

CURVAS DE RESONANCIA Y FENOMENO DEL SALTO EN LA ECUACION DE DUFFING

María Celia Ríos Villar
(Universidad de Las Palmas de G.C.)

RESUMEN

Este trabajo presenta un estudio sobre el comportamiento de las soluciones periódicas de la ecuación diferencial de Duffing, que desde el punto de vista físico, describe las oscilaciones forzadas de un sistema no lineal amortiguado. Se analizan de forma especial la resonancia y el fenómeno del salto que presentan dichas oscilaciones.

A las dificultades usuales de las ecuaciones diferenciales no lineales, se añade la aparición de un comportamiento difícil de predecir, incluso cualitativamente, cuando se modifican ligeramente las condiciones del sistema (*perturbación de los coeficientes o variación de la frecuencia de excitación*).

ABSTRACT

In this paper we analyse the periodic solutions of Duffing's equation which play an important role in Physics.

1. Introducción

En esta primera parte se presenta la ecuación diferencial de Duffing. Se recuerdan también unas ideas generales sobre tipos y métodos aproximados de obtención de soluciones en problemas no lineales.

2. Preliminares. La ecuación de Duffing.

En la naturaleza se presentan a menudo fenómenos oscilatorios cuyo análisis matemático conduce a la resolución de ecuaciones diferenciales no lineales, cuya variable independiente es el tiempo.

Así, en multitud de aplicaciones (*principalmente en el tratamiento de sistemas eléctricos y mecánicos*), interesa estudiar las soluciones oscilatorias (*periódicas*) de ecuaciones de la forma:

$$m y'' + \varphi(y') + f(y) = h(t)$$

donde $h(t)$ es una función periódica de t . En la mayoría de las interpretaciones físicas, el término $m y''$ se refiere a la **fuerza de inercia**, $\varphi(y')$ corresponde a la **fuerza de amortiguación**, la $f(y)$ representa las **fuerzas internas** del sistema y $h(t)$ las **fuerzas externas (ó excitación)** aplicadas al sistema.

En el caso en que $h(t) \neq 0$, interesan las soluciones con períodos relacionados con el de $h(t)$ (*oscilaciones forzadas*). En el caso en que $h(t) = 0$, el sistema también puede tener soluciones periódicas (*autooscilaciones*), así mismo de gran importancia en la práctica.

El más simple **ejemplo** de un sistema vibratorio no lineal es el de las oscilaciones libres de un péndulo. Como se sabe, se compone de una masa m despreciable sujeta al extremo de un hilo inextensible de longitud l , moviéndose en un plano vertical. En ausencia de rozamiento y oscilando libremente, la ecuación diferencial que describe el movimiento es:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (2.1)$$

la cual es **no lineal**, debido a la presencia de la función trigonométrica $\sin \theta$. En el caso de **pequeñas** oscilaciones, se puede utilizar el desarrollo en serie de $\sin \theta$, teniéndose:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \right) = 0,$$

con lo que en una buena y aceptable primera aproximación (*) (*al retener solamente los cinco primeros términos*), la ecuación del movimiento pendular se escribe:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + n^2 \theta - \frac{n^2 \theta^3}{6} = 0 \quad (2.2)$$

(con $n = \sqrt{\frac{g}{l}} > 0$, llamado frecuencia angular)

Mas, debe ponderarse que en el problema considerado, las ecuaciones (2.1) y (2.2) se han deducido al asumir la hipótesis de fricción nula, cosa que corresponde a una situación ideal que no se da nunca en el mundo físico. Así las soluciones de (2.1) y (2.2) son periódicas, como consecuencia de una hipótesis falsa. Si se admite la existencia de un coeficiente de fricción y se supone además que sobre el péndulo actúa una fuerza exterior periódica, esto es, añadiendo al primer miembro de la ecuación del movimiento una fuerza de rozamiento, y al segundo miembro una fuerza de excitación, la ecuación (2.2) del péndulo quedará escrita en la forma:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + k \frac{dy}{dt} + n^2 y - \frac{n^2 y^3}{6} = F \cos wt$$

Esta ecuación, cuya expresión general viene dada por:

$$y'' + c y' + f(y) = F \cos wt \quad (2.3)$$

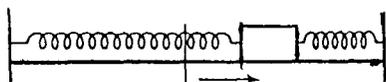
($c \neq 0$)

en la cual $f(y)$ es no lineal, se conoce en la literatura científica como la **ecuación de Duffing**, debido a que este autor en 1918 hizo el primer estudio sistemático de la misma con investigación minuciosa de las oscilaciones forzadas (6).

La integración de la ecuación anterior, presenta algunas dificultades, que resultan complicadas por el hecho de la aparición de una función explícita de \underline{t} en la misma.

Como se acaba de ver, la ecuación (2.3) puede representar el movimiento de un péndulo que oscila bajo la acción de una fuerza periódica externa, con una fuerza recuperadora no lineal y con un amortiguamiento debido al rozamiento del aire.

Análogamente, el sistema formado por un oscilador de masa unidad, sobre el que actúa una fuerza recuperadora elástica no lineal y una fuerza externa periódica $F_0 \cos wt$, deslizándose sobre una superficie rugosa (*existiendo, por tanto, una fuerza de rozamiento F*) tiene un movimiento que también viene representado por la ecuación:



$$y'' + c y' + f(y) = F \cos wt$$

Fig. (1.1)

Ahora bien, como los métodos de análisis y los resultados cualitativos no dependen grandemente de la forma especial de $f(y)$, se puede tomar para la fuerza recuperadora la siguiente ecuación cúbica en y :

$$f(y) = \alpha y + \beta y^3 \quad (\text{donde } \alpha > 0) \quad (2.4)$$

Si $\beta > 0$, se dice que la fuerza recuperadora corresponde a un muelle suave; pero si $\beta < 0$, dicha fuerza recuperadora se dice que corresponde a un muelle duro.

En el primer caso ($\beta > 0$), la fuerza restauradora disminuye con la amplitud de la oscilación, como en el caso del péndulo. Entonces, la frecuencia natural disminuye al aumentar la amplitud.

Con la expresión (2.4) para la fuerza recuperadora, la ecuación de Duffing adopta la forma especial:

$$y'' + c y' + \alpha y + \beta y^3 = F \cos \omega t \quad (2.5)$$

Cuando se trata con sistemas forzados no lineales, sin amortiguamiento, se hace $c = 0$ en la ecuación anterior.

4. Tipos de soluciones

Las condiciones iniciales $y(0) = A$, $\frac{dy(0)}{dt} = B$, definen un problema de Cauchy para la ecuación diferencial:

$$y'' + cy' + f(y) = F \cos \omega t,$$

en la cual $f(y)$ es una función no lineal que, escogida en la forma: $f(y) = \alpha y + \beta y^3$, da lugar a la ecuación (2.5) de Duffing, esto es:

$$y'' + cy' + \alpha y + \beta y^3 = F \cos \omega t \quad (4.1)$$

Esta ecuación, de hecho, contiene todas las propiedades esenciales de oscilaciones forzadas y, en general, se toma como ecuación modelo (**).

Dicha ecuación posee una solución $y(t)$ unívocamente determinada, una vez prefijadas las condiciones iniciales (*desplazamiento y velocidad para $t = 0$*).

Por contener la variable t explícitamente, la ecuación anterior no puede, naturalmente, ser tratada por los métodos usuales basados en discusiones geométricas sobre el plano velocidad-desplazamiento.

Aunque además de las soluciones periódicas, existen otras soluciones de la ecuación (4.1), nos interesaremos principalmente por aquellas; más concretamente, por las soluciones periódicas que son múltiplos enteros de $2\pi/\omega$.

En general, la bibliografía sobre la materia está enteramente dedicada al estudio de las soluciones periódicas.

Mediante experimentos realizados sobre sistemas dinámicos cuyas ecuaciones son de la forma (4.1), se ha comprobado que, cuando el tiempo aumenta, y una vez desaparecidas gradualmente algunas acciones transitorias, el movimiento del sistema tiende a hacerse periódico, tal vez porque las fuerzas de amortiguamiento promueven esa periodicidad con el crecimiento del tiempo.

En forma más explícita, las soluciones de la ecuación de Duffing son de los tipos siguientes:

Soluciones armónicas, que son aquellas que poseen la misma frecuencia que la fuerza excitadora exterior, es decir, las soluciones $y(t)$ cuyo período es el mismo que el $2\pi/\omega$ de $F \cos \omega t$. Corresponde a **oscilaciones armónicas**.

Soluciones subarmónicas, cuyo período mínimo es un múltiplo n entero

(diferente de la unidad) del período de la fuerza externa $F \cos \omega t$. Corresponden a **oscilaciones subarmónicas** de orden n , y se llaman simplemente oscilaciones **subarmónicas**.

Las restantes formas de soluciones, se distribuyen en: las **superarmónicas** (para las que el movimiento consiste en una superposición de dos vibraciones, una de frecuencia m y otra de frecuencia 1), y las **supersubarmónicas** (movimiento con dos vibraciones, una de frecuencia 1 y la otra de frecuencia n/m) que corresponden a oscilaciones de igual denominación (***) .

5. Métodos de obtención de soluciones

No es presumible la existencia de soluciones explícitas en términos de funciones elementales para la ecuación (4.1); sin embargo, esta ecuación puede ser tratada por algunos métodos de aproximación analítica, que podrían luego ser comparados y contrastados.

Estos métodos se clasifican en dos clases: los de perturbación y los de iteración.

Por otra parte, cada uno de ellos puede ser aplicado, al menos por cualquiera de estas dos vías distintas: operar directamente con la ecuación diferencial con el uso de perturbación o de iteración; o bien, al asumir que las soluciones sean periódicas, admitir para las mismas un desarrollo en serie de Fourier con coeficientes indeterminados y resolver seguidamente las relaciones no lineales satisfechas por estos coeficiente mediante la aplicación de criterios de perturbación o de iteración. En este estudio, pueden aplicarse tales técnicas a casos concretos.

Otros métodos de investigación de soluciones periódicas, incluyen los de Krylov y Bogoliubov (2), el de sumas finitas de funciones trigonométricas (13), métodos de promedio (11), y técnicas de aproximaciones sucesivas (12).

II PARTE.

1. Introducción

El objeto de esta segunda parte es el estudio de la resonancia en la ecuación de Duffing, con especial atención al fenómeno del salto, el cual será discutido de forma general en los tres párrafos siguientes. Hay otros dos párrafos, el quinto, donde se analiza detalladamente este fenómeno y se exponen algunas dificultades relativas a un caso particular de oscilador, y el sexto se dedica a exponer los resultados numéricos obtenidos para distintos valores de los coeficientes en el fenómeno del salto.

2. Resonancia y salto en la ecuación de Duffing no amortiguada.

Nos va a interesar ahora (así como en el párrafo 3 siguiente), la relación entre amplitud A de la oscilación armónica y la frecuencia excitadora ω , ya que nos ha de conducir a la discusión de las curvas de resonancia y del fenómeno del salto.

Aplicamos entonces el método de perturbación al estudio de las oscilaciones forzadas para la ecuación de Duffing, la relación entre A y w^2 hasta términos de orden ϵ , es:

$$w^2 = 1 + \frac{3\epsilon A^2}{4} \pm \frac{F}{A} \quad (2.1)$$

donde $F = \epsilon F_0$

El signo $-$, corresponde a la fase 0° de la fuerza excitadora, y el signo $+$ a la fase 180° . Se supone además, que A y F son positivos.

La gráfica de la ecuación (2.1) en el plano (w^2, A) , para F constante, constituye la llamada curva de resonancia o curva de respuesta.

La curva C_0 que corresponde a $F = 0$, es decir:

$$w^2 = 1 + \frac{3\epsilon A^2}{4} \quad (2.2)$$

se denomina «curva esqueleto», y proporciona la relación entre la amplitud y la frecuencia del sistema para oscilaciones libres no lineales.

Poniendo: $w^2 = X$, $(4/3\epsilon) = M$,

queda:

$$A^2 = \frac{4}{3\epsilon} (X - 1) = M (X - 1),$$

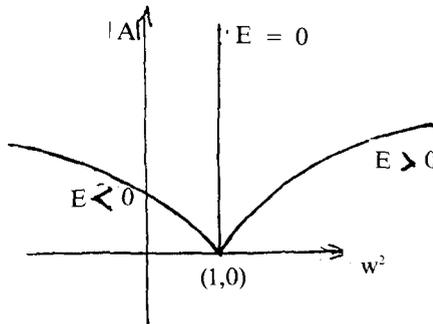
con lo que la curva C_0 (si se hace $A^2 = y^2$) viene dada por:

$$y^2 = M (X - 1)$$

No tiene ni máximos ni mínimos. La curva es simétrica respecto al eje X . Para el caso lineal ($\epsilon = 0$), resulta $w^2 = 1$.

Fig. (3.1)

Curvas esqueleto para valores de $\epsilon > 0$, $\epsilon < 0$ y $\epsilon = 0$.



En la figura (3.2) se muestran las curvas esqueleto y de respuesta del sistema lineal ($\epsilon = 0$). En este caso es: $\omega^2 = 1$, para un valor $F_1 > 0$ determinado de F .

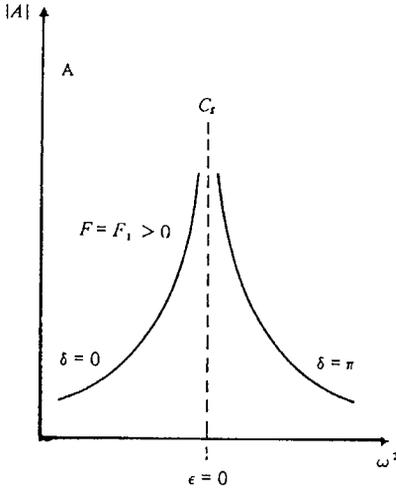


Fig. (3.2)

Las figuras (3.3) y (3.4), muestran las mismas curvas (esqueleto y de respuesta) para $\epsilon > 0$, y $\epsilon < 0$.

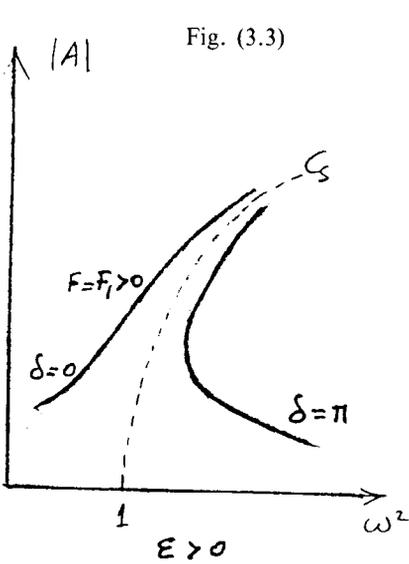


Fig. (3.3)

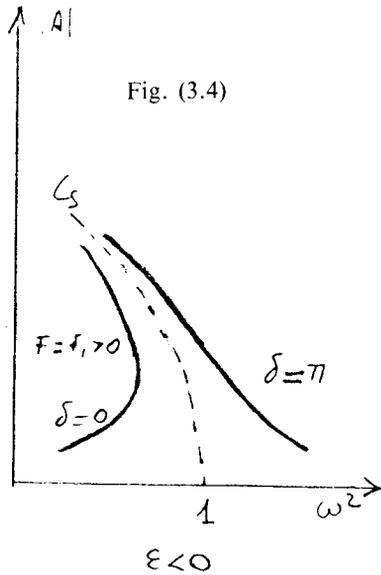


Fig. (3.4)

En ambos casos, la parte de curva de respuesta situada a la izquierda de la curva esqueleto, corresponde a la oscilación forzada en fase con la fuerza excitadora, mientras que la situada a la derecha corresponde a un desfase de 180° entre la oscilación forzada y la fuerza excitadora. Como puede observarse, las curvas, en el caso no lineal, parecen derivarse de las del caso lineal, inclinando la parte superior hacia la derecha, para $\epsilon > 0$ y hacia la izquierda cuando $\epsilon < 0$.

La inspección de las figuras (3.3) y (3.4), explica por qué la amplitud A debe ser dada de antemano, mientras que la frecuencia w ha de determinarse como una función de A .

Se ve además que para ciertos valores de w , existen tres valores correspondientes de A . Por tanto, los métodos de iteración y de perturbación no pueden proporcionar todas las ramas de las curvas de respuesta (*obsérvese que la ecuación (2.1), es una ecuación cúbica en A*).

Por otra parte, al ser iniciados los procedimientos de iteración y de perturbación con la oscilación lineal libre, y puesto que en el problema lineal A es arbitraria, su valor deberá asumirse al comenzar el cálculo. Se ha de resaltar también que, a diferencia del caso del oscilador lineal, la amplitud A de la respuesta no lineal es finita para cualesquiera valores finitos de F y w , incluso para $w = 1$ (fig. (3.3) y (3.4)).

Puede demostrarse que las oscilaciones estables corresponden, a la izquierda de la curva C_1 , a aquellas partes de la curva de respuesta en las que A es una función creciente de w^2 .

La transición de oscilaciones periódicas estables a inestables, o viceversa, tiene lugar en aquellos puntos de las curvas de respuesta para los cuales la tangente es infinita.

Pongamos:

$$H(w^2, A) = -w^2 + 1 + \frac{3\epsilon A^2}{4} + \frac{F}{A} \quad (2.3)$$

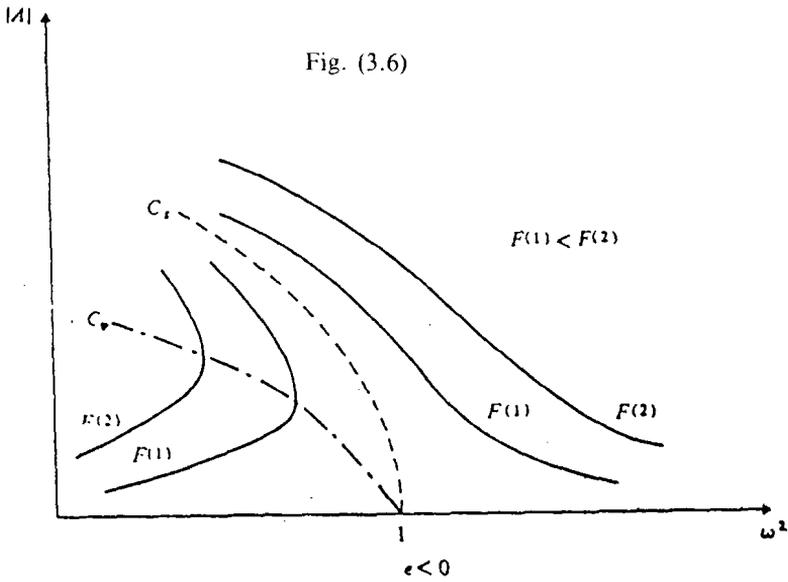
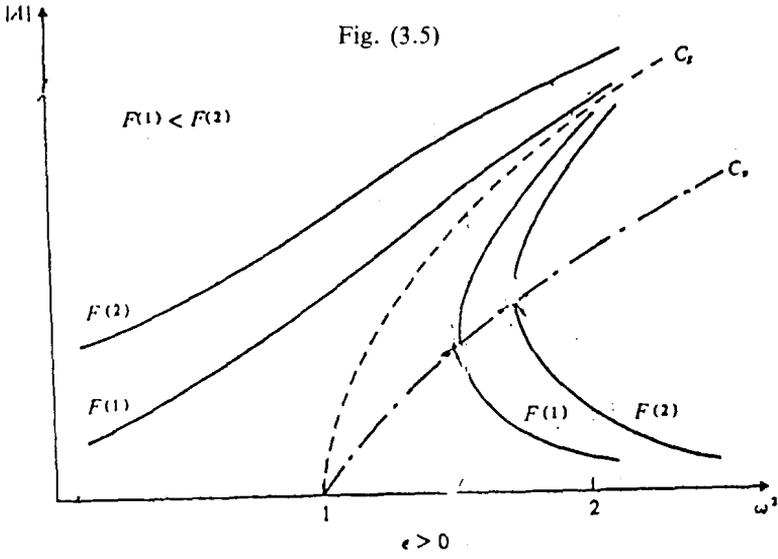
Se tendrá así:

$$\frac{dA}{dw^2} = - \frac{(\partial H / \partial w^2)}{(\partial H / \partial A)} = \frac{1}{[3\epsilon A/2 \pm F/A^2]} \quad (2.4)$$

Con lo que los puntos donde las curvas de respuesta tienen tangente vertical, vendrán dados por:

$$\frac{3\epsilon A}{2} \pm \frac{F}{A^2} = 0 \quad (2.5)$$

En las figuras (3.5) y (3.6) la curva C_1 representa el lugar geométrico de dichos puntos.



Gráfica de las curvas de respuesta para dos valores de la amplitud F de la fuerza, y curva esqueleto C , para la ecuación de Duffing sin amortiguación.

Puede probarse sin dificultad, que las curvas de respuesta dadas por la ecuación (2.1) no alcanzan un valor máximo local (*relativo*) para amplitudes A correspondientes a valores acotados de ω^2 . En un máximo relativo de la curva de respuesta, se tiene:

$$dA/d\omega^2 = \frac{A^2}{(3 \epsilon A^3/2) \pm F} = 0 \quad (2.6)$$

Sin embargo, esta ecuación se satisface solamente cuando $A = 0$ ó $A = \infty$, y ninguno de estos valores de A corresponde a un máximo relativo.

Analicemos ahora cómo varía A con ω^2 , utilizando la curva de respuesta de la figura siguiente:

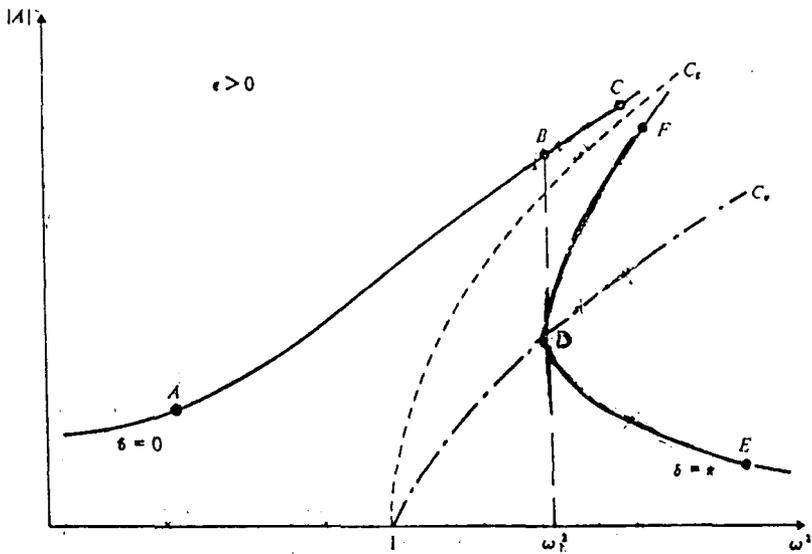


Fig. (3.7)

Curva típica de respuesta para la ecuación de Duffing sin amortiguamiento. ABC y EDF definen las ramas superior e inferior de la curva tiene tangente vertical.

Todos los puntos en ABC y en DE corresponden a oscilaciones estables.
Los puntos en DF corresponden a oscilaciones inestables.

C_1 representa la curva esqueleto y C_2 el lugar de los puntos en los que las diferentes curvas de respuesta (para distintos F) poseen tangente vertical.

Las oscilaciones inestables, están representadas por el segmento de curva DF.

Supongamos que el oscilador comienza su movimiento con un valor de frecuencia pequeño. En la figura (3.7) esto significa que nos encontramos en el punto A sobre la parte superior de la curva de respuesta. Al aumentar la frecuencia w , la amplitud A aumenta continuamente, recorriendo la rama estable ABC de la curva de respuesta. Si para un valor suficientemente grande de w , nos encontramos en el punto C de la parte superior la curva de respuesta, y w decreciese, se produciría una disminución de la amplitud A.

En resumen, si se comienza en la parte estable de la curva de respuesta, permaneceremos en dicha parte y un incremento o disminución de la frecuencia, se traduce en un movimiento hacia arriba o hacia abajo sobre la curva ABC.

A lo largo de esa curva, la oscilación armónica de respuesta se encuentra en fase con la fuerza excitadora.

Consideremos ahora el caso en que se comienza en el punto E de la parte baja de la curva de respuesta. En este punto, la amplitud de la fuerza excitadora. Si w aumenta, la amplitud disminuye. No obstante esto, si w disminuye, la amplitud aumenta, hasta alcanzar D donde la curva de respuesta tiene tangente vertical. En el punto D acaba la zona estable y la amplitud salta hasta el punto B, con la fase relativa de la amplitud de la respuesta armónica y la fuerza excitadora cambiando en forma discontinua entre 180° y 0° . Si entonces la frecuencia disminuyera, la oscilación periódica permanecería en fase con la fuerza exterior, decreciendo continuamente la amplitud según la curva BA. Si situados en el punto B, creciese la frecuencia, la amplitud aumentaría de forma continua según la curva BC. En cualquier caso, el movimiento quedaría confinado a la parte superior ABC de la curva de respuesta. Este comportamiento, se denomina **fenómeno del salto** y representa una de las características más interesantes de los osciladores no lineales. Obsérvese que cuando $w > w_1$ (donde w_1 es la frecuencia correspondiente a la tangente vertical de la curva de respuesta), para cada valor de w , existen tres valores de la amplitud A. Los valores intermedios de A, corresponden a la oscilación inestable.

3. Resonancia y salto en la ecuación de Duffing con amortiguación.

Se analizará ahora el caso de la ecuación de Duffing que contiene un término amortiguador lineal, considerando la ecuación

$$(d^2 y / dt^2) + 2 \epsilon k (dy / dt) + y + \epsilon y^3 = \epsilon F_0 \cos (wt + \delta) \quad (3.1)$$

Las curvas de respuesta se obtienen fácilmente para

$F = \epsilon F_0$, al eliminar la fase δ en las ecuaciones:

$$F_0 \cos \delta + 2 w_1 A - (3 A^3 / 4) = 0$$

$$F_0 \sin \delta - 2 k A = 0$$

resultando:

$$[(1-w^2)A + (3\epsilon A^3/4)]^2 + 4\epsilon^2 k^2 A^2 = F^2 \quad (3.2)$$

Un detenido estudio de esta última ecuación, muestra que las curvas de respuesta correspondientes difieren poco de las de la ecuación (2.1), esto es, de la:

$$w^2 = 1 + (3\epsilon A^2 / 4) \pm (F/A)$$

La diferencia más importante reside en que las curvas de respuesta dadas por las ecuaciones (3.2) aparecen redondeadas en las proximidades de la curva esqueleto C_0 obtenida al hacer $F = 0$ en la ecuación (3.2).

Cabía presumir este resultado, toda vez que para un ϵ suficientemente pequeño la ecuación (3.2) da lugar a curvas ligeramente diferentes de las curvas de respuesta del oscilador lineal amortiguado

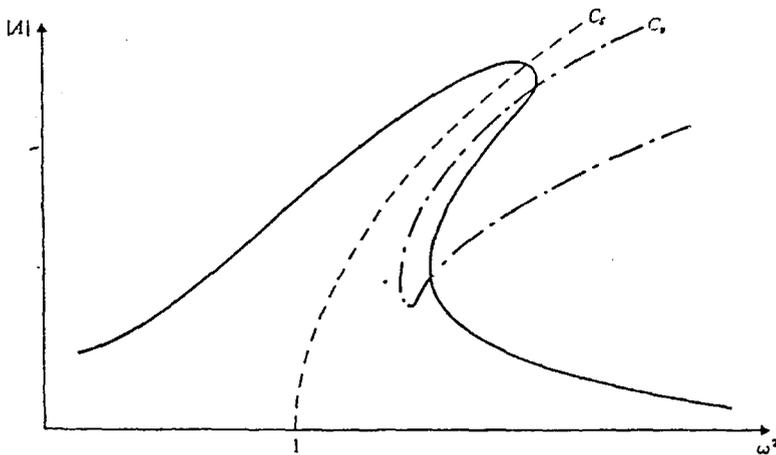


Fig. (3.8)

Curva típica de respuesta de la ecuación de Duffing con amortiguamiento. La figura muestra una curva de respuesta para $\epsilon > 0$, inclinada hacia la derecha.

Por otra parte, estas curvas pueden considerarse como originadas por las curvas de respuesta del oscilador lineal amortiguado, inclinadas hacia la derecha para $\epsilon > 0$ y hacia la izquierda para $\epsilon < 0$.

En la figura (3.8) el lugar de las tangentes verticales a las curvas de respuesta, se indica por C_1 . El interior de la región delimitada por C_1 constituye la zona en la que las curvas de respuesta se cambian en sí mismas (*fenómeno del salto por oscilaciones inestables*).

Obsérvese que existe un valor de $F = F_1$ tal que, para $F < F_1$, las curvas de respuesta no se cambian en sí mismas.

Discutamos ahora el fenómeno del salto asociado a la ecuación de Duffing con amortiguación.

Tomemos $F = \epsilon F_0$ fijo, y hagamos variar la frecuencia w .

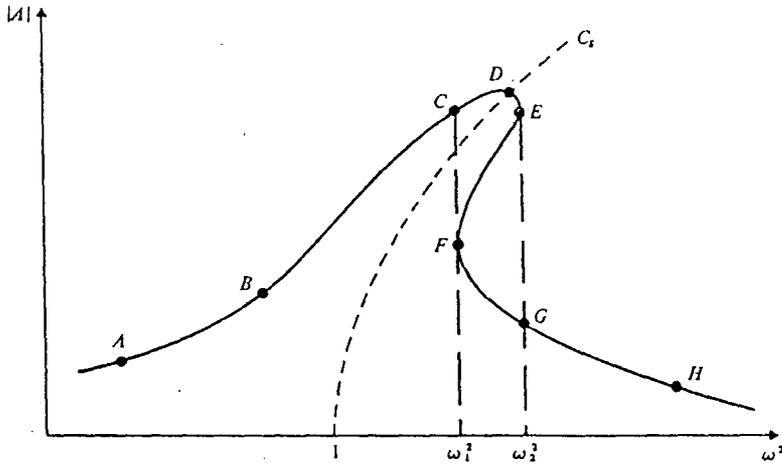


Fig. (3.9)

Las porciones ABCDE y FGH de la curva de respuesta corresponden a las amplitudes de oscilaciones estables. El segmento FE corresponde a amplitudes de oscilaciones inestables.

Los puntos E y F son puntos donde las curvas de respuesta tienen tangente vertical.

En la figura (3.9) se observa que, al aumentar w (partiendo de cero), la amplitud de la respuesta aumenta a lo largo de la curva ABCD. En el punto de intersección D de la curva esqueleto C_1 con la curva de resonancia, la amplitud A alcanza su máximo valor y, a continuación, disminuye hasta el punto E, donde la curva de respuesta posee tangente vertical.

El incremento adicional de w origina un salto de amplitud hasta el punto G y a continuación, una disminución de A a lo largo de la curva GH.

Partiendo del Punto H, correspondiente a un valor grande de w resulta que si w disminuye, la amplitud A aumenta hasta el punto F en el que la curva de respuesta tiene tangente vertical. La amplitud, salta entonces al punto C desde donde, si w sigue disminuyendo, A disminuirá a lo largo de CBA.

En la figura (3.10), se muestra el comportamiento de la fase δ como función de w^2 .

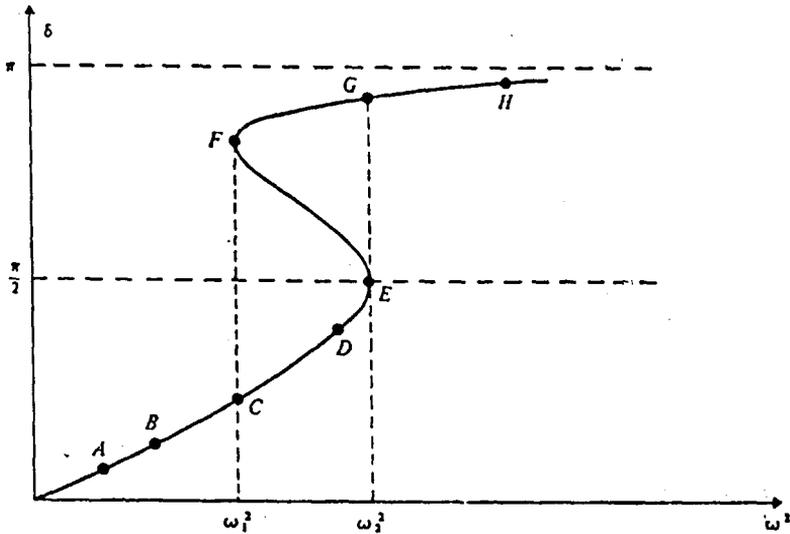


Fig. (3.10)

Comportamiento de la fase δ en la ecuación de Duffing con amortiguación. Los puntos señalados con letras corresponden a los mismos puntos que en la figura (3.9).

El salto mencionado anteriormente, no ocurre de forma instantánea, sino que requiere unos pocos ciclos de oscilación para estabilizarse al nuevo valor de la amplitud.

Así pues, cuando w se aproxima al valor w_1 , para el cual la curva de respuesta posee una tangente vertical, la amplitud de respuesta aumenta o disminuye, pudiéndose observar oscilaciones transitorias hasta alcanzar un nuevo estado estable.

La naturaleza exacta de las oscilaciones transitorias, dependerá de la rapidez con que w pase por el valor crítico w_1 .

Diversos investigadores han observado experimentalmente, en sistemas eléctricos y mecánicos, los fenómenos del salto discutidos con anterioridad (****).

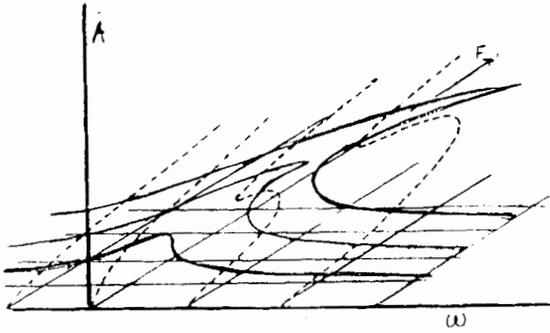
4. Fenómeno del salto y teoría de catástrofes.

Siguiendo a (10), el fenómeno del salto, puede interpretarse en relación con la teoría de catástrofes.

Para un w dado, cabe considerar $A = A(w, t)$ como la ecuación de una superficie.

En la figura (3.11), las intersecciones de varios planos relativos a F constante con esta superficie, se han representado mediante las líneas continuas, mientras que las intersecciones con varios planos relativos a w constante son representadas por líneas discontinuas.

Estas últimas son las líneas mostradas en la figura (3.12).



(Fig. (3.11))

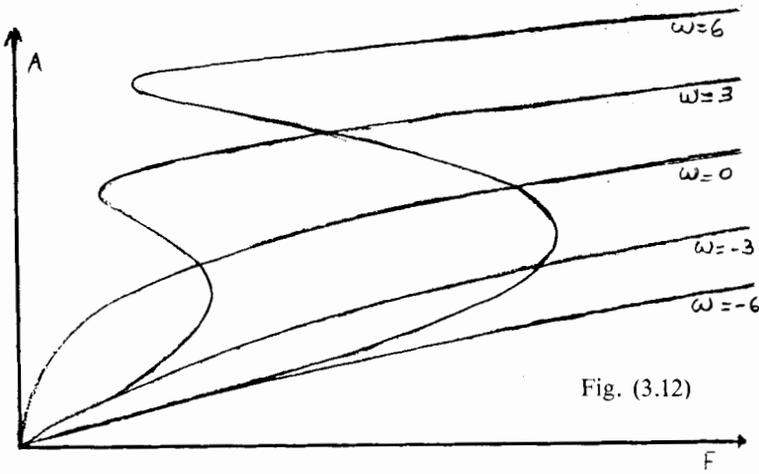


Fig. (3.12)

La figura (3.13) representa esquemáticamente una cúspide.

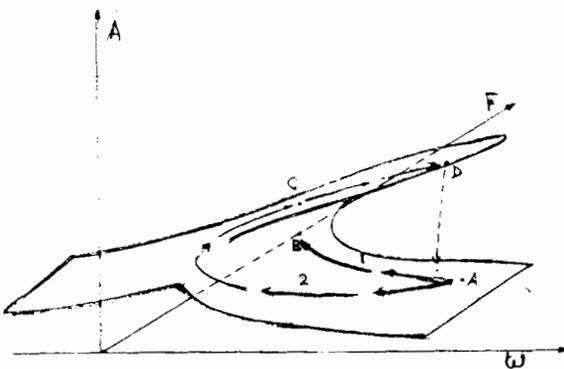


Fig. (3.13)

Si un proceso casi estacionario se inicia en el punto A y sigue el camino 1 (*únicamente w cambia*) existirá un salto espontáneo desde el punto B hasta el punto C (*una catástrofe*). Por otro lado, si un proceso se inicia en el punto a y sigue el camino 2 (*exigiendo que F y w cambien*), la amplitud aumentará suavemente a su valor en el punto C. Si el proceso continúa desde el punto C hasta el punto D, ocurre un salto espontáneo hacia abajo (*una catástrofe*). Con esta aproximación todas las posibles curvas respuesta y procesos casi estacionarios, pueden ser representados por una única superficie y examinados simultáneamente.

Bibliografía

- (1) BAKER, J.G.: «Forced Vibrations with nonlinear spring constants». *Trans. Am. Soc. Mech. Eng.*, Vol. 54 (1932).
- (2) BOGOLUBOV, N.N. y MITROPOLSKY, K.: «Asymptotic methods in the theory of Nonlinear oscillations». Gordon & Breach, N. York, (1961).
- (3) COLE, J.D.: «Perturbation Methods in Applied mathematics». Blaisdell, Waltham. MA. (1968).
- (4) COLLINGE, I.R. y OCKENDON, J.R.: «Transition through resonance of a Duffing oscillator». *SIAM. J. APPL. MATH.* Vol. 37, n°2, pag. 350- 357, (1979).
- (5) DAVIS, H.T.: «Introduction to nonlinear differential and integral equations». Dover Publications Inc. N.Y. (1962).
- (6) DUFFING, G.: «Ph. D. thesis (Sammlung Vieweg, Braunschweig), 1918.
- (7) IMAZ, C. y VOREL, Z.: «Ecuaciones Diferenciales Ordinarias». Limusa-Wiley, S.A., México (1968).
- (8) LAMBE y TRANTER: «Ecuaciones diferenciales». Uteha. México (1964).
- (9) MICKENS, R.E.: «An introduction to nonlinear oscillations». Cambridge University Press, N.Y., (1981).
- (10) NAYFEH, A.H. & MOOK, D.T.: «Nonlinear Oscillations». John Wiley & Sons, Inc. New York, (1979).
- (11) NEWLAND, D.E.: «Int. J. Mech. Sci. 1, 159 (1965).
- (12) RAUSCHER, M.: «J. Appl. Mech. 9, A- 169 (1938).
- (13) STOKER, J.J.: «Nonlinear vibrations in mechanical and electrical systems». Interscience Publishers, Inc., New York, (1950).
- (14) LEWIS, F.M.: «Vibration during acceleration through a critical speed». *Trans. ASME*, 54, pag. 253. 1932.

Notas

(*) Si θ es muy pequeño, la aproximación $\sin \theta \sim \theta$ es correcta y la ecuación $(d^2\theta / dt^2) + (g / l) \theta = 0$, es una ecuación lineal de coeficientes constantes cuya integral general $\theta = A \sin(\omega t + \varphi)$, (con $\omega = (g / l)^{1/2}$), hace ver que el período $2\pi/\omega = 2\pi (g / l)^{-1/2}$ del movimiento es independiente de la amplitud de la oscilación (cosa que naturalmente no ocurre para grandes amplitudes).

(**) Entre otras aplicaciones, las ecuaciones de este tipo de Duffing se originan en el estudio de vibraciones laterales de columnas terminadas en punta sujetas a cargas periódicas. En este contexto, la derivada segunda representa la inercia, el término lineal representa la fuerza restauradora debida al pandeo y el término cúbico representa la fuerza restauradora debida al estiramiento del eje neutral.

(***) Para más referencias, véase (9) (cap. V) y (13) (cap. IV).

(****) Entre ellos, G. Duffing (6).