

Lógica y teoría de conjuntos mediante diagramas de Venn–Euler por sectores

Juan Félix Ávila Herrera^a and Enrique Vélchez Quesada^b

^aUniversidad Nacional de Costa Rica, Lagunilla, Heredia, Costa Rica

^bUniversidad Nacional de Costa Rica, Lagunilla, Heredia, Costa Rica

RESUMEN

La teoría sobre lógica es un tema fundamental que se enseña normalmente al inicio de cualquier carrera de computación o similar. En este trabajo se muestra cómo abordar simultáneamente la lógica usando su contraparte en teoría de conjuntos y aprovechar los diagramas por sectores de Venn–Euler para realizar muchos de los problemas usuales que se consideran en este proceso. Se muestra, además, un CDF (Computable Document Format) desarrollado en lenguaje Wolfram Mathematica que apoya tanto el aprendizaje de la teoría de conjuntos como de la lógica proposicional. La herramienta de software (el CDF) desarrollada por los autores, aunque no se ha implementado a la fecha con ningún grupo experimental, puede constituirse en un recurso práctico esencial para operacionalizar de una forma eficiente la propuesta didáctica compartida.

Keywords: Teoría de Lógica, Teoría de Conjuntos, Computable, Document Format, Mathematica, Diagramas de Venn-Euler, Sectores

1. INTRODUCCION

El estudio de la lógica y la teoría de conjuntos es fundamental para una adecuada preparación que se requiere en el contexto de muchas carreras pero especialmente la de computación. La lógica es fundamental para todo lo que conlleva programación y demostraciones formales en matemáticas. Como es bien sabido, la mayoría de los lenguajes de programación incluyen comandos con los que es posible implementar los distintos operadores lógicos. El estudiante debe estar formado adecuadamente con el objetivo de utilizar estos comandos y plantear las soluciones a sus problemas apropiadamente. Por otro lado, la teoría de conjuntos es fundamental en los cursos de bases de datos, es decir, en almacenamiento y recuperación de la información. Es por estas razones que estas dos temáticas deben abordarse con seriedad y adecuarse convenientemente para el perfil del estudiante que se está preparando.

Tanto la teoría de conjuntos como la teoría de lógica pueden abordarse de una manera abstracta y formal. Sin embargo, el docente, ante esta decisión, debe tener claro que no está formando profesionales en matemáticas y por lo tanto, debe encauzar o adecuar apropiadamente un curso de esta naturaleza. Ciertamente, el estudiante de computación debe tener una base sólida sobre estas temáticas pero a la vez el docente debe propiciar que ese tipo de alumnos aproveche o desarrolle sus habilidades en lo referente a seguimiento de algoritmos y análisis de escenarios basados en información visual. En este trabajo se presenta un enfoque que intenta brindar a los estudiantes de computación la posibilidad de asimilar tanto los conceptos de teoría de conjuntos como los de lógica de una manera más visual y algorítmica. Para lograr este cometido se echa mano de un recurso muchas veces desdeñado por los profesionales en matemáticas y que se emplea solo de manera introductoria en teoría de conjuntos, a saber, los diagramas de Venn–Euler. Estos diagramas, además de ser un recurso didáctico muy interesante pueden convertirse en una herramienta de cálculo poderosa que le facilita el trabajo a los estudiantes al enfrentarse a problemas de lógica y teoría de conjuntos. En el presente trabajo se muestra cómo utilizar una variante de los diagramas de Venn–Euler que llamaremos diagramas por sectores que corresponde a un concepto un poco más general que el que se estudia normalmente.

Información adicional de los autores: (Enviar correspondencia a Escuela de Informática, UNA)

Juan Félix Ávila Herrera: E-mail: delagarita@gmail.com, Telephone: 50624875081

Enrique Vélchez Quesada: E-mail: evq1529@gmail.com, Telephone: 50624875081

2. BREVE REPASO SOBRE LÓGICA Y TEORÍA DE CONJUNTOS

El tema de lógica está ampliamente documentado (ver por ejemplo¹⁻⁴) y en esta sección simplemente repasamos los conceptos más importantes. En la siguiente tabla se concentran las definiciones de los operadores lógicos usuales, a saber $\neg$ (negación), $\wedge$ (y), $\vee$ (o), $\vee$ (o exclusivo), $\rightarrow$ (implicación) y $\leftrightarrow$ (equivalencia).

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	F	V	V	F	V	V
V	F	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V	F
F	F	V	F	F	F	V	V

Se suelen usar las letras p, q, r, s, t para indicar proposiciones (i.e. expresiones que se pueden tipificar como verdaderas o falsas) y las letras V y F son abreviaciones de las palabras verdadero y falso, respectivamente. Sin embargo, en esta propuesta, con el propósito de simplificar los cálculos a veces se usan las letras A, B, C, D, E para indicar proposiciones o conjuntos. Del contexto estudiado el usuario será capaz de establecer la diferencia.

Si P es una expresión booleana, se dice que P es una tautología/contradicción/contingencia si su valor-verdad (considerando todos los casos de las variables booleanas que componen P) es siempre V/F /(mixto), respectivamente. Si $P \rightarrow Q$ es tautología, escribimos $P \Rightarrow Q$. De igual forma si $P \leftrightarrow Q$ es tautología, escribimos $P \Leftrightarrow Q$ o bien $P \equiv Q$. Esto permite establecer identidades booleanas. Algunas de las más famosas son 1. $P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$, 2. $P \rightarrow Q \equiv \neg Q \rightarrow \neg P$, 3. $\neg \neg P \equiv P$, 4. $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$, 5. $P \vee Q \equiv Q \vee P$, 6. $P \vee (Q \vee R) \equiv P \vee (Q \vee R)$, 7. $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$, 8. $P \wedge P \equiv P$, $P \vee P \equiv P$ 9. $P \vee F \equiv P$, $P \wedge V \equiv P$ 10. $P \vee \neg P \equiv V$, $P \wedge \neg P \equiv F$ 11. $P \wedge F \equiv F$, $P \vee V \equiv V$ 12. $P \vee (P \wedge Q) \equiv P$, $P \wedge (P \vee Q) \equiv P$.

La teoría de conjuntos es también un tema sobre el cual se puede encontrar muchísimas fuentes (ver por ejemplo¹⁻⁵). Nos limitaremos aquí a recordar los aspectos más importantes y damos por conocido el uso de los símbolos $\in$ (pertenencia), $\subseteq$ (subconjunto) e igualdad de conjuntos ($=$). En la siguiente tabla (que adrede es similar a la anterior) se concentran las definiciones de los operadores conjuntistas usuales, a saber:

A	B	$\bar{A}$	$A \cap B$	$A \cup B$	$A \Delta B$	$A \subseteq B$	$A = B$
$x \in A$	$x \in B$	$x \notin A$	$x \in A \wedge x \in B$	$x \in A \vee x \in B$	$x \in A \vee x \in B$	$x \in A \rightarrow x \in B$	$x \in A \equiv x \in B$

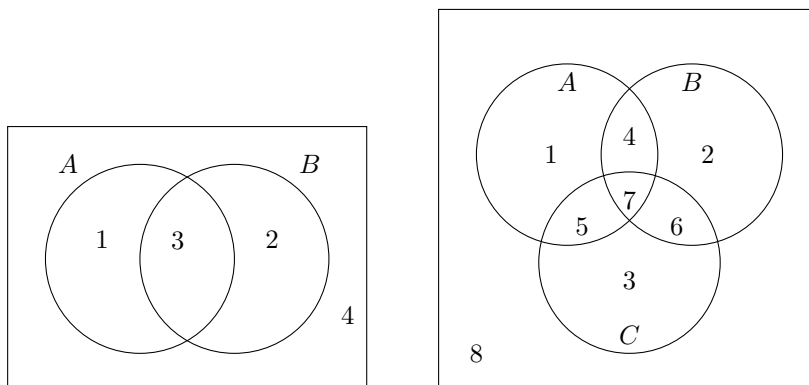
También, se define la diferencia $A - B$ como $A \cap \bar{B}$. Generalmente se denota con U el conjunto universo del cual todos los conjuntos que se están operando, son subconjuntos.

Al contemplar las tablas para lógica y para teoría de conjuntos, respectivamente, se observa que a veces puede resultar conveniente transformar un problema dado en teoría de conjuntos a su contraparte en lógica, hallar entonces una solución y luego convertir la respuesta de vuelta a teoría de conjuntos. Por supuesto que la estrategia inversa también se puede aplicar, esto es, empezando con un problema en lógica transformarlo a su contraparte conjuntista y eventualmente transformar la solución obtenida en términos lógicos. Para cada problema se puede valorar la posibilidad de irse al “mundo dual” correspondiente, si nos resulta más sencillo hallar la solución ahí. Generalmente aquellos problemas conjuntistas que involucran productos cartesianos, o bien, el conjunto potencia o de partes, resulta más adecuado resolverlos directamente en teoría de conjuntos.

En el presente trabajo, desde una perspectiva didáctica es esencial establecer la correspondencia entre expresiones conjuntistas y lógicas, tal y como se explica a continuación. Reemplazamos cualquier conjunto A con la proposición $\mathcal{A} : x \in A$. De esta forma, si tenemos dos conjuntos A y B , corresponderían en su dual lógico, a las proposiciones $\mathcal{A} : x \in A$ y $\mathcal{B} : x \in B$. La unión $A \cup B$ se representaría así $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, la intersección $A \cap B$ correspondería a $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$, el complemento $\bar{A}$ se simbolizaría como $\neg \mathcal{A}$, la diferencia $A - B$ correspondería a $\mathcal{A} \wedge \neg \mathcal{B}$, la diferencia simétrica $A \Delta B$ se representaría como $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ (el o exclusivo), el conjunto $\emptyset$ se asociaría con F (Falso) y el universo U con V (Verdadero).

3. DIAGRAMAS DE VENN-EULER POR SECTORES

Los diagramas de Venn-Euler son un recurso comúnmente utilizado para dar una versión visual de los conjuntos. Generalmente se utilizan de manera didáctica pero no como herramienta de cálculo tal y como lo proponen los autores de la presenta propuesta. En esta sección, mostramos cómo podemos utilizar esta herramienta de una manera más provechosa agregando el concepto de sector. Se explica esta idea para el caso de problemas con dos o tres conjuntos. En los dibujos que se muestran a continuación, se han numerado los distintos sectores conexos. Se puede demostrar por inducción que si n es el número de conjuntos, la cantidad de sectores resultantes para este tipo de diagrama es $n^2 - n + 2$.



La idea de sector se refiere a que el número asignado representa a todos aquellos elementos que están en el sector. Las operaciones entre conjuntos se pueden efectuar usando una lógica por sectores, veamos primero el caso de dos conjuntos. El valor 1 representa a todos aquellos elementos que pertenecen a $A - B$, el valor 2 representa a $B - A$, el valor 3 representa a $A \cap B$ y finalmente el valor 4 representa a $\overline{A \cup B}$. De esta manera, si en un problema de conjuntos se nos dice que $A \cap B = \phi$, entonces al usar los sectores para resolverlo, simplemente se eliminaría el 3 de cualquiera de los cálculos realizados. Se debe notar que el universo correspondería a $U = \{1, 2, 3, 4\}$. Veamos ahora el caso de tres conjuntos. Si se nos dice, por ejemplo, que C no tiene intersección con A y B , se eliminarían de una operación de conjuntos por sectores, los números 5, 6 y 7 de cualquiera de los cálculos efectuados. Lo interesante de este enfoque innovador planteado por los autores es que no es necesario hacer muchos diagramas de Venn-Euler para abarcar todos los casos posibles (incluyendo restricciones adicionales). Es importante enfatizar que al dar la respuesta de una operación en la que se emplean diagramas de Venn-Euler por sectores, se debe tratar de usar la menor cantidad de conjuntos posibles.

4. SIMPLIFICANDO EXPRESIONES LÓGICAS MEDIANTE DIAGRAMAS

Ya se ha señalado anteriormente que en muchos casos puede resultar conveniente alternar entre un enfoque conjuntista y uno lógico. En esta sección sacaremos provecho de la conversión de un problema lógico en uno conjuntista en el que podemos aplicar diagramas de Venn-Euler por sectores. Lo explicamos con un ejemplo. Suponga que se quiere simplificar la expresión lógica $([A \vee \neg(\neg B \vee \neg C)] \vee (\neg B \wedge C)) \wedge \neg(A \wedge C)$. El equivalente conjuntista* de este problema lógico es $([A \cup \overline{B \cap C}] \cup (\overline{B} \cap C)) \cap \overline{A \cap C}$. Si se desea encontrar el resultado de la operación entre conjuntos, se utiliza entonces el diagrama de Venn-Euler por sectores para tres conjuntos y se realiza el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned} ([A \cup \overline{B \cap C}] \cup (\overline{B} \cap C)) \cap \overline{A \cap C} &= ([\{1, 4, 5, 7\} \cup \overline{\{2, 4, 6, 7\} \cup \{3, 5, 6, 7\}}] \cup (\{2, 4, 6, 7\} \cap \{3, 5, 6, 7\})) \cap \\ &\quad \overline{\{1, 4, 5, 7\} \cap \{3, 5, 6, 7\}} = \{1, 3, 4, 6\}. \end{aligned}$$

Se puede concluir que el resultado es justamente $A \Delta C$. Si se usa el operador $\vee$, la respuesta al problema propuesto es $([A \vee \neg(\neg B \vee \neg C)] \vee (\neg B \wedge C)) \wedge \neg(A \wedge C) \equiv A \vee C$.

*Abusando de la notación se ha utilizado el mismo símbolo para denotar conjunto y proposición indistintamente.

Un aspecto fundamental e interesante de esta propuesta, se sustenta en observar que se puede llegar a la respuesta de un problema sin necesidad de memorizar las identidades lógicas, que ocasionalmente son olvidadas con facilidad por la población estudiantil. En este enfoque es necesario simplemente conocer los operadores conjuntistas.

5. SIMPLIFICANDO EXPRESIONES CONJUNTISTAS MEDIANTE DIAGRAMAS

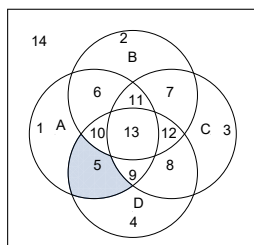
Tal y como se mencionó antes, los diagramas de Venn–Euler por sectores pueden utilizarse cuando hayan suposiciones adicionales. Supóngase que se sabe que $C \subseteq A$ y se desea mostrar que, bajo este supuesto, se cumple $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$. Hagamos el cálculo de $(A \cap B) \cup C$ sin usar todavía el supuesto indicado. Se obtiene así, $(A \cap B) \cup C = \{4, 7, 5, 6, 3\}$. Por otro lado, $A \cap (B \cup C) = \{4, 5, 7\}$. Claramente en general, se tiene que $(A \cap B) \cup C \neq A \cap (B \cup C)$. Sin embargo, el supuesto de que $C \subseteq A$, obliga a eliminar los sectores 3 y 6. Por lo tanto, bajo el supuesto indicado, se obtendría que $(A \cap B) \cup C = \{4, 7, 5\}$, cumpliéndose la identidad en cuestión.

6. VERIFICANDO LA CORRECTITUD DE UN RAZONAMIENTO USANDO DIAGRAMAS

Supóngase que $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ son proposiciones. Una proposición Q es una inferencia lógica de estas proposiciones, si se cumple $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \dots \wedge P_n \Rightarrow Q$. Además, se dice que el razonamiento (o argumento) es válido. A las proposiciones $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ se les denomina premisas. Típicamente las premisas son de dos tipos: (a) reglas o condicionales como por ejemplo $A \rightarrow B$ y (b) factuales, como por ejemplo $\neg A \wedge B$. De hecho es bien conocido que toda regla se puede convertir en factual mediante la identidad $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$. Utilizando esta identidad y el diagrama para sectores de dos conjuntos visto antes, se tiene que los sectores correspondientes a $A \rightarrow B$ son $\{2, 3, 4\}$. Es interesante observar que la conocida regla Modus Ponens consiste simplemente en añadir el sector 1 para lograr el universo U que corresponde a V , es decir, una verdad absoluta.

Agregar premisas en un razonamiento es equivalente a seleccionar algunos sectores del conjunto universo. Una vez que se hace la conjunción de todas las premisas, el resultado es un sector específico. Esto quiere decir que si S es tal sector, la proposición $x \in S$ será verdadera bajo ese conjunto de premisas. Se tiene entonces como consecuencia que si $S \subseteq T$, siendo T el conjunto correspondiente a alguna proposición, se puede asegurar que dicha proposición es verdadera. De igual forma si se sabe que $S \cap T = \emptyset$, entonces se puede asegurar que la variable booleana asociada es falsa, bajo las premisas asumidas.

Veamos un ejemplo. Suponga que se desea verificar D a partir de las premisas $C \rightarrow B$, A , $\neg(A \wedge B)$ y $C \vee D$. En este caso se debe usar un diagrama de Venn–Euler por sectores para cuatro conjuntos, como el que se muestra a continuación:



La expresión $(\neg C \vee B) \wedge (A) \wedge \neg(A \wedge B) \wedge (C \vee D)$ corresponde a la conjunción de las premisas en donde se ha convertido la premisa regla en factual. La expresión $(\neg C \cup \vee B) \cap (A) \cap \neg(A \wedge B) \cap (C \cup D)$ sería la correspondiente expresión conjuntista. El conjunto resultante es $\{5\}$, asociado con el sector que se ha coloreado en el diagrama anterior. Notamos que el sector 5 está enteramente contenido en el conjunto D , por lo tanto, la proposición D es verdadera. Esto concluye la verificación del razonamiento. Naturalmente, analizando el diagrama por sectores anterior es fácil inferir otros razonamientos válidos. Se observa que el sector 5 está contenido en el

^{**} De nuevo, abusando de la notación, se ha utilizado el mismo símbolo para denotar conjunto y proposición.

conjunto A , esto quiere decir que A es verdadera, pero esto ya se sabía, pues era una premisa. Se nota además, que el sector 5 y B tienen intersección vacía, por lo tanto, B es falso o lo que es lo mismo $\neg B$ es verdadero. Usando el mismo razonamiento $\neg C$ es verdadero.

7. CDF PARA REALIZAR OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS USANDO DIAGRAMAS DE VENN-EULER POR SECTORES

En el año 2008 la empresa *Adobe Systems* revolucionó la publicación de documentos digitales con un formato estándar llamado *PDF* (*portable document format* por sus siglas en inglés). Si bien es cierto el impacto positivo de este tipo de archivos ha sido incuestionable, permitiendo compartir todo tipo de información para su lectura, en la actualidad el funcionamiento de los *PDFs* resulta insuficiente al encontrarnos en una sociedad donde normalmente los usuarios adoptan la necesidad de convertirse en prosumidores (consultar⁶).

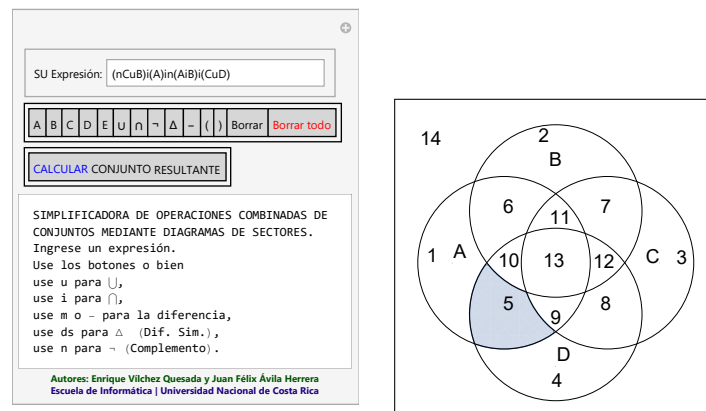
La empresa *Wolfram Research* notando estos cambios y la necesidad de requerimientos empresariales más flexibles para la toma de decisiones, desarrolló un tipo de archivo propietario denominado *CDF* (acrónimo de: *Computable Document Format*) el cual establece un formato de documento capaz de ejecutarse de manera gratuita, en muchos casos, a través de distintos sistemas operativos. Los *CDFs* pueden ser desplegados para su uso, mediante la instalación de un plug in gratuito multiplataforma (para los sistemas operativos *Windows*, *MAC* y *Linux*) disponible en la dirección URL: <http://www.wolfram.com/cdf> (consultar⁷). La arquitectura tecnológica de un documento con un formato computable se sustenta en el poder computacional provisto por el lenguaje *Wolfram*. Con muy pocas excepciones, prácticamente todo lo que es posible desarrollar en un cuaderno convencional de *Mathematica*, será un recurso fácil de exportar como un *CDF*.

Los *CDFs* pueden convertirse en herramientas muy útiles en diversas áreas dentro de la educación matemática. Una prueba de ello, reside en la reciente aparición de distintos libros de texto que parten del supuesto de considerar la visualización matemática como un recurso didáctico que favorece la comprensión conceptual y una mejor profundización algorítmica (consultar⁸⁻¹¹). Los autores del presente trabajo han diseñado distintos objetos *CDFs* para la enseñanza y el aprendizaje de los tópicos de lógica proposicional y teoría de conjuntos, estos pueden ser revisados por el lector en: <https://www.escinf.una.ac.cr/CDF/>.

Una de estas aplicaciones *CDFs*, se creó con el propósito de ayudar al estudiante a incursionar en diagramas de Venn-Euler por sectores, propuesta didáctica ya explicada en las secciones anteriores. Este *CDF* circunscribe su utilidad en la simplificación de expresiones conjuntistas, expresiones lógicas y verificación de la correctitud de razonamientos lógicos. Se trata de una App que corre sobre cualquier navegador Web, i.e. se puede usar sobre *Windows*, *OS*, *Linux*, *Android*, entre otros.

Esta aplicación es de uso libre y los datos de entrada pueden darse mediante botones, o bien, utilizando las letras “u” para $\cup$, “i” para $\cap$, “m” para $-$, “ds” para Δ (diferencia simétrica) y la “n” para $\neg$. Se trató de usar una interfaz que fuera fácilmente accesible desde cualquier plataforma, especialmente desde un dispositivo inteligente, como por ejemplo, teléfonos o tabletas.

En la siguiente figura se muestra la interfaz de la aplicación que el lector puede encontrar en <https://www.wolframcloud.com/obj/83217d9b-691c-4319-83f4-4d73a0329708>. Utilizando las ideas esbozadas en este trabajo en el diseño del App en cuestión, el *CDF* genera mediante su uso, el correspondiente diagrama de Venn-Euler por sectores, realizando el cálculo de la simplificación de una operación entre conjuntos ingresada por el usuario. El sector o sectores resultantes se dibujan con otro color en el diagrama. Vale la oportunidad para mencionar que este App fue el que se empleó para realizar el diagrama de Venn-Euler por sectores que se utilizó en el ejemplo de verificación de correctitud de razonamiento mostrado en la Sec. 6.



En el CDF el estudiante ingresa por teclado o por medio del ratón, la expresión conjuntista a simplificar, mediante un diagrama de Venn–Euler por sectores. Al finalizar la escritura de la operación, se presiona el botón “CALCULAR CONJUNTO RESULTANTE” mostrándose el diagrama de Venn–Euler por sectores correspondiente, donde lo sombreado representa el resultado de la simplificación buscada. Bajo esta perspectiva, el alumno visualmente debe analizar la región resaltada en el CDF, encontrar su interpretación conjuntista y convertir esa expresión a su dual lógico, si fuese el caso. Este proceso basado en las etapas de visualización, interpretación, análisis, conversión y presentación de resultados, denota una demanda cognitiva importante por parte de la App al estudiante, favoreciendo por consiguiente, un aprendizaje real y significativo de los contenidos.

8. CONCLUSIONES

El uso de diagramas de Venn–Euler por sectores brinda una nueva opción para complementar el estudio de algunos problemas usuales de lógica y teoría de conjuntos. Este recurso potencia a aquellos estudiantes que son predominantemente visuales y permite prescindir de la memorización de las identidades de lógica y teoría de conjuntos que usualmente muchos alumnos olvidan con facilidad.

El trabajo también, brinda un aporte metodológico interesante, para aquellos profesores y alumnos de cursos vinculados con los temas de lógica proposicional y teoría de conjuntos, al facilitar el uso de un App CDF, donde prevalece la construcción de puentes cognitivos hacia una mejoría conceptual y procedimental, proveyendo otras formas de representación de una operación conjuntista o lógica y de esta manera, una articulación más adecuada, en la construcción de definiciones y métodos de resolución de problemas en este campo.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece profundamente el apoyo de la Escuela de Informática de la Universidad Nacional en el proceso de elaboración de este trabajo.

REFERENCIAS

- [1] Rosen, K. H. and Krithivasan, K., [*Discrete mathematics and its applications: with combinatorics and graph theory*], Tata McGraw-Hill Education (2012).
- [2] Johnsonbaugh, R., [*Matemáticas discretas*], Pearson Educación (2005).
- [3] Michaels, J. G. and Rosen, K. H., [*Applications of discrete mathematics*], vol. 267, McGraw-Hill New York (1991).
- [4] McMaster, K., Anderson, N., and Rague, B., “Discrete math with programming: better together,” in [*ACM SIGCSE Bulletin*], **39**(1), 100–104, ACM (2007).
- [5] Lipschutz, S., Castaño, J. M., and Moncada, E. R., [*Teoría y problemas de teoría de conjuntos y temas afines*], no. QA269 L5618, McGraw-Hill (1969).
- [6] Islas-Carmona, J. O., “El prosumidor. el actor comunicativo de la sociedad de la ubicuidad,” *Palabra clave* **11**(1), 29–39 (2008).

- [7] Vílchez, E., “Creación de *cdfs* para la enseñanza de funciones con *wolfram mathematica*,” (2015).
- [8] Mora, W., [*Cálculo en Varias Variables. Visualización interactiva*], TEC (2019).
- [9] Mora, W., [*Vectores rectas y planos. Visualización interactiva*], TEC (2018).
- [10] Oviedo, N., [*Métodos de resolución de ecuaciones diferenciales de 1er orden*], TEC (2018).
- [11] Vílchez, E., [*Matemática discreta a través del uso del Paquete VilCretas*], TEC (2018).