Aprender de los errores

José-Miguel Pacheco Castelao
Coordinación del COU de la ULPGC

Introducción.

Es interesante constatar que con frecuencia los errores, siempre lamentables, nos enseñan más que la repetición de los éxitos. Vamos a comentar un ejemplo, con la idea de ofrecer una reflexión al profesorado de Matemáticas en general.

En la convocatoria de Selectividad del Distrito Único de Canarias de Junio de 1999 se deslizó un error tipográfico en un enunciado del ejercicio de Matemáticas I del COU que levantó cierta polémica. Como consecuencia, solicitando las lógicas disculpas, la reunión de correctores previa a la calificación de los exámenes acordó modificar los criterios de corrección para aliviar las consecuencias del desliz.

Sin embargo, el análisis de los ejercicios de los alumnos nos puso de relieve la falta de una visión crítica de la enseñanza en ciertos puntos clave, como se expondrá a continuación.

Teoremas y contraejemplos.

Un error corriente en la enseñanza de las Matemáticas consiste en no insistir en la diferencia existente entre los conceptos de condición necesaria y suficiente. Aunque el propio significado de las palabras es lo bastante claro, en la práctica hay que afinar más mediante ejemplos y un análisis cuidadoso de los mismos. El Análisis Matemático es el "reino de las condiciones suficientes", en el sentido de que la mayor parte de los teoremas clásicos que aparecen en la enseñanza elemental especifican únicamente condiciones suficientes. Ello es cierto también en niveles superiores, pero no nos ocupa aquí ahora. Recordemos aquí que un teorema que dé una condición necesaria y suficiente se denomina *caracterización.* Por lo dicho antes, en Análisis las caracterizaciones son escasas y difíciles. Vamos a proponer unos ejemplos aclaratorios.

<u>Ejemplo 1.</u>

Teorema (recibe varios nombres, el más común es el de Darboux): "Toda función real de variable real $f(x)$ que sea continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ toma todos los valores entre el mínimo y el máximo alcanzados por ella en el intervalo"

La demostración resulta de combinar los teoremas de Bolzano y de Weierstrass, como es bien conocido. Sin embargo, no es tan habitual mostrar que existen funciones que no son continuas en un intervalo cerrado y que también toman todos los valores entre el mínimo y el máximo. Ello probaría que el teorema anterior da *sólo una condición suficiente y por lo tanto no caracteriza* a las funciones continuas en $[a,b]$. Ahí va un ejemplo que lo demuestra:

Consideramos una función definida en el intervalo $[0,1]$ (ver Fig.1):

$f(x) = x$ para todo x, excepto si $x = \frac{1}{3}$, en cuyo caso vale $\frac{2}{3}$, y cuando $x = \frac{2}{3}$, donde vale $\frac{1}{3}$. Es claro que esta función toma todos los valores entre 0 (el mínimo) y 1 (el máximo), pero no es continua en los puntos $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$. Ello nos muestra que el teorema de Darboux no provee una condición necesaria. Por tanto no caracteriza a las funciones continuas en el intervalo cerrado: El recíproco del Teorema de Darboux no se verifica puesto que existen funciones que toman todos los valores... y sin embargo no son continuas.

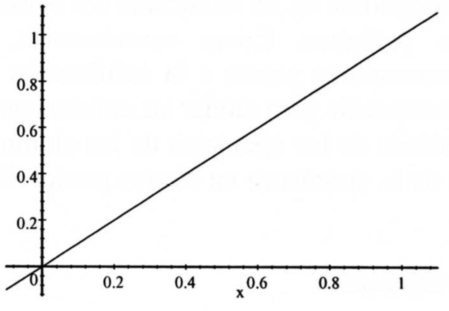

Figura 1: Gráfica de la función $y = x$, modificada en dos puntos.

Ejemplo 2.

Teorema (Rolle): "Para toda función derivable no constante en un intervalo cerrado $[a,b]$ y tal que $f(a) = f(b)$, existe al menos un punto $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$".

El enunciado que damos posee hipótesis algo más restrictivas que el habitualmente utilizado en la docencia, donde se separa la derivabilidad en el abierto de la continuidad en el cerrado. A nuestro modo de ver, esa ligera generalización no sirve sino para complicar las cosas. Por lo demás, el teorema se demuestra como siempre tras observar que derivable implica continua, lo que es cierto también en caso de continuidad y derivabilidad laterales. Veamos ahora que hay funciones que no son derivables en todos los puntos pero cuya derivada existe y se anula en otros:

Consideremos la función definida en el intervalo $[0,2]$ del siguiente modo (Fig.2): $f(x) = x(x-1)$ si $x \in [0,1)$, y $f(x) = -2(x-1)(x-2)$ si $x \in [1,2]$. Esta función tiene derivada nula en los puntos $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{2}$, pero no es derivable en $x = 1$, aunque satisface todas las demás hipótesis del teorema de Rolle. Luego el teorema de Rolle no caracteriza a cierta clase de funciones derivables (las que cumplen las otras hipótesis) en un intervalo cerrado: El hecho de que tenga derivada nula en dos puntos... no implica la derivabilidad en todos los puntos.

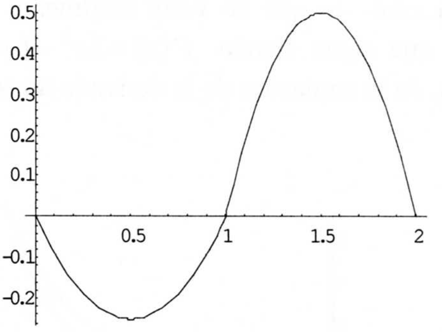

Figura 2: Gráfica de la función del ejemplo 2. Obsérvese el punto anguloso en $x = 1$.

Podemos modificar ligeramente la función dada para que, eliminando el punto anguloso que se ve en la Figura 2, sí se satisfaga el Teorema de Rolle: basta tomar ahora la función definida en el intervalo $[0,2]$ del siguiente modo: $f(x) = x(x-1)$ si $x \in [0,1)$, y $f(x) = -(x-1)(x-2)$ si $x \in [1,2]$. Esta función sí satisface todas las hipótesis del teorema de Rolle, y su derivada tiene los mismos dos ceros en $(0,2)$.

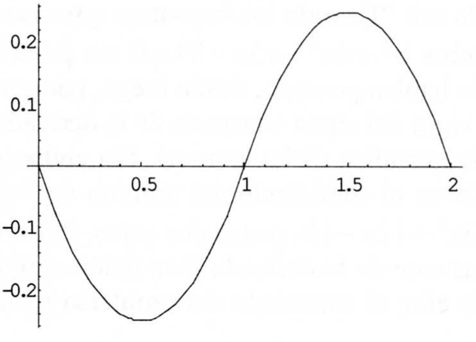

Figura 3: Gráfica de la función del ejemplo 2,
modificada para satisfacer las hipótesis del teorema de Rolle.

Ejemplo 3.

A veces se utiliza la no anulación de la derivada para probar algunos resultados interesantes, tales como la unicidad de los ceros de un polinomio en un intervalo cerrado. En muchos ejercicios lo habitual es comprobar que el signo de la derivada es constante, viendo que no tiene raíces reales. La idea geométrica tras esta interpretación del teorema de Rolle es que "las raíces de la función separan grupos de raíces de la derivada", pero el error más común en la aplicación acrítica de esta regla consiste en creer que la anulación de la derivada en un punto implica la anulación de la función (existencia de ceros) en los extremos de algún intervalo que contiene a ese punto.

Consideremos (Fig. 4) la función polinómica $f(x) = x(x-1)(x-2)$, que en clase solemos poner, para disimular, en su forma desarrollada $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$. Es evidente que este polinomio tiene tres raíces, 0, 1 y 2, y que su derivada $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$ tiene dos ceros. Sin embargo, la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$, cuya gráfica (también en la Fig. 4) se obtiene dibujando la de la anterior 0,98 unidades más arriba, sólo tiene un cero –lo que se vería fácilmente mediante el teorema de Bolzano- y su derivada, que sigue siendo $f'(x)=3x^2-6x+2$, sigue teniendo los mismos dos ceros. Esto es, de la anulación de la derivada no se sigue la anulación de la función.

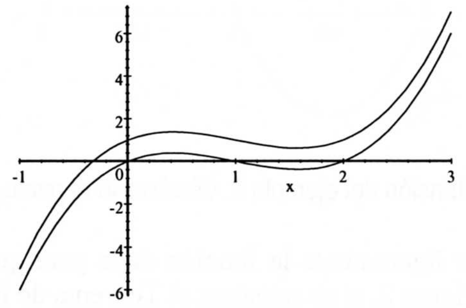

Fig. 4: Gráficas de las funciones $f(x)=x(x-1)(x-2)$ y $f(x)=x(x-1)(x-2)+1$

El examen de Junio de 1999.

El enunciado decía así: **"Usando los teoremas que sean necesarios, demostrar que la ecuación polinómica $x^3+6x^2-15x-23=0$ no puede tener más de una raíz real"**. Los proponentes lo habían pensado, desde luego, para que se aplicase el teorema de Bolzano y después la regla del signo constante de la derivada para probar la unicidad de la raíz cuya existencia garantiza dicho teorema. Sin embargo, se deslizó el error de poner –15 en lugar de 15 en el coeficiente del término de segundo grado, con lo que resulta que la derivada, $3x^2+12x-15$, posee dos ceros. Por tanto, la aplicación directa del criterio del signo constante de la derivada (condición suficiente, pero no necesaria) no era viable. A pesar de ello, el enunciado del problema podría haber sido correcto – por desgracia no fue así-.

El análisis correcto a partir de aquí hubiera sido: Calculemos el máximo y el mínimo predichos por la derivada y observemos si los valores tomados por la función son de distinto signo. En caso afirmativo, el Teorema de Bolzano, de nuevo, nos da la existencia de otras dos raíces. Si uno de los valores es nulo, la raíz correspondiente a ese valor es doble, pues se anulan simultáneamente la función y la derivada. Si, por el contrario, los valores máximo y mínimo de la función resultan ser del mismo signo, y entonces sólo hay una raíz real, tal como solicitaba el enunciado.

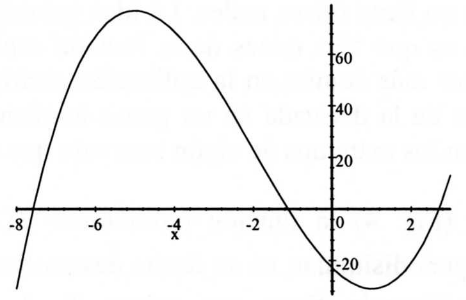

Figura 5. Gráfica del polinomio del ejercicio propuesto.

En el caso del polinomio propuesto, éste posee tres raíces simples (dibújese con una calculadora gráfica, que además se permite en las pruebas de Selectividad, por ejemplo, ver Fig. 5) lo cual hace imposible probar lo pedido. Una solución totalmente correcta a la cuestión, e indicativa de un buen dominio de las Matemáticas, hubiera sido: "Es imposible probar lo pedido por tal y tal causa", pero entre esas causas *no se puede poner nunca* que "porque la derivada se anula".

Se puede modificar la función dada de muchas maneras para que sólo tenga, de verdad, una única raíz. Cambiar -15 por 15 es sólo una de ellas, que parece la más conveniente a la hora de enmendar el yerro. Pero otra es cambiar -23 por 23 y mantener el -15: Así conseguimos una función con una única raíz pero con derivada de signo variable.

Conclusión.

Hay que extraer siempre conclusiones positivas, incluso de los errores: Éstos suelen ser una fuente más rica de ideas que el aburrido devenir de las cosas siempre bien hechas. En este caso, un error –aunque subsanado en las correcciones- nos ha permitido descubrir ciertas carencias en la enseñanza de las Matemáticas que hubieran pasado desapercibidas de no haberse metido el duende de los teclados de por medio.

Además, hemos comprobado que no siempre el "enseñar" es lo esencial: También hay que "hacer Matemáticas", lo que conlleva muchas cosas: Calcular, pensar, distinguir condiciones, redactar, especular y ¿por qué no? saber manejar la calculadora. Y, sobre todo, enseñar a pensar críticamente presentando siempre ejemplos y contraejemplos a cuanto resultado aparezca en el transcurso de las clases...

Agradecimiento.

El autor desea agradecer los interesantes comentarios de un revisor anónimo de la revista "Números", que han contribuido sustancialmente a mejorar este trabajo.