

# Valores críticos para contrastar la capacidad del Modelo GARCH(1,1) en la Predicción de la Volatilidad(\*)

por

EDUARDO ACOSTA-GONZÁLEZ  
JORGE V. PÉREZ-RODRÍGUEZ

Departamento de Métodos Cuantitativos. Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

## RESUMEN

Es habitual contrastar la capacidad de predicción de la volatilidad temporal de un modelo a través del “contraste del sesgo” (el cual utiliza una regresión auxiliar simple donde el cuadrado de los residuos del proceso se relaciona con la volatilidad estimada). La utilización de este contraste en los modelos GARCH produce dos problemas en la estimación de esta recta auxiliar: la sesgadura y la lenta convergencia. Este último implica que aún cuando se trabaje con tamaños muestrales considerados grandes, en los trabajos empíricos en donde se utilizan estos modelos, las estimaciones siguen siendo sesgadas. En este trabajo proponemos cómo obtener los valores críticos del contraste del sesgo para el caso del modelo GARCH(1,1) mediante procesos de simulación.

---

(\*) Este trabajo ha sido financiado por el Proyecto BEC2001-3777 del Ministerio de Ciencia y Tecnología. Los autores desean agradecer los comentarios realizados por T. Bollerslev y F. Fernández-Rodríguez cuyas sugerencias han contribuido a mejorar este trabajo. Todos los errores y omisiones son de la entera responsabilidad de los autores.

*Palabras Clave:* Modelo GARCH, contraste predicción volatilidad, valores críticos, simulación

*Clasificación AMS:* 65C05, 60G12, 62M20

## INTRODUCCIÓN

El estudio de la volatilidad es uno de los elementos fundamentales en el análisis de las series temporales financieras, debido a que es consustancial con el análisis del propio fenómeno. La volatilidad es uno de los elementos claves, que conjuntamente con la rentabilidad, determinan la posición de los agentes que intervienen en los mercados financieros. Por ejemplo, destacamos el interés del análisis de la volatilidad en la necesidad de evaluar con antelación la volatilidad en la fórmula de valoración de derivados financieros (fórmula de Black-Scholes para las primas de las opciones) o la explicación de los fenómenos de aglomeración de los *shocks* que inciden sobre este tipo de series, fenómenos que escapan al enfoque de varianza constante y que son especialmente relevantes en el caso de las series financieras.

Desde un punto de vista metodológico, podemos considerar el trabajo de Engle (1982) como el inicio de un tratamiento innovador de la dinámica de la volatilidad que ha supuesto desde entonces un desarrollo de gran envergadura en la literatura especializada, con el surgimiento de ampliaciones y nuevas especificaciones para recoger el comportamiento de esta variable. Además, en las dos últimas décadas se han desarrollado enormemente, tanto en el ámbito de la estadística paramétrica como no paramétrica, técnicas de estimación de la volatilidad.

Además de la importancia de conocer la capacidad predictiva de la volatilidad por parte de los modelos *per se*, el desarrollo de diferentes especificaciones, mediante la propuesta de los modelos correspondientes, ha supuesto la necesidad de contrastar sus capacidades de predicción para así poder compararlos. Uno de los problemas con el que se encuentra el investigador a la hora de realizar este contraste, es la inobservabilidad de la volatilidad. Esto ha llevado a la utilización del cuadrado del proceso como variable *proxy*, tal y como hace el contraste del sesgo. Ejemplos de la utilización de este contraste los podemos encontrar en los trabajos de Pagan y Schwert (1990), Loudon et al. (2000) y López (2001) entre otros. Este contraste consiste en estimar una regresión auxiliar entre el cuadrado del proceso y la estimación de la volatilidad obtenida por el modelo utilizado. En el supuesto de estar frente a una estimación insesgada de la volatilidad, la constante y la pendiente de esta regresión auxiliar tendrán que tomar el valor de cero y uno, respectivamente. Sin embargo, hay que tener en cuenta que, aún cuando el modelo esté correctamente especificado, lo que justificaría la utilización del cuadrado del proce-

so como variable *proxy* de la volatilidad, en la mayoría de las ocasiones el grado de libertad entre observación y observación en el proceso temporal, no suele responder al comportamiento más tenue de la volatilidad de las series temporales financieras, tal y como destacan Andersen y Bollerslev (1998).

Como comentamos anteriormente, el trabajo pionero de Engle (1982) supuso el inicio de la proliferación de modelos de heterocedasticidad condicionada. Entre ellos, cabe destacar el modelo GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) propuesto por Bollerslev en 1986. Este modelo, y más concretamente la especificación GARCH(1,1), ha sido una de las especificaciones más utilizadas a la hora de modelizar series temporales financieras. Sin embargo, estos modelos tienen problemas a la hora de utilizar el contraste del sesgo debido a que las estimaciones de los parámetros de la regresión auxiliar son sesgadas para la mayoría de los tamaños muestrales que habitualmente se utilizan en este tipo de estudios. Este sesgo en la estimación se produce como consecuencia de la correlación que existe entre el regresor (la estimación de la volatilidad) y el residuo de la regresión auxiliar, debido a la especificación autorregresiva de la volatilidad del modelo GARCH. El teorema de Mann y Wald (1943) garantiza la consistencia de la estimación de esta regresión, sin embargo, debido a la restricción de no negatividad de las variables que intervienen, esta convergencia es muy lenta, de forma tal que aún en tamaños muestrales que se considerarían grandes en este tipo de trabajos, las estimaciones siguen siendo sesgadas.

Para salvar esta situación, y poder afrontar el contraste del sesgo con cierta garantía de fiabilidad, en este trabajo presentamos tres estrategias para el cálculo de los valores críticos en el contraste del sesgo para el caso del modelo GARCH(1,1). En primer lugar, mediante la tabulación de estos valores para diferentes procesos GARCH(1,1) y tamaños muestrales. Esta opción tiene el inconveniente de que aún cuando se consideran una gran variedad de procesos y tamaños muestrales, es imposible abarcar toda la población. Para evitar este inconveniente presentamos la segunda y tercera estrategia. La segunda consiste en la estimación de funciones de superficies de respuesta, utilizando como base de datos la tabulación generada en la primera. Ejemplos de algunas de estas dos primeras estrategias se pueden encontrar en Dickey y Fuller (1979), Dickey y Fuller (1981), Evans y Savin (1981) y (1984) y Mackinnon (1991). Por último, como tercera estrategia, para el cálculo de los valores críticos se utilizan los procedimientos de simulación manejados en la primera, pero en esta ocasión, el proceso sólo se desarrolla para una estimación concreta.

Este trabajo se ha dividido de la siguiente manera: En la sección 2 se describe un proceso GARCH, en la sección 3 se plantea el problema de sesgades que presenta la estimación de la regresión auxiliar del contraste del sesgo resaltando,

mediante procesos de simulación, el comportamiento del mismo. En la sección 4 se desarrollan los procedimientos para la obtención de los valores críticos. En la sección 5 se presenta un ejemplo para ilustrar la obtención de los valores críticos. Finalmente, en la sección 6 se exponen las conclusiones.

## 2. EL MODELO GARCH

Un modelo GARCH( $q,p$ ) se define como un proceso estocástico temporal discreto  $\varepsilon_t$  tal que:

$$\varepsilon_t = w_t \sqrt{h_t} \quad (1)$$

donde  $w_t \sim \text{i.i.d. } N(0,1)$ ,  $h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2 + \beta_1 h_{t-1} + \dots + \beta_p h_{t-p}$ , siendo,  $q > 0$ ,  $p \geq 0$ ,  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$  ( $i = 1, \dots, q$ ),  $\beta_i \geq 0$  ( $i = 1, \dots, p$ )  $h_t$  es la varianza condicionada del proceso. Cuando  $p = 0$ , se obtiene un modelo ARCH( $q$ ) (*Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*).

En la mayoría de las aplicaciones empíricas se ha comprobado que el modelo queda perfectamente especificado de forma general cuando  $p = q = 1$ , tal y como ponen de manifiesto Bollerslev, Chou y Kroner (1992). En este caso:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} \quad (2)$$

donde la estacionariedad del proceso se garantiza siempre que  $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ .

## 3. CONSISTENCIA EN LA ESTIMACIÓN DEL CONTRASTE DEL SESGO PARA UN MODELO GARCH (1,1)

Por definición, el componente predecible de la volatilidad en una serie es su varianza condicional. Siguiendo a Pagan y Schwert (1990) el contraste del sesgo usa la siguiente regresión auxiliar

$$\varepsilon_t^2 = \delta_0 + \delta_1 h_t + u_t \quad (3)$$

para evaluar la capacidad predictiva de la volatilidad de un determinado modelo. Si las predicciones son insesgadas, entonces  $\delta_0 = 0$  y  $\delta_1 = 1$ . Sin embargo, la obtención de valores distintos significaría que las predicciones de la volatilidad son sesgadas. Por tanto, el propósito de este contraste consiste en determinar si las predicciones de la volatilidad son predicciones sesgadas del cuadrado del proceso.

La estimación por Mínimos Cuadrado Ordinarios (MCO) de la regresión (3) para el caso en el que las volatilidades condicionadas ( $h_t$ ) sean obtenidas a partir de un modelo GARCH para cualquier  $q > 0$  y  $p \geq 0$  implica estimaciones sesgadas como consecuencia del comportamiento autorregresivo de la varianza condicionada. Así, por ejemplo, para el caso del modelo GARCH(1,1), sustituyendo (2) en (3) tendremos que

$$\varepsilon_t^2 = \delta_0 + \delta_1(\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1h_{t-1}) + u_t \quad (4)$$

En este caso, debido a la presencia de la variable endógena retardada  $\varepsilon_{t-1}^2$  como regresor, es bien conocido que en (3)

$$E[(X'X)^{-1}X'U] \neq 0 \quad (5)$$

donde  $X$  es una matriz de dimensión  $(T \times 2)$ , siendo  $T$  el tamaño muestral, con una primera columna de unos y en la segunda los valores de  $h_t$ , y  $U$  un vector  $(T \times 1)$  de las perturbaciones  $u_t$ . Lo que implica que las estimaciones de  $\delta_0$  y  $\delta_1$  son sesgadas. Sin embargo, las propiedades asintóticas de los estimadores MCO de la regresión (3) sustentadas en el teorema de Mann y Wald (1943) implican que

$$\text{plim} [(X'X)^{-1}X'U] = 0 \quad (6)$$

donde  $\text{plim}$  es la abreviatura de límite en probabilidad, lo que conlleva que los estimadores MCO de (3) sean consistentes en tanto en cuanto convergen en probabilidad al verdadero valor del parámetro a medida que aumenta el tamaño muestral.

Tal y como se puede ver en Davidson y MacKinnon (1993), cuando la perturbación de (3) sigue una distribución normal de media nula y varianza constante, la convergencia se suele alcanzar para valores de  $T$  en torno a 500. Sin embargo, en el contraste del sesgo, la perturbación de (3) no sigue una distribución normal debido a que se trata del cuadrado del proceso (1). Esta consideración hace que la convergencia en probabilidad de los estimadores de (3) sea muy lenta, de tal manera que ésta se alcanza para valores de  $T$  muy grandes, que no son habituales en trabajos empíricos donde se utiliza la metodología de los modelos GARCH, tal y como veremos mediante simulación en el siguiente epígrafe.

### 3.1. Simulación

Mediante la simulación de procesos GARCH(1,1), se estudia el comportamiento de la estimación de la regresión (3) ante la variación del tamaño muestral en primer lugar y ante la variación de los parámetros que definen el modelo GARCH(1,1),  $\alpha_1$  y  $\beta_1$  en segundo lugar. El proceso básico de simulación que se ha seguido queda recogido en los siguientes pasos:

Paso 1. Se genera un proceso GARCH(1,1) fijando previamente los valores de T,  $\alpha_1$  y  $\beta_1$  para  $t = -499, \dots, T$  de acuerdo con la siguiente recursión

$$h_t = \alpha_0 + (\alpha_1 w_{t-1}^2 + \beta_1) h_{t-1} \quad (7)$$

$$\varepsilon_t = w_t \sqrt{h_t}$$

donde  $w_t$  se genera como una normal estándar,  $h_{-499}=0.1$ ,  $\alpha_0 = 1 - \alpha_1 - \beta_1$  y las primeras 500 observaciones son eliminadas para minimizar el efecto de los valores iniciales(1)

Paso 2. Se estima la ecuación (3) a partir del proceso generado en el paso anterior.

Finalmente repetimos N veces los pasos 1 y 2, siendo N el número de réplicas. En cada una de estas réplicas se guardan las estimaciones de  $\delta_0^{(i)}$  y  $\delta_1^{(i)}$  para  $i=1, \dots, N$ , tomando como valor de las estimaciones el valor medio de  $\delta_0^{(i)}$  y  $\delta_1^{(i)}$ , que denotamos por  $\bar{\delta}_0$  y  $\bar{\delta}_1$  respectivamente,

$$\bar{\delta}_0 = \frac{\sum_{i=1}^N \delta_0^{(i)}}{N} \quad \bar{\delta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^N \delta_1^{(i)}}{N} \quad (8)$$

y de esta manera suavizamos las estimaciones ante la presencia de valores extremos.

En la figura 1 se muestran las estimaciones de la pendiente de la recta (3) para la ejecución del proceso de simulación para un modelo GARCH(1,1) donde  $\alpha_1 = \beta_1 = 0.4$ ,  $T = 5000$  y  $N = 10000$ . Tal y como se puede apreciar, la estimación de dicho parámetro es claramente sesgada al no estar centrado su valor en la unidad, lo que implica que en este caso la varianza condicional es una estimación

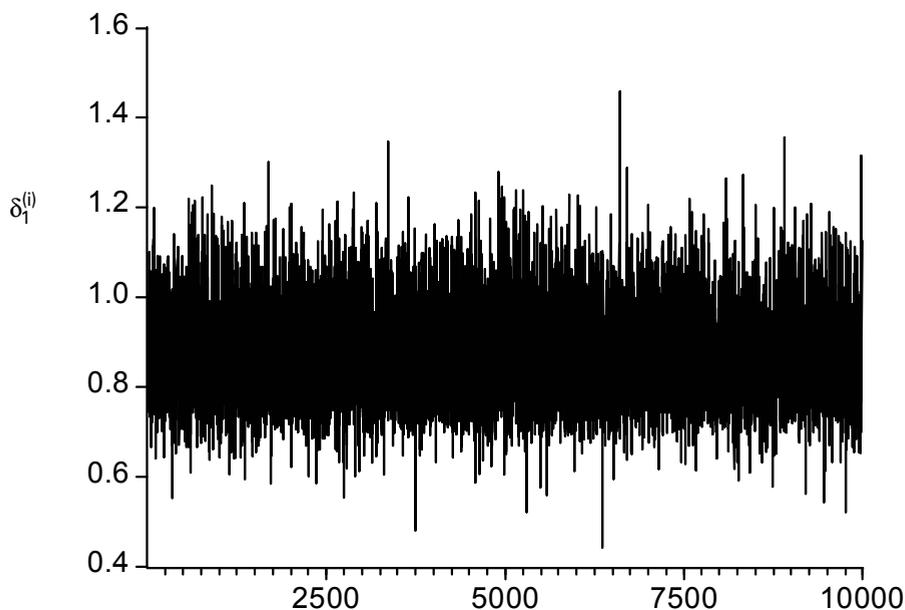
---

(1) La varianza del modelo queda normalizada si  $\alpha_0 = 1 - \alpha_1 - \beta_1$ . De esta manera, la varianza no condicional del proceso es la unidad.

sesgada de la volatilidad. Concretamente, el valor medio de  $\delta_1^{(i)}$  es  $\bar{\delta}_1 = 0.87$ , con un ratio t para la hipótesis nula  $H_0: \bar{\delta}_1 = 1$  igual a  $-127.60$ , que rechaza claramente la igualdad a uno de dicha estimación.

**Figura 1**

ESTIMACIÓN DE  $\delta_1^{(i)}$  PARA UN MODELO GARCH(1,1) DONDE  $\alpha_1 = \beta_1 = 0.4$   
CON  $i=1, \dots, 10000$

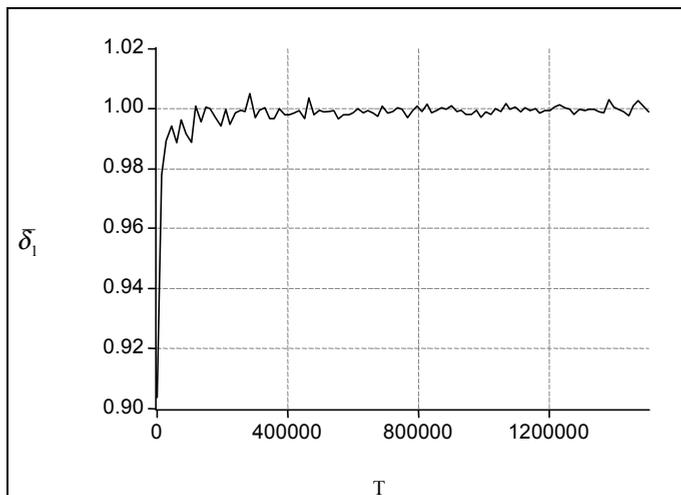


Debido a que la estimación de (3) es consistente, el sesgo disminuye con el incremento del tamaño muestral. En la figura 2 se puede observar la evaluación de la estimación de la media de las estimaciones de la pendiente  $\bar{\delta}_1$  para un modelo GARCH(1,1) donde  $\alpha_1 = 0.2$  y  $\beta_1 = 0.6$ . En este caso, a diferencia de la figura 1, cada punto de la curva se calcula para diferentes tamaños muestrales. De esta manera, el primer punto se obtiene para  $T=1000$  y  $N = 250$ . Los incrementos de  $T$  se fijan en  $15000$ . De esta manera, el siguiente punto corresponde para  $T=16000$  y  $N$  que se mantiene constante para todo el proceso en un valor de  $250$ . Y así sucesivamente hasta  $T=1501000$ .

Tal y como se puede observar en la figura 2, el sesgo de la pendiente disminuye muy lentamente. En un contraste t de la media, y para un nivel de significación del 5%, se rechaza la hipótesis nula de igualdad a la unidad para todo el periodo. Podría pensarse que este rechazo se debe al peso que tienen los primeros valores que aparecen en la figura, que claramente se dibujan inferiores a uno, y que si se despreciara esta primera parte, los resultados del contraste serían los contrarios. Sin embargo, al realizar el mismo contraste para los dos subperiodos definidos por T menor que 800000 y por T mayor que 800000, en ambos casos se rechaza la hipótesis nula de igualdad a uno de la pendiente para un nivel de significación del 5%. Sólo cuando nos acercamos más al último periodo es posible no rechazar la hipótesis nula. Este sería el caso aproximadamente para  $T > 1100000$ . Con este ejemplo, se pone de manifiesto la lentitud con que la estimación converge al verdadero valor del parámetro. Hay que recordar que modelos con perturbaciones que se comportan bien, donde la endógena retardada actúa como variable explicativa, convergen al verdadero valor de parámetro en tamaños muestrales en torno a 500.

**Figura 2**

ESTIMACIÓN DE  $\delta_1$  PARA UN MODELO GARCH(1,1) DONDE  $\alpha_1 = 0.2$  Y  $\beta_1 = 0.6$ .



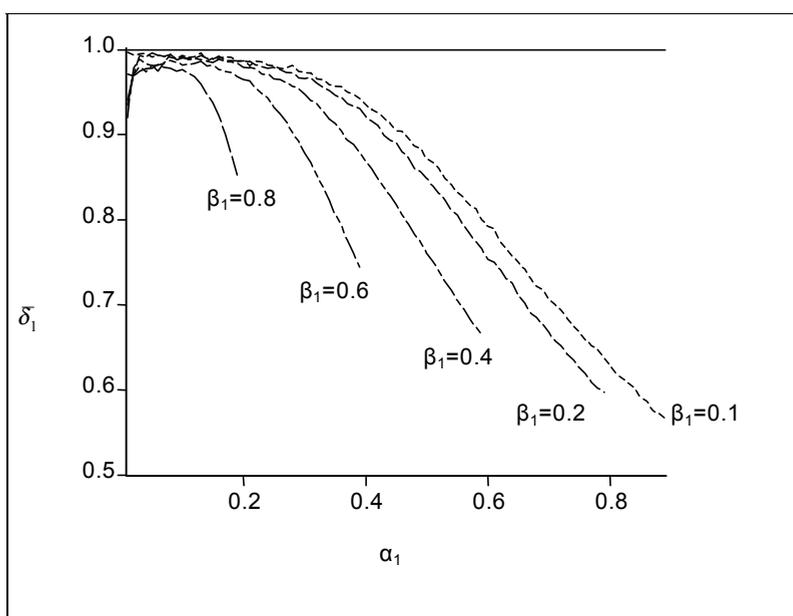
El sesgo en la estimación de (3), tal y como hemos podido comprobar, depende del tamaño muestral, pero igualmente depende del valor que toman los parámetros  $\alpha_1$  y  $\beta_1$ . En cada una de las curvas de las figuras 3 y 4 se muestran los resultados

de la estimación de la media de las estimaciones de la pendiente de (3),  $\bar{\delta}_1^{(j)}$ , para el modelo  $j$ , donde  $j=1, \dots, J$  siendo  $J$  el número total de modelos estimados. En cada curva, cada modelo  $j$  queda definido por una combinación de valores de  $\alpha_1$  y  $\beta_1$ . El tamaño de los diferentes modelos es constante e igual a  $T = 5000$ . De esta manera, las cinco curvas contenidas en la figura 3 se obtienen como se describe a continuación: Cuando  $\beta_1 = 0.1$ ,  $j=1, \dots, 89$ ; cuando  $\beta_1 = 0.2$ ,  $j=1, \dots, 79$ ; cuando  $\beta_1 = 0.4$ ,  $j=1, \dots, 59$ ; cuando  $\beta_1 = 0.6$ ,  $j=1, \dots, 39$ ; y cuando  $\beta_1 = 0.8$ ,  $j=1, \dots, 19$ . En cada curva  $\alpha_1$  se inicia con un valor igual a 0.01 y va incrementado su valor igualmente a razón de 0.01. Con este procedimiento garantizamos que  $\alpha_1 > 0$  y que  $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ . Las cinco curvas contenidas en la figura 4 se obtienen de la misma manera, pero en esta ocasión se intercambian los papeles de  $\alpha_1$  y  $\beta_1$ , además de que  $\beta_1$  inicia su valor en cero, para de esta manera considerar también el modelo ARCH(1) en el procedimiento.

A partir de las figuras 3 y 4 se destaca que el sesgo en la estimación de la pendiente de la regresión (3) depende del valor de los parámetros que especifican al modelo GARCH(1,1). Se observa cómo el sesgo se incrementa a medida que el valor de los parámetros aumenta. Concretamente, para los dos modelos simulados en las figuras 1 y 2, se comprueba que el modelo correspondiente a la figura 1 ( $\alpha_1 = 0.4$  y  $\beta_1 = 0.4$ ) tiene claramente un sesgo mayor que el modelo correspondiente al de la figura 2 ( $\alpha_1 = 0.2$  y  $\beta_1 = 0.6$ ). Estos resultados dan una idea de la lentitud con la que la estimación de  $\delta_1$  converge al verdadero valor. Aún cuando el modelo correspondiente a la figura 2 es uno de los que menor sesgo presenta, se vio que el tamaño muestral que necesitaba para alcanzar la convergencia es excesivamente alto. Por tanto, si en vez de este modelo, se hubiera optado por un modelo como el correspondiente a la figura 1, el tamaño muestral necesario para alcanzar la convergencia sería aún mayor.

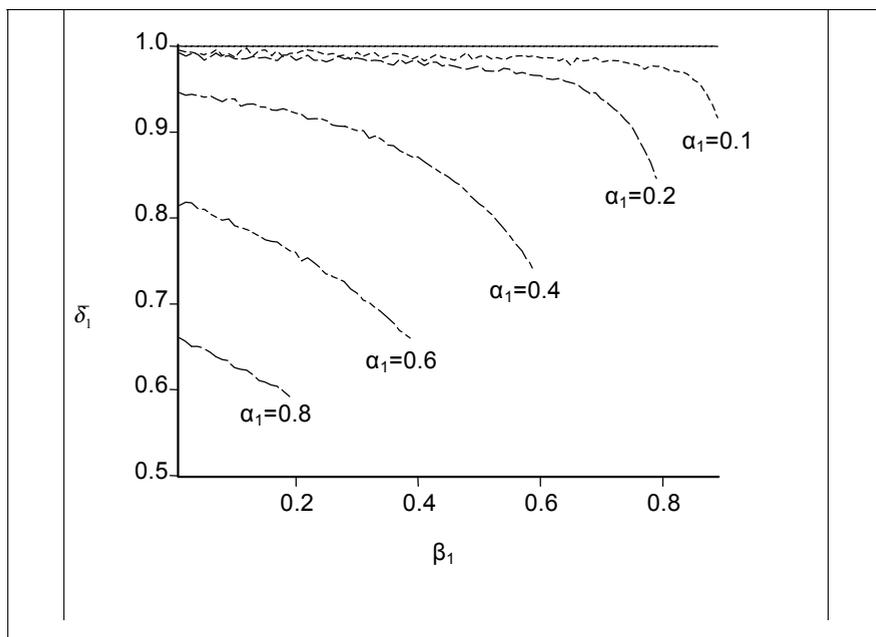
**Figura 3**

EL SESGO DE LA PENDIENTE DE (3) SE INCREMENTA A MEDIDA QUE SE INCREMENTA EL VALOR DE  $\alpha_1$ .



**Figura 4**

EL SESGO DE LA PENDIENTE DE (3) SE INCREMENTA A MEDIDA QUE SE INCREMENTA EL VALOR DE  $\beta_1$ .



#### 4. ESTIMACIÓN DE LOS VALORES CRÍTICOS

Tal y como se planteó en el apartado anterior, la hipótesis nula del contraste del sesgo es  $H_0 : \delta_0 = 0$  y  $\delta_1 = 1$ , cuyo estadístico se obtiene como

$$\tau_1 = (\mathbf{r} - \hat{\delta})' [\hat{\sigma}_u^2 (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1}]^{-1} (\mathbf{r} - \hat{\delta}) \quad (9)$$

donde  $\mathbf{r}$  es el vector  $[0 \ 1]'$ ,  $\hat{\sigma}_u^2$  es la estimación insesgada de la varianza de  $u_t$  y  $\hat{\delta}$  es un vector de dimensión  $(2 \times 1)$  que contiene las estimaciones de  $\delta_0$  y  $\delta_1$ . Este estadístico se distribuye asintóticamente como una chi-cuadrado de 2 grados de libertad ( $\chi_2^2$ ) en el caso de un buen comportamiento de  $u_t$ . Sin embargo, tal y como se ha comentado, este no es el caso de las perturbaciones en (3). Esto recomienda la tabulación de los valores críticos de  $\tau_1$  a partir del proceso básico de simulación descrito a continuación. Además, de la estimación de los valores críticos

de  $\tau_1$ , se ha añadido en este trabajo la estimación de los valores críticos para contrastar la hipótesis nula  $H_0 : \delta_1 = 1$  en (3), mediante el estadístico de contraste

$$\tau_2 = \frac{\hat{\delta} - 1}{S_{\hat{\delta}_1}} \quad (10)$$

siendo  $\hat{\delta}_1$  la estimación de  $\delta_1$  y  $S_{\hat{\delta}_1}$  el error estándar de dicha estimación. En este caso  $\tau_2$  no sigue la habitual distribución t-Student de T-2 grados de libertad debido al comportamiento de la perturbación en (3).

#### 4.1. Estrategia I y III: Tabulación de los valores críticos

A diferencia de lo que suele ser habitual, la tabulación de los valores críticos para  $\tau_1$  y  $\tau_2$ , no depende tan solo del tamaño muestral, sino igualmente, de los valores que toman los parámetros  $\alpha_1$  y  $\beta_1$  del modelo GARCH(1,1) correspondiente. Esto complica el proceso de simulación, además de aumentar el número de réplicas del proceso. El hecho de que la convergencia en probabilidad en este tipo de modelos sea tan lenta, tal y como se ha visto, hace imposible que la tabulación recoja todos los tamaños muestrales hasta el límite de convergencia. Por esta razón, hemos tabulado estos valores para tamaños muestrales que son razonables en trabajos empíricos donde se utiliza este tipo de modelos. Concretamente, el tamaño muestral mínimo y máximo que se ha utilizado es de 20 y 5000, respectivamente.

El proceso de simulación ha contado con las siguientes características:

1. El tamaño muestral ha variado desde 20 a 470 con incrementos de 50, y desde 500 a 5000 con incrementos de 500. Esto supone 20 tamaños muestrales diferentes,  $T = 20, 70, \dots, 420, 470, 500, 1000, \dots, 4500, 5000$ .
2. El parámetro  $\alpha_1$  varía desde 0.10 hasta 0.90 con incrementos de 0.2. Igualmente el parámetro  $\beta_1$  varía desde 0 hasta 0.80 con incrementos de 0.2. En todo caso se garantiza que  $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ . De esta manera, cualquier combinación que no cumpla dicha restricción es rechazada del proceso de simulación. Además, el hecho de que  $\beta_1$  inicie sus posibles valores en cero, supone la inclusión en el procedimiento del modelo ARCH(1). En la tabla 1 de doble entrada se encuentran los diferentes procesos GARCH(1,1) simulados. Para cada uno de ellos, se consideran a su vez 20 tamaños muestrales diferentes, tal y como se comentó en el

punto anterior. En total tenemos una tabulación que responde a 300 combinaciones distintas, cada una definida para valores de  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  y T.

3. Para normalizar la varianza del proceso, para todos los modelos y tamaños muestrales  $\alpha_0 = 1 - \alpha_1 - \beta_1$ . De esta manera, la varianza no condicional del proceso es la unidad(2).

4. Para cada combinación ( $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ , T), se ejecuta el proceso básico de simulación descrito en el apartado 3.1 de este trabajo. El número de réplicas utilizado es de N = 20000 cuando T es menor que 500 y N = 15000 cuando T es igual o mayor que 500. Esta reducción en el número de réplicas responde a la intención de reducir los tiempos de computación. En cada una de estas réplicas se calcula  $\tau_1$  y  $\tau_2$ . Una vez alcanzado el número total de réplicas para cada combinación ( $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ , T), se obtienen los percentiles 90, 95 y 99 para  $\tau_1$  y los percentiles 1, 5, 10, 90, 95 y 99 para  $\tau_2$ .

**Tabla 1**

NÚMERO DE MODELOS SIMULADOS PARA LAS DIFERENTES COMBINACIONES  $\alpha_1$  Y  $\beta_1$  PARA LOS DISTINTOS TAMAÑOS MUESTRALES

		$\beta_1$					Total
		0.00	0.20	0.40	0.60	0.80	
$\alpha_1$	0.10	20	20	20	20	20	100
	0.30	20	20	20	20	0	80
	0.50	20	20	20	0	0	60
	0.70	20	20	0	0	0	40
	0.90	20	0	0	0	0	20
Total		100	80	60	40	20	300

(2) Tal y como se ha comprobado, el valor de  $\alpha_0$  no afecta a la distribución de  $\tau_1$  y  $\tau_2$ .

Un estudio interesante sobre algunas otras invariabilidades que se pueden producir en el modelo de regresión lineal puede encontrarse en Breusch (1980).

**Tabla 2**  
 TABULACIÓN DE LOS VALORES CRÍTICOS PARA  $\tau_1$ .  
 (Continúa)

$\alpha_1$	$\beta_1$	T	P <sub>90</sub>	P <sub>95</sub>	P <sub>99</sub>
0,1	0	20	6,79	11,28	30,27
0,3	0,2	20	9,75	15	35,18
0,7	0	20	19,48	28,97	102,2
0,1	0,6	70	6,03	8,41	15,88
0,5	0	70	15,78	20,36	33,74
0,1	0	120	6,09	8,27	14,6
0,3	0,2	120	10,61	13,94	22,76
0,7	0	120	34,46	41	58,27
0,1	0,6	170	6,04	8,02	13,92
0,5	0	170	21,22	26,61	40,2
0,1	0	220	6,37	8,59	14,82
0,3	0,2	220	12,29	16,56	27,92
0,7	0	220	49,54	58,02	75,69
0,1	0,6	270	6,27	8,56	14,72
0,5	0	270	26,04	32,39	46,62
0,1	0	320	6,44	8,62	15,57
0,3	0,2	320	13,41	18,08	31,82
0,7	0	320	62,83	73,6	95,58
0,1	0,6	370	6,4	8,49	14,65
0,5	0	370	29,83	37,33	53,8
0,1	0	420	6,62	8,95	15,26
0,3	0,2	420	14,41	19,79	35,04
0,7	0	420	75,88	89,09	116,22
0,1	0,6	470	6,65	8,86	15,43
0,5	0	470	33,03	41,63	61,34
0,1	0	500	6,63	8,99	15,88

TABULACIÓN DE LOS VALORES CRÍTICOS PARA  $\tau_1$ .  
(Conclusión)

$\alpha_1$	$\beta_1$	T	P <sub>90</sub>	P <sub>95</sub>	P <sub>99</sub>
0,3	0,2	500	15,09	20,52	36,46
0,7	0	500	86,72	100,64	128,81
0,1	0,6	1000	6,89	9,26	16,32
0,5	0	1000	48,09	60,5	92,3
0,1	0	1500	6,93	9,44	16,02
0,3	0,2	1500	20,91	29,36	76,68
0,7	0	1500	195,29	231,65	319,39
0,1	0,6	2000	7,3	9,85	18,07
0,5	0	2000	69,94	89,89	170,62
0,1	0	2500	6,92	9,41	16,54
0,3	0,2	2500	24,3	34,49	100,19
0,7	0	2500	294,79	357,45	508,79
0,1	0,6	3000	7,37	10,07	18,07
0,5	0	3000	87,4	112,94	224,11
0,1	0	3500	7,2	9,69	16,78
0,3	0,2	3500	26,54	39,48	118,06
0,7	0	3500	384,46	474,03	683,28
0,1	0,6	4000	7,6	10,23	18,12
0,5	0	4000	103,53	133,32	262,1
0,1	0	4500	7,29	9,95	16,56
0,3	0,2	4500	29,48	42,91	132,26
0,7	0	4500	486,87	599,28	872,05
0,1	0,6	5000	7,69	10,54	19,02

**Tabla 3**  
TABULACIÓN DE LOS VALORES CRÍTICOS PARA  $\tau_2$  .

(Continúa)

$\alpha_1$	$\beta_1$	T	P <sub>01</sub>	P <sub>05</sub>	P <sub>10</sub>	P <sub>90</sub>	P <sub>95</sub>	P <sub>99</sub>
0,1	0	20	-2,33	-1,77	-1,5	0,88	1,32	2,28
0,3	0,2	20	-3,31	-2,53	-2,22	0,34	0,78	1,81
0,7	0	20	-7,09	-3,98	-3,5	-0,69	-0,23	1,83
0,1	0,6	70	-2,75	-2,14	-1,82	0,72	1,13	2,03
0,5	0	70	-4,82	-4	-3,54	0,37	1,14	2,86
0,1	0	120	-2,58	-2	-1,68	1,37	1,92	3,13
0,3	0,2	120	-3,91	-3,17	-2,74	1,01	1,8	3,47
0,7	0	120	-7,06	-6,11	-5,64	-1,19	-0,39	1,44
0,1	0,6	170	-2,77	-2,2	-1,84	1,05	1,57	2,72
0,5	0	170	-5,71	-4,8	-4,29	0,69	1,72	3,96
0,1	0	220	-2,74	-2,09	-1,73	1,48	2,07	3,39
0,3	0,2	220	-4,17	-3,42	-2,98	1,39	2,34	4,42
0,7	0	220	-8,38	-7,43	-6,86	-1,46	-0,48	1,79
0,1	0,6	270	-2,86	-2,23	-1,87	1,24	1,8	3,07
0,5	0	270	-6,32	-5,31	-4,76	0,94	2,19	4,66
0,1	0	320	-2,83	-2,15	-1,78	1,58	2,19	3,47
0,3	0,2	320	-4,52	-3,61	-3,12	1,58	2,62	5,06
0,7	0	320	-9,55	-8,43	-7,81	-1,69	-0,47	1,95
0,1	0,6	370	-2,9	-2,26	-1,88	1,29	1,87	3,27
0,5	0	370	-6,76	-5,73	-5,13	1,03	2,43	5,42
0,1	0	420	-2,81	-2,14	-1,76	1,59	2,2	3,57
0,3	0,2	420	-4,67	-3,75	-3,25	1,77	2,88	5,55
0,7	0	420	-10,47	-9,24	-8,56	-1,85	-0,48	2,11
0,1	0,6	470	-2,94	-2,26	-1,87	1,38	1,99	3,38
0,5	0	470	-7,17	-6,03	-5,38	1,15	2,66	6,12
0,1	0	500	-2,85	-2,19	-1,79	1,66	2,23	3,61
0,3	0,2	500	-4,71	-3,83	-3,32	1,89	3,04	6,07
0,7	0	500	-11,18	-9,88	-9,1	-1,95	-0,5	2,61

**Tabla 3**  
TABULACIÓN DE LOS VALORES CRÍTICOS PARA  $\tau_2$  .

$\alpha_1$	$\beta_1$	T	$P_{01}$	$P_{05}$	$P_{10}$	$P_{90}$	$P_{95}$	$P_{99}$	(Conclusión)
0,1	0,6	1000	-3,11	-2,33	-1,9	1,56	2,18	3,67	
0,5	0	1000	-8,73	-7,34	-6,56	1,79	3,86	9,04	
0,1	0	1500	-3,08	-2,28	-1,84	1,77	2,38	3,68	
0,3	0,2	1500	-5,58	-4,46	-3,83	2,66	4,16	8,36	
0,7	0	1500	-18,04	-15,2	-13,95	-3,17	-0,92	3,83	
0,1	0,6	2000	-3,2	-2,4	-1,95	1,67	2,34	3,83	
0,5	0	2000	-10,61	-8,84	-7,9	2,31	5,18	11,77	
0,1	0	2500	-3,14	-2,31	-1,86	1,77	2,38	3,6	
0,3	0,2	2500	-6	-4,8	-4,11	3	4,87	9,65	
0,7	0	2500	-22,83	-18,83	-17,05	-3,74	-0,83	5,52	
0,1	0,6	3000	-3,23	-2,39	-1,95	1,8	2,42	3,82	
0,5	0	3000	-11,87	-9,84	-8,77	2,77	5,89	13,63	
0,1	0	3500	-3,18	-2,35	-1,88	1,83	2,41	3,67	
0,3	0,2	3500	-6,24	-4,97	-4,24	3,18	5,14	10,71	
0,7	0	3500	-26,61	-21,71	-19,65	-4,24	-0,93	6,5	
0,1	0,6	4000	-3,27	-2,43	-1,98	1,78	2,48	4,04	
0,5	0	4000	-13,35	-10,76	-9,5	3,05	6,62	15,07	
0,1	0	4500	-3,21	-2,34	-1,86	1,82	2,46	3,7	
0,3	0,2	4500	-6,49	-5,1	-4,35	3,39	5,42	11,53	
0,7	0	4500	-29,74	-24,25	-21,89	-5,01	-1,04	7,81	
0,1	0,6	5000	-3,29	-2,43	-1,98	1,82	2,48	4,01	

En la tabla 2 y 3 se encuentran los resultados del proceso de simulación descrito. En la tabla 2 para el estadístico  $\tau_1$  y en la tabla 3 para el estadístico  $\tau_2$ . Por motivos de espacio, no se han incluido las 300 combinaciones de  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  y T, sino tan solo algunas de ellas.

El proceso de simulación que se acaba de describir corresponde a lo que se ha denominado estrategia I. Sin embargo, esta estrategia tiene el inconveniente de que no todas las combinaciones posibles de  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  y T están tabuladas. Por este motivo, y para incrementar la precisión de aquellas combinaciones que no están tabuladas, se podría emplear lo que hemos denominado estrategia III, que consistiría en realizar tan solo el punto 4 de este proceso, donde la combinación de  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  y T se obtendría a partir de la estimación de un proceso concreto. En el ejemplo del apartado 5 se verá con más detalle la aplicación de cada una de estas estrategias.

## 4.2 Estrategia II: Estimación de la regresión de la superficie de respuesta

La estimación de la función de respuesta se basa en el hecho de que los valores críticos quedan explicados por la función de respuesta  $\psi(T, \theta, \lambda)$ , donde  $\psi$  es una determinada forma funcional,  $\theta$  es un vector de parámetros de interés, que define el proceso generador de los datos, en nuestro caso un GARCH(1,1), y  $\lambda$  otro vector de parámetros del que depende la forma funcional  $\psi$ .

En este trabajo se estiman 9 regresiones de la superficie de respuesta para los percentiles 90, 95 y 99 de los estadísticos  $\tau_1$  y  $\tau_2$  respectivamente, además de los percentiles 1, 5 y 10 del estadístico  $\tau_2$ . La base de datos utilizada para la estimación de cada una de las regresiones es la generada mediante simulación y tabulada para ambos contrastes, tal y como se vio en el epígrafe anterior.

Ya se ha comentado que en ocasiones los valores críticos dependen exclusivamente del tamaño muestral. En este caso, la identificación del modelo de regresión de la superficie de respuesta es relativamente sencilla. Además, las estimaciones de los valores críticos pueden ser realizadas para cualquier tamaño  $T$ , en tanto en cuanto, la forma funcional recíproca que suele adoptarse en la mayoría de las ocasiones, hace que los valores críticos converjan a medida que  $T$  aumenta, lo que suele ocurrir para valores de  $T$  no muy elevados. Sin embargo, las estimaciones que se realizan en este trabajo no cuentan con estas ventajas. Por un lado, los valores críticos no solo dependen del tamaño muestral, sino que dependen igualmente de los parámetros  $\alpha_1$  y  $\beta_1$  del proceso GARCH(1,1), de forma tal que en nuestro caso  $\theta = (\alpha_1, \beta_1)$ . Por otro lado, debido a la lenta convergencia que se produce en la estimaciones de (3), las regresiones estimadas sólo pueden ser utilizadas en el rango de variación de  $T$  que se manifiesta en la muestra, que para este caso está comprendido entre 20 y 5000.

Como consecuencia de estos problemas, la estimación de las regresiones de la superficie de respuesta adquiere una dificultad añadida a la hora de su especificación. Se ha optado por la generación de múltiples regresores construidos a partir de combinaciones de  $T$ ,  $\alpha_1$  y  $\beta_1$  y seleccionados aquellos que se mantienen en la regresión después de aplicar el procedimiento *stepwise* de selección de regresores(3). Concretamente el número de regresores construidos ha sido 54. De esta manera el modelo general, antes de la aplicación del proceso de selección *stepwise*, sería el siguiente:

$$P_k = \gamma_0 + \gamma_1 z_{1,k} + \dots + \gamma_{54} z_{54,k} + v_k \quad k = 1, \dots, 300 \quad (11)$$

(3) Se ha seguido el procedimiento *stepwise* descrito en Bowerman y O'Connell (1993).

donde  $P_k$  es el percentil correspondiente y  $z_{l,k}; l=1, \dots, 54$  los regresores(4). El criterio que sigue el procedimiento *stepwise* para la inclusión o eliminación de una variable explicativa del modelo, depende del nivel de significación que se fija para el contraste t-Student de significación individual de los coeficientes del modelo. El nivel de significación utilizado en las nueve regresiones estimadas en este trabajo ha sido distinto para cada una de ellas. Se han seleccionado aquellos niveles de significación que obtienen unas medidas de bondad del ajuste correctas, pero que al mismo tiempo supongan especificaciones lo más simples posible, aspecto complicado debido al alto grado de multicolinealidad presente entre los diferentes regresores. En cualquier caso, el nivel de significación nunca ha sido superior al 1% para cada una de las regresiones, garantizándose, por tanto, un alto grado de significatividad de los coeficientes de los regresores elegidos. En la tabla 4 y 5 se presentan la estimación de las nueve regresiones de la superficie de respuesta para los regresores finalmente seleccionados. Tal y como se puede apreciar, la especificación para los percentiles de  $\tau_1$  (tabla 4) es más sencilla y estable entre ellas, que para el caso de los percentiles de  $\tau_2$  (tabla 5). En el caso de  $\tau_1$  la misma especificación sirve para los percentiles 90, 95 y 99. Esto no ocurre para  $\tau_2$  donde cada percentil cuenta con una especificación diferente. Además éstas tienen generalmente un mayor número de regresores, salvo en el caso del percentil 5 y 10.

**Tabla 4**

ESTIMACIÓN DE LA SUPERFICIE DE RESPUESTA PARA LOS VALORES CRÍTICOS DEL CONTRASTE DEL SESGO ( $H_0 : \delta_0 = 0, \delta_1 = 1$ ).

	Percentil 90	Percentil 95	Percentil 99
Regresor	Coficiente	Coficiente	Coficiente
Constante	14.21686	17.64206	27.93332
$T\alpha_1^2$	-0.241801	-0.248045	-0.149617
$T\alpha_1^3$	0.696549	0.773843	0.812103
$\sqrt{T}\alpha_1^4\beta_1$	53.51168	54.31537	45.46726
	$R^2 = 0.99$	$R^2 = 0.99$	$R^2 = 0.99$

(4) Por motivos de espacio no se presenta la totalidad de los regresores utilizados, sino tan solo los seleccionados. El lector interesado en conocer el resto de regresores, puede, con este fin, ponerse en contacto con los autores.

**Tabla 5**

ESTIMACIÓN DE LA SUPERFICIE DE RESPUESTA PARA LOS VALORES CRÍTICOS DEL CONTRASTE DE LA PENDIENTE DE (3) ( $H_0 : \delta_1 = 1$ )

Percentil 01		Percentil 05		Percentil 10	
Regresor	Coefficiente	Regresor	Coefficiente	Regresor	Coefficiente
Constante	-2.199736	Constante	-1.524850	Constante	-1.153960
$\alpha_1^2$	-8.540202	$\alpha_1\beta_1$	-11.21435	$\alpha_1\beta_1$	-11.44295
$\alpha_1\beta_1$	-11.57326	$\sqrt{T}\alpha_1^2$	-0.724222	$\sqrt{T}\alpha_1^2$	-0.675545
$T\alpha_1^2$	-0.016637				
$(T\alpha_1)^2$	1.36E-06				
R <sup>2</sup> = 0.99		R <sup>2</sup> = 0.99		R <sup>2</sup> = 0.99	
Percentil 90		Percentil 95		Percentil 99	
Regresor	Coefficiente	Regresor	Coefficiente	Regresor	Coefficiente
Constante	1.493813	Constante	1.046793	Constante	-2.991389
1/T	-20.45834	$\alpha_1$	6.029015	$\alpha_1$	-20.41430
$(\alpha_1\beta_1)^3$	-308.5586	$\alpha_1^2$	-7.759182	$\sqrt{\alpha_1}$	24.35235
$T\alpha_1$	0.001880	$T^2$	-8.17E-08	$T^2$	-2.27E-07
$\sqrt{T}\alpha_1^4$	-0.655686	1/T	-17.23238	$(\alpha_1\beta_1)^3$	-547.2185
$(T\alpha_1\beta_1)^2$	-3.40E-06	$\alpha_1\beta_1$	11.24630	$T\alpha_1$	0.010289
$\sqrt{T}\alpha_1^4$	-2.768708	$(\alpha_1\beta_1)^2$	-132.4358	$T\alpha_1^3$	-0.009616
		$T\alpha_1$	0.006563	$\sqrt{T}\alpha_1^4$	-0.438972
		$T\alpha_1^2$	-0.006250	$T^2\beta_1$	2.35E-07
		$\sqrt{T}\alpha_1^4$	-0.441997	$(T\alpha_1\beta_1)^2$	-1.03E-05
		$(T\alpha_1\beta_1)^2$	-4.61E-06	$\sqrt{T}\alpha_1^4$	-3.660739
		$\sqrt{T}\alpha_1^4\beta_1$	-2.832510		
R <sup>2</sup> = 0.99		R <sup>2</sup> = 0.99		R <sup>2</sup> = 0.97	

Sustituyendo  $T$ ,  $\alpha_1$  y  $\beta_1$  por las cantidades de interés en las columnas "regresor" de las tablas 4 y 5 se obtiene el valor de los regresores. Y sumando el producto de cada uno de ellos por su coeficiente correspondiente se obtiene la predicción del percentil considerado, predicción que se utilizará como valor crítico. A estos valores, dependiendo del percentil que predican, se les ha denominado  $VC_{01}$ ,  $VC_{05}$ ,  $VC_{10}$ ,  $VC_{90}$ ,  $VC_{95}$  y  $VC_{99}$

Para determinar el tamaño de los estadísticos de contraste  $\tau_1$  y  $\tau_2$  (i.e., la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando es cierta) cuando se usan los valores críticos obtenidos a partir de las regresiones de la superficie de respuesta, hemos procedido a la simulación de diferentes procesos GARCH(1,1) para diferentes tamaños muestrales y valores de  $\alpha_1$  y  $\beta_1$ . Cada uno de estos procesos ha sido replicado 20000 veces, y obtenido en cada una de estas réplicas los estadísticos de contraste  $\tau_1$  y  $\tau_2$  respectivamente, los cuales han sido comparados a su vez con los valores críticos obtenidos a partir de las regresiones de la superficie de respuesta cuyas estimaciones aparecen en la tabla 4 y 5.

**Tabla 6**

TAMAÑO DEL CONTRASTE PARA LA DISTRIBUCIÓN EMPÍRICA DE  $\tau_1$

(Continúa)

$\alpha_1$	$\beta_1$	T	vc90	f90	vc95	f95	vc99	f99
0,1	0,2	50	14,14	0,986	17,56	0,992	27,91	0,997
0,1	0,5	50	14,15	0,984	17,58	0,991	27,92	0,998
0,1	0,8	50	14,16	0,977	17,59	0,987	27,92	0,996
0,4	0,2	50	16,45	0,955	20,1	0,973	30,98	0,991
0,4	0,5	50	19,35	0,944	23,05	0,962	33,45	0,983
0,7	0,2	50	38,41	0,966	43,28	0,974	53,63	0,982
0,1	0,2	100	14,06	0,988	17,48	0,996	27,87	0,999
0,1	0,5	100	14,07	0,989	17,5	0,995	27,89	0,999
0,1	0,8	100	14,09	0,985	17,51	0,993	27,9	0,998
0,4	0,2	100	17,55	0,951	21,41	0,973	33,06	0,995
0,4	0,5	100	21,66	0,947	25,58	0,969	36,56	0,989
0,7	0,2	100	51,96	0,978	58,11	0,985	70,29	0,99
0,1	0,2	500	13,38	0,983	16,81	0,991	27,61	0,998
0,1	0,5	500	13,42	0,984	16,85	0,992	27,64	0,998
0,1	0,8	500	13,45	0,982	16,89	0,992	27,67	0,999
0,4	0,2	500	23,29	0,9	28,78	0,943	47,16	0,988
0,4	0,5	500	32,48	0,864	38,11	0,927	54,96	0,989
0,7	0,2	500	131,89	0,971	147,91	0,988	179,37	0,997

Tabla 6

TAMAÑO DEL CONTRASTE PARA LA DISTRIBUCIÓN EMPÍRICA DE  $\tau_1$ 

(Conclusión)

$\alpha_1$	$\beta_1$	T	vc90	f90	vc95	f95	vc99	f99
0,1	0,2	1000	12,53	0,98	15,97	0,99	27,28	0,997
0,1	0,5	1000	12,58	0,978	16,02	0,99	27,32	0,997
0,1	0,8	1000	12,63	0,971	16,07	0,987	27,36	0,997
0,4	0,2	1000	28,77	0,875	36,27	0,929	63,33	0,987
0,4	0,5	1000	41,77	0,772	49,47	0,864	74,37	0,982
0,7	0,2	1000	215,91	0,955	244,01	0,98	302,22	0,996
0,1	0,2	2500	9,97	0,953	13,43	0,979	26,27	0,997
0,1	0,5	2500	10,05	0,95	13,51	0,979	26,34	0,997
0,1	0,8	2500	10,13	0,922	13,59	0,96	26,41	0,991
0,4	0,2	2500	42,64	0,875	56,14	0,935	109,66	0,987
0,4	0,5	2500	63,19	0,632	77	0,759	127,12	0,972
0,7	0,2	2500	443,78	0,922	507,77	0,961	650,2	0,991
0,1	0,2	5000	5,69	0,843	9,19	0,941	24,58	0,997
0,1	0,5	5000	5,8	0,841	9,3	0,937	24,67	0,996
0,1	0,8	5000	5,91	0,784	9,42	0,897	24,77	0,987
0,4	0,2	5000	63,05	0,887	86,5	0,947	184,57	0,987
0,4	0,5	5000	92,11	0,536	116	0,694	209,26	0,971
0,7	0,2	5000	798,09	0,895	921,5	0,946	1208,51	0,988
Media:				0,91		0,95		0,99
Desv. Típica:				0,1		0,06		0,01

Tabla 7

TAMAÑO DEL CONTRASTE PARA LA DISTRIBUCIÓN EMPÍRICA DE  $\tau_2$ 

(Continúa)

$\alpha_1$	$\beta_1$	T	vc <sub>01</sub>	f <sub>01</sub>	vc <sub>05</sub>	f <sub>05</sub>	vc <sub>10</sub>	f <sub>10</sub>	vc <sub>90</sub>	f <sub>90</sub>	vc <sub>95</sub>	f <sub>95</sub>	vc <sub>99</sub>	f <sub>99</sub>
0,1	0,2	50	-2,52	0,01	-1,8	0,07	-1,43	0,15	1,09	0,91	1,43	0,95	2,71	0,99
0,1	0,5	50	-2,87	0	-2,14	0,04	-1,77	0,1	1,05	0,94	1,49	0,97	2,65	1
0,1	0,8	50	-3,22	0,01	-2,47	0,05	-2,12	0,1	0,93	0,98	1,31	0,99	2,44	1
0,4	0,2	50	-4,62	0	-3,24	0,05	-2,83	0,11	0,75	0,94	1,82	0,99	3,93	1
0,4	0,5	50	-6,01	0,01	-4,59	0,01	-4,21	0,02	-1,72	0,66	-1,43	0,77	-0,37	0,97
0,7	0,2	50	-8,41	0,01	-5,6	0,02	-5,1	0,04	-1,75	0,91	-1,54	0,94	-0,2	0,99
0,1	0,2	100	-2,53	0,01	-1,82	0,07	-1,45	0,15	1,3	0,91	1,63	0,94	2,76	0,99
0,1	0,5	100	-2,88	0,01	-2,16	0,04	-1,79	0,1	1,27	0,93	1,69	0,96	2,7	0,99
0,1	0,8	100	-3,23	0,01	-2,49	0,04	-2,14	0,09	1,15	0,98	1,51	0,99	2,49	1
0,4	0,2	100	-4,76	0,01	-3,58	0,06	-3,15	0,12	0,9	0,93	2	0,98	4,01	1

Tabla 7

TAMAÑO DEL CONTRASTE PARA LA DISTRIBUCIÓN EMPÍRICA DE  $\tau_2$ 

(Conclusión)

$\alpha_1$	$\beta_1$	T	VC <sub>01</sub>	f <sub>01</sub>	VC <sub>05</sub>	f <sub>05</sub>	VC <sub>10</sub>	f <sub>10</sub>	VC <sub>90</sub>	f <sub>90</sub>	VC <sub>95</sub>	f <sub>95</sub>	VC <sub>99</sub>	f <sub>99</sub>
0,4	0,5	100	-6,14	0,01	-4,93	0,01	-4,52	0,02	-1,63	0,79	-1,32	0,87	-0,37	0,97
0,7	0,2	100	-8,81	0,01	-6,64	0,02	-6,07	0,05	-2,33	0,92	-2	0,95	-0,83	0,99
0,1	0,2	500	-2,6	0,02	-1,91	0,08	-1,53	0,15	1,54	0,89	1,98	0,94	3,12	0,98
0,1	0,5	500	-2,94	0,01	-2,25	0,05	-1,88	0,1	1,5	0,9	2,04	0,95	3,07	0,98
0,1	0,8	500	-3,29	0,01	-2,58	0,04	-2,22	0,09	1,38	0,93	1,85	0,96	2,86	0,99
0,4	0,2	500	-5,77	0,01	-5,01	0,05	-4,49	0,1	0,97	0,88	2,44	0,95	4,98	0,98
0,4	0,5	500	-7,16	0,01	-6,36	0,04	-5,86	0,09	-1,84	0,9	-1,18	0,95	0,19	0,99
0,7	0,2	500	-11,91	0,01	-11,03	0,04	-10,16	0,11	-5,25	0,88	-4,28	0,94	-2,84	0,98
0,1	0,2	1000	-2,67	0,02	-1,98	0,08	-1,6	0,14	1,65	0,9	2,23	0,95	3,5	0,99
0,1	0,5	1000	-3,02	0,01	-2,31	0,05	-1,94	0,09	1,61	0,9	2,28	0,95	3,48	0,99
0,1	0,8	1000	-3,36	0,01	-2,65	0,04	-2,28	0,09	1,47	0,91	2,08	0,95	3,29	0,99
0,4	0,2	1000	-6,94	0,01	-6,09	0,04	-5,49	0,07	1,07	0,87	2,95	0,94	6,27	0,98
0,4	0,5	1000	-8,32	0,02	-7,43	0,07	-6,86	0,14	-2,03	0,93	-0,99	0,97	1,01	0,99
0,7	0,2	1000	-15,49	0,02	-14,32	0,06	-13,22	0,13	-7,31	0,88	-5,87	0,95	-3,78	0,99
0,1	0,2	2500	-2,85	0,02	-2,11	0,07	-1,72	0,12	1,94	0,91	2,69	0,96	4,05	0,99
0,1	0,5	2500	-3,19	0,01	-2,45	0,04	-2,06	0,08	1,85	0,91	2,69	0,96	4,29	0,99
0,1	0,8	2500	-3,54	0,01	-2,78	0,05	-2,41	0,09	1,65	0,9	2,39	0,95	4,26	0,99
0,4	0,2	2500	-9,78	0	-8,22	0,01	-7,47	0,03	1,52	0,86	4,34	0,94	9,68	0,99
0,4	0,5	2500	-11,17	0,02	-9,56	0,13	-8,85	0,22	-2,56	0,93	-0,82	0,97	2,46	1
0,7	0,2	2500	-24,21	0,02	-20,84	0,09	-19,31	0,17	-11,01	0,89	-8,92	0,95	-5,09	0,99
0,1	0,2	5000	-3,01	0,01	-2,26	0,06	-1,86	0,1	2,38	0,95	2,61	0,96	3,15	0,98
0,1	0,5	5000	-3,35	0,01	-2,6	0,04	-2,2	0,07	2,16	0,93	2,43	0,95	4,3	0,99
0,1	0,8	5000	-3,7	0,01	-2,93	0,05	-2,55	0,08	1,71	0,88	1,79	0,89	4,84	0,99
0,4	0,2	5000	-12,35	0	-10,62	0,01	-9,71	0,01	2,36	0,88	5,79	0,95	13,2	0,99
0,4	0,5	5000	-13,73	0,05	-11,96	0,16	-11,09	0,26	-4,31	0,91	-2,72	0,95	0,23	0,98
0,7	0,2	5000	-32,06	0,03	-28,19	0,11	-26,16	0,2	-14,98	0,9	-13,32	0,94	-8,31	0,99
Media:				0,01		0,05		0,11		0,9		0,95		0,99
Desv. Típica:				0,01		0,03		0,05		0,05		0,04		0,01

En la tabla 6 y 7 se pueden observar los tamaños de los dos contrastes para diferentes niveles de significación representados por  $f_{90}$ ,  $f_{95}$  y  $f_{99}$  y que se calculan como la proporción en que los estadísticos  $\tau_1$  y  $\tau_2$  caen a la derecha de los valores críticos  $VC_{90}$ ,  $VC_{95}$  y  $VC_{99}$  respectivamente. Además, en la tabla 7 están los tamaños  $f_{01}$ ,  $f_{05}$ , y  $f_{10}$  que corresponden con la proporción de veces en que el estadístico  $\tau_2$  cae a la izquierda de los valores críticos  $VC_{01}$ ,  $VC_{05}$ ,  $VC_{10}$ .

Tal y como se puede ver, aún cuando los valores medios de los tamaños corresponden con sus valores esperados (0,01, 0,05, 0,10, 0,90, 0,95 y 0,99) tanto para  $\tau_1$  como para  $\tau_2$ , existe una mayor variabilidad en el caso de la distribución de  $\tau_1$  que en el de la de  $\tau_2$ , medidas a través de sus correspondientes desviaciones típicas. Entre mayor es la variabilidad, menor es la fiabilidad que nos propor-

ciona el valor crítico. Esto se debe principalmente a que el rango de variación de la distribución de  $\tau_2$  es mucho menor que la de  $\tau_1$ . Así, se produce una mayor dificultad a la hora de predecir los valores críticos para  $\tau_1$ , sobre todo cuando éstos toman valores pequeños, lo que especialmente se produce para el caso del percentil 90 y 95. Para el caso del percentil 99 este problema no es tan evidente, y la dispersión que se produce en el tamaño del contraste es parecida al caso de  $\tau_2$ . Por tanto, la determinación de un nivel de significación del 99% supondrá una mayor seguridad en los resultados del contraste que en el caso de niveles del 90% o, 95% en el caso de  $\tau_1$ .

Si comparamos esta característica de la estrategia II con la estrategia III, comprobamos que la fiabilidad de esta última estrategia es claramente superior. En la tablas 8 y 9 tenemos los resultados de calcular el tamaño de los estadísticos de contrastes  $\tau_1$  y  $\tau_2$  en el caso de seguir la estrategia III y para los modelos sombreados en la tabla 2 y 3. Se puede apreciar claramente que el tamaño para todos estos modelos coincide exactamente con sus correspondientes valores teóricos, presentando una variabilidad nula y, por tanto, una fiabilidad máxima. Idénticos resultados se obtendrían para cualquiera otro modelo de los utilizados en las tablas 2 y 3.

**Tabla 8**TAMAÑO DEL CONTRASTE PARA LA DISTRIBUCIÓN EMPÍRICA DE  $\tau_1$ 

$\alpha_1$	$\beta_1$	T	vc90	f90	vc95	f95	vc99	f99
0,3	0,2	120	10,61	0,9	13,94	0,95	22,76	0,99
0,7	0	320	62,83	0,9	73,6	0,95	95,58	0,99
0,1	0,6	2000	7,3	0,9	9,85	0,95	18,07	0,99

**Tabla 9**TAMAÑO DEL CONTRASTE PARA LA DISTRIBUCIÓN EMPÍRICA DE  $\tau_2$ 

$\alpha_1$	$\beta_1$	T	VC <sub>01</sub>	f <sub>01</sub>	VC <sub>05</sub>	f <sub>05</sub>	VC <sub>10</sub>	f <sub>10</sub>	VC <sub>90</sub>	f <sub>90</sub>	VC <sub>95</sub>	f <sub>95</sub>	VC <sub>99</sub>	f <sub>99</sub>
0,3	0,2	120	-3,94	0,01	-3,17	0,05	-2,74	0,1	1,01	0,9	1,8	0,95	3,47	0,99
0,7	0	320	-9,55	0,01	-8,43	0,05	-7,81	0,1	-1,69	0,9	-0,47	0,95	1,95	0,99
0,1	0,6	2000	-3,2	0,01	-2,4	0,05	-1,95	0,1	1,67	0,9	2,34	0,95	3,83	0,99

## 5. EJEMPLO

Para ilustrar el cálculo de los valores críticos en el contraste del sesgo utilizando las estrategias descritas en este trabajo, se ha simulado un proceso estocástico  $\varepsilon_t$  como un GARCH(1,1) con  $\alpha_1 = 0.2$ ,  $\beta_1 = 0.6$ ,  $\alpha_0 = 1 - \alpha_1 - \beta_1$  y  $T=1250$ . La estimación por máxima verosimilitud de este proceso se puede ver en la tabla 10.

**Tabla 10**

ESTIMACIÓN DEL PROCESO GARCH (1,1) PARA  $T = 1250$ ,  $\alpha_1 = 0.2$  y  $\beta_1 = 0.6$

<i>Párametro</i>	<i>Estimación</i>
$\alpha_0$	0,260457 (0,06219)
$\alpha_1$	0,236796 (0,045633)
$\beta_1$	0,517738 (0,08341)
$\delta_0$	0,241719 (0,099244)
$\delta_1$	0,753826 (0,085941)
$\tau_1$	8,324211
$\tau_2$	(2,864463)

Entre paréntesis se presentan las desviaciones típicas de las estimaciones

Las variables que intervienen en la recta de la regresión auxiliar del contraste del sesgo se obtienen para el caso de la variable endógena ( $\varepsilon_t^2$ ), elevando al cuadrado el proceso simulado  $\varepsilon_t$ . Y en el caso del regresor, sustituyendo los resultados de la estimación de  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  y  $\alpha_0$  en la ecuación (2), obteniendo a partir de ello los valores de  $h_t$ . La estimación de la ordenada en el origen ( $\delta_0$ ) y de la pendiente ( $\delta_1$ ) se presentan en la tabla 10. La estimación de la pendiente, tal y como era de esperar, presenta un valor sensiblemente inferior a la unidad. Además, en esta misma tabla se tienen los valores que toman los estadísticos  $\tau_1$  y  $\tau_2$  para el contraste  $H_0 : \delta_0 = 0$ ,  $\delta_1 = 1$  y  $H_0 : \delta_1 = 1$  respectivamente.

Una vez calculados los valores de  $\tau_1$  y  $\tau_2$ , estos deben ser comparados con los valores críticos determinados según el nivel de significación elegido.

**Tabla 11**  
VALORES CRÍTICOS PARA CADA ESTRATEGIA

<i>Valores críticos para <math>\tau_1</math></i>					
Percentil	Estrategia tradicional	Estrategia I (T=1000)	Estrategia I (T=1500)	Estrategia II	Estrategia III
90	2,71	29,5	36,53	16,91	16,3
95	3,84	35,86	43,91	23,84	22,18
99	6,63	49,05	59,24	44,13	41,02
<i>Valores críticos para <math>\tau_2</math></i>					
Percentil	Estrategia tradicional	Estrategia I (T=1000)	Estrategia I (T=1500)	Estrategia II	Estrategia III
1	-2,33	-6,59	-7,43	-5,14	-4,95
5	-1,65	-5,72	-6,45	-4,34	-3,97
10	-1,28	-5,22	-5,88	-3,9	-3,45
90	1,28	-0,68	-0,71	1,15	1,87
95	1,65	0,18	0,28	2,47	3,18
99	2,33	2,04	2,42	5,24	6,29

En la tabla 11 se presentan los resultados de las tres estrategias para diferentes percentiles de las distribuciones correspondientes. Además, se añaden los valores críticos que se obtendrían en el caso de considerar que  $\tau_1$  y  $\tau_2$  se distribuyen como una  $\chi^2_2$  y una t-Student de T-2 grados de libertad, respectivamente. A este caso se le ha denominado estrategia tradicional.

Tal y como se puede observar en la tabla 11, la estrategia tradicional rechaza, para los niveles de significación del 10%, 5% y 1%, la hipótesis nula del contraste del sesgo. Se llega al mismo resultado cuando se contrasta la igualdad a la unidad de  $\delta_1$  en un contraste de una cola. Estos resultados ponen en evidencia la utilización de las distribuciones chi-cuadrado y t-Student a la hora de comparar los valores críticos debido a la sesgidez que presenta la estimación de la recta auxiliar, persistente aún en un estimador consistente para tamaños muestrales elevados, en este caso T=1250.

Los resultados de las estrategias I, II y III son claramente diferentes. En todas ellas no se rechaza las hipótesis nula, tanto la del contraste del sesgo como la de

igualdad a la unidad de  $\delta_1$ . Los valores críticos para la estrategia I se han obtenido acudiendo a la tabulación que se ha realizado para los diferentes modelos que se presentan en la tabla 1, de los cuales algunos resultados se han presentado en las tablas 2 y 3. Centrándose en los valores estimados de  $\alpha_1$  y  $\beta_1$ , el modelo más cercano en la tabla 1 es aquel donde  $\alpha_1 = 0.30$  y  $\beta_1 = 0.60$ . En cuanto al tamaño muestral  $T = 1250$ , está equidistante de  $T=1000$  y  $T=1500$ , por esta razón en la tabla 11 la estrategia I aparece con estas dos alternativas.

Los valores críticos de la estrategia II se han obtenido a partir de los resultados de la estimación de la regresión de la superficie de respuesta presentados en las tablas 4 y 5 para ambos contrastes. El procedimiento consiste tan solo en sustituir los valores de  $\alpha_1$  y  $\beta_1$  estimados de la tabla 10 y  $T=1250$  en las columnas "regresor" de las tablas 4 y 5 y obtener el valor predicho para tales valores.

Finalmente, en la estrategia III, los valores críticos se obtienen a partir de la ejecución del proceso básico de simulación descrito para la tabulación de los mismos, pero en este caso tan solo para los valores estimados de  $\alpha_1$  y  $\beta_1$  presentados de la tabla 10 y  $T=1250$ .

Tal y como se puede apreciar en la tabla 11, los resultados de las estrategias II y III son muy similares, aún así, teniendo en cuenta los resultados presentados en las tablas 6,7,8 y 9 se ha visto que existe una mayor fiabilidad en la utilización de la estrategia III que en la II. Como contrapartida, el tiempo de computación de la estrategia II es prácticamente inmediato, lo contrario de lo que ocurre en el caso de la estrategia III. Sólo en el caso, muy difícil de producirse en la práctica, de que la estimación del modelo GARCH(1,1) coincida exactamente con los valores tabulados en la estrategia I se eliminarían estos tiempos de computación. En este caso coincidirían los resultados de la estrategia I y III.

## 6. CONCLUSIONES

La lenta convergencia que presenta la estimación de los coeficientes en la regresión auxiliar del contraste del sesgo, hace que éste no sea un instrumento válido a la hora de contrastar la capacidad predictiva de la volatilidad de un modelo GARCH. Mediante la utilización de procesos de simulación podemos afrontar este problema. Se han diseñado tres estrategias a seguir en el cálculo de los valores críticos. De las tres estrategias, la I es la menos fiable a menos que se plantee sobre un modelo cuyas estimaciones se aproximen suficientemente a los valores tabulados. Por tanto, no es aconsejable el uso de la misma. Las estrategias II y III son más convincentes dado sus resultados. La estrategia II presenta dos desventajas. En primer lugar, la dependencia de los valores críticos no solo del tamaño muestral  $T$ , sino igualmente de  $\alpha_1$  y  $\beta_1$  en el caso del modelo GARCH(1,1), hace

que la especificación de la regresión de la superficie de respuesta sea un proceso complicado. Mediante la generación de diferentes regresores, todas las combinaciones de todos o algunos de estos parámetros, y utilizando el mecanismo de selección de regresores *stepwise*, se han obtenido las especificaciones presentadas en este trabajo. En segundo lugar, la lenta convergencia que presenta la estimación de la regresión auxiliar del contraste del sesgo, ha supuesto la no obtención de los valores críticos convergentes para tamaños muestrales lo suficientemente grandes. Esto supone una restricción a la hora de usar las estimaciones de las regresiones de las superficies, de respuesta, ya que los valores críticos solo pueden ser obtenidos para tamaños muestrales no superiores a 5000. En cualquier caso, este tamaño engloba la mayoría de los trabajos que normalmente se presentan en el ámbito empírico para este tipo de modelos. Además, esta estrategia produce diferencias en la fiabilidad de los valores críticos dependiendo del contraste utilizado, tal y como quedó de manifiesto en el cálculo del tamaño de los mismos. Los valores críticos para  $\tau_2$  ( $H_0: \delta_1 = 1$ ), son más precisos que para  $\tau_1$  ( $H_0: \delta_0 = 0, \delta_1 = 1$ ).

Sin embargo, la estrategia II tiene la ventaja de que una vez estimada la regresión de la superficie de respuesta, el cálculo de los valores críticos es prácticamente inmediata, a diferencia de la estrategia III que tiene como desventaja precisamente el tiempo computacional que precisa para calcular estos valores. Esta desventaja es compensada por su fiabilidad. Tal y como se vio en el cálculo del tamaño de los estadísticos de contraste  $\tau_1$  y  $\tau_2$ . Aún así, las diferencias entre ambas estrategias no suelen ser muy grandes, y la decisión de utilizar una u otra depende de la elección que se juzgue más deseable entre fiabilidad o rapidez de cómputo.

## REFERENCIAS

- ANDERSEN, T. G. Y BOLLERSLEV, T. (1998): «Answering the skeptics: Yes, standard volatility models do provide accurate forecasts», *International Economic Review*, 39, 885-905.
- BOLLERSLEV, T. (1986): «Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity», *Journal of Econometrics*, 31, 307-327.
- BOLLERSLEV, T., CHOU, R. Y KRONER, K. (1992). «ARCH modeling in finance. A review of the theory and empirical evidence», *Journal of Econometrics*, 52, 5-59.
- BOWERMAN, B.L. Y O'CONNELL, R.T. (1993): «Forecasting and time series. An applied approach», Belmont, California: Duxbury Press.

- BREUSCH, T.S. (1980): «Useful invariance results from generalized regression models», *Journal of Econometrics*, 13, 327-340.
- DAVIDSON, R. Y MACKINNON, J.G. (1993): «Estimation and inference in econometrics», Oxford University Press.
- DICKEY, D.A. Y FULLER, W.A. (1979): «Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root», *Journal of the American Statistical Association*, 74, 427-431.
- DICKEY, D.A. Y FULLER, W.A. (1981): «Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit root», *Econometrica*, Vol.49, 1057-1072.
- ENGLE, R.F. (1982): «Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflations», *Econometrica*, 50, 987-1008.
- EVANS, G.B.A. Y SAVIN, N.E. (1981): «Testing for unit roots: I», *Econometrica*, 49, 753-779.
- EVANS, G.B.A. Y SAVIN, N.E. (1984): «Testing for unit roots: II», *Econometrica*, 52, 1241-1269.
- LÓPEZ, J.A. (2001): «Evaluating the predictive accuracy of volatility models», *Journal of Forecasting*, 20, 87-109.
- LOUDON, G.F.; WATT, W. H. Y YADAV, P.K. (2000): «An empirical analysis of alternative parametric ARCH models», *Journal of Applied Econometrics*, 15, 117-136.
- MACKINNON, J.G. (1991): «Critical values for cointegration tests», en Engle, R.F. y Granger, C.W.J. (eds.), *Long-run economic relationships: Readings in cointegration*, Oxford University Press, 267-276.
- MANN, H.B. Y WALD, A. (1943): «On the statistical treatment of linear stochastic difference equations», *Econometrica*, 11, 173-220.
- PAGAN, A.R. Y SCHWERT, G.W. (1990): «Alternative models for conditional stock volatility», *Journal of Econometrics*, 45, 267-290.

## CRITICAL VALUES FOR TESTING THE PREDICTIVE ACCURACY OF VOLATILITY IN THE GARCH(1,1) MODEL

### ABSTRACT

It is customary to test for the capability of volatility prediction of a model implementing the “bias test” (which uses an auxiliary simple regression where the square of the residuals of the process are related to the estimated volatility). Using this test in the GARCH models produces two problems in estimating the auxiliary regression line: the bias and the slow convergence. The latter implies that although we work with high sample sizes in the empirical work, the estimations are still biased. In this work we propose a method for obtaining the critical values in the bias test for the GARCH(1,1) model case through simulating processes.

*Key words:* GARCH model, volatility prediction test, critical values, simulation

*AMS Classification:* 65Co5, 60G12, 62M20