

Métodos numéricos en la predicción del tiempo

E. HERNÁNDEZ, J. M. PACHECO y R. GARCÍA

*Meteorología Dinámica. Departamento de Física del Aire y Geofísica
Facultad de Ciencias Físicas. Universidad Complutense, Madrid*

RESUMEN

En el presente trabajo se pasa revista a los principales métodos que se utilizan en los cálculos de la predicción atmosférica. Los métodos de diferencias finitas y espectral son tratados con cierta rapidez, por la mayor difusión y accesibilidad que tienen. En cambio, los métodos variacionales se exponen con cierto grado de detalle, con la intención de poner al lector en disposición de introducirse rápidamente en la literatura avanzada. El trabajo se cierra con una bibliografía amplia, que intenta servir de base para posteriores estudios que puedan motivarse.

ABSTRACT

The present paper surveys the most usual methods employed in numerical weather prediction. Finite differences and spectral methods are studied only in their most outstanding features, but variational methods are dealt with to a considerable degree of detail. An extensive bibliography follows.

0. INTRODUCCION

Los métodos de predicción numérica pretenden una descripción lo más ajustada posible, dentro de un esquema matemático, a los verdaderos campos meteorológicos cuyo comportamiento se desea predecir o simular, caso este último de gran interés a la hora de plantear experimentos con los modelos para su puesta a punto.

Un método numérico ha de satisfacer un conjunto de requisitos mínimos para ser utilizable. Esto se verá más adelante pero de todos modos conviene reconocer que la utilidad práctica de un binomio modelo/método depende muy esencialmente de la velocidad a que puede desarrollarse el cálculo. Una gran velocidad en la computación tiene interés no sólo para obtener una predicción utilizable en los habituales plazos cortos de 24 a 48 horas, sino para poder in-

troducir correcciones y variaciones en las predicciones a más largo plazo con objeto de que el impacto psicológico de los posibles aciertos predictivos haga aumentar su fiabilidad y credibilidad.

Los primeros intentos de establecer una teoría para la predicción del tiempo (Bjerknes, 1904) por métodos matemáticos corresponden a principios de este siglo y su metodología se basaba en la sustitución de ecuaciones primitivas por sus análogas en diferencias finitas (Richardson, 1922). El fracaso de las primeras versiones numéricas se debió fundamentalmente a dos factores: Primero, a un relativo desconocimiento del comportamiento del esquema numérico y de los parámetros básicos que lo describen; segundo, a la poca velocidad de los métodos de cálculo disponibles en la época (Courant y Hilbert, 1924).

Muy poco después de estos intentos primitivos se plantearon y resolvieron los principales problemas

relativos a la estructura interna del método de diferencias finitas, quedando así abierto el camino para cuando se dispusiera de herramientas rápidas y fiables de cálculo. Esta etapa se dio poco después del final de la Segunda Guerra Mundial, cuando se puso en marcha el programa meteorológico de Von Neumann en 1946, dando origen a una serie de trabajos (Charney *et al.*, 1950) de importancia capital para el desarrollo de la meteorología numérica. En particular en esta época se introdujeron los modelos filtrados (Charney, 1949), cuyo objetivo es doble: En primer lugar, aislar ciertos fenómenos de interés principal, y en segundo, eliminar las perturbaciones puramente matemáticas debidas al diseño del método. De esta época procede el uso de las ecuaciones en forma de vorticidad-divergencia en sustitución de las ecuaciones primitivas. Por otro lado, el estudio de este tipo de ecuaciones no ha llegado a eliminarse (Hinkelmann, 1959), sino que, al contrario, ha vuelto a centrarse el interés en su estudio, debido a la precisión con que proveen variables de interés de primera mano y al desarrollo de computadoras y programas que permiten el tratamiento del mayor volumen de datos que necesitan estos métodos (Burrige, 1979). De todos modos, la bondad de la predicción depende aún muy fuertemente de la calidad de las observaciones utilizadas como condiciones de partida y de las pérdidas de valor de la información con el paso del tiempo, que limitan esencialmente la validez temporal de las predicciones (Gandin, 1964; Lorenz, 1969).

1. DIFERENCIAS FINITAS

Los métodos de cálculo numérico para las ecuaciones diferenciales tienen dos aspectos claramente diferenciados: *a)* diseño del método, que permitirá traducir las expresiones analíticas a análogos algebraicos, y *b)* proceso de resolución de estas expresiones algebraicas. Aquí se tratará básicamente del aspecto *a)*.

En las diferencias finitas la metodología del problema es la siguiente: Se discretizan los dominios de definición de las variables básicas mediante una malla o rejilla, y tras sustituir las expresiones diferenciales por otras, análogas, discretas, se intenta calcular el comportamiento en un nudo de la malla a partir de otros donde sea conocido. En la aplicación a cuestiones meteorológicas se puede resumir esto en el siguiente gráfico representado en la figura 1:

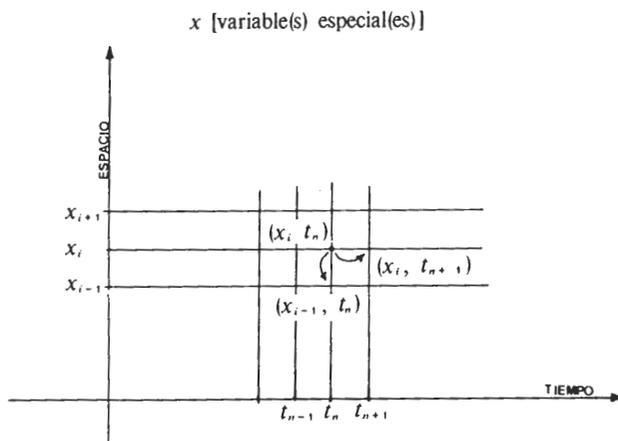


Fig. 1.—Malla de diferencias finitas.

Si $f(x, t)$ es el campo que se estudia en coordenadas espacio-tiempo y si $P(x_i, t_n)$ es una aproximación calculada en (x_i, t_n) , la flecha $(x_i, t_n) \rightarrow (x_i, t_{n+1})$ proporcionará un *pronóstico en t*. La flecha $(x_i, t_n) \rightarrow (x_{i-1}, t_n)$ dará un *diagnóstico en x*. Ambos aspectos pueden resultar interesantes para el meteorólogo, según el trabajo que desee efectuar. En la predicción, naturalmente, interesa el paso $t_n \rightarrow t_{n+1}$.

Si se escribe $V_n =$ (vector cuyas coordenadas son los valores $P(x_i, t_n)$, con n fijo) entonces el problema puede expresarse de modo compacto:

$$V_{n+1} = \mathcal{O}V_n + B$$

donde \mathcal{O} representa un operador (generalmente se reducirá a una matriz) y B representará un vector que da cuenta de las condiciones del problema (de contorno e iniciales).

Cómo llegar a la expresión \mathcal{O} es cuestión tratada ampliamente en la literatura (Mesinger y Arakawa, 1976; Kreiss y Olinger, 1973). Por regla general el método es el siguiente:

A base de desarrollos de Taylor con más o menos términos se consigue encontrar expresiones para las derivaciones mediante cocientes incrementales más un término de error obtenido a partir de los restos de los desarrollos de Taylor. Tras ese proceso se sustituyen los valores exactos (desconocidos) de f por sus aproximaciones y despejando las expresiones $P(x_i, t_{n+1})$ se llegará a $V_{n+1} = \mathcal{O}V_n + B$ (Gavurin, 1973). No hay inconveniente en que incorpore términos que reflejen la historia anterior del proceso (esto es, el uso de $P(x, t_k)$, $k \leq n$). Así en el método «leapfrog» o método de los cuatro puntos, el cálculo en (x_1, t_{n+1}) recibe influencias según el diagrama de la figura 2, obteniéndose, para el caso de la ecuación de ondas en dim. 1:

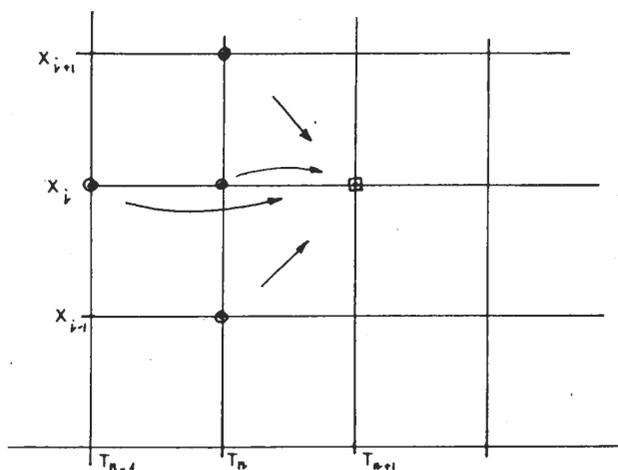


Fig. 2.—Diagrama del método «leapfrog».

$$P(x_i, t_{n+1}) = P(x_i, t_n) - \text{cte} [P(x_{i+1}, t_n) - P(x_{i-1}, t_n)].$$

Todos estos métodos están exhaustivamente estudiados y existen facilidades para su uso en ordenadores. Conviene recordar ahora las características básicas del estudio de estos métodos.

Las soluciones de las ecuaciones diferenciales que interesan al meteorólogo suelen tomarse como ondas que viajan y conservan su energía. Una interpretación apropiada del concepto de energía, aplicada a la ecuación que se maneje, permitirá llegar a la expresión análoga para el esquema en diferencias finitas. La conservación de la energía E , expresada por

$$\frac{\partial E}{\partial t} = 0, \text{ se traducirá en el caso descrito en la relación } E_{n+1} \leq E_n.$$

La consecución de esta relación se refleja en la existencia de alguna condición que ligue los valores de los pasos de malla espacial y temporal. Cuando la energía aumenta en cada paso de tiempo, se dirá que el esquema es *inestable*. La inestabilidad indicará que si el paso de red temporal es grande, con relación al espacial, pueden introducirse ondas completas en ese intervalo, dando lugar a oscilaciones grandes en la solución. Es lo que ocurriría de haber continuado el método de Richardson (Charney, 1950).

En la práctica las cuestiones de estabilidad se tratan con los métodos trigonométricos de Von Neumann. Este método consiste en la expresión de $P(x_i, t_0)$ en serie trigonométrica en x (generalmente reducida a un único armónico cuyo factor de amplificación es μ) y a base de pasos de tiempo, llegar a otra, análoga, $P(x_i, t_n)$, que resulta ser de igual forma, pero afectada de un factor μ^n de amplificación. La interpretación del factor μ como medida de la relación entre

Δx y Δt vuelve a dar lo conseguido antes por el método energético.

La cuestión de la convergencia de las aproximaciones obtenidas por el método a las verdaderas soluciones de las ecuaciones diferenciales también debe ser estudiada con algún detalle. Se entenderá que esa convergencia tendrá lugar cuando $\Delta x \rightarrow 0$, lo cual, como se ha expresado anteriormente, determinará los valores de Δt que también tienden a 0. En general, escribiendo las condiciones iniciales en forma de desarrollo de Fourier, el esquema en diferencias permitirá escribir:

$$P(x_i; t_n) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k \mu_k^n e^{ik\omega x_i}$$

Imponiendo que $|\mu_k| \leq 1$ y, suponiendo convergencia uniforme, se llega a que

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(x_i; t_n) = f(x, t)$$

Aquí lo esencial es establecer una forma manejable del factor de amplificación. He aquí una serie de definiciones que son de interés.

Error de *truncadura* es el error cometido al sustituir en el esquema en diferencias finitas la P por la solución f . Si f es diferenciable y el error de truncadura tiende a 0 con Δx , se dirá que el esquema es *consistente*. Ya se ha señalado previamente qué es un esquema *estable*; por lo tanto se definirá como aquel en que el factor de amplificación cumpla $|\mu| < 1 + o(\Delta t)$. Si f es una solución analítica del problema y además el esquema da una aproximación que tiende a f , se dirá que es *convergente*. Un conocido teorema (Lax + Richtmyer + Morton, 1967) asegura que «consistente + estable \iff convergente». Cuando se trabaja con ecuaciones lineales, o linealizadas (por el método de perturbación entre otros), las conclusiones anteriores bastan para llevar a cabo un análisis del problema. Sin embargo, las ecuaciones no lineales tratadas directamente por el método de diferencias pueden presentar otro tipo de inestabilidad, la llamada no lineal producida por los alias en los números de ondas. Esto consiste en que si existen ondas de longitud $< 2\Delta x$, entonces los números de onda mayores que $N/2$ no son detectados por el esquema en diferencias y provocan inestabilidad, esto es, las soluciones devienen no acotadas, pues los números de onda $\lambda > N$ son confundidos (alias) con $\lambda' = N - \lambda$. Este tipo de inestabilidad puede «arreglarse», bien introduciendo un filtrador que elimine esos números de onda (caso p. ej. de los Δ^2 en la ecuación de vortici dad), o bien modificando el propio esquema en dife-

rencias. Ver Richtmyer + Morton (1967), Mesinger + Arakawa (1976), Kreiss + Olinger (1973).

Los esquemas en diferencias usados para las ecuaciones primitivas linealizadas permiten el cálculo de ondas baroclínicas inestables, cosa que conviene resaltar por la mayor aproximación a la realidad que proveen los modelos baroclínicos (Burrige, 1979).

2. METODOS ESPECTRALES

En el apartado anterior se ha pasado una rápida revista al método de diferencias finitas y a algunas de sus limitaciones prácticas y teóricas. Los errores de alias en algunos términos advectivos pueden ser eliminados por el método espectral, esto es, sustituyendo los campos meteorológicos que intervienen en ellos por series, truncadas (espectrales), de funciones longitudinalmente periódicas apropiadas; además, los problemas de representación geométrica originados por los polos en el caso de rejillas hemisféricas pueden desaparecer en estos métodos debido a la propia naturaleza de los términos usados en las representaciones. Sin embargo, estos métodos, de carácter más directo, no han gozado hasta ahora de excesiva popularidad por su gran complejidad computacional. La esencia de un método espectral consiste en el cálculo de los coeficientes o amplitudes (factores de amplificación se han llamado antes) de la representación truncada elegida. Las variaciones de esas amplitudes, concebidas como funciones de la posición y del tiempo, originan las habituales de diagnóstico y pronóstico, respectivamente. Por tanto, el volumen de datos necesarios para el cálculo de esas amplitudes, que crece con el cuadrado del número de términos, hacía lentos los procesos de cálculo. Con auxilio de la transformada de Fourier, rápida, introducida alrededor de 1960 (Jenkins y Watts, 1968), se ha vuelto a poner de relieve la utilidad de estos métodos. Por otra parte, ello vuelve al origen de la idea y justifica el nombre, pues la transformación de Fourier no es sino la representación espectral (vía al teorema de Gelfand) que hace corresponder a cada entero $n \in Z$ el coeficiente c_n del desarrollo de Fourier de la función representada (Gelfand *et al.*, 1964).

En un método espectral se tratará de representar un campo meteorológico mediante expresiones formales, generalmente series dobles, a base de funciones adecuadas. Se tomará para la representación un sistema esférico (r, θ, λ) de coordenadas, pero sustituyendo la coordenada vertical r por alguna función diferenciable σ (piénsese en la presión). La condición de admisibilidad para una tal σ es, desde luego,

$\partial \sigma / \partial r \neq 0$ sobre la zona de estudio. Así las cosas, cualquier campo meteorológico $f(\sigma, \theta, \lambda)$ admitirá una representación en serie de Fourier:

$$f(\sigma, \theta, \lambda) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} a_m(\sigma, \theta) e^{im\lambda}$$

Esta representación es igual a la función en el caso habitual en que $f \in C^\infty$, cosa que es bastante razonable, al menos en un sentido generalizado (ver apartados siguientes). Recíprocamente, las condiciones que han de cumplir los coeficientes $a_m(\sigma, \theta)$ de un desarrollo como el anterior para que originen una función $f \in C^\infty$, a saber, que exista una nueva función $\bar{a}_m \in C^\infty$, tal que

$$a_m(\sigma, \theta) = \bar{a}_m(\sigma, \cos \theta) \sin^{|\mathbf{m}|} \theta$$

(Courant, 1924) permiten escribir cualquier campo de interés meteorológico a base de funciones, que en un instante fijo de tiempo, son de clase C^∞ (Nikiforov + Ouvarov, 1976). En la situación recién descrita, el problema ha sido trasladado a una cuestión de aproximación en espacios funcionales. Las variables meteorológicas pueden describirse como funciones de tipo

$$f(t; \sigma, \theta; \lambda)$$

que, para el tratamiento práctico, reciben una discretización en t y σ . Así se podrá poner

$$f_{t > t_0; \sigma = \sigma_0}(\theta, \lambda)$$

para estudiar la «fotografía» en el instante $t = t_0$ del campo del que se trate sobre la superficie $iso-\sigma$ de ecuación $\sigma = \sigma_0$. Los mapas habituales responden a esta descripción. Así pues, se tratará de trabajar en $\sigma = \sigma_0$ y efectuar representaciones en las variables θ y λ con las restricciones $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$, $\lambda \in [0, 2\pi]$; $f(\theta, \lambda) = f(\theta, \lambda + 2k\pi)$; con lo que se utilizarán elementos de un espacio de funciones representables en la forma

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \bar{a}_m(\cos \theta) \sin^{|\mathbf{m}|} \theta e^{im\lambda}$$

para llevar a cabo la aproximación de los campos cuyo estudio se desee efectuar. Como las funciones \bar{a}_m se determinarán a partir de datos estadísticos en cada valor de t y de σ , se presenta el doble problema de seleccionar una familia $\{\bar{a}_m\}$ apropiada de funciones y el número $|\mathbf{m}|$ que haga manejable la aproximación desde el punto de vista del cálculo (Bourke, 1972 y 1974).

Si se asocia a cada punto de la trama de la figura 3 una función C^∞ , $g_n^m(\cos \theta)$, tal que $g_n^{-m} = g_n^m$ para hacer el papel de \bar{a}_m , entonces se podrá escribir

$$Y_n^m(\theta, \lambda) = g_n^m(\cos \theta) \sin^{|\mathbf{m}|} \theta e^{im\lambda}$$

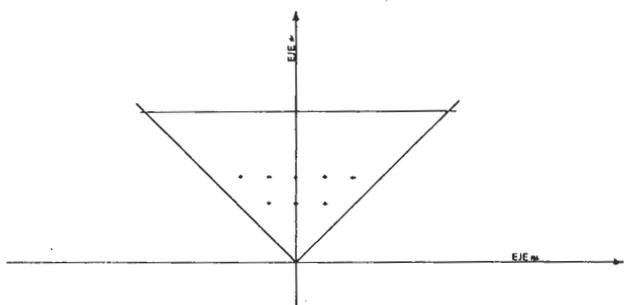


Fig. 3.—Truncadura.

donde $Y_n^{-m} = \overline{Y_n^m}$, lo cual dará una representación tipo

$$f = \sum_{m=-\infty}^{\infty} Y_n^m$$

En principio, n , que indica la clase de funciones usadas para aproximar, puede ser fijo y cualquiera en esta relación, o bien puede utilizarse para establecer alguna limitación sobre las m , lo que se llamará una *truncadura* (fig. 3); este concepto se reservará para una parte de la malla que sea simétrica respecto del eje n y que sea finita. De esta forma, será posible emplear expresiones $\tilde{f}(\theta, \lambda) = \sum_{\text{TRUNC.}} A_n^m Y_n^m$ (que forman, desde luego, un subespacio \mathcal{F}_0 del \mathcal{F} antes citado) para obtener representaciones aproximadas de los campos, según puede verse:

Si $f = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{a}_m (\cos \theta) \sin^{|m|} \theta e^{im\lambda}$ es tal que \bar{a}_m se puede desarrollar en serie según n :

$$\bar{a}_m = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^m g_n^m$$

entonces f es expresable en serie doble

$$f = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^m Y_n^m(\theta, \lambda)$$

que, caso de existir convergencia uniforme, dará buenas representaciones, con control de error, utilizando truncaduras cada vez más extensas. Un caso apropiado se obtiene tomando para g_n^m una familia de polinomios que sean base del espacio de polinomios.

Un aspecto interesante aparece si se considera como álgebra de Banach (Gelfand *et al.*, 1964), diversas normas. La norma de convergencia uniforme da al análisis recién esbozado y la introducción de la norma L^2 da lugar a notables simplificaciones en la expresión de productos si se seleccionan como g_n^m funciones ortogonales. En todo caso, la aproximación por medio

de L^2 es más débil que la convergencia uniforme (Orszag, 1970). La selección de funciones aptas para cada problema deriva de los operadores diferenciales que intervienen en él, y por lo general se toman variaciones de las funciones propias de los tales operadores. En particular, la laplaciana origina de modo natural los armónicos esféricos, utilizados, entre otros, en el modelo operativo del European Center for Medium-Range Weather Forecast en la actualidad.

3. MÉTODOS VARIACIONALES

Una de las ideas subyacentes en el método de diferencias finitas es la de la diferenciabilidad de las cantidades involucradas. Sin embargo, en la realidad se producen cambios bruscos en los campos meteorológicos, incluso discontinuidades, caso, por ejemplo, de un frente, donde ocurren discontinuidades en todas las magnitudes excepto la presión, la cual presenta gradiente discontinuo. Esto se ve claramente en los puntos angulosos de las isobaras en los mapas que representan frentes.

A la vista de lo anterior, parece razonable que las ecuaciones que interesan posean, en lugar de soluciones analíticas ordinarias, soluciones analíticas débiles, esto es, en el sentido de las distribuciones (Mijáilov, 1978) (Carrol, 19698. Más aún, dado que se pueden considerar los problemas de contorno e iniciales desde el punto de vista variacional, esto es, búsqueda del extremo de una funcional, ello obligará a tratar los problemas en un marco adecuado, que resultará ser el de los espacios de Sóbolev sobre L^2 . A continuación se expresan estas ideas con cierto grado de detalle.

Sea la ecuación diferencial $y' = f$. En principio, toda solución y de esta ecuación será una función diferenciable que sustituida en ella se satisfaga. Sin embargo, en la práctica (especialmente en meteorología) la condición de diferenciabilidad puede ser muy restrictiva y convendrá arbitrar otros medios. Multiplicando ambos miembros de la ecuación por una cierta función que sí sea diferenciable, e integrando sobre un intervalo $[a, b]$:

$$\int_a^b y' \varphi dx = \int_a^b f \varphi dx$$

Calculando por partes el primer miembro:

$$\int_a^b y' \varphi dx = y\varphi \Big|_a^b - \int_a^b y\varphi' dx = \int_a^b f\varphi dx$$

y si se supone φ de soporte compacto en $[a, b]$ el tér-

mino $y\varphi \Big|_a^b = 0$, de donde

$$-\int_a^b y' \varphi dx = \int_a^b f \varphi dx$$

Toda función y que satisfaga esta ecuación puede ser considerada como solución en sentido débil de la ecuación diferencial dada, siempre que esta ecuación se cumpla para todas las φ del tipo considerado. Sea ahora $y \in E$, un cierto espacio vectorial de funciones. Si y no es variable en sentido ordinario, la regla

$$\int_a^b y' \varphi dx = - \int_a^b y \varphi' dx$$

permite definir en sentido débil la derivada de y , más aún, el objeto y' definido por esta expresión es pensable como un elemento del dual del espacio de las φ pues la ley

$$\varphi \mapsto - \int_a^b y \varphi' dx$$

es obviamente una aplicación lineal y ya continuidad es fácil establecer. En tanto, si la operación $\omega(e)$ por $\langle \omega, e \rangle$ (siendo $\omega \in$ dual de $\{\varphi\}$ y $e \in \{\varphi\}$), se puede definir la derivada y' como aquel elemento del dual que satisface la ley

$$\langle y', \varphi \rangle = - \langle y, \varphi' \rangle$$

* Problemas anexos a esta definición son los siguientes, entre otros:

- 1) En principio, las y' definidas así no son funciones ordinarias, y por tanto no se puede hablar del valor $y''(x)$.
- 2) Las integraciones llevadas a cabo en el desarrollo anterior precisan ser definidas correctamente, y en un sentido claramente aplicable.

Si se supone resuelto el problema segundo habiendo elegido el tipo de integral que haga falta, el problema primero puede ser tratado del modo siguiente: Se consigue que E sea un espacio denso en el dual $\{\varphi\}$ * (lo cual exige definir una topología adecuada en éste) y se podrán considerar los elementos de éste en pie de igualdad con los de E , pues serían límites de éstos y se tendría así una aproximación de la realidad.

Por lo general, el espacio $\{\varphi\}$ se suele describir \mathcal{D} y su dual topológico \mathcal{D}' recibe el nombre de espacio de las distribuciones sobre $[a, b]$.

3.1. FORMA VARIACIONAL DE UNA ECUACION DIFERENCIAL

Es un hecho trivial reconocer que el polinomio $ax^2 - 2bx$ posee un mínimo (si $a > 0$) cuando $ax - b = 0$. Esta idea elemental es de gran fertilidad cuando se reinterpretan adecuadamente los términos. Si se hace que a represente una métrica (matriz simétrica) definida en \mathbb{R}^n y que b, x sean vectores de \mathbb{R}^n , con su habitual estructura euclídea, entonces la forma cuadrática $Q(x) = ax^2 - 2bx$, representada por la ecuación en coordenadas $Q(x) = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i x_j - 2 \sum_i b_i x_i$ alcanzará su mínimo cuando todas las derivadas parciales $\partial Q / \partial x_i = 0$, esto es, si $2(\sum_j a_{ij} x_j - b_i) = 0$ o bien $ax = b$. Se ve ahora, para todo vector $v \in \mathbb{R}^n$, que

$$ax = b \Rightarrow ax \cdot v = b \cdot v$$

donde se reconoce cierta analogía formal con el desarrollo anterior. Si se reescribe ahora $Q(x) = ax \cdot x - 2b \cdot x$, ello permite decir que las soluciones del problema de minimización de Q son las soluciones débiles del problema $ax = b$.

Continuando la analogía formal, sea ahora A un operador diferencial y se tratará de resolver la ecuación diferencial $Af = g$. Multiplicando escalarmente por una función apropiada v se tendrá $(Af, v) = (g, v)$, que según lo anterior, está conectado con la funcional $(Af, f) - 2(g, f)$. Ahora, si el producto escalar se introduce, como es habitual, por la integración del producto de funciones, teniendo en cuenta las condiciones anexas a A , algún tipo de fórmula de Green permitirá concluir que el mínimo de la funcional será solución débil del problema $[Af = g] + [\text{condiciones}]$.

Se tratará, ahora, de conectar la idea de dualidad con la de producto escalar.

En E se ha definido un tal producto por la regla:

$$f \cdot g = \int_a^b f g dx$$

Obviamente, si esta fórmula representa un producto escalar se ha de cumplir que $\int_a^b f^2 dx < \infty$, y se tomará como norma asociada a la expresión:

$$\|f\| = (f \cdot f)^{1/2} = \left(\int_a^b f^2 dx \right)^{1/2}$$

Se dirá entonces que $E \subseteq L^2[a, b]$. Así se tiene la siguiente cadena:

$$\mathcal{D} \subset E \subset L^2$$

donde, suponiendo \mathcal{D} denso en E , al pasar a los duales se tendrá:

$$\mathcal{D}' \subset E' \subset L^2 = L^2' \subset E' \subset \mathcal{D}'$$

de manera que la dualidad $E - E'$ puede ser representada mediante la $\mathcal{D} - \mathcal{D}'$ y el producto escalar:

3.2. OPERADORES DIFERENCIALES Y ESPACIOS DE SOBOLEV

Ahora se trabajará en \mathbb{R}^n , en particular en algún dominio Ω y se supondrá que en la cadena recién citada E es un espacio de Hilbert. Si tal cosa ocurre, E' se identificará con E mediante la ley

$$x \cdot y = \langle x, \varphi y \rangle$$

donde $\varphi : E \rightarrow E'$ es el isomorfismo de identificación. En particular, en \mathbb{R}^n puede existir una variable destacada que suele jugar el papel del tiempo, cosa que resultará sumamente interesante en las aplicaciones meteorológicas. Un operador diferencial lineal sobre E es una combinación lineal de derivadas (distribuciones) del tipo

$$\frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

(Así, en la ecuación de vorticidad se encuentra el operador $\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 = \partial^3 / \partial x^2 \partial t + \partial^3 / \partial y^2 \partial t$, de tercer orden) que se puede expresar brevemente por $D^\alpha = \partial^{|\alpha|} / \partial x^\alpha$, o sea, una expresión

$$P = \sum a_\alpha D^\alpha$$

donde las a_α son funciones sobre Ω . La interpretación (Carroll, 1969; Lions, 1961) de este operador P dependerá naturalmente del espacio $E(\Omega)$ sobre el que se trabaje, así como de las condiciones adicionales que deba cumplir la ecuación $Pf = g$ que se desee resolver.

Los operadores diferenciales son, por lo general, operadores no continuos (con lo que la aplicación $e \mapsto \langle Ae, \omega \rangle$ puede no serlo), así que la teoría deberá organizarse sobre otras bases. Si A es un operador lineal sobre el espacio de Hilbert E , se define el adjunto A^* como aquel operador cuyo dominio $D(A^*) = \{ \omega \in E' \mid e \mapsto \langle Ae, \omega \rangle \text{ es continua sobre } D(A) \}$. Se supone, naturalmente, que $D(A)$ es denso en E . Si el operador actúa $E \rightarrow F$, entonces

$$D(A^*) = \{ \omega \in F' \mid e \mapsto \langle Ae, \omega \rangle \text{ continua} \}$$

De esa forma se puede definir $A^* : F' \rightarrow E'$ por la ley $\omega \mapsto A^* \omega = \omega'$, tal que $\langle e, \omega' \rangle = \langle Ae, \omega \rangle$.

Caso de que $D(A^*)$ sea denso en F' , entonces A^{**} es un nuevo operador $\bar{A} : E \rightarrow F$, llamado cierre de A , y que ya goza de propiedades de operador continuo. Si $A = P$ como más arriba

$$Pu \cdot v = \int_{\Omega} Pu \bar{v} dx = \int_{\Omega} u \overline{\sum D^\alpha (\bar{a}_\alpha v)} dx = u \cdot \bar{P}v$$

y poniendo $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ y $D^\alpha u \in L^2(\Omega)$ con $a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$ se tendrá:

$$u_n \rightarrow 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (Pu_n, v) = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n, \bar{P}v) = 0$$

y si se denota por $\omega = \lim Pu_n$, entonces $\omega = 0$ por ser $\mathcal{D}(\Omega)$ denso en L^2 .

Se puede pensar, por tanto, que a un mismo operador le corresponderán diversas realizaciones concretas, que dependerán de las condiciones de contorno que limitan el dominio de aplicación del operador.

Los espacios de Sobolev son espacios de (clases de) funciones del tipo (Tijonov + Samarski, 1972)

$$H^m(\Omega) = \{ f \in L^2(\Omega) \mid D^\alpha f \in L^2(\Omega) \text{ si } |\alpha| \leq m \}$$

con la norma

$$\|f\|_m = \left[\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} (D^\alpha f)^2 dx \right]^{1/2}$$

Se definen también $H_0^m(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}$, cierre topológico de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $H^m(\Omega)$.

Las realizaciones concretas de estos espacios las dan los llamados teoremas de *inmersión*, que se puede resumir así: Si la frontera Γ de Ω es «buena», entonces:

$$H^m(\Omega) \subset L^q(\Omega^s)$$

donde $\Omega^s = \Omega \cap \mathbb{R}^s$ con $s \leq n$, siendo las relaciones entre m, q, s las siguientes:

$$n > 2m ; n - 2m < s ; q \leq \frac{2s}{n - 2m}$$

Así pues, el valor de s es una medida de la regularidad de la frontera, si ésta es buena, puede ser $n - 1$, que dará un valor de $q = 2(n - 1)/(n - 2m)$, así que para el espacio ordinario $n = 3$; con $m = 1$ (ver fig. 4), $H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega^3) = L^4(\Gamma)$; $H^1(\Omega) \subset L^6(\Omega^3) = L^6(\Omega^3)$.

Estos hechos permiten calcular con elementos de los espacios H como si fueran verdaderas funciones y buscar soluciones de los problemas en estos espacios.

Los resultados anteriores pueden mejorarse, si Ω es «bueno», hasta el extremo de que $H^m(\Omega) \subset C^k(\bar{\Omega})$, siendo $2k - 2m - n$ lo que permite trabajar hasta con funciones continuas (Nečas, 1967).

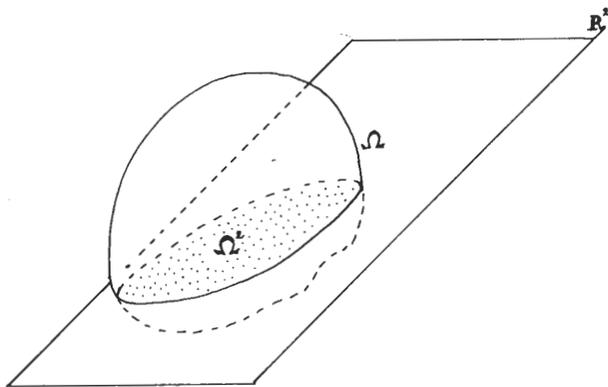


Fig. 4.—Sobre el teorema de inmersión.

3.3. OPERADORES DIFERENCIALES Y FORMAS A ELLOS ASOCIADAS

Ya se ha visto que el método variacional consiste en asociar una funcional o forma al operador diferencial, y tratar de calcular el mínimo de esa forma, el cual será considerado como solución del problema.

La condición para la existencia de mínimo es que la forma sea convexa, condición que se reflejará en la aparición de una parte principal elíptica o caerciva. Sea una ecuación del tipo de Helmholtz que aparece frecuentemente en los cálculos meteorológicos (Haltiner, 1971), $-\nabla^2 u + \lambda u = f$, con condición de contorno $n=0$ sobre Γ . No se supone que u sea dos veces diferenciable, así que, utilizando la fórmula de Green formalmente:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 \bar{u} \bar{v} \, dx = - \int_{\Omega} [\nabla u \nabla \bar{v}] \, dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \bar{v} \, do$$

se llega a:

$$\int_{\Omega} (-\nabla^2 \bar{u} + \lambda \bar{u}) \bar{v} \, dx = \underbrace{\int_{\Omega} \nabla u \nabla \bar{v} \, dx + \lambda \int_{\Omega} u \bar{v} \, dx}_{a(u, v)} = \underbrace{\int_{\Omega} f \bar{v} \, dx}_{f \cdot v} - \underbrace{\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \bar{v} \, do}_0$$

Si ha de ocurrir $u \in L^2(\Omega)$ con las v utilizadas en $C^\infty(\bar{\Omega})$, el problema ahora queda expresado como $a(u, v) = f \cdot v$.

Poniendo $u = v$ en el primer miembro la idea es ahora clara: buscar un $u \in H^1_0(\Omega)$ tal que, para todo $v \in H^1_0(\Omega)$, se satisfaga

$$a(u, v) = f(u, v)$$

lo que equivale a buscar el mínimo de la aplicación $M(u) = a(u, u) - f \cdot u$. Las condiciones de contorno más complicadas que las del problema de Dirichlet exigen utilizar los teoremas de trazas. Para ello hay que introducir los espacios H^m , para m fraccionario, a través de la transformación de Fourier (Lions, 1961). En tal caso la aplicación «Tomar valores en la frontera» se representa por una aplicación

$$\begin{aligned} \gamma_j : H^m(\Omega) &\longrightarrow H^{m-j-1/2}(\Gamma) \\ u &\longmapsto \frac{\partial^j u}{\partial \bar{n}_j} \end{aligned}$$

Si $j = 0$, γ_0 es la «restricción» de u a Γ , y dado que los H^m pueden considerarse como espacios de funciones «continuas», se tendrá resuelto el problema.

Así, imponiendo la condición de contorno $\frac{\partial u}{\partial \bar{n}} = 0$ ello equivaldría a que $\gamma_1 u = 0$, o sea, a trabajar en $H^{1/2}(\Gamma)$.

Sea $a(u, v)$ una forma continua sobre un cierto espacio de Hilbert V , el cual se supondrá denso dentro de otro espacio de Hilbert H . Debido a lo dicho antes, V se suele llamar espacio de energía del operador A , lo cual justifica el nombre de variacional: minimizar una energía (Método de Riemann). Esta forma va a originar dos operadores, uno sobre V y otro sobre H . El operador sobre H resultará ser el operador diferencial. En efecto:

Como $v \rightarrow a(u, v)$ es continua si se fija u , se puede poner $a(u, v) = \xi \cdot v$ en V y se define $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ por $u \rightarrow \mathcal{A}u = \xi$. \mathcal{A} resulta ser lineal y continuo.

Sea ahora $V \subset H$, donde se trabajará con la topología de H . Entonces, para algunos $u \in V$ la aplicación $v \rightarrow a(u, v)$ será continua. Sea M ese conjunto. Para $u \in M$, $a(u, v) = \eta \cdot v$ en H , así que se ha definido $A: M \rightarrow H$ en la ley $u \rightarrow Au = \eta$.

Sea $V = H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) = H$ y tómesese $a(u, v) = \langle -\nabla^2 \bar{u} + \lambda u, v \rangle$ en $\mathcal{D} - \mathcal{D}'$.

Aplicando la teoría precedente, *

$$a(u, v) = Au \cdot v \text{ en } L^2(\Omega)$$

pero como $L^2(\Omega) \subset \mathcal{D}'$, es $\langle Au, v \rangle = Au \cdot v$ en la dualidad $\mathcal{D} - \mathcal{D}'$, de donde $-\nabla^2 \bar{u} = Au - \lambda u$ en \mathcal{D}' , luego $\nabla^2 \bar{u} \in L^2(\Omega)$.

Interpretando este resultado, se ve que: $u \in H^1(\Omega)$, que $\nabla^2 \bar{u} \in L^2(\Omega)$ y que la condición de contorno se ha reflejado en la fórmula de Green utilizando:

$$-\nabla^2 \bar{u} \cdot w = \nabla u \cdot \nabla w$$

Una condición de existencia y unicidad para el problema

(operador + condiciones)

es que $|a(u, u)| \geq \text{cte} \|u\|_V^2$, condición de coercividad que se obtiene por el teorema de Lax-Milgram, de forma que en tal caso $A : D(A) \rightarrow H$ resulta biunívoco (Schaeffer, 1970).

Para $-\nabla^2 u + \lambda u$, la forma $a(u, u) = \sum |u_i|^2 + \lambda |u|^2 \geq \min(1, \lambda) \|u\|_V^2 = \min(1, \lambda) \left[\left(\sum_1^n \left(\int_{\Omega} u_i^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_{\Omega} u^2 dx \right)^{1/2} \right)^2 \right]$, de forma que se buscarán las soluciones en $V = H_1(\Omega)$. Si se añaden las condiciones de contorno homogéneas $u|_{\Gamma} = 0$, la solución se buscará en $H_0^1(\Omega)$.

3.4. UN METODO NUMERICO

El tratamiento de una ecuación diferencial por métodos variacionales propicia de modo natural formas nuevas de cálculo numérico. En particular, el hecho de que se trate de buscar un mínimo de cierta funcional sugiere el utilizar, asimismo, métodos de aproximación que minimicen algún tipo de energía. El método de los elementos finitos o funciones «spline» (del inglés spline = regla elástica) que se utiliza hoy día en las computadoras cumple la condición de hacer mínima la energía elástica

$$\int_a^b \frac{f''}{1 + (f')^2} dx$$

en las interpolaciones (Werner + Schabak, 1981). Consiste básicamente en acoplar a los puntos entre los que se busca una función de interpolación una «regla elástica» (fig 5)

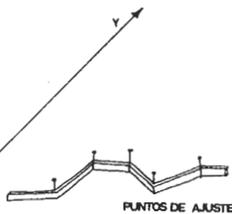


Fig. 5.—Regla «spline».

cuya energía sea mínima. En la práctica las funciones «spline» se reducen a funciones polinómicas a trozos, de forma que si son lineales, se hablará de

aproximaciones por elementos finitos de primer orden, etc.

Para un espacio funcional como el $H_0^1(\Omega)$ donde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, sea un rectángulo, caso que se suele dar en los análisis meteorológicos, se da la descomposición $H_0^1(\Omega) = H_0^1[a, b] \otimes H_0^1[c, d]$ (Schaefer, 1970) (ver figura 6).

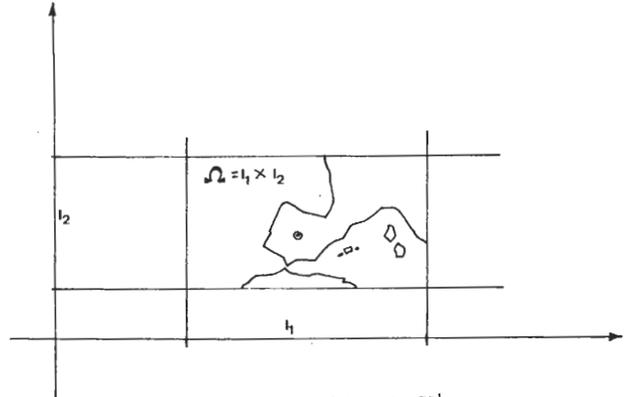


Fig. 6.—Descomposición de $H_0^1(\Omega)$.

lo que permite utilizar, puesto que forman bases en los espacios factores, aproximaciones por elementos finitos de primer orden para la resolución de los problemas de ecuaciones en derivadas parciales.

El método de Rayleigh-Ritz-Galerkin (Gavurin, 1973) (Mijailov, 1978) (Máslov) está también motivado por el carácter variacional dado a los problemas en derivadas parciales. Este procedimiento consiste en que, elegido un subespacio S conveniente, cerrado, del espacio V , se proyecta el problema sobre él y se resuelve numéricamente allí. Si S es «suficientemente parecido» a V , se tendrá una solución aproximada que viene caracterizada por el propio problema abstracto considerado.

Cuando S es un espacio de funciones «spline», se tendrá el método de los elementos finitos (Showalter, 1982) (García Rendo, 1979). La ventaja de este método a la hora de realizar cálculos numéricos consiste en lo siguiente:

Si se tiene el problema $Au = f$, substituyendo u y f por sus aproximaciones «spline» y efectuando el producto escalar por las tales funciones, el problema se traduce a la resolución de un sistema de ecuaciones algebraicas. Pues los elementos finitos ω_j son tales que $\omega_j(x_i) = \delta_{ij}$ y $\int_{\Omega} \omega_j dx = 1$, se tiene la aproximación $\sum u(x_j) \omega_j$ para u , así que hay que resolver el sistema:

$$\sum a(\omega_j, \omega_i) x_i = f(v_i)$$

donde el problema es invertir la matriz $a(\omega_j, \omega_i)$, que es bandeada, pues, si $|i - j| \geq 2$ los productos $\omega_i \omega_j$ son 0.

Si A es lineal, la linealidad o no del sistema resultante depende de f , y ello exige un tratamiento *ad hoc* para linealizar el sistema. Una vez conseguido esto, las condiciones de casi-ortogonalidad de las funciones «spline» producen, como se ve, una matriz bandeada, para la inversión de la cual hay facilidades en los ordenadores (método de Gauss-Seidel, entre otros).

El control del error en estas aplicaciones puede efectuarse (Showalter, 1982) mediante acotaciones en la norma de V o, más apropiada para la mejora de la convergencia, en H . Las expresiones respectivas son:

$$\|u_s - u\|_V \leq \frac{k}{c} \inf_{v \in S} \{\|U - v\|_V\}$$

$$|u_s - u|_H \leq \frac{k}{c} \inf_{v \in S} \{\|u - v\|_V\} e^*(S)$$

donde K es la cota de la forma $a(u, v)$ asociada al operador A , c es la constante de coercividad y $e^*(S)$ es una cantidad que mide la bondad de la aproximación de S a V , en sentido «geométrico». Más aún, si existe una constante $s(S)$ tal que

$$\inf_{v \in S} \{\|w - v\|\} \leq e(S) |Aw|_H$$

se puede resumir en

$$|u_s - u| \leq \frac{K^2}{c} e(S) e^*(S) |Au|_H$$

la calidad de la aproximación.

Haciendo intervenir, como es natural, el paso de malla h para establecer la conexión entre ella y la convergencia, se tiene el siguiente resultado:

Si h es el paso de malla, $0 \leq h \leq 1$ y $L_h = \{\text{elementos finitos de primer orden de } H^1 \text{ asociados a esa malla}\}$, vale la acotación siguiente:

$$\inf_{v \in L_h} \{\|w - v\|_{H^1}\} \leq Mh^{-1} \|w\|_H$$

para alguna constante apropiada M .

4. ECUACIONES DE EVOLUCION

Conviene expresar con claridad qué se entiende por una ecuación de pronóstico. Una ecuación de este tipo permite decir qué ocurrirá con una cierta variable en el futuro a partir de las informaciones disponibles en el presente. Por tanto en tales ecuaciones existirá alguna variable destacada, que hará el papel del tiem-

po, y que intervendrá en forma de derivaciones con respecto a ella, dando las *tendencias*, que son precisamente las cantidades que se calculan. Brevemente, una ecuación de pronóstico se escribirá

$$\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial t} = f$$

y si se discretiza, lo cual ayuda a ver el papel de t con más claridad, el asunto se reducirá a hallar $\mathcal{X}(t + \Delta t)$ conocido $\mathcal{X}(t)$. En la práctica, el \mathcal{X} suele ser una función complicada de las variables, tanto tiempo como espacio, incluso puede ser, como ocurre en la ecuación de vorticidad, el resultado de aplicar ciertos operadores diferenciales a otras funciones más sencillas.

En cualquier caso, las ecuaciones en derivadas parciales donde se ha destacado una variable temporal reciben el nombre de *ecuaciones de evolución*, pues, si se fijan las variables especiales, reflejan la evolución de la cantidad que sea a lo largo del recorrido de la variable t .

La ecuación de vorticidad es la más interesante para este estudio: $\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + J(\psi, \nabla \psi) + f = -f_0 D$

con las condiciones de contorno habituales ($\omega = 0$ en los extremos de la atmósfera), condiciones laterales $\omega = 0$, y condiciones iniciales las del mapa en el instante inicial t_0 del pronóstico (García Rendo, 1979).

El estudio básico de estas ecuaciones, en particular del caso interesante en que aparece la laplaciana derivada respecto al tiempo, se halla en Fernández-Viña (1968), donde se analizan los espacios necesarios y los teoremas de existencia y unicidad de soluciones. Los espacios funcionales necesarios pueden construirse de acuerdo con la siguiente técnica elemental:

Se toman las funciones definidas sobre el cilindro $\Omega \times [O, T]$, donde Ω es una zona abierta, acotada y con frontera «buena» del espacio (aquí bastará $\Omega \in \mathbb{R}^2$, siendo \mathbb{R}^2 el plano de la proyección estereográfica usado en la predicción) y $[O, T]$ un intervalo de tiempo, así se tendrán funciones de dos variables $\psi(x; t)$. La t puede destacarse considerando $\psi(x; t)$ como una aplicación

$$\begin{array}{ccc} [O, T] & \longrightarrow & E(x) \\ t & \longmapsto & \psi(x; t) \end{array}$$

donde $E(x)$ es algún espacio apropiado de funciones sólo de x . Concretamente, $E(x)$ será, para las aplicaciones, un espacio de Sobolev de los introducidos antes. En tal caso es posible dotar al espacio de aplicaciones $[O, T] \rightarrow E(x)$ dotado de una estructura prehilbertiana a base del producto escalar natural $\psi \circ \chi =$

$= \int_0^T (\psi \cdot \chi) dt$ donde el producto bajo el signo integral se entiende realizado respecto de las x . Así, si las funciones $\psi : [0, T] \rightarrow H^1(\Omega)$ resultan ser, pensadas como funciones sólo de t , de cuadrado integrable, se podrá poner $L^2([0, T]; H^1(\Omega))$ para indicar el espacio funcional recién definido (Carroll, 1969).

La aplicación de los métodos variacionales a estas ecuaciones reside en estudiar la forma $a(u, v; t)$, análoga a la considerada más arriba, lo cual lleva a tener en cuenta la estructura interna de los espacios que intervienen. En lo que sigue se supondrá que $E(x)$ es un espacio separable de Hilbert. Si se denota por $\Phi([0, T]; E(x))$ el espacio prehilbertiano, dotado ya de su producto escalar, de las funciones $\psi : [0, T] \rightarrow E(x)$, se podrá representar, poniendo $\Phi = L^2; E = H^1$, la ecuación de vorticidad:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + J(\psi, \nabla^2 \psi + f) = -f_0 D$$

a base de escribirla en forma variacional:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi, \varphi \right)_{L^2} + (J, \varphi)_{L^2} = -(f_0, D)_{L^2}$$

donde el primer término del primer miembro es precisamente la forma $a(\psi, \varphi; t)$, etc.

En las aplicaciones conviene utilizar ciertas descomposiciones de estos espacios, en particular las del tipo

$$\Phi(i, E(x)) \hookrightarrow \Phi(I) \otimes E(x)$$

Si se consigue encontrar bases en los espacios factores, esto es, conjuntos linealmente independientes densos, será posible encontrar espacios de dimensión finita, tanto en $\Phi(I)$ como en $E(x)$, de forma que

$$\begin{array}{ccc} \Phi(I)_{n_1} \otimes E(x)_{n_2} & \hookrightarrow & \Phi(I) \otimes E(x)_{n_2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Phi(I)_{n_1} \otimes E(x) & \hookrightarrow & \Phi(I, E(x)) \end{array}$$

(Grothendieck, 1973; Schaeffer, 1970).

De modo que podrán aplicarse técnicas análogas a las descritas antes para el caso simple $(-\nabla^2 + \lambda)u = f$, pero teniendo en cuenta la introducción de la variable temporal destacada.

4.1. TRATAMIENTO DE LA ECUACION DE VORTICIDAD

La ecuación de vorticidad en su forma habitual no es especialmente apta para su tratamiento directo. En principio conviene expresar el término divergente del segundo miembro en forma de parámetro de re-

lajación (Haltiner, 1971) para asegurar una mejor convergencia en la integración y tratar, también, con un problema homogéneo. Ello se consigue expresando

$$-f_0 D = f \frac{\partial \omega}{\partial p}$$

a base del geopotencial, resultando en $\lambda \frac{\partial \psi}{\partial t}$ donde λ incorpora términos dependientes

del perfil de vientos, de la presión, etc., y es ≤ 1 .

Efectuado este paso, queda la ecuación

$$(\nabla^2 - \lambda) \frac{\partial \psi}{\partial t} + J(\psi, \nabla^2 \psi + f) = 0$$

con la añadidura de las habituales condiciones de contorno e iniciales sobre el área Ω de predicción. Para acomodarse a los usos habituales es preferible escribirla

$$(-\nabla^2 + \lambda) \frac{\partial \psi}{\partial t} = J(\psi, \nabla^2 \psi + f)$$

que ya es del tipo

$$\frac{\partial}{\partial t} A\psi = G$$

dado que A es lineal y de coeficientes constantes. Esta ecuación de evolución se integrará separadamente en el tiempo y en el espacio. Integrando entre 0 y t se tiene (Lions + Magenes, 1968)

$$A\psi(t) - A\psi(0) = \int_0^t G dt$$

o bien $A\psi(t) = \tilde{G}$. Suponiendo, lo cual no es muy restrictivo, que ψ , sus derivadas espaciales y su laplaciana sean elementos de $L^2(\Omega)$, se puede pasar a forma variacional, manteniendo de momento que \tilde{G} es conocida:

$$\begin{aligned} (A\psi, \varphi)_{L^2} &= ((-\nabla^2 + \lambda)\psi, \varphi) = (-\nabla^2 \psi, \varphi) + \\ &+ (\lambda\psi, \varphi) = \int_{\Omega} (\nabla \psi \bar{\nabla} \varphi + \lambda \psi \bar{\varphi}) dx = (\tilde{G}, \varphi)_{L^2} \end{aligned}$$

Si se pone $\psi = \varphi$, se observa que $(A\varphi, \varphi) \geq 0$, luego se tiene así un verdadero producto escalar asociado a A , por la ley

$$(\psi, \varphi)_A = (A\psi, \varphi)_{L^2}$$

Poniendo $\lambda = 1$ se modifica el producto escalar asociado a A , y quedará pues $|\nabla \varphi|^2 + |\varphi|^2 \geq |\nabla \varphi|^2 + \lambda |\varphi|^2$ que el operador A está definido en un subespacio de $H^1(\Omega)$ (cuyo producto escalar es precisamente el resultante de poner $\lambda = 1$), subespacio que vendrá dado por la introducción de las condiciones de contorno. Si éstas son las habituales homogéneas, el espacio V de definición para el operador A resulta

ser $H_0^1(\Omega)$, y si no lo fuesen, una traslación de vector ψ_0 , siendo ésta la condición de contorno, resolvería el problema. Resta comprobar, para aplicar el método numérico, que A es coercivo sobre H_0^1 , lo cual es fácil: $(\nabla\psi, \nabla\psi)_{L^2} + \lambda (\psi, \psi)_{L^2} = |\nabla\psi|^2 + \lambda |\psi|^2 \geq \min(1, \lambda) [|\nabla\psi|^2 + |\psi|^2] = \lambda \|\psi\|^2$, así que se puede aplicar el método de los elementos finitos, según lo esquematizado en el siguiente diagrama (fig. 7).

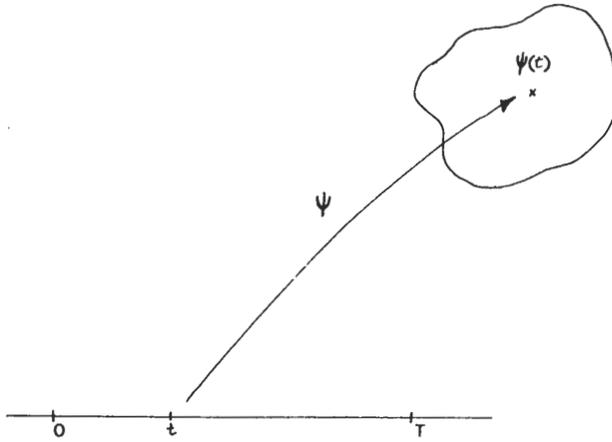


Fig. 7.—Un espacio funcional. $\Phi((O, T), E(x))$.

$$\psi(t) \in L^2((O, T); H_0^1(\Omega)) \leftrightarrow L^2((O, T) \otimes H_0^1(\Omega)) \leftrightarrow H_0^1((0, t]) \otimes H_0^1(\Omega)$$

Así las cosas, se aproximará ψ por combinaciones lineales de expresiones del tipo $\omega_i(x) \omega_j(y) \omega_k(t)$, elementos finitos de primer orden, los elementos finitos, al valer 1 en los nodos de la malla, dan buena aproximación de los verdaderos valores buscados de ψ . Efectuándose a continuación los productos escalares:

$$\begin{aligned} & \left((-\nabla^2 + \lambda) \frac{\partial}{\partial t} \sum \psi_{ijk} \omega_i(x) \omega_j(y) \omega_k(t), \right. \\ & \left. \omega_e \omega_m \omega_n \right)_{L^2} = (\tilde{G}, \omega_e \omega_m \omega_n)_{L^2} \end{aligned}$$

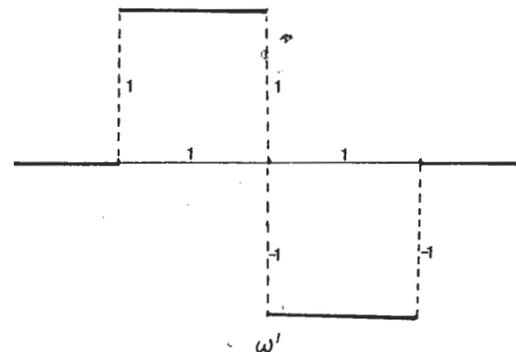
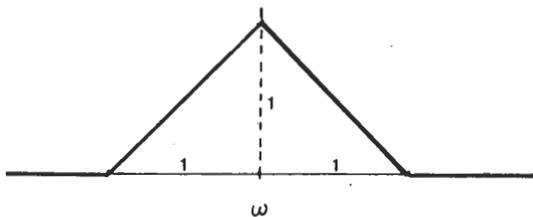


Fig. 8.—Un elemento finito y su primera derivada.

Denotando por primas las derivadas en las variables que sean, quedará:

$$\begin{aligned} & \left(-\nabla^2 \frac{\partial}{\partial t} \sum \psi_{ijk} \omega_i \omega_j \omega_k, \omega_e \omega_m \omega_n \right) = - \\ & = - \left(\frac{\partial}{\partial t} \sum \psi_{ijk} (\omega_i'' \omega_j + \omega_i \omega_j'') \omega_k, \omega_e \omega_m \omega_n \right) = \\ & = - \left(\sum \psi_{ijk} (\omega_i'' \omega_j + \omega_i \omega_j'') \omega_k', \omega_e \omega_m \omega_n \right) = - \\ & = - \sum \psi_{ijk} \left[\int_0^{N_x} \omega_i'' \omega_e dx \cdot \int_0^{N_y} \omega_j \omega_m dy + \right. \\ & \left. + \int_0^{N_x} \omega_i \omega_e dx + \int_0^{N_y} \omega_j'' \omega_m dy \right] \cdot \int_0^T \omega_k' \omega_n dt = - \\ & = - \sum \psi_{ijk} M_{ij}^{lm} T_k^n \Rightarrow \\ & \left(-\nabla^2 \frac{\partial}{\partial t} \psi + \lambda \psi, \omega_e \omega_m \omega_n \right) = \\ & = \sum \psi_{ijk} (-M_{ij}^{lm} + \lambda N_{ij}^{lm}) T_k^n = (\tilde{G}, \omega_e \omega_m \omega_n) \end{aligned}$$

donde

$$N_{ij}^{lm} = \int \omega_i \omega_j \omega_k \omega_e \omega_m \omega_n dx dy dt$$

Por la cuasi-ortogonalidad de los elementos finitos, la sumación en el índice queda reducida a tres términos:

$$\begin{aligned} \sum_{ijk} & = \sum_{k=n-1}^n \sum_{i,j=0}^{N_x, N_y} \psi_{ijk} (-M_{ij}^{lm} + \lambda N_{ij}^{lm}) T_k^n = \\ & = \sum_{i,j} \psi_{i,j,n-1} (\dots) T_{n-1}^n + \sum_{i,j} \psi_{ij,n} (\dots) T_n^n + \\ & + \sum_{i,j} \psi_{ij,n+1} (\dots) T_{n+1}^n = \dots - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \psi_{ij,n-1} (\dots) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \psi_{ij,n+1} (\dots) = (\tilde{G}, \omega_e \omega_m \omega_n) \end{aligned}$$

según se deduce de los cálculos siguientes (ver figura 8).

$$T_{n+1}^n = \int_0^T \omega'_{n+1} \omega_n dt = 1/2; T_n^n = \int_0^T \omega'_n \omega_n dt = 0;$$

$$T_{n-1}^n = \int_0^T \omega'_{n-1} \omega_n dt = -1/2$$

de forma que se puede despejar $\psi_{ij, n+1}$:

$$\psi_{ij, n+1} = \psi_{ij, n-1} - 2 \sum_{lm} (\tilde{G}, \omega_\rho \omega_m \omega_n) (\dots)^{-1}$$

que es del tipo

$$\psi(t + \Delta t) = \mathcal{O}\psi(t)$$

esto es, se ha resuelto la ecuación de pronóstico, sin más que obtener la inversa de la matriz $(-M_{ij}^{lm} + \lambda N_{ij}^{lm})$ y siempre que se tenga una apreciación de los valores de $(\tilde{G}, \omega_\rho \omega_m \omega_n)$.

El término $(\tilde{G}, \omega_\rho \omega_m \omega_n)$, debido a la no-linealidad de \tilde{G} , que es un jacobino, debe calcularse, bien pensándolo como constante en cada paso de tiempo, bien linealizándolo por algún método. Los detalles pueden consultarse, así como algunas subrutinas de cálculo pertinentes, en García Rendo (1979), Rendo y Hortal (1982).

Con lo que queda expuesto se ha pretendido dar una panorámica actualizada de los diversos métodos más en boga en el cálculo de predicciones meteorológicas, así como de los problemas y dificultades que se plantean, y de sus campos de aplicación.

BIBLIOGRAFIA

Una bibliografía exhaustiva al respecto no es fácil de elaborar. Sin embargo, una ordenación de textos y artículos puede resultar muy recomendable.

A. Obras generales

- BJERKNES, V. (1904), «Das Problem der Wettervorhersage betrachtet vom Standpunkt», *Phys. Met. Z.*
- BURRIDGE, J. (1979), *Numerical Solution of PDE used in numerical forecasting systems*, ECMWF Lect. Note 5.
- CHARNEY, J.; FJORTOFT, R., and VON NEUMANN, J., «Numerical integration of the barotropic vorticity equation», *Tellus*, 2, páginas 235-248.
- COURANT, R., und HILBERT, D. (1924), *Methoden der Mathematischen Physik*. Springer Verlag, Berlin.
- GANDIN, L. (1965), *Objective analysis of meteorological fields*. Israel, Programme for Scientific Translations, Jerusalén.

GAVURIN, M. (1973), *Conferencias sobre los métodos de los cálculos*. Mir, Moscú.

HALTNER, J. (1972), *Numerical Weather Prediction*. Wiley, Nueva York.

MASLOV, P. (1982), *Métodos operacionales*. Mir, Moscú.

RICHARDSON, L. (1922), *Weather Prediction by numerical processes*. Cambridge, University Press.

TIJONOV, A., y SAMARSKI, A. (1972), *Ecuaciones de la Física Matemática*. Mir, Moscú.

B. Sobre el método de diferencias finitas

CHARNEY, J., et al. (1949), «A numerical method for predicting the perturbations of the middle latitude westerlies», *Tellus*, 1, páginas 347-359.

HINKELMANN, K. (1959), *Ein numerisches Experiment mit den primitiven Gleichungen*. The Rossby Memorial, vol. 1.

KREISS, L., et al. (1973), *Methods for the approximate solution of time dependent problems*. GARP publ. 10.

LORENZ, L. (1969), «Three approaches to atmospheric predictability», *Bull. Am. Met. Soc.*, 50, págs. 346-358.

MESSINGER, L., et al. (1976), *Numerical methods in atmospheric models, I*. GARP, publ. 17.

RITCHMYER, L., et al. (1967), *Difference methods for initial value problems*. Wiley, Nueva York.

C. Sobre métodos espectrales

BOURKE, W. (1972), «An efficient one-level primitive equation spectral model...», *Mo. Wea. Rev.*, 9, págs. 683-688.

— (1974), «Multilevel spectral model... Commonwealth, *Met. Res.*, número 683, Melbourne.

JENKINS, J., et al. (1968), *Spectral Analysis and its applications*. Holden Day, San Francisco.

GELFAND, I., et al. (1974), *Commutative Normed Rings*. Chelsea, Nueva York.

NIKIFOROV, N., et al. (1976), *Eléments de la théorie des fonctions spéciales*. Mir, Moscú.

MUJAILOV, W. (1978), *Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales*. Mir, Moscú.

ORSZAG, S. (1970), «Transform Methods for the calculation of vector coupled sums...», *J. Atm. Sci.*, 27, págs. 890-895.

D. Sobre métodos variacionales

CAROLL, R. (1969), *Abstract Methods in P.D.E.* Harper and Row.

FDEZ-VIÑA, J. (1968), «Ciertos problemas abstractos de contorno (OI, II, III)», *Rev. Mat. Hispano Americana*, XXVIII, números 1, 2, 3 y 4.

GARCIA RENDO, J. (1979), *Tratamiento numérico de ciertas ecuaciones de evolución y su aplicación a modelos de predicción numérico del tiempo*. Tesis. Universidad de Murcia, Murcia.

— y HORTAL, M. (1982), «Resolución variacional de las ecuaciones de evolución...», *Rev. Acad. Ci. Ex. Fis. Nat.*, LXXVI, Madrid, págs. 702-708.

GROTHENDIECK, A. (1973), *Topological Vector Spaces*. North Holland.

- LIONS, J. (1961), *Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites*. Springer, Berlin.
- *et al.* (1968), *Les problèmes aux limites non homogènes, I*. Dunod, Paris.
- NECAS, J. (1968), *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*. Masson, Paris.
- SCHAEFFER, H. (1970), *Topological vector spaces*. Springer, Berlin.
- SHOWALTER, R. (1979), *Hilbert space methods for P.D.E.* Pitman, Nueva York.
- STOER, J., *et al.* (1981), *Introduction to numerical analysis*. Springer, Berlin.
- STRANG, J., *et al.* (1973), *An analysis of the finite element method*. Wiley, Nueva York.
- WERNER, H., *et al.* (1981), *Praktische Mathematik, II*. Springer, Berlin.