 2-D. El código que se propone elaborar va a servir posteriormente como una herramienta para experimentar con el método de IGA.

2. Conceptos básicos

2.1. B-splines

El conjunto de *n* funciones de base B-spline de grado *p* en un *knot vector* $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+p+1}\}$ se define recursivamente con la formula :

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1}, \\ 0 & \text{othewise.} \end{cases}$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi). \qquad (i = 1, 2, ..., n)$$

Cada función de base es una función polinómica a trozos con un soporte compacto.



Figura 1: B-splines de grado 1 para un *knot vector* {0,1,2,3,4}.

Figura 2: B-splines de grado 2 para un *knot vector* {0,1,2,3,4,5}

Para definir *n* funciones de base de grado *p* se necesita n+p+1 knots. El soporte de la función $N_{i,p}$ es intervalo $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$. Las funciones son de clase C^{∞} en los intervalos (ξ_i, ξ_{i+1}) y de clase C^{p-k} en los knots, donde *k* es multiplicidad del knot.

Propiedades:

- Partición de unidad: $\sum_{i=1}^{n} N_{i,p}(\xi) = 1.$
- No negatividad: $N_{i,p}(\xi) \ge 0$.
- Linealmente independientes



Figura 3: Funciones B-spline de grado 3 para un *knot vector* {0,0,0,0,0.25,0.5,0.75,1,1,1,1}. Los knots de las funciones: $N_{1,3} -$ {0,0,0,0,0.25}, $N_{2,3} -$ {0,0,0,0.25,0.5}, $N_{3,3} -$ {0,0,0,0.25,0.5,0.75}, $N_{4,3} -$ {0,0,0.25,0.5,0.75,1,1}, $N_{5,3} -$ {0.25,0.5,0.75,1,1}, $N_{6,3} -$ {0.5,0.75,1,1,1}, $N_{7,3} -$ {0.75,1,1,1,1}.

Funciones B-spline en 2D se definen como producto tensorial de 2 funciones de base univariantes:

$$N_{i,p}(\xi,\eta) = N_{i_1,p}(\xi) \cdot N_{i_2,p}(\eta).$$



Figura 4: Una función B-spline bivariante.

2.2. Curvas y superficies B-spline

Una curva B-spline en \mathbb{R}^d (d = 2, 3) se define como combinación lineal de las funciones B-spline univariantes :

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^{n} P_i N_{i,p}(\xi),$$

donde los coeficientes $P_i \in \mathbb{R}^d$ se llaman puntos de control. En general, los puntos de control no se interpolan por la curva B-spline, salvo el primero y último punto del *knot vector* que se repiten p+1 veces, en ese caso se dice que el *knot vector* es abierto. Toda curva B-spline tiene la propiedad de estar contenida en la envolvente convexa de sus puntos de control.



Figura 5: Curva B-spline y su polígono de control

Analogamente, una superficie B-spline en \mathbb{R}^3 se define como combinación lineal de las funciones B-spline bivariantes :

$$C(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{n} P_i N_{i,p}(\xi,\eta),$$

donde los puntos de control $P_i \in \mathbb{R}^3$.

2.3. Non-uniform rational B-splines (NURBS) y T-splines

Una función racional NURBS se define a partir del conjunto de las funciones Bspline polinómicas:

$$R_{i,p}(\xi) = \frac{w_i N_{i,p}(\xi)}{\sum_{j=1}^n w_j N_{j,p}(\xi)},$$

donde $w_i \ge 0$ es el peso correspondiente a la componente $N_{i,p}$. Funciones NURBS consiguen una parametrización exacta de las secciones cónicas (circulo, elipse). Si todos los pesos w_i son iguales - las funciones NURBS se convierten en funciones polinómicas B-spline.



La principal desventaja de las funciones NURBS es que la inserción de los knots es una operación global, con lo cual solo es posible un refinamiento global. Este problema se resuelve con T-splines que permiten hacer un refinamiento local.



Figura 7: (a) Refinamiento global uniforme, (b) T-mesh con un refinamiento local.

Las T-splines son NURBS definidas sobre una estructura similar a la de la figura 8, conocida como T-mesh. Los knots de la T-spline se definen por las intersecciones de líneas horizontales y verticales con las aristas de la T-mesh, tal como se muestra en la figura 8.



Figura 8: Knots de la función T-spline centrada en (ξ_3, η_3) con soporte $[\xi_1, \xi_5] \times [\eta_1, \eta_5]$.

3. Resolución del problema mediante análisis isogeométrico

3.1. Problema a resolver

Se propone resolver una ecuación de Poisson en un dominio circular con condiciones de contorno tipo Dirichlet:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = -40(10x^2 + 10y^2 - 1) e^{-10(x^2 + y^2)}, \quad (x, y) \in \Omega = \{x^2 + y^2 \le 1\}, \\ u \Big|_{\partial \Omega} = e^{-10}. \end{array} \right.$$

La solución analítica : $u(x, y) = e^{-10(x^2+y^2)}$.

3.2. Parametrización del dominio

El problema se resuelve en el espacio paramétrico, por lo tanto el primer paso es conseguir una parametrización del dominio real mediante funciones spline. Para ello construimos una malla (fig. 9) en el espacio paramétrico (un cuadrado 1×1) y definimos en ella una base de funciones bivariantes T-spline: $\{B_i(\xi,\eta)\}_{i=1..N}$. Necesitamos una transformación geométrica biyectiva $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que transforme el espacio paramétrico en espacio físico del problema:



Buscamos la transformación T como combinación lineal de las funciones de base :

$$T(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{N} C_i B_i(\xi,\eta), \quad C_i \in \mathbb{R}^2.$$

Para hallar puntos de control C_i definimos N puntos de interpolación en espacio paramétrico $\{P_i\}$, y en espacio físico $\{Q_i\}$ y planteamos un sistema de ecuaciones:

$$T(P_i) = \sum_{i=1}^{N} C_i B_i(P_i) = Q_i, \quad i = 1, 2, \dots N.$$

Resolviendo el sistema, obtenemos los coeficientes C_i y, por lo tanto, la transformación geométrica T. Como puntos de interpolación P_i del espacio paramétrico se toman normalmente las *anclas* de las funciones (vértices de la malla) mas otros si hay repetición de knots, mientras que los puntos Q_i del espacio físico deben ser elegidos convenientemente para conseguir una malla de buena calidad. Una buena calidad de la malla supone que el jacobiano de la transformación T no tome valores negativos, valores próximos a cero y no tenga variación muy grande.



Figura 9: Ejemplo de una malla 8×8 celdas en espacio físico y paramétrico con sus puntos de interpolación.



Figura 10: Jacobiano de la transformación T para la malla de la figura 9.

Una vez definida la transformación T, para cualquier función f(x, y) en espacio físico Ω se puede definir función \hat{f} en espacio paramétrico como: $\hat{f}(\xi, \eta) = f(T(\xi, \eta)) = f(x, y)$, o también $f(x, y) = \hat{f}(T^{-1}(x, y)) = \hat{f}(\xi, \eta)$.

Nota 3.1 A partir de ahora Ω significa la aproximación por splines del dominio real.

3.3. Concepto del análisis isogeométrico

Consideremos en general el problema de Dirichlet:

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega = \{x^2 + y^2 \leq 1\}, \\ u \Big|_{\partial \Omega} = b(x,y). \end{array} \right.$$

Buscamos la solución \hat{u}_h en espacio paramétrico como una combinación lineal de las mismas funciones de base definidas anteriormente para la parametrización del dominio:

$$\hat{u}_h(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^N a_i B_i(\xi,\eta), \quad a_i \in \mathbb{R}.$$
(1)

La solución en el espacio físico se define como $u_h(x,y) = \hat{u}_h(T^{-1}(x,y)) = \hat{u}_h(\xi,\eta).$

Las funciones de base $\{B_i\}_{i=1..N}$ se dividen en dos grupos:

- $\{B_i\}_{i=1,\dots,A}$ las que se anulan en el contorno y
- $\{B_i\}_{i=A+1,\dots,N}$ las que no son nulas en el contorno $\partial\Omega$.



Figura 11: Las funciones $\{B_i\}_{i=1,\dots,A}$ y $\{B_i\}_{i=A+1,\dots,N}$ para una malla de 16 celdas con A = 25 y N = 49.

Partimos el sumatorio (1) en dos partes:

$$\hat{u}_h = \sum_{i=1}^A a_i B_i + \sum_{i=A+1}^N a_i B_i,$$
(2)

donde los coeficientes a_i (i = A + 1, ..., N) en el último sumatorio se puede hallar de las condiciones del contorno: $u|_{\partial\Omega} = b(x, y)$. Para ello se plantea un sistema de N - A

ecuaciones:

$$\sum_{i=A+1}^{N} a_i B_i(\xi_j, \eta_j) = b(T(\xi_j, \eta_j)), \quad j = 1..N - A,$$

donde $P_j = (\xi_j, \eta_j)$ - puntos de interpolación en el contorno.

Denotemos $g(\xi, \eta) = \sum_{i=A+1}^{N} a_i B_i(\xi, \eta).$ Entonces $\hat{u}_h = \sum_{i=1}^{A} a_i B_i + g.$ (3)

Por lo tanto tenemos A incógnitas: a_i (i = 1, ..., A)

Nota 3.2 La funciones $B_i(\xi, \eta)$ están definidas en espacio paramétrico $\hat{\Omega}$, y cuando decimos $B_i(x, y)$ - nos referimos a las funciones del espacio físico $B_i(x, y) = B_i(T^{-1}(x, y)) = B_i(\xi, \eta)$. De manera similar se hace la misma consideración para la función $g(\xi, \eta)$.

3.4. Formulación variacional

Método de residuos ponderados:

$$\int_{\Omega} (\Delta u + f) B_i \, d\Omega = 0, \quad i = 1, ..., A.$$

Integramos por partes:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla B_i \, d\Omega - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} B_i \, d\Gamma = \int_{\Omega} f B_i \, d\Omega.$$

La funciones de peso B_i son nulas en el contorno, por lo tanto:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla B_i \, d\Omega = \int_{\Omega} f B_i \, d\Omega.$$

Segun (3):

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^{A} a_j \, \bigtriangledown B_j + \bigtriangledown g \right) \cdot \bigtriangledown B_i \, d\Omega = \int_{\Omega} f B_i \, d\Omega.$$

$$\sum_{j=1}^{A} a_j \left(\int_{\Omega} (\nabla B_j \cdot \nabla B_i \, d\Omega) \right) = \int_{\Omega} f B_i \, d\Omega - \int_{\Omega} \nabla g \cdot \nabla B_i \, d\Omega, \quad i = 1, ..., A.$$

En forma matricial tenemos: $K\bar{a} = \bar{f}$, donde

$$K_{i,j} = \int_{\Omega} \nabla B_j \cdot \nabla B_i \, d\Omega,$$

$$f_i = \int_{\Omega} f B_i \, d\Omega - \int_{\Omega} \nabla g \cdot \nabla B_i \, d\Omega, \quad i, j = 1, ..., A$$

Nota 3.3 $\nabla = \nabla_{xy} \ y \ \Delta = \Delta_{xy}.$

3.5. Ensamblaje del sistema

Calculamos la matriz K^e en cada celda Ω_e . Realizamos el cambio de variable $(x, y) = T(\xi, \eta)$ para calcular las integrales en el elemento $\hat{\Omega}_e$ del espacio paramétrico.

Cambio de variable: $T(\xi,\eta): \begin{cases} x = x(\xi,\eta) \\ y = y(\xi,\eta) \end{cases}$



Figura 12: Elemento en espacio físico y parametrico.

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix}$$

Tal que $d\Omega = dx \, dy = |\mathbf{J}| \, d\xi \, d\eta = |\mathbf{J}| \, d\hat{\Omega}$,

donde
$$|\mathbf{J}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}$$
 - jacobiano de la transformación T .

$$\begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{pmatrix} -\frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}.$$

$$\nabla_{xy} B_i(T(\xi,\eta)) = \nabla_{\xi\eta} B_i(\xi,\eta) \mathbf{J}^{-1}.$$

Por lo tanto:

$$K_{i,j}^{e} = \int_{\Omega_{e}} \nabla B_{j} \cdot \nabla B_{i} \, d\Omega = \int_{\hat{\Omega}_{e}} \nabla_{\xi\eta} B_{j}(\xi,\eta) \, \mathbf{J}^{-1} \cdot \nabla_{\xi\eta} B_{i}(\xi,\eta) \, \mathbf{J}^{-1} \, |\mathbf{J}| \, d\hat{\Omega},$$
$$f_{i}^{e} = \int_{\Omega_{e}} f(x,y) B_{i} \, d\Omega - \int_{\Omega_{e}} \nabla g \cdot \nabla B_{i} \, d\Omega = \int_{\hat{\Omega}_{e}} \hat{f}(\xi,\eta) B_{i} \, |\mathbf{J}| \, d\hat{\Omega} - \int_{\hat{\Omega}_{e}} \nabla_{\xi\eta} g \, \mathbf{J}^{-1} \cdot \nabla_{\xi\eta} B_{i} \, \mathbf{J}^{-1} \, |\mathbf{J}| \, d\hat{\Omega}.$$

Evaluamos las integrales por cuadratura de Gauss con $16(4\times4)$ puntos de integración.



Figura 13: Ejemplo de la matriz de rigidez K, malla 16×16 celdas, 289 grados de libertad.

4. Resultados

4.1. Error y convergencia

Se han obtenido los siguientes resultados:



Figura 14: Evolución de la solución y su gradiente en las primeras dos iteraciones: 4×4 y 8×8 celdas.



Figura 15: (a) Solución numerica \hat{u}_h en el espacio paramétrico, (b) Solución númerica u_h en el espacio físico, 289 grados de libertad, 256 celdas.



Figura 16: (a) Representación gráfica del error $|u_h - u|$, (b) Representación gráfica del error de gradiente $|\nabla u_h - \nabla u|$, 289 grados de libertad, 256 celdas.

Para analizar la convergencia se ha calculado el error de aproximación en normas L_2, L_∞ y H^1 .

$$e = u_h - u.$$

$$||e||_{L_{\infty}} = \max_{(x,y)\in\Omega} |e(x,y)|.$$

$$||e||_{L_2} = \left(\int_{\Omega} (u_h - u)^2 \, d\Omega\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$||e||_{H^1} = \left(\int_{\Omega} (\nabla u_h - \nabla u)^2 + (u_h - u)^2 \, d\Omega\right)^{\frac{1}{2}}.$$

El orden de convergencia que se observa en norma L_2 es $\simeq 2.1$ y en norma H^1 es $\simeq 1.6$.



Figura 17: Error ||e|| en función del numero de grados de libertad con refinamiento global.

También se calculó estimador de error:

$$E(\Omega)^2 = \sum_e E(\Omega_e)^2 = \sum_e \left(\int_{\Omega_e} h_e^2 (\Delta u_h + f)^2 \, d\Omega \right),$$

donde h_e diámetro de la celda Ω_e .



Figura 18: El error en normas L_2 , H^1 y estimador de error $E(\Omega)$.

Según los resultados obtenidos, el estimador de error $E(\Omega)$ tiene el mismo orden de convergencia que el error en norma H^1 y se comporta como:

$$E(\Omega) = C ||e||_{H^1} = 5.8 ||e||_{H^1}.$$

Las celdas con el valor del estimador mas elevado coinciden con las que tienen el error en H^1 mas alto comparado con otras celdas.



Figura 19: Estimador $E(\Omega)$ y error H^1 en una malla de 32×32 celdas.

5. Otros ejemplos

5.1. Ejemplo 1

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = 4, \quad (x,y) \in \Omega = \{x^2 + y^2 \le 1\}, \\ u \Big|_{\partial \Omega} = 0. \end{array} \right.$$

Solución analítica : $u(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)$.



Figura 20: (a) Solución numerica \hat{u}_h en el espacio paramétrico, (b) Solución numérica u_h en el espacio físico, 1089 grados de libertad, 1024 celdas.



Figura 21: Representación gráfica del error $|u_h - u|$, 1089 grados de libertad, 1024 celdas.



Figura 22: Error ||e|| en función del número de grados de libertad con refinamiento global de una malla uniforme.

5.2. Ejemplo 2

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{8(1+x^2+y^2)-16}{(1+x^2+y^2)^3}, \quad \Omega = \{x^2+y^2 \le 1\}, \\ u\Big|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

Solución analítica : $u(x, y) = \frac{2}{1 + x^2 + y^2}.$



Figura 23: (a) Solución numérica \hat{u}_h en el espacio paramétrico, (b) Solución númerica u_h en el espacio físico, 289 grados de libertad, 256 celdas.



Figura 24: Representación gráfica del error $|u_h - u|$, 289 grados de libertad, 256 celdas.



Convergencia:

Figura 25: Error ||e|| en función del número de grados de libertad con refinamiento global de una malla uniforme.

5.3. Ejemplo 3

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{\pi^2}{4} (x^2 + y^2) \sin \frac{\pi x y}{2}, & \Omega = \{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}, \\ u|_{x=0} = 0, \\ u|_{y=0} = 0, \\ u|_{y=1} = \sin \frac{\pi x}{2}, \\ u|_{x=1} = \sin \frac{\pi y}{2} \end{cases}$$

Solución analítica : $u(x, y) = \sin \frac{\pi x y}{2}$.



Figura 26: Solución númerica u_h (a) y su error $|u_h - u|$ (b), 289 grados de libertad, 256 celdas.



Figura 27: Estimador $E(\Omega)$ (a) y error H^1 (b) en las celdas, 256 celdas.



Figura 28: Error ||e|| en función del numero de grados de libertad con refinamiento global de una malla uniforme.

Nota 5.1 En este ejemplo la transformación geometríca T es la identidad.

5.4. Ejemplo 4

El problema resuelto en una T-mesh:

$$\begin{cases} \Delta u = -40(10x^2 + 10y^2 - 1) e^{-10(x^2 + y^2)}, & (x, y) \in \Omega = \{x^2 + y^2 \le 1\}, \\ u \Big|_{\partial \Omega} = e^{-10}. \end{cases}$$

Solución analítica : $u(x, y) = e^{-10(x^2+y^2)}$.



Figura 29: T-mesh para para ejemplo 4, 61 grados de libertad, 40 celdas.



Figura 30: Jacobiano de la transformación T del ejemplo 4, 40 celdas.



Figura 31: Solución numérica \hat{u}_h y su error en el espacio paramétrico, 61 grados de libertad.

 $||e||_{L_{\infty}} = 0.016,$ $||e||_{L_{2}} = 0.006,$ $||e||_{H^{1}} = 0.1$

25

6. Conclusiones y líneas futuras

El método parece ser muy sensible a la calidad de parametrización del dominio real que hacemos y, en particular, a la aproximación del contorno. La mejor convergencia se ha conseguido en los casos donde la transformación geométrica es la identidad (véase sección 5.3) o en casos en los que la solución y su gradiente son bastante pequeños cerca del contorno, comparados con los valores en el interior del dominio (sección 4.1).

Todos los ejemplos mostrados en el trabajo, salvo el último, fueron resueltos en una malla uniforme y con un refinamiento global. El siguiente paso es resolver los problemas propuestos realizando refinamientos locales con una T-mesh para intentar mejorar la convergencia del método.

Bibliografía

- T.J.R. Hughes, J.A. Cottrell, and Y. Bazilevs. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194:4135–4195, 2005.
- [2] J. Austin Cottrell, Thomas J.R. Hughes, and Yuri Bazilevs. Isogeometric Analysis. WILEY, 2009.
- [3] Y. Bazilevs, V.M. Calo, T.J.R. Hughes, J.A. Cottrell, S. Lipton, M.A. Scott, and T.W. Sederberg. Isogeometric analysis using T-splines. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199:229–263, 2010.
- [4] L Piegl and W Tiller. The NURBS Book. Springer, 1997.
- [5] Becker E.B and Carey G.F. Finite elements. An introduction. Prentice-Hall, 1982.