Revista Electrónica de Comunicaciones y Trabajos de ASEPUMA. **Rect@**

Volumen 12. Páginas 68 a 84.

COMPETENCIA ESPACIAL POR CUOTAS DE MERCADO: EL PROBLEMA DEL LÍDER-SEGUIDOR MEDIANTE PROGRAMACIÓN LINEAL

CLARA M. CAMPOS RODRÍGUEZ
ccampos@ull.es
Universidad de La Laguna/ Instituto Universitario de Desarrollo Regional
38271 La Laguna, Spain

DOLORES R. SANTOS PEÑATE
drsantos@dmc.ulpgc.es
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria / Dep. de Métodos Cuantitativos en Economía y Gestión
35017 Las Palmas de Gran Canaria, Spain

JOSÉ A. MORENO PÉREZ
jamoreno@ull.es
Universidad de La Laguna/ Instituto Universitario de Desarrollo Regional
38271 La Laguna, Spain

Recibido 22/02/2011
Revisado 31/03/2011
Aceptado 05/05/2011

RESUMEN: En este trabajo consideramos un problema de localización donde dos empresas entran secuencialmente en un mercado, compitiendo por captar clientes distribuidos en un conjunto finito de puntos, a los que ofrecen un producto o servicio. La demanda existente se reparte entre las empresas competidoras atendiendo a la proximidad entre clientes y centros proveedores. En este modelo, donde el objeto de la competencia es la cuota de mercado, y donde el único criterio de decisión del cliente es la distancia al suministrador del bien o servicio, la única variable de decisión relevante es la localización de los centros de suministro. Se considera una versión del modelo líder-seguidor. El problema consiste en determinar las estrategias óptimas para dos empresas, la empresa líder y la seguidora, que toman sus decisiones de forma secuencial, con el fin de conseguir ciertos objetivos. La formulación propuesta incorpora un umbral de distancia que representa la diferencia mínima entre la distancia cliente-líder y cliente-seguidor que produce un cambio en la preferencia del consumidor. El objetivo del seguidor, una vez conocida la ubicación del líder, es maximizar la cuota de mercado que captura. El problema de optimización del líder consiste en minimizar la máxima cuota de mercado que capturaría el seguidor.

Palabras claves: Localización competitiva, problema del líder-seguidor, umbral de preferencia.

ABSTRACT: In this paper we consider a location problem where two firms enter the market sequentially, competing for capturing customers located at a finite set of points, to which the competitors offer a product or service. The existing demand is satisfied by the rival firms according to the proximity between clients and facilities. In this model, where the object of competition is the market share and the only customer decision criterion is the distance from clients to the supplier of goods or services, the only relevant decision variable is the location of facilities. A version of the leader-follower model is considered. The problem is to determine optimal strategies for each firm, the leader and the follower, which make decisions sequentially in order to achieve certain objectives. The proposed formulation incorporates a distance threshold that represents the minimum difference between the distances client-leader and client-follower that provides a change in the consumer preference. The objective of the follower, when the location of the leader is known, is to maximize its captured demand or market share. The optimization problem of the leader is to minimize the maximum market share that the follower would capture.

Keywords: Competitive location, Leader-follower problem, Preference threshold.

1. Introducción

Los modelos de competencia espacial representan situaciones en las que dos o más entidades compiten para captar elementos distribuidos en el espacio, tomando decisiones donde al menos una de las variables relevantes es la localización de estas entidades. En nuestro caso consideraremos que estas entidades son empresas que compiten por proveer de productos o servicios a clientes distribuidos en un conjunto finito de puntos. Junto a la localización, pueden intervenir otras variables como, por ejemplo, los precios de venta, las cantidades ofertadas, y la dimensión de los centros suministradores del bien o servicio.

Estos modelos están dirigidos a determinar estrategias óptimas en la toma de decisiones sobre la localización, con el fin a alcanzar ciertos objetivos. Aunque el objetivo natural de las empresas es maximizar sus beneficios, o bien maximizar la cuota de mercado, pueden perseguirse otros. Así, podríamos considerar los siguientes:

- La empresa quiere maximizar su cuota de mercado.
- La empresa quiere minimizar la cuota de mercado de su competidor.
- La empresa quiere maximizar la diferencia entre su cuota de mercado y la de su competidor.
- La empresa quiere asegurar que su cuota de mercado no es inferior a la de su competidor.

En problemas en los que el bien o servicio tiene carácter esencial y, por tanto, la demanda existente debe ser totalmente satisfecha, la demanda total se reparte entre los competidores y los cuatro objetivos anteriores son equivalentes.

El comportamiento del cliente se modela mediante una regla de elección. Dadas las características y ubicación de dos establecimientos que ofertan un determinado producto, la regla de elección del cliente establece los criterios de decisión y la forma en que éste lleva a cabo la elección de los centros por parte del cliente. Si suponemos que el único criterio de elección es la distancia entre el cliente y los establecimientos, pueden considerarse las siguientes reglas de decisión:

- Regla de elección binaria, los clientes eligen el establecimiento más cercano y utilizan en él todo su poder de compra.
- Regla de elección parcialmente binaria, los clientes eligen el establecimiento más cercano de cada una de las firmas que operan en el mercado.
- Regla de elección proporcional, los clientes eligen todos los establecimientos y utilizan en ellos una cantidad de poder de compra que viene dada por una función decreciente de la distancia desde el cliente al establecimiento.

La regla de elección binaria representa un comportamiento de “todo o nada”. Según ésta, un cliente satisfaría toda su demanda en el centro más próximo, aunque hubiese otro establecimiento casi tan cercano como aquél. Los empates se resuelven mediante una función de distribución. La regla de elección binaria supone que el cliente es sensible a cualquier diferencia entre las distancias a los establecimientos, lo cual no es realista. A pesar de estas deficiencias, el modelo binario es importante desde el punto de vista teórico y es muy útil para las aplicaciones en las que el producto puede ser considerado homogéneo y se supone que los establecimientos son idénticos, como por ejemplo los quioscos de periódicos y las farmacias.

Una regla de elección del cliente más realista reemplaza la conducta hipersensible del consumidor, implícita en la regla binaria, por un comportamiento sensible a un umbral. En este modelo un cliente utiliza la empresa A exclusivamente sólo si la distancia de éste cliente al competidor excede la distancia del cliente a la firma A en una cantidad mayor o igual que un umbral o sensibilidad mínima (ver Devletoglou (1965) y Devletoglou y Demetriou (1967)).

En el extremo opuesto a la regla de elección binaria encontramos la regla de elección proporcional. De acuerdo con esta regla, un cliente visita todos los establecimientos y la porción de demanda capturada por cada uno de ellos depende de la distancia entre el cliente y el establecimiento.

La disposición del cliente a viajar una distancia larga para acudir a un establecimiento está condicionada por el carácter del bien demandado. Los bienes esenciales deben ser consumidos y los clientes visitan uno o más establecimientos para obtenerlos. Los bienes no esenciales no son indispensables, de manera que los clientes pueden decidir no visitar ciertos establecimientos si consideran que la distancia hasta ellos es demasiado grande. Los bienes esenciales y no esenciales se corresponden con las denominadas demandas inelásticas y elásticas respectivamente.

El estado del mercado viene definido por las firmas que operan en él y por las reglas que gobiernan la apertura y cierre de los establecimientos. Se pueden considerar varios escenarios:

- Hay s firmas operando en el mercado. Cada firma F_i tiene p_i establecimientos $i = 1, \ldots, s$ y la firma F_k quiere abrir $\overline{r}_k$ establecimientos y cerrar r_k establecimientos.
- Hay s firmas operando en el mercado. Cada firma F_i tiene p_i establecimientos $i = 1, \ldots, s$ y una nueva firma F_{s+1} quiere entrar en el mercado con p_{s+1} establecimientos.
- Ninguna firma opera en el mercado y la firma F_1 quiere entrar en el mercado con p_1 establecimientos.

En el último escenario, cuando el mercado está vacío y la firma F_1 quiere entrar en el mercado con p_1 establecimientos, una de las estrategias posibles para la firma F_1 es abrir los establecimientos en las localizaciones que minimicen la máxima cuota de mercado que los competidores puedan alcanzar si entran en el futuro en el mercado como maximizadores de su cuota de mercado. En este problema de localización secuencial la firma F_1 es el líder y los competidores son los seguidores.

Un problema de localización líder-seguidor se denomina también problema de Stackelberg. Una solución de Stackelberg es un par (X_p^*, Y_r^*) donde Y_r^* es la estrategia óptima del seguidor si el líder tiene p establecimientos localizados en X_p^*, y X_p^* es la estrategia preventiva óptima del líder, suponiendo que el seguidor abre r centros de servicio. Para el problema en redes, los términos, $(r|X_p)$-medianoide y $(r|p)$-centroide fueron introducidos por Hakimi (1983) para denominar los problemas del seguidor y del líder respectivamente.

En este trabajo describimos la formulación de los problemas de optimización involucrados en el modelo líder-seguidor como problemas de programación lineal, considerando una regla de elección de los clientes que incorpora un umbral de sensibilidad a las diferencias entre las distancias a los centros suministradores del bien o servicio. Este umbral es la diferencia mínima entre la distancia al líder y la distancia al seguidor que lleva al cliente a cambiar su elección y acudir a un centro de la empresa seguidora.

2. Problemas de localización competitiva múltiple

2.1. *Antecedentes*

Revisiones de los modelos de localización competitiva se pueden encontrar en Eiselt y Laporte (1989), Eiselt, Laporte y Thisse (1993), Friesz, Miller y Tobin (1988), y Plastria (2001), entre otros. Un resumen del modelo líder-seguidor en redes es presentado en Santos-Peñate, Suárez-Vega y Dorta-González (2007).

ReVelle (1986) formuló el Problema de Captura Máxima, éste es el problema del seguidor discreto considerando la localización de varios establecimientos, con una regla de elección binaria y demanda inelástica. Una revisión del Problema de Captura Máxima y algunas extensiones se presenta en Serra y ReVelle (1995). El problema de localización del líder-seguidor en redes fue formalizado por Hakimi (1983, 1990) que introdujo los términos $(r|p)$-centroide y $(r|X_p)$-medianoide para denominar a las soluciones de los problemas del líder y del seguidor, respectivamente. El $(r|X_p)$-medianoide es la solución óptima del problema del seguidor cuando el líder tiene p establecimientos localizados en los puntos de X_p. El $(r|p)$-centroide es la solución óptima del líder cuando el líder abre p establecimientos y el seguidor abre r. Algunos resultados sobre la existencia de solución óptima en el conjunto de vértices para el problema del $(r|X_p)$-medianoide en diferentes escenarios, pueden encontrarse en Hakimi (1964) y Suárez-Vega et al. (2004). Un estudio reciente de Spoerhase y Wirth (2009) incluye un resultado de la discretización para el $(1|p)$-centroide en un árbol.

Los resultados de la discretización permiten la resolución de problemas en redes usando herramientas diseñadas para resolver problemas en espacios discretos. En ciertos escenarios, estos resultados garantizan la existencia de un $(r|X_p)$-medianoide en el conjunto de vértices que se convierte en el conjunto de localizaciones candidatas para abrir los establecimientos. En otras situaciones, el conjunto de candidatos depende de las localizaciones elegidas por el líder, haciendo el problema más difícil. Sólo unos pocos artículos de modelos de localización muestran procedimientos para encontrar una solución de Stackelberg, incluso cuando se asume que los vértices son las únicas localizaciones candidatas (ver por ejemplo, Benati y Laporte (1994); Bhadury y otros (2003); Redondo y otros (2010); Serra y ReVelle (1994, 1995); Spoerhase y Wirth (2009)).

2.2. *El modelo*

Sea C el conjunto de las localizaciones de los clientes y sea L el conjunto de posibles localizaciones de establecimientos sobre una red o grafo $G=(V,E)$. Los conjuntos C y L son por lo general finitos y consisten en vértices; es decir, $C,L \subseteq V$. Sea $d(c,x)$ la distancia desde la localización $c\in C$ a la localización $x\in L$. Sea w una función de pesos sobre el conjunto de las localizaciones de los clientes, donde el peso $w(c)$ de la localización c representa la demanda de los clientes ubicados en ese punto. El conjunto C es el conjunto de los puntos de demanda.

El modelo básico es el modelo del líder-seguidor simple en el que cada competidor sólo va a localizar un establecimiento. Denotemos por x a la localización del líder y por y a la localización del seguidor. Para dos puntos distintos, x e y de L, la preferencia de cada cliente en c se establece como una función monótona de la diferencia entre las distancias a las localizaciones $d(c,y)$ - $d(c,x)$ o del cociente entre ellas $d(c,y)/d(c,x)$. Los casos más sencillos son:

- El establecimiento en $y\in L$ es preferido por el cliente en c a $x\in L$ si $d(c,y) < d(c,x) - \delta$.
- El establecimiento en $y\in L$ es preferido por el cliente en c a $x\in L$ si $d(c,y) / d(c,x) < \gamma$ (Si $d(c,x)=0$, la localización x es preferida a y).

Definidas de esta forma, las preferencias son asimétricas. Habría aversión al líder si $\delta < 0$, o $\gamma > 1$, y aversión al seguidor cuando $\delta \geq 0$ o $\gamma \leq 1$. En ningún caso dos localizaciones del líder y del seguidor son igualmente preferidas, y en la frontera, $d(c,y) = d(c,x) - \delta$ o $d(c,y) / d(c,x) = \gamma$, esta regla favorece al líder.

Para cada par de localizaciones $x,y \in$ L, sea $C(y \prec x)$ el conjunto de localizaciones de clientes que cambian su elección de la localización x por la localización y más cercana. Entonces

$$C(y \prec x) = \{c \in C : d(c,y) < d(c,x) - \delta\}. \quad (1)$$

La demanda total de los clientes que cambiarían a la localización y desde la localización x se denota $W(y \prec x)$ y vale:

$$W(y \prec x) = \sum_{c\in C(y \prec x)} w(c). \quad (2)$$

Sea

$$W^*(x) = \max_{y\in L} W(y \prec x). \quad (3)$$

Un x-**medianoide** es un punto $y\in L$ tal que $W^*(x) = W(y \prec x)$. Un **centroide** es un punto $x^*\in L$ tal que

$$W^*\left(x^*\right) = \min_{x \in L} W^*\left(x\right). \tag{4}$$

Consideremos ahora el problema de localización múltiple en el que los puntos x e y de L son sustituidos por conjuntos de p y r localizaciones, respectivamente. Esto es, sea p el número de establecimientos que abrirá el líder y r el número de establecimientos instalará que el seguidor.

Sea L^q el conjunto de subconjuntos de L con q puntos, es decir

$$L^q = \left\{ X \subseteq L : \left| X \right| = q \right\} \tag{5}$$

Entonces definimos las nociones C($X \prec$ Y) y W(C $\prec$ Y) para cada par de conjuntos de puntos, $X, Y \subseteq L$. La distancia desde la localización c de un cliente hasta un conjunto de localizaciones $Z \subseteq L$ es

$$d(c, Z) = \min\left\{ d(c, z) : z \in Z \right\} \tag{6}$$

Los clientes que cambian su elección al punto $y \in L$ desde un conjunto $X \subseteq L$ son aquellos más cercanos a y que a cualquier punto de X en una diferencia superior al umbral δ. Por lo tanto

$$C(y \prec X) = \bigcap_{x \in X} C(y \prec x) = \left\{ c \in C : d(c, y) < d(c, X) - \delta \right\}. \tag{7}$$

El conjunto $C(Y \prec X)$ de localizaciones de clientes que captura el conjunto de localizaciones $Y \subseteq L$ frente al conjunto de localizaciones $X \subseteq L$ es el conjunto de puntos de C para los que existe un punto de Y más cerca que cualquier punto de X en una diferencia superior al umbral δ. Así

$$C(Y \prec X) = \left\{ c \in C : d(c, Y) < d(c, X) - \delta \right\}. \tag{8}$$

Éste es el conjunto de localizaciones de puntos c tales que para cualquier punto $x \in X$ existe un punto $y \in Y$ más cerca del cliente en c de lo que lo está x en una diferencia superior a δ; este punto y depende del punto c y de la localización x. El conjunto $C(Y \prec X)$ se puede obtener de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} C(Y \prec X) &= \bigcup_{y \in Y} C(y \prec X) = \bigcup_{y \in Y} \bigcap_{x \in X} C(y \prec x) = \\ &= \left\{ c \in C : \forall x \in X \ \exists y \in Y : d(c, y) < d(c, x) - \delta \right\} \end{aligned} \tag{9}$$

Finalmente, la demanda total de los clientes que captura el conjunto Y al conjunto X es:

$$W\left(Y \prec X\right) = \sum_{c \in C(Y \prec X)} w\left(c\right). \tag{10}$$

Nótese que los conjuntos de localizaciones del líder de tamaño p sólo son comparadas con los conjuntos de localizaciones con r localizaciones de establecimientos; p, $r > 0$. El número de localizaciones para cada competidor se considera como la característica relevante de los conjuntos permitidos por las firmas. Otras características relevantes o restricciones de coste pueden ser consideradas para representar contextos más realistas. Las características o restricciones usuales incluyen el número de localizaciones de establecimientos, el tamaño, el coste o la capacidad de los establecimientos, la distancia entre establecimientos, etc. Estas características pueden ser diferentes dependiendo de las escenarios de aplicación. Por ejemplo, si cada punto candidato x tiene asociado un coste $Cost(x)$, y los competidores, líder y seguidor, tienen un presupuesto limitado, B_L y B_F, respectivamente, entonces las condiciones $|X| = p$ y $|Y| = r$ son reemplazadas por $Cost(X) \leq B_L$ y $Cost(Y) \leq B_F$ respectivamente, siendo

$$Cost(X) = \sum_{x \in X} Cost(x) \tag{11}$$

$$Cost(Y) = \sum_{y \in Y} Cost(y) \tag{12}$$

Por otro lado, el modelo del líder-seguidor también puede ser formulado usando los conjuntos de localizaciones que capturan la demanda de los clientes dada la localización del competidor (ver ReVelle, 1986). Sea

$$Z(c:X) = \left\{z \in L : d(c,z) < d(c,X) - \delta\right\} \tag{13}$$

el conjunto de localizaciones que capturan al cliente en c cuando son comparadas con el conjunto de localizaciones X. Un cliente en c preferirá una localización de un establecimiento del conjunto Y de localizaciones del seguidor al conjunto de localizaciones X si y solo si $Y \cap Z(c:X) \neq \emptyset$. Así

$$C(Y \text{ p } X) = \left\{c \in C : Y \cap Z(c:X) \neq \emptyset\right\}. \tag{14}$$

Los conjuntos $Z(c:X)$ contienen las localizaciones de interés, las que tienen que ser consideradas cuando buscamos buenos seguidores si el líder tiene sus centros ubicados en las localizaciones de X.

Finalmente, nótese que considerando diferentes modelos de mercado competitivo y diferentes restricciones surgen varias nociones de solución (ver Suárez-Vega y otros 2004).

3. Nociones de conjuntos soluciones

En esta sección vamos a extender las nociones de solución dadas para el caso en que las firmas competidoras instalan un único centro, al caso en que las firmas desean determinar las localizaciones para varios establecimientos. Consideraremos que la empresa líder quiere abrir p centros y la seguidora r.

Para $p = r = 1$, un c**entroide** es un punto de L tal que la demanda total máxima de los clientes que prefieren otro punto de L es la menor posible. La puntuación de un punto candidato x, denotada $W^*(x)$, es esa demanda máxima de los clientes que prefieren otro punto, es decir

$$W^*(x) = \max_{z \in L} W(z \text{ p } x), \quad \forall x \in L. \tag{15}$$

Entonces, formalmente, un punto $x \in L$ es un centroide para el espacio de localizaciones L y para el conjunto de puntos de demanda C si minimiza la puntuación, es decir $x \in L$ es un centroide si

$$\forall y \in L: \quad W^*(x) = \max_{z \in L} W(z \text{ p } x) \leq W^*(y) = \max_{z \in L} W(z \text{ p } y). \tag{16}$$

Así el problema del centroide es el problema minimax

$$\min_{x \in L} \max_{z \in L} W(z \text{ p } x). \tag{17}$$

El conjunto X^* de centroides viene dado por:

$$X^* = \arg\min_{x \in L} W^*(x) = \arg\min_{x \in L} \max_{z \in L} W(z \text{ p } x). \tag{18}$$

Cuando el número de establecimientos que tienen que ser localizados es mayor que uno, obtenemos la correspondiente noción de conjunto solución. Así, si $X \subseteq L$ es el conjunto de las localizaciones de los establecimientos del líder, entonces un $(r|X)$-medianoide es el mejor conjunto de r puntos para abrir los centros del seguidor. Puede existir más de un $(r|X)$-medianoide.

Definición 1. Un conjunto de localizaciones $Y \in L^r$ es un $(r|X)$-medianoide para el conjunto de puntos de demanda C si y sólo si

$$W(Y \text{ p } X) \geq W(Z \text{ p } X), \quad \forall Z \in L^r. \tag{19}$$

Denotamos $Y_r(X)$ al conjunto de $(r|X)$-medianoides, para cada $r > 0$ y $X \subseteq L$. Entonces,

$$Y_r(X) = \arg\max_{Y \in L^r} W(Y \text{ p } X) \tag{20}$$

La noción de $(r|p)$-centroide se introduce para definir la solución del líder cuando éste quiere instalar p establecimientos de manera que la demanda total de los clientes que prefieren el conjunto de centros del seguidor sea mínima.

Definición 2. Un conjunto de localizaciones $X \in L^p$ es un $(r|p)$-centroide si y sólo si

$$\max_{Y \in L^r} W(Y \text{ p } X) \leq \max_{Y \in L^r} W(Y \text{ p } Z), \quad \forall Z \in L^p. \tag{21}$$

El valor de la puntuación de X viene expresado por

$$W_r^*(X) = \max_{Y \in L^r} W(Y \text{ p } X) = W(Y^* \text{ p } X), \quad \text{para } Y^* \in Y_r(x). \tag{22}$$

Entonces $X \in L^p$ es un $(r|p)$-centroide si

$$W_r^*(X) = \min_{Z \in L^p} W_r^*(Z). \tag{23}$$

Por lo tanto, un conjunto de localizaciones $X^* \in L^p$ es un conjunto $(r|p)$-centroide si y sólo si

$$X^* \in \arg \min_{Z \in L^p} \max_{Y \in L^r} W(Y \text{ p } Z). \tag{24}$$

Dado el conjunto de localizaciones X para el líder, un $(r|X)$-medianoide es una solución óptima para el seguidor. Un $(r|p)$-centroide es una solución óptima para el líder.

Estas nociones de solución llevan implícita una regla de elección binaria con umbral orientada al líder. Esto significa que cada cliente visita el establecimiento más cercano pero los empates se deshacen favoreciendo al líder. Esto es, si X e Y son conjuntos de localizaciones para el líder y el seguidor respectivamente, y $d(c,Y) = d(c,X) - \delta$, entonces los clientes en c son capturados por el líder.

4. Formulación de la programación lineal entera

En esta sección analizamos el uso de técnicas de programación lineal entera para resolver los problemas de localización competitiva descritos en las secciones anteriores. El principal objetivo es formular el problema del $(r|p)$-centroide generalizado como un problema de programación lineal entera. El procedimiento seguido está inspirado en un trabajo de Dobson y Karmarkar (1987) en el que estos autores formulan un problema de localización competitiva como un problema de programación lineal.

4.1. *El proceso de optimización en tres niveles*

El problema del líder-seguidor con varios establecimientos se formula como un proceso de optimización en tres niveles simultáneos. El proceso incluye:

- El problema de elección del cliente. Dadas las localizaciones del líder y del seguidor, escoger el punto de servicio preferido por el cliente.
- El problema de localización del seguidor. Dadas las localizaciones del líder, seleccionar el conjunto de localizaciones del seguidor que maximiza la demanda total captada.
- El problema de localización del líder. Determinar el conjunto de localizaciones del líder que minimiza la máxima demanda que puede capturar el seguidor.

Sea $n = |C|$ el cardinal del conjunto C de los puntos de demanda o de localizaciones de los clientes. Se denota por $K = \{1, 2, \ldots, n\} = [1..n]$ al conjunto de índices para estos puntos y por h_k al total de las demandas de los clientes localizados en el k-ésimo punto de demanda, $k \in K$.

Sea $m = |L|$ el cardinal del conjunto L de localizaciones candidatas para los centros de servicio de ambas firmas; el líder y el seguidor. Se denota por $I = \{1, 2, \ldots, m\} = [1..m]$ al conjunto de índices para estas localizaciones candidatas.

Para cada punto de demanda $k \in K$, se define el *vector* binario m-dimensional z_k, esto es, $z_k \in \{0,1\}^m$, de la forma $z_k = (z_{k1}, \dots, z_{km})$ donde:

$$z_{ki} = \begin{cases} 1 & \text{si el cliente en k elige la localización } i \in I \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{25}$$

Las localizaciones del líder y el seguidor están representadas por los vectores binarios m-dimensionales x e y, respectivamente. Esto es, $x, y \in \{0,1\}^m$, con $x = (x_1, \dots, x_m)$ e $y = (y_1, \dots, y_m)$, definidos de la forma:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si el líder tiene un centro en la localización } i \in I \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$
$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si el seguidor tiene un centro en la localización } i \in I \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{26}$$

Si consideramos que el líder abre p centros y el seguidor abre r, los vectores de las variables de decisión, x e y, tienen, respectivamente, p y r componentes que toman el valor 1, el resto de las variables toma el valor 0.

En cada problema de elección del cliente, los conjuntos X e Y, conteniendo las localizaciones de los establecimientos del líder y el seguidor, respectivamente, son datos. Éstos son representados por los vectores $\bar{x}$ e $\bar{y}$ que son los correspondientes m-vectores binarios de los valores fijados para las variables x e y. Para el problema de localización del seguidor se tiene un m-vector de valores dados o datos $\bar{x}$, y $(1+n)$ m-vectores de variables binarias, y y z_k, $k \in [1..n]$. Para el problema de localización del líder se tienen $(2+n)$ m-vectores de variables binarias; x, y y z_k, $k \in [1..n]$.

4.2. *Problema de selección del cliente*

Consideremos los problemas de optimización de los clientes. Este problema consiste en seleccionar el establecimiento preferido por cada cliente entre las localizaciones establecidas por el líder y el seguidor, que viene dadas por los vectores $\bar{x}$, $\bar{y} \in \{0,1\}^m$. Se denota por $C_k(\bar{x}, \bar{y})$ al problema de optimización de selección del cliente situado en el punto de demanda $k \in [1..n]$. Dadas las localizaciones del líder y del seguidor, este problema consiste en seleccionar la localización preferida entre ellas.

La solución de cada problema $C_k(\bar{x}, \bar{y})$ se obtiene usando los coeficientes a_{ij}^k, b_{ij}^k y c_{ij}^k dados, $\forall k \in [1..n]$ y $\forall i,j \in [1..m]$, por

$$a_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{si } \; d_{ki} < d_{kj} - \delta \\ 0 & \text{si } \; d_{ki} \geq d_{kj} - \delta \end{cases} \tag{27}$$

$$b_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{si } \; d_{ki} \leq d_{kj} + \delta \\ 0 & \text{si } \; d_{ki} > d_{kj} + \delta \end{cases} \tag{28}$$

$$c_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{si } \; d_{ki} < d_{kj} \\ 0 & \text{si } \; d_{ki} \geq d_{kj} \end{cases} \tag{29}$$

Para un cliente en $k \in [1..n]$ y una localización $i \in [1..m]$, el cliente elige otra localización distinta $j \in [1..m]$, si sucede uno de los casos siguientes: (i) ningún centro opera en la localización i; (ii) existe un centro del líder en la localización i pero el cliente prefiere un centro en una localización distinta j; o (iii) existe un centro de la empresa seguidora en la localización i pero el cliente prefiere acudir a otro centro ubicado en una localización distinta j.

Por tanto, $z_{ki} = 0$ en cualquiera de los casos siguientes:

- Si $\bar{x}_i = \bar{y}_i = 0$.
- Si $\bar{x}_i = 1, \bar{y}_i = 0$: si ∃*j* con $\bar{y}_j = 1$ para el que $a_{ji}^k = 1$ o con $\bar{x}_j = 1$ para el que $c_{ji}^k = 1$.
- Si $\bar{x}_i = 0, \bar{y}_i = 1$: si ∃*j* con $\bar{x}_j = 1$ para el que $b_{ji}^k = 1$ o con $\bar{y}_j = 1$ para el que $c_{ji}^k = 1$.

Esto se garantiza con las restricciones:

$$
\begin{aligned}
z_{ki} &\le \bar{x}_i + \bar{y}_i \\
z_{ki} &\le \bar{y}_i + 1 - a_{ji}^k \bar{y}_j \\
z_{ki} &\le \bar{y}_i + 1 - c_{ji}^k \bar{x}_j \\
z_{ki} &\le \bar{x}_i + 1 - b_{ji}^k \bar{x}_j \\
z_{ki} &\le \bar{x}_i + 1 - c_{ji}^k \bar{y}_j
\end{aligned}
\tag{30}
$$

Por tanto, el problema de cada cliente se formula como un problema de programación lineal entera, en particular como un problema de factibilidad (obsérvese que la regla de elección binaria orientada al líder descarta que las empresas competidoras se ubiquen en la misma localización).

Proposición 4. El Problema de Selección del Cliente $C(\bar{x}, \bar{y})$, $\forall\, \bar{x}, \bar{y} \in \{0,1\}^m$, puede ser resuelto por un sistema lineal con nm variables binarias y $n(1+m+4m^2)$ restricciones.

Prueba. La elección de cada cliente $C_k(\bar{x}, \bar{y})$ es la solución del siguiente sistema en las variables z_{ki}:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m} z_{ki} = 1, \\
&z_{ki} \le \bar{x}_i + \bar{y}_i, \quad i \in [1..m] \\
&z_{ki} \le \bar{y}_i + 1 - a_{ji}^k \bar{y}_j, \quad i, j \in [1..m] \\
&z_{ki} \le \bar{y}_i + 1 - c_{ji}^k \bar{x}_j, \quad i, j \in [1..m] \\
&z_{ki} \le \bar{y}_i + 1 - b_{ji}^k \bar{x}_j, \quad i, j \in [1..m] \\
&z_{ki} \le \bar{x}_i + 1 - c_{ji}^k \bar{y}_j, \quad i, j \in [1..m] \\
&z_{ki} \in \{0,1\}, \quad i \in [1..m]
\end{aligned}
\tag{31}
$$

Para cada k, este problema tiene m variables binarias y $4m^2 + m + 1$ restricciones lineales.

La solución del problema de todos los clientes $C(\bar{x}, \bar{y})$ se obtiene combinando todas las soluciones de los problemas $C_k(\bar{x}, \bar{y})$ para $k \in [1..n]$. Se trata del siguiente sistema en las variables z_{ki}, $k \in [1..n]$, $i \in [1..n]$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m} z_{ki} = 1, \quad k \in [1..n] \\
&z_{ki} \le \overline{x}_i + \overline{y}_i, \quad i \in [1..m], k \in [1..n] \\
&z_{ki} \le \overline{y}_i + 1 - a_{ji}^{k} \overline{y}_j, \quad i, j \in [1..m], k \in [1..n] \\
&z_{ki} \le \overline{y}_i + 1 - c_{ji}^{k} \overline{x}_j, \quad i, j \in [1..m], k \in [1..n] \\
&z_{ki} \le \overline{y}_i + 1 - b_{ji}^{k} \overline{x}_j, \quad i, j \in [1..m], k \in [1..n] \\
&z_{ki} \le \overline{x}_i + 1 - c_{ji}^{k} \overline{y}_j, \quad i, j \in [1..m], k \in [1..n] \\
&z_{ki} \in \{0,1\}, \quad i \in [1..m], k \in [1..n]
\end{aligned} \tag{32}$$

Este sistema tiene nm variables binarias y $n(1+m+4m^2)$ restricciones lineales. □

Obsérvese que para estos problemas los vectores $\overline{x}$ *e* $\overline{y}$ son datos, por tanto los términos a la derecha del signo de menor o igual son constantes.

4.3. *Problema de localización del seguidor*

Considérese ahora el Problema de Localización del Seguidor. Dada la localización del líder $\overline{x} \in \{0,1\}^m$, este problema consiste en seleccionar el conjunto de las r localizaciones que captura la mayor cantidad de demanda posible. El problema de optimización correspondiente, denotado $S_r(\overline{x})$, puede ser formulado como sigue:

$$\begin{aligned}
&\text{Maximizar } \sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{k=1}^{n} h_k z_{ki} \right] y_i \\
&\text{Sujeto a: } \sum_{i=1}^{m} y_i = r, \\
&\qquad z \text{ es solución de } C(\overline{x}, y), \\
&\qquad y_i \in \{0,1\}, \quad i \in [1..m].
\end{aligned} \tag{33}$$

La función objetivo es la demanda total de los clientes que prefieren un centro de la empresa seguidora a cualquiera de las del líder. La primera restricción garantiza que el tamaño del conjunto de localizaciones para el seguidor es *r*.

Si se sustituye la segunda restricción por el sistema lineal (29) se obtiene el siguiente problema de optimización con restricciones lineales.

$$\begin{aligned}
&\text{Maximizar } \sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{k=1}^{n} h_k z_{ki} \right] y_i \\
&\text{Sujeto a: } \sum_{i=1}^{m} y_i = r, \\
&\qquad \sum_{i=1}^{m} z_{ki} = 1, \quad k \in [1..n] \\
&\qquad z_{ki} \le \overline{x}_i + y_i, \quad i \in [1..m], k \in [1..n] \\
&\qquad z_{ki} \le y_i + 1 - a_{ji}^{k} y_j, \quad i, j \in [1..m], k \in [1..n] \\
&\qquad z_{ki} \le y_i + 1 - c_{ji}^{k} \overline{x}_j, \quad i, j \in [1..m], k \in [1..n] \\
&\qquad z_{ki} \le y_i + 1 - b_{ji}^{k} \overline{x}_j, \quad i, j \in [1..m], k \in [1..n] \\
&\qquad z_{ki} \le \overline{x}_i + 1 - c_{ji}^{k} y_j, \quad i, j \in [1..m], k \in [1..n] \\
&\qquad z_{ki} \in \{0,1\}, y_i \in \{0,1\}, \quad i \in [1..m], k \in [1..n].
\end{aligned} \tag{34}$$

Sin embargo este problema no es un problema de programación lineal, tal como aparece en Dobson y Karmarkar (1987), ya que la función objetivo incluye el producto de variables del problema.

No obstante, el problema del conjunto de localización del seguidor $S_r(\bar{x})$ puede ser formulado como un problema de programación lineal usando los conjuntos de clientes que prefieren una localización del seguidor al conjunto de localizaciones del líder.

Proposición 5. El Problema de Localización del Seguidor $S_r(\bar{x})$, $\forall\, \bar{x} \in \{0,1\}^m$, es un problema de programación lineal entera con $n(m+1)$ variables binarias

Prueba. Dadas las localizaciones del líder definidas por $\bar{x}$, los clientes capturados por cada localización individual i del seguidor son los que prefieren dicha localización a cualquiera de las localizaciones del líder dadas por $\bar{x}$. Consideramos ahora las variables z_{km} definidas, para cada punto de demanda $k \in [1..n]$ y cada localización posible $i \in [1..m]$ por:

$$z_{ki} = \begin{cases} 1 & \text{si el cliente en } k \text{ elige la localización del seguidor } i \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De forma similar al uso que se dio a las matrices de coeficientes a_{ij}^k, consideremos ahora los vectores de coeficientes a_i^k, $i \in [1..m]$, para cada $k \in [1..n]$ dados por

$$a_i^k = \begin{cases} 1 & \text{si } d_{ki} < \min\left\{d_{kj} : \bar{x}_j = 1\right\} - \delta \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad (35)$$

Si un cliente en $k \in [1..n]$ prefiere la localización $i \in [1..m]$ del seguidor a cualquier localización del líder entonces $a_i^k = 1$, y en cualquier otro caso $a_i^k = 0$. Estos coeficientes se pueden obtener de la matriz A de coeficientes a_{ij}^k mediante las fórmulas:

$$a_i^k = \max\left\{a_{ij}^k \bar{x}_j : j \in [1..m]\right\},\ k \in [1..n],\ \ i \in [1..m]. \qquad (36)$$

Entonces el problema de optimización consiste en seleccionar las r localizaciones del seguidor que capturan conjuntamente la mayor cantidad de demanda.

Si el punto de localización i no es seleccionado por el seguidor o, siendo seleccionado, el cliente ubicado en k prefiere alguna localización del líder a la localización i del seguidor, entonces la variable z_{ki} debe ser igual a 0. La condición que establece los valores de z_{ki} a partir de los valores de los coeficientes a_i^k es $z_{ki} \le a_i^k y_i$. Por tanto, el problema de de localización del seguidor es el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{lll} \text{Maximizar} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} h_k z_{ki} & \\ \text{Sujeto a:} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i = r, & \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} z_{ki} \le 1, & k \in [1..n] \\ & z_{ki} - a_i^k y_i \le 0, & i \in [1..m], k \in [1..n] \\ & z_{ki}, y_i \in \left\{0,1\right\}, & i \in [1..m], k \in [1..n]. \end{array} \qquad (37)$$

Los coeficientes a_i^k son constantes, ya que el vector $\bar{x}$ es un dato en este problema. Por tanto, éste es un problema de optimización con una función objetivo lineal, $m(n+1)$ variables binarias y $1+n+nm$ restricciones lineales. □

El problema de optimización del seguidor puede ser considerado como un problema de máximo cubrimiento que consiste en seleccionar el conjunto de r puntos que maximiza la demanda captada. Procedimientos para resolver este tipo de problemas fueron propuestos, entre otros, por Gandhi, Khuller y Srinivasan (2004).

La formulación (37) puede simplificarse, dando lugar a una reducción del número de variables y restricciones, si utilizamos los conjuntos de localizaciones que *cubren* cada punto de demanda. Un punto *i* de localización *cubre* al punto de demanda *k* si la distancia desde la posición *k* hasta la firma líder excede a la distancia desde esta posición al punto *i* en una cantidad mayor que δ. El conjunto de puntos de localización *i* que cubren al punto de demanda *k* es:

$$L_k = \left\{ i \in [1..m] : d_{ki} < \min\left\{ d_{kj} : \bar{x}_j = 1 \right\} - \delta \right\} \qquad (38)$$

y el conjunto de puntos de demanda *k* cubiertos por la localización *i* es:

$$K_i = \left\{ k \in [1..n] : d_{ki} < \min\left\{ d_{kj} : \bar{x}_j = 1 \right\} - \delta \right\} = \left\{ k \in [1..n] : i \in L_k \right\} \qquad (39)$$

Sean $N = \left\{ k \in [1..n] : L_k \neq \varnothing \right\}$ el conjunto de puntos de demanda que son cubiertos por alguna de las localizaciones candidatas para abrir un centro del seguidor y $M = \left\{ i \in [1..m] : K_i \neq \varnothing \right\}$ el conjunto de de las localizaciones candidatas que cubren algún punto de demanda. Tenemos $N = \bigcup_{i=1}^{m} K_i$ y $M = \bigcup_{k=1}^{n} L_k$.

Entonces el problema del seguidor puede formularse como sigue:

$$\begin{array}{lll} \text{Maximizar} & \sum_{k \in N} \sum_{i \in L_k} h_k z_{ki} & \\ \text{Sujeto a:} & \sum_{i \in M} y_i = r, & \\ & \sum_{i \in L_k} z_{ki} \leq 1, & k \in N \\ & z_{ki} \leq y_i, & i \in L_k, k \in N \\ & z_{ki}, y_i \in \{0,1\}, & i \in M, k \in N. \end{array} \qquad (40)$$

Esta formulación tiene $|M| + \sum_{k=1}^{n} |L_k| \leq m(n+1)$ variables binarias y el número de restricciones es $1 + |N| + \sum_{k=1}^{n} |L_k| \leq 1 + n(1+m)$, además de las que imponen el carácter binario de las variables, lo cual puede tradicirse en una reducción significativa del número de variables y restricciones.

Tanto en esta formulación como en la (37) podría prescindirse de las restricciones que exigen que las variables z_{ki} sean binarias, definiéndolas como la proporción de demanda en *k* que es captada por el seguidor. Formulaciones alternativas resultan de sustituir en el problema de programación lineal entero anterior las restricciones $z_{ki} \leq y_i, i \in L_k, k \in N,$ por $\sum_{k \in K_i} z_{ki} \leq |K_i| y_i, i \in M,$ que resultan de sumar las primeras para cada $i \in L_k$, en este caso se tendrían $1 + |N| + |M|$. Obsérvese que estas dos formulaciones son equivalentes para el problema entero pero no para el problema relajado.

Las formulaciones del problema del seguidor (37) y (40) tienen ciertas ventajas desde el punto de vista computacional. Por un lado, con frecuencia la relajación lineal del problema da una solución entera y cuando ello no ocurre puede obtenerse la solución óptima en un número pequeño de pasos del algoritmo de ramificación y asignación. Por otro lado, el algoritmo *greedy* suele proporcionar una solución óptima y cuando no es así aporta un valor objetivo próximo al óptimo. En cualquier caso, la relajación lineal y el algoritmo *greedy* proporcionan buenas cotas (inferior en el caso del *greedy* y superior en el caso del problema de programación lineal relajado) del valor objetivo óptimo (ver, por ejemplo, Cornuejols et al. (1990)).

4.4. *Problema de localización del líder*

El tercer y último problema es el problema de localización del líder. Este problema consiste en determinar el conjunto X de p localizaciones para el líder tales que la mejor selección Y del seguidor con r puntos capture la menor cantidad de demanda. Se trata del problema del ($r|p$)-centroide que, dado que la demanda se considera inelástica (bienes esenciales), se puede formular como sigue:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar } \sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{k=1}^{n} h_k z_{ki} \right] x_i \\ &\text{Sujeto a: } \sum_{i=1}^{m} x_i = p, \\ &\qquad z \text{ es solución de } C(x, y), \\ &\qquad y \text{ es solución de } S_r(x), \\ &\qquad x_i \in \{0,1\}, \quad i \in [1..m]. \end{aligned} \tag{41}$$

Este es el problema que se obtiene usando la metodología propuesta por Dobson y Karmarkar (1987). Sin embargo, la función objetivo es no lineal en las variables z_{ki} y x_i. Además, las variables z_{ki} son diferentes para cada valor de y, y la relación entre ellas también es no lineal. Por otro lado, el problema de optimización del líder puede también ser formulado como un problema minimax. El problema consiste en encontrar un conjunto X^* tal que:

$$W^* = W^*(X^*) = \min_{|X|=p} W^*(X) = \min_{|X|=p} \max_{|Y|=r} W(Y \mathrm{p}\, X). \tag{42}$$

La metodología apropiada para formular este problema como un problema de programación lineal es similar a la usualmente aplicada a los problemas clásicos de localización minimax; ver por ejemplo, la formulación del problema del p-centro dada en Daskin (1995).

Teorema 1. El problema del ($r|p$)-centroide se puede formular como un problema de programación lineal combinatoria con:

$$\binom{m}{r} nm + m + 1 \text{ variables y } \binom{m}{r} nm + n + 1 \text{ restricciones.}$$

Prueba. Un problema minimax se formula como un problema de optimización lineal usando como función objetivo a minimizar una cota superior de la función a maximizar. Así el problema

$$W^* = \min_{|X|=p} \max_{|Y|=r} W(Y < X). \tag{43}$$

En términos de la cota W y la solución X es:

$$W^* = \min \left\{ W : W(Y \mathrm{p}\, X) \le W, \forall Y \in L^r \text{ con } |X| = p \right\}. \tag{44}$$

La formulación de este problema como un problema de programación matemática lineal es:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar W} \\ &\text{Sujeto a: } |X| = p, \\ &\qquad W(Y \mathrm{p}\, X) \le W, \forall Y \in L^r. \end{aligned} \tag{45}$$

Este problema tiene $m+1$ variables (W,X) y $1+\binom{m}{r}$ restricciones, una restricción que fija el tamaño de X y una para cada subconjunto $Y \subseteq L$ con $|Y| = r$; es decir $Y \in L^r$. Éste es un problema lineal si las restricciones $W(Y < X) \le W$ son restricciones lineales en términos de X, para cualquier $Y \in L^r$.

El problema de encontrar un conjunto $X \in L^p$ tal que $W(Y \prec X) \leq W, \forall Y \in L^r$, es similar al problema $S_r(X)$. Sin embargo, en tal problema necesitamos maximizar $W(Y \prec X)$ para un único conjunto X. Ahora tenemos que encontrar un conjunto $X \in L^p$ que minimice la máxima cantidad de demanda de los clientes que prefieren Y a X, para todos los conjuntos $Y \in L^r$ a la vez. Nótese que $W(Y \prec X) = W(C) - W(X \preceq Y)$, donde $W(C)$ es la demanda del total de clientes y $W(X \preceq Y)$ es el total de la demanda de los clientes que no prefieren Y a X. Por tanto, para resolver (39) maximizamos $W(X \preceq Y)$ en el conjunto de todas las $\binom{m}{r}$ posibles elecciones de $Y \in L^r$.

Consideramos un índice $j \in J = \left\{1, 2, ..., \binom{m}{r}\right\} = \left[1..\binom{m}{r}\right]$ para representar las posibles selecciones de $Y \in L^r$. Denotaremos por Y_j al conjunto correspondiente a cada índice $j \in J$, $L^r = \{ Y_j : j \in J \}$. Sea c_{ki}^j el coeficiente que determina los clientes que no prefieren un punto de Y_j al punto i. Estos coeficientes vienen dados por:

$$c_{ki}^j = \begin{cases} 1 & \text{si } d_{ki} < d(c_k, Y_j) + \delta \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{46}$$

siendo $d(c_k, Y_j)$ la distancia entre un cliente en el punto de demanda k y el conjunto Y_j.

Sean las variables z_{ki}^j igual a 1 si los clientes en c_k seleccionan la localización i cuando se compara X con Y_j, e igual a 0 en otro caso. Se supone que si hay varios puntos de X a la misma distancia de un cliente, el cliente selecciona sólo uno de esos puntos. Las condiciones que establecen los valores de las variables z_{ki}^j son:

$$z_{ki}^j \leq c_{ki}^j x_i, \quad \forall i, k, j \tag{47}$$

y

$$\sum_{i=1}^{m} z_{ki}^j \leq 1, \quad \forall k, j. \tag{48}$$

La demanda total de los clientes que no seleccionan una localización del seguidor de Yj cuando Y_j se compara con X, es

$$W(X \leq Y_j) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} h_k z_{ki}^j \leq 1, \quad \forall j \in J. \tag{49}$$

Por tanto el problema global es:

$$\begin{array}{lll} \text{Minimizar } w & & \\ \text{Sujeto a:} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_i = p, & \\ & W(V) - \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} h_k z_{ki}^j \leq w, \quad j \in J & \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} z_{ki}^j \leq 1, & k \in [1..n], j \in J \\ & z_{ki}^j - c_{ki}^j x_i \leq 0, & k \in [1..n], i \in [1..m], j \in J \\ & z_{ki}^j, x_i \in \{0,1\}, & k \in [1..n], i \in [1..m], j \in J \\ & w \geq 0. & \end{array} \tag{50}$$

Este problema incluye la variable continua w, m variables binarias x_i y otras $nm\binom{m}{r}$ variables binarias z_{ki}^j. Por tanto, se trata de un problema lineal con una variable continua, $nm\binom{m}{r}+m$ variables binarias y $1+\binom{m}{r}(nm+n+1)$ restricciones lineales. De esta forma se concluye la demostración del teorema. □

Desafortunadamente, este problema es prácticamente intratable por técnicas estándares de programación lineal. Los procedimientos apropiados serían los métodos de generación de filas y columnas capaces de identificar y usar sólo aquellas variables y restricciones que son relevantes en las cercanías del óptimo.

En este problema se pueden introducir simplificaciones orientadas a reducir el número de variables y restricciones, de forma similar a lo expuesto para el problema del seguidor. Sin embargo, con tales simplificaciones el problema continúa teniendo unas dimensiones que lo hacen difícilmente tratable por las técnicas estándares.

5. Conclusiones

En este trabajo hemos formalizado el problema de competencia espacial por cuotas de mercado siguiendo el modelo conocido como del líder-seguidor o de Stackelberg. Consideramos la situación en la que las firmas eligen un número determinado de ubicaciones pero que se puede extender fácilmente al caso en que las firmas tengan un presupuesto determinado para afrontar los costes de sus localizaciones. La formalización se ha hecho suponiendo que los clientes prefieren unos servicios en unas ubicaciones a otras en función de la diferencia en su distancia a ellas. Contemplamos un umbral de sensibilidad para esa diferencia que puede ser positiva a favor del líder o negativa a favor del decisor.

Planteamos la situación como un proceso de optimización en tres fases. Describimos los tres problemas de optimización del líder, el seguidor y los clientes como problemas de programación lineal en variables 0-1. Por tanto, los problemas se pueden abordar con las técnicas de programación lineal binaria, aunque el número de variables y restricciones en el problema del líder hacer necesario procedimientos algo más sofisticados.

Como investigaciones futuras contemplamos la extensión a reglas de elección de los usuarios más realistas, tales como las reglas de decisión continuas, o con umbrales diferentes para cada uno de los clientes. También pretendemos abordar el diseño de procedimientos que combinen de forma inteligente los métodos heurísticos con la metodología de la programación lineal adentrándonos el novedoso área de las *Matheuristics*.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Gobierno de España y FEDER (Referencias ECO2008-05589 y TIN2008-06872-C04-01).

Referencias Bibliográficas

1. S. Benati, G. Laporte, Tabu search algorithms for the (r|X_p)-medianoid and (r|p)-centroid problems. *Location Science* 2 (1994) 193-204.
2. J. Bhadury, H.A. Eiselt, J.H. Jaramillo, An alternating heuristic for medianoid and centroid problems in the plane. *Computers & Operations Research* 30 (2003) 553-565.
3. G. Cornuejols, G.L. Nemhauser, L.A. Wolsey . The uncapacitated facility location problem, in Discrete Location Theory, edited by P.B. Mirchandani and R.L. Francis (Wiley, USA, 1990)
4. S. Daskin, Network and discrete location. *Models, algorithms and applications*. (Wiley, New York, 1995).
5. N.E. Devletoglou, A dissenting view of duopoly and spatial competition. *Economica* May (1965) 141-160.
6. N.E. Devletoglou, P.A. Demetriou, Choice and threshold: a further experiment in spatial duopoly. *Economica* November (1967) 351-371

7. G. Dobson, U.S. Karmarkar, Competitive location on a network, *Operations Research* 35 (1987) 565-574
8. H.A. Eiselt, G. Laporte, Competitive spatial models, *European Journal of Operational Research* 39 (1989) 231-242.
9. H.A. Eiselt, G. Laporte, Sequential location problems, *European Journal of Operational Research* 96 (1996) 217-231
10. H.A. Eiselt, G. Laporte, J.F.Thisse, Competitive location models: A framework and bibliography. *Transportation Science* 27(1) (1993) 44-54
11. T.L. Friesz, T. Miller and R.L. Tobin, Competitive network facility location models: a survey. *Papers of the Regional Science Association* 65 (1988) 47-57
12. R. Gandhi, S. Khuller, A. Srinivasan, Approximation algorithms for partial covering problems, *Journal of Algorithms* 53(1) (2004) 55–84
13. S.L. Hakimi, On locating new facilities in a competitive environment, *European Journal of Operational Research* 12 (1983) 29-35
14. S.L. Hakimi, Location with spatial interactions: competitive locations and games. In Mirchandani PB, Francis RL (ed) *Discrete Location Theory* (Wiley, New York, 1990) 439-478.
15. F. Plastria, Static competitive facility location: an overview of optimization approaches, *European Journal of Operational Research* (1990) 129:461-470.
16. J.L. Redondo, J. Fernández, I. García, P.M. Ortigosa, Heuristics for the facility location and design (1|1)-centroid problem on the plane. *Computational Optimization and Applications*, 45(1) 2010.
17. C. ReVelle, The maximum capture or sphere of influence location problem: Hotelling revisited on a network, *Journal of Regional Science* 26(2) (1986) 343-358
18. D.R. Santos-Peñate, R.R. Suárez-Vega, P. Dorta-González, The leader-follower location model, *Networks and Spatial Economics* (2007) 7:45-61.
19. D. Serra, C. ReVelle, Market capture by two competitors: the preemptive location problem, *Journal of Regional Science* 34(4) (1994) 549-561.
20. D. Serra, C. ReVelle, Competitive location in discrete space, in Z. Drezner (ed.) *Facility location: A survey of applications and methods* (Springer, Berlin 1995) 367-386.
21. J. Spoerhase, H.C. Wirth, $(r|p)$-centroid problems on paths and trees, *Theoretical Computer Science* 410(47-49), 5128-5137 (2009)
22. R. Suárez-Vega, D.R. Santos-Peñate, P. Dorta-González, Competitive multifacility location on networks: the $(r|X_p)$-medianoid problem. *Journal of Regional Science* 44(3) (2004) 569-588