Un estudio sobre la relación entre las notas de Matemáticas Empresariales y Estadística Básica para las Ciencias Sociales en la ULPGC

Gómez-Déniz, Emilio (egomez@dmc.ulpgc.es)
Dávila Cárdenes, Nancy (ndavila@dmc.ulpgc.es)
García Artiles, María Dolores (mariadolores.gartiles@ulpgc.es)
Departamento de Métodos Cuantitativos en Economía y Gestión
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

RESUMEN

En este trabajo se estudia la relación entre las notas obtenidas, en las asignaturas Matemáticas Empresariales y Estadística Básica para las Ciencias Sociales, por los estudiantes de primero del Grado de Administración y Dirección de Empresas de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria durante el curso académico 2012-2013. Para ello se considera un modelo estadístico basado en el uso de una distribución discreta bivariante como es la distribución Poisson bivariante, que permite, una vez estudiada la validación del modelo a la muestra disponible, analizar el comportamiento de la nota media de la asignatura de Estadística Básica para las Ciencias Sociales (impartida en el segundo semestre) dadas las notas de la asignatura Matemáticas Empresariales (impartida en el primer semestre), obteniendo así un modelo con carácter predictivo. Los resultados muestran una fuerte dependencia de las notas logradas por un estudiante en la asignatura de Estadística Básica

para las Ciencias Sociales condicionada a las notas alcanzadas en Matemáticas Empresariales, observándose por tanto un rendimiento académico similar en ambas asignaturas.
Palabras clave: Distribución de Poisson Bivariante, Distribución Condicionada, estadística Básica para las Ciencias Sociales, Matemáticas Empresariales, Regresión.
Área temática: [Metodología y Docencia]

ABSTRACT

In this paper we study the relationship between marks obtained by first year students of the Business and Management Degree at the University of Las Palmas de Gran Canaria during the academic year 2012-2013 in the subjects Mathematics for Business and Basic Statistics for the Social Sciences.

It is considered a statistical model based on the use of a bivariate discrete distribution like the bivariate Poisson distribution. Once the sample is validate through the model, such a distribution allows to analyze the behavior of the average grades in the course Basic Statistics for the Social Sciences (taught in the second term) given the marks in Mathematics for Business (taught in the first one), in that way a model with predictive character is obtained . The results show a strong reliance on ratings achieved by the students in the Basic course in Statistics for the Social Sciences depending on the grades achieved in Business Mathematics therefore a similar achievement in both courses is observed.
Keywords: Bivariate Poisson Distribution, Conditional Distribution, Basic Statistics for the Social Sciences, Mathematics for Business, Regression.

1 INTRODUCCIÓN

Es notorio que las Matemáticas y la Estadística tienen un papel cada vez mayor en la Economía, constituyendo una herramienta fundamental para transmitir y explicar fenómenos económicos. El aumento de la aplicación de estas disciplinas a la Ciencia Económica han favorecido un desarrollo en la productividad de la misma favoreciendo la descripción de relaciones económicas complejas.

En las últimas décadas, la utilización de las Matemáticas, como lenguaje simbólico y método de razonamiento científico, ha constituido una herramienta fundamental en las tareas y objetivos de la Economía. Por otra parte, la Estadística, disciplina subsidiaria de la Matemática, proporciona procedimientos sistemáticos de análisis e interpretación de datos, convirtiéndose en un poderoso instrumento para el estudio de la realidad.

En este trabajo se pretende analizar la relación existente entre las calificaciones de las asignaturas de Matemáticas y Estadística, utilizando para ello el rendimiento académico obtenido por los estudiantes que inician estudios de Administración y Dirección de Empresas.

La mayoría de investigaciones destinadas a explicar el éxito o el fracaso en los estudios miden el rendimiento académico a través de las calificaciones o la certificación académica de un estudiante (Tejedor y García-Valcárcel, 2007). Aunque diversos estudios avalan que el rendimiento académico en la enseñanza superior está determinado por múltiples factores, tanto contextuales como personales y que no hay un único indicador para evaluar el proceso formativo de los estudiantes universitarios.

El rendimiento académico definido operativamente por las calificaciones o notas obtenidas por los estudiantes, tiene varias características entre las cuales se encuentra el de ser multidimensional pues en él inciden multitud de variables. La dificultad se encuentra en identificar esta multidimensionalidad y, sobre todo, establecer la importancia que tienen cada una de las variables (Aliaga et al., 2001).

Una línea de trabajo que ha generado un gran volumen de investigación, es la que se ha centrado en analizar la forma en la que los universitarios afrontan la tarea del estudio. Multitud de trabajos desmontan la idea, de que un estudiante universitario, por el simple hecho de serlo, se encuentra perfectamente capacitado para afrontar sus estudios con éxito, dependiendo éste exclusivamente de su esfuerzo, sin tener en cuenta que los determinantes del aprendizaje y el rendimiento en la enseñanza superior son diversos (Martín, García, Torbay y Rodríguez, 2008).

Otra de las conclusiones interesantes de la mayoría de estas investigaciones es el elevado nivel de abandono que se produce en el primer año de carrera. Una vez superada esta fase los niveles de fracaso disminuyen como concluyen Bartual y Poblet (2009). Esta situación puede estar ocasionada por la brecha que existe entre la educación preuniversitaria y la universitaria. Muchos jóvenes llegan a los estudios superiores sin las capacidades, contenidos y actitudes necesarios para aprovechar al máximo el proceso de enseñanza-aprendizaje universitario.

Pero, dado el elevado número de estudiantes con bajo rendimiento en las Matemáticas, no se puede sostener que todos ellos presenten alguna deficiencia en sus capacidades. Por eso, tal como señalan Carbonero y Navarro Zavala (2006), el aprendizaje de las Matemáticas está condicionado por otros factores como pueden ser, los métodos de enseñanza, los instrumentos empleados, las formas de evaluación, las motivaciones, las expectativas, las creencias y actitudes de los estudiantes, etc.

Como afirma Ocaña (2011), también hay que considerar que el déficit en los aprendizajes previos no necesariamente implica que el estudiante carezca de potencial académico, pero dificulta el proceso de enseñanza-aprendizaje y exige reformas en los procesos de acceso a la universidad, así como en los diseños curriculares y en la didáctica, para mejorar el rendimiento académico y aumentar la probabilidad de éxito en las asignaturas universitarias.

Para analizar la problemática del rendimiento académico del alumnado y de cómo los contextos de enseñanza-aprendizaje influyen en él, De la Fuente, Martínez, Peralt y García (2010) valoran el rendimiento utilizando la calificación media en una asignatura anual, concluyendo que la evidencia reciente ha mostrado que nivel de rendimiento académico habitual del alumnado es una variable interdependiente con estilo de acción-emoción, que puede considerarse como una variable presagio.

El objetivo de este trabajo es analizar si el rendimiento académico de los estudiantes de nuevo ingreso, o pendientes de convocatoria, en las asignaturas de Matemáticas Empresariales y Estadística Básica para las Ciencias Sociales está relacionado. Como medida del rendimiento académico se han utilizado las notas obtenidas en ambas asignaturas. Se trata de analizar si la probabilidad de cursar con éxito una asignatura aumenta si se ha superado una previa que esté muy relacionada con ella.

2 MÉTODO

2.1 Participantes

La población que se desea estudiar la componen los estudiantes que han cursado y se han presentado a las evaluaciones continuas y final de las asignaturas de Matemáticas Empresariales y Estadística Básica para las Ciencias Sociales, correspondientes al Grado en Administración y Dirección de Empresas (GADE) en la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria (ULPGC). Hay que tener en cuenta que la asignatura de Matemáticas Empresariales, de 6 créditos, se imparte en el primer semestre, mientras que la asignatura Estadística Básica para las Ciencias Sociales, también de 6 créditos, se imparte en el segundo semestre. Se propone, por tanto, analizar el rendimiento de una asignatura (Estadística) en función del rendimiento de otra asignatura impartida anteriormente (Matemáticas), para comprobar si la probabilidad de superar una asignatura aumenta si se ha superado alguna previa que con la que esté relacionada.

2.2 Objetivo

En este trabajo se trata de estudiar si existe alguna relación de dependencia entre las notas de ambas asignaturas. Fundamentalmente si las notas de Estadística están condicionadas por las notas obtenidas en Matemáticas. Inicialmente se calcula la media de las notas de Estadística condicionada a las notas de Matemáticas, tratando de elaborar un modelo predictivo.

2.3 Selección de la muestra

El número total de estudiantes matriculados en Matemáticas Empresariales durante el curso académico 2012-2013, fue de 676 estudiantes, siendo 365 los estudiantes que siguieron la asignatura, mientras que el número de matriculados en Estadística Básica para las Ciencias Sociales fueron 702, de los cuales se presentaron a las diversas pruebas 426.

En la Tabla 1 se muestran estos datos, calculando, en ambos casos, el porcentaje de aptos y no aptos sobre el total de presentados.

Del total de estos estudiantes, se seleccionaron aquéllos que no habían abandonado a la vez ninguna de las dos asignaturas en estudio y que coincidieran en ambas asignaturas. No se considera en el estudio en qué convocatoria se encuentra el estudiante durante el curso 2012-2013, quedando la muestra en un total de 370 estudiantes.

Para este caso, se presentan en la Tabla 2 los datos obtenidos en cada asignatura, donde también, el porcentaje de aptos y no aptos se calcula sobre el total de presentados. En esta tabla se observa que el análisis del rendimiento académico,

Tabla 1: Porcentajes de estudiantes presentados, Aptos, No Aptos y No presentados en Matemáticas y Estadística

.

Nº estudiantes(%)	Matemáticas	Estadística
Presentados	365 (54%)	426 (61%)
Aptos	122 (33%)	154 (36%)
No Aptos	243 (67%)	272(64%)
No presentados	311 (46%)	276 (39%)
Total	676	702

tomando como base las notas obtenidas por estos estudiantes matriculados en Matemáticas y Estadística en el primer curso 2012-2013, y que han seguido alguna de las dos asignaturas, es bastante similar.

Tabla 2: Porcentajes de estudiantes presentados, Aptos y No Aptos y No presentados en Matemáticas y Estadística de la muestra.

Nº estudiantes(%)	Matemáticas	Estadística
Presentados	311 (84%)	302 (82%)
Aprobados	140 (45%)	125 (41%)
Suspendidos	171 (55%)	177(59%)
No presentados	59 (16%)	68 (18%)
Total	370	370

En términos de porcentajes, en Matemáticas hay un 84% de presentados de los estudiantes que seguían la asignatura, de los cuales el 45% superaron la asignatura y el 55% no. En el caso de Estadística, se presentaron a la convocatoria el 82%

de los estudiantes, de los cuales aprueban el 41% mientras que el 59% no supera la asignatura.

El análisis de estos resultados lleva a reflexionar si es posible que exista una relación entre las notas obtenidas en ambas asignaturas. Con lo cual sólo se consideran en el estudio los estudiantes que se presentaron a ambas asignaturas en la misma convocatoria, descartando el 34% de los estudiantes que no estaban en esta circunstancia. En base a ello la muestra quedó reducida a 243 estudiantes. La distribución empírica de los datos se muestra en la Tabla 3.

Tabla 3: Valores observados para la muestra obtenida en las dos asignaturas bajo estudio. X: Notas de Matemáticas Empresariales. Y: Notas de Estadística Básica para las Ciencias Sociales.

X \ Y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
0	2	2	2	2	1	1	0	0	0	0	0	**10**
1	2	7	8	2	2	1	1	0	0	0	0	**23**
2	0	7	9	6	2	2	0	0	0	0	0	**26**
3	2	4	7	10	7	2	2	0	0	0	0	**34**
4	0	2	2	9	9	4	2	0	0	0	0	**28**
5	1	4	1	5	7	17	10	5	1	0	0	**51**
6	0	1	0	2	8	10	11	3	4	1	0	**40**
7	0	0	0	0	1	3	9	1	2	0	0	**16**
8	0	0	0	0	0	1	2	1	2	1	0	**7**
9	0	0	0	0	0	0	3	3	2	0	0	**8**
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**
Total	**7**	**27**	**29**	**36**	**37**	**41**	**40**	**13**	**11**	**2**	**0**	**243**

La Tabla 4 presenta algunos descriptivos de los datos. Puede observarse que los mismos muestran sobredispersión (varianza mayor que la media) y que la correlación entre las dos variables es positiva.

Tabla 4: Descriptivos de los datos.

$E(X) = 4.21$	$var(X) = 4.77$
$E(Y) = 4.04$	$var(Y) = 4.32$
$cov(X, Y) = 3.17$	$\rho(X, Y) = 0.69$

En la Figura 1 se han representado las notas medias de la asignatura Estadística Básica para las Ciencias Sociales condicionadas a las notas obtenidas en la asignatura Matemáticas Empresariales. Como puede observarse aquéllas siguen un patrón prácticamente lineal.

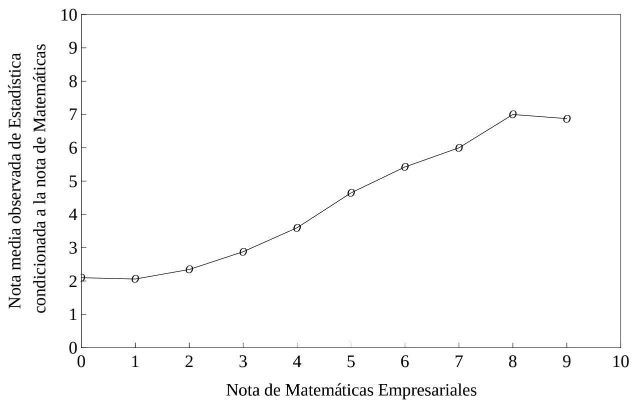

Figura 1: Notas medias empíricas observadas de la asignatura Estadística Básica para las Ciencias Sociales condicionadas a las notas de Matemáticas Empresariales

3 METODOLOGÍA

Es grande el abanico de distribuciones bivariantes de carácter discreto existente en la literatura estadística. Muchas de ellas clásicas (distribución bivariante binomial, distribución bivariante binomial negativa, distribución bivariante Poisson, distribución bivariante Poisson-lognormal (Aitchison y Ho, 1989), la distribución mezcla de dos independientes Poisson con la distribución binomial negativa que aparece en Arbous y Sichel (1954), etc. así como otras relativamente nuevas y que han sido propuestas en los últimos años como alternativas a las primeras. Fundamentalmente, la ventaja que presentan estas últimas frente a las anteriores es el hecho de incorporar una correlación más flexible que permite modelar datos con correlación positiva y negativa. Algunas de estas nuevas distribuciones bivariantes aparecen en los trabajos de Gómez–Déniz, et al. (2008, 2013), Piperigou (2009) y Sarabia y Gómez–Déniz (2011), entre otros. Para una revisión detallada de las diferentes distribuciones bivariantes existentes en la literatura así como de los métodos de construcción de las mismas puede consultarse los trabajos de Kocherlakota y Kocherlakota (1999), Lai (2006) y Sarabia y Gómez–Déniz (2008), así como las referencias incluidas en los mismos.

Una distribución bivariante que permite estudiar de manera sencilla la relación de dependencia entre dos variables aleatorias es la distribución de Poisson bivariante. Su función de probabilidad viene dada por

$$\Pr(X=x,Y=y)=e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}\frac{\lambda_1^x}{x!}\frac{\lambda_2^y}{y!}\sum_{k=0}^{\min(x,y)}\binom{x}{k}\binom{y}{k}k!\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1\lambda_2}\right)^k, \tag{1}$$

para $x=0,1,\ldots$, $y=0,1,\ldots$, siendo $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$ y $\lambda_3>0$.

Mucho se ha escrito en la literatura estadística sobre esta distribución que puede obtenerse de diversas maneras. Por ejemplo, como caso límite de la distribución bivariante binomial o también utilizando el método de reducción trivariado, véase Kocherlatoka y Kocherlatoka (1992), Lai (2006) y Sarabia y Gómez–Déniz (2008), entre otros, etc.

Es sencillo comprobar (Karlis y Ntzoufras, 2003) que las distribuciones marginales son Poisson con medias $\mu_X = \lambda_1 + \lambda_3$ y $\mu_Y = \lambda_2 + \lambda_3$, mientras que la covarianza resulta $cov(X, Y) = \lambda_3$. Puesta que ésta es positiva la distribución admite sólo correlación positiva. El coeficiente de correlación viene dado por

$$\rho(X, Y) = \frac{\lambda_3}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3)}}.$$

Además, si $\lambda_3 = 0$ la función de probabilidad (1) se reduce al caso particular del producto de dos distribuciones de Poisson independientes y, por tanto, las dos variables aleatorias son independientes. En la literatura estadística se le conoce a esta distribución bivariante como doble Poisson.

La distribución condicionada de X es Poisson con parámetro λ_1 mientras que la distribución condicionada de Y es binomial de parámetros y y $\lambda_3/(\lambda_2 + \lambda_3)$. De aquí se deduce que la esperanza condicionada de X sobre Y, o lo que es lo mismo, la regresión de X sobre Y viene dada por

$$E(X|Y = y) = \lambda_1 + \frac{\lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_3} y. \tag{2}$$

De igual forma, la regresión de Y sobre X resulta

$$E(Y|X = x) = \lambda_2 + \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_3} x. \tag{3}$$

Las varianzas condicionadas se obtienen a partir de las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} var(X|Y = y) &= \lambda_1 + \frac{\lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_3} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_3} y, \\ var(Y|X = x) &= \lambda_2 + \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_3} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_3} x. \end{aligned}$$

Obsérvese que tanto (2) como (3) son expresiones lineales en y y x, respectivamente, lo que la hacen adecuada, vista la Figura 1, para modelar los datos que estamos tratando en este trabajo.

Para un estudio detallado de la distribución Poisson bivariante puede consultarse la obra de Kocherlakota y Kocherlakota (1992) y Johnson, Kotz y Balakrishnan (1997).

4 VALIDACIÓN DEL MODELO

Procedemos en esta sección a estudiar si el modelo bivariante Poisson es válido para representar los datos que aparecen en la Tabla 3. Para el ajuste de los tres parámetros del modelo procederemos mediante el método de máxima verosimilitud. Así, supongamos que disponemos de una muestra (x_j, y_j), $j = 1, 2, \ldots, n$ procedente de la función de probabilidad dada en (1), entonces la función logaritmo de la verosimilitud es proporcional a

$$\begin{aligned}\ell(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &\propto -n(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) \\ &+ n(\bar{x}\lambda_1 + \bar{y}\lambda_2) + \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{\min(x_j, y_j)} \binom{x_j}{k}\binom{y_j}{k} k! \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1\lambda_2}\right)^k, \qquad (4)\end{aligned}$$

en la que $\bar{x}$ y $\bar{y}$ son la media muestral de X e Y, respectivamente.

Aunque existen métodos refinados que permiten estimar los parámetros del modelo resolviendo el sistema que resulta de igualar a cero las derivadas parciales de (4) con respecto a cada uno de los parámetros (Kocherlakota y Kocherlakota, 1992), en este trabajo se ha procedido obteniendo directamente el máximo de dicha función, utilizando para ello el paquete Mathematica (versión 9.0) (Wolfram (2003)). Puesto que el máximo global no está garantizado se ha buscado el máximo del logaritmo de la función de verosimilitud comenzando la búsqueda desde diferentes puntos semilla y utilizando diferentes comandos del programa Mathematica (`FindMaximum` y `NMaximize`) así como diferentes métodos de búsqueda, como Newton, QuasiNewton y PrincipalAxis, obteniéndose con todos ellos siempre el mismo resultado. En otro orden de cosas, para la obtención de los errores estándar se ha aproximado la matriz de información de Fissher invirtiendo la matriz Hessiana, aunque también puede obtenerse rescatándola de los factores de Cholesky utilizando para ello un paquete de Mathematica que está disponible en la siguiente página web:

`http://mathematica.stackexchange.com/questions/3206/obtain-approximate-hessian-using-findminimum`

Después de proceder en la línea anterior se obtuvo –982.252 como valor del máximo del logaritmo de la función de verosimilitud. Los valores de los parámetros estimados, con los errores estándar entre paréntesis, son:

$$\begin{aligned} \widehat{\lambda}_1 &= 1.44583\,(0.139), \\ \widehat{\lambda}_2 &= 1.27711\,(0.136), \\ \widehat{\lambda}_3 &= 2.76816\,(0.157). \end{aligned}$$

Los valores observados y ajustados mediante la distribución bivariante Poisson se muestran en la Tabla 5.

Se han agrupado los datos de manera que en cada casilla el número de observaciones sea mayor o igual que cinco, para así dar validez al test basado en la distribución ji–cuadrado. Con esta agrupación el estadístico χ^2 con 19 grados de libertad toma un valor de 23.085. Puesto que este valor es menor que $\chi^2_{0.05} = 30.143$ se desprende que no hay evidencia suficiente para rechazar el modelo bivariante Poisson para los datos, por lo que el ajuste resulta satisfactorio.

Los valores de los mismos descriptivos que aparecen en la Tabla 4 se han calculado ahora utilizando los valores estimados de los parámetros, y se muestran en la Tabla 6. Como se observa, salvo el carácter sobredisperso de las distribuciones marginales, que no lo refleja la distribución bivariante Poisson, los valores están próximos a los observados.

Finalmente, para dar fe del modelo utilizado se ha empleado la expresión (3) con los valores de los parámetros estimados para calcular las medias de las notas

Tabla 5: Valores observados (en negrita) y predichos por el modelo. X: Notas de Matemáticas Empresariales. Y: Notas de Estadística Básica para las Ciencias Sociales.

X \ Y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
0	**2**	**2**	**2**	**2**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**10**
	1.00	1.28	0.81	0.35	0.11	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	3.59
1	**2**	**7**	**8**	**2**	**2**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**23**
	1.45	4.62	4.72	2.76	1.12	0.35	0.09	0.02	0.00	0.00	0.00	15.14
2	**0**	**7**	**9**	**6**	**2**	**2**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**26**
	1.05	5.35	9.81	8.53	4.64	1.80	0.54	0.13	0.02	0.00	0.00	31.90
3	**2**	**4**	**7**	**10**	**7**	**2**	**2**	**0**	**0**	**0**	**0**	**34**
	0.50	3.54	9.66	13.17	10.11	5.15	1.93	0.56	0.13	0.02	0.00	44.81
4	**0**	**2**	**2**	**9**	**9**	**4**	**2**	**0**	**0**	**0**	**0**	**28**
	0.18	1.63	5.94	11.44	12.76	8.86	4.26	1.54	0.44	0.10	0.02	47.21
5	**1**	**4**	**1**	**5**	**7**	**17**	**10**	**5**	**1**	**0**	**0**	**51**
	0.05	0.57	2.62	6.60	10.03	9.63	6.13	2.80	0.98	0.27	0.06	39.77
6	**0**	**1**	**0**	**2**	**8**	**10**	**11**	**3**	**4**	**1**	**0**	**40**
	0.01	0.16	0.89	2.80	5.46	6.95	5.92	3.50	1.53	0.52	0.14	27.90
7	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**3**	**9**	**1**	**2**	**0**	**0**	**16**
	0.00	0.03	0.25	0.93	2.23	3.59	3.97	3.06	1.70	0.71	0.23	16.74
8	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**2**	**1**	**2**	**1**	**0**	**7**
	0.00	0.00	0.05	0.25	0.72	1.42	1.96	1.93	1.37	0.72	0.28	8.74
9	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**3**	**3**	**2**	**0**	**0**	**8**
	0.00	0.00	0.01	0.05	0.19	0.45	0.75	0.91	0.81	0.53	0.26	4.00
10	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
	0.00	0.00	0.00	0.01	0.04	0.12	0.23	0.34	0.37	0.30	0.19	1.61
Total	**7**	**27**	**29**	**36**	**37**	**41**	**40**	**13**	**11**	**2**	**0**	**243**
	4.25	17.21	34.80	46.93	47.45	38.36	25.81	14.82	7.37	3.20	1.21	241.44

Tabla 6: Valores estimados de los descriptivos de los datos

$\widehat{E}(X) = 2.72$	$\widehat{var}(X) = 2.72$
$\widehat{E}(Y) = 4.04$	$\widehat{var}(Y) = 4.04$
$\widehat{cov}(X,Y) = 2.77$	$\widehat{\rho}(X,Y) = 0.67$

de la asignatura de Estadística Básica para las Ciencias Sociales condicionadas a las notas de la asignatura de Matemáticas Empresariales. Los datos obtenidos han servido para representar la regresión de Y dada X que aparece en la Figura 2 (gráfico superior en la Figura) junto a la regresión observada y que ya había sido representada en la Figura 1. El gráfico inferior de la Figura 2 muestra las diferencias entre los valores de estas medias condicionadas y los valores predichos. Puede observarse que en ningún caso estas diferencias, en valor absoluto, superan la unidad.

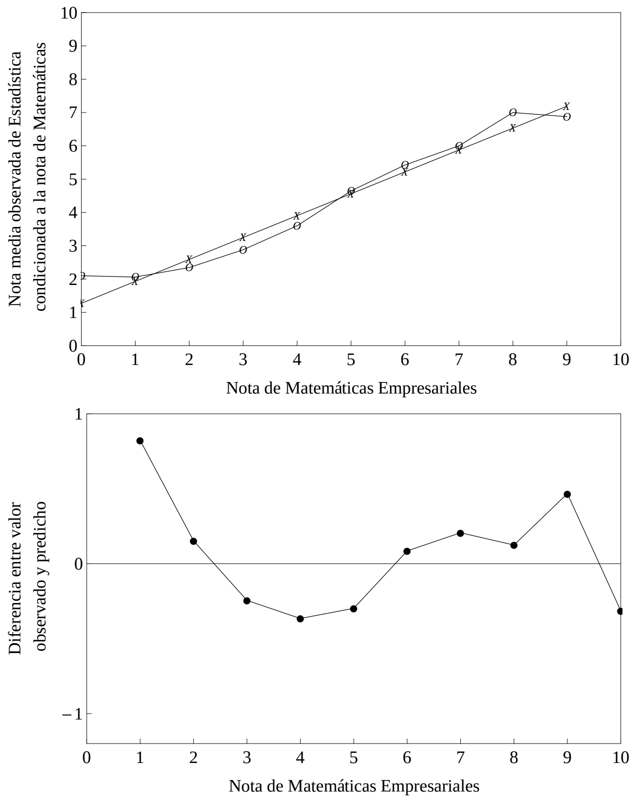

Figura 2: Notas medias empíricas observadas de la asignatura Estadística Básica para las Ciencias Sociales condicionadas a las notas de Matemáticas Empresariales

Una de las ventajas de utilizar la distribución de Poisson bivariante es el hecho de que pueden introducirse factores o covariables en el modelo que permitan explicar las notas de ambas asignaturas simultáneamente de una forma sencilla. Trabajos de esta naturaleza donde se ha utilizado como base la distribución bivariante Poisson aparecen en Jung y Winkelmann (1993) y Karlis y Ntzoufras (2003), entre otros. Para ello se asume que

$$\lambda_j + \lambda_3 = \exp(\boldsymbol{x}_j' \boldsymbol{\beta}_j), \quad j = 1, 2.$$

donde $\boldsymbol{x}_j,\ j = 1, \ldots, n$ es un vector de dimensión k de covariables y $\boldsymbol{\beta}_j$ el correspondiente vector de coeficientes de regresión.

5 RESULTADOS y DISCUSIÓN

Un análisis del rendimiento de una asignatura en función del rendimiento de otras asignaturas anteriores ya ha sido realizado por Peña y Sánchez (2005), mostrando que la probabilidad de cursar con éxito una asignatura disminuye considerablemente si no se ha superado alguna previa y concluyendo que dicho rendimiento está estrechamente ligado con el de asignaturas relacionadas.

En el trabajo realizado, los valores de las medias de la asignatura de Estadística Básica para las Ciencias Sociales condicionadas a las notas de Matemáticas Empresariales aparecen en la Tabla 7.

Tabla 7: Nota media esperada para la asignatura Estadística Básica para las Ciencias Sociales condicionada a las notas obtenidas en la asignatura Matemáticas Empresariales

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\widehat{E}(Y\|X = x)$	1.27	1.93	2.59	3.25	3.90	4.56	5.21	5.87	6.53	7.19	7.84

Observando los datos se desprende que existe una fuerte dependencia de las notas obtenidas por un estudiante en la asignatura de Estadística Básica para las

Ciencias Sociales condicionada a las notas obtenidas en Matemáticas Empresariales. Así, una nota baja en esta asignatura predice también una nota baja en Estadística Básica para las Ciencias Sociales. Igualmente, una nota elevada en Matemáticas Empresariales predice una nota alta en Estadística.

En cualquier caso, alcanzar un nivel de razonamiento formal no es suficiente para saber aplicarlo en problemas matemáticos concretos, siendo necesario adquirir el conocimiento específico para llevar a cabo una correcta resolución.

Se trata de que el estudiante tome conciencia de las actividades a realizar, para poder construir su propio conocimiento lo que a la vez le permitirá generar estrategias y desarrollar un pensamiento organizado y creativo. La enseñanza y el aprendizaje de estrategias constituyen un componente esencial para crear el entorno ideal del desarrollo matemático, la necesidad de buscar nuevos caminos que permitan a los alumnos mejorar su aprendizaje (Carbonero y Navarro, 2006).

Martín, García, Torbay y Rodríguez (2008), determinan que el perfil del universitario con un buen aprendizaje es el de un alumno que adopta fundamentalmente un enfoque de aprendizaje profundo, con capacidad de autorregularlo, que afronta el estudio con motivaciones de tipo intrínseco, con un buen autoconcepto y confianza en sí mismo, que usa estrategias cognitivas y metacognitivas que le ayudan a planificar, supervisar y revisar su proceso de estudio, y que le facilitan lograr un aprendizaje significativo.

Sin embargo, es interesante destacar la experiencia que se desprende del aula. Al iniciar los estudios del grado de Administración y Dirección de Empresas, algunos de los estudiantes perciben, cuando reciben las primeras clases de Matemáticas que no tienen la base suficiente para afrontar la asignatura. La mayoría de los que tienen esta percepción son los que han estudiado Matemáticas para las Ciencias Sociales en el Bachillerato, mientras que los que proceden del Bachillerato Científico y Tecnológico, pueden hacer un seguimiento de la asignatura con menos dificultad y pueden lograr, con el nivel de esfuerzo necesario, el éxito en la asignatura.

Una forma de paliar esa carencia en la formación matemática ha sido la oferta de cursos de armonización de conocimientos que se imparten al inicio del primer semestre, con el fin de evitar el abandono en las primeras semanas del curso. Por otra parte, muchos estudiantes también eligen seguir clases de apoyo en academias, y, los menos, asisten a las tutorías académicas en el despacho del profesor. Sin embargo, los resultados muestran que aquellos estudiantes que asisten a clases y participan de las tutorías con el profesor, tienen un mejor rendimiento académico en las distintas evaluaciones, tanto continua como en la final, tal como se muestra en García-Artiles, Gómez-Déniz y Dávila (2013).

Siguiendo con la experiencia que se desprende del aula en el sector de estudiantes que provienen del Bachillerato de Ciencias Sociales, es notorio que lo que fundamentalmente han estudiado en su bachillerato es Estadística y eso es lo que esperaban cursar desde el principio.

La evidencia muestra que, a pesar de ser mayoritariamente los estudiantes del Bachillerato de Ciencias Sociales los que acceden al Grado en Administración y Dirección de Empresas y ser esa su primera opción a la hora de elegir los estudios (Dávila, García–Artiles, Gómez Déniz y Pérez-Sánchez, 2012), cuando en el segundo semestre han de estudiar la asignatura de Estadística Básica para las Ciencias Sociales y las espectativas de éxito pueden ser mayores, los resultados indican que el éxito académico es similar al obtenido en la asignatura de Matemáticas del primer semestre.

Para muchos estudiantes una salida al problema de base, que liga ambas materias de Matemáticas y Estadística, ha sido la de dejar las asignaturas para más adelante. Sin embargo, la entrada en vigor en el último curso de una normativa de permanencia y la subida de las tasas académicas a partir de la segunda y sucesivas matrículas no se sabe qué efectos tendrá. En cualquier caso, el efecto que el nuevo escenario pueda tener en la mejora de los resultados académicos será objeto de análisis en futuros trabajos.

Por todo ello, el objetivo por parte del profesor debería ser incentivar a los estudiantes a desarrollar una mayor cultura del esfuerzo, pues la evidencia muestra que los que no abandonan y perseveran en el intento alcanzan, en gran parte el éxito, si no en la primera convocatoria de la asignatura sí en las sucesivas del curso.

De la misma forma los profesores debemos proseguir en la tarea de motivar a los estudiantes, ofrecerles buenos materiales para el desarrollo de un trabajo autónomo y animarles a la asistencia a tutorías académicas en el despacho del profesor.

Asimismo el profesor puede enfocar su método docente para facilitar al alumno la conexión de su asignatura con aquellas asignaturas posteriores que son determinantes para su éxito académico. Así motiva y aumenta la probabilidad de aprobar en aquellas disciplinas posteriores donde el estudiante necesita conocimientos y destrezas de la asignatura previa realizada.

6 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AITCHISON, J. Y HO, CH. (1989). The multivariate Poisson–Log normal distribution. *Biometrika*, **76**, 643–653.

- ALIAGA, J., PONCE, C., GUTIÉRREZ, V., DÍAZ, G., REYES, Y., y PINTO, A. (2001). Variables psicológicas relacionadas con el rendimiento académico en Matemática y Estadística en alumnos del primer y segundo año de la facultad de psicología de la unmsm. *Revista de Investigación en Psicología*, **4**, 1, 35–52.

- ARBOUS, A.G. y SICHEL, H.S. (1954). New techniques for the analysis of absenteeism data. *Biometrika*, **41**, 77-90.

- BARTUAL, T. y POBLET, C. (2009). Determinantes del rendimiento académico en estudiantes universitarios de primer año de Economía. *Revista de Formación e Innovación Educativa Universitaria*, **2**, 3, 172–181.

- CARBONERO MARTÍN, M.A. y NAVARRO ZAVALA, J.C.(2006). Entrenamiento de alumnos de Educación Superior en estrategias de aprendizaje en matemáticas. *Psicothema*, **18**, 3, 348–352

- DÁVILA, N., GARCÍA-ARTILES, MD., GÓMEZ-DÉNIZ, E. y PÉREZ-SÁNCHEZ, JM. (2012). Un modelo logit alternativo para explicar los factores que influyen en la probabilidad de éxito en Matemáticas Empresariales. XX Jornadas de ASEPUMA y VIII Encuentro Internacional. Anales de ASEPUMA n 20:520.

- DE LA FUENTE, MARTÍNEZ, J.M., PERALTA, F.J. y GARCÍA, A.B. (2010). Percepción del proceso de enseñanza-aprendizaje y rendimiento académico en diferentes contextos instruccionales de la Educación Superior. *Psicothema*, **22**, 4, 806–812.

- GARCÍA–ARTILES,M.D., GÓMEZ–DÉNIZ, E. y DÁVILA, N. (2013). Factores que pueden influir en la asistencia de los estudiantes a las tutorías presenciales de Matemáticas Empresariales. XXI Jornadas de ASEPUMA. Anales de ASEPUMA n 21:522.

- GÓMEZ–DÉNIZ, E., SARABIA, JM. y CALDERÍN, E. (2008). Univariate and multivariate versions of the negative binomial-inverse Gaussian distributions with applications. *Insurance: Mathematics and Economics*, **42**, 39-49.

- GÓMEZ–DÉNIZ, E., SARABIA, JM. y BALAKRISHNAN, N. (2013). A multivariate discrete Poisson–Lindley distribution: extensions and actuarial applications. *Astin Bulletin*, **42**, 2, 655–678

- JOHNSON, N., KOTZ, S. y BALAKRISHNAN, N. (1997). *Discrete Multivariate Distributions.* New York: Wiley.

- JUNG, RC. y WINKELMANN, R. (1993). Two aspects of labor mobility: a bivariate Poisson regression approach. *Empirical Economics*, 18, 543–556.

- KARLIS, D. y NTZOUFRAS, I. (2003). Analysis of sports data by using bivariate Poisson models. *The Statistician*, 52, 3, 381–393.

- KOCHERLAKOTA, S. y KOCHERLAKOTA, K. (1992). *Bivariate Discrete Distributions*, Marcel Dekker, New York.

- LAI, CD. (2006). Constructions of discrete bivariate distributions. In: *Advances on Distribution Theory, Order Statistics and Inference* (Eds., N. Balakrishnan, E. Castillo, J.M. Sarabia), pp. 29-58, Birkhäuser, Boston.

- MARTÍN E., GARCÍA L., TORBAY A. y RODRÍGUEZ T. (2008). Estrategias de aprendizaje y rendimiento académico en estudiantes universitarios. *International Journal of Psychology and Psychological Therapy*, **8**, 3, 401–412.

- OCAÑA, y. (2011). Variables académicas que influyen en el rendimiento académico de los estudiantes universitarios. *Investigación Educativa*, **15**, 27, 165–179.

- PEÑA, R. y SÁNCHEZ, I. (2005). Análisis estadístico del rendimiento académico de una asignatura con relación a asignaturas anteriores. XI Jornadas de Enseñanza Universitaria de la Informática. Universidad de Alcalá Universidad Carlos III de Madrid.

- PIPERIGOU, V. (2009). Discrete distributions in the extended FGM family: The p.g.f. approach. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 139, 3891–3899.

- SARABIA, JM. y GÓMEZ–DÉNIZ, E. (2008). Construction of multivariate distributions: a review of some recent results. *Statistics and Operational Research Transactions (SORT)*, **32**, 3-36 (with discussion).

- SARABIA, J.M. y GÓMEZ–DÉNIZ, E. (2011). Multivariate Poisson–Beta distributions with applications. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **40**, 1093-1108.

- TEJEDOR, F. y GARCÍA-VALCÁRCEL, A.(2007). Causas del bajo rendimiento del estudiante universitario (en opinión de los profesores y alumnos). Propuestas de mejora en el marco de EEES. *Revista Educación*, **342**, 443-473.

- WOLFRAM, S. (2003). *The Mathematica Book*. Wolfram Media, Inc.