

## LOCALIZACIÓN COMPETITIVA CON VALORACIONES DIFUSAS DE LOS CLIENTES

**CLARA M. CAMPOS RODRÍGUEZ**

*ccampos@ull.es*

*Universidad de La Laguna / Instituto Universitario de Desarrollo Regional  
38271 La Laguna ESPAÑA*

**DOLORES R. SANTOS PEÑATE**

*drsantos@dmc.ulpgc.es*

*Universidad de Las Palmas / Departamento de Métodos Cuantitativos en Economía y Gestión  
35017 Las Palmas de G.C. ESPAÑA*

**JOSÉ A. MORENO PÉREZ**

*jamoreno@ull.es*

*Universidad de La Laguna / Instituto Universitario de Desarrollo Regional  
38271 La Laguna ESPAÑA*

Recibido 26/03/2012

Revisado 04/05/2012

Aceptado 10/07/2012

**RESUMEN:** Un problema de localización competitiva con dos empresas consiste en determinar la ubicación de los puntos de servicio de estas empresas de manera que se optimicen ciertos objetivos. Normalmente el objetivo perseguido es la maximización de los beneficios o de la cuota de mercado. En el problema del líder-seguidor la toma de decisiones es secuencial, es decir, el líder establece primero sus centros y, posteriormente, el seguidor entra en el mercado abriendo los suyos en las localizaciones que considera más convenientes. Consideramos que el criterio de decisión de los usuarios se basa en su percepción del tiempo necesario para trasladarse al punto de servicio. Este tiempo de desplazamiento es de naturaleza imprecisa ya que el cliente tiene presente que depende de varios factores como es, por ejemplo, el estado del tráfico. Por ello, en este trabajo, la elección del punto de servicio por parte de los clientes se modela mediante la teoría de los conjuntos difusos o borrosos. Planteamos y resolvemos el problema de localización competitiva del líder-seguidor considerando que los clientes basan su decisión en la comparación de los tiempos difusos para acceder a los servicios establecidos por cada empresa competidora. La teoría de conjuntos difusos es un instrumento riguroso y efectivo para tratar los problemas en los que la información es imprecisa.

**Palabras claves:** Localización competitiva, centroide, problema del líder-seguidor, solución de Stackelberg, conjuntos difusos.

**ABSTRACT:** A competitive location problem with two firms consists of locating the facilities of these two firms in order to optimize certain objectives. Normally, the objective is to maximize the profit or the market share. For the leader-follower problem the decision making is sequential, first the leader opens its facilities and later the follower enter the market installing facilities in the locations considered more convenient for her/him. We consider that the user decision criterion is based on her/his perception of the time required moving to the facility. This travel time is of vague nature since the customer takes into account that it depends on several factors such as the traffic conditions. Therefore the customer choice is modeled using the theory of fuzzy sets. We propose and solve the leader-follower problem assuming that customers base their decision on the comparison of fuzzy times required to have access to the services established by each competitor. The fuzzy set theory is a rigorous and effective instrument for dealing with problems in which the information is vague.

**Keywords:** Competitive location, centroid, Stackelberg problem, fuzzy sets.

## 1. Introducción.

Los modelos de localización competitiva representan situaciones en las que dos o más empresas compiten en un mercado. Generalmente las empresas compiten para obtener el máximo beneficio o la máxima cuota de mercado, otros objetivos posibles son la minimización de la cuota de mercado del competidor y la maximización de la diferencia entre la cuota de mercado propia y la de las firmas competidoras. En un modelo de localización competitiva la variable relevante es la localización, ésta puede coexistir con otras variables tales como el precio, la cantidad de bien o servicio ofertada, y ciertos atributos de los centros de servicio que se planea instalar. Pueden encontrarse revisiones de los modelos de localización competitiva en Eiselt y Laporte (1989), Eiselt, Laporte y Thisse (1993), Friesz, Miller y Tobin (1988), y Plastria (2001), y Santos-Peñate, Suárez-Vega y Dorta-González (2007).

Se puede considerar que los bienes o servicios que puede suministrar una empresa pueden ser de dos tipos según se consideren imprescindibles para los usuarios o no. Así hablaremos de bienes esenciales y de bienes no esenciales. La demanda de bienes esenciales debe satisfacerse en su totalidad, ello implica que la demanda total se reparte entre las empresas competidoras, es decir, la demanda no cubierta por uno de los competidores será satisfecha por el resto.

El comportamiento del cliente se modela considerando que los clientes siguen una regla de elección. La regla de elección considerada determinará los establecimientos que serán elegidos por el cliente para satisfacer su demanda. En los modelos tradicionales surgidos en el ámbito de la investigación operativa, la elección del cliente depende únicamente de la distancia entre éste y los puntos de servicio, entendiendo que dicha distancia representa una medida del esfuerzo que supone para el cliente su elección. Sin embargo, para adoptar decisiones, los clientes utilizan normalmente su percepción de la distancia en relación directa con el tiempo que emplean en recorrerla. Esta percepción generalmente tiene algún tipo de imprecisión o incertidumbre y es de naturaleza difusa. Por ello, en este trabajo reformulamos las reglas de decisión del consumidor como una función del tiempo de desplazamiento el cual es de naturaleza imprecisa, de manera que cuando hablemos de centro de servicio *más cercano* estaremos refiriéndonos al centro más próximo en el tiempo, esto es, el centro que sería alcanzado con el menor tiempo de desplazamiento.

Entre las posibles reglas de decisión tenemos las siguientes:

- Regla de elección binaria, en este caso los clientes eligen el establecimiento más cercano y utilizan allí todo su poder de compra.
- Regla de elección parcialmente binaria, se considera que los clientes eligen el establecimiento más cercano de cada una de las firmas que operan en el mercado.
- Regla de elección proporcional, según esta regla los clientes acuden a todos los establecimientos y utilizan en ellos una cantidad de poder de compra que viene dada por una función decreciente del tiempo que necesita el cliente para acceder al establecimiento.

Aunque es poco realista, el modelo binario es útil para las aplicaciones en las que el producto puede ser considerado homogéneo y se supone que los establecimientos son idénticos, como por ejemplo los quioscos de periódicos y las farmacias. En el modelo proporcional todos los centros capturan parte de la demanda lo cual puede ser también poco realista, ya que posiblemente un consumidor no acuda a un centro muy alejado si puede satisfacer su demanda en otros puntos de servicio mucho más próximos. Entre estos dos tipos de modelos se sitúan aquellas reglas de elección para las que la demanda de un cliente se reparte entre los centros que distan de éste una cantidad comprendida entre ciertos valores dados, pudiendo existir centros que no capturan demanda de este cliente al estar muy alejados del mismo. Algunos trabajos donde pueden encontrarse diferentes reglas de elección son los de Devletoglou (1965), Devletoglou and Demetriou (1967), Hakimi (1990), y Santos-Peñate y otros (2011), en este último se

utiliza una función de captura del tipo usado en el modelo de cubrimiento maximal generalizado estudiado por Berman and Krass (2002).

El problema de localización competitiva del líder-seguidor, o problema de Stackelberg en localizaciones, es un problema de decisión secuencial donde una empresa, la empresa líder, entra en un mercado vacío instalando  $p$  centros, teniendo en cuenta en la elección de la localización de sus centros la entrada futura en el mercado de una firma competidora, la empresa seguidora. El objetivo de cada empresa es maximizar su cuota de mercado. Una solución del problema líder-seguidor o solución de Stackelberg es un par  $(X^*_p, Y^*_r)$  donde  $Y^*_r$  es la estrategia óptima del seguidor si el líder tiene  $p$  establecimientos localizados en  $X^*_p$ , y  $X^*_p$  es la estrategia preventiva óptima del líder cuando el seguidor abre  $r$  centros de servicio.

Los problemas de localización pueden plantarse en un espacio continuo, por ejemplo en el plano, considerándose en este caso que todo punto de este espacio continuo es un punto candidato para ubicar un centro de servicio. También pueden plantarse en redes, las cuales pueden representar redes de comunicación o de transporte, en este caso un centro puede abrirse en cualquier punto de la red. Finalmente, el espacio donde se construye el modelo puede ser discreto, ello implica que el conjunto de puntos candidatos para instalar un centro de servicio es discreto, normalmente finito. Para el problema en redes, los términos,  $(r|X^*_p)$ -medianoide y  $(r|p)$ -centroide fueron introducidos por Hakimi (1983, 1990) para denominar los problemas del seguidor y del líder respectivamente, suponiendo que el líder abre  $p$  centros y el seguidor instala  $r$ . Algunos resultados sobre la existencia de solución óptima en el conjunto de vértices para el problema del  $(r|X^*_p)$ -medianoide en diferentes escenarios pueden encontrarse en Hakimi (1964) y Suárez-Vega y otros (2004).

Son pocos los artículos sobre modelos de localización donde se muestran procedimientos para encontrar una solución de Stackelberg, tanto si se trata de algoritmos exactos como de heurísticas. Tenemos, por ejemplo, los trabajos de Alekseeva y otros (2010), Benati y Laporte (1994), Bhadury y otros (2003), Campos y otros (2010), Redondo y otros (2010), Serra y ReVelle (1995), y Spoerhase y Wirth (2007). En este trabajo proponemos un procedimiento exacto para resolver el problema líder-seguidor discreto para demanda esencial, considerando una regla de elección binaria. El procedimiento es una adaptación del propuesto en Campos y otros (2010) al caso en que el criterio de decisión del cliente es el tiempo de desplazamiento y donde éste tiene un valor difuso. Consideramos que los clientes basan su elección en su percepción del tiempo requerido para acceder al establecimiento y que esta percepción está generalmente sujeta a cierto grado de imprecisión. Por tanto, suponemos que los clientes deben realizar comparaciones entre tiempos difusos para hacer sus elecciones.

El concepto de conjunto difuso fue introducido por Zadeh (1965) y se define como un par  $A=(X, \mu_A)$  donde  $X$  es un *conjunto clásico* y  $\mu_A$  es una *función de pertenencia*, siendo  $\mu_A: X \rightarrow [0,1]$ .  $X$  es el conjunto universo y  $\mu_A$  representa grados intermedios de pertenencia de los elementos del conjunto  $X$ . Dados un conjunto difuso  $A$  definido por la función de pertenencia  $\mu_A$  y un valor  $\alpha \in [0,1]$ , el  $\alpha$ -corte de  $A$  es el conjunto clásico  $A_\alpha = \{ x \in X: \mu_A(x) \geq \alpha \}$ . El soporte del conjunto difuso  $A$  es  $S(A) = \{ x \in X: \mu_A(x) > 0 \}$  y un elemento  $x$  es una moda de  $A$  si  $\mu_A(x) = 0$ . Según la definición propuesta por Dubois y Prade (1987), un número difuso es un conjunto difuso cuyo universo es el conjunto de los números reales y cuyos  $\alpha$ -cortes son intervalos cerrados y acotados, con soporte compacto y moda única. Una visión clásica del uso de los números difusos puede verse en Kaufmann y Gupta (1991). El uso de esta metodología en problemas de decisión puede consultarse en Chen y Hwang (1992), y una revisión de la utilización de los conjuntos difusos y las técnicas derivadas en localización competitiva puede verse en Campos y otros (2009).

Uno de los motivos para introducir las técnicas difusas en la construcción de modelos matemáticos es considerar que las decisiones se toman en base a la información imprecisa o incierta que tienen los individuos sobre las variables que hacen intervenir en los procesos de decisión. Tales decisiones se toman sobre la base de comparaciones de cantidades de las que se posee una información imprecisa o vaga. Esto

ocurre con los clientes en un problema de localización competitiva ya que fundamentan su decisión en la manera en la que perciben la cercanía a los establecimientos abiertos.

Para comparar cantidades difusas se han realizado diversas propuestas. Existen tres grandes metodologías de comparación de dos números difusos: el uso de índices, el de  $\alpha$ -cortes, y la medida de la posibilidad y la necesidad (ver Campos y Verdegay (1989) o Bortolan y Degani (1985)). Una descripción breve de estas metodologías es la siguiente:

- (i) La comparación basada en índices parte de la definición de una función de evaluación de números difusos a la que se conoce como *índice*. Un índice es una aplicación  $I : F(\square) \rightarrow \square$  donde  $F(\square)$  es el conjunto de todos los números difusos. Sean  $a$  y  $b$  dos números difusos se define  $a \leq_i b \Leftrightarrow I(a) \leq I(b)$ . Entre los índices propuestos destacan los índices de Yager, Chang y Adamo.
- (ii) La comparación basada en  $\alpha$ -cortes, parte de los métodos de comparación de intervalos. Fijado un valor,  $\alpha \in [0,1]$  se comparan los  $\alpha$ -cortes o intervalos de confianza de nivel  $\alpha$  de los números difusos correspondientes. Entre las distintas propuestas, destacan la de Tanaka y la de Ramik
- (iii) La comparación basada en la medida de la posibilidad y la necesidad usan los llamados índices de posibilidad y necesidad. Estos índices son extensiones de la desigualdad  $x \leq y$  conforme al principio de extensión de Zadeh. Destacando los índices de posibilidad de dominancia y de necesidad de dominancia de Dubois.

En el presente trabajo usamos un método de comparación basado en  $\alpha$ -cortes, Consideramos que, fijado  $\alpha \in [0,1]$ , para dos números difusos,  $\tilde{a}$  y  $\tilde{b}$ ,  $a <_\alpha b$  si y solamente si  $\bar{a}^\alpha < \underline{b}^\alpha$  donde  $[\underline{a}^\alpha, \bar{a}^\alpha]$  y  $[\underline{b}^\alpha, \bar{b}^\alpha]$  son los correspondientes  $\alpha$ -cortes o intervalos de nivel  $\alpha$ .

Considerando las hipótesis descritas anteriormente, formulamos el problema del líder-seguidor como un proceso de optimización en tres niveles simultáneos. Dicho proceso incluye:

- El problema de elección del cliente. Dadas las localizaciones del líder y del seguidor, escoger el punto de servicio preferido.
- El problema de localización del seguidor. Dadas las localizaciones del líder, seleccionar el conjunto de localizaciones del seguidor que maximiza la demanda total captada.
- El problema de localización del líder. Determinar el conjunto de localizaciones del líder que minimiza la máxima demanda que puede capturar el seguidor.

## 2. El modelo.

Sea  $C$  el conjunto de las localizaciones de los clientes y sea  $L$  el conjunto de posibles localizaciones de establecimientos sobre una red o grafo  $G(V, E)$ . Los conjuntos  $C$  y  $L$  son por lo general finitos y consisten en vértices; es decir,  $C, L \subseteq V$ ,  $|C|=n$  y  $|L|=m$ . Sea  $w$  una función de pesos sobre el conjunto de las localizaciones de los clientes, donde el peso  $w(c)$  de la localización  $c$  representa la demanda de los clientes ubicados en ese punto  $c$ . Sea  $\tilde{t}_L(c, x)$  el tiempo de viaje difuso percibido por un cliente situado en un punto  $c$  en el traslado hasta un establecimiento ubicado en  $x$ , si el establecimiento es de la empresa líder, y sea  $\tilde{t}_S(c, x)$  este mismo tiempo de viaje si el establecimiento es de la empresa seguidora.

Un cliente localizado en  $c$  preferirá un establecimiento del seguidor situado en  $y$  a un establecimiento del líder situado en  $x$  si percibe que emplearía menos tiempo en ir de  $c$  a  $y$  que en ir de  $c$  a  $x$ . Para cada par de localizaciones  $x, y \in L$ , denotamos  $C(y \pi x)$  al conjunto de localizaciones de clientes que cambian su elección del establecimiento del líder que está en la localización  $x$  por el del seguidor que está en la localización  $y$ . Entonces, dado el sistema de comparación  $<_f$  entre tiempos difusos, este conjunto es

$$C(x, y) = \{c \in C : \tilde{t}_S(c, y) <_f \tilde{t}_L(c, x)\}$$

Para cada  $\alpha \in [0,1]$ , consideramos que para dos tiempos difusos  $\tilde{t}$  y  $\tilde{s}$  se cumple  $t <_\alpha s$  si y sólo si  $\bar{t}^\alpha < \underline{s}^\alpha$ , donde  $[\underline{t}^\alpha, \bar{t}^\alpha]$  y  $[\underline{s}^\alpha, \bar{s}^\alpha]$  son los correspondientes  $\alpha$ -cortes o intervalos de nivel  $\alpha$ . Por tanto, usaremos los conjuntos

$$C_\alpha(y < x) = \{c \in C : \bar{t}_S^\alpha(c, y) < \underline{t}_L^\alpha(c, x)\}.$$

Como caso concreto vamos a utilizar números difusos triangulares para representar los tiempos de viaje percibidos por los clientes. Un número difuso triangular  $\tilde{t}$  viene determinado por el valor central o modal  $\hat{t}$  y los límites inferior  $\underline{t}$  y superior  $\bar{t}$ . El número triangular difuso  $\tilde{t} = (\underline{t}, \hat{t}, \bar{t})$  tiene la siguiente función de pertenencia

$$\mu_{\tilde{t}}(t) = \begin{cases} \frac{t - \underline{t}}{\hat{t} - \underline{t}} & \text{si } t \in [\underline{t}, \hat{t}] \\ \frac{\bar{t} - t}{\bar{t} - \hat{t}} & \text{si } t \in [\hat{t}, \bar{t}] \\ 0 & \text{si } t \notin [\underline{t}, \bar{t}] \end{cases}$$

El  $\alpha$ -corte o intervalo de confianza de nivel  $\alpha$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ , para el número triangular  $\tilde{t} = (\underline{t}, \hat{t}, \bar{t})$  viene dado por  $[\underline{t}^\alpha, \bar{t}^\alpha] = [\alpha\hat{t} + (1-\alpha)\underline{t}, \alpha\hat{t} + (1-\alpha)\bar{t}]$ . En particular para  $\alpha = 1$  el intervalo de nivel  $\alpha$  del número triangular es el tiempo modal o central  $\hat{t}$ , y para  $\alpha=0$  el intervalo de nivel  $\alpha$  es el soporte  $[\underline{t}, \bar{t}]$ .

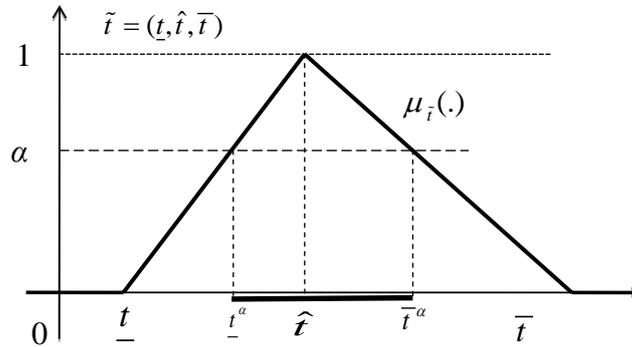


Figura 1.

Por tanto, utilizaremos como tiempos difusos de viaje  $\tilde{t}(c, x) = (\underline{t}(c, x), \hat{t}(c, x), \bar{t}(c, x))$  donde  $\hat{t}(c, x)$  es el tiempo central o modal del viaje desde  $c$  hasta  $x$ , y  $\underline{t}(c, x)$  y  $\bar{t}(c, x)$  son los límites inferior y superior.

Para cada  $\alpha \in [0, 1]$  y cada par de localizaciones  $x, y \in L$ , a partir del conjunto  $C_\alpha(y \prec x)$  de localizaciones de clientes que cambian su elección de la localización  $x$  por la localización  $y$ , determinamos la demanda total de los clientes que cambiarían a la localización  $y$  desde la localización  $x$ , la cual se denota por  $W_\alpha(y \prec x)$  y tiene un valor igual a

$$W_\alpha(y \prec x) = \sum_{c \in C_\alpha(y \prec x)} w(c).$$

Sea

$$W_\alpha^*(x) = \max_{y \in L} W_\alpha(y \prec x).$$

Un  $x$ -**medianoide** es un punto  $y \in L$  tal que  $W_\alpha^*(x) = W_\alpha(y \prec x)$ . Un  $\alpha$ -**centroide** es un punto  $x^* \in L$  tal que

$$W_\alpha^*(x^*) = \min_{x \in L} W_\alpha^*(x).$$

Así el problema del centroide es el problema minimax

$$\min_{x \in L} \max_{z \in L} W_\alpha(z \prec x).$$

El conjunto  $X^*$  de centroides viene dado por:

$$X^* = \arg \min_{x \in L} W_\alpha^*(x) = \arg \min_{x \in L} \max_{z \in L} W_\alpha(z \prec x).$$

Consideremos ahora el problema de localización múltiple en el que los puntos  $x$  e  $y$  de  $L$  son sustituidos por conjuntos de  $p$  y  $r$  localizaciones, respectivamente. Esto es, sea  $p$  el número de establecimientos que abrirá el líder y  $r$  el número de establecimientos que instalará el seguidor.

Sea  $L^q$  el conjunto de subconjuntos de  $L$  con  $q$  puntos, es decir

$$L^q = \{X \subseteq L : |X| = q\}.$$

Entonces definimos las nociones  $C_\alpha(Y \prec X)$  y  $W_\alpha(Y \prec X)$  para cada par de conjuntos de puntos,  $X, Y \subseteq L$ . El conjunto  $C_\alpha(Y \prec X)$  de localizaciones de clientes que captura el conjunto de localizaciones  $Y \subseteq L$  frente al conjunto de localizaciones  $X \subseteq L$  es el conjunto de puntos de  $C$  para los que existe un punto de  $Y$  al que el cliente percibe más cercano que cualquier punto de  $X$ . Así

$$\begin{aligned} C_\alpha(Y \prec X) &= \bigcup_{y \in Y} \bigcap_{x \in X} C_\alpha(y \prec x) = \\ &= \{c \in C : \forall x \in X \exists y \in Y : \tilde{t}_S(c, y) < \tilde{t}_L(c, x)\} = \\ &= \{c \in C : \forall x \in X \exists y \in Y : \bar{t}_S^\alpha(c, y) < \underline{t}_L^\alpha(c, x)\}. \end{aligned}$$

Finalmente, la demanda total de los clientes que captura el conjunto  $Y$  al conjunto  $X$  es:

$$W_\alpha(Y \prec X) = \sum_{c \in C_\alpha(Y \prec X)} w(c).$$

Nótese que los conjuntos de localizaciones del líder de tamaño  $p$  sólo son comparados con los conjuntos de localizaciones con  $r$  elementos,  $p, r > 0$ . El número de localizaciones para cada competidor se considera como la característica relevante de los conjuntos permitidos por las firmas.

Así, fijados el conjunto  $X \subseteq L$  de las localizaciones de los establecimientos del líder, el número  $r$  de las localizaciones que puede elegir el seguidor, el conjunto de puntos de demanda  $C$  y sus correspondientes pesos  $w$ , y el valor  $\alpha \in [0, 1]$ , un medianoide es el mejor conjunto de  $r$  ubicaciones para abrir los establecimientos del seguidor. Formalmente, un conjunto de localizaciones  $Y \in L^r$  es un medianoide si y solamente si

$$W_\alpha(Y \prec X) \geq W_\alpha(Z \prec X), \quad \forall Z \in L^r.$$

Puede existir más de un medianoide. Denotamos  $Y(X)$  al conjunto de medianoides, para cada  $X \subseteq L$ . Entonces,

$$Y(X) = \arg \max_{Y \in L^r} W_\alpha(Y \prec X).$$

Fijado además el número  $p$  de localizaciones que puede elegir la empresa líder, un centroide es la solución del líder cuando éste quiere instalar  $p$  establecimientos de manera que la demanda total de los clientes que prefieren el conjunto de establecimientos del seguidor sea mínima. Formalmente, un conjunto de localizaciones  $X \subseteq L$  es un centroide si y solamente si

$$\max_{Y \in L^r} W_\alpha(Y \prec X) \leq \max_{Y \in L^r} W_\alpha(Y \prec Z), \quad \forall Z \in L^p.$$

El valor de la puntuación de  $X$  viene expresado por

$$W^*(X) = \max_{Y \in L^r} W_\alpha(Y \prec X) = W_\alpha(Y^* \prec X), \quad \text{para } Y^* \in Y(X).$$

Entonces  $X \in L^p$  es un centroide si

$$W^*(X) = \min_{Z \in L^p} W^*(Z).$$

Por lo tanto, un conjunto de localizaciones  $X^* \in L^p$  es un conjunto centroide si y sólo si:

$$X^* \in \arg \min_{Z \in L^p} \max_{Y \in L^r} W_\alpha(Y \prec Z).$$

Dado el conjunto de localizaciones  $X$  para el líder, un medianoide es una solución óptima para el seguidor. Un centroide es una solución óptima para el líder.

Obsérvese que la regla de elección empleada es binaria orientada al líder. Esto significa que cada cliente visita el establecimiento más cercano y que en caso de empates éstos se deshacen favoreciendo al líder.

Para aplicar las técnicas de programación lineal entera al problema de localización competitiva descrito en la sección anterior debemos formular el problema del centroide con elección difusa de los clientes como un problema de programación lineal entera. El procedimiento seguido está inspirado en un trabajo de Dobson y Karmarkar (1987) en el que estos autores formulan un problema de localización competitiva como un problema de programación lineal.

### 3. Ejemplo.

Con el fin de ilustrar la resolución del problema propuesto presentamos un ejemplo derivado del usado en Campos y otros (2010). En la figura 2 se muestra el grafo sobre el que se define dicho ejemplo. Se considera que todos los vértices son puntos de localización de clientes y también posibles puntos de servicio. Por tanto  $n = m = 11$  y  $C = L = \{v_i\}_{1 \leq i \leq 11}$ . Los números que figuran sobre las aristas reflejan el tiempo modal de desplazamiento entre los vértices que une cada una de ellas, y los números que están dentro de los cuadrados representan el número de usuarios que se encuentran en cada vértice, es decir, la demanda en los vértices. En relación al ejemplo usado en la referencia citada anteriormente, estos valores han sido modificados para conseguir un caso más ilustrativo.

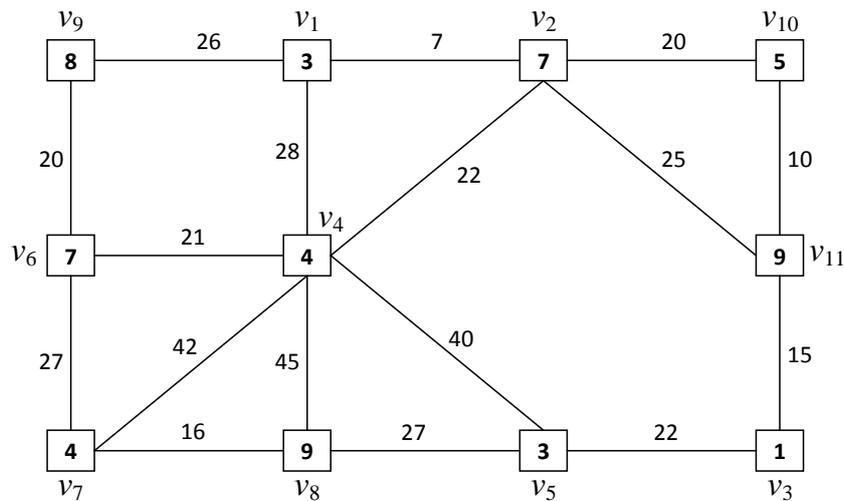


Figura 2.

Utilizaremos tiempos difusos triangulares por su simplicidad, naturalidad y aplicabilidad. Consideramos que los tiempos de viaje son percibidos como números triangulares difusos cuyos valores centrales o modales son los dados en la tabla 1. Esta tabla representa la matriz de tiempos que se utilizaría en un modelo que no contemple imprecisión en los datos. Como la suma de números triangulares difusos es un número triangular difuso, el tiempo de desplazamiento entre vértices (distancia entre vértices del grafo) serán también números triangulares difusos. Consideramos que estas distancias triangulares entre los vértices tienen cada una de ellas la misma desviación máxima inferior y superior, y que ésta es una proporción dada de los valores modales. Sin embargo, puesto que el líder se supone ya establecido cuando entra el seguidor en el mercado, suponemos que la incertidumbre sobre el tiempo de desplazamiento percibido por los clientes es mayor cuando se trata de establecimientos del seguidor que cuando los establecimientos son del líder. En concreto suponemos que la desviación máxima de cada

tiempo de viaje triangular a un establecimiento del líder es del 10% del valor central, y de cada tiempo de viaje a un establecimiento del seguidor es del 20%.

Tiempos	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_9$	$v_{10}$	$v_{11}$
$v_1$	0	7	47	28	68	46	70	73	26	27	32
$v_2$	7	0	40	22	62	43	64	67	33	20	25
$v_3$	47	40	0	62	22	83	65	49	103	25	15
$v_4$	28	22	62	0	40	21	42	45	41	42	47
$v_5$	68	62	22	40	0	61	43	27	81	47	37
$v_6$	46	43	83	21	61	0	27	43	20	63	68
$v_7$	70	64	65	42	43	27	0	16	47	84	80
$v_8$	73	67	49	45	27	43	16	0	63	74	64
$v_9$	26	33	103	41	81	20	47	63	0	53	58
$v_{10}$	27	20	25	42	47	63	84	74	53	0	10
$v_{11}$	32	25	15	47	37	68	80	64	58	10	0

Tabla 1.

Así por ejemplo, como el tiempo de desplazamiento de  $v_3$  a  $v_5$  es 22, consideramos que la percepción del cliente en  $v_3$  es un número triangular centrado en 22 con una desviación del 10% para un establecimiento del líder y del 20% para un establecimiento del seguidor. Por tanto, para el líder, el número difuso triangular será  $[22-2'2, 22, 22+2'2] = [19'8, 22, 24'2]$ , y para el seguidor será  $[22-4'4, 22, 22+4'4] = [17'6, 22, 26'4]$ . Por otra parte, el tiempo requerido para ir de  $v_3$  a  $v_8$  será  $[19'8, 22, 24'2] + [24'3, 27, 29'7] = [44'1, 49, 53'9]$ , para acceder a un establecimiento del líder, y  $[17'6, 22, 26'4] + [21'6, 27, 32'4] = [39'2, 49, 58'8]$  para acceder a un establecimiento del seguidor. Procediendo de esta forma para cualquier par de nodos obtenemos las matrices de tiempos triangulares para acceder a los establecimientos del líder y del seguidor que se muestran en las tablas 2 y 3.

$T_L$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_9$	$v_{10}$	$v_{11}$
$v_1$	[0, 0, 0]	[6'3,7,7'7]	[42'3,47,51'7]	[25'2,28,30'8]	[61'2,68,74'8]	[41'4,46,50'6]	[63,70,77]	[65'7,73,80'3]	[23'4,26,28'6]	[24'3,27,29'7]	[28'8,32,35'2]
$v_2$	[6'3,7,7'7]	[0, 0, 0]	[36'0,40,44'0]	[19'8,22,24'2]	[55'8,62,68'2]	[38'7,43,47'3]	[57'6,64,70'4]	[60'3,67,73'7]	[29'7,33,36'3]	[18'0,20,22'0]	[22'5,25,27'5]
$v_3$	[42'3,47,51'7]	[36'0,40,44'0]	[0, 0, 0]	[55'8,62,68'2]	[19'8,22,24'2]	[72'7,83,91'3]	[58'5,65,71'5]	[44'1,49,53'9]	[92'7,103,113'3]	[22'5,25,27'5]	[13'5,15,16'5]
$v_4$	[25'2,28,30'8]	[19'8,22,24'2]	[55'8,62,68'2]	[0, 0, 0]	[36'0,40,44'0]	[18'9,21,23'1]	[37'8,42,46'2]	[41'5,45,49'5]	[36'9,41,44'1]	[37'8,42,46'2]	[42'3,47,51'7]
$v_5$	[61'2,68,74'8]	[55'8,62,68'2]	[19'8,22,24'2]	[36'0,40,44'0]	[0, 0, 0]	[54'9,61,67'1]	[38'7,43,47'3]	[24'3,27,29'7]	[72'9,81,89'1]	[42'3,47,51'7]	[33'3,37,40'7]
$v_6$	[41'4,46,50'6]	[38'7,43,47'3]	[72'7,83,91'3]	[18'9,21,23'1]	[54'9,61,67'1]	[0, 0, 0]	[25'3,27,29'7]	[38'7,43,47'3]	[18'0,20,22'0]	[56'7,63,69'3]	[61'2,68,74'8]
$v_7$	[63,70,77]	[57'6,64,70'4]	[58'5,65,71'5]	[37'8,42,46'2]	[38'7,43,47'3]	[25'3,27,29'7]	[0, 0, 0]	[14'4,16,17'6]	[42'3,47,51'7]	[73'6,84,92'4]	[71'9,80,88'0]
$v_8$	[65'7,73,80'3]	[60'3,67,73'7]	[44'1,49,53'9]	[41'5,45,49'5]	[24'3,27,29'7]	[38'7,43,47'3]	[14'4,16,17'6]	[0, 0, 0]	[56'7,63,69'3]	[66'6,74,81'4]	[57'6,64,70'4]
$v_9$	[23'4,26,28'6]	[29'7,33,36'3]	[92'7,103,113'3]	[36'9,41,44'1]	[72'9,81,89'1]	[18'0,20,22'0]	[42'3,47,51'7]	[56'7,63,69'3]	[0, 0, 0]	[47'7,53,58'3]	[42'2,58,63'8]
$v_{10}$	[24'3,27,29'7]	[18'0,20,22'0]	[22'5,25,27'5]	[37'8,42,46'2]	[42'3,47,51'7]	[56'7,63,69'3]	[73'6,84,92'4]	[66'6,74,81'4]	[47'7,53,58'3]	[0, 0, 0]	[9'0,10,11'0]
$v_{11}$	[28'8,32,35'2]	[22'5,25,27'5]	[13'5,15,16'5]	[42'3,47,51'7]	[33'3,37,40'7]	[61'2,68,74'8]	[71'9,80,88'0]	[57'6,64,70'4]	[42'2,58,63'8]	[9'0,10,11'0]	[0, 0, 0]

Tabla 2. Matriz de tiempos triangulares para el líder.

$T_S$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_9$	$v_{10}$	$v_{11}$
$v_1$	[0,0,0]	[5'6,7,8'4]	[37'6,47,56'4]	[22'4,28,33'6]	[54'4,68,81'6]	[36'8,46,55'2]	[56'0,70,84'0]	[58'4,73,87'6]	[20'8,26,31'2]	[21'6,27,32'4]	[25'6,32,38'4]
$v_2$	[5'6,7,8'4]	[0,0,0]	[32'0,40,48'0]	[17'6,22,26'4]	[49'6,62,74'4]	[34'4,43,51'6]	[51'2,64,76'8]	[53'6,67,80'4]	[26'4,33,39'6]	[16'0,20,24'0]	[20'0,25,30'0]
$v_3$	[37'6,47,56'4]	[32,40,48]	[0,0,0]	[49'6,62,74'4]	[17'6,22,26'4]	[66'4,83,99'6]	[52'0,65,78'0]	[39'2,49,58'8]	[82'4,103,123'6]	[20'0,25,30'0]	[12'0,15,18'0]
$v_4$	[22'4,28,33'6]	[17'6,22,26'4]	[49'6,62,74'4]	[0,0,0]	[32'0,40,48'0]	[16'8,21,25'2]	[33'6,42,50'4]	[36'0,45,54'0]	[32'8,41,49'2]	[33'6,42,50'4]	[37'6,47,56'4]
$v_5$	[54'4,68,81'6]	[49'6,62,74'4]	[17'6,22,26'4]	[32'0,40,48'0]	[0,0,0]	[48'8,61,73'2]	[34'4,43,51'6]	[21'6,27,32'4]	[64'8,81,97'2]	[37'6,47,56'4]	[29'6,37,44'4]
$v_6$	[36'8,46,55'2]	[34'4,43,51'6]	[66'4,83,99'6]	[16'8,21,25'2]	[48'8,61,73'2]	[0,0,0]	[21'6,27,32'4]	[34'4,43,51'6]	[16'0,20,24'0]	[50'4,63,75'6]	[54'4,68,81'6]
$v_7$	[56'0,70,84'0]	[51'2,64,76'8]	[52'0,65,78'0]	[33'6,42,50'4]	[34'4,43,51'6]	[21'6,27,32'4]	[0,0,0]	[12'8,16,19'2]	[37'6,47,56'4]	[67'2,84,100'8]	[64'0,80,96'0]
$v_8$	[58'4,73,87'6]	[53'6,67,80'4]	[39'2,49,58'8]	[36'0,45,54'0]	[21'6,27,32'4]	[34'4,43,51'6]	[12'8,16,19'2]	[0,0,0]	[50'4,63,75'6]	[59'2,74,88'8]	[51'2,64,76'8]
$v_9$	[20'8,26,31'2]	[26'4,33,39'6]	[82'4,103,123'6]	[32'8,41,49'2]	[64'8,81,97'2]	[16'0,20,24'0]	[37'6,47,56'4]	[50'4,63,75'6]	[0,0,0]	[42'4,53,63'6]	[46'4,58,69'6]
$v_{10}$	[21'6,27,32'4]	[16'0,20,24'0]	[20'0,25,30'0]	[33'6,42,50'4]	[37'6,47,56'4]	[50'4,63,75'6]	[67'2,84,100'8]	[59'2,74,88'8]	[42'4,53,63'6]	[0,0,0]	[8'0,10,12'0]
$v_{11}$	[25'6,32,38'4]	[20'0,25,30'0]	[12'0,15,18'0]	[37'6,47,56'4]	[29'6,37,44'4]	[54'4,68,81'6]	[64,80,96]	[51'2,64,76'8]	[46'4,58,69'6]	[8'0,10,12'0]	[0,0,0]

Tabla 3. Matriz de tiempos triangulares para el seguidor.

Para determinar cuál sería la decisión de los clientes usando la comparación de los  $\alpha$ -cortes, es necesario obtener para cada  $\alpha \in [0,1]$  los cortes correspondientes a cada tiempo triangular. Volviendo a considerar el tiempo de desplazamiento desde el vértice  $v_3$  hasta  $v_5$ , debemos considerar, para cada  $\alpha \in [0,1]$ , los intervalos correspondientes a los  $\alpha$ -cortes.

Si tomamos los valores  $\alpha = 0, 0.4, 0.8$  y  $1$ , entonces los  $\alpha$ -cortes del tiempo para el líder  $[19'8, 22, 24'2]$  son:

$$\begin{aligned} \alpha = 0.0 & [1'0 \cdot 19'8 + 0'0 \cdot 22, 0'0 \cdot 22 + 1'0 \cdot 24'2] = [19'80, 24'20] \\ \alpha = 0.4 & [0'6 \cdot 19'8 + 0'4 \cdot 22, 0'4 \cdot 22 + 0'6 \cdot 24'2] = [20'68, 23'32] \\ \alpha = 0.8 & [0'2 \cdot 19'8 + 0'8 \cdot 22, 0'8 \cdot 22 + 0'2 \cdot 24'2] = [21'56, 22'44] \\ \alpha = 1.0 & [0'0 \cdot 19'8 + 1'0 \cdot 22, 1'0 \cdot 22 + 0'0 \cdot 24'2] = [22'00, 22'00] \end{aligned}$$

y para el tiempo del seguidor que es  $[17'6, 22, 26'4]$ , los  $\alpha$ -cortes son:

$$\begin{aligned} \alpha = 0.0 & [1'0 \cdot 17'6 + 0'0 \cdot 22, 0'0 \cdot 22 + 1'0 \cdot 26'4] = [17'60, 26'40] \\ \alpha = 0.4 & [0'6 \cdot 17'6 + 0'4 \cdot 22, 0'4 \cdot 22 + 0'6 \cdot 26'4] = [19'36, 24'64] \\ \alpha = 0.8 & [0'2 \cdot 17'6 + 0'8 \cdot 22, 0'8 \cdot 22 + 0'2 \cdot 26'4] = [21'12, 22'88] \\ \alpha = 1.0 & [0'0 \cdot 17'6 + 1'0 \cdot 22, 0'0 \cdot 22 + 1'0 \cdot 26'4] = [22'00, 22'00] \end{aligned}$$

Los usuarios situados en  $v_5$  que acuden a un establecimiento del líder en  $v_8$ , ante un establecimiento que abre el seguidor en  $v_3$ , optarían por dejar de acudir a  $v_8$  para ir a  $v_3$  si perciben que  $\tilde{t}_s(v_5, v_3)$  es menor que el límite inferior del intervalo de variación de  $\tilde{t}_L(v_5, v_8)$ . Fijado  $\alpha \in [0,1]$ , esto ocurriría cuando el extremo superior del  $\alpha$ -corte de  $\tilde{t}_s(v_5, v_3)$  sea inferior al extremo inferior del  $\alpha$ -corte de  $\tilde{t}_L(v_5, v_8)$ . Es decir si  $\bar{t}_s^\alpha(v_5, v_3) < \underline{t}_L^\alpha(v_5, v_8)$ . El número triangular del tiempo que percibe el usuario situado en  $v_5$  para ir al establecimiento en  $v_8$  del líder es  $(24'3, 27, 29'7)$  y el número triangular del tiempo que percibe el usuario situado en  $v_5$  para ir al establecimiento en  $v_3$  del seguidor es  $(17'6, 22, 26'4)$ . El límite inferior del intervalo de variación de  $\tilde{t}_L(v_5, v_8)$  es  $24'3(1-\alpha) + 27\alpha$  y el límite superior del intervalo de variación de  $\tilde{t}_s(v_5, v_3)$  es  $22\alpha + 26'4(1-\alpha)$ .

Para  $\alpha = 0.4$  es  $\bar{t}_s^{0.4}(v_5, v_3) = 24'64 < 25'38 = \underline{t}_L^{0.4}(v_5, v_8)$  y los clientes de  $v_5$  dejarían de acudir al establecimiento del líder en  $v_8$  para acudir al del seguidor en  $v_3$ . Pero para  $\alpha \leq 2'1/7'1 \approx 0'296$  esto no ocurre.

Por tanto, una vez fijado el valor de  $\alpha$ , las comparaciones dependen de los extremos inferiores y superiores de los  $\alpha$ -cortes  $\bar{t}_s^\alpha(v_i, v_j)$  y  $\underline{t}_L^\alpha(v_i, v_j)$  de los tiempos percibidos. Así, por ejemplo, para  $\alpha=0'4$ , las matrices con los límites inferiores y superiores de  $\alpha$ -cortes del tiempo de desplazamiento,  $\underline{t}_L^\alpha(v_i, v_j)$  y  $\bar{t}_s^\alpha(v_i, v_j)$ , vienen dadas por las tablas 3 y 4.

$\underline{t}_L^\alpha(v_i, v_j)$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_9$	$v_{10}$	$v_{11}$
$v_1$	0	6'58	44'18	26'32	63'92	43'24	65'8	68'62	24'44	25'38	30'08
$v_2$	6'58	0	37'6	20'68	58'28	40'42	60'16	62'98	31'02	18'8	23'5
$v_3$	44'18	37'6	0	58'28	20'68	78'02	61'1	46'06	96'82	23'5	14'1
$v_4$	26'32	20'68	58'28	0	37'6	19'74	39'48	42'3	38'54	39'48	44'18
$v_5$	63'92	58'28	20'68	37'6	0	57'34	40'42	25'38	76'14	44'18	34'78
$v_6$	43'24	40'42	78'02	19'74	57'34	0	25'38	40'42	18'8	59'22	63'92
$v_7$	65'8	60'16	61'1	39'48	40'42	25'38	0	15'04	44'18	78'96	75'2
$v_8$	68'62	62'98	46'06	42'3	25'38	40'42	15'04	0	59'22	69'56	60'16
$v_9$	24'44	31'02	96'82	38'54	76'14	18'8	44'18	59'22	0	49'82	54'52
$v_{10}$	25'38	18'8	23'5	39'48	44'18	59'22	78'96	69'56	49'82	0	9'4
$v_{11}$	30'08	23'5	14'1	44'18	34'78	63'92	75'2	60'16	54'52	9'4	0

Tabla 3

$\bar{t}_S^\alpha(v_i, v_j)$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_9$	$v_{10}$	$v_{11}$
$v_1$	0	7'84	52'64	31'36	76'16	51'52	78'40	81'76	29'12	30'24	35'84
$v_2$	7'84	0	44'80	24'64	69'44	48'16	71'68	75'04	36'96	22'40	28'00
$v_3$	52'64	44'80	0	69'44	24'64	92'96	72'80	54'88	115'36	28'00	16'80
$v_4$	31'36	24'64	69'44	0	44'80	23'52	47'04	50'40	45'92	47'04	52'64
$v_5$	76'16	69'44	24'64	44'80	0	68'32	48'16	30'24	90'72	52'64	41'44
$v_6$	51'52	48'16	92'96	23'52	68'32	0	30'24	48'16	22'40	70'56	76'16
$v_7$	78'40	71'68	72'80	47'04	48'16	30'24	0	17'92	52'64	94'08	89'60
$v_8$	81'76	75'04	54'88	50'40	30'24	48'16	17'92	0	70'56	82'88	71'68
$v_9$	29'12	36'96	115'36	45'92	90'72	22'40	52'64	70'56	0	59'36	64'96
$v_{10}$	30'24	22'40	28'00	47'04	52'64	70'56	94'08	82'88	59'36	0	11'20
$v_{11}$	35'84	28'00	16'80	52'64	41'44	76'16	89'60	71'68	64'96	11'20	0

Tabla 4

Consideremos que el líder abre 3 establecimientos y el seguidor 2, es decir  $p = 3$  y  $r = 2$ .

Si el líder abre sus establecimientos en  $X = \{v_1, v_2, v_3\}$  y el seguidor en  $Y = \{v_4, v_5\}$ , para  $\alpha = 0.4$ , el comportamiento de los clientes sería el siguiente. Es bastante claro que los clientes en las ubicaciones en el conjunto  $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  eligen el establecimiento abierto en su misma localización. Los clientes en  $v_6$  eligen  $v_4$  ya que  $\bar{t}_S^{0.4}(v_6, v_4) = 23'52 < 40'42 = \bar{t}_L^\alpha(v_6, v_2)$ . De la misma forma los de  $v_7$  y  $v_8$  eligen un establecimiento del seguidor. Sin embargo, los clientes en  $v_9, v_{10}$  y  $v_{11}$  se mantienen con el líder. Por tanto los clientes capturados por el seguidor son  $C_{0.4}(Y \prec X) = \{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$  y la demanda capturada es  $W_\alpha(Y \prec X) = 4 + 3 + 7 + 4 + 9 = 27$ . Por otro lado, la mejor elección para el seguidor es  $Y^* = \{v_5, v_{10}\}$  porque en estas localizaciones captura la demanda de los vértices  $C_{0.4}(Y^* \prec X) = \{v_5, v_7, v_8, v_{10}, v_{11}\}$  lo que supone una demanda total capturada igual a  $W_\alpha(Y^* \prec X) = 3 + 4 + 9 + 5 + 9 = 30$ . Por tanto,  $W^*(X) = 30$ .

Sin embargo, la mejor elección para el líder es  $X^* = \{v_6, v_8, v_{10}\}$  ya que con esta elección la respuesta del seguidor sería localizar sus centros en  $Y = \{v_9, v_{11}\}$  capturando  $W^*(X) = 21$  unidades de demanda.

Aplicando el algoritmo propuesto en Campos y otros (2010) para  $p = 3$ ,  $r = 2$  con  $\alpha = 0.4$ , el procedimiento termina evaluando solamente 12 soluciones del líder de las 165 posibles, empezando con una solución arbitraria, tomándose en este caso el conjunto  $X_0 = \{v_1, v_2, v_3\}$  como solución inicial. Sin embargo, empezando con una solución heurística, se puede rebajar el número de soluciones evaluadas. Con la solución inicial heurística consistente en los tres vértices con mayor demanda,  $X_0 = \{v_8, v_9, v_{11}\}$ , se evalúan únicamente 7 soluciones del líder.

#### 4. Conclusiones

En este trabajo hemos introducido el problema de localización competitiva del líder-seguidor para demanda esencial y una regla de elección binaria con tiempo de desplazamiento difuso. Además se aplica un procedimiento exacto de resolución que se ilustra con un ejemplo. La regla de elección del consumidor propuesta se basa en la idea de que la percepción que posee el cliente sobre el tiempo requerido para acceder al servicio ofertado por las empresas está sujeta a imprecisión. Esta imprecisión se modela mediante números difusos triangulares, aplicándose la comparación entre números difusos mediante la comparación intervalar aplicada a los  $\alpha$ -cortes para establecer las preferencias del cliente. El algoritmo de resolución aplicado es la extensión del propuesto en Campos y otros (2010).

Los proyectos de investigación futura contemplan dos aspectos. Por un lado, la mejora del modelo respecto a la construcción de reglas de elección más realistas. Claramente la regla de elección binaria,

aunque es de interés teórico y útil para algunos tipos de bienes y servicios, es insuficiente para aplicaciones reales, además lleva asociado el problema de la resolución de los empates en las preferencias y el problema de la discontinuidad. Parece tener más sentido considerar funciones de preferencia continuas y decrecientes respecto al tiempo de desplazamiento percibido. Además, el problema puede plantearse desde un punto de vista dinámico, la consideración de tiempos con mayor incertidumbre para el seguidor tiene sentido durante cierto periodo de tiempo, transcurrido este tiempo, una vez que el mercado se ha estabilizado y el cliente ha adquirido experiencia, estas diferencias entre líder y seguidor tienden a desaparecer.

Por otro lado, el algoritmo exacto propuesto da buenos resultados cuando la dimensión del problema es moderada pero su aplicación para resolver problemas grandes se vuelve muy costosa, por ello se hace necesario plantear alternativas razonables para abordar problemas de dimensión grande, mediante procedimientos heurísticos o combinando éstos con procedimientos exactos para crear una *matheurística*.

### Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Gobierno de España y FEDER (Referencias ECO2008-05589 y TIN2008-06872-C04-01).

### Referencias Bibliográficas

1. S. Benati, G. Laporte, Tabu search algorithms for the  $(r|X_p)$ -medianoid and  $(r|p)$ -centroid problems. *Location Science* **2** (1994) 193-204.
2. O. Berman, D. Krass, The generalized maximal covering location problem. *Computers & Operations Research* **29** (2002) 563-581.
3. J. Bhadury, H.A. Eiselt, J.H. Jaramillo, An alternating heuristic for medianoid and centroid problems in the plane. *Computers & Operations Research* **30** (2003) 553-565.
4. G. Bortolan, R. Degani. A review of some methods for ranking fuzzy subsets. *Fuzzy Sets and Systems* **15** (1985), 1-19.
5. L.M. de Campos Ibáñez, J.L. Verdegay Galdeano. Modelos auxiliares para problemas de programación lineal con coeficientes imprecisos en las restricciones. *Trabajos de Investigación Operativa*, **4(1)**, (1989): 21-38.
6. C.M. Campos Rodríguez, D.R. Santos Peñate, J.A. Moreno Pérez. An exact procedure and LP formulations for the leader-follower location problema. *TOP* **18(1)** (2010) 97-121.
7. C.M. Campos Rodríguez, D.R. Santos Peñate, J.A. Moreno Pérez. Competencia espacial por cuotas de mercado: el problema del líder-seguidor mediante programación lineal. *Rect@* **12(1)** (2011) 69-84.
8. C.M. Campos, L. Canós, M.J. Canós, V. Liern, J.A. Moreno, D. Santos. Decision Making in Competitive Location using Fuzzy Sets. Actas de la Joint 2009 International Fuzzy Systems Association World Congress and 2009 European Society of Fuzzy Logic and Technology Conference IFSA 2009/EUSFLAT-2009. Lisboa, Portugal. 20-24 de Julio de 2009.
9. S. J. Chen, C. L. Hwang. *Fuzzy Multiple Attribute Decision Making*. New York: Springer, 1992.
10. S. Daskin, Network and discrete location. *Models, algorithms and applications*. (Wiley, New York, 1995).
11. N.E. Devletoglou, A dissenting view of duopoly and spatial competition. *Economica* May (1965) 141-160.
12. N.E. Devletoglou, P.A. Demetriou, Choice and threshold: a further experiment in spatial duopoly. *Economica* November (1967) 351-371
13. G. Dobson, U.S. Karmarkar, Competitive location on a network, *Operations Research* **35** (1987) 565-574.
14. D. Dubois, H. Prade. *Fuzzy sets and systems - Theory and applications*. New York: Academic Press 1980.
15. H.A. Eiselt, G. Laporte, Competitive spatial models, *European Journal of Operational Research* **39** (1989) 231-242.
16. H.A. Eiselt, G. Laporte, Sequential location problems, *European Journal of Operational Research* **96** (1996) 217-231
17. H.A. Eiselt, G. Laporte, J.F.Thisse, Competitive location models: A framework and bibliography. *Transportation Science* **27(1)** (1993) 44-54

18. T.L. Friesz, T. Miller and R.L. Tobin, Competitive network facility location models: a survey. *Papers of the Regional Science Association* 65 (1988) 47-57
19. R. Gandhi, S. Khuller, A. Srinivasan, Approximation algorithms for partial covering problems, *Journal of Algorithms* 53(1) (2004) 55–84
20. S.L. Hakimi, On locating new facilities in a competitive environment, *European Journal of Operational Research* 12 (1983) 29-35
21. S.L. Hakimi, Location with spatial interactions: competitive locations and games. In Mirchandani PB, Francis RL (ed) *Discrete Location Theory* (Wiley, New York, 1990) 439-478.
22. A. Kaufmann, M.M. Gupta, *Introduction to Fuzzy Arithmetic: Theory and Applications*, (Van Nostrand Reinhold, New York, 1991).
23. F. Plastria, Static competitive facility location: an overview of optimization approaches, *European Journal of Operational Research* (1990) 129:461-470.
24. J.L. Redondo, J. Fernández, I. García, P.M. Ortigosa, Heuristics for the facility location and design (1|1)-centroid problem on the plane. *Computational Optimization and Applications*, 45(1) 2010.
25. C. ReVelle, The maximum capture or sphere of influence location problem: Hotelling revisited on a network, *Journal of Regional Science* 26(2) (1986) 343-358
26. D.R. Santos-Peñate, R.R. Suárez-Vega, P. Dorta-González, The leader-follower location model, *Networks and Spatial Economics* (2007) 7:45-61.
27. D. Serra, C. ReVelle, Market capture by two competitors: the preemptive location problem, *Journal of Regional Science* 34(4) (1994) 549-561.
28. D. Serra, C. ReVelle, Competitive location in discrete space, in Z. Drezner (ed.) *Facility location: A survey of applications and methods* (Springer, Berlin 1995) 367-386.
29. J. Spoerhase, H.C. Wirth, ( $r|p$ )-centroid problems on paths and trees, *Theoretical Computer Science* 410(47-49), 5128-5137 (2009)
30. R. Suárez-Vega, D.R. Santos-Peñate, P. Dorta-González, Competitive multifacility location on networks: the ( $r|X_p$ )-medianoid problem. *Journal of Regional Science* 44(3) (2004) 569-588.
31. L.A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control* 8 (1965) 338-353.