ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRIA ELEMENTAL

Agustín Morales González
(Universidad de Las Palmas de G.C.)

RESUMEN

En los años setenta, con la llegada de la denominada matemática moderna, la Geometría, que tradicionalmente había sido estudiada con cierto detenimiento en la enseñanza primaria, pasó a un segundo plano, de modo que los pocos temas que aparecían en los libros de texto para escolares ocupaban los últimos capítulos, por lo que muchas veces apenas si se les podía dedicar atención.

De hecho, en un breve test que propusimos a nuestros alumnos de segundo curso de Magisterio al comienzo del presente curso academico 1990-91 con el fin de que nos sirviera de base para realizar un diagnóstico inicial sobre sus conocimientos geométricos básicos, pudimos constatar que conceptos tales como cuadrilafero, paralelogramo, polígono convexo, etc., estaban en muchos casos casi olvidados por ellos por tratarse, según nos comentaron, de conceptos que no habían vuelto a manejar desde cuarto curso de E.G.B.

Sin embargo, en los últimos años se ha puesto de manifiesto en todos los ámbitos educativos un gran interés por potenciar el estudio de la Geometría en los niveles de la educación obligatoria.

Hacemos aquí algunas consideraciones sobre la enseñanza de la Geometría en los niveles citados. Después de una breve introducción histórica, tratamos los principales aspectos de un modelo de razonamiento en esta materia conocido como el modelo Van Hiele, que consideramos deben conocer los profesores que la han de impartir.

Se tratan finalmente algunos aspectos relacionados con los objetivos a conseguir y se remarca la necesidad de utilizar variados tipos de material didáctico en la práctica diaria, como vehículo favorecedor de la actividad mental de los alumnos.

ABSTRACT

In this paper, some considerations about Elementary Geometry are made. After an historic introduction, we treat the principal characteristics of Van Hiele's Model, so as the objectives for the teaching of this science, and the importance of using didactic materials at the classroom.

Introducción Histórica

Etimológicamente, la palabra Geometría se compone de las voces griegas *«geo»*, que significa tierra, y *«metron»*, que significa medida. Por tanto, Geometría significa en griego *«medida de la tierra»*.

La Geometría tuvo sus orígenes en el antiguo Etipto y consistía en un conjunto de reglas y conocimientos empíricos con un interés eminentemente práctico, como era la necesidad de realizar nuevas parcelaciones del terreno en superifcies equivalentes, cada vez que las crecidas del río Nilo hacían desaparecen los límites establecidos.

Los griegos organizaron todas estas reglas y conocimientos, estableciendo relaciones entre ellos, pero no fue hasta el siglo III a.C. cuando, con la aparición de la Escuela de Alejandría y la figura de Euclides, la Geometría aparece organizada de forma eminentemente matemafica, es decir, como un sistema deductivo.

En su obra cumbre, los *«Elementos»,* constituida por un total de trece libros, se desmuestran 465 proposiciones geométricas. en ella, Euclides pretende captar lo sencial de la Geometría, desechando todo aquello que le es accesorio. En su afán de presentarla como un sistema deductivo, establece unos conceptos primarios con base en la intuición *(punto, recta, plano, círculo,...)* y unos postulados de propiedades relativas a los conceptos citados *(axiomas)* cuya certeza se presupone. A partir de ahí, y siguiendo un discurso lógico, demuestra el número de teoremas citado.

Por su interés, citaremos los cinco postulados que aparecen en el libro I, tal y como los presenta J. Plá (1984):

P1. Por dos puntos distintos pasa una única recta.

P2. Un segmento rectilíneo puede ser siempre prolongado.

P3. Hay una unica circunferencia con un centro y un diámetro dados.

P4. Todos los ángulos rectos son iguales.

P5. Si una secante corta a dos recta formando a un lado ńagulos interiores cuya suma es menor que dos rectos, las dos rectas, suficientemente prolongadas, se cortan en este mismo lado.

Por el prestigio adquirido, los *«Elementos»* se consideraron como texto definitivo, utilizándose en las aulas durante más de 2.000 años.

La potencia del razonamiento deductivo convirtió a la Geometría en una ciencia puramente intelectual, centrada en el mundo de las ideas y desconectada de sus orígenes, esto es, puso el énfasis más en el razonamiento deductivo correcto que en la aplicabilidad de los resultados o la exactitud de las representaciones utilizadas.

De acuerdo con lo expuesto, y como señala A. Santaló (1985), nació la confusión entre la Geometría como disciplina para matemáticos y la Geometría para el hombre común *«que solamente pretende razonar sobre figuras concreta que sus ojos ven, con el fin de satisfacer las necesidades que la vida diaria la presenta»*.

Añade este autor que el problema básico de la didáctica de la Geometría consiste en decidir en qué proporción uno y otro de estos aspectos deben tenerse en consideración.

Volviendo a la Geometría euclídea debemos añadir que, al estar basada en nociones como longitud, ángulo y triángulo, enfatiza el interés por el estudio de las transformaciones rígidas, es decir, aquellas que clasifican a las figuras por criterios de superposición. Además, utiliza un lenguaje sintético al margen del cálculo efectivo aritmético.

Por ello, los libros de la Geometría tradicional incorporaban un buen número de problemas sobre el triángulo, unos puramente mecánicos y otros a los que muchos autores como R. Thom atribuían gran valor formativo, no tanto por los conocimientos exigidos, como por los método e imaginación que requería su resolución.

Sin embargo, esta opinión no era unánime. Así, en el Congreso de Royaumont, en 1959, el gran matemático francés y cofundador del grupo *«Bourbaki»* J. Dieudonné expresó la imperiosa necesidad de realizar una reforma profunda en la enseñanza de la Matemática en la escuela secundaria francesa, siendo ya célebre su expresión *«Abajo Euclides»* con la cual, y en sus propias palabras perseguía *«no la eliminación de la Geometría euclídea, sino la manera anticuada de enseñarla* (tradicional desde Euclides), *poniendo de este modo en claro la significación de la Geometría y reafirmando su lugar central en las Matemáticas y su poder universal».*

Con la expresión citada, Dieudoné convirtió a la Geometría de Euclides en el símbolo de las Matemáticas tradicionales.

En los años setenta, con la llegada de la Matemática Moderna y su enfoque conjuntista, se redujo de forma considerable el estudio de la Geometría en la E.G.B., desapareciendo casi por completo de su último curso y de los programa del Bachillerato.

Sin embargo, en nuestros días la Geometría esta recobrando el puesto que se merece en la enseñanza obligatoria, siendo cuatro las razones que apuntan A. Martínez y otros (1989) para su inclusión en este nivel educativo:

a) Por la presencia de la Geometría en múltiples ámbitos de nuestro sistema productivo.
b) Porque contribuye de forma importante al estudio de los elementos de la naturaleza.
c) Porque es un componente esencial de las artes.
d) Porque un conocimiento básico de las formas geométricas es esencial para orientarse reflexivamente en el espacio, para hacer estimaciones y cálculos sobre distancias,...

Sin embargo, auqnue casi todo el mundo está de acuerdo con esta inclusión, la forma de presentar la Geometría en el ámbito citado se encuentra hoy día en pleno debate.

El aprendizaje de la geometría: el modelo Van Hiele

La enseñanza tradicional de la Geometría ha tenido, no sólo en el Bachillerato, sino también en la E.G.B., un enfoque deductivo.

Así, en Bachillerato la Geometría se construye con base en el lenguaje del Algebra vectorial y en la E.G.B. se suele insistir demasiado en la memorización de conceptos, teoremas y fórmulas, que muchas veces se basan en otros previos, olvidando demasiado pronto la intuición como forma de acceso al conocimiento geométrico.

De esta forma, no es de extrañar que en muchos casos la comprensión de lo tratado resulte en extremo difícil, si no imposible, para los niños, lo que a su vez produce desánimo en el profesor responsable.

Preocupado por las grandes dificultades que mostraban sus alumnos en el aprendizaje de la Geometría, aún cuando los hechos aparentemente más simpes les fueran presentados de diferentes maneras, los profesores e investigadores holandeses Pierre Marie Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof comenzaron a desarrollar a mediados de los años cincuenta un modelo de aprendizaje de esta materia que pretende describir la evolución en el nivel de razonamiento de los niños *(o adultos)* desde las formas intuitivas iniciales de pensamiento, hasta las más refinadas formas deductivas.

A su vez, en este modelo se proponen las directrices que a su juicio deberían seguirse en el aula para conseguir que los alumnos evolucionen desde un cierto nivel de razonamientoi al nivel inmediato superior. Estas directrices se conocen con el nombre de *«fases de aprendizaje»*.

Ambos investigadores han ido desarrollando y perfeccionando su modelo, a la vez que otros muchos han contribuido a comprobar su validez, aportando sugerencias para realizar un uso cada vez más perfeccionado del mismo.

Las ideas fundamentales que sustentan el modelo, expuestas por A. Jaime y A. Gutiérrez (1990) son las siguientes:

a) Existen diferentes niveles de razonamiento en los estudiantes de Geometría.
b) Un estudiante sólo puede comprender de forma significativa aquellos hechos geométricos que el profesor les presente de manera adecuada a su nivel de razonamiento.
c) En muchas ocasiones debe esperarse a que el estudiante alcance un determiando nivel de razonamiento para que le pueda ser presentada una relación matemática que no puede abordarse en niveles inferiores.
d) Mediante una enseñanza adecuada puede ayudarse a los estudiantes a que lleguen, en el plazo más breve posible, a razonar de una determinada manera.

Los niveles de razonamiento a que hemos venido haciendo referencia y sus características básicas, expuestos de forma sucinta, son los siguientes:

—Nivel 1: Reconocimiento o visualización:

Los estudiantes perciben las figuras geométricas como un todo global, limitándose a describir su aspecto físico.

No se reconocen explícitamente las partes de que se componen las figuras, ni sus propiedades matemáticas.

—Nivel 2: Análisis:

Los estudiantes pueden, siempre de una manera informal, las partes que integran una figura y enunciar sus propiedades, pero son incapaces de ver relaciones entre propiedades y entre figuras. Tampoco pueden elaborar o comprender definiciones.

—Nivel 3: Deducción informal o clasificación:

Los estudiantes pueden dar definiciones matemáticamente correctas y distinguir entre necesidad y suficiencia de un conjunto de propiedades en la determinación de un concepto.

Pueden entender una demostración que da el profesor o el libro de texto, pero no serían capaces de construirla por sí mismos.

—Nivel 4: Deducción formal:

Los estudiantes pueden entender y realizar razonamientos formales, por lo que pueden construir demostraciones. También comprenden la estructura axiomática de las matemáticas.

Este nivel no se alcanza, por lo general, en alumnos de E.G.B.

Las investigaciones realizadas en relación con el modelo expuesto han puesto de manifiesto que el paso de un nivel a otro es independiente de la edad y que el profesor, a través de los contenidos y de los métodos de enseñanza apropiados, puede provocar el paso de un nivel al inmediato superior.

La forma de realizar esto se contempla, como ya se ha indicado, en las llamadas *«fases de aprendizaje»* que se citan a continuación, a la vez que se comparan con las cinco etapas del aprendizaje de las Matemáticas propuestas por Z.P. Dienes (1974). El lector interesado en la descripción de estas fases puede consultar la bibliografía que acompañamos.

Modelo Van Hiele	**Z.P. Dienes**
1. Discernimiento	1. Juego libre
2. Orientación dirigida	2. Juego estructurado
3. Explicitación..................................	3. Representación
4. Orientación libre	4. Predicción
5. Integración....................................	5. Juego formal

A modo de ejemplo, veamos algunas cuestiones en relación con la pregunta ¿es verdad que los ángulos de un triángulo cualquiera suman 180°? Justifica tu respuesta.

Tal como señalan A. Jaime y A. Gutiérrez (op. cit.), los niños del nivel 1 contestan negativament,e dado que ven el triángulo y sus tres ángulos de forma independiente, siendo incapaces de relacionarlos.

Un estudiante de nivel 2 comprobará, posiblemente con un trasportador, que los ángulos de un triángulo dibujado al azar suman aproximadamente 180°, con lo que daría por afirmativa la respuesta.

Un estudiante del nivel 3 estaría en condiciones de entender la demostración manipulativa, realizada mediante plegado de papel, que sugiere la fig. 1.

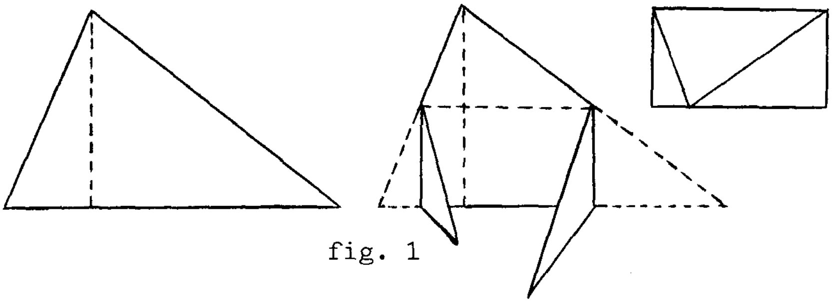
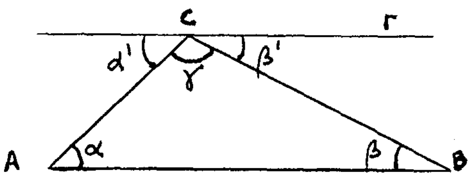


fig. 1

Finalmente, un estudiante del nivel 4 probablemente se basaría en la fig. 2, añadiendo lo que sigue a ésta:



(Fig. 2)

$\alpha = \alpha'$ y $B = B'$, por alternos internos y ser $AB \parallel r$.
Por tanto, $\alpha + B + \gamma = \alpha' + B' + \gamma' = 1$ llano.

Añadiremos, para terminar, que a cada nivel de razonamiente le corresponde un tipo de lenguaje específico que el profesor debe utilizar con sus alumnos.

Los objetivos en la enseñanza de la Geometría.

Quizá la primera dificultad que surge a la hora de establecer los contenidos que han de componer el curriculum de Geometría en los niveles educativos señalados radique en que se trataría de enseñar una Geometría para todos, independientemente de cuál haya de ser la futura actividad profesional de cada uno de los alumnos.

Podrían, sin embargo, enumerarse unos objetivos generales que deberían conseguirse y que fundamentalmente consistirían en la adquisición de una cultura geométrica con visión histórica, que permita aplicar los conocimientos adquiridos a otras áreas curriculares (interdisciplinariedad), resolver problemas de la vida diaria, desarrollar capacidades intelectuales, informar sobre el espacio exterior, utilizar representaciones geométricas para interpretar situaciones,...

En relación con lo expuesto, coincidimos plenamente con C. Alsina y otros (1987) cuando afirman que «sería deseable en la enseñanza de la Geometría aquello que sea útil con rango futurible y pueda motivarse desde la actualidad: razonar correctamente (deductiva e inductivamente), representar, abstraer, relacionar, clarificar y resolver son verbos claves en el abanico de lo deseable».

Sin embargo, teniendo en cuenta los diferentes niveles de razonamiento tratados anteriormente, se hace necesario diferenciar los objetivos generales correspondientes a los ciclos 6-12 y 12-16 años.

Para el ciclo 6-12, C. Gaulin (1986), señala dos grandes objetivos:

1) Desarrollar la familiarización con el medio ambiente.

2) Preparar al alumnado para el aprendizaje de niveles más avanzados.

En relación con el primer objetivo, añade qu ehay que dar a los niños muchas oportunidades de explorar nuestro espacio tridimensional en todos sus aspectos: formas, relaciones, movimientos, deformaciones, proyecciones, etc. Debe, además, procurarse que los niños, de forma progresiva, lleguen a abstraer y aplicar conceptos y propiedades fundamentales, tanto en el plano como en el espacio. Finalmente, se tenderá a desarrollar de forma gradual modos de comunicación adecuados, así como la intuición espacial.

Respecto al segundo de los objetivos citados, aclara que se trataría de familiarizarles con nociones que en el futuro les van a ser expuestas con un enfoque basado en el razonamiento lógico.

La elaboración de un curriculum acorde con los objetivos expuestos conllevaría, para el autor citado, la inclusión de un gran número de actividades geométricas, convenientemente planeadas, de modo que el niño permanezca mentalmente activo, siendo el espacio tridimensional el marco natural de referencia para la mayoría de las mismas.

Los temas deben desarrollarse de forma simultanea, pasando lenta y profesivamente de unos a otros, interrelacionándolos.

Además de otras interesantes directrices, menciona la importancia de alternar los objetivos específicos con los globales, el empleo de variados tipos de instrumentos y materiales didácticos, la inclusión de muchas actividades para el desarrollo de la intuición espacial, y el tener en cuenta la doble visión, estática y dinámica, de la Geometría.

En lo que se reviere al ciclo 12-16, coincidimos con A. Santaló (op. cit.) en que la enseñanza de la Geometría debe seguir resultando útil para todos los alumnos, tanto en su aspecto formativo como en el instrumental, para lo que se precisa revisar periódicamente los contenidos, adaptándolos a las necesiades de la sociedad.

En este ciclo, el alumno debe realizar progresivamente el paso de la Geometría intuitiva, experimental e inductiva, a una Geometría racional, deductiva, en la que precisa realizar razonamientos que conllevan un cierto grado de rigor, siempre, por supuesto, respetando los niveles de Van Hiele.

Sería deseable proseguir con la descripción de situaciones reales, fenómenos y experiencias utilizando un lenguaje geométrico más completo, continuar con las clasificaciones de los objetivos geométricos, reconocer magnitudes y saber utilizar métodos directos e indirectos para medida de longitudes, áreas y volúmenes, definir conceptos y enunciar propiedades geométricas deduciendo o induciendo algunas fundamentales, profundizar en el desarrollo de la intuición espacial, etc.

En cualquier caso, pensamos que no debe presentarse aún la Geometría en forma axiomática, dado que el nivel de razonamiento de la mayoría de los alumnos no lo permite. Ello no excluye el que puedan demostrarse un buen número de teoremas clásicos, recorriendo a modelos manipulativos o visuales siempre que se considere necesario.

Asimismo, pensamos debe fomentarse la resolución de todo tipo de problemas, tanto los «de demostrar» como los «de resolver», que sean motivadores para el alumno y que permitan poner a prueba los conocimientos y las habilidades adquiridas. La forma de abordarlos puede seguir las directrices heurísticas fijadas por G. Polya (1965).

En C. Alsina y otros (1987) puede encontrarse una relación de objetivos para ambos ciclos, distinguiendo entre objetivos terminales de cocneptos, de procedimientos y de actitudes, valores y normas, que pueden ser de gran utilidad para el docente.

La importancia del material didáctico.

Si partimos de la base de que las formas geométricas se conciben por abstracción a a partir de las observaciones que el inidividuo realiza sobre los objetos reales que forman parte del mundo que le rodea y de sus experiencias sobre dichos objetos, concluiremos en la necesidad de anteponer a un estudio racional de la Geometría un planteamiento de tipo experimental en el que la intuición juegue un papel fundamental.

Es sabido que la moderna Psicología matemática recomienda partir de lo concreto para elaborar abstracciones. Así, en palabras de P. Puig Adam (1960) «la percepción y la acción parecen constituir el binomio sobre el que se desarrolla el aprendizaje matemático. Con su doble juego, el niño elabora conceptos y relaciones válidas para clases de entes cada vez más generales».

De acuerdo con lo expuesto, se hace evidente que el empleo de material didáctico debe ser norma de conducta en la enseñanza de la Matemática elemental y, en particular, de la Geometría.

Muchas son las opiniones acordes con esta postura. Así, en el conocido como Simposio de Valencia se recomendó el «uso habitual, cotidiano, de una amplia variedad de materiales que hagan del aula de Matemáticas, tanto en la escuela primaria como en la secundaria, un verdadero laboratorio-taller».

Asimismo, el informe Cockcroft (1985), en sus párrafos 608 a 614, también insiste en esta idea y propone listas de materiales que considera imprescindibles en una clase de Matemáticas.

Autores como F. Hernán y E. Carrillo (1989), prefieren habla de recursos para el aula, empleando este término en un sentido probablemente más amplio que el de materiales, pues comprende también el planteamiento de situaciones abiertas o investigaciones en cuyo desarrollo no intervienen elementos distintos del lápiz y el papel.

Llegado a este punto, se hace preciso aclarar lo que entendemos por material. Siguiendo a C. Alsina y otros (1988), podremos decir que «bajo la palabra material se agrupan todos aquellos objetos, aparatos o medios de comunicación que puedan ayudar a descubrir, entender o consolidar conceptos fundamentales en las diversas fases del aprendizaje». Aclaran estos autores que un mismo concepto debe trabajarse, en la medida de lo posible, con materiales diversos. Ello concuerda con el principio de variabilidad perceptiva de Z.P. Dienes.

Es claro que el entorno constituye la primera fuente de material que permite ligar la Matemática con el mundo real, si bien en la actualidad se puede disponer de una gran variedad de material didáctico estructurado que en muchos casos puede ser construido por los propios alumnos.

Es importante tener en cuenta que el material didáctico debe cumplir dos cualidades esenciales: dinamismo y multivalencia. En efecto, el interés del niño se centra no en el material en sí, sino en las transformaciones que éste sufre, operación que, como señala E. Castelnuovo (1975), es en cuanto a tal abstracta. En ello radica la ventaja fundamental del material sobre el dibujo, ya que éste sólo proporciona imágenes estáticas de las formas geométricas, limitando las posibilidades de razonamiento del niño. Añade esta autora como el tipo de material citado refleja la estructura operatoria de las Matemáticas modernas, «donde no se estudian los entes en sí, sino más bien las operaciones que unen esos entes».

Sin embargo, para que la utilización del material sea verdaderamente eficaz no ha de incurrirse en una serie de errores. Así, hay que prestar especial cuidado en que el material no sea sofisticado en exceso; que se disponga del número suficiente de unidades, sobre todo cuando el trabajo personal se hace imprescindible y, especialmente, poner especial cuidado en la idoneidad del material presentado a los alumnos en relación con la adquisición de un determinado concepto, teniendo siempre en cuenta su nivel de conocimientos. No obstante, aunque estamos de acuerdo con la afirmación de que el no uso de material es el error más grave que se puede cometer respecto del material, opinamos que dado que éste no es un fin en sí mismo, el mejor material es aquel del que se aprende rápidamente a prescindir de él.

Especial importancia está adquiriendo la utilización a todos los niveles de medios audiovisuales dadas sus ventajas evidentes, entre las cuales señalamos su papel favorecedor del aprendizaje en tanto que renueva la capacidad de atención, su contribución a la recuperación de alumnos lentos y la posibilidad de realizar toda clase de combinaciones dada su gran versatilidad. Por ello consideramos imprescindible que el futuro maestro entre en contacto con estos medios y se concience de sus posibilidades didácticas.

El ordenador también juega aquí un papel importante. El lenguaje LOGO resulta especialmente estructurado y pensado para realizar actividades geométricas a la vez que permite el desarrollo de las capacidades cognoscitiva de los niños. De ehcho, puede decirse que este lenguaje constituye un modelo psicopedagógico que contribuye eficazmente a facilitar el descubrimiento, por lo que pensamos debería generalizarse su estudio.

En una Escuela de Formación del Profesorado, la familiarización de sus alumnos con el material didáctico adquiere su verdadera dimensión si se dispone de un Aula-Laboratorio de Matemáticas, convenientemente dotada. En dicha Aula podrán desarrollarse las actividades matemáticas necesarias par aprender a conocer el modelo pedagógico que origina una «estructura de laboratorio» a nivel de organización y realización de talleres, así como de elaboración y clasificación de material didáctico, a la vez que adquirir la capacitación suficiente para trabajar las Matemáticas en el aula en el ejercicio de su futura función docente.

Bibliografía

ALSINA, C. et al. (1987): *Invitación a la didáctica de la Geometría,* Síntesis, Madrid.
ALSINA, C. et al. (1988): *Materiales para construir la Geometría,* Síntesis, Madrid.
BARTOLOMEIS, F. de (1986): *La actividad matemática,* Laia, Barcelona.
COKCROFT, W.H. (1985): *Las Matemáticas sí cuentan,* M.E.C., Madrid.
COBERAN, F.M. et al. (1989): *Didáctica de la Geometría: Modelo Van Hiele,* Universidad de Valencia.
DIENES, Z.P. (1974): *Las seis etapas en el aprendizaje en Matemáticas,* Teide, Barcelona.
GAULIN, C. (1986): Actividads geométrica sen la E.G.B. *Actas de las IV J.A.E.M.,* S.C.P.M. Isaac Newton, La Laguna.
HERNAN, F./CARRILLO, E: *Recursos en el aula de Matemáticas,* Síntesis, Madrid. (1988).
I.E.P.S. (1986): *La Geometría en el aprendizaje de las Matemáticas,* Narcea, Madrid.
JAIME, A. GUTIERREZ, A. (1990): *Una propuesta para la enseñanza de la Geometría: El modelo Van Hiele. Teoría y práctica en educación matemática,* Alfar, Sevilla.
MARTINEZ, A. et al. (1988): *Una metodología activa y lúdica para la enseñanza de la Geometría,* Síntesis, Madrid.
M.E.C. (1989): *Diseño Curricular Base: Area de Matemáticas,* M.E.C., Madrid.
PLA, J. (1984): *Las Matemáticas,* Montesinos, Barcelona.
POLYA, G. (1965): *Cómo plantear y resolver problemas,* Trillas, México.
PUIG ADAM, P. (1960): *La Matemática y su enseñanza actual,* Revista de Enseñanza Media, Madrid.
SANTALO, A. (1985): La enseñanza de la Geometría en el Ciclo Secundario. *La enseñanza de la Matemática a a debate,* M.E.C., Madrid.