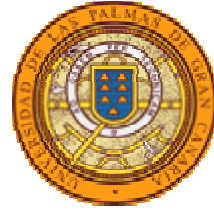




Fac. CC. Económicas y Empresariales
Universidad de La Laguna



Fac. CC. Económicas y Empresariales
Univ. de Las Palmas de Gran Canaria

Modelos estructurales en el contexto de las series temporales económicas

Gloria Martín Rodríguez *

DOCUMENTO DE TRABAJO 2002-04

* Universidad de La Laguna. Departamento de Economía de las Instituciones,
Estadística Económica y Econometría.

MODELOS ESTRUCTURALES EN EL CONTEXTO DE LAS SERIES TEMPORALES ECONÓMICAS

Gloria Martín Rodríguez

Departamento de Economía de las Instituciones, Estadística Económica y Econometría

Facultad de CC. EE. y Empresariales

Universidad de La Laguna

Camino de la Hornera, s/n

Campus de Guajara 38202

Teléfono: 922 317 034

Fax: 922 317 042

¡Error! Marcador no definido.

Agradecimientos: Este trabajo no se hubiera llevado a cabo sin la ayuda y el apoyo de los profesores D. José Juan Cáceres Hernández y D. Julio Afonso Rodríguez, profesores de la UDI de Estadística y Econometría.

MODELOS ESTRUCTURALES EN EL CONTEXTO DE LAS SERIES TEMPORALES ECONÓMICAS

Resumen

Determinar las características más notables asociadas a un conjunto de series temporales es generalmente considerado como un paso crucial en el análisis macroeconómico. Ésta es una de las razones por las que es deseable formular un modelo para una serie temporal. Sin embargo, para que tales modelos sean útiles deben ser consistentes con las propiedades estocásticas de los datos y ofrecer información relevante. En este sentido, los modelos estructurales de series temporales constituyen un enfoque adecuado que, basado explícitamente en las propiedades estocásticas de los datos, permite presentar sus rasgos más sobresalientes.

El objetivo de este trabajo es mostrar la racionalidad subyacente en los modelos estructurales de series temporales, exponer las formulaciones univariantes y multivariantes más usuales y señalar en qué medida contrasta con el enfoque ARIMA

Clasificación JEL: C22.

Palabras claves: modelos estructurales univariantes y multivariantes, metodología ARIMA.

Abstract

Establishing the "stylised facts" associated with a set of time series is widely considered a crucial step in macroeconomic analysis. This is one of the reasons for wishing to model time series. For such models to be useful, they should be consistent with the stochastic properties of the data and present meaningful information. The structural time series models provide a useful framework with which to present stylised facts on time series and they are explicitly based on the stochastic properties of the data.

The goal of this paper is to show the rationale underlying the structural time series models, the way in which univariate and multivariate models can be formulated and the way in which the structural methodology contrasts with ARIMA approach.

JEL classification: C22,

Key words: structural models, univariate, multivariate, ARIMA methodology.

Modelos Estructurales de Series Temporales

La mayor disponibilidad de datos en los últimos años y, sobre todo, la posibilidad de construir series más largas y con mayor frecuencia de observación, han estimulado el uso, e incluso el desarrollo, de técnicas estadístico-económicas para su tratamiento. En concreto, para las nuevas series resulta cada vez más difícil mantener el supuesto de un patrón de comportamiento fijo a lo largo del tiempo —de hecho, las propiedades estadísticas de buena parte de las series socioeconómicas poseen un carácter evolutivo— y, en este sentido, los modelos estructurales de series temporales constituyen una técnica apropiada, puesto que admiten la posibilidad de que cada uno de los componentes inobservables típicos de una serie temporal posea una naturaleza estocástica. Es decir, los componentes que describen la evolución de una serie temporal —tendencia, estacionalidad, ciclo y componente irregular— se han modelado tradicionalmente de forma determinista; sin embargo, cuando las series son suficientemente largas, se suele apreciar la inestabilidad de tales componentes e, incluso, puede ser razonable considerar que evolucionan aleatoriamente en el tiempo. Este es el supuesto de partida de los modelos estructurales.

Por ejemplo, si una serie temporal se puede descomponer como suma de tendencia, estacionalidad y un componente irregular, su comportamiento se podría recoger mediante la formulación de un modelo de regresión cuyas variables explicativas son una tendencia determinística y un conjunto de variables cualitativas estacionales. Si estos componentes no son estables, dicha formulación sería inadecuada y sería preciso que los coeficientes de regresión cambiaran en el tiempo. Esta flexibilidad es la que pretenden recoger los modelos estructurales que, en tal sentido, “... no son más que modelos de regresión en los que las variables explicativas son funciones del tiempo y los parámetros varían en el tiempo” (Harvey, 1989:10).

En el epígrafe siguiente, se introduce la formulación básica de los modelos estructurales de series temporales.

1. Formulación de los modelos estructurales de series temporales

1.1. Modelos de series temporales univariantes

Un modelo univariante de series temporales se puede definir como

$$y_t = \mu_t + \psi_t + \gamma_t + \varepsilon_t^1,$$

donde μ_t representa la tendencia, ψ_t el ciclo, γ_t el componente estacional y ε_t el componente irregular, que recoge los movimientos no sistemáticos. La peculiaridad de los modelos estructurales radica en su flexibilidad para recoger los cambios en el comportamiento de la serie mediante la consideración de sus diferentes componentes como procesos estocásticos dirigidos por perturbaciones aleatorias. Como se podrá comprobar en las distintas especificaciones de este apartado, un modelo estructural no necesariamente debe ser definido en términos de todos los componentes inobservables². A continuación se exponen algunas de las formulaciones posibles para cada uno de los componentes o combinaciones de ellos.

La formulación más simple para el componente irregular es un proceso ruido blanco, es decir, una secuencia de variables aleatorias no correlacionadas serialmente, con media constante e igual a cero y varianza constante e igual a σ_ε^2 . También se pueden plantear modelos más generales en los que el proceso estocástico ε_t sea un proceso autorregresivo estacionario de orden p .

La tendencia —es decir, el componente que indica la dirección en que se mueve la serie en el largo plazo³— no se especifica como una función determinista del tiempo, sino que, por el contrario, se asume que el componente tendencial es un proceso estocástico cuyo valor en un instante dado del tiempo (nivel estocástico) es el resultado de añadir al valor del componente en el instante anterior un determinado incremento de carácter aleatorio (pendiente estocástica) y un término de perturbación aleatoria. Por supuesto, cabe la posibilidad de que el nivel o la pendiente no posean un carácter estocástico y, más aún, la pendiente puede estar o no presente.

¹ Aunque un modelo multiplicativo podría ser más adecuado en algunos casos, éste podría ser tratado bajo el enfoque aditivo aplicando la transformación logarítmica.

² Concretamente, los componentes considerados dependerán, entre otras cosas, de la periodicidad y la longitud de la muestra.

³ Parafraseando a Harvey, la tendencia “... es aquella parte de la serie que, cuando se extrapola, proporciona la indicación más clara del movimiento futuro en el largo plazo de la serie. La definición ... es consistente con la idea de indicar una dirección general” (Harvey, 2000:1).

El ejemplo más sencillo lo constituye una serie cuyas observaciones oscilan alrededor de un nivel medio que permanece constante en el tiempo. Si dichas oscilaciones son estacionarias — en el sentido de que, aunque algunos valores se alejen en el corto plazo del nivel medio, la serie siempre tiende a dicho nivel— y se supone, además, que no están correlacionadas entre sí, una formulación capaz de recoger dicho comportamiento dinámico es $y_t = \mu_0 + \varepsilon_t$, para $t = 1, \dots, T$, donde ε_t es un proceso ruido blanco gaussiano con varianza σ_ε^2 . Se trata de un modelo con componente de nivel, μ_0 , determinista.

Esta formulación se puede flexibilizar para permitir que el nivel de la serie cambie en el tiempo, dando lugar al *modelo de nivel local*, en el que el nivel en cada momento del tiempo es el nivel del período anterior más un elemento aleatorio. En este modelo, definido como

$$y_t = \mu_t + \varepsilon_t,$$

con

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \eta_t,$$

donde $\eta_t \sim NID(0, \sigma_\eta^2)$ ⁴, existe un término de perturbación aleatoria alrededor de un nivel subyacente que oscila sin una dirección particular. De ahí que también se conozca por el nombre de paseo aleatorio con ruido. Si la varianza del nivel es cero, se obtiene el modelo de nivel determinista antes especificado. Si la varianza del componente irregular es cero, pero la varianza del nivel es distinta de cero, la serie sólo posee componente de nivel cuyo proceso generador es un camino aleatorio⁵.

Si a los elementos descritos hasta el momento para el componente de nivel se añade una pendiente, es posible considerar que el incremento medio por unidad de tiempo sea constante, pero también se puede recurrir a formulaciones más flexibles. Una de ellas es el *modelo de tendencia lineal local*⁶, definido como

$$y_t = \mu_t + \varepsilon_t,$$

con

⁴ La expresión $NID(0, \sigma^2)$ denota que las variables aleatorias son serialmente independientes y normalmente distribuidas con media nula y varianza σ^2 .

⁵ La inclusión de un componente de camino aleatorio significa que el proceso es no estacionario y, además, que es equivalente a un proceso $ARIMA(0,1,1)$, donde el parámetro MA sólo cubre la mitad del espacio usual del parámetro, es decir, $-1 \leq \theta \leq 0$; además, si $\sigma_\eta^2 = 0$, se obtiene un proceso $ARIMA$ en el que el parámetro MA toma el valor -1 .

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + \eta_t$$

$$\beta_t = \beta_{t-1} + \zeta_t,$$

donde $\zeta_t \sim NID(0, \sigma_\zeta^2)$ ⁷. El término de perturbación ζ_t otorga a la pendiente un carácter estocástico, mientras que, dados el nivel y la pendiente del período anterior, la naturaleza estocástica del nivel en el instante actual se deriva de la presencia del término de perturbación η_t ⁸. Así pues, si la varianza de ζ_t es nula, de forma que la pendiente es constante, el modelo resultante —conocido como *modelo de nivel local con deriva*— considera un nivel estocástico y una pendiente fija, es decir,

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \beta + \eta_t$$
⁹.

Si la pendiente no es sólo constante sino nula, el modelo anterior se transforma en el que se ha denominado modelo de nivel local. Finalmente, es posible mantener el carácter estocástico de la pendiente y, al mismo tiempo, suponer que, dados los valores del nivel y la pendiente en el instante $t-1$, el valor del nivel en el instante t es no estocástico, es decir,

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1},$$

$$\beta_t = \beta_{t-1} + \zeta_t$$
¹⁰.

Por otra parte, el modelo de tendencia lineal local se puede modificar introduciendo un factor de amortiguación en el componente de pendiente de la tendencia, es decir,

$$\beta_t = \rho\beta_{t-1} + \zeta_t,$$

⁶ Aproximación local de una tendencia lineal.

⁷ En este tipo de modelos, la tendencia lineal local puede ser generalizada a polinomios de órdenes más altos y, aunque dichas tendencias no son lineales en el sentido de que dan lugar a funciones de predicción, por ejemplo, cuadráticas o cúbicas, pueden ser formuladas como modelos lineales de series temporales (véase Harvey, 1989:295, para el caso de un modelo de tendencia lineal cuadrática). El modelo de tendencia lineal local es equivalente a un proceso ARIMA (0,2,2); además, será un proceso no invertible cuando $\sigma_\zeta^2 = 0$ y, por el contrario, si $\sigma_\zeta^2 > 0$ el proceso es invertible independientemente de cual sea el valor de σ_η^2 .

⁸ Además, se supone que estos dos términos de perturbación aleatoria son mutua y serialmente independientes.

⁹ Si se supone, además, que $\sigma_\eta^2 = 0$, se obtiene una tendencia lineal determinística.

¹⁰ Asumir que $\sigma_\eta^2 = 0$ puede significar predicciones más pobres que las del modelo de tendencia lineal local; sin embargo, se trata de una formulación que puede ser más apetecible para los gestores de la política económica (véase Harvey, 1989:286). El modelo de nivel fijo y pendiente estocástica se denomina también *modelo de tendencia alisada (smoothed)*, dado que el componente tendencial es un camino aleatorio integrado cuya estimación fluctúa suavemente, sin incrementos o decrementos abruptos. Estas tendencias alisadas constituyen especificaciones equivalentes a las denominadas funciones *spline*, diseñadas, precisamente, con objeto de aproximar una serie de datos a través de una función relativamente suave. En concreto, el modelo anterior es equivalente a una *spline* cúbica (véase Wecker y Ansley, 1983 y Durbin y Koopman, 2001:61-63).

donde $0 \leq \rho \leq 1$. Se obtiene entonces el *modelo de tendencia lineal local amortiguado*¹¹.

Por supuesto, a la hora de elegir una de estas especificaciones, es importante, *a priori*, examinar el comportamiento de la serie a lo largo de toda la muestra y, *a posteriori*, comprobar cuál produce un mejor ajuste; aunque tampoco se pueden ignorar las implicaciones de cada especificación y los objetivos que se persiguen con el modelo.

En muchas series económicas es importante distinguir entre una tendencia de largo plazo y los movimientos asociados a un componente cíclico, que admite también tanto una especificación determinística como estocástica. Un ciclo determinista describe un comportamiento perfectamente periódico con una frecuencia dada, que puede ser recogido mediante una función de senos y cosenos del tipo siguiente

$$\Psi_t = \alpha \cos(\lambda t) + \beta \text{sen}(\lambda t),$$

donde λ es la frecuencia angular del ciclo, en radianes¹². Si se admite que los parámetros α y β evolucionan aleatoriamente en el tiempo, el ciclo adquiere naturaleza estocástica. Pero antes de incorporar el carácter estocástico, conviene garantizar la continuidad del componente cíclico expresándolo de la forma recursiva siguiente¹³:

$$\begin{pmatrix} \Psi_t \\ \Psi_t^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \lambda & \text{sen} \lambda \\ -\text{sen} \lambda & \cos \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_{t-1} \\ \Psi_{t-1}^* \end{pmatrix}, \quad t = 1, \dots, T$$

con $\Psi_0 = \alpha$ y $\Psi_0^* = \beta$ ¹⁴. Los nuevos parámetros son Ψ_{t-1} , el valor del ciclo en $t-1$, y Ψ_{t-1}^* , que aparece por construcción en la formación de Ψ_t . Entonces, el ciclo es estocástico al introducir dos términos de perturbación ruido blanco gaussianos k_t y k_t^* de forma que

$$\begin{pmatrix} \Psi_t \\ \Psi_t^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \lambda & \text{sen} \lambda \\ -\text{sen} \lambda & \cos \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_{t-1} \\ \Psi_{t-1}^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_t \\ k_t^* \end{pmatrix}$$

Por razones de identificabilidad y parsimonia, se supone que k_t y k_t^* están mutuamente incorreladas y poseen la misma varianza σ_k^2 . Por otra parte, para recoger los comportamientos

¹¹ Estos modelos pueden ser utilizados para recoger tendencias globales no lineales como, por ejemplo, las presentes en aquellos casos en lo que existe un nivel de saturación. Esta solución, aunque es viable en algunos momentos del tiempo, no capta ciertas características de comportamiento de manera tan adecuada como otras formulaciones alternativas, tales como curvas de crecimiento (véase Harvey, 1989:296-298).

¹² Es decir, el parámetro λ representa el número de veces que el ciclo se repite en un período de tiempo de longitud 2π . De este modo, el cociente $\lambda/2\pi$ expresa el número de veces que se repite el ciclo por unidad de tiempo.

¹³ Véase Harvey (1989:39).

pseudocíclicos que caracterizan a muchas series temporales económicas, conviene incluir un factor de amortiguación (*damping*) ρ que aporta mayor flexibilidad al ciclo estocástico, es decir,

$$\begin{pmatrix} \Psi_t \\ \Psi_t^* \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \cos \lambda & \text{sen } \lambda \\ -\text{sen } \lambda & \cos \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_{t-1} \\ \Psi_{t-1}^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_t \\ k_t^* \end{pmatrix}$$

donde $0 \leq \rho \leq 1$ ¹⁵. Si $\lambda = 0$ o $\lambda = \pi$, el ciclo estocástico se convierte en un proceso autorregresivo de primer orden¹⁶. Si $\lambda = 0$ y $\rho = 1$, el componente cíclico se transforma en el modelo de nivel local especificado para la tendencia¹⁷.

El componente cíclico puede ser combinado con el tendencial de muchas maneras, pero las formulaciones más habituales son: *modelo cíclico*,

$$y_t = \mu + \Psi_t + \varepsilon_t,$$

con $0 \leq \rho \leq 1$ ¹⁸; *modelo tendencia-ciclo*,

$$y_t = \mu_t + \Psi_t + \varepsilon_t,$$

donde μ_t recoge una tendencia lineal local¹⁹; *modelo de tendencia cíclica*,

$$y_t = \mu_t + \varepsilon_t,$$

donde

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \Psi_{t-1} + \beta_{t-1} + \eta_t,$$

$$\beta_t = \beta_{t-1} + \zeta_t$$
²⁰.

¹⁴ Véase Harvey (1993:182, 227).

¹⁵ Adviértase que la incorporación de un factor de amortiguación menor que la unidad hace que el ciclo presente una representación equivalente a la de un proceso VAR(1) y que, en términos predictivos, la fluctuación cíclica tienda a desaparecer.

¹⁶ Aunque ρ es no negativo, el parámetro en la formulación autorregresiva de primer orden equivalente puede ser tanto positivo ($\lambda = 0$) como negativo ($\lambda = \pi$).

¹⁷ Nótese que la varianza del ciclo, σ_Ψ^2 , está relacionada con la varianza del término de perturbación del ciclo, σ_k^2 , a través de la expresión $\sigma_k^2 = (1 - \rho^2)\sigma_\Psi^2$ cuando $0 \leq \rho \leq 1$.

¹⁸ Es equivalente a un proceso ARMA(2,2) con constante. El ciclo en sí mismo es un proceso ARMA(2,1). La parte MA está sometida a restricciones, pero las más importantes se establecen con respecto a los parámetros AR. Si $0 < \lambda < \pi$, las raíces del polinomio AR son un par de raíces complejas conjugadas con módulo ρ^{-1} y fase λ . Si, además, $0 \leq \rho < 1$, dichas raíces están fuera del círculo de radio unidad y el proceso es estacionario. Dado que las raíces de un polinomio AR(2) pueden ser tanto reales como complejas, la formulación de un modelo cíclico restringe la región admisible de valores de los coeficientes AR a aquélla capaz de generar un comportamiento pseudocíclico (véase Harvey, 1993:193).

¹⁹ Esta representación es equivalente a un proceso ARIMA(2,2,4) (Harvey, 1989:511).

Otras especificaciones consisten en añadir un componente AR(2) a $y_t = \mu_t + \varepsilon_t$ o $\mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + \eta_t$ ²¹.

Si las observaciones de la serie en cuestión se registran con periodicidad inferior a la anual, suelen aparecer efectos estacionales y, por ello, conviene introducir este componente en el modelo. Si las fluctuaciones estacionales son estables, el componente estacional se puede considerar determinista o fijo. Si el número de estaciones es s , y dado que la suma de los efectos estacionales a lo largo del año debe ser nula, el componente estacional en el instante t se puede especificar como:

$$\gamma_t = \sum_{j=1}^{s-1} z_{j,t} \gamma_j$$

donde $z_{j,t}$, $j=1, \dots, s-1$, es igual a 1 si t pertenece a la estación j , -1 si t pertenece a la estación s y 0 en otro caso.

Formalmente, se tiene que

$$\gamma_t = \begin{cases} \gamma_j, & \text{si } t \text{ pertenece a la estación } j, \\ -\sum_{j=1}^{s-1} \gamma_j, & \text{si } t \text{ pertenece a la estación } s \end{cases} \quad j = 1, \dots, s-1$$

En cambio, si el patrón estacional evoluciona a lo largo del tiempo, parece más adecuado incorporar un componente estacional estocástico, que admite, al menos, dos formulaciones posibles.

Una forma de conseguir que el patrón estacional evolucione en el tiempo es permitir que la suma de los efectos estacionales a lo largo del año no sea estrictamente nula, sino igual a un término de perturbación aleatoria. Es decir, los valores del componente estacional en los instantes del tiempo $t, t-1, \dots, t-s+1$ están ligados por la relación $\sum_{j=0}^{s-1} \gamma_{t-j} = \omega_t$, o bien, $\gamma_t = \sum_{j=1}^{s-1} \gamma_{t-j} + \omega_t$,

siendo ω_t un término de perturbación aleatoria tal que $\omega_t \sim NID(0, \sigma_\omega^2)$. Otra posibilidad es

²⁰ Si en este modelo se supone que $\lambda = 0$ y se elimina el término β_{t-1} , se puede asumir que ψ_t recoge el componente tendencial y, de hecho, se obtiene la formulación del modelo de tendencia lineal local amortiguado. Si se supone, además, que $\rho = 1$ y $\sigma_k^2 = 0$, se obtiene una tendencia lineal determinística.

²¹ Nótese que si la serie temporal presenta un comportamiento cíclico de frecuencia λ , dicho comportamiento puede recogerse mediante un polinomio autorregresivo de la forma $(1 - 2\cos(\lambda)L + L^2)$, siendo L el operador de retardo.

suponer que el efecto de cada estación evolucione de acuerdo a un camino aleatorio (Harrison y Stevens, 1976:217-218). Es decir, si t pertenece a la estación j , $\gamma_t = \gamma_{j,t}$, donde

$$\gamma_{j,t} = \gamma_{j,t-1} + \omega_{j,t}, \quad j = 1, \dots, s$$

y ω_t sigue siendo un término de perturbación aleatoria tal que $\omega_t \sim NID(0, \sigma_\omega^2)$.

Otra alternativa es la formulación trigonométrica²², en la que

$$\gamma_t = \sum_{j=1}^{\lfloor s/2 \rfloor} \gamma_{j,t},$$

donde $\lfloor s/2 \rfloor$ denota la parte entera de $s/2$ y cada $\gamma_{j,t}$ es generada por

$$\begin{pmatrix} \gamma_{j,t} \\ \gamma_{j,t}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \lambda_j & \text{sen } \lambda_j \\ -\text{sen } \lambda_j & \cos \lambda_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{j,t-1} \\ \gamma_{j,t-1}^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_{j,t} \\ \omega_{j,t}^* \end{pmatrix},$$

para $j = 1, \dots, \lfloor s/2 \rfloor$ y $t = 1, \dots, T$; $\lambda_j = 2\pi j / s$ es la frecuencia, en radianes, y $\omega_{j,t}$ y $\omega_{j,t}^*$ son dos términos de perturbación aleatoria mutuamente incorrelados distribuidos $NID(0, \sigma_\omega^2)$ en ambos casos²³. Si s es par, $\gamma_{s/2,t} = -\gamma_{s/2,t-1} + \omega_{s/2,t}$. Nótese que $\gamma_{j,t}^*$ interviene por razones de construcción con el mismo fin que en el componente cíclico²⁴.

Nótese también que en cualquiera de las dos especificaciones el número de parámetros que intervienen en el componente estacional es el mismo y, si $\sigma_\omega^2 = 0$, el patrón estacional es determinístico²⁵.

Debido a que el patrón estacional cambia de forma relativamente suave a lo largo del tiempo, algunas veces podría ser razonable eliminar algunos de los términos trigonométricos

²² La modelización del patrón estacional fijo a partir de un conjunto de términos trigonométricos fue inicialmente introducida por Hannan y otros (1970).

²³ Asignando diferentes varianzas a los términos de perturbación correspondientes a términos trigonométricos asociados a diferentes frecuencias, se consigue que las distintas fluctuaciones cíclicas posean diferente grado de variabilidad. Sin embargo, desde un punto de vista práctico es deseable que tengan la misma varianza porque se pierde poco en términos de bondad de ajuste y se gana mucho en tiempo de computación. Por otro lado, la especificación del componente estacional se podría modificar reemplazando el término de perturbación ruido blanco por un proceso ARMA.

²⁴ Esta formulación puede ser más efectiva para modelar comportamientos estacionales en series económicas debido a que en ella se asume que el patrón estacional evoluciona en el tiempo de acuerdo con un proceso MA(s-2), lo que implica oscilaciones más suaves que las generadas por un término de perturbación ruido blanco que caracteriza la formulación a partir de variables cualitativas.

²⁵ Se recomienda esta opción cuando el número de años para los que se disponga de información sea pequeño y no haya un número suficiente de observaciones que permitan la consideración de un patrón estacional cambiante.

correspondientes a las frecuencias más altas²⁶. Aunque, cuando dichos términos son responsables de una parte importante de la variación estacional, ésta no sería una forma adecuada de proceder. Así ocurre cuando se dispone de observaciones semanales en las que existe un importante efecto intramensual, que se refleja en ciclos de períodos dos y cuatro semanas²⁷; en este caso, el componente estacional podría formularse usando los términos trigonométricos asociados a las frecuencias bajas así como a las frecuencias $\pi/2$ y π , es decir,

$$y_t = \mu_t + \gamma_t^{bf} + \gamma_t^{im} + \varepsilon_t,$$

donde γ_t^{bf} contiene, por ejemplo, las variaciones correspondientes a las frecuencias $2\pi j/52$, $j = 1, \dots, 6$, y γ_t^{im} las asociadas a las frecuencias $\pi/2$ y π ²⁸.

También en el caso de datos semanales, el número de semanas por año varía entre 52 y 53 y la misma semana no recoge siempre el mismo período del año. Además, determinadas fiestas como la Semana Santa tampoco caen siempre en el mismo período del año. Una forma de abordar este problema consiste en considerar que el componente estacional es el resultado de combinar dos componentes, es decir,

$$\gamma_t = \gamma_t^p + \gamma_t^f,$$

donde γ_t^p representa el componente periódico, que es una función del número de días del año que han transcurrido hasta que se registra la observación²⁹, y γ_t^f el componente calendario, que recoge los efectos asociados a fiestas que siempre caen el mismo día de la semana pero en diferentes fechas en los distintos años³⁰.

Si se dispone de observaciones diarias se puede incorporar al modelo un componente θ_t para recoger el comportamiento atribuible al día de la semana al que pertenece la observación registrada en el momento t . Si se denota por w el número de tipos diferentes de días en una semana y por k_j el número de días del tipo j -ésimo en la semana, para $j = 1, \dots, w$, el efecto asociado con el j -ésimo tipo de día es $\theta_{j,t}$ donde

²⁶ Abraham y Box (1978) y Anderson (1971).

²⁷ Pierce y otros (1984).

²⁸ Una formulación simplificada alternativa del componente estacional se puede construir a partir de funciones polinomiales de grado tres definidas por tramos (*spline* cúbica).

²⁹ Las especificaciones más habituales utilizadas para recoger este componente periódico son las conocidas funciones *spline* (véase Koopman, 1992).

$$\theta_{j,t} = \theta_{j,t-1} + \chi_{j,t}, \quad j = 1, \dots, w-1,$$

siendo $\chi_{j,t}$ un término de perturbación de media cero, varianza $\sigma_\chi^2(1-k_j^2/K)$, $j = 1, \dots, w-1$, con $K = \sum_{j=1}^w k_j^2$, y covarianzas entre los términos de perturbación $\chi_{j,t}$ y $\chi_{h,t}$ igual a $-\sigma_\chi^2 k_j k_h / K$, $h, j = 1, \dots, w-1$, $j \neq h$. Aunque cada uno de los w efectos diarios, $\theta_{j,t}$, evoluciona en el tiempo, el valor del componente diario en un instante dado del tiempo, θ_t , viene dado por el valor del efecto asociado al día de la semana al que pertenece la observación registrada en el instante t , es decir, $\theta_t = \theta_{j,t}$, $t = 1, \dots, T$, donde j es el tipo de día al que pertenece la observación. Como el modelo se formula para los primeros $w-1$ efectos diarios, el efecto para el tipo de día w se obtiene a partir de la condición de que, en cualquier momento del tiempo, la suma de los efectos diarios correspondientes a los diferentes días de una semana es igual a cero, es decir, $\theta_{w,t} = -k_w^{-1} \sum_{j=1}^{w-1} k_j \theta_{j,t}$ ³¹. El ámbito de aplicación de este último modelo no está limitado a los efectos diarios, sino que puede ser interpretado como una generalización del modelo formulado para el componente estacional en la que se admite que no todas las estaciones sean igualmente ponderadas³².

Por último, si aún siendo la periodicidad de las observaciones inferior a la anual, el análisis revela la ausencia de variaciones estacionales o se da el caso de que los datos han sido ajustados estacionalmente³³, se puede plantear un modelo estructural sin componente estacional.

Combinando la tendencia bajo la formulación del modelo de tendencia lineal local y el componente estacional bajo cualquiera de las dos formulaciones estocásticas básicas, es decir, sin considerar posibles efectos intramensuales ni de calendario, se obtiene el *modelo estructural*

³⁰ Este planteamiento requiere trabajar sobre una base diaria, de modo que se conozca el número de días del año que han transcurrido desde el comienzo del año hasta que se registra cada observación (véase, Harvey, Koopman y Riani, 1995).

³¹ $\theta_{w,t}$ tiene exactamente las mismas propiedades estadísticas que $\theta_{j,t}$, $j = 1, \dots, w-1$.

³² Nótese que, a partir de la formulación anterior, el modelo convencional del componente estacional se obtiene asumiendo que $w = s$ y $k_j = 1$ para $j = 1, \dots, s$.

³³ Nótese que los datos ajustados estacionalmente no siempre tienen las propiedades deseadas, particularmente si el patrón estacional cambia de una forma que no es la considerada por los métodos de ajuste estándar. En general, se recomienda no emplear datos que hayan sido transformados con objeto de eliminar algunos de sus componentes; de ahí, la ventaja que proporciona la formulación estructural, que permite estimar conjuntamente los diferentes elementos de una serie temporal. (Harvey, 1991).

básico (MEB)³⁴. Si se elige la formulación trigonométrica de la estacionalidad, el MEB queda especificado, por tanto, del modo siguiente:

$$y_t = \mu_t + \gamma_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim NID(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + \eta_t, \quad \eta_t \sim NID(0, \sigma_\eta^2)$$

$$\beta_t = \beta_{t-1} + \zeta_t, \quad \zeta_t \sim NID(0, \sigma_\zeta^2)$$

$$\gamma_t = \sum_{j=1}^{[s/2]} \gamma_{j,t},$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_{j,t} \\ \gamma_{j,t}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \lambda_j & \text{sen } \lambda_j \\ -\text{sen } \lambda_j & \cos \lambda_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{j,t-1} \\ \gamma_{j,t-1}^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_{j,t} \\ \omega_{j,t}^* \end{pmatrix}, \quad j=1, \dots, [s/2], \quad \lambda_j = 2\pi j/s,$$

$$\omega_{j,t} \sim NID(0, \sigma_\omega^2), \quad \omega_{j,t}^* \sim NID(0, \sigma_\omega^2), \quad \text{Cov}\{\omega_{j,t}, \omega_{j,t}^*\} = 0.$$

La especificación del modelo se completa suponiendo que no existe correlación entre los términos de perturbación de los distintos componentes debido a razones de identificabilidad³⁵. Y, dado que las propiedades estadísticas del modelo dependen del conjunto completo de perturbaciones, la función de autocovarianzas de la serie observada es igual a la suma de las autocovarianzas de cada uno de los componentes.

Por último, como una extensión natural, el modelo puede incluir valores retardados de la variable dependiente así como variables explicativas exógenas, es decir,

$$y_t = \mu_t + \gamma_t + \psi_t + \sum_{\tau=1}^p \varphi_\tau y_{t-\tau} + \sum_{i=1}^k \sum_{\tau=0}^{q_k} \delta_{i\tau} x_{i,t-\tau} + \varepsilon_t,$$

³⁴ Es equivalente a un proceso $\Delta \Delta_s y_t \sim MA(s+1)$ o también $y_t = \zeta_t / \Delta^2 + S^{-1}(L)\omega_t + \varepsilon_t$. Dado que los operadores Δ^2 y $S(L)$ no poseen raíces comunes, los cambios en el patrón estacional no se confunden con los cambios en la tendencia (véase Harvey, 1989:56). Un modelo estructural básico con variables cualitativas estacionales constituye una formulación equivalente en términos predictivos al propuesto por Box y Jenkins (1976) para analizar la serie del “número de pasajeros”.

³⁵ La independencia de las innovaciones, que implica la independencia entre los respectivos componentes, es un supuesto establecido en la literatura desde el mismo momento en que se empezó a interpretar una serie observada como la agregación de componentes no observables. La justificación de la descomposición reside, precisamente, en la necesidad de separar evoluciones muy dispares que se consideran independientes entre sí, pero que sólo se observan en conjunto (véase Espasa y Cancelo, 1993:280). Ahora bien, como señalan Harvey y Koopman (1992) y Koopman (1992:111), las estimaciones de dichas innovaciones pueden presentar correlaciones elevadas. De forma general, se puede asumir que existen estructuras de correlación entre los términos de perturbación y, de hecho, la relación entre los distintos componentes puede ser un supuesto más adecuado en series temporales económicas.

donde $x_{i,t}$ son variables exógenas³⁶ y φ_τ y $\delta_{i,\tau}$ son parámetros desconocidos. En el caso de que el modelo tenga incorporados retardos de la variable dependiente, por ejemplo

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \mu_t + \varepsilon_t,$$

la tendencia puede ser redefinida como

$$\mu_t^+ = \Phi_p^{-1}(L)\mu_t$$

de forma que

$$y_t = \mu_t^+ + \Phi_p^{-1}(L)\varepsilon_t,$$

siendo $\Phi_p(L) = (1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p)$. En este caso, tanto el componente tendencial como el irregular están sometidos a efectos autorregresivos similares.

Cuando se dispone de datos de alta frecuencia, las especificaciones habituales del componente estacional requieren considerar un número elevado de parámetros que pueden traer aparejados problemas de estimación. En estos casos, una alternativa es recurrir a las funciones *spline*, que constituyen especificaciones más parsimoniosas que suponen el empleo de variables cualitativas.

Un caso de particular interés es aquél en el que las variables explicativas son variables de intervención que permiten recoger observaciones anómalas y/o cambios estructurales³⁷. En el caso más sencillo, es decir, una observación anómala que tiene lugar en un momento determinado del tiempo se recoge mediante una variable impulso. Sin embargo, un cambio estructural caracterizado por un aumento o disminución permanente en el componente de nivel de la serie a partir de un determinado momento del tiempo puede ser capturado mediante una variable intervención tipo escalón o, alternativamente, añadiendo una variable intervención tipo impulso en la ecuación del nivel. Si, por el contrario, se produce un cambio permanente en la pendiente del componente tendencial a partir de un determinado momento, dicha alteración puede ser recogida mediante una variable intervención que toma los valores 1, 2, 3, ... a partir del momento del tiempo en el que es observado el cambio o, alternativamente, añadiendo una variable intervención tipo impulso en la ecuación de la pendiente³⁸.

³⁶ Se dice que $x_{i,t}$ es exógena si no proporciona información sobre los componentes no observables en los instantes del tiempo $t+s$, para $s=0,1,2,\dots$, más allá de la contenida en y_{t-1}, \dots, y_1 (véase Hamilton, 1994:373).

³⁷ Véase Harvey, 1989:397-399, y Harvey y Koopman, 1992.

³⁸ Aunque las variables de intervención tipo impulso o escalón resultan apropiadas para recoger cambios bruscos en el nivel o en la pendiente, también se pueden emplear para recoger cambios inesperados en el componente estacional.

1.2. Modelos de series multivariantes y cointegración

Cuando se dispone de más de una serie temporal, cada una de ellas puede ser analizada de forma separada pero, debido a que las series pueden estar sometidas a similares influencias, se pueden generar estructuras de correlación que hacen interesante su consideración conjunta. De ahí, la necesidad de recurrir a los modelos estructurales de series temporales multivariantes, en los que la citada correlación se introduce a través de los elementos no nulos fuera de la diagonal de la matriz de covarianzas de los términos de perturbación de las ecuaciones.

En este sentido, el enfoque multivariante significa una mayor aproximación a la realidad, en tanto que se pueden capturar las interacciones dinámicas entre las series; pero, en cualquier caso, los cimientos sobre los que se construye dicho planteamiento descansan en los establecidos para el modelo univariante. Este último se puede generalizar fácilmente al caso multivariante, en el que se analiza un vector $N \times 1$ de variables observables $\mathbf{y}_t = (y_{1,t}, \dots, y_{N,t})'$. A modo de ejemplo, la formulación multivariante del modelo de nivel local es $y_{i,t} = \mu_{i,t} + \varepsilon_{i,t}$, con $\mu_{i,t} = \mu_{i,t-1} + \eta_{i,t}$, para $i = 1, \dots, N$ y $t = 1, \dots, T$, es decir,

$$\begin{pmatrix} y_{1,t} \\ \vdots \\ y_{N,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{1,t} \\ \vdots \\ \mu_{N,t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \vdots \\ \varepsilon_{N,t} \end{pmatrix}$$

con

$$\begin{pmatrix} \mu_{1,t} \\ \vdots \\ \mu_{N,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{1,t-1} \\ \vdots \\ \mu_{N,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_{1,t} \\ \vdots \\ \eta_{N,t} \end{pmatrix}$$

donde $\varepsilon_t = (\varepsilon_{1,t}, \dots, \varepsilon_{N,t})' \sim NID(\mathbf{0}, \Sigma_\varepsilon)$ y $\eta_t = (\eta_{1,t}, \dots, \eta_{N,t})' \sim NID(\mathbf{0}, \Sigma_\eta)$. Cada una de las variables del vector \mathbf{y}_t tiene su propio nivel estocástico y la matriz Σ_η mide las covarianzas entre los diferentes niveles. Este modelo se denomina *modelo SUTSE*³⁹ o modelo de ecuaciones de series temporales aparentemente no relacionadas dado que las series sólo están conectadas a través de las correlaciones contemporáneas que se establezcan en las matrices Σ_ε y Σ_η .

³⁹ *Seemingly unrelated time series equations.*

Por supuesto, estos modelos multivariantes pueden incorporar especificaciones más complejas del componente tendencial, así como componentes cíclico y estacional. En cuanto al componente cíclico, y en el caso particular de series económicas, parece razonable asumir que los movimientos de este tipo en las diferentes series estén relacionados con un ciclo económico común, de modo que posean también un período común. Consideraciones similares se pueden efectuar en relación al componente estacional.

Bajo ciertos supuestos, el modelo estructural multivariante de nivel local admite la representación de un modelo de componentes de error de la forma

$$y_{i,t} = \mu_{i,t} + \varepsilon_t + \varepsilon_{i,t}^*,$$

$$\mu_{i,t} = \mu_{i,t-1} + \eta_t + \eta_{i,t}^*,$$

siendo $\varepsilon_t \sim NID(0, \sigma_\varepsilon^2)$, $\varepsilon_{i,t}^* \sim NID(0, \sigma_{\varepsilon^*}^2)$, $\eta_t \sim NID(0, \sigma_\eta^2)$, $\eta_{i,t}^* \sim NID(0, \sigma_{\eta^*}^2)$, para todo $i = 1, \dots, N$ y $t = 1, \dots, T$ ⁴⁰ y donde ε_t y η_t recogen los efectos comunes, mientras que $\varepsilon_{i,t}^*$ y $\eta_{i,t}^*$ recogen los efectos específicos. Un caso especialmente interesante es aquél en el que $\sigma_\eta^2 > 0$, pero $\sigma_{\eta^*}^2 = 0$; entonces, las N series tienen componentes tendenciales que se mueven de forma paralela y están cointegradas.

En general, los modelos multivariantes deben admitir la posibilidad de que existan tendencias comunes para algunas de las variables que componen el vector \mathbf{y}_t ⁴¹. En este caso, existe cointegración entre las series, que puede ser incorporada en un modelo del tipo

$$\mathbf{y}_t = \Theta \mu_t^* + \mu_0 + \varepsilon_t,$$

$$\mu_t^* = \mu_{t-1}^* + \eta_t^*,$$

con $\varepsilon_t \sim NID(0, \Sigma_\varepsilon)$ y $\eta_t^* \sim NID(0, \Sigma_{\eta^*})$, para $t = 1, \dots, T$, siendo Σ_{η^*} una matriz diagonal $k \times k$, μ_0 un vector $N \times 1$ cuyos k primeros elementos son nulos y Θ una matriz $N \times k$ fija tal que $\Theta_{ij} = 0$, $\forall j > i$ y $\Theta_{ii} = 1$, $\forall i$. Si hay k tendencias comunes, habrá $N-k$ relaciones de cointegración. Los correspondientes $N-k$ vectores de cointegración definen las $N-k$ filas de la matriz $\mathbf{A}_{(N-k) \times N}$, tal

⁴⁰ Nótese que $\Sigma_\varepsilon = \sigma_{\varepsilon^*}^2 \mathbf{I} + \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{i}\mathbf{i}'$ y $\Sigma_\eta = \sigma_{\eta^*}^2 \mathbf{I} + \sigma_\eta^2 \mathbf{i}\mathbf{i}'$, donde \mathbf{i} es el vector unitario de dimensión N e \mathbf{I} la matriz identidad.

⁴¹ Aquellas situaciones en las que las series tienen la misma fuente de crecimiento constituyen un ejemplo en el que tiene sentido la formulación de tendencias comunes.

que $A\Theta = \mathbf{0}$, es decir, $Ay_t = A\mu_0 + A\varepsilon_t$, de modo que Ay_t es un proceso estacionario de dimensión $(N-k)\times 1$. Si $k = N$, hay N tendencias y, por tanto, no hay cointegración⁴². Como Σ_{η^*} es diagonal, las tendencias comunes (los elementos de μ_t^*) son independientes. Para un modelo con componente tendencial de nivel local con deriva, la especificación del modelo de tendencias comunes es

$$y_t = \Theta\mu_t^* + \mu_0 + \varepsilon_t,$$

$$\mu_t^* = \mu_{t-1}^* + \beta + \eta_t^*,$$

para $t = 1, \dots, T$, $\varepsilon_t \sim NID(\mathbf{0}, \Sigma_\varepsilon)$ y $\eta_t^* \sim NID(\mathbf{0}, \Sigma_{\eta^*})$, siendo β un vector $k\times 1$ de pendientes. A

modo de ejemplo, el modelo de nivel local bivalente se puede representar como

$$\begin{pmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{1,t} \\ \mu_{2,t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \mu_{1,t} \\ \mu_{2,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{1,t-1} \\ \mu_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_{1,t} \\ \eta_{2,t} \end{pmatrix},$$

para $t = 1, \dots, T$, donde

$$\Sigma_\varepsilon = \begin{pmatrix} \sigma_{\varepsilon_1}^2 & \sigma_{\varepsilon_{12}}^2 \\ \sigma_{\varepsilon_{21}}^2 & \sigma_{\varepsilon_2}^2 \end{pmatrix}$$

y

$$\Sigma_\eta = \begin{pmatrix} \sigma_{\eta_1}^2 & \sigma_{\eta_{12}}^2 \\ \sigma_{\eta_{21}}^2 & \sigma_{\eta_2}^2 \end{pmatrix}.$$

Alternativamente, su representación como un modelo de componentes de error es

$$\begin{pmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{1,t} \\ \mu_{2,t} \end{pmatrix} + \varepsilon_t \mathbf{i}_2 + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t}^* \\ \varepsilon_{2,t}^* \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \mu_{1,t} \\ \mu_{2,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{1,t-1} \\ \mu_{2,t-1} \end{pmatrix} + \eta_t \mathbf{i}_2 + \begin{pmatrix} \eta_{1,t}^* \\ \eta_{2,t}^* \end{pmatrix},$$

para $t = 1, \dots, T$, siendo $\mathbf{i}_2 = (1, 1)'$, $\varepsilon_t \sim NID(0, \sigma_\varepsilon^2)$, $\varepsilon_{i,t}^* \sim NID(0, \sigma_{\varepsilon_i^*}^2)$ para $i = 1, 2$,

⁴² Una forma de determinar k se basa en estimar el modelo original como si no hubieran factores comunes, aplicar un análisis de componentes principales sobre la matriz Σ_η estimada y tomar el valor de k que recoja una parte importante de la variabilidad total. Un procedimiento más formal puede llevarse a cabo en la línea sugerida por Stock y Watson (1988).

$\eta_t \sim NID(0, \sigma_\eta^2)$ y $\eta_{i,t}^* \sim NID(0, \sigma_{\eta^*}^2)$ para $i = 1, 2$. Si $\sigma_{\eta^*}^2 = 0$, se obtiene que $\mu_{1,t} = \mu_{1,t-1} + \eta_t$ y $\mu_{2,t} = \mu_{2,t-1} + \eta_t$ de forma que los componentes tendenciales de ambas series siguen sendas paralelas. Resulta que los procesos $y_{1,t}$ e $y_{2,t}$ son no estacionarios, puesto que no se mueven alrededor de un nivel constante, pero existe una tendencia común compartida por ambas series. Es decir, $y_{1,t}$ e $y_{2,t}$ son $I(1)$, pero existe una relación lineal estacionaria y, por tanto, las series están cointegradas. Si $\mu_{1,0} = \mu_{2,0}$, dicha relación es $y_{1,t} - y_{2,t}$.

En general, la presencia de cointegración en el caso bivalente se puede recoger mediante un modelo de tendencias comunes dado por

$$\begin{pmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \theta_{2,1} \end{pmatrix} \mu_t^* + \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{pmatrix},$$

donde

$$\mu_t^* = \mu_{t-1}^* + \eta_t^*.$$

Es decir, se tiene la siguiente representación para las series consideradas

$$\begin{aligned} y_{1,t} &= \mu_t^* + \varepsilon_{1,t}, \\ y_{2,t} &= \theta_{2,1} \mu_t^* + \mu_2 + \varepsilon_{2,t}, \end{aligned}$$

donde

$$\mu_t^* = \mu_{t-1}^* + \beta + \eta_t^*.$$

Por tanto,

$$y_{1,t} - \frac{1}{\theta_{2,1}} y_{2,t} = -\frac{\mu_2}{\theta_{2,1}} + \varepsilon_{1,t} - \frac{1}{\theta_{2,1}} \varepsilon_{2,t}$$

es una combinación lineal estacionaria que implica cointegración. El vector de cointegración $(1 \quad -1/\theta_{2,1})$ es tal que $(1 \quad -1/\theta_{2,1}) \begin{pmatrix} 1 \\ \theta_{2,1} \end{pmatrix} = 0$, eliminándose, de este modo, el elemento causante de la no estacionariedad⁴³.

Las tendencias comunes especificadas implican cointegración en la frecuencia cero, pero todos estos conceptos pueden ser extendidos a otras frecuencias, admitiendo entonces, la existencia de componentes cíclicos o estacionales comunes, que pueden ser interpretados en el

⁴³ Otros ejemplos de la especificación del modelo de tendencias comunes se pueden encontrar en el anexo I.

sentido de que los cambios en los patrones cíclicos o estacionales de las diferentes series proceden de una fuente común.

Las propiedades de un modelo multivariante y , en concreto, del modelo de nivel local multivariante dependen de las estructuras de las matrices de varianzas-covarianzas Σ_ε y Σ_η . Bajo la restricción de homogeneidad, que establece que $\Sigma_\eta = q\Sigma_\varepsilon$ ⁴⁴, todas las combinaciones lineales de los elementos de y_t tienen las mismas propiedades estocásticas⁴⁵.

Cuando en un modelo multivariante todas menos una de las variables componentes del vector y_t son exógenas, no es necesario plantear un sistema con N ecuaciones sino que se puede formular un modelo de regresión dinámico uniecuacional. En el contexto de los modelos estructurales, se puede obtener un modelo uniecuacional con variables exógenas del tipo

$$y_t = \mu_t + X_t \delta + \varepsilon_t,$$

con

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \eta_t,$$

$$X_t = (x_{1,t}, \dots, x_{N-1,t})$$

y

$$\delta = (\delta_1, \dots, \delta_{N-1})'.$$

Si la varianza del nivel es igual a cero, se obtiene un modelo de regresión clásico. Cuando la varianza del componente irregular es cero pero la varianza del componente de nivel es distinta de cero, se obtiene una regresión en primeras diferencias. Finalmente, cuando ambas varianzas son distintas de cero, se obtiene un modelo de función de transferencia. Casos particulares de inclusión de variables explicativas en modelos estructurales multivariantes son el análisis de intervención y el modelo del mecanismo de corrección del error⁴⁶.

⁴⁴ Véase Harvey (1989:435-436).

⁴⁵ Es decir, para un modelo de nivel local, y_t es homogéneo si el proceso estacionario $\Delta w' y_t$ posee la misma potencia espectral y la misma función de autocorrelación para todo vector w de parámetros fijos (no estocásticos). En ese caso, el modelo estructural para cualquier combinación $w' y_t$ verifica la relación $\Sigma_\eta = q\Sigma_\varepsilon$ y la función de autocorrelación y de densidad espectral dependen sólo de q .

⁴⁶ Véase Harvey y Scott (1984).

2. Modelos estructurales versus modelos ARIMA

Los modelos estructurales presentan ventajas respecto a los modelos ARIMA, algunas de las cuales se comentan a continuación. Los modelos ARIMA pueden formularse en el espacio de los estados⁴⁷ y muchos modelos estructurales admiten una representación ARIMA. De hecho, cuando las series temporales tienen una estructura subyacente suficientemente simple, las dos formulaciones son esencialmente equivalentes; pero cuando tales estructuras son más complejas las diferencias entre ambos enfoques son más evidentes⁴⁸.

En un modelo estructural de series temporales, cada uno de los componentes relevantes de la serie, tales como la tendencia, el ciclo o las variaciones estacionales, es formulado explícitamente y, por tanto, es posible obtener información específica sobre ellos. Además, el investigador puede identificar e introducir cualquier característica que requiera un tratamiento especial en situaciones particulares. Ésta es, quizás, la principal ventaja del enfoque estructural frente a la aproximación ARIMA, en la que la tendencia y el componente estacional se eliminan aplicando convenientes diferencias a la serie original antes de proceder al análisis. En definitiva, la metodología ARIMA constituye una especie de caja negra en la que el modelo adoptado depende puramente de los datos, sin análisis *a priori* de la estructura del sistema que los generó. Los modelos estructurales son, desde este punto de vista, más transparentes, ya que permiten comprobar si el comportamiento predicho por el modelo para cada componente de la serie se corresponde con lo esperado.

Debe tenerse en cuenta, además, que la eliminación de tendencia y estacionalidad puede constituir un fuerte inconveniente si, como ocurre con la estadística oficial o en muchas aplicaciones econométricas, dichos componentes tienen interés en sí mismos y no sólo interesa la predicción de la serie. Además, el requerimiento de estacionariedad del planteamiento propuesto por Box y Jenkins (1976) obliga a diferenciar las series, pero no siempre es fácil decidir el orden de integración adecuado. En realidad, las herramientas básicas de identificación de modelos

⁴⁷ Algunos ejemplos de modelos ARIMA representados en el espacio de los estados pueden encontrarse en Harvey (1989:510-511), Brockwell y Davis (1991:465-473) y Hamilton (1994:374-377), entre otros.

⁴⁸ Harvey (1985) muestra algunas de estas diferencias al analizar series temporales macroeconómicas anuales. En concreto, observa que los modelos ARIMA elegidos bajo el principio de parsimonia pueden dar lugar a formulaciones que, aunque predican bien en el corto plazo, no recogen las características más notables de la serie

ARIMA, es decir, las funciones de autocorrelación, son bastante imprecisas y no siempre permiten decantarse claramente por un único modelo⁴⁹.

Los modelos en el espacio de los estados son también más flexibles. La naturaleza recursiva del modelo y las técnicas computacionales para su análisis permiten incorporar directamente cambios conocidos en la estructura del sistema a lo largo del tiempo. En cambio, los modelos de Box y Jenkins están basados en el supuesto de que la serie diferenciada es estacionaria, lo que incorpora mayor rigidez. Asimismo, en el planteamiento estructural, la predicción es bastante directa⁵⁰ y las observaciones perdidas son más fáciles de tratar⁵¹. Brockwell y Davis (1991) consideran que la representación en el espacio de los estados y las ecuaciones recursivas propias del filtro de Kalman son ideales para el análisis de datos con valores perdidos⁵². En el enfoque ARIMA, sin embargo, es relativamente difícil manejar observaciones perdidas, y la incorporación de variables explicativas, efectos de calendario y cambios estructurales no es siempre tan inmediata como en la representación en el espacio de los estados⁵³.

Por otra parte, las observaciones correspondientes a series multivariantes pueden ser manejadas por extensión directa de la formulación estructural univariante; cosa que no ocurre en la metodología ARIMA. Además, la naturaleza markoviana de los modelos en el espacio de los estados permite que los cálculos necesarios para implementarlos se realicen de forma recursiva; lo que permite manejar modelos de elevada dimensión sin un incremento desproporcionado de la

bajo estudio y tienen poco significado desde el punto de vista económico. Algunas de estas diferencias son también señaladas por Durbin y Koopman (2001:39, 46-49, 51-53).

⁴⁹ Bajo la metodología ARIMA es frecuente encontrar que las magnitudes económicas se comportan como procesos integrados de orden uno, es decir, procesos que se caracterizan por cambios persistentes. Este hecho se debe a que los procesos integrados de orden dos caracterizados por cambios más suaves no suelen ser identificados en muestras pequeñas a partir de los correlogramas y los tests de raíz unitaria estándar. Estos cambios más suaves se suelen presentar en magnitudes económicas que responden más a largo plazo ante una determinada medida de política económica.

⁵⁰ Harvey y Todd (1983) comparan las predicciones realizadas a partir de modelos ARIMA y modelos estructurales y concluyen que hay fuertes argumentos a favor del enfoque estructural desde el punto de vista práctico.

⁵¹ Para obtener las estimaciones filtradas en los instantes del tiempo correspondientes a las observaciones perdidas, basta con suponer que $e_t=0$ y $K_t=0$ en los valores perdidos (véase Harvey y Koopman, 1992, y Durbin y Koopman, 2001:23-24).

⁵² Estos autores muestran, en concreto, las ventajas de esta aproximación frente a los modelos ARIMA en lo referente a la evaluación de la función de verosimilitud gaussiana para los valores efectivamente observados y a la estimación, con error mínimo cuadrático medio, de los valores perdidos. Véase Brockwell y Davis (1991:482-488). Jones (1993:89-94) también expone el procedimiento para tratar observaciones perdidas en la representación en el espacio de los estados.

⁵³ También es verdad que los procesos autorregresivos son fáciles de especificar y estimar y se espera que proporcionen buenas predicciones en el corto plazo en muchas situaciones.

tarea computacional.

En este sentido, los modelos estructurales multivariantes de series temporales pueden presentar alguna ventaja sobre la representación VAR, que en general requiere un gran número de parámetros además de los propios de la matriz de covarianzas de los términos de perturbación. En particular, cuando algunas de las series son no estacionarias, un VAR en diferencias puede no ser una especificación adecuada puesto que diferentes series pueden tener distinto orden de integración. Entonces, la aplicación de diferencias puede provocar la aparición de componentes MA estrictamente no invertibles. En estos casos, parece más viable formular el modelo en niveles; pero cuando las series son no estacionarias, puede ser necesario recurrir a un VAR de orden aún mayor que en el caso estacionario. Un modelo estructural ofrece, en cambio, una especificación más parsimoniosa.

Además, estos últimos modelos permiten imponer restricciones de cointegración y tomar en consideración variables explicativas (Harvey, 1989:9, 468-470). Dado que en un modelo estructural multivariante la tendencia es modelada explícitamente, los movimientos de corto plazo pueden ser capturados por una representación VAR de bajo orden y la cointegración surgirá cuando haya tendencias comunes. Así, aunque los modelos estructurales son un camino para presentar las características más notables de las series observadas, se convierten en modelos de comportamiento una vez que se empiezan a incorporar restricciones introduciendo comportamientos dinámicos de corto plazo e incluyendo variables exógenas en algunas de las ecuaciones.

Como señalan Durbin y Koopman (2001:52-53), seguramente, la principal desventaja de los modelos estructurales frente a los modelos ARIMA radica en que los primeros sólo se enseñan en relativamente pocas universidades, existe escasa bibliografía en el campo estadístico-econométrico y sólo desde hace poco tiempo está disponible un *software* específico. Por supuesto, todo lo contrario ocurre en relación con la metodología Box-Jenkins.

ANEXO I. Ejemplos de la especificación del modelo de tendencias comunes

A continuación se especifican las tendencias comunes en un modelo de nivel local con deriva en dos situaciones diferentes.

Ejemplo 1

Sea un vector de variables observables de dimensión 2×1 $\mathbf{y}_t = (y_{1t}, y_{2t})'$, $N = 2$, y una tendencia común, $k = 1$. Entonces, el modelo de nivel local con deriva se puede representar de la forma

$$\begin{pmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \theta_{2,1} \end{pmatrix} \mu_t^* + \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{pmatrix}$$

donde $\mu_t^* = \mu_{t-1}^* + \beta + \eta_t^*$. Es decir,

$$y_{1,t} = \mu_t^* + \varepsilon_{1,t}$$

$$y_{2,t} = \theta_{2,1} \mu_t^* + \mu_2 + \varepsilon_{2,t}$$

donde μ_t^* se ha definido anteriormente. Por tanto,

$$y_{1,t} - \frac{1}{\theta_{2,1}} y_{2,t} = -\frac{\mu_2}{\theta_{2,1}} + \varepsilon_{1,t} - \frac{1}{\theta_{2,1}} \varepsilon_{2,t}$$

es una combinación lineal estacionaria, lo que implica cointegración. El vector de cointegración

$$\left(1, -\frac{1}{\theta_{2,1}}\right) \text{ es tal que } \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\theta_{2,1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \theta_{2,1} \end{pmatrix} = 0$$

Ejemplo 2

Sea un vector de variables observables de dimensión 3×1 $\mathbf{y}_t = (y_{1t}, y_{2t}, y_{3t})'$, con $N = 3$ y dos tendencias comunes, $k = 2$. Entonces, el modelo de nivel local con deriva se puede representar de la forma

$$\begin{pmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \\ y_{3,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \theta_{2,1} & 1 \\ \theta_{3,1} & \theta_{3,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{1,t}^* \\ \mu_{2,t}^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \\ \varepsilon_{3,t} \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{pmatrix} \mu_{1,t}^* \\ \mu_{2,t}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{1,t-1}^* \\ \mu_{2,t-1}^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_{1,t} \\ \eta_{2,t} \end{pmatrix}$$

Es decir,

$$y_{1,t} = \mu_{1,t}^* + \varepsilon_{1,t}$$

$$y_{2,t} = \theta_{2,1}\mu_{1,t}^* + \mu_{2,t}^* + \varepsilon_{2,t}$$

$$y_{3,t} = \theta_{3,1}\mu_{1,t}^* + \theta_{3,2}\mu_{2,t}^* + \mu_{3,t} + \varepsilon_{3,t}$$

donde $\mu_{1,t}^* = \mu_{1,t-1}^* + \beta_1 + \eta_{1,t}^*$ y $\mu_{2,t}^* = \mu_{2,t-1}^* + \beta_2 + \eta_{2,t}^*$. Por tanto, la matriz de vectores de cointegración $A_{1 \times 3}$ será tal que $A\Theta = \mathbf{0}$, es decir,

$$(a_1 \quad a_2 \quad a_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \theta_{2,1} & 1 \\ \theta_{3,1} & \theta_{3,2} \end{pmatrix} = (0 \quad 0)$$

De modo que $a_1 + a_2\theta_{2,1} + a_3\theta_{3,1} = 0$ y $a_2 + a_3\theta_{3,2} = 0$. Si se toma $a_1 = 1$, resulta que $a_2 = -a_3\theta_{3,2}$ y $1 - a_3\theta_{3,2}\theta_{2,1} + a_3\theta_{3,1} = 0$, lo que implica que $a_3 = 1/(\theta_{3,2}\theta_{2,1} - \theta_{3,1})$. Por tanto, el vector de cointegración viene dado por

$$(a_1 \quad a_2 \quad a_3) = \left(1, -\frac{\theta_{3,2}}{\theta_{3,2}\theta_{2,1} - \theta_{3,1}}, \frac{1}{\theta_{3,2}\theta_{2,1} - \theta_{3,1}} \right).$$

Referencias bibliográficas

Abraham, B. y G.E.P. Box (1978) Deterministic and forecast-adaptive time dependent models, *Applied Statistics* 27:120-130.

Anderson, T.W. (1971) *The Statistical Analysis of Time Series*. Wiley.

Box, G.E.P. y G.M. Jenkins (1976) *Time Series Analysis: forecasting and control*, Holden Day.

Brockwell, P.J. y R.A. Davis (1991) *Time Series: theory and methods*, Springer.

Durbin, J. y S.J. Koopman (2001) *Time Series Analysis by State Space Models*, Oxford University Press.

Espasa y Cancelo (1993) *Métodos cuantitativos para el análisis de la coyuntura económica* Alianza Editorial.

- Hamilton, D. (1994) *Time Series Analysis*, Princeton University Press.
- Hannan, E.J., R.D. Terrell y N. Tuckwell (1970) The seasonal adjustment of economic time series. *International Economic Review* 11:24-52.
- Harrison, P.J. y C.F. Stevens (1976) Bayesian forecasting, *Journal of the Royal Statistical Society series B* 38:205-247.
- Harvey, A.C. (1989) *Forecasting, Structural Time Series and the Kalman Filter*, Cambridge University Press.
- Harvey, A.C. (1993) *Time Series Model*, Harvester Wheatsheaf.
- Harvey, A.C. (2000) Trend Analysis. Mimeo.
- Harvey, A.C. y A. Scott (1994) Seasonality in dynamic regression models, *The Economic Journal* 104:1324-1345.
- Harvey, A.C. y A. Jaeger (1991) Detrending, stylized facts and the business cycles. Mimeo.
- Harvey, A.C. y S.J. Koopman (1992) Diagnostic checking of unobserved components time series models, *Journal of Business and Economic Statistics* 10:377-389.
- Harvey, A.C. y S.J. Koopman (19) *Structural Time Series Models*,
- Harvey, A.C., S.J. Koopman y M. Riani (1995) The modelling and seasonal adjustment of weekly observations, *London School of Economics, Discussion Paper EM/95/284*.
- Jones, R.H. (1993) *Longitudinal Data with Serial Correlation: A state-space approach*, Chapman & Hall.

Koopman, S.J. (1992) *Diagnostic checking and intra-daily effects in time series models* Tesis doctoral, Tinbergen Institute research series, 27.

Pierce, D.A., M.R. Gruppe y W.P. Cleveland (1984) Seasonal adjustment of the weekly monetary aggregate: a model-based approach, *Journal of Business and Economic Statistics* 2:260-270.

Stock, J.H. y M.W. Watson (1988) Testing for common trends, *Journal of the American Statistical Association* 83:1097-1107.

Wecker, W.E. y C.F. Ansley (1983) The signal extraction approach to nonlinear regression and spline smoothing, *Journal of the American Statistical Association* 78:81-89.