COLABORACIONES

MATEMÁTICAS Y BIOLOGÍA*

José Miguel Pacheco Castelao
Departamento de Matemáticas
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

C

RESUMEN. *La relación entre las Matemáticas y las Ciencias de la Vida es mucho más intensa de lo que permite suponer la habitual subdivisión –en el fondo de carácter artificial– de las Ciencias. El origen de las Matemáticas está profundamente enraizado en las Ciencias de la Vida, tanto de la vida biológica como de hipotéticas vidas futuras más espirituales, que son el objeto de la Teología. El desarrollo de las Matemáticas corre parejo a la evolución de los conocimientos biológicos y de las especulaciones teológicas, produciéndose intercambios muy fructíferos en los momentos de crisis intelectuales profundas. En el momento presente existen una cantidad de disciplinas intermedias entre las Ciencias de la Vida y las Matemáticas, que representan la forma actual de ofrecer una visión global de la estructura del mundo.*

1. INTRODUCCIÓN

La pregunta que surge al considerar las Matemáticas como un hecho cultural es: ¿existen razones para justificar la aparición de Matemáticas entre las actividades humanas? De ella se derivan inevitablemente otras, tales como ¿es ineludible la matematización de ciertas pautas de comportamiento? o –avanzando aún un poco más– ¿resulta una obligación hacer Matemáticas o existe libertad para ello? Ninguna de estas cuestiones es ociosa ni de fácil respuesta: Sólo la ubicación de las Matemáticas en un marco cultural nos dará la estructura formal necesaria para aventurar algunas conclusiones al respecto.

En lo que sigue intentaremos contestar a las cuestiones recién formuladas mediante la consideración de ciertos hechos culturales de primera magnitud. Comenzaremos estableciendo una definición: La cultura es el conjunto de actividades, actitudes y

* Conferencia pronunciada, en el marco del ciclo «Matemáticas y Cultura», en las Universidades de La Laguna y Las Palmas de Gran Canaria en el mes de Marzo de 1998.

comportamientos propios de una sociedad en una determinada época. Notemos que la inclusión de lo temporal en el concepto de cultura es esencial a la hora de efectuar análisis serios. En efecto, es bien conocido que en una cultura se pueden distinguir niveles de perdurabilidad: Baste como ejemplo la consideración de actitudes de tipo político –cuya vida es de naturaleza efímera, poco más que modas– frente a costumbres de la vida cotidiana que se mantienen con independencia del poder político. Esa variabilidad contribuye a la complejidad del hecho cultural, que resulta ser un compendio de datos de diferentes escalas. Para verlo, pensemos en que por lo general hablamos de "la cultura griega" o "la cultura norteamericana" como si fuesen entidades cerradas y perfectamente decantadas, olvidando que muchas de las características que creemos sobresalientes son sólo recuerdos de una cotidianidad sin pretensiones de duración.

Es casi una obviedad decir que lo más característico y duradero de la actividad humana es que se desarrolla entre seres vivos, que incluyen tanto a la humanidad como al resto de la biosfera, pues raros son los organismos que de un modo u otro no poseen interacción con el hombre; incluso, si se da un paso más allá se podrían incluir en esta constatación muchas Cosmogonías y Teologías y buena parte de los avances en Informática. Por tanto, vamos a estudiar la relación entre las Ciencias de la Vida y las Matemáticas como vehículo para intentar construir una contestación, aunque sólo sea fragmentaria, a alguna de las preguntas anteriores.

2. LOS ORÍGENES

Las manifestaciones culturales más antiguas pueden datarse en la época prehistórica cuando se desarrolla la conciencia social en los primeros grupos humanos[1], siendo la Arqueología la ciencia que se ocupa de estos asuntos. La siguiente etapa en el desarrollo cultural tiene lugar cuando algunos grupos nómadas deciden establecerse tras descubrir los rudimentos de la Agricultura y la Ganadería (conviene notar aquí que la etimología de Cultura y la de Cultivo es la misma)[2]. En esta fase el conjunto de técnicas o saberes aplicados debió conducir muy pronto a plantear problemas que hoy reconocemos como cargados de sentido matemático: ¿Cuánto y cuándo hay que sembrar para obtener suficientes resultados? ¿Qué cantidad de terreno es necesario, o basta, para obtener una cosecha adecuada? ¿Cuántas cabezas de ganado tenemos? ¿Qué cueva es lo bastante grande para guarecerlas?, etc., etc. Estas preguntas nos conducen a pensar en la existencia de métodos intelectivos capaces de tratar los datos observados y de formular predicciones a partir de ellos. En palabras más vulgares, pero no menos precisas, asistimos a la aparición de mecanismos para contar y medir que permiten manejar informaciones de importancia fundamental para la supervivencia del grupo.

1. Véase una exposición interesantísima en Bernal, J. (1972). Historia social de la ciencia (2 volúmenes), Ediciones 62, Barcelona.
2. Se estima que esto ocurrió durante el Neolítico, hace entre 6.000 y 20.000 años, según zonas. Una exposición muy original y novedosa puede verse en Cavalli-Sforza, L. (1997), Genes, Pueblos y Lenguas, Editorial Crítica, Barcelona.

Paralelamente a lo anterior se plantea cómo transmitir esos conocimientos y habilidades –que ya llamaremos matemáticos– a generaciones posteriores. Dando por descontada la existencia de un lenguaje comunitario, no es arriesgado formular aquí una hipótesis importantísima: Las Matemáticas, en ciertas formas elementales tales como los rudimentos del contar y medir, son anteriores al lenguaje como vehículo cultural[3]. En efecto, la operación "establecer una correspondencia biunívoca" se realiza de manera inmediata –desde nuestro punto de vista– haciendo marcas en un palo o hueso, o nudos en una cuerda, o poniendo piedras en una olla, para contar reses o frutas. Además, uno de esos objetos –palo, hueso, cuerda, olla– pudo usarse como documento al enviar el ganado o las frutas con pastores o servidores, haciéndose el recuento final de modo parecido a como se pasan las cuentas de un rosario en los rezos de varias religiones. Y todo ello no necesita una explicación en la lengua usual, que muy posiblemente no estaría desarrollada hasta ese extremo. De todas maneras, estas técnicas sólo serían aplicadas por o entre individuos de cierta capacidad intelectual, quienes serían los encargados de preservar y transmitir esos conocimientos.

Con estas herramientas, las operaciones de sumar y restar aparecen de forma muy natural, así que los elementos fundamentales de la Aritmética se detectan ya en épocas primitivas. Sin embargo, y esto justifica la hipótesis que avanzábamos un poco antes, la expresión lingüística de las cantidades –y por tanto de las operaciones entre ellas– es en general muy pobre: La mayoría de los lenguajes primitivos que se conocen carecen de numerales, a lo más algunos de ellos distinguen entre "uno", "dos" y "muchos". En las lenguas evolucionadas de raíz indoeuropea se conserva todavía algo de esa confusión primitiva[4]: La raíz de "tres", three, trois, drei, tri, etc., es la misma de "trans" (más allá). La pervivencia de duales (ambos, both, beide) en muchos idiomas modernos es un recuerdo de aquellos lejanos intentos de expresar los números con palabras. Con esto hemos mostrado, en primer lugar, que los mecanismos psicológicos de hacer Matemáticas son tremendamente primitivos, y también, que la Aritmética es uno de los rasgos ineludibles en cualquier cultura desde el momento de la aparición de las primeras comunidades humanas civilizadas. En otras palabras, el sustrato intelectual necesario para la aparición de Matemáticas pertenece a los albores de la humanidad tal como la consideramos actualmente.

El origen de la Geometría debería ser contemporáneo al de la Aritmética, y podemos considerar que reside en la necesidad práctica de determinar alineaciones para la construcción, áreas de terrenos[5] y volúmenes de líquidos o de áridos en relación con las cosechas. Hemos de notar aquí que el concepto de proporcionalidad estaría ya en la base de la Geometría bajo la forma práctica "más terreno, más cosecha"; en cualquier caso se halla en relación con la explotación de especies cultivadas y por tanto con las Ciencias de la Vida. Sin embargo, los elementos de la Geometría son de naturaleza diferente a la de los rudimentos de la Aritmética, y su evolución de-

3. Un trabajo de gran interés y bien escrito acerca de estos problemas es Sizer, W. (1991). Mathematical notions in preliterate societies, *Math. Intell.*, 13(4), 53-60.

4. Un texto muy interesante para estas cuestiones es: Wilder, R.L. (1968). Evolution of Mathematical Concepts, J. Wiley & Sons, New York.

5. Por ejemplo, las inundaciones anuales del Nilo hacían desaparecer los límites de las parcelas, exigiendo un trabajo minucioso de reconstrucción.

pende de factores culturales más avanzados. La observación de que la cantidad de grano de siembra (un volumen) necesaria para un terreno (un área) dado es más o menos la misma cada temporada de cultivo nos hace comprender que muy posiblemente el concepto de volumen fue anterior al de área. Reminiscencias culturales de la prelación de volúmenes sobre áreas se hallan en las nomenclaturas muchas veces coincidentes para medidas de volumen de áridos y de extensiones de terreno que estuvieron en uso hasta hace bien pocos años en medios rurales. La introducción de medidas de carácter arbitrario basadas en el metro ha relegado ese patrimonio cultural –cuyo origen en las relaciones entre el hombre y la Naturaleza es claro– a los museos[6]. Podemos relacionar la importancia de la idea de volumen con el hecho biológico de que la visión humana es estereoscópica, un rasgo que nos emparenta lejanamente con las aves, para las que la visión tridimensional es vital.

Una cuestión más técnica y de carácter eminentemente práctico, donde la explotación de la Naturaleza tiene también un papel capital, es la introducción de los calendarios[7]. La medida del tiempo es también otra de las actividades matemáticas más antiguas y se halla relacionada con la observación de fenómenos repetitivos en la Naturaleza: Los más evidentes en las zonas templadas donde se originaron las primeras poblaciones humanas, aparte de la sucesión trivial de días y noches, son los ciclos de las estaciones y las fases de la Luna. La escala temporal de las fases de la Luna resulta muy apta para la medida del tiempo, y todavía hoy es utilizada[8]: Incluso en la cultura popular actual es corriente medir la duración de los embarazos por Lunas, lo que nos proporciona un interesante maridaje entre un hecho vital y otro astronómico.

Una observación más atenta condujo a reconocer la variación de la duración del día y su relación con las estaciones y ciertos fenómenos vitales recogidos de la actividad explotadora de la tierra. Por poner un ejemplo, se sabe que el estro de las ovejas depende de la duración del día, y lo mismo puede decirse de los ciclos reproductivos de muchas plantas, con exactitud del orden de segundos. Estos ciclos no concuerdan bien con un calendario basado en la Luna, pues ni la duración del día ni la estación del año guardan correlación con la fase lunar, así para acomodar las épocas de siembra, cosecha y otras labores agropecuarias se buscó basar el calendario en el ciclo solar, más largo y menos aparente pero más ajustado a las actividades explotadoras. De inmediato se originó la Astronomía, la observación de los astros: Las noches largas o cortas se corresponden con la aparición de ciertas constelaciones o estrellas en posiciones concretas de la bóveda celeste, posiciones que pueden ser contrastadas con algún tipo de observatorio delimitado por montañas, piedras u otros accidentes naturales o artificiales. De esta manera vemos cómo las ciencias de la vida tuvieron un papel determinante en la creación de una nueva disciplina matemática que se utilizaría más adelante no sólo en los métodos de medida del tiempo, sino como base de la Navegación y por tanto, del devenir cultural de la humanidad.

6. Un libro de obligada lectura para quienes estén interesados es: Kula W. (1980). Las medidas y los hombres, Editorial Siglo XXI, Madrid.

7. Véase una breve noticia acerca del calendario y las Matemáticas en: Pacheco, J. (1998). El trabajo de los días, *Epsilon* (en prensa).

8. Debo muchas ideas de este apartado y varias sugerencias muy interesantes a Isabel Fernández.

Los estudios antropológicos (ver por ejemplo el libro de J.D. Bernal citado en la nota 1) no revelan diferencias sustanciales entre las distintas civilizaciones en lo referente a la relación entre desarrollo cultural y matematización en los niveles señalados en el número anterior. A fin de cuentas, en todas partes se ha cultivado la tierra, se ha almacenado sus productos y se ha comerciado con ellos. La evolución posterior a este estadio presenta, por el contrario, una bifurcación muy evidente: Se produce un salto cualitativo cuando la sociedad alcanza un grado de bienestar que permite a quienes se ocupan de Matemáticas –al poder desligarse de las tareas de supervivencias cotidianas– considerar la actividad matemática como un fin en sí misma, con lo que se produce la abstracción y comienzan a aparecer resultados en principio alejados de la aplicación práctica inmediata. Sin embargo este fenómeno no se produce en todas las culturas, y en aquéllas donde se da, cuyo paradigma es para nosotros la civilización griega, se le intenta buscar también una aplicación: Ofrecer una explicación del mundo o en otras palabras, dar una visión religiosa o mística de la Naturaleza. También esto son Ciencias de la Vida, pero de otras vidas que, según los estudiosos, se hallan más allá de la comprensión habitual: Esta huella perdurará a lo largo de toda la historia de las Matemáticas y como línea de pensamiento resurgirá más adelante de la mano de uno de los mayores matemáticos de la Historia, cuando Leibniz[9] intente explicar importantes cuestiones teológicas utilizando su recién descubierto Cálculo Infinitesimal. De cualquier forma, tras esas etapas iniciales y con orígenes comunes se extiende un larguísimo período en el que la interacción entre Matemáticas y Ciencias de la Vida disminuye de tal forma que sólo se volverá a producir un nuevo contacto fructífero y definitivo tras el paso de muchos siglos.

3. EVOLUCIONES INDEPENDIENTES Y POSTERIOR CONFLUENCIA

Las Ciencias de la Vida, a partir de las formas primitivas de Agricultura, Ganadería, Medicina, evolucionaron hacia un conjunto de saberes empíricos que varía mucho según la cultura ambiente, manteniendo en general buenas relaciones con expresiones culturales de carácter religioso o esotérico, relaciones que se mantendrán durante muchos siglos. Las Matemáticas toman mientras tanto dos caminos divergentes: Por una parte se perfeccionan los métodos de cálculo, sistemas de numeración y nociones geométricas con vistas a las aplicaciones a una vida cotidiana cada vez más compleja. Este es un fenómeno que se da sobre todo en las culturas orientales y es transmitido hacia Occidente a través de los musulmanes. Así la Arquitectura, la Agrimensura, el Comercio, la Navegación y la Astronomía son los campos donde se aplican las Matemáticas. Por otra parte, como se apuntó un poco más arriba, ya se ha producido en ciertas culturas el proceso de abstracción y se origina un cuerpo de doctrina donde el placer estético prima sobre la utilidad inmediata de los resultados. Durante muchísimos años esta vía matemática permanece estancada: Habrá que esperar a que se origine el Álgebra para encontrar un nuevo renacer de las Matemáticas puras.

9. Leibniz publicó la Teodicea en 1710.

A partir del descubrimiento y exploración –o explotación– de América, que podemos considerar una consecuencia de los avances en materia de Navegación, los caminos de las Ciencias de la Vida y de las Matemáticas volverán lentamente a converger, teniendo lugar su primer encuentro importante con las grandes expediciones científicas –*las primeras actividades en verdad multidisciplinarias en el sentido actual*– realizadas sobre todo a lo largo del siglo XVIII y primera mitad del XIX. He aquí unos hechos culturales de primera magnitud[10] –por supuesto no ajenos a avatares políticos– donde un número relativamente pequeño de intelectuales empeñados en empresas similares produce resultados espectaculares. El cúmulo de conocimientos aportado por esas expediciones en el marco de la Botánica, la Zoología, la Antropología, etc., va a la par con los avances que propiciaron en los campos de la Astronomía, la Geodesia, la Cartografía y la Navegación, y no es aventurado suponer que durante las largas travesías se produjeran importantes intercambios de puntos de vista entre los científicos expedicionarios, lo que proporcionaría las bases para el entendimiento entre las diversas disciplinas.

A nuestro modo de ver, el primer avance palpable producido en esta confluencia cultural es la invención e introducción de una taxonomía sistemática para animales y plantas, debida en primer lugar a Linneo[11] y que libera a los científicos de las primitivas catalogaciones aristotélicas: De nuevo aparecen las Matemáticas en forma de uno de sus temas más profundos –el de la clasificación–, que puede rastrearse a lo largo de los siglos anteriores bajo el disfraz, ligado a la Astrología y la Adivinación, de tratar de hallar una lengua perfecta, aquélla que permite nombrar unívocamente todo lo que existe en el mundo[12]. Sin conseguir este ideal, el avance que supone introducir una clasificación onomástica es de incalculable importancia: A lo largo de todo el siglo XIX se utiliza y refina la primitiva idea de Linneo aplicándola con diversas variantes[13] a la clasificación de cualquier ser vivo y originando multitud de investigaciones originales acerca de las verdaderas características diferenciales en las que fundamentar los nombres. Y ello se debe a que es, aunque muy en el fondo, una idea verdaderamente matemática.

Tras los grandes descubrimientos geográficos y sus consecuencias, plasmadas en la extensa literatura generada por las exploraciones recién citadas, podemos observar que las relaciones entre Biología y Matemáticas se van estrechando a lo largo del XIX en un proceso imparable que continúa hasta hoy mismo. La convergencia entre ambas sigue un camino a través de otras ciencias intermedias cuyo objeto de estudio va cambiando. En efecto, las primitivas Agricultura, Ganadería, Medicina... dieron

10. Consultar, por ejemplo, Sellés, M., Peset, J., Lafuente, A. (comps.) (1988). Carlos III y la Ciencia de la Ilustración, Alianza Editorial, Madrid. También véase la recopilación elemental Puig-Samper, M. (1991). Las expediciones científicas durante el Siglo XVIII, Akal Eds., Madrid.

11. Las obras fundamentales de Linneo se publicaron en 1737 y 1753. Son, respectivamente, Genera Plantarum y Species Plantarum.

12. La aportación más interesante a este problema es la Ars Combinatoria de Leibniz (1666). Para una descripción muy entretenida de este problema véase Eco, U. (1994). La búsqueda de la lengua perfecta, Editorial Grijalbo, Barcelona.

13. Esto quiere decir que los criterios fisiológicos o morfológicos en los que se basaba la clasificación fueron variando según los avances de la Biología. Véase una exposición apasionante en el volumen 3 de la Historia general de las ciencias, dirigida por René Tatón (Ediciones Destino, Barcelona, 1975).

paso, tras un proceso largo y no siempre fácil desde el punto de vista cultural, a una ciencia o denominador común más conceptual que vino a conocerse con el nombre de Fisiología. Esta nueva ciencia alcanza su mayoría de edad con la invención del microscopio hacia 1680, contemporáneo, y desde luego no casualmente, del descubrimiento del Cálculo Infinitesimal. A lo largo de dos siglos, la Fisiología ve cómo su objetivo se va traduciendo primero al lenguaje de la Química –que mientras tanto evoluciona lentamente desde la Alquimia medieval a una ciencia en el sentido actual de la palabra– y posteriormente al de la Física. Pero desde la creación del Cálculo Infinitesimal la relación entre Física y Matemáticas es íntima, con un continuo trasvase de ideas y teorías desde una a otra ciencia, en un ir y venir que en los últimos tiempos ha acabado por denominarse Modelización. Por tanto, una buena comprensión de los problemas de las Ciencias de la Vida y su posterior traducción a relaciones entre ideas físicas sencillas es la base de su matematización.

El científico Lamarck empleó ya en 1800 el término Biología con su significado actual, y desde entonces se pueden detectar puentes entre esta ciencia y las Matemáticas. Las primeras formulaciones matemáticas de la dinámica de poblaciones se deben a Malthus, contemporáneo de Lamarck, y son aún el primer peldaño en cualquier intento de analizar matemáticamente la evolución de una población de seres vivos. Curiosamente esta aproximación entre Biología y Matemáticas se produce al introducir un cambio importante de punto de vista: Las poblaciones se toman como magnitudes macroscópicas, representando lo que hoy llamaríamos biomasa, y corresponden por tanto a descripciones globales de la población estudiada. Es fácil reconocer que un mínimo paso de abstracción permite incorporar el Análisis Matemático o el Álgebra para obtener los primeros pasos de la Biología Matemática.

El proceso iniciado por Malthus –y que influyó notablemente en Darwin– culminará con la creación de una nueva ciencia, la Ecología[14], hija de las Matemáticas y la Biología, y cuyo potencial se está desarrollando en nuestra época del modo que todos conocemos. Este nacimiento se produce de la mano de la Teoría de la Evolución: La teoría de Darwin necesitaba, para ser completa, alguna idea de base para fundamentar en ella los principios evolutivos. Los avances en Fisiología condujeron, por un lado, a un buen conocimiento de la estructura interna de las células (visión microscópica, de nuevo); por otro, los ingeniosos experimentos macroscópicos de Mendel[15] –una sistematización de antiguas prácticas agrícolas de mejora– abren la vía de la Genética, donde radica la explicación de la Evolución. Y la Evolución, considerada como resultado de la dinámica interna de conjuntos de seres vivos en interacción, proporciona la justificación para las teorías ecológicas.

El análisis de las experiencias realizadas y de muchísimas observaciones propició que figuras como Galton, Fisher y otros crearan la moderna Estadística a finales del siglo XIX. Así, el influjo de la Biología fue determinante para que un conjunto de modestas técnicas contables (Estadística viene de Estado) ligadas a las burocracias estatales pasara a ser una respetable rama de las Matemáticas.

14. El primero en usar la palabra "Œcologia" con un sentido parecido al actual fue Haeckel en 1866, muy pocos años después de la publicación (1859) del Origen de las Especies de Charles Darwin.

15. Mendel publicó sus resultados en 1865 como recopilación de experiencias realizadas durante más de veinte años. Nótese la abundancia de fechas casi coincidentes, que da una idea de la ebullición en materia de Biología durante el Siglo XIX.

4. BIOLOGÍA MATEMÁTICA

Comenzaremos este apartado comentando brevemente la idea de unidad de la Ciencia. En su etimología ciencia significa conocimiento, saber, y más exactamente, poder disponer de la verdad acerca de las cosas que no son evidentes. Esa verdad se puede intentar alcanzar mediante diversos métodos o visiones teóricas y, si se queda en eso, en la búsqueda de la verdad, se suele hablar de ciencia pura. Si, por el contrario, se utiliza para obtener fines prácticos, se hablará de ciencia aplicada o práctica. Sin embargo, las fronteras no son nítidas, y cada vez lo son menos, entre ciencia pura y ciencia práctica, lo que es prueba de la unidad de la Ciencia. Otra cosa es el uso que hacen los científicos y las escuelas científicas de las verdades parciales que constituyen el patrimonio cultural real de la Ciencia: Muchas veces se utilizan como armas o como ideologías –que vienen a ser lo mismo– empleadas con fines ajenos al progreso científico y técnico. Pero eso es otra historia[16].

A pesar del comentario anterior, la distancia que aún separa a las Matemáticas de la Biología sigue siendo colosal si nos atenemos a la clasificación habitual de las ciencias. Las Ciencias Biológicas utilizan básicamente como método la descripción –aunque no sólo retórica, sino apoyada en técnicas de análisis de datos–, alcanzando los aspectos deductivos y teóricos sólo a unas pocas áreas. Es más, la formulación teórica en estas ciencias se produce tras la interpretación de resultados de experimentos en cuyo diseño el azar tiene una parte importante, lo que hace que en la cadena

$$\ldots \Rightarrow \text{experimentos} \Rightarrow \text{teorías} \Rightarrow \text{experimentos}\ldots$$

sea difícil distinguir si la teoría precede y dirige la concepción del experimento o al revés. En el extremo opuesto encontramos las Matemáticas, donde todo es teoría y el convencimiento o hallazgo de la verdad se produce internamente. Sin embargo la interacción a nivel conceptual existe y tiende a hacerse cada vez más patente y fructífera. Desde luego no se trata tan sólo de aplicar más o menos directamente técnicas de recogida e interpretación de datos, sino de aplicar el método de las Matemáticas para construir modelos predictivos y explicativos en los más diversos campos de la Biología. De esta manera se construye una ciencia en la que el método matemático es utilizado en la extracción de información biológica relevante. En otras palabras, ha aparecido la Biología Matemática. Vamos a realizar un paseo, corto y necesariamente sesgado, por esta nueva ciencia[17].

No debe extrañarnos, por razones históricas, que un aspecto troncal de la Biología Matemática sea el análisis de la evolución de poblaciones[18]. La clase de entes que conforman las poblaciones puede ser muy general: Casos típicos son especies cua-

16. Pueden consultarse dos textos importantes: Easlea, B. (1977), La liberación social y los objetivos de la ciencia, Editorial Siglo XXI, Madrid; y Feyerabend, P. (1982), La ciencia en una sociedad libre, Editorial Siglo XXI, Madrid.

17. Un resumen bastante acertado puede leerse en Hoppensteadt, F. (1995), Getting started in Mathematical Biology, *Notices AMS*, 42(9), 969-975.

18. Véase por ejemplo el conocido texto: Edelstein-Keshet, L. (1985), Mathematical Models in Biology, Random House, New York.

lesquiera de seres vivos, pero también puede aplicarse esta idea a moléculas, enzimas, genes, grupos de neuronas o de fibras musculares... Además, muchas de la técnicas y métodos de la teoría de poblaciones se pueden adaptar y utilizar provechosamente en otros campos.

En la situación más simple posible se considera una única población, siendo las cuestiones interesantes básicamente dos: Análisis de la evolución del tamaño poblacional y estudio de las distribuciones espacial y por edades de los elementos que la conforman. Ambos problemas pueden tratarse considerando la población aisladamente o sometida a influjos externos, de manera que tanto en un caso como en otro se incorporan en la descripción matemática términos o condiciones especiales que en su conjunto forman lo que conocemos como modelo matemático. La herramienta matemática esencial en el campo de la dinámica de poblaciones son los Sistemas Dinámicos, una teoría que describe el comportamiento evolutivo

C

$$P(t) \rightarrow P(t+h) = F(P(t),v)$$

siendo v un vector de parámetros adecuado (en cuya determinación práctica son esenciales las técnicas estadísticas), a partir de una población inicial P(0). El incremento h puede considerarse discreto, lo que origina sistemas dinámicos discretos, o tomarse como un infinitésimo, dando así lugar a sistemas dinámicos descritos por ecuaciones diferenciales –ordinarias en este caso– siendo ésta, con mucho, la manera más habitual de trabajar en Biología Matemática. Conviene recordar aquí que el modelo básico de evolución de una población es la formulación malthusiana

$$\frac{dP}{dt} = kP,\ P(0) = P_0$$

donde k es una medida de la tasa específica de crecimiento y puede adquirir diversas formas: Así, si es una constante positiva, se tiene el crecimiento malthusiano, y si se permite que varíe con la propia población P, esto es, k=k(P), se pueden reflejar comportamientos más realistas o complejos. El caso más relevante es cuando k(P) = r(1–P/C), siendo C una capacidad límite para la población: Tenemos así otro clásico de estos temas, el problema logístico:

$$\frac{dP}{dt} = r\left(1 - \frac{P}{C}\right)P,\ P(0) = P_0$$

que es uno de los pilares teóricos –justificado experimentalmente por multitud de observaciones– de la dinámica de poblaciones[19].

Para introducir la variabilidad espacial y la estructura de edad basta con que elijamos la descripción P(t,x,a) = Biomasa (o densidad de ella) presente en el instante t, en la localización espacial x y con la edad a, de manera que las variaciones de P

19. Esta ecuación diferencial fue formulada por Verhulst, otro de los padres de la Ecología, hacia 1850.

según cada una de las variables se expresan mediante las derivadas pariales correspondientes. Un problema típico de esta clase es el estudio de la aparición de oleadas de información genética que fue modelizado por Fisher y Kolmogorov a finales de los años treinta mediante la conocida ecuación de Fisher

$$\frac{\partial P}{\partial t} = P(1-P)+D\,\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

que es un ejemplo prototípico de las llamadas ecuaciones de reacción difusión.

Una rama muy importante de la Economía, conocida como Bioeconomía Matemática, tuvo su origen en el estudio de casos particulares de una única población provinientes del campo de las pesquerías[20] y se ha desarrollado en un ámbito propio de la investigación a caballo entre las Matemáticas, la Biología y la Economía. La mayor parte de los problemas ecológicos, cuando afectan al desarrollo de poblaciones humanas, deben ser tratados en el marco de esta ciencia.

La riqueza del estudio crece enormemente cuando se consideran varias poblaciones en interacción, pues las pautas de interrelación llevan, al intentar modelizarlas, a formulaciones de mucha mayor complejidad que ponen a prueba el ingenio y capacidad creativa de los matemáticos. La ayuda de la Informática y los ordenadores es muy valiosa en los últimos avances en este campo, aunque la descripción matemática de estos problemas constituye uno de los cuerpos de doctrina clásicos en Matemáticas Aplicadas desde hace unos ochenta años. En su versión más primitiva debida a Lotka[21] y Volterra, dada una población formada por n especies en interacción $X_1, X_2, ..., X_n$, homogéneamente distribuidas, la dinámica conjunta se describe mediante el problema de valores iniciales

$$\frac{dX_i}{dt} = X_i F_i(X_1,...,X_n),\ i=1,...,n$$

$$X_i(0)=X_{i0},\ i=1,...,n$$

donde $F_i(X_1,...,X_n)=a_1X_1+...+a_nX_n$, siendo los coeficientes a_i constantes de signo cualquiera. Lo interesante es que el signo nos indica si la interacción es favorable (positivo) o desfavorable para la especie. Esta manera de representar la interacción biológica está tomada de la teoría de las reacciones químicas, donde se conoce con el nombre de principio de acción de masas. Otras formas de interacción matemáticamente más complicadas permiten simular diversas situaciones observadas dando lugar a modelos más realistas, esto es, que describen mejor las observaciones. Los casos n=2, n=3 son los más estudiados, sobre todo porque se hallan a ambos lados de una

20. El texto original es Clar, C.W. (1976), Mathematical Bioeconomics, Wiley, New York. Hay varias ediciones posteriores.

21. El texto básico es Lotka, A. (1924), Elements of Mathematical Biology, Editorial Dover, New York, 1956. La formulación actual está desarrollada en Volterra, V. (1932), Léçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie, Gauthier-Villars, Paris.

frontera cualitativamente importante, la que separa los sistemas con posible comportamiento caótico (n≥3) de aquéllos en los que es imposible (n=2). La razón profunda de esta división es de carácter topológico y es una consecuencia del Teorema de la Curva Cerrada de Jordan, conocida como Teorema de Poincaré-Bendixson[22].

En todo caso, la relación entre Biología y Matemáticas queda reflejada en dos aspectos concretos: En primer lugar, se expresan hechos biológicos en lenguaje formalizado, y en segundo lugar, la aplicación del método matemático a esas formalizaciones permite obtener resultados que después se utilizan para ayudar a interpretar la realidad biológica o para descubrir nuevos aspectos que habrían escapado a los análisis emprendidos con los métodos tradicionales de la Biología. Una parte importante de la Biología Matemática, la dedicada a las cuestiones de base tales como la transmisión de la información genética –y por tanto a desentrañar qué es la vida– se conoce como Biología Teórica[23], y en ella se intenta con una matematización a ultranza penetrar los todavía oscuros orígenes de la vida. Recordemos que la intuición genial de Watson y Crick[24], aparte del trabajo experimental correspondiente, consistió en formular un modelo geométrico previo al cual resultó adecuarse la estructura del ADN.

La introducción de la distribución espacial en los modelos de poblaciones, combinada con la observación acerca de la Biología Teórica, nos conduce a uno de los campos más interesantes y activos de la Biología Matemática[25]. Hemos señalado antes que la evolución conjunta de n poblaciones homogéneamente distribuidas se puede representar con un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{dX_i}{dt} = G_i(X_1,\ldots,X_n),\ i=1,\ldots n$$

junto con las condiciones iniciales $X_i(0)=X_{i0}$ que especifican el estado inicial del conjunto. La homogeneidad espacial es una simplificación excesiva, pues la Naturaleza se presenta raras veces de modo uniforme; más bien lo que caracteriza al mundo vivo es la extraordinaria complejidad de su aspecto externo, apareciendo a nuestra observación con una gran riqueza de formas o pautas de ordenación espacial. Se puede indagar en este problema, conocido como problema de la Morfogénesis[26], sus-

22. Consúltese el capítulo correspondiente en Hofbauer, J., Sigmund, K. (1988), The theory of evolution and dynamical systems, Cambridge U.P. El comportamiento caótico puede presentarse también en dimensión uno cuando se consideran sistemas dinámicos discretos. Véase el trabajo ya clásico: May, R. (1975). Biological populations obeying difference equations, stable points, stable cycles and chaos, J. Theor. Biology, 51, 511-524. Una exposición buena, aunque echada a perder por una traducción pésima, es Nicolis, G., Prigogine, I. (1994), La estructura de lo complejo, Alianza Editorial, Madrid.

23. Para tener una idea de los temas básicos de esta ciencia, aunque es un tanto anticuado, ver Waddington, C. (ed.) (1976), Hacia una Biología Teórica, Alianza Editorial, Madrid.

24. Se puede leer un interesante relato en el libro autobiográfico: Crick, F. (1989), ¡Qué loco propósito!, Tusquets Editores, Barcelona.

25. Ver Murray, J. (1989), Mathematical Biology, Springer, Berlin. El grueso de este muy grueso y muy fundamental volumen está dedicado a la aplicación de ecuaciones de reacción difusión a muy diferentes campos de la Biología.

26. Puede consultarse un resumen de estas cuestiones en: Pacheco, J. (1997), Sobre el problema de la Morfogénesis, Conferencia pronunciada en la U. de La Laguna (inédito) y referencias citadas allí.

tituyendo las ecuaciones anteriores por una modificación de ellas que incluya términos de variabilidad espacial: Lo más corriente es añadir términos que se interpretan como difusión o dispersión –en sentido estricto estos son conceptos con diferentes orígenes e interpretaciones– de las respectivas especies por el espacio, con lo que se obtiene, considerando ahora que $X_i=X_i(t,x)$ se halla definida en un cierto conjunto espacio-temporal $\Omega x[0,T]$ (usando en este caso una versión matemática muy simple de la idea de difusión) que:

$$\frac{\partial Xi}{\partial t} = G_i(X_1,\dots,X_n)+\mathrm{div}[D_i(x,t)\mathrm{grad}X_i],\ i=1,\dots,n$$

más las condiciones iniciales $X_i(0,x)=X_{i0}(x)$ como en el caso espacialmente homogéneo, y ahora también las condiciones que rigen al comportamiento de las poblaciones en la frontera $\partial\Omega$ del recinto espacial que se considere. Estas pueden ser de diferentes clases según lo que se desee representar. Lo más habitual es suponer un recinto cerrado a través de cuya frontera se producen intercambios, lo que se expresa generalmente con condiciones del tipo

$$\frac{\partial X_i}{\partial n} = f_i(t,x),$$

donde n representa la normal a $\partial\Omega$. La variedad de pautas espaciales que pueden describirse con este simple expediente es enorme, y puede aplicarse a multitud de campos tanto dentro como fuera de la Biología. Por citar sólo unos pocos de estos últimos, tenemos: ritmos circadianos, aparición de oleadas migratorias, control de plagas, activación de la mitosis, el origen de las manchas en la piel de los animales, las agregaciones tales como cardúmenes de peces y bandadas de aves, las conexiones interneuronales, los mecanismos de ubicación y desarrollo de las extremidades y órganos de los embriones... para todos los cuales una representación basada en ecuaciones de reacción difusión ofrece explicaciones muy plausibles. Notemos que se puede aplicar tanto a problemas macroscópicos –ecología de poblaciones– como a otros de carácter microscópico relacionados, como se ha señalado antes, con los aspectos fundamentales de la Biología.

Para completar este apartado ofrecemos un reflexión sobre una cuestión que mantiene un interés permanente. Una de las amenazas más preocupantes para la Humanidad a lo largo de los siglos han sido las enfermedades epidémicas. La literatura mundial, desde la Biblia hasta hoy mismo, está llena de textos cuyo tema principal tiene que ver con tales desgracias: Ello nos da una idea de la importancia cultural de las catástrofes naturales, que han dejado su huella en las religiones, las costumbres y la ciencia. Grandes esfuerzos científicos, en los más diversos campos, se han dedicado al estudio de cómo aparecen, cómo pueden prevenirse o incluso de cómo erradicarlas (al menos en el caso de la viruela, todo parece indicar que se ha conseguido eliminarla, lo cual ha planteado después problemas éticos muy interesantes).

Por supuesto, una parte no desdeñable de la Biología Matemática se ocupa desde hace tiempo[27] también de aportar conocimientos sobre la dinámica de las epidemias, teniendo en los últimos tiempos al SIDA como objetivo fundamental por la enorme velocidad de su propagación y extensión espacial, así como la relativa impotencia de la Medicina y la Farmacología para hacer frente a esta plaga. Es ésta un área en continuo desarrollo y donde los esfuerzos combinados de muchas ciencias producen resultados muy interesantes, no sólo por su utilidad práctica inmediata sino por la profundidad de las investigaciones realizadas[28]. Las técnicas matemáticas que más se acomodan con estos problemas –y han evolucionado en contacto con ellos– son la Estadística Multivariante y la teoría de Procesos Estocásticos, aunque las ideas que inspiraron los primeros estudios teóricos sobre epidemias a finales de los años 20 –no muy alejadas de las que sirvieron para formular la dinámica de poblaciones– siguen siendo utilizadas y refinadas continuamente.

Ya para terminar este apartado volvamos por un momento a los problemas de la vida trascendente, objeto de la Teología, que habíamos dejado atrás con Leibniz. Siguiendo con la misma línea de pensamiento podríamos preguntarnos, extendiendo el paralelismo entre las dos clases de vida que hemos comentado, si existe algo como la Teología Matemática.

La utilización del método matemático en estudios teológicos y humanísticos no es nueva, pues desde la recuperación de Aristóteles por Santo Tomás de Aquino[29] se puede considerar que existe una notable matematización del razonamiento sobre estos temas. Evidentemente, es imposible olvidar aquí el Tratado de Etica[30] de Baruch Spinoza, cuyo método de exposición sigue los principios de los Elementos de Euclides. Contemporáneos suyos son los Discursos de Metafísica (1686), que junto con la Teodicea, ya citadas antes, culminan los trabajos no puramente matemáticos de Leibniz.

La diferencia esencial entre los estudios acerca de ambos tipos de vida radica en que, al menos con los mecanismos de que disponemos, no nos es posible efectuar experimentos acerca de la vida trascendente del mismo modo que se pueden observar y reproducir aspectos de la Naturaleza en el laboratorio. Por tanto, la investigación teológica está basada, en primer lugar, en la fe y en segundo, en la búsqueda de evidencias indirectas. Un libro –muy popular hace algunos años– del teólogo alemán Hans Küng, titulado ¿Existe Dios?, dedicaba larguísimos pasajes a la historia de la ciencia y ponía especial énfasis en cuestiones matemáticas de base, indicio cierto de lo que acabamos de señalar. La polvareda –bien es cierto que con una cierta dosis

27. El trabajo pionero, contemporáneo de los de Lotka y Volterra es: Kermack, W., McKendrick, A. (1927). Contributions to the mathematical theory of epidemics, Proc. Roy. Soc. Edin., A115, 700-721. La época entre 1920 y 1950 se ha conocido a veces como la "Edad de oro de la Ecología Teórica". Véase la recopilación siguiente: Scudo, F., Ziegler, J. (1978). The golden age of Theoretical Ecology: 1923-1940, Lecture Notes in Biomathematics, 22, Springer, Berlin.

28. Una exposición muy clara y entretenida sobre el SIDA y la dinámica de sus tratamientos se puede consultar en Kirschner, D. (1996). Using Mathematics to understand HIV immune Dynamics, Notices AMS, 43(2), 191-202.

29. La Summa apareció en 1267.

30. Ethica more geometrico demonstrata, publicada en 1675. Hay una edición española muy asequible de la Editora Nacional.

de propaganda– que en su día desató el físico teórico Stephen Hawking[31] con la conclusión de que Dios no es necesario para la existencia del Universo es señal de que se alcanzan terrenos movedizos. Muchas otras técnicas matemáticas se han empleado en los últimos años en la indagación teológica. Por ejemplo la Teoría de Juegos se ha utilizado para establecer criterios[32] sobre cómo son y cómo se reconocen los Seres Superiores, y, ya para especialistas, se publicó hace un par de años un voluminosos texto[33] en el que se demuestra no sólo que existe vida futura sino que también se compara ésta con la prometida por las diversas religiones, todo ello en más de 600 páginas de deducciones y teoremas basados en los principios de la Física y los fundamentos de las Matemáticas.

Queda, pues, abierta la cuestión de si la Teología es matematizable y en caso de serlo, cuáles serían las Matemáticas más adecuadas para ello. Sí se puede afirmar que los tipos de problemas que se tratan en los textos recién citados remiten con insistencia a las cuestiones de base y de Fundamentos de las Matemáticas que hoy día se hallan más bien ya en los dominios de la Informática teórica, tales como la computabilidad, la complejidad algorítmica, la simulación del comportamiento del cerebro...

Vemos, pues, que de la mano de la Informática estos temas nos llevan de nuevo al estudio[34] de la estructura del cerebro humano, en otras palabras, regresamos a la Biología. Así podemos formularnos la siguiente pregunta:

5. ¿MATEMÁTICAS BIOLÓGICAS?

Hasta aquí el motivo conductor de la exposición ha sido cómo las Matemáticas han ayudado al avance de la Biología. Podría parecer, por tanto, que la situación contraria o bien es imposible o su importancia es mínima. Sin embargo, a lo largo de la Historia de las Matemáticas se han dado múltiples intentos de utilizar conocimientos de otras ciencias en la exploración de nuevos resultados y teoremas: Por citar dos casos muy conocidos, tenemos los experimentos –recordemos el caso de la corona de falso oro– de Arquímedes y las experiencias de Klein[35] con circuitos eléctricos para establecer ciertos resultados en el Análisis Complejo, que son ejemplos de aplicación de la Física a las Matemáticas.

Tal como muestra el ejemplo de Klein, la aplicación de otras ciencias a las Matemáticas depende en gran medida de avances conceptuales en esas ciencias y del de-

31. Fue muy popular a finales de los ochenta el libro: Hawking, S. (1988), Historia del tiempo, Editorial Crítica, Madrid.

32. Un libro muy curioso es Brams, S. (1983), Superior Beings: If they exist, how would we know?, Springer, Berlin.

33. Ver Tipler, F. (1996), La Física de la inmortalidad, Alianza Editorial Madrid. Tipler es el autor de conocidos textos de Física General de nivel elemental, muy extendidos en nuestro país.

34. En torno a estas ideas pueden consultarse los dos libros de Roger Penrose: La nueva mente del Emperador (1991), Editorial Mondadori, Madrid, y Las sombras de la mente (1996), Editorial Crítica, Madrid. En esencia Penrose mantiene que no será posible que una máquina pueda desarrollar razonamientos, esto es, está en contra de la "Inteligencia Artificial Fuerte".

35. Ver, por ejemplo, Klein, F. (1893), On Riemann's theory of algebraic integrals and their integrals, Editorial Dover, 1963, New York.

sarrollo de las tecnologías que hacen posible la manipulación de entidades físicas de diversas clases. La expansión imparable de la Biología Molecular y el refinamiento de sus técnicas de trabajo han propiciado en los últimos años el poder establecer con claridad ciertas analogías que permiten "hacer Matemáticas" con materiales y métodos biológicos, obteniendo resultados hasta ahora considerados como puramente matemáticos. De esta forma podríamos hablar de Matemáticas Biológicas, lo que tiene una indudable importancia no sólo a efectos prácticos, sino también visto desde una perspectiva cultural: Ello supondría un paso muy notable hacia la unidad de las ciencias.

La analogía que se ha revelado de capital importancia para establecer una conexión entre Biología y Matemáticas se expresa muy sencillamente diciendo sin precisión[36] que "lo complejo puede construirse mediante reiteración de operaciones sencillas". Así pues, en términos biológicos un ser vivo es una estructura muy compleja, pero puede considerarse como el resultado de aplicar unas pocas operaciones tales como cortar, restringir, recombinar, etc. a las informaciones contenidas en una cadena de ADN. Por otro lado, en Matemáticas el resultado de aplicar una función computable a un argumento se obtiene aplicando una combinación de funciones elementales. La analogía se transforma en una técnica operativa cuando se utilizan cadenas de ADN como codificadores de información, de modo que mediante diversos enzimas se pueden llevar a cabo cálculos simples con las cadenas. En 1994 se consiguió probar mediante esta técnica un caso particular del Problema del Camino Hamiltoniano Dirigido. Este problema se refiere a la existencia, en un grafo G donde se hayan señalado un vértice V_e de entrada y otro vértice V_s de salida, de una sucesión de aristas $a_1,a_2,...,a_k$, "de sentido único", que unan el vértice de entrada con el de salida pasando sólo una vez por todos los vértices del grafo. El autor del resultado, Leonard Adleman[37], diseñó un algoritmo aleatorio que fue realizado paso a paso implementándolos como operaciones con diferentes cadenas de ADN. Lo más importante de todo es que el Problema del Camino Hamiltoniano es un problema de los que se conocen como NP-completos, esto es de la categoría más difícil posible[38], lo que abrió la vía al estudio de otros problemas NP-completos con estos métodos.

Para darnos una idea de las diferencias físicas entre un ordenador de ADN y otro convencional, se estima que, por unidad de energía, un superordenador ejecuta unas 10^9 operaciones/julio, mientras que una máquina biológica podría efectuar $2x10^{19}$ operaciones/julio, con una capacidad de almacenamiento de memoria de 1 bit/nm^3, siendo la capacidad actual de memoria de los ordenadores de 1 bit/10^{12}nm^3. No debería resultarnos extraño que en algún futuro no lejano vuelvan las Ciencias de la Vida y las Matemáticas a un camino común.

36. Véase Kari, L. (1997), DNA Computing, Arrival of Biological Mathematics, Math. Intell., 19(2), 9-22.

37. Adleman, L. (1994), Molecular computation of solutions to combinatorial problems, Science 266, 1021-1024.

38. NP quiere decir "no polinómico", y se refiere a que el tiempo que necesita el algoritmo que resuelve el problema no está acotado por un polinomio en una variable, siendo esta variable el tamaño de la descripción del problema. NP-completo significa que cualquier otro problema NP se puede llevar a él en tiempo polinómico. Los programas que corren en tiempo polinómico se llaman "eficientes".

6. CONCLUSIONES

Para terminar vamos a extraer algunas conclusiones. Hemos efectuado una revisión histórica de las relaciones entre dos aspectos culturales omnipresentes: Las Ciencias de la Vida y las Matemáticas, observando que se puede considerar el origen de las Matemáticas ligado a los primeros pasos en el estudio y utilización de la Naturaleza. También se ha puesto de relieve que los avances en Matemáticas siempre se han utilizado como herramientas de progreso en las Ciencias de la Vida y que muchos problemas originados en este campo han sido decisivos en la creación de disciplinas matemáticas. Señalamos también que la imparable evolución de la Biología puede influir de manera aún no cuantificable en las Matemáticas futuras. Más aún, esta última observación es un argumento de peso para apoyar la idea de que la Ciencia (el Conocimiento, con mayúsculas) es única.

Concluimos ya con dos citas que deben hacernos reflexionar acerca de lo poco que aún sabemos de la Naturaleza y de lo endeble de nuestros métodos de aproximación a ese conocimiento. La primera nos muestra que las Matemáticas, en su relación con la Biología y con otras ciencias o actividades culturales, deben utilizarse con modestia y que son sólo un método, una mayéutica en sentido socrático. Se debe al estadístico S. Karlin[39] y dice así:

> "The purpose of models is not to fit the data, but to sharpen the questions"

Debemos entender aquí que "models" significa exactamente "lo que las Matemáticas fabrican", y que su utilidad es ayudar a que los científicos –de todos los campos– nos hagamos preguntas más pertinentes y agudas sobre la realidad.

La segunda son las primeras frases de un trabajo clásico tan citado como poco leído[40] del conocido matemático inglés Alan Turing. Este original artículo está en la base de la moderna Biología Matemática y su comienzo dice así:

> "In this section a mathematical model of the growing embryo will be described. This model will be a simplification and an idealization, and consequently a falsification".

Es importantísimo notar aquí la fuerza de la palabra "falsificatión": Lo que hace el científico (en este caso, el matemático) es falsificar[41] o utilizar una visión distorsionada –aunque sólo sea un poco– de la realidad para poder entenderla. En suma, el científico es una especie de ilusionista[42] que pretende, con su método y su lenguaje, convencer a sus oyentes de que existen razones suficientes para que le crean[43]. Y todo ello, esos engaños conscientes, forman parte de todas las culturas. Así

39. Karlin, S. (1983), en el undécimo memorial de R.A. Fisher de la Royal Society.

40. Turing, A. (1952), The chemical basis of Morphogenesis, Phil. Trans. Roy. Soc. London, B237, 37-72.

41. En inglés "falsificatión" no tiene el significado tan peyorativo como en castellano su equivalente "falsificación". Más bien su traducción, libre de ese sentido, sería "distorsión" o "visión distorsionada".

42. Véase una indagación sobre esa idea en el texto, ya citado anteriormente: Pacheco, J. (1997), Sobre el problema de la Morfogénesis, Conferencia pronunciada en la U. de La Laguna (inédito).

43. No me resisto a citar aquí dos textos deliciosos que avalan notablemente lo dicho: El primero es el

pues, parece que la contestación a la pregunta con que iniciábamos nuestra exposición deben ser afirmativa: Hay razones, y posiblemente la más importante sea el placer de la ensoñación en un cierto poder, para que las Matemáticas aparezcan entre las actividades culturales humanas. Una vez aceptado esto, el hacer Matemáticas debe ser una opción libre.

Con relación a esa libertad, recordemos antes de acabar que el gran Hilbert, refiriéndose a Cantor y al amplio dominio de los números transfinitos descubierto por éste, afirmaba que "Das Wesen der Mathematik ist Freiheit"[44]. Y, como ciudadanos de ese país libre que son las Matemáticas, nos despedimos. Muchas gracias.

archiconocido libro de Sir D'Arcy Thompson (1917), On growth and form (La edición habitual es la abreviada de Cambridge University Press. Hay traducción al español en la Editorial Blume). El otro es Cook, T. (1914), The curves of life, Edición Dover de 1979, sobre la importancia de las espirales en la Naturaleza.

44. Literalmente la frase dice "La esencia de las Matemáticas es [la] libertad". Aparece en un apéndice titulado "Über das Unendliche", en la edición de 1931 de los Grundlagen der Geometrie (Teubner, Berlin). En ediciones posteriores Hilbert eliminó este apéndice. La frase exacta de Cantor es "Das Wesen der Mathematik liegt in inhre Freiheit", esto es "La esencia de las Matemáticas radica en su libertad". No he encontrado la referencia de Cantor, aunque prefiero, por fuerza expresiva, la cita de Hilbert. Debo estas informaciones y muy agudos comentarios sobre ellas a mi antiguo maestro el Prof. Cuesta (1907-1989), de la Universidad de Salamanca.