ALGUNAS CUESTIONES DIDACTICAS ACERCA DE ECUACIONES DIFERENCIALES CON DESFASE

José Miguel Pacheco Castelao
Isabel Fernández de la Nuez
César Rodriguez Mielgo

FACULTAD DE CIENCIAS DEL MAR
UNIVERSIDAD POLITECNICA DE CANARIAS
Las Palmas de Gran Canaria

En un trabajo anterior publicado en este mismo boleti [4]) se efectuaban algunas consideraciones, que se reflejaban en tudio de las curvas solución de una ecuación diferencial de prime con desfase. Sin ánimo de rigor, sino más bien con carácter expos se vuelve aquí sobre aquellas ideas, teniendo en cuenta las posib plicaciones didácticas y metodológicas.

1. Consideraciones pedagógicas.

Los contenidos de los programas de matemáticas tiende lucionar en función de las aplicaciones, cada vez más extendidas, pueden darse a teorías que se podian considerar, hasta hace poco, nas de su aplicabilidad inmediata. El auge de los métodos numéric da vez más asequibles, ha hecho cambiar la mentalidad de profesor lumnos hacia una comprensión más intuitiva, pero no por eso menos da, de las características esenciales de las teorías, dejando de las exigencias de rigor que hasta hace poco constituían el grueso programas. Esto es evidente en los cursos de matemáticas aplicada los cursos preuniversitarios. Hay que suponer que las reformas mente en marcha, tanto en las Enseñanzas Universitarias como las tadas en el 2º ciclo de Bachillerato, permitirán extender este punto de- vista en la realidad diaria del aula.

Con motivo de un curso sobre "Modelos matemáticos" que se -- imparte en 5º curso de la Facultad de Ciencias del Mar en la Universi-- dad Politécnica de Canarias, y que contiene un gran porcentaje de ideas- acerca del estudio cualitativo de ecuaciones diferenciales ordinarias, - se planteó, a la vista de ejemplos extraídos de las Ciencias Naturales,- un breve estudio de las propiedades de las ecuaciones diferenciales con- retraso o desfase. Ello nos movió a redactar esta nota, en la que se en- tremezclan las ideas didácticas con las puramente matemáticas.

La motivación para introducir las ecuaciones diferenciales - con retraso (desfase, retardadas,...) (EDD)es fácil de hallar en ejem- - plos sencillos. Basta observar el efecto de un medicamento, que no es in mediato a su suministro, o analizar el efecto de la aplicación de contro les externos a determinados procesos, etc. Los ejemplos pueden extender- se incluso en niveles elementales. La mayoria de los modelos matemáticos de procesos de la vida real suelen describir la evolución de una magni-- tud que se supone continua y diferenciable (ésta es una de las hipotésis simplificadoras de la modelización), a lo largo del tiempo, esto es, se- estudia el comportamiento de la primera derivada de la magnitud. En fór- mulas, se contemplan ecuaciones del tipo:

$$x' = f(x,t)$$

En la expresión de f intervienen, por lo general, parámetros que deben inferirse de situaciones reales, lo cual es otra área del pro- blema de la modelización. No entraremos aquí en esas ideas. Cuando se in troduce un desfase o retraso, la ecuación anterior deviene en otra del - tipo:

$$x' = g(x,x-T,t)$$

Por regla general, la dependencia explicita de g con x–T sue le ser de carácter empirico, y en las aplicaciones puede tomarse como re lativamente sencilla.

2. La pérdida de unicidad y de otras propiedades.

La característica esencial utilizada en las Ecuaciones Diferenciales radica en la unicidad de la solución del problema de v

iniciales:

$$\left.\begin{aligned} x' &= f(x,t) \\ x(t_o) &= x_o \end{aligned}\right\} \quad \mathrm{I}$$

Esta propiedad, que es de importancia capital en las

ciones, se pierde en las EDD. Un ejemplo sencillo ayudará a comp

Sea la ED $x' = -x$ con la condición inicial $x(0)=1$. La solución ge

$$x = ce^{-t}$$

y el valor de c para la condición dada es c=1, esto es, tenemos:

$$x = e^{-t}$$

como solución única del problema anterior.

Supongamos ahora la ecuación, derivada de la anteri

troducción de un retraso:

$$\left.\begin{aligned} x' &= -x(t-T) \\ x(0) &= 1 \end{aligned}\right\} \mathrm{II}$$

Si se desea llevar a cabo una integración, hay que c

la forma explicita de $x(t-T)$, esto es, el aspecto de la magnitu

intervalo $[-T,0)$. Muy apropiadamente, podemos denominar a este

la "historia" de x en ese intervalo.

Conocida la historia (lo que equivale a decir que

solver el problema II hay que añadir una función arbitraria X(t

$$\left.\begin{aligned} x' &= -x(t-T) \\ x(0) &= 1 \\ x(t) &= X(t) \text{ si } t\in[-T,0) \end{aligned}\right\} \mathrm{III}$$

el problema III puede ser resuelto integrando en $[0,T)$, determi

valor de x en t=T y usándolo como condición inicial para el nue

valo $[T,2T)$ etc. Veámoslo:

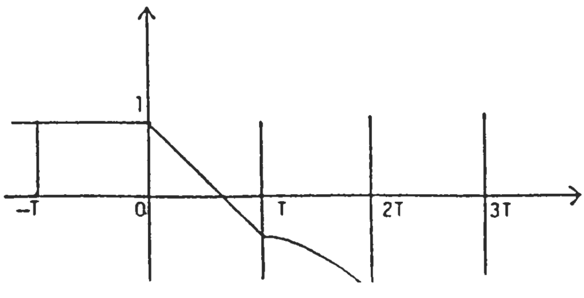

FIGURA.1

En el intervalo $[0,T)$ es $x'= -x(t-T)=-1$, de donde $x=-t+c$, — luego $c=1$. La solución es la representada en la figura, que, si $t=T$, toma el valor $x= -T+1$. Usando ahora estos, en el intervalo siguiente será

$x=c+t-t^2/2$ Ahora el valor de c es $1-2T+T^2/2$ l y se obtiene otro tramo de la curva,etc..

Notamos que en los puntos 0, T, 2T, etc... se puede perder - la diferenciabilidad de la solución, al contrario de lo que ocurre en el problema I.

Si ponemos $T=\pi/2$ es fácil hallar una solución diferenciable- y además expresable en forma compacta para el problema III:

$x= \cos t$, de donde $x'= -\operatorname{sen} t= -\cos(t-\pi/2)= -x(t-\pi/2)$. En este caso la función historia es también $x=\cos t$.

Por tanto, observamos que las características esenciales de- la solución de las EDD dependen no sólo de cómo sea la expresión de la - función $g(x, x-T,t)$, sino también de la historia pasada del proceso. Esto se puede ilustrar en una buena sesión de clase acerca de la cuestión, modificando las funciones $X(t)$ y comparando losresultados, indicando el cúmulo de dificultades que se plantean. Por ejemplo ¿qué condiciones debe satisfacer $X(t)$ para no perder la diferenciabilidad en los puntos — $t=kT$, $k\in\mathbb{N}$?

3. La aparición de oscilaciones.

Hay muchos procesos en los que la evolución de una variable- x depende de las interacciones de la variable consigo misma. En particular, en la dinámica de poblaciones es corriente este fenómeno. Cuando se da este tipo de procesos, la introducción de desfases suede originar oscilaciones. El peligro está en que esas oscilaciones tiendan a amplificarse, destruyendo así el proceso. Vamos a presentar un ejemplo ilustrativo, precisamente el que motivó el trabajo citado al principio.

Si x representa una población con competencia intraespecífica, se puede describir la evolución de x con:

$$x'= ax -bx^2$$

donde a es el coeficiente de crecimiento y b el de decrecimiento debidoa la competencia entre miembros de la pobación. Generalmente esc

$$x' = ax(1-bx/a) = ax(1-x/E)$$

y a la constante b/a la denotamos por 1/E, donde E representa el asintótico de x para $t\to\infty$.

En efecto, haciendo $x' = 0 = ax - bx^2$ obtenemos $x = a/b$ que corresponde al valor de x para el que la población deja de c se estabiliza, luego $E = x_{max}$. Si imponemos una condición inicial la solución, denominada logística, es $x = E/[1+E/x_0-1]e^{-at}$. Cuand independientemente de si $x_0>E$ ó $x_0<E$, x tiende á E, pero sin que intersección entre la curva $x=x(t)$ y la recta $x=E$. (El cálculo e de x es un buen ejercicio de cálculo elemental, así como el anál siguiente).

Introduzcamos ahora un desfase en el término $1-x/E$, a ser $1-x(t-T)/E$. Este desfase puede representar el conflicto ge nal, por ejemplo, en algunas situaciones concretas.

Sea pues, conocida la historia del proceso en el int $[-T,0)$. En cada punto t, el signo de x' depende únicamente de si es mayor o menor que E. Si es mayor, el signo de x' es negativo, crece, y al revés. Luego la evolución de $x(t-T)$ indicará el comp to de x en el futuro:

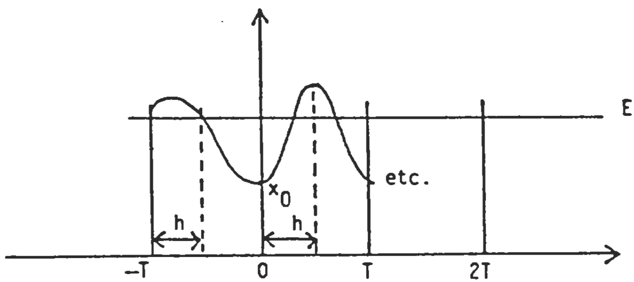

FIGURA.:

Atendiendo al número de veces que $x(t)$ intercepte la $x=E$ en $[T,0)$ se predice el número de ondas que aparecen en el si intervalo, etc. La interpretación del fenómeno puede hacerse de cil: Si el retraso T es grande, en un proceso con historia más o real, es posible que se produzcan ondas en el intervalo $[-T,0)$ qu

HELLEBUST, J.A. (1965). Excretion of some organic compounds by marine phytoplankton. Limnology and Oceanography,10, 192-206.

HELLEBUST, J.A. (1974). Extracellular products. En : Algal physiology and biochemestry.Botanical Monographs,10,Chap, 30, 838-863 (ed.W.D.P. Stewart). Blackwell Scientific, Oxford.

HORNE, A.J., G.E. FOGG and D.J. EAGLE (1969). Studies in situ of the primary production of an area of inshore Atlantic Sea. Journal Marine Biology Assoc., U.K. 49, 393-405.

ITTEKKOT, V. (1982). Variations of dissolved organic matter during a plankton bloom: qualitative aspects, based on sugar and aminoacid analysis. Marine Chemistry, 11, 143-158.

JANNASCH, H. W. (1967). Growth of marine bacteria et limiting concentrations of organic carbon in seawater. Limnology and Oceanography,12,264-271.

JANNASCH, H. W. (1970). Threshold concentrations of carbon sources limiting bacterial growth in seawater. In: Organic matter natural waters, D.W. Hood, editor, Univ. of Alaska. 321-328.

JEFFREY,S.W., and G.F.HUMPHREY (1975). New Spectrophotometric Equations for Determining Chlorophylls a,b,c_1 and c_2 in Highes Plants, Algae and Natural Phytoplankton. Biochem.Phynol. Pflanzen(BPP),Bol.167,5.191-194.

LANCELOT.Ch.,(1984). Extracellular release of small and large molecules by phytoplankton southern bight of the north sea.Estuar.Coast.Sh.Scienc. 18, 65-77.

LLINAS,O.,(1988).Análisis de la distribución de nutrientes en la masa de agua central noratlántica en las Islas Canarias. Tesis Doctoral. Universidad de La Laguna. 252pp

MAGUE, T. H., E. FRIBERG, D. J. HUGHES, I. MORRIS (1980). Extracellular release of carbon by marine phytoplankton a physiological approach. Limnology and Oceanography, 25(2), 262-279.

MOPPER, K., R. DAWSON, R. LIEBZEIT and ITTEKKOT (1980). Monosaccharide spectra of natural waters. Mar.Chem. 10, 55-66.

SENIOR, W., y L. CHEVOLOT, (1991). Studies of dissolved carbohydrates (or carbohydrate-like sustances) in on stuarine environment.Marine Chemistry,32, 19-35.

SHARP, J.H. (1977).Excretion of organic matter by marine phytoplankton: Do healthy cells doit ?. Limnology and Oceanography, 22, (3), 381-399.

SIEBURTH, J.McN., P.J. WILLIA, K.M. JOHNSON, C.M. BURNEY, D.M. LAVOIE, K.R.HINGA, D.A.CARON, F.W. FRENCH, P.W. JOHSON and P.G. DAVIS (1976). Dissolved organic matter and heterotrophic microneuston in the surface microlayers of the North Atlantic. Science, 194, 1415-1418.

SMITH, Jr., W.O. BARBER and S.A. HUNTSMAN (1977). Primary production off the coast of Northwest Africa excretion of dissolved organic matter and :TS heterotrophic uptake. Deep-Sea Research,24, 35-47.

STEEMANN NIELSEN, E. (1952). The use of radioactive carbon (C14) for mearning organic production in the sea.J.Cons., Int. Explor.Mer. 18, 117-140.

THOMAS J.P. (1971). Release of dissolved organic matter from natural populations of marine phytoplankton. Marine Biology, 11, 311-323.

VACCARO, R.F., S.E. HICKS, H.W. JANNASCH and F.G. CAREY (1968). The occurrence and role of glucose in seawater. Limnology and Oceanography, 13, 356.

VIEIRA, A. A. H., and S. MYKLESTAD (1986). Production of extracelluras carbohydrate in cultures of ankistrodemus densus kars.(chlorophyceae). Jour.of Plankton Research, vol.8, n.5,pp. 985-994.

WALSH, G.E. and J. DOUGLASS (1966). Vertical distribution of dissolved carbohydrate in the sargasso sea off Bermuda. Limnology and Oceanography, 11, 406-408.

WILLIAMS, P.J. LeB (1975). Biological and chemical aspects of dissolved organic material in seawater. En: Chemical Oceanography, vol 2, (eds. J.P. Riley and G. Skinow, 2nd Edition). Academic Press. Landa.

WILLIAMS, P.J. LeB and C.S. YENTSCH (1976). An examination of photosynthetic production, excretion of photosynthethic products, and heterotrophic utilitation of dissolved organic compounds with reference to results from coastal subtropical sea. Marine Biology, 35, 31-40.

WANGESKY, P.J. (1978). Production of dissolved organic matter. En: Marine Ecology IV, 115-200 (ed. O.Kime). Wiley, Chichester.