*Rev. Academia de Ciencias. Zaragoza 47 (1992)*

# REPRÈSENTACIONES INTEGRALES DE LAS FUNCIONES DE BESSEL-CLIFFORD DE TERCER ORDEN

N. Hayek Calil
Departamento de Análisis Matemático
Facultad de Matemáticas
Universidad de La Laguna
38271 - La Laguna (Tenerife)

V.Hernández Suárez
Departamento de Matemáticas
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

*e) Abstract:*

In this paper, we establish some integral representations for the so-called Bessel-Clifford functions of the third order [6]. These representations involve the third order sinus $f_1$, $f_2$ and $f_3$, the Appell's functions P, Q, and R, and certain functions cer x and cei x (of similar structure to the well-known ber x and bei x, due to Kelvin), as well as some integral formulas of the Sonine and Weber types.

## 1. INTRODUCCION

Las funciones $C_{m,n}(x)$ de Bessel-Clifford de tercer orden fueron introducidas por N. Hayek en [6]. Dichas funciones representan una clase de naturaleza análoga a las de Bessel de igual orden, inicialmente estudiadas por P. Humbert [8], quién las definió mediante la fórmula:

$$J_{m,n}(x) = \frac{x^{m+n}}{3^{m+n}\,\Gamma(m+1)\,\Gamma(n+1)}\ {}_0F_2(m+1, n+1; \frac{-x^3}{27}) \tag{1.1}$$

donde ${}_0F_2$ designa la función hipergeométrica triconfluente de tercer orden, fórmula que constituye una obvia generalización de la conocida representación [16]:

$$J_m(x) = \frac{x^m}{2^m\,\Gamma(m+1)}\ {}_0F_1\,(m+1; \frac{-x^2}{4})$$

Las $J_{m,n}(x)$ serían posteriormente investigadas en varios trabajos por el propio Humbert ([9], [10], [11], [12]), así como por otros autores, entre ellos R.S. Varma [15], N.W. MacLachlan [14], P. Agarwall [1], P. Delerue

[3], y más recientemente han sido objeto de atención por parte de otros varios, como H. Dimovski [4], V. Kiryakova [13], y algunos más.

Entre las propiedades establecidas para las funciones $C_{m,n}(x)$ (véase [6]), destaca principalmente la relativa a su conexión con las $J_{m,n}(x)$:

$$C_{m,n}(x) = x^{-\frac{m+n}{3}} J_{m,n}\left(3\sqrt[3]{x}\right), \tag{1.2}$$

la expresión de su función generatriz:

$$e^{u+v-\frac{x}{uv}} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u^m v^n C_{m,n}(x), \tag{1.3}$$

el desarrollo (*):

$$C_{m,n}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-x)^r}{\Gamma(m+r+1)\,\Gamma(n+r+1)\,r!} = \frac{1}{\Gamma(m+1)\,\Gamma(n+1)}\,{}_0F_2(m+1,\, n+1;\, -x) \tag{1.4}$$

determinadas fórmulas de recurrencia y, sobre todo, el hecho de ser natural generalización de un tipo de funciones $C_m(x)$, denominadas de Bessel-Clifford de primera especie, estudiadas en profundidad en varios trabajos por Hayek (entre los que cabe destacar [5]), y cuyo uso en múltiples campos teóricos y de aplicación, sustituye con manifiesta ventaja a las $J_m(x)$ de Bessel. En un trabajo nuestro anterior [7] fueron obtenidas otras interesantes propiedades de las funciones de Bessel-Clifford de tercer orden; entre ellas, relaciones de las mismas con los senos de tercer orden $f_1$, $f_2$ y $f_3$, investigados por Appell [2], desarrollos de éstos en términos de las $C_{m,n}(x)$, la ecuación diferencial de tercer orden que las mismas satisfacen, así como algunas otras ecuaciones relevantes de la Física Matemática cuyas soluciones son expresables en términos de ellas.

En el presente trabajo se investigan nuevas propiedades de estas funciones, ofreciéndose especialmente diversas representaciones integrales de las $C_{m,n}(x)$.

(*) La adopción de una nueva forma para la función generatriz (1.3), permite obtener los valores de las $C_{m,n}(x)$ en el caso de índices m y n enteros negativos, para el cual no tiene evidentemente sentido el desarrollo (1.4) que las define, (véase [6]).

Son deducidas expresiones en las que intervienen las funciones P, Q y R de Appell [2], representaciones integrales en función de los senos de tercer orden $f_1$, $f_2$ y $f_3$ y otras que contienen las funciones cer x y cei x (de estructura similar a las ber x y bei x, de conocida aplicación en varios contextos físicos). Se incluyen, asimismo, representaciones para las $C_{m,n}(x)$ de los tipos de integrales de Sonine y de Weber para las funciones de Bessel.

## 2. REPRESENTACIONES INTEGRALES DE LAS $C_{m,n}(x)$

### *2.1 Expresiones que incluyen las funciones P, Q y R de Appell*

Haciendo uso de (1.2) con m = 0, n = 0, o bien siguiendo un proceso directo similar al desarrollado por Humbert [8] para expresar las $J_{m,n}(x)$ mediante una integral doble, se infiere la fórmula:

$$C_{0,0}\left(\frac{x^3}{27}\right) = \frac{i\sqrt{3}}{4\pi^2} \iint_D f_1\left[x\, P(\theta,\varphi)\right] d\theta\, d\varphi \qquad (2.1)$$

donde los puntos representativos de $\theta$ y $\varphi$ se encuentran situados en un rectángulo de lados $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ y $2\pi i$ (que son precisamente los períodos de la función $P(\theta,\varphi)$ de Appell).

Nota. La (2.1) generaliza la llamada integral tipo Parseval para la función de Bessel-Clifford ordinaria [5]:

$$C_0\left(\frac{x^2}{4}\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\,(x \operatorname{sen} \varphi)\, d\varphi$$

El análisis precedente puede extenderse asimismo a la función $C_{m,n}(x)$ de índices no nulos, desprendiéndose la representación de la misma por una de las integrales siguientes (y con igual dominio de integración que para la $C_{0,0}(x)$ ):

$$C_{m,n}\left(\frac{x^3}{27}\right) = (-1)^{m+n}\, \frac{i\sqrt{3}}{4\pi^2} \left(\frac{x}{3}\right)^{-(m+n)} \iint e^{-xP(\theta,\varphi)-m(j\theta+j^2\varphi)-n(j^2\theta+j\varphi)}\, d\theta\, d\varphi \qquad (2.2)$$

$$C_{m,n}\left(\frac{x^3}{27}\right) = (-1)^{m+n}\, \frac{i\sqrt{3}}{4\pi^2} \left(\frac{x}{3}\right)^{-(m+n)} j^{n-m} \iint e^{-xQ(\theta,\varphi)-m(j\theta+j^2\varphi)-n(j^2\theta+j\varphi)}\, d\theta\, d\varphi \qquad (2.3)$$

$$C_{m,n}\left(\frac{x^3}{27}\right) = (-1)^{m+n} \frac{i\sqrt{3}}{4\pi^2} \left(\frac{x}{3}\right)^{-(m+n)} j^{m-n} \iint e^{-xR(\theta,\varphi)-m(j\theta+j^2\varphi)-n(j^2\theta+j\varphi)} d\theta\, d\varphi \tag{2.4}$$

siendo P, Q y R las funciones de Appell y $j^3 = 1$.

*2.2. Expresiones en que intervienen los senos de tercer orden $f_1$, $f_2$ y $f_3$.*

Al igual que para las $J_{m,n}(x)$, el cálculo simbólico u operacional de Heaviside [14] puede ser aplicado a las funciones de Bessel-Clifford de tercer orden, para derivar nuevas propiedades de éstas a través de sus imágenes.

Así, si se parte del desarrollo (1.4), se deduce sin dificultad:

$$x^m y^n C_{m,n}(xy) \supset \frac{1}{p^m q^n} e^{\frac{-1}{pq}}$$

Descomponiendo adecuadamente el producto del segundo miembro y aplicando el teorema de composición, sigue:

$$x^m y^n C_{m,n}(x\, y) = \int_0^x \int_0^y \frac{(x-u)^{m-m'} (y-v)^{n-n'}}{\Gamma(m-m'+1)\Gamma(n-n'+1)} u^{m'-1} v^{n'-1} C_{m'-1,n'-1}(uv)\, du\, dv \tag{2.5}$$

Si se sustituye ahora m'por $\frac{2}{3}$ y n'por $\frac{1}{3}$, y se tiene en cuenta que [7]:

$$C_{\frac{-1}{3},\frac{2}{3}}(x) = \frac{\sqrt{3}}{2\,\pi} f_1(3\sqrt[3]{x}),$$

se infiere, tras oportunos cambios de variable:

$$C_{m,n}(z) = \frac{9\sqrt{3}}{2\pi\Gamma(m+\frac{1}{3})\Gamma(n+\frac{2}{3})} \int_0^1 \int_0^1 (1-\xi^3)^{m-\frac{2}{3}} (1-\eta^3)^{n-\frac{1}{3}} \xi\, f_1(3\xi\eta\sqrt[3]{z})\, d\xi\, d\eta \tag{2.6}$$

válida para $m > -\frac{1}{3}$, $n > -\frac{2}{3}$.

Análogamente, partiendo de relaciones similarmente deducidas de la (2.5) resulta, al poner $m' = \frac{4}{3}$, $n' = \frac{5}{3}$ y $m' = \frac{2}{3}$, $n' = \frac{4}{3}$, respectivamente, y usar las [7]:

$$C_{\frac{1}{3},\frac{2}{3}}(x) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi\sqrt[3]{x^2}}\, f_2\left(3\sqrt[3]{x}\right)$$

$$C_{\frac{-1}{3},\frac{1}{3}}(x) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi\sqrt[3]{x}}\, f_3\left(3\sqrt[3]{x}\right),$$

las siguientes representaciones integrales:

$$C_{m,n}(z) = \frac{9\sqrt{3}\, z^{\frac{-2}{3}}}{2\pi\Gamma(m-\frac{1}{3})\Gamma(n-\frac{2}{3})}\int_0^1\!\!\int_0^1 (1-\xi^3)^{m-\frac{4}{3}}(1-\eta^3)^{n-\frac{5}{3}}\,\xi\,\eta^2\, f_2(3\xi\eta\sqrt[3]{z})\,d\xi\,d\eta \quad (m > \tfrac{1}{3},\ n > \tfrac{2}{3}) \tag{2.7}$$

$$C_{m,n}(z) = \frac{9\sqrt{3}\, z^{\frac{-1}{3}}}{2\pi\Gamma(m+\frac{1}{3})\Gamma(n-\frac{1}{3})}\int_0^1\!\!\int_0^1 (1-\xi^3)^{m-\frac{2}{3}}(1-\eta^3)^{n-\frac{4}{3}}\,\eta^2\, f_3(3\xi\eta\sqrt[3]{z})\,d\xi\,d\eta \quad (m > \tfrac{-1}{3},\ n > \tfrac{1}{3}) \tag{2.8}$$

Nota. Las (2.6), (2.7) y (2.8) constituyen sendas generalizaciones de la representación integral de la función $C_n(z)$ de Bessel-Clifford mediante una integral del tipo de Poisson, establecida por Hayek [5]:

$$C_n(z) = \frac{2}{\Gamma(n+\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^1 \left(1-\xi^2\right)^{n-\frac{1}{2}} \cos(2\sqrt{z}\,\xi)\,d\xi,$$

con intervención de los senos de tercer orden $f_1$, $f_2$ y $f_3$, respectivamente, en lugar del coseno ordinario.

Las (2.6), (2.7) y (2.8), pueden considerarse, por otra parte, como extensiones a las funciones de Bessel-Clifford de tercer orden de las fórmulas integrales para las $J_{m,n}(x)$ obtenidas por Delerue [3] y de contextura análoga a éstas.

De forma similar, cabe establecer expresiones de las $C_{m,n}(z)$ en función de los denominados senos hiperbólicos $h_1$, $h_2$ y $h_3$ de orden superior.

Por último, y en particular, dando oportunos valores a los subíndices m y n, se deducen diversas representaciones integrales; por ejemplo:

$$C_{\frac{2}{3},\frac{1}{3}}(z) = \frac{9\sqrt{3}}{2\pi}\int_0^1\!\!\int_0^1 \xi\, f_1\left(3\,\xi\,\eta\sqrt[3]{z}\right)\,d\xi\,d\eta$$

$$C_{\frac{2}{3},\frac{4}{3}}(z) = \frac{9\sqrt{3}}{2\pi} \int_0^1\int_0^1 \xi\,(1-\eta^3)\, f_1\left(3\,\xi\,\eta\,\sqrt[3]{z}\right) d\xi\, d\eta$$

$$C_{\frac{4}{3},\frac{5}{3}}(z) = \frac{9\sqrt{3}}{2\pi}\, z^{-\frac{2}{3}} \int_0^1\int_0^1 \xi\,\eta^2\, f_2\left(3\,\xi\,\eta\,\sqrt[3]{z}\right) d\xi\, d\eta$$

$$C_{\frac{5}{3},\frac{7}{3}}(z) = \frac{9\sqrt{3}}{2\pi}\, z^{-\frac{1}{3}} \int_0^1\int_0^1 (1-\xi^3)\,(1-\eta^3)\,\eta^2\, f_3\left(3\,\xi\,\eta\,\sqrt[3]{z}\right) d\xi\, d\eta,$$

entre otras. Y de éstas, con el uso de fórmulas de recurrencia, resultan relaciones que ligan entre sí a los senos de tercer orden, por ejemplo:

$$f_3(z) - z\, f_1(z) = \frac{z^4}{3} \int_0^1\int_0^1 \xi\,(1-\eta^3)\, f_1(\xi\,\eta\, z)\, d\xi\, d\eta$$

$$2f_2(z) - zf_3(z) = \frac{z^5}{9} \int_0^1\int_0^1 (1-\xi^3)\,(1-\eta^3)\,\xi\, f_1(3\,\xi\,\eta\, z)\, d\xi\, d\eta$$

*2.3. Expresiones que contienen las funciones cer x y cei x*

Las funciones cer x y cei x fueron definidas por Hayek [5], como parte real e imaginaria, respectivamente, de la función $C_0(-ix)$ (x real) (*):

$$C_0(-ix) = \text{cer } x + i \text{ cei } x$$

Sus desarrollos en serie:

$$\text{cer } x = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\, x^{2k}}{[(2k)!]^2}$$

$$\text{cei } x = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\, x^{2k-1}}{[(2k-1)!]^2}$$

son absoluta y uniformemente convergentes en todo compacto de $\mathbb{R}$, pudiendo por ello ser diferenciadas e integradas término a término.

(*) Las cer x y cei x están conexionadas con las conocidas funciones ber x y bei x, introducidas por Kelvin a partir de la expresión: $J_0(x\, i\sqrt{i})$ = ber x + i bei x, así ber $(2\sqrt{x})$ = cer x, bei$(2\sqrt{x})$ = cei x.

Al igual que en el apartado 2.2 anterior, si se recurre a las reglas del cálculo operacional, cabe inferir, en primer lugar, que:

$$\cos\frac{1}{p} \subset \operatorname{cer} x, \qquad \operatorname{sen}\frac{1}{p} \subset \operatorname{cei} x \tag{2.9}$$

Entonces, con el uso de la primera de (2.9) y de la conocida expresión simbólica:

$$f(\sqrt{p}) \subset \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4x}}\, h(s)\, ds \qquad (\text{ con } f(p) \subset h(x) )$$

resulta una nueva expresión, en la que al cambiar p por $\frac{p}{4 \operatorname{sen}^2\theta}$, se deduce:

$$\cos\left(\frac{2 \operatorname{sen}\theta}{\sqrt{p}}\right) \subset \frac{1}{2 \operatorname{sen}\theta \sqrt{\pi x}} \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{16\, x \operatorname{sen}^2\theta}} \operatorname{cer}(s)\, ds$$

Ahora bien, si se tiene en cuenta la siguiente integral tipo Parseval [5]:

$$C_0\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\left(\frac{2 \operatorname{sen}\theta}{\sqrt{p}}\right) d\theta,$$

la integración respecto de $\theta$ de la última expresión simbólica conduce a:

$$C_{0,0}(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi x}} \iint_C \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\, e^{-\frac{s^2}{16\, x \operatorname{sen}^2\theta}} \operatorname{cer}(s)\, ds\, d\theta \tag{2.10}$$

viniendo dado el campo C de integración por $0 < \theta < \pi$, $0 < s < \infty$.

Partiendo de la segunda de (2.9) y siguiendo un proceso similar al precedente, se infiere esta otra representación integral:

$$C_{\frac{1}{2},1}(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi x}} \iint_C e^{-\frac{s^2}{16\, x \operatorname{sen}^2\theta}} \operatorname{cei}(s)\, ds\, d\theta \tag{2.11}$$

con igual campo C de integración.

*2.4. Otras representaciones*

La siguiente representación para las de Bessel-Clifford de tercer orden:

$$C_{\lambda_1+\mu_1+1,\lambda_2+\mu_2+1}(x) = \frac{2^2}{\Gamma(\mu_1+1)\,\Gamma(\mu_2+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \prod_{i=1}^{2} \operatorname{sen}^{2\lambda_i+1}\theta_i \cos^{2\mu_i+1}\theta_i \cdot$$

$$\cdot\, C_{\lambda_1,\lambda_2}(x\ \operatorname{sen}^2\theta_1\ \operatorname{sen}^2\theta_2)\, d\theta_1\, \theta_2 \qquad (2.12)$$

en donde la integral doble contiene una función del mismo orden, pero de índices $\lambda_1$ y $\lambda_2$ inferiores que los de la función representada, generaliza la siguiente fórmula integral tipo Sonine para las funciones de Bessel-Clifford de 1ª especie [5]:

$$C_{\mu+\nu+1}(x)= \frac{2}{\Gamma(\nu+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} C_\mu(x\operatorname{sen}^2\theta)\ \operatorname{sen}^{2\mu+1}\theta\ \cos^{2\nu+1}\theta\ d\theta$$

La (2.12) se establece por proceso directo, sustituyendo en la integral:

$$C_{\lambda_1,\lambda_2}(x\ \operatorname{sen}^2\theta_1\ \operatorname{sen}^2\theta_2) \quad \text{por} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\ x^k\ \operatorname{sen}^{2k}\theta_1\ \operatorname{sen}^{2k}\theta_2}{\Gamma(\lambda_1+k+1)\,\Gamma(\lambda_2+k+1)},$$

con lo cual, tras el cálculo de algunas integrales conocidas, el segundo miembro de (2.12) se transforma en el sumatorio:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\ x^k}{\Gamma(k+\lambda_1+\mu_1+2)\,\Gamma(k+\lambda_2+\mu_2+2)}$$

que, según (1.4), no es otra cosa que el desarrollo del primer miembro.

Análogamente, y también por comprobación directa, resulta:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} C_{m,n}\left(x\operatorname{sen}^2\theta_1\operatorname{sen}^2\theta_2\right) C_{m',n'}\left(z\cos^2\theta_1\cos^2\theta_2\right)\cdot$$

$$\cdot\operatorname{sen}^{2m+1}\theta_1\operatorname{sen}^{2n+1}\theta_2\cos^{2m'+1}\theta_1\cos^{2n'+1}\theta_2\, d\theta_1\, d\theta_2 =$$

$$= \frac{1}{2^2}\, C_{m+m'+1,n+n'+1}(x+z) \qquad (2.13)$$

fórmula que generaliza la segunda integral tipo Sonine para las de Bessel-Clifford de primera especie [5].

Por último, si se aplica la propiedad simbólica:

$$x^{\lambda_1} C_{\lambda_1,\lambda_2}(x) \supset \frac{1}{p^{\lambda_1}} C_{\lambda_2}\left(\frac{1}{p}\right),$$

se infiere, en virtud de la definición de la transformada generalizada de Laplace-Carson:

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{a}} x^{\lambda_1} C_{\lambda_1,\lambda_2}(x)\, dx = a^{\lambda_1+1} C_{\lambda_2}(a), \qquad (2.14)$$

integral exponencial del tipo de Weber, que relaciona las funciones de tercer y primer orden.

## 3. BIBLIOGRAFIA


[1] AGARWAL, R.P. (1950):"Sur une généralisation de la transformation de Hankel". *Ann. Soc. Sci. Bruxelles. Ser. 1, 64, 164-168.*

[2] APPELL, P. (1897): "Sur certaines fonctions analogues aux fonctions circulaires", *C.R. Acad. Sc.*, t. 84, 540.

[3] DELERUE, P. (1953): "Sur le Calcul Symbolique à n variables et les fonctions hyperbesséliennes, II". *Ann. Soc.Sci. Bruxelles, 67, 3, 229-274.*

[4] DIMOVSKI, I.H.; KIRYAKOVA, V.S. (1987): "Generalized Poisson representations of hypergeometric functions $_pF_q, p<q$ using fractional integrals". *Proceedings of the Sixteenth Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians,* 205-212, Sofía.

[5] HAYEK, N.(1967): "Estudio de la ecuación diferencial $xy''+(\nu+1)\,y'+y=0$ y de sus aplicaciones". *Collectanea Mathematica,* Vol. XVIII, fasc. 1 y 2, 57-174, Barcelona.

[6] HAYEK, N. (1987): "Funciones de Bessel-Clifford de tercer orden". *Actas XII Jornadas Luso-Españolas de Matemática,* 346-351, Braga.

[7] HAYEK, N.; HERNANDEZ, V.(1991):"Sobre las funciones de Bessel-Clifford de tercer orden". *Actas XII C.E.D.Y.A. (II Congreso de Matemática Aplicada),* Oviedo.

[8] HUMBERT, P. (1930): "Les fonctions de Bessel du troisième ordre". *Atti. Pont. Accad. Sc. Nuovi Lincei, Anno 83, fasc. III*, 128-146.

[9] HUMBERT, P. (1934): "Nouvelles remarques sur les fonctions de Bessel du troisième ordre". *Atti. Pont. Accad. Sc. Nuovi Lincei,* 87, 323-331.

[10] HUMBERT,P. (1935): "Sur une équation aux dérivées partielles". *Atti.*

*Pont. Accad. Sc. Nuovi Lincei*, Tome 88.

[11] HUMBERT, P.; COLOMBO, S. (1965): "Le Calcul Symbolique et ses applications a la Physique Mathématique". *Mémorial des Sc. Math. Gauthier-Villars*, fasc. 158, Paris.

[12] HUMBERT,P.; DELERUE,P. (1950): "Sur l'equation différentielle de la fonction de Bessel du troisième ordre, d'indices nuls". *Ann. Soc. Sci. Bruxelles*, I, 64, 159-163.

[13] KIRYAKOVA, V.; SPIROVA, S. (1989): "Representations of the solutions of Hyper-Bessel differential equations via Meijer's G-function". *Complex Analysis and Applications*, 87, 284-297, Sofía.

[14] MCLACHLAN, N.W.; HUMBERT, P. (1941): "Formulaire pour le Calcul Symbolique", *Mémorial des Sc. Math. Gauthier-Villars*, Paris.

[15] VARMA, R.S. (1939): "Sur les fonctions de Bessel du troisième ordre", *J. Ecole Polytechn*, III, 145, 33-35.

[16] WATSON, G.N. (1958): "A treatise on the theory of Bessel Functions". *Cambridge University Press*, second edition.