

Introducción a la biomecánica: nociones de cálculo vectorial. Mecánica

Ruiz Caubín, A. F.*; Ruiz Caballero, J. A.**; Ruiz Caballero, A. A.***; Brito Ojeda, E. M.^a**; Navarro García, R.****

*Ingeniero Superior Industrial ***Catedrático de Física

Departamentos de Educación Física y **Ciencias Médicas y Quirúrgicas.

Hospital Universitario Insular de Gran Canaria. Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

Nociones de cálculo vectorial

Magnitudes escalares y vectoriales

Se denomina *magnitud* a todo aquello que es susceptible de ser medido. Podemos distinguir dos tipos de magnitudes: las *magnitudes primarias*, que no se definen mediante una relación con otras magnitudes y las *magnitudes secundarias*, que se definen mediante una relación con otras magnitudes.

Todas las magnitudes que trataremos pertenecerán a dos grupos: *magnitudes escalares* y *magnitudes vectoriales*. Las magnitudes escalares son aquellas cuya medida queda completamente especificada por un número real y su unidad (masa, longitud, temperatura). Las magnitudes vectoriales son más complejas que las *escalares* y vienen representadas por lo que se conoce como un *vector* (desplazamiento, velocidad, fuerza).

Un vector \vec{a} (Fig. 1.1), se define como un segmento orientado que viene caracterizado por:

- Un *origen* (o punto de aplicación): *Punto A*.

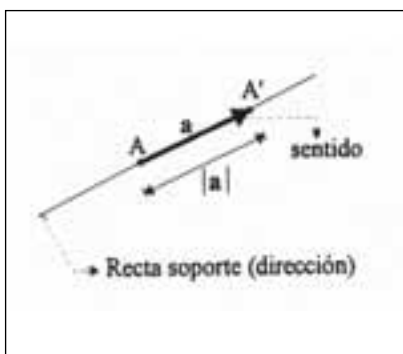


Figura 1.1

- Un *escalar* o *módulo*, a o $|\vec{a}|$, que viene dado por la longitud del segmento AA' . Este módulo es siempre positivo e independiente de la dirección del vector.
- Una *dirección*, dada por la recta r que contiene al segmento AA' (también llamada recta soporte).
- Un *sentido*, que se indica mediante una punta de flecha, y coincide con el del recorrido desde A (origen) hasta A' (extremo).

Los vectores pueden clasificarse en:

- Vectores *libres*, que vienen caracterizados por su módulo, dirección y sentido, quedando indeterminado su origen (campo gravitatorio uniforme en una determinada región del espacio).
- Vectores *deslizantes*, para los cuales es necesario especificar además la recta soporte (fuerza aplicada a un sólido rígido).
- Vectores *localizados*, ligados o fijos, que quedan caracterizados además por su punto de aplicación (velocidad y aceleración de una partícula).

Suma y diferencia de vectores

Las reglas que daremos a continuación sólo son válidas para vectores libres. Dos vectores libres \vec{a} y \vec{b} son *iguales* si tienen el mismo módulo, dirección y sentido (Fig. 2.1). Un vector con igual dirección y módulo que un vector \vec{a} pero con sentido opuesto recibe el nombre de *vector opuesto* y se denota por $-\vec{a}$ (Fig.2.2).

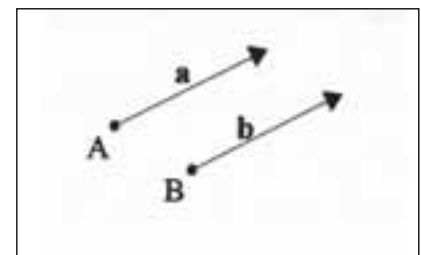


Figura 2.1

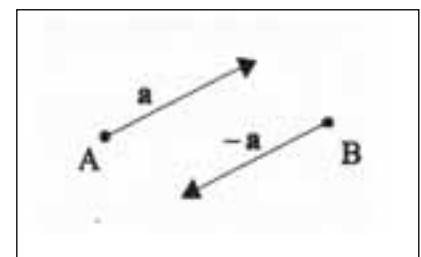


Figura 2.2

Dados tres vectores \vec{a} , \vec{b} , y \vec{c} la *suma* se define como el vector \vec{d} que se obtiene colocando el origen de \vec{c} en el extremo de \vec{b} y el origen de \vec{b} en el extremo de \vec{a} . Uniendo el origen de \vec{a} con el extremo de \vec{c} y asignando el sentido desde el origen de \vec{a} hacia el extremo \vec{c} de obtenemos el vector suma \vec{d} (Fig.2.3), *regla del polígono*).

Escribimos entonces:

$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

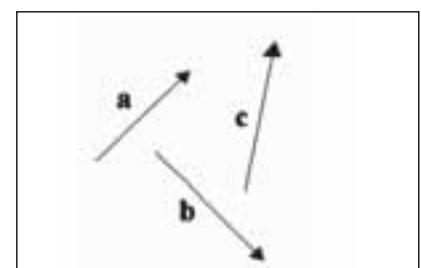


Figura 2.3

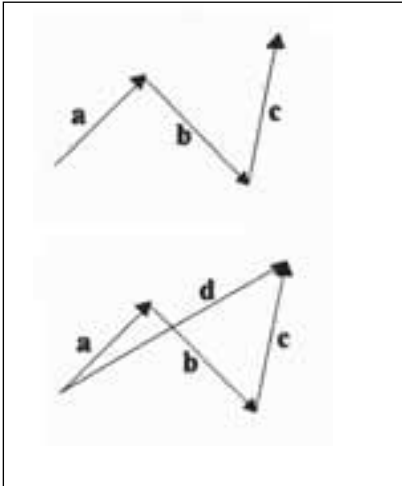


Figura 2.3

sumar vectores gráficamente es usar la *regla del paralelogramo*. Con ella se obtiene la suma de dos vectores \vec{a} y \vec{b} llevando el origen de \vec{b} a \vec{a} y completando el paralelogramo trazando los lados paralelos a ambos vectores. Uniendo el origen común con el vértice opuesto del paralelogramo se obtiene el vector suma \vec{c} (Fig.2.4).

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

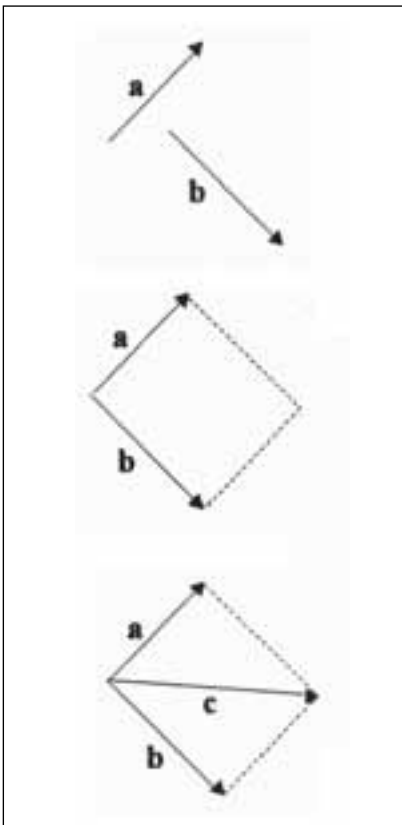


Figura 2.4

Dados dos vectores \vec{a} y \vec{b} , la *diferencia* se define como el vector que se obtiene de sumar \vec{a} con el opuesto de \vec{b} (Fig.2.5). Escribimos entonces:

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

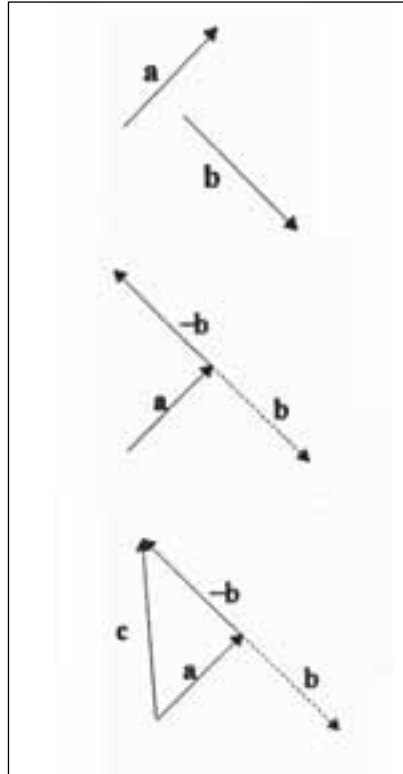


Figura 2.5

Producto de un vector por un escalar

El *producto de un vector \vec{a} por un escalar k* se define como un vector \vec{e} , que tiene un módulo k veces el de \vec{a} , dirección la de \vec{a} , y un sentido que depende del signo del escalar (Fig.2.6). Es decir:

$$\vec{e} = k \vec{a} = \vec{a} k$$

Triedro de referencia

Se llama *triedro de referencia* a tres ejes perpendiculares que se cortan en

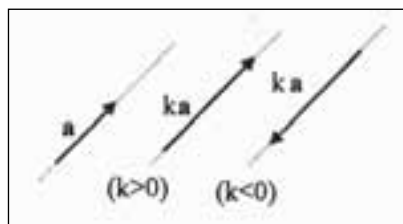


Figura 2.6

un punto denominado *origen del triedro de referencia*. Notaremos a los ejes por X, Y y Z y a los vectores unitarios asociados como \vec{u}_x , \vec{u}_y y \vec{u}_z respectivamente. Podemos distinguir dos tipos de triedros: *dextrógiro* (a derechas) y *levógiro* (a izquierdas). El triedro dextrógiro se puede conseguir con la mano derecha, haciendo coincidir el dedo índice con el eje X, el corazón o medio con el eje Y y el pulgar con el eje Z (Fig.3. 1).

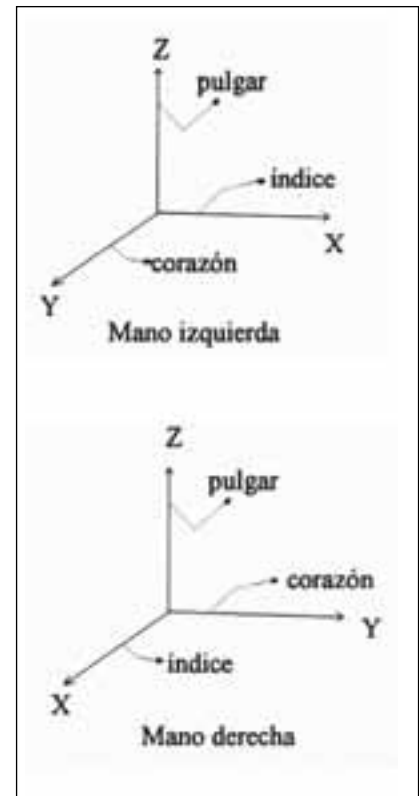


Figura 3.1

En adelante trabajaremos con triedros de referencia dextrógiros y notaremos a \vec{u}_x , \vec{u}_y y \vec{u}_z como \vec{i} , \vec{j} y \vec{k} respectivamente. Es lo que denominaremos *triedro cartesiano*. En él, la posición de un punto P del espacio puede especificarse de diferentes formas (Fig. 3.2). Dicho punto puede referirse respecto del triedro, mediante las variables (x, y, z), (r,φ,θ), ó (ρ,φ,z). El primer caso corresponde al *sistema de coordenadas cartesianas*, el segundo al *sistema de coordenadas esféricas* y el último al *sistema de coordenadas cilíndricas*.

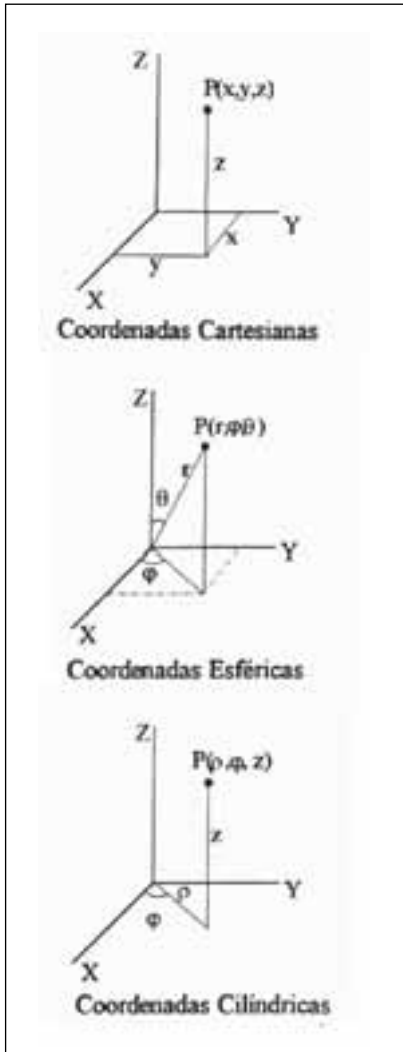


Figura 3.2

Componentes cartesianas de un vector

Sean un sistema de coordenadas cartesiano de referencia y un vector \vec{a} . Se ve gráficamente que podemos obtener \vec{a} como la suma de tres vectores dirigidos sobre los ejes X, Y y Z, que son respectivamente \vec{a}_x , \vec{a}_y y \vec{a}_z (Fig.4.1).

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z$$

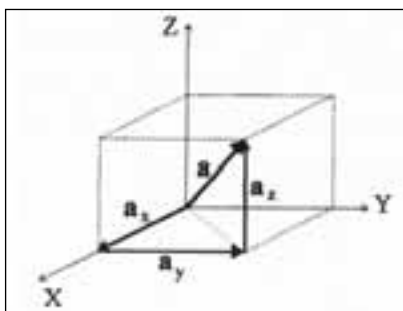


Figura 4.1

A las proyecciones sobre los ejes X, Y y Z (\vec{a}_x , \vec{a}_y , \vec{a}_z), se les denominan *componentes cartesianas de \vec{a}* .

La expresión analítica de \vec{a} en un sistema de coordenadas cartesianas es:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = a(\cos\alpha_x \vec{i} + \cos\alpha_y \vec{j} + \cos\alpha_z \vec{k})$$

siendo \vec{i} , \vec{j} y \vec{k} los vectores unitarios dirigidos según los ejes X, Y y Z del triedro, y tal que:

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$

Otra forma abreviada de expresar el vector en un sistema de coordenadas cartesianas es:

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = a(\cos\alpha_x, \cos\alpha_y, \cos\alpha_z)$$

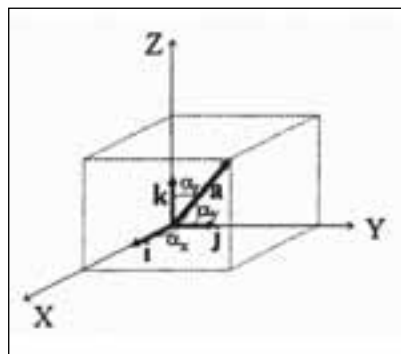


Figura 4.2

Producto escalar de dos vectores

Dados \vec{a} y \vec{b} , su producto escalar, $\vec{a} \cdot \vec{b}$, se define como:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\alpha$$

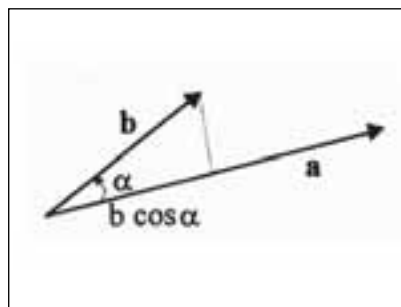


Figura 5.1

El *significado geométrico* del producto escalar es que dicho producto es igual al módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él (Fig.5.1).

Producto vectorial de dos vectores

Dados \vec{a} y \vec{b} , su *producto vectorial* se define como un vector \vec{c} , perpendicular al plano determinado por \vec{a} y \vec{b} , de módulo el producto de sus módulos por el seno del ángulo que forman y sentido dado por el avance de un tornillo de rosca derecha que se hace girar llevando \vec{a} sobre \vec{b} siguiendo el menor ángulo (Fig.6.1).

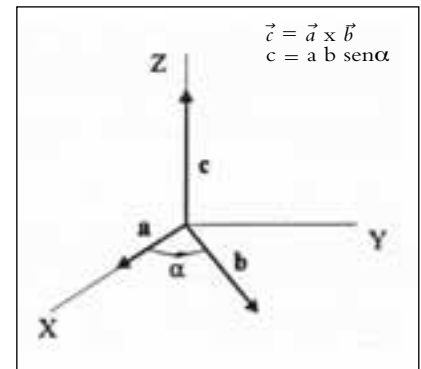


Figura 6.1

Momento de un vector con respecto a un punto

El *momento de un vector \vec{a}* (deslizante o ligado) *con respecto a un punto O* (Fig.7.1), \vec{M}_o , se define como:

$$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{a}$$

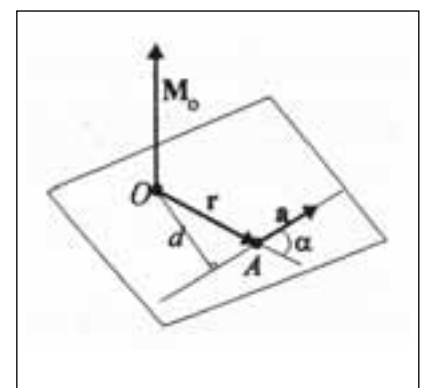


Figura 7.1

siendo un vector con origen en O y extremo en un punto A cualquiera de la recta soporte de \vec{a} . El módulo del momento de \vec{a} con respecto a O, M_o , se obtiene multiplicando el módulo de \vec{a} por la distancia más corta entre su recta soporte y el punto O, d (Fig.7.1).

$$M_o = a \cdot r \cdot \text{sen}\alpha = a \cdot d$$

Mecánica

Introducción

Los factores biológicos y los mecánicos tienen una influencia mutua. Esto se ve claramente en la misma construcción de los huesos, de las articulaciones y de los músculos. Dicha construcción se ajusta en gran medida a la función mecánica del cuerpo.

La Biomecánica (Bios = vida; Mechane = medio), estudia los movimientos del hombre y del animal desde el punto de vista de las leyes de la Mecánica. Por consiguiente el objeto de la investigación biomecánica es el movimiento mecánico, o sea, el cambio de lugar de una parte de la masa del hombre o del animal.

La experiencia nos enseña que los conocimientos básicos de la Mecánica suelen olvidarse y sin un conocimiento suficiente de la misma no puede comprenderse la Biomecánica.

El movimiento es, posiblemente, uno de los primeros fenómenos físicos que conocemos; así como las fuerzas quizá sean las primeras magnitudes con que experimentamos. La mecánica tiene el objetivo de establecer la relación entre el cambio de movimiento y las fuerzas, con el propósito de desarrollar los procedimientos fundamentales que permitan enfocar adecuadamente los sucesos cotidianos en los que están presentes movimientos y fuerzas.

Pero, ¿qué entendemos por movimiento?: El movimiento es un fenómeno relativo. Esto quiere decir que, tanto para expresar el

concepto de reposo como el de movimiento, previamente ha de determinarse un *sistema de referencia* que se considere *fijo* y referir a él la posición del móvil. Por tanto, si varía la posición respecto al sistema de referencia habrá movimiento y si no, el móvil estará en reposo.

Para seguir pautas metodológicas podemos estudiar por bloques la Mecánica. Estos bloques son: *La Cinemática, la Dinámica y la Estática*.

Cinemática: es la parte de la Mecánica que estudia los movimientos según sus características; pero despreocupándose de las causas que lo producen.

En general se supondrá que los cuerpos móviles son rígidos y, en consecuencia, serán considerados como puntos materiales.

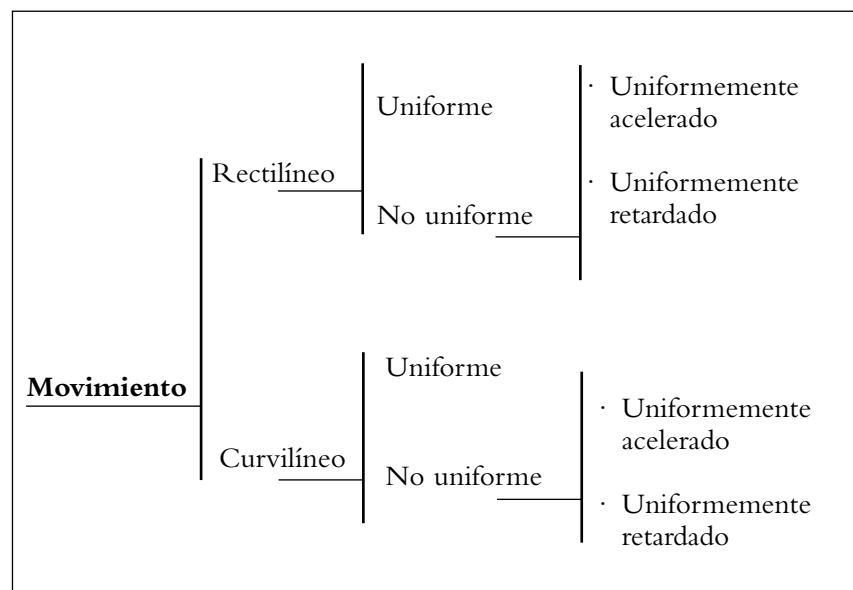
La Cinemática tiene por objetivo saber en cada instante dónde se encuentra el cuerpo que se mueve y cómo se mueve. Por tanto, debemos obtener una ecuación que relacione la posición del cuerpo con el tiempo, ecuación que se denomina "*ley del movimiento*". Al mismo tiempo nos interesará conocer el itinerario (trayectoria) seguido

por el móvil; su velocidad en cada instante; aceleración; etc.

Es necesario elegir un criterio para clasificar los movimientos. Según el tipo de trayectoria, los movimientos serán rectilíneos o curvilíneos; y según el vector aceleración serán uniformes o no uniformes (variados). De esta forma habrá *movimientos rectilíneos o curvilíneos uniformes o variados*. Podemos pues establecer el siguiente esquema de las clases de movimiento (esquema 1).

Dinámica: es otra parte de la Mecánica que se pregunta cuáles son las causas de los diferentes tipos de movimiento y sus leyes. Es decir, estudia las fuerzas como causas capaces de modificar el estado de reposo o de movimiento de un cuerpo o de producirle una deformación.

Estática: es la parte de la Mecánica que tiene por objeto determinar la resultante general y el momento resultante de todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, con objeto de establecer las condiciones de equilibrio del cuerpo.



Esquema 1

Leyes de la Mecánica clásica (Newton)

Hasta que Galileo y Newton no establecieron las leyes de la Mecánica, no fue posible un conocimiento coherente de los fenómenos físicos. La Mecánica es la base sobre la que se apoya el resto de la Física. Estas leyes son de alcance universal, se aplican tanto al movimiento de un satélite alrededor de la Tierra como al movimiento de un corredor por una pista. Todos los movimientos de un cuerpo material, incluidos los del hombre y del animal, sin excepción, obedecen a las leyes de la Mecánica, porque cada movimiento mecánico comprende un cambio de lugar de una parte de la masa, en el espacio y en el tiempo.

La Dinámica se fundamenta en tres principios que, aunque intuitivos

inicialmente por Galileo, fueron enunciados por Newton en el año 1687, en su célebre obra *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, probablemente el libro más famoso de la historia de la Física (la primera página se reproduce en la figura siguiente). Todos ellos han sido plenamente confirmados por la experiencia.

El enunciado original de dichos principios es el siguiente:

- a) *Lex II.* Corpus omne perseveraret in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.
- b) *Lex II.* Mutationem motus proportionalem esse vi motrice impressæ et fieri secundum lineam rectam, qua vis illa imprimatur.

- c) *Lex III.* Actione contrariam semper et æqualem esse reactionem sive corporum actiones in se mutuo semper esse æquales et in partes contrarias dirigi.

Traducidas al castellano:

- a) *Ley 1.* Todo cuerpo continúa en su estado de reposo o de movimiento uniforme en línea recta, a menos que sea forzado a cambiar ese estado por fuerzas que actúan sobre él.
- b) *Ley 2.* El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz que se le ha impreso, y sigue la dirección de la línea recta en que se le imprime la fuerza.
- c) *Ley 3.* A toda acción se opone siempre una reacción igual; o bien: las acciones recíprocas de dos cuerpos, uno sobre otro, son siempre iguales y dirigidas hacia las partes opuestas.

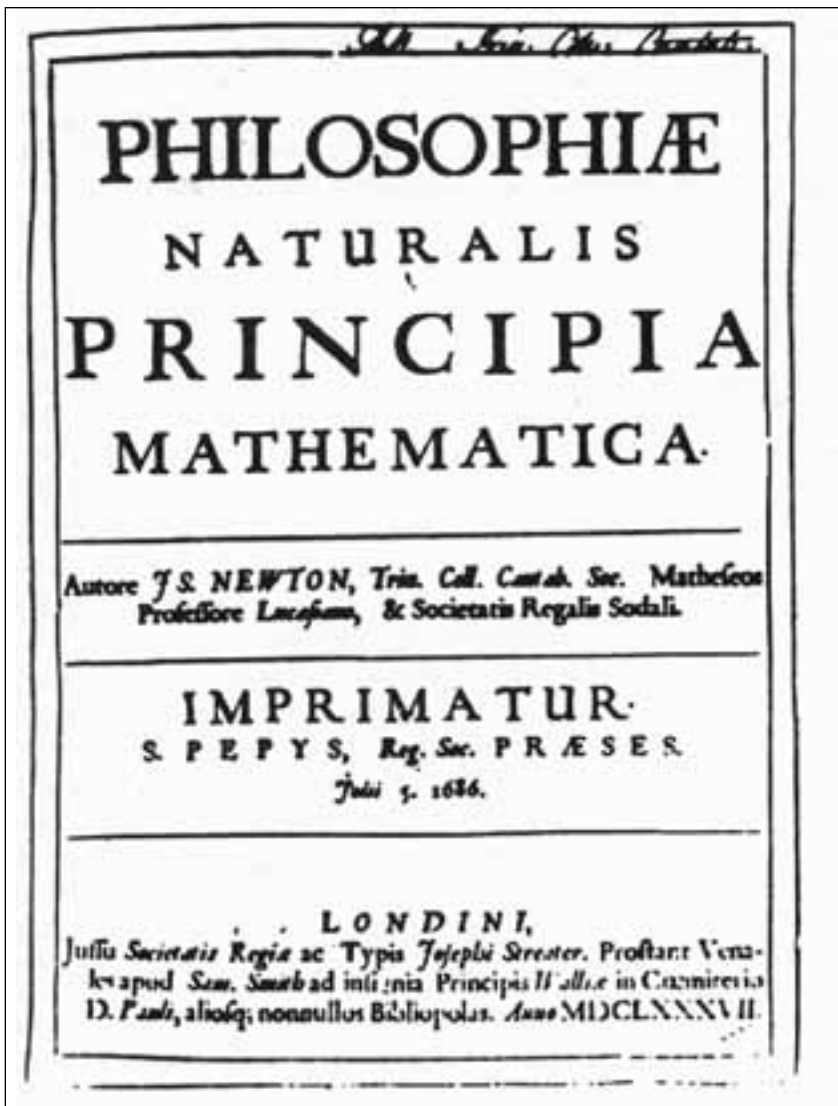
Vamos a analizar a continuación con algo de detalle cada uno de estos principios, expresándolos, además, en lenguaje moderno:

Primer principio

Llamado también “Primera Ley de la Mecánica” o “Principio de la Inercia”:

Si sobre un cuerpo no actúa fuerza alguna, o la resultante de las fuerzas sobre él es nula, y no forma un “par de fuerzas”, el cuerpo permanece indefinidamente en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme.

La primera parte de este principio es evidente, pero la segunda no se comprende con tanta facilidad puesto que todos hemos observado que cuando un cuerpo se mueve termina parándose, lo que parece estar en contradicción con el primer principio, pero si llegásemos a alcanzar un pulimento perfecto, la fuerza de rozamiento sería nula y el cuerpo no se detendría.



Segundo principio

También denominado “Principio Fundamental de la mecánica de Newton”:

Si sobre un cuerpo actúa una fuerza, o varias cuya resultante no sea nula, se le comunica una aceleración que es directamente proporcional al módulo de la fuerza aplicada e inversamente proporcional a una cualidad característica del cuerpo denominada “masa inerte”.

Matemáticamente: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

Unidades de fuerza:

En el Sistema Internacional es el Newton (N).

También se usa el kilogramo-fuerza (kgf) o kilogramo-peso (kgp) o kilopondio (kp): 1 kp = 9,8 N.

Concepto dinámico de fuerza

Surge de forma inmediata de la relación $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, pues nos permite afirmar que si un cuerpo se mueve animado de una aceleración \vec{a} , es porque sobre él actúa una fuerza \vec{F} en su misma dirección y sentido.

La misma ecuación nos indica que el Primer Principio no es más que un caso particular del Segundo, pues si $\vec{F} = 0 \rightarrow \vec{a} = 0$. Luego, o el cuerpo está en reposo o en movimiento rectilíneo y uniforme.

Concepto dinámico de masa

Como $m=F/a$, “Masa inerte de un cuerpo es la relación que existe entre el valor de la fuerza aplicada a dicho cuerpo y la aceleración que con ella adquiere”.

Físicamente, la masa inerte representa la oposición que todo cuerpo presenta al adquirir una aceleración cuando se le aplica una fuerza.

Peso de los cuerpos:

En las proximidades de la Tierra todos los cuerpos caen libremente

con una aceleración de valor $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, ya que están sometidos a la acción de una fuerza que es su propio peso, \vec{P}

De acuerdo con la Segunda Ley:

$$\vec{P} = m \cdot \vec{g}$$

siendo m la “masa gravitatoria” del cuerpo.

Experimentalmente se ha llegado a la conclusión que las masas gravitatoria e inerte de un cuerpo tienen el mismo valor.

Tercer principio

También denominado “Principio de Acción y Reacción”:

Si un cuerpo actúa sobre otro con una fuerza (Acción), éste reacciona contra el primero con una fuerza igual, de la misma dirección y de sentido contrario (Reacción):

$$\vec{F}_{acción} = \vec{F}_{reacción}$$

Esta Ley nos lleva a considerar que una fuerza aislada (Acción) no puede existir, ha de ir acompañada siempre de la Reacción. Así hemos de considerar, por ejemplo, que si la Tierra atrae a un cuerpo, el cuerpo atrae también a la Tierra; asimismo, si un imán atrae a un trozo de hierro, éste también atraerá al imán con la misma intensidad. El efecto se observa “sólo” en un sentido debido a la diferencia de las masas. En definitiva, hemos de considerar siempre las fuerzas por parejas.

Nociones de Mecánica relativista y de Mecánica cuántica

Albert Einstein (1879-1955) enunció el Principio de Relatividad como dos postulados:

- a) Todas las leyes de la naturaleza deben ser las mismas para observadores inerciales, es decir, que se mueven con velocidad constante unos respecto de otros.
- b) La velocidad de la luz es la misma, medida en cualquier sistema de referencia inercial.

Las modificaciones que la teoría de Einstein introduce en las leyes de la Física Clásica son numerosas, aunque insignificantes en la vida práctica. Sin embargo, existe un campo en Física, el de las partículas elementales, en el que es sencillo alcanzar velocidades próximas a las de la luz debido a su pequeña masa. Es aquí donde la Teoría de la Relatividad tiene un dominio de aplicación prácticamente general.

La masa de los cuerpos no es absolutamente constante, pues, de acuerdo con la Teoría de la Relatividad de Albert Einstein, varía con la velocidad según la expresión:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

donde:

- m_0 , representa la masa del móvil en reposo.
- v , representa la velocidad del móvil.
- c , representa la velocidad de la luz ($c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$)

La variación de la masa sólo es apreciable cuando el cuerpo se mueve a velocidad próxima a la de la luz, sin embargo en nuestro caso podemos considerar la masa como constante.

Einstein dedujo la expresión: $E = m \cdot c^2$, que nos da la energía total de la partícula (sin contar la energía potencial) siendo m la masa relativista y c la velocidad de la luz. Para alcanzar la velocidad de la luz sería necesario comunicar a la partícula una energía infinita. Luego una partícula con masa no podrá jamás alcanzar la velocidad de la luz.

Mecánica cuántica

Es una amplia teoría del movimiento de las partículas de tamaño atómico. Para partículas de tamaño ordinario, la Mecánica Cuántica es equivalente a la Mecánica Clásica de Newton.

A finales del siglo XIX, los físicos, satisfechos con sus descubrimientos, llegaron a pensar que el edificio de las Ciencias Físicas estaba prácticamente completo. Sin embargo, ciertas experiencias que estaban relacionadas fundamentalmente con el movimiento de las llamadas partículas elementales (electrones, etc) fueron decisivas para que ese aparente sólido edificio se derrumbase con gran estrépito. La Mecánica Newtoniana no fue capaz de explicar esas experiencias: los espectros continuos de emisión, la teoría de la Relatividad, el efecto fotoeléctrico, etc. Desde entonces las cosas no son tan fáciles pero son muchos más divertidas. Veamos algunas consecuencias de esas experiencias: Uno de los problemas más complejos abordados fue el consistente en la interpretación de la distribución de la radiación

emitida por un cuerpo. Se trataba de romper con las leyes y teorías de la Física Clásica. En 1910, *Plank* enunció la “*Ley de radiación de Plank*”, universalmente aceptada. Según esta Ley, la luz está cuantizada, siendo emitida o absorbida en “paquetes” que son múltiplos enteros del “cuanto” de energía. Unas nuevas experiencias: el “efecto fotoeléctrico”, realizada por *Hertz* y el “efecto Compton”, contribuyeron a establecer la concepción actual de la luz, a la que se atribuye un comportamiento dual como onda y como corpúsculo. Al profundizar en el estudio de estas dos experiencias llegamos a caracterizar la energía y el momento lineal de una nueva partícula, el *Fotón*, que no tiene masa y por tanto su energía cinética no se puede calcular con la expresión clásica. Lo mismo ocurre con las partículas elementa-

les: *protones*, *neutrones* y *electrones*, que cuando se mueven a velocidades próximas a las de la luz su comportamiento tampoco se ajusta a las ecuaciones clásicas de la Mecánica.

En resumen, la Mecánica de Newton (modernamente clásica) presenta dos límites en su campo de aplicabilidad. Es preciso que:

- La velocidad de las partículas sea pequeña en comparación con la velocidad de la luz. En caso contrario se utilizará la Mecánica Relativista.
- Las partículas no sean de tamaño atómico o subatómico. En caso contrario es preciso utilizar la Mecánica Cuántica.

Por lo tanto, la Mecánica Clásica se ocupa del estudio de fenómenos que tienen lugar a escalas no microscópicas y a velocidades muy alejadas de la de la luz.

BIBLIOGRAFÍA

1. Guía Didáctica de la Física de C.O.U. Ed. U.L.P.G.C.
2. Física General. J.A. Hidalgo. M. Fernández. Ed. Everest.
3. Guía para un curso de Física General. Ed. U.L.P.G.C.
4. Física para las Ciencias de la Vida. Alan H. Cromer.
5. Física de C.O.U. Ed. Anaya.