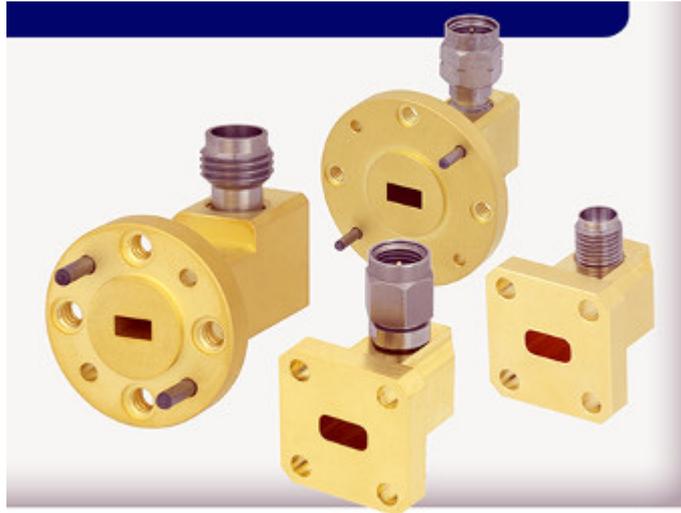


IDETIC
INSTITUTO PARA EL DESARROLLO TECNOLÓGICO Y LA INNOVACIÓN EN
COMUNICACIONES



CIRCUITOS DE RF Y MICROONDAS. APUNTES
TEMAS I, II, III y IV

AUTORES:
B. PABLO DORTA Naranjo
EUGENIO JIMÉNEZ YGUACEL

LAS PALMAS MAYO 2016

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE G.C. EDIFICIO POLIVALENTE-II
Campus de Tafira. 35017 Las Palmas

ÍNDICE

	Pág.
TEMA I. ESTUDIO DE LA LÍNEA DE TRANSMISIÓN	1
I.1 INTRODUCCIÓN	1
I.2 ECUACIONES DE LA LÍNEA DE TRANSMISIÓN SIN PÉRDIDAS	2
I.2.1 Obtención de las ecuaciones	2
I.2.2 Solución de las ecuaciones en régimen sinusoidal permanente	3
I.2.3 Línea terminada o cargada	5
I.2.4 Potencias en la línea sin pérdidas	10
I.3 ECUACIONES DE LA LÍNEA DE TRANSMISIÓN CON PÉRDIDAS	15
I.3.1 Obtención de las ecuaciones en régimen sinusoidal permanente	15
I.3.2 Línea con pérdidas terminada	17
I.3.3 Potencias en la línea con pérdidas	21
I.3.4 Línea de bajas pérdidas	22
I.3.5 Máxima potencia transmisible en una línea de transmisión	23
I.4 BIBLIOGRAFÍA	24
TEMA II. RESUMEN DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL EN MEDIOS GUIADOS	25
II.1 INTRODUCCIÓN	25
II.2 SOLUCIONES GENÉRICAS DE LAS ECUACIONES	25
II.2.1 Soluciones tipo TEM (Modo Transversal Electromagnético)	25
II.2.2 Soluciones tipo TE y TM	30
II.3 MEDIOS DISPERSIVOS Y NO DISPERSIVOS	33
II.4 RESUMEN	35
II.5 BIBLIOGRAFÍA	36
TEMA III. MEDIOS DE TRANSMISIÓN MÁS USADOS	37
III.1 INTRODUCCIÓN	37
III.2 EL CABLE COAXIAL	37
III.3 LA GUÍA RECTANGULAR	42
III.4 LÍNEAS IMPRESAS. LA LÍNEA MICROSTRIP	45
III.5 EJERCICIOS	51
III.6 BIBLIOGRAFÍA	52
TEMA IV. CARTA DE SMITH Y ADAPTACIÓN DE IMPEDANCIAS	53
IV.1 INTRODUCCIÓN	53
IV.2 LA CARTA DE SMITH	53
IV.3 ADAPTACIÓN DE IMPEDANCIAS CON LA CARTA DE SMITH	60
IV.3.1 Elementos para adaptar	61
IV.3.2 Adaptación con línea y stub	62
IV.3.3 Adaptación con dos stubs separados por una línea	64
IV.3.4 Adaptación con el transformador en " $\lambda/4$ " modificado	66
IV.3.5 Adaptación con elementos concentrados	68
IV.3.6 Adaptación combinando elementos concentrados y distribuidos	68
IV.3.7 Ancho de banda de adaptación con líneas	70
IV.4 BIBLIOGRAFÍA	71

TEMA I. ESTUDIO DE LA LÍNEA DE TRANSMISIÓN

I.1 INTRODUCCIÓN

Cuando hablamos de circuitos de alta frecuencia o de microondas nos referimos a aquellos en los que las señales involucradas poseen un período muy pequeño o una frecuencia muy alta. Estas señales sufren un retardo (τ) al recorrer los circuitos o el medio que las soporta y, aunque se desplazan a la velocidad de la luz en el medio ($c < 300.000 \text{ km/s}$), dicho retardo se hace importante si es comparable con el período de dichas señales (T). Cuando esto ocurre se suele decir que tenemos “propagación” y, en cuyo caso, una simple conexión entre componentes se convierte en “una línea de transmisión”. En la figura I.1.1 se ha dibujado una posible evolución temporal de la tensión de una señal sinusoidal mostrando su desplazamiento a lo largo de una línea (eje z). Al llegar al final de la misma la señal se ha retardado un tiempo $\tau = T$, lo que implica un desfase de 360° . Si definimos la longitud de onda como $\lambda = c \cdot T$; es decir, el camino recorrido en T , también podemos concluir que hay propagación cuando el tamaño de la línea es comparable con λ .

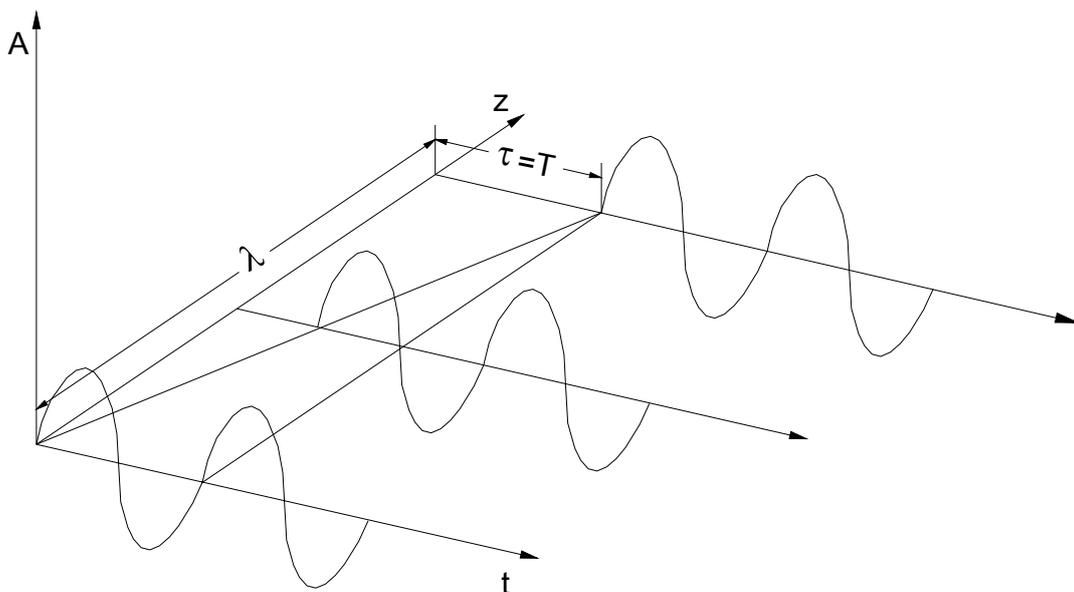


Figura I.1.1 Transmisión de un tono por una línea

Podríamos pensar en caracterizar el retardo producido en la tensión $v(t)$ en $z = \lambda$ mediante $v(t - \tau)$ que para el caso de régimen sinusoidal permanente se expresaría como:

$$V(z = \lambda) = V_0 e^{-j\varphi} \quad \text{siendo } V_0 \text{ la amplitud y } \varphi = \omega\tau$$

¿sería suficiente?. En general no pues hay otro fenómeno importante que no se ha considerado y, que una vez más, se pone de manifiesto cuando T y τ son comparables: la señal que se desplaza desde $z=0$ (señal u “onda” incidente) puede sufrir una reflexión al llegar al final de la línea ($z=\lambda$), de forma que, en un

instante dado la señal (u onda) reflejada se suma en fase o en contrafase con la señal incidente haciendo que la amplitud total de la señal varíe a lo largo de la línea. Dicha reflexión es consecuencia de que la impedancia que está conectada al final de la línea es distinta de la “impedancia característica de la misma, Z_0 ” la cual constituye un parámetro básico de una línea de transmisión. En baja frecuencia también existe tensión (u onda) incidente y reflejada pero al ser τ muy pequeño frente a T la suma de ambas es la misma a lo largo de la línea y coincide con la tensión calculada por los métodos tradicionales.

Otras consecuencias que aparecen cuando hay propagación son:

- Radiación: a medida que el tamaño del circuito se aproxima a la longitud de onda se comporta como una antena eficiente por lo que conviene apantallarlo.
- Las leyes de Kirchoff hay que aplicarlas con cuidado y cuando sean realmente válidas (pueden existir ondas o modos superiores).
- Los componentes electrónicos deterioran su comportamiento al subir en frecuencia pues su tamaño se hace comparable con la longitud de onda y los efectos de sus parásitos se hacen más significativos.
- Las pérdidas se incrementan con la frecuencia. Así en los conductores, aparece “el efecto pelicular” por el cual la corriente se concentra en la periferia de los mismos aumentando la resistencia a su paso.

I.2 ECUACIONES DE LA LÍNEA DE TRANSMISIÓN SIN PÉRDIDAS

I.2.1 Obtención de las ecuaciones

Las ecuaciones de la línea de transmisión, también llamadas del telegrafista, podemos obtenerlas a partir del modelo circuital de un tramo muy corto de la misma $d=\Delta z$, como el que se muestra en la figura I.2.1 En dicho modelo a la corriente se le asocia una inductancia por unidad de longitud L y a la diferencia de potencial o voltaje una capacidad por unidad de longitud C .

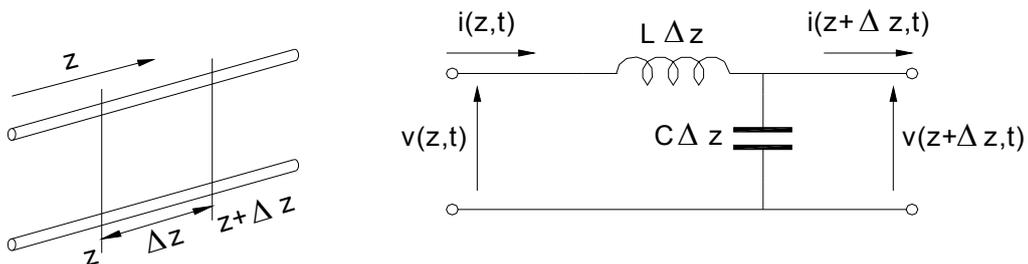


Figura I.2.1 Modelo circuital de un tramo de línea de transmisión sin pérdidas ($d=\Delta z$)

Aplicando las ecuaciones de Kirchoff sobre este circuito y tomando límites para $\Delta z \rightarrow 0$ se encuentran las ecuaciones diferenciales para $v(z,t)$ e $i(z,t)$ (ecuaciones de D’Alambert) cuyas soluciones son de la forma:

$$v(z,t) = V_1 \left(t - \frac{z}{c} \right) + V_2 \left(t + \frac{z}{c} \right) \quad [2.1]$$

e

$$i(z, t) = I_1 \left(t - \frac{z}{c} \right) + I_2 \left(t + \frac{z}{c} \right) = \frac{1}{Z_0} \left[V_1 \left(t - \frac{z}{c} \right) - V_2 \left(t + \frac{z}{c} \right) \right] \quad [1.2.2]$$

siendo c la velocidad de propagación de valor $c = 1/\sqrt{LC}$ y $Z_0 = \sqrt{L/C}$ la impedancia característica de la línea.

V_1 representa una onda genérica de tensión progresiva o incidente (z creciente). Para verlo podemos imponer que su valor sea constante al serlo su argumento ($t-z/c$); si en este caso hacemos que t aumente también debe aumentar z para que dicho argumento sea constante y, en consecuencia, V_1 se desplaza por la línea. Lo mismo se puede decir de V_2 que representa una onda de tensión regresiva o reflejada (z decreciente). Se concluye que el voltaje y la corriente en la línea son suma de una componente incidente y una reflejada. Obsérvese, por otro lado, que Z_0 es la relación entre el voltaje y la corriente cuando no hay señal reflejada; es decir, cuando $V_2=0$.

Las componentes L y C son, respectivamente, la inductancia y capacidad por unidad de longitud del cable (en H/m y F/m). Son valores de estática que pueden cambiar al subir la frecuencia por el efecto pelicular entre otros. Como son elementos que almacenan energía son los responsables de que exista retardo en la línea.

Estas ecuaciones son las soluciones generales de la tensión y corriente en un punto cualquiera de la línea que son válidas en régimen transitorio y permanente.

1.2.2 Solución de las ecuaciones en régimen sinusoidal permanente

Los valores de V_1 y V_2 en [1.2.1] y [1.2.2] tendrán la forma de la señal del generador que conectemos a la línea. Supongamos, como se muestra en la figura 1.2.2, que el generador es sinusoidal: $V_g = V \cos \omega t$

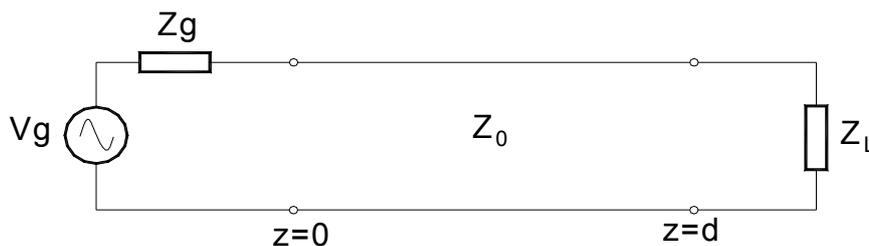


Figura 1.2.2 Línea con generador sinusoidal

Substituyendo en las ecuaciones [1.2.1] y [1.2.2] obtenemos:

$$v(z, t) = V_1 \cos \omega \left(t - \frac{z}{c} - \tau_1 \right) + V_2 \cos \omega \left(t + \frac{z}{c} + \tau_2 \right) \quad [1.2.3]$$

e

$$i(z, t) = \frac{1}{Z_0} \left[V_1 \cos \omega \left(t - \frac{z}{c} - \tau_1 \right) - V_2 \cos \omega \left(t + \frac{z}{c} + \tau_2 \right) \right] \quad [1.2.4]$$

donde ahora V_1 y V_2 representan, respectivamente, la amplitud de la onda incidente y reflejada. Además, se han introducido unos retardos genéricos τ_1 y τ_2 que pueden tener cada onda respecto al generador en $z=0$. Los valores de V_1 y V_2 dependen del generador, de la línea y de la carga y son constantes a lo largo de la línea pues de momento la consideramos sin pérdidas.

Operando con $v(z,t)$:

$$v(z,t) = V_1 \cos\left(\omega t - \omega \frac{z}{c} - \omega \tau_1\right) + V_2 \cos\left(\omega t + \omega \frac{z}{c} + \omega \tau_2\right) \quad [1.2.5]$$

Donde $\omega \tau_1$ y $\omega \tau_2$, que llamaremos φ_1 y φ_2 , representan el desfase de la onda incidente y reflejada en $z=0$ respecto al generador.

Si denominamos como constante de fase K a $\omega/c = (\text{rad./s})/(\text{m/s}) = \text{rad./m}$ entonces $K \cdot z$ (rad.) representa el desfase de la tensión en un punto dado de la línea respecto del origen de la misma.

Otro parámetro, que ya hemos introducido, es el de longitud de onda que se define como $\lambda = c \cdot T = c/f$. Representa el camino recorrido en el período de la señal $T=1/f$. Entonces el producto $K \cdot \lambda$ vale: $K \cdot \lambda = \omega/c \cdot c/\omega \cdot 2\pi = 2\pi$; es decir, λ representa el espacio que hay que recorrer en la línea para que la tensión tenga la misma fase.

Dado que vamos a trabajar en régimen sinusoidal permanente haremos uso de los fasores con los que evitamos las variables frecuencia y tiempo y pasamos al plano complejo; por tanto:

Al voltaje:

$$v(z,t) = V_1 \cos(\omega t - Kz - \varphi_1) + V_2 \cos(\omega t + Kz + \varphi_2) \quad [1.2.6]$$

le corresponde el fasor:

$$V(z) = V_1 e^{-j(\varphi_1 + Kz)} + V_2 e^{j(\varphi_2 + Kz)}$$

Si llamamos $V_1 e^{-j\varphi_1} = V_o^+$, fasor de la tensión incidente en $z=0$ y $V_2 e^{j\varphi_2} = V_o^-$, fasor de la tensión reflejada en $z=0$, el fasor de la tensión total $V(z)$ queda:

$$V(z) = V_o^+ e^{-jKz} + V_o^- e^{jKz} \quad [1.2.7]$$

Haciendo lo propio con la corriente se obtiene:

$$I(z) = \frac{1}{Z_0} (V_o^+ e^{-jKz} - V_o^- e^{jKz}) \quad [1.2.8]$$

Al término jk se le suele denominar constante de propagación. En la figura I.2.3 se muestra, en el plano complejo, el dibujo del fasor de la tensión (incidente y reflejada) que existe en la línea en los puntos donde Kz vale 0 , $\pi/2$ y π . Se ha tomado $z=0$ en el eje real positivo. Como se observa la tensión total resultante pasa por máximos y mínimos dos veces en cada vuelta (2π); es decir en λ .

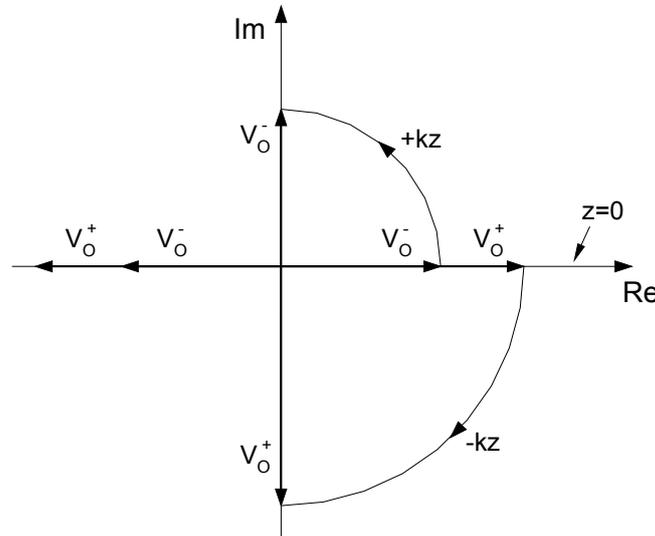


Figura I.2.3 Fasor de la tensión en $Kz=0, \pi/2$ y π a partir de $Kz=0$

I.2.3 Línea terminada o cargada

En este apartado queremos ver el efecto de la línea cargada por una impedancia genérica, situación que se recoge en las figuras I.2.2 y I.2.4.

Para ello se suele tomar origen de distancias ($z'=0$) en la propia carga con lo que haciendo el cambio $z = d-z'$ en la figura I.2.2 (siendo d la longitud de la línea) y volviendo a denominar z' como z (figura I.2.4), las ecuaciones [I.2.7] y [I.2.8] quedan como sigue:

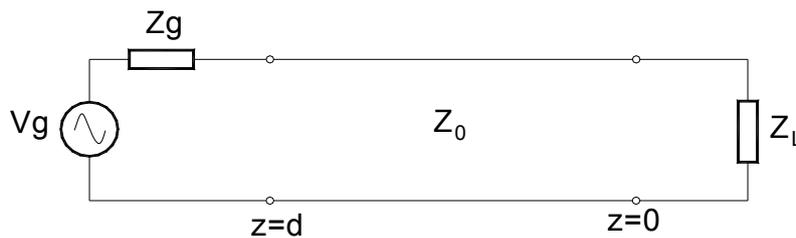


Figura I.2.4 Línea terminada: con generador y carga

$$V(z) = V = V_L^+ e^{jKz} + V_L^- e^{-jKz} \tag{I.2.9}$$

$$I(z) = I = \frac{1}{Z_0} [V_L^+ e^{jKz} - V_L^- e^{-jKz}] \tag{I.2.10}$$

Aplicando Kirchoff en $z=0$ (condición de carga):

$$V(z=0) = V_L = I_L Z_L \quad V_L = V_L^+ + V_L^- \quad I_L = \frac{1}{Z_0} [V_L^+ - V_L^-] \quad [I.2.11]$$

Vamos a definir otro parámetro típico en las líneas:

El coeficiente de reflexión en la carga

En términos de voltaje se define como: $\rho_{LV} = \frac{V_L^-}{V_L^+}$ que es la relación entre la tensión reflejada e incidente en la carga.

En términos de corriente: $\rho_{LI} = \frac{I_L^-}{I_L^+} = \frac{-V_L^-}{V_L^+} = -\rho_{LV}$

Lo habitual es trabajar con tensiones de tal forma que a ρ_{LV} se le denomina ρ_L . Su valor se puede calcular a partir de las ecuaciones [I.2.11]:

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad [I.2.12]$$

Obsérvese que ρ_L es función de Z_L y Z_0 y que se anula si $Z_L = Z_0$

De forma genérica: $\rho_L = |\rho_L| e^{j\phi_L}$

donde $|\rho_L|$ es siempre menor o igual que uno si la carga es pasiva (resistencias, bobinas, condensadores, etc.)

Al igual que en la carga podemos definir el:

Coeficiente de reflexión en cualquier punto de la línea:

$$\rho_L(z) = \frac{V_L^- e^{-jKz}}{V_L^+ e^{jKz}} = \rho_L e^{-j2Kz} = |\rho_L| e^{j(\phi_L - 2Kz)} \quad [I.2.13]$$

Como se ve $|\rho_L(z)|$ es constante en la línea e igual a $|\rho_L|$. Esto se dejará de cumplir cuando la línea tenga pérdidas.

A partir del coeficiente de reflexión [I.2.13] las ecuaciones de la tensión y de la corriente [I.2.9] y [I.2.10] se pueden expresar de la forma:

$$V = V_L^+ e^{jKz} [1 + \rho_L(z)] \quad [I.2.14]$$

$$I = \frac{1}{Z_0} V_L^+ e^{jKz} [1 - \rho_L(z)] \quad [I.2.15]$$

Obsérvese que si ρ_L vale cero (no hay señal reflejada) la amplitud es constante a lo largo de la línea. También se observa, como ya se ha visto, que la amplitud de la corriente está invertida respecto de la tensión si hay reflexión.

Ejercicio

Sea una línea terminada en circuito abierto ($Z_L = \infty$) de longitud λ . Demostrar que la tensión en la línea se repite cada λ y que su amplitud lo hace cada $\lambda/2$.

Como Z_L es un abierto ρ_L vale:

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = 1 \quad (\text{se toma límites con } Z_L \rightarrow \infty)$$

$$\rho_L(z) = \rho_L e^{-j2Kz} = 1e^{-j2Kz} \quad \text{y} \quad V = V_L^+ e^{jKz} [1 + e^{-j2Kz}] = 2V_L^+ \cos Kz$$

Como se ve V se repite cada $Kz = 2\pi$; es decir, cada $z = \lambda$

La amplitud o el módulo de la tensión sería:

$|V| = 2|V_L^+| |\cos Kz|$ que se repite cada π ; es decir, cada $z = \lambda/2$ como ya vimos.

En la figura I.2.5 se representa la tensión y su módulo

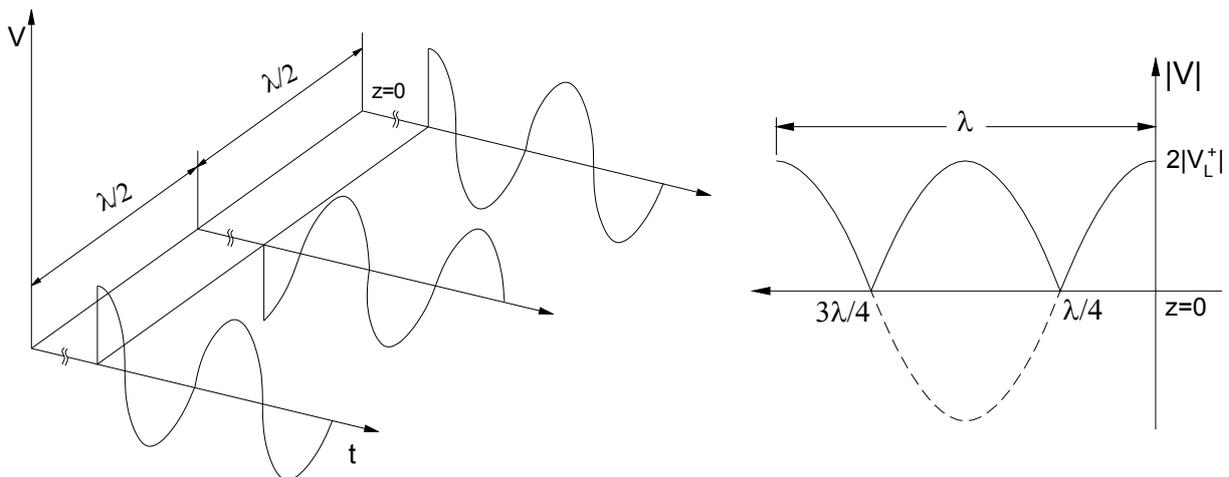


Figura I.2.5 Línea terminada en abierto. Dibujo del voltaje en la línea (izquierda) y de su amplitud ó módulo (derecha)

Diagrama de onda estacionaria

Como ya sabemos la amplitud (total) de la señal en la línea varía con z si hay onda reflejada. Con el diagrama de onda estacionaria se quiere representar la amplitud a lo largo de la línea para el caso de conectar una carga genérica que produce cierta reflexión. Se escoge la amplitud porque es un parámetro que se puede medir con facilidad con un detector de envolvente. Como se verá la tensión y la corriente en la línea pasan por máximos y mínimos en puntos fijos ("estacionarios") para una carga dada y desaparecen cuando no hay onda reflejada.

Para realizar este diagrama recordemos que: $V = V_L^+ e^{jKz} [1 + \rho_L(z)]$

cuya amplitud o módulo es: $|V| = |V_L^+| |1 + \rho_L(z)|$ [I.2.16]

como $|V_L^+|$ es constante con z al no haber pérdidas, podemos representar el cociente $|V| / |V_L^+|$ como se muestra en la figura I.2.6. Para ello hay que tener en cuenta que:

$$\rho_L(z) = |\rho_L| e^{j(\phi_L - 2Kz)} \quad [I.2.17]$$

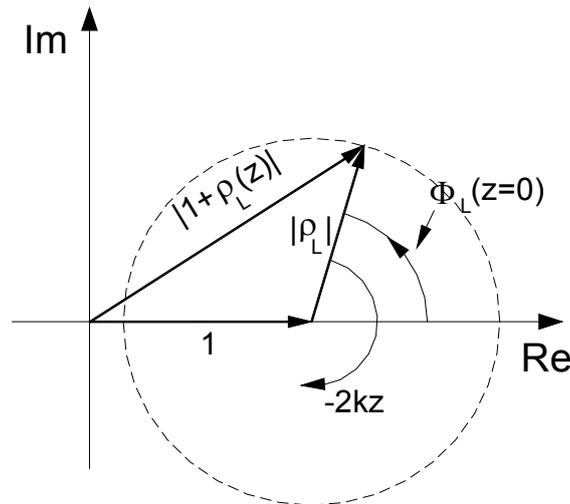


Figura I.2.6 Representación de $|V| / |V_L^+|$

Como se observa según aumenta z (al alejarnos de la carga) la amplitud varía y cuando $\phi_L - 2Kz = 0$ es máxima lo que indica que la tensión incidente y reflejada están en fase. La amplitud es mínima cuando $\phi_L - 2Kz = \pi$ (la tensión incidente y reflejada están en contrafase). Como vemos los máximos y mínimos se repiten cuando $2Kz = 2\pi$; es decir, cada $\lambda/2$. Para la corriente el comportamiento es similar pero en el gráfico hay que dibujar $-\rho_L$, de forma que cuando tenemos un máximo de tensión la corriente pasa por un mínimo, pues:

$$|I| = \frac{1}{Z_0} |V_L^+| |1 - \rho_L(z)| \quad [I.2.18]$$

En la figura I.2.7 se representa la amplitud de la tensión y la corriente en la línea para una carga genérica.

Podemos encontrar el valor analítico de la amplitud de la tensión substituyendo [I.2.17] en [I.2.16] obteniéndose:

$$|V| = |V_L^+| \sqrt{1 + |\rho_L|^2 + 2|\rho_L| \cos(\phi_L - 2Kz)} \quad [I.2.19]$$

Para la corriente se obtiene:

$$|I| = \frac{|V_L^+|}{Z_0} \sqrt{1 + |\rho_L|^2 - 2|\rho_L| \cos(\phi_L - 2kz)} \quad [I.2.20]$$

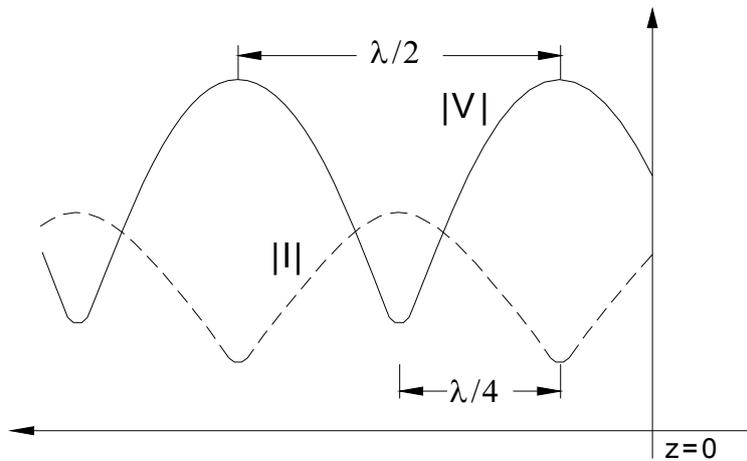


Figura I.2.7 Diagrama de onda estacionaria

Como se observa ambas funciones se repiten cada $2kz = 2\pi$; es decir, cada $(\lambda/2)$ y están en contrafase.

Coefficiente de onda estacionaria (COE), $Z_{\text{máx}}$, $Z_{\text{mín}}$ y $Z(z)$

El $COE = S = SWR$ (standing wave ratio) se define como el cociente entre el voltaje máximo y mínimo en la línea. Estos voltajes se obtienen de [I.2.19] con lo que:

$$COE = \frac{|V|_{\text{máx}}}{|V|_{\text{mín}}} = \frac{|V_L^+|(1 + |\rho_L|)}{|V_L^+|(1 - |\rho_L|)} = \frac{1 + |\rho_L|}{1 - |\rho_L|} = \frac{|V_L^+| + |V_L^-|}{|V_L^+| - |V_L^-|} \neq f(z) \quad [I.2.21]$$

como se ve el COE es constante con z si no hay pérdidas.

La impedancia máxima en la línea vale:

$$Z_{\text{máx}} = \frac{|V|_{\text{máx}}}{|I|_{\text{mín}}} = \frac{|V_L^+|(1 + |\rho_L|)}{\frac{|V_L^+|}{Z_0}(1 - |\rho_L|)} = Z_0 \frac{1 + |\rho_L|}{1 - |\rho_L|} = Z_0 S \neq f(z) \quad [I.2.22]$$

aunque $Z_{\text{máx}}$ aparece como una expresión modular, se puede comprobar que coincide con la relación entre el voltaje V que se obtiene en la ecuación [I.2.9] y la corriente I en la ecuación [I.2.10] cuando la onda incidente está en fase con la reflejada.

De forma similar podemos obtener:

$$Z_{\min} = \frac{|V|_{\min}}{|I|_{\max}} = \frac{|V_L^+|(1-|\rho_L|)}{\frac{|V_L^+|}{Z_0}(1+|\rho_L|)} = Z_0 \frac{1-|\rho_L|}{1+|\rho_L|} = \frac{Z_0}{S} \neq f(z) \quad [I.2.23]$$

La impedancia en cualquier punto de la línea $Z(z)$ (mirando hacia la carga) se obtiene de la expresión general:

$$Z(z) = \frac{V}{I} = \frac{V_L^+ e^{jkz} (1 + \rho_L(z))}{\frac{V_L^+ e^{jkz}}{Z_0} (1 - \rho_L(z))} = Z_0 \frac{1 + \rho_L(z)}{1 - \rho_L(z)}$$

teniendo en cuenta que:

$$\rho_L(z) = \frac{V_L^- e^{-jKz}}{V_L^+ e^{jKz}} = \rho_L e^{-j2Kz} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} e^{-j2Kz}$$

se llega a:

$$Z(z) = Z_0 \frac{Z_L \cos kz + jZ_0 \sin kz}{Z_0 \cos kz + jZ_L \sin kz} = f(Z_L, Z_0, z) \quad [I.2.24]$$

Como se ve, si $Z_L = Z_0$; $Z(z) = Z_0$ en cualquier punto de la línea.

I.2.4 Potencias en la línea sin pérdidas

Si la línea es sin pérdidas (figura I.2.8), la potencia que entrega el generador al comienzo de la misma es igual a la que se entrega en cualquier punto de la línea e igual a la que se entrega a la carga; es decir:

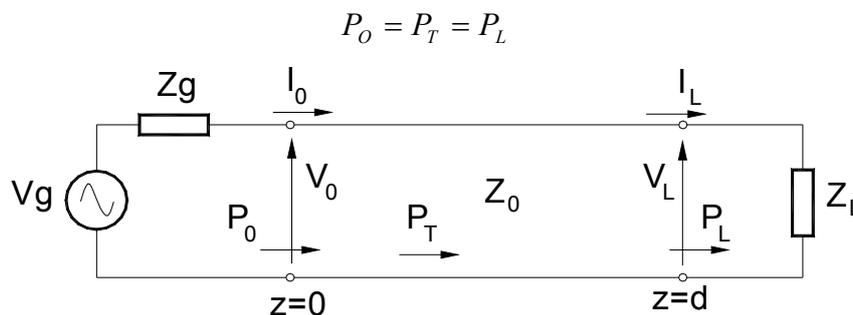


Figura I.2.8 Potencias en la línea sin pérdidas

Para calcular la potencia transmitida en la línea lo habitual es utilizar el origen de distancias en el lado del generador. Además, trabajaremos con potencia media cuya expresión viene dada por:

$$P_T = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(V \cdot I^*) = P_O = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(V_O \cdot I_O^*) = P_L = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(V_L \cdot I_L^*) \quad [1.2.25]$$

que junto con las ecuaciones [1.2.7] y [1.2.8]:

$$V = V_o^+ e^{-jKz} + V_o^- e^{jKz}$$

$$I = \frac{1}{Z_o} (V_o^+ e^{-jKz} - V_o^- e^{jKz})$$

nos da:

$$P_T = P_O = P_L = \frac{1}{2} \frac{|V_o^+|^2}{Z_o} - \frac{1}{2} \frac{|V_o^-|^2}{Z_o} = \frac{1}{2} \frac{|V_o^+|^2}{Z_o} (1 - |\rho_o|^2) = \frac{1}{2} \frac{|V_L^+|^2}{Z_o} (1 - |\rho_L|^2)$$

donde $|\rho_o| = \left| \frac{V_o^-}{V_o^+} \right|$ y es igual a $|\rho_L| = \left| \frac{V_L^-}{V_L^+} \right|$ por no haber pérdidas. Por la misma razón $|V_o^+| = |V_L^+|$ y $|V_o^-| = |V_L^-|$

Llamando a $P_o^+ = \frac{1}{2} \frac{|V_o^+|^2}{Z_o}$ potencia incidente y a $P_o^- = \frac{1}{2} \frac{|V_o^-|^2}{Z_o}$ potencia reflejada

$$P_T = P_o^+ - P_o^- = P_L^+ - P_L^- = P_o^+ (1 - |\rho_o|^2) = P_L^+ (1 - |\rho_L|^2) \quad [1.2.26]$$

De forma que: $|\rho_o|^2 = \frac{P_o^-}{P_o^+}$ y es igual a $|\rho_L|^2 = \frac{P_L^-}{P_L^+}$ una vez más por no haber pérdidas.

Para el caso de que $\rho_L = 0$: $P_o^- = 0$ y $P_T = P_o^+ = P_L^+$

Pérdidas de retorno (RL)

Se definen en dB como: $20 \log |\rho_o|$ y cuando $Z_g = Z_o$ [1.2.27]

Nos permite calcular la potencia reflejada al comienzo de la línea o en cualquier punto de la misma si no hay pérdidas.

Además se definen cuando $Z_g = Z_o$ pues de esta forma coinciden con las pérdidas por desadaptación conjugada (esto se verá más adelante).

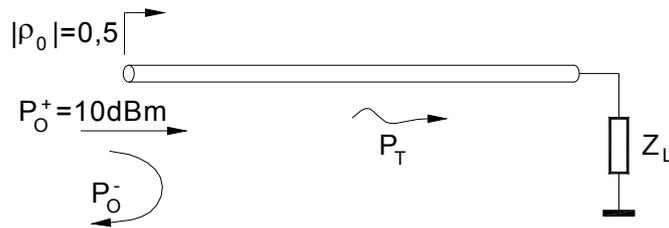
Pérdidas en transmisión por reflexión (TL)

Se definen en dB como: $10 \log (1 - |\rho_o|^2)$ y también cuando $Z_g = Z_o$ [1.2.28]

Nos indica las pérdidas en dBs en la potencia transmitida debido a la reflexión.

Ejemplo:

Sea un cable que presenta un $|\rho_o| = 0,5$ y en el que incide una señal con una potencia $P_o^+ = 10\text{dBm}$. Obtener la potencia reflejada y transmitida.



$$P_o^- = P_o^+ |\rho_o|^2 \rightarrow P_o^- (\text{dBm}) = P_o^+ (\text{dBm}) + 10 \log |\rho_o|^2$$

$$P_o^- (\text{dBm}) = 10 \text{ dBm} - 6 \text{ dB} = 4 \text{ dBm} (\cong 2,5 \text{ mw})$$

$$P_T = P_o^+ (1 - |\rho_o|^2) \rightarrow P_T (\text{dBm}) = P_o^+ (\text{dBm}) + 10 \log (1 - |\rho_o|^2)$$

$$P_T (\text{dBm}) = 10 \text{ dBm} - 1,25 \text{ dB} = 8,75 \text{ dBm} (\cong 7,5 \text{ mw})$$

Ejercicio teórico. Obtención de V_o^+ y P_o^+

Hasta ahora hemos obtenido la expresión genérica del voltaje y de la corriente a lo largo de la línea en función de V_L^+ y V_L^- ó V_o^+ y V_o^- . Con la condición de carga se tiene el valor de $\rho_L(z)$ nos falta pues la condición del generador con la que podemos obtener el valor de V_o^+ y con éste todos los demás pues:

$$V_o^- = V_o^+ \rho_o \quad V_L^+ = V_o^+ e^{-jKd} \quad \text{y} \quad V_L^- = V_o^- e^{+jKd} \quad [\text{I.2.29}]$$

siendo d la longitud de la línea

Para obtener V_o^+ tomaremos el origen de distancias ($z=0$) en el lado del generador (figura I.2.8). Por tanto:

$$V = V_o^+ e^{-jKz} + V_o^- e^{jKz} = V_o^+ e^{-jKz} [1 + \rho_o(z)] \quad [\text{I.2.30}]$$

$$I = \frac{1}{Z_o} (V_o^+ e^{-jKz} - V_o^- e^{jKz}) = \frac{1}{Z_o} V_o^+ e^{-jKz} [1 - \rho_o(z)] \quad [\text{I.2.31}]$$

Con $\rho_o(z) = \rho_o e^{j2Kz}$ que para $z=0$ vale: $\rho_o = \frac{V_o^-}{V_o^+} = \frac{Z_E - Z_o}{Z_E + Z_o}$

Siendo Z_E la impedancia vista hacia la línea en $z=0$

En el generador ($z=0$) se cumple que:

$$V_o = V_g - I_o Z_g \quad [\text{I.2.32}]$$

y para $z=0$ las ecuaciones [I.2.30] y [I.2.31] quedan:

$$V_0 = V_0^+ [1 + \rho_0] \quad I_0 = \frac{1}{Z_0} V_0^+ [1 - \rho_0]$$

Substituyéndolas en la ecuación [1.2.32]:

$$V_0^+ [1 + \rho_0] = Vg - Zg \frac{1}{Z_0} V_0^+ [1 - \rho_0] \Rightarrow V_0^+ \left[1 + \rho_0 + \frac{Zg}{Z_0} - \rho_0 \frac{Zg}{Z_0} \right] = Vg$$

$$V_0^+ \left[\frac{Zg + Z_0}{Z_0} + \rho_0 \frac{Z_0 - Zg}{Z_0} \right] = Vg \Rightarrow V_0^+ \frac{Zg + Z_0}{Z_0} \left[1 - \rho_0 \frac{Zg - Z_0}{Zg + Z_0} \right] = Vg$$

definiendo $\rho_g = \frac{Z_g - Z_0}{Z_g + Z_0}$ como el coeficiente de reflexión visto desde la línea

hacia el generador en $z=0$, V_0^+ queda:

$$V_0^+ = Vg \frac{Z_0}{Zg + Z_0} \frac{1}{1 - \rho_0 \rho_g} = Vg \frac{Z_0}{Zg + Z_0} \frac{1}{1 - \rho_g \rho_L e^{-2jkd}} \quad [1.2.33]$$

Veamos ahora el valor de P_0^+ :

$$P_0^+ = \frac{1}{2} \frac{|V_0^+|^2}{Z_0} = \frac{1}{2} \frac{|Vg|^2 Z_0^2}{Z_0 |Zg + Z_0|^2} \frac{1}{|1 - \rho_0 \rho_g|^2} = \frac{1}{2} \frac{|Vg|^2 4RgZ_0}{4Rg |Zg + Z_0|^2} \frac{1}{|1 - \rho_0 \rho_g|^2}$$

Como: $4RgZ_0 = |Zg + Z_0|^2 - |Zg - Z_0|^2$

$$P_0^+ = \frac{|Vg|^2 (|Zg + Z_0|^2 - |Zg - Z_0|^2)}{8Rg |Zg + Z_0|^2} \frac{1}{|1 - \rho_0 \rho_g|^2} = \frac{|Vg|^2 (1 - |\rho_g|^2)}{8Rg} \frac{1}{|1 - \rho_0 \rho_g|^2}$$

$$P_0^+ = \frac{|Vg|^2 (1 - |\rho_g|^2)}{8Rg} \frac{1}{|1 - \rho_g \rho_L e^{-2jkd}|^2}$$

Recordemos que la potencia disponible del generador vale: $Pdg = \frac{|Vg|^2}{8Rg}$ que es

la que se entrega al circuito cuando $Zg = Z_E^*$ (Z_E es la impedancia del circuito).
Con ello:

$$P_0^+ = Pdg \frac{1 - |\rho_g|^2}{|1 - \rho_g \rho_0|^2} = Pdg \frac{1 - |\rho_g|^2}{|1 - \rho_g \rho_L e^{-2jkd}|^2} \quad [1.2.34]$$

donde P_o^+ puede ser mayor que la P_{dg}

Para obtener la potencia transmitida recordemos que en el caso de una línea sin pérdidas:

$$P_T = P_o^+ - P_o^- = P_L^+ - P_L^- = P_o^+ (1 - |\rho_o|^2) = P_L^+ (1 - |\rho_L|^2)$$

Por otro lado, como se verá en el punto [I.3.1] del tema I.4, la potencia entregada por el generador a la línea también se puede expresar como:

$$P_T = P_o = P_{dg} (1 - |\rho_p|^2) \tag{I.2.35}$$

siendo ρ_p el coeficiente de desadaptación conjugada que viene dado por:

$$\rho_p = \frac{Z_E - Z_g^*}{Z_E + Z_g} \tag{I.2.36}$$

Casos según sean las impedancias de generador y carga:

- $Z_g \neq Z_o \neq Z_L$ caso genérico: P_o^+ y P_T se calculan con las fórmulas obtenidas

- $Z_g = Z_o \neq Z_L$ en este caso $\rho_g = 0$ y:

$$P_o^+ = P_{dg} \text{ y } V_o^+ = V_g/2 \quad P_T = P_o = P_{dg} (1 - |\rho_o|^2) = P_L$$

Como se ve tenemos pérdidas por reflexión: no se entrega la P_{dg} y coinciden con las pérdidas por desadaptación conjugada pues al ser $Z_g = Z_o$ $|\rho_p| = |\rho_o|$.

- $Z_g \neq Z_o = Z_L$ en este caso $\rho_L = 0$ y:

$$P_o^+ = P_{dg} (1 - |\rho_g|^2) \text{ y } P_T = P_o = P_L = P_{dg} (1 - |\rho_g|^2)$$

Ahora las pérdidas se deben a que $Z_g \neq Z_o$ y tampoco se entrega la P_{dg}

- $Z_g = Z_o = Z_L$ reales en este caso $\rho_g = \rho_L = 0$ y:

$$P_o^+ = P_{dg}, V_o^+ = V_g/2 \text{ y } P_T = P_o = P_L = P_{dg}$$

En este caso no tenemos pérdidas por reflexión y existe adaptación conjugada.

Ejemplo:

El circuito de la figura I.2.9 calcular la potencia incidente, reflejada y transmitida en cualquier punto de la línea en función de la P_{dg} . Calcular también la tensión incidente, reflejada y transmitida función de V_g en $z=0$ y $z=d$ (la línea no tiene pérdidas)

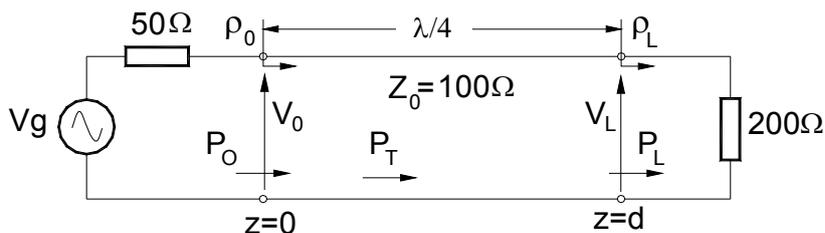


Figura I.2.9 Circuito adaptador en $\lambda/4$

I.3 ECUACIONES DE LA LÍNEA DE TRANSMISIÓN CON PÉRDIDAS

I.3.1 Obtención de las ecuaciones en régimen sinusoidal permanente

Las ecuaciones de la línea de transmisión con pérdidas se pueden obtener con el mismo modelo circuital de la figura I.2.1 pero añadiendo una resistencia serie que representa las pérdidas en los conductores ($R \Omega/m$) y una conductancia paralelo que representa las debidas al dieléctrico (G siemens/m), según se muestra en la figura I.3.1.

Aplicando las ecuaciones de Kirchoff sobre este circuito y tomando límites cuando $\Delta z \rightarrow 0$ se encuentran las ecuaciones diferenciales para $v(z,t)$ e $i(z,t)$ cuyas soluciones en régimen sinusoidal permanente y expresada con fasores son:

$$V(z) = V_o^+ e^{-\gamma z} + V_o^- e^{\gamma z} \tag{I.3.1}$$

$$I(z) = \frac{1}{Z_o} (V_o^+ e^{-\gamma z} - V_o^- e^{\gamma z}) \tag{I.3.2}$$

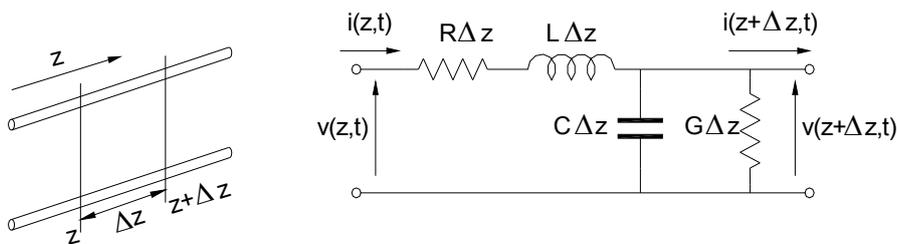


Figura I.3.1 Modelo circuital de un tramo de línea de transmisión con pérdidas ($d=\Delta z$)

aquí Z_o sigue siendo la relación entre el voltaje y la corriente en la línea cuando no hay señal reflejada. Su valor es $Z_o = \sqrt{\frac{Z}{Y}}$ donde $Z = R + j\omega L$ representa la impedancia serie por unidad de longitud e $Y = G + j\omega C$ la admitancia paralelo por unidad de longitud. R, L, G y C se denominan parámetros primarios de la línea de transmisión. Obsérvese que si $R=G=0$ el valor de Z_o es el de la línea sin pérdidas $Z_o = \sqrt{\frac{L}{C}}$.

La constante de propagación es $\gamma = \sqrt{ZY}$ y si $R=G=0$ coincide con $jk = j\omega\sqrt{LC}$. Como se ve γ es un número complejo que se suele expresar como:

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \alpha + j\beta \tag{I.3.3}$$

donde α es la constante de atenuación (np/m) y β la constante de fase (rad./m). Z_o, γ, α y β se denominan parámetros secundarios de la línea. Substituyendo este valor de γ en [I.3.1] y [I.3.2], las ecuaciones quedan:

$$V(z) = V = V_o^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + V_o^- e^{\alpha z} e^{j\beta z} \quad [I.3.4]$$

$$I(z) = I = \frac{1}{Z_o} (V_o^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} - V_o^- e^{\alpha z} e^{j\beta z}) \quad [I.3.5]$$

que dejan de manifiesto que la amplitud de la onda incidente se atenúa cuando se aleja del generador y que la reflejada lo hace cuando se aleja de la carga.

El significado de α (np/m) podemos verlo considerando una onda incidente V_a^+ y la misma desplazada un metro hacia la carga V_b^+ :

$$V_b^+ = V_a^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \Rightarrow |V_b^+| = |V_a^+| e^{-\alpha z} \text{ que con } z=1\text{m:}$$

$$e^{\alpha 1} = \frac{|V_a^+|}{|V_b^+|} \Rightarrow \alpha = \ln \frac{|V_a^+|}{|V_b^+|} = \frac{1}{2} \ln \frac{P_a^+}{P_b^+} \text{ np/m} \quad [I.3.6]$$

En la figura I.3.2 se muestra el dibujo del fasor de la tensión (incidente y reflejada) en el plano complejo que se obtiene a lo largo de la línea en los puntos donde βz es igual a 0 y $\pi/2$. Se ha tomado $z=0$ en el eje real positivo. Como se observa la amplitud de la onda incidente disminuye con z mientras que la reflejada aumenta. Además el voltaje total pasa por máximos y mínimos dos veces en cada vuelta (2π); es decir en λ , tal y como ocurría en la líneas sin pérdidas.

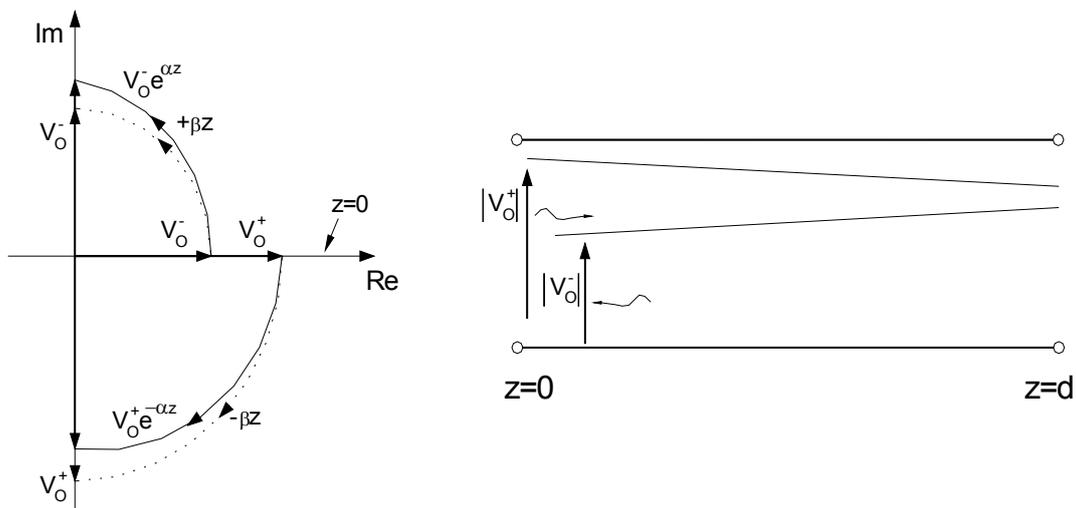


Figura I.3.2 Fasor de tensión en $\beta z=0$ y $\pi/2$ a partir de $z=0$

I.3.2 Línea con pérdidas terminada

En este apartado queremos ver el efecto de la línea cargada por una impedancia genérica, situación que se recoge en la figura I.3.3.

Como en la línea sin pérdidas, se suele tomar el origen de distancias ($z'=0$) en la propia carga con lo que haciendo en cambio $z = d-z'$ (siendo d la longitud de la línea) las ecuaciones [I.3.1] y [I.3.2] quedan como sigue:

$$V(z) = V = V_L^+ e^{\gamma z} + V_L^- e^{-\gamma z} = V_L^+ e^{\alpha z} e^{j\beta z} + V_L^- e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \quad [I.3.7]$$

$$I(z) = I = \frac{1}{Z_0} (V_L^+ e^{\gamma z} - V_L^- e^{-\gamma z}) = \frac{1}{Z_0} (V_L^+ e^{\alpha z} e^{j\beta z} - V_L^- e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}) \quad [I.3.8]$$

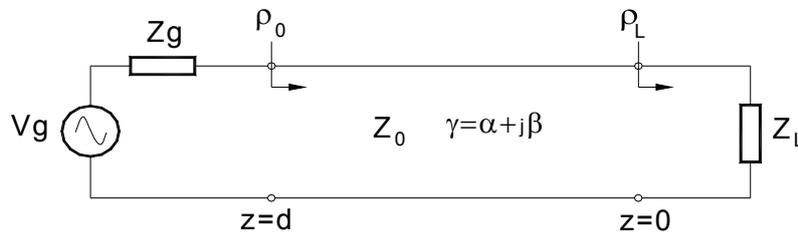


Figura I.3.3 Línea con pérdidas terminada: con generador y carga

El coeficiente de reflexión en la carga vale:

$$\rho_L = \frac{V_L^-}{V_L^+} = |\rho_L| e^{j\phi_L} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad [I.3.9]$$

y en cualquier punto de la línea:

$$\rho_L(z) = \frac{V_L^- e^{-\gamma z}}{V_L^+ e^{\gamma z}} = \rho_L e^{-2\gamma z} = |\rho_L| e^{-2\alpha z} e^{j(\phi_L - 2\beta z)} \quad [I.3.10]$$

Como se ve $|\rho_L(z)|$ ya no es constante en la línea y disminuye según nos alejamos de la carga; por tanto $|\rho_0| < |\rho_L|$. Obsérvese que ello es consecuencia de que la amplitud de la onda reflejada disminuye según nos alejamos de la carga mientras que la amplitud de la onda incidente aumenta.

A partir del coeficiente de reflexión las ecuaciones de la tensión y corriente [I.3.7] y [I.3.8] se pueden expresar de la forma:

$$V = V_L^+ e^{\gamma z} [1 + \rho_L(z)] \quad [I.3.11]$$

$$I = \frac{1}{Z_0} V_L^+ e^{\gamma z} [1 - \rho_L(z)] \quad [I.3.12]$$

Diagrama de onda estacionaria en línea con pérdidas

Cuando hay pérdidas los máximos y mínimos de amplitud tienen distinto valor que en la misma línea sin pérdidas. Además, dichos valores se modifican a lo largo de la línea.

En la figura I.3.4 se muestra el diagrama de onda estacionaria de una línea terminada en abierto para el caso de tener y no tener pérdidas.

Como se ve en el caso de tener pérdidas los máximos son menores y los nulos se convierten en mínimos cuya amplitud aumenta hacia el generador.

Esto también se puede ver dibujando la relación $|V| / |V_L^+|$ en el plano complejo (figura I.3.5). Para ello:

$$V = V_L^+ e^{\gamma z} [1 + \rho_L(z)] \text{ cuyo módulo es: } |V| = |V_L^+| e^{\alpha z} |1 + \rho_L(z)| \quad [I.3.13]$$

donde $\rho_L(z) = |\rho_L| e^{-2\alpha z} e^{j(\phi_L - 2\beta z)}$

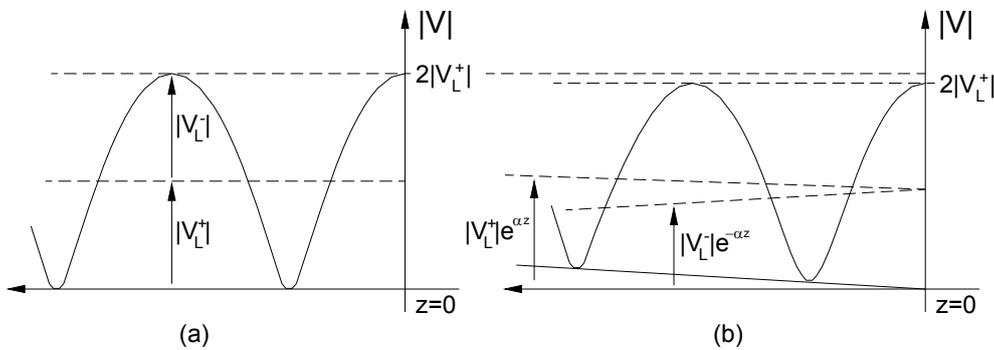


Figura 3.4 Estacionaria en línea terminada en abierto: a) sin pérdidas b) con pérdidas

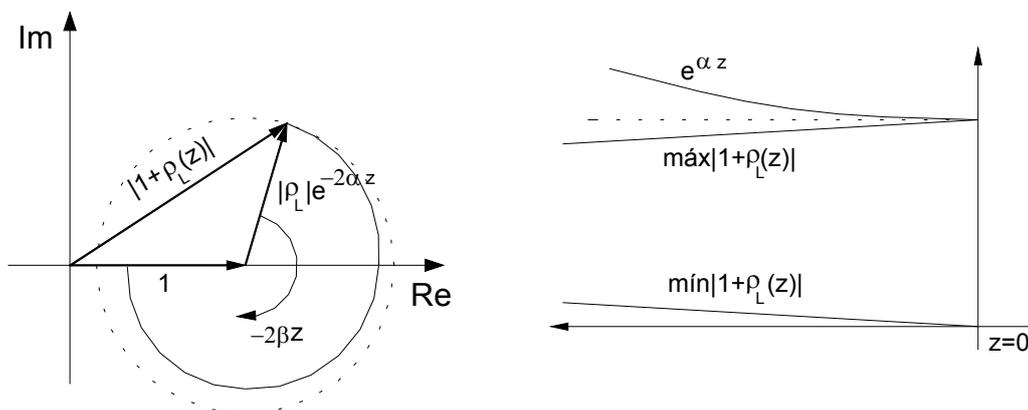


Figura I.3.5 Representación de $|V| / |V_L^+|$ en el plano complejo

Como se muestra en la figura I.3.5, al representar $|1 + \rho_L(z)|$, según varía z (nos alejamos de la carga) la amplitud de $|\rho_L(z)|$ disminuye y con ello el valor máximo de $|1 + \rho_L(z)|$ (cuando $\phi_L - 2\beta z = 0$); no obstante dicho valor aumenta a su vez por estar multiplicado por $e^{\alpha z}$. Los mínimos sin embargo, que se producen cuando $\phi_L - 2\beta z = \pi$, se hacen menos mínimos según z aumenta. Al

igual que en la línea sin pérdidas, también aquí los máximos y mínimos se repiten cada $\lambda/2$.

Podemos encontrar el valor analítico de la amplitud de la tensión en cualquier punto de la línea substituyendo [I.3.10] en [I.3.13], obteniéndose:

$$|V| = |V_L^+| e^{\alpha z} \sqrt{1 + |\rho_L|^2 e^{-4\alpha z} + 2e^{-2\alpha z} |\rho_L| \cos(\phi_L - 2\beta z)} \quad [I.3.14]$$

Para la corriente el proceso es similar y su expresión es:

$$|I| = \frac{|V_L^+|}{Z_0} e^{\alpha z} \sqrt{1 + |\rho_L|^2 e^{-4\alpha z} - 2e^{-2\alpha z} |\rho_L| \cos(\phi_L - 2\beta z)} \quad [I.3.15]$$

Los valores máximos de amplitud de la tensión se darán cuando el coseno valga 1 y los mínimos cuando valga -1; Por tanto, operando en [I.3.14] se obtiene:

$$|V|_{m\acute{a}x} = |V_L^+| e^{\alpha z} (1 + |\rho_L| e^{-2\alpha z}) = |V_L^+| (e^{\alpha z} + |\rho_L| e^{-\alpha z}) \quad [I.3.16]$$

$$|V|_{m\acute{i}n} = |V_L^+| e^{\alpha z} (1 - |\rho_L| e^{-2\alpha z}) = |V_L^+| (e^{\alpha z} - |\rho_L| e^{-\alpha z}) \quad [I.3.17]$$

Como se verá en prácticas, la expresión de $|V|_{m\acute{i}n}$ nos será útil en la medida de la constante de atenuación de la línea; aunque también valdría con $|V|_{m\acute{a}x}$.

Ejercicio. Obtener las expresiones del voltaje máximo y mínimo en la línea cuando la constante de atenuación es muy pequeña (bajas pérdidas: $\alpha z \ll 1$) y la línea está terminada en circuito abierto.

En tal caso $e^{\alpha z}$ se puede aproximar por $1 + \alpha z$ y los voltajes máx. y mín. quedan:

$$|V|_{m\acute{a}x} = |V_L^+| [1 + |\rho_L| + \alpha z (1 - |\rho_L|)] \quad [I.3.18]$$

$$|V|_{m\acute{i}n} = |V_L^+| [1 - |\rho_L| + \alpha z (1 + |\rho_L|)] \quad [I.3.19]$$

Si la línea está terminada en circuito abierto $\rho_L=1$ las tensiones quedan:

$$|V|_{m\acute{a}x} = 2|V_L^+| = cte \quad y \quad |V|_{m\acute{i}n} = |V_L^+| 2\alpha z \quad [I.3.20]$$

En la figura I.3.6 se muestra el resultado junto con el caso de altas pérdidas.

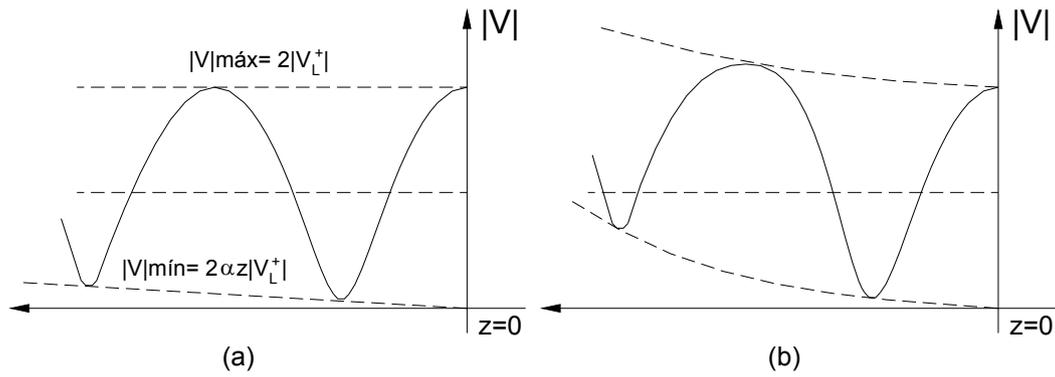


Figura I.3.6. Estacionaria de una línea terminada en abierto: a) bajas pérdidas, b) altas pérdidas

Coeficiente de onda estacionaria (COE), $Z_{máx}$, $Z_{mín}$ y $Z(z)$

El $COE=S=SWR$ se define como el cociente entre el voltaje máximo y mínimo en la línea. Al tener pérdidas, su valor no será constante en la línea.

$$S(z) = \frac{|V|_{máx}}{|V|_{mín}} = \frac{|V_L^+| e^{\alpha z} (1 + |\rho_L| e^{-2\alpha z})}{|V_L^+| e^{\alpha z} (1 - |\rho_L| e^{-2\alpha z})} = \frac{1 + |\rho_L| e^{-2\alpha z}}{1 - |\rho_L| e^{-2\alpha z}} = \frac{|V_L^+| e^{\alpha z} + |V_L^-| e^{-\alpha z}}{|V_L^+| e^{\alpha z} - |V_L^-| e^{-\alpha z}} \quad [I.3.21]$$

es máximo en la carga ($z=0$) y disminuye según nos alejamos de ésta. Por tanto, las pérdidas mejoran el COE según nos acercamos al generador.

Las impedancias máximas y mínimas también se modifican a lo largo de la línea:

$$Z_{máx} = \frac{|V|_{máx}}{|I|_{mín}} = Z_0 \frac{1 + |\rho_L| e^{-2\alpha z}}{1 - |\rho_L| e^{-2\alpha z}} = Z_0 S = f(z) \quad [I.3.22]$$

$$Z_{mín} = \frac{|V|_{mín}}{|I|_{máx}} = Z_0 \frac{1 - |\rho_L| e^{-2\alpha z}}{1 + |\rho_L| e^{-2\alpha z}} = \frac{Z_0}{S} = f(z) \quad [I.3.23]$$

La impedancia en cualquier punto de la línea $Z(z)$ (mirando hacia la carga) se calcula de la expresión general:

$$Z(z) = \frac{V}{I} = \frac{V_L^+ e^{\gamma z} (1 + \rho_L(z))}{\frac{V_L^+ e^{\gamma z}}{Z_0} (1 - \rho_L(z))} = Z_0 \frac{1 + \rho_L(z)}{1 - \rho_L(z)}$$

teniendo en cuenta que:

$$\rho_L(z) = \frac{V_L^- e^{-\gamma z}}{V_L^+ e^{\gamma z}} = \rho_L e^{-2\gamma z} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} e^{-2\gamma z}$$

se obtiene:

$$Z(z) = Z_0 \frac{Z_L \cosh \gamma z + Z_0 \sinh \gamma z}{Z_0 \cosh \gamma z + Z_L \sinh \gamma z} = f(Z_L, Z_0, z) \quad [I.3.24]$$

Como se ve, si $Z_L = Z_0$; $Z(z) = Z_0$ en cualquier punto de la línea.

I.3.3 Potencias en la línea con pérdidas

En una línea con pérdidas (figura I.3.7) la potencia que entrega el generador al comienzo de la misma es distinta de la que hay en cualquier otro punto de la línea:

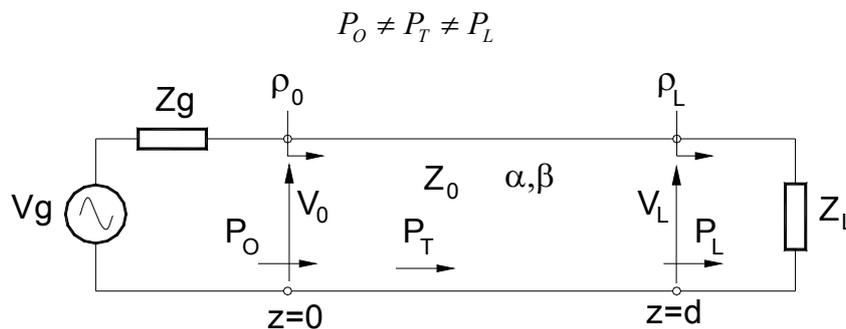


Figura I.3.7 Potencias en la línea con pérdidas

Para calcular la potencia en la línea interesa utilizar el origen de distancias en el lado del generador. Para ello recordemos que:

$$P_T(z) = \frac{1}{2} \text{Re}(V \cdot I^*) \quad [I.3.25]$$

que junto con las ecuaciones [I.3.4] y [I.3.5]:

$$V = V_o^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + V_o^- e^{\alpha z} e^{j\beta z}$$

$$I = \frac{1}{Z_0} (V_o^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} - V_o^- e^{\alpha z} e^{j\beta z})$$

se obtiene:

$$P_T(z) = \frac{1}{2} \frac{|V_o^+|^2 e^{-2\alpha z}}{Z_0} - \frac{1}{2} \frac{|V_o^-|^2 e^{2\alpha z}}{Z_0} = \frac{1}{2} \frac{|V_o^+|^2}{Z_0} e^{-2\alpha z} (1 - |\rho_o|^2 e^{4\alpha z}) \quad [I.3.26]$$

definiendo $P_o^+ = \frac{1}{2} \frac{|V_o^+|^2}{Z_0}$ como potencia incidente y $P_o^- = \frac{1}{2} \frac{|V_o^-|^2}{Z_0}$ como potencia reflejada en $z=0$ (generador):

$$P_T(z) = P_o^+ e^{-2\alpha z} (1 - |\rho_o|^2 e^{4\alpha z}) = P_o^+ e^{-2\alpha z} (1 - |\rho_L|^2 e^{-4\alpha d} e^{4\alpha z}) \quad [I.3.27]$$

donde d es la longitud de la línea y $|\rho_O| = |\rho_L| e^{-2\alpha d}$

La potencia en la carga será:

$$P_T(z=d) = P_L = P_O^+ e^{-2\alpha d} (1 - |\rho_L|^2) \quad [I.3.28]$$

Al igual que en la línea sin pérdidas debemos obtener el valor de V_O^+ y P_O^+ para obtener los valores de voltaje, corriente y potencia en un punto dado de la línea. Si lo hacemos, veremos que sus expresiones son las mismas que [I.2.33] y [I.2.34] pero con el valor de ρ_O en situación de pérdidas:

$$V_O^+ = V_g \frac{Z_O}{Z_g + Z_O} \frac{1}{1 - \rho_O \rho_g} = V_g \frac{Z_O}{Z_g + Z_O} \frac{1}{1 - \rho_g \rho_L e^{-2\gamma d}} \quad [I.3.29]$$

$$P_O^+ = P_d g \frac{1 - |\rho_g|^2}{|1 - \rho_g \rho_O|^2} = P_d g \frac{1 - |\rho_g|^2}{|1 - \rho_g \rho_L e^{-2\gamma d}|^2} \quad [I.3.30]$$

Si $Z_g = Z_O \neq Z_L$ en este caso $\rho_g = 0$, $P_O^+ = P_d g$, $V_O^+ = V_g/2$ y:

$$P_T(z=d) = P_L = P_d g \cdot e^{-2\alpha d} (1 - |\rho_L|^2) \quad [I.3.31]$$

Como se observa a las pérdidas por reflexión se le añaden las de atenuación en la línea.

I.3.4 Línea de bajas pérdidas

Son aquellas en las que se cumple que:

$$R \ll j\omega L \text{ y } G \ll j\omega C \quad \text{ó} \quad \text{que } \alpha \ll 1$$

En tal caso:

$$Z_O \cong \sqrt{\frac{L}{C}} \text{ (real)} \quad \beta \cong k = \omega \sqrt{LC}$$

y

$$\alpha \cong \frac{R}{2} \frac{1}{Z_O} + \frac{G}{2} Z_O = \alpha_c + \alpha_d \text{ (np/m)} \quad [I.3.32]$$

siendo:

$$\alpha_c \cong \frac{R}{2} \frac{1}{Z_O} \text{ las pérdidas en el conductor}$$

y

$$\alpha_d \cong \frac{G}{2} Z_0 \text{ las pérdidas en el dieléctrico}$$

Ejercicio teórico. En una línea de bajas pérdidas y bajo COE se cumple que:

$$P_T(z = d) = P_L \cong P_T(z = 0) e^{-2\alpha' d} \quad [I.3.33]$$

Obtener el valor de α'

I.3.5 Máxima potencia transmisible en una línea de transmisión

Podemos destacar dos límites:

- por disipación de calor. En este caso el fabricante nos indicará la potencia media por encima de la cual se deterioran las características del medio de transmisión.
- por ruptura. En este caso lo que ocurre es que el voltaje en la línea supera a la tensión de ruptura del dieléctrico:

$$V_{\text{máx}} > V_{\text{ruptura}}$$

Normalmente se dispone del valor del campo de ruptura del dieléctrico E_{rup} en vol./cm a partir del cual se calcula el voltaje o tensión de ruptura:

$$V_{\text{ruptura}} = E_{\text{rup}} \times \text{separación entre conductores}$$

Otras veces el fabricante nos indica el valor de V_{ruptura} .

El caso peor de ruptura se produce en la línea sin pérdidas y cuando se termina en corto o en circuito abierto. En tal caso la tensión máxima es:

$$|V|_{\text{máx}} = |V_0^+| (1 + |\rho_0|) = 2|V_0^+|$$

y este voltaje ha de ser menor que el ruptura.

Tenemos ahora que calcular V_0^+ que, como sabemos, depende del generador, carga y línea.

Para el caso de que $Z_g = Z_0$, $V_0^+ = V_g/2$ y se debe cumplir que:

$$|V|_{\text{máx}} = 2|V_0^+| = |V_g| < V_{\text{ruptura}}$$

que se suele expresar en términos de la potencia disponible del generador:

$$P_{dg} = \frac{|V_g|^2}{8R_g} < \frac{|V_{rup}|^2}{8R_g} = P_{d.ruptura} \quad [I.3.34]$$

Ejercicio. Demostrar que la máxima potencia (media) transmitible sin que haya ruptura en un cable sin pérdidas en el que existe cierto COE (ó S) es igual a la máxima transmitible en dicho cable con S=1 dividida por S; es decir:

$$P_{\text{máx}} (\rho_L \neq 0) = P_{\text{máx}} (\rho_L = 0) / S$$

I.4 BIBLIOGRAFÍA

- Vicente Ortega Castro. "Introducción a la Teoría de Microondas. Líneas de Transmisión y Guías de Ondas". ETSIT-UPM. Madrid. Dpto. De Publicaciones 1979.
- Alejandro Delgado Gutiérrez y Carlos Blanco Escobar. "Problemas de Microondas". ETSIT-UPM. Madrid. Dpto. de Publicaciones 1978.

TEMA II. RESUMEN DE LAS SOLUCIONES DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL EN MEDIOS GUIADOS

II.1 INTRODUCCIÓN

Con este resumen se desea dar una visión más completa del estudio de la línea de transmisión matizando conceptos y extendiéndolos a otros medios.

II.2 SOLUCIONES GENÉRICAS DE LAS ECUACIONES

El planteamiento general de las ecuaciones de Maxwell en medios guiados y en régimen sinusoidal permanente da lugar a soluciones de la forma:

$$\vec{E} = \vec{E}(x, y, z) \exp^{j\omega t - \gamma z}$$

$$\vec{H} = \vec{H}(x, y, z) \exp^{j\omega t - \gamma z}$$

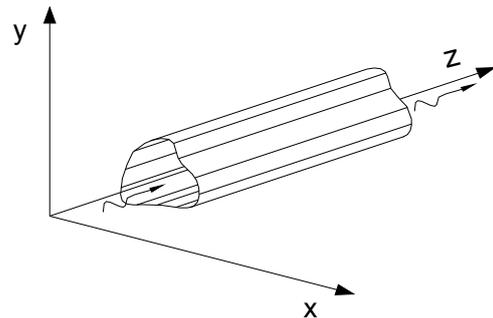


Figura II.2.1 Transmisión en un medio guiado

donde \vec{E} y \vec{H} representan el vector de intensidad de campo eléctrico y magnético respectivamente y γ es la constante de propagación. Dichas componentes representan ondas incidentes o progresivas que se desplazan según el eje z como se muestra en la figura II.2.1.

Los valores de \vec{E} , \vec{H} y γ dependen de la solución de las ecuaciones en el medio de transmisión en cuestión; es decir, de la estructura física del mismo, así como de la frecuencia de trabajo. A cada solución se le suele denominar: modo de propagación y las vamos a resumir a continuación. Para ello consideraremos que los medios son uniformes (iguales en z) y sin pérdidas; éstas se introducirán a posteriori. Con ello, la constante de propagación, que viene dada por $\gamma = \alpha + j\beta$, donde α representa la constante de atenuación y β la constante de fase, la consideraremos imaginaria; es decir, $\gamma = j\beta$. De esta forma los valores de \vec{E} y \vec{H} quedan:

$$\vec{E} = \vec{E}(x, y, z) \exp^{j(\omega t - \beta z)} \quad \vec{H} = \vec{H}(x, y, z) \exp^{j(\omega t - \beta z)} \quad [\text{II.2.1}]$$

II.2.1 Soluciones tipo TEM (Modo Transversal Electromagnético)

En este caso las componentes de campo según z son nulas: $\vec{E}_z = \vec{H}_z = 0$. Para que se propague un modo TEM el medio debe tener al menos dos conductores separados por un dieléctrico, o bien ha de existir una función potencial escalar transversal. En la figura II.2.2 se muestran algunos medios típicos (a y b). El medio (c), cuasiTEM, es muy similar.

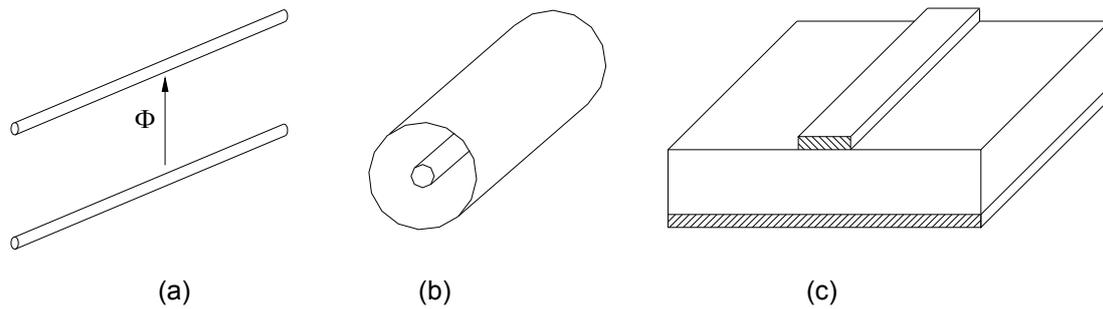


Figura II.2.2 Medios donde se pueden propagar modos TEM: (a) línea bifilar, (b) cable coaxial, (c) línea microstrip (CTEM)

La constante de propagación para un modo TEM vale:

$$\gamma = j\beta = (\text{para TEM}) = jk = j\omega/c = j\omega\sqrt{LC} \quad [\text{II.2.2}]$$

donde k se denomina número de onda

Recordemos también que para cualquier medio la longitud de onda vale:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad [\text{II.2.3}]$$

que representa el espacio recorrido por la onda para tener la misma fase.

Para un modo TEM y en el espacio libre vale:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad [\text{II.2.4}]$$

Por tanto, las soluciones de los campos para este modo son de la forma:

$$\vec{E} = \vec{E}(x, y) \exp^{j(\omega t - kz)} \quad \text{y} \quad \vec{H} = \vec{H}(x, y) \exp^{j(\omega t - kz)} \quad [\text{II.2.5}]$$

La exponencial compleja, como ya sabemos, nos indica que hay propagación según z cuando la frecuencia o pulsación es mayor que cero.

Velocidad de propagación en el espacio libre v

Es una constante que aparece en las soluciones de las ecuaciones y representa la velocidad de la luz en el medio.

$$v = c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad [\text{II.2.6}]$$

donde:

- ϵ es la permitividad o constante dieléctrica del medio
- μ es la permeabilidad del medio.

En el vacío:

$$v_0 = c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3.10^8 \text{ m/s} \quad [\text{II.2.7}]$$

Al cambiar de medio de transmisión lo más habitual es que sólo se modifique la constante dieléctrica. La permeabilidad en los medios de transmisión suele ser la del vacío y cambia en materiales del tipo ferro o ferri magnéticos, paramagnéticos, diamagnéticos, etc.

Por otro lado, al tratar con distintos materiales no es habitual trabajar con los valores absolutos de estas constantes sino con sus valores referidos al del vacío. Se define entonces la constante dieléctrica relativa como:

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad [\text{II.2.8}]$$

con lo que

$$v = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad [\text{II.2.9}]$$

donde se ha considerado el valor de μ en el vacío que es el habitual en los medios de transmisión.

Para los modos TEM:

$$v = c = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{\omega}{k} \quad [\text{II.2.10}]$$

Velocidad de fase (v_p)

Es la velocidad a la que se debe mover un observador para ver siempre el mismo valor de campo (eléctrico o magnético); si en [II.2.1] hacemos que el argumento sea constante:

$$\omega t - \beta z = \text{cte} \Rightarrow d/dt \Rightarrow \omega - \beta \frac{dz}{dt} = 0 \Rightarrow \omega - \beta v_p = 0$$

$$\text{y} \quad v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \quad [\text{II.2.11}]$$

válida para cualquier medio. Si la onda está compuesta por un tono puro ideal esta velocidad puede ser mayor que la velocidad de la luz en el medio.

Para los modos TEM:

$$v_p = \frac{\omega}{k} = v = c \quad [\text{II.2.12}]$$

Velocidad de la energía (v_e)

Es la velocidad real de propagación de la señal. Se obtiene a partir de la variación de la energía almacenada; es decir, de la potencia transmitida como:

$$P = \frac{dW}{dt} = W(J/m) \frac{dz}{dt} = W \cdot v_e \Rightarrow v_e = \frac{P}{W} \quad [\text{II.2.13}]$$

que para un modo TEM vale:

$$v_e = \frac{1}{\sqrt{LC}} = v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad [\text{II.2.14}]$$

Velocidad de grupo (vg)

Los tonos puros no existen en la naturaleza sino señales con un cierto ancho de banda. La velocidad de grupo es a la que se debe mover un observador sobre una señal real para ver siempre el mismo valor de campo. Viene dada por:

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial \beta} = \frac{1}{\frac{\partial \beta}{\partial \omega}} \quad [\text{II.2.15}]$$

que normalmente coincide con la velocidad de la energía. Si $v_g > c$ se trata de un medio dispersivo anormal.

Para el caso de modos TEM:

$$\beta = k = \frac{\omega}{v} \quad \text{y} \quad v_g = \frac{1}{\frac{\partial \beta}{\partial \omega}} = \frac{1}{1/v} = v \quad [\text{II.2.16}]$$

Impedancia de la onda (Z_{ondaTEM})

Para el caso de un modo TEM se cumple que: $Z_{\text{ondaTEM}} \vec{H}_t = \hat{z} \times \vec{E}_t$, pudiendo obtenerse que:

$$Z_{\text{ondaTEM}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \eta \quad \text{que en el vacío: } Z_{\text{ondaTEM}} = \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \quad [\text{II.2.17}]$$

Impedancia característica

Estrictamente este concepto de impedancia sólo existe para los modos TEM; es decir, cuando el voltaje y la corriente están definidos de forma unívoca en cualquier punto del medio de transmisión. Para estos modos viene dada por:

$$Z_o = \frac{V^+}{I^+} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad [\text{II.2.18}]$$

que es función de η y de la geometría de la línea

Pérdidas en la línea. Constante de atenuación α

Como sabemos es suma de las pérdidas en el conductor y de las pérdidas en el dieléctrico; por tanto, la constante de atenuación vale:

$$\alpha = \alpha_c(\text{conductor}) + \alpha_d(\text{dieléctrico}) \quad [\text{II.2.19}]$$

Las pérdidas en el conductor dependen de la resistencia superficial y de la geometría de la línea:

$$\alpha_c = f(R_s(\text{fre}), \text{geometría}) \quad [\text{II.2.20}]$$

donde R_s es la resistencia superficial que vale:

$$R_s = \text{Re}\left(\frac{1+j}{\sigma_c \delta}\right) = \frac{1}{\sigma_c \delta} \quad [\text{II.2.21}]$$

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi \sigma_c \mu \cdot \text{fre}}} \quad \text{es la profundidad de penetración,} \quad [\text{II.2.22}]$$

σ_c es la conductividad del conductor y fre la frecuencia.

Para los modos TEM se obtiene que:

$$\alpha_c = cte \cdot R_s = cte' \sqrt{\text{fre}} \quad [\text{II.2.23}]$$

Las pérdidas en el dieléctrico se obtienen substituyendo, en las ecuaciones de Maxwell, la constante dieléctrica ε por la constante dieléctrica compleja ε_c (en todos los modos) y operando. Esta constante viene dada por:

$$\varepsilon_c = \varepsilon - j\varepsilon'' = \varepsilon_o (\varepsilon_r - j\varepsilon_r'') \quad [\text{II.2.24}]$$

donde ε'' es la constante dieléctrica de pérdidas y ε_r'' la constante dieléctrica relativa de pérdidas.

En la práctica se utiliza el concepto de tangente de pérdidas $\tan\delta$ que vale:

$$\tan \delta = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_r''}{\varepsilon_r} \quad \text{y} \quad \varepsilon_c = \varepsilon \left(1 - j \frac{\varepsilon_r''}{\varepsilon_r}\right) = \varepsilon (1 - j \tan \delta) \quad [\text{II.2.25}]$$

Para los modos TEM, la constante de atenuación en el dieléctrico que se obtiene vale:

$$\alpha_d = \frac{k}{2} \tan \delta \cong cte \cdot \text{fre} \quad [\text{II.2.26}]$$

Por tanto, para los modos TEM la constante de atenuación total se puede expresar como:

$$\alpha = \alpha_d + \alpha_c = c_1 \cdot \text{fre} + c_2 \cdot \sqrt{\text{fre}} \quad \text{np/m} \quad [\text{II.2.27}]$$

Recuérdese que: $\alpha(\text{dB/m}) = \alpha(\text{np/m}) \times 8,68$

Modos Superiores

En los medios donde se transmiten modos TEM pueden aparecer otras soluciones o modos superiores tipo TE o TM que normalmente son indeseados. Estos modos se propagan a partir de una cierta frecuencia mínima o frecuencia

de corte por debajo de la cual hay que trabajar si no deseamos que se generen dichos modos. Como se verá más adelante el valor de la frecuencia de corte depende de la geometría transversal de la línea.

II.2.2 Soluciones tipo TE y TM

Hay medios de transmisión que sólo admiten las soluciones o modos siguientes:

Los modos TE: modo transversal eléctrico donde $\vec{E}_z = 0$ y

los modos TM: modo transversal magnético donde $\vec{H}_z = 0$

Son modos que típicamente se propagan en medios con un sólo conductor que se denominan guíaondas. En la figura II.2.3 se muestran algunos ejemplos.

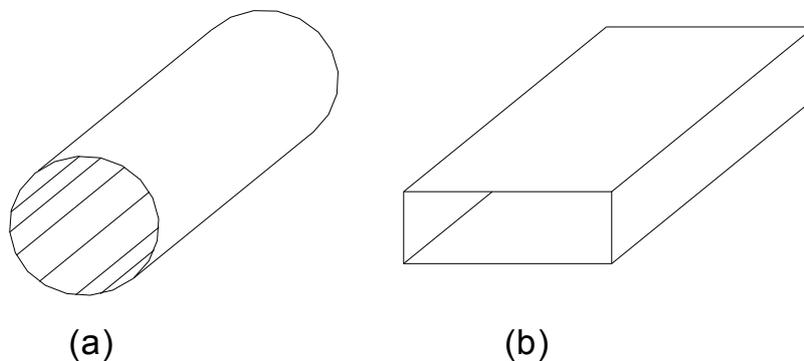


Figura II.2.3 Medios que transmiten modos TE y TM: a) guía cilíndrica, b) guía rectangular

Estos medios admiten infinitas soluciones para ambos modos (TE ó TM) cada una de las cuales tendrá su propia constante de propagación γ_n . Estos modos también se pueden transmitir en medios con más conductores y en medios dieléctricos (sin conductores) como es el caso de la fibra óptica.

Para los medios con un solo conductor la constante de propagación de cada modo γ_n vale

$$\gamma_n = \sqrt{k_{cn}^2 - k^2} \quad [\text{II.2.28}]$$

donde $k = \frac{\omega}{v}$ es el n° de onda, como ya sabemos, y aparece el concepto de n° de onda de corte del modo n como:

$$k_{cn} = \frac{\omega_{cn}}{v} = 2\pi f_{cn} \sqrt{\mu\epsilon} \quad [\text{II.2.29}]$$

siendo f_{cn} la frecuencia de corte de dicho modo. Su valor depende del orden del modo (n) y de la geometría del medio. Introduciendo esta ecuación en [II.2.28] se obtiene:

$$\gamma_n = \sqrt{k_{cn}^2 - k^2} = k \sqrt{\frac{k_{cn}^2}{k^2} - 1} = k \sqrt{\left(\frac{f_{cn}}{f}\right)^2 - 1} \quad [\text{II.2.30}]$$

Dependiendo de la frecuencia de trabajo (f) tendremos dos soluciones:

- Si $f < f_{cn}$ entonces:

$$\gamma_n = k \sqrt{\left(\frac{f_{cn}}{f}\right)^2 - 1} \quad \text{es real} \quad [\text{II.2.31}]$$

con lo que el campo eléctrico para los modos TE vale:

$$\vec{E} = \vec{E}(x, y) \exp^{j\omega t - \gamma_n z} \quad [\text{II.2.32}]$$

Es decir, se obtiene una senoide que se atenúa según z : por tanto, no hay propagación.

Lo mismo ocurre con el campo magnético en los modos TM:

$$\vec{H} = \vec{H}(x, y) \exp^{j\omega t - \gamma_n z} \quad [\text{II.2.33}]$$

- Si $f > f_{cn}$ entonces:

$$\gamma_n = k \sqrt{-1 \left[-\left(\frac{f_{cn}}{f}\right)^2 + 1 \right]} = jk \sqrt{1 - \left(\frac{f_{cn}}{f}\right)^2} = j\beta_n \quad \text{que es imaginaria} \quad [\text{II.2.34}]$$

$$\text{luego: } \beta_n = k \sqrt{1 - \left(\frac{f_{cn}}{f}\right)^2} = f(\text{fre, geometría}) \quad [\text{II.2.35}]$$

y el campo eléctrico para los modos TE vale:

$$\vec{E} = \vec{E}(x, y) \exp^{j(\omega t - \beta_n z)} \quad [\text{II.2.36}]$$

que como ya sabemos es una senoide que se propaga según z .

Lo mismo ocurre con el campo magnético en los modos TM:

$$\vec{H} = \vec{H}(x, y) \exp^{j(\omega t - \beta_n z)} \quad [\text{II.2.37}]$$

Por tanto, para que un modo dado se propague la frecuencia de trabajo ha de ser superior a la frecuencia de corte de dicho modo. En consecuencia, estos medios de transmisión se comportan como filtros paso alto.

La longitud de onda para cada modo (TE y TM) vale:

$$\lambda_{gn} = \frac{2\pi}{\beta_n} = \frac{2\pi}{k \sqrt{1 - \left(\frac{f_{cn}}{f}\right)^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{cn}}{f}\right)^2}} = \frac{\lambda_o / \sqrt{\epsilon_r}}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{cn}}{f}\right)^2}} \quad [\text{II.2.38}]$$

siendo $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ la longitud de onda en el medio libre y ϵ_r la constante dieléctrica del material dentro de la guía.

Velocidad de propagación en el espacio libre v

Como sabemos es la velocidad de la luz en el medio.

$$v = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{v_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = \lambda \cdot f$$

Velocidad de fase (v_p)

En el caso de modos TE y TM existe una velocidad de fase para cada uno de los modos:

$$v_{pn} = \frac{\omega}{\beta_n} = \frac{\omega}{k \sqrt{1 - \left(\frac{f_{cn}}{f}\right)^2}} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{cn}}{f}\right)^2}} = \frac{2\pi f}{\beta_n} = \lambda_{gn} f = \frac{\lambda f}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{cn}}{f}\right)^2}} \quad [\text{II.2.39}]$$

Como se ve si $f > f_{cn}$, la velocidad de fase es mayor que la velocidad de la luz en el medio lo que es posible al tratarse de un tono puro ideal.

Velocidad de grupo y de la energía (v_g y v_e)

Para medios normales ambas velocidades coinciden y hay una para cada modo. Viene dada por:

$$v_{gn} = \frac{1}{\frac{\delta \beta_n}{\delta \omega}} = v \sqrt{1 - \left(\frac{f_{cn}}{f}\right)^2} = v_{en} \quad [\text{II.2.40}]$$

Obsérvese que esta velocidad no varía linealmente con la frecuencia. También se puede ver que para $f > f_{cn}$, la velocidad de grupo es menor que la velocidad de la luz en el medio.

Impedancia de la onda ($Z_{\text{ondaTE}n}$)

Existirá una impedancia de onda para cada modo. Para los modos TE se cumple que:

$$Z_{TEn} (\vec{H}_{tn} \times \hat{z}) = \vec{E}_{tn}$$

pudiéndose obtener que:

$$Z_{TEn} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{cn}}{f}\right)^2}} \quad [\text{II.2.41}]$$

Para los TM:

$Z_{TMn} \vec{H}_{tn} = \hat{z} \times \vec{E}_{tn}$ pudiéndose obtener que:

$$Z_{TMn} = \eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_{cn}}{f}\right)^2} \quad [\text{II.2.42}]$$

Impedancia característica

En el caso de los modos TE y TM el voltaje y la corriente no están definidos de forma unívoca en cualquier punto de la línea. Así la circulación del campo eléctrico en una sección, $V = \int_0^x \vec{E}(x) dx$, depende del recorrido elegido.

No obstante se puede encontrar una línea de transmisión equivalente para un modo dado que se propague en ciertas condiciones que, además, suelen ser las típicas de utilización en la práctica. En tal caso, asociaríamos a la línea una impedancia característica que sería la impedancia de onda del modo que se propaga (sólo uno). Esa impedancia sería la que habría que “situar al final de la línea” para que no hubiese reflexión.

Pérdidas en la línea y constante de atenuación α

Como ya sabemos viene dada por:

$$\alpha = \alpha_c(\text{conductor}) + \alpha_d(\text{dieléctrico})$$

Las pérdidas en el conductor en el caso de los modos TE y TM es una función compleja que depende de la resistencia superficial y de la geometría de la línea:

$$\alpha_c = f(Rs(\text{frec}), \text{geometría}) \quad [\text{II.2.43}]$$

Las pérdidas en el dieléctrico sin embargo tiene una expresión analítica sencilla para estos modos:

$$\alpha_d = \frac{k}{2} \frac{\tan \delta}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{cn}}{f}\right)^2}} = f(\text{frec}, \text{geometría}) \quad [\text{II.2.44}]$$

En general, esta atenuación aumenta con la frecuencia.

Modos Superiores

En estos medios existen infinitos modos. De ellos se suele transmitir el de frecuencia de corte más baja y sólo ese. Para ello hay que diseñar adecuadamente las dimensiones de la línea de transmisión.

II.3 MEDIOS DISPERSIVOS Y NO DISPERSIVOS

Medios no dispersivos son aquellos en los que la constante de fase β varía linealmente con la frecuencia o bien, la velocidad de grupo es constante con la frecuencia. Cuando no se cumpla esto tendremos un medio dispersivo.

Caso de modos TEM

Se trata de un medio nada o poco dispersivo pues (figura II.3.1):

$$\beta = k = \frac{\omega}{v} \quad y$$

$$v_g = \frac{1}{\frac{\partial \beta}{\partial \omega}} = \frac{1}{1/v} = v(\text{cte})$$

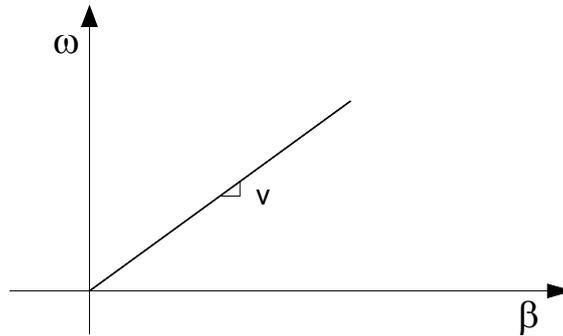


Figura II.3.1 Pulsación (ó frec.) en función de la constante de fase

No obstante, como la velocidad de propagación depende del medio, puede existir dispersión si la constante dieléctrica cambia con la frecuencia.

$$v = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

Caso de modos TE y TM

Los medios que transmiten modos TE y TM son dispersivos pues:

$\beta_n = k \sqrt{1 - \left(\frac{f_{cn}}{f}\right)^2}$ es una relación no lineal con la frecuencia para un modo dado y cambia de modo a modo.

O bien: $v_{gn} = \frac{1}{\frac{\partial \beta_n}{\partial \omega}} = v \sqrt{1 - \left(\frac{f_{cn}}{f}\right)^2}$ no es constante con la frecuencia

Dependiendo del medio y del ancho de banda de la señal transmitida el medio puede ser:

- Poco dispersivo (figura II.3.2 (a)): la pulsación tiene variaciones suaves con la constante de fase y el ancho de banda (BW) es pequeño. En tal caso la velocidad de grupo (pendiente a la frecuencia central f_0) se considera la misma para todo el grupo.
- Algo dispersivo (figura II.3.2 (b)): la pulsación tiene variaciones suaves con la constante de fase pero el ancho de banda es muy grande. En este caso la velocidad de grupo a f_0 no representa a todo el grupo.
- Dispersivo (figura II.3.2 (c)): la pulsación tiene variaciones muy rápidas con la constante de fase. En este caso la velocidad de grupo a f_0 tampoco representa al grupo a no ser que tenga un ancho de banda muy pequeño.

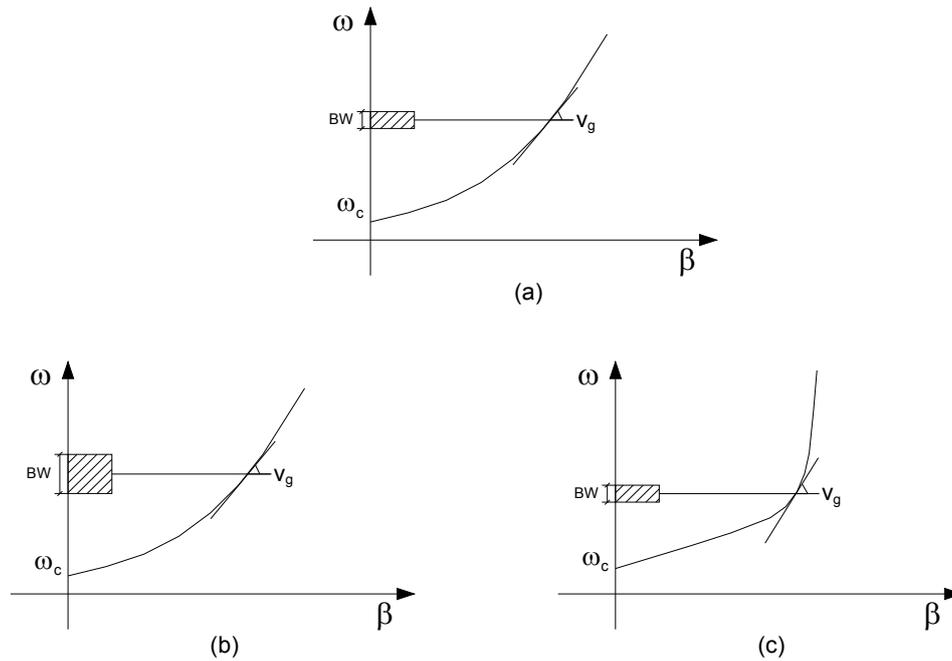


Figura II.3.2 Medios dispersivos versus la pulsación (ó frec.) según el medio y el BW de la señal

II.4 RESUMEN

Medios que transmiten modos TEM: $\vec{E}_z = \vec{H}_z = 0$

- dos conductores al menos. Típicos: cable coaxial, bifilar, microstrip, etc.
- $\beta = k$ con bajas pérdidas
- banda de uso: desde muy baja frecuencia ($f > 0$) hasta la frecuencia de corte (f_c) del primer modo superior
- $v = c = v_p = v_g = v_e$
- existe impedancia de onda e impedancia característica
- $\alpha = c_1 \cdot fre + c_2 \cdot \sqrt{fre}$ np/m
- nada o poco dispersivo

Medios que transmiten modos TE: $\vec{E}_z = 0$ y TM: $\vec{H}_z = 0$

- ninguno, uno o más conductores. Típico: guíasondas (un conductor)
- $\beta_n = k \sqrt{1 - \left(\frac{f_{cn}}{f}\right)^2}$ con bajas pérdidas
- banda de uso: desde la frecuencia de corte del primer modo (el deseado) hasta la frecuencia de corte del siguiente modo.
- $v = c \neq v_p \neq v_g = v_e$ en cada modo
- existe impedancia de onda pero no impedancia característica (Z_0). Sin embargo $Z_0 = Z_{onda}$ cuando se trabaje con una línea equivalente.
- $\alpha = \alpha_c(\text{conductor}) + \alpha_d(\text{dieléctrico})$ que aumenta con la frecuencia

- dispersivo

II.5 BIBLIOGRAFÍA

- Vicente Ortega Castro. "Introducción a la Teoría de Microondas. Líneas de Transmisión y Guías de Ondas". ETSIT-UPM. Madrid. Dpto. de Publicaciones 1979.
- Robert E. Collin. "Foundations for Microwave Engineering". Wiley-IEEE Press.

TEMA III. MEDIOS DE TRANSMISIÓN MÁS USADOS

III.1 INTRODUCCIÓN

En tema anterior se presentaron las soluciones genéricas de las ecuaciones de Maxwell en medios guiados. En este tema deseamos exponer las soluciones concretas en los medios de transmisión más usados: el cable coaxial, la guíaonda rectangular y la línea microstrip. Veremos sus parámetros típicos y sus aplicaciones.

III.2 EL CABLE COAXIAL

El cable coaxial tiene una sección transversal como la que se recoge en la figura III.2.1. El diámetro interior del conductor exterior es $2b$ y el diámetro del conductor central $2a$.

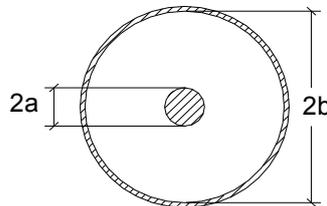


Figura III.2.1 Sección del cable coaxial

Resolviendo las ecuaciones de Maxwell en este medio se obtienen los parámetros primarios R , G , C y L . De éstos destacar:

La capacidad e inductancia por unidad de longitud:

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{b}{a}} \quad (\text{F/m}) \qquad L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad (\text{H/m}) \qquad [\text{III.2.1}]$$

Los parámetros secundarios son los siguientes:

Impedancia característica:

$$Z_o = \frac{\eta}{2\pi} \ln \frac{b}{a} = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{b}{a} \quad \Omega \qquad [\text{III.2.2}]$$

Constante de fase:

$$\beta = k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} \quad \text{rad/m} \quad (\text{con bajas pérdidas}) \qquad [\text{III.2.3}]$$

Constante de atenuación en los conductores:

$$\alpha_c = \frac{R_s}{2\eta \ln \frac{b}{a}} \frac{1 + b/a}{b} \cong \text{cte} \sqrt{f r e} \quad \text{np/m} \qquad [\text{III.2.4}]$$

Constante de atenuación en el dieléctrico:

$$\alpha_d = \frac{k}{2} \tan \delta \cong cte \cdot f \cdot re \quad \text{np/m} \quad \text{[III.2.5]}$$

Potencia media transmitida en la línea cargada con Z_0 ($V_o^+ = V_o^-$):

$$P_T = \frac{V_o^2}{2Z_0} = \frac{\pi}{\eta} \frac{V_o^2}{\ln \frac{b}{a}} \quad \text{vatios} \quad \text{[III.2.6]}$$

En la gráfica de la figura III.2.2 se ha dibujado la impedancia característica, la atenuación en los conductores y la potencia transmitida en función de la relación de radios b/a .

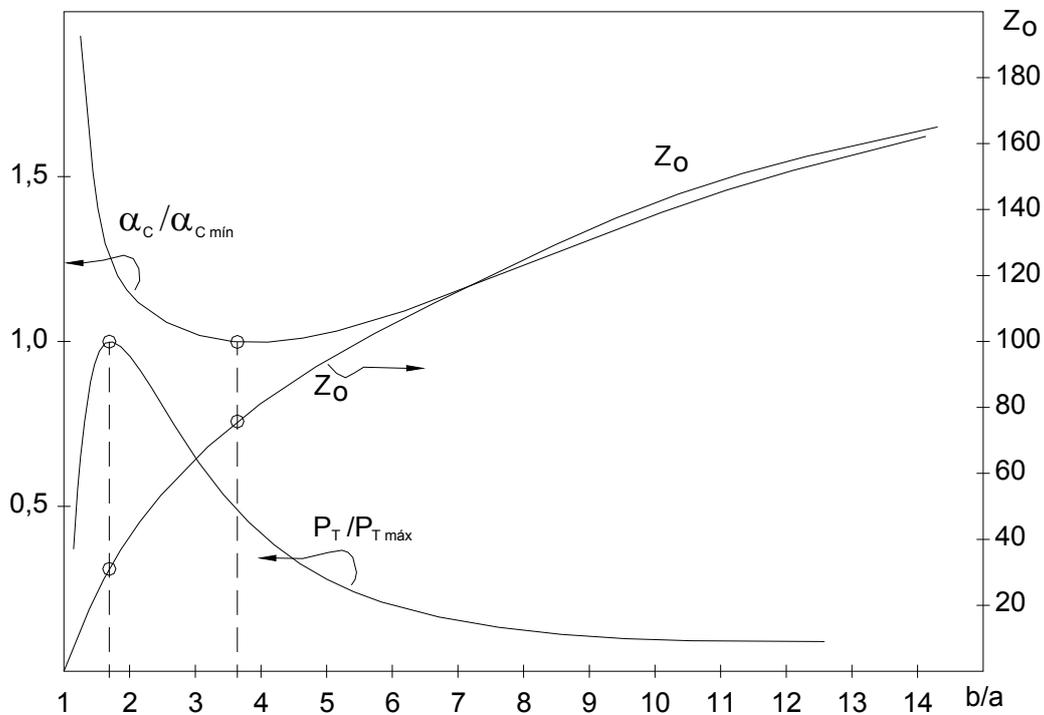


Figura III.2.2 Z_0 , α_c y potencia transmitida en función de la relación de radios b/a

Como se observa para el valor de $b/a=3,6$ la atenuación pasa por un mínimo y Z_0 vale unos 77Ω (en el vacío). Para $b/a=1,65$ la potencia transmitida es máxima y Z_0 vale unos 30Ω (en el vacío). Los valores de impedancia característica utilizados en la práctica son 75Ω y 50Ω . El primero que optimiza las pérdidas es el más utilizado en los sistemas de distribución de TV. El de 50Ω es un compromiso entre potencia y atenuación. Se utiliza en todos los demás sistemas de transmisión y recepción de señales por cable.

Modos superiores:

En el cable coaxial se transmite un modo TEM pero pueden aparecer modos superiores TE y TM si la frecuencia de trabajo supera la de corte de éstos. Para el modo más bajo (TE₁₀) la frecuencia de corte vale:

$$f_c = \frac{v}{\pi(a+b)} = \frac{c_0}{\pi(a+b)\sqrt{\epsilon_r}} \text{ Hz} \quad [\text{III.2.7}]$$

Especificaciones típicas del cable coaxial

En la tabla III.2.1 se recogen las características típicas del cable coaxial y las aplicaciones en las que dichas características son más críticas.

Tabla III.2.1. Características típicas y aplicaciones del cable coaxial

Característica	Valor, comentarios	Aplicaciones relevantes
Impedancia característica	75Ω, 50Ω	75Ω TV, 50Ω resto de aplicaciones
VSWR	Depende mucho de los conectores	Antenas Tx, instrumentación
Banda frecuencias	Limitada por la fcorde o las pérdidas	Instrumentación, Antenas
Atenuación	Aumentan con la frec.	Antenas Rx y Tx, arrays, instrum.
Máx. potencia media transmitible	Disminuye con la frec.	Antenas Tx, arrays
Máx. potencia de pico transmitible	Limitada por Vruptura. Presurización con gases	Antenas Tx
Variación de fase con temperatura	Debido a la dilatación	Arrays, instrumentación
Variación de fase ante flexión, torsión	Repetibilidad y recuperación del cable	Arrays, instrumentación
Apareamiento en fase	Entre cables de una misma aplicación	Arrays, instrumentación
Rango de temperaturas	En la se conservan las características	Antenas, arrays, instrumentación
Velocidad de propagación	Normalmente fijada por las demás características	-----

En la figura III.2.3 se muestra una gráfica de la atenuación en función de la frecuencia de un cable típico. Obsérvese como la atenuación aumenta con la frecuencia y disminuye al aumentar el diámetro del cable. En la gráfica inferior de la misma figura se muestra la mejora que se produce en el COE, en el lado del generador, debido a las pérdidas. En la gráfica superior de la misma figura se muestra el incremento equivalente en las pérdidas (α') debido al COE de la carga.

En la figura III.2.4 se recogen las características de los cables serie S de la casa Flexco. Se puede ver que el modelo S652 es de gran diámetro y por tanto, de bajas pérdidas. Así mismo el fabricante nos indica que su impedancia

característica es de 50Ω y que la frecuencia máxima de uso es de unos 2GHz. La tensión de ruptura es de 5Kv (eficaces).

En la misma figura se muestra el comportamiento de la atenuación del mismo cable con la frecuencia así como la máxima potencia media transmisible, también en función de la frecuencia.

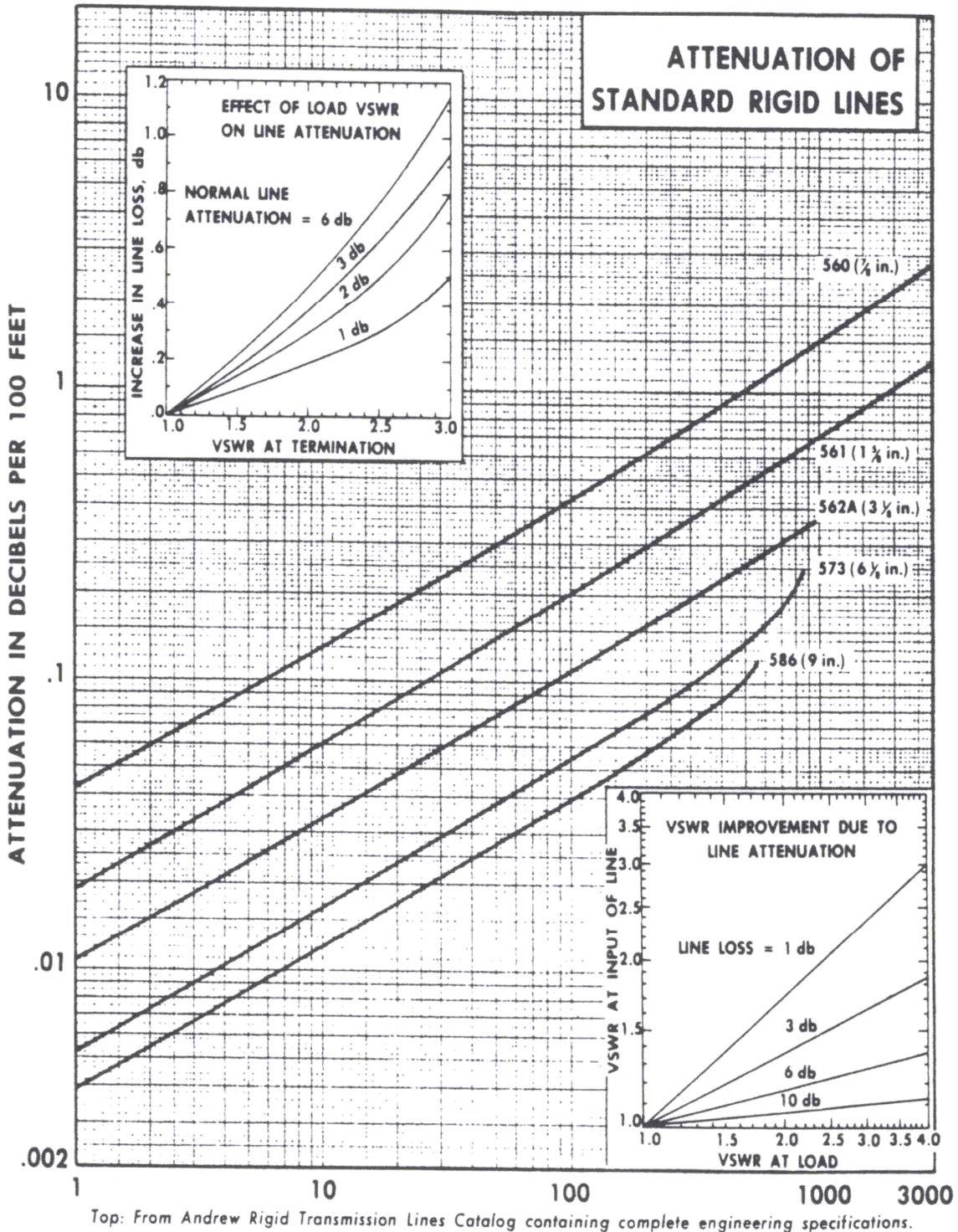


Figura III.2.3 Atenuación en un cable coaxial (catálogo de Andrew)

Flexco Microwave, Inc.

PO Box 115, 17 Karrville Rd.
 Port Murray, NJ 07865
 Telephone 908 835 1720 Fax 908 835 0002
 http://www.FlexcoMW.com e-mail: sales@FlexcoMW.com



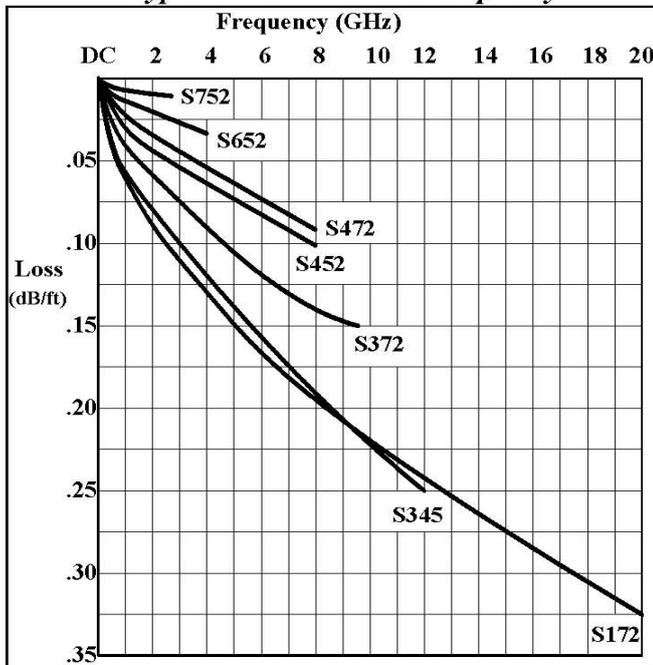
Flexco Microwave's "S" Series Cables

Specification Summary

	S172	S345	S372	S452	S472	S652	S752
Electrical							
Maximum Frequency (GHz)	20	12	9.5	8	8	4	2.7
Nominal Impedance (Ω)	50	50	50	50	50	50	50
Velocity of Propagation (%)	84	79	81	90	88	90	95
Time Delay (ns/ft)	1.21	1.29	1.25	1.13	1.15	1.13	1.07
Breakdown Voltage (KV@ 60 Hz)	3.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	8.0
Nominal Capacitance (pF/ft)	24	26	25	24	24	24	22.5
Shielding Effectiveness (dBc min.)	-110	-90	-110	-90	-110	-90	-90
Insertion Loss (dB/ft)							
at 0.4 GHz	0.03	0.04	0.02	0.02	0.01	0.008	0.004
at 0.9 GHz	0.06	0.05	0.03	0.03	0.02	0.010	0.006
at 2.0 GHz	0.08	0.07	0.05	0.04	0.03	0.018	0.009
at 8.0 GHz	0.20	0.19	0.13	0.10	0.08		
at 12.0 GHz	0.24	0.25					
at 18.0 GHz	0.30						
Physical							
Center Conductor Type	Solid	Stranded	Solid	Solid	Solid	Tubular	Tubular
Minimum Bend Radius (inches)	1.0	2.0	1.25	5.5	5.0	10.5	20.0
Weight per Foot (lbs.)	0.050	0.162	0.150	0.182	0.165	0.560	0.864
Outer Diameter (in.)	0.300	0.480	0.530	0.585	0.640	1.100	1.996

Available connectors include N, TNC, 2.4 mm, 3.5 mm, K, SMA, SC, LC and 7-16 DIN, conforming to MIL-C-39012 or IEEE specifications. Other connectors are available upon request. A wide selection of jackets, braids, and armoring are also available.

Typical Attenuation vs. Frequency



Average (CW) Power Handling

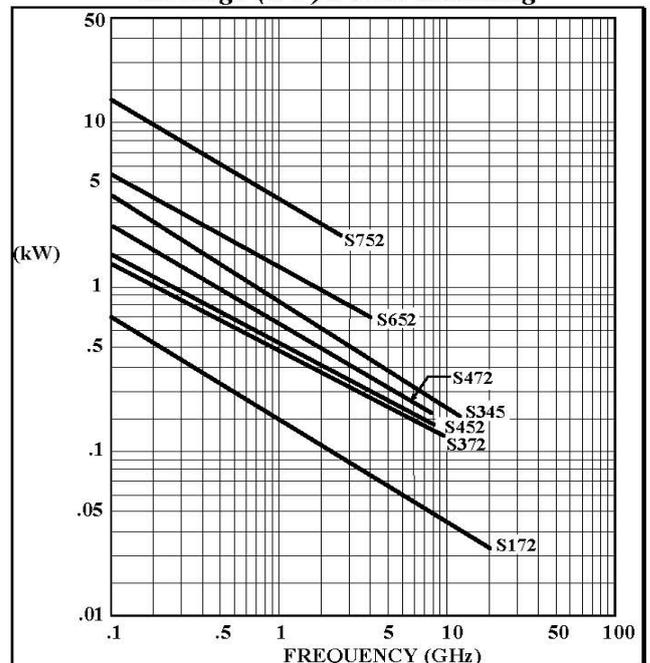


Figura III.2.4 Características generales de cables coaxiales de la casa Flexco

III.3 LA GUÍA RECTANGULAR

En la figura III.3.1 se muestra una guíaonda rectangular donde a y b son sus dimensiones internas. Es un medio de bajas pérdidas que permite transmitir altas potencias pero con los inconvenientes de su rigidez mecánica.

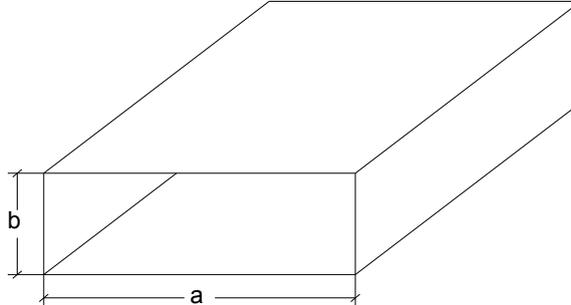


Figura III.3.1 Guíaonda rectangular

Resolviendo las ecuaciones de Maxwell en este medio se obtienen los modos TE_{mn} y TM_{mn} solución, donde:

m ó $n > 0$ para los modos TE y m y $n \geq 1$ para los TM.

El nº de onda de corte $k_{cm,n}$ de cada modo vale:

$$k_{cm,n}^2 = \left(\frac{\omega_{cm,n}}{v} \right)^2 = \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \quad [\text{III.3.1}]$$

y la frecuencia de corte $f_{cm,n}$:

$$f_{cm,n} = \frac{k_{cm,n}}{2\pi} v = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2} = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2} \quad [\text{III.3.2}]$$

Como se ve la frecuencia de corte depende del modo en cuestión (valores de m y n), de las dimensiones de la guía y de la constante dieléctrica. Si las dimensiones aumentan la frecuencia de corte disminuye.

La longitud de onda de corte $\lambda_{cm,n}$:

$$\lambda_{cm,n} = \frac{v}{f_{cm,n}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2}} \quad [\text{III.3.3}]$$

Si $\lambda_{cm,n} > \lambda = \frac{v}{f}$ hay propagación.

y la longitud de onda en la guía:

$$\lambda_{gm,n} = \frac{2\pi}{\beta_{m,n}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{cm,n}}{f}\right)^2}} \quad \text{[III.3.4]}$$

Modo útil: el TE₁₀

La frecuencia de corte del modo más bajo depende de las dimensiones de la guía. Cuando éstas se eligen de forma que $a=2b$ el modo con frecuencia de corte más baja es el TE₁₀. Con estas dimensiones, además, se maximiza la banda de trabajo de este modo; en particular, y como se muestra en la figura III.3.2, la frecuencia de corte del modo siguiente es el doble.

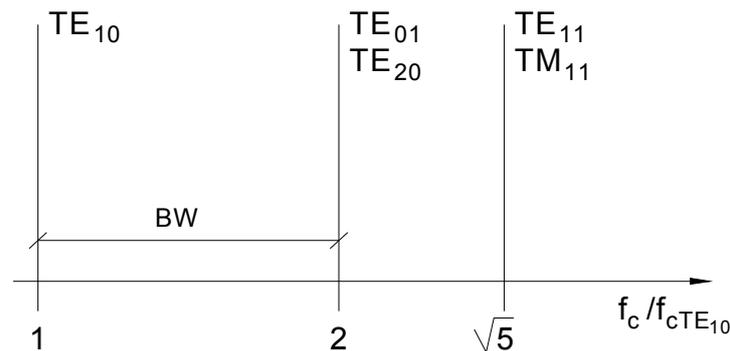


Figura III.3.2 Frecuencia de corte de los modos más bajos en la guía de onda rectangular con $a=2b$

La frecuencia de corte para este modo (TE₁₀) vale:

$$f_{cTE10} = \frac{v}{2a} \quad \text{[III.3.5]}$$

que sólo depende de a .

La impedancia de onda es:

$$Z_{TE10} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{cTE10}}{f}\right)^2}} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{2af}\right)^2}} \quad \text{[III.3.6]}$$

Las constantes de atenuación valen:

$$\alpha_c = \frac{R_s}{60\pi a} \frac{1 + \left(\frac{f_{cTE10}}{f}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{cTE10}}{f}\right)^2}} \text{ np/m} \quad \text{y} \quad \alpha_d = \frac{k}{2} \frac{\tan \delta}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{cTE10}}{f}\right)^2}} \text{ np/m} \quad \text{[III.3.7]}$$

α_d aumenta con la frecuencia pero α_c puede llegar a disminuir. En la tabla III.3.1 se recogen las características típicas de las guías de onda rectangulares normalizadas.

Tabla III.3.1. Relación de guías rectangulares normalizadas

Designation	Recommended Operating Frequency Range For TE ₀₁ Mode		Cut Off For TE ₀₁ Mode		Power Rating (megawatts) (see note 1) 1.25fc 1.9fc	Theoretical Attenuation Lowest to Highest Frequency (dB/100ft.)	JAN WG RG	Material Alloy	JAN FLANGE		Dimensions (inches)							
	IEC R	EIA WR	IEC (GHz) 1.25fc 1.9fc	EIA (GHz)					Frequency (GHz)	Wavelength (cm)	Choke UG/U	Cover UG/U	EIA WG WR	Inside	Tol. (±)	Outside	Tol. (±)	Wall Thickness (nom.)
3	2300	0.32-0.49	0.32-0.49	0.256	116.84	246-348	.040-.027	290	Alum.		2300	23.000-11.500	0.020	23.376-11.876	.020	0.188		
4	2100	0.35-0.53	0.35-0.53	0.281	106.68	205-290	.046-.031	291	Alum.		2100	21.000-10.500	0.020	21.376-10.876	.020	0.188		
5	1800	0.41-0.62	0.41-0.62	0.328	91.44	150-213	.058-.039	201	Alum.		1800	18.000-9.000	0.020	18.250-9.250	.020	0.125		
6	1500	0.49-0.75	0.49-0.75	0.393	76.20	104-148	.076-.051	202	Alum.		1500	15.000-7.500	0.015	15.350-7.750	.015	0.125		
8	1150	0.64-0.98	0.64-0.98	0.513	58.40	61.5-87.1	.113-.076	203	Alum.		1150	11.500-5.750	0.015	11.750-6.000	.015	0.125		
9	975	0.76-1.15	0.75-1.12	0.605	49.53	44.2-62.6	.145-.098	204	Alum.		975	9.750-4.875	0.010	10.000-5.125	.010	0.125		
12	770	0.96-1.46	0.96-1.45	0.766	39.12	27.6-39.1	.206-.140	205	Alum.		770	7.700-3.850	0.010	7.950-4.100	.010	0.125		
L	14	650	1.14-1.73	1.12-1.70	0.908	33.02	19.6-27.8	.317-.214	69	Brass	417A*	650	6.500-3.250	0.010	6.660-3.410	.010	0.080	
							266-.180	103	Alum.		417B*							
	18	510	1.45-2.20	1.45-2.20	1.157	25.91	12.09-17.1	.456-.309	337	Brass		510	5.100-2.550	0.010	5.260-2.710	.010	0.080	
							382-.259	338	Alum.									
W	22	430	1.72-2.61	1.70-2.60	1.372	21.84	8.6-12.2	.588-.399	104	Brass	435A*	430	4.300-2.150	0.008	4.460-2.310	.008	0.080	
							494-.334	105	Alum.		437A*							
	26	340	2.17-3.30	2.20-3.30	1.736	17.27	5.4-7.6	.837-.567	112	Brass	553*	340	3.400-1.700	0.005	3.560-1.860	.005	0.080	
							702-.475	113	Alum.		554*							
S	32	284	2.60-3.95	2.60-3.95	2.078	14.43	3.5-5.0	1.136-.777	48	Brass	54B 53	284	2.840-1.340	0.005	3.000-1.500	.005	0.080	
							953-.652	75	Alum.	585A 584								
	40	229	3.22-4.90	3.30-4.90	2.577	11.63	2.44-3.46	1.514-1.026	340	Brass		229	2.290-1.145	0.005	2.418-1.273	.005	0.064	
							1.270-.860	341	Alum.									
C	48	187	3.94-5.99	3.95-5.85	3.152	9.510	1.52-2.15	2.140-1.467	49	Brass	148C 149A	187	1.872-0.872	0.005	2.000-1.000	.005	0.064	
							1.795-1.231	95	Alum.	406D 407								
	58	159	4.64-7.05	4.90-7.05	3.711	8.078	1.17-1.66	2.617-1.773	343	Brass		159	1.590-0.795	0.004	1.718-0.923	.004	0.064	
							2.195-1.487	344	Alum.									
	70	137	5.38-8.17	5.85-8.20	4.301	6.970	0.79-1.12	3.470-2.390	50	Brass	343B 344	137	1.372-0.622	0.04	1.500-0.750	.004	0.064	
							2.910-2.004	106	Alum.	440B 441								
X _L	84	112	6.58-10.00	7.05-10.00	5.259	5.700	0.52-0.73	4.761-3.292	51	Brass	52B 51	112	1.122-0.497	0.004	1.250-0.625	.004	0.064	
							3.993-2.761	68	Alum.	137B 138								
	102	(7.23)-(11.0)	7.00-11.0	5.785	5.182	0.48-0.68	5.093-3.450	320	Brass	1494 1493	102	1.020-0.510	0.003	1.148-0.638	.003	0.064		
							4.272-2.894	Alum.										
X _S	100	90	8.20-12.5	8.20-12.40	6.557	4.572	0.33-0.47	6.614-4.570	52	Brass	40B 39	90	0.900-0.400	0.003	1.000-0.500	0.003	0.050	
							5.547-3.833	67	Alum.	136B 135								
	120	75	9.84-15.0	10.00-15.00	7.868	3.810	0.26-0.34	8.078-5.472	346	Brass		75	0.750-0.375	0.003	0.850-0.475	0.003	0.050	
							6.775-4.590	347	Alum.									
K _U	140	62	11.9-18.0	12.4-18.0	9.486	3.160	0.18-0.25	10.696-7.246	91	Brass	541A 419	62	0.622-0.311	0.002	0.702-0.391	0.003	0.040	
							8.971-6.077	349	Alum.									
	180	51	14.5-22.0	15.0-22.0	11.574	2.590	0.12-0.17	14.406-9.759	352	Brass		51	0.510-0.255	0.0025	0.590-0.335	0.003	0.040	
							12.082-8.185	351	Alum.									
K	220	42	17.6-26.7	18.0-26.5	14.047	2.137	0.066-0.094	22.042-15.464	53	Brass	596A 595	42	0.420-0.170	0.0020	0.500-0.250	0.003	0.040	
							18.487-12.970	121	Alum.	598A 597								
	260	34	21.7-33.0	22.0-33.0	17.328	1.730	0.053-0.076	26.465-17.928	354	Brass		34	0.340-0.170	0.0020	0.420-0.250	0.003	0.040	
							22.197-15.036	355	Alum.									
K _A	320	28	26.4-40.1	26.5-40.0	21.08	1.422	0.036-0.051	35.413-23.989	271	Brass	600A 599	28	0.280-0.140	0.0015	0.360-0.220	0.220	0.040	
							29.701-20.120	Alum.										
	400	22	33.0-50.1	33.0-50.0	26.34	1.138	0.023-0.033	49.491-33.526	272	Brass		383	0.224-0.112	0.0010	0.304-0.192	0.002	0.040	
							41.508-28.119	Alum.										
	500	19	39.3-59.7	40.0-60.0	31.36	0.956	0.016-0.023	64.367-43.603	358	Brass	1529*	19	0.188-0.094	0.0010	0.268-0.174	0.002	0.040	
							40.697-27.569	Silver										
V	620	15	49.9-75.8	50.0-75.0	39.86	0.752	0.010-0.144	92.152-62.425	273	Brass		385	0.148-0.074	0.0010	0.228-0.154	0.002	0.040	
							58.265-39.470	98	Silver									
	740	12	60.5-92.0	60.0-90.0	48.35	0.620	0.0069-0.0098	123.128-83.409	274	Brass		387	0.122-0.061	0.0005	0.202-0.141	0.002	0.040	
							77.85-52.737	99	Silver									
	900	10	73.8-112	75-110.0	59.01	0.508	0.0046-0.0066	165.920-112.397	359	Brass		1528*	10	0.100-0.050	0.0005	0.180-0.130	0.002	0.040
							104.906-71.065	Silver										
	1200	8	92.3-140	90.0-140.0	73.6	0.406	0.0030-0.0042	146.611-99.317	278	Silver	1527*	8	0.0800-0.0400	0.0003	0.120-0.080	0.001	0.020	
	1400	7	113-173	110.0-170.0	90.9	0.330	0.0019-0.0028	200.185-135.609	276	Silver	1525*	7	0.0650-0.0325	0.00025	0.105-0.073	0.001	0.020	
	1800	5	145-220	140.00-220.0	115.7	0.259	0.0012-0.0017	288.036-195.120	275	Silver	1524*	5	0.0510-0.0255	0.00025	0.091-0.066	0.001	0.020	
	2200	4	172-261	170.0-260.0	137.3	0.218	0.00086-0.00122	372.048-252.032	277	Silver	1526*	4	0.0430-0.0215	0.00020	0.083-0.062	0.001	0.020	
	2600	3	220-335	220.0-325.0	176.2	0.170	0.00054-0.00076	529.155-358.459		Silver		3	0.0340-0.0170	0.00020	0.156 dia	0.001		

Notes: 1 True theoretical values at 1 atmos. Dry air at 20°C, no safety factor included.

*Contact Flange

III.4 LÍNEAS IMPRESAS. LA LÍNEA MICROSTRIP

Las líneas vistas hasta ahora se utilizan principalmente para transmitir señales entre dos puntos (alimentación antenas, conexión de sistemas, instrumentos, etc.) y muy poco para la realización de circuitos en alta frecuencia (salvo filtros, acopladores y diplexores). Estos circuitos se suelen hacer sobre placas de sustrato dieléctrico metalizadas donde podemos soldar los componentes pasivos y activos que compondrán dichos circuitos.

Si los componentes son discretos (condensadores, transistores, etc.) estaremos realizando circuitos híbridos de microondas (HMIC) y si se fabrican sobre una oblea semiconductora estaremos obteniendo circuitos monolíticos de microondas (MMIC).

Existen varios tipos de líneas para hacer ambos tipos de circuitos de las que destacamos (ver figura III.4.1):

- la línea microstrip
- la línea stripline
- la línea coplanar

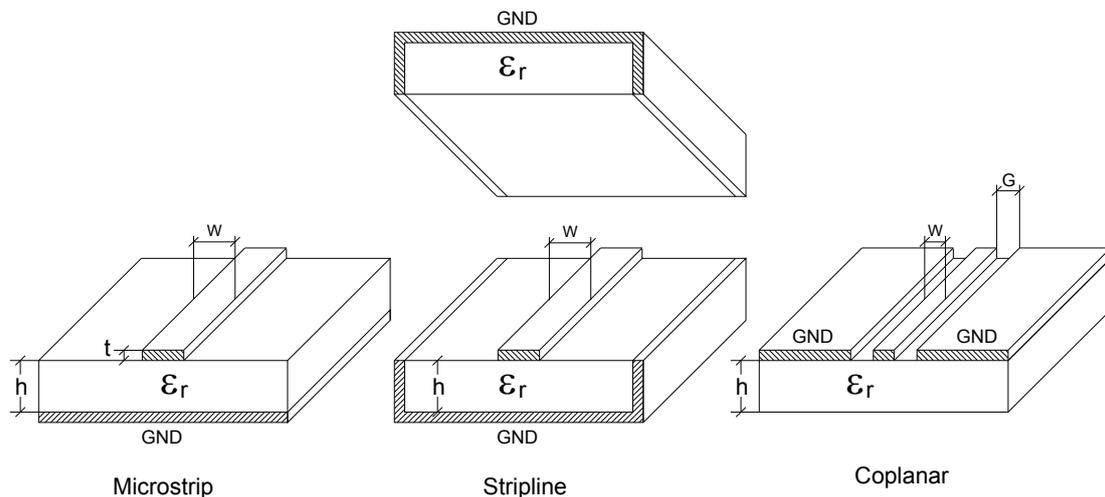


Figura III.4.1 Líneas para realizar circuitos de alta frecuencia

La línea microstrip consiste en una lámina de material dieléctrico (o sustrato) sobre el que se depositan dos metalizaciones una en la cara superior de dimensiones delimitadas por diseño y otra en la inferior que hace de masa. Para un sustrato dado la anchura de la línea superior (w) define el valor de la impedancia característica. Como se ve se trata de un medio no homogéneo (dieléctrico-aire) lo que produce dos efectos básicos:

- en lugar de un modo TEM se propaga un modo Cuasi-TEM (si $w \ll \lambda$)
- no es suficiente considerar sólo la constante dieléctrica del material sino que hay que incluir la del aire para lo cual se introduce la constante dieléctrica efectiva que es una "media" entre aquellas. Este hecho hará que el medio sea dispersivo en alta frecuencia.

Esta línea es la más utilizada en la realización de circuitos híbridos y monolíticos pues facilita el montaje y ajuste de los mismos.

La línea stripline consta de dos láminas dieléctricas unidas entre sí a modo de “emparedado” en una de las cuales se metaliza la línea interior y en el exterior de ambas se metaliza la masa: es como un cable coaxial al que se le aplastara con un molde rectangular. En este caso se considera que el medio es homogéneo y por tanto se transmite un modo TEM. Al igual que en la línea microstrip, para un sustrato dado, la anchura de la línea interior (w) define el valor de la impedancia característica.

Aunque tiene mejores propiedades de propagación que la microstrip se utiliza menos pues presenta dificultades a la hora de introducir los componentes entre las láminas y también al realizar ajustes.

La línea coplanar consiste en una lámina de material dieléctrico en el que se depositan tres metalizaciones en una de sus caras: la central y las laterales que hacen de masa y han de estar unidas entre sí. En ocasiones se metaliza la otra cara y se une a las masas superiores. Una vez más se trata de un medio no homogéneo por lo que se transmite un modo Cuasi-TEM. En este caso, para un sustrato dado, la anchura de la línea superior (w) y su separación (gap) de la masa (G) define el valor de la impedancia característica.

Esta línea se utiliza poco o nada en circuitos híbridos y bastante más en circuitos monolíticos aunque depende mucho del fabricante.

En la tabla III.4.1 se muestran las características de algunos materiales (sustratos) para realizar estas líneas. Obsérvese la bondad del zafiro.

Tabla III.4.1. Características de algunos materiales dieléctricos

Substratos	ϵ_r	$\text{tg}\delta$ a 10GHz	Conduc. Térm. $w/\text{cm}/^\circ\text{C}$	E_{RUP} (Kv/cm)	Maleabilidad Mecanizado
Poliestireno	2,53	$4,7 \cdot 10^{-4}$	0,0015	280	Fácil
CuClad Plástico	2,17	$4,0 \cdot 10^{-4}$	0,0026	25	Fácil
Epsilam-10	10,0	$20 \cdot 10^{-4}$	0,0037	25	Fácil
Fibra de vidrio	4,2	$10 \cdot 10^{-3}$	----	20	Medio
Alúmina	9,70	$2,0 \cdot 10^{-4}$	0,3	$4 \cdot 10^3$	Difícil
Zafiro	11,7	10^{-4}	0,4	$4 \cdot 10^3$	Difícil
Cuarzo	3,8	10^{-4}	0,01	$10 \cdot 10^3$	Difícil
Oxido de Berilio	6,6	10^{-4}	2,5	---	Difícil
GaAs ($\rho=10^7 \Omega\text{-cm}$)	12,3	$16 \cdot 10^{-4}$	0,3	350	Difícil
Silicio ($\rho=10^3 \Omega\text{-cm}$)	11,7	$50 \cdot 10^{-4}$	0,9	300	Difícil
Aire	1,0	0,0	0,00024	30	---

En la figura III.4.2 se muestran las pérdidas en el conductor y en el dieléctrico, en función de la frecuencia, para una línea microstrip de 50Ω para distintos sustratos. Con este criterio de pérdidas, el cuarzo es de los mejores materiales mientras que el Si y el GaAs son de los peores.

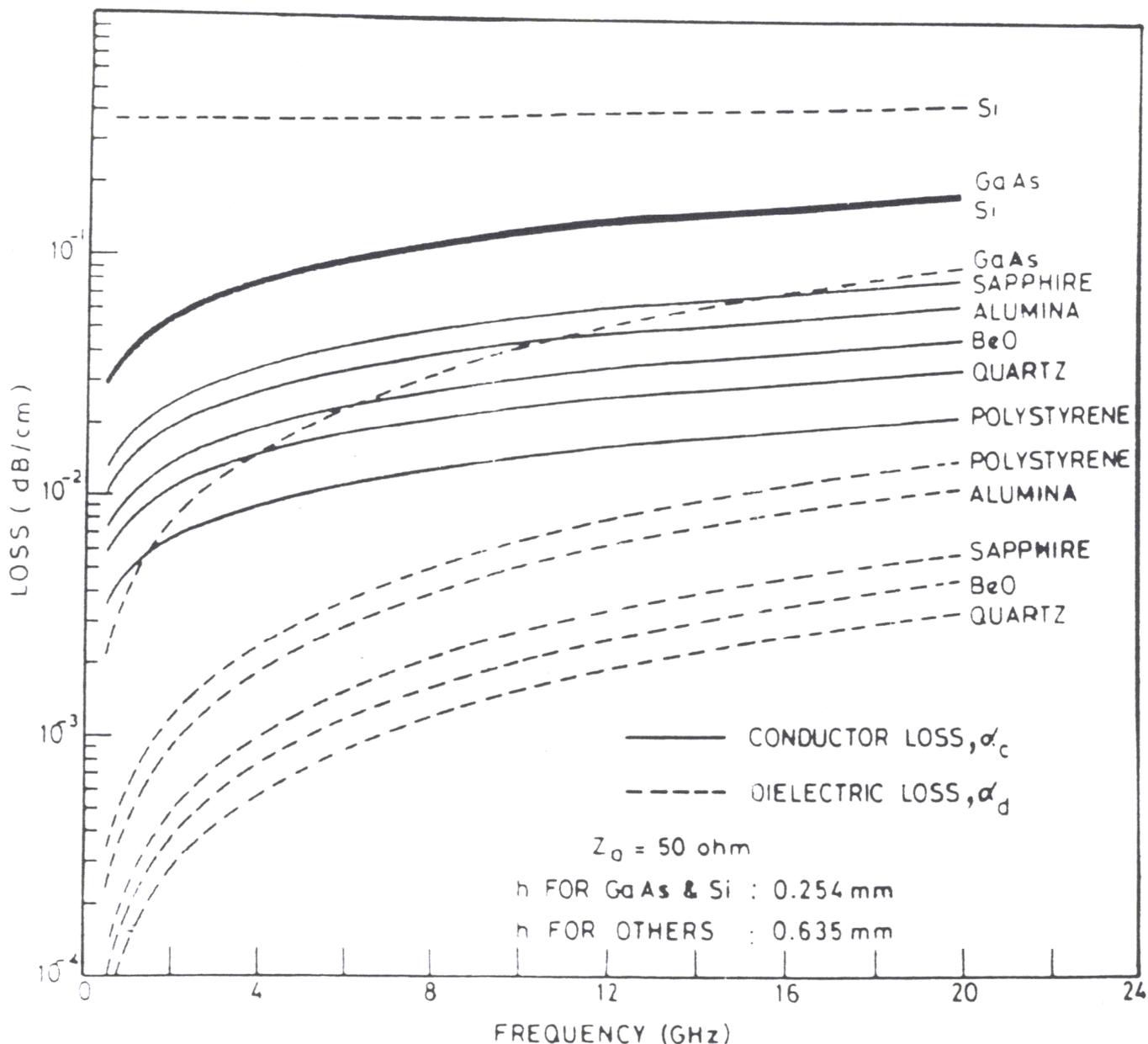


Figura III.4.2 Pérdidas en el conductor y en el dieléctrico de una línea microstrip de 50Ω (adaptada de Gupta)

En la tabla III.4.2 se recogen las expresiones analíticas aproximadas para el cálculo de los parámetros secundarios de la línea microstrip. También existen para la línea stripline. Todos estos parámetros también se pueden obtener con programas comerciales como el "Txline" (admite varios tipos de líneas).

Tabla III.4.2 Expresiones de los parámetros secundarios de la línea microstrip.
(adaptadas de Jia-Sheng, Hammerstad, Jensen, Delinger, etc., ...)

Impedancia característica

$$Z_o = \frac{\eta_o}{2\pi\sqrt{\epsilon_E}} \ln \left\{ \frac{8h}{W} + 0,25 \frac{W}{h} \right\} \quad \text{para } t=0 \text{ y } W/h \leq 1$$

$$Z_o = \frac{\eta_o}{\sqrt{\epsilon_E}} \left\{ \frac{W}{h} + 1,393 + 0,667 \ln \left(\frac{W}{h} + 1,444 \right) \right\}^{-1} \quad \text{para } t=0 \text{ y } W/h \geq 1$$

Constante dieléctrica efectiva (ϵ_E)

$$\epsilon_E = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \left\{ \left(1 + 12 \frac{h}{W} \right)^{-1/2} + 0,04 \left(1 - \frac{W}{h} \right)^2 \right\} \quad \text{para } t=0 \text{ y } W/h \leq 1$$

$$\epsilon_E = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \left\{ \left(1 + 12 \frac{h}{W} \right)^{-1/2} \right\} \quad \text{para } t=0 \text{ y } W/h \geq 1$$

Constantes de atenuación

$$\alpha_c = \frac{8,686 R_s}{Z_o W} \text{ dB/u.l.}$$

$$\alpha_D = 8,686\pi \left(\frac{\epsilon_E + 1}{\epsilon_r - 1} \right) \frac{\epsilon_r}{\epsilon_E} \frac{\tan \delta}{\lambda_g} \text{ dB/u.l.}$$

Dispersión

$$\epsilon_E(f) = \epsilon_r - \frac{\epsilon_r - \epsilon_E}{1 + (f/f_{50})^m}$$

(f_{50} y m tienen sus propias ecuaciones: ver referencias)

$$Z_o(f) = Z_o \frac{\epsilon_E(f) - 1}{\epsilon_E - 1} \sqrt{\frac{\epsilon_E}{\epsilon_E(f)}}$$

Modos superiores en la línea microstrip

Existen dos posibles modos superiores en la línea microstrip:

- si la longitud de la línea (superior) es mucho mayor que su anchura se propagan modos TE cuando se supera la siguiente frecuencia de corte:

$$f_{cTE} = \frac{v_o}{4h\sqrt{\epsilon_r - 1}} \quad \text{si longitud} \gg w \quad \text{[III.4.1]}$$

- si la longitud de la línea es comparable con su anchura se propagan modos transversales cuando se supera la siguiente frecuencia de corte:

$$f_{cTr} = \frac{v_o}{(2W + 0.8h)\sqrt{\epsilon_r}} \quad \text{si longitud} \approx w \quad \text{[III.4.2]}$$

Discontinuidades en la línea microstrip

Cuando hemos estudiado las ecuaciones de las líneas siempre hemos supuesto que éstas eran infinitamente largas y uniformes (constantes en z). Sin embargo los cables y, en particular, las líneas microstrip se interconectan con otras de iguales o distintas dimensiones, en cascada o en paralelo, o cambian de dirección, etc. lo que rompe la uniformidad de la línea y da origen a las discontinuidades. Si éstas no se tienen en cuenta en el diseño se pueden producir comportamientos indeseados en nuestros circuitos tales como: la degradación del COE, rizados en banda, cambios de fase o sintonía, etc.

En general existen modelos circuitales de las discontinuidades que permiten tener en cuenta estos defectos. Los valores de los elementos del modelo se obtienen con expresiones analíticas aproximadas.

A modo de ejemplo en la figura III.4.3 se muestran discontinuidades típicas en la línea microstrip con su circuito equivalente (no se han incluido las expresiones de los elementos que lo componen).

En la actualidad, la mayoría de los programas de análisis y diseño de circuitos de alta frecuencia permiten tener en cuenta todo tipo de discontinuidades.

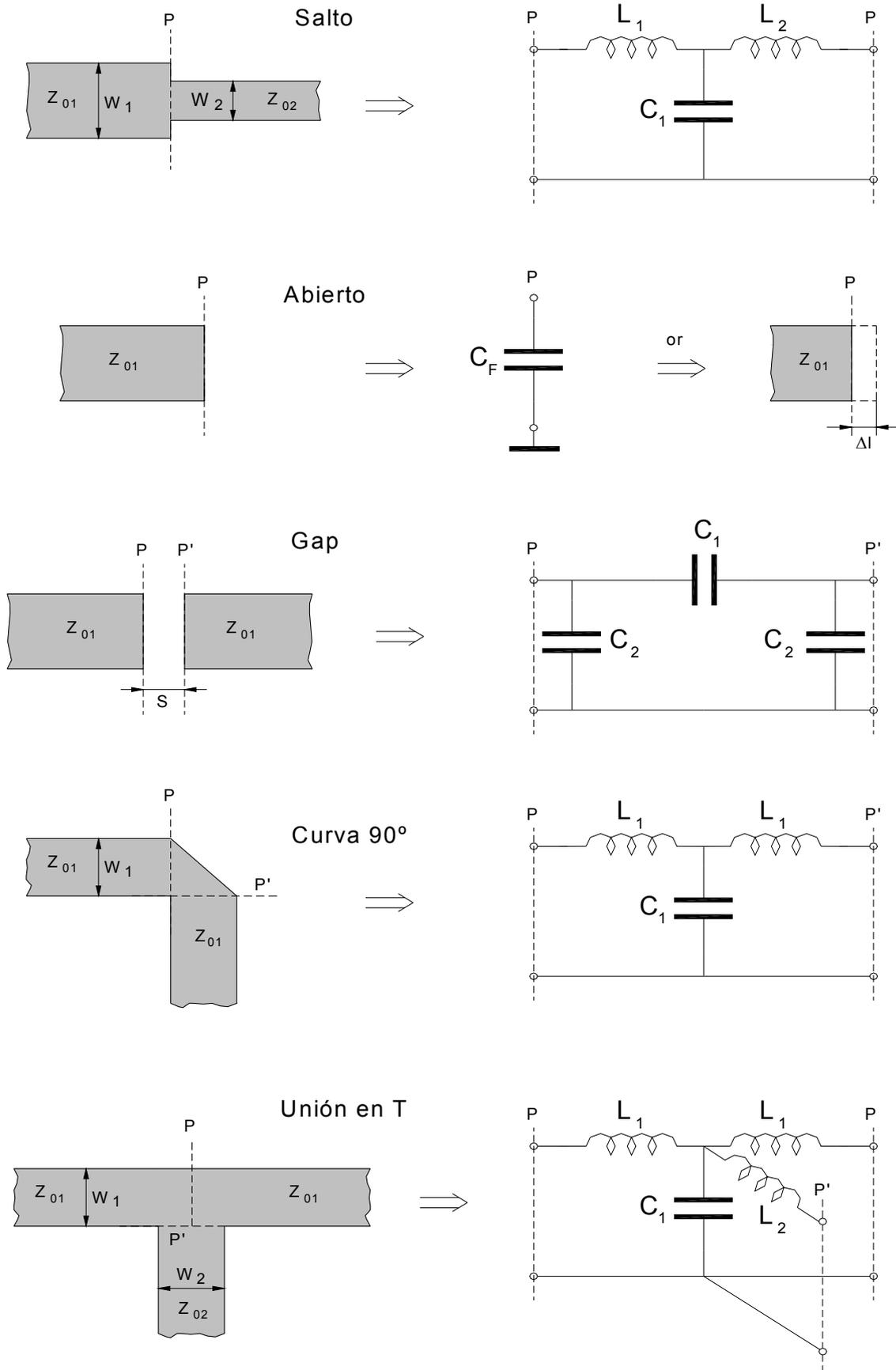


Figura III.4.3 Discontinuidades típicas en línea microstrip con sus circuitos equivalentes

III.5 EJERCICIOS

Ejercicio III.5.1 Se desea encerrar una línea microstrip con una caja metálica para evitar radiación. Desde el punto de vista de propagación qué precauciones básicas tomaría en el diseño de las dimensiones de dicha caja para asegurar la correcta transmisión sobre la línea microstrip.

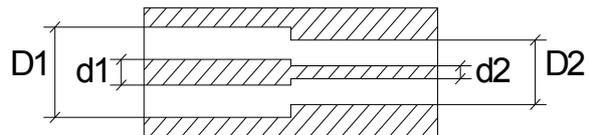
Ejercicio III.5.2 Determinar la máxima frecuencia de trabajo de una transición coaxial de 3,5mm a 2,4mm de dimensiones:

$$D1 = 0,138'' = 3,51\text{mm}$$

$$d1 = 0,060'' = 1,52\text{mm}$$

$$D2 = 0,095'' = 2,41\text{mm}$$

$$d2 = 0,041'' = 1,04\text{mm}$$



Ejercicio III.5.3 De la casa de cables Flexco elegir un coaxial para conectar el transmisor de un radar en banda L (1040 MHz) desde la caseta hasta la antena sabiendo que:

- la longitud del cable es de 15m
- la atenuación total debe ser menor de 1dB
- la potencia de pico del radar es de 2kw
- el ciclo de trabajo es menor del 0,1%
- $Z_g(\text{Tx})=Z_o=50\Omega$

Ejercicio III.5.4 Se desea realizar un amplificador pulsado a la frecuencia de 2,2GHz en tecnología microstrip, que entregue una potencia de pico de 200w con un ciclo de trabajo del 1%. Elegir el sustrato más adecuado de los que se proponen sabiendo que:

- se quiere que las dimensiones del circuito sean mínimas
- se desea que las pérdidas sean mínimas
- se necesitan líneas de baja impedancia para adaptar (7Ω) lo que implica w grande y $w/h=15$

Substratos:	ϵ_r	$\text{tg}\delta$	E_{RUP} (Kv/mm)
Plástico (CuClad)	2,17	10^{-4}	25
Alúmina	9,6	$0,8 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^3$
Epsilam-10	10,0	$20 \cdot 10^{-4}$	25

Espesores: 0,254mm, 0,635mm y 1,27mm (10, 25 y 50 mils)

Ejercicio III.5.5 Mediante el programa Txline elegir un sustrato y su espesor (h) para realizar una línea de $Z_o=20\Omega$ y longitud eléctrica 90° a 10GHz que presente una relación de aspecto (l:w) mayor de III.4. El valor de t es de $30\mu\text{m}$ y no valen semiconductores o aire.

III.6 BIBLIOGRAFÍA

- Vicente Ortega Castro. "Introducción a la Teoría de Microondas. Líneas de Transmisión y Guías de Ondas". ETSIT-UPM. Madrid. Dpto. De Publicaciones 1979.
- K.C. Gupta, Ramesh Garg & I.J. Bahl. "Microstrip Lines and Slotlines". Artech House, INC.
- Robert S. Elliott. "An Introduction to Guided Waves and Microwave Circuits". Prentice Hall.
- David Pozar. "Microwave Engineering". John Wiley & Sons, INC.
- Harlan Howe, JR. "Stripline Circuit Design". Artech House, INC.
- Jorge Pérez, Félix Pérez, Javier Gismero. Documentación Curso Maestría en Sistemas y Redes de Comunicaciones. ETSIT-UPM: "Subsistemas y Circuitos de Radiofrecuencia-II"
- Jia-Sheng Hong and M.J. Lancaster. "Microstrip Filters for RF/Microwave Applications". Wiley Interscience.
- E. O. Hammerstad. "Equations for microstrip circuit design". Proceedings of the European Microwave Conference. Hamburg, Germany, 1975. Pp. 268-272.

TEMA IV. CARTA DE SMITH Y ADAPTACIÓN DE IMPEDANCIAS

IV.1 INTRODUCCIÓN

En este tema se expone la Carta de Smith, un ábaco para trabajar con impedancias y coeficientes de reflexión en líneas de bajas pérdidas. Además, se recuerda el problema de la adaptación de impedancias que es de gran importancia en el diseño de circuitos, y su resolución mediante la Carta de Smith.

IV.2 LA CARTA DE SMITH

Como sabemos entre la impedancia y el coeficiente de reflexión, en un punto dado de una línea, existe la siguiente relación (mirando hacia carga):

$$Z(z) = \frac{V}{I} = Z_0 \frac{1 + \rho_L(z)}{1 - \rho_L(z)} \quad [\text{IV.2.1}]$$

Pues bien, la Carta de Smith es un ábaco que permite representar las impedancias en la línea y obtener con rapidez el valor correspondiente del coeficiente de reflexión y al contrario. La carta se construye a partir de la expresión [IV.2.1] normalizando el valor de la impedancia $Z(z)$ respecto a Z_0 ; es decir, dividiendo por Z_0 el valor de la impedancia $Z(z)$; por tanto la impedancia normalizada en la línea vale:

$$\bar{Z}(z) = \frac{1 + \rho_L(z)}{1 - \rho_L(z)} \quad [\text{IV.2.2}]$$

Para desnormalizar habría que multiplicar por Z_0 . Esta relación es una transformación bilineal (o de Möebius) que transforma rectas en el plano de las impedancias (\bar{Z}) (de resistencia constante (r) y reactancia constante (x)) en circunferencias en el plano de los coeficientes de reflexión (ρ) (de r constante y x constante). Para verlo llamemos:

$$\bar{Z}(z) = r + jx$$

y a:

$$\rho_L(z) = \rho_L e^{-j2Kz} = u + jv$$

substituyendo en [IV.2.2] queda:

$$r + jx = \frac{1 + u + jv}{1 - u - jv} \quad [\text{IV.2.3}]$$

Si igualamos la parte real obtenemos:

$$\left(u - \frac{r}{1+r}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{(1+r)^2}$$

que son circunferencias de resistencia constante (r) en el plano u,v de coeficientes de reflexión (ρ) con:

radio: $\frac{1}{1+r}$ y centro en $\left(\frac{r}{1+r}, 0\right)$

En la figura IV.2.1.a se han dibujado algunas de ellas.

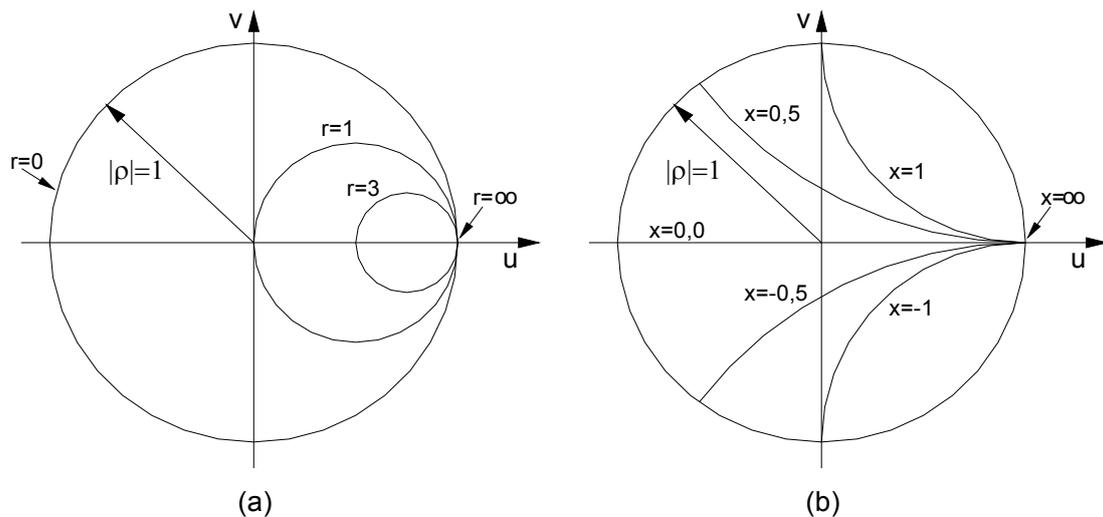


Figura IV.2.1 Construcción de la Carta de Smith. (a) resistencias, (b) reactancias

Obsérvese que la circunferencia de mayor radio es la de $r=0$ que representa el borde de la carta pues es donde $|\rho|=1$. El valor de $r=\infty$ degenera en el punto $(1,0)$.

Igualando ahora las partes imaginarias de [IV.2.3] obtenemos:

$$(u-1)^2 + \left(v - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}$$

circunferencias de reactancia constante (x) en el plano u,v de coeficientes de reflexión (ρ) con:

radio: $\frac{1}{x}$ y centro en $\left(1, \frac{1}{x}\right)$

algunas de las cuales se han dibujado en la figura IV.2.1.b

Aquí el valor $x=0$ es la recta de abscisas y el de $x=\infty$ es el punto $(1,0)$. Entre ambos valores tenemos circunferencias de x constante de las cuales nos

quedamos con los arcos que quedan dentro de la circunferencia de resistencia $r=0$ ó $|\rho|=1$.

En la figura IV.2.2 se muestra la carta de la carta de Smith con las circunferencias (o arcos) de r y x constantes todas dentro de la circunferencia de $r=0$ ó $|\rho|=1$. Como se ve el centro de la carta representa el valor de $\rho=0$ ó $\bar{Z}=1$. La carta, además, permite pasar con facilidad de impedancias a coeficientes de reflexión y viceversa. A modo de ejemplo, en la figura IV.2.2, se muestra que para un valor dado de $\rho_L = 0,7 \angle 45^\circ$ podemos encontrar con rapidez la circunferencia de r y de x que pasan por dicho valor y, con ello, el valor de la impedancia: $\bar{Z}_L = 1 + 2j$. La carta incluye una escala en grados para obtener la fase del coeficiente de reflexión y otra escala en longitudes de onda (en partes de $\lambda/2$) para movernos sobre la línea de transmisión.

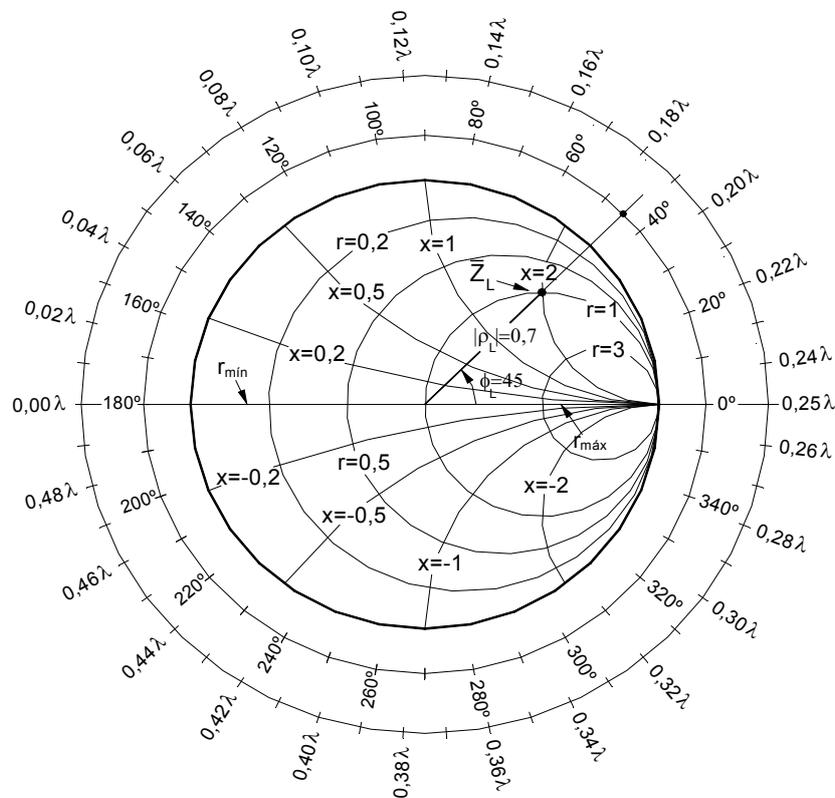


Figura IV.2.2 Carta de Smith con resistencias y reactancias

La carta además nos permite hacer otras operaciones para lo que hay que tener presente los puntos siguientes:

- Trabajaremos con líneas sin pérdidas donde el coeficiente de reflexión en cualquier punto de la línea se obtiene como:

$$\rho_L(z) = \rho_L e^{-2jKz} = |\rho_L| e^{j(\phi_L - 2Kz)} \quad [\text{IV.2.4}]$$

Por tanto, partiendo de ρ_L (ó Z_L) podemos ver el valor del coeficiente de reflexión en otro punto de la línea desplazándonos sobre una circunferencia de

$|\rho_L(z)| = |\rho_L| = cte$ desde la carga hasta el nuevo punto z en el sentido horario (o hacia el generador: $-2kz$). Ello nos permite a su vez, conocer el valor de la nueva impedancia en dicho punto. La expresión [IV.2.4] indica que cada vuelta en la carta (2π) supone recorrer una longitud de línea de $\lambda/2$; pues como ya sabemos los coeficientes de reflexión y las impedancias se repiten en la línea cada $\lambda/2$. El movimiento en la línea lo haremos con la escala en partes de $\lambda/2$. Como se muestra en la figura IV.2.3, si partimos del coeficiente de reflexión en la carga $\rho_L(z=0) = 0,7\angle 45^\circ$ y nos desplazamos hacia el generador la distancia de $z=0,236\lambda$ el nuevo valor del coeficiente de reflexión es $\rho_L(z=0,236\lambda) = 0,7\angle 235^\circ$ y el de la impedancia $\bar{Z}_1 = 0,22 - 0,5j$. Para calcularlo en la carta, partimos de la posición de $\rho_L = 0,7\angle 45^\circ$, al que le corresponde la posición relativa de $0,186\lambda$, y a ésta le sumamos la longitud de la línea $0,236\lambda$, moviéndonos en sentido horario sobre la circunferencia a trazos de radio $|\rho_L(z)| = |\rho_L| = 0,7$ hasta situarnos en $0,422\lambda = 0,186\lambda + 0,236\lambda$.

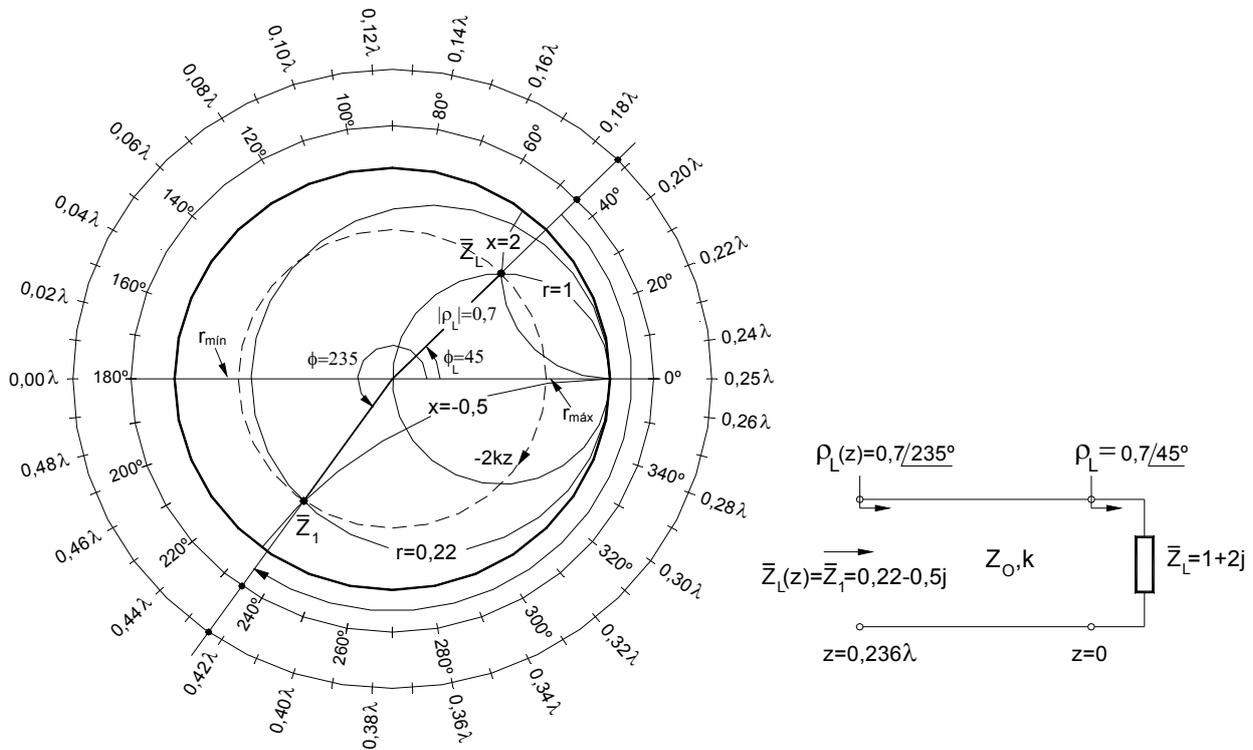


Figura IV.2.3 Carta de Smith. Obtención de la impedancia al movernos en la línea

Si por el contrario quisiéramos movernos desde un punto z de la línea hacia la carga partiríamos desde $\rho_L(z)$ y nos moveríamos en sentido anti-horario (o hacia la carga) sobre la circunferencia de $|\rho_L(z)| = |\rho_L|$.

- la resistencia máxima (normalizada) en la línea, que coincide con los máximos de voltaje, vale:

$$r_{\text{máx}} = \frac{V_{\text{máx}}}{I_{\text{mín}}} = \frac{1 + |\rho_L|}{1 - |\rho_L|} = S$$

que ocurre cuando $\varphi_L - 2Kz = 0^\circ$; es decir, que en el eje real positivo se encuentran los máximos de voltaje y, además, los valores de r coinciden con el de coeficiente de onda estacionaria ($r=S=COE$).

- la resistencia mínima (normalizada) en la línea, que coincide con los mínimos de voltaje, vale:

$$r_{\text{mín}} = \frac{V_{\text{mín}}}{I_{\text{máx}}} = \frac{1 - |\rho_L|}{1 + |\rho_L|} = \frac{1}{S}$$

que ocurre cuando $\varphi_L - 2Kz = 180^\circ$; es decir, que en el eje real negativo se encuentran los mínimos de voltaje y los valores de r coinciden con el inverso del coeficiente de onda estacionaria ($r=1/S$).

- Con lo visto, si conocemos el COE en la línea (S) y la distancia desde un mínimo o máximo de voltaje hasta la carga, podemos determinar el valor de ésta desplazándonos dicha distancia sobre la circunferencia de $|\rho_L(z)| = cte$, desde el mínimo (eje izquierdo) o el máximo (eje derecho) hasta la carga en sentido contrario al de las agujas del reloj.

- Carta de Smith para admitancias. Como se muestra en la figura IV.2.4 es la misma que para impedancias cambiando las circunferencias de resistencia constante (r) por las de conductancia constante (g) y las de reactancia constante (x) por las de susceptancia constante (b). En esta ocasión las admitancias se normalizan respecto a $Y_0 = 1/Z_0$. Los máximos de g se encuentran en el semieje derecho y los mínimos en el izquierdo. Para pasar de impedancias a admitancias en la carta sólo hay que tener en cuenta que $\rho_I = -\rho_V$ lo que implica hacer una simetría respecto del centro de la carta.

- Una línea que está terminada en un corto o en un abierto presenta para $z > 0$ una impedancia (jx) o admitancia (jb) imaginaria pura por lo que al desplazarnos sobre dicha línea lo haríamos sobre la circunferencia de $|\rho_L(z)| = 1$ (ó $r=0$ ó $g=0$) (ver figura IV.2.4)

- Con la carta podemos sumar las admitancias de dos líneas en paralelo en el punto de unión de ambas o bien sus impedancias si están en serie. En la figura IV.2.5 se muestra el caso de dos líneas en paralelo. Como una de ellas es susceptiva pura, la suma implica movernos sobre la circunferencia de $g=cte.=0,22$.

En la figura IV.2.6 se recoge una Carta de Smith estándar que incluye una serie de escalillas en su parte inferior. Las de la derecha son:

- la superior alta: $|\rho|$; la superior baja: $|\rho|^2$

- la inferior alta: $-20 \log|\rho|$; la inferior baja: $-10 \log(1 - |\rho|^2)$

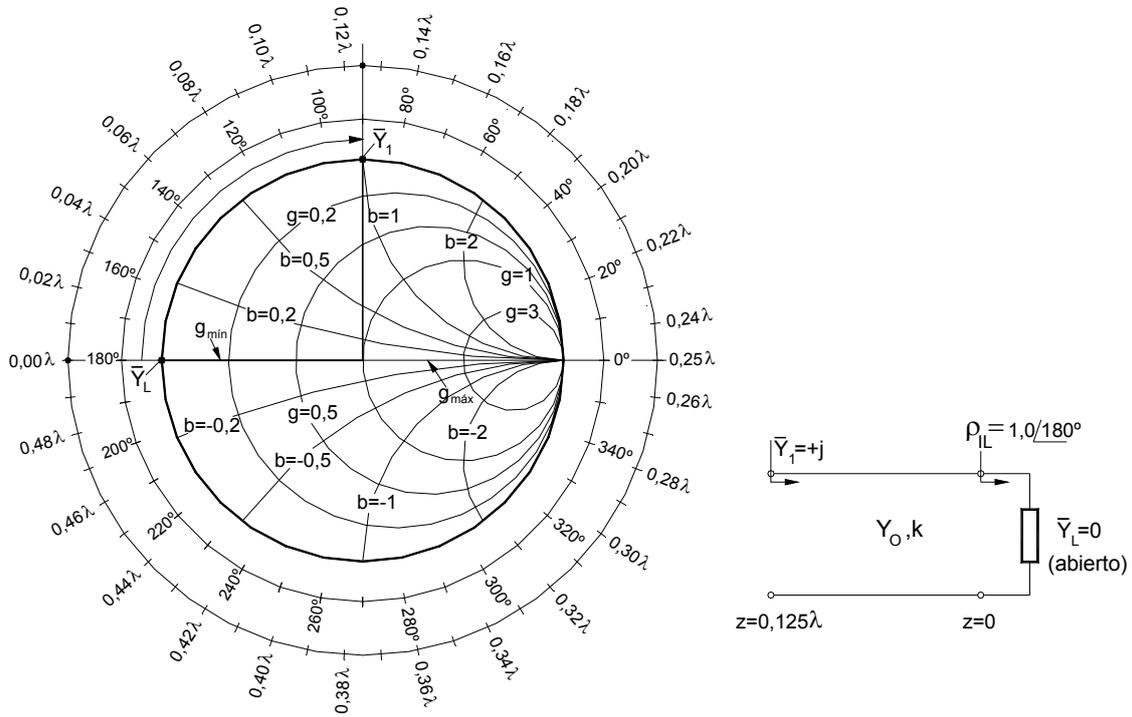


Figura IV.2.4 Carta de Smith de admitancias y línea acabada en abierto

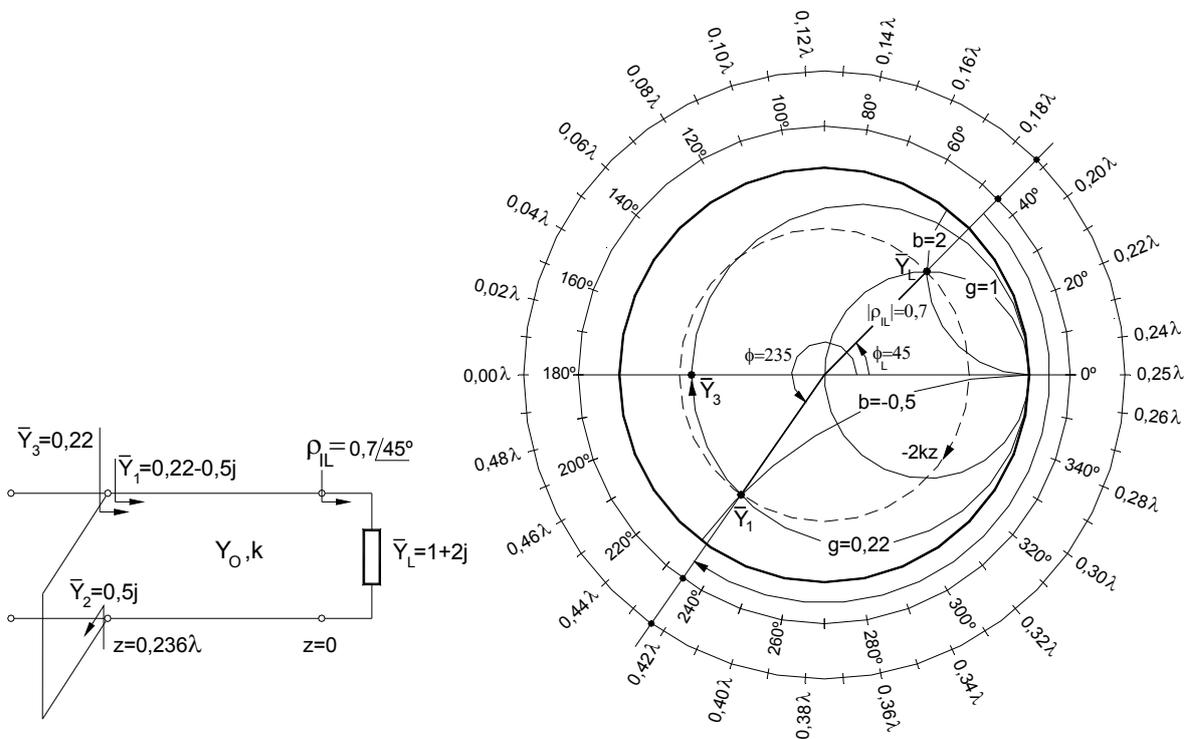


Figura IV.2.5 Suma de admitancias sobre la Carta de Smith

y las de la izquierda:

- la superior alta: $\alpha' = \alpha(S^2 + 1)/2S$; la superior baja: α' en dB
- la inferior alta: $20 \log S$; la inferior baja: S

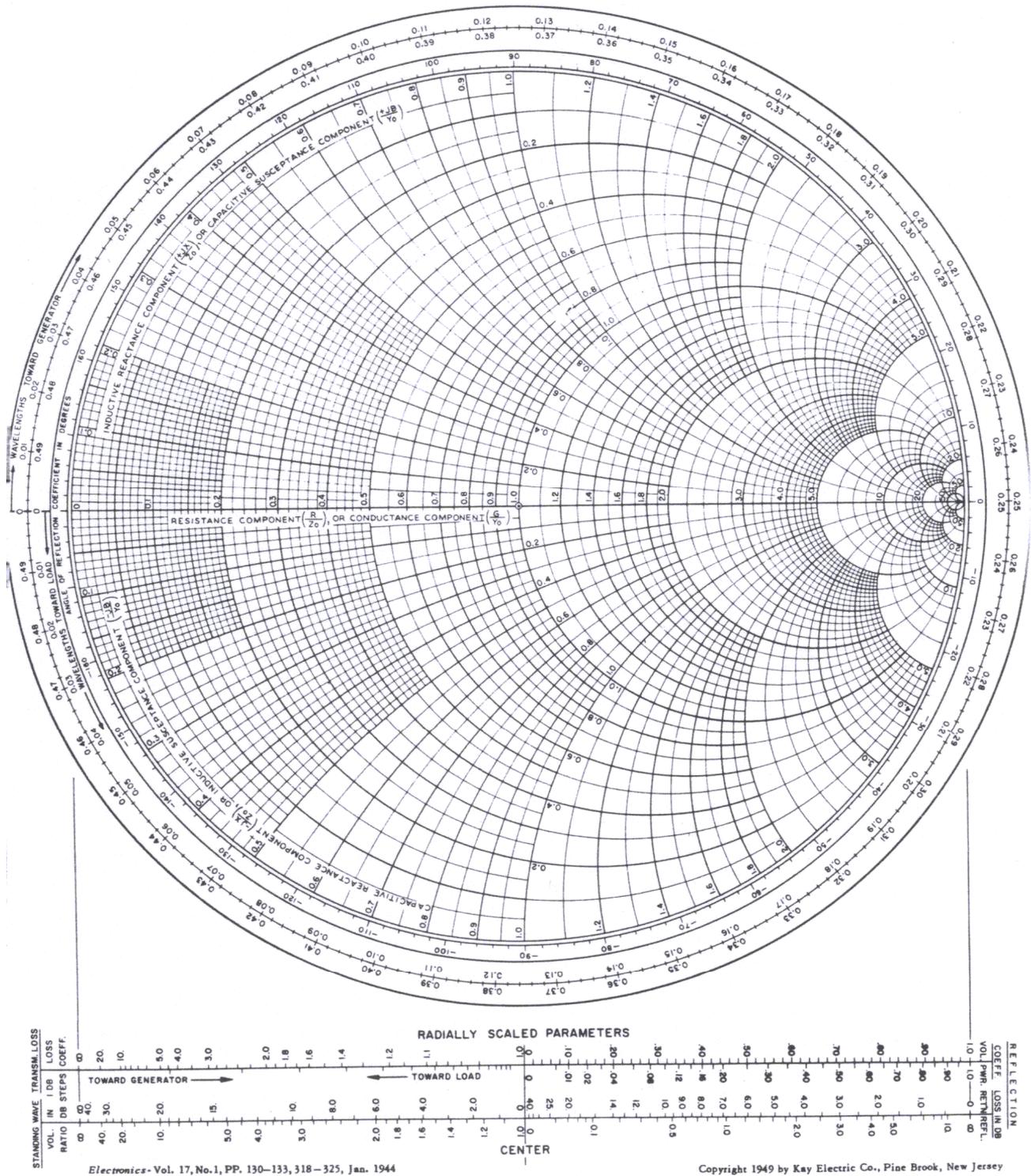


Figura IV.2.6 Carta de Smith estándar

IV.3 ADAPTACIÓN DE IMPEDANCIAS CON LA CARTA DE SMITH

Cuando hablamos de adaptación de impedancias estamos pensando en obtener la máxima transferencia de potencia; es decir, que haya adaptación conjugada de impedancias. Según la figura IV.3.1.a ello implica que $Z_L = Z_g^*$. Si esto se aplica a una línea de transmisión sin pérdidas (figura IV.3.1.b), en medio de la cual calculamos la impedancia vista hacia la izquierda y hacia la derecha, ello implica que la una debe ser la conjugada de la otra: $Z_D = Z_I^*$

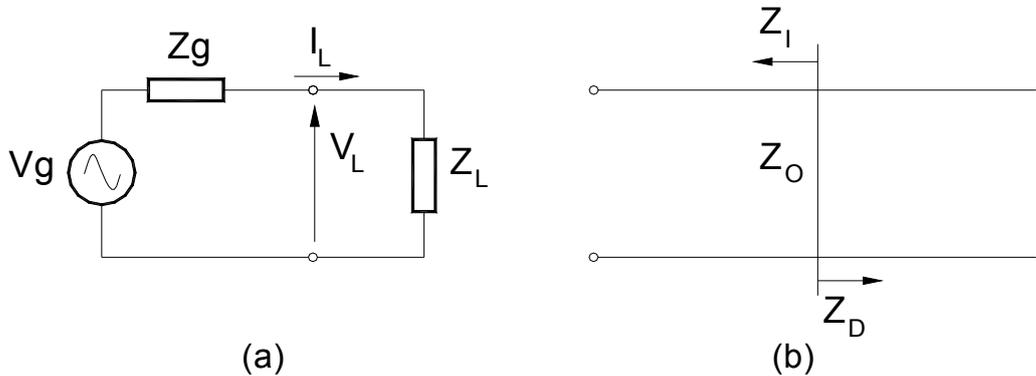


Figura IV.3.1 Adaptación conjugada

Podemos obtener la potencia entregada a la carga en el circuito de la figura IV.3.1.a como:

$$P_L = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(V_L I_L^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\left| \frac{V_g}{Z_g + Z_L} \right|^2 Z_L \right) = \frac{1}{2} \frac{|V_g|^2}{|Z_g + Z_L|^2} R_L \frac{4R_g}{4R_g} = P_{dg} \frac{|Z_L + Z_g|^2 - |Z_L - Z_g^*|^2}{|Z_g + Z_L|^2}$$

$$\text{y} \quad P_L = P_{dg} (1 - |\rho_p|^2) \quad \text{[IV.3.1]}$$

donde ρ_p se define como el coeficiente de desadaptación conjugada:

$$\rho_p = \frac{Z_L - Z_g^*}{Z_L + Z_g} \quad \text{[IV.3.2]}$$

siendo:

$$|\rho_p| = \left| \frac{Z_L - Z_g^*}{Z_L + Z_g} \right| = \left| \frac{Z_g - Z_L^*}{Z_g + Z_L} \right|$$

El coeficiente de desadaptación en medio de la línea es:

$$\rho_p = \frac{Z_D - Z_I^*}{Z_D + Z_I} \quad \text{y} \quad |\rho_p| = \left| \frac{Z_D - Z_I^*}{Z_D + Z_I} \right| = \left| \frac{Z_I - Z_D^*}{Z_I + Z_D} \right| \quad \text{[IV.3.3]}$$

Obsérvese que si $Z_I = Z_0 = Z_g$ ρ_p coincide con el coeficiente de reflexión en la línea y las pérdidas por desadaptación coinciden con las pérdidas por reflexión.

A la hora de adaptar también debemos tener presente el Teorema de Everit que señala que si en un punto o plano de una red pasiva y sin pérdidas hay adaptación conjugada esta situación se repite en cualquier otro punto o plano de dicha red.

IV.3.1 Elementos para adaptar

A continuación recogemos las redes más comunes para adaptar.

- Línea de transmisión a la que se conectan otras (en serie o en paralelo) terminadas en corto o en abierto llamadas “stubs” como se muestra en la figura IV.3.2.a y IV.3.2.b.

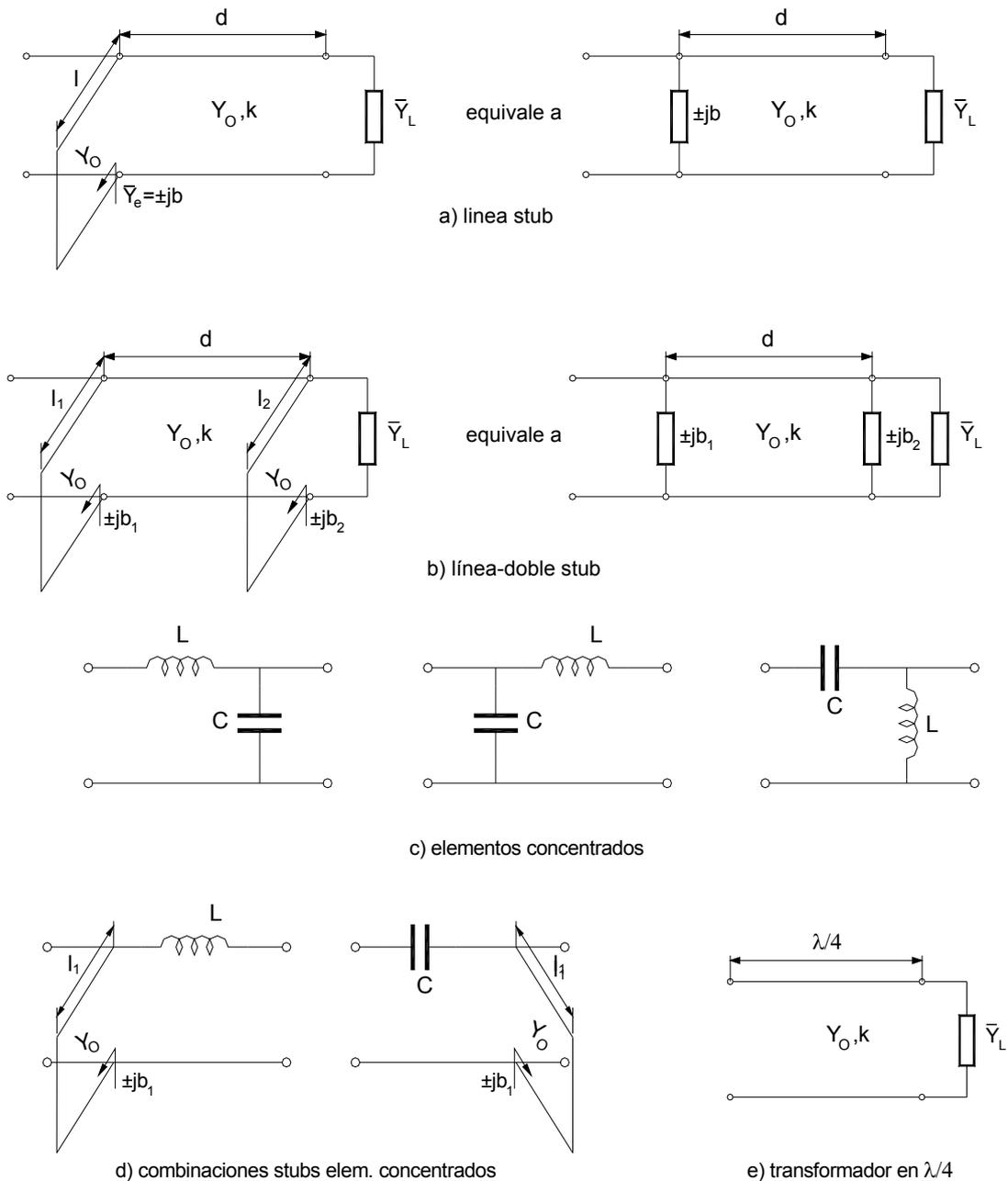


Figura IV.3.2 Redes de adaptación típicas

La impedancia de entrada que presenta un stub terminado en corto (figuras IV.3.2.a, b y d) vale:

$Z_e = jZ_o \operatorname{tg}(kl) = 1/Y_e$ que puede representar una reactancia ($\pm jX$) o una susceptancia ($\pm jB$) ($\pm jx$ ó $\pm jb$ si están normalizados).

y la que presenta un stub terminado en abierto:

$Z_e = -jZ_o \operatorname{cotg}(kl) = 1/Y_e$ que también puede representar una reactancia ($\pm jX$) o susceptancia ($\pm jB$) (también $\pm jx$ ó $\pm jb$ si están normalizados).

- Componentes concentrados: condensadores e inductancias (ver figura IV.3.2.c). Aptos para frecuencias de hasta unos 500MHz con encapsulado de montaje superficial (SMD).

- Combinación de elementos concentrados y líneas de transmisión (figura IV.3.2.d). Se utilizan hasta unos 3 GHz combinando condensadores SMD y tramos de línea.

- El transformador en “ $\lambda/4$ ” ya estudiado (figura IV.3.2.e). Además se puede modificar para adaptar impedancias de carga complejas.

En las operaciones de adaptación debemos recordar que para L y C:

$$\begin{aligned} Z_L = j\omega L = jX_L &\Rightarrow X_L = \omega L & Z_C = \frac{-j}{\omega C} = -jX_C &\Rightarrow X_C = \frac{1}{\omega C} \\ Y_L = \frac{-j}{\omega L} = -jB_L &\Rightarrow B_L = \frac{1}{\omega L} & Y_C = j\omega C = jB_C &\Rightarrow B_C = \omega C \end{aligned}$$

IV.3.2 Adaptación con línea y stub

Como se muestra en la figura IV.3.3.a el circuito consiste en una línea de transmisión entre generador y carga (de longitud dl) a la que se conecta en paralelo un stub en corto o en abierto (de longitud ds) en el lado del generador, que introduce una susceptancia $\mp jb$. Es un método de adaptación muy utilizado en el laboratorio con guías de onda y en el diseño de circuitos.

Nuestro objetivo es determinar la longitud de la línea (dl) y del stub (ds) para adaptar la impedancia de carga $Z_L = 1/Y_L$ a $Z_g = Z_o = 1/Y_o$ que es la impedancia del generador, igual a la impedancia característica de la línea principal; por tanto, normalizada vale 1. Como el stub está en paralelo trabajaremos con admitancias y pensando en adaptar a $\bar{Y}_g = Y_g/Y_o = 1$. Este stub deberá introducir una susceptancia $\mp jb$ tal que, en ese punto, compense la susceptancia que presenta el resto de la línea hacia la carga $\bar{Y}_1 = 1 \pm jb$ de forma que la admitancia total (suma) sea 1, que es la deseada pues la del generador también vale 1. Por tanto y sobre la carta, el tramo de línea (de longitud dl), que une el stub con la carga, debe trasladar la carga, a través de una circunferencia de ρ constante y en sentido horario, desde su posición

hasta la circunferencia de $g=1$. Esta longitud (dl) se obtiene de la escala graduada en partes de $\lambda/2$. Obsérvese que hay dos posibles soluciones: una en dl_A y otra en dl_B . Una vez situados sobre la circunferencia de $g=1$ anotamos los valores de susceptancia $+jb$ y $-jb$; Así, para la solución superior (A) el valor de jb que introduzca el stub ha de ser negativo para llevar el de $\bar{Y}_{1A} = 1 + jb$ al centro y positivo para la solución inferior (B: $\bar{Y}_{1B} = 1 - jb$).

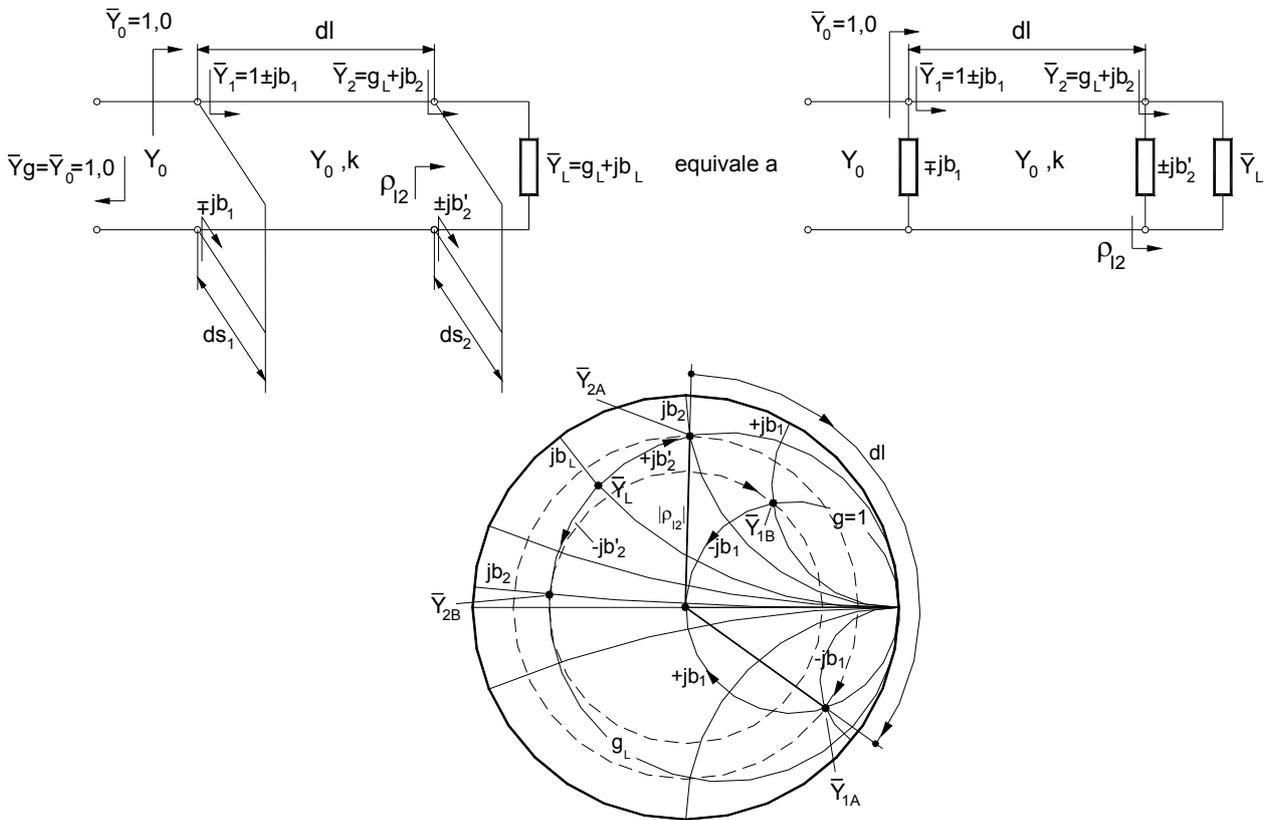


Figura IV.3.3.a Obtención de la longitud de línea dl : dos soluciones A y B

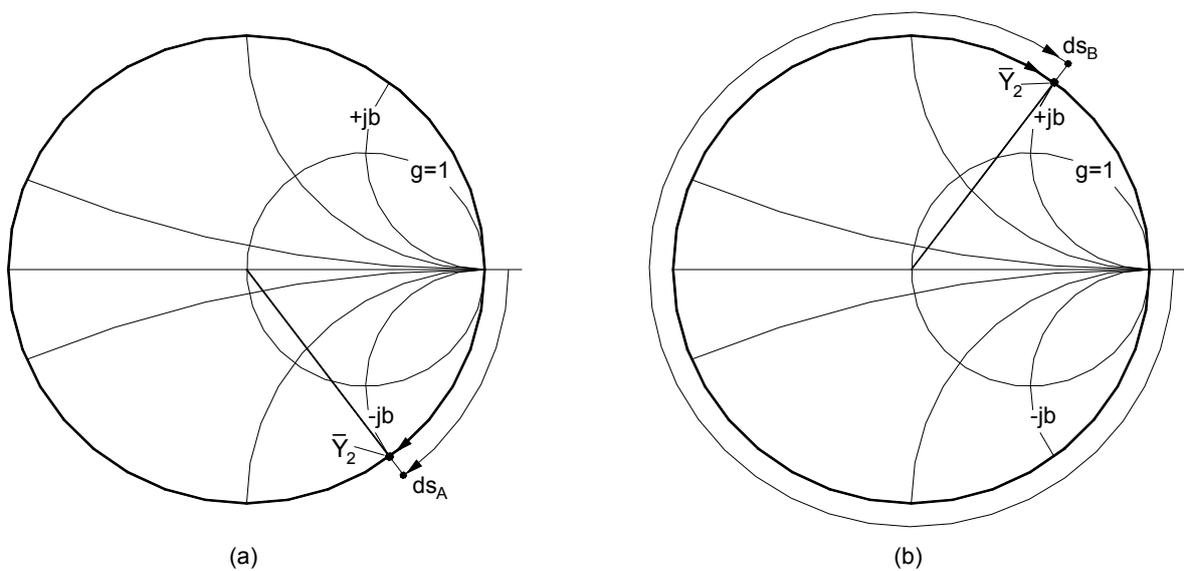


Figura IV.3.3.b Obtención de la longitud del stub: (a) para solución A, (b) para solución B

La longitud del stub, para ambas soluciones, se calcula también con la carta: Como se muestra en la figura IV.3.3b, partiendo del corto en admitancias (punto 1,0) nos movemos hacia el generador la longitud necesaria para que el stub presente la susceptancia deseada (ds_A para $-jb$ ó ds_B para $+jb$)

De nuevo esta longitud se obtiene de la escala graduada en partes de $\lambda/2$.

Se puede demostrar que cualquiera de las soluciones permite la adaptación en el lado de la carga comprobándose que $Y_L = Y_D = Y_I^*$ ó $Z_L = Z_D = Z_I^*$.

La red de adaptación vista permite adaptar cualquier admitancia (ó impedancia) si $Z_g = Z_o$ pues siempre se podrá trasladar dicha admitancia sobre la línea de transmisión hasta cortar la circunferencia de $g=1$. Se deja al alumno el caso en que $Z_g = 2Z_o$.

IV.3.3 Adaptación con dos stubs separados por una línea

Como se muestra en la figura IV.3.4.a el circuito básico consiste en una línea de transmisión conectada entre generador y carga, de longitud conocida (dl), a la que se conecta en paralelo un stub en corto (o en abierto) al comienzo de la línea y otro al final de la misma. Hay que determinar la longitud de ambos stubs (ds_1 y ds_2).

Esta combinación de líneas es la más utilizada en el laboratorio. Se realiza con un cable coaxial base al que se atornillan los dos stubs también coaxiales terminados en corto. La separación entre los stubs dl se puede modificar cambiando el lugar donde se enrosca uno de ellos.

Como antes, nuestro objetivo es adaptar $Z_L = 1/Y_L$ a $Z_g = Z_o = 1/Y_o$ que es la impedancia del generador, que consideraremos igual a la impedancia característica de la línea, que normalizada vale 1. Como los stubs están en paralelo trabajaremos con admitancias y con vistas a adaptar a $\bar{Y}_g = Y_g/Y_o = 1$. Al igual que en la red anterior, el primer stub (de la izquierda) deberá introducir una susceptancia ($\mp jb_1$) tal que compense la que presenta la admitancia del resto de la línea vista hacia la carga $\bar{Y}_1 = 1 \pm jb_1$ de forma que la admitancia total en ese punto sea 1, que es la deseada pues la del generador es 1. Por otro lado, el tramo de línea de longitud dl debe mover la admitancia $\bar{Y}_2 = g_L + jb_2$ (con $b_2 = b_L \pm jb'_2$) hasta conseguir la de valor $\bar{Y}_1 = 1 \pm jb_1$ moviéndonos en sentido horario sobre la circunferencia de $|\rho_{12}|$ constante (obsérvese que hay dos soluciones A y B). Pero, dado que dl es fijo y puede no valer, esto hay que conseguirlo buscando el valor de susceptancia adecuado que ha de introducir el segundo stub ($\pm jb'_2$). Éste se puede determinar por tanteo, dando un valor a jb'_2 y comprobando que la admitancia $\bar{Y}_{2A} = g_L + jb_2$ ó \bar{Y}_{2B} resultante cae sobre la circunferencia de $g=1$ al movernos sobre la línea la distancia dl , o bien, mediante una solución gráfica como se muestra en la figura IV.3.4.b(a). Consiste en girar sobre el centro de la carta la circunferencia de $g=1$ la distancia dl hacia la carga (a izquierdas). En esta situación los valores de $\pm jb'_2$ se obtienen de forma gráfica moviéndonos sobre la circunferencia de $g_L = cte$

hasta cortar a la de $g=1$ girada. Conocidos los valores de $\bar{Y}_2 = g_L + jb_2$ obtenemos los de $\pm jb'_2$. Tras ello trasladamos las admitancias $\bar{Y}_2 = g_L + jb_2$ la distancia dl hacia el generador donde se convertirán en $\bar{Y}_1 = 1 \pm jb_1$ (\bar{Y}_{1B} ó \bar{Y}_{1A}).

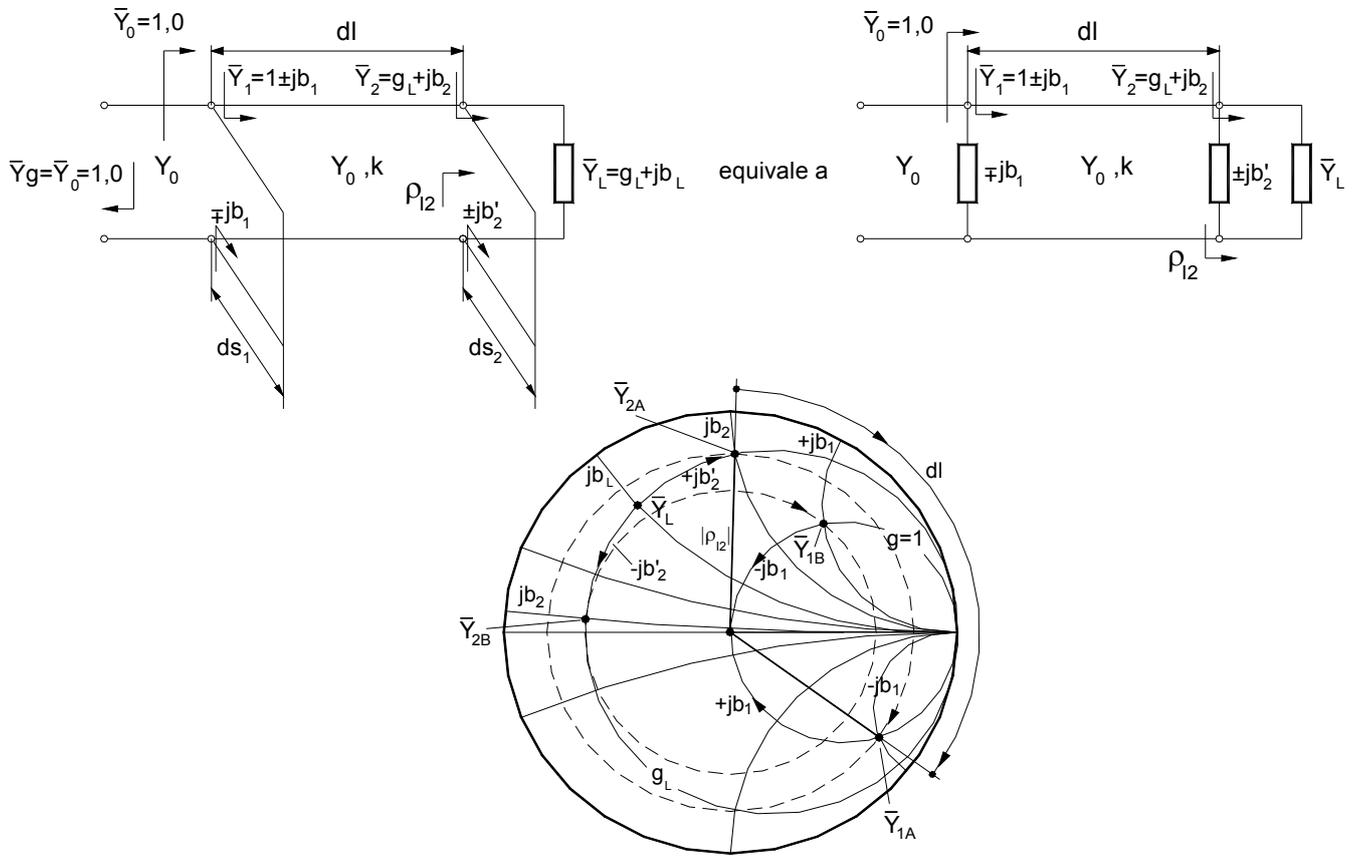


Figura IV.3.4.a Adaptación con línea entre dos stubs

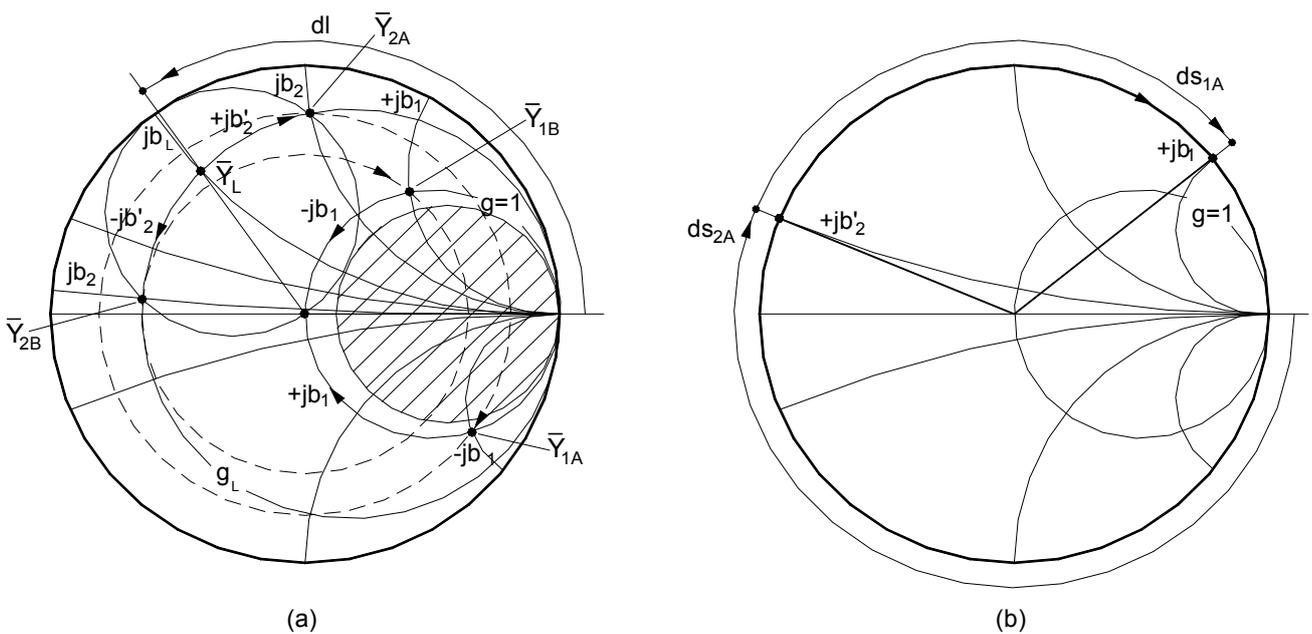


Figura IV.3.4.b (a) Cálculo gráfico de $\pm jb'_2$. (b) Longitud de los stubs para solución A

Los valores de $\pm jb_2'$ y $\mp jb_1$ que han de introducir los stubs se obtienen como ya se hizo en el circuito anterior. En la figura IV.3.4.b(b) se muestra la obtención de estos valores para la solución A.

Esta red de adaptación no adapta todas las admitancias de carga: como se observa en la figura IV.3.4.b(a) las que quedan dentro de la circunferencia de $g=cte.$ (rellena), que “tangentea” a la de $g=1$ girada, no pueden cortar a ésta circunferencia y, por tanto, no se pueden adaptar. Para conseguirlo hay que modificar la separación de los stubs (dl).

IV.3.4 Adaptación con el transformador en “ $\lambda/4$ ” modificado

Como ya se vio, el transformador en “ $\lambda/4$ ” (ver figura IV.3.5) permite adaptar impedancias reales (de generador y carga). Para ello la longitud de la línea debe ser $\lambda/4$ y la impedancia característica:

$$Z_o = \sqrt{R_g \cdot R_L} \tag{IV.3.4}$$

con lo que la impedancia vista al comienzo de la misma es $Z_v = R_g$

Esta adaptación podemos verla sobre la carta de Smith con los valores utilizados en la figura IV.3.5. Como se observa, la impedancia de carga de 200Ω se transforma mediante la línea en la impedancia Z_v de valor 50Ω (ó $0,5$ normalizado) que es igual a Z_g .

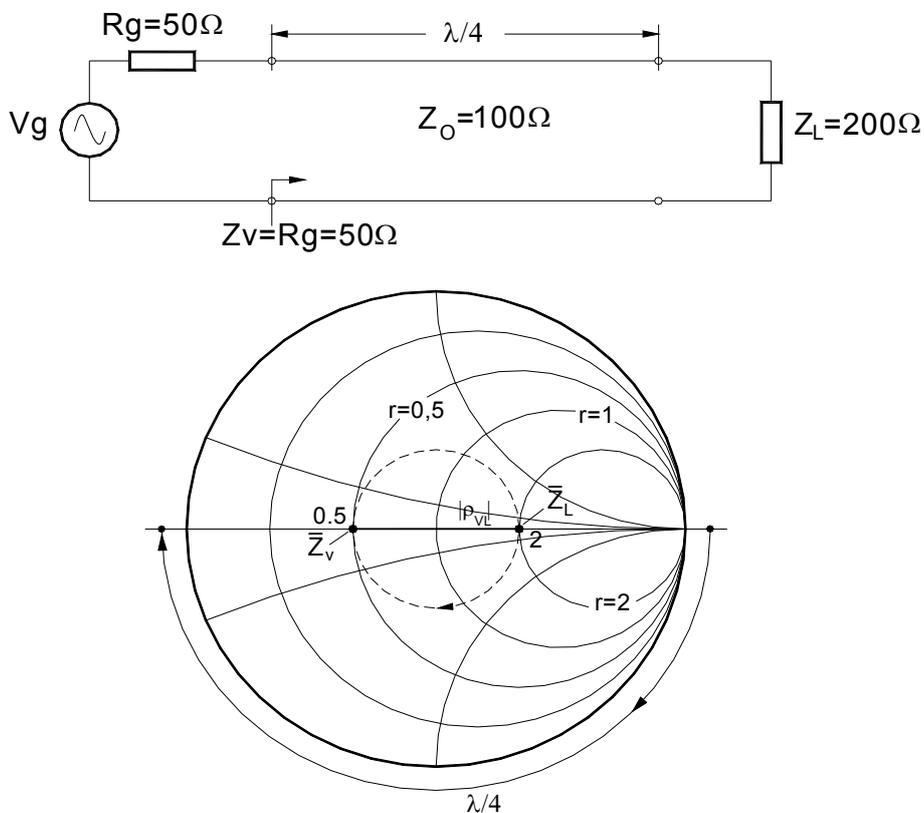


Figura IV.3.5 Adaptación con transformador en $\lambda/4$

No obstante la estructura de este circuito también permite adaptar impedancias de carga complejas a impedancias de generador reales. La idea se muestra en la figura IV.3.6. Como se ve la impedancia de carga de valor $\bar{Z}_{L50\Omega} = 0,6 + j1,1$ se convierte al valor de $\bar{Z}_{v2-50\Omega} = 4,0$ con una línea de longitud $d_1 = 0,106\lambda$ y $Z_0 = 50\Omega$. Dicha impedancia a su vez, $Z_{v2} = 200\Omega$, se adapta con la línea en “ $\lambda/4$ ” ya vista para obtener $\bar{Z}_{v1-100\Omega} = 0,5 = \bar{Z}_{g-100\Omega}$.

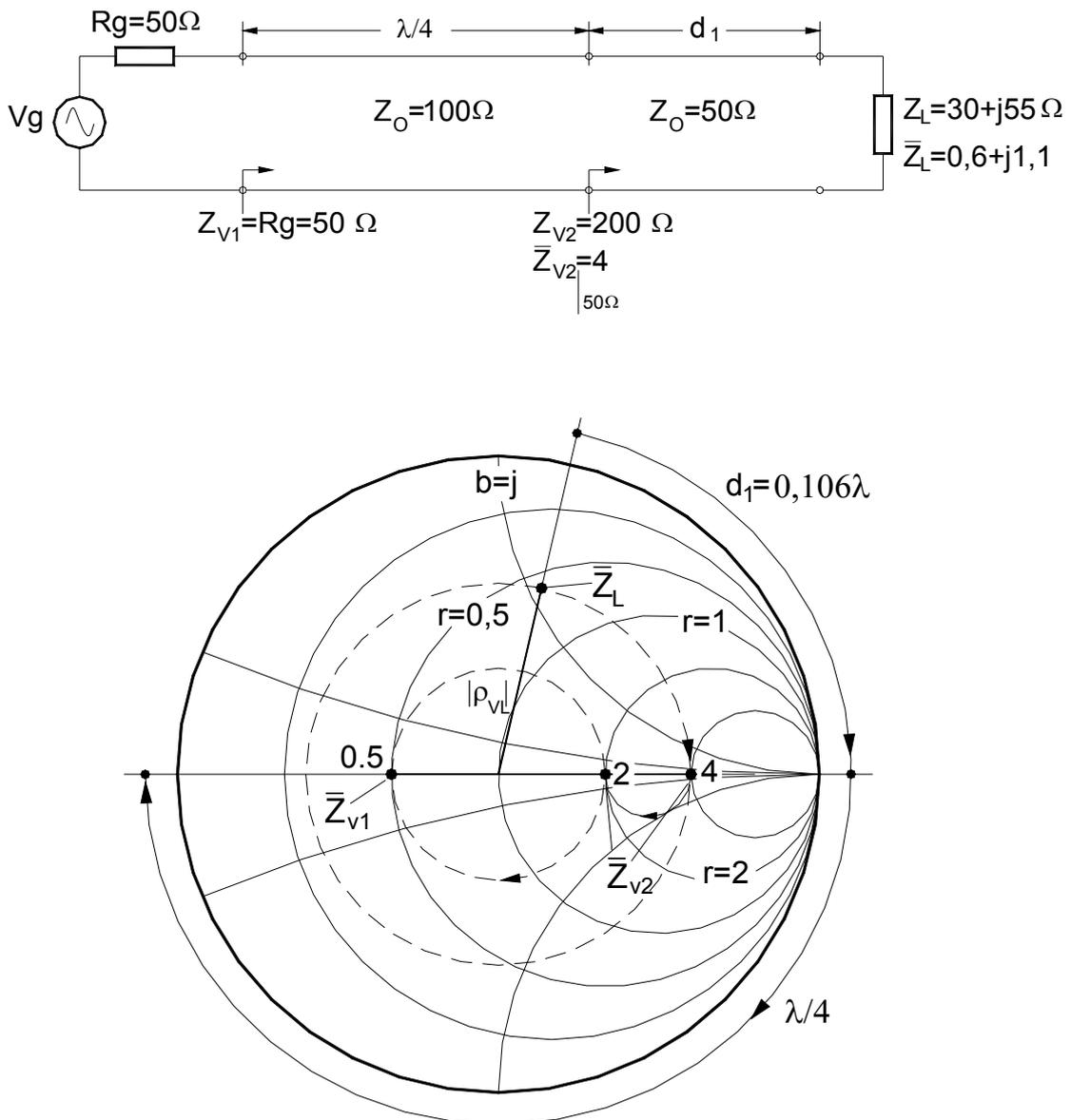


Figura IV.3.6 Adaptación con transformador en $\lambda/4$ de impedancia de carga compleja

Esta estructura se puede convertir en otra con una sola línea de transmisión pero de longitud distinta de $\lambda/4$ como la mostrada en la figura IV.3.7.

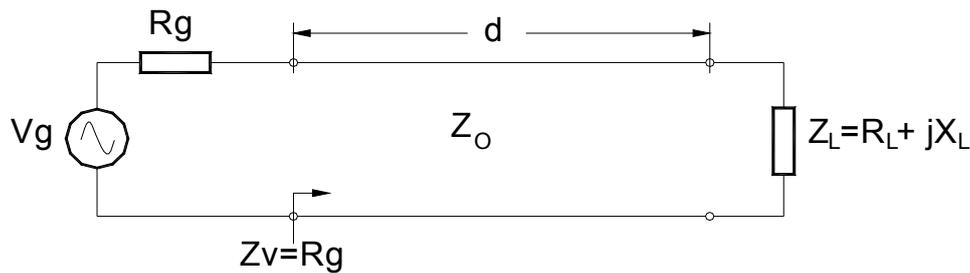


Figura IV.3.7 Adaptación de impedancias complejas con una sola línea

El valor de la impedancia característica y la longitud de la línea se obtienen calculando la impedancia vista al comienzo de la línea Z_v e igualándola a R_g . Es decir,

$$Z_v = Z_0 \frac{Z_L \cos kd + jZ_0 \sin kd}{Z_0 \cos kd + jZ_L \sin kd} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan kd}{Z_0 + jZ_L \tan kd} = R_g$$

igualando parte real e imaginaria se obtiene:

$$Z_0 = \sqrt{R_g R_L - \frac{R_g X_L^2}{R_g - R_L}} \quad \text{y} \quad \tan kd = \frac{Z_0 (R_g - R_L)}{R_g X_L} \quad [\text{IV.3.5}]$$

Como se observa para que Z_0 sea real debe cumplirse que $R_g R_L > \frac{R_g X_L^2}{R_g - R_L}$

IV.3.5 Adaptación con elementos concentrados

Las redes más utilizadas con elementos concentrados se muestran en la figura IV.3.8. Como se ve, se trata de estructuras con una reactancia serie y una susceptancia paralelo o al revés que se implementarán con bobinas o condensadores. Con estas redes de adaptación lo habitual es normalizar las impedancias respecto a la del generador. En la figura IV.3.8 también se indican las zonas de impedancias o admitancias que no se pueden adaptar con estas configuraciones.

IV.3.6 Adaptación combinando elementos concentrados y distribuidos

Las reactancias o susceptancias que se utilizan en las estructuras vistas se pueden realizar con stubs o con elementos concentrados (ver figura IV.3.2.d). En la práctica la combinación más habitual es la de línea con condensador a frecuencias de hasta unos 3GHz. Por encima se suelen utilizar sólo stubs. Estructuras con sólo elementos concentrados se utilizan hasta los 500MHz típicamente.

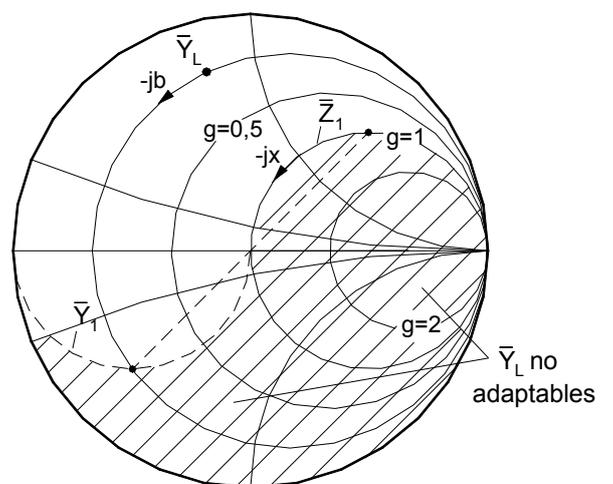
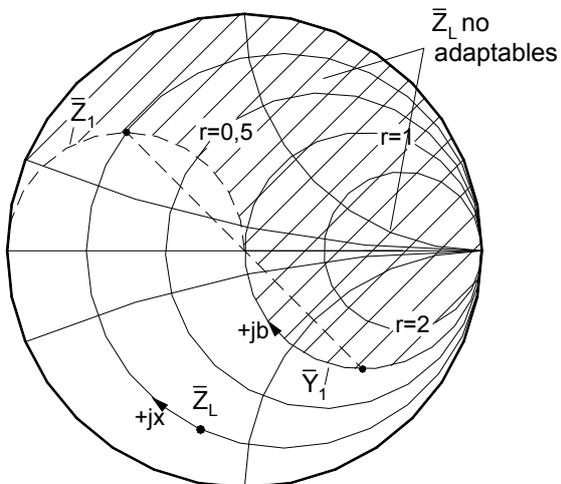
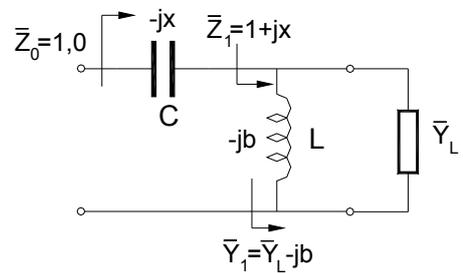
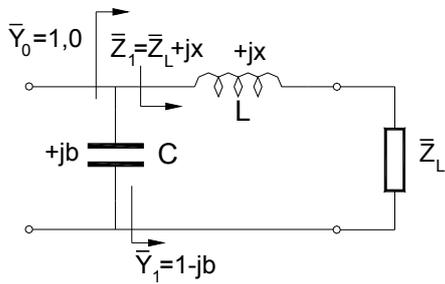
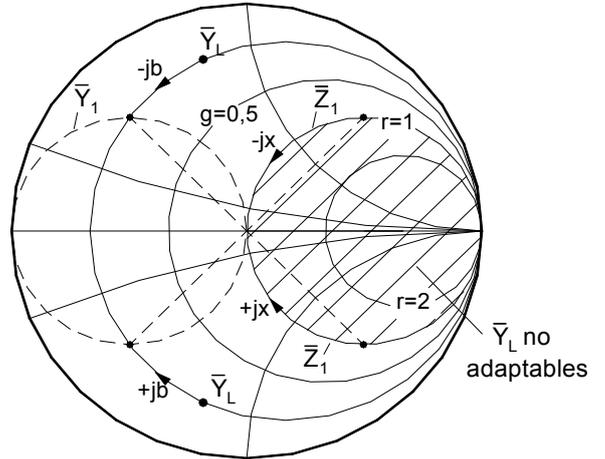
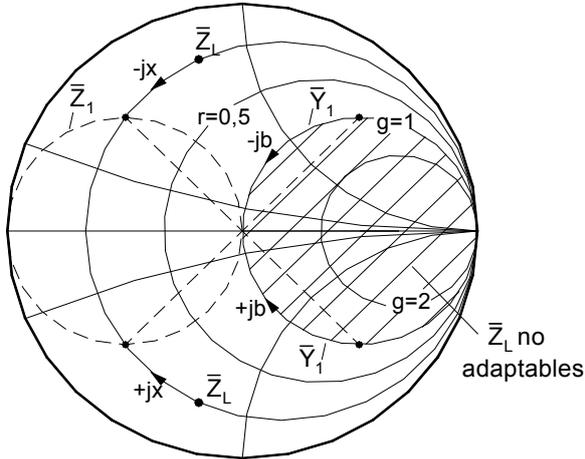
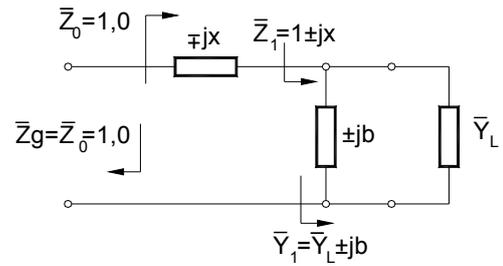
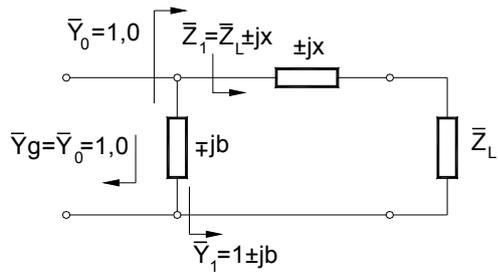


Figura IV.3.8 Adaptación con elementos concentrados

IV.3.7 Ancho de banda de adaptación con líneas

Hemos realizado las adaptaciones a una frecuencia (ó longitud de onda λ) fija; es decir, calculando las longitudes de las líneas a una sola frecuencia; en tal caso, ¿qué ocurre con una adaptación si varía la frecuencia?. Para verlo fijémonos en la red de adaptación línea-stub de la figura IV.3.9; Como se observa, a la frecuencia f_0 la línea de longitud dl , modifica la fase de ρ_L (de \bar{Y}_L) a la de ρ_{1A} (\bar{Y}_{1A}) según:

$$\varphi_o = \varphi_L - \varphi_{1A} = 2k_o dl = 2 \frac{2\pi}{c} f_o \cdot dl = 2 \frac{\omega_o}{c} \cdot dl$$

A otra frecuencia f se cumple que:

$$\varphi = 2kdl = 2 \frac{2\pi}{c} f \cdot dl \frac{f_o}{f_o} = \frac{f}{f_o} \varphi_o \quad [IV.3.6]$$

En consecuencia al aumentar la frecuencia la fase del coeficiente de reflexión aumenta con lo que al desplazarnos sobre la línea entre carga y stub sobrepasamos la circunferencia de $g=1$. Con el stub ocurre lo mismo haciendo que introduzca una susceptancia de menor magnitud y acortando su aportación. La admitancia final, como se muestra en la figura IV.3.9, es \bar{Y}_{01} . Si bajamos la frecuencia se produce el efecto contrario en las líneas y se obtiene la admitancia final \bar{Y}_{02} . En ambos casos no se adapta a $\bar{Y}_0 = 1/\bar{Z}_0 = 1,0$. Se suele definir entonces el margen de frecuencias en el cual el COE se mantiene inferior a un valor dado. Se obtiene dibujando una circunferencia centrada que pase por la admitancia que presente peor COE en dicho margen.

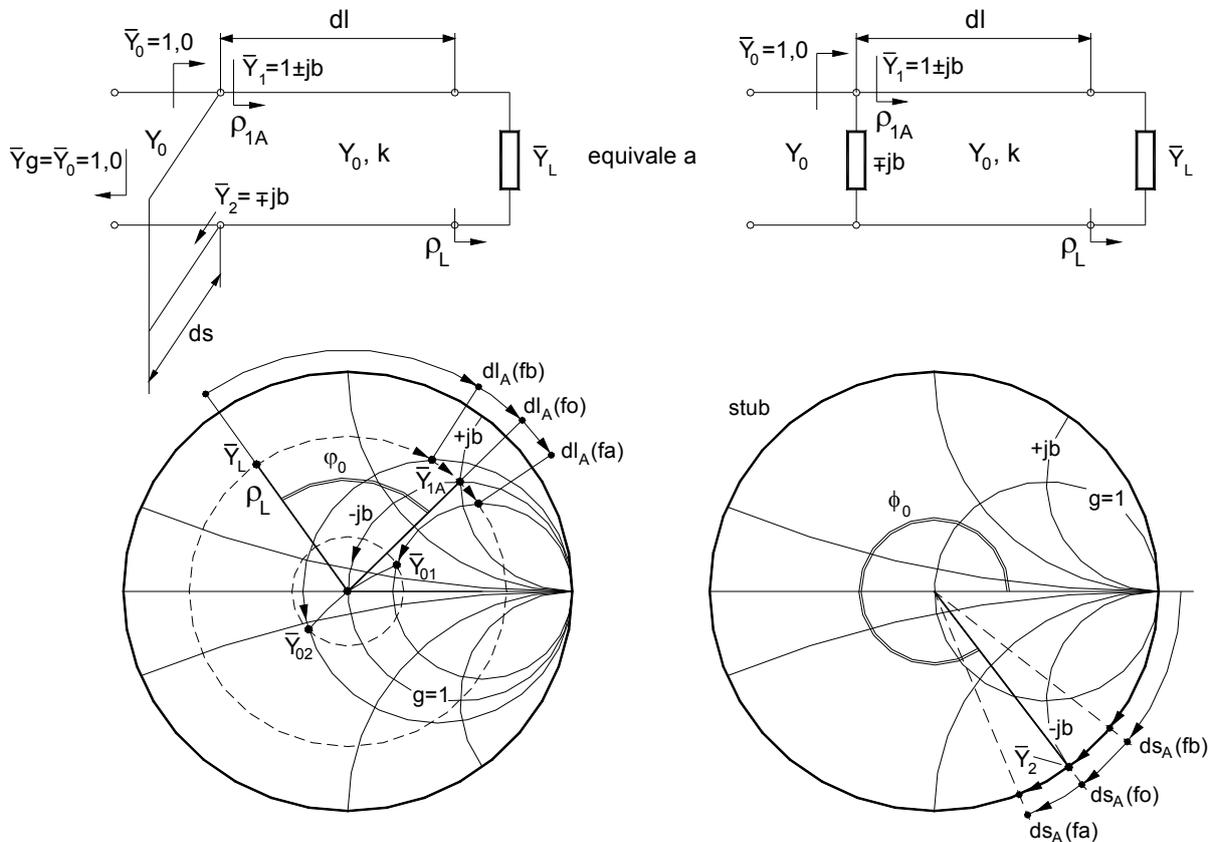


Figura IV.3.9 Ancho de banda de la adaptación con líneas (fa: frec. alta; fb: frec. baja)

IV.4 BIBLIOGRAFÍA

- Vicente Ortega Castro. "Introducción a la Teoría de Microondas. Líneas de Transmisión y Guías de Ondas". ETSIT-UPM. Madrid. Dpto. de Publicaciones 1979.
- Alejandro Delgado Gutiérrez y Carlos Blanco Escobar. "Problemas de Microondas". ETSIT-UPM. Madrid. Dpto. de Publicaciones 1978.
- Robert S. Elliott. "An Introduction to Guided Waves and Microwave Circuits". Prentice Hall.
- David Pozar. "Microwave Engineering". John Wiley & Sons, INC.