


**UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA**

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

PROGRAMA OFICIAL DE DOCTORADO EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO


TESIS DOCTORAL

# RECURSOS DIDÁCTICOS PARA LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DEL AZAR Y LA PROBABILIDAD EN LA EDUCACIÓN OBLIGATORIA


María Astrid Marrero Santana



Las Palmas de Gran Canaria
2017




**UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA**

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

PROGRAMA OFICIAL DE DOCTORADO EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO


TESIS DOCTORAL

# RECURSOS DIDÁCTICOS PARA LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DEL AZAR Y LA PROBABILIDAD EN LA EDUCACIÓN OBLIGATORIA


María Astrid Marrero Santana



Las Palmas de Gran Canaria, 2017

*A mis padres, hermana y amigas*

AGRADECIMIENTOS

Deseo reconocer mi gratitud a la siguientes personas. A D. Víctor Hernández Suárez por su magnífica y exquisita dirección, sus conocimientos, ayuda, positivismo y labor investigativa en Didáctica de las Matemáticas y que sin su guía este trabajo no hubiera visto la luz. A D. Antonio Suárez Sarmiento por aconsejarme para iniciar este camino y acercarme a D. Víctor Hernández Suárez. A mis padres y hermana por su perseverancia y empuje para que iniciase la labor investigativa que ha hecho posible la realización de este trabajo, como ellos dicen: todo esfuerzo tiene su recompensa. A mis amigas, María, Patricia e Irga, por comprender mis ausencias y animarme a conseguir este objetivo.

# ÍNDICE


| | Página |
|---|---|
| INTRODUCCIÓN | 5 |
| CAPÍTULO 1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN | 9 |
| 1.1 Introducción | 10 |
| 1.2 Justificación del tema | 10 |
| 1.3 Marco teórico | 23 |
| 1.3.1 La actividad matemática y objetos ligados a ella | 23 |
| 1.3.2 Facetas de los objetos matemáticos | 26 |
| 1.3.3 Relaciones entre objetos: Función semiótica | 26 |
| 1.3.4 Configuraciones didácticas | 27 |
| 1.3.5 Criterios de idoneidad didáctica | 28 |
| 1.4 Significado del Azar | 29 |
| 1.5 Significados de la Probabilidad y su problemática filosófica | 31 |
| 1.5.1 Significado intuitivo | 32 |
| 1.5.2 Significado clásico | 32 |
| 1.5.3 Significado frecuencial | 33 |
| 1.5.4 Significado subjetivo | 35 |
| 1.5.5 Significado axiomático | 36 |
| 1.5.6 Síntesis de significados | 43 |
| 1.6 Visión histórica del juego de azar y cálculo de probabilidades | 45 |
| 1.7 La Probabilidad en la Enseñanza Obligatoria | 49 |
| 1.7.1 Introducción | 49 |
| 1.7.2 La Probabilidad en las orientaciones curriculares | 49 |
| 1.7.3 Recomendaciones internacionales | 64 |
| 1.8 Objetivos | 66 |
| 1.9 Hipótesis iniciales | 67 |
| 1.10 Enfoque metodológico y fases de la investigación | 68 |
| CAPÍTULO 2. EL RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO EN NIÑOS Y ADOLESCENTES | 71 |
| 2.1 Introducción | 72 |
| 2.2 Desde el significado clásico de la Probabilidad | 73 |
| 2.2.1 Investigación de Piaget | 73 |
| 2.2.2 Complementos a los estudios de Piaget sobre comparación de probabilidades | 78 |
| 2.3 Desde el significado intuitivo | 82 |
| 2.3.1 Investigación de Fischbein | 82 |
| 2.3.2 Comparación de significados intuitivo y clásico de la Probabilidad | 88 |
| 2.4 Desde el enfoque frecuencial | 90 |
| 2.4.1 Percepción de la aleatoriedad | 91 |
| 2.4.2 Investigaciones apoyadas en la simulación | 94 |
| 2.5 Desde el enfoque subjetivo | 96 |
| 2.5.1 Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico | 96 |
| 2.5.2 Probabilidad condicional e independencia | 99 |
| CAPÍTULO 3. FORMACIÓN DE LOS PROFESORES PARA ENSEÑAR PROBABILIDAD | 102 |

3.1 Introducción 103
3.2 Modelos sobre el conocimiento del profesor 103
3.2.1 Algunos modelos sobre conocimientos del profesor de Matemáticas 104
3.2.2 Principales modelos descritos dentro de la Educación Estadística 110
3.3 Investigaciones sobre el conocimiento del profesor para enseñar Azar y Probabilidad 117
3.3.1 Investigaciones sobre el conocimiento común de Probabilidad 117
3.3.1.1 Investigaciones con futuros profesores de Educación Primaria 118
3.3.1.2 Investigaciones con futuros profesores de matemáticas de Educación Secundaria 121
3.3.1.3 Investigaciones con profesores en ejercicio 123
3.4 Conocimiento de la Probabilidad y su enseñanza 124
3.5 Actitudes y creencias 126
3.6 Experiencias de formación 128
3.7 La Probabilidad en la formación de los participantes en el estudio 132

CAPÍTULO 4. RECURSOS DIDÁCTICOS, GRÁFICOS E INFORMÁTICOS 144
4.1 Introducción 146
4.2 Recursos didácticos gráficos e informáticos 146
4.2.1 Diagrama de árbol 146
4.2.2 Diagrama de Carroll 158
4.2.3 Diagrama de Venn-Euler 162
4.2.4 El aparato de Galton 168
4.2.5 El problema de Monty Hall 171
4.3 Materiales didácticos 178
4.3.1 Introducción 178
4.3.2 Libro de texto 179
4.3.2.1 Antecedentes 180
4.3.2.2 Muestra de textos y criterios de selección 180
4.3.2.3 Método y variables analizadas 182
4.3.2.4 Contenidos de los libros de texto de Educación Primaria 182
4.3.2.5 Contenidos de los libros de texto de Educación Secundaria 186
4.3.2.6 Comparativa 286
4.3.3 Calculadora 292
4.3.3.1 Historia 292
4.3.3.2 La calculadora como recurso didáctico 294
4.3.3.3 Motivos y preocupaciones por el uso de la calculadora 297
4.3.4 Dados 299
4.3.4.1 Tipos de dados 300
4.3.4.2 El dado como recurso didáctico 302
4.3.5 Cartas 305
4.3.5.1 Historia 305
4.3.5.2 Tipos de barajas 307
4.3.5.3 La baraja como recurso didáctico 309
4.3.5.4 Experiencias prácticas en el aula 310
4.3.6 Parchís 314
4.3.6.1 Historia 314
4.3.6.2 Reglas del parchís 315
4.3.6.3 El parchís como recurso didáctico 316

4.3.7 Bingo 317
4.3.7.1 Historia 318
4.3.7.2 Juego del bingo 320
4.3.7.3 Elementos 320
4.3.7.4 Categorías profesionales 322
4.3.7.5 Tipos de bingo 323
4.3.7.6 Probabilidades en el bingo 325
4.3.7.7 Estrategias en el bingo 326
4.3.7.8 El bingo como recurso didáctico 327
4.3.8 Monedas 334
4.3.8.1 Historia 334
4.3.8.2 Partes de la moneda 336
4.3.8.3 La moneda como recurso didáctico 337

CAPÍTULO 5. CONSTRUCCIÓN DEL CUESTIONARIO 343
5.1 Introducción 344
5.2 El estudio de evaluación de Green 345
5.2.1 Análisis conceptual del cuestionario tomado de las investigaciones de Green 347
5.3 Evaluación de intuiciones probabilísticas por Fischbein y Gazit 353
5.3.1 Análisis conceptual del cuestionario tomado de las investigaciones de Fischbein y Gazit 355
5.4 Cuestionario sobre Azar y Probabilidad 358

CAPÍTULO 6: EVALUACIÓN DE CONOCIMIENTOS DE LOS DOCENTES EN EJERCICIO Y FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA Y SECUNDARIA 363
6.1 Introducción 364
6.2 Objetivos e hipótesis de los Estudios 2 y 3 364
6.3 Material 366
6.4 Docentes en ejercicio de Educación Primaria 366
6.4.1 Contexto educativo y muestra 366
6.5 Futuros docentes de Educación Primaria 366
6.5.1 Contexto educativo y muestra de futuros docentes 366
6.6 Docentes en ejercicio de Educación Secundaria Obligatoria 367
6.6.1 Contexto educativo y muestra 367
6.7 Futuros docentes de Educación Secundaria Obligatoria 367
6.7.1 Contexto educativo y muestra de futuros docentes 367
6.8 Análisis de datos estadísticos 368
6.8.1 Análisis 368
6.8.2 Comparativa 375
6.8.2.1 Comparativa entre profesores en ejercicio 376
6.8.2.2 Comparativa entre los futuros profesores 379
6.8.2.3 Comparativa entre profesores en ejercicio y futuros profesores de Educación Primaria 382
6.8.2.4 Comparativa entre profesores en ejercicio y futuros profesores de Educación Secundaria 385
6.8.2.5 Comparativa con la Tesis de la Doctora María Jesús Cañizares 388
6.8.3 Tipología de errores 389

CAPÍTULO 7: LABAPC. LABORATORIO BÁSICO DE AZAR, PROBABILIDAD Y COMBINATORIA 424
7.1 Introducción 425
7.2 Justificación de su creación 426
7.3 LABAPC 427
7.3.1 Objetivos perseguidos por LABAPC 427
7.4 Motivos de la nomenclatura de LABAPC 429
7.4.1 ¿Por qué "Laboratorio"? 429
7.4.2 ¿Por qué "Básico"? 430
7.4.3 ¿Por qué "Combinatoria"? 430
7.5 Estructura de LABAPC 431
7.5.1 Azar y Probabilidad 433
7.5.2 Análisis de problemas 497
7.5.3 Combinatoria 539
7.5.4 Equipamiento experimental 576
7.6 Consideraciones metodológico-didácticas 626
7.7 Experiencia de utilización con alumnos 627

CAPÍTULO 8: CONCLUSIONES 632
8.1 Introducción 633
8.2 Conclusiones respecto a los objetivos generales del trabajo 634
8.3 Aportaciones y limitaciones del estudio 636
8.4 Líneas de investigación futuras 639

BIBLIOGRAFÍA 640

# INTRODUCCIÓN

El Azar y la Probabilidad se han ido consolidando como una parte fundamental de la Educación Matemática. A lo largo del tiempo distintos documentos, por ejemplo, *Las matemáticas en primaria y en secundaria en la década de los 90* (ICMI, 1986), resaltan la necesidad de introducirla en el período escolar. Así como, en el *Informe Cockcroft* (MEC, 1985) se menciona que la Estadística es en esencia una materia práctica, haciendo énfasis en la importancia de la Probabilidad en los hechos de la vida diaria, en la interpretación de información que aparece en los medios de comunicación y en los juegos sencillos de azar. Como consecuencia, en España, siguiendo la tendencia internacional, se ha incluido, recientemente, tanto en los Decretos de Enseñanzas Mínimas como en las orientaciones curriculares la enseñanza de la Probabilidad desde la Educación Primaria y que se intensifica en todos los ciclos. Es por ello el interés de investigar sobre los conocimientos y creencias de los profesores que son responsables de esta enseñanza.

Siendo el Azar y la Probabilidad un tema relativamente nuevo en el currículo, parte de los futuros profesores de Educación que ingresan en las Facultades de Educación no han recibido una formación suficiente en Azar y Probabilidad. Ante esta situación, instituciones internacionales como IASE (International Association for Statistical Education) e ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) han priorizado la investigación sobre la formación probabilística de los profesores (Batanero, Burrill, Reading, 2011).

Con objeto de contribuir a esta problemática, nuestro trabajo aborda los recursos didácticos para la enseñanza y el aprendizaje del Azar y la Probabilidad en la Educación Obligatoria, por varios motivos. La Probabilidad se incluye explícitamente como tema a tratar en los Decretos de Enseñanzas Mínimas de Educación Primaria, Secundaria y Bachillerato y es parte de las asignaturas de estadística en todas las carreras universitarias. Es también importante en el diagnóstico y evaluación, que forma parte de las tareas profesionales del profesor.

Todas estas razones nos han llevado a interesarnos por la formación de los profesores y a llevar a cabo una serie de trabajos exploratorios relacionados entre sí, y con una temática en común. Más concretamente, abordamos una serie de trabajos relacionados con la evaluación de las necesidades formativas de los profesores de los

niveles de primaria y secundaria en relación al Azar y la Probabilidad y los objetos matemáticos que con ella se relacionan, tales como la regla de Laplace, la comparación de probabilidades, probabilidad compuesta, combinatoria, independencia o dependencia. Cada estudio tiene sus propios objetivos, hipótesis y metodología, aunque todos comparten el mismo marco teórico. La Memoria se ha organizado en los siguientes capítulos:

En el *Capítulo 1* se describe y justifica el problema de investigación, presentando también los elementos del enfoque ontosemiótico, propuesto para la Didáctica de la Matemática por Godino y sus colaboradores, que se utilizan en el trabajo. Seguidamente se presenta un análisis de los significados de la Probabilidad, discutiendo su problemática filosófica y su adecuación en el currículo de primaria y secundaria. Con ello se formulan los objetivos e hipótesis del trabajo, así como un resumen de la forma en que se articulan las diversas fases de la investigación y los rasgos generales de la metodología empleada.

En el *Capítulo 2* se sintetizan las investigaciones más relevantes sobre comprensión de la Probabilidad, respecto a los significados intuitivo, clásico, frecuencial y subjetivo. Para comprender mejor esta síntesis, hay que tener en cuenta la naturaleza del razonamiento probabilístico presentando las investigaciones asociadas al significado clásico, concretamente la de Piaget; seguidamente se exponen las investigaciones relacionadas con el significado intuitivo, empezando por Fischbein, las asociadas al significado frecuencial y por último las relacionadas con el significado subjetivo, ya que en el último curso de Secundaria se trabaja la probabilidad condicionada.

En el *Capítulo 3* se resumen las principales investigaciones sobre conocimiento y desarrollo profesional de los profesores de Matemáticas para enseñar Probabilidad, empezando con una breve descripción de algunos modelos que describen los componentes del conocimiento del profesor de Matemáticas en el campo de la Estadística. Posteriormente se desglosan los estudios relacionados con algunos componentes de estos modelos: conocimientos probabilísticos de los profesores, conocimiento didáctico necesario para su enseñanza, conocimiento del contenido y los estudiantes. También se resumen las investigaciones realizadas sobre aspectos afectivos que influyen en la labor del profesor (actitudes y creencias) y algunas experiencias de formación de docentes para la enseñanza de la Probabilidad.

En el *Capítulo 4*, se describe el *Estudio 1*, ante la preocupación de los docentes de Educación Secundaria acerca de la pasividad y la falta de estímulo de los alumnos ante el aprendizaje de las materias de Ciencias en general, se buscan metodologías innovadoras alternativas que replanteen los métodos tradicionales suponiendo la elaboración de recursos didácticos que fomenten la participación y la creatividad, tanto del alumnado como del profesorado.

En el *Capítulo 5* se describen las distintas investigaciones en las que se ha basado la construcción de los distintos ítems del cuestionario utilizado para la evaluación del conocimiento matemático de las muestras de profesores en ejercicio y futuros docentes de la Educación Básica. Para ello nos hemos apoyado en los trabajos de Green, Fischbein y Gazit y Godino, Batanero y Cañizares.

En el *Capítulo 6* se describen los *Estudios 2 y 3*, orientados a la evaluación del conocimiento matemático de los futuros profesores de Educación Primaria y Secundaria. Para ello se construye el Cuestionario del *Capítulo 5* que evalúa el conocimiento común y ampliado y del Azar y la Probabilidad respecto a los contenidos establecidos en el currículo español. La aplicación del cuestionario a una muestra de 158 profesores en ejercicio y futuros profesores, así como el análisis detallado de sus respuestas permite caracterizar los posibles sesgos.

En el *Capítulo 7* se describe el *Estudio 4*, analizando el recurso didáctico, en forma de página web, LABAPC (Laboratorio Básico de Azar, Probabilidad y Combinatoria). Se indica la justificación de su creación, el porqué de su nomenclatura, así como las distintas aplicaciones con las que cuenta dicho recurso. También se describe una experiencia realizada con alumnos.

El *Capítulo 8* contiene las principales conclusiones. Por un lado, se justifica el cumplimiento de los objetivos fijados para el trabajo. Entre las aportaciones del estudio destacamos el análisis curricular, la descripción del conocimiento matemático para enseñar Probabilidad, el cuestionario aportado y la descripción detallada de las respuestas de los participantes. Todo ello proporciona una información valiosa para los investigadores y los formadores de profesores con respecto a la enseñanza de la Probabilidad a nivel de Educación Primaria y Secundaria. Resultados parciales se han dado a conocer a través de diversas publicaciones que se detallan a lo largo de la memoria.

La memoria finaliza con las referencias y seis anexos al trabajo. El primero es PISA 2012, que describe la prueba PISA en competencia matemática. Un segundo

anexo describe los contenidos sobre Estadística y Probabilidad en los Decretos de Enseñanzas Mínimas. El tercero es el NCTM-SAEM Thales. Principios y Estándares para la Educación Matemática, que describe las recomendaciones internacionales. El cuarto anexo incluye una ampliación de los recursos didácticos empleados en el aula para el proceso de enseñanza y aprendizaje del Azar y la Probabilidad. El quinto anexo describe el Cuestionario para el conocimiento matemático ampliado del profesor de la Educación Obligatoria. El sexto anexo incluye los Proyectos docentes de las asignaturas de Estadística de los participantes del cuestionario.

# CAPÍTULO 1

# EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN


1.1 Introducción
1.2 Justificación del tema
1.3 Marco teórico
  1.3.1 La actividad matemática y objetos ligados a ella
  1.3.2 Facetas de los objetos matemáticos
  1.3.3 Relaciones entre objetos: Función semiótica
  1.3.4 Configuraciones didácticas
  1.3.5 Criterios de idoneidad didáctica
1.4 Significado del Azar
1.5 Significados de la Probabilidad y su problemática filosófica
  1.5.1 Significado intuitivo
  1.5.2 Significado clásico
  1.5.3 Significado frecuencial
  1.5.4 Significado subjetivo
  1.5.5 Significado axiomático
  1.5.6 Síntesis de significados
1.6 Visión histórica del juego de azar y cálculo de probabilidades
1.7 La Probabilidad en la enseñanza obligatoria
  1.7.1 Introducción
  1.7.2 La Probabilidad en las orientaciones curriculares
  1.7.3 Recomendaciones internacionales
1.8 Objetivos
1.9 Hipótesis iniciales
1.10 Enfoque metodológico y fases de la investigación

## 1.1 INTRODUCCIÓN

Este capítulo se dedica a la descripción del problema de investigación, relacionado con los recursos didácticos para la enseñanza y el aprendizaje del Azar y la Probabilidad en la Educación Obligatoria.

En primer lugar, se resaltan las modificaciones recientes en los currículos de Educación Primaria, que introducen ideas del Azar y la Probabilidad desde los seis años. Sin embargo, puesto que este tema es nuevo en este nivel educativo, se producen implicaciones en la formación de los profesores, para responder a los retos que imponen estas nuevas directrices curriculares; también se destacan los malos resultados obtenidos en los últimos informes PISA, concretamente en el año 2012, en la competencia matemática.

Seguidamente se presentan algunos elementos del enfoque ontosemiótico (EOS) para la Didáctica de la Matemática, que es el marco teórico utilizado para fundamentar la investigación: en concreto, utilizaremos en este trabajo las ideas de práctica matemática y objetos ligados a las prácticas, función semiótica e idoneidad didáctica. Las ideas de práctica y objetos servirán para analizar los objetos matemáticos relacionados con la Probabilidad, con el fin de describir un significado de referencia de dicho concepto en nuestro trabajo. A partir de la función semiótica determinaremos algunos conflictos semióticos relacionados con el Azar y la Probabilidad. Usaremos el concepto de "idoneidad didáctica" para valorar los recursos educativos útiles en la formación de profesores sobre este tema.

Posteriormente analizamos los diferentes significados del Azar y la Probabilidad de interés para nuestro estudio, por su presencia en la Educación Primaria y Secundaria. A continuación se realiza una revisión, a lo largo del tiempo, acerca de los juegos de azar y el cálculo de probabilidades.

El capítulo se finaliza exponiendo los objetivos del trabajo y haciendo un breve resumen de la organización del mismo y de las características metodológicas de los diversos estudios que lo componen.

## 1.2 JUSTIFICACIÓN DEL TEMA

La justificación del interés de la investigación se basa, en primer lugar, en la novedad que supone a los profesores la inclusión del Azar y la Probabilidad en todos los cursos de la Educación Primaria y, como consecuencia, en la necesidad de preparación

de los profesores de este nivel educativo, así como la falta de conocimiento y la escasez de empleo de recursos didácticos para la enseñanza y aprendizaje de los mismos, ante la gran variedad existente por parte de los profesores, tanto de Educación Primaria como de Secundaria. También son de interés para nuestra investigación los malos resultados obtenidos, por parte del alumnado de 15 años, en el último informe PISA del año 2012 en la competencia matemática.

**Cambios recientes en el currículo**

Desde hace más de cuarenta años, la Probabilidad se incluye en los currículos de Secundaria, sólo recientemente se ha adelantado a la Educación Primaria (NCTM, 2000; MEC, 2006 a, b; Consejería de Educación, 2007 a, b, 2014, 2015). Hay también un cambio de enfoque, que había sido, en general, axiomático y clásico, privilegiando la aplicación de la combinatoria y la demostración matemática de las propiedades de la Probabilidad. Dicho enfoque no ayudaba a desarrollar el razonamiento probabilístico ni la intuición sobre la Probabilidad.

El análisis curricular en España que se muestra actualmente pretende el desarrollo del razonamiento de los niños, además de la capacidad de cálculo, con actividades como la experimentación o la simulación, la formulación de predicciones y conclusiones basadas en los datos. Esto implica un aumento del tiempo dedicado al enfoque frecuencial de la Probabilidad. La inclusión de la Probabilidad en la Educación Primaria es producto de la influencia de diversas investigaciones (Shulman, 1986a).

**Formación de los profesores**

El éxito de los nuevos programas depende en gran parte de la formación de los profesores, que tienen un papel esencial al interpretar el currículo y adaptarlo a las circunstancias específicas de sus estudiantes (Batanero y Díaz, 2012).

La investigación sobre conocimiento y desarrollo profesional del profesor de Matemáticas sigue siendo un área de investigación en desarrollo. Pocas de estas investigaciones se centran en la Probabilidad y los resultados de las existentes indican que algunos profesores mantienen inconscientemente una variedad de dificultades y errores en Probabilidad que podrían transmitir a sus estudiantes (Batanero, Biehler, Engel, Maxara y Vogel, 2005; Ortiz, Mohamed, Batanero, Serrano y Rodríguez, 2006; Contreras, 2011) en la que la mayoría de dichos trabajos se han centrado en aspectos particulares de la Probabilidad.

La importancia de la formación de profesores para enseñar estadística se resaltó en el estudio conjunto de ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) e IASE (International Association for Statistical Education) (Batanero, Burrill y Reading, 2011). En el caso de España, los nuevos planes de estudio ofrecen la posibilidad de mejorar la formación de los futuros profesores al proporcionar un mayor número de créditos dedicados a la Matemática y su Didáctica.

**Informe PISA 2012**

El informe PISA 2012 (MEC, 2013) (Programme for International Student Assessment) evalúa los conocimientos y destrezas de los alumnos de 15 años en las áreas de Matemáticas, lectura y ciencias, siendo la primera el área principal con una duración de una hora y veinte minutos y utilizando como instrumento un cuestionario cumplimentado por el alumnado y por los directores de los centros educativos. Dicha evaluación se realiza cada tres años, su comienzo fue en el año 2000, en la que participan distintos países de todo el mundo, más que ser una evaluación del currículo, intenta reflejar las Matemáticas que los alumnos han tenido probablemente la oportunidad de aprender hasta los 15 años de edad. Para conocer lo que estos jóvenes han aprendido, se realizaron análisis de una muestra de estándares matemáticos de once países (nueve países de la OCDE(Australia [Nueva Gales del Sur], Bélgica [Comunidad flamenca], Canadá [Alberta], Corea, Finlandia, Irlanda, Japón, Nueva Zelanda y Reino unido) y seis países con un alto rendimiento (Bélgica [Comunidad flamenca], Canadá [Alberta], China-Taipei, Corea, Finlandia y Singapur)), con el fin de determinar lo que se enseña en las clases de Matemáticas de todo el mundo y también lo que los países creen que es una preparación realista e importante para los alumnos, a medida que se aproxima su incorporación al mercado laboral o su admisión en un centro de educación superior.

El hecho de que el área de Matemáticas haya pasado a ser la principal de conocimiento ofrece la oportunidad de llevar a cabo comparaciones del rendimiento del alumnado a lo largo del tiempo, pero también es una ocasión de volver a examinar lo evaluado a la luz de los cambios ocurridos en este campo y en las políticas y prácticas de enseñanza. Asimismo, en 2012, los países cuentan con una nueva evaluación opcional de las Matemáticas en soporte electrónico, puesto que las preguntas de PISA reflejan problemas que surgen en contextos personales, profesionales, sociales y

científicos; el empleo de la calculadora aparece en todos estos escenarios y puede resultar útil en algunas de las preguntas de PISA.

En el año 2012, PISA contó con una población mundial de 28.000.000 de jóvenes de 15 años de edad, en la que se incluían 373.691 españoles. Los estudiantes españoles evaluados fueron 25.313, representando el 6,7% mundial.

| | Muestra | Población | |
|---|---|---|---|
| | Estudiantes evaluados | Estudiantes de 15 años | Porcentaje mundial |
| España | 25.313 | 373.691 | 6,7% |
| OCDE (34 países) | 295.416 | 13.142.800 | 2,3% |
| Total participantes (65 países) | 510.000 | 28.000.000 | 1,8% |

Tabla 1.1 Muestra del estudio PISA 2012

A continuación se muestran los resultados obtenidos en Matemáticas en PISA 2012, en la que la Comunidad Autónoma de Canarias no participó.

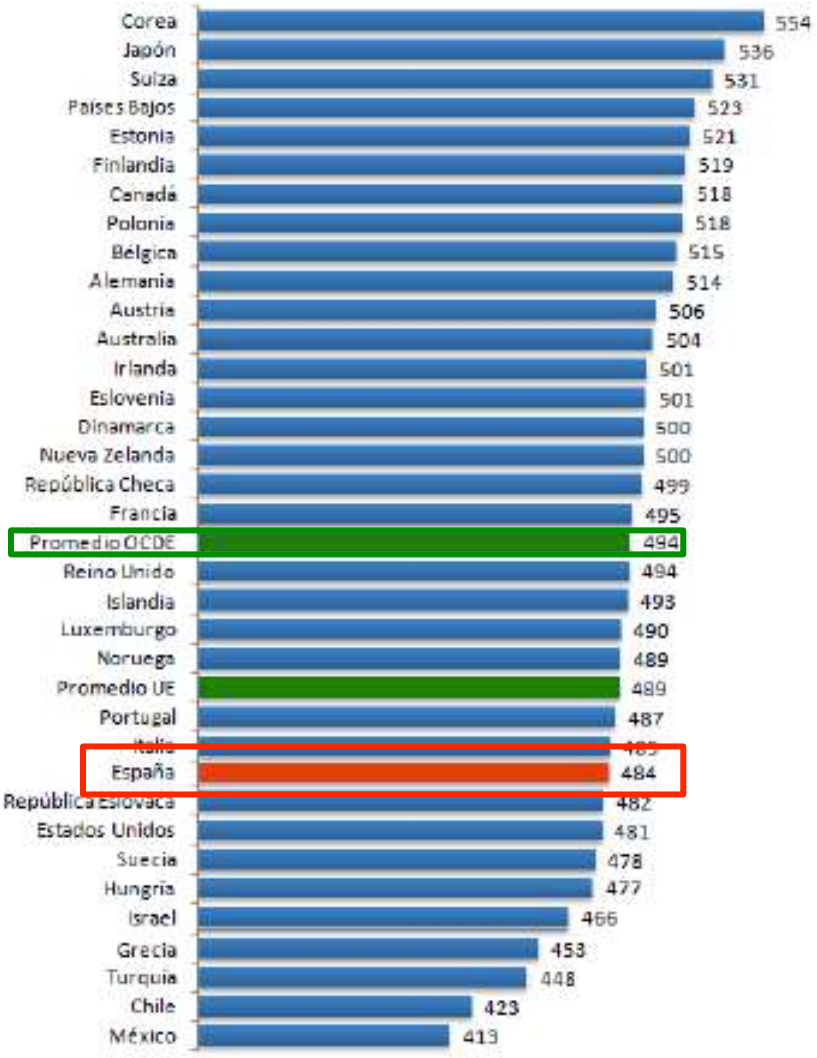


Figura 1.1 Posición de España entre los 34 países de la OCDE

España obtiene 484 puntos en Matemáticas, 10 puntos menos que el promedio de la OCDE, alcanzando la posición 25.

Como indica la OCDE, la comparación de resultados se realiza con ediciones anteriores de PISA en las que Matemáticas ha sido el área central de evaluación. En el caso de España no se producen cambios significativos en los resultados a lo largo del tiempo, tal y como se refleja en el siguiente diagrama de barras.

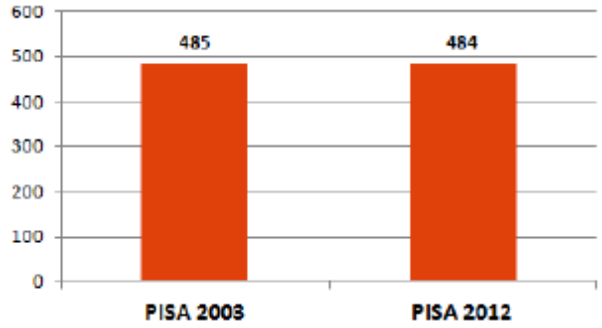
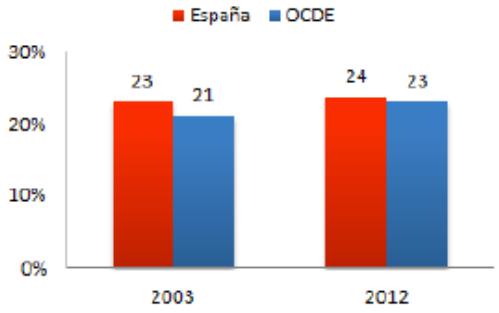
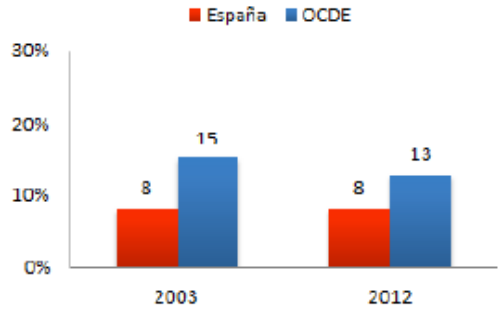



Figura 1.2 Evolución del rendimiento en Matemáticas en España

La proporción de alumnos situados en los niveles bajos de rendimiento es similar al de la OCDE. La diferencia se encuentra en la escasa presencia de estudiantes de nuestro país en los niveles altos.




Porcentaje de alumnos rezagados (Niveles <1 y 1)




Porcentaje de alumnos excelentes (Niveles 5 y 6)

Figura 1.3 Porcentajes de alumnos rezagados y excelentes

El porcentaje de alumnos en los niveles bajos y el porcentaje de alumnos en los niveles altos no experimentan cambios significativos en PISA 2012 (MEC, 2013).

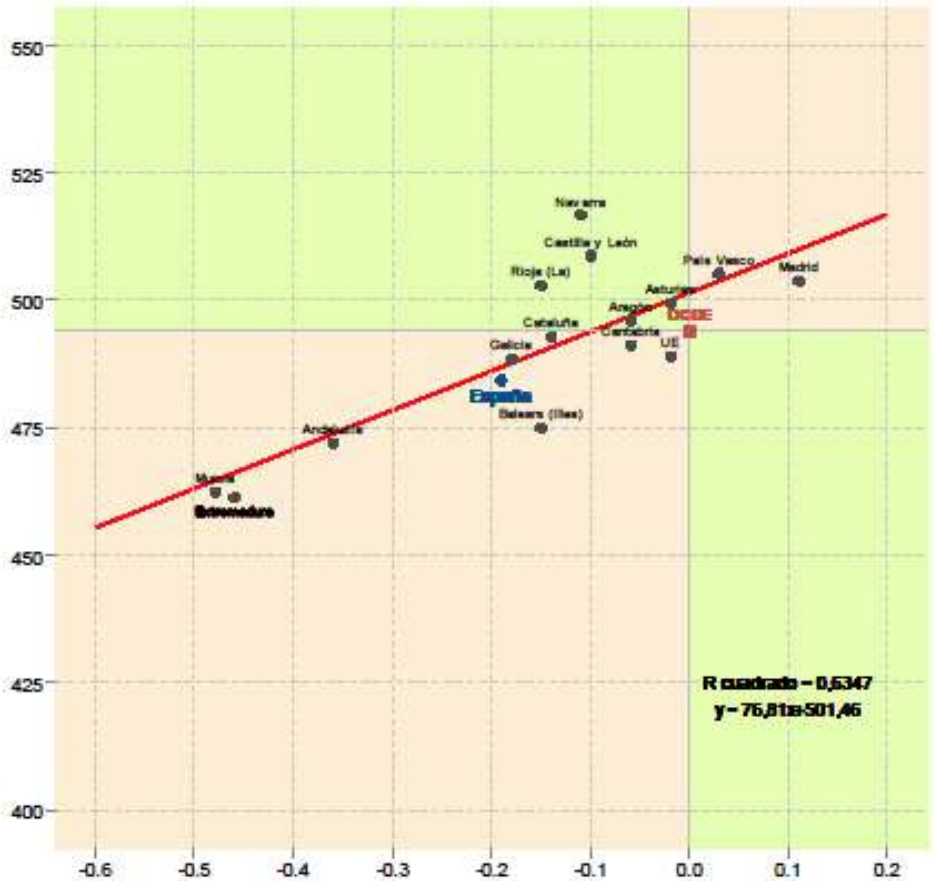



Figura 1.4 Relación entre la puntuación en Matemáticas de las CCAA y su ESCS (Impacto del entorno socioeconómico y cultural)

Si observamos la competencia matemática por comunidades autónomas, existe alrededor de 55 puntos de diferencia entre las comunidades españolas con un mayor y menor rendimiento educativo en Matemáticas, equivalente a un curso y medio de escolarización, más del 85% de las diferencias, se debe a diferencias socio-económicas y no al modelo educativo.

Modelo de preguntas

A continuación se muestran las preguntas realizadas en la prueba de PISA 2003, (MEC, 2005) en el contenido de incertidumbre junto con la forma de puntuar la respuesta y el porcentaje que alcanzó España. Así podremos observar claramente como en la mayoría de las respuestas correctas el porcentaje de España está por debajo del OCDE.

## Preguntas

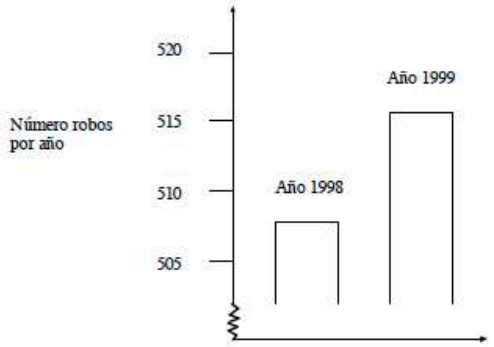
# Robos

Pregunta 7: ROBOS

M179Q01-01 02 03 04 11 12 21 22 23 99

Un presentador de TV mostró este gráfico y dijo:

"El gráfico muestra que hay un enorme aumento del número de robos comparando 1998 con 1999".




¿Consideras que la afirmación del presentador es una interpretación razonable del gráfico? Da una explicación que fundamente tu respuesta.

## Respuestas

Robos: pregunta 7

| | Puntuación parcial | Aciertos | % |
|---|---|---|---|
| Subescala | Incertidumbre | OCDE | 28,1 |
| Situación | Pública | España | 31,3 |
| Competencia | Conexiones | Castilla y León | 35,6 |
| Dificultad | 577 (nivel 4) | Cataluña | 26,6 |
| | | País Vasco | 30,5 |

| | Máxima puntuación | Aciertos | % |
|---|---|---|---|
| Subescala | Incertidumbre | OCDE | 15,4 |
| Situación | Pública | España | 9,9 |
| Competencia | Conexiones | Castilla y León | 8,3 |
| Dificultad | 694 (nivel 6) | Cataluña | 16,7 |
| | | País Vasco | 8,5 |

Puntuaciones:

[Nota: La utilización de la palabra NO en estos códigos incluye todas las afirmaciones que indican que la interpretación del gráfico NO es razonable. SÍ incluye todas las afirmaciones que indican que la interpretación es razonable. Por favor, evalúe si la respuesta del estudiante indica que la interpretación del gráfico es razonable o no razonable, y no tome simplemente las palabras "SÍ" o "NO" como criterio para los códigos.]

Máxima puntuación

Código 21: No, no razonable. Se centra en el hecho de que sólo se muestra una pequeña parte del gráfico.
- No razonable. Debería mostrarse el gráfico entero.
- No pienso que sea una interpretación razonable del gráfico porque si se mostrase el gráfico entero se vería que sólo hay un ligero incremento de los robos.
- No, porque ha utilizado la parte alta del gráfico y si se mirase el gráfico completo desde 0 a 520, no habría crecido tanto.
- No, porque el gráfico hace que parezca que ha habido un incremento enorme pero cuando se mira a las cifras se ve que no hay mucho incremento.

Código 22: No, no razonable. Contiene argumentaciones correctas en términos de proporción o porcentaje de incremento.
- No, no razonable. 10 no es un incremento enorme en comparación con un total de 500.
- No, no razonable. En términos de porcentaje, el incremento es solo de aproximadamente el 2%.
- No. 8 robos más son un 1,5% de incremento. ¡No mucho en mi opinión!
- No, sólo 8 o 9 más para este año. En comparación con 507, no es un numero muy grande.

Código 23: Hacen falta datos de tendencias antes de que se pueda hacer un juicio.
- No se puede decir si el incremento es enorme o no. Si en 1997, el número de robos es el mismo que en 1998, entonces se puede decir que hay un incremento enorme en 1999.
- No hay manera de saber como de "enorme" es debido a que, por lo menos, necesitas dos cambios para pensar que uno es enorme y otro pequeño.

Puntuación parcial

Código 11: No, no razonable, aunque la explicación carece de detalle.
- Se centra SÓLO en un incremento dado por el numero exacto de robos, pero no lo compara con el total.
- No razonable. Se incrementa aproximadamente en 10 robos. La palabra "enorme" no explica la realidad del aumento del numero de robos. El incremento fue solo de aproximadamente 10 y yo no lo llamaría "enorme".
- De 508 a 515 no es un aumento grande.
- No, porque 8 o 9 no es un aumento grande.
- De 507 a 515 hay un aumento, pero no grande.

[Téngase en cuenta que, como la escala del gráfico no es demasiado clara, debe aceptarse entre 5 y 15 como incremento del número exacto de robos.]

Código 12: No, no razonable, con el método correcto pero con errores computacionales menores.
- Método y conclusión correctos pero el porcentaje calculado es 0,03%.

Ninguna puntuación

Código 01: No, sin explicación o con explicación insuficiente o incorrecta.
- No, no estoy de acuerdo.
- El periodista no debería haber utilizado la palabra "enorme".
- No, no es razonable. A los periodistas les gusta siempre exagerar.

Código 02: Sí, se centra en la apariencia del gráfico y menciona que el número de robos se duplicó.
- Sí, el gráfico duplica su altura.
- Sí, el número de robos casi se ha duplicado.

Código 03: Sí, sin explicación, o con otras explicaciones diferentes de las del Código 02.

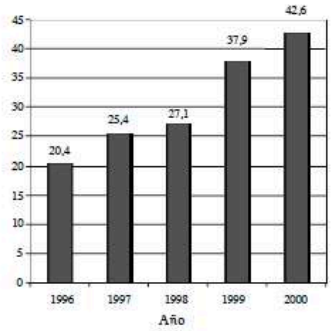
Código 04: Otras respuestas.

Código 99: Sin respuesta.

# Exportaciones

Los siguientes diagramas muestran información sobre las exportaciones de Zedlandia, un país cuya moneda es el zed.

Total de las exportaciones anuales de Zedlandia en millones de zeds, 1996-2000




Distribución de las exportaciones de Zedlandia en el año 2000




Pregunta 14: EXPORTACIONES

M438Q01 - 0 1 9

¿Cuál fue el valor total (en millones de zeds) de las exportaciones de Zedlandia en 1998?

Respuesta: .....

Pregunta 15: EXPORTACIONES

M438Q02

¿Cuál fue el valor de las exportaciones de zumo de fruta de Zedlandia en el año 2000?

A 1,8 millones de zeds.
B 2,3 millones de zeds.
C 2,4 millones de zeds.
D 3,4 millones de zeds.
E 3,8 millones de zeds.

Exportaciones: pregunta 14

| M438Q01 | | Aciertos | % |
|---|---|---|---|
| Subescala | Incertidumbre | OCDE | 78,7 |
| Situaci□n | P□blica | Espa□a | 82,6 |
| Competencia | Reproducci□n | Castilla y Le□n | 85,4 |
| Dificultad | 427 (nivel 2) | Catalu□a | 83,8 |
| | | Pa□s Vasco | 84,6 |

Puntuaciones:

Máxima puntuación
Código 1: 27,1 millones de zeds o 27.100.000 zeds o 27,1 (no es necesario especificar la unidad).
Ninguna puntuación
Código 0: Otras respuestas.
Código 9: Sin respuesta.

Exportaciones: pregunta 15

| M438Q02 | | Aciertos | % |
|---|---|---|---|
| Subescala | Incertidumbre | OCDE | 48,3 |
| Situaci□n | P□blica | Espa□a | 41,9 |
| Competencia | Conexiones | Castilla y Le□n | 47,3 |
| Dificultad | 565 (nivel 4) | Catalu□a | 42,9 |
| | | Pa□s Vasco | 46,6 |

Puntuaciones:

Máxima puntuación
Código 1: E 3,8 millones de zeds.

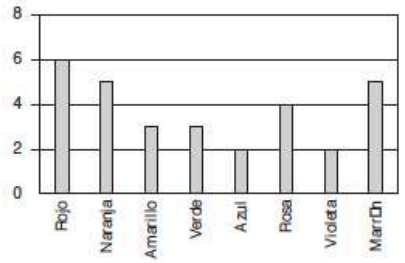
Ninguna puntuación
Código 0: Otras respuestas.
Código 9: Sin respuesta.

# Caramelos de colores

Pregunta 16: CARAMELOS DE COLORES

M467Q01

La madre de Roberto le deja coger un caramelo de una bolsa. Él no puede ver los caramelos. El número de caramelos de cada color que hay en la bolsa se muestra en el siguiente gráfico.




¿Cuál es la probabilidad de que Roberto coja un caramelo rojo?

A 10%
B 20%
C 25%
D 50%

Caramelos de colores: pregunta 1

| M467Q01 | | Aciertos | % |
|---|---|---|---|
| Subescala | Incertidumbre | OCDE | 50,2 |
| Situación | Personal | España | 42,1 |
| Competencia | Reproducción | Castilla y León | 45,8 |
| Dificultad | 549 (nivel 4) | Cataluña | 45,2 |
| | | País Vasco | 49,6 |

Puntuaciones:

Máxima puntuación
Código 1: B 20%.

Ninguna puntuación
Código 0: Otras respuestas.
Código 9: Sin respuesta.

# Examen de Ciencias

Pregunta 17: EXAMEN DE CIENCIAS

M468Q01

En el colegio de Irene, su profesora de ciencias les hace exámenes que se puntúan de 0 a 100. Irene tiene una media de 60 puntos de sus primeros cuatro exámenes de ciencias. En el quinto examen sacó 80 puntos.

¿Cuál es la media de las notas de Irene en ciencias tras los cinco exámenes?

Media: .....

Examen de Ciencias: pregunta 17

| M468Q01 | | Aciertos | % |
|---|---|---|---|
| Subescala | Incertidumbre | OCDE | 46,8 |
| Situación | Educativa | España | 30,4 |
| Competencia | Reproducción | Castilla y León | 29,1 |
| Dificultad | 556 (nivel 4) | Cataluña | 41,3 |
| | | País Vasco | 29,2 |

Puntuaciones:

Máxima puntuación
Código 1: 64.

Ninguna puntuación
Código 0: Otras respuestas.
Código 9: Sin respuesta.

# Basura

## Pregunta 20: BASURA

M505Q01 - 0 1 9

Para hacer un trabajo en casa sobre el medio ambiente, unos estudiantes han recogido información sobre el tiempo de descomposición de varios tipos de basura que la gente desecha:

| Tipos de Basura | Tiempos de descomposici□n |
|---|---|
| Piel de pl□tano | 1-3 a□os |
| Piel de naranja | 1-3 a□os |
| Cajas de cart□n | 0,5 a□os |
| Chicles | 20-25 a□os |
| Peri□dicos | Unos pocos d□as |
| Vasos de pl□stico | M□s de 100 a□os |

Un estudiante piensa en cómo representar los resultados mediante un diagrama de barras.

Da una razón de por qué no resulta adecuado un diagrama de barras para representar estos datos.

Basura: pregunta 20

| M505Q01 | | Aciertos | % |
|---|---|---|---|
| Subescala | Incertidumbre | OCDE | 51,6 |
| Situaci□n | Científica | Espa□a | 54,7 |
| Competencia | Reflexi□n | Castilla y Le□n | 67,6 |
| Dificultad | 551 (nivel 4) | Catalu□a | 45,5 |
| | | Pa□s Vasco | 56,4 |

### Puntuaciones:

Máxima puntuación

Código 1: Razones basadas en la gran variación de los datos.

- La diferencia en la longitud de las barras en el diagrama de barras sería demasiado grande.
- Si haces una barra de 10 centímetros de longitud para el plástico, la de las cajas de cartón sería de 0,05 centímetros.

O BIEN

La razón se centra en la variabilidad de los datos de algunas categorías.

- La longitud de la barra para los vasos de plástico es indeterminada.
- No puedes hacer una barra para 1-3 años o una barra para 20-25 años.

Ninguna puntuación

Código 0: Otras respuestas.

- Porque no valdrá.
- Es mejor un pictograma.
- No puedes verificar la información.
- Porque los números de la tabla son sólo aproximaciones.

Código 9: Sin respuesta.

# Terremoto

Pregunta 21: TERREMOTO

M559Q01

Se emitió un documental sobre terremotos y la frecuencia con que éstos ocurren. El documental incluía un debate sobre la posibilidad de predecir los terremotos.

Un geólogo dijo: En los próximos veinte años, la posibilidad de que ocurra un terremoto en la ciudad de Zed es dos de tres.

¿Cuál de las siguientes opciones refleja mejor el significado de la afirmación del geólogo?

A $\frac{2}{3} \times 20 = 13{,}3$, por lo que entre 13 y 14 años a partir de ahora habrá un terremoto en la Ciudad de Zed.

B $\frac{2}{3}$ es más que $\frac{1}{2}$, por lo que se puede estar seguro de que habrá un terremoto en la Ciudad de Zed en algún momento en los próximos 20 años.

C La probabilidad de que haya un terremoto en la Ciudad de Zed en algún momento en los próximos 20 años es mayor que la probabilidad de que no haya ningún terremoto.

D No se puede decir lo qué sucederá, porque nadie puede estar seguro de cuándo tendrá lugar un terremoto.

Terremoto: pregunta 21

M559Q01

| | |
|---|---|
| Subescala | Incertidumbre |
| Situación | Científica |
| Competencia | Reflexión |
| Dificultad | 557 (nivel 4) |

| | Aciertos | % |
|---|---|---|
| OCDE | | 46,5 |
| España | | 38,8 |
| Castilla y León | | 43,1 |
| Cataluña | | 46,2 |
| País Vasco | | 43,9 |

Puntuaciones:

Máxima puntuación
Código 1: C. La probabilidad de que haya un terremoto en la Ciudad de Zed en algún momento en los próximos 20 años es mayor que la probabilidad de que no haya ningún terremoto.

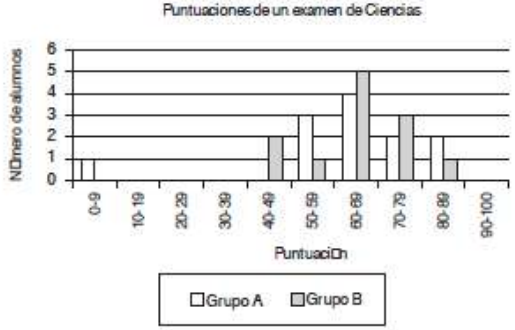
Ninguna puntuación
Código 0: Otras respuestas.
Código 9: Sin respuesta.

# Puntuaciones en un examen

Pregunta 23: PUNTUACIONES EN UN EXAMEN

M513Q01 - 0 1 9

El diagrama siguiente muestra los resultados en un examen de Ciencias para dos grupos, denominados Grupo A y Grupo B. La puntuación media del Grupo A es 62,0 y la media del Grupo B es 64,5. Los alumnos aprueban este examen cuando su puntuación es 50 o más.




Al observar el diagrama, el profesor afirma que, en este examen, el Grupo B fue mejor que el Grupo A.

Los alumnos del Grupo A no están de acuerdo con su profesor. Intentan convencer al profesor de que el Grupo B no tiene por qué haber sido necesariamente el mejor en este examen. Da un argumento matemático, utilizando la información del diagrama, que puedan utilizar los alumnos del Grupo A.

Puntuaciones en un examen: pregunta 23

| M513Q01 | | Aciertos | % |
|---|---|---|---|
| Subescala | Incertidumbre | OCDE | 32,2 |
| Situación | Educativa | España | 27,8 |
| Competencia | Conexiones | Castilla y León | 28,4 |
| Dificultad | 620 (nivel 5) | Cataluña | 38,0 |
| | | País Vasco | 27,8 |

Puntuaciones:

Máxima puntuación

Código 1: Se da un argumento válido. Los argumentos válidos pueden estar relacionados con el número de estudiantes que aprueban, la influencia desproporcionada del caso extraño o el número de estudiantes con puntuaciones de nivel más alto.

- Más alumnos en el Grupo A que en el Grupo B aprobaron el examen.
- Si ignoras al peor alumno del Grupo A, los alumnos del Grupo A lo han hecho mejor que los del Grupo B.
- Más alumnos del Grupo A que del Grupo B obtuvieron la puntuación de 80 o más.

Ninguna puntuación

Código 0: Otras respuestas, incluyendo respuestas sin razonamientos matemáticos, o razonamientos matemáticos erróneos, o respuestas que simplemente describen las diferencias pero no son argumentos válidos de que el Grupo B no tiene porque haber sido el mejor.

- Los alumnos del Grupo A normalmente son mejores en ciencias que los del Grupo B. El resultado de este examen es simplemente una coincidencia.
- Porque la diferencia entre las puntuaciones más altas y más bajas es menor para el Grupo B que para el Grupo A.
- El Grupo A tiene mejores puntuaciones en el rango 80-89 y el rango 50-59.
- El Grupo A tiene un rango intercuartil mayor que el Grupo B.

Código 9: Sin respuesta.

# Respaldo al presidente

Pregunta 36: RESPALDO AL PRESIDENTE

M702Q01 - 0 1 2 9

En Zedlandia, se realizaron varios sondeos de opinión para conocer el nivel de respaldo al Presidente en las próximas elecciones. Cuatro periódicos hicieron sondeos por separado en toda la nación. Los resultados de los sondeos de los cuatro periódicos se muestran a continuación:

Periódico 1: 36,5% (sondeo realizado el 6 de enero, con una muestra de 500 ciudadanos elegidos al azar y con derecho a voto).

Periódico 2: 41,0% (sondeo realizado el 20 de enero, con una muestra de 500 ciudadanos elegidos al azar y con derecho a voto).

Periódico 3: 39,0% (sondeo realizado el 20 de enero, con una muestra de 1.000 ciudadanos elegidos al azar y con derecho a voto).

Periódico 4: 44,5% (sondeo realizado el 20 de enero, con 1.000 lectores que llamaron por teléfono para votar).

Si las elecciones se celebraran el 25 de enero, ¿cuál de los resultados de los periódicos sería la mejor predicción del nivel de apoyo al presidente? Da dos razones que justifiquen tu respuesta.

Respaldo al presidente: pregunta 36

| M702Q01 | | Aciertos | % |
|---|---|---|---|
| Subescala | Incertidumbre | OCDE | 35,7 |
| Situaci□n | P□blica | Espa□a | 26,8 |
| Competencia | Conexiones | Castilla y Le□n | 31,3 |
| Dificultad | 615 (nivel 5) | Catalu□a | 30,6 |
| | | Pa□s Vasco | 28,2 |

Puntuaciones:

Código 2: Periódico 3. El sondeo es más reciente, con una muestra más grande, una selección al azar de la muestra, y sólo se preguntó a votantes. (Dar al menos dos razones). Debe ignorarse cualquier información adicional (incluyendo información irrelevante o incorrecta).

- Periódico 3, porque han seleccionado más ciudadanos al azar entre los que tienen derecho a voto.
- Periódico 3 porque ha pedido la opinión a 1.000 personas seleccionadas al azar, y la fecha es más próxima a la fecha de la elección, por lo que los votantes tienen menos tiempo de cambiar de opinión.
- Periódico 3 porque fueron seleccionados al azar y tenían derecho a voto.
- Periódico 3 porque encuestó a más personas y más cerca de la fecha.
- Periódico 3 porque las 1.000 personas fueron seleccionadas al azar.

Ninguna puntuación

Código 0: Otras respuestas.

- Periódico 4. Más personas significa resultados más precisos, y las personas que telefonean habrán considerado mejor sus votos.

Código 9: Sin respuesta.

Tabla 1.2 Pruebas de Matemáticas. PISA 2003

## 1.3 MARCO TEÓRICO

En este trabajo vamos a utilizar algunas nociones teóricas desarrolladas por Godino y colaboradores en el Enfoque Ontosemiótico (EOS). Este marco teórico propone tres etapas en el análisis de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas: la epistemológica, la cognitiva y la instruccional. Cada una de ellas se aborda con herramientas teóricas agrupadas en tres modelos teóricos: teoría de los significados institucionales y personales de los objetos matemáticos (Godino y Batanero, 1994), teoría de las funciones semióticas (Godino, 2002; Godino, Batanero y Roa, 2005) y teoría de las configuraciones didácticas (Godino, Contreras y Font, 2006). Además, se interesa por definir un modelo de conocimientos del profesor (Godino, 2009). En nuestro trabajo utilizaremos tan sólo parte de los conceptos que forman parte de este marco teórico.

### 1.3.1 LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA Y OBJETOS LIGADOS A ELLA

Los autores de este marco teórico conciben la actividad matemática como un conjunto de prácticas, de las cuales surgen los objetos matemáticos. Una *práctica matemática es "toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida y validarla o generalizarla a otros contextos o problemas"* (Godino y Batanero, 1994, p.334). En el estudio de las matemáticas, más que una práctica particular ante un problema concreto, interesa considerar los sistemas de práctica de las personas en su actuación ante tipos de situaciones problemáticas. A la pregunta, qué es un objeto matemático se propone como respuesta: *"el sistema de prácticas que realiza una persona (significado individual), o compartidas en el seno de una institución (significado institucional) para resolver un tipo de situaciones-problemas ligadas con el objeto"* (Godino y Batanero, 1994).

Puesto que los significados dependen de los contextos sociales y de los sujetos, su carácter es relativo. Su uso en el análisis didáctico lleva a introducir la tipología básica que se resume en la Figura 1.5 (Godino, 2003). Con relación a los significados institucionales se diferencia entre el *implementado* (sistema de prácticas implementado por el docente), el *evaluado* (subsistema que utiliza el docente para valorar los aprendizajes), el *pretendido* (fijado para la planificación de un proceso de enseñanza) y el *referencial* (base en una investigación, que suele ser más restringido que el anterior). Respecto al significado personal se diferencia entre el *global* (todo sistema potencial de

prácticas subjetivas), el *declarado* (prácticas mostradas en un proceso de evaluación) y el *logrado* (las prácticas mostradas que coinciden con las pretendidas institucionalmente). En un proceso de estudio interesan también los significados *iniciales y finales* de los estudiantes que se observan al comparar sus sistemas de prácticas personales, antes y después de la instrucción.

En la parte central de la Figura 1.5 se representan las relaciones entre enseñanza y aprendizaje, que supone el acoplamiento progresivo entre los significados personales e institucionales. La enseñanza implica la participación progresiva del estudiante en la comunidad de prácticas que soporta los significados institucionales, y el aprendizaje implica la apropiación por el estudiante de dichos significados (Godino, 2003).




Figura 1.5 Tipos de significados institucionales y personales

**Tipos de objetos y configuraciones**

Godino, Batanero y Font (2007) describen dos niveles de objetos que emergen de la actividad matemática. En el primer nivel están aquellas entidades que se pueden observar en un texto matemático, mientras que en el segundo nivel, tenemos una tipología de objetos que emerge de las distintas maneras de ver, hablar, operar, etc. Es decir, se tienen en cuenta las dimensiones social y personal del conocimiento y también el hecho de que una práctica personal pudiera ser o no adecuada, desde el punto de vista de la institución.

A continuación se presentan las categorías de objetos propuestas:

- *Situaciones - problema*: aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios, problemas o situaciones que inducen una actividad matemática. En nuestro caso, el problema puede ser la búsqueda de una estrategia óptima en un juego, la toma de una

decisión o bien problemas planteados por el profesor con relación a un recurso didáctico relacionado con la Probabilidad.

- *Elementos lingüísticos*: términos, expresiones, notaciones, gráficos que se utilizan para representar los datos del problema, las operaciones que hacemos con ellos, los objetos matemáticos que se utilizan y la solución encontrada. En la resolución de los problemas citados, se usa el lenguaje verbal, icónico y simbólico, así como el lenguaje gráfico, por ejemplo, el diagrama del árbol.
- *Conceptos - definición*: en las prácticas realizadas para resolver un problema se usan, implícita o explícitamente, objetos matemáticos, de los cuales los estudiantes han de recordar o aplicar la definición. Por ejemplo, los estudiantes usarán implícitamente los objetos: aleatoriedad, espacio muestral, suceso, probabilidad o independencia.
- *Proposiciones*: enunciados sobre relaciones o propiedades de los conceptos. Por ejemplo, los axiomas de la Probabilidad, la suma de probabilidades en el espacio muestral es igual a la unidad, la regla de la suma y del producto.
- *Procedimientos*: algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo que los estudiantes aplican al resolver el problema, una vez que han sido adquiridos en la enseñanza previa. En nuestro caso los estudiantes usarán técnicas sencillas de cálculo de probabilidades como, técnicas combinatorias, comparación de probabilidades, etc.
- *Argumentos*: enunciados usados para validar o explicar proposiciones y procedimientos, o bien la solución de problemas. Pueden ser deductivos, inductivos, formales o informales.

Cada objeto primario tiene asociado un proceso mental: las situaciones-problema emergen mediante el proceso de problematización, los elementos lingüísticos mediante el proceso de comunicación, los conceptos mediante el proceso de definición, las proposiciones mediante el proceso de enunciación, los procedimientos mediante el proceso de algoritmización y los argumentos mediante el proceso de argumentación.

Godino, Batanero y Font (2007) consideran que estos seis tipos de objetos se relacionan entre sí formando *configuraciones*, entendidas como redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas. Los autores clasifican estas configuraciones en socio- epistémicas (cuando se trata de objetos institucionales) o cognitivas (referidas a objetos personales). Adicionalmente se reconoce que la

clasificación anterior de objetos es relativa a los marcos institucionales y a los contextos de uso.

### 1.3.2 FACETAS DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS

En segunda instancia, el enfoque ontosemiótico propone una tipología de facetas duales que surge de las distintas maneras de operar con los objetos matemáticos anteriores (Godino, Batanero, Font, 2007).

- *Personal- institucional*: los objetos emergentes se denominan "objetos personales" si emergen de sistemas de prácticas personales, e institucionales si emergen de prácticas comunes a una institución.
- *Ostensivo- no ostensivo*: un objeto es ostensivo si es perceptible, es decir, materializado de alguna forma, y no ostensivo si no lo es. En general, los objetos emergentes son imperceptibles por sí mismos; para las prácticas públicas estos objetos no ostensivos se representan con sus ostensivos asociados.
- *Expresión- contenido*: corresponde al antecedente (significante) y consecuente (significado) de cualquier función semiótica, que definimos en la siguiente sección.
- *Extensivo- intensivo (ejemplar- tipo)*: un objeto que usa como ejemplo o caso particular se denomina "objeto extensivo"; un objeto que se usa como una clase más general o genérica se denomina "objeto intensivo".
- *Unitario- sistémico*: en algunas circunstancias los objetos matemáticos se consideran unitarios (un dato) y en otros como compuestos de varios objetos (la distribución de datos).

La emergencia de estas dualidades también corresponde a procesos mentales que se realizan para pasar de uno a otro polo de dichas facetas, en su orden: personalización- institucionalización; materialización/concreción- idealización/abstracción; expresión/representación- significación; particularización- generalización; análisis/descomposición- síntesis/reificación.

### 1.3.3 RELACIONES ENTRE OBJETOS: FUNCIÓN SEMIÓTICA

Un papel esencial en el proceso relacional durante las prácticas matemáticas corresponde a las funciones semióticas (Godino, Batanero, 1998; Godino, Batanero y Font, 2007), que se entienden como relaciones que establecen los sujetos, personas o

instituciones entre un antecedente (expresión, significante) y un consecuente (contenido o significado). Es decir, resalta los procesos de interpretación que se llevan a cabo en la actividad matemática y en los cuales a veces pueden aparecer desajustes de interpretación entre el alumno y el profesor. Por ejemplo, un Applet en Internet puede considerarse como una función semiótica, en el que el antecedente es el propio Applet y un procedimiento (diagrama del árbol). La correspondencia suele ser implícita, aunque en algunos casos, se incluyen instrucciones para la interpretación de los recursos. Tanto si hay instrucciones como si no, es posible que el estudiante que trabaja con el recurso no comprenda su funcionamiento o no interprete correctamente los resultados producidos. Si las interpretaciones hechas por el estudiante no son las esperadas por el profesor diremos que hay un conflicto semiótico.

El antecedente y el consecuente de una función semiótica no se restringen a conceptos, sino abarcan toda la anterior ontología de objetos matemáticos u organizaciones de estos en entidades más complejas, como sistemas conceptuales o teorías. Así en nuestro estudio podemos descomponer el trabajo con tareas o recursos, generalmente en partes, tras las cuales aparecen diferentes objetos matemáticos implícitos. Se tratará de poner de manifiesto estos objetos, así como las dificultades que los estudiantes o profesores pueden tener en su uso.

Al pasar al estudio de los procesos de enseñanza es necesario utilizar nuevas herramientas, entre las que destacan las de configuración didáctica e idoneidad didáctica.

### 1.3.4 CONFIGURACIONES DIDÁCTICAS

Una configuración didáctica se define como una unidad primaria de análisis didáctico constituida por interacciones profesor/alumno a propósito de un objeto o contenido matemático y usando recursos materiales específicos (Godino, Batanero y Font, 2007).

Cada configuración didáctica lleva asociada tres configuraciones interrelacionadas: una *epistémica* representada por una tarea con sus objetos matemáticos previos y emergentes; una *instruccional*, conformada por la red de objetos docentes, discentes y mediacionales, puestos en juego a propósito de dicha tarea; y otra *cognitiva,* constituida por la red completa de objetos de los sistemas de prácticas personales al implementar la configuración epistémica dada.

### 1.3.5 CRITERIOS DE IDONEIDAD DIDÁCTICA

Para el análisis didáctico de un proceso de estudio de las Matemáticas es conveniente establecer criterios de calidad. Godino, Contreras y Font (2006) definen la idoneidad didáctica de un proceso como la articulación coherente y sistémica de seis componentes, que permiten valorar la calidad de un proceso educativo. Godino (2011) describe también criterios detallados para evaluar estos componentes, que son los siguientes:

- *Idoneidad epistémica*: grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos) respecto de un significado de referencia.
- *Idoneidad cognitiva*: grado en que los significados pretendidos / implementados son asequibles a los estudiantes, están en la zona de desarrollo potencial siguiendo la terminología de Vygotski, así como la proximidad de los significados personales logrados por los estudiantes a los significados pretendidos por el profesor.
- *Idoneidad interaccional*: grado en que la organización de la enseñanza permite identificar conflictos semióticos y resolverlos durante el proceso de instrucción. Dependerá del discurso del profesor en el aula y de la forma de trabajo de los alumnos.
- *Idoneidad mediacional*: grado de disponibilidad y adecuación de los recursos necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje. Dichos recursos pueden ser materiales tradicionales o tecnológicos, libros o guías de estudio, tiempo disponible o cualquier otro recurso.
- *Idoneidad emocional*: grado de implicación (por ejemplo, interés o motivación) del alumnado en el proceso de estudio.
- *Idoneidad ecológica*: grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los acondicionamientos del entorno en que se desarrolla.

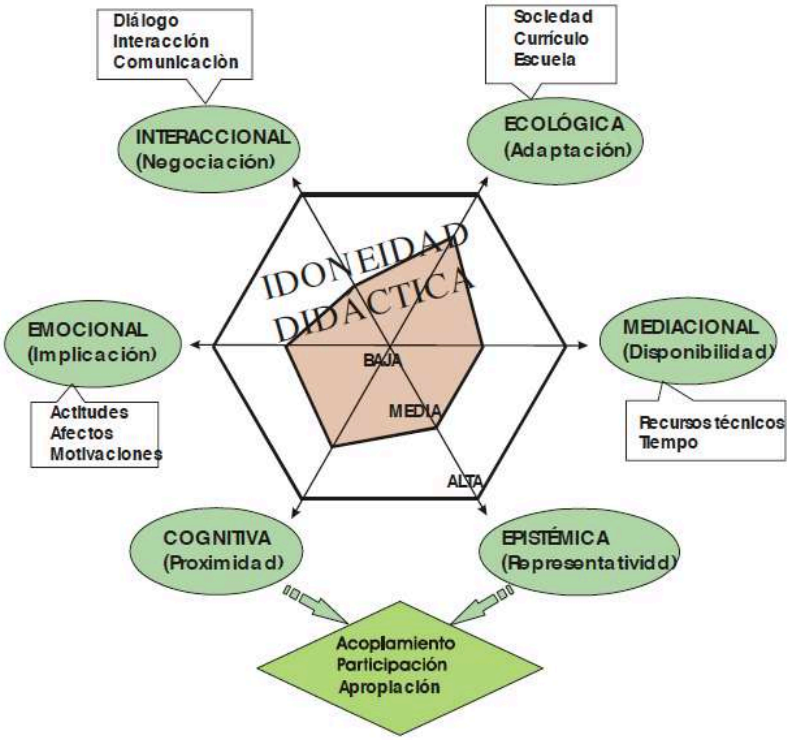



Figura 1.6 Componentes de la idoneidad didáctica

## 1.4 SIGNIFICADO DEL AZAR

Esta sección describe resumidamente el significado de Azar, así como los distintos usos coloquiales que se utilizan o podrían utilizarse en la enseñanza. Se sintetiza el trabajo de Godino, Batanero y Cañizares (1987) complementándolo con algunas otras referencias.

Las primeras ideas intuitivas y los juegos de azar son comunes en todas las civilizaciones primitivas. Como indica Batanero (2005) las ideas intuitivas sobre el Azar aparecen tanto en niños como en personas que no han estudiado probabilidades, pero usan frases y expresiones coloquiales para cuantificar los sucesos inciertos y expresar su grado de creencia en ellos.

Muchos términos son usados frecuentemente con un significado informal: casual, accidental, eventual, fortuito, impensado, imprevisible, inesperado, inopinado, ocasional, por suerte, por chiripa, de rebote, de rechazo, sin querer, sin intención.

Según la Real Academia Española (RAE) el Azar tiene los siguientes significados:

1. Casualidad, caso fortuito.
2. Desgracia imprevista.

3. En el juego de trucos o billar, cualquiera de los dos lados de la tronera que miran a la mesa.
4. En los juegos de naipes o dados, carta o dado que tiene el punto con que se pierde.
5. En el juego de pelota, esquina, puerta, ventana u otro estorbo.

El origen etimológico de la palabra azar es: "Del árabe "zahr", flor, dado".

Para clasificar la fenomenología del Azar utilizaremos los cuatro grandes grupos que se describen en Godino, Batanero y Cañizares, (1987), para clasificar los campos de aplicación de la estadística: el hombre y su mundo biológico, físico, social y político.

Mundo biológico

Al alumnado se le puede explicar que muchas características heredadas en el nacimiento dependen del Azar: el sexo, el color de pelo, el peso al nacer…Otras aplicaciones se refieren al campo de la medicina: la posibilidad de contagio de una enfermedad, la edad en que se sufre una enfermedad infantil, el efecto de una vacuna… También cuando se hacen predicciones sobre la población mundial o la esperanza de vida de un individuo.

Mundo físico

Así como en el mundo biológico al alumnado se le explican fenómenos que dependen del Azar, el mundo físico no es diferente: la duración, intensidad, extensión de las lluvias; las temperaturas máximas y mínimas, la intensidad y dirección del viento…También lo son las posibles consecuencias de estos fenómenos: el volumen de agua en una presa, la magnitud de daños de una tormenta…

Otra fuente es la medida de las magnitudes. Cuando pesamos, medimos tiempo, longitudes… se cometen errores aleatorios. Así como, los problemas de fiabilidad y control de la calidad de los aparatos y dispositivos: coche, televisor…

Mundo social

El Azar juega un papel en: el número de hijos de la familia, la edad de los padres al contraer matrimonio, el tipo de trabajo, las creencias o aficiones de los miembros varían de una familia a otra.

Por último, tal vez el papel más importante del Azar es el que se emplea para practicar algún juego de azar como quinielas, loterías, acudir a encuentros deportivos cuyos resultados son inciertos…

Mundo político

El Gobierno necesita tomar decisiones que dependen de fenómenos inciertos y sobre los cuales necesita información. Es por ello, que se realizan censos y encuestas diversas para comprobar o ayudar a tomar dichas decisiones sobre distintas variables aleatorias.

Los ejemplos citados son unos pocos de los muchos que podríamos mencionar en cada una de las categorías. Todos pueden relacionarse con las distintas áreas: ciencias naturales, física…Por lo que pueden ser propuestos a los niños ya que forman parte de su vida cotidiana y les verán sentido a esta rama de las Matemáticas y así tener el conocimiento del mundo que nos rodea.

## 1.5 SIGNIFICADOS DE LA PROBABILIDAD Y SU PROBLEMÁTICA FILOSÓFICA

Esta sección describe resumidamente algunos significados de la Probabilidad que se utilizan o podrían utilizarse en la enseñanza obligatoria, analizando su problemática filosófica. Se sintetizan los trabajos de Godino, Batanero y Cañizares (1987), Batanero (2005) complementándolo con algunas otras referencias.

Según la RAE el término de Probabilidad tiene los siguientes significados:

1. Verosimilitud o fundada apariencia de verdad.
2. Cualidad de probable, que puede suceder.
3. En un proceso aleatorio, razón entre el número de casos favorables y el número de casos posibles.

El origen etimológico de la palabra Probabilidad es: “Del latín probabilítas”.

Con el término Probabilidad, desde el punto de vista informal, surgen muchos matices de significación y admite variedad de usos. María Moliner (1983), lo define como entre lo cierto o lo seguro y lo imposible, véase Godino, Batanero y Cañizares (1987). Para expresar estas tres circunstancias existen una gran variedad de términos. Un suceso que es probable se puede expresar con adjetivos: posible, previsible, presumible, factible, viable…Sin embargo los usos formales del término Probabilidad en el campo de la ciencia y la filosofía han llevado a definir la noción de Probabilidad.

### 1.5.1 SIGNIFICADO INTUITIVO

Batanero (2005) indica que las ideas intuitivas sobre el Azar aparecen tanto en niños como en personas que no han estudiado probabilidades, quienes usan frases y expresiones coloquiales para "cuantificar" sucesos inciertos y expresar su grado de creencia en ellos. Términos como posible, previsible, presumible, factible o viable forman parte del lenguaje común, y se utilizan para situaciones cotidianas, en amplios contextos y matices, para afectar la ocurrencia de sucesos o la veracidad de proposiciones. Estas mismas ideas aparecen en todas las civilizaciones y su origen está ligado a problemas de apuestas en juegos de azar, que han sido comunes en todas las culturas. Sin embargo, el concepto tarda en formalizarse, como se explica en la sección 1.6, hasta comienzos del siglo XVII, al empezar a asignar números a estos grados de creencia de sucesos para estar en capacidad de comparar su verosimilitud.

### 1.5.2 SIGNIFICADO CLÁSICO

La correspondencia entre Pascal y Fermat resuelve algunos problemas ligados a juegos de azar, se le considera el punto de partida de la teoría de la Probabilidad. Aunque fue De Moivre quien encontró una definición sobre Probabilidad: "*Por tanto, si constituimos una fracción cuyo numerador es el número de chances (posibilidades) con la que el suceso podría ocurrir y el denominador el número de chances con las que puede ocurrir o fallar, esta fracción será una definición propia de la probabilidad de ocurrencia*" (véase Gómez E., 2014).

Laplace, en su obra *Teoríe analytique des probabilités* (1814), dio la definición que se conoce como clásica de probabilidad de un suceso que puede ocurrir solamente en un número finito de modalidades como *la proporción del número de casos favorables al número de casos posibles, siempre que todos los resultados sean igualmente "probables"*.

Con esta definición el cálculo de probabilidades de los sucesos se reducía a problemas de análisis combinatorio, siendo esta definición, según Godino, Batanero y Cañizares (1987), inadecuada incluso en su época, ya que no dio respuesta a la pregunta sobre lo qué es realmente la Probabilidad. Ello se debe a que Laplace propone que la Probabilidad es circular, pues utiliza el término que define equiprobable y, por otro, introduce un elemento subjetivo asociado a la necesidad de juzgar la equiposibilidad de diferentes resultados. También propone una forma de cálculo que implica reducir los acontecimientos aleatorios a un cierto número de casos igualmente posibles. Esta

definición no es aplicable cuando los experimentos tienen posibilidades infinitas. En definitiva, el concepto de Laplace no nos permite calcular la Probabilidad si no se cumple la equiprobabilidad y si los experimentos tienen posibilidades infinitas. Por tanto se encuentran pocos casos en los que pueda aplicarse, fuera de los juegos de azar (Batanero, Henry y Parzysz, 2005).

A nivel escolar, este significado ha sido enseñado durante muchos años debido a su interés para los niños; pues resultaba fácil calcular las probabilidades de los sucesos elementales en ejemplos de juegos con dados o monedas, que forman parte de la vida cotidiana del niño. Sin embargo, una vez se pasa de la probabilidad simple a la compuesta el cálculo se complica, pues se requiere razonamiento combinatorio, que se dificulta para los estudiantes (Batanero, 2005).

### 1.5.3 SIGNIFICADO FRECUENCIAL

La Probabilidad se calcula a partir de las frecuencias relativas observadas de cada uno de los diferentes resultados en pruebas repetidas. El principal elemento en este enfoque es que el concepto de Probabilidad debe ser "objetivo" y sujeto a demostración práctica a través de la experimentación.

Bernoulli, en su libro *Ars Conjectandi*, escrito en 1713, sugirió que podríamos asignar probabilidades a los sucesos aleatorios que aparecen en diversos campos, a partir de la frecuencia relativa observada en una serie grande de ensayos. La comunidad científica aceptó su demostración de la Primera ley de los grandes números, la cual indica que la probabilidad de que la frecuencia relativa de un experimento repetido en las mismas condiciones se acerque a la Probabilidad teórica del suceso puede aproximarse suficientemente a uno, sin más que aumentar el número de pruebas (Batanero, 2005).

En la práctica, la Probabilidad para un suceso se estimaría en forma aproximada a partir de las frecuencias relativas observadas de los resultados en pruebas repetidas, bajo idénticas condiciones y un gran número de veces.

La teoría frecuencial ha sido defendida por Richard Von Mises (*Probability, Statistics and Truth*, 1919), aunque en 1888 John Venn en *The logic of chance* defendió explícitamente el cálculo de la Probabilidad a partir de las frecuencias relativas. También son partidarios de este enfoque Hans Reichenbach y Kolmogorov.

En 1928, Von Mises dio una definición formal de la Probabilidad desde este enfoque y la define como el valor hipotético hacia el cual tiende la frecuencia relativa

de un suceso al estabilizarse, asumiendo la existencia teórica de dicho límite. Es decir, supongamos un suceso particular $A$; tomamos observaciones repetidas anotando las ocasiones en las que ocurre $A$; entonces la razón entre el número de veces que sucede $A$, $n_A$, y el número total de repeticiones $n$ parece tender a un límite cuando $n$ tiende a infinito. En esta aproximación, la idea de la Probabilidad surge como el valor hacia el cual tiende la frecuencia relativa de una secuencia de resultados (Godino, Batanero y Cañizares, 1987).

Formalmente, en la terminología moderna, cuando se realiza un experimento N veces, la frecuencia absoluta del suceso $A$, es el número $N_A$ de veces que ocurre $A$. Se pueden observar las tres propiedades siguientes en las frecuencias relativas $h(A)= N_A/N$:

1. La frecuencia relativa del suceso varía entre 0 y 1.
2. La frecuencia relativa del suceso seguro siempre es 1 en cualquier serie de ensayos.
3. Si un suceso $A$ se forma uniendo sucesos que no tienen elementos comunes, la frecuencia relativa del suceso $A$ es la suma de las frecuencias relativas de los sucesos que lo componen.

Estas tres propiedades, al generalizarse, se corresponden con los tres axiomas de la Probabilidad citados en la próxima sección 1.5.5. El valor de la frecuencia relativa de un suceso no es fijo para $N$, puesto que se trata de un fenómeno aleatorio. Sin embargo, para una serie larga de ensayos, los teoremas conocidos como *leyes de los grandes números* muestran que las fluctuaciones de la frecuencia relativa son cada vez más raras y de menor magnitud, y que la frecuencia relativa oscila alrededor de un valor bien determinado, que se denomina *probabilidad* de dicho suceso.

Este significado es válido para espacios muestrales numerables, finitos o no. (Stuart y Ord, 1994). No obstante, se resaltan dos aspectos: a) que el valor obtenido es siempre aproximado, es decir, constituye una *estimación de la Probabilidad*; y b) que a mayor tamaño de muestra mayor fiabilidad porque hay más variabilidad en las muestras pequeñas que en las grandes. Es también muy importante no confundir la Probabilidad (que es siempre un valor teórico desconocido) con su estimación a partir de la frecuencia (que es siempre una aproximación) (Batanero, Henry, y Parzysz, 2005).

Este enfoque cuenta con algunos problemas filosóficos ya que no se obtiene un valor exacto para la Probabilidad, siempre se dan aproximaciones. Así como, no se sabe con certeza el número de experimentos idóneo para aceptar la estimación como buena. A veces es imposible contar con idénticas condiciones en la experimentación, más aún

en condiciones experimentales fijas, en las cuales la fidelidad no es segura, incluso en situaciones tan sencillas como el lanzamiento de una moneda. Por tanto, este enfoque no se podría aplicar en algunos campos del conocimiento, por ejemplo a fenómenos económicos o históricos que, por su naturaleza, son sucesos irrepetibles.

### 1.5.4 SIGNIFICADO SUBJETIVO

El significado frecuencial no estuvo libre de controversias. Un nuevo punto de vista aparece a través de la regla de Bayes, inseguro de promocionar una idea contraria hasta entonces a la Probabilidad, no quiso publicar su estudio y fueron sus discípulos quienes posteriormente lo descubrirían. Este teorema y punto de vista serían la base de lo que hoy conocemos como estadística bayesiana (Batanero, Henry y Parsysz, 2005). Esta regla permite transformar probabilidades *a priori* (antes de realizar un experimento) de varias causas, una vez observadas sus consecuencias, en probabilidades *a posteriori*, que incorporan información de los datos analizados. Estas probabilidades podrían revisarse y perderían de este modo el carácter objetivo que les asigna la concepción frecuencial.

Esta idea fue retomada más tarde por varios matemáticos, que definen las probabilidades como creencias o percepciones personales basados en el conocimiento y experiencia de la persona que asigna la Probabilidad. Este punto de vista mantiene que la Probabilidad mide la confianza que un individuo particular tiene sobre la verdad de una proposición particular y, por tanto, no está unívocamente determinada. Es decir, los subjetivistas consideran que se trata de un grado de creencia "personal" que un individuo sostiene sobre la base de su propia experiencia. Diferentes personas pueden así asignar probabilidades distintas para un mismo suceso. La controversia sobre el estatuto científico de esta visión de la Probabilidad surge ante la dificultad de hallar una regla para asignar valores numéricos que expresen los grados de creencia personal (Batanero, 2005).

Ante esta dificultad, F. P. Ramsey (1926) y B. De Finetti (1937) dedujeron una teoría de decisión consistente, que permite separar las creencias de las preferencias a partir de un sistema de apuestas e inferir los valores de las probabilidades subjetivas. A inicios de los años 50, L. J. Savage, entre sus postulados indican que la Probabilidad de un suceso se puede asignar de cualquier modo, comprometiéndose a aceptar cualquier apuesta basada en dicha asignación, con ganancia elegida por el oponente. A modo de ejemplo, como refleja el libro *Azar y Probabilidad* (Godino, Batanero y Cañizares,

1987): "*Dada una cantidad aleatoria X, debes elegir un valor x sabiendo que, después de hacer esta elección, estás comprometido a aceptar cualquier apuesta con ganancia c(X-x), donde c es arbitraria y elegida por tu oponente*". Se añade también la condición de coherencia, en la cual se considera que la función de ganancia no es uniformemente negativa, es decir, que no se está dispuesto a perder de forma sistemática. "*Se supone que no deseas hacer apuestas que con seguridad conducirán a una pérdida. Un conjunto de probabilidades asignadas por un sujeto son coherentes si entre las combinaciones de apuestas que uno está dispuesto a hacer no hay ninguna en la que la ganancia sea uniformemente negativa"*. (*Azar y Probabilidad*, Godino, Batanero y Cañizares, 1987).

Se observa que esta condición no da ninguna norma de cómo se puede seleccionar una probabilidad, sólo indica una forma a seguir para evitar consecuencias indeseables. Sin embargo, a partir de este criterio se pueden derivar las leyes básicas de probabilidad. Por tanto, el criterio de coherencia es bastante notable, proporcionando un fundamento intuitivo pero suficiente para la teoría. La concepción subjetiva puede depender solamente de comparaciones de verosimilitudes percibidas.

La enseñanza del Teorema de Bayes no sería posible en la Educación Primaria; generalmente se estudia a partir de los 14-15 años, es decir a final de la Educación Secundaria Obligatoria. Sin embargo, Godino, Batanero y Cañizares (1987) sugieren usar este enfoque en forma intuitiva en situaciones experimentadas por el niño. Para asignar probabilidades a sucesos, en este nivel, se puede hacer corresponder un valor numérico entre 0 y 1 a sucesos comparados previamente, o situar los sucesos de interés sobre un gráfico, mostrando la escala de la Probabilidad. Estas probabilidades se podrían revisar posteriormente con nuevas experiencias.

### 1.5.5 SIGNIFICADO AXIOMÁTICO

Debido a la falta de acuerdo sobre los puntos de vista anteriormente descritos y a sus problemas filosóficos, aún no resueltos, durante el siglo XX varios matemáticos trataron de formalizar la teoría de probabilidades. Entre ellos, Borel conectó la Probabilidad con la teoría de la medida (pues la Probabilidad es un caso particular de medida en esta teoría), y Kolmogorov la combinó con la teoría de conjuntos, en un período donde se trataba de conectar las diferentes ramas de la matemática con esta teoría (Batanero y Díaz, 2007).

Kolmogorov quien la axiomatizó en su trabajo fundamental publicado en 1933 y traducido posteriormente con el título *Foundations of the theory of probability* (1956), debido a las restricciones que imponía el concepto clásico laplaciano. Los sucesos se representan por conjuntos y la Probabilidad es una medida normada (acotada entre 0 y 1) definida sobre estos conjuntos. Este desarrollo, basado en la teoría de la medida, logró un fundamento lógico para el Cálculo de Probabilidades y la conectó con la corriente principal de la Matemática moderna.

A partir de esta formalización se reconoce la Probabilidad como un modelo matemático, útil en casi todos los campos de la actividad humana, para describir e interpretar la realidad de los fenómenos aleatorios y aceptada plenamente como rama de la Matemática. Desde el punto de vista de las aplicaciones, la axiomática de Kolmogorov es aceptada por todas las escuelas, con independencia de su epistemología, pues es más amplia que el resto de las concepciones, ya que los axiomas son aplicables a cada una de las visiones clásica, frecuencial y subjetiva (Batanero y Díaz, 2007). A continuación, presentamos un análisis resumido elemental de la teoría axiomática de la Probabilidad, restringiéndonos sólo a los objetos que tienen relevancia en el nivel de Educación Primaria y Secundaria o en la formación de profesores en estos niveles.

**Experimento y sucesos aleatorios**

Un estudio de probabilidad ha de iniciarse considerando un fenómeno o *experimento aleatorio*, expresión que se utiliza para describir fenómenos en que se aplican las técnicas estadísticas (Godino, Batanero y Cañizares, 1987).

Formalmente, un experimento es *aleatorio* si al repetirlo (en condiciones análogas) no se puede predecir el resultado. En caso contrario, el experimento se denomina *determinista*. De acuerdo a Ortiz (2002) se exige la repetibilidad e impredecibilidad del experimento y se diferencia entre experimento aleatorio y su resultado (suceso), pues es posible producir resultados "aleatorios" con algoritmos de ordenador deterministas. También conviene considerar las secuencias de resultados aleatorios.

Una vez determinado el experimento se define el conjunto de todos los resultados posibles de dicho experimento, llamado *espacio muestral*, que denotaremos por Ω. Este conjunto puede ser numerable o no, finito o infinito (Stuart y Ord, 1994).

Se llama *suceso* a cada uno de los subconjuntos de un espacio muestral; se califica como suceso elemental a cualquier subconjunto formado por un solo suceso de

un espacio muestral, el suceso se llama *compuesto* cuando consta de varios sucesos elementales. Diremos que un suceso $A$ está incluido en otro $B$, $A \subset B$, si siempre que ocurre $A$ ocurre $B$. Los sucesos que se verifican siempre, se llaman *seguros*, coinciden con el espacio muestral Ω. El *suceso imposible* es el conjunto vacío, no hay un suceso elemental que lo verifique.

**Álgebra de Boole de sucesos**

Se llama *espacio de sucesos* de un experimento aleatorio, y se denota por $U$, al conjunto formado por todos los sucesos. En términos de teoría de conjuntos, $U$ representa al conjunto de partes de Ω. Para definir la Probabilidad es necesario dotar primero al espacio $U$ de una estructura de álgebra (en su forma más sencilla, un Álgebra de Boole). Para ello se comienza definiendo las operaciones de unión e intersección (Loeve, 1976). Sean $A$ y $B$ dos sucesos que pertenecen al mismo espacio de sucesos, $A \in U$ y $B \in U$.

- Se llama la *unión de los sucesos A y B*, denotada por $A \cup B$, al suceso que verifica cuando se produce o $A$ o $B$ o ambos sucesos.

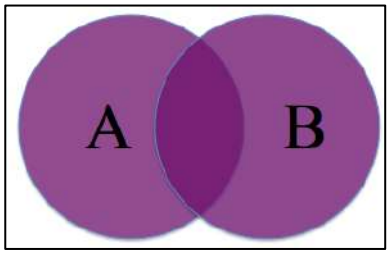



Figura 1.7 Unión de los sucesos A y B

- Se llama *intersección de los sucesos A y B*, denotada por $A \cap B$, al suceso que ocurre cuando se producen simultáneamente $A$ y $B$.

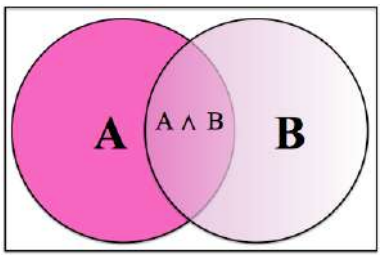



Figura 1.8 Intersección de los sucesos A y B

Estas operaciones son similares a las definidas entre conjuntos y tienen sus mismas propiedades. Para definir la Probabilidad conviene también considerar la idea

de incompatibilidad. Dos sucesos son incompatibles cuando no se pueden verificar simultáneamente.

$$A \text{ y } B \text{ son incompatibles} \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$$

Un caso particular es el de sucesos complementarios. Dos sucesos son complementarios (o contrarios) siempre que se verifica uno de ellos no se produce el otro:

$$A \text{ y } B \text{ son complementarios} \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing \text{ y } A \cup B = \Omega$$

Se denota por $A^c$ al suceso complementario (o contrario) del suceso A. Entre las propiedades del suceso contrario se hallan las siguientes:

$$\Omega^c = \varnothing \qquad \varnothing^c = \Omega \qquad A \cup A^c = \Omega \qquad A \cap A^c = \varnothing$$

**Probabilidad**

Una vez dotado al espacio *U* de estructura de álgebra de Boole, es posible definir la Probabilidad. Se llama Probabilidad a toda función que asocia a cada suceso A, del espacio de sucesos U, un número real comprendido entre 0 y 1, que se representa por P(*A*).

$$P: U \rightarrow R$$

$$A \rightarrow P(A)$$

Donde los tres axiomas que enuncia Kolmogorov sobre la Probabilidad son:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$, $\forall A \in U$; es decir, la Probabilidad sólo toma valores positivos comprendidos entre 0 y 1.
2. $P(\Omega) = 1$. La Probabilidad del suceso seguro es 1.
3. Si A, B $\in U$ y $A \cap B = \varnothing$ (sucesos incompatibles, no ocurren simultáneamente); entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Si un conjunto de sucesos son mutuamente excluyentes o incompatibles, entonces la Probabilidad de su unión es la suma de las probabilidades de cada uno.

Se llama *espacio probabilístico o espacio de probabilidades*, asociado a un experimento aleatorio, a la terna ($\Omega$, *U, P*) donde $\Omega$ es el espacio muestral, *U* es el álgebra de sucesos y *P* una probabilidad definida sobre *U*. Es de notar que a un mismo experimento aleatorio se le pueden asociar distintos espacios probabilísticos, sin más que modificar la Probabilidad. Otras propiedades de la Probabilidad que se derivan de estos tres axiomas son:

- La probabilidad del suceso complementario de $A$ es igual a 1 menos la probabilidad del suceso $A$, esto es: $P(A^c) = 1 - P(A)$.
- La probabilidad del suceso imposible es cero, esto es: $P(\varnothing) = 0$.
- Sean $A$ y $B$ dos sucesos cualesquiera, no necesariamente incompatibles, entonces se cumple: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- La probabilidad de un suceso compuesto $A$ es igual a la suma de las probabilidades de los sucesos elementales que lo conforman, teniendo en cuenta que estos sucesos elementales son incompatibles; esto es, si $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$, $P(A) = P(a_1) + \ldots + P(a_k)$.

**Probabilidad condicionada e independencia**

En algunas situaciones, se puede tener alguna información sobre la ocurrencia de sucesos que pueden estar relacionados con el suceso de interés. En tales casos, entra en juego el concepto de probabilidad condicionada. Formalmente, sean ($\Omega$, $U$, $P$) el espacio de probabilidades, $A$ y $B$ sucesos cualesquiera en $U$, el primero con probabilidad no nula. Se llama *probabilidad del suceso B condicionada por el suceso A*, al cociente:

$$P(B \,/\, A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

De la definición anterior se obtienen dos expresiones que permiten calcular la probabilidad de la intersección de los sucesos $A$ y $B$.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B \,/\, A) \qquad\qquad P(A \cap B) = P(B) \times P(A \,/\, B)$$

Esta regla, que se conoce como *teorema de la probabilidad compuesta o del producto*, puede generalizarse sin dificultad a tres o más sucesos:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B/A)P(C/A \cap B)$$

$$P(A1 \cap A2 \ldots \cap An) = P(A1)P(A2/A1) \ldots P(An/A1 \cap \ldots \cap An - 1)$$

A veces, la probabilidad de un suceso $B$ condicionada por otro $A$ es la misma que la probabilidad del suceso $B$, cuando no se impone condición. Esta propiedad se utiliza para la definición de dependencia e independencia entre sucesos: Sea $A$ un suceso en un espacio de sucesos $U$, si $P(A) \neq 0$, un suceso *B es independiente del suceso A si P(B/A) = P(B)*. En caso contrario si $P(B/A) \neq P(B)$, *el suceso B depende del suceso A*.

Es de notar que dos sucesos son independientes mutuamente, puesto que en el caso de que $B$ no dependa de $A$ se verifica: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, y por tanto, $P(A/B) = P(A)$, por lo cual $A$ tampoco depende de $B$.

Un teorema importante es el *Teorema de Bayes* (véase Godino, Batanero y Cañizares, 1987). Si los sucesos $A_1$, $A_2$, …, $A_n$ forman una partición del espacio muestral $\Omega$, es decir si se verifican las dos condiciones siguientes: (i) si son incompatibles dos a dos, y (ii) la unión de todos es el espacio muestral. Y si las probabilidades de estos sucesos P($A_i$) no son nulas para todo $i= 1,...,n$; entonces para todo suceso $B$ del espacio muestral $\Omega$, de probabilidad no nula se verifica:

$$P(Ai/B) = \frac{P(Ai) \times P(B/Ai)}{P(A1)P(B/A1) + P(A2)P(B/A2) + \cdots + P(An)P(B/An)}$$

El denominador de esta fórmula corresponde al *teorema de las probabilidades totales.*

**Experimentos compuestos**

Las anteriores definiciones son válidas para espacios muestrales generados por experimentos aleatorios *simples*, que corresponde a situaciones problema que no se puede dividir en partes; o *compuestos*, que constan de varios experimentos simples realizados en forma sucesiva o simultánea.

Denotemos con $\Omega_1=\{a_1, a_2,...\}$ y $\Omega_2=\{b_1,b_2,...\}$ a los espacios muestrales de dos experimentos aleatorios simples. Representamos al espacio muestral del experimento compuesto por estos dos experimentos simples mediante el producto combinatorio ($\Omega_1$, $\Omega_2$) que contiene el conjunto de todas las parejas ordenadas ($a_i$, $b_j$) tales que $a_i \in \Omega_1$ y $b_j \in \Omega_2$ (Feller, 1983). La generalización a experimentos compuestos con k etapas (más de dos) implica la extensión de las siguientes definiciones a espacios muestrales generados por el producto combinatorio ($\Omega_1,..., \Omega_k$) donde $\Omega_i$ es el espacio muestral simple de la i-ésima etapa.

Cuando los sucesos "el primer resultado es $a_i$" y "el segundo resultado es $b_j$" son siempre estadísticamente independientes, los experimentos se dicen independientes y la probabilidad de cada punto muestral en ($\Omega_1$, $\Omega_2$) se define en forma general, dados $p_i=P(a_i \in \Omega_1)$ y $q_j=P(b_j \in \Omega_2)$, como P(($a_i$, $b_j$) $\in$ ($\Omega_1$, $\Omega_2$))= $p_i q_j$ para todo $a_i \in \Omega_1$ y $b_j \in \Omega_2$ (Feller, 1983). Situaciones problema de este tipo son el muestreo con reemplazamiento o las loterías tradicionales.

Cuando los sucesos "el primer resultado es $a_i$" y "el segundo resultado es $b_j$" no son estadísticamente independientes se tiene que P(($a_i$, $b_j$) $\in$ ($\Omega_1$, $\Omega_2$))= $p_i q_{j/i}$ donde $q_{j/i}$ =

P($b_j \in \Omega_2 / \ a_i \in \Omega_1$). Situaciones problema de este tipo son el muestreo sin reemplazamiento, los modelos de urnas con extracciones simultáneas de un mismo dispositivo, o la lotería primitiva.

**Variable aleatoria discreta**

Una *variable aleatoria X* es una función de conjunto cuya imagen es real y está definida sobre el espacio muestral $\Omega$, asociado a un experimento aleatorio (Wilhelmi, 2004). Es decir, a cada suceso elemental $s$ le asocia un valor real X($s$), en otros términos:

$$X: \Omega \rightarrow R$$

$$s \rightarrow X(s)$$

Una variable aleatoria es discreta cuando la imagen es numerable.

Se llama *distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta X* a la función de variable real y con dominio de valores contenido en el intervalo real [0; 1] dada por: P($X= k$) = P($X^{-1}(k)$) = P($A$) donde $A = X^{-1}(k) = \{s \in \Omega / X(s) = k\}$, es decir, $A$ es la imagen inversa de la variable aleatoria; exigiéndose que $A$ sea un elemento del álgebra $U$. El término *distribución de probabilidad* se refiere a la colección que incluye tanto los valores de la variable aleatoria como sus respectivas probabilidades.

A continuación se presenta la definición de algunos modelos de probabilidad que sirven para modelizar situaciones cotidianas y que son utilizados en forma implícita en los textos de primaria y secundaria.

*Distribución uniforme*: La colección de valores de una variable aleatoria X están distribuidos de forma uniforme en $m$ puntos ($x_1, \ldots, x_m$) si:

$$P(X = k) = \frac{1}{m}; \text{si } k = x_i, \text{ para i} \in \{m \in N / 1 \leq i \leq m\}$$

En cualquier otro caso, $P(X = k) = 0$. Esta distribución de probabilidades se tiene cuando hay sucesos elementales equiprobables y cada uno genera un valor diferente de $X$.

*Distribución de Bernoulli*: Sea una variable aleatoria X, que puede tomar sólo los valores 0 o 1, y sea $\pi$ la probabilidad del valor 1; entonces la colección de valores de esta variable aleatoria X están distribuidos según Bernoulli si:

$$P(X = k; \pi) = \pi^k (1 - \pi)^{1-k}; \text{ si } k \in \{0, 1\}$$

En cualquier otro caso $P(X = k) = 0$.

Una situación aleatoria que tiene las siguientes propiedades se conoce como *experimento Bernoulli*:

- El experimento es repetible bajo idénticas condiciones.
- Los resultados de un intento (cualquiera) sólo admiten una de dos opciones, suelen clasificarse como éxito o fracaso (también puede ser tener o no una característica).
- La probabilidad de éxito se representa por $\pi$.

Es de notar que la mayoría de problemas o actividades propuestas a nivel escolar se corresponde con un contexto de juegos (como extracción de una bola o lanzamiento de una moneda) o de tipo cotidiano, en cuyo caso el espacio muestral suele tener más resultados posibles. La variable aleatoria se define, de forma implícita, como una indicadora de poseer una característica en particular, de manera que sus posibles valores son 1 si el suceso tiene la característica y 0 si no la tiene.

Desde el punto de vista de la enseñanza, se utiliza el significado formal de la Probabilidad a partir de los axiomas de Kolmogorov, de los cuales se pueden deducir la definición de probabilidad y experimento compuesto, probabilidad condicional, variable aleatoria y función de distribución, entre otros conceptos. Sin embargo, esta aproximación es poco apropiada en los primeros niveles de formación (Godino, Batanero y Cañizares, 1987). Es decir, se debería posponer hasta que hayan comprendido las definiciones clásica, frecuencial y subjetiva.

### 1.5.6 SÍNTESIS DE SIGNIFICADOS

En definitiva, cuando comparamos los diferentes enfoques de probabilidad, vemos que cada uno puede ser aplicado en alguna circunstancia. El significado frecuencial puede aplicarse cuando los experimentos pueden repetirse indefinidamente, mientras que el subjetivo se puede aplicar a un único caso irrepetible. Aunque en ocasiones, por lo general, se dispondrá de alguna información frecuencial pero no será suficiente, por lo que será preciso una cierta dosis de juicio personal.

Por otro lado, se observará que la filosofía de la Probabilidad es sumamente controvertida, por lo que el tratamiento de estos temas en las escuelas debe hacerse, pero siempre que no se trate de transmitir teorías matemáticas ni filosóficas. Los objetivos deben orientarse hacia el desarrollo de los aspectos intuitivos de las distintas aproximaciones mediante situaciones de aprendizaje apropiadas. (Godino, Batanero y Cañizares, 1987).

Para finalizar, se reproducen en la tabla 1.3 algunos de los diferentes objetos matemáticos presentes en los significados que han sido tenidos en cuenta, implícita o explícitamente hasta ahora en la enseñanza.

| SIGNIFICADO DE LA PROBABILIDAD | CAMPOS DE PROBLEMAS | ALGORITMOS Y PROCEDIMIENTOS | ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS | DEFINICIONES Y PROPIEDADES | ALGUNOS CONCEPTOS RELACIONADOS |
|---|---|---|---|---|---|
| Intuitivo | - Sorteo<br>- Adivinación | - Manipulación de generadores de azar: dados, cartas… | - Lenguaje ordinario | - Opinión, impredecible, creencia | - Suerte<br>- Destino |
| Clásica | - Cálculo de esperanzas o riesgos en juegos de azar | - Combinatoria<br>- Proporciones<br>- Análisis a priori de la estructura del experimento | - Triángulo aritmético<br>- Listados de sucesos<br>- Fórmulas combinatorias | - Cociente de casos favorables y posibles<br>- Equiprobabilidad de sucesos simples | - Esperanza<br>- Equitatividad<br>- Independencia |
| Frecuencial | - Estimación de parámetros en poblaciones | - Registros de datos estadísticos a posteriori<br>- Ajuste de curvas de matemáticas<br>- Análisis matemático<br>- Simulación | - Tablas y gráficos estadísticos<br>- Curvas de densidad<br>- Tablas de números aleatorios<br>- Tablas de distribuciones | - Límite de las frecuencias relativas<br>- Carácter objetivo basado en la evidencia empírica | - Frecuencia relativa<br>- Universo<br>- Variable aleatoria<br>- Distribución de probabilidad |
| Subjetiva | - Mejora del conocimiento sobre sucesos inciertos, incluso no repetibles | - Teorema de Bayes<br>- Asignación subjetiva de probabilidades | - Expresión de la probabilidad condicional | - Carácter subjetivo<br>- Revisable con la experiencia | - Probabilidad condicional<br>- Distribuciones *a priori y a posteriori* |
| Axiomática | - Cuantificar la incertidumbre de resultados en experimentos aleatorios abstractos | - Teoría de conjuntos<br>- Álgebra de conjuntos<br>- Teoría de la medida | - Símbolos conjuntistas | - Función medible | - Espacio muestral<br>- Espacio de probabilidad<br>- Conjunto de Borel |

Tabla 1.3. Elementos que caracterizan los diferentes significados de la Probabilidad.

Según Batanero, *"los diferentes significados de la Probabilidad deberían incluirse progresivamente, comenzando desde las ideas intuitivas de los alumnos sobre el Azar y la Probabilidad, ya que la comprensión es un proceso continuo y creciente*

*por el cual el alumno construye y relaciona progresivamente los diferentes elementos del significado que atañen al concepto"* (Batanero C, 2005).

## 1.6 VISIÓN HISTÓRICA DE LOS JUEGOS DE AZAR Y CÁLCULO DE PROBABILIDADES

Los orígenes de la Probabilidad han resultado difíciles de encontrar debido a que comienza siendo principalmente una ciencia empírica y es difícil decir cuándo se produce el cambio desde el empirismo al formalismo matemático, ya que parece haber tenido lugar hace cientos de años.

Pascal se interesó por el Cálculo de Probabilidades porque el caballero de Meré le proponía juegos de azar. Esto sugiere pensar que el origen del Cálculo de Probabilidades se encuentra estrechamente ligado a los juegos de azar.

Homero (900 a.C.), véase Godino, Batanero y Cañizares (1987), cuenta que cuando Patroclo era pequeño, se enfadó tanto con un oponente jugando con el astrágalo (hueso usado por varias civilizaciones antiguas, hace 40.000 años) que casi le mató. En Roma alcanzaron tal popularidad que fue necesario promulgar leyes para prohibirlos en ciertas estaciones.

El dado cúbico más antiguo que se conoce fue encontrado en el norte de Iraq, construido en cerámica, y está fechado al comienzo del tercer milenio antes de Cristo. En el antiguo Egipto también se han encontrado dados con números colocados en diversas posiciones. El uso de las cartas data de una época más reciente, concretamente, al comienzo del siglo XV. En la *Vida de Claudio* de Suetonio se nos cuenta que este emperador romano eran tan aficionado a los dados que escribió un libro sobre ellos, y que acostumbraba a jugar mientras viajaba.

Durante la Edad Media, la fuerte costumbre de practicar juegos con los dados y astrágalos se pone de manifiesto por la insistencia, tanto de los obispos como de los reyes, en prohibirlos o controlarlos. El motivo estaba en evitar los vicios que con frecuencia lo acompañaban, así como la adivinación de acontecimientos futuros se realizaba según los resultados de un experimento aleatorio.

Kendall (1978), ver Godino, Batanero y Cañizares (1987), pasa a analizar las siguientes causas: la ausencia de un álgebra combinatoria; la ausencia de una noción de suceso aleatorio y la existencia de barreras morales o religiosas para el desarrollo de la idea de aleatoriedad y azar.

El interés por el cálculo combinatorio se despierta en los siglos XVI y XVII. Leibnitz, consultar Godino, Batanero y Cañizares (1987), publicó el tratado *De arte combinatoria* en 1660 y Wallis, véase Godino, Batanero y Cañizares (1987), *De combinatioribus Alternatioribus et Partibus Aliquotis Tractatus* en 1685.

Kendall piensa que la ausencia del álgebra combinatoria no puede ser una causa de la doctrina del Azar, ya que Cardano se manejó bastante bien sin ella y Galileo enumeró 216 maneras distintas de caer tres dados perfectos basándose sólo en métodos aritméticos. Este autor atribuye un peso importante a la influencia del pensamiento de los primeros Padres de la Iglesia de que Dios está presente en todas partes: "Algunas causas se conocen, otras no, pero nada sucede sin causa". En este sentido, nada sería aleatorio, no había ningún azar. Este punto de vista prevaleció durante la época medieval.

Con la invención de la imprenta (1450) y su rápido desarrollo durante la segunda mitad del siglo XV, las referencias a los juegos de azar se hacen más numerosas, por ejemplo: en Rabelais; Leonicus (nacido en Venecia, en 1456), y el astrónomo Calcagnini (nacido en Ferrara, en 1479), ver Godino, Batanero y Cañizares (1987).

Gerolano Cardano (nacido en Pavía, en 1501) fue el que dio el primer paso para calcular probabilidades. Cardano era médico, filósofo, ingeniero, matemático puro y aplicado. Siendo un gran jugador, escribió el libro *Liber de Ludo Alea (Libro de los juegos de azar)* en 1526, consultar Godino, Batanero y Cañizares (1987). En la sección titulada "Sobre la previsión de un dado", expone un razonamiento basado en la equiprobabilidad de las distintas caras (en el caso de estar bien construido) para calcular probabilidades de sucesos.

Los escritos de Galileo, entre los que destaca *Considerazione circa il giuco dei dadi*, ver Godino, Batanero y Cañizares (1987), muestra que el cálculo de una probabilidad a partir del concepto matemático de equiprobabilidad de las caras de un dado era ya bien conocido por los matemáticos italianos del siglo XVI.

Además de Cardano y Galileo, muchos autores atribuyen el origen sobre el Cálculo de las Probabilidades a Pascal y Fermat (1654) acerca de la solución de los problemas sobre juegos de azar planteados por el caballero de Meré.

El desarrollo de la teoría recibió un gran impulso con la publicación en 1657 de la obra del físico, geómetra y astrónomo holandés Christian Huygens, *Tractatus de Ratiocinius in Aleae Ludo*, véase Godino, Batanero y Cañizares (1987), quien entró en contacto en 1655 con las ideas de Pascal y Fermat por intermedio de Roberval, profesor

de Matemáticas en el College Royal de Francia. En su tratado, Huygens plantea de una manera sistemática lo que había aprendido en París y añade algunos resultados obtenidos por sí mismo. Huygens se ha ganado el derecho de ser considerado el padre de la Teoría de la Probabilidad.

A mediados del siglo XVII, Leibniz, en 1666 publica su *De Arte Combinatoria,* y establece de manera sistemática la teoría combinatoria sobre una base científica. Jacques Bernoulli (1713) escribe *Ars conjectandi*, obra póstuma publicada por Nicolas Bernoulli, que contiene la primera formulación de la ley de los grandes números (teorema de Bernoulli). J. Bernoulli y Leibniz ven en la Probabilidad la posibilidad de una nueva lógica que iría más allá de los argumentos necesarios y permitiría relativizar la importancia de la contradicción, ponderando las proposiciones.

Poco después, el conde de Buffon (G. L. Leclerc) publica su *Essai d´arithmetique morale* (1733), ver Godino, Batanero y Cañizares (1987), y da el primer ejemplo de probabilidades geométricas.

Otro avance en el desarrollo del Cálculo de Probabilidades corresponde a De Moivre, consultar Godino, Batanero y Cañizares (1987), a quien se debe el teorema de la probabilidad compuesta; también dedujo la aproximación de la distribución binomial por la curva normal. En 1718 publicó su obra *Doctrine of chances*, de contenido parecido al *Ars conjectandi*, que incluye problemas sobre juegos, seguros y otras aplicaciones de la Probabilidad a las cuestiones sociales.

El reverendo Thomas Bayes, quien desarrolló de forma completa la IV parte del *Ars conjectandi* que Jacques Bernoulli había dejado sin terminar y obtuvo la fórmula de la probabilidad inversa (conocida como Teorema de Bayes y publicada en 1763, véase Godino, Batanero y Cañizares, 1987).

Laplace nació en 1849, publicó un gran número de memorias sobre la teoría de probabilidades. En 1812 reunió estos trabajos y los unificó en una obra monumental, tanto por su importancia como por su volumen, titulada *Teoría analítica de las probabilidades*, ver Godino, Batanero y Cañizares (1987), en la que, partiendo de los métodos analíticos obtenidos en este campo desde Pascal y Fermat, trata de los problemas del Azar por los métodos más difíciles. En esta obra se encuentra desarrollado el "método de los mínimos cuadrados" que, aunque, en forma empírica, habían iniciado Legendre y Gauss al estudiar los problemas de las pruebas repetidas. Laplace publicó la demostración exacta del principio que luego ha sido la base de la

teoría de errores. Gauss y Legendre ampliaron también los campos de aplicación de la Probabilidad a las rentas, seguros, tablas de mortalidad, supervivencia…

Los progresos realizados por Laplace y sus colaboradores más inmediatos (Legendre y Gauss) eran tan considerables que, después de ellos, lo que quedaba por realizar era sobre todo la labor de crítica y perfeccionamiento, de precisión y de ordenación.

Simeón-Denis Poisson, consultar Godino, Batanero y Cañizares (1987), matemático francés entre cuyas obras destaca la titulada *Recheches sur la probabilité de jugements en matière criminelle et en matière civille, precedées des règles générales de Calcul des Probabilités*, publicada en 1837, donde demuestra la aproximación de la distribución binomial por la de Poisson y generaliza la ley de los grandes números.

Antonio-Augusto Cournot, ver Godino, Batanero y Cañizares (1987), quien formuló una nueva definición de probabilidad basada en la estabilidad de las frecuencias relativas en su obra *Exposition de la theorie des chances et des probabilités*, editada en 1843.

Otros autores que tratan el aspecto filosófico y lógico de las probabilidades y buscan demostraciones más sencillas de muchos teoremas son: Bertrand, Boole, Ellis, Venn, Edgeworth, Peirce.

En el primer tercio del siglo XX se configuran varias escuelas que tratan de superar el estancamiento inicial, desde el punto de vista de los métodos matemáticos, de la Estadística y de la Probabilidad. La definición axiomática de la Probabilidad, así como el uso de la teoría de conjuntos, ha permitido incorporar estos estudios dentro de las corrientes de la Matemática Moderna.

Ronald A. Fisher, profesor de genética en Cambridge, que junto con Student iniciaron el tratamiento de los problemas de inferencia estadística.

John Maynard Keynes, economista inglés, que escribió *Treatise on probability*, véase Godino, Batanero y Cañizares (1987), en el que realiza una crítica a la teoría clásica de la Probabilidad en el sentido de Laplace y hace una nueva formulación de tipo lógico.

La interpretación de la Probabilidad como "frecuencias relativas a largo plazo" es debida al matemático austriaco Richard von Mises, ver Godino, Batanero y Cañizares (1987), siendo su obra más destacada *Probabilidad, Estadística y Verdad*, publicada en 1928.

En 1933 el matemático ruso Kolmogorov profundizó en las ideas de von Mises, estableció una axiomática tomando como base la teoría de la medida desarrollada por Borel y Radon.

En la actualidad, la Estadística y la Probabilidad están fuertemente asentadas como dos de las ramas más fecundas de la Matemática. Existen departamentos universitarios de estas especialidades en las principales universidades de todo el mundo dedicados a su enseñanza e investigación, así como numerosas sociedades científicas nacionales e internacionales y revistas específicas de estas materias y el campo de aplicación se ha ampliado en: física, astronomía, negocios, gobierno, sanidad…

## 1.7 LA PROBABILIDAD EN LA ENSEÑANZA OBLIGATORIA

### 1.7.1 INTRODUCCIÓN

En esta sección describiremos algunos contenidos relacionados con la Probabilidad en el currículo español de Educación Primaria y Educación Secundaria Obligatoria. Posteriormente analizaremos las recomendaciones de los organismos internacionales sobre la enseñanza del tema, en particular las orientaciones del NCTM (2000).

### 1.7.2 LA PROBABILIDAD EN LAS ORIENTACIONES CURRICULARES

**La Probabilidad en la Educación Primaria**

Ley Orgánica de Educación (LOE)

La finalidad de esta etapa es proporcionar a todos los niños y niñas una educación que permita afianzar su desarrollo personal y su propio bienestar, adquirir las habilidades culturales básicas relativas a la expresión y comprensión oral, a la lectura, a la escritura y al cálculo, así como desarrollar las habilidades sociales, los hábitos de trabajo y estudio, el sentido artístico, la creatividad y la afectividad (MEC, 2006a).

El Ministerio de Educación y Ciencia (MEC, 2006a), en el bloque Tratamiento de la información, azar y probabilidad incluye los siguientes contenidos específicos sobre Azar y Probabilidad en la Educación Primaria:

- *Primer ciclo (6- 7años)*: Tratamiento de la información, azar y probabilidad: Carácter aleatorio de algunas experiencias. Distinción entre lo imposible y lo seguro y aquello que es posible pero no seguro, y utilización en el lenguaje habitual, de expresiones relacionadas con la probabilidad.

- *Segundo ciclo (8- 9 años)*: Tratamiento de la información, azar y probabilidad: Carácter aleatorio de algunas experiencias. Valoración de los resultados de experiencias en las que interviene el azar, para apreciar que hay sucesos más o menos probables y la imposibilidad de predecir un resultado concreto. Introducción al lenguaje del azar.
- *Tercer ciclo (10- 11 años)*: Tratamiento de la información, azar y probabilidad: Carácter aleatorio de algunas experiencias. Presencia del azar en la vida cotidiana. Estimación del grado de probabilidad de un suceso.

Se señala que los juegos de azar proporcionan ejemplos que permitirán introducir las nociones de probabilidad e incertidumbre. Para la probabilidad se pretende que el alumnado sea capaz de razonar sobre los posibles resultados de un experimento aleatorio sencillo, que asignen probabilidades a sucesos equiprobables o no, utilizando distintas estrategias sobre técnicas de conteo. También se propicia la asignación frecuencial, a partir de experimentos organizados en la clase, que permiten enlazar estadística y probabilidad.

Encontramos también en este documento los siguientes criterios de evaluación, relacionados con la probabilidad:

- *Primer ciclo*: Se pretende evaluar si los niños y las niñas están familiarizados con conceptos y términos básicos sobre el azar: seguro, posible, imposible.
- *Tercer ciclo*: Hacer estimaciones basadas en la experiencia sobre el resultado (posible, imposible, seguro, más o menos probable) de situaciones sencillas en las que intervenga el azar y comprobar dicho resultado. Además, se comprobará que hay sucesos imposibles, sucesos que se producen con casi toda seguridad, o que se repiten, siendo más o menos probable esta repetición. Estas nociones estarán basadas en la experiencia.

La evaluación considerará además de los aspectos propios de la clasificación y representación de datos, la capacidad para deducir relaciones entre ellos y, sobre todo, la deducción de conclusiones y estimaciones a partir de los datos representados.

La Comunidad Autónoma de Canarias (Consejería de Educación, 2007a) remite a estos mismos contenidos, añadiendo en el primer ciclo la intuición del concepto de suceso mediante juegos que lleven a la identificación de los elementos de un conjunto, pertenencia o no de un elemento a dicho conjunto, añadiendo que los juegos de azar proporcionan ejemplos que permitirán introducir la noción de probabilidad. Respecto a los criterios de evaluación repite los citados del ministerio.

Ley Orgánica de Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE)

La finalidad de la asignatura de Matemáticas en esta etapa es construir los fundamentos del razonamiento lógico-matemático en los niños y las niñas, y no únicamente centrarse en la enseñanza del lenguaje simbólico-matemático. Solo así podrá, la educación matemática, cumplir su función formativa, contribuyendo al desarrollo cognitivo; al instrumental, permitiendo posteriores aprendizajes tanto de Matemáticas como de otras asignaturas; y al funcional, posibilitando la comprensión y resolución de problemas de la vida cotidiana (Consejería de Educación, 2014).

La Consejería de Educación de la Comunidad Autónoma de Canarias (Consejería de Educación, 2014), en el bloque Estadística y Probabilidad incluye los siguientes contenidos específicos sobre azar y probabilidad en la Educación Primaria:

- *Tercer curso (8 años)*: Utilización del lenguaje del azar. Valoración de los sucesos como más o menos probables, posibles e imposibles.
- *Cuarto curso (9 años)*: Identificación del carácter aleatorio de experiencias en situaciones de juego. Uso del vocabulario propio de la probabilidad con expresiones como suceso, describiéndolo como "seguro, probable e imposible". Acercamiento al cálculo de probabilidades como número de casos favorables entre el de casos posibles, para sucesos cuyo resultado coincida con las fracciones y porcentajes ¼, 25%, ½, 50%, 3/4, 75% y 100%.
- *Quinto curso (10 años)*: Identificación del carácter aleatorio de algunas experiencias en la vida cotidiana. Uso del vocabulario propio de la probabilidad con expresiones como suceso, describiéndolo, como "seguro, probable, imposible". Relación de la probabilidad de un suceso (comprendida entre 0 y 1), con las fracciones y los porcentajes. Cálculo de la probabilidad de un suceso como el número de casos favorables entre el de casos posibles para sucesos equiprobables (Regla de Laplace).
- *Sexto curso (11 años)*: Relación de la probabilidad de un suceso (comprendida entre 0 y 1), con las fracciones y los porcentajes. Confianza en las propias posibilidades e interés por utilizar las herramientas tecnológicas en la comprensión de los contenidos funcionales. Cálculo de la probabilidad de un suceso como el número de casos favorables entre el de casos posibles para sucesos equiprobables (Regla de Laplace).

Encontramos también en este documento los siguientes criterios de evaluación, relacionados con la probabilidad:

- *Tercer curso (8 años)*: Este criterio trata de comprobar que responde a preguntas donde sea necesario utilizar correctamente las expresiones seguro, imposible y posible, atendiendo a la interpretación hecha de las representaciones gráficas realizadas por ellos u otras que se les presenten.
- *Cuarto curso (9 años)*: En un contexto de juegos: parchís, oca, dados, cartas, monedas, fichas de colores…, se averiguará si el alumnado utiliza adecuadamente las fracciones y porcentajes ¼, 25%, ½, 50%, ¾, 75% y 100%, para cuantificar la probabilidad de un suceso.
- *Quinto curso (10 años)*: Con este criterio se quiere comprobar que, en situaciones sencillas de juegos, utilizando fichas, cartas, dados…, el alumnado identifica si un suceso es seguro, imposible, o más o menos probable; hace estimaciones basadas en la experiencia sobre los resultados posibles en contextos en los que interviene el azar, y las comprueba, si procede, mediante la experimentación y el análisis de posibilidades (casos favorables entre casos posibles), realizando los cálculos necesarios con la calculadora.
- *Sexto curso (11 años)*: Con el criterio se quiere comprobar que el alumnado, en situaciones de juego o de la vida cotidiana, utilizando fichas, cartas, dados…, identifica que un suceso es seguro, imposible, o más o menos probable; realiza una estimación de la probabilidad de un suceso basada en la experiencia sobre los resultados posibles en contextos en los que interviene el azar, y la comprueba mediante el análisis de posibilidades (casos favorables entre casos posibles), realizando los cálculos necesarios con la calculadora. Investiga juegos en los que interviene el azar y analiza las consecuencias negativas de las conductas adictivas en este tipo de juegos.

**La Probabilidad en la Educación Secundaria Obligatoria**

En el curso 2015-2016 han convivido dos ordenaciones de enseñanzas en la etapa de Educación Secundaria Obligatoria: la ordenación LOE en 2º. y 4º. curso y la ordenación LOMCE en 1º. y 3º., obedeciendo al calendario de implantación establecido en la disposición final quinta de la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (LOMCE). Por tanto, en los cursos pares de esta etapa se seguirá tomando como referencia para nuestra Comunidad Autónoma el Decreto 127/2007, de 24 de mayo, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Canarias (BOC nº.

113, de 7 de junio). Por su parte, para los cursos impares, la referencia será el Decreto 315/2015, de 28 de agosto**,** por el que se establece la ordenación de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Canarias (BOC n.º 169, de 28 de agosto), así como el Proyecto de Decreto, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato para esta Comunidad Autónoma, que se encuentra en trámite y que supone la concreción del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato (BOE n.º 3, de 3 de enero). La Consejería de Educación y Universidades publica, con carácter orientativo, los borradores de los currículos que se publicarán como anexos al mencionado Proyecto de Decreto de currículo. A partir del curso 2016-2017 se implanta en todos los cursos de la Educación Secundaria Obligatoria la LOMCE.

Ley Orgánica de Educación (LOE)

La finalidad de la Educación Secundaria Obligatoria consiste en lograr que los alumnos y alumnas adquieran los elementos básicos de la cultura, especialmente en sus aspectos humanístico, artístico, científico y tecnológico; desarrollar y consolidar en ellos hábitos de estudio y de trabajo; prepararles para su incorporación a estudios posteriores y para su inserción laboral y formarles para el ejercicio de sus derechos y obligaciones en la vida como ciudadanos (MEC, 2006b).

Respecto a la Enseñanza Secundaria Obligatoria el Decreto de Enseñanzas Mínimas de la Educación Secundaria (MEC, 2006b), incluye, entre otros, los siguientes contenidos dentro del Bloque 6, Estadística y Probabilidad:

- *Primer curso*: Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos y diseño de experiencias para su comprobación.
- *Tercer curso*: Experiencias aleatorias. Sucesos y espacio muestral. Utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar. Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace. Formulación y comprobación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos. Cálculo de la probabilidad mediante la simulación o experimentación. Utilización de la probabilidad para tomar decisiones fundamentadas en diferentes contextos.
- *Cuarto curso. Opción A*: Experiencias compuestas. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para el recuento de casos y la asignación de probabilidades.

- *Cuarto curso. Opción B*: Experiencias compuestas. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para el recuento de casos y la asignación de probabilidades. Probabilidad condicionada.

  Se incluyen, asimismo, los siguientes criterios de evaluación:

- *Primer curso*: Hacer predicciones sobre la posibilidad de que un suceso ocurra a partir de información previamente obtenida de forma empírica. Se trata de valorar la capacidad para diferenciar los fenómenos deterministas de los aleatorios y, en estos últimos, analizar las regularidades obtenidas al repetir un número significativo de veces una experiencia aleatoria y hacer predicciones razonables a partir de los mismos.
- *Tercer curso*: Hacer predicciones sobre la posibilidad de que un suceso ocurra a partir de información previamente obtenida de forma empírica o como resultado del recuento de posibilidades, en casos sencillos. Se pretende medir la capacidad de identificar los sucesos elementales de un experimento aleatorio sencillo y otros sucesos asociados a dicho experimento. También la capacidad de determinar e interpretar la probabilidad de un suceso a partir de la experimentación o del cálculo (regla de Laplace), en casos sencillos. Por ello tienen especial interés las situaciones que exijan la toma de decisiones razonables a partir de los resultados de la experimentación, simulación o, en su caso, del recuento.
- *Cuarto curso. Opción A*: Aplicar los conceptos y técnicas de cálculo de probabilidades para resolver diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana. Se pretende que sean capaces de identificar el espacio muestral en experiencias simples y en experiencias compuestas sencillas, en contextos concretos de la vida cotidiana, y utilicen la regla de Laplace, los diagramas de árbol o las tablas de contingencia para calcular probabilidades.
- *Cuarto curso. Opción B*: Aplicar los conceptos y técnicas de cálculo de probabilidades para resolver diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana. Se pretende que sean capaces de identificar el espacio muestral en experiencias simples y en experiencias compuestas sencillas, en contextos concretos de la vida cotidiana, y utilicen la regla de Laplace, los diagramas de árbol o las tablas de contingencia para calcular probabilidades.

Respecto a la Consejería de Educación de la Comunidad Autónoma de Canarias (2007b), tanto los contenidos como los criterios de evaluación coinciden con los del ministerio.

Ley Orgánica de Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE)

La finalidad que tiene la asignatura de Matemáticas es que el alumnado continúe desarrollando el razonamiento lógico-matemático iniciado en la etapa anterior, que le permita seguir su desarrollo cognitivo y alcanzar unos niveles mayores de abstracción que en Educación Primaria. Además, dado su carácter instrumental el conocimiento matemático se convierte, en este sentido, en una herramienta, por una parte, eficaz para que el alumnado se enfrente a problemas de la vida real y se desenvuelva en ella de forma activa y autónoma, y para que estructure y comprenda otras ramas científicas; y, por otra parte, indispensable para el tratamiento de la información, el planteamiento de hipótesis, la realización de predicciones y la comprobación de resultados en diferentes contextos. (Consejería de Educación, 2014).

La Consejería de Educación de la Comunidad Autónoma de Canarias (Consejería de Educación, 2014) ha implantado para el curso 2015/2016 en el bloque V: Estadística y Probabilidad incluye los siguientes contenidos específicos sobre Azar y Probabilidad en la Educación Secundaria Obligatoria:

- *Primer curso*: Diferenciación entre los fenómenos deterministas y los aleatorios. Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos y diseño de experiencias para su comprobación. Aproximación a la noción de probabilidad mediante el concepto de frecuencia relativa y la simulación o experimentación. Distinción entre sucesos elementales equiprobables y no equiprobables. Determinación del espacio muestral en experimentos sencillos y uso de tablas y diagramas de árbol sencillos. Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace en experimentos sencillos.

En el tercer curso de la Educación Secundaria Obligatoria el alumnado ha de elegir entre las *matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas y las orientadas a las enseñanzas académicas.* La primera desempeña un papel importante al integrar los conceptos, procedimientos y herramientas adecuados para que el alumnado se enfrente a problemas de la vida real y se desenvuelva en ella de forma activa y autónoma, y para que estructure y comprenda otras ramas científicas. El alumnado que curse esta materia progresará en la adquisición de algunas habilidades de pensamiento matemático, en concreto, en la capacidad de analizar, interpretar y comunicar con técnicas matemáticas

diversos fenómenos y problemas en distintos contextos, así como de proporcionar soluciones prácticas a los mismos y desarrollar actitudes positivas hacia la aplicación práctica del conocimiento matemático, tanto para el enriquecimiento personal como para la valoración de su papel en el progreso de la humanidad. (Consejería de Educación, 2014). Sin embargo, las *matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas* contribuye al desarrollo de habilidades como: comprender, organizar y emitir información; describir y explicar fenómenos y resultados; aumentar en el alumnado la confianza en sí mismo; dotarle de flexibilidad para tratar situaciones y buscar variantes a los problemas; tener paciencia y perseverancia en la búsqueda de soluciones; hacerse preguntas y tomar decisiones; y contribuir al sentido estético y estimular la creatividad y la imaginación. El propio aprendizaje de esta materia tiene un carácter investigador, descubridor y crítico, que capacita al alumnado para analizar la realidad, producir ideas y conocimientos nuevos, entender situaciones, recibir nuevas informaciones y adaptarse a entornos cambiantes. Además, dado su carácter instrumental, el conocimiento matemático se convierte, en este sentido, en una herramienta, por un lado, eficaz para que el alumnado se enfrente a problemas de la vida real y se desenvuelva en ella de forma activa y autónoma, y para que estructure y comprenda otras ramas científicas; y, por otro lado, indispensable para el tratamiento de la información, el planteamiento de hipótesis, la realización de predicciones y la comprobación de resultados en diferentes contextos. (Consejería de Educación, 2014).

- *Tercer curso. Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas*: Identificación de experiencias aleatorias, sucesos y espacio muestral. Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace. Uso de diagramas de árbol. Significado y aplicación de permutaciones y factorial de un número. Utilización de la probabilidad para la toma de decisiones fundamentadas en diferentes contextos.
- *Cuarto curso*. *Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas*: Cálculo de la frecuencia de un suceso aleatorio. Cálculo de probabilidades mediante la Regla de Laplace. Cálculo de probabilidades simple y compuesta. Identificación de sucesos dependientes e independientes. Uso del diagrama en árbol. Investigación de los juegos y situaciones donde interviene el azar.
- *Cuarto curso. Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas*: Introducción a la combinatoria: combinaciones, variaciones y permutaciones. Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace y otras técnicas de

recuento. Cálculo de probabilidades simple y compuesta. Identificación de sucesos dependientes e independientes. Reconocimiento de experiencias aleatorias compuestas. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para la asignación de probabilidades. Cálculo de probabilidad condicionada. Utilización del vocabulario adecuado para la descripción y cuantificación de situaciones relacionadas con el azar.

Encontramos también en este documento los siguientes criterios de evaluación, relacionados con la probabilidad:

- *Primer curso*: Diferenciar los fenómenos deterministas de los aleatorios, en situaciones de juego o de la vida cotidiana, así como inducir la noción de probabilidad a partir del concepto de frecuencia relativa y como medida de incertidumbre asociada a los fenómenos aleatorios para efectuar predicciones sobre la posibilidad de que un suceso ocurra a partir del cálculo de su probabilidad, tanto de forma empírica como mediante la regla de Laplace. Desarrollar conductas responsables respecto a los juegos de azar.
- *Tercer curso. Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas*: Realizar una estimación de la probabilidad de un suceso asociado a un experimento aleatorio sencillo, en situaciones de juego o en la vida cotidiana, y comprobar la estimación realizada mediante el cálculo de probabilidades a partir de su frecuencia relativa, la regla de Laplace o los diagramas de árbol, identificando los elementos asociados al experimento. Desarrollar conductas responsables respecto a los juegos de azar.
- *Cuarto curso. Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Aplicadas*: Asignar probabilidades simples y compuestas a experimentos aleatorios o problemas de la vida cotidiana, utilizando distintos métodos de cálculo y el vocabulario adecuado para la descripción y el análisis de informaciones que aparecen en los medios de comunicación relacionadas con el azar, desarrollando conductas responsables respecto a los juegos de azar.
- *Cuarto curso. Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas*: Resolver problemas de la vida cotidiana aplicando los conceptos del cálculo de probabilidades simples o compuestas y técnicas de recuento adecuadas, así como la regla de Laplace, diagramas de árbol, tablas de contingencia u otras técnicas combinatorias.

En resumen,

**Contenidos de los bloques de *Tratamiento de la información, azar y probabilidad* (LOE) y *Estadística y probabilidad* (LOMCE) en la Educación Primaria**

| ETAPA | LOE (Ley Orgánica de Educación, *DECRETO 126/2007, de 24 de mayo, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de Canarias*). | CURSO | LOMCE (Ley Orgánica de Mejora de la Calidad Educativa, *DECRETO 89/2014, de 1 de agosto, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de Canarias*). |
|---|---|---|---|
| PRIMER CICLO | Gráficos estadísticos. Realización de encuestas cuyas respuestas se expresen con dos o más posibilidades. Recogida de datos en contextos familiares y cercanos, y su organización mediante esquemas, dibujos, gráficos, etc. Descripción verbal, obtención de información cualitativa e interpretación de elementos significativos de gráficos sencillos relativos a fenómenos cercanos. Participación y colaboración activa en el trabajo en equipo y en el aprendizaje organizado a partir de la investigación sobre situaciones reales. Respeto por el trabajo de los demás. | PRIMERO | Descripción verbal, obtención de información cualitativa e interpretación de elementos significativos de gráficos sencillos relativos a fenómenos cercanos. Elaboración de gráficos de barras y pictogramas. |
| | Carácter aleatorio de algunas experiencias. Intuición del concepto de suceso mediante juegos que lleven a la identificación de los elementos de un conjunto, pertenencia o no pertenencia de un elemento determinado a dicho conjunto, diferenciación entre los conceptos de elemento y conjunto en función de la propiedad característica. Distinción entre suceso seguro, imposible y posible, pero no seguro, en situaciones de juego y en experiencias relacionadas con su vida cotidiana. | SEGUNDO | Realización de encuestas cuyas respuestas se expresen con pocas opciones o recogida de datos, en contextos cercanos. Organización de los datos mediante tablas sencillas. Representación de la información utilizando diagramas de barras y pictogramas. Descripción verbal de la información contenida en tablas y gráficos sencillos relativos a fenómenos cercanos. |
| SEGUNDO CICLO | Gráficos y tablas. Lectura, interpretación y comparación de tablas numéricas simples y dobles, gráficas de barras y pictogramas, respondiendo a cuestiones planteadas sobre el objeto, fenómeno o situación representada, diferenciando entre categoría de representación y datos numéricos. Búsqueda, recogida, organización y registro de datos numéricos en tablas, sobre objetos, fenómenos y situaciones familiares, para representarlos gráficamente y/o resolver problemas sencillos utilizando técnicas elementales de encuesta, | TERCERO | Recogida de información utilizando técnicas elementales de encuesta, observación y medición. Clasificación y organización de la información en tablas. Elaboración y presentación de gráficos (diagramas de barras y pictogramas), de forma ordenada y clara. Lectura e interpretación de tablas de datos, gráficas de barras y pictogramas. Confianza en las propias posibilidades y curiosidad, interés y constancia en el trabajo estadístico. |
| | | | Utilización del lenguaje del Azar. Valoración de los sucesos como más o menos probables, posibles e imposibles. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | observación y medición. Construcción de clasificaciones de acuerdo con una regla establecida. Disposición a la elaboración y presentación de gráficos y tablas de una forma ordenada y clara. Confianza en las propias posibilidades, y curiosidad, interés y constancia en la interpretación de los datos presentados de forma gráfica. | | |
| | Interpretación y descripción verbal de elementos significativos de gráficos sencillos relativos a fenómenos familiares. Disposición a la elaboración y presentación de gráficos y tablas de forma ordenada y clara. | CUARTO | Recogida de información en diferentes contextos, utilizando técnicas elementales de encuesta, observación y medición. Construcción de clasificaciones de acuerdo con una regla establecida. Organización y registro de datos numéricos en tablas. Iniciación al concepto de variable y valor de la variable. Elaboración y presentación de gráficos sencillos de barras, lineales y pictogramas de forma ordenada y clara. |
| | | | Identificación del carácter aleatorio de experiencias en situaciones de juego. |
| | Carácter aleatorio de algunas experiencias. Introducción al lenguaje del Azar. Valoración de los resultados de experiencias en las que interviene el Azar, para apreciar que hay sucesos más o menos probables y la imposibilidad de predecir un resultado concreto. Predicción de la Probabilidad de un suceso en experimentos simples y aproximación a la comprobación de dicha predicción. | | Uso del vocabulario propio de la Probabilidad con expresiones como suceso, describiéndolo como "seguro, probable e imposible". |
| | | | Acercamiento al cálculo de probabilidades como número de casos favorables entre el de casos posibles, para sucesos cuyo resultado coincida con las fracciones y porcentajes ¼, 25%, ½, 50%, 3/4, 75% y 100%. |
| TERCER CICLO | Gráficos y parámetros estadísticos. Recogida y registro de datos utilizando técnicas elementales de encuesta, observación, medición y experimentos. Diseño de investigaciones para abordar una pregunta y elegir los métodos de recogida de datos en función de su naturaleza. Distintas formas de organizar y representar un mismo conjunto de datos: tablas de frecuencias, diagramas de sectores y de barras, y obtención de información a partir de ellos. Valoración de la importancia de analizar críticamente las informaciones que se presentan a través de gráficos estadísticos, bajo una correcta interpretación matemática. Inicio en la comprensión y uso de términos como frecuencia absoluta y relativa con respecto al total (fracción/decimal/porcentaje) y de medidas de centralización (moda y media) a partir del análisis de muestras de datos sencillos y | QUINTO | Recogida y registro de datos cualitativos y cuantitativos, utilizando técnicas elementales de encuesta, observación, medición y experimentos. Diseño de investigaciones para obtener información y elección de los métodos de recogida de datos en función de su naturaleza. Organización y representación clara y ordenada de un mismo conjunto de datos: tablas de frecuencias, diagramas de sectores sencillos (mitades, tercios, cuartos, quintos y décimos), y de barras, y obtención de información a partir de ellos. Comprensión y uso de los términos frecuencia absoluta y relativa (fracción/decimal/porcentaje) y de la moda, a partir del análisis de muestras de datos sencillos y habituales en su entorno. |
| | | | Anticipación de resultados de una investigación estadística. Utilización de la calculadora y programas informáticos para cálculos y representaciones gráficas. Distinción entre variable y valor de la variable. Análisis y uso |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | habituales en su entorno. Interés por la elaboración y presentación de gráficos y tablas de forma ordenada y clara. | | crítico de información obtenida en la red, para realizar investigaciones y proyectos, y para expresarse y comunicarse, utilizando recursos y programas informáticos adecuados a cada finalidad, con autonomía personal y grupal. |
| | | | Identificación del carácter aleatorio de algunas experiencias en la vida cotidiana. Uso del vocabulario propio de la Probabilidad con expresiones como suceso, describiéndolo, como "seguro, probable, imposible". |
| | Reconocimiento de las diferencias en la representación de datos cualitativos y cuantitativos discretos. | | Relación de la Probabilidad de un suceso (comprendida entre 0 y 1), con las fracciones y los porcentajes. Cálculo de la Probabilidad de un suceso como el número de casos favorables entre el de casos posibles para sucesos equiprobables (Regla de Laplace). |
| | | SEXTO | Recogida y registro de datos cualitativos y cuantitativos, utilizando técnicas elementales de encuesta, observación, medición y experimentación. Diseño de investigaciones para obtener información y elección de los métodos de recogida de datos en función de su naturaleza. Organización y representación clara y ordenada de un mismo conjunto de datos: tablas de frecuencias, diagramas de sectores sencillos (mitades, tercios, cuartos, quintos y décimos), y de barras, y obtención de información a partir de ellos. Comprensión y uso de los términos frecuencia absoluta y relativa (fracción/decimal/porcentaje), moda, media y rango, a partir del análisis de muestras de datos sencillos y habituales en su entorno. Anticipación de resultados de una investigación estadística. |
| | | | Errores en la construcción de representaciones gráficas y en su interpretación. Análisis crítico de informaciones estadísticas. |
| | Carácter aleatorio de algunas experiencias. Presencia del Azar en la vida cotidiana. Estimación del grado de probabilidad de un suceso describiéndolo con expresiones como "seguro, probable, e imposible". Comprensión de que el grado de probabilidad de un suceso es un número comprendido entre 0 y 1, pudiendo representarse mediante un porcentaje. Valoración de la necesidad de reflexión, razonamiento y perseverancia para superar las dificultades implícitas en la resolución de problemas. Confianza en las propias posibilidades e interés por utilizar las herramientas tecnológicas en | | Utilización de la calculadora y programas informáticos para cálculos y representaciones gráficas. Análisis y uso crítico de información obtenida en la red, para realizar investigaciones y proyectos, y para expresarse y comunicarse, utilizando recursos y programas informáticos adecuados a cada finalidad, con autonomía personal y grupal. |
| | | | Relación de la probabilidad de un suceso (comprendida entre 0 y 1), con las fracciones y los porcentajes. Confianza en las propias posibilidades e interés por utilizar las herramientas tecnológicas en la comprensión de los contenidos funcionales. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | la comprensión de los contenidos funcionales. | | Cálculo de la probabilidad de un suceso como el número de casos favorables entre el de casos posibles para sucesos equiprobables (Regla de Laplace). |

**Contenidos de los bloques de *Estadística y Probabilidad* (LOE) y *Estadística y Probabilidad* (LOMCE) en la Educación Secundaria Obligatoria**

| CURSO | LOE (Ley Orgánica de Educación, *DECRETO 127/2007, de 24 de mayo, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Canarias).* | CURSO | LOMCE (Ley Orgánica de Mejora de la Calidad Educativa, *DECRETO 315/2015, de 28 de agosto, por el que se establece la ordenación de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Canarias*). | |
|---|---|---|---|---|
| PRIMERO | Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos y diseño de experiencias para su comprobación. | PRIMERO | Diferenciación entre los fenómenos deterministas y los aleatorios. Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos y diseño de experiencias para su comprobación. Aproximación a la noción de probabilidad mediante el concepto de frecuencia relativa y la simulación o experimentación. Distinción entre sucesos elementales equiprobables y no equiprobables. Determinación del espacio muestral en experimentos sencillos y uso de tablas y diagramas de árbol sencillos. Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace en experimentos sencillos. | |
| TERCERO | Experiencias aleatorias. Sucesos y espacio muestral. Utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el Azar. Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace. Formulación y comprobación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos. Cálculo de la Probabilidad mediante la simulación o experimentación. Utilización de la Probabilidad para tomar decisiones fundamentadas en diferentes contextos. Reconocimiento y valoración de las | TERCERO | Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Aplicadas | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | matemáticas para interpretar, describir y predecir situaciones inciertas. | | | | |
| | | | | Matemáticas orientas a las Enseñanzas Académicas | Identificación de experiencias aleatorias, sucesos y espacio muestral. Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace. Uso de diagramas de árbol. Significado y aplicación de permutaciones y factorial de un número. Utilización de la Probabilidad para la toma de decisiones fundamentadas en diferentes contextos. |
| CUARTO | OPCIÓN A | Asignación de probabilidades a experimentos compuestos. Utilización de diversos procedimientos (recuento, modelos geométricos, diagramas de árbol, tablas de contingencia u otros métodos). | CUARTO | Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Aplicadas | Cálculo de la frecuencia de un suceso aleatorio. Cálculo de probabilidades mediante la Regla de Laplace. Cálculo de probabilidades simple y compuesta. Identificación de sucesos dependientes e independientes. Uso del diagrama en árbol. Investigación de los juegos y situaciones donde interviene el Azar. |
| | OPCIÓN B | Asignación de probabilidades a experimentos compuestos. Utilización de diversos procedimientos (recuento, modelos geométricos, diagramas de árbol, tablas de contingencia u otros métodos) de cálculo. Probabilidad condicionada. | | Matemáticas orientas a las Enseñanzas Académicas | Introducción a la combinatoria: combinaciones, variaciones y permutaciones. Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace y otras técnicas de recuento. Cálculo de probabilidades simple y compuesta. Identificación de sucesos dependientes e independientes. Reconocimiento de experiencias aleatorias compuestas. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | árbol para la asignación de probabilidades. Cálculo de probabilidad condicionada. Utilización del vocabulario adecuado para la descripción y cuantificación de situaciones relacionadas con el Azar. |

Tabla 1.4 Contenidos sobre el Azar y la Probabilidad en el currículo de la Educación Obligatoria

Los contenidos de Matemáticas de la opción A se orientan hacia un desarrollo más práctico y operacional de los conocimientos básicos de la materia, ofreciendo así a los alumnos que cursen esta opción la posibilidad de resolver problemas relativos tanto a la actividad cotidiana como a otros ámbitos del conocimiento.

Por su parte, la opción B, aún sin obviar los aspectos descritos en la opción A, incide más en los **aspectos formativos**, tendiendo a un grado mayor de precisión en el lenguaje simbólico.

### 1.7.3 RECOMENDACIONES INTERNACIONALES

El interés por la enseñanza de la Estadística y la Probabilidad se muestran en diferentes documentos y recomendaciones internacionales, en especial en los estándares americanos (NCTM, 2000). Este documento no sólo ha tenido impacto en ese país sino que ha influido en el cambio de otros currículos, que han seguido sus directrices.

A continuación resumimos los contenidos sobre Probabilidad en este documento.

#### Estándares del NCTM

El National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), con una organización representativa del profesorado de Matemáticas, comparte con los estudiantes, los directores y los padres o tutores, la responsabilidad de asegurar que todos los estudiantes reciban una educación matemática de calidad, debido a que vivimos tiempos de acelerados cambios, en los que esta materia está presente en la vida diaria, por ejemplo, en la toma de decisiones sobre compras.

El conjunto de Estándares, *de contenidos y de procesos*, presenta las Matemáticas que todos los estudiantes deberían tener la oportunidad de aprender de forma gradual, prestando mayor atención, dependiendo de la etapa, a unos contenidos más que a otros, tal y como se muestra en la Figura 1.9.

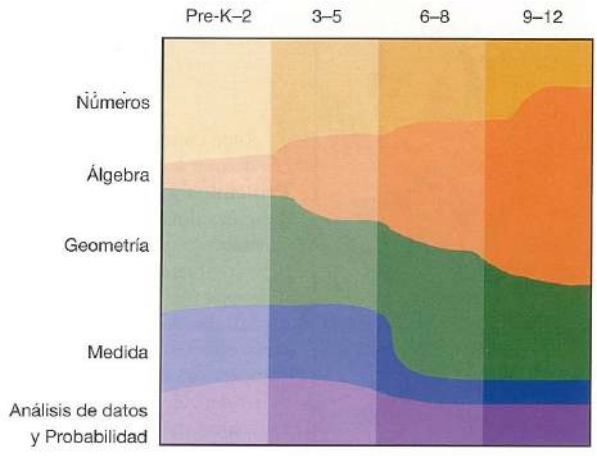



Figura 1.9 Nivel de atención que deberían recibir los diferentes estándares de contenidos desde Prekindergarten al nivel 12

El estándar de *Análisis de Datos y Probabilidad* destaca que los estudiantes necesitan saber sobre estos aspectos para poder razonar estadísticamente. Son habilidades necesarias para llegar a ser ciudadanos bien informados y consumidores

inteligentes. Además, trabajar con este estándar ofrece a los estudiantes una forma natural de conectar las matemáticas con otras asignaturas y con las experiencias de la vida cotidiana, por ello su importancia de incorporarla desde temprana edad. A continuación se muestra una tabla de equivalencia entre las etapas que establece el NCTM, las etapas correspondientes con el currículo español y la edad.

| Etapa | Pre-K-2 | 3-5 | 6-8 | 9-12 |
|---|---|---|---|---|
| Edad (años) | 0-6 | 7-9 | 10-12 | 13-17 |
| Etapa en España | Educación Infantil | 1º a 3º de Educación Primaria | 4º a 6º de Educación Primaria | 1º a 4º de Educación Secundaria |

Tabla 1.5 Equivalencia de etapas de contenidos del NCTM con la edad

El NCTM propone que el currículo incluya experiencias con análisis de datos para que sean realizadas por los alumnos. En relación con esta recomendación, las Orientaciones curriculares indica que, consultando NCTM-SAEM THALES, los alumnos de cada uno de los niveles educativos que siguen deben ser capaces de:

- *Etapa 3-5 (1.º a 3.er de Educación Primaria)* (página 180):
- Describir sucesos como probables o no probables, y discutir su grado de probabilidad usando expresiones como seguro, igualmente probable e improbable.
- Predecir la probabilidad de resultados de experimentos sencillos, y someter a prueba tales predicciones.
- Comprender que la medida de la probabilidad de un suceso puede representarse por un número comprendido entre 0 y 1.
- *Etapa 6-8 (4.º a 6.º de Educación Primaria)* (página 252):
- Comprender y utilizar la terminología apropiada para describir sucesos complementarios y mutuamente excluyentes.
- Utilizar la proporcionalidad y una comprensión básica de la Probabilidad para formular y comprobar conjeturas sobre los resultados de experimentos y simulaciones.
- Calcular probabilidades de sucesos compuestos sencillos, utilizando métodos como listas organizadas, diagramas de árbol y modelos de área.

- *Etapa 9-12 (1.º a 4.º de Educación Secundaria)* (página 328):

- Comprender los conceptos de espacio muestral y distribución de probabilidad, y construir espacios muestrales y distribuciones en casos sencillos.
- Utilizar simulaciones para construir distribuciones de probabilidad empíricas.
- Calcular e interpretar el valor esperado de variables aleatorias en casos sencillos.
- Comprender los conceptos de probabilidad condicionada y sucesos independientes.
- Comprender cómo se calcula la probabilidad de un suceso compuesto.

## 1.8 OBJETIVOS

El *objetivo general* será recabar información sobre las necesidades formativas de los profesores en la Educación Primaria y Secundaria, respecto a su conocimiento matemático y didáctico relativo al Azar y a la Probabilidad y analizar algunos recursos didácticos que podrían ser útiles para atender estas necesidades.

La importancia de este objetivo se deduce de la inclusión de la Probabilidad en la Educación Primaria y la consiguiente necesidad de preparar al futuro profesor.

La investigación se compone de una serie de estudios independientes, aunque todos ellos relacionados con el tema del trabajo. Cada uno de estos estudios tiene sus propios objetivos, hipótesis y metodología que se describirán y discutirán con detalle en los diferentes capítulos. Sin embargo, para orientar al lector se describirá, en forma sintética, el objetivo general, el cual se explicita en los siguientes específicos:

*O1. Analizar los contenidos del Azar y la Probabilidad presentados en los documentos curriculares de Educación Primaria y Secundaria.*

Este objetivo se requiere para fundamentar la construcción de nuestros cuestionarios. En la sección 1.7 se analizan las directrices curriculares de Educación Obligatoria para el Azar y la Probabilidad (MEC, 2006 a, b; Consejería de Educación, 2007 a, b y 2014) y en el capítulo 4 los contenidos del Azar y la Probabilidad en dos series de libros de texto.

*O2. La investigación pretende proporcionar alguna información sobre el conocimiento matemático de la Probabilidad y evaluarlo en una muestra de profesores de Educación Primaria y Secundaria.*

Debido a la novedad del tema, los profesores de Educación Primaria han recibido una escasa formación en Azar y Probabilidad; pues no la han estudiado durante

la Educación Primaria y en la Educación Secundaria se dedica poco tiempo al contenido (Serradó, Azcárate, y Cardeñoso, 2006). Los resultados de las investigaciones previas sugieren que es común que los profesores de Educación Primaria tengan bajos conocimientos en probabilidad.

*O3. Evaluar el empleo de algunos recursos didácticos que sirvan para ayudar a los profesores en ejercicio, o futuros profesores, respecto a las limitaciones observadas en su conocimiento especializado del contenido del Azar y la Probabilidad.*

Se evalúa la actividad matemática ligada a los recursos, las posibles dificultades en el trabajo con ellos y su idoneidad didáctica.

*O4. Se analizará el recurso didáctico LABAPC (Laboratorio Básico de Azar, Probabilidad y Combinatoria).*

Se espera que con la aplicación del LABAPC mejore el rendimiento académico del alumnado y del profesorado de la Educación Obligatoria, así como su conocimiento profesional sobre el Azar y la Probabilidad.

## 1.9 HIPÓTESIS INICIALES

Las hipótesis que planteamos se deben entender como expectativas previas, pues en algunos puntos no tenemos antecedentes. Estas hipótesis son las siguientes:

*H1. Se espera detectar en una proporción importante de profesores algunas dificultades relacionadas con el conocimiento sobre Azar y Probabilidad, ya descritas por diversos autores.*

Esta hipótesis se sustenta en los resultados de investigaciones previas en España sobre el conocimiento del Azar y la Probabilidad entre futuros profesores de Educación Primaria (Azcárate, 1995; Batanero, Cañizares y Godino, 2005; Contreras, 2011; Mohamed, 2012). Dichos trabajos sugieren debilidades en el desarrollo de pensamiento probabilístico por parte de los alumnos, la preponderancia de aspectos procedimentales y errores en la resolución de problemas sencillos.

*H2. Se espera detectar en una proporción importante de profesores en ejercicio dificultades en el empleo de algunos recursos didácticos.*

Esta hipótesis, al igual que la anterior, se basa en los resultados de investigaciones previas en España sobre el conocimiento del Azar y la Probabilidad.

## 1.10 ENFOQUE METODOLÓGICO Y FASES DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación se ha organizado en una parte teórica y cuatro estudios empíricos. La parte teórica se compone a su vez del marco teórico; del estudio del significado del Azar y la Probabilidad; del estudio del Azar y la Probabilidad en el currículo y de las investigaciones previas en las que nos basamos para nuestro trabajo. Todos estos puntos se han descrito en los capítulos 1, 2 y 3.

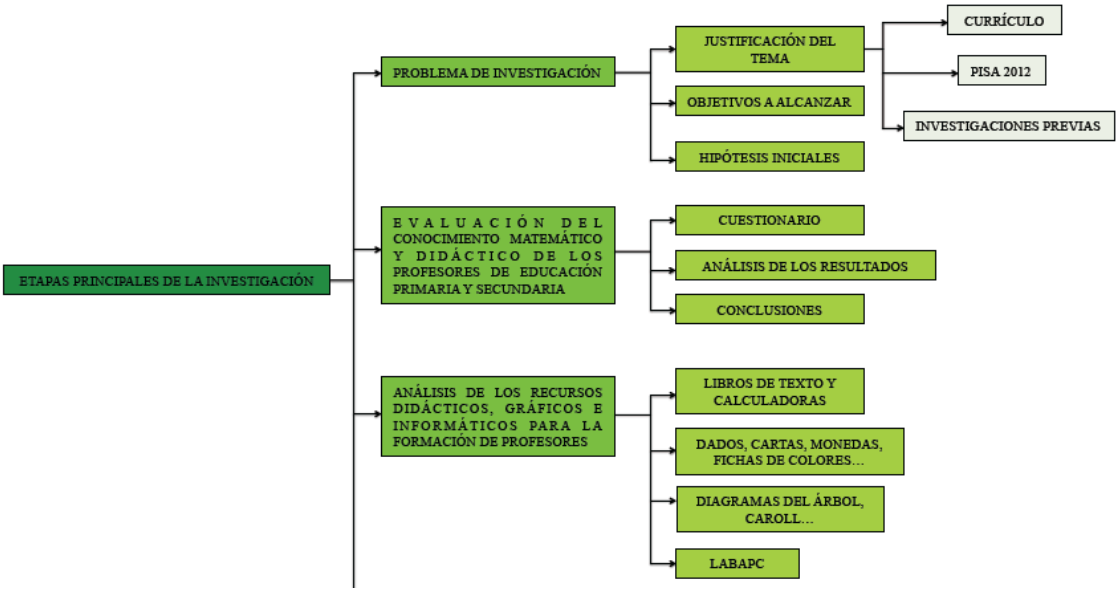



Figura 1.10 Fases de la investigación

La parte empírica se organiza en cuatro estudios, cada uno de los cuales tiene distintos objetivos, hipótesis, poblaciones de estudio, materiales de recopilación de información y análisis de datos. Todos ellos son de naturaleza, principalmente, descriptiva, exploratoria y cualitativa. En la Tabla 1.6 se resumen la metodología utilizada y los resultados obtenidos en cada uno de los estudios, que se describen con más detalle en los capítulos 4 y 6.

| Estudios | Descripción | Muestras | Material | Análisis | Resultados |
|---|---|---|---|---|---|
| Estudio 1 | Análisis de recursos didácticos, gráficos e informáticos | | Libro de texto, calculadora, diagrama de árbol, de Carroll, dados, monedas, bolas… Recursos en Internet | Análisis semiótico de los recursos | Configuración de objetos Conflictos semióticos potenciales Idoneidad didáctica |
| Estudio 2 | Evaluación del conocimiento matemático y didáctico de profesores en ejercicio y de futuros profesores de Educación Primaria | 35 profesores en ejercicio y 52 futuros profesores de Educación Primaria | Cuestionario de Razonamiento sobre el Azar y la Probabilidad y el conocimiento didáctico | Análisis semiótico de respuestas, análisis descriptivos y test Chi-Cuadrado | Categorías de respuestas en problemas Conocimientos didácticos |
| Estudio 3 | Evaluación del conocimiento matemático y didáctico de profesores en ejercicio y de futuros profesores de Educación Secundaria | 35 profesores en ejercicio y 36 futuros profesores de Educación Secundaria | Cuestionario de Razonamiento sobre el Azar y la Probabilidad y el conocimiento didáctico | Análisis semiótico de respuestas, análisis descriptivos y test Chi-Cuadrado | Categorías de respuestas en problemas Conocimientos didácticos |
| Estudio 4 | Análisis del recurso didáctico LABAPC-Laboratorio Básico de Azar, Probabilidad y Combinatoria | | LABAPC (Laboratorio Básico de Azar, Probabilidad y Combinatoria) | Análisis semiótico de respuestas, análisis descriptivos, test Chi-Cuadrado | Categorías de respuestas en problemas Conflictos semióticos Evolución en el taller Conocimientos didácticos |

Tabla 1.6 Métodos empleados en los diferentes estudios que componen el trabajo

- Estudio 1: *Análisis de recursos didácticos, gráficos e informáticos*, presentado en el Capítulo 4. Se realiza el análisis semiótico de posibles soluciones a los problemas implicados en los recursos, dificultades potenciales e idoneidad didáctica de los recursos.

- Estudios 2 y 3: *Evaluación del conocimiento matemático y didáctico de profesores en ejercicio y de futuros profesores de Educación Primaria y Secundaria*, presentada en el Capítulo 6 y se compone de dos estudios. Se propone a una muestra de 35 profesores en ejercicio de Educación Primaria y 35 de Secundaria de distintos centros públicos de Gran Canaria y 52 futuros profesores de Educación Primaria y de 36 de Secundaria de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, del Grado de Magisterio y del Máster de Formación del Profesorado, respectivamente, un cuestionario en el que una parte está compuesto por ítems de Green (1978-1981) y de Fischbein y Gazit (1984). Las respuestas de opción simple y las abiertas del cuestionario permiten evaluar por un lado los principales sesgos sobre razonamiento en Azar y Probabilidad y por otro el conocimiento del concepto, así como la capacidad de resolver los tipos de problemas sobre el Azar y la Probabilidad. Como técnicas de análisis de datos se usan el análisis semiótico, estudio descriptivo y el test Chi-Cuadrado, para analizar las diferencias con los resultados de Green y de Fischbein y Gazit y entre las dos muestras que componen el Estudio. El análisis de correlaciones permite estudiar la relación entre sesgos en el razonamiento y conocimiento formal del tema.
- Estudio 4: *Análisis del recurso didáctico LABAPC*, presentada en el Capítulo 7. Se realiza el análisis semiótico de posibles soluciones a las dificultades potenciales e idoneidad didáctica del recurso.

# CAPÍTULO 2

# EL RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO EN NIÑOS Y ADOLESCENTES


2.1 Introducción
2.2 Desde el significado clásico de la Probabilidad
  2.2.1 Investigación de Piaget
  2.2.2 Complementos a los estudios de Piaget sobre comparación de probabilidades
2.3 Desde el significado intuitivo
  2.3.1 Investigación de Fischbein
  2.3.2 Comparación de significados intuitivo y clásico de la Probabilidad
2.4 Desde el enfoque frecuencial
  2.4.1 Percepción de la aleatoriedad
  2.4.2 Investigaciones apoyadas en la simulación
2.5 Desde el enfoque subjetivo
  2.5.1 Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico
  2.5.2 Probabilidad condicional e independencia

## 2.1 INTRODUCCIÓN

Teniendo en cuenta los significados de la Probabilidad expuestos en el capítulo anterior, concretamente los presentados en la Educación Obligatoria en España, este capítulo sintetiza las investigaciones más relevantes sobre comprensión de la Probabilidad en niños y adolescentes, respecto a cada uno de los significados intuitivo, clásico, frecuencial y subjetivo. Puesto que la investigación existente es muy amplia, se hace una selección de las que fundamentaron nuestro trabajo, porque serán base para la construcción de los ítems en los cuestionarios de evaluación descritos en el Capítulo 5, pues nos proporcionan preguntas o tareas pensadas para niños en edad escolar y que, supuestamente, los profesores resuelven de manera eficaz.

Para comprender mejor esta síntesis, hay que tener en cuenta la naturaleza del razonamiento probabilístico. Como indica Cañizares (1997), los niños aprenden en su entorno familiar y social, antes de entrar en la escuela y su razonamiento se enriquece a partir de la interacción del mundo que les rodea. Desde muy pequeño el niño aprende a estimar y diferenciar formas, distancias y cantidades, basándose en la reversibilidad de las operaciones aritméticas y geométricas, identificando patrones. Una de las dificultades en el desarrollo cognitivo probabilístico es que los resultados cambian de una repetición a otra del mismo experimento, es decir, los fenómenos aleatorios no son reversibles y por tanto no es identificable un patrón (Batanero, Godino y Roa, 2004). Otras dificultades son la falta de unicidad en la forma de asignar un valor de probabilidad a un suceso según se utilice uno u otro significado de la Probabilidad, y el hecho de que algunos conceptos de probabilidad son contra-intuitivos (Batanero, 2005).

Las investigaciones se han agrupado según el significado con el que se relacionan y se exponen en orden cronológico. En la sección 2.2 se presentan las investigaciones asociadas al significado clásico, concretamente el de Piaget, seguidamente, en la sección 2.3 se presentan las investigaciones relacionadas con el significado intuitivo, empezando por Fischbein, en el apartado 2.4 las asociadas al significado frecuencial y por último las relacionadas con significado subjetivo, ya que en el último curso de secundaria se trabaja la probabilidad condicionada.

## 2.2 DESDE EL SIGNIFICADO CLÁSICO DE LA PROBABILIDAD

### 2.2.1 INVESTIGACIÓN DE PIAGET

Piaget trató de establecer criterios para clasificar el nivel de desarrollo intelectual de un niño en diversas edades, a partir de una graduación de la comprensión formal de los conceptos. Su teoría postula que la experiencia, la actividad y el conocimiento previo son las bases que determinan el aprendizaje. Este es construido activamente por el sujeto y no recibido pasivamente del entorno, según Batanero (2001).

Uno de los textos más importantes sobre el desarrollo de la cognición probabilística son los de Piaget e Inhelder (1951), el cual se centra en las observaciones obtenidas dentro de la perspectiva del modelo de desarrollo conceptual de Piaget, que tiende a definir el nivel de desarrollo en que se encuentra el niño.

El niño trata de adaptarse al mundo que le rodea. Cuando una idea nueva se le presenta, se crea un *conflicto cognitivo o desequilibrio* en su estado mental si esta idea choca con las ya existentes, el cual se resuelve mediante asimilación (acepta la nueva idea) y acomodación (modifica toda la estructura mental). Es por ello que se clasifican a los niños en una serie de etapas, de acuerdo con su nivel general de pensamiento, admitiendo la variación de la edad física en que se alcanza cada etapa, que se suceden en forma ordinal. Si las respuestas de un niño a diferentes tareas se ubican en diferentes niveles, su nivel cognitivo global se identifica con el nivel de clasificación en donde se encuentran la mayoría de sus respuestas.

Las etapas en el desarrollo cognitivo están definidas en forma general, y la idea de *operación* constituye un eje fundamental, entendiendo que las operaciones lógicas y formales conforman sistemas de acciones interrelacionadas de forma rigurosa. Esta última característica es la razón por la cual, según Piaget, la noción de azar no se puede desarrollar hasta una edad avanzada, pues el autor la concibe como complemento a la relación causa-efecto, además basada en la comprensión de proporción y la combinatoria, que son esquemas propios del periodo de las operaciones formales.

Estas etapas determinan el desarrollo evolutivo y se concretizan para el caso de la Probabilidad en Piaget e Inhelder (1951), la edad es aproximada; puede variar de un niño a otro, pero las etapas siempre suceden en el mismo orden. Se consideran tres etapas, debido a que están comprendida entre los 2 y 15 años, que ocupa la enseñanza obligatoria. La caracterización que realizaron Godino, Batanero y Cañizares (1987) de

las mismas, con relación a la estimación de posibilidades y noción de probabilidad, se resumen a continuación:

*Etapa Pre-operacional* (2 a 7 años): Es el período de desarrollo en el que no se comprenden las operaciones (reversibles). El niño se apoya en sus experiencias empíricas para comprender los conceptos, identificando patrones a partir de la manipulación de objetos reales. En estas edades el niño no puede interpretar la irreversibilidad de los fenómenos aleatorios, por tanto no tiene una intuición innata de azar. Es incapaz de estimar correctamente las posibilidades a favor y en contra de los sucesos aleatorios, debido a que no posee los recursos necesarios, como sería el razonamiento proporcional. Realiza combinaciones, permutaciones y variaciones de forma empírica, sin buscar alguna estrategia sistemática de enumeración; por tanto tendrá dificultad en identificar todos los elementos de un espacio muestral.

*Operaciones concretas* (7 a 11 años): Es el período de desarrollo en el cual se identifican y realizan operaciones sobre objetos físicos presentes u observables, pero todavía hay dificultad en hacerlas en forma abstracta. Se comienza a comprender la conservación de características físicas como masa, peso y volumen y aparecen conceptos que no necesitan ser abstraídos de la experiencia concreta. Los niños establecen relaciones causales y conciben el Azar como resultado de la combinación de una serie de causas independientes que producen un resultado inesperado. Pueden resolver problemas de comparación de probabilidades de un mismo suceso $A$ en dos experimentos diferentes, sólo en situaciones donde el número de casos favorables (o el número de casos desfavorables) a $A$ son iguales en ambos experimentos. Al finalizar la etapa pueden resolver problemas en que los casos se pueden poner en correspondencia mediante una proporción, en casos en los que esta proporción es sencilla de observar. A esta edad, los niños pueden realizar el inventario de todas las permutaciones, variaciones y combinaciones posibles en un conjunto con pocos elementos, utilizando estrategias de ensayo y error, pero no alcanzan estrategias sistemáticas de enumeración.

*Operaciones formales* (12 a 15 años): En este período se identifican y realizan operaciones que desarrollan pensamiento hipotético-deductivo. Se pueden manipular relaciones entre representaciones simbólicas, se formulan hipótesis y se establecen conclusiones. Se comprende el significado de abstracciones verbalmente, sin referirse a objetos particulares. Con todos estos recursos, el adolescente logra una comprensión completa del Azar, que se hace inteligible por medio de esquemas operacionales. Progresan rápidamente en el cálculo de probabilidades, incluso si las fracciones a

comparar tienen diferente denominador. Adquiere la capacidad de usar procedimientos sistemáticos para formar todas las permutaciones, variaciones y combinaciones posibles de un conjunto dado. Este razonamiento combinatorio es necesario para poder concebir las distintas posibilidades existentes y por tanto sólo en este período se comprende el significado clásico de probabilidad.

**Algunos experimentos piagetianos**

Piaget e Inhelder (1951) deducen las anteriores características de cada etapa realizando experimentos con los niños y haciéndoles entrevistas clínicas para ver la forma en que razonan sobre los mismos. Estudian las concepciones de los niños sobre azar, comparación de probabilidades, razonamiento combinatorio, distribución y convergencia (distribución normal y proceso plano de Poisson), experimento compuesto, entre otros. Describimos sólo los dos primeros que son los más cercanos a los niños en Educación Primaria.

Para estudiar la percepción del Azar organiza un experimento, que consiste en predecir el comportamiento de ocho bolas rojas y ocho bolas blancas, como se puede observar en la Figura 2.1, que al inicio de la actividad están ubicadas en dos compartimentos de una bandeja. Al mover la bandeja, las bolas, que al principio están ordenadas, se mezclan progresivamente y luego se pregunta a los chicos qué esperan que suceda con las dos clases de bolas si se sigue basculando la bandeja.

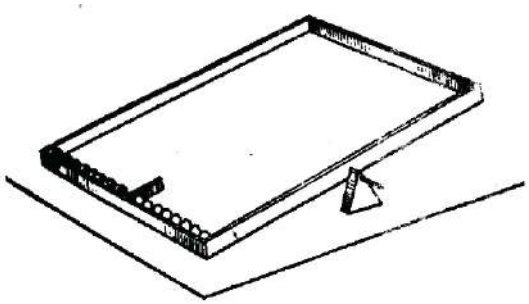


Figura 2.1 Bandeja usada por Piaget e Inhelder

En la etapa pre-operacional, del desarrollo del concepto de azar, los niños afirman que las bolas vuelven nuevamente a su lugar original, o bien que el conjunto completo acabarán en el lugar ocupado originalmente por las rojas, y viceversa. Esta respuesta típica de los niños de esta edad se debe a que los niños no comprenden que las bolas se mezclen en forma aleatoria, pues su pensamiento es todavía muy determinista. Además el niño de esta edad no comprende bien la relación entre causa y efecto, en este caso, no entiende por qué el movimiento de la bandeja hace que se mezclen las bolas.

Tampoco es capaz de pensar en todas las posibles formas en que pueden colocarse las bolas blancas y rojas, porque no puede imaginar todas las permutaciones de objetos. En la etapa de operaciones concretas, los niños predicen una mezcla progresiva de las bolas, reconocen la baja credibilidad en que las bolas puedan volver a sus posiciones originales, indicando con estas respuestas que comienzan a comprender la irreversibilidad de los fenómenos aleatorios. En la etapa de operaciones formales, los adolescentes responden en forma más analítica con relación a posibles combinaciones y permutaciones, mostrando comprensión del proceso de mezcla aleatoria.

Otro experimento clásico de Piaget e Inhelder, es pedir al niño que indique, entre dos experimentos, cuál tiene más probabilidad de que se observe cierta característica. Por ejemplo, obtener una cruz al dorso de una carta blanca al elegir un elemento al Azar, cuando hay dos opciones (tener una cruz marcada al respaldo o no tenerla). Al comienzo del experimento se les muestra a los niños dos colecciones de 2 a 6 fichas con composiciones distintas en el contenido de una de sus caras, luego se les da la vuelta para mostrar todas las demás caras y se mezclan. En ese punto se pregunta en cuál de las dos colecciones es más fácil obtener una cruz al tomar una de las fichas.

Según Cañizares (1997), el nivel de complejidad de la tarea cambia según la proporción de cruces en ambas colecciones, tipificando diez composiciones: doble imposibilidad (ninguna tiene cruz), doble certeza (todas tienen cruz), certeza-imposibilidad (todas las fichas de una colección tienen cruz y en la otra ninguna), posibilidad-certeza, posibilidad-imposibilidad, composición idéntica (igual proporción de cruces en ambas), composición proporcional (el número de cruces y de fichas en una colección es un múltiplo de la otra), desigualdad de casos favorables e igualdad de posibles, desigualdad de casos posibles e igualdad de favorables, desigualdad de casos posibles y de favorables. Los resultados mostraron que el desarrollo de la capacidad de comparar probabilidades no es uniforme dentro de cada estadio, pues se identificaron dos niveles en la etapa preoperatoria, detonados por IA y IB, dos en la de operaciones concretas (IIA y IIB) y uno en la de operaciones formales (III), que se caracterizan a continuación.

En el nivel IA el niño no realiza operaciones lógicas ni aritméticas elementales ni usa la disyunción, sólo considera los conteos de casos favorables y frecuentemente elige en forma arbitraria; la noción de probabilidad no es accesible porque requiere la noción de parte-todo. En el nivel IB logra solucionar correctamente algunas situaciones que dependen de una sola variable desde apreciaciones intuitivas sin razonamiento

operatorio, en casos simples. También resulta más difícil un problema con un solo conjunto, que un problema de comparación de probabilidades en dos conjuntos, porque es más fácil diferenciar la parte y el todo en el segundo caso. El niño adquiere la intuición de la relación entre casos favorables y probabilidad, pero fracasa en las elecciones porque utiliza información parcial, sólo usa el dato constante en las dos colecciones y no considera la variación de la composición dada por el elemento variable, ya sea el número total de casos o el número de casos favorables.

El niño en el nivel IIA resuelve de forma correcta las situaciones de comparación de una sola variable y de forma incorrecta las de composición proporcional. La adquisición de operaciones lógico-matemáticas permite una noción de parte-todo y de disyunción. Por ello, la comparación de problemas con una variable se puede resolver con cálculos aditivos pero no con la proporcionalidad (dobles cocientes), que implica las ideas de fracción y proporción, de mayor dificultad. En el nivel IIB el niño, además, intenta generalizar las estrategias usadas en casos simples, sin éxito en las composiciones donde varían tanto los casos favorables como los posibles. El niño soluciona los casos de proporcionalidad de forma empírica y progresiva.

El adolescente en el nivel III logra la inclusión de las partes en el todo, y alcanza la capacidad lógica de establecer disyunciones, la proporcionalidad y capacidad combinatoria. Todo ello le permite cuantificar las probabilidades. En caso de no calcular fracciones, el niño establece algún tipo de correspondencia entre los dos cocientes cuando las proporciones o desproporciones no son evidentes. Construye nociones probabilísticas fundamentales debido a su dependencia de operaciones construidas sobre otras operaciones y de un poder hipotético-deductivo mayor que en la etapa de las operaciones concretas.

En resumen, para la comparación de probabilidades en la etapa preoperatoria del desarrollo del concepto de probabilidad hay ausencia de comparación lógico-aritmética que no permite resolver el problema. Mientras que, en la de operaciones concretas, el niño logra comparar una variable y en la de operaciones formales llega a una solución general y rápida.

Muchos otros autores han analizado las estrategias que siguen los niños al comparar probabilidades. En la tabla 2.1 se muestra una síntesis de la descripción que hace Cañizares (1997).

| Estrategia | Edad | Descripción |
|---|---|---|
| a. Comparación del número de casos posibles | 2-3 años | Elegir la caja que contenga mayor número de bolas. |
| b. Comparación del número de casos favorables | 4 años | Elegir la caja que contenga más bolas del color favorable. Resuelve el problema correctamente cuando el número de casos desfavorables es igual en las dos cajas. |
| c. Comparación del número de casos desfavorables | 7 años | Elegir la caja con menor número de bolas del color desfavorable cuando el número de casos favorables es igual. Resuelve el problema correctamente cuando el número de casos favorables es igual en las dos cajas. |
| d. Estrategias aditivas | 8-11 años | Elegir la caja donde la diferencia entre casos favorables y desfavorables sea mayor. Se tienen en cuenta todos los datos pero no se usan proporciones. |
| e. Estrategia de correspondencia | 12-13 años | Establecer la proporción entre el número de casos favorables y desfavorables en una de las cajas y comparar con la composición de la otra, eligiendo la caja que de mayor proporción. Resuelve el problema correctamente cuando el número hay una proporción sencilla (por ejemplo 2 a 1) de casos favorables y desfavorables en una de las cajas, pero no en la otra. |
| f. Estrategias multiplicativas | 12-14 años | Aplicar la regla de Laplace. Es la más elaborada y requiere del dominio del cálculo con fracciones. Es necesario establecer las fracciones formadas por los números de casos favorables y desfavorables para después comparar las fracciones así obtenidas. |
| g. Otros tipos | | Hacer referencia a la suerte; elegir el color favorito, etc. |

Tabla 2.1 Estrategias de los niños para comparar probabilidades

### 2.2.2 COMPLEMENTOS A LOS ESTUDIOS DE PIAGET SOBRE COMPARACIÓN DE PROBABILIDADES

Algunas réplicas o variaciones de los experimentos de Piaget se desarrollaron hasta finales de los 90, siendo más numerosas en el período 1960-1990. Estas investigaciones se centran en dos áreas: identificar las estrategias en la estimación de probabilidades, por parte de niños en Educación Básica e identificar los efectos de la instrucción en el desarrollo de razonamiento probabilístico en estas edades. A continuación se presenta una síntesis de las citadas por Cañizares (1997).

Yost, Siegel y Andrews (1962) analizaron el razonamiento probabilístico en la etapa preoperatoria, realizada por 10 niños y 10 niñas estadounidenses de 5 años,

modificando ligeramente el método experimental de Piaget, teniendo en cuenta que las ideas probabilísticas en los niños de esa edad pueden ocultarse detrás de dificultades de otra naturaleza. Se utilizaron bolas dentro de una urna transparente, con lo cual el niño veía la composición y no tenía que recordar en qué conjunto había más elementos de cierto tipo. Se observó que los niños a partir de los 4 años daban respuestas correctas y que existía una correlación entre las ideas de probabilidad y el nivel de desarrollo del niño, concluyendo que los niños pequeños tienen una estimación intuitiva de las posibilidades.

Davies (1965) observó el comportamiento de ocho niños estadounidenses, de cada sexo, para cada edad entre 4 y 9 años, es decir, un total de 112 niños, ante un estímulo externo de recompensa a la elección de una bola de un color dado, previa aplicación de una prueba de reconocimiento de colores con cada niño. El autor notó la preferencia sistemática por urnas con mayor proporción de bolas de ese color, incrementando el porcentaje de respuesta correcta con la edad. Cuando la información percibida en forma directa era confusa para el niño, su elección se basaba en su percepción. El autor concluye que la intuición probabilística y la estimación de casos sencillos en el niño son previas a la capacidad de expresar verbalmente sus preferencias y confirmó la hipótesis de progresión en la adquisición del concepto de probabilidad.

Goldberg (1966) replicó la investigación de Yost, Siegel y Andrews, añadiendo a la comparación otra condición experimental. El autor estudió los juicios emitidos en dos muestras, cada una con 16 niños estadounidenses de 4 a 5 años, emparejadas por sexo y edad. Un grupo seguía las técnicas de Piaget y la otra un procedimiento de toma de decisión, variando sistemáticamente en cada ensayo la probabilidad de éxito, el número de elementos en el conjunto total y el predominio de casos favorables sobre desfavorables. Las diferencias radicaban en el formato mostrado, el tipo de juicio requerido y los controles para el color de referencia. El autor ratificó que las elecciones de los niños de edad preescolar se basan en la comparación de valores absolutos en lugar de usar nociones de proporcionalidad. Además, observó que el número de errores aumentaba cuando alrededor de la mitad de los elementos tenían la característica de interés, indicando mayor dificultad de los niños para discriminar este tipo de situaciones, cercanas a la equiprobabilidad.

Fischbein, Pamput y Minzat (1970a) emplearon dos urnas de plástico con bolas negras y blancas, y preguntaron a un niño en cuál de ellas había mayor posibilidad de obtener un determinado color. Usaron un total de 18 preguntas divididas en 3

categorías. En el primer tipo, $C_1$, el número de bolas blancas y negras de una de las cajas era igual o bien eran iguales el número de bolas de un color dado en las dos cajas. La categoría $C_2$ no tenía restricciones respecto al número de bolas blancas y negras en las dos cajas. La categoría $C_3$ consistía en números proporcionales de bolas blancas y negras en las dos cajas. Utilizaron grupos de niños sin instrucción y con una instrucción breve, aunque sistemática, sobre la forma de resolver los problemas.

En el caso de los alumnos sin instrucción encontraron aproximadamente la misma proporción de éxito entre los niños de preescolar y los de 9-10 años para los problemas de tipo $C_1$, aunque a partir de 12-13 años los niños eran capaces de resolver, sin ninguna instrucción, problemas de las tres categorías. La instrucción no mostró mejora para los niños pequeños, pero si una importante mejora a partir de 9-10 años, lo que confirma la opinión de los autores sobre la conveniencia de una enseñanza de la Probabilidad a partir de estas edades. Como vemos, este trabajo es también precursor de los que comentaremos en las dos secciones siguientes.

Hoemann y Ross (1971) analizaron el desempeño de niños estadounidenses de 4 a 10 años en cuatro experimentos para discriminar si los niños utilizan juicios probabilísticos o comparaciones perceptuales al realizar sus elecciones, tanto en la comparación de dos conjuntos con distinta configuración como si se trata de elegir un solo conjunto, pues estas dos fuentes no son distinguibles en los experimentos anteriores debido al contexto usado. En uno de los experimentos, los niños deben elegir entre dos ruletas bicolor de diversos tamaños y proporciones en los colores. Además, los dividen en dos grupos, a uno les preguntan una estimación probabilística (qué ruleta da mayor posibilidad de obtener cierto color) y a otros una de magnitudes (qué ruleta tiene mayor cantidad de ese mismo color). No hubo diferencia entre los dos grupos, por lo que los autores concluyeron que la estimación absoluta de magnitudes era suficiente para resolver las tareas y no se requería ni comparación de proporciones ni estimación de probabilidades. En otro experimento, usaban una sola ruleta y la pregunta era en qué color se consideraba que pararía la aguja. Los autores observaron más errores en la tarea de comparación de probabilidades que en la de comparación de magnitudes y concluyeron que los juicios probabilísticos eran muy pobres entre 4 y 8 años. En experimentos con urnas, identificaron que este tipo de tarea permite distinguir razonamientos de tipo probabilístico y proporcional, siendo menor la proporción de errores con dos urnas que con una, debido a que la combinación de elementos en un

solo conjunto impide al niño pensar simultáneamente en el todo y en las partes de los dos subconjuntos incluidos porque la noción de conjunto la asocia con la de unidad.

Falk, Falk y Levin (1980) analizaron el desempeño de 61 niños israelíes de 4 a 11 años, divididos en dos grupos experimentales, para desarrollar tareas sobre comparación de probabilidades con tres contextos (bolas en urnas, ruletas y peonzas). En el primer experimento 36 niños, entre 5 y 11 años, realizaron dos veces 22 tareas, cambiando el contexto de una ocasión a otra. En el segundo experimento 25 niños, entre 4 y 7 años se enfrentaron a 32 tareas, incluyendo las 22 del grupo anterior, divididos en dos grupos de 16 ítems con características similares, que se realizaron unas con los ojos cerrados y otras con los ojos abiertos. Los autores plantearon tres clases de problemas, de acuerdo con las relaciones entre el tipo de fracciones presentadas en la comparación con respecto a ½. Se observó que, desde los 6 años, los niños manifiestan un razonamiento de tipo probabilístico. Los niños no parecen seguir una sola estrategia, incluso algunos siguen prejuicios irrelevantes. La capacidad de los niños para evaluar probabilidades no se alteró por el cambio de contextos. Los autores sugieren que la Probabilidad se compone de dos subconceptos: azar y proporción, y que la capacidad de calcular proporciones por sí sola no implica la comprensión de probabilidad, pues se precisa comprender la imposibilidad de controlar o predecir los resultados.

Truran (1994b) realiza entrevistas clínicas a 32 niños, de 8 a 15 años, en Australia, con el fin de examinar si utilizan comprensión probabilística al elegir, entre dos opciones, la urna con mayor proporción de bolas de cierto color. Sus resultados amplían la lista de estrategias de resolución de este tipo de tareas, con otras como: descripción del contenido sin hacer una elección, respuesta acertada sin justificación (intuición), estrategias diferentes para cada urna, preferencia por el número menor, comparación aproximada, comparación con proporciones sencillas conocidas, comparación entre razones de posibilidades.

Falk y Wilkening (1998) proponen a niños de 6 a 14 años, israelíes y suizos, tareas de asignación de probabilidad, en el contexto de un juego de apuesta con dos urnas con diferente composición. A cada alumno se preguntó cuántas bolas de un tipo harían falta en la segunda urna para que el juego fuera equitativo. Los autores usan este contexto argumentando que aseguran una comprensión y motivación óptima de los niños en la actividad. Los resultados mostraron que los niños de 6 a 7 años no pudieron generar iguales probabilidades, usando nociones de proporcionalidad y no usaron estrategias sistemáticas. En general, pensaron para cada urna en el número de bolas de

un solo tipo, ya fueran las favorables o las desfavorables. Los niños de 9 a 10 años integraron las dimensiones de probabilidad y proporcionalidad, aunque tendían a tomar decisiones, en función de la diferencia de casos favorables con desfavorables de cada urna. Los niños de 13 años utilizaron la proporcionalidad con desempeño casi perfecto, siendo más exitoso si el factor de proporcionalidad era entero. La conclusión principal fue que en un nivel dado, la maestría en tareas, de elección binaria, precede a la habilidad para ajustar probabilidades y que el conocimiento usado en el ajuste de probabilidad fue más analítico que intuitivo.

Una conclusión de esta sección es que problemas equivalentes desde el punto de vista probabilístico, no lo son en el plano cognitivo, debido a la influencia del contexto. Por ello, trabajar diferentes contextos puede favorecer la evolución de razonamientos erróneos o incompletos, así como la puesta en evidencia de conflictos cognitivos o semióticos en los niños. Por otro lado se concluye que los niños son conscientes de la naturaleza probabilística de este tipo de situaciones.

## 2.3 DESDE EL SIGNIFICADO INTUITIVO

### 2.3.1 INVESTIGACIÓN DE FISCHBEIN

Fischbein (1975) revisa no sólo los trabajos de Piaget, sino también los de otras investigaciones. Mientras que Piaget tiende a definir el nivel de desarrollo en que se encuentra el niño, algunos de los trabajos citados por Fischbein se preocupan de analizar el efecto de la instrucción en el proceso de aprendizaje.

Fischbein concedió una gran importancia a la intuición como parte integrante de la conducta inteligente, describiéndola como *"una clase de conocimiento que no está basado en la evidencia empírica o en argumentos lógicos rigurosos y, que, a pesar de ello, se tiende a aceptar como cierto y evidente"* (Fischbein, 1975). El estudio de las intuiciones puede hacerse de una manera apropiada en el campo de la Probabilidad, ya que la complejidad de las situaciones cotidianas nos induce a adoptar continuamente un comportamiento probabilístico. La necesidad de tomar decisiones nos obliga a hacer estimaciones intuitivas de posibilidades, en la mayoría de las veces de tipo subjetivo.

Según Batanero (2001), para Fischbein (1975) la intuición es inmediata, surge espontáneamente (no es reflexiva); es global (constituye un todo sin una descomposición o análisis); generalizante (se extrapolan a entornos más amplios); autoevidente (no necesita demostración); perseverante (resistente al cambio); coercitiva (se impone ante otras formas de razonamiento); intrínsecamente cierta (el individuo

tiene total convicción de la proposición que encierra). En consecuencia, tiene naturaleza teórica, capta la universalidad de un principio mediante una situación particular; por ello se distingue de la percepción o de la habilidad.

Por tanto, las intuiciones son adquisiciones cognitivas que intervienen directamente en las acciones prácticas o mentales, en virtud de sus características de inmediatez, globalidad, capacidad extrapolatoria, estructurabilidad y autoevidencia. Estableciendo así varias clasificaciones de las intuiciones distinguiendo entre las primarias y las secundarias.

Las intuiciones primarias son adquisiciones cognitivas que se derivan directamente de la experiencia, sin necesidad de ninguna instrucción sistemática. Es decir, que se forman directamente por la experiencia del sujeto. Algunas de las intuiciones primarias sobre probabilidad son correctas, mientras que otras no, porque están restringidas por circunstancias y condiciones personales, y cada individuo tiende a simplificar las situaciones al interpretar cada suceso en relaciones deterministas de causa y efecto.

Las intuiciones secundarias consisten en adquisiciones que tienen todas las características de las intuiciones, pero que son formadas por la educación científica, principalmente en la escuela.

Adicionalmente clasifica las intuiciones según su finalidad en: conjeturales (suposiciones asociadas a la certidumbre del individuo), anticipatorias (son construcciones mentales que globalmente anticipan la solución a un problema antes de que se hayan encontrado los pasos detallados de la misma), conclusivas (consolidan las ideas previas) y afirmatorias (son las que da concreción al conocimiento del mundo externo que aceptamos como evidente). Las afirmatorias se pueden catalogar como semánticas (referidas a significados), relacionales (expresan una relación) o inferenciales (muestra inducción o deducción lógica). Según su cobertura se tipifican en: comunes (propias de un grupo cultural o de la misma edad) o individuales (de una persona).

La opinión de Piaget es rechazada por Fischbein, ya que, siendo la intuición sobre el Azar, primaria, este sugiere que los niños pueden tener una intuición del Azar y diferenciar los fenómenos aleatorios y deterministas antes de los 7 años. Para estos niños, Azar es equivalente a falta de predictibilidad y si el experimento planteado tiene pocos sucesos diferentes, es decir, en juegos de azar sencillos, por ejemplo, con dados o con ruletas, son capaces de elegir la opción con mayor probabilidad. Esta intuición

cambia hacia una estructura conceptual distinta y organizada a partir de los 7 años, cuando el niño da inicio a una comprensión de la interacción de cadenas causales que generan hechos impredecibles y a la irreversibilidad de los fenómenos aleatorios, aunque no llega a construir una idea de azar. Es consciente de que, por ejemplo, al lanzar 15 monedas es difícil de obtener 15 caras. Según Fischbein, la síntesis entre el azar y lo deducible no se realiza espontánea y completamente al nivel de las operaciones formales, más bien se requiere una instrucción orientada al desarrollo de pensamiento probabilístico. En experimentos en los que se requiere al sujeto reconocer probabilidades iguales en diferentes condiciones experimentales, es el adolescente quien evita lo impredecible y busca dependencias causales que reduzcan lo incierto, por ejemplo para reconocer equiprobabilidad en diferentes condiciones experimentales, incluso en situaciones donde no existen tales dependencias.

Por otra parte, según este autor, la noción de probabilidad corresponde a una intuición secundaria. Fischbein considera que el niño puede hacer juicios probabilísticos en el sentido de una estimación intuitiva de posibilidades a favor de algún suceso y que tales juicios están directamente influidos por sus percepciones del experimento aleatorio. En edad preescolar estas comparaciones sólo se harán utilizando números enteros, estimando las probabilidades con los conocimientos numéricos que manejan. Un experimento puede ser el de presentarle a los alumnos un conjunto de canales por los que una bola puede rodar recorriendo distintas trayectorias (Figura 2.2).

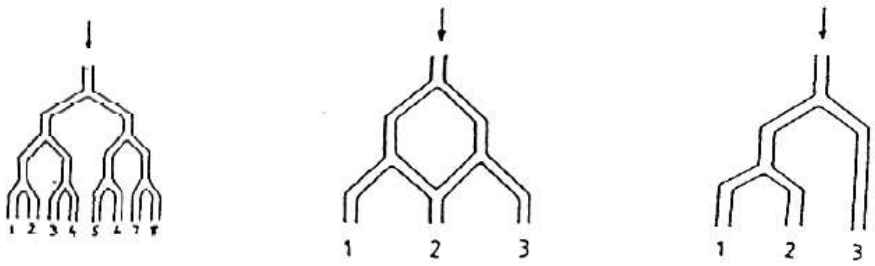



Figura 2.2 Bifurcación por canales

A los niños se les plantean las preguntas:

“Si lanzo una bola por cada canal, ¿en cuál de ellos es más probable que salga la bola por el orificio 1?”,

“Si lanzo la bola muchas veces seguidas, ¿crees que saldrá por uno con más frecuencia que por otros?”.

Otro experimento consiste en la elección, por parte del alumno, entre dos urnas o cajas con diferente contenido, aquella que ofrezca más posibilidades de obtener una bola de un color determinado (Figura 2.3).

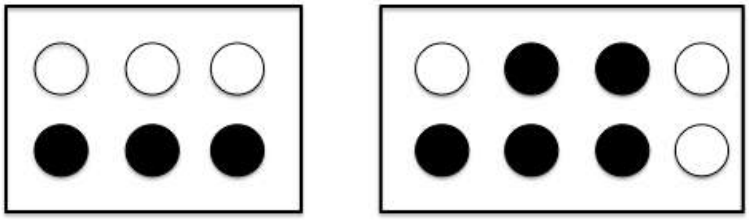


Figura 2.3 Dos urnas compuestas por bolas blancas y negras

Al niño se le propone el siguiente juego: "Debes sacar una bola de una de las cajas con los ojos cerrados. Ganas si obtienes una bola blanca. ¿De qué caja prefieres hacer la extracción?"

En esta primera etapa, los niños pueden resolver el problema de comparación de probabilidades de un mismo suceso, pero sólo cuando el número de casos favorables o el número de casos desfavorables son iguales en ambos experimentos.

Empiezan a hacer comparaciones de probabilidades en casos muy sencillos, usando proporciones desde los 9 años, en situaciones en las que el número de casos favorables o el número de casos no favorables son iguales en ambos experimentos (sus estimaciones se basan en comparaciones binarias). Es decir, en una urna colocamos dos bolas negras y cuatro blancas y en la otra tres bolas negras y seis blancas (Figura 2.4).

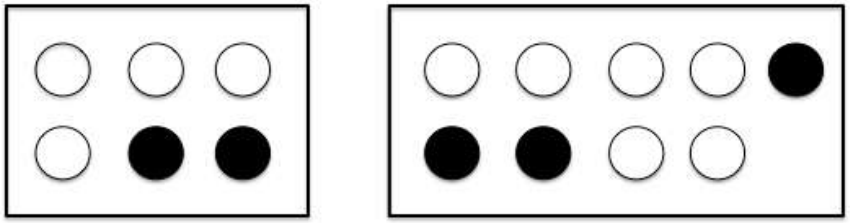


Figura 2.4 Dos urnas compuestas por bolas blancas y negras.

Después de los 12 años y sin recibir instrucción particular, los niños dan respuestas correctas de las probabilidades de dos sucesos sencillos, desde un principio, incluso en casos en que tienen que comparar razones con términos desiguales. Fischbein muestra que esto mismo se logra a los 9 ó 10 años con ayuda de instrucción especial, por medio del uso de procedimientos figurativos, que pueden ser construidos, al nivel de las operaciones concretas, esquemas considerados por Piaget e Inhelder como accesibles sólo al nivel de las operaciones formales.

**Efecto de la enseñanza**

Fischbein, Pamput y Minzat (1970b) desarrollaron un programa de enseñanza con 60 niños rumanos de 10, 12 y 14 años, para investigar su efecto en la capacidad combinatoria. Antes de la instrucción se le preguntó a cada niño estimar el número de posibles permutaciones con 3, 4 y 5 elementos; aunque el desempeño fue mejor entre los mayores, en general subestimaron el número total. El programa de enseñanza empezó con el uso del diagrama del árbol para generar y contar grupos de elementos hasta llegar a procedimientos de permutación y arreglo de un número moderado de elementos. Niños desde los 10 años aprendieron el uso adecuado de estas técnicas.

Fischbein y Gazit (1984) investigaron la influencia que un programa de enseñanza puede tener indirectamente en los juicios probabilísticos intuitivos de 285 estudiantes de 10 a 13 años, centrándose en algunos errores intuitivos típicos. Estos autores parten de la hipótesis que el pensamiento probabilístico y el razonamiento proporcional se basan en esquemas mentales distintos, aunque compartan el mismo origen a un nivel intuitivo muy básico. Así un progreso en uno no implica una mejora en otro. Los autores concluyen que las ideas intuitivas de los alumnos pueden mejorar con una enseñanza explícita de las probabilidades, aunque reconocen la dificultad para sustituir una intuición primaria inadecuada por una secundaria, podría llamarse "falacia del jugador", por la cual, después de lanzar una moneda tres veces y haber obtenido tres caras, el sujeto tiende a predecir que la próxima vez es más probable que salga cruz. Además resaltan la trascendencia de introducir las nociones probabilísticas en forma sistemática desde los primeros años. El trabajo de Fischbein y Gazit se encuentra desarrollado en el Capítulo 5.

Fischbein y Gazit (1988) desarrollaron otro programa de enseñanza para mejorar la capacidad combinatoria, con 43 niños de 11 a 12 años y 41 de 13 a 14 años. El programa constaba de seis lecciones; a partir del diagrama de árbol se obtienen las fórmulas para variaciones con repeticiones, permutaciones, variaciones ordinarias y combinaciones. Los autores encontraron que el diagrama en árbol fue un recurso de aprendizaje efectivo para los niños; los resultados en las pruebas post-test (uno al finalizar el programa y otro seis meses después) fueron mejores que en el pre-test (al inicio del programa). Asimismo caracterizaron errores típicos en la resolución de estos tipos de problemas, siendo los más persistentes: (a) error de orden, confusión de combinaciones con variaciones y viceversa; (b) multiplicar los parámetros, inadecuada

transcripción del lenguaje simbólico; (c) dar como solución uno de los números representados en la fórmula y (d) dar una respuesta incoherente.

Fischbein, Nello y Marino (1991) analizan las respuestas de 619 niños italianos entre 9 y 14 años en el lanzamiento de dos dados (211 niños de 9 a 11 años sin instrucción previa en probabilidad, 130 de 11 a 14 años con instrucción previa y 278 de la misma edad que no la habían recibido). Se aplicaron simultáneamente dos cuestionarios con 14 preguntas cada uno. En general, los estudiantes aplican el principio de equiprobabilidad, válido en el lanzamiento de un dado pero no en los resultados conjuntos. Los autores concluyen que muchos niños tienen la capacidad intuitiva de evaluar globalmente la magnitud del espacio muestral y su estructura cuando se pregunta en general, pero si se cambia el formato de la pregunta se basarán en otras interpretaciones (intuición primaria del Azar, combinación aditiva de sucesos independientes o evaluación multiplicativa). La intuición de la relación entre probabilidad y tamaño del espacio muestral es generalizada, no así la de considerar el orden de los resultados elementales en la construcción del espacio muestral. Estos autores también examinaron el efecto del tipo de experimento (simultáneo o en etapas sucesivas) y del contexto (monedas y dados) en experimentos equivalentes desde el punto de vista de la estructura matemática. El desempeño mejora con la edad y con la instrucción. Sin embargo, hay más respuestas erradas en las realizaciones sucesivas que en las simultáneas, pues no se ha separado la estructura matemática del contexto y se cree que la situación secuencial es más controlable que la simultánea.

Truran (1994b) obtuvo los mismos resultados, con relación a las características de generadores aleatorios, como urnas con bolas y ruletas que tienen las mismas propiedades matemáticas, pero a la que los niños hasta los 13 años asignan comportamiento probabilístico diferente. Estos resultados sugieren la necesidad de inclusión de diversos contextos prácticos en la instrucción para captar las estructuras matemáticas antes de realizar la formalización matemática de estos conceptos.

Fischbein y Schnarch (1996) muestran que, con niños entre 11 y 17 años, los alumnos usan con ambigüedad los términos de suceso seguro y posible, por ejemplo "obtener menos de siete al lanzar un dado" se cataloga como seguro y como posible. Tienen la ilusión de control de lo aleatorio, intuiciones primarias favorables a la regla de Laplace y a los axiomas fundamentales, y dificultad para determinar el espacio muestral en experiencias aleatorias con varias partes, en particular les falta razonamiento combinatorio. La regla del producto en la intersección de sucesos independientes no es

espontánea, pues sólo entre estudiantes de 17 años, se obtuvo un 60% de transferencia del cálculo de probabilidades compuestas en contexto de dados a otro contexto.

Sáenz (1998) analiza los resultados de 136 estudiantes españoles de secundaria entre 14 y 15 años divididos en dos grupos: experimental (75 adolescentes que cursaron los tres primeros años de secundaria con tres profesores diferentes) y de control (61 adolescentes con características similares). Antes y después de la instrucción el autor midió el desempeño en cálculo de probabilidades, razonamiento probabilístico, actitud hacia las Matemáticas y nivel de cambio conceptual. La instrucción en probabilidad se impartió en 15 sesiones de una hora con temas referidos a identificación del problema (experiencias aleatorias frente a deterministas), lenguaje de azar y representaciones de incertidumbre, experiencias aleatorias de un ensayo (suceso simple), la ley de los grandes números, experiencias aleatorias de varios ensayos (sucesos compuestos).

El autor identificó la naturaleza altamente contingente del razonamiento probabilístico, de manera que los juicios y razonamientos probabilísticos no son invariantes en función de factores de tarea, ni de los factores asociados al sujeto. Se observaron diversos grados de aceptación intuitiva de las ideas formales probabilísticas clasificándolas en intuitivas, contra-intuitivas y contradictorias. Se detectó la presencia sistemática de un pequeño grupo de principios intuitivos o normativos que permiten hablar de un sistema de ideas personales de los adolescentes sobre el Azar y la Probabilidad en torno a tres elementos, naturaleza, lenguaje y métrica del Azar, y asignación de probabilidades.

### 2.3.2 COMPARACIÓN DE SIGNIFICADOS INTUITIVO Y CLÁSICO DE LA PROBABILIDAD

Cañizares (1997) compara, de modo teórico y empírico, las investigaciones de Piaget y Green (realizadas desde el significado clásico de la Probabilidad) con las de Fischbein (analiza el significado intuitivo). Sugiere que los dos significados son complementarios para el desarrollo en los niños de los conceptos sobre la Probabilidad, cuando solamente se diese el razonamiento del individuo integrando la información fácilmente disponible en las intuiciones lo que requiere un esfuerzo para su consecución, derivado de las capacidades operatorias. Debido a esta conjugación se esperaría que tras la instrucción desaparecieran algunas intuiciones erróneas.

Como base de su trabajo, Cañizares (1997) analiza las diferencias entre las ideas de Piaget y Fischbein, tal y como se refleja en la tabla 2.2.

| COMPARATIVA | | |
|---|---|---|
| Estadio | Piaget | Fischbein |
| pre-operacional | El niño no posee los recursos necesarios para estimar correctamente las posibilidades a favor y en contra de los sucesos aleatorios. | El niño puede hacer juicios probabilísticos, en situaciones sencillas, como elegir entre dos urnas con diferente número de bolas blancas y negras, aquella que ofrezca más posibilidades de obtener una bola blanca. |
| | La comprensión del Azar y Probabilidad sólo se alcanza cuando es capaz de dar una argumentación teórica o mostrar una abstracción generalizable que explique las respuestas a los problemas de probabilidad. | Acepta el desarrollo de un razonamiento probabilístico empírico incipiente, que se muestra en el uso cotidiano de términos como "posible", y la elección entre dos situaciones de la más probable, aunque no sea a estas edades asignar un valor matemáticamente correcto a la probabilidad de un suceso a una situación dada. |
| Aceptan que la estimación de probabilidades de un resultado es mejor en adolescentes que en niño de menor edad. | | |
| Operaciones formales | A partir de los 12 años. | Desde los 10 años, si se recibe una instrucción adecuada.<br>Sin instrucción explícita muchos adultos nunca desarrollarán el nivel formal de comprensión y estimación de probabilidades. |

Tabla 2.2 Comparativa de los significados intuitivo y clásico de la Probabilidad

## 2.4 DESDE EL ENFOQUE FRECUENCIAL

En la etapa pre-operacional, diferentes investigadores han realizado experimentos, en los cuales se trata de estudiar las predicciones de los sujetos ante situaciones en que un suceso se repite con una determinada frecuencia relativa. Un ejemplo de esta clase de experiencias consiste en presentar al alumno dos luces de color diferente (rojo y blanco) que se irán encendiendo intermitente y aleatoriamente con una determinada frecuencia, por ejemplo, el 70 y el 30%, respectivamente (Figura 2.5).



Figura 2.5 Experimento con dos bombillas

El alumno debe predecir cuál de las dos luces se encenderá la próxima vez. El término aprendizaje probabilístico se refiere a la probabilidad que una respuesta dada tiende a igualar a la probabilidad del estímulo correspondiente.

Los resultados obtenidos en este tipo de experimentos dan como conclusión que el niño de infantil adapta sus predicciones a las probabilidades de los sucesos que se le presentan como estímulo, aunque sus respuestas no llegan a coincidir totalmente con la frecuencia de los mismos. El hecho de que una conducta pueda obtenerse sin que se estimule al niño mediante una recompensa cuando acierta, muestra que este fenómeno no es un condicionamiento motor sino una formación cognitiva mental.

En la etapa de operaciones concretas, la mayoría de los investigadores han encontrado que la intuición de la frecuencia relativa de sucesos, puesta de manifiesto a través de experimentos probabilísticos, mejora con la edad. La intuición de la frecuencia relativa se desarrolla de un modo natural como resultado de las experiencias del niño con situaciones que implican sucesos aleatorios, en los cuales las respuestas deben expresar una estimación correcta de las frecuencias relativas de los fenómenos.

En la etapa de operaciones formales, se puede observar en las investigaciones que se han realizado con diferentes niveles de edad, que han demostrado que el adolescente ha hecho progresos en comparación a los niños más pequeños en lo que se refiere a la intuición de la frecuencia relativa, sobre todo donde las predicciones tienen algún resultado práctico.

A continuación se describen algunas investigaciones en las que se evalúa la comprensión que tienen sobre el enfoque frecuencial los estudiantes.

El cuestionario de Green (1983a) incluye un ítem que proporciona información frecuencial sobre la ocurrencia de diferentes sucesos en un experimento con sucesos no equiprobables (lanzar al aire 100 chinchetas, para saber cuántas caen con la punta hacia arriba o hacia abajo). La pregunta consiste en elegir entre cinco opciones la frecuencia de resultados que se cree más probable que resultará en una repetición del experimento. En el enunciado del ítem se indica que el profesor ha obtenido 68 chinchetas con la punta hacia arriba y 32 con la punta hacia abajo. Si el niño presenta el sesgo de equiprobabilidad, puede ignorar la información frecuencial proporcionada por el profesor y decir que la forma de la chincheta implica mayor posibilidad de que la punta caiga hacia arriba.

En la primera prueba piloto (Green, 1983b) se pedía a 66 niños estimar, sin información previa, cuántas chinchetas espera el niño que caigan punta arriba y cuántas punta abajo, al lanzar sobre una mesa una bolsa con 100 de ellas; el 61% respondieron con razones a 50:50, indicio de sesgo de equiprobabilidad y el 15% con preferencia para punta arriba (correcta o parcialmente correcta). En consecuencia, se incluyó en el enunciado el resultado de un primer ensayo del profesor y se cambió la respuesta abierta por una de selección con una lista de posibles resultados para un segundo ensayo; esta lista se modificó en tres versiones de la prueba, teniendo en cuenta los resultados de cada pilotaje y entrevistas con los niños. A pesar de las modificaciones, las tasas de acierto y sesgo no mejoraron en la versión final; el autor concluye que la experimentación en este tipo de contextos es importante y la persistencia del sesgo de equiprobabilidad en niños de todas las edades.

En la investigación de Cañizares (1997) el 64,1% muestran el sesgo de equiprobabilidad en este ítem (que tiene un leve aumento con la edad) y sólo el 15% contestan correctamente, mostrando un cierto nivel de comprensión del significado frecuencial. Green obtuvo resultados similares en su experimento.

### 2.4.1 PERCEPCIÓN DE LA ALEATORIEDAD

Una acepción de lo aleatorio la podemos encontrar en el diccionario del uso del español de la Real Academia Española de la Lengua (RAE), en el que encontramos la siguiente definición: *(Del lat. aleatorius, propio del juego de dados). Perteneciente o relativo al juego de azar. Dependiente de algún suceso fortuito.*

Una variante de esta acepción es suponer que todo fenómeno tiene una causa. *Nada sucede por azar sino que todo ocurre por una razón y por una necesidad* (Leucippus, siglo V a. C., citado por Batanero C. y Serrano L., 1995). Esta acepción indica que lo que es aleatorio para una persona puede no serlo para otra, por lo que tendría un carácter subjetivo: *El Azar no es más que la medida de nuestra ignorancia. Los fenómenos fortuitos son, por definición aquellos cuyas leyes ignoramos*. (Poincaré, 1936, véase Batanero C. y Serrano L., 1995).

Poincaré encuentra que esta definición no es satisfactoria, ya que ciertos fenómenos, cuyas leyes no conocemos, son, sin embargo, considerados como deterministas. Por tanto, la diferencia entre los aleatorios o fortuitos, sobre los cuales el cálculo de probabilidades nos informará provisionalmente y los que no lo son, sobre los cuales no hay esta posibilidad de predicción hasta que se hayan encontrado las leyes que los rigen.

Ayer (1974), ver Batanero C. y Serrano L., 1995, indica que un fenómeno se considera aleatorio si se comporta de acuerdo al cálculo de probabilidades. Una causa muy pequeña determina, a veces, un efecto considerable y se dice que el resultado es aleatorio porque la predicción resulta imposible.

En un concepto clásico de Probabilidad se dice que un objeto (o un suceso) es un miembro aleatorio de una cierta clase, si la probabilidad de este objeto es igual que la de cualquier otro miembro de su clase. A partir de esta definición es difícil discriminar un miembro aleatorio o no aleatorio en una clase dada.

Kyburg (1975), consultar Batanero C. y Serrano L., 1995, sugiere que este método de definir la aleatoriedad impone restricciones severas y no naturales a la aplicación de esta idea. Sólo se podría decir que un objeto es un miembro aleatorio de una clase si esta es finita. Si fuese infinita, entonces la probabilidad de cada miembro de la clase siempre sería nula, aunque el método de selección fuese sesgado.

Kyburg (1974), véase Batanero C. y Serrano L., 1995, propone una interpretación de la aleatoriedad compuesta de cuatro términos, que son los siguientes:

- el objeto que se supone es miembro aleatorio de una clase
- el conjunto del cual el objeto es un miembro aleatorio (población o colectivo)
- la propiedad con respecto a la cual el objeto es un miembro aleatorio de la clase dada
- el conocimiento de la persona que emite el juicio de aleatoriedad.

Algunas investigaciones tratan de describir la comprensión de los estudiantes sobre las características de las secuencias aleatorias. Esta comprensión es necesaria en este tipo de enfoque para enseñar Probabilidad, ya que los alumnos han de realizar una serie de experiencias y registrar datos de secuencias de resultados aleatorios.

A continuación se describen algunas de las experiencias.

La investigación de Green (1983a) pide a los niños diferenciar entre una sucesión aleatoria y otra que no lo es. Las dos sucesiones propuestas simulan el resultado de lanzar 150 veces una moneda equilibrada. La mayor parte de los niños en todas las edades elige la secuencia no aleatoria. Green clasifica los argumentos de los niños para la no aleatoriedad en correctos (patrón demasiado regular o rachas muy cortas, grupos de pocos símbolos idénticos consecutivos) e incorrectos (patrón demasiado irregular, el porcentaje de caras no es 50% o rachas muy largas, grupos de muchos símbolos idénticos consecutivos).

Green (1991) compara los resultados de 305 niños ingleses, de 7 a 11 años, a preguntas sobre secuencias aleatorias. Una pregunta consistía en escribir una sucesión de 50 símbolos, simulando los resultados de lanzamientos sucesivos de una moneda. Del análisis de los datos recogidos se observó la tendencia a equiparar el número de caras y de cruces en los niños con diversos niveles de habilidad (clasificados en cinco categorías por sus profesores). Además producen sucesiones tales que el número de caras en la primera mitad de la secuencia es muy cercana al número de caras en la segunda mitad. En el análisis de la independencia de los resultados producidos por los estudiantes se observa la longitud de las rachas producidas por los estudiantes, notando un sesgo importante a la alternancia de resultados. Se observa que los niños tienden a subestimar la variabilidad en las secuencias y a aproximar a ½ la proporción de caras y cruces con dispersión más pequeña de lo esperado para una secuencia realmente aleatoria.

Serrano (1996) entrevista a 20 alumnos españoles, 10 de 16 años y 10 estudiantes de Magisterio sobre 20 años, acerca de la resolución de algunos problemas de Probabilidad incluidos en una secuencia didáctica para introducirla con enfoque frecuencial. Utiliza cuatro ítems con subítems, que propone individualmente a cada alumno. Estos tratan de resolverlos y combinan con experiencias de simulación para ver si hay una progresión de aprendizaje. Los participantes mostraron su comprensión de las características generales de imprevisibilidad de fenómenos aleatorios y de la regularidad en la frecuencia de posibles resultados. Asimismo se vio un razonamiento combinatorio

correcto sobre la secuencia de resultados e identificación de sucesos elementales en el espacio muestral producto. Hubo traducción entre sistemas de representación (secuencias de ensayos, recorrido aleatorio, frecuencias relativas), pero también aparecen estrategias o ideas incorrectas como la aplicación de la regla de Laplace en un contexto inadecuado, dificultad en la aplicación de la independencia de ensayos en contexto práctico, previsiones incorrectas de recorridos aleatorios; heurística de representatividad: comparación de porcentajes sin tener en cuenta el tamaño de la muestra, confusión de la magnitud relativa de la proporción con el tamaño muestral, confianza en una continuación de la tendencia o de una compensación en pequeñas muestras, estabilización en los extremos (rápida o a largo plazo), mayor fiabilidad en las muestras pequeñas frente a las grandes.

### 2.4.2 INVESTIGACIONES APOYADAS EN LA SIMULACIÓN

La investigación de Pratt (1998, 2000, 2005; Pratt y Noss, 2002) profundiza en los significados que atribuyen los niños, de 10 y 11 años, a los fenómenos aleatorios. Supone que los menores conservan múltiples intuiciones e incluso se inclinan hacia un resultado en particular. Pratt diseñó un software con dados, monedas y ruletas electrónicas, que podían ser manipulados por los niños en cuanto a la distribución de probabilidad, el número de ensayos, la opción gráfica y numérica para ver los resultados. Además, el software podía producir resultados no aleatorios para observar el comportamiento de los niños al confrontar esta situación. Previo al experimento los niños fueron entrevistados para deducir el significado que daban el término aleatorio, clasificándole como impredecible, irregular, incontrolable y equitativo. Se pidió a los niños ver si varios resultados eran o no aleatorios. Con objeto de establecer si el generador se podía considerar aleatorio, los niños comprobaban o descartaban conjeturas replicando ensayos usando el programa. Al finalizar el experimento, algunos niños habían construido algunos conocimientos de probabilidad frecuencial, como la relación entre las frecuencias de los resultados y el efecto sobre las frecuencias relativas del número de ensayos y la distribución inicial de probabilidades.

Aspinwall y Tarr (2001) evalúan el efecto de un programa de instrucción en 23 estudiantes estadounidenses de 6.º grado, con el objeto de determinar si las tareas de simulación de fenómenos aleatorios influyen en la comprensión del papel que juega el tamaño de la muestra al estimar probabilidades bajo un enfoque frecuencial. Utilizan un programa de instrucción de cinco sesiones, que comprendía tareas de resolución de

problemas, preguntas clave y la escritura por parte de los alumnos de un reporte escrito. Los autores observaron diferencias significativas entre las evaluaciones que realizan sobre los conocimientos previos y posteriores a la instrucción, resultando ser una diferencia positiva.

Serrano, Ortiz y Rodríguez (2009) analizan los resultados de 45 estudiantes de 3.º de Educación Secundaria (14-15 años) en la aplicación de un cuestionario de intuiciones sobre sucesiones aleatorias desde el enfoque frecuencial, con el fin de determinar la influencia de la simulación sobre tales intuiciones. El cuestionario constaba de tres ítems con subítems para un total de doce preguntas adaptadas de Serrano (1996) y de Green (1991). Los autores observaron inseguridad e inmadurez para interpretar y responder al cuestionario, además de dificultades iniciales con el simulador. Se observaron intuiciones correctas en el 80% de los estudiantes, aunque no se detectaron diferencias entre las concepciones erróneas antes y después de la simulación.

Lee, Angotti y Tarr (2010) analizaron las respuestas de 23 estudiantes de 6.º grado (11-12 años) de Estados Unidos a los que se les realizó un experimento de enseñanza de Probabilidad de doce sesiones de 60 minutos cada una. Los estudiantes abordaron seis tareas en parejas o tríos, experimentando con objetos reales (monedas, dados y ruletas) y simulando con un software educativo (*Probability Explorer*). El programa de ordenador permitía especificar condiciones de simulación como el número de ensayos, la visualización del resultado por ensayo, el sistema de representación para el resumen de los resultados (tabular y gráfica, con frecuencias absolutas o relativas) y la actualización de estas representaciones después de cada ensayo. Después del trabajo en grupos, la clase completa discutía los resultados comparando las observaciones en los ensayos empíricos con las expectativas derivadas del modelo teórico de distribución de probabilidades.

Polaki (2002) contrastó el desempeño de dos grupos de 12 niños en Italia, de 4.° y 5.° grados, que recibieron instrucción sobre probabilidad con metodología diferente. En uno de los grupos se generaban muestras pequeñas con datos experimentales y se utilizaba el análisis de la estructura del espacio muestral para determinar las probabilidades, de una forma clásica. En el otro grupo se simulaban, en un ordenador, grandes muestras de un experimento, antes de considerar el análisis de la composición del espacio muestral, usando, por tanto el enfoque frecuencial para estimar las probabilidades. El autor menciona el impacto positivo de ambos métodos para

desarrollar el razonamiento probabilístico de los niños, notando que no fueron significativas las diferencias en las pruebas realizadas para evaluar el aprendizaje en los dos grupos. Concluyó también que el enfoque frecuencial puede ser demasiado abstracto para los niños de esta edad, ya que no logran comprender el efecto del tamaño de muestra en la convergencia, identificando como posible argumento para esta dificultad la falta de familiaridad de los participantes en su estudio con la generación de datos por ordenador y la manipulación de conjuntos con gran número de datos.

## 2.5 DESDE EL ENFOQUE SUBJETIVO

En el significado subjetivo diferentes sujetos pueden asignar distinta probabilidad al mismo suceso, dependiendo de la información disponible. Este enfoque implica la comprensión de la probabilidad condicional, ya que en el enfoque subjetivo todas las probabilidades son condicionales. Debido a esto, se clasifican las investigaciones en dos grupos:

- Las que se refieren a creencias y sesgos que afectan a la verosimilitud que cada persona puede asociar a un suceso, de acuerdo con sus experiencias anteriores o a la información previa.
- Un segundo grupo se refiere a la comprensión de la probabilidad condicional y conceptos relacionados.

### 2.5.1 HEURÍSTICAS Y SESGOS EN EL RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO

Durante la década de 1970, los psicólogos lideraron una nueva área de investigación, cuya publicación más citada es la compilación de Kahneman, Slovic y Tversky (1982), enfocada a identificar formas incorrectas de razonar en probabilidad y factores que afectan a estos errores. Los autores denominan *heurísticas* a simples reglas de conducta, usualmente inconscientes, que hacen prescindir parcialmente de información relevante y reducen tareas complejas a simples juicios. Dichas heurísticas explican cómo las personas toman decisiones; difieren de los algoritmos en que son automáticas y no reflexivas; pueden trabajar bien bajo ciertas circunstancias, pero en otras llevar a sesgos sistemáticos en los resultados. La confianza en tales principios y la persistencia de los sesgos no es exclusiva de sujetos inexpertos, pues investigadores y profesionales de la estadística también son propensos a ellos cuando prevalece su intuición sobre su conocimiento (Díaz, 2003).

La *heurística de representatividad* (Tversky y Kahneman, 1982) consiste en estimar la verosimilitud de un suceso en base a la similitud con la población de la que proviene. En situaciones de predicción, la persona puede recurrir a los sucesos más representativos y puede incurrir en sesgos, que son debidos al bajo costo de razonamiento de esta heurística frente al uso de cálculos matemáticos y no a la falta de comprensión de los conceptos probabilísticos. Un sesgo relacionado es la insensibilidad al tamaño de la muestra. La persona aplica en muestras pequeñas resultados propios de la ley de los grandes números, asumiendo que una muestra pequeña representa en todas sus características a la población de la que proviene, a manera de una "ley de los pequeños números" (Tversky y Kahneman, 1974).

Un segundo sesgo es la *falacia del jugador*, que consiste en ver el Azar como un proceso auto-correctivo, considerando que los resultados del experimento aleatorio afectarán a la probabilidad de sucesos futuros. Por ejemplo, después de una racha de caras, en el lanzamiento de una moneda, muchas personas creen que en el siguiente lanzamiento será más probable una cruz, dando lugar a la *recencia positiva* y la *recencia negativa* (Fischbein, 1975). La primera consiste en creer que, después de la aparición consecutiva de un tipo de símbolo, este volverá a aparecer. Mientras que, la segunda consiste en creer que debe presentarse una alternancia entre los símbolos equilibrando los resultados. En ambos casos se desconoce la independencia de las repeticiones del experimento y se asume que el proceso tiene memoria.

Un tercer sesgo es la *falacia de las tasas base* que consiste en ignorar el tamaño relativo de subgrupos en la población, cuando se juzga la verosimilitud de sucesos contingentes que involucran los subgrupos.

La *heurística de la disponibilidad* (Tversky y Kahneman, 1974) consiste en fundamentar un juicio de verosimilitud de un suceso en su fuerza de asociación con los recuerdos de la persona. Entre los sesgos asociados, Díaz (2003) indica los debidos a la facilidad para encontrar ejemplos y a la efectividad de patrones de búsqueda. El primero consiste en que la Probabilidad se estima según la facilidad de recordar situaciones favorables al suceso. Por ejemplo, la estimación del índice de violencia en una región se basa en la rapidez de la persona cuestionada para evocar situaciones violentas en esa región. Un ejemplo del segundo es, que se considera más probable encontrar una palabra que comience con A que otra que finalice con la misma letra, pues es más efectiva la búsqueda de las primeras.

Otros tres sesgos frecuentes son el de equiprobabilidad, el enfoque en el resultado y la ilusión de control. El *sesgo de equiprobabilidad* (Lecoutre, 1992) consiste en creer que todos los resultados son igualmente probables en cualquier experimento aleatorio, y se ha encontrado en muchas investigaciones, aunque se modifique el contexto y el formato de la pregunta. Una explicación es que muchas personas asocian azar con probabilidades iguales para los resultados y no con modelos combinatorios. El *enfoque en el resultado* (Konold, 1989) consiste en estimar la probabilidad de un suceso de forma no probabilística, interpretando la pregunta como predicción del resultado de un ensayo simple. No se interpreta el resultado de un experimento en forma frecuencial, sino subjetiva. La *ilusión de control* (Langer, 1982), es la creencia en la posibilidad personal de control de lo aleatorio, para aumentar la probabilidad de éxito ante juegos de azar. Se debe a que el individuo no reconoce que la suerte es fortuita o no distingue la diferencia entre juegos de habilidad y de azar.

**Investigaciones con niños y adolescentes**

Entre las investigaciones realizadas con niños, Amir y Williams (1994) entrevistaron a 38 estudiantes ingleses de 11 y 12 años para conocer el efecto de factores culturales, creencias (religiosas) o actitudes fatalistas en heurísticas y sesgos. Los autores concluyeron que los niños utilizan razonamiento mixto (racional e irracional) para asignar probabilidades, siendo lo más influyente sus experiencias pasadas, como la espera ansiosa de un resultado aparentemente esquivo en el lanzamiento de un dado, y sus creencias de tipo religioso, control divino absoluto, o supersticioso, como números afortunados o romper un espejo.

Fischbein y Schnarch (1996) analizaron las respuestas a un cuestionario con siete problemas, cada uno asociado a un error probabilístico conocido de 20 estudiantes en Israel en cada uno de los grados 5.º, 7.º, 9.º y 11.º (10, 12, 14 y 16 años). Los resultados muestran que algunas heurísticas y sesgos disminuyen con la edad (heurística de representatividad, recencia negativa, falacia de la conjunción), otras se mantienen (sucesos compuestos tratados como simples) y otras se fortalecen (influencia del tamaño de la muestra, disponibilidad, falacia del eje temporal). Los autores concluyen que la perduración se debe al arraigo de algún esquema intelectual (principio general) que se hace más claro para el sujeto con el tiempo (más integrado a su actividad intelectual e influyente en sus decisiones).

Respecto a la heurísticas y sesgos, Serrano (1996), en su cuestionario con 277 estudiantes españoles de 13 (147) y 17 años (130), analiza también este aspecto. La principal conclusión fue que las proporciones de estudiantes que mostraron enfoque en el resultado aislado, sesgos de equiprobabilidad o de representatividad, resultaron menores que las proporciones reportadas en la literatura. Además, se observó que los estudiantes varían la estrategia de estimación de probabilidades en experimentos compuestos y que la asignación está relacionada con el razonamiento combinatorio, introducción de elementos subjetivos y el tamaño de la muestra.

### 2.5.2 PROBABILIDAD CONDICIONAL E INDEPENDENCIA

Entre las confusiones más frecuentes, se encuentran las falacias de la *conjunción* (creencia que la intersección de los sucesos es más probable que sólo uno de ellos; Tversky y Kahneman, 1982), la condicional traspuesta (uso indiscriminado de *P(A/B)* y *P(B/A)*; Falk, 1986) y del eje del tiempo (creer que no se puede condicionar un suceso por otro posterior; Falk, 1986). También se confunde condicionamiento con causalidad (Falk, 1986) e independencia con exclusión (Sánchez, 1996).

Ojeda (1995) analiza las respuestas de 255 estudiantes mexicanos entre 14 y 16 años, a un cuestionario, después de enseñarles probabilidad condicional y teorema de Bayes con dos metodologías. En un grupo control, de 149 estudiantes, se basó en conjuntos y diagramas de Venn y en el otro experimental, de 106 estudiantes, en el empleo sistemático de diagramas de árbol. El porcentaje de aciertos fue similar con las dos metodologías, pero hubo diferencia en la argumentación, en la que predominó el lenguaje ordinario (74%) para el grupo control y simbólico (70%) para el grupo experimental. La mitad de los adolescentes interpretaron la conjunción como condicionamiento, sólo el 9% identificaron la intersección y el 23% el suceso condicionante. El 40% aplicó bien la probabilidad condicional en un problema de razonamiento causal, más del 45% resolvieron con éxito problemas bayesianos, planteados tanto en formato frecuencial como probabilístico.

Shaughnessy y Ciancetta (2002) analizan las respuestas de 652 estudiantes de Estados Unidos, entre 12 y 18 años con diferentes niveles de formación en Matemáticas, a un ítem de probabilidad conjunta. Se plantea un juego no equitativo con dos ruletas iguales divididas por la mitad, que funcionan en forma independiente; se pregunta si la probabilidad de ganar es de 50% y se pide justificación. Este ítem se extrajo de una prueba nacional aplicada en 1996 a estudiantes preuniversitarios y se utilizó en esta

investigación debido a la baja proporción de respuesta correcta en su aplicación original (8% respuestas correctas con argumentos válidos y 20% parcialmente correctas). Los investigadores encontraron que la proporción de respuesta correcta fue diferenciada según grado escolar y nivel de formación en Matemáticas; además que la mayoría no consideraron el espacio muestral compuesto para justificar su respuesta. Cerca del 90% de estudiantes entre 16 y 18 años con cursos avanzados de Matemáticas respondieron correctamente, el 20% de los estudiantes entre 12 y 14 años respondieron en forma parcialmente correcta; el desempeño de estudiantes entre 15 y 17 años con un nivel introductorio en Matemáticas fue similar al observado en la prueba de 1996. Posteriormente, los investigadores adaptaron el ítem para aplicar a un grupo nuevo (28 estudiantes, 14 a 18 años) que podía confrontar su respuesta inicial después de realizar 10 veces el experimento. La mitad de los estudiantes inicialmente dieron la respuesta correcta pero muy pocos usaron la regla del producto o el espacio muestral compuesto; la mayoría de los que inicialmente se equivocaron en su respuesta cambiaron su opinión después de experimentar con el juego y una proporción importante argumentó con conocimiento matemático. Finalmente, los investigadores resaltan la utilidad de la simulación o la experimentación para establecer conexión entre los datos observados en realizaciones sucesivas del experimento y los resultados esperados según un modelo de probabilidad o el espacio muestral subyacente.

Lonjedo y Huerta (2005) proponen otro cuestionario a 56 estudiantes españoles (10 universitarios de la Facultad de Matemáticas, 15 de 17 a 18 años en 2.° de Bachillerato de Ciencias Sociales y 31 de 15 a 16 años en 4.° de ESO). Modifican el número y tipo de problemas (seis con sólo una probabilidad condicionada) y la forma de plantear la pregunta (porcentaje o probabilidad), sin variar el resto de condiciones. Los autores observan menor dificultad para resolver problemas bayesianos cuando los datos están en frecuencias absolutas (60% frente al 50% en formato probabilístico). Entre quienes dieron solución correcta, muy pocos vieron la tarea como cálculo de probabilidades (los universitarios y tres de Bachillerato), el resto lo interpretaron en forma Aritmética.

Lonjedo y Huerta (2007) aplican una nueva prueba, con tres problemas isomorfos que cambian en el formato de los datos, a estudiantes de diferente formación (13-14, 16- 18 y 19-20 años). Cada problema es abordado por un número diferente de estudiantes (67 en formato porcentual, 80 en frecuencia absoluta y 33 en probabilidad). Los autores proponen un esquema de análisis para el estudio de las respuestas. El

análisis de las respuestas correctas se centra en el tipo de razonamiento empleado; en las incorrectas en el tipo de dificultad y en los errores asociados a éstas. El razonamiento empleado estuvo relacionado con el nivel de formación: sólo los universitarios usan razonamiento exclusivamente probabilístico y muy pocos de éstos logran resolver el problema con datos en porcentajes o probabilidades. El porcentaje de éxitos es mayor si los datos están expresados en frecuencias absolutas, casi siempre resuelto con razonamiento aritmético. Los autores argumentan que el desempeño también mejora con la modificación en el enunciado de expresiones que provocan ambigüedad en la condicionalidad, como “y” o “también”.

# CAPÍTULO 3

# FORMACIÓN DE LOS PROFESORES PARA ENSEÑAR PROBABILIDAD


3.1. Introducción
3.2. Modelos sobre el conocimiento del profesor
  3.2.1. Algunos modelos sobre conocimientos del profesor de Matemáticas
  3.2.2. Principales modelos descritos dentro de la Educación Estadística
3.3. Investigaciones sobre el conocimiento del profesor para enseñar Azar y Probabilidad
  3.3.1. Investigaciones sobre el conocimiento común de Probabilidad
  3.3.1.1. Investigaciones con futuros profesores de Educación Primaria
  3.3.1.2. Investigaciones con futuros profesores de matemáticas de Educación Secundaria
  3.3.1.3. Investigaciones con profesores en ejercicio
3.4. Conocimiento de la Probabilidad y su enseñanza
3.5. Actitudes y creencias
3.6. Experiencias de formación

## 3.1 INTRODUCCIÓN

Para fundamentar este trabajo, en este capítulo presentamos un resumen de las principales investigaciones relacionadas con uno de nuestros objetos de investigación: *La investigación pretende proporcionar alguna información sobre el conocimiento matemático de la Probabilidad y evaluarlo en una muestra de profesores de Educación Primaria y Secundaria.* Se realiza una síntesis de la investigación específica sobre los conocimientos de los profesores a partir de los trabajos previos de Batanero y Díaz (2011) y Contreras (2011) que serán ampliados con investigaciones no tenidas en cuenta por estos autores. Como mencionan Batanero y Díaz (2011), en la formación de futuros profesores de Matemáticas no es usual introducir un curso específico sobre Didáctica de la Probabilidad. Un posible motivo es que, hasta la última década, el currículo de probabilidad era casi inexistente en la Educación Primaria. En la última década, los currículos escolares, por ejemplo NTCM, 2000 y MEC 2006 a, 2007 a, 2014, han adelantado la enseñanza del Azar y la Probabilidad al primer ciclo de la Educación Primaria, en la que se privilegia el enfoque frecuencial de la Probabilidad. Asimismo, este cambio ha propiciado un interés creciente por la investigación sobre el conocimiento y la formación de los profesores respecto al Azar y la Probabilidad.

Para poder poner en marcha las nuevas orientaciones curriculares Batanero y Díaz (2011) indican que es necesario trabajar en dos frentes: (a) la preparación idónea para estos profesores y, (b) en paralelo, la generación de conciencia entre los profesores de la importancia que tiene para los estudiantes una cultura probabilística.

Este capítulo comienza con un análisis de algunos modelos teóricos que describen los componentes del conocimiento del profesor de Matemáticas y otros específicos desarrollados en el campo de la Estadística.

En las secciones siguientes se desglosan estudios relacionados con algunos componentes de dicho modelo: conocimiento común, ampliado y especializado de la Probabilidad.

## 3.2 MODELOS SOBRE EL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR

En primer lugar se analizan los modelos sobre el conocimiento que requiere el profesor para tener éxito en la enseñanza del Azar y la Probabilidad en la clase de matemáticas. La investigación sobre la formación y el conocimiento de este es una de las áreas más importantes de investigación en los últimos veinte años dentro de la Didáctica de las Matemáticas, pero apenas ha tenido repercusión dentro de la Educación

Estadística. Dentro de esta literatura, se hace una breve revisión de algunos trabajos que han tenido influencia en las investigaciones sobre la formación del profesor para enseñar Probabilidad y Estadística, siendo conscientes de que la literatura en Educación Matemática es mucho más amplia.

### 3.2.1 ALGUNOS MODELOS SOBRE CONOCIMIENTOS DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Los profesores también necesitan formación en el conocimiento didáctico relacionado con la Educación Estadística, al que no pueden transferirse algunos principios generales válidos para otras ramas de las Matemáticas (Batanero, Godino y Roa, 2004). Si queremos impulsar el desarrollo de este conocimiento y su análisis se requiere un modelo de sus componentes de dicho conocimiento.

En Educación Matemática hay diversidad de modelos sobre conocimiento del profesor, la mayoría desarrollados en los últimos veinte años. Es de resaltar la existencia de la revista *Journal of Mathematics Teacher Education*, el "Handbook" editado por Wood (2008) y el libro publicado en 2008 como consecuencia del ICMI Study 15, "The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics Teachers" (véase Gómez E., 2014). En el terreno específico de la estadística destacamos el estudio de ICMI e IASE sobre el tema (Batanero, Burrill y Reading, 2011).

**Modelo de Shulman**

Uno de los primeros en interesarse por el pensamiento del profesor fue Shulman (1986 a, b) quien ha tenido gran influencia en la investigación posterior y que describe un conocimiento específico del profesor que denomina *conocimiento pedagógico del contenido (PCK)*. Según este autor sería el conocimiento necesario para la enseñanza de un cierto tema e interactúa con el conocimiento de contenido y el curricular. Lo describe como "conocimiento que va más allá del conocimiento de la materia en sí, hacia un conocimiento de la materia para enseñar" (Shulman, 1986 b). También propone tres componentes esenciales, ligados entre sí, dentro de este conocimiento:

1. *El conocimiento del contenido enseñable o conocimiento de la materia.* El profesor necesita unos conocimientos suficientes de aquello que va a enseñar, aunque esto no es suficiente. La investigación sobre el conocimiento del contenido matemático del profesor se orienta a analizar su naturaleza conceptual y epistemológica, sus componentes, características y el grado de conocimiento

matemático (genérico o específico) que tienen los profesores, así como sus relaciones con la enseñanza y el aprendizaje y con otros dominios de conocimiento (Even, 1993).

2. *Las formas de representación o estrategias para enseñar el tema*, tales como: analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones. Las representaciones son elementos utilizados por el profesor para ayudar en la generación del conocimiento en los alumnos.
3. *Conocimiento del aprendizaje del estudiante,* incluyendo errores, dificultades, creencias y concepciones de sus estudiantes y de las condiciones necesarias para lograr transformar estas concepciones de manera adecuada y correcta.

El PCK conceptualiza la forma en que un contenido específico (como la Probabilidad) se reinterpreta en la enseñanza, partiendo de la experiencia e ideas del profesor acerca de las Matemáticas, su enseñanza y aprendizaje (Cooney, 1994). Llinares (1998) lo describe del modo siguiente:

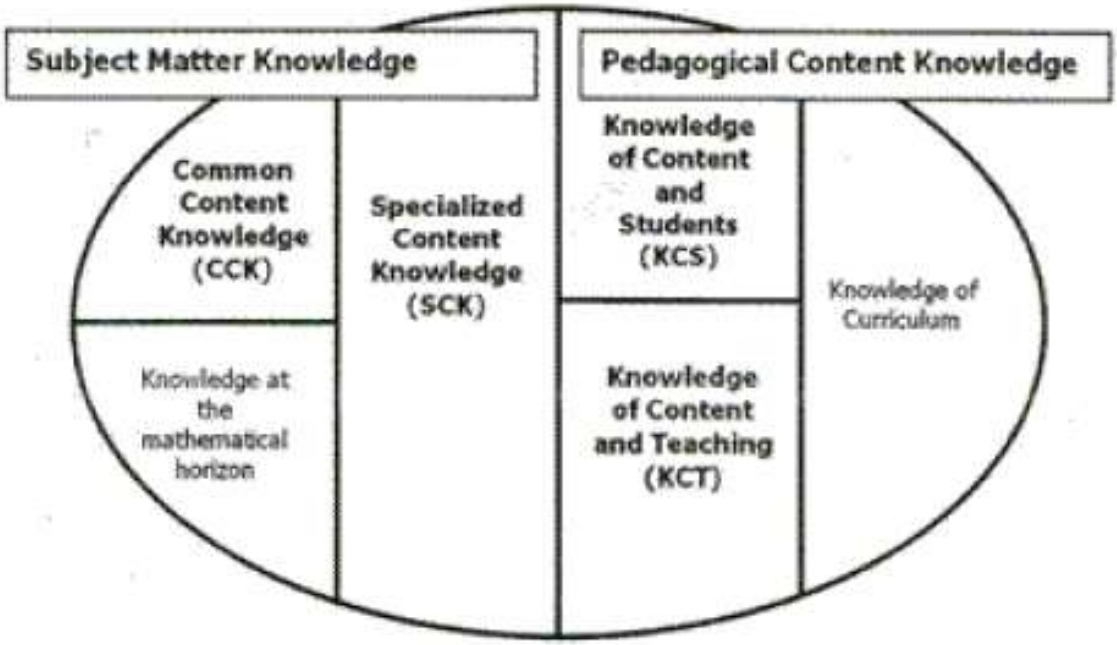
> Conocimiento del profesor del contenido que tiene que enseñar considerándolo desde la perspectiva de la enseñanza-aprendizaje. Se centra en el conocimiento del profesor de las potencialidades y limitaciones de los diferentes modos de representación del contenido matemático como medios para hacer comprensible a los estudiantes dicho contenido y el conocimiento de las dificultades y errores más comunes de los alumnos en relación a un contenido específico, etc.

Shulman (1987) desarrolla los componentes del PCK como conocimiento base para la enseñanza, que agrupa en seis categorías: (a) conocimiento de contenido, acorde con la disciplina a enseñar, (b) conocimiento pedagógico general, en especial la gestión en el aula con el fin de trascender al contenido; (c) conocimiento del currículo, en particular de los materiales y directrices; (d) conocimiento de los alumnos y de sus características; (e) conocimiento del contexto educativo, el entorno del aula, el funcionamiento de la institución escolar y de la comunidad a la que pertenece la escuela; y (f) conocimiento de los propósitos, valores y fines educativos y sus fundamentos filosóficos e históricos.

Asimismo, el autor describe cuatro fuentes para desarrollar estos conocimientos: (a) la formación académica disciplinar; (b) los materiales y estructuras del proceso educativo institucionalizado, como, por ejemplo, los libros de texto o documentos curriculares sobre un tema; (c) el conocimiento de los resultados de la investigación que afecta el ejercicio docente, y (d) la experiencia que el profesor va adquiriendo a lo largo de su vida profesional con buenas prácticas docentes.

**Modelo de Ball y colaboradores**

A partir del trabajo de Shulman, uno que ha tenido gran seguimiento en Educación Estadística es el de Ball y colaboradores, quienes han desarrollado una investigación orientada al desarrollo de instrumentos de evaluación de los conocimientos del profesor en Educación Matemática. Para ello describen lo que denominan "Mathematical Knowledge for Teaching" (MKT), o conocimiento matemático para la enseñanza, que es *"el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno"* (Hill, Ball y Schilling, 2008, p. 374) y que está compuesto por dos grandes categorías: conocimiento del contenido y conocimiento pedagógico del contenido (o conocimiento didáctico).



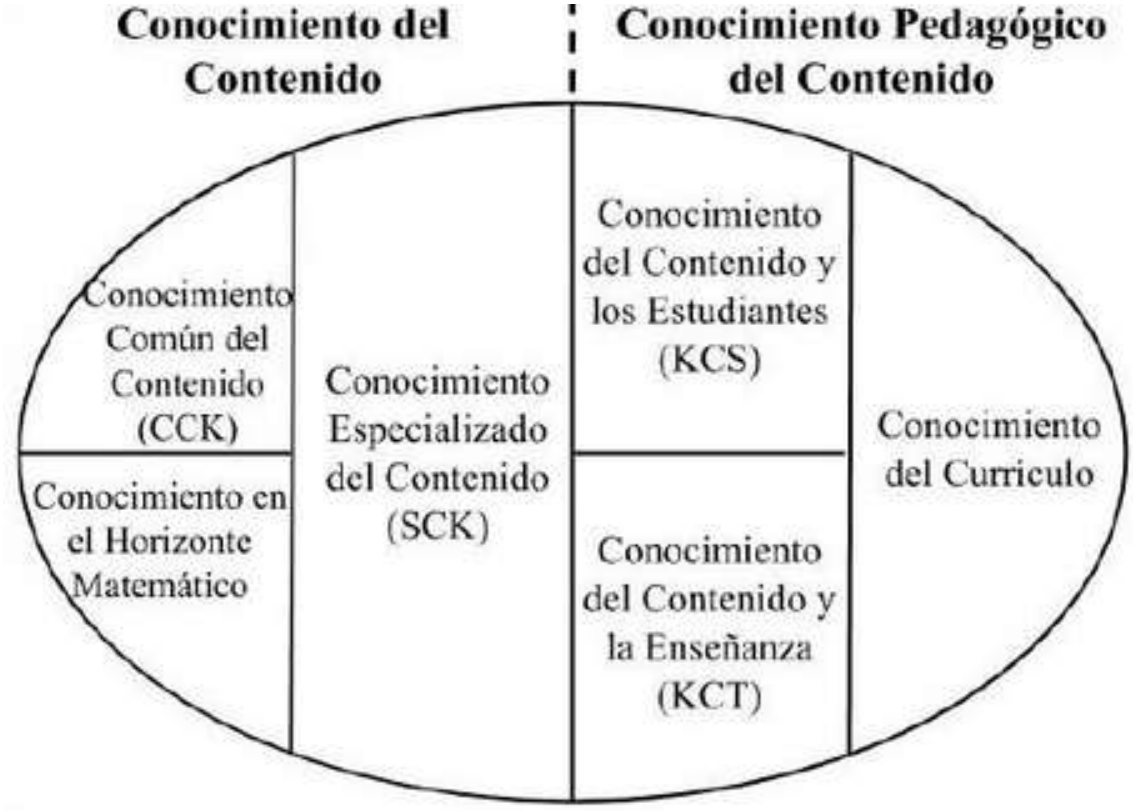



Figura 3.1 Componentes del MKT (Ball, Thames y Phelps, 2008)

El conocimiento del contenido matemático está desglosado en tres subdivisiones:

- El *conocimiento común del contenido* (CCK), sería el conocimiento del tema que tiene cualquier alumno o persona educada; es decir, el necesario por cualquier persona para resolver problemas de naturaleza matemática. Permite al profesor resolver las tareas que propone a sus alumnos; pero no es un conocimiento especial del profesor (Hill, Schilling, y Ball, 2004).
- El *conocimiento especializado del contenido* (SCK) es también un conocimiento matemático pero específico del profesor, que no se requiere en otras profesiones. Sería el aplicado por el profesor de Matemáticas para proponer tareas matemáticas en un tema particular y articularlas dentro de la enseñanza, graduando su dificultad o variando el contenido matemático de la tarea. Serviría también para dar explicaciones o justificaciones alternativas de un tema o una tarea (Ball, Thames y Phelps, 2008).
- El *conocimiento en el horizonte matemático* se refiere a aspectos más avanzados que aportan perspectivas al profesor, es decir, un conocimiento más amplio de la matemática en el cual un tema particular está situado. Tiene en cuenta aquellos componentes del tema, no incluidos en el currículo, pero que son útiles para la

enseñanza y proporcionan una comprensión más profunda del tema (Ball y Bass, 2009). Incluye, entre otros aspectos, la historia del tópico específico a desarrollar o la detección de posibles desvíos respecto a las ideas matemáticas; por ejemplo, para la Probabilidad incluye el conocimiento de los problemas filosóficos de los diferentes enfoques. Ball y Bass (2009) indican que este conocimiento incluye la comprensión de las principales ideas y estructura de la disciplina, de las prácticas matemáticas y del valor de la Matemática.

Por otro lado, el conocimiento pedagógico del contenido está desglosado en el modelo descrito en tres subdivisiones:

- El *conocimiento del contenido y los estudiantes* (KCS) "es el conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben, o aprenden este contenido particular" (Hill, Ball y Schilling, 2008, p. 375). Para el caso de la Probabilidad incluiría el conocimiento de la literatura resumida en el capítulo anterior, sobre concepciones erradas, como el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992) o el enfoque en el resultado (Konold,1989), así como los niveles de desarrollo cognitivo descritos por Piaget en relación con la Probabilidad.
- El *conocimiento del contenido y la enseñanza* (KCT), combina conocimiento con respecto a la enseñanza y conocimiento matemático. Es el conocimiento sobre procesos adecuados para enseñar y evaluar un tema teniendo en cuenta aspectos como elección de ejemplos, ventajas y desventajas de utilizar una u otra representación (Ball, Thames y Phelps, 2008) para tratar errores y concepciones erróneas de los estudiantes (que se han detectado por medio del conocimiento del contenido y los estudiantes).
- El *conocimiento del currículo* se refiere a las características del currículo en los diferentes ciclos formativos y le permite al profesor articular sus temas con los de otras asignaturas o áreas de la matemática (Hill, Ball y Schilling, 2008).

La anterior clasificación es difusa, de modo que a veces la separación entre diferentes tipos de conocimiento no es clara, porque depende del contexto. Ball, Thames y Phelps (2008) reconocen que "no siempre es fácil distinguir donde una de nuestras categorías se separa de otra, y esto afecta a la precisión de nuestras definiciones (o su falta de precisión)"; por tal motivo nosotros trataremos de aplicarlas en la forma más coherente posible en nuestro trabajo, adaptadas según algunos criterios propuestos por Godino (2009), mencionados en el Capítulo 1.

**Otros modelos**

Otro modelo reciente es el de Schoenfeld y Kilpatrick (2008), quienes proponen una teoría del desempeño experto en enseñanza de las Matemáticas, definiendo un marco conceptual con siete dimensiones, referidas a conocimientos y competencias profesionales del profesor de Matemáticas. Estas dimensiones son:

a. Conocimiento profundo y amplio de las Matemáticas escolares (equivalente al MKT).
b. Conocimiento de la forma en que piensan los estudiantes basada en su observación de formas de razonamiento alternas a las teorías conocidas o preconcebidas del profesor.
c. Conocimiento de la forma en que aprenden los estudiantes, incluyendo, las teorías de aprendizaje, acciones del profesor en clase y las interacciones con los estudiantes.
d. Diseño experto y gestión de entornos de aprendizaje, en concordancia con las tendencias actuales.
e. Desarrollo de normas en el aula y apoyo del discurso de la clase, como parte de la enseñanza para la comprensión, promoviendo una comunidad de aprendizaje, todos los actores están comprometidos con las discusiones académicas dentro del respeto por el pensamiento del otro.
f. Construcción de relaciones que apoyen el aprendizaje, articulando las relaciones entre contenidos, sus representaciones y los miembros de la clase.
g. Reflexión sobre la propia práctica, pensar cómo se desarrolló una situación en clase y qué se podría hacer para mejorarla. En esta propuesta el rol del alumno es más importante que en los modelos anteriores, y las interacciones en la comunidad escolar juegan un papel fundamental.

En resumen, los modelos analizados proponen componentes del conocimiento del profesor, que serían necesarios para mejorar la enseñanza, desde distintas perspectivas. Shulman inicia la discusión de los conocimientos necesarios por parte del profesor para su ejercicio docente, resaltando el conocimiento pedagógico del contenido. Ball y colaboradores desarrollan esta idea con algunos matices, con objeto de evaluar el conocimiento del profesor. Schoenfeld y Kilpatrick dan relevancia a las relaciones intra e interpersonales en el aula, viendo el proceso de enseñanza-aprendizaje como actividad humana y social. Godino analiza los tres enfoques en un intento para

recoger la complejidad del proceso y amplía la diversidad de herramientas disponibles para el análisis didáctico.

### 3.2.2 PRINCIPALES MODELOS DESCRITOS DENTRO DE LA EDUCACIÓN ESTADÍSTICA

En Educación Estadística son muy pocos los modelos descritos del conocimiento del profesor, siendo una de las primeras menciones, la realizada en Godino, Batanero y Flores (1999), quienes describen los siguientes componentes:

- *La reflexión epistemológica* sobre el conocimiento estocástico.
- *Análisis de las transformaciones de los objetos estocásticos* para adaptarlos a los distintos niveles de enseñanza.
- *Estudio de las dificultades, errores y obstáculos* de los alumnos en el aprendizaje y sus estrategias en la resolución de problemas.
- *Análisis del currículo, situaciones didácticas, metodología de enseñanza para temas específicos y recursos didácticos específicos*: libros, ejemplos, tareas, software y todo lo que contribuye a la enseñanza.

Los autores utilizan el término "estocástico" pues su modelo es válido para Estadística y Probabilidad.

Batanero, Godino y Roa (2004) refinan la lista anterior, considerando los siguientes componentes en el conocimiento didáctico requerido para la formación de profesores:

a. Reflexión epistemológica sobre el significado de los conceptos a ser enseñados involucrando meta-conocimiento sobre la estadística (conocimiento de los aspectos históricos, filosóficos, culturales y epistemológicos de la estadística, así como sobre su relación con otras disciplinas).
b. Experiencia en ajustar el contenido y los recursos metodológicos para enseñar una temática. En particular, la capacidad para ajustar el contenido según las diversas características de grupos a los que se impartirá la enseñanza, en cuanto a nivel de formación y nivel de comprensión de los estudiantes; asumiendo ese contenido y sus recursos metodológicos como medios para conocer y entender la Estadística.
c. Capacidad crítica para analizar libros de texto y materiales curriculares, seleccionando los que sean más adecuados para unos alumnos y un contenido dado.

d. Predicción de las estrategias para resolución de tareas específicas por parte de los estudiantes, de sus dificultades de aprendizaje, errores y obstáculos con cada temática.
e. Capacidad para desarrollar y analizar instrumentos de evaluación, para diversos temas, así como para interpretar las respuestas de los estudiantes al aplicarlos.
f. Experiencia con buenos ejemplos de situaciones, materiales y recursos didácticos para enseñar un contenido dado.

Los autores resaltan la complementariedad de estos componentes y la importancia de enseñar este conocimiento didáctico de forma efectiva, promoviendo el uso del aprendizaje activo. Analizan también dos actividades didácticas dirigidas a profesores, mediante las cuales es posible enseñar al mismo tiempo Probabilidad y conocimiento didáctico sobre la misma. Indican que esta forma de desarrollar la instrucción proporciona a los profesores la responsabilidad en su propia formación, les ayuda a reflexionar y discutir sobre sus creencias con respecto a la enseñanza, y vivir el enfoque constructivista y social, que se espera apliquen en sus aulas. Una de estas actividades es posteriormente utilizada por Contreras (2011), quien realiza una evaluación amplia de su uso en varios talleres de formación de profesores, mostrando su utilidad en el desarrollo de diversos componentes del conocimiento de estos profesores.

**Modelo de Burgess**

Burgess (2008; 2011) parte del conocimiento matemático para la enseñanza de Ball y sus colaboradores y describe un modelo aplicable a la enseñanza de la estadística. Para ello se basa también en el modelo de razonamiento estadístico de Wild y Pfannkuch (1999), tomando los siguientes elementos:

a. *El ciclo de investigación*, compuesto de las diferentes fases que se siguen al resolver un problema o una investigación estadística (plantear un problema, planificar su resolución, ejecutar el plan, incluyendo la toma de datos, analizar los datos y obtener una conclusión sobre el problema planteado).
b. *El ciclo interrogativo*, que se usa al trabajar en Estadística e interacciona con el anterior (generar ideas sobre cómo resolver el problema o analizar los datos, buscar recursos, problemas similares o explicaciones, interpretar los datos y resultados, criticar los pasos seguidos, los datos o las soluciones y juzgar la validez de las conclusiones).

c. *Las disposiciones actitudinales, típicas del estadístico*, como el escepticismo, perseverancia, creatividad.

d. Las cinco categorías que definen *modos fundamentales de razonamiento* estadístico: reconocimiento de la necesidad de datos, transnumeración, consideración de la variación, razonamiento con modelos estadísticos e integración de la estadística y el contexto.

El autor cruza las categorías anteriores con cuatro de los componentes definidos por Ball y colaboradores (CCK, SCK, KCS, KCT), obteniendo un modelo bidimensional (Figura 3.2).

| | | | Statistical knowledge for teaching | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Content knowledge | | Pedagogical content knowledge | |
| | | | Common knowledge of content (ckc) | Specialised knowledge of content (skc) | Knowledge of content and students (kcs) | Knowledge of content and teaching (kct) |
| Statistical thinking in empirical enquiry | Types of thinking | Need for data | | | | |
| | | Transnumeration | | | | |
| | | Variation | | | | |
| | | Reasoning with models | | | | |
| | | Integration of statistical and contextual | | | | |
| | Investigative cycle | | | | | |
| | Interrogative cycle | | | | | |
| | Dispositions | | | | | |

Figura 3.2 Modelo de conocimiento del profesor de Burgess (2008)

**Modelo de Lee y Hollebrands**

Lee y Hollebrands (2008; 2011) proponen el modelo de "conocimiento estadístico pedagógico tecnológico de los profesores" (TPSK), adaptando para la Estadística el enfoque de Niess (2005), quien integra el conocimiento del profesor de matemáticas y ciencias en cuanto a contenido, pedagogía y tecnología. Para construir su modelo, Niess emplea cuatro componentes del PCK de Shulman, de modo que su

modelo, TPCK, está conformado por:

a. Concepciones de qué significa enseñar un tema particular integrando la tecnología en el proceso de aprendizaje.
b. Conocimiento de las estrategias de enseñanza y las representaciones para enseñar temas particulares con la tecnología.
c. Conocimiento sobre la comprensión, razonamiento y aprendizaje de los estudiantes con la tecnología.
d. Conocimiento del currículo y materiales curriculares que integran la tecnología en el aprendizaje.

Lee y Hollebrands (2008; 2011) adaptan el modelo anterior al conocimiento estadístico, en el que la tecnología puede usarse como amplificador de los procesos de razonamiento estadístico y como reorganizador cognitivo para promover la comprensión conceptual. La combinación de estos elementos revierte en el TPSK que incluye cuatro tipos de conocimientos requeridos por parte del profesor:

a. La comprensión del aprendizaje de los estudiantes y del pensamiento de ideas estadísticas con y sin tecnología.
b. El conocimiento de cómo las herramientas tecnológicas y las representaciones apoyan el pensamiento estadístico.
c. El reconocimiento de estrategias formativas para desarrollar lecciones de estadística con tecnología, que incluiría el saber cuándo y cómo integrarla para reforzar el aprendizaje de un tema.
d. La actitud crítica hacia la evaluación y uso de materiales curriculares para la enseñanza de ideas estadísticas con tecnología, de modo que sea capaz de seleccionar los materiales más adecuados, consciente del tiempo necesario para aprender el uso de la tecnología y no se sustituya el aprendizaje de la estadística por aprendizaje de la primera, sino que ambas se complementen.

**Modelo de Garfield y Ben-Zvi**

Garfield y Ben-Zvi (2008) proponen otro modelo de conocimiento profesional para enseñar Estadística que incluye cinco competencias que se han de desarrollar en la formación de profesores: (a) ideas estadísticas fundamentales; (b) uso de datos reales; (c) uso de actividades para el aula; integración de las herramientas tecnológicas; (d) implementación del discurso en el aula y (e) uso de métodos alternativos de evaluación. Estos componentes, sin embargo no se relacionan con los descritos en la literatura de

formación de profesores, ya que más bien serían aspectos a tener en cuenta en la formación estadística, tanto de alumnos como de profesores.

En resumen, los modelos desarrollados coinciden en aspectos que son comunes a la educación en cualquier área o a la enseñanza de las Matemáticas; además coinciden en elementos propios de la naturaleza incierta de lo estocástico. Estos modelos no son divergentes sino complementarios, pues Batanero, Godino y Roa (2004) enfatizan la epistemología específica de la estocástica, Burgess (2008) los componentes del razonamiento estadístico y Lee y Hollebrands (2008) integran la tecnología.

**Modelo de Godino y colaboradores**

Godino y colaboradores (Godino, Batanero, Roa y Wilhelmi, 2008) elaboran un modelo general para el conocimiento profesional del profesor de Matemáticas con seis dimensiones: epistemológica (conocimiento del contenido matemático, las adaptaciones para ser enseñado, su desarrollo histórico y problemas filosóficos enseñados), cognitiva (desarrollo del razonamiento en los estudiantes, dificultades de aprendizaje), afectiva (actitudes, afectos, emociones de los estudiantes respecto al tema), interaccional (relación profesor-estudiantes, y entre los propios estudiantes y el desarrollo del discurso en la clase), mediacional (uso de recursos tecnológicos y el tiempo requerido para el estudio), ecológica (aspectos curriculares, socioculturales y relaciones con el entorno). Estos componentes se relacionan con el concepto de idoneidad didáctica, desarrollado también dentro del Enfoque Ontosemiótico. Según Contreras (2011) si se quiere conseguir una idoneidad didáctica alta en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, será necesaria la capacidad del profesor para valorar cada uno de los componentes de la idoneidad, lo que supone la adquisición de conocimientos específicos relacionados con cada uno de estos componentes.

Godino (2009) mejora el modelo de niveles y facetas del conocimiento matemático didáctico del profesor, que engloba los conocimientos citados anteriormente y propone asimismo una guía para la formulación de cuestiones de evaluación de dicho conocimiento. El autor propone tener en cuenta las siguientes facetas para analizar los procesos de instrucción matemática:

- *Epistémica*: Conocimientos matemáticos relativos al contexto institucional en que se realiza el proceso de estudio y la distribución en el tiempo de los diversos componentes del contenido (problemas, lenguajes, procedimientos, definiciones, propiedades, argumentos).

- *Cognitiva*: Conocimientos personales de los estudiantes y progresión de los aprendizajes.
- *Afectiva*: Estados afectivos (actitudes, emociones, creencias, valores) de cada alumno con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.
- *Mediacional*: Recursos tecnológicos y asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos.
- *Interaccional*: Patrones de interacción entre el profesor y los estudiantes y su secuenciación orientada a la fijación y negociación de significados.
- *Ecológica*: Sistemas de relaciones con el entorno social, político, económico, que soporta y condiciona el proceso de estudio.

La importancia dada al componente epistémico en el modelo de Godino (2009) hace que sea aplicable al caso de la estadística, ya que tiene sus propios problemas, lenguaje, conceptos, propiedades, argumentos y procedimientos; el profesor requiere un conocimiento específico de los mismos y de su interacción con el resto de componentes del modelo, es decir, se requiere de una didáctica específica en Estadística. De acuerdo con el marco teórico descrito y puesto que el modelo reconoce la especificidad de la Estadística, a través de la componente epistémica, lo utilizaremos en este trabajo. Asimismo utilizaremos los modelos de Hill, Ball y Schilling (2008) en la evaluación de los conocimientos de los profesores, Capítulo 6, el de Batanero, Godino y Roa (2004) y el de Lee y Hollebrands (2008) para la formación en el Capítulo 7.

Además, para cada una de las anteriores facetas, el autor propone promover la capacidad de análisis didáctico del profesor en cuatro niveles diferentes (Godino, 2011):

1. *Análisis de prácticas matemáticas y didácticas*: consiste en desarrollar la capacidad del profesor para identificar problemas adecuados para un tema particular; analizar las prácticas operativas y discursivas necesarias (*a priori*) o realizadas (*a posteriori*) para resolver estas tareas. También la capacidad de identificar las líneas generales de actuación del docente y discentes con el fin de conseguir un aprendizaje particular y contextualizar el contenido. Nosotros usaremos este nivel.
2. *Descripción de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos*: Se trata de identificar los objetos y procesos probabilísticos que intervienen o emergen en la realización de las prácticas anteriormente citadas; con énfasis en concienciarse de la complejidad, de contenido y su didáctica, y valorar sus

posibles significados, diferenciados como factor explicativo de los conflictos y de la progresión del aprendizaje. Nosotros usaremos este tipo de análisis en el estudio de las respuestas a diferentes tareas de evaluación (Estudios 2 y 3) y de posibles soluciones a tareas planteadas en el trabajo con los recursos (Estudios 1 y 4).

3. *Normas y metanormas.* Identificación de las normas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio, y que afectan a cada faceta y sus interacciones. Este nivel de análisis se usa en nuestro trabajo.
4. *Idoneidad didáctica:* Identificación de potenciales mejoras del proceso de estudio que incrementen la idoneidad didáctica de recursos didácticos (Estudios 1 y 4).

Además, para evaluar algunos componentes del conocimiento didáctico usaremos la metodología propuesta por Godino (2009), también utilizada por Contreras (2011), Gonzato, Godino y Neto (2011), Mohamed (2012), Ortiz, Batanero y Contreras (2012) y Gómez (2014), que consiste en dos pasos:

1. Elegir una tarea matemática cuya solución ponga en juego los principales aspectos del contenido o de las competencias a desarrollar.
2. Formular consignas que cubran las distintas (o principales) facetas y niveles de análisis didáctico del modelo propuesto por el autor. Dicha consigna consistiría en: (a) resolver el problema (para evaluar el conocimiento común del contenido); (b) identificar los objetos y procesos matemáticos puestos en juego en la solución (para el conocimiento especializado del contenido); (c) describir los razonamientos que los alumnos han desarrollado al resolver la tarea propuesta o los principales conflictos en dicha solución (para el conocimiento del contenido y los estudiantes), y (d) análisis de las diferentes categorías de idoneidad didáctica (para evaluar los distintos componentes del conocimiento didáctico del profesor).

En nuestro trabajo utilizaremos consignas de tipo (a) y (b) para evaluar el conocimiento común o especializado del contenido:

Para evaluar el *conocimiento común del contenido,* la consigna sería resolver tareas orientadas a niños de Educación Primaria y resueltas por los profesores, lo cual nos daría indicación de los errores o dificultades que presentan. Para evaluar el *conocimiento ampliado del contenido,* se pediría a los profesores resolver tareas matemáticas, de un nivel más alto al de Primaria, que involucra un conocimiento más

avanzado del contenido específico; por ejemplo, del nivel de Educación Secundaria o los adquiridos en la universidad durante su preparación como profesores. También se les podría pedir establecer conexiones con otros temas o bien realizar generalizaciones de una tarea.

El *conocimiento especializado del contenido* se podría evaluar mediante la identificación de los objetos y procesos matemáticos puestos en juego en la solución correcta a una tarea matemática correspondiente al nivel de enseñanza que ellos han de impartir (en este caso la Educación Obligatoria); también se les puede pedir identificar las variables de la tarea, justificar las soluciones o resolver el problema con diferentes estrategias o usando distintas representaciones (Godino, 2009).

## 3.3 INVESTIGACIONES SOBRE EL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR PARA ENSEÑAR AZAR Y PROBABILIDAD

Finalizada la exposición de los diferentes modelos del conocimiento del profesor y la caracterización del que se usará en nuestro trabajo, pasamos a describir las investigaciones específicas sobre cada uno de los componentes del modelo del conocimiento del profesor para el campo del Azar y la Probabilidad.

Son pocas las investigaciones centradas en la formación de profesores para enseñar Estadística o Probabilidad, motivo por el cual la *International Commission on Mathematical Instruction* y la *International Association for Statistical Education* organizaron un estudio específico sobre el tema (Batanero, Burrill y Reading, 2011).

### 3.3.1 INVESTIGACIONES SOBRE EL CONOCIMIENTO COMÚN DE PROBABILIDAD

Ball, Lubienski y Mewborn (2001) indican que muchas actividades usuales que realiza el profesor en la clase de Matemáticas dependen de sus conocimientos matemáticos. Sería por tanto necesario un sólido conocimiento de la Probabilidad por parte de los profesores, pero la investigación que resumimos es muy escasa y se enfoca, en su mayor parte, a profesores en formación, que se centran específicamente en evaluar sus conocimientos sobre el Azar y la Probabilidad; en general indican que el nivel de comprensión de estos profesores en temas relacionados con probabilidad es insuficiente, en especial para Educación Primaria.

### 3.3.1.1 INVESTIGACIONES CON FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Azcárate (1995) analiza las respuestas de 57 futuros profesores de Educación Primaria, a un cuestionario sobre concepciones de aleatoriedad y probabilidad. El instrumento contenía 28 ítems, que incluían preguntas de selección múltiple con justificación de la respuesta y preguntas abiertas. En el bloque de 12 preguntas sobre si ciertos fenómenos eran o no aleatorios se observó que muy pocos comprendían las características de los fenómenos aleatorios; los futuros profesores relacionaron la aleatoriedad con la causalidad y aspectos contextuales, no comprendiendo la utilidad de la Probabilidad para estudiarlos. El bloque de preguntas referidas a probabilidad incluyó seis problemas de asignación de probabilidad en experimentos simples y otras cuatro situaciones problema: razonamiento combinatorio, interpretación de una predicción del clima y su precisión, heurística de representatividad y juego equitativo. En general, la autora observó predominio de esquemas causales y uso de heurísticas o sesgos. Los participantes sólo aplican modelos probabilísticos en contexto de juegos de azar y muestran dificultades en el uso y comprensión de información frecuencial. Mostraron también errores en la cuantificación de probabilidades e idea de juego equitativo, debido a concepciones erradas de probabilidad y fallos en razonamiento combinatorio. La autora considera que esos futuros profesores presentaron un conocimiento cercano al cotidiano sobre el tratamiento de la realidad y cargado de los mismos condicionantes, debido a su escasa formación matemática. La autora caracterizó cinco grupos según las tendencias de las explicaciones a sus respuestas, que muestra una graduación desde la dificultad en el reconocimiento de sucesos aleatorios hasta la facilidad en este procedimiento. En el primer grupo (8 participantes) prevalece la indecisión en respuestas y no respuestas; en el segundo (15 futuros profesores) predomina un razonamiento determinista, básicamente reconoce sucesos aleatorios solo en los juegos de azar; en el tercero (12) se enfatiza la argumentación causal, relacionan aleatoriedad con ausencia de control; en el cuarto (16) se observa un reconocimiento de la imprevisibilidad aunque con razonamientos ligados a la causalidad; en el quinto (6) también predomina el reconocimiento de la imprevisibilidad con bajo uso de explicaciones causales y debilidades en la valoración del estudio de las situaciones aleatorias. Posteriormente, la autora entrevistó a un participante de cada uno de los grupos identificados para profundizar en su nivel de conceptualización y sus posibles obstáculos, señalando que todos muestran gran desconfianza en procedimientos

predictivos, algunos dan valor al estudio probabilístico como apoyo a la toma de decisiones y otros consideran el Azar desligado de cualquier posibilidad de estudio matemático. Finalmente, concluye que es necesario desarrollar procesos de aprendizaje sobre estos temas para provocar la evolución de concepciones de los futuros profesores y potenciar buenas prácticas en su futuro ejercicio profesional.

Ortiz, Nordin, Batanero, Serrano y Rodríguez (2006) evaluaron la capacidad de 102 futuros profesores españoles de Educación Primaria para comparar probabilidades, utilizando tareas sencillas tomadas de un cuestionario de probabilidad que había sido utilizado previamente con niños de 11 a 14 años. Para ello se analizaron las respuestas de los estudiantes de magisterio a siete problemas, estudiando el porcentaje de respuestas correctas y los argumentos proporcionados por los alumnos y comparando sus resultados con los obtenidos por los alumnos participantes en la investigación de Cañizares (1997). Aunque las respuestas fueron mejores que las de los niños, todavía se observan errores al aplicar la proporcionalidad o respuestas correctas con razonamiento inadecuado.

Contreras (2011) y Contreras, Batanero, Díaz y Fernández (2011) analizan las respuestas de 183 futuros profesores españoles de Educación Primaria a tres tareas para evaluar su conocimiento sobre el cálculo de probabilidades en tablas de contingencia 2x2. Los datos se tomaron como parte de una evaluación de una asignatura cuyo contenido es la Didáctica de la Matemática. Los alumnos habían realizado dos prácticas dedicadas a los temas de Estadística y Probabilidad, y habían estudiado el tema el año anterior durante aproximadamente dos semanas. Recogidos los datos, se realizó un análisis semiótico de las respuestas abiertas de los estudiantes a cada uno de los tres apartados. El autor encontró que la lectura de estas tablas y el cálculo de probabilidades, a partir de ellas, no es una tarea trivial para los futuros profesores de Primaria: el 66% calculó correctamente probabilidades simples, pero sólo el 41% la probabilidad compuesta y 44% la probabilidad condicionada, además, aproximadamente, el 25% dejaron en blanco al menos una pregunta. En cuanto a los errores se resalta que algunos daban probabilidades con valor mayor que uno, por invertir los términos en la fracción o por confusión entre frecuencias relativas y absolutas. Diez participantes (5,6%) tuvieron confusión entre probabilidad simple y compuesta, siete (3,9%) confundieron probabilidad simple y condicionada, nueve (4,9%) la probabilidad condicionada pedida con su traspuesta, un cuarto de los encuestados confunde probabilidades compuestas con condicionadas o viceversa. Los alumnos también tienen errores en la identificación

de los datos en el enunciado, cálculo incorrecto, fórmula incorrecta y cálculo de la probabilidad del complemento en lugar de la del suceso requerido. Algunos errores no encontrados en la literatura previa fueron la confusión de la probabilidad simple con la probabilidad de un suceso elemental y suponer independencia en los datos, a pesar de que la dependencia era claramente visible. Este último error implica problemas en la comprensión de la independencia y escasa competencia en la lectura de datos de la tabla. Al dividir el total de conflictos entre el número de estudiantes se encontró una media de 1,7 conflictos por estudiante en las tres tareas, es decir, en promedio, cada estudiante encuentra un conflicto en la mitad de las tareas propuestas.

Mohamed (2012) aplicó un cuestionario con preguntas de probabilidad pasadas previamente a niños de 10 a 14 años a 283 futuros profesores españoles que cursaban, en el antiguo plan de estudios, la Diplomatura de Magisterio en la Facultad de Educación y Humanidades de Melilla. El cuestionario constaba de 15 problemas que evaluaban intuiciones y conocimientos básicos de probabilidad, tomadas de investigaciones con niños (Green, 1983; Fischbein y Gazit, 1984; Cañizares, 1997). Las proporciones de respuesta correcta estuvieron entre el 77% y 90% para asignación de probabilidades simples, probabilidad condicionada, probabilidad frecuencial en el corto plazo y juego equitativo en un experimento simple, y las menores proporciones de respuesta correcta correspondieron a variable aleatoria (12%) y muestreo (5%). Los errores más frecuentes fueron confusión entre suceso seguro y posible; falta de razonamiento combinatorio; e ideas confusas sobre características de los fenómenos aleatorios, independencia y experimento compuesto. El sesgo de equiprobabilidad se presentó en algunos problemas con más frecuencia que en otros; también se observó la heurística de representatividad, insensibilidad al tamaño de la muestra y el enfoque en el resultado. El autor observó las mayores tasas de no respuesta al evaluar juego equitativo en un experimento compuesto (21%), muestreo (16%), espacio muestral (12%), probabilidad compuesta (10%) y probabilidad frecuencial (7%). La comparación de estos resultados con una investigación previa muestra que, estos futuros profesores tienen mejor argumentación y tasas de acierto más altas que los niños de 10 a 14 años de Cañizares (1997). En general, el conocimiento común mostrado por estos futuros profesores fue aceptable, aunque insuficiente para la enseñanza; según el autor “estos resultados son preocupantes dada la sencillez de los problemas y el nivel de conocimiento que se supone deberían tener los futuros profesores.” (Mohamed, 2012).

### 3.3.1.2 INVESTIGACIONES CON FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Canada (2008) analizó las respuestas de 58 futuros profesores de secundaria, y 55 estudiantes de Secundaria en Estados Unidos, ante una tarea relacionada con distribución, idea que se basa en la comprensión de probabilidades simples en las que había que comparar dos conjuntos de datos con la misma media y diferente dispersión. El grupo de futuros profesores tuvo mejor rendimiento que el grupo de estudiantes; aunque llama la atención que el 35% de los futuros profesores pensaran que dos conjuntos de datos son iguales porque tienen la misma media, aunque la dispersión sea muy diferente.

Carter (2008) analizó las respuestas de 210 futuros profesores de secundaria, a un cuestionario con 11 ítems de opción múltiple o respuesta abierta sobre Probabilidad y Estadística, pensado para los grados 6.° a 8.° en Estados Unidos. Dos ítems versaban sobre aleatoriedad, dos sobre la ley de los grandes números, tres sobre probabilidad conjunta, dos sobre tendencia central y tres sobre variabilidad (otro ítem sobre la ley de los grandes números también trataba el concepto de variabilidad). Todos los ítems evaluaban conocimiento conceptual y a veces procedimental. Los ítems de Probabilidad tuvieron menor proporción de respuesta correcta que los de Estadística, lo cual fue consistente con la formación recibida por los participantes, que habían cursado dos asignaturas de Estadística y ninguna de Probabilidad. La falacia del jugador se observó en 11,4% de los participantes, el sesgo de equiprobabilidad en 35,7%, indiferencia al efecto del tamaño de la muestra en 70%; errores con la probabilidad conjunta en 60%; y algunos asociados a la heurística de representatividad. Ya que un futuro profesor debe tener un conocimiento superior al común, la autora concluye que los resultados muestran un desempeño conceptual incompleto.

Mohr (2008) analizó las respuestas de 122 futuros profesores de Secundaria en Estados Unidos, a un cuestionario con 7 ítems para cada uno de los cuatro ejes temáticos propuestos por NTCM (2000) de 6.º a 8.º. El apartado de Probabilidad y Estadística evaluaba la comprensión de la independencia, rango, lectura de gráficos y predicción de resultados. Se observó que sólo uno de los siete ítems, referido a independencia de sucesos, tuvo más de la mitad de respuestas incorrectas. Los dos errores más comunes fueron sumar las dos probabilidades y confundir muestreo con y sin reemplazamiento. Con respecto a la argumentación de las respuestas correctas, la mayoría describieron el algoritmo de cálculo pero no justificaron su elección o hicieron

mención de algún razonamiento probabilístico. La autora concluye que el conocimiento común de contenido es insuficiente para la enseñanza.

Contreras (2011) analizó las respuestas a un cuestionario sobre probabilidad condicional a 196 futuros profesores de Matemáticas para secundaria, 95 Licenciatura y 101 que cursaban el Máster de Formación del Profesorado en diversas universidades españolas. El cuestionario se componía de ocho ítems de selección múltiple que permitían diagnosticar sesgos de razonamiento y siete ítems de respuesta abierta para evaluar el conocimiento de la definición y la capacidad para la resolución de problemas de este tema.

Un alto porcentaje de futuros profesores presentó sesgos comunes en los ítems de opción múltiple, en especial la falacia del eje del tiempo (68,3% en un ítem y 32,7% en otro), falacia de las tasas base (39,8%), confusión entre sucesos independientes y mutuamente excluyentes (32,1%) y confusión entre probabilidad conjunta y condicional (31,6%). De menor relevancia fueron la falacia de la conjunción (11,7%) o la condicional traspuesta (13,8%). El análisis comparativo al interior de la muestra dio porcentajes más bajos en estudiantes de licenciatura para la falacia de las tasas base y la confusión entre conjunta y condicional, más bajos en estudiantes del Máster para la confusión entre sucesos independientes y mutuamente excluyentes. Fueron pocos los estudiantes sin sesgos. El 96,8% de los alumnos de Matemáticas y el 90,1% del Máster incurrió por lo menos en un sesgo y el 76,8% de Matemáticas y el 74,3% del Máster en dos o más; en promedio, cada futuro profesor mostró 2,3 sesgos sin grandes diferencias entre uno y otro tipo de estudiantes. Al comparar con los resultados en una muestra de 414 estudiantes de Psicología (con quienes se validó el cuestionario cuatro años antes) se observó que los futuros profesores tenían mayor proporción de sesgos en las falacias de las tasas base y de la condicional traspuesta, menor en la del eje del tiempo y mínimas diferencias en el resto.

Respecto a los ítems abiertos se observa un conocimiento formal alto, menor para la definición de la probabilidad condicional que para resolución de problemas sobre probabilidad condicional, probabilidad total, independencia y probabilidad compuesta (con y sin independencia). Los estudiantes de Máster contestan bien a más ítems abiertos (75% contestaron correctamente de cuatro a seis ítems, de siete) que los de Licenciatura (50% en el mismo intervalo). En comparación con la muestra de 414 estudiantes de Psicología, el desempeño es mejor en los futuros profesores excepto en la verbalización de la definición de probabilidad condicional y en el teorema de Bayes,

explicable porque la formación de los psicólogos incluye más redacción y hacen más énfasis en problemas de Bayes por la amplia utilidad de tasas y razones en su campo profesional.

En general, tanto en Contreras (2011) como en Díaz (2007) se observa la ausencia de correlación estadística de la capacidad de resolución de problemas con la presencia de sesgos, evaluada con un análisis factorial del cuestionario y con el cálculo de coeficientes de correlación entre algunas variables seleccionadas para los ítems correspondientes. En consecuencia, después de contar con un buen conocimiento formal es conveniente organizar situaciones didácticas para los futuros profesores que les permita reconocer y superar sus sesgos, pues al no ser conscientes de ellos no podrán identificarlos en sus estudiantes y por el contrario pueden transmitírselos.

#### 3.3.1.3 INVESTIGACIONES CON PROFESORES EN EJERCICIO

Begg y Edwards (1999) evaluaron con un cuestionario los conocimientos sobre probabilidad de 22 profesores en activo, llegando a la conclusión de que dichos profesores tenían una escasa comprensión de la Probabilidad. Mostraron dificultad con la idea de aleatoriedad e independencia, e interpretaron un enunciado probabilístico en forma no probabilística. Los profesores también hicieron un uso excesivo de sus teorías previas al resolver los problemas.

Sánchez (1996) estudia en tres etapas la comprensión del concepto sucesos independientes entre profesores de secundaria de Matemáticas en México: En primera instancia analiza las respuestas de 88 profesores a dos preguntas relacionadas con el concepto de independencia. En una de ellas con la situación de seleccionar una carta de una baraja francesa, la mitad de los profesores intentaron resolver el problema de forma sistemática. De estos, 39 profesores llegaron a una respuesta, aunque sólo cuatro fueron correctas porque utilizaron la regla del producto. En la otra mitad se observan dos tipos principales de razonamientos incorrectos: identificar independencia y exclusión entre sucesos, o creencia que la independencia se relaciona con experimentación sucesiva.

En la segunda etapa realiza entrevistas semi-estructuradas a adultos con formación en probabilidad, encontrando tres tipos de ideas "dos sucesos son independientes si: (a) son ajenos, (b) para que suceda el segundo no tiene que suceder el primero, (c) cualquiera puede presentarse con o sin el otro". Finalmente, plantea algunas situaciones problemáticas a cuatro profesores activos que acaban de cursar un semestre de Probabilidad y enseñanza. Una de ellas fue falsificada intencionalmente para generar

un conflicto, pues la percepción de relación dada por el contexto era directa y se alteraron los números para que al calcular las probabilidades condicionales se concluyera que la relación era inversa. Los cuatro profesores, en mayor o menor grado, indicaron la independencia de sucesos debido a sus ideas preconcebidas a pesar de que, al realizar los cálculos, se mostraba lo contrario. Insistieron en buscar argumentos a favor de su percepción, aún cuando el investigador los confrontaba con los resultados numéricos que ellos mismos habían obtenido.

En resumen, a nivel de profesores en formación para Educación Primaria, tanto en la investigación de Contreras como en las precedentes, se concluye que el conocimiento de probabilidad suele ser escaso. Lo mismo se obtiene de algunas investigaciones con profesores en ejercicio, aunque estas son muy escasas y no se puede generalizar. Estas investigaciones muestran aspectos a mejorar en la formación de los futuros profesores y la importancia de hacerlos conscientes de los propios sesgos, para evitar su replicación en sus alumnos y para que estén en capacidad de diagnosticarlos.

En resumen,

| | PRIMARIA | SECUNDARIA | AMBOS |
|---|---|---|---|
| FUTUROS PROFESORES | Azcárate; Ortiz, Nordin, Batanero, Serrano y Rodríguez; Contreras, Batanero, Díaz y Fernández; Mohamed | Canada; Carter; Mohr | Contreras |
| PROFESORES EN EJERCICIO | López; Chick y Pierce; Begg y Edwards | Sánchez; Watson; Haller | |

Tabla 3.1 Investigaciones con futuros profesores y en ejercicio

## 3.4 CONOCIMIENTO DE LA PROBABILIDAD Y SU ENSEÑANZA

Los diferentes componentes del conocimiento didáctico se adquirirán preferentemente durante el ejercicio de la docencia (Ponte, 2008), pero, al tratarse de un tema nuevo en los currículos, ha habido, hasta el momento poca oportunidad para un desarrollo profesional de los profesores de Educación Primaria en Probabilidad. Consecuentemente, las investigaciones relacionadas con el conocimiento didáctico de los profesores para enseñar Probabilidad sugieren que este conocimiento es escaso. Respecto al conocimiento especializado del contenido, algunas investigaciones

examinan a profesores en ejercicio durante su enseñanza, observándolos a lo largo de un periodo de tiempo y deduciendo su conocimiento a partir de esta observación, complementada con entrevistas u otros medios. Un primer punto investigado es la capacidad de los profesores para reconocer qué conceptos pueden ser estudiados a partir de un recurso o problema dado. En la investigación de Chick y Pierce (2008) los profesores participantes no hicieron un uso adecuado de los datos y proyectos al planificar sus lecciones, pues fallaron al sacar a la luz los conceptos latentes, a pesar de la riqueza de conceptos de la situación didáctica planteada. Por el contrario se limitaron a pedir cálculos o nuevos gráficos, con pocas actividades de interpretación.

En la enseñanza de la Probabilidad se recomienda actualmente el uso de investigaciones y simulaciones, de modo que se ayude a los estudiantes a mejorar su razonamiento probabilístico. Sin embargo son pocos los profesores que tienen experiencia previa con experimentos y simulaciones en probabilidad. Así, en el estudio de Stohl (2005) los profesores observados fallaron al implementar el enfoque experimental en la enseñanza de la Probabilidad, porque las tareas que proponían a los estudiantes sólo utilizaban muestras pequeñas. Por este motivo, los estudiantes de estos profesores no pudieron apreciar la convergencia o el efecto del tamaño de la muestra sobre la misma, es decir no llegaron al punto central del enfoque frecuencial de la Probabilidad.

Watson (2001) analizó las respuestas de 43 profesores australianos en ejercicio, 28 de los cuales enseñaban en secundaria, a un extenso cuestionario de preguntas abiertas con relación a la enseñanza de Probabilidad y Estadística, empleando las categorías de Shulman (1987). Pocos profesores reconocieron apoyarse en la simulación o en la observación de muestras, para la enseñanza de Probabilidad o Estadística, aunque utilizaban otros recursos como material manipulativo, calculadoras o bases de datos disponibles. En general, tenían una buena capacidad de observación reflexiva, porque su autovaloración del nivel de confianza para enseñar los temas centrales del instrumento fue muy cercana a los desempeños mostrados al respecto. El nivel más alto, se obtuvo en relación a la enseñanza de la media, seguido de muestreo y menor para razón de posibilidades (relación de casos favorables frente a desfavorables). La confianza fue mayor en profesores de secundaria que en los de primaria, debido a su mayor base matemática.

Haller (1997) realizó una investigación con un grupo de cuatro profesores de Educación Secundaria que asistían a un curso de desarrollo profesional. Los profesores

con un conocimiento del contenido más bajo, cometían errores conceptuales y de interpretación de las respuestas de sus alumnos durante sus lecciones. Estos profesores también dependían en gran medida de los libros de texto y no aprovechaban el contexto de la Probabilidad para desarrollar relaciones entre las fracciones, los decimales y los porcentajes. Sin embargo, los profesores con un mayor conocimiento del contenido no cometían errores matemáticos, relacionaban los decimales, las fracciones y los porcentajes y añadían preguntas y actividades suplementarias, independientes del libro de texto. La experiencia docente no parecía tener tanta repercusión en la enseñanza de la Probabilidad por parte de los profesores en esta investigación.

López (2006) analiza la forma en que los profesores diseñan y desarrollan unidades didácticas para la enseñanza de la Probabilidad en la Escuela Primaria, y muestra la gran dificultad de estos profesores al enfrentarse a conceptos nuevos para ellos. En un estudio con profesores de enseñanza elemental en prácticas, Dugdale (2001) utilizó la simulación por ordenador para revelar el conocimiento didáctico. Observó que el uso de software permitió a los profesores diseñar un par de dados, con igual probabilidad de obtener pares que impares al multiplicar las cifras en cada tirada, simular un gran número de tiradas, calcular las frecuencias relativas, convenciéndose así de que el juego creado era representativo. Asimismo, destacó que los profesores en prácticas podían usar este software como una herramienta para promover el debate y la comprensión de la Probabilidad desde un punto de vista que normalmente no permite un número limitado de pruebas con un dado físico, y que no se conformaban con observar las frecuencias relativas generadas por la simulación por ordenador, sino que pasaban a razonar sobre las probabilidades teóricas para así verificar los resultados.

Por otro lado, en algunos casos, los libros de texto y materiales curriculares preparados son insuficientes como soporte para el profesor. Ello es debido a que presentan una visión muy parcial de los conceptos. En otros casos las aplicaciones se limitan a juegos de azar, o no se basan en datos tomados de aplicaciones reales. También aparecen en ocasiones definiciones incorrectas o incompletas de los conceptos (Serradó, Cardeñoso y Azcárate, 2005).

## 3.5 ACTITUDES Y CREENCIAS

Un primer objeto de evaluación y formación son las creencias y actitudes de los profesores de Matemáticas debido a que es el componente afectivo en el proceso de enseñanza-aprendizaje el que puede transmitirle a sus estudiantes. Mientras que las

emociones son transitorias, las actitudes son sentimientos intensos, que prevalecen en el tiempo, que se desarrollan por repetición de respuestas emocionales y se automatizan con el tiempo. Las creencias, por su parte, tienen un carácter más cognitivo; son las concepciones que se tienen sobre una materia, sobre uno mismo como estudiante o sobre el contexto social en el que se realiza el aprendizaje (Estrada, 2007).

Son pocas las investigaciones específicamente centradas en las creencias o actitudes de los profesores hacia la Probabilidad. Uno de los primeros autores que se refiere a este tema es Steinbring (1990).

Steinbring (1990) resaltó dos aspectos importantes en relación con las creencias sobre la enseñanza: la consciencia de las características inherentes a lo estocástico y la tendencia a favorecer un ambiente propicio para integrar el desarrollo de pensamiento estocástico a nivel escolar. También sugiere que, el conocimiento estocástico es más complejo y sistémico que el de otras áreas de las Matemáticas; además tiene implícitas o explícitas actividades interpretativas, pues los conceptos están interrelacionados con el contexto de aplicación siendo susceptibles de controversias, como hemos visto al hablar de los diferentes significados de la Probabilidad.

Estrada, Batanero y Fortuny (2004) realizaron un amplio estudio de actitudes hacia la Estadística en una muestra de 367 futuros profesores de Educación Primaria. Sus resultados mostraron actitudes positivas en ítems relacionados con su propia competencia para aprender y con el valor de la Estadística. También se observa que el gusto o desagrado hacia la Estadística no estuvo relacionado con su propia percepción de su capacidad para aprenderla y su valor dado. Los autores también analizaron las relaciones entre las actitudes de los futuros profesores de Educación Primaria y sus conocimientos estadísticos, mostrando una relación positiva, así como con el número de cursos de estadística cursados por los participantes.

Serradó, Azcárate y Cardeñoso (2006) aplicaron cuestionarios y entrevistas a cinco profesores en ejercicio para comprender las razones para omitir la Probabilidad en la enseñanza de la escuela y establecer los factores que pueden influir esta decisión. Estos profesores, con diferentes niveles de formación y de experiencia tenían una visión formal de la Matemática; mostraron su creencia de que la Probabilidad no tenía suficiente consistencia educativa en la Enseñanza Obligatoria ni garantizaba ningún propósito práctico para los estudiantes. Otros argumentaron potenciales dificultades para el estudiante, la necesidad de una metodología diferente para este tema, la falta de apoyo de los compañeros y de fuentes de información.

Eichler (2008) muestra la influencia de las creencias de los profesores alemanes, respecto a la enseñanza de la Estadística sobre su práctica docente y cómo esta influye en los conocimientos que adquieren sus alumnos. Este autor diferencia entre el currículo oficial (marcado por las directrices curriculares), el pretendido por el profesor, el implementado en el aula y el aprendido por los estudiantes. Clasifica las creencias de estos profesores según su visión (estática o dinámica) de las Matemáticas y orientación (formal o aplicada) de su enseñanza. Esta clasificación implica diferencias, que pueden ser notables, en la enseñanza del mismo contenido para estudiantes de un nivel educativo dado.

En resumen, las investigaciones con profesores en ejercicio sugieren que la omisión de la enseñanza de la Probabilidad se debe, principalmente, a una baja valoración de su importancia en la formación del escolar, o a la ansiedad que genera la consciencia de las diferencias entre razonamiento probabilístico y proporcional o numérico y la falta de apoyo en recursos. La investigación con futuros profesores de primaria sugiere que hay una mejor disposición para su enseñanza debido a su mayor confianza en el conocimiento del contenido y a la consciencia de su importancia.

Todos estos resultados alertan de la importancia de desarrollar actitudes y creencias positivas de los profesores hacia la Probabilidad, tanto dentro de la Matemática, como para la formación de sus estudiantes (Estrada y Batanero, 2008).

## 3.6 EXPERIENCIAS DE FORMACIÓN

Batanero y Díaz (2011) sugieren que la formación de profesores requiere de entornos y contextos en que se trabajen problemas significativos relacionados con su desarrollo profesional así como la reflexión sobre dichas actividades.

Para Estadística y Probabilidad, algunas actividades sugeridas en este sentido son las siguientes:

- Promover el trabajo colaborativo entre ellos, pues a través del intercambio de ideas y materiales entre los profesores que tienen problemas y necesidades comunes emergen nuevas ideas para la introducción de actividades, prácticas o el desarrollo de competencias. El profesor de Estadística y Probabilidad ha de manejar dos tipos de incertidumbre en su trabajo diario: el primero de ellos se relaciona con el conocimiento estocástico. La incertidumbre aparece también en el trabajo de la clase debido a las interacciones inesperadas entre estudiantes y profesor (Groth, 2008). La discusión entre profesores, incluso a distancia por

medio de la tecnología puede ayudar a manejar estos dos niveles de incertidumbre.

- Planificación de una lección para enseñar a los alumnos algún aspecto de la Estadística. Esta planificación pone en juego su conocimiento estadístico y su conocimiento profesional (Chick y Pierce, 2008). También el análisis de las transformaciones del conocimiento para adaptarlos a los distintos niveles de enseñanza.
- Trabajo con proyectos o actividades abiertas. Puesto que los currículos y metodología nuevos indican que se debe implicar a los estudiantes con este tipo de actividades, es importante que los profesores trabajen en la clase con el mismo enfoque. Una forma de lograrlos es hacerles jugar sucesivamente el papel de alumno y profesor es decir "tener la práctica de aprendiz". Sobre todo cuando hay poco tiempo de enseñanza, se debiera implementar un ciclo formativo en que los profesores primero trabajaran con un proyecto estadístico o actividad abierta y luego lo analizaran desde el punto de vista didáctico como medio para enriquecer simultáneamente el conocimiento estadístico y profesional del profesor (Godino, Batanero, Roa y Wilhemi, 2008).
- Análisis de tareas o ítems de evaluación y respuestas de alumnos a las mismas. Con esta tarea se trata de analizar el contenido estadístico y los conocimientos requeridos para resolver alguna tarea de evaluación usada en alguna investigación sobre razonamiento estadístico. Este tipo de análisis permitió también revelar posibles dificultades de los profesores con los conceptos estadísticos en la experiencia de Godino, Batanero, Roa y Wilhemi (2008). Tanto en el Estudio 2 como en el Estudio 3 propondremos a los profesores este tipo de actividad.
- Resolución de situaciones problemáticas paradójicas y reflexión sobre su contenido. En el caso de formación de profesores de secundaria que tengan sólidos conocimientos matemáticos, se trata de hacer experimentar a los futuros profesores la dificultad que encuentra un alumno al resolver las tareas o problemas que se les plantea. Puesto que el futuro profesor en este caso tiene unos conocimientos muy sólidos de Estadística, hemos de buscar algunos ejemplos de problemas, que, aparentemente sencillo, puedan, sin embargo tener soluciones contraintuitivas o sorprendentes (Batanero, Godino y Roa, 2004).

Algunas investigaciones, que han realizado este tipo de experiencias, para resolver los problemas antes descritos, se analizan a continuación.

En la actualidad se sugiere la experimentación empírica o simulada para la enseñanza de la Probabilidad a nivel escolar, como herramienta para mejorar el razonamiento probabilístico de los estudiantes. Dugdale (2001) utilizó la simulación por ordenador para analizar el conocimiento didáctico de un grupo de 16 profesores de Educación Primaria en formación en Estados Unidos, y mostró las ventajas de enseñar a los profesores a simular un juego conocido con probabilidades alteradas. Destacando que los profesores en prácticas podían usar esta experiencia para promover el debate y la comprensión de la Probabilidad, contrastando las frecuencias relativas generadas en la simulación por ordenador con las probabilidades teóricas y razonando los resultados. Lee y Hollebrands (2008, 2011) también sugieren explorar conceptos de probabilidad e inferencia con herramientas computacionales, debido a ventajas como reducción de tiempo de cálculos, trabajo en clase con aplicaciones reales, simulación y creación de micro-mundos estocásticos virtuales. Los autores experimentaron con profesores la utilidad de herramientas tecnológicas para promover el pensamiento estocástico a la vez que desarrollaban su comprensión de probabilidad con esta misma tecnología.

Como se ha comentado anteriormente, Batanero, Godino y Roa (2004) sugirieron resolver situaciones problemáticas paradójicas y reflexionar sobre su contenido: Enfrentar un reto como alumno al resolver una tarea o problema planteado facilita al profesor en formación la identificación de dificultades en el aprendizaje de un concepto dado. Es importante, según estos autores, proponer algunos problemas, que sean sencillos en apariencia, cuya solución sea contraintuitiva o sorprendente, considerando que los futuros profesores tienen conocimientos más sólidos de Estadística que sus futuros estudiantes.

Una de las situaciones propuestas por estos autores se usa en Contreras (2011), quien evalúo una experiencia de formación con 166 profesores, 79 en formación y 87 en ejercicio, españoles, mexicanos y portugueses. Para ello introduce una variante de la paradoja de la caja de Bertrand, que se combina con la simulación de la situación, la recogida de datos y la discusión con los participantes de las diferentes estrategias, así como pruebas matemáticas de las mismas. Este proceso se repite varias veces, y al finalizar el mismo se comparan las estrategias finales con iniciales. Las estrategias iniciales revelaron la existencia de sesgos, tales como la falacia del eje de tiempo y falta de percepción de la independencia en aproximadamente dos tercios de los participantes.

Sin embargo, cerca de la mitad de participantes reconocen y superan sus sesgos de razonamiento tras la instrucción; la mayoría apropiaron herramientas útiles para el ejercicio profesional tanto de la enseñanza de la probabilidad condicionada como del análisis didáctico, se promovió la reflexión didáctica entre los profesores.

Groth (2008) plantea que el profesor de Estadística y Probabilidad debe manejar dos tipos de incertidumbre en su trabajo cotidiano: uno es del conocimiento estocástico y el otro debido a las interacciones entre estudiantes y profesor, que no son predecibles. Propone como dispositivo formativo el análisis colectivo por grupos de profesores de experiencias didácticas: Sugiere que al discutir problemas y necesidades comunes, los profesores imaginan alternativas más interesantes para la enseñanza, descartan opciones no exitosas en aplicaciones anteriores por otros colegas o aprenden sobre errores y razonamientos de los estudiantes. La discusión puede ser en vivo o virtual, y tratar ideas, estrategias, comportamientos, dificultades, respuestas de los estudiantes y concepciones erradas, o de materiales.

Chick y Pierce (2008) sugieren que una tarea adecuada es la planificación de una lección para enseñar a alumnos y utilizar un artefacto de instrucción, que consiste en experimentar ellos mismos una lección. Jugar sucesivamente los roles de alumno y profesor le permite al futuro profesor poner en juego su conocimiento estadístico y su conocimiento profesional, comprender mejor las dificultades potenciales de los alumnos, así como adaptar los conceptos y tareas al nivel de formación requerido. El diseño de unidades didácticas por parte de los mismos profesores es una de las habilidades citadas por Schoenfeld y Kilpatrick (2008), pero debe tenerse en cuenta el alto nivel de dificultad que les implica enfrentarse a conceptos nuevos para ellos.

Como se ha citado anteriormente, la propuesta de formación dirigida a futuros profesores para enseñar Estadística presentada por Garfield y Ben-Zvi (2008) se basa en seis principios: (a) enfocarse en desarrollar ideas estadísticas fundamentales más que en presentar herramientas y procedimientos; (b) usar datos reales e interesantes para motivar a los estudiantes a hacer y probar conjeturas; (c) usar actividades de aula para apoyar el desarrollo del razonamiento estadístico de los estudiantes; (d) integrar el uso apropiado de herramientas tecnológicas que permitan a los estudiantes probar sus conjeturas, explorar y analizar datos, desarrollando razonamiento estadístico; (e) promover el discurso en el aula, con la exposición de argumentos estadísticos centrados en ideas fundamentales; y (f) valorar el aprendizaje de los estudiantes y hacer un seguimiento del desarrollo de su pensamiento estadístico, así como usar métodos de

evaluación progresivos.

En resumen, las experiencias sobre formación de profesores promueven el aprendizaje del contenido y su enseñanza con estrategias diversas, y complementarias; se identifica como elemento común la replicación de su experiencia de aprendizaje para el ejercicio profesional, adecuándola al nivel de formación que se dirige. Adicionalmente, en la práctica docente se recomienda la reflexión acerca de la incertidumbre propia de la interacción con los estudiantes.

## 3.7 LA PROBABILIDAD EN LA FORMACIÓN DE LOS PARTICIPANTES EN EL ESTUDIO

Finalizado el estudio de las investigaciones previas relacionadas con los conocimientos y la formación de profesores sobre Probabilidad, pasamos en esta sección a analizar la formación específica recibida por los participantes en el estudio, que nos permitirá saber y valorar los resultados de la evaluación de su conocimiento realizado que se mostrará en el Capítulo 6.

Dichos estudiantes cursan en la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria el Grado en Educación Primaria y el Máster Universitario en Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Todos ellos han recibido alguna formación sobre el Azar y la Probabilidad durante su período de aprendizaje. Concretamente los alumnos y alumnas que realizan el Máster- en él no existe ninguna asignatura sobre el Azar y la Probabilidad- han recibido, en sus titulaciones, asignaturas en el que uno de sus contenidos ha sido la Probabilidad. Como consecuencia, a continuación, en las siguientes tablas se exponen distintos contenidos y objetivos de las distintas titulaciones, así como su conocimiento en función de los contenidos curriculares.

| | TITULACIÓN | ASIGNATURA | CONTENIDOS | OBJETIVOS |
|---|---|---|---|---|
| EDUCACIÓN PRIMARIA | GRADO EN EDUCACIÓN PRIMARIA | Matemáticas y su Didáctica III | Recorrido histórico. Conceptos básicos. Enfoques de la Probabilidad. Razonamiento combinatorio. Modelos de Probabilidad. La resolución de problemas. Recursos didácticos e informáticos para la enseñanza y el aprendizaje del Azar y la Probabilidad. El currículo de Probabilidad en Educación Primaria. | Comprender la importancia de la competencia numérica, dada su incidencia en el resto de los contenidos matemáticos y en la vida cotidiana. Manejar los medios, materiales, recursos didácticos y TIC que pueden usarse con efectividad en las Matemáticas de la Educación Primaria. |
| EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA | ARQUITECTO | Complementos de Matemáticas | Conceptos Básicos de la Teoría de Probabilidad. Combinatoria. | Que el alumno conozca, entienda y sea capaz de utilizar los conceptos algebraicos y estadísticos básicos con uso y aplicación tecnológica en la Arquitectura así como las herramientas algebraicas y estadísticas usadas por otras materias de la carrera. |
| | GRADO EN INGENIERÍA CIVIL | Métodos estadísticos en Ingeniería | Probabilidad. | Se pretende que el alumno adquiera conocimientos sobre: Comprender los conceptos de Probabilidad y variable aleatoria y las distribuciones de probabilidad en variables discretas y continuas, especialmente la distribución gaussiana para el estudio de la teoría de errores. |
| | GRADO EN INGENIERÍA ELÉCTRICA | Métodos estadísticos en Ingeniería | Probabilidad. Probabilidad condicionada. Combinatoria. | Que el graduado adquiera las herramientas metodológicas y prácticas necesarias para la recogida, análisis e interpretación de datos, así como para la revisión crítica de resultados experimentales u observados. |
| | GRADO EN INGENIERÍA | Métodos | El modelo probabilístico. Espacio | Conocer los principios generales de la |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | INFORMÁTICA | estadísticos | muestral, sucesos y probabilidad. Probabilidad condicional. Independencia de sucesos. Teorema de la probabilidad total y Teorema de Bayes. | teoría de la Probabilidad. Analizar e identificar los modelos de distribuciones de probabilidad que subyacen más frecuentemente. |
| | GRADO EN INGENIERÍA MECÁNICA | Métodos estadísticos en Ingeniería | Probabilidad. Probabilidad condicionada. Combinatoria. | Que el graduado adquiera las herramientas metodológicas y prácticas necesarias para la recogida, análisis e interpretación de datos, así como para la revisión crítica de resultados experimentales u observados. |
| | INGENIERO DE TELECOMUNICACIÓN | Métodos estadísticos | Espacios de Probabilidad. Fenómenos aleatorios. Diferentes conceptos de probabilidad. Espacios muestrales. Axiomática de la probabilidad. Espacios finitos de probabilidad: introducción a la combinatoria. Probabilidad condicional. Independencia de sucesos. Teoremas de la probabilidad total y de Bayes. | Saber los fundamentos de la teoría de la Probabilidad. |
| | INGENIERO INDUSTRIAL | Métodos estadísticos de la Ingeniería | Álgebra de Boole del conjunto de los sucesos. Definición empírica y axiomática de Probabilidad. Espacio muestral. Reglas elementales del cálculo de probabilidades. Probabilidad condicionada. Independencia de sucesos. Teorema de la probabilidad total. Teorema de Bayes. | Comprender el papel de la Estadística en la resolución de problemas reales, fundamentalmente no determinísticos, similares a los que se encontrará en su futura actividad profesional. Conocer y manejar las herramientas estadísticas de aplicación en los estudios descriptivos de conjuntos de datos utilizados por ingenieros y científicos. Conocer y comprender el marco conceptual que fundamente los métodos estadísticos utilizados para la toma de decisiones en los casos que con mayor frecuencia se |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | presentan en la ingeniería. Conocer y aplicar las distintas metodologías que la ciencia estadística ha desarrollado para enfrentarse a los fenómenos de naturaleza estocástica planteados con mayor frecuencia en ingeniería. Desarrollar empíricamente a través del tratamiento de problemáticas reales la posibilidad de: definir poblaciones que puedan ser estudiadas estadísticamente; realizar hipótesis acerca de las distribuciones poblacionales; razonar un procedimiento de muestreo adecuado; estimar los parámetros de las distribuciones propuestas; contrastar las hipótesis planteadas; y comprobar la validez de la metodología empleada. Todo esto debe ser capaz de desarrollarlo empíricamente mediante el uso del soporte informático adecuado. |
| | INGENIERO QUÍMICO | Métodos estadísticos de la Ingeniería | Probabilidad. Necesidad de una medida de incertidumbre. Conceptos de probabilidad. Fenómenos aleatorios. Definición axiomática de la probabilidad. Espacio probabilístico. Probabilidad condicionada. Dependencia e independencia de sucesos. Teorema de la probabilidad total. Teorema de Bayes. | Comprender la importancia de la reducción de datos. Saber utilizar e interpretar la información que aporta la estadística descriptiva en la práctica. Dominar el concepto de variable aleatoria. Comprender y manejar las distintas distribuciones de probabilidad más usuales. Entender el alcance e importancia del teorema central del límite. Comprender la importancia y dominar las herramientas |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | más usuales de la inferencia estadística (estimación puntual, estimación por intervalos y test de hipótesis) |
| | INGENIERO TÉCNICO DE OBRAS PÚBLICAS, ESPECIALIDAD EN HIDROLOGÍA | Estadística | Probabilidad. Necesidad de una medida de incertidumbre. Conceptos de probabilidad. Fenómenos aleatorios. Definición axiomática de la Probabilidad. Espacio probabilístico. Probabilidad condicionada. Dependencia e independencia de sucesos. Teorema de la probabilidad total. Teorema de Bayes. | El estudiante será capaz de comprender la necesidad de la Probabilidad como medida de incertidumbre en el contexto de las ciencias experimentales, y como fundamento de los métodos estadísticos para el análisis de datos. Para ello deberá utilizar los principios básicos y propiedades del Cálculo de Probabilidades, así como, reconocer y manejar los principales modelos de probabilidad discretos y continuos. |
| | INGENIERO TÉCNICO EN INFORMÁTICA DE SISTEMAS | Probabilidad y Estadística | Probabilidad. Espacio muestral. Sucesos. Álgebra de sucesos. Definición axiomática de Probabilidad. Propiedades. Probabilidad condicionada. Teorema de Bayes. | Conocer y manejar los conceptos básicos de espacio probabilístico: experimento aleatorio, sucesos elementales, sucesos, álgebra de sucesos, función de probabilidad. Conocer y manejar los conceptos y fórmulas de probabilidad condicionada. |
| | INGENIERO TÉCNICO INDUSTRIAL, ESPECIALIDAD EN ELECTRICIDAD | Métodos estadísticos de la Ingeniería | Probabilidad. Necesidad de una medida de incertidumbre. Conceptos de probabilidad. Fenómenos aleatorios. Definición axiomática de la probabilidad. Espacio probabilístico. Probabilidad condicionada. Dependencia e independencia de sucesos. Teorema de la probabilidad total. Teorema de Bayes. | El estudiante será capaz de comprender la necesidad de la probabilidad como medida de incertidumbre en el contexto de las ciencias experimentales, y como fundamento de los métodos estadísticos para el análisis de datos. Para ello deberá utilizar los principios básicos y propiedades del Cálculo de Probabilidades, así como, reconocer y manejar los |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | principales modelos de probabilidad discretos y continuos. |
| | INGENIERO TÉCNICO INDUSTRIAL, ESPECIALIDAD EN MECÁNICA | Métodos estadísticos de la Ingeniería | Probabilidad. Probabilidad de sucesos. Teorema de Bayes. | El estudiante será capaz de comprender la necesidad de la Probabilidad como medida de incertidumbre en el contexto de las ciencias experimentales, y como fundamento de los métodos estadísticos para el análisis de datos. Para ello deberá utilizar los principios básicos y propiedades del Cálculo de Probabilidades, así como, reconocer y manejar los principales modelos de probabilidad discretos y continuos. |
| | LICENCIADO EN BIOLOGÍA | Bioestadística | Estadística descriptiva. Distribuciones de probabilidad. Regresión y correlación. Muestreo. Contraste de hipótesis. Análisis de varianza. Introducción al análisis multivalente. | |
| | LICENCIADO EN CIENCIAS DEL MAR | Estadística | Necesidad de una medida de incertidumbre. Conceptos de Probabilidad: de Laplace, frecuentista y bayesiano. Experimentos aleatorios. Definición axiomática de probabilidad. Espacio probabilístico. Probabilidad condicionada. Dependencia e independencia de sucesos. Teorema de la probabilidad total. Teorema de Bayes. | Comprender y utilizar el concepto de Probabilidad como medida de incertidumbre en el contexto de las ciencias experimentales, y como fundamento de los métodos estadísticos para el análisis de datos. |
| | LICENCIADO EN VETERINARIA | Matemáticas | Fundamentos de probabilidad. Fenómenos determinísticos y aleatorios. Diferentes conceptos de probabilidad. Espacio muestral de probabilidad. Sucesos y | El estudiante será capaz de comprender la necesidad de la probabilidad como medida de incertidumbre en el contexto de las ciencias experimentales, y como |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | operaciones con sucesos. Definición axiomática de la probabilidad. Espacios muestrales finitos: equiprobabilidad y regla de Laplace. Probabilidad condicionada. Independencia estocástica. Teoremas de la probabilidad total y de Bayes: aplicación al diagnóstico clínico. | fundamento de los métodos estadísticos para el análisis de datos. Para ello deberá utilizar los principios básicos y propiedades del Cálculo de Probabilidades, así como, reconocer y manejar los principales modelos de probabilidad discretos y continuos. |
| | LICENCIADO EN MATEMÁTICAS | Probabilidades I | COMBINATORIA. Métodos de conteo. Principios de la multiplicación y la adicción. Variaciones, permutaciones, combinaciones. Coeficientes binomiales. Principio de inclusión-exclusión. TEORÍA DE LA PROBABILIDAD. Aspectos históricos de la Probabilidad. Conceptos de probabilidad. Espacio muestral: sucesos y operaciones con sucesos. Probabilidad: definiciones y propiedades. Asignación de Probabilidades. Probabilidad condicionada y Teorema de Bayes. VARIABLES ALEATORIAS. Definición de variable aleatoria. Función de distribución. Variables aleatorias discretas y continuas. Esperanza y varianza de una variable aleatoria. Momentos Desigualdad de Tchebychev. Funciones generatrices y función característica. PRINCIPALES DISTRIBUCIONES DISCRETAS Y CONTINUAS. Distribuciones discretas: Uniforme, | Conocer los fundamentos matemáticos del cálculo de probabilidades y su significado en nuestro lenguaje cotidiano. Familiarizar al alumno con el tratamiento del Azar, su análisis crítico y sus aplicaciones a problemas de la vida diaria. Fomentar el preguntarse sobre los fenómenos aleatorios y calcular las probabilidades con el método más adecuado: diagramas de árbol, fórmulas, tablas, aproximaciones de las distribuciones, etc. Reconocer el cálculo de probabilidades como base teórica de la Estadística. |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | Bernoulli, Binomial, Hiper-geométrica, Geométrica, Binomial negativa, Poisson. Distribuciones continuas: Uniforme, Gamma, Exponencial, Normal, Ji-cuadrado de Pearson, t de Student, F de Fisher-Snedecor. VARIABLES ALEATORIAS BIDIMENSIONALES. Distribución conjunta. Distribuciones marginales y condicionadas. Independencia. Transformaciones de variables aleatorias. CONVERGENCIA DE VARIABLES ALEATORIAS. Convergencia en probabilidad. Convergencia casi seguro. Convergencia en ley. Leyes de los grandes números. Teorema central del límite. | |
| | | Probabilidades II | EL DOMINIO DEL AZAR: ESPACIOS DE PROBABILIDAD. Experimento aleatorio y organización de los resultados: Álgebras y $sigma$-álgebras. Medidas de los resultados de un experimento aleatorio: Desde la función de conjunto hasta la función de probabilidad. Función de distribución. Medida de Lebesgue-Stieltjes. Variables aleatorias generales y espacios de probabilidad inducidos. SUCESIONES DE VARIABLES ALEATORIAS. Introducción y definición. | Adquirir las nociones básicas de los tres modelos generales que se proponen en el temario. Precisar las características más distintivas de cada modelo y ser capaz de diferenciarlas en las distintas aplicaciones prácticas que se le presentarán. Fundamentar con rigor matemático los conceptos de espacio probabilístico y de variable aleatoria. |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | Diferentes tipos de convergencia. RECORRIDOS ALEATORIOS: "El caso desesperado de la ruina del jugador". Procesos Estocásticos: Definición y ejemplos. Recorrido aleatorio simple. Aproximación combinatoria: El principio de reflexión. El problema de la ruina del jugador. COLECCIONES DE CROMOS Y LAS LEYES DE LOS GRANDES NÚMEROS: "Malas noticias para los ludópatas". El problema del coleccionista de estampas. Leyes de los grandes números. Las leyes de los grandes números y los jugadores. HACIA EL ORDEN DESDE EL CAOS VÍA EL TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE .<br>La distribución Normal y sus buenas propiedades. El Teorema Central del Limite. ¿Orden en el Caos? Relación entre la LGN y el TCL.<br>MODELOS DE POBLACIONES: CADENAS DE MARKOV. Evolución genética de poblaciones. Ley de Hardy-Weinberg. Poblaciones finitas. Descripción general de las cadenas de Markov. Cadenas homogéneas en el tiempo. Absorción. Distribuciones estacionarias. MODELOS DE POBLACIONES: | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | PROCESOS DE RAMIFICACIÓN. Misterio de los apellidos desaparecidos. Evolución demográfica: Procesos de Ramificación de Galton-Watson. Media y varianza. Extinción. | |

Tabla 3.2 Contenidos y objetivos de la formación de los participantes en el estudio

| CONTENIDOS EN EL CURRÍCULO | Grado en Educación Primaria |
|---|---|
| Utilización del lenguaje del Azar | X |
| Identificación del carácter aleatorio de experiencias en situaciones de juego y en algunas experiencias en la vida cotidiana | X |
| Uso del vocabulario propio de la Probabilidad con expresiones como suceso "seguro, probable e imposible" | X |
| Acercamiento al cálculo de probabilidades como número de casos favorables entre el de casos posibles, para sucesos cuyo resultado coincida con las fracciones y porcentajes ¼, 25%, ½, 50%, ¾, 75% y 100% | X |
| Relación de la probabilidad de un suceso comprendida entre 0 y 1 | X |
| Regla de Laplace | X |
| Utilizar las herramientas tecnológicas en la comprensión de los contenidos funcionales | X |

| CONTENIDOS EN EL CURRÍCULO | A | GIC | GIE | GII | GIM | IT | II | IQ | ITOPH | ITIS | ITIE | ITIM | B | CM | V | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Diferenciación entre los fenómenos deterministas y aleatorios | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos y diseño de experiencias para su comprobación | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| Aproximación a la noción de probabilidad mediante el concepto de frecuencia relativa y la simulación o experimentación | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| Distinción entre sucesos elementales equiprobables y no equiprobables | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| Determinación del espacio muestral en experimentos sencillos | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| Regla de Laplace | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| Identificación de experiencias aleatorias, sucesos y espacio muestral | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| Significado y aplicación de permutaciones y factorial de un número | X | X | X |  | X | X |  |  |  |  |  |  |  |  |  | X |
| Utilización de la probabilidad para la toma de decisiones fundamentadas en diferentes contextos | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| Experiencias compuestas | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| Utilización de tablas de contingencia y diagramas del árbol para el recuento de casos y la asignación de probabilidades | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| Probabilidad condicionada | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | Arquitecto | ITOPH | Ingeniero Técnico de Obras Públicas, especialidad en Hidrología |
| GIC | Grado en Ingeniería Civil | ITIS | Ingeniero Técnico en Informática de Sistemas |
| GIE | Grado en Ingeniería Eléctrica | ITIE | Ingeniero Técnico Industrial, especialidad en Electricidad |
| GII | Grado en Ingeniería Informática | ITIM | Ingeniero Técnico Industrial, especialidad en Mecánica |
| GIM | Grado en Ingeniería Mecánica | B | Licenciado en Biología |
| IT | Ingeniero de Telecomunicación | CM | Licenciado en Ciencias del Mar |
| II | Ingeniero Industrial | V | Licenciado en Veterinaria |
| IQ | Ingeniero Químico | M | Licenciado en Matemáticas |

Tabla 3.3 Contenidos en el currículo de Educación Primaria y Secundaria dados en las titulaciones

# CAPÍTULO 4

# RECURSOS DIDÁCTICOS, GRÁFICOS E INFORMÁTICOS


4.1 Introducción
4.2 Recursos didácticos gráficos e informáticos
  4.2.1 Diagrama de árbol
  4.2.2 Diagrama de Carroll
  4.2.3 Diagrama de Venn-Euler
  4.2.4 El problema de Monty Hall
4.3 Materiales didácticos
  4.3.1 Introducción
  4.3.2 Libro de texto
    4.3.2.1 Antecedentes
    4.3.2.2 Muestra de textos y criterios de selección
    4.3.2.3 Método y variables analizadas
    4.3.2.4 Contenidos de los libros de texto de Educación Primaria
    4.3.2.5 Contenidos de los libros de texto de Educación Secundaria
    4.3.2.6 Comparativa
  4.3.3 Calculadora
    4.3.3.1 Historia
    4.3.3.2 La calculadora como recurso didáctico
    4.3.3.3 Motivos y preocupaciones por el uso de la calculadora
  4.3.4 Dados
    4.3.4.1 Tipos de dados
    4.3.4.2 El dado como recurso didáctico
  4.3.5 Cartas
    4.3.5.1 Historia
    4.3.5.2 Tipos de barajas
    4.3.5.3 La baraja como recurso didáctico
    4.3.5.4 Experiencias prácticas en el aula
  4.3.6 Parchís
    4.3.6.1 Historia
    4.3.6.2 Reglas del parchís
    4.3.6.3 El parchís como recurso didáctico
  4.3.7 Bingo

4.3.7.1 Historia
4.3.7.2 Juego del bingo
4.3.7.3 Elementos
4.3.7.4 Categorías profesionales
4.3.7.5 Tipos de bingo
4.3.7.6 Probabilidades en el bingo
4.3.7.7 Estrategias en el bingo
4.3.7.8 El bingo como recurso didáctico
4.3.8 Monedas
4.3.8.1 Historia
4.3.8.2 Partes de la moneda
4.3.8.3 La moneda como recurso didáctico

## 4.1 INTRODUCCIÓN

Algunos profesores pueden desconocer la metodología propuesta en los nuevos currículos (basada en experimentos y simulaciones) o no ser conscientes de algunas de las dificultades y sesgos probabilísticos de sus alumnos (Stohl, 2005). Si su formación inicial se basó en las competencias matemáticas, y recibieron una enseñanza de la Probabilidad muy clásica, basada en la axiomática de Kolmogorov y en el razonamiento deductivo, estos profesores pueden sentirse inseguros con enfoques más informales, como los sugeridos hoy día en el currículo de la Educación Primaria y Secundaria (Serradó, Azcárate y Cardeñoso, 2006).

Es importante proporcionar al profesor actividades que les sirvan para conectar los aspectos conceptuales y didácticos de cada tema matemático (Ball, 2000). Las actividades presentadas a los profesores también deben basarse en el enfoque constructivista y social del aprendizaje (Jaworski, 2001).

Este capítulo está basado en el Estudio 1, que trata de la descripción de los distintos recursos didácticos que se pueden utilizar en el aula para el proceso de enseñanza y aprendizaje del Azar y la Probabilidad.

## 4.2 RECURSOS DIDÁCTICOS GRÁFICOS E INFORMÁTICOS

### 4.2.1 DIAGRAMA DE ÁRBOL

El diagrama de árbol es una representación gráfica de los posibles resultados de un experimento, el cual consta de una serie de pasos, en el que cada uno de ellos tiene un número finito de maneras de ser llevado a cabo. Se utiliza en problemas de conteo y probabilidad.

El diagrama de árbol es una herramienta que se utiliza para determinar todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. En el cálculo de la Probabilidad se requiere conocer el número de objetos que forman parte del espacio muestral, estos se pueden determinar con la construcción del diagrama de árbol.

La construcción de un diagrama de árbol se iniciará poniendo una rama para cada una de las posibilidades, acompañada de su probabilidad. Cada una de estas ramas se conoce como rama de primera generación. Al final de cada rama de primera generación se constituye, a su vez, un nudo del cual parten nuevas ramas conocidas como ramas de segunda generación, según las posibilidades del siguiente paso, salvo si el nudo representa un posible resultado final del experimento (nudo final).

Hay que tener en cuenta que la construcción de un árbol no depende de tener el

mismo número de ramas de segunda generación que salen de cada rama de primera generación y que la suma de probabilidades de las ramas de cada nudo ha de ser 1.

Existe un principio sencillo de los diagramas de árbol que hace que estos sean mucho más útiles para los cálculos rápidos de probabilidad: multiplicamos las probabilidades si se trata de ramas adyacentes (contiguas) o bien sumamos si se trata de ramas separadas que emergen de un mismo punto.

Las ventajas que presenta el diagrama de árbol son las siguientes:

- Permite obtener una visión de conjunto del objeto de estudio.
- Permite identificar los medios necesarios para alcanzar una meta o resolver un problema.
- Permite identificar la causas primarias y secundarias de un problema y asignar prioridades en el momento de resolver un problema.
- Permite entender la relación causa-efecto de los problemas.
- Permite identificar los objetivos y las metas de cada tarea.

Ejemplo: Una universidad está formada por tres facultades: la primera con el 50% de estudiantes, la segunda con el 25% de estudiantes y la tercera con el 25% de estudiantes. Las mujeres están repartidas uniformemente siendo un 60% del total en cada facultad.

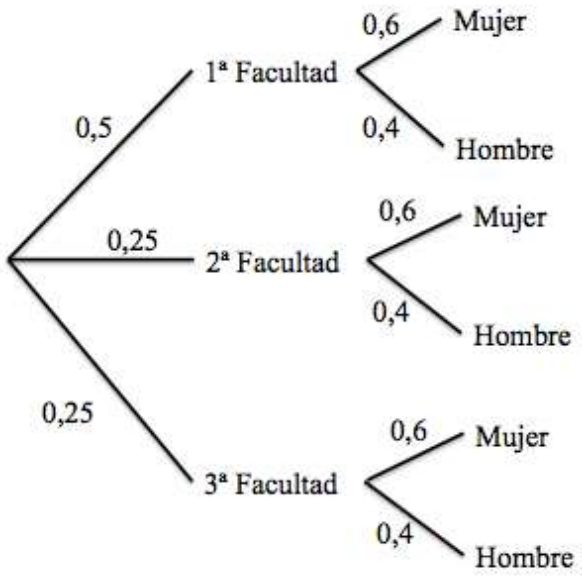



Figura 4.1 Diagrama de árbol

¿Cuál es la probabilidad de encontrar una alumna de la primera facultad?

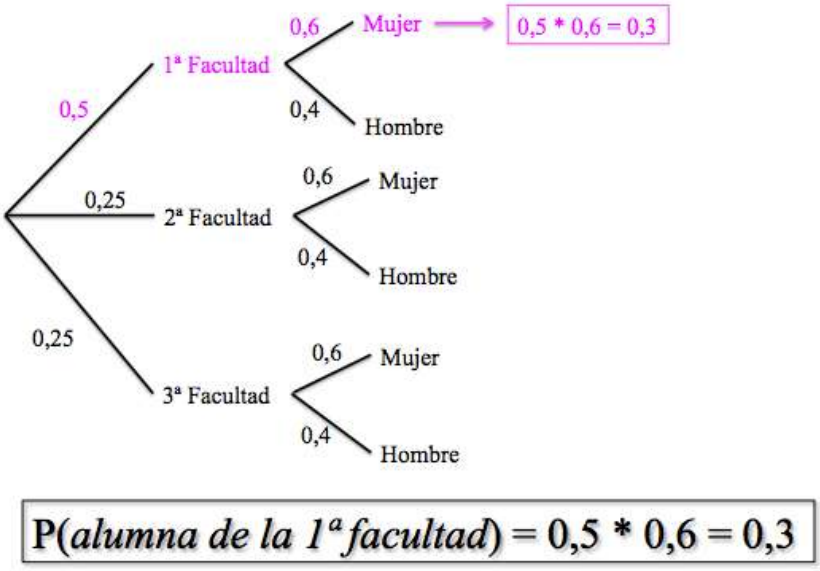



Figura 4.2 Diagrama de árbol

¿Cuál es la probabilidad de encontrar un alumno varón?

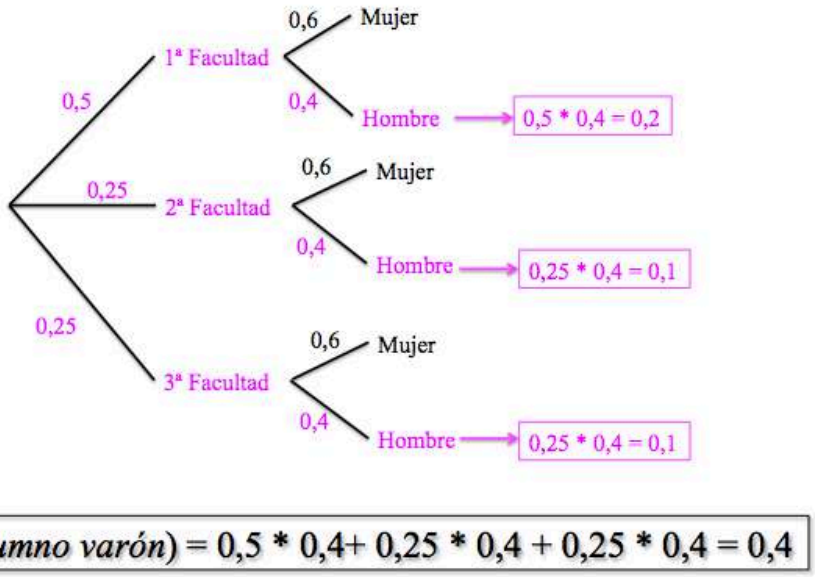



Figura 4.3 Diagrama de árbol

Proyecto *Descartes*

El diagrama de árbol también existe como un recurso informático. Maria Antònia Canals, cuya labor educativa como profesora es ampliamente conocida y reconocida en el contexto de las Sociedades de Profesorado de Matemáticas y de las

Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (JAEM) es un referente. Su experiencia y práctica educativa es una guía para el desarrollo de buenas acciones formativas. Cuenta con el premio Gonzalo Sánchez Vázquez de 2007 entregado en las XII JAEM celebrado en Granada. En las XII CEAM organizadas por la SAEM Thales (Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales) en una conferencia titulada "Materiales manipulables y Educación Matemática" adentró, a sus asistentes, en este tipo de recursos educativos y en particular en los materiales que bien ella ha desarrollado o bien ha ido compilando personalmente o dentro del Gabinete GAMAR (Gabinet de Materials i de Recerca per a la Matemàtica a l'Escola) que dirige, destacando las ventajas de su uso en el aula y la falta de utilización de materiales manipulables para potenciar en los alumnos un auténtico aprendizaje. En la XIV JAEM se contó con una exposición en la que Maria Antònia expuso una amplia muestra de esos materiales. Estos se caracterizan por estar construidos utilizando soportes clásicos (papel, madera, plásticos, etc.), es decir, que son manipulables en un contexto físico-sensorial, un ámbito analógico ajeno al entorno digital. El GAMAR cuenta con una página web que utiliza las Tecnologías de la Información y de la Comunicación (TIC) para divulgar estos materiales, pero su objetivo se centra sólo en ese aspecto y lo que se aborda es una descripción de los mismos para darlos a conocer, pero no se ha realizado ninguna actuación para adaptarlos al nuevo entorno digital sustentado por las TIC.

Respecto a los diversos medios a utilizar en el aprendizaje de las Matemáticas, concretamente en la Probabilidad, Maria Antònia Canals expresa así su pensamiento: *En el aprendizaje de la estadística, probabilidad y medidas, debemos basarnos en la práctica de las mismas en la vida real. En la resolución de problemas deben dominar las actitudes de los alumnos de curiosidad, ingenio e iniciativa para decidir los medios y estrategias convenientes y así entrar en el espíritu de investigación. Finalmente, en las actividades de aprendizaje, del tipo que sean, debemos provocar que los alumnos expresen verbalmente lo que han hecho, pensado y descubierto. Todo conocimiento, si no se llega a expresar en lenguaje verbal (oral o escrito) es incompleto.*

Una de las líneas de trabajo necesaria para la consecución de una mejora de la calidad educativa, en equidad, es el desarrollo de recursos educativos que ayuden a la formación competencial del alumnado, que potencie su capacidad de aprender a aprender y contribuya al aprendizaje a lo largo de su vida. El Proyecto *Descartes* cuenta con una experiencia de más de quince años en el desarrollo de recursos educativos interactivos que fomenta la necesaria formación a través de la experiencia y práctica

educativa en el aula, promoviendo el cambio metodológico. Los recursos desarrollados con *Descartes,* cuyos colaboradores son colombianos y españoles, se caracterizan por su interactividad, por la utilización de aplicaciones que permiten presentar y realizar actividades que en cada instancia se plasman de forma diferente, por la posibilidad de autocorrección y fundamentalmente por promover un aprendizaje significativo. Como base de trabajo se tomaron los dossiers que Maria Antònia Canals ha editado con la asociación de maestros de Rosa Sensat y la información aportada en la página web del GAMAR. Se abordó un estudio de estas fuentes y se procedió a seleccionar aquellos materiales que en un primer análisis se estimaron más susceptibles de desarrollar, buscando principalmente aportar a ellos, como valor añadido, el potencial de interactividad y autocorrección con el que cuenta la herramienta en la que serían desarrollados. Se diseñó que cada material se conformara funcionalmente como un objeto de aprendizaje interactivo que podría estar compuesto por una o varias escenas maquetadas de manera uniforme y estándar. Los objetos de aprendizaje, según el Comité de Estándares de Tecnologías de Aprendizaje (LTSC: Learning Technology Standards Committee) "*es cualquier entidad, digital o no digital, la cual puede ser usada, reusada o referenciada durante el aprendizaje apoyado por tecnología […] Ejemplos de Objetos de Aprendizaje incluyen una lección, un simple archivo JPEG, contenidos multimedia, un vídeo, simulaciones, cuadros digitales, animaciones…*". Estos se incorporaron sólo como elemento aglutinador y de localización o búsqueda en dos índices: uno temático y otro por nivel educativo y curso. (*Proyecto Descartes*: http://proyectodescartes.org/canals/descripcion.htm).

Técnicamente el material desarrollado en este proyecto se configura como un conjunto de páginas o documentos "hipertextuales" (páginas Web) que pueden ser observadas mediante los programas informáticos denominados *navegadores*. Este conjunto de documentos constituyen un repositorio de recursos educativos con 375 objetos de aprendizaje que modelan un número aproximadamente similar de los materiales originales de Maria Antònia Canals.

En el menú lateral de la página principal, en la opción etiquetada como "Materiales" se estructuran tres índices que organizan el acceso a los recursos desde tres perspectivas: una organizada por temas, otra por nivel o etapa educativa y dentro de esta por curso y la última presenta todo los objetos de aprendizaje.




Figura 4.4 Página principal del proyecto Canals

El índice temático actualmente agrupa los objetos en cinco bloques, Figura 4.5, y dentro de ellas en diversas secciones:

- Cálculo que se desglosa en: Primeros números y fracciones.
- Estadística agrupada en: Estadística, Combinatoria y Probabilidad.
- Geometría con los apartados: Líneas, Figuras y cuerpos, Posición, Transformaciones y Medidas.
- Lógica que comprende: Juegos de lógica, Juegos de estrategia y Puzles.
- Problemas subdivididos en: Visuales y manipulativos, De lógica, Comprensión de texto y estructura, Problemas abiertos, Investigación, Cálculo y geometría y Percepción.




Figura 4.5 Bloques del índice temático

Dentro de cada bloque los objetos de aprendizaje son identificados por un icono y un título desde el que, a través de un hiperenlace, puede procederse a abrir su contenido en una ventana independiente.

En el índice por nivel se agrupan los objetos asignándole a cada uno de ellos una etapa educativa y curso de referencia. No obstante esta ubicación no deja de ser un indicador que trata de ayudar y orientar al profesorado y alumnado usuario de este proyecto, pero obviamente en general cada objeto suele ser útil en diferentes cursos y ciclos, y está condicionado por las necesidades educativas específicas de cada aula o de cada discente, es decir, es susceptible de uso en otros niveles y cursos de aplicación de la necesaria y obligada atención a la diversidad.

El acceso se estructura en tres niveles adaptados al sistema educativo español: Educación Infantil, Primaria y Secundaria. Dentro de cada nivel se ha establecido un único bloque en el caso de Infantil, seis bloques para Primaria, cada uno correspondiente a varios cursos de esta etapa que a su vez se estructuran en tres ciclos, uno por cada dos cursos y finalmente en Secundaria.




Figura 4.6 Índice por nivel y curso

Se cuenta también con una opción del menú etiquetada con "Todos los materiales" en la que se agrupan todos los objetos en un único índice mostrándolos por cursos. A continuación se especifican los materiales relacionados con el Azar y la Probabilidad, encontrándose el diagrama de árbol en 4.º de Primaria

INFANTIL PRIMARIA SECUNDARIA






Figura 4.7 Todos los materiales relacionados con el Azar y la Probabilidad

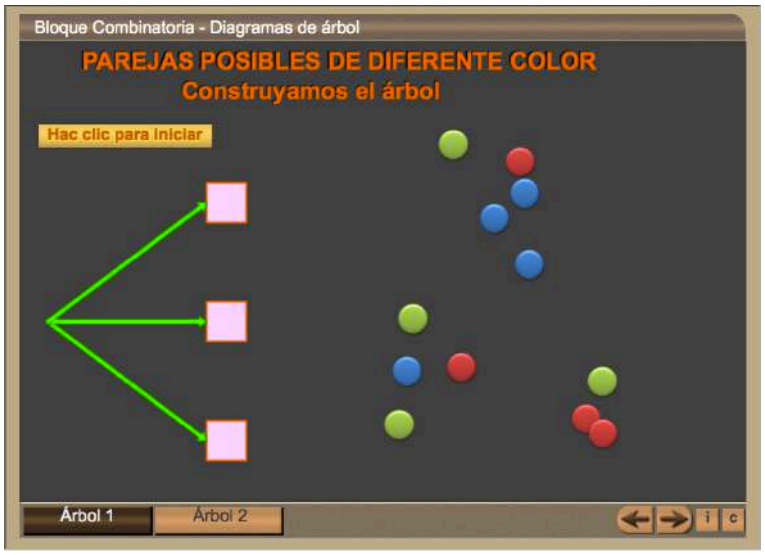
El usuario cuenta con la posibilidad de poder seleccionar un objeto y descargarlo a su sistema informático.

Para la consecución del aprendizaje se usan aquellos elementos intrínsecos a *Descartes* que permiten un modelado y un funcionamiento acorde con el nivel del alumnado destinatario y con el objetivo educativo buscado. Las escenas son auto-explicativas y auto-corregibles. La selección de la misma puede ser aleatoria, pero en general, si son dependientes, estas se han ubicado para que haya un encadenamiento o secuencia lógica de realización o de incremento en el nivel de dificultad.

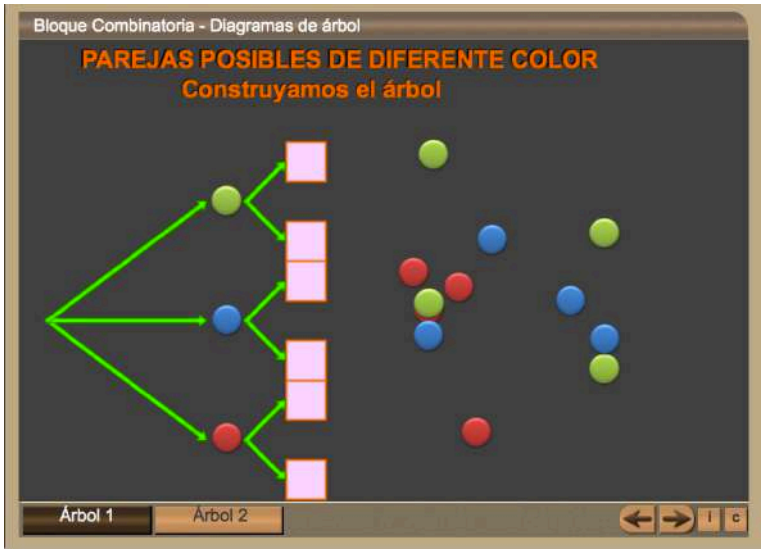
El producto final es abierto, adaptable y modificable a cualquier nivel por el profesorado de manera asequible y mediante un procedimiento también interactivo.

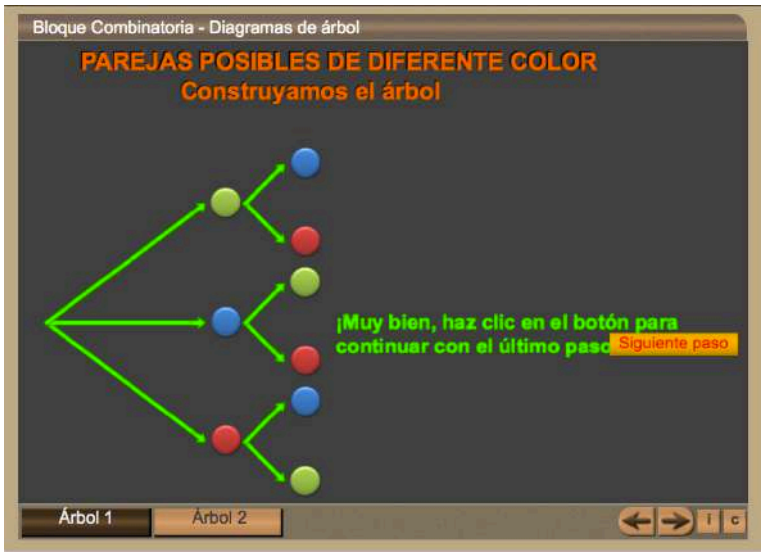
Centrándonos en el material titulado *Diagramas de árbol*, vamos a mostrar este recurso en *Descartes*:

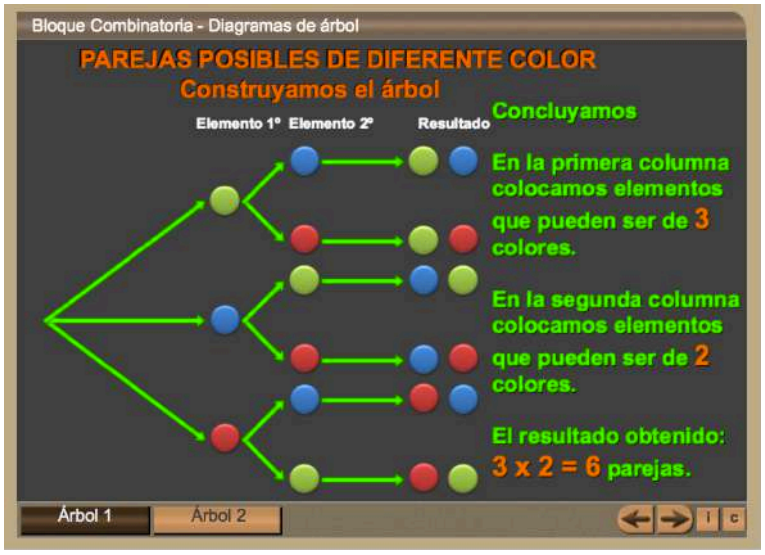



Bloque Combinatoria - Diagramas de árbol
PAREJAS POSIBLES DE DIFERENTE COLOR
Construyamos el árbol
Pon en cada cuadro un elemento de diferente color.
¡Muy bien, haz clic en el botón para continuar con el siguiente paso!
Siguiente paso
Árbol 1
Árbol 2


Bloque Combinatoria - Diagramas de árbol
PAREJAS POSIBLES DE DIFERENTE COLOR
Construyamos el árbol
Árbol 1
Árbol 2


Bloque Combinatoria - Diagramas de árbol
PAREJAS POSIBLES DE DIFERENTE COLOR
Construyamos el árbol
¡Muy bien, haz clic en el botón para continuar con el último paso!
Siguiente paso
Árbol 1
Árbol 2


Bloque Combinatoria - Diagramas de árbol
PAREJAS POSIBLES DE DIFERENTE COLOR
Construyamos el árbol
Elemento 1º
Elemento 2º
Resultado
Concluyamos
En la primera columna colocamos elementos que pueden ser de 3 colores.
En la segunda columna colocamos elementos que pueden ser de 2 colores.
El resultado obtenido:
3 x 2 = 6 parejas.
Árbol 1
Árbol 2


Bloque Combinatoria - Diagramas de árbol
DIAGRAMA DE ÁRBOL
Observa el diagrama y forma las parejas que el árbol señala
Haz clic para iniciar
Árbol 1
Árbol 2


Bloque Combinatoria - Diagramas de árbol
DIAGRAMA DE ÁRBOL
Observa el diagrama y forma las parejas que el árbol señala
¡FELICITACIONES!
Árbol 1
Árbol 2

**Descripción**: Conjunto de actividades en las que se pone de manifiesto especialmente el número total de combinaciones posibles, como primer resultado que queda en evidencia a partir del diagrama de árbol. Concretamente en este objeto de aprendizaje se trabajan *Variaciones* (agrupaciones de elementos en las que influye el orden) *sin repetición* (los elementos no se pueden repetir en las agrupaciones) que en el primer caso es de *tres elementos* (colores rojo, azul y verde) *tomados de dos en dos* y en el segundo de *cuatro elementos* (colores rojo, azul, verde y naranja) *tomados de dos en dos*.
**Utilidad**: Añadir el cálculo en el diagrama de árbol con todas las combinaciones dibujadas. Más adelante podemos pedir calcular el número de combinaciones posibles, a partir de unos datos (número de variables y diferentes requisitos) sin la necesidad de la realización material o el dibujo de todos los casos. Encontrando directamente el número de combinaciones. Quizás los alumnos acudirán espontáneamente al árbol como instrumento. Esto ya es un primer grado de abstracción, un paso importante en el pensamiento lógico de los niños y niñas.

Figura 4.8 Recurso didáctico diagrama de árbol. Proyecto *Descartes*

### 4.2.2 DIAGRAMA DE CARROLL

Charles Luwidge Dodgson (Daresbury, Cheshire, 27 de enero de 1832- Guilford, Surrey, 14 de enero de 1898) más conocido por su seudónimo Lewis Carroll, fue un diácono, anglicano, lógico, matemático, fotógrafo y escritor británico. Sus obras más conocidas son *Alicia en el país de las maravillas* y su continuación, *Alicia a través del espejo*.

En su papel con las Matemáticas, aunque la mayor parte de su atención la dedicó a la Geometría, escribió también sobre otros numerosos temas matemáticos: de la cuadratura del círculo, del cifrado de mensajes (llegando a inventar algunos métodos), de Álgebra, de Aritmética electoral y votaciones, así como de Lógica. En los últimos años no sólo prestó atención a las Matemáticas recreativas (con juegos de cálculo como los diez nudos de su libro *Un cuento enmarañado*) o al estudio de las paradojas (analizó la paradoja de Aquiles y la tortuga y elaboró una propia, la de la barbería), sino que también se dedicó a la búsqueda de formas de exposición sistemática de, por ejemplo, la teoría del silogismo. Por lo demás, elaboró cuadros, fichas y diagramas del tipo de los de Venn e introdujo *árboles lógicos*.

En cuanto a la geometría, publicó numerosos apuntes a modo de aclaraciones sobre la obra de referencia de su época, los *Elementos* de Euclides y un libro en el que confrontaba a este con otros autores contemporáneos, *Euclid and his Modern Rivals* (1879) véase https://es.wikipedia.org/wiki/Lewis_Carroll.

.



Figura 4.9 Retrato del escritor inglés y profesor de Matemáticas en Oxford, Lewis Carroll, extraído de *The Life and Letters of Lewis Carroll*, de Stuart Dodgson Collingwood

Este diagrama se utiliza para resolver problemas sobre conjuntos disjuntos, es decir, en el que cuyos elementos no están intersectados. Se trata de cuadros o tablas de doble entrada, también conocidas como tablas de contingencia. A continuación se muestran dos ejemplos.

Ejemplo 1: En una fiesta en donde había 70 personas, 10 eran hombres a los que no les gusta la cumbia, 20 eran mujeres a las que les gustaba esa música. Si el número de hombres que les gusta la cumbia es la tercera parte de las mujeres que no les gusta esta música. ¿A cuántas personas les gusta la cumbia?

Primero. Elaboramos la tabla con los rótulos respectivos.

| | Gusta Cumbia | No gusta Cumbia | TOTAL |
|---|---|---|---|
| Hombres | | | |
| Mujeres | | | |
| TOTAL | | | |

Segundo. En total son 70 personas. Escribimos el dato en la tabla.

| | Gusta Cumbia | No gusta Cumbia | TOTAL |
|---|---|---|---|
| Hombres | | | |
| Mujeres | | | |
| TOTAL | | | 70 |

Tercero. A los 10 hombres no les gusta la cumbia. Escribimos el dato en la tabla.

| | Gusta Cumbia | No gusta Cumbia | TOTAL |
|---|---|---|---|
| Hombres | | 10 | |
| Mujeres | | | |
| TOTAL | | | 70 |

Cuarto. A 20 mujeres les gusta la cumbia. Escribimos el dato en la tabla.

| | Gusta Cumbia | No gusta Cumbia | TOTAL |
|---|---|---|---|
| Hombres | | 10 | |
| Mujeres | 20 | | |
| TOTAL | | | 70 |

Quinto. El número de hombres que le gusta la cumbia respecto a las mujeres que no les gusta es como 1 es a 3. Escribimos el dato en la tabla.

| | Gusta Cumbia | No gusta Cumbia | TOTAL |
|---|---|---|---|
| Hombres | x | 10 | |
| Mujeres | 20 | 3x | |
| TOTAL | | | 70 |

Sexto. Obtenemos los totales sumando por filas y por columnas.

| | Gusta Cumbia | No gusta Cumbia | TOTAL |
|---|---|---|---|
| Hombres | x | 10 | x + 10 |
| Mujeres | 20 | 3x | 20 + 3x |
| TOTAL | x + 20 | 10 + 3x | 70 |

Séptimo. Al sumar los totales de hombres y mujeres, los totales de personas que les gusta o no la cumbia se obtiene una ecuación.

$$(x + 20) + (10 + 3x) = 70$$

Octavo. Al resolver la ecuación, hallamos el valor de x, que resulta ser el número de hombres que les gusta la cumbia.

$$x + 3x = 70 - 20 - 10$$

$$4x = 40$$

$$x = 10$$

Noveno. Como ya sabemos el valor de x, reemplazamos en (x + 20), que es el número total de personas que les gusta la cumbia.

| | Gusta Cumbia | No gusta Cumbia | TOTAL |
|---|---|---|---|
| Hombres | 10 | 10 | 20 |
| Mujeres | 20 | 30 | 50 |
| TOTAL | 30 | 40 | 70 |

Décimo. Respondemos al problema.

| | Gusta Cumbia | No gusta Cumbia | TOTAL |
|---|---|---|---|
| Hombres | 10 | 10 | 20 |
| Mujeres | 20 | 30 | 50 |
| TOTAL | 30 | 40 | 70 |

***A 30 personas les gusta la cumbia***

Ejemplo 2: Dada la muestra cuyos datos aparecen en la tabla siguiente:

| | Hombre | Mujer | TOTAL |
|---|---|---|---|
| Género | 160 | 140 | 300 |
| Miope | 30 | 20 | 50 |

Sobre el total de la muestra, se pide la probabilidad de:

a) Ser hombre; b) Ser mujer; c) Ser miope; d) No ser miope; e) Ser hombre miope; f) Ser mujer miope.

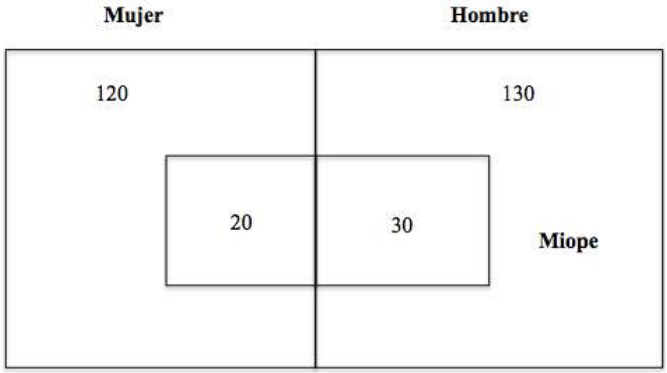



Figura 4.9. Diagrama de Carroll.

a) La probabilidad de ser hombre

$$P\,(ser\ hombre) = \frac{160}{300} = \mathbf{0{,}5333\ldots}$$

b) La probabilidad de ser mujer

$$P\ (ser\ mujer) = \frac{140}{300} = \mathbf{0{,}4666\ldots}$$

c) La probabilidad de ser miope

$$P\ (ser\ miope) = \frac{50}{300} = \mathbf{0{,}1666\ldots}$$

d) La probabilidad de no ser miope

$$P\ (no\ ser\ miope) = \frac{250}{300} = \mathbf{0{,}8333\ldots}$$

e) La probabilidad de ser hombre miope

$$P\ (ser\ hombre\ miope) = \frac{30}{300} = \mathbf{0{,}1}$$

f) La probabilidad de ser mujer miope

$$P\ (ser\ mujer\ miope) = \frac{20}{300} = \mathbf{0{,}0666\ldots}$$

### 4.2.3 DIAGRAMA DE VENN-EULER

Los diagramas de Venn tienen el nombre de su creador, John Venn, matemático y filósofo inglés. Estudiante y más tarde profesor del Caius College de la Universidad de Cambrigde. Fue ordenado diácono de Ely en 1858 y se convirtió en reverendo de la iglesia en 1859. En 1862 regresó a Cambrigde como profesor de ciencias morales.

El área de mayor interés para Venn era la lógica y publicó tres textos sobre el tema. Escribió *The Logic of Chance* (Lógica del Azar), que introdujo la teoría de frecuencia de la probabilidad, en 1866, *Symbolic Logic* (Lógica Simbólica), que presentaba los diagramas de Venn, en 1881, y *The Principles of Empirical Logic* (Los Principios de la Lógica Empírica), en 1889, véase, https://es.wikipedia.org/wiki/Diagrama_de_Venn.

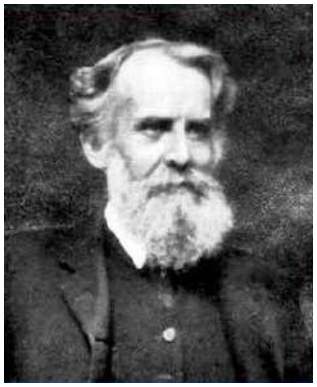


Figura 4.10 Retrato del filósofo inglés y profesor en la Universidad de Cambrigde, John Venn

Los diagramas fueron presentados en julio de 1880, en el trabajo titulado "*De la representación mecánica y diagramática de proposiciones y razonamientos*" publicado en el *Philosophical Magazine and Journal of Science*, provocando un gran revuelo en el mundo de la lógica formal.

Los diagramas tienen sus antecedentes. Leibniz, Boole y Augustus de Morgan habían desarrollado formas previas de representación geométrica de silogismos lógicos, pero fue el gran matemático suizo Leonhard Euler el primero que introdujo una notación clara y sencilla.

Los diagramas de Euler se distinguen de los de Venn en dos aspectos:

- en ellos no aparecen regiones vacías
- el conjunto universal no se representa

Venn introdujo la expresión "universo del discurso", él nunca representó al universal en sus trabajos. Por eso la idea de conjunto universal se atribuye habitualmente a Lewis Carroll. El conjunto universal fue cuestionado por Bertrand Russell, quien mostró que con tal concepto la teoría de conjuntos resultaba inconsistente. Sin embargo, dicha definición fue rescatada y justificada en una extensión de los diagramas de Venn que distingue al universal del todo (universo del discurso). Por las dos razones mencionadas, los diagramas de Venn llegaron a convertirse en el nuevo estándar para la formalización de operaciones lógicas y los sistemas de representación anteriores cayeron en desuso.

Su libro *Lógica simbólica* de 1881, ver https://es.wikipedia.org/wiki/Diagrama_de_Venn, aunque no tuvo demasiado éxito, su propósito era interpretar y revisar los trabajos de Boole en el campo de la lógica formal. Este libro se convirtió en una excelente plataforma de ejemplo para el nuevo sistema de

representación. Tras su siguiente libro *Los principios de la lógica empírica* de 1889, los diagramas de Venn fueron cada vez más empleados como representación de relaciones lógicas.

Con los diagramas de Venn es posible representar las relaciones de unión, intersección e inclusión sin cambiar la posición relativa de los conjuntos. Se designa por U el conjunto universal y por A y B los conjuntos a unir e intersecar.

Intersección

Se llama intersección de dos conjuntos A y B al conjunto formado por los elementos de A y de B, que pertenecen a ambos. Se denota por A∩B. Se verifica

$$A \cap B = \{x \in U / x \in A \cap x \in B\}$$

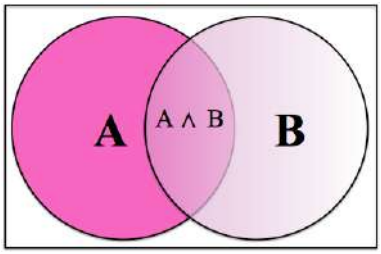



Figura 4.11 Intersección de conjuntos

Unión

Se llama unión de dos conjuntos A y B al conjunto formado por los elementos de A o de B o ambos. Se denota por A∪B. Se verifica

$$A \cup B = \{x \in U / x \in A \cup x \in B\}$$

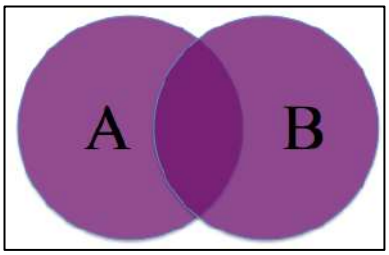



Figura 4.12 Unión de conjuntos

Inclusión

Si todos los elementos de un conjunto son parte de los elementos de otro, se dice que el primero es un *subconjunto* del segundo o que *está incluido* en el segundo. En los diagramas de Venn, todas las regiones de superposición posibles deben ser

representadas. Y, cuando hay regiones que no contienen elementos (*regiones vacías*), la situación se indica anulándolas (con un color de fondo distinto).

$$A \subset B = \{x \in U / x \in A \subset x \in B\}$$

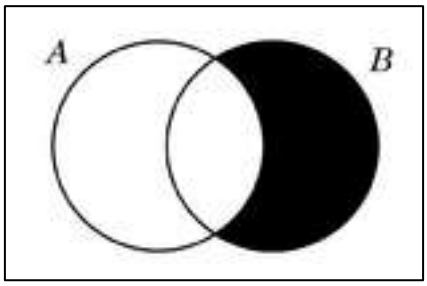



Figura 4.13 Inclusión de conjuntos

A continuación se muestran dos ejemplos.

Ejemplo 1: Durante el mes de abril, una empresa ha fabricado diariamente productos del tipo A o del tipo B, o ambos, excepto 4 domingos durante los cuales no ha fabricado nada. Si se sabe que 15 días del mes ha fabricado A, 20 días ha fabricado B, responde a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántos días del mes ha fabricado ambos productos?
b) ¿Cuántos días del mes ha fabricado sólo productos del tipo A?
c) ¿Cuántos días del mes ha fabricado sólo productos del tipo B?

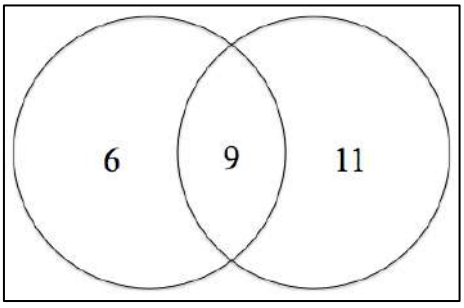



Figura 4.10 Diagrama de Venn

El dato de los 4 domingos puede volcarse directamente en el diagrama. Obviamente, existieron días en que se fabricaron ambos productos, pues de lo contrario abril tendría 39 días. Luego, dado a que abril sólo tiene 30 días, debió haber 9 días en que se fabricaron ambos productos. Por diferencia de este número con 15 y 20 se obtuvieron 6 y 11 respectivamente.

Ejemplo 2: Un grupo de jóvenes fue entrevistado acerca de sus preferencias por ciertos medios de transporte (bicicleta, motocicleta y automóvil). Los datos de la encuesta fueron los siguientes:

I) Solamente motocicleta: 5
II) Motocicleta: 38
III) No gustan del automóvil: 9
IV) Motocicleta y bicicleta, pero no automóvil: 3
V) Motocicleta y automóvil, pero no bicicleta: 20
VI) No gustan de la bicicleta: 72
VII) Ninguna de las tres cosas: 1
VIII) No gustan de la motocicleta: 61

1. ¿Cuál fue el número de personas entrevistadas?
2. ¿A cuántos les gustaban la bicicleta solamente?
3. ¿A cuántos les gustaban el automóvil solamente?
4. ¿A cuántos les gustaban las tres cosas?
5. ¿A cuántos les gustaban la bicicleta y el automóvil pero no la bicicleta?

Tratemos de volcar los datos en un diagrama de Venn para tres conjuntos.

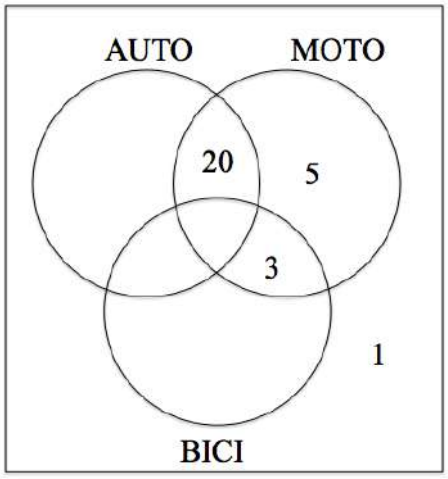



Figura 4.11 Diagrama de Venn

Nos encontraremos con que sólo cuatro de ellos, I, IV, V y VII se pueden volcar directamente. Sin embargo con el dato II se puede completar la única zona que falta en el conjunto MOTO, haciendo la diferencia 38 - (20 + 5 + 3) = 10:

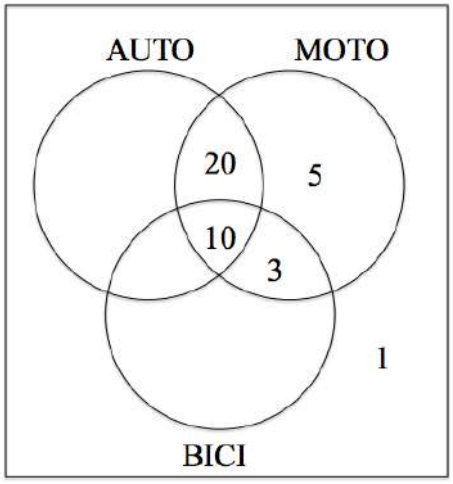



Figura 4.12 Diagrama de Venn

Luego utilizaremos el dato IV, pues si consideramos todas las zonas, excepto las cuatro correspondientes al conjunto BICI, deberán sumar 72, por tanto 72 – (20 + 5 + 1) = 46:

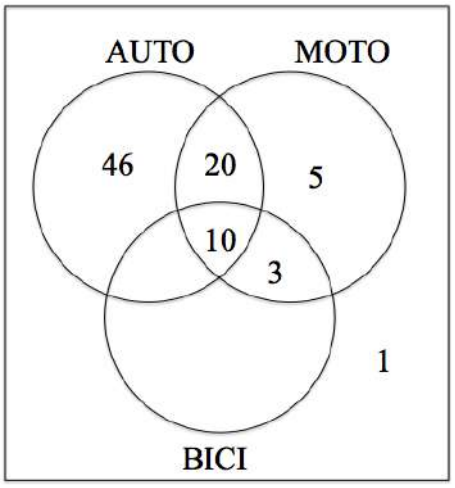



Figura 4.13 Diagrama de Venn

Después de ello, podremos utilizar el dato III, pues si consideramos todas las zonas, excepto las cuatro correspondientes al conjunto AUTO, deberán sumar 9, luego 9 – (5 + 3 + 1) = 0:

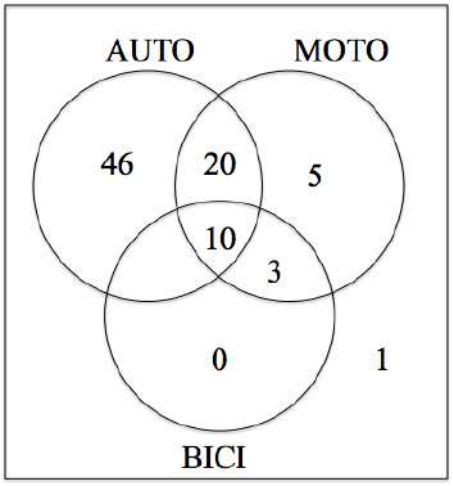



Figura 4.14 Diagrama de Venn

Por último, utilizaremos el dato VIII, pues si consideramos todas las zonas, excepto las cuatro correspondientes al conjunto MOTO, deberán sumar 61, luego 61 – (46 + 0 + 1) = 14:

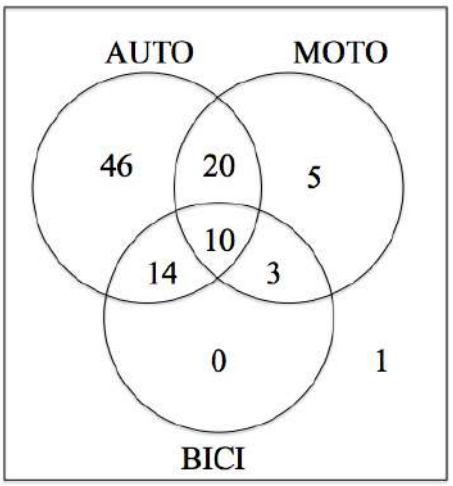



Figura 4.15 Diagrama de Venn

Por lo tanto, estamos en condiciones de responder a todas las preguntas:

1. A 99 personas.
2. A ninguna persona.
3. A 46 personas.
4. A 10 personas.
5. A 14 personas.

### 4.2.4. EL APARATO DE GALTON

Francis Galton (1822-1911), médico de profesión, fue también antropólogo, geógrafo, explorador, inventor, meteorólogo, estadístico, psicólogo británico, con un

amplio espectro de intereses. Era primo por parte de madre de Charles Darwin y contemporáneo de Mendel y aplicó los principios de Darwin a numerosos campos, principalmente al estudio del ser humano y de las diferencias individuales. Si bien no ostentó cátedras universitarias y realizó la mayoría de sus investigaciones por su cuenta, sus múltiples contribuciones recibieron reconocimiento formal cuando, a la edad de 87 años, se le concedió el título de *Sir* o Caballero del Reino.

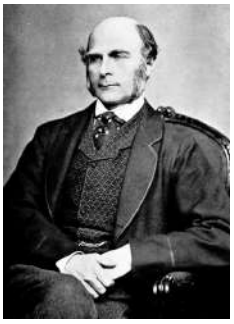


Figura 4.16 Retrato de Francis Galton

Galton llegó al concepto de correlación a partir del estudio de los problemas de la herencia biológica, publicó en 1869 el libro *Heredity Genius*, véase http://descargas.pntic.mec.es/cedec/mat3/contenidos/u12/M3_U12_contenidos/33_reflxionando_sobre_la_probabilidad.html.

y a él se debe el término *regresión*. Observó que las personas muy altas solían tener hijos más bajos que ellas, mientras que las personas muy bajas solían tener hijos más altos. Estas observaciones le llevaron a enunciar su *principio de regresión a la mediocridad*, aplicables a las tallas de una generación respecto de las siguientes. Este principio, totalmente falso, fue el origen del término *regresión*.

El astrónomo, naturalista y matemático belga, L.A.J. Quételet (1796-1874) y F. Galton (ambos ya en el siglo XIX) son los primeros en descubrir y estudiar las aplicaciones de la distribución normal a la antropometría y a los fenómenos sociales, y de ahí se pasó a otro tipo de medidas (como de inteligencia y a otras ya en el campo de la Psicología, Educación,…).

El aparato de Galton es un instrumento útil para simular la distribución de probabilidades, y puede dar origen a discusiones sobre la Probabilidad, su cálculo y su significado. Es un curioso aparato, diseñado por Sir Francis Galton (1822-1911) en el que se tiene un número considerable de bolitas que van bajando por el aparato de manera aleatoria. Cuando una bolita choca con un obstáculo, tiene un 50% de probabilidad de ir a la izquierda o a la derecha.

El aparato está formado por un tablero inclinado, en el que se distribuyen regularmente un sistema de clavos, para acabar finalmente en compartimentos estrechos. Al deslizar muchas bolas desde un depósito superior, éstas chocan con los clavos, y se alejan más o menos de la línea central de caída. Las alturas alcanzadas por las bolas en los compartimentos estrechos dan una idea de la curva de la distribución normal.

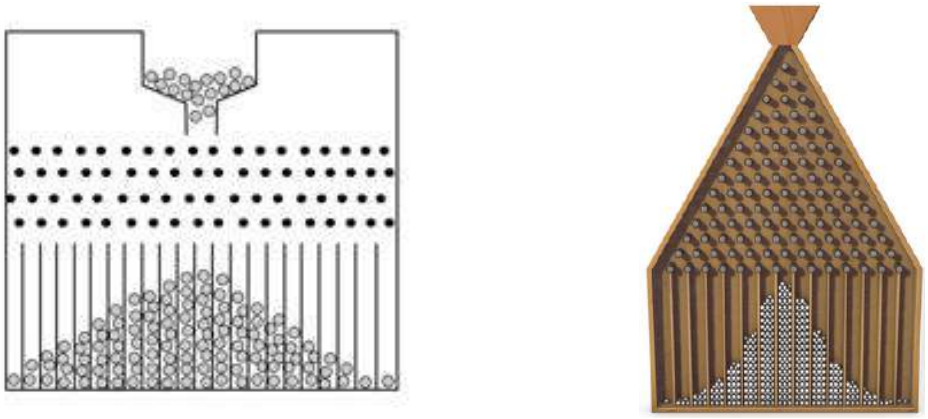


Figura 4.17 Aparato de Galton

Podría pensarse que, cada vez que una bola llega a un piso "lanza" una moneda, de modo que, si sale cara se desvía hacia la derecha, y si sale cruz hacia la izquierda. Las bolitas se van acumulando en la parte inferior y dan lugar a una silueta que, si el número de bolitas y el de cajas es grande, cada vez se parece más a una curva que recibe el nombre de curva normal.

En la actualidad existe un aparato análogo al de Galton, que es conocido como Demostrador mecánico de probabilidad, construido por el Science Materials Center, bajo el nombre de Hexstat.

Las bolas de este aparato caen desde el depósito superior, pasan por una serie de obstáculos hexagonales y, finalmente, se recogen en unos compartimentos estrechos situados en la parte inferior. En cada obstáculo, la probabilidad de que la bola se desplace a la izquierda es igual a que lo haga a la derecha, e igual a ½.

Tanto en el aparato de Galton como en el Hexstat, las alturas de las distintas columnas de bolas proporcionan, por vía empírica una idea bastante clara de la distribución normal.

La página del Ministerio de Educación, cultura y deporte reflexiona sobre la probabilidad a través de un ejemplo con el aparato de Galton. Basándose en una simulación en la cual bajan bolas de colores de un depósito.

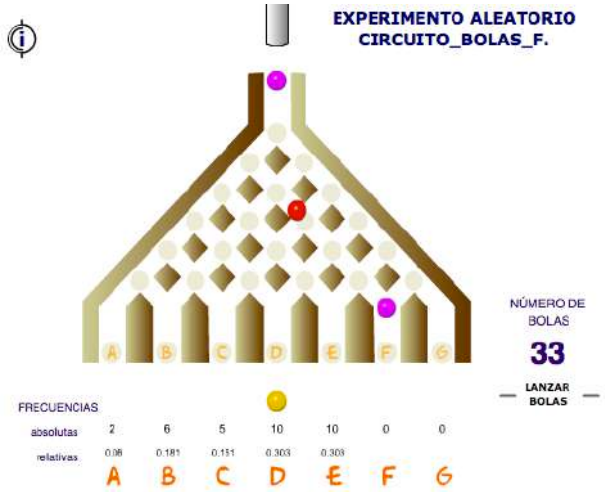



Figura 4.18 Simulación del aparato de Galton

### 4.2.5. EL PROBLEMA DE MONTY HALL

Se trata de un problema que se está convirtiendo en clásico en el mundo de las Matemáticas. Es un concurso televisivo llamado *Let's Make a Deal* ("hagamos un trato") retransmitido en Estados Unidos en los años 60 y 70, concretamente, entre 1963 y 1986. Su nombre proviene del presentador Monty Hall.




Figura 4.19 Cabecera del concurso televisivo Monty Hall

Una de las secciones del programa que presentaba consistía en que el concursante tenía que elegir una puerta entre tres posibles y ganaba el premio que hubiera tras la puerta seleccionada. Una de ellas oculta un coche y tras las otras dos hay una cabra en cada una de ellas. El concursante gana el premio que se oculta detrás de la puerta que escoja.




Figura 4.20 Imagen explicativa del concurso

Una vez que el concursante ha elegido una puerta y comunica su elección al presentador, este abre una de las puertas restantes, ya que Monty Hall conoce lo que hay detrás de cada puerta, y muestra que detrás de ella hay una cabra. En este momento se le da la opción al concursante de cambiar de puerta si lo desea, es decir, modificar su elección inicial y escoger la otra puerta que continúa cerrada, haciéndole la siguiente pregunta: *"¿Quieres cambiar de puerta?"*

¿Qué harías en el lugar del concursante, debe mantener su elección inicial o escoger la otra puerta? ¿Hay alguna diferencia? ¿Cuál es la opción correcta?

1. **Quedarse con la puerta inicial**
2. **Cambiar a la otra puerta**
3. **Es irrelevante cambiar o no cambiar**

El participante debe **cambiar su elección inicial** para aumentar las probabilidades de llevarse el coche.

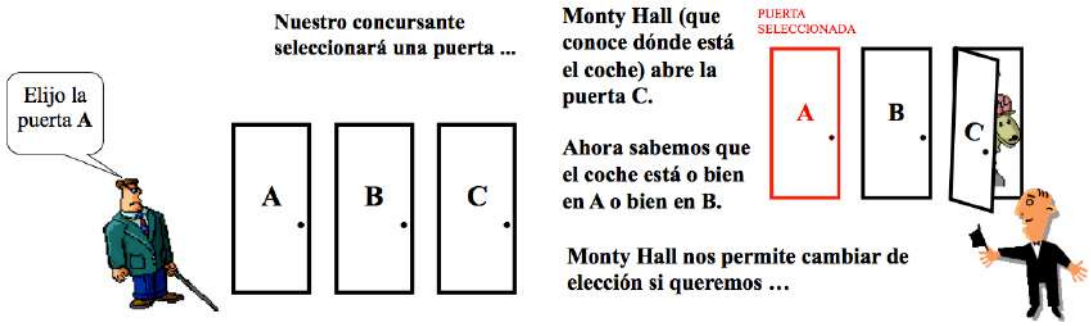
La probabilidad de que el concursante escoja en su primera oportunidad la puerta que oculta el coche es de 1/3, por lo que la probabilidad de perder , o sea, de que el coche se encuentre en una de las puertas que no ha escogido es de 2/3.

¿Qué cambia cuando el presentador muestra una cabra tras una de las otras dos puertas? Si el jugador ha escogido en su primera opción la puerta que contiene el coche (con una probabilidad de 1/3), entonces el presentador puede abrir cualquiera de las dos puertas sin premio. En este caso, el jugador pierde el coche si cambia cuando se le ofrece la oportunidad. Pero, si el jugador escoge una cabra en su primera opción (con una probabilidad de 2/3), el presentador sólo tiene una opción para abrir una puerta que contiene la cabra. En ese caso, la puerta que no abrió el presentador, tiene que contener el coche, por lo que cambiando lo gana.

En resumen, si mantiene su elección original gana si escogió originalmente el coche (con probabilidad de 1/3), mientras que si cambia, gana si escogió en un principio una de las dos cabras (con probabilidad de 2/3). Por lo tanto, el concursante debe cambiar siempre su elección.

Una suposición errónea es que, una vez sólo queden dos puertas, ambas tienen la misma probabilidad (50%) de contener el coche. Es errónea ya que el presentador abre la puerta después de la elección del jugador. Esto es, la elección del jugador afecta a la puerta que abre el presentador. Es decir, aparece el concepto de probabilidad condicional. Esta probabilidad nos muestra cómo la ocurrencia de un suceso afecta a la probabilidad de otro. Por ejemplo, en el momento que Monty Hall abre una de las puertas, la pregunta que nos estamos haciendo es: ¿Cuál es la probabilidad de ganar si cambio de puerta, teniendo la *información adicional* de que el coche no está en la puerta abierta?

Una forma más clara de verlo es replantear el problema. Si en lugar de haber sólo tres puertas hubiesen 100, y tras la elección original el presentador abriese 98 de las restantes para mostrar que tras de ellas sólo hay cabras. Si el concursante no cambiase su elección ganaría el coche sólo si lo ha escogido originalmente (1 de cada 100 veces), mientras que si la cambia, ganaría si no lo ha escogido originalmente (99 de cada 100 veces).



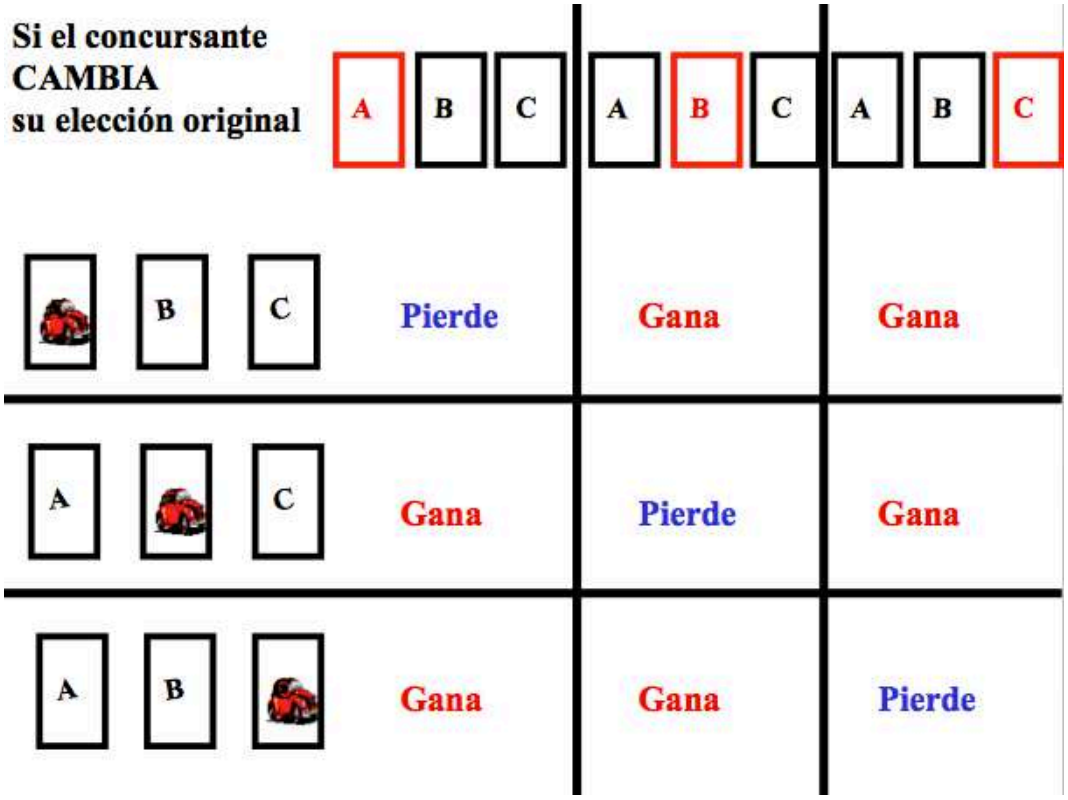



Figura 4.21 Imagen explicativa de la elección de la puerta

En la mayoría de los casos el concursante hace sus elecciones de manera intuitiva. A continuación haremos una explicación gráfica, intuitiva y matemática del problema de Monty Hall.

Explicación gráfica

Desarrollamos todas las posibilidades, es la forma más fácil de entender, pero a menudo también la más pesada.

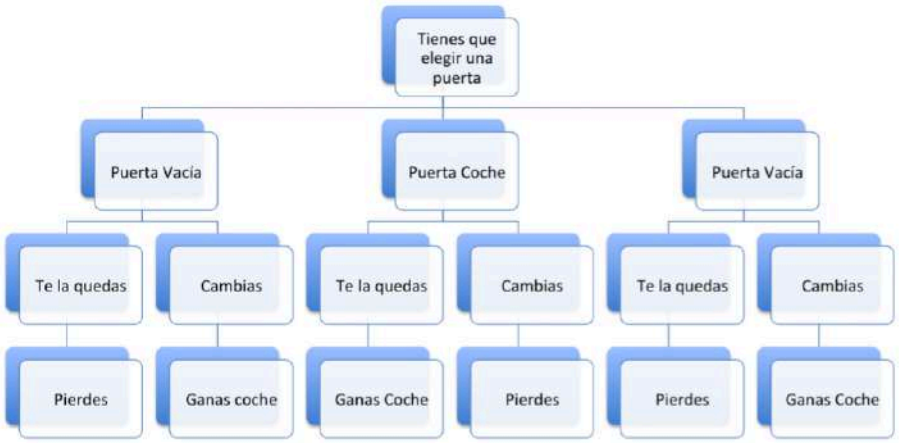



Figura 4.22 Imagen gráfica de la elección de la puerta

Si miramos las posibilidades de éxito de cambiar o no cambiar, vemos que si no cambiamos tenemos un 1/3 y si cambiamos tenemos 2/3. Aún resulta difícil de entender pero resulta indiscutible que es así.

Explicación intuitiva

Si no cambiamos las posibilidades de ganar son de 1/3, ya que escogemos una vez sin tener información y luego no cambiamos, de modo que el hecho de que el presentador abra una puerta no cambia nuestras probabilidades aunque parezca lo contrario.

Sin embargo si cambiamos podemos ganar o perder y dado a que hay 2 cabras y un coche las probabilidades de ganar son 2/3.

Explicación matemática

Matemáticamente, lo explicaremos con probabilidades condicionadas. Esta es la forma más rigurosa pero probablemente la que peor se entienda. Definimos cuidadosamente los siguientes sucesos. Asumimos que hay dos tipos de jugador, los que nunca cambian de puerta y los que cambian siempre; en este caso la pregunta se limita a ver qué tipo de jugador tiene la mayor probabilidad de ganar el coche.

| **Suceso** | **Descripción** |
|---|---|
| A | El jugador selecciona la puerta que contiene el coche en su elección inicial |
| B | El jugador selecciona una puerta que contiene una cabra en su selección inicial |
| G | El jugador gana el coche |

Tabla 4.9 Sucesos del perfil del concursante

Estamos interesados en calcular P($G$) para cada tipo de jugador.

Para calcular P(G), basta con notar que $G = (G \cap A) \cup (G \cap B)$ ya que $A \cap B = \varnothing$ y $A \cup B = E$ (esto es equivalente a decir que $\{ A, B\}$ es una partición de E).

$$P(G) = P((G \cap A) \cup (G \cap B)) = P(G \cap A) + P(G \cap B) = P(G/A)P(A) + P(G/B)P(B)$$

En cualquier caso, dado que no tenemos ninguna razón para pensar lo contrario, diremos que P(A) = 1/3 y P(B) = 2/3 pues hay un coche y dos cabras.

Ahora debemos definir qué tipo de jugador estamos estudiando.

- **Jugador que nunca cambia de puerta.**

En este caso P(G/A) = 1 y P(G/B) = 0 pues el jugador se queda con su elección inicial. Por tanto, **P(G) = 1/3**.

- **Jugador que siempre cambia de puerta**

En este caso P(G/A) = 0 y P(G/B) = 1 pues el jugador se cambia a la única puerta cerrada que queda (sabemos que como el presentador sabe donde está el coche, siempre mostrará una cabra). Por lo tanto, **P(G) = 2/3**.

Programas televisivos que se han emitido en España y que son similares al problema de Monty Hall

*Un, dos, tres, responda otra vez*

- Al concursante se le ofrece la posibilidad de escoger entre 3 puertas. Tras una de ellas se esconde un coche y tras las otras dos hay regalos sin importancia, en este caso son calabazas. El concursante gana el premio que se oculta detrás de la puerta que escoja.
- Después de que el concursante elige una puerta, el presentador abre una de las otras dos puertas, mostrando que detrás de ella había regalo sin importancia (una calabaza). Siempre puede hacerlo, ya que el presentador conoce lo que hay detrás de cada puerta. Pues quedan dos puertas sin abrir.
- Entonces ofrece al concursante la posibilidad de cambiar su elección inicial y escoger la otra puerta que continúa cerrada.




Figura 4.23 Imagen del programa televisivo *Un, dos, tres*

*Allá tú- El concurso de las cajas*

"**Allá tú**" es un concurso televisivo en el que el concursante debe ir eliminando cajas que custodian sus compañeros, algunas de esas cajas contienen diferentes sumas de dinero, otras objetos cotidianos sin valor. El concursante debe ir desechando cajas hasta quedar con una sola, cuyo contenido determinará el premio que se llevará. El programa dispone de dos mecanismos para provocar cambios en la caja inicial que tiene el concursante en un momento dado: la compra de la caja del concursante o el intercambio de la caja del concursante.

Simplificando, podemos considerar que hay un solo premio grande entre todas las 22 cajas. Son tres o cuatro, pero el gordo es el de los 600.000 €. Si repetimos muchas veces el experimento de elegir una caja al azar de entre 22, la que contiene los 600.000 € saldrá más o menos una de cada 22 veces. Esto significa que si sólo dependiéramos del Azar, de cada 22 programas, en uno saldría el premio gordo, cada mes y poco, pero el gran premio no sale tan a menudo.

En el concurso de Monty Hall hemos visto que la mejor estrategia es la de cambiar la puerta, pero Allá tú es un concurso mucho más complejo de estudiar la probabilidad, por lo que tarda en salir el premio gordo podemos pensar que lo mejor es quedarnos con la caja inicial que tiene una probabilidad de ser la de 600.000 € de 1/22 = 0,0455 que equivale a un **4,54%** aproximadamente, una probabilidad nada despreciable, pero sería simplificar mucho el estudio, ya que a lo largo de cada concurso se presentan múltiples situaciones distintas y no contamos con información suficiente para saber cómo actúan los directores de ¡Allá tú! Pero si está claro que disponen de diversas

formas de manipular a los concursantes de modo que la elección de la caja que finalmente abren no sea un suceso dejado en manos del Azar.




Figura 4.24 Imagen del programa televisivo *¡Allá tú!*

*Una vuelta de tuerca al problema*

Tenemos tres concursantes, cada uno de los cuales ha elegido un cofre distinto. El presentador abre uno de los cofres vacíos, con lo que el concursante correspondiente queda eliminado. Ahora, los dos restantes, que conocen la solución al problema de Monty Hall, cambian sin dudar sus respectivos cofres para doblar sus posibilidades, pero esto es absurdo.

Entre ambos tienen siempre el 100% de posibilidades, es imposible que doblen sus probabilidades ambos a la vez. Por otro lado, no vemos que ninguno de los dos concursantes pueda tener ventaja alguna sobre el otro.

## 4.3 MATERIALES DIDÁCTICOS

### 4.3.1 INTRODUCCIÓN

La Estadística y la Probabilidad constituyen conexiones importantes con otras áreas de contenido, como son las Ciencias Sociales y Naturales. También pueden reforzar las destrezas comunicativas al discutir los niños sus actividades y conclusiones, y escribir sobre ellas. Dentro de las Matemáticas, estos temas conllevan regularmente el uso de números, mediciones, estimación y resolución de problemas (*Estándares curriculares*, NTCM).

Como dice Carmen Burgués, “No se trata de proporcionarles (a la mayoría de los maestros) formación de Matemática superior, sino de abordar en los saberes de las Matemáticas que deben enseñar” y, según su opinión, “El nivel de información ofrecido

por los documentos curriculares es insuficiente para los maestros, precisamente por el desconocimiento matemático de los docentes".

Un suceso es aleatorio cuando es incierto, cuando si lo repetimos en condiciones idénticas no podemos predecir el resultado: decimos que depende del Azar, de la suerte.

La mayoría de los juegos exigen una experiencia manipulativa y seguir una serie de técnicas y habilidades de origen matemático: contar, operar, observar, anotar, recontar, elaborar tablas, ver frecuencias, estudiar distintas posibilidades, realizar diagramas, distintas combinaciones de elementos…

Pues bien, todas estas destrezas, técnicas, habilidades matemáticas para trabajar algo sobre lo que no tenemos la sensación de certidumbre plena (es posible, seguro, improbable, escasamente probable…) chocan con el más puro determinismo del bloque de números y operaciones. Es decir, resulta complicado y difícil de asimilar que en un experimento realizado más de una vez en idénticas condiciones no se obtenga exactamente el mismo resultado.

Sólo a base de experiencias y de prácticas manipulativas, con un cierto grado de sistematización para organizar la información que se va obteniendo, los niños llegan a darse cuenta de que en los juegos de azar se producen regularidades que aumentan con el número de sucesos que se realizan.

El Azar, además de indeterminación, produce regularidades que ayudan en la toma de decisiones y a la hora de hacer predicciones.

Normalmente, los niños respecto a la probabilidad se mueven en el mundo de las creencias, como perteneciente al mundo mágico o incluso de la superación. De ahí determinados "ritos" (soplar tres veces el objeto antes de guardarlo en el puño) o cuando se echan las suertes para elegir compañeros de juego, por ejemplo.

### 4.3.2 LIBRO DE TEXTO

El libro de texto es, por excelencia, uno de los recursos didácticos más utilizados dentro y fuera del aula. Es por ello que se ha realizado un análisis de dos series completas de libros de texto actuales.

#### 4.3.2.1 ANTECEDENTES

Desde el currículo pretendido al implementado en el aula, una fase importante es el currículo escrito y la forma en que lo interpretan los profesores, a través de los libros de texto (Herbel-Eisenmann, 2007). Estos libros son un producto del proceso de transposición didáctica (Chevallard, 1991), es decir, la adaptación del conocimiento matemático formal a conocimiento matemático para ser enseñado.

Los libros de texto que usa el niño son uno de los principales recursos educativos, ya que muchas de las decisiones de los profesores sobre las tareas a realizar con los niños están mediadas por ellos (Stylianides, 2009). Cordero y Flores (2007) indican que determinan con frecuencia el discurso matemático escolar, y prácticamente regula la enseñanza y el aprendizaje, debido en parte a las creencias de los actores del sistema didáctico.

#### 4.3.2.2 MUESTRA DE TEXTOS Y CRITERIOS DE SELECCIÓN

La selección de los libros de texto a analizar se basó en una consulta electrónica en la web de la Consejería para la Educación del Gobierno de Canarias, eligiendo las dos editoriales más utilizadas en los centros públicos. Cada editorial tiene uno o dos proyectos vigentes, dependiendo del ciclo; nuestra muestra intencional está constituida por los siguientes libros de texto.

- Serie 1: Editorial Anaya

  Libros de texto de Educación Primaria

- Pérez, E., Marsá, M., Díaz, C., Ferri, T. y Cid, O. (2016). Matemáticas 1. Proyecto "Una a una".
- Pérez, E., Marsá, M., Díaz, C., Ferri, T. y Cid, O. (2016). Matemáticas 2. Proyecto "Una a una".
- Ferrero, L., Gaztelu, I., Martín, P. y Alonso, G. (2016). Matemáticas 3. Proyecto "Abre la puerta".
- Ferrero, L., Gaztelu, I. y Martín, P. (2016). Matemáticas 4. Proyecto "Abre la puerta".
- Ferrero, L., Gaztelu, I. y Martín, P. (2016). Matemáticas 5. Proyecto "Abre la puerta".
- Ferrero, L., Gaztelu, I. y Martín, P. (2016). Matemáticas 6. Proyecto "Abre la puerta".

Libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria

- Colera, J., Colera, L., Gaztelu, I. Matemáticas 1 ESO. Proyecto: "aprender es crecer en conexión".
- Colera, J., Colera, L., Gaztelu, I. Matemáticas 2 ESO. Proyecto: "aprender es crecer en conexión".
- Colera, J., Colera, L., Gaztelu, I. y Oliveira, J.(2016). Matemáticas 3 ESO orientadas a las Enseñanzas Académicas. Proyecto: "aprender es crecer en conexión".
- Colera, J., Colera, L., Gaztelu, I. y Oliveira, J.(2016). Matemáticas 4 ESO orientadas a las Enseñanzas Aplicadas. Proyecto: "aprender es crecer en conexión".
- Colera, J., Colera, L., Gaztelu, I. y Oliveira, J.(2016). Matemáticas 4 ESO orientadas a las Enseñanzas Acedémicas. Proyecto: "aprender es crecer en conexión".

• Serie 2: Editorial: Santillana

Libros de texto de Educación Primaria

- Matemáticas 1 Primaria (2016). Proyecto: "Los caminos del saber".
- Matemáticas 2 Primaria (2016). Proyecto: "Los caminos del saber".
- Matemáticas 3 Primaria (2016). Proyecto: "Los caminos del saber".
- Matemáticas 4 Primaria (2016). Proyecto: "Los caminos del saber".
- Matemáticas 5 Primaria (2016). Proyecto: "La casa del saber".
- Matemáticas 6 Primaria (2016). Proyecto: "La casa del saber".

Libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria

- Almodóvar J. A., de la Prida C., Gaztelu A., González A., Machín P., Pérez C. y Sánchez D. Matemáticas 1 ESO (2016). Proyecto: "Saber hacer".
- Almodóvar J. A., Cuadrado A., Díaz L., Dorce C., Gámez J. C., Marín S., Pérez C., Redón M. y Sánchez D. Matemáticas 2 ESO (2016). Proyecto: "Saber hacer".
- de la Prida C., Gaztelu A., González A., Machín P., Pérez C. y Sánchez D. Matemáticas 3 ESO. Enseñanzas Académicas. (2016). Proyecto: "Saber hacer".
- Gámez J. C., Gaztelu A., Loysele F., Marín S., Pérez C. y Sánchez D. Matemáticas 4 ESO. Enseñanzas Académicas. (2016). Proyecto: "Saber hacer".
- Pérez C., Sánchez D. y Zapata A. Matemáticas 4 ESO. Enseñanzas Aplicadas (2016). Proyecto: "Saber hacer".

### 4.3.2.3 MÉTODO Y VARIABLES ANALIZADAS

La faceta epistémica del enfoque ontosemiótico ha sido utilizada para el análisis de los libros de texto en diversas investigaciones sobre Educación Estadística, por ejemplo, sobre medidas de posición central (Cobo, 2003; Mayén, 2009), probabilidad en Educación Secundaria (Ortiz, 2002), y distribución normal (Tauber, 2001). Este análisis ha permitido identificar los significados institucionales de referencia y prever la presencia de conflictos potenciales en el aprendizaje del objeto matemático de interés.

El análisis de libros de texto que se presenta en este capítulo usa esta faceta y adapta la metodología de Cobo (2003):

1. Elaboración de una lista de objetos matemáticos según los lineamientos curriculares españoles. Esta lista se determina mediante sucesivas revisiones de los documentos curriculares, en modo cíclico e inductivo.
2. Identificación de las páginas o los capítulos de los libros de texto en los que se incluyen temas de Azar o Probabilidad.
3. Elaboración de tablas que resumen los contenidos en cada libro de texto, cuya lectura facilite la obtención de conclusiones.

A continuación presentamos los resultados del análisis para cada uno de los tipos de objetos matemáticos. En primer lugar, analizamos los contenidos de los libros de texto en el bloque de Azar y Probabilidad. En segundo lugar, elaboramos para cada curso de Primaria y Secundaria una tabla comparativa con los contenidos del currículo y lo expuesto en los libros de texto.

### 4.3.2.4 CONTENIDOS DE LOS LIBROS DE TEXTO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

#### EDITORIALES: ANAYA Y SANTILLANA

Primer Curso

La editorial Anaya trabaja en el primer curso el suceso seguro, posible e imposible.

Editorial Anaya




Figura 4.25 Contenidos del Primer Curso de Educación Primaria. Editorial Anaya




Figura 4.26 Contenidos del Primer Curso de Educación Primaria. Editorial Anaya

Segundo Curso

Las dos editoriales más demandadas en Canarias trabajan el suceso seguro, posible e imposible en el segundo curso de esta etapa de la Educación Primaria.

Editorial Anaya




Figura 4.27 Contenidos del Segundo Curso de Educación Primaria. Editorial Anaya

Completa con **seguro, imposible** o **posible.**



Es _____ que saque una bola verde.



Es _____ que saque una bola roja.



Es _____ que saca una bola azul.

Dibuja todas las caras en las que puede caer un dado.

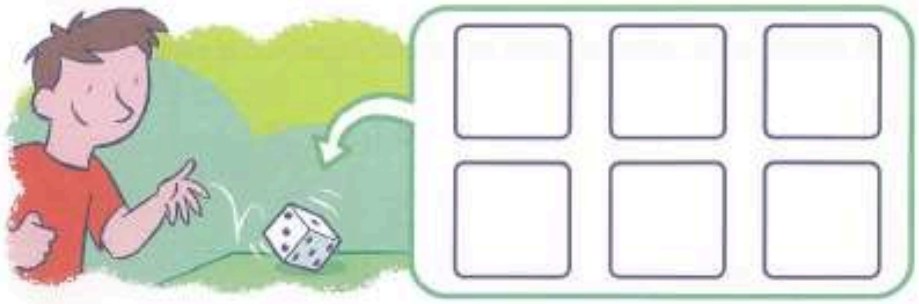


Figura 4.28 Contenidos del Segundo Curso de Educación Primaria. Editorial Anaya

Editorial Santillana




Figura 4.29 Contenidos del Segundo Curso de Educación Primaria. Editorial Santillana




Figura 4.30 Contenidos del Segundo Curso de Educación Primaria. Editorial Santillana

Segundo Ciclo

En el primer curso de este ciclo, es decir 3.º de Primaria, ninguna de las dos editoriales trabajan la Probabilidad. Sin embargo, los alumnos y alumnas trabajan las experiencias aleatorias, así como el suceso seguro, posible e imposible y el más probable y el menos probable en 4,º de Primaria.

Editorial Anaya

## Experiencias aleatorias

Las situaciones cuyo resultado no podemos saber de antemano se llaman **experiencias aleatorias,** dependen del azar o de la suerte.

La experiencia *lanzar una moneda al aire* es una experiencia aleatoria porque el resultado depende del azar.

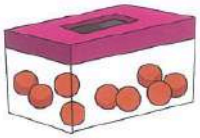
Casos posibles:



SACAR CARA SACAR CRUZ

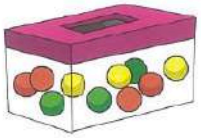
A cada uno de los resultados posibles de una experiencia aleatoria se le denomina **suceso.** Los sucesos pueden ser:

**Suceso seguro**



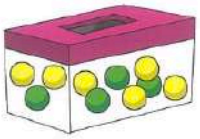
Es seguro sacar bola roja.

**Suceso posible** o **probable**



Es posible sacar bola roja.

**Suceso imposible**



Es imposible sacar bola roja.

**1** Indica cuáles de las siguientes experiencias son aleatorias:

a) Sacar un 4 al lanzar un dado.
b) Obtener cara al lanzar una moneda.
c) Obtener menos de 7 al lanzar un dado.
d) Que la moneda caiga después de lanzarla.
e) Que mañana amanezca.

**2** En la experiencia *sacar una bola de la bolsa sin mirar,* indica cómo son los siguientes sucesos:



a) Sacar bola roja.
b) Sacar bola azul.
c) Sacar bola negra.
d) Sacar bola amarilla.

**3** En la experiencia aleatoria *lanzar un dado,* señala qué tipo de suceso es cada uno de estos:

a) Sacar una puntuación par.
b) Sacar un 7.
c) Sacar una puntuación impar.
d) Sacar un 3.
e) Sacar un 8.
f) Sacar un múltiplo de 9.

Figura 4.31 Contenidos del Cuarto Curso de Educación Primaria. Editorial Anaya

**4** Señala si estos sucesos son seguros, posibles o imposibles:

a) Lanzar un balón a canasta y encestar.

b) Sacar una carta de oros al extraerla de una baraja española.

c) Que el Sol se ponga esta tarde.

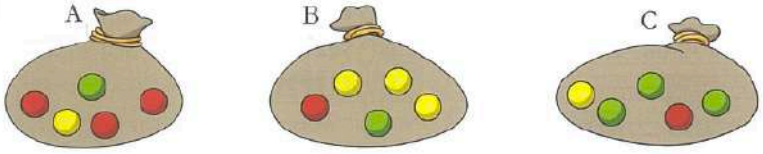
d) Que no amanezca mañana.

**5** Al lanzar un dado, ¿qué suceso es más probable? Explica tu respuesta.

a) Sacar una puntuación de 3 o menos.

b) Sacar una puntuación de 3 o más.

**6** En cada una de las bolsas hay el mismo número de bolas, pero de distintos colores. Observa la ilustración y contesta.




a) Si pudieses elegir, ¿qué bolsa elegirías para intentar sacar una bola roja? Explica tu respuesta.

b) Si quieres intentar sacar una bola verde, ¿qué bolsa elegirías?

c) Si juntásemos todas las bolas en una bolsa y sacásemos una bola sin mirar, ¿de qué color es más probable que fuese?

**7** Observa este dado, tiene 20 caras y, por tanto, las puntuaciones van del 1 al 20. Teniendo eso en cuenta, responde.




a) ¿Qué es más probable, sacar puntuación par o impar?

b) ¿Qué es más probable, sacar más de 5 o menos de 5?

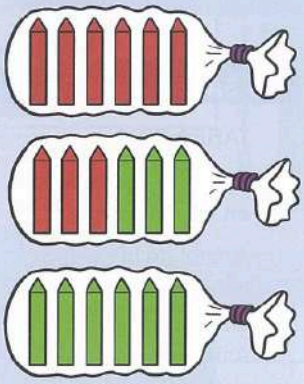
c) ¿Qué es más probable, obtener un múltiplo de 5 o un múltiplo de 2?

Figura 4.32 Contenidos del Cuarto Curso de Educación Primaria. Editorial Anaya

Editorial Santillana

## Suceso seguro, posible e imposible

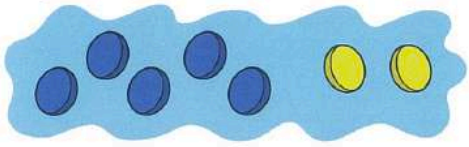
Si cogemos sin mirar una cera de cada bolsa, ¿será roja?



- En esta bolsa la cera siempre será roja. Coger una cera roja de esta bolsa es un **suceso seguro**, porque siempre se cumple.
- En esta bolsa a veces será roja y otras veces no. Coger una cera roja de esta bolsa es un **suceso posible**, porque a veces se puede cumplir.
- En esta bolsa nunca será roja. Coger una cera roja de esta bolsa es un **suceso imposible**, porque no se cumple nunca.

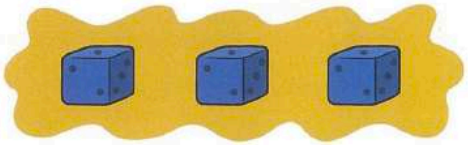
**1** **Escribe en tu cuaderno cómo es cada suceso: *seguro*, *posible* o *imposible*.**

Cogemos sin mirar una ficha.



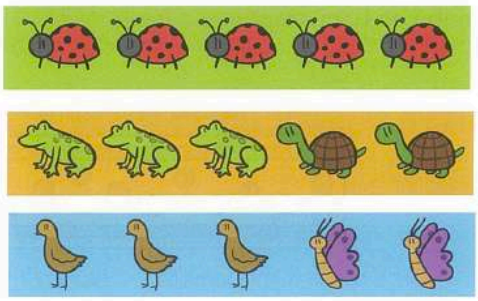
- Coger una ficha azul.
- Coger una ficha verde.
- Coger una ficha amarilla.

Cogemos sin mirar un dado.



- Coger un dado azul.
- Coger un dado verde.
- Coger un dado que no sea rojo.

**2** **Observa cada grupo de animales y escribe.**



- Un suceso seguro.
- Un suceso imposible.
- Un suceso posible.
- Un suceso imposible.
- Dos sucesos posibles.
- Un suceso imposible.

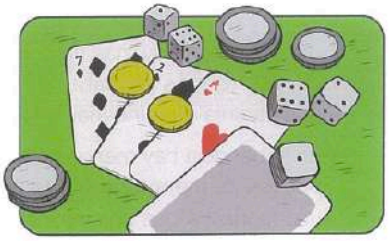


EJEMPLO Un suceso seguro ▸ Coger sin mirar una ...

Figura 4.33 Contenidos del Cuarto Curso de Educación Primaria. Editorial Santillana

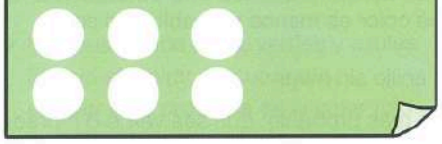
**3** **Escribe dos sucesos posibles y uno imposible para cada situación.**

- Sacar una carta de una baraja.
- Lanzar una moneda al aire.
- Elegir al azar un alumno de la clase.
- Elegir al azar una letra del alfabeto.
- Elegir al azar un número del 1 al 100.
- Sacar al azar una moneda de un monedero.



**4** **Copia las figuras en tu cuaderno y coloréalas para que cada frase sea cierta. En algunos casos hay más de una solución. Dibuja dos si puedes.**

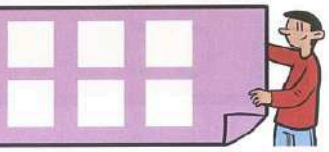
Sacar sin mirar un círculo rojo es un suceso seguro.



Sacar sin mirar un triángulo verde es un suceso posible.



Sacar sin mirar un cuadrado azul es un suceso imposible.



**5** **Inventa y dibuja.**

Piensa en varias situaciones en las que haya sucesos seguros, sucesos posibles o sucesos imposibles.
Dibújalas y escribe algunos de esos sucesos.

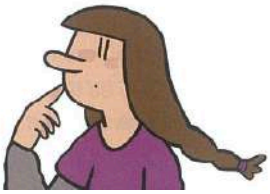
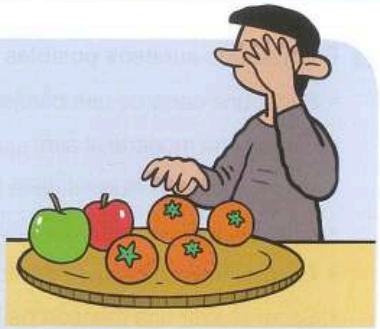


Figura 4.34 Contenidos del Cuarto Curso de Educación Primaria. Editorial Santillana

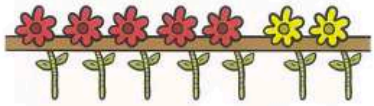
# Más probable y menos probable

Carlos coge sin mirar una fruta de la bandeja.

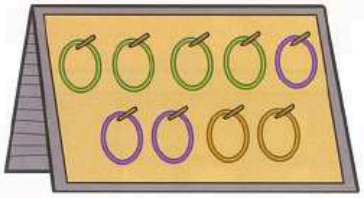
- En la bandeja hay más naranjas que manzanas, por eso es **más probable** coger una naranja que una manzana.
- En la bandeja hay menos manzanas que naranjas, por eso es **menos probable** coger una manzana que una naranja.



**1** **Observa los dibujos y contesta en tu cuaderno.**



- Si elijo una flor sin mirar:
  - ¿Qué es más probable: que sea roja o amarilla?
  - ¿De qué color es menos probable que sea?



- Si elijo un anillo sin mirar:
  - ¿Qué es más probable: que sea verde o morado?
  - ¿Qué es menos probable: que sea naranja o verde?
  - ¿De qué color es más probable que sea?
  - ¿De qué color es menos probable que sea?

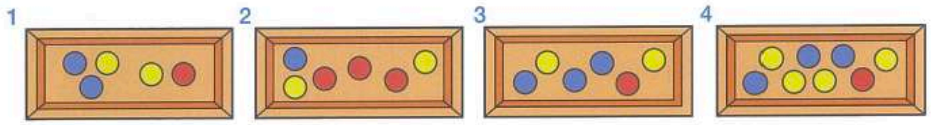
**2** **Piensa y contesta.**

- Manuel tiene en una hucha 5 monedas de 2 €, 4 de 1 € y 6 de 50 céntimos. Si saca una moneda sin mirar:
  - ¿Qué es menos probable que saque: una moneda de 1 € o una de 2 €?
  - ¿Qué es más probable que saque: una moneda de 50 céntimos o una de 2 €?
  - ¿Qué tipo de moneda es menos probable que saque?
- Pilar tiene en una bolsa 3 fichas rojas, 5 fichas azules, 2 fichas verdes y 4 fichas rosas. Si saca una ficha sin mirar:
  - ¿Qué es más probable que saque: una ficha roja o una ficha azul?
  - ¿Qué es menos probable que saque: una ficha verde o una ficha rosa?
  - ¿Qué color de ficha es menos probable que saque?
  - ¿Qué color de ficha es más probable que saque?



Figura 4.35 Contenidos del Cuarto Curso de Educación Primaria. Editorial Santillana

**3** ¿Que afirmaciones son ciertas para cada caja? Lee y escribe en tu cuaderno.




A. Es más probable sacar una bola amarilla que una azul.

B. Es menos probable sacar una bola amarilla que una azul.

C. El color rojo es el más probable.

D. El color rojo es el menos probable.

EJEMPLO Para la caja 1 son ciertas ...

**4** **Copia los cuadrados en tu cuaderno y colorea para que las oraciones sean ciertas. Si hay más de una solución, dibuja dos que sean posibles.**

- Hay cuadrados rojos, verdes y azules. Si cojo sin mirar un cuadrado, el color más probable es el color rojo.

- Hay cuadrados rojos, verdes y azules. Si cojo un cuadrado sin mirar, es más probable coger uno verde que uno rojo y uno rojo que uno azul.

- Hay cuadrados rojos, verdes, azules y amarillos. Si cojo sin mirar un cuadrado, lo más probable es que sea amarillo, y lo menos probable que sea azul.

RAZONAMIENTO

**Lee y averigua el color más probable en cada caso al sacar una ficha sin mirar.**

- Eva tiene una caja con fichas.

En la caja hay fichas azules, verdes y rojas. Es menos probable sacar verde que rojo y menos probable sacar azul que verde.

- Miguel tiene una caja con fichas.

En la caja hay fichas rosas, amarillas y moradas. Es más probable sacar rosa que amarilla y menos probable sacar morada que amarilla.

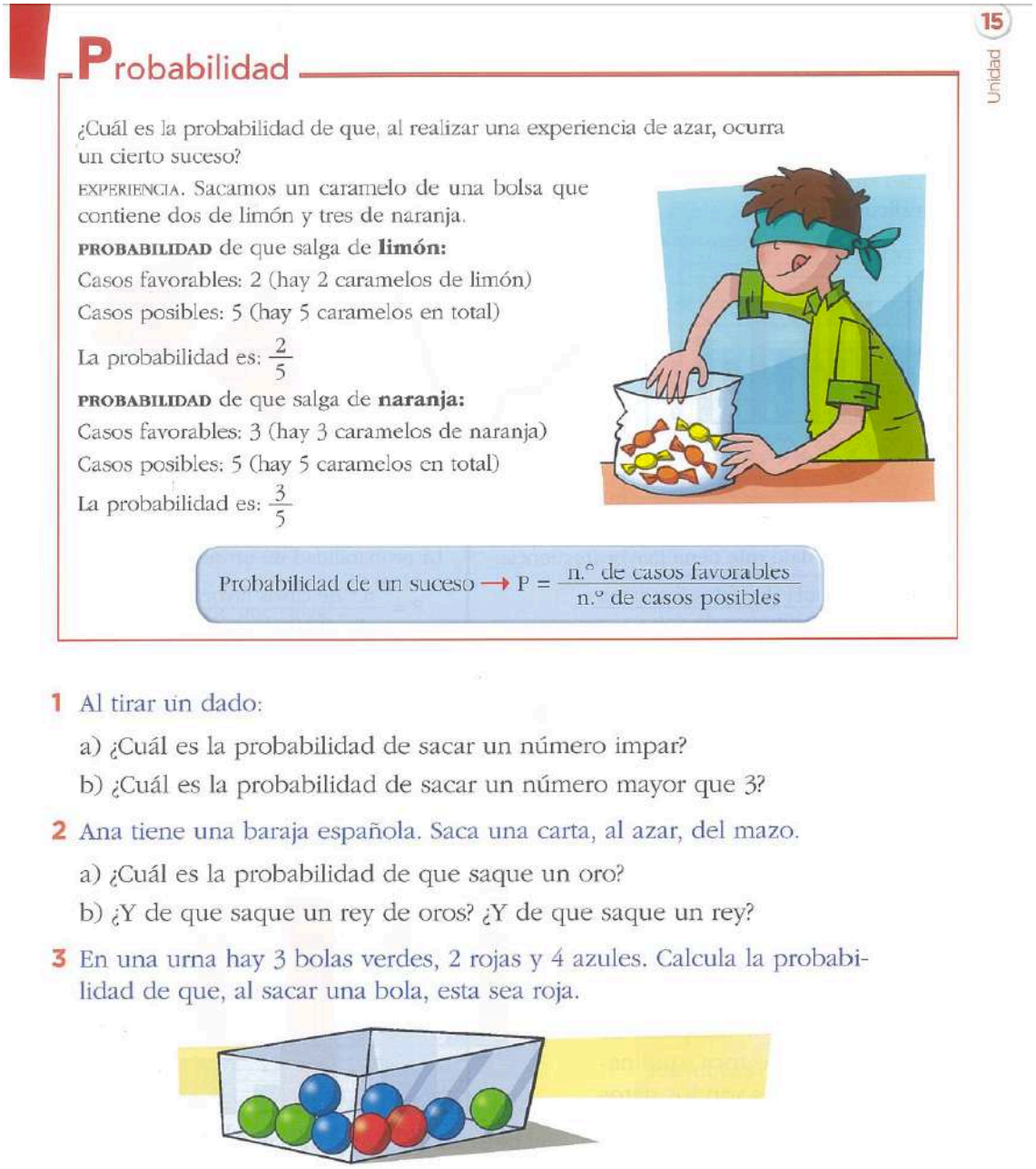
Figura 4.36 Contenidos del Cuarto Curso de Educación Primaria. Editorial Santillana

Tercer Ciclo

Editorial Anaya

En 5.º de Primaria esta editorial trabaja la Probabilidad y en 6.º de Primaria trabaja las fracciones y la probabilidad a partir de los datos.

Quinto Curso



15 Unidad

# Probabilidad

¿Cuál es la probabilidad de que, al realizar una experiencia de azar, ocurra un cierto suceso?

EXPERIENCIA. Sacamos un caramelo de una bolsa que contiene dos de limón y tres de naranja.

**PROBABILIDAD** de que salga de **limón:**

Casos favorables: 2 (hay 2 caramelos de limón)

Casos posibles: 5 (hay 5 caramelos en total)

La probabilidad es: $\frac{2}{5}$

**PROBABILIDAD** de que salga de **naranja:**

Casos favorables: 3 (hay 3 caramelos de naranja)

Casos posibles: 5 (hay 5 caramelos en total)

La probabilidad es: $\frac{3}{5}$

Probabilidad de un suceso → $P = \frac{\text{n.º de casos favorables}}{\text{n.º de casos posibles}}$

**1** Al tirar un dado:

a) ¿Cuál es la probabilidad de sacar un número impar?

b) ¿Cuál es la probabilidad de sacar un número mayor que 3?

**2** Ana tiene una baraja española. Saca una carta, al azar, del mazo.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que saque un oro?

b) ¿Y de que saque un rey de oros? ¿Y de que saque un rey?

**3** En una urna hay 3 bolas verdes, 2 rojas y 4 azules. Calcula la probabilidad de que, al sacar una bola, esta sea roja.

Figura 4.37 Contenidos del Quinto Curso de Educación Primaria. Editorial Anaya

## Probabilidades y fracciones

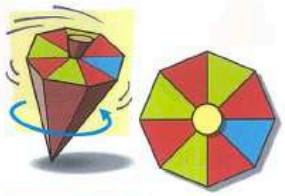
En una experiencia aleatoria, para valorar la probabilidad de que se verifique un suceso, contrastamos el número de casos favorables con el número de casos posibles y lo expresamos mediante una fracción.

- Suceso A. ¿Saldrá azul? Hay una posibilidad entre ocho.

  Probabilidad: $P = \frac{1}{8}$

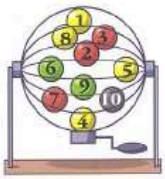
- Suceso B: ¿Saldrá verde? Hay tres posibilidades entre ocho.

  Probabilidad: $P = \frac{3}{8}$



Probabilidad de un suceso $\rightarrow P = \frac{\text{N.º de casos favorables}}{\text{N.º de casos posibles}}$

**1** En la experiencia «Sacar una bola del bombo»:




a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea de color amarillo?

b) ¿Y de que lleve un número par?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea amarilla y lleve un número par?

**2** Si sacas una carta de la baraja española de 40 cartas, indica cuál es la probabilidad de que sea:

a) Un rey.

b) Una carta de oros.

c) El tres de copas.

d) Una figura de espadas.



**3** Para la experiencia de lanzar un dado, ¿cuál es la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos?

a) Sacar un siete.

b) Sacar puntuación par.

c) Sacar puntuación impar.

d) Sacar un dos.



Figura 4.38 Contenidos del Sexto Curso de Educación Primaria. Editorial Anaya

## La probabilidad a partir de los datos

En ciertas situaciones se pueden **estimar probabilidades** a partir de los datos recogidos en experiencias anteriores.

Observa la estadística de tiros con arco y de dianas que ha conseguido Roberto en las últimas cinco competiciones:

| | COMPETICIONES | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | TOTAL |
| TIROS | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | 100 |
| DIANAS | 15 | 17 | 14 | 13 | 16 | 75 |

Con estos datos podemos hacer una estimación de la probabilidad que tiene de hacer diana en el próximo tiro:

Probabilidad estimada $\rightarrow P = \frac{\text{N.º de aciertos}}{\text{N.º total de tiros}} = \frac{75}{100} = \frac{3}{4} \rightarrow$ acierta 3 de cada 4

Este tipo de estimaciones de probabilidad son más fiables cuantos más datos recojamos.

**1** Observa los goles conseguidos por Marta y Susana en los últimos partidos del campeonato escolar de balonmano.

| | | PARTIDOS | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | TOTAL |
| MARTA | TIROS | 14 | 13 | 16 | 12 | 15 | 70 |
| | GOLES | 10 | 8 | 12 | 10 | 10 | 50 |
| SUSANA | TIROS | 12 | 11 | 14 | 10 | 13 | 60 |
| | GOLES | 8 | 6 | 10 | 8 | 8 | 40 |

a) Estima la probabilidad que tiene cada una de meter gol en el próximo lanzamiento.

b) ¿Cuál de las dos tiene mayor probabilidad de meter gol?

**2** Javier juega en el equipo de baloncesto del colegio y tiene una buena efectividad de tiro a canasta. En los últimos 50 lanzamientos desde la línea de tres puntos ha conseguido encestar 40.

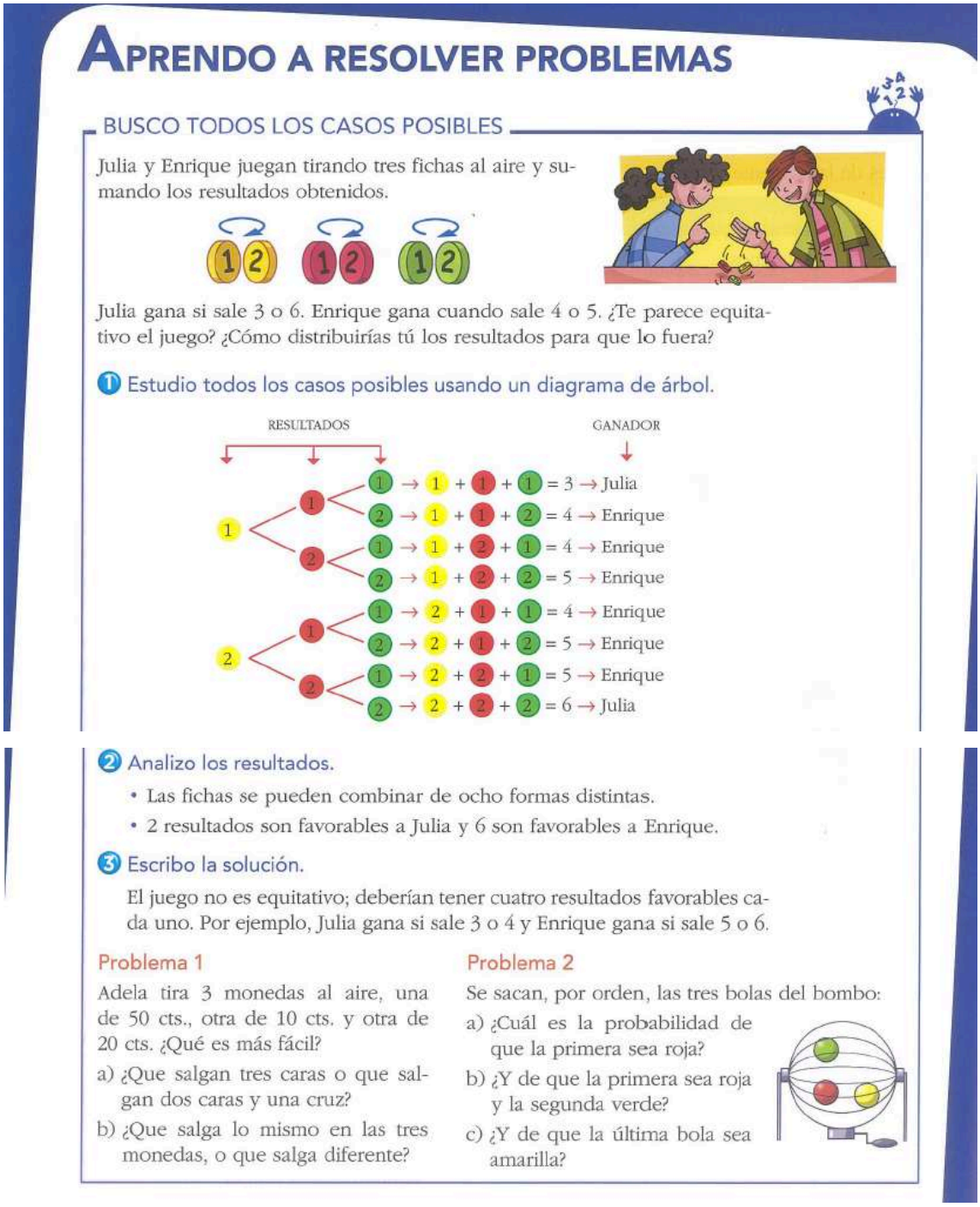
a) ¿Cuál es la probabilidad de que enceste en su próximo lanzamiento?

b) ¿Cuántos lanzamientos de cada diez encesta? ¿Y de cada cien?

c) ¿Qué porcentaje de acierto tiene?

d) Estima el porcentaje que tiene de fallar el lanzamiento.

Figura 4.39 Contenidos del Sexto Curso de Educación Primaria. Editorial Anaya



# APRENDO A RESOLVER PROBLEMAS

## BUSCO TODOS LOS CASOS POSIBLES

Julia y Enrique juegan tirando tres fichas al aire y sumando los resultados obtenidos.



Julia gana si sale 3 o 6. Enrique gana cuando sale 4 o 5. ¿Te parece equitativo el juego? ¿Cómo distribuirías tú los resultados para que lo fuera?

**1** Estudio todos los casos posibles usando un diagrama de árbol.



**2** Analizo los resultados.

- Las fichas se pueden combinar de ocho formas distintas.
- 2 resultados son favorables a Julia y 6 son favorables a Enrique.

**3** Escribo la solución.

El juego no es equitativo; deberían tener cuatro resultados favorables cada uno. Por ejemplo, Julia gana si sale 3 o 4 y Enrique gana si sale 5 o 6.

### Problema 1

Adela tira 3 monedas al aire, una de 50 cts., otra de 10 cts. y otra de 20 cts. ¿Qué es más fácil?

a) ¿Que salgan tres caras o que salgan dos caras y una cruz?

b) ¿Que salga lo mismo en las tres monedas, o que salga diferente?

### Problema 2

Se sacan, por orden, las tres bolas del bombo:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera sea roja?

b) ¿Y de que la primera sea roja y la segunda verde?

c) ¿Y de que la última bola sea amarilla?

Figura 4.40 Contenidos del Sexto Curso de Educación Primaria. Editorial Anaya

Editorial Santillana

En los dos cursos en los que se compone esta etapa se trabaja la Probabilidad.

Quinto Curso

## Más probable y menos probable

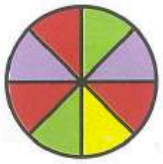
Lorena va a extraer una bola al azar, sin mirar.
No sabe de qué color será.

- Hay más bolas rojas que amarillas.
  Es **más probable que** la bola salga de color rojo que amarillo.
- Hay menos bolas azules que moradas.
  Es **menos probable que** salga de color azul que morado.
- Hay el mismo número de bolas verdes que amarillas.
  Es **igual de probable que** salga de color verde que amarillo.
- El color rojo es el **más probable** ya que es el más numeroso. El **menos probable** es el azul.



**1** **Observa cada situación y escribe cada frase en tu cuaderno completándola con la expresión adecuada.**

más probable | igual de probable | menos probable



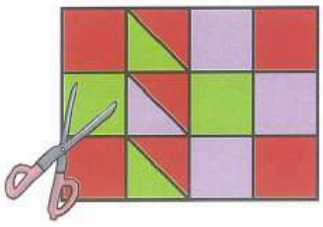
- Salir el color rojo es ... que salir el color verde.
- Salir el color verde es ... que salir el color morado.
- Salir el color amarillo es ... que salir el color morado.
- El color amarillo es el color ... y el rojo es el color ...



- Sacar una ficha azul es ... que sacarla amarilla.
- Sacar una ficha amarilla es ... que sacarla roja.
- Sacar una ficha azul es el suceso ...
- Sacar una ficha amarilla es el suceso ...

**2** **Observa y contesta.**

Marcos ha hecho un dibujo y ha recortado todas las piezas.
Las ha metido todas en una bolsa y va a coger una de ellas sin mirar.

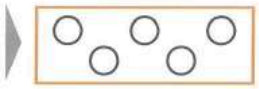


- ¿Qué es más probable, coger un cuadrado verde o uno morado?
- ¿Qué es menos probable, coger un triángulo verde o uno morado?
- ¿Qué es más probable, coger un triángulo rojo o un cuadrado verde?
- ¿Qué color es más probable coger?
- ¿Qué polígono es menos probable coger?

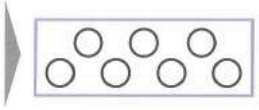
Figura 4.41 Contenidos del Quinto Curso de Educación Primaria. Editorial Santillana

**3** **Calca en tu cuaderno y colorea los círculos para que se cumplan las condiciones dadas en cada caso.**

- Hay bolas verdes y bolas rojas.
- Coger una bola roja es más probable que coger una verde.



- Hay bolas de color verde, rojo, azul y amarillo.
- Si se saca una bola, es igual de probable que salga de color rojo que de color azul.
- El color más probable de sacar es el verde.





## Problemas

**4** **Piensa y contesta.**

Pablo, Jon y Angie están en un concurso de televisión. Hay tres cajas, todas con 10 premios. Cada uno debe elegir una caja y sacar un premio sin mirar.






- A Pablo le gustaría sacar una tableta. ¿Qué caja debería elegir? ¿Por qué? Obtendrá la tableta seguro?
- Jon prefiere un teléfono móvil. ¿Qué caja debe elegir? ¿Por qué? ¿Logrará obtener el móvil?
- Angie prefiere una cámara de fotos. ¿Qué caja debería elegir? ¿Por qué? ¿Conseguirá la cámara?
- ¿En qué caja es menos probable sacar un móvil? ¿Y sacar una cámara? ¿En qué cajas es menos probable sacar una tableta?

Figura 4.42 Contenidos del Quinto Curso de Educación Primaria. Editorial Santillana

# Probabilidad

Mirta va a girar el bombo y sacar una bola.
¿Cuál es la probabilidad de que sea verde?





Observa que en el bombo hay 8 bolas y 4 de ellas son verdes.

La **probabilidad** de que salga una bola verde es $\frac{4}{8}$.

$\frac{4}{8}$ ← Número de bolas verdes
$\frac{4}{8}$ ← Número total de bolas

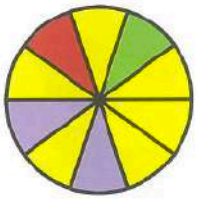
Fíjate en cuál es la probabilidad de que salga una bola de otro color:

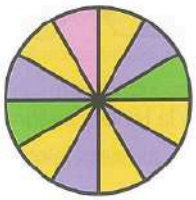
Probabilidad de que salga una bola amarilla ▶ $\frac{3}{8}$ ← Número de bolas amarillas / Número total de bolas

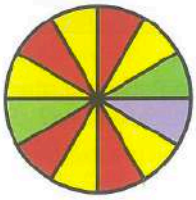
Probabilidad de que salga una bola roja ▶ $\frac{1}{8}$ ← Número de bolas rojas / Número total de bolas

El color con mayor probabilidad de salir es el verde, ya que $\frac{4}{8} > \frac{3}{8} > \frac{1}{8}$.

**1** **Observa las ruletas y escribe en tu cuaderno para cada una la probabilidad de que salga cada color.**







**2** **Piensa y contesta.**

- ¿Cuál es el mayor valor que puede tener una probabilidad? ¿Por qué?
- En un bombo hay bolas rojas, verdes y azules. En total hay 7 bolas. La probabilidad de salir una bola roja es dos séptimos y la de salir una bola verde es cuatro séptimos. ¿Cuál será la probabilidad de salir una bola azul?
- En una bolsa hay 15 caramelos, de menta y de otros sabores. La probabilidad de sacar un caramelo de menta es ocho quinceavos. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un caramelo que no sea de menta?

**3** **Calca y colorea las bolas que hay en la bolsa para que todas las frases sean ciertas.**

- Hay bolas verdes, azules y rojas.
- La probabilidad de sacar una bola verde es $\frac{3}{5}$.

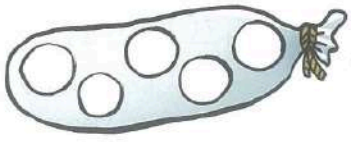


Figura 4.43 Contenidos del Quinto Curso de Educación Primaria. Editorial Santillana

**4** **Calcula cada probabilidad al lanzar un dado.**

**HAZLO ASÍ**

Sacar un número mayor que 2.

- Resultados posibles: 1, 2, 3, 4, 5 y 6 ▶ Hay 6.
- Resultados mayores que 2: 3, 4, 5 y 6 ▶ Hay 4.

Probabilidad: $\frac{4}{6}$ ← Resultados mayores que 2 / ← Resultados posibles

- Sacar un número menor que 4.
- Sacar un número mayor que 5.
- Sacar un número impar.
- Sacar un número par.
- Sacar un 1 o un 3.
- Sacar 1, 4, 5 o 6.

**SABER MÁS**

Si lanzas tres monedas, ¿cuál es la probabilidad de sacar solo 2 caras?

**5** **Resuelve.**

- Marta y Pablo tienen cada uno una baraja española. Sacan una carta al azar. Ella gana si sale una carta de oros y él gana si sale una carta que sea una figura. ¿Cuál es la probabilidad de que gane cada uno? ¿Y de que ganen los dos?
- En una bolsa hay 170 golosinas de zumo de frutas. Si se elige una golosina al azar, halla la probabilidad de que:
  - Sea una gominola.
  - Sea de fresa.
  - No sea de limón.
  - No sea una nube.
  - Sea de fresa o limón.
  - Sea un palito o una nube.
  - No sea palito ni nube.
  - No sea palito ni de fresa.

  ¿Cuál es la golosina que es más probable sacar? ¿Y la menos probable?



**GOLOSINAS**

65 gominolas de fresa
25 palitos de naranja
15 gominolas de limón
35 nubes de fresa
30 nubes de limón

**Razonamiento**

**Piensa y razona cuántas bolas hay de cada color.**

En una bolsa hay 9 bolas. Tenemos bolas rojas, amarillas y azules. Si sacamos una bola al azar:

- La probabilidad de que no sea roja es $\frac{4}{9}$.
- La probabilidad de que no sea amarilla es $\frac{6}{9}$.
- La probabilidad de que sea azul es $\frac{1}{9}$.



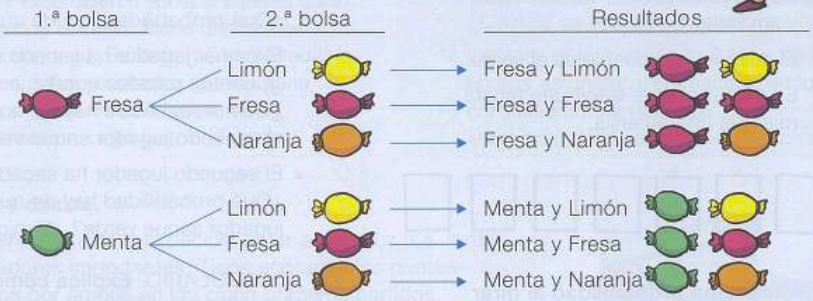
Figura 4.44 Contenidos del Quinto Curso de Educación Primaria. Editorial Santillana

## Hacer un diagrama de árbol



Paula tiene dos bolsas. En la primera bolsa tiene 1 caramelo de fresa y 1 de menta, y en la segunda bolsa tiene 1 caramelo de limón, 1 de fresa y 1 de naranja.
Saca sin mirar un caramelo de cada bolsa.
¿Cuál es la probabilidad de que solo uno sea de fresa?

▶ Vamos a realizar un diagrama de árbol para obtener, de forma organizada y sin olvidar ninguno, todos los posibles resultados. Después, calculamos la probabilidad que buscamos dividiendo el número de resultados en los que salga un solo caramelo de fresa entre el número total de resultados.




Hay 6 resultados posibles y 3 resultados en los que saldría un solo caramelo de fresa: fresa – limón, fresa – naranja y menta – fresa.

**Solución:** La probabilidad de que solo un caramelo sea de fresa es $\frac{3}{6}$.

**Resuelve estos problemas realizando un diagrama de árbol para no olvidar ningún resultado posible.**

**1** En la situación anterior, calcula la probabilidad de que Paula:
- Saque algún caramelo de fresa.
- Saque algún caramelo de naranja.
- No saque un caramelo de menta.
- No saque un caramelo de limón ni de naranja.

**2** Marcela ha ido a comer a un restaurante. En el menú, de primer plato puede elegir entre sopa, pasta o ensalada, y de segundo puede tomar filete de ternera, salmón o pechuga de pollo.
- ¿Entre cuántos menús posibles puede elegir Marcela?
- Si eligiera un menú al azar, ¿qué probabilidad habría de que tomase pasta? ¿Y de que no tomase ni sopa ni salmón?

**3** INVENTA. Escribe un problema similar a los de esta página en el que sea útil hacer un diagrama de árbol.

Figura 4.45 Contenidos del Quinto Curso de Educación Primaria. Editorial Santillana

Sexto Curso

## Probabilidad

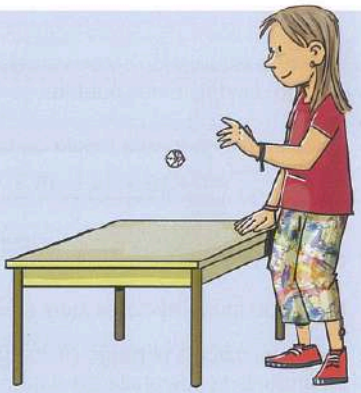
Estrella tiene un dado y lo lanza.
¿Cuál es la probabilidad de que el número obtenido sea menor que 5?

El resultado al lanzar un dado depende del azar. No podemos saber qué resultado concreto saldrá, pero sí saber, para cada resultado, la probabilidad de que ocurra.

La **probabilidad** es el cociente entre el número de casos favorables y el número de casos posibles.

Casos favorables: 1, 2, 3, 4

Casos posibles: 1, 2, 3, 4, 5, 6



Probabilidad de sacar un número menor que 5 ▸ $\frac{4}{6}$ ← Casos menores que 5 / ← Casos posibles

La probabilidad de sacar un número menor que 5 es $\frac{4}{6}$.

**1** **Calcula y escribe para cada caso la probabilidad correspondiente.**

Manuel saca una fruta al azar.

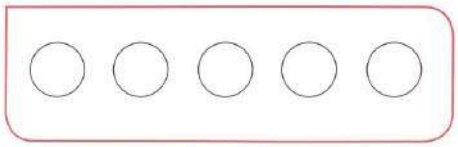


- Sacar una manzana roja.
- Sacar una naranja.
- Sacar una pera.
- Sacar una manzana.
- Sacar una fruta de color verde.

¿Qué fruta es más probable obtener: manzana, naranja o pera?
¿Cuál es la menos probable?

**2** **Calca en tu cuaderno y colorea para que las oraciones sean ciertas.**

- Hay bolas verdes, azules y rojas.
- La probabilidad de sacar bola verde y azul es la misma.
- Sacar bola roja es lo menos probable.



- Hay bolas verdes, azules y rojas.
- La probabilidad de sacar bola roja es mayor que un medio.
- Sacar bola verde es el doble de probable que sacar bola azul.

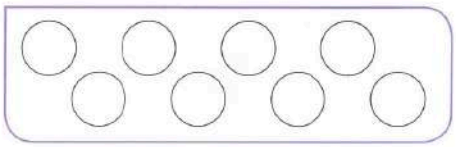


Figura 4.46 Contenidos del Sexto Curso de Educación Primaria. Editorial Santillana

**3** **Calcula cada probabilidad al sacar al azar una carta de una baraja española.**

- Un rey o un as.
- Un caballo que no sea de bastos.
- Un 3, un 4 o un 5.
- Un as, un tres o un rey que sean de oros o copas.
- Una figura que no sea de espadas.

**EJEMPLO** Un rey o un as
Casos favorables: 4 reyes y 4 ases, 8 en total
Casos posibles: 40 (n.º de cartas)
Probabilidad de un rey o un as: $\frac{8}{40}$

**SABER MÁS**

Un dado tiene 4 caras con 2 puntos, 1 cara con 1 punto y 1 cara con 3 puntos.

Halla la probabilidad de que al lanzarlo salga:

- Un 2.
- Un número par.
- Un 1 o un 2.

**4** **Resuelve.**

- Maite lanza 3 monedas diferentes. ¿Qué es más probable: sacar al menos una cara o sacar dos cruces?
- Pedro y Bruno tienen una bolsa con tarjetas numeradas del 1 al 20. Sacan un número al azar. Gana Pedro si sale un divisor de 20 y gana Bruno si sale un número par mayor que 10.
  - ¿Es un juego justo? ¿Por qué?
  - ¿Qué probabilidad hay de que ganen los dos? ¿Y de que no gane ninguno?
- En un espectáculo de magia hay 215 asistentes. Si se elige un espectador al azar, halla la probabilidad de que:
  - Sea niño o niña.
  - Sea de sexo femenino.
  - No sea un hombre.
  - No sea chico o chica joven.
  - Sea adulto.
  - No sea hombre ni joven.



ESPECTADORES

70 niños
65 niñas
20 chicos jóvenes
15 chicas jóvenes
30 mujeres
15 hombres

**Razonamiento**

**Piensa y contesta.**

En un grupo de 16 personas que tienen mascota, la probabilidad de elegir a una persona que tenga un perro es $\frac{10}{16}$ y la probabilidad de elegir una que tenga un gato es $\frac{8}{16}$. ¿Cómo es eso posible?



Figura 4.47 Contenidos del Sexto Curso de Educación Primaria. Editorial Santillana

## 4.3.2.5 CONTENIDOS DE LOS LIBROS DE TEXTO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

## EDITORIALES: ANAYA Y SANTILLANA

1.º ESO

Editorial Anaya



5 Sucesos aleatorios. Probabilidad

Los resultados de las siguientes experiencias dependen del azar:

— Lanzar una moneda o un dado.

— Tirar un penalti.

— Observar la climatología.

Todos ellos son *sucesos aleatorios*.

**Sucesos aleatorios** son los acontecimientos cuya realización (el que ocurran o no) depende del azar.

Probabilidad

- Un futbolista va a tirar un penalti. ¿Conseguirá meter gol? Según a qué jugador nos refiramos, el suceso "marcar gol" es *poco probable, medianamente probable, muy probable…*
- ¿Lloverá mañana? Si lo preguntamos en Galicia un día lluvioso de invierno, el suceso es *muy probable*. Si lo preguntamos en Almería un día de verano, el suceso es *muy poco probable*.
- Que salga "cara" o "cruz" al lanzar una moneda son sucesos *igualmente probables*. También son igualmente probables los sucesos 1, 2, 3, 4, 5 y 6 al lanzar un dado correcto.

La **probabilidad** de un suceso es el grado de confianza que podemos tener en que ocurra.

Piensa y practica

1. Utiliza acontecimientos climáticos (lluvia, nieve, granizo…) en distintos lugares para describir:

   a) Un suceso *muy probable*.

   b) Otro *medianamente probable*.

   c) Otro *muy improbable*.

2. ¿A qué crees que se llama **suceso imposible**? ¿Y **suceso seguro**? Pon un ejemplo de cada uno.

3. Echamos en una bolsa dos puñados de bolas rojas, diez puñados de bolas azules y una bola verde.

   Nos disponemos a sacar una bola al azar. Indica en tu cuaderno qué probabilidad asignas a cada suceso (color de la bola que vamos a sacar).

IMPOSIBLE
MUY POCO PROBABLE
POCO PROBABLE
MUY PROBABLE

Figura 4.48 Contenidos del Primer Curso de Educación Secundaria. Editorial Anaya

## Cómo se mide la probabilidad

- MONEDA. Es igualmente probable que salga cara o cruz. Por eso asignamos la misma probabilidad, 1/2, a cada uno de los dos casos.

$$P[\text{cara}] = \frac{1}{2} \qquad P[\text{cruz}] = \frac{1}{2}$$

- DADO. Si es correcto, las seis caras tienen la misma probabilidad. Por tanto:

$$P[1] = \frac{1}{6} \quad P[2] = \frac{1}{6} \quad P[3] = \frac{1}{6} \quad P[6] = \frac{1}{6}$$

- PENALTI. Es claro que no son igualmente probables los sucesos "marca gol" y "falla". ¿Cómo asignarles probabilidades? A partir de su frecuencia relativa.

Supongamos que nos dicen que Quino ha tirado 400 penaltis de los cuales ha marcado 360. Entonces diremos que la probabilidad de que Quino marque un penalti es aproximadamente igual a 360/400 = 0,90.

$$P[\text{QUINO MARQUE UN PENALTI}] = \frac{360}{400} = 0{,}90$$

**Recuerda**

Se llama **frecuencia relativa** de un suceso a la proporción de veces que ocurre. La frecuencia de los sucesos "gol" y "fallo" en los penaltis de Quino son:

$f[\text{GOL}] = 360$, $f[\text{FALLO}] = 40$

Como ha tirado 400 penaltis, las frecuencias relativas son:

$$f_r[\text{GOL}] = \frac{360}{400} = 0{,}90$$

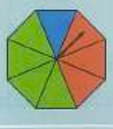
$$f_r[\text{FALLO}] = \frac{40}{400} = 0{,}10$$

Los sucesos que se obtienen directamente al efectuar una experiencia aleatoria (cara, cruz; 1, 2, ...; gol, no gol) se llaman casos.

- Si la experiencia aleatoria es **regular** (dado, moneda, ruleta...), todos los casos tienen la misma probabilidad y, por tanto, la probabilidad de un suceso se calcula viendo cuántos casos tiene.
- Si la experiencia aleatoria es **irregular**, los casos no son equiprobables. Para averiguar la probabilidad de un suceso, recurrimos a los resultados previos: diremos que la probabilidad del suceso es, aproximadamente, igual a su frecuencia relativa observada.

## Problemas resueltos

**1.** ***Al girar esta ruleta, ¿cuál es la probabilidad de cada color?***



Hay ocho posiciones iguales. La probabilidad de cada una es 1/8.

$$P[\text{AZUL}] = \frac{1}{8}$$

Hay tres posiciones rojas. Por tanto: $P[\text{ROJO}] = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$.

$$P[\text{VERDE}] = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

**2.** ***Lanzamos una chincheta 100 veces sobre la mesa, obteniendo 70 veces y 30 veces .***

***¿Qué probabilidad asignamos a cada posición?***

Las frecuencias relativas de los dos sucesos son:

$$f_r[\text{apoyo}] = \frac{70}{100} = 0{,}7 \qquad f_r[\text{punta}] = \frac{30}{100} = 0{,}3$$

Por tanto, asignamos las probabilidades así:

$$P[\text{apoyo}] \approx 0{,}7 \qquad P[\text{punta}] \approx 0{,}3$$

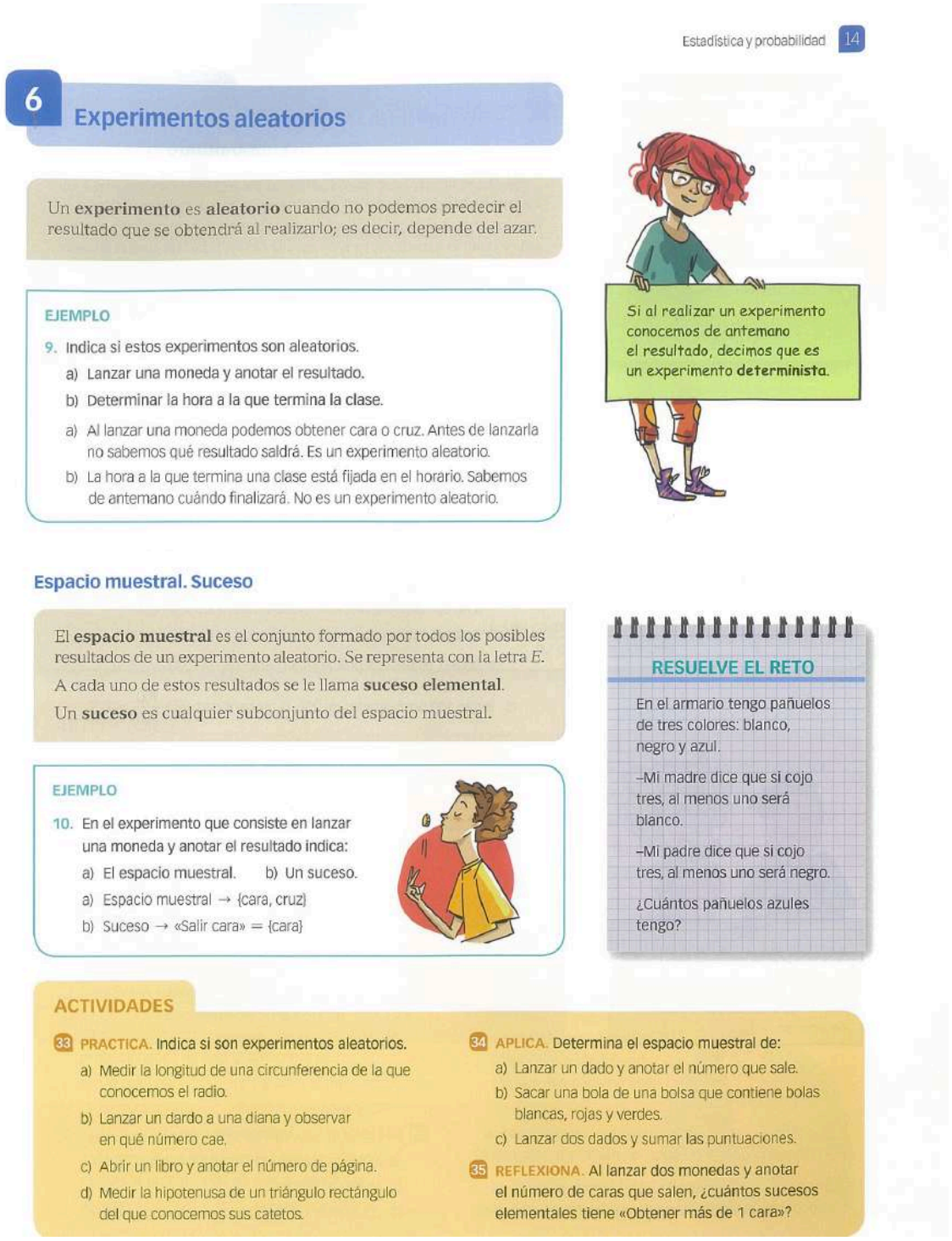
## Piensa y practica

**4.** En una bolsa hay 3 bolas rojas, 2 verdes, 1 azul y 4 amarillas, todas del mismo tamaño. ¿Cuál es la probabilidad de cada color?

**5.** Salva ha lanzado, en lo que va de temporada, 340 veces a canasta, y ha encestado 110. ¿Cuál es su probabilidad de encestar en un nuevo intento?

Figura 4.49 Contenidos del Primer Curso de Educación Secundaria. Editorial Anaya

Editorial Santillana



Estadística y probabilidad 14

6 Experimentos aleatorios

Un **experimento** es **aleatorio** cuando no podemos predecir el resultado que se obtendrá al realizarlo; es decir, depende del azar.

EJEMPLO

9. Indica si estos experimentos son aleatorios.
   a) Lanzar una moneda y anotar el resultado.
   b) Determinar la hora a la que termina la clase.

   a) Al lanzar una moneda podemos obtener cara o cruz. Antes de lanzarla no sabemos qué resultado saldrá. Es un experimento aleatorio.
   b) La hora a la que termina una clase está fijada en el horario. Sabemos de antemano cuándo finalizará. No es un experimento aleatorio.

Si al realizar un experimento conocemos de antemano el resultado, decimos que es un experimento **determinista**.

Espacio muestral. Suceso

El **espacio muestral** es el conjunto formado por todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. Se representa con la letra *E*.

A cada uno de estos resultados se le llama **suceso elemental**.

Un **suceso** es cualquier subconjunto del espacio muestral.

EJEMPLO

10. En el experimento que consiste en lanzar una moneda y anotar el resultado indica:
    a) El espacio muestral. b) Un suceso.

    a) Espacio muestral → {cara, cruz}
    b) Suceso → «Salir cara» = {cara}

RESUELVE EL RETO

En el armario tengo pañuelos de tres colores: blanco, negro y azul.

–Mi madre dice que si cojo tres, al menos uno será blanco.

–Mi padre dice que si cojo tres, al menos uno será negro.

¿Cuántos pañuelos azules tengo?

ACTIVIDADES

33 PRACTICA. Indica si son experimentos aleatorios.
   a) Medir la longitud de una circunferencia de la que conocemos el radio.
   b) Lanzar un dardo a una diana y observar en qué número cae.
   c) Abrir un libro y anotar el número de página.
   d) Medir la hipotenusa de un triángulo rectángulo del que conocemos sus catetos.

34 APLICA. Determina el espacio muestral de:
   a) Lanzar un dado y anotar el número que sale.
   b) Sacar una bola de una bolsa que contiene bolas blancas, rojas y verdes.
   c) Lanzar dos dados y sumar las puntuaciones.

35 REFLEXIONA. Al lanzar dos monedas y anotar el número de caras que salen, ¿cuántos sucesos elementales tiene «Obtener más de 1 cara»?

Figura 4.50 Contenidos del Primer Curso de Educación Secundaria. Editorial Santillana

# 7 Probabilidad. Regla de Laplace

La **probabilidad**, $P$, de un suceso indica la posibilidad de que este ocurra. La probabilidad es un número comprendido entre 0 y 1, y cuanto mayor es, mayor será la posibilidad de que el suceso ocurra.

**SE ESCRIBE ASÍ**

$P(A)$ → Probabilidad del suceso $A$.

**EJEMPLO**

**11.** Para conseguir dinero para un viaje de fin de curso se ha organizado un sorteo. Se venderán 200 papeletas y solo habrá un número ganador.

a) Si compro todas las papeletas, ¿qué probabilidad tengo de ganar el sorteo? ¿Y si no compro ninguna?

b) ¿Qué probabilidad tengo si compro una?

c) ¿Y si compro 100 papeletas?

a) Si compro todas las papeletas es seguro que tendré el número ganador. Por tanto, la probabilidad es 1.

Y si no compro ninguna, es imposible. La probabilidad es 0.

b) Si compro 1 papeleta, tengo 1 posibilidad entre 200 de ganar el sorteo; es decir, la probabilidad será $\frac{1}{200} = 0{,}005$.

c) Tengo 100 posibilidades de 200, la probabilidad será $\frac{100}{200} = 0{,}5$.

**RESUELVE EL RETO**

¿Cuántas veces hay que tirar un dado para asegurar que se repite un resultado?



Antes de aplicar la regla de Laplace hay que comprobar que todos los sucesos elementales tienen las mismas posibilidades de ocurrir.

## Regla de Laplace

La regla de Laplace calcula las probabilidades en experimentos aleatorios en los que sus sucesos elementales tienen igual posibilidad de ocurrir.

**Regla de Laplace:** La probabilidad de un suceso es igual al cociente entre el número de resultados favorables al suceso y el número total de resultados posibles.

$$P(A) = \frac{\text{n.º de casos favorables al suceso } A}{\text{n.º de casos posibles}}$$

**ACTIVIDADES**

**36** PRACTICA. ¿Qué probabilidad hay de sacar un 9 al tirar un dado? ¿Y de sacar un número menor que 9?

**37** APLICA. ¿Qué probabilidad hay de sacar el rey de copas al sacar una carta de una baraja de 40 cartas?

**38** REFLEXIONA. Si tiramos una moneda:

a) ¿Cuál es la probabilidad de sacar cara?

b) ¿Y de sacar cruz?

c) ¿Cuál es la probabilidad de sacar cara o cruz?

Figura 4.51 Contenidos del Primer Curso de Educación Secundaria. Editorial Santillana

**SABER HACER**

## Calcular probabilidades utilizando la regla de Laplace

**Un experimento consiste en lanzar un dado y anotar el resultado obtenido. Calcula la probabilidad de estos sucesos.**

**$A$ = «Salir número par»  $B$ = «Salir número menor que 3»**

Hay experimentos en los que no se puede aplicar la regla de Laplace.

Si tiramos una chincheta y observamos la posición en la que cae, tenemos dos sucesos elementales: que caiga con el pincho hacia arriba o hacia abajo.

Es más posible que la chincheta caiga con el pincho hacia arriba, por tanto sus sucesos elementales no tienen la misma posibilidad de ocurrir.

**Pasos a seguir**

1. Determinamos el espacio muestral y los sucesos de los que se quiere calcular la probabilidad.

El espacio muestral es:

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow$ N.º de casos posibles $= 6$

Los sucesos pedidos son:

$A = \{2, 4, 6\} \rightarrow$ N.º de casos favorables $= 3$

$B = \{1, 2\} \rightarrow$ N.º de casos favorables $= 2$

2. Para poder usar la regla de Laplace, comprobamos que todos los sucesos elementales tienen las mismas posibilidades de ocurrir.

Si el dado no está trucado, todas las caras tienen las mismas posibilidades de salir.

3. Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(A) = \frac{\text{n.º de casos favorables al suceso } A}{\text{n.º de casos posibles}} = \frac{3}{6} = 0{,}5$$

$$P(B) = \frac{\text{n.º de casos favorables al suceso } B}{\text{n.º de casos posibles}} = \frac{2}{6} = 0{,}33$$

**ACTIVIDADES**

**39** Un cómic tiene 52 páginas. Abrimos el cómic por una página al azar y observamos su numeración. Calcula las probabilidades de que la página sea:

a) La página 12.
b) La página 62.
c) Un número mayor que 45.
d) Un número menor que 60.
e) Un número entre 10 y 30, ambos incluidos.
f) Un número par.

**40** Natalia tiene una caja de chinchetas de colores. Hay 12 de color azul, 15 de color verde, 8 de color rojo y 10 de color amarillo. Escoge una al azar. Calcula las probabilidades de que la chincheta sea:

a) De color rojo.
b) De color blanco.
c) De color verde o azul.
d) No sea de color verde.

**41** Pedro tiene en la nevera 6 refrescos de cola, 4 de naranja y 8 de limón. Si elige uno sin mirar, calcula la probabilidad de que su sabor sea:

a) Limón.
b) Naranja o limón.

**42** Los resultados de un examen de Matemáticas son:

- 3 alumnos han obtenido sobresaliente.
- 12 han obtenido suficiente.
- 6 alumnos han suspendido el examen.
- Y el resto han obtenido notable.

Elegido un alumno de los 26, calcula la probabilidad de que haya suspendido el examen.

**43** En un hospital trabajan 450 personas: 156 médicos, 164 enfermeros, 15 celadores, 68 auxiliares y el resto, personal de administración. Se elige un trabajador al azar de este hospital. Calcula la probabilidad de que esa persona sea:

a) Médico.
b) Enfermero.
c) Personal de administración.
d) Celador o auxiliar.



Figura 4.52 Contenidos del Primer Curso de Educación Secundaria. Editorial Santillana

2.º ESO

Editorial Anaya

# 1 Sucesos aleatorios

**¿Dependen del azar?**

¿Encestar un balón depende del azar?

Pues sí, por bueno que sea el jugador, siempre hay algo de suerte en el resultado.

¿Y la nota de un examen?

Bien lo sabes, por mucho que se haya estudiado, siempre hay un punto de suerte.

Los resultados de las siguientes experiencias dependen del azar:

— Echar un dado sobre la mesa.

— Lanzar un balón a canasta.

— Comprobar si lloverá a lo largo del día.

— Realizar un examen y ver qué nota se saca.

Estos acontecimientos que dependen del azar se llaman *sucesos aleatorios*.

Para analizar cómo se comporta el azar, podemos realizar *experiencias aleatorias*; es decir, experimentos cuyos resultados dependen del azar. Por ejemplo:

- Lanzar una moneda.



- Lanzar tres monedas y observar cuántas caras salen.



- Arrojar un dado y anotar el número que sale.



- En qué color para la aguja en esta ruleta.



- ¿Lloverá mañana?
- ¿Cuántos días lloverá la próxima semana?



- **Suceso aleatorio** es un acontecimiento en cuya realización influye el azar.
- **Experiencia aleatoria** es aquella cuyo resultado depende del azar.

**Piensa y practica**

1. En cada una de las experiencias descritas arriba, di cuáles son todos los posibles resultados que se pueden obtener.

Por ejemplo:

a) Lanzar una moneda: C y +

b) ¿Cuántas caras al lanzar tres monedas? 0, 1, 2, 3

Sigue tú:

c) Resultado al lanzar un dado.

d) Color del sector que señala la flecha en la ruleta de colores.

e) ¿Lloverá mañana?

f) ¿Cuántos días lloverá la semana que viene?

Figura 4.53 Contenidos del Segundo Curso de Educación Secundaria. Editorial Anaya

## Espacio muestral

Cada uno de los resultados que pueden obtenerse al realizar una experiencia aleatoria se llama **caso.**

La experiencia aleatoria "tirar una moneda" consta de dos casos: C y +.

El "número de caras al tirar 3 monedas" tiene 4 casos: 0, 1, 2 y 3.

En el "lanzamiento de un dado normal", los casos son: 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

El conjunto de todos los casos de una experiencia aleatoria se llama **espacio muestral.** Se suele designar con la letra $E$.

"Lanzamiento de una moneda" $\rightarrow E = \{C, +\}$

"Número de caras al tirar 3 monedas" $\rightarrow E = \{0, 1, 2, 3\}$

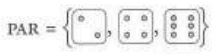
"Lanzamiento de un dado normal" $\rightarrow E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

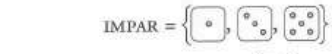
Un **suceso** es un subconjunto extraído del espacio muestral.

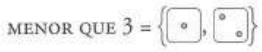
Los casos también son sucesos. Se llaman **sucesos individuales.**

El propio espacio muestral es el suceso total o **suceso seguro.**

Por ejemplo, al lanzar un dado podemos considerar, entre otros, los siguientes sucesos:

PAR = 

IMPAR = 

MENOR QUE 3 = 

MAYOR QUE 5 = 

## Ejercicio resuelto

***En la experiencia de la ruleta, decir cuál es el espacio muestral y decir algunos sucesos.***



La flecha puede caer en rojo (R), azul (Az), amarillo (Am) o verde (V). Esos son los casos en esta experiencia.

El espacio muestral es: $E = \{R, Az, Am, V\}$

Algunos sucesos:

— Ni ROJO ni AZUL = {V, Am}

— No AMARILLO = {R, Az, V}

— Colores de la bandera de España = {R, Am}

— El suceso seguro es $E = \{R, Az, Am, V\}$.

## Piensa y practica

**2.** En una caja echamos 10 fichas numeradas:




La experiencia consiste en extraer, al azar, una ficha y anotar el número obtenido.

a) ¿Cuáles son los casos?

b) Escribe el espacio muestral.

c) Escribe los siguientes sucesos:

— "Mayor que 1"

— "Impar"

— "Par"

— Suceso seguro

Figura 4.54 Contenidos del Segundo Curso de Educación Secundaria. Editorial Anaya

# 2 Probabilidad de un suceso

El azar no es tan caprichoso como parece. Los sucesos que dependen del azar (sucesos aleatorios) ocurren con mayor o menor facilidad, es decir, con mayor o menor probabilidad. Y esta probabilidad se puede medir.

La **probabilidad de un suceso aleatorio** es el grado de confianza que podemos tener en que ese suceso ocurra. Se expresa mediante un número comprendido entre 0 y 1.

Para designar la probabilidad de un suceso, $S$, ponemos $P[S]$.

- Si $P[S]$ es **próxima a cero,** el suceso es **poco probable.**
- Si $P[S]$ es **próxima a uno,** el suceso es **muy probable.**

Cuando decimos que la probabilidad de un suceso $S$ es 1/2, $P[S] = 1/2$, queremos decir que, por término medio, ocurre la mitad de las veces que se realiza la experiencia.



Por ejemplo, si extraemos al azar una bola de la urna del margen, podemos decir...

- ... que la bola sea roja es muy probable.
- ... que la bola sea azul es muy poco probable.
- ... que la bola sea amarilla es imposible (en este caso, la probabilidad es 0).
- ... que la bola sea esférica es seguro (en este caso, la probabilidad es 1).

## Ejercicio resuelto

***Indicar con IMPOSIBLE, POCO PROBABLE, MUY PROBABLE o SEGURO lo que corresponda en cada uno de los siguientes sucesos:***

***a) Sacar el as de copas de una baraja.***

***b) Obtener un número mayor que uno al lanzar un dado.***

***c) Obtener cara o cruz al tirar una moneda.***

***d) Que te salga un 0 en el dado.***

a) Al extraer una carta de una baraja, es POCO PROBABLE sacar el as de copas, ya que hay muchas cartas y solo una de ellas es el as de copas.

b) Si lanzas un dado, puedes obtener 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Por tanto, es MUY PROBABLE que salga un número mayor que 1; es decir, 2, 3, 4, 5 o 6.

c) Si tiras una moneda, sale cara o cruz; por tanto, es SEGURO que sale una de las dos.

d) Ya sabemos que en un dado nunca puede salir un 0; por tanto, el suceso es IMPOSIBLE.

## Piensa y practica

**1.** En la ruleta de la derecha, hacemos girar la flecha y nos fijamos en qué color señala.



Responde a las probabilidades pedidas con las palabras SEGURO, MUY PROBABLE, POCO PROBABLE O IMPOSIBLE:

a) ¿Cómo de probable es sacar rojo? ¿Y azul?

b) ¿Cómo de probable es que no sea amarillo?

c) ¿Cómo de probable es sacar verde?

Figura 4.55 Contenidos del Segundo Curso de Educación Secundaria. Editorial Anaya

**Medir probabilidades**

- Las dos caras de la moneda tienen la misma probabilidad de salir.





- Ignoramos cuál es la probabilidad de cada una de estas dos posiciones. Solo podemos averiguarlas experimentando.





## Dos formas de medir la probabilidad

Al lanzar una moneda, sabemos que, por ser igual por ambos lados, es igual de probable que ocurra CARA que CRUZ. Por eso, podemos asignar probabilidades sin necesidad de experimentar, y decimos que:

$$P[C] = \frac{1}{2} \qquad P[+] = \frac{1}{2}$$

Sin embargo, si se trata de una chincheta, desconocemos cómo de probable es que caiga así  o así  . ¿Cómo evaluar la probabilidad de estas dos posturas? Es imposible hacerlo si no experimentamos. Es decir, solo la experiencia nos puede informar sobre la probabilidad de que la chincheta caiga de un modo u otro.

Hay dos formas de medir la probabilidad de un suceso:

- Si la **experiencia** es **regular,** como en el caso de la moneda, se puede evaluar la probabilidad sin necesidad de experimentar. Se hará asignando la misma probabilidad a todos los casos que puedan darse.
- Si la **experiencia** es **irregular,** para asignar probabilidades es necesario experimentar.

## Asignación de probabilidades en experiencias irregulares

- Para asignar probabilidades a las dos posiciones en que puede caer una chincheta,  y  , solo podemos proceder mediante experimentación: la lanzamos muchas veces y obtenemos la frecuencia relativa de cada caso.

  Supongamos que la hemos lanzado 100 veces obteniendo 21  y 79  . Diremos que:

$$P\left[\text{  }\right] \approx \frac{21}{100} = 0{,}21 \qquad P\left[\text{  }\right] \approx \frac{79}{100} = 0{,}79$$

  Los resultados solo son aproximados. Si queremos que la estimación sea mejor, debemos aumentar el número de experiencias.

- Probabilidad de "tener un accidente". Aquí no se puede experimentar, pero sí observar, recoger datos y, así, obtener frecuencias relativas. Es lo que hacen las compañías de seguros.

  Por ejemplo, si de un total de 87 540 asegurados ha habido 2 123 que han tenido un accidente este año, la compañía deduce que:

$$P[\text{ACCIDENTE}] \approx \frac{2123}{87\,540} = 0{,}024$$

**Piensa y practica**

**2.** Explica por qué se puede asignar probabilidades a las seis caras de un dado correcto sin necesidad de probarlo.



**3.** Explica por qué es indispensable experimentar para conocer la probabilidad de cada una de las cuatro caras de la taba.



Figura 4.56 Contenidos del Segundo Curso de Educación Secundaria. Editorial Anaya

# 3 Asignación de probabilidades en experiencias regulares

Si lanzamos un dado perfecto, todas las caras tienen la misma probabilidad de salir. Por tanto, esperamos que cada una de ellas salga, por término medio, *una de cada seis veces*. Esto se expresa diciendo que su probabilidad es $\frac{1}{6}$.

Espacio muestral = {⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅}

**¿Y si el dado es imperfecto?**

Como hemos visto en la página anterior, si el dado es irregular, solo experimentando podremos averiguar algo de las probabilidades de sus caras.

Si el dado es perfecto:

$$P[⚀] = \frac{1}{6};\ P[⚁] = \frac{1}{6};\ \ldots;\ P[⚅] = \frac{1}{6}$$

Cuando una experiencia aleatoria se realiza con un **instrumento regular** (como un dado correcto), si el espacio muestral tiene $n$ casos, la **probabilidad** de cada uno de esos casos es $\frac{1}{n}$.

## Ejercicio resuelto

***Calcular la probabilidad de cada uno de los casos que se pueden dar en las siguientes experiencias aleatorias:***

***a) Extraer una bola de una bolsa que contiene 10 bolas idénticas numeradas del 0 al 9 y observar su número.***

***b) Elegir a un asegurado de una compañía de seguros de coches.***

***c) Elegir un día cualquiera de un año.***

a) El espacio muestral es el siguiente:

$$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Todas las bolas tienen la misma probabilidad de ser extraídas.

Como son 10, la probabilidad buscada es:

$$P[0] = P[1] = \ldots = P[9] = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

b) Si la compañía tiene, por ejemplo, 20 000 asegurados, la probabilidad de escoger a cada uno de ellos es $\frac{1}{20\,000}$.

c) Si el año es normal, la probabilidad de elegir un día concreto es $\frac{1}{365}$.

$$P[\text{27 de junio}] = \frac{1}{365}$$

Si el año es bisiesto: $P[\text{27 de junio}] = \frac{1}{366}$

## Piensa y practica

**1.** ¿Cuál es la probabilidad de extraer el 5 DE BASTOS de una baraja española? ¿Y el REY DE COPAS?



**2.** Si elegimos al azar una ficha de dominó, ¿cuál es la probabilidad de que sea el 6 DOBLE? (Recuerda que el dominó tiene 28 fichas).

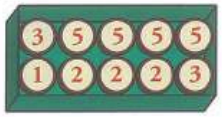
**3.** Giramos la flecha en esta ruleta de colores:



¿Cuál es la probabilidad de que caiga en el ROJO?

Figura 4.57 Contenidos del Segundo Curso de Educación Secundaria. Editorial Anaya

## Ley de Laplace




En un ejercicio propuesto del primer epígrafe de esta unidad, aparecía una caja con 10 fichas numeradas. Al sacar una de ellas al azar, parece lógico razonar así:

Por término medio…

- El 1 saldrá 1 de cada 10 veces. Por tanto, $P[1] = \frac{1}{10}$.
- El 2 saldrá 3 de cada 10 veces. Por tanto, $P[2] = \frac{3}{10}$.
- El 3 saldrá 2 de cada 10 veces. Por tanto, $P[3] = \frac{2}{10}$.
- El 5 saldrá 4 de cada 10 veces. Por tanto, $P[5] = \frac{4}{10}$.

Estos resultados se pueden generalizar así:

En una experiencia aleatoria con un instrumento regular, la probabilidad de un suceso, $S$, se obtiene así:

$$P[S] = \frac{\text{número de casos favorables a } S}{\text{número total de casos posibles}}$$

### Ejercicios resueltos

**1.** ***De una baraja de 40 naipes se extrae uno al azar.***

***a) Hallar la probabilidad de sacar REY.***

***b) Hallar la probabilidad de obtener COPAS.***

a) En la baraja hay 4 reyes de un total de 40 cartas. Por tanto:

$$P[\text{REY}] = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$$

b) Como hay 10 copas:

$$P[\text{COPAS}] = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

**2.** ***Hallar la probabilidad de que la flecha señale cada uno de los colores en la ruleta de la derecha.***



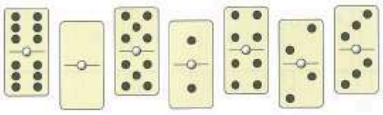
$P[\text{VERDE}] = \frac{3}{8}$ $\quad P[\text{AMARILLO}] = \frac{1}{8}$

$P[\text{ROJO}] = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ $\quad P[\text{AZUL}] = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

**3.** ***De una caja de fichas de dominó, sacamos una al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sea "doble"?***

En el juego del dominó hay 28 fichas, de las cuales 7 son "dobles". Por tanto:

$$P[\text{DOBLE}] = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$$



### Piensa y practica

**4.** Extraemos al azar una bola de esta urna. Calcula la probabilidad de que sea de cada uno de los colores.



**5.** Extraemos una carta de una baraja de 40. Halla la probabilidad de que sea:

a) Un AS. b) Una SOTA. c) Un ORO.

d) Un número menor que 5.

e) Una FIGURA (las figuras son SOTA, CABALLO y REY).

Figura 4.58 Contenidos del Segundo Curso de Educación Secundaria. Editorial Anaya

# 4 Algunas estrategias para el cálculo de probabilidades

**Diagrama en árbol**

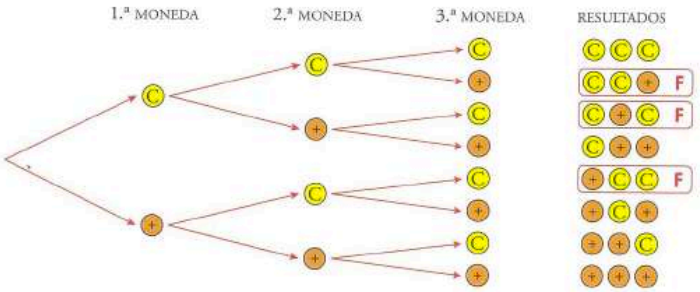
Para obtener sistemáticamente todos los casos que se pueden producir cuando repetimos una misma experiencia o cuando encadenamos varias experiencias distintas, es muy útil el diagrama en árbol.

## Diagrama en árbol para contar posibilidades

**Ejemplo**

*Lanzamos tres monedas. ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos caras?*

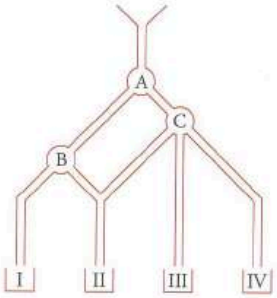
El siguiente esquema (diagrama en árbol) sirve para visualizar y contar todas las posibilidades:




Vemos que hay 8 casos, de los cuales 3 son favorables (F). Por tanto:

$$P[2 \text{ CARAS}] = \frac{\text{casos con 2 caras}}{\text{casos posibles}} = \frac{3}{8}$$

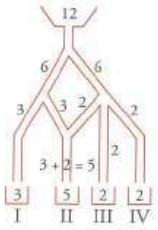
## Reparto de la probabilidad en una ramificación




**Ejemplo**

*Observa el aparato que ves en el margen. Si echamos un perdigón en el embudo de arriba, ¿cuál es la probabilidad de que caiga en el depósito II? (Suponemos que en cada ramificación el perdigón tiene la misma probabilidad de ir a cada ramal).*

Para resolver este problema, vamos a partir de un número de perdigones que, al llegar a cada distribuidor, se reparten de forma equitativa. Observa cómo se repartirían 12 perdigones:




Según esto, la probabilidad de que el perdigón caiga en el depósito II es: $P[\text{II}] = \frac{5}{12}$

Análogamente: $P[\text{I}] = \frac{3}{12}$, $P[\text{III}] = \frac{2}{12}$, $P[\text{IV}] = \frac{2}{12}$

¿Por qué hemos tomado 12 perdigones? Porque hay dos distribuidores con 2 salidas y uno con 3 ($2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$).

¿Qué pasaría si hubiéramos tomado 24 perdigones? Pues que se duplicarían los que caen en cada depósito y las probabilidades así obtenidas serían las mismas.

¿Y si tomáramos 16 perdigones? Al llegar al distribuidor C no se podrían repartir equitativamente y eso nos haría ver que esa cantidad (16) no es adecuada para resolver el problema.

Figura 4.59 Contenidos del Segundo Curso de Educación Secundaria. Editorial Anaya

## Tablas de contingencia

| | NACION. | EXTRAN. |
|---|---|---|
| TITULARES | 7 | 4 |
| SUPLENTES | 8 | 1 |

| | N | E | |
|---|---|---|---|
| TITULARES | 7 | 4 | 11 |
| SUPLENTES | 8 | 1 | 9 |
| | 15 | 5 | 20 |

**Ejemplo.** *La tabla del margen describe la composición de un equipo de fútbol. Si señalamos al azar a uno de los jugadores, hallar la probabilidad de que sea:*

*a) Titular* *b) Extranjero* *c) Nacional y suplente*

*d) ¿Cuál es la probabilidad de ser titular siendo extranjero?*

*e) ¿Cuál es la probabilidad de ser titular siendo nacional?*

Para resolverlo, ampliamos la tabla, en el margen, sumando filas y columnas.

a) De los 20 futbolistas, 11 son titulares. Por tanto, $P[\text{TITULAR}] = \frac{11}{20}$.

b) Hay 5 extranjeros. Por tanto, $P[\text{EXTRANJERO}] = \frac{5}{20}$.

c) Hay 8 nacionales suplentes. Por tanto, $P[\text{NACIONAL Y SUPLENTE}] = \frac{8}{20}$.

d) Hay 5 extranjeros y, de ellos, 4 titulares:

$$P[\text{TITULAR SIENDO EXTRANJERO}] = \frac{4}{5} = 0{,}80$$

e) Hay 15 nacionales y, de ellos, 7 titulares:

$$P[\text{TITULAR SIENDO NACIONAL}] = \frac{7}{15} = 0{,}47$$

## Ejercicios resueltos

**1.** ***A la reunión de antiguos alumnos han venido 32 mujeres y 28 hombres, de los cuales 19 tienen hijos. En total hay 31 personas sin hijos. Se toma una persona al azar. ¿Qué probabilidad hay de que sea mujer con hijos?***

Construimos una tabla (escribimos, en negrita, los datos que faltan):

| | MUJER | HOMBRE | |
|---|---|---|---|
| CON HIJOS | (32 – 22) **10** | 19 | (19 + 10) **29** |
| SIN HIJOS | (31 – 9) **22** | (28 – 19) **9** | 31 |
| | 32 | 28 | (32 + 28) **60** |

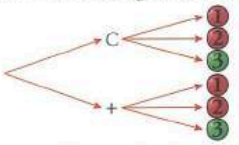
De las 60 personas, hay 10 mujeres con hijos: $P[\text{MUJER CON HIJOS}] = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$

**2.** ***Lanzamos una moneda y tomamos al azar una bola de esta urna:***



***Calcular $P[\text{CARA Y BOLA ROJA}]$.***

Construimos un diagrama en árbol:




De los 6 casos de que consta el espacio muestral, en 2 de ellos ha salido cara y una bola roja, por tanto:

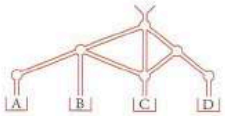
$$P[\text{CARA Y BOLA ROJA}] = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

## Piensa y practica

**1.** Al lanzar tres monedas, calcula la probabilidad de obtener:

a) 0 caras. b) 1 cara. c) 3 caras. d) Alguna cara.

**2.** Calcula la probabilidad de que un perdigón caiga en cada depósito de este aparato.




**3.** Gatos y perros en un refugio de animales:

| | GATO | PERRO |
|---|---|---|
| SANO | 12 | 17 |
| ENFERMO | 4 | 7 |

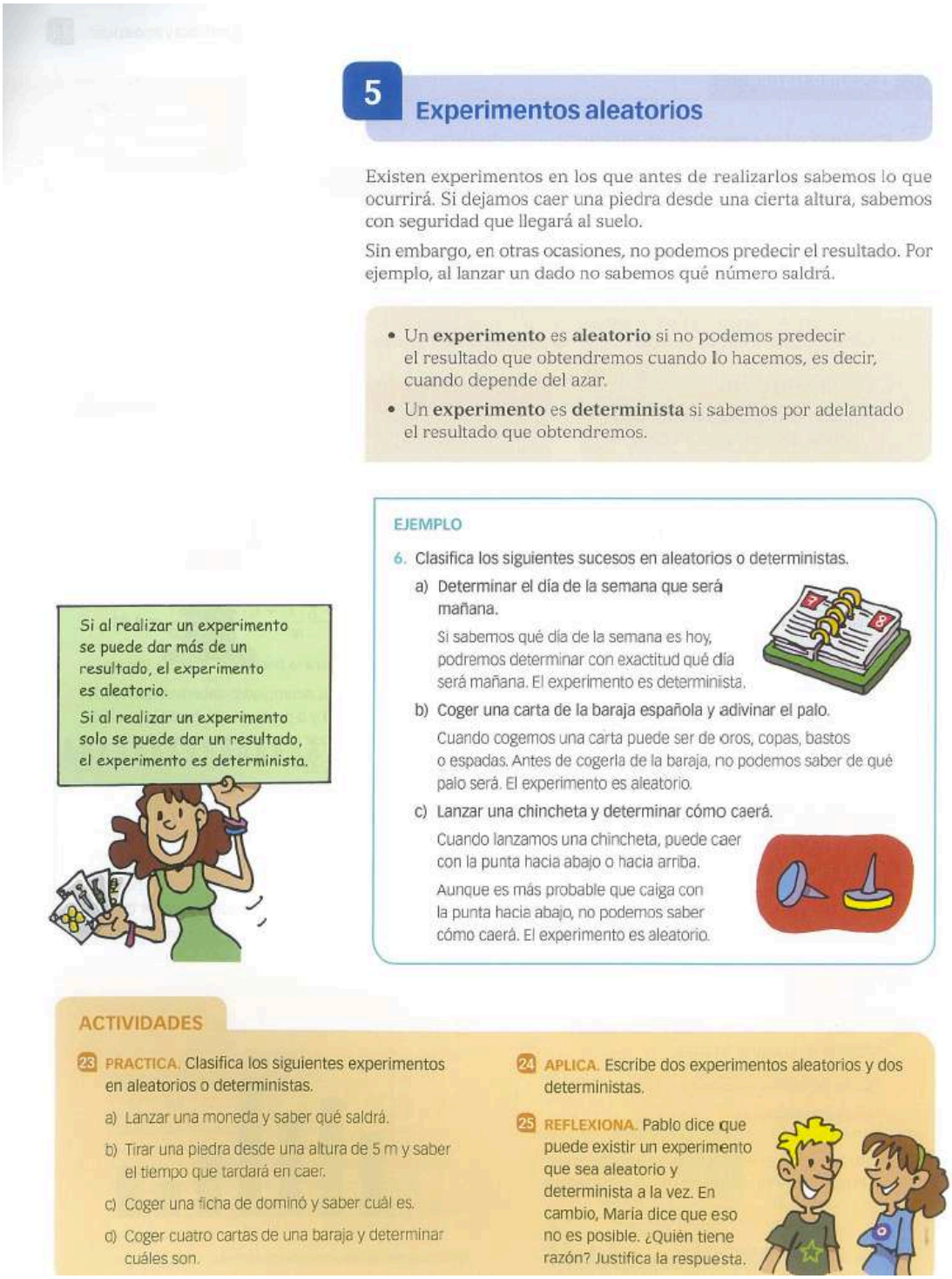
Tomando uno al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Sea perro. b) Esté enfermo. c) Sea un gato sano.

d) Sabiendo que está enfermo, que sea gato.

Figura 4.60 Contenidos del Segundo Curso de Educación Secundaria. Editorial Anaya

Editorial Santillana



## 5 Experimentos aleatorios

Existen experimentos en los que antes de realizarlos sabemos lo que ocurrirá. Si dejamos caer una piedra desde una cierta altura, sabemos con seguridad que llegará al suelo.

Sin embargo, en otras ocasiones, no podemos predecir el resultado. Por ejemplo, al lanzar un dado no sabemos qué número saldrá.

- Un **experimento** es **aleatorio** si no podemos predecir el resultado que obtendremos cuando lo hacemos, es decir, cuando depende del azar.
- Un **experimento** es **determinista** si sabemos por adelantado el resultado que obtendremos.

Si al realizar un experimento se puede dar más de un resultado, el experimento es aleatorio.

Si al realizar un experimento solo se puede dar un resultado, el experimento es determinista.

**EJEMPLO**

6. Clasifica los siguientes sucesos en aleatorios o deterministas.

a) Determinar el día de la semana que será mañana.

Si sabemos qué día de la semana es hoy, podremos determinar con exactitud qué día será mañana. El experimento es determinista.

b) Coger una carta de la baraja española y adivinar el palo.

Cuando cogemos una carta puede ser de oros, copas, bastos o espadas. Antes de cogerla de la baraja, no podemos saber de qué palo será. El experimento es aleatorio.

c) Lanzar una chincheta y determinar cómo caerá.

Cuando lanzamos una chincheta, puede caer con la punta hacia abajo o hacia arriba.

Aunque es más probable que caiga con la punta hacia abajo, no podemos saber cómo caerá. El experimento es aleatorio.

**ACTIVIDADES**

23 PRACTICA. Clasifica los siguientes experimentos en aleatorios o deterministas.

a) Lanzar una moneda y saber qué saldrá.

b) Tirar una piedra desde una altura de 5 m y saber el tiempo que tardará en caer.

c) Coger una ficha de dominó y saber cuál es.

d) Coger cuatro cartas de una baraja y determinar cuáles son.

24 APLICA. Escribe dos experimentos aleatorios y dos deterministas.

25 REFLEXIONA. Pablo dice que puede existir un experimento que sea aleatorio y determinista a la vez. En cambio, María dice que eso no es posible. ¿Quién tiene razón? Justifica la respuesta.

Figura 4.61 Contenidos del Segundo Curso de Educación Secundaria. Editorial Santillana

# 6 Sucesos

En los experimentos aleatorios no podemos predecir el resultado.

- Un **suceso elemental** es cada uno de los resultados posibles de un experimento aleatorio.
- Un **suceso compuesto** es un suceso que contiene dos o más sucesos elementales.




## Espacio muestral de un suceso

El conjunto formado por todos los resultados posibles de un experimento aleatorio es el **espacio muestral**. Se representa por $E$.

**EJEMPLO**

7. Determina el espacio muestral, los sucesos elementales y un suceso compuesto en los siguientes experimentos aleatorios:

a) Lanzamos un dado y apuntamos el resultado.

Espacio muestral → $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Sucesos elementales → {1}, {2}, {3}, {4}, {5} y {6}

Suceso compuesto → «Obtener un número impar» = {1, 3, 5}

b) Lanzamos dos monedas y anotamos el número de caras que han salido.

Espacio muestral → $E$ = {2 caras, 1 cara, 0 caras}

Sucesos elementales → {2 caras}, {1 cara} y {0 caras}

Suceso compuesto → «Obtener alguna cara» = {2 caras, 1 cara}

**SE ESCRIBE ASÍ**

Para expresar los sucesos que contiene el espacio muestral o un suceso compuesto escribimos los sucesos que contiene entre llaves ({ }).

Al tirar un dado:

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

«Que salga par» = {2, 4, 6}

## ACTIVIDADES

26 **PRACTICA.** Escribe el espacio muestral, los sucesos elementales y un suceso compuesto asociado a cada uno de estos experimentos aleatorios.

a) Extraer una bola de una urna que contiene 10 bolas numeradas del 1 al 10.

b) Lanzar un dado de ocho caras y anotar el resultado.

c) Lanzar dos dados de seis caras y anotar la suma de las puntuaciones.

d) Lanzar tres monedas y anotar el número de cruces que han salido.

27 **APLICA.** En el experimento aleatorio que consiste en lanzar un dado de 8 caras y anotar el resultado clasifica los siguientes sucesos en elementales y en compuestos.

a) Que salga un número primo.

b) Que salga un número mayor que 7.

c) Que salga un divisor de 6.

28 **REFLEXIONA.** Si cogemos una carta de una baraja de 40 cartas, ¿cuál de estas opciones tiene más posibilidades de salir: una carta de oros, un rey o una figura?

Figura 4.62 Contenidos del Segundo Curso de Educación Secundaria. Editorial Santillana

## 7 Probabilidad de un suceso

**SE ESCRIBE ASÍ**

La probabilidad del suceso $A$ se representa por $P(A)$.

La **probabilidad**, $P$, de un suceso $A$, es un número comprendido entre 0 y 1 que indica la posibilidad de que ese ocurra.

**Ley de los grandes números**: si realizamos un experimento aleatorio un número elevado de veces, la probabilidad de un suceso es igual a su frecuencia relativa, $P(A) \approx h_A$.

A mayor probabilidad, mayor será la posibilidad de que ocurra.

- Si $P(A) = 1$, decimos que $A$ es un suceso seguro, $A$ siempre ocurre.
- Si $P(A) = 0$, $A$ es un suceso imposible, $A$ no ocurre nunca.

- La frecuencia relativa de un suceso es un número comprendido entre 0 y 1.
- Cuanto mayor es la frecuencia, más veces ocurre el suceso.



### Regla de Laplace

Dos sucesos de un experimento aleatorio son **equiprobables** si tienen la misma probabilidad de ocurrir. Si todos los sucesos elementales de un experimento aleatorio son equiprobables, el **experimento** es **regular**.

**EJEMPLO**

8. Determina si estos experimentos son regulares.

a) Lanzar una moneda y observar qué sale.

El experimento es regular, porque los sucesos elementales (cara) y (cruz) tienen la misma probabilidad de salir; son equiprobables.

b) Lanzar una moneda trucada y observar qué sale.

El experimento no es regular, porque, como la moneda está trucada, los sucesos elementales no son equiprobables.

La **regla de Laplace** dice que la probabilidad de un suceso es igual al cociente entre el número de resultados favorables al suceso y el número total de casos posibles.

$$P(A) = \frac{\text{N.º de casos favorables al suceso } A}{\text{N.º de casos posibles}}$$

**ACTIVIDADES**

29 PRACTICA. En el experimento de tirar dos dados de cuatro caras y sumar los puntos, escribe un suceso seguro y uno imposible.

30 APLICA. Lanzamos al aire dos monedas. ¿Cómo clasificarías el suceso *Sacar una cara y dos cruces*? ¿Cuál sería su probabilidad?



31 REFLEXIONA. Después de lanzar muchas veces la misma moneda, obtenemos que $P(\text{cruz}) = 0{,}37$.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que salga cara?

b) ¿Qué podemos afirmar de la moneda?



Figura 4.63 Contenidos del Segundo Curso de Educación Secundaria. Editorial Santillana

SABER HACER

## Calcular probabilidades mediante la regla de Laplace



**Raúl lanza un dado del parchís.**
**¿Qué probabilidad hay de que le salga un 5?**
**¿Y de que le salga un número menor que 5?**

**Pasos a seguir**

1. Para poder aplicar la regla de Laplace, el experimento debe ser regular.

Si el dado no está trucado, todas las caras del dado tienen la misma probabilidad de salir. Así pues, el experimento es regular.

2. Calculamos el espacio muestral, y contamos el número de sucesos elementales que tiene. Este número es el número de casos posibles.

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Número de casos posibles $= 6$

3. Determinamos los sucesos que se nos piden y contamos el número de sucesos elementales de los que están compuestos. Este será el número de casos favorables.

$A =$ «Sacar un 5» $= \{5\}$
Número de casos favorables de $A = 1$
$B =$ «Sacar un número menor que 5» $= \{1, 2, 3, 4\}$
Número de casos favorables de $B = 4$

4. Aplicamos la regla de Laplace.

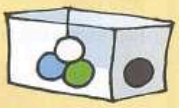
$$P(A) = \frac{\text{N.º casos favorables a } A}{\text{N.º casos posibles}} = \frac{1}{6} = 0,1\hat{6}$$

$$P(B) = \frac{\text{N.º casos favorables a } B}{\text{N.º casos posibles}} = \frac{4}{6} = 0,\hat{6}$$

La regla de Laplace solo se puede aplicar si el experimento es regular.
Si no lo es, hay que calcular la probabilidad de forma experimental (ley de los grandes números).

### ACTIVIDADES

**32** En una urna tenemos cuatro bolas de colores diferentes: azul, verde, blanco y negro. Cogemos una al azar.



a) Halla el espacio muestral.
b) Determina la probabilidad de obtener cada color.

**33** En una bolsa tenemos cinco bolas numeradas del 1 al 5. Calcula.
a) La probabilidad de obtener un 5.
b) La probabilidad de obtener un número impar.
c) La probabilidad de obtener un múltiplo de 2.

**34** De la palabra PROBABILIDAD, escogemos una letra al azar.
a) ¿Qué probabilidad hay de que sea una vocal?
b) ¿Y una consonante? ¿Y la letra B?

**35** En el experimento de coger una bola de una bolsa, calcula la probabilidad del suceso *Coger una bola blanca* si:
a) La bolsa contiene 2 bolas blancas y 2 negras.
b) La bolsa contiene 1 bola blanca y 2 negras.
c) La bolsa contiene 2 bolas blancas, 2 negras y 2 verdes.

**36** Lanzamos al aire un dado de 10 caras. Calcula las probabilidades de los siguientes sucesos, y ordénalos de mayor a menor probabilidad.
a) Sacar un número par.
b) Sacar un número mayor que 5.
c) Sacar un 7.
d) Sacar un 1 o un 10.
e) Sacar un divisor de 9.



Figura 4.64 Contenidos del Segundo Curso de Educación Secundaria. Editorial Santillana

3.º ESO. Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas

Editorial Anaya

# 1 Sucesos aleatorios

En nuestras vivencias de cada día nos encontramos con muchos acontecimientos de los que no podríamos predecir si ocurrirán o no. Dependen del azar. Por ejemplo:

**Etimología**

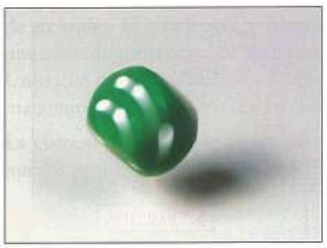
**Aleatorio:** Relativo al azar.

En latín, *alea* significa *dado* y también *suerte, azar*.

| DEPENDEN DEL AZAR | NO DEPENDEN DEL AZAR |
|---|---|
| Lloverá mañana. | Amanecerá mañana. |
| Ganará mi equipo de liga. | Se jugará la liga. |
| Al lanzar la moneda, saldrá cara. | Al lanzar la moneda, caerá. |
| Me tocará el gordo de Navidad. | Tocará el gordo a algún número. |

Se llaman **sucesos aleatorios** aquellos acontecimientos en cuya realización influye el azar.

## Experiencias aleatorias



Lanzar un dado y observar el resultado obtenido es una **experiencia aleatoria** porque el resultado depende del azar.

Para estudiar el azar y sus propiedades, podemos realizar **experiencias aleatorias,** es decir, experimentos cuyos resultados dependen del azar. Por ejemplo, estudiemos la experiencia aleatoria consistente en lanzar un dado y observar lo que sale.

- **Caso**

  Cada uno de los resultados que puede obtenerse al realizar una experiencia aleatoria se llama **caso.**

  Los posibles casos al *lanzar un dado* son: 

- **Espacio muestral**

  El conjunto de todos los casos posibles se llama **espacio muestral,** al que designamos por $E$.

  En el dado, el espacio muestral es: $E =$ 

- **Sucesos**

  Los subconjuntos del espacio muestral se llaman **sucesos.** Algunos sucesos (hay muchos más) de la experiencia *lanzar un dado* son:

- Se llama **experiencia aleatoria** a aquella cuyo resultado depende del azar.
- Cada posible resultado de una experiencia aleatoria se llama **caso.**
- **Espacio muestral** es el conjunto de todos los casos posibles.
- Los **sucesos** son subconjuntos extraídos del espacio muestral.
- Los casos también son sucesos. Se llaman **sucesos elementales** o **individuales.**
- El espacio muestral se llama suceso total o **suceso seguro.**

Figura 4.65 Contenidos del Tercer Curso orientadas a las Enseñanzas Académicas de Educación Secundaria. Editorial Anaya

## Ejercicio resuelto

***En los experimentos aleatorios siguientes, determinar su espacio muestral y poner algunos ejemplos de sucesos:***

***a) Lanzar dos monedas y contar el número de caras.***

***b) Extraer una carta de una baraja española y anotar lo que sale.***

***c) Tomar, al azar, la ficha de uno de los socios de una biblioteca y analizar sus datos.***

a) El espacio muestral es: $E$ = {0 CARAS, 1 CARA, 2 CARAS}

Un suceso: ALGUNA CARA = {1 CARA, 2 CARAS}

Otro suceso: MENOS DE DOS CARAS = {0 CARAS, 1 CARA}

b) El espacio muestral consta de 40 casos: cada una de las cartas de la baraja.

Algunos sucesos:

AS = 

COPAS = 

c) El espacio muestral consta de tantos casos como socios haya en la biblioteca.

Algunos sucesos:

SOCIOS QUE HAN SACADO MÁS DE DIEZ LIBROS ESTE AÑO.

SOCIOS MENORES DE QUINCE AÑOS.

SOCIOS CON MÁS DE DIEZ AÑOS DE ANTIGÜEDAD.

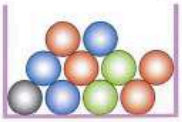
**En la web**

Ejercicios de iniciación: sucesos aleatorios.

## Piensa y practica

**1.** En una urna hay 10 bolas de cuatro colores.

*Sacamos una bola y anotamos su color.*



a) ¿Es una experiencia aleatoria?

b) Escribe el espacio muestral.

c) Inventa cinco sucesos.

**2.** Tenemos caramelos de fresa, naranja, limón y piña.

*Cogemos uno sin mirar y comprobamos su sabor.*

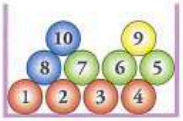
a) ¿Es una experiencia aleatoria?

b) Escribe el espacio muestral.

c) Inventa dos sucesos que tengan más de un caso.

**3.** En una urna hay 10 bolas numeradas.

*Sacamos una bola y anotamos el número.*




a) ¿Es una experiencia aleatoria?

b) Escribe el espacio muestral.

c) Inventa cinco sucesos.

**4.** Daniel le ha regalado a su hermana María una caja de bombones de chocolate.

*Saca un bombón y ve si es de chocolate.*

¿Es una experiencia aleatoria?

¿Por qué?

Figura 4.66 Contenidos del Tercer Curso orientadas a las Enseñanzas Académicas de Educación Secundaria. Editorial Anaya

# 2 Probabilidad de un suceso




La **probabilidad** de un suceso indica el grado de confianza que podemos tener en que ese suceso ocurra. Se expresa mediante un número comprendido entre 0 y 1.

Para designar la probabilidad de un suceso $S$ ponemos $P[S]$.

Por ejemplo, $P[S] = \frac{1}{5}$ significa que, a grandes rasgos, el suceso ocurre una de cada cinco veces que se realiza la experiencia.

- Si $P[S]$ es un número próximo a cero, el suceso es poco probable.
- Si $P[S]$ es próximo a uno, el suceso es muy probable.

## Ley fundamental del azar

Se lanzan 1 000 veces una moneda y 1 000 veces una chincheta. Estos son los resultados obtenidos:

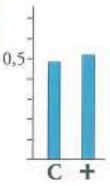
**Recuerda**

$f$ (frecuencia) es el número de veces que ocurre un suceso.

$f_r$ (frecuencia relativa) es la proporción de veces que ocurre el suceso.

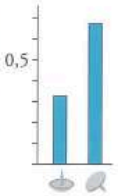
MONEDA

| | $f$ | $f_r$ |
|---|---|---|
| C | 483 | 0,483 |
| + | 517 | 0,517 |
| TOTAL | 1 000 | 1 |




CHINCHETA

| | $f$ | $f_r$ |
|---|---|---|
| 🍄 | 327 | 0,327 |
| 🍃 | 673 | 0,673 |
| TOTAL | 1 000 | 1 |




- Observamos que, en la moneda, las frecuencias relativas de C y + son próximas a 1/2, lo cual es lógico, pues, por término medio, la mitad de las veces sale C y la otra mitad +. El valor de la frecuencia relativa es muy próximo al de la probabilidad.

$$\text{Como } P[\text{C}] = \frac{1}{2} \text{ y } P[+] = \frac{1}{2} \text{ entonces } f_r[\text{C}] \approx \frac{1}{2} \text{ y } f_r[+] \approx \frac{1}{2}$$

- Sin embargo, en la chincheta, las frecuencias relativas de 🍄 y 🍃 son muy distintas de 1/2, pues estos dos sucesos ocurren en proporciones distintas. Sus probabilidades son números desconocidos, pero, seguramente, serán próximos a las frecuencias relativas obtenidas.

$$f_r(🍄) = 0{,}327;\ f_r(🍃) = 0{,}673 \Rightarrow P[🍄] \approx 0{,}327;\ P[🍃] \approx 0{,}673$$

Al repetir muchas veces, $N$, una experiencia aleatoria, la frecuencia relativa de cada suceso, $S$, toma valores muy parecidos a su probabilidad:

$$f_r(S) \approx P[S]$$

Y cuanto más grande sea $N$ más se parece $f_r(S)$ a $P[S]$.

Esta propiedad se llama **ley de los grandes números.**

**En la web**

Experiencia: dos metas para una ficha.

Figura 4.67 Contenidos del Tercer Curso orientadas a las Enseñanzas Académicas de Educación Secundaria. Editorial Anaya

## Cómo se mide la probabilidad de un suceso

En la web
Lectura: ¿Es posible dar leyes que regulen el azar?

Si el suceso pertenece a una **experiencia regular,** como en el caso de la moneda visto en la página anterior, se puede evaluar la probabilidad sin necesidad de experimentar. Se hará *asignando la misma probabilidad a todos los casos.*

Si la **experiencia** es **irregular,** *a priori*(1) desconocemos la probabilidad de cada uno de los casos. La única forma de adquirir información sobre tales probabilidades es *experimentar.*

En cualquier tipo de experiencia, la suma de las probabilidades de todos los casos es 1.

(1) *a priori*: antes de empezar.

### Ejercicios resueltos

**1.** ***¿Qué probabilidad es razonable asignar a cada cara de un dado correcto?***

Como el dado es correcto, la experiencia (lanzar el dado y mirar la cara que sale) es regular. Cada una de las seis caras saldrá, por término medio, una de cada seis veces. Por tanto, lo razonable es asignar a cada cara la probabilidad 1/6.

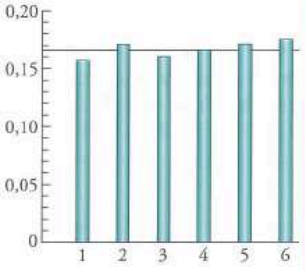
**2.** ***Lanzamos un dado 1 000 veces y obtenemos los siguientes resultados:***

$f(1) = 157$ $f(2) = 171$
$f(3) = 160$ $f(4) = 166$
$f(5) = 171$ $f(6) = 175$

***¿Se puede suponer que el dado es correcto?***

Representamos los resultados obtenidos.

| CARA | FREC. | FREC. RELATIVA |
|---|---|---|
| ⚀ | 157 | 157/1 000 = 0,157 |
| ⚁ | 171 | 171/1 000 = 0,171 |
| ⚂ | 160 | 160/1 000 = 0,160 |
| ⚃ | 166 | 166/1 000 = 0,166 |
| ⚄ | 171 | 171/1 000 = 0,171 |
| ⚅ | 175 | 175/1 000 = 0,175 |




Si el dado es correcto, la probabilidad de cada cara es 1/6 = 0,166… Las frecuencias relativas obtenidas son todas ellas valores bastante próximos a este. Por tanto, por su comportamiento en estas 1 000 tiradas, el dado parece correcto.

**3.** ***En las estadísticas de un jugador de fútbol, realizadas a lo largo del presente campeonato, de todos sus tiros a puerta se han contado 35 goles y 189 fallos. ¿Qué probabilidad le asignamos a cada uno de los dos sucesos?***

La única forma de asignar una probabilidad a este tipo de sucesos es experimentar. O bien, recurrir a la experiencia almacenada.

Esta experiencia se reduce a 35 + 189 = 224 tiros a puerta. Los resultados son:

GOLES: 35 de 224 → 35/224 = 0,15625

FALLOS: 189 de 224 → 189/224 = 0,84375

Por tanto, asignamos:

$P[\text{GOL}] \approx 0{,}15625$ $P[\text{FALLO}] = 0{,}84375$

### Piensa y practica

**1.** En una bolsa hay 90 bolas idénticas, numeradas del 1 al 90.

a) ¿Cuál es la probabilidad de extraer la bola con el número 17?

b) Si solo hubiera diez bolas numeradas del 11 al 20, ¿cuál sería la probabilidad de obtener el 17?

**2.** En una caja hay dos tipos de galletas: las de chocolate, *CH*, y las normales, *N*. Sacamos una al azar, la miramos y la devolvemos a la caja.

Si hemos extraído 27 galletas de chocolate y 13 galletas normales, ¿qué valores asignarías a $P[CH]$ y a $P[N]$?

Figura 4.68 Contenidos del Tercer Curso orientadas a las Enseñanzas Académicas de Educación Secundaria. Editorial Anaya

# 3 Ley de Laplace para experiencias regulares

**Ten en cuenta**

$P[\square, \square, \square] =$

$= P[\square] + P[\square] + P[\square] =$

$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$

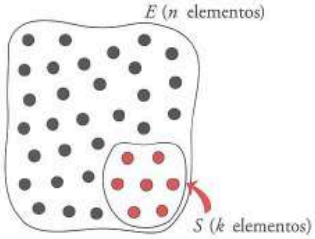
Hemos pintado las caras de un dado de los colores siguientes:

de rojo. El rojo saldrá 3 veces de cada 6: $P[\square] = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

de verde. El verde saldrá 2 veces de cada 6: $P[\square] = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

de amarillo. El amarillo saldrá 1 vez de cada 6: $P[\square] = \frac{1}{6}$

Estos resultados se pueden generalizar para evaluar la probabilidad de un suceso cualquiera relacionado con un instrumento aleatorio regular.




Realizamos una experiencia aleatoria con un instrumento regular.

El espacio muestral tiene $n$ elementos (casos) y, por tanto, la probabilidad de cada caso es $1/n$.

$S$ es un suceso que consta de $k$ elementos.

Entonces, la probabilidad de $S$ es: $P[S] = \frac{k}{n}$

Esto se expresa del modo siguiente:

$$P[S] = \frac{\text{número de casos favorables a } S}{\text{número total de casos posibles}}$$ LEY DE LAPLACE

**Problemas resueltos**

| | |
|---|---|
| ROJAS | 40 |
| VERDES | 25 |
| AZULES | 15 |
| NEGRAS | 10 |

**1.** ***En una bolsa tenemos 90 bolas de colores, todas del mismo tamaño, repartidas como indica la tabla del margen. Si sacamos una al azar, calcular las probabilidades de que sea de uno u otro color.***

$P[\bigcirc] = \frac{40}{90} = \frac{4}{9}$; $P[\bigcirc] = \frac{25}{90} = \frac{5}{18}$; $P[\bigcirc] = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$; $P[\bigcirc] = \frac{10}{90} = \frac{1}{9}$

**2.** ***En una caja hay 3 586 clavos, de los cuales 311 son defectuosos. Calcular la probabilidad de que, al extraer un clavo:***

***a) Sea defectuoso.*** ***b) Sea correcto.***

a) $P[\text{DEFECTUOSO}] = \frac{\text{número de clavos defectuosos}}{\text{número total de clavos}} = \frac{311}{3\,586} = 0{,}0867$

b) Hay $3\,586 - 311 = 3\,275$ clavos correctos.

$P[\text{CORRECTO}] = \frac{\text{número de clavos correctos}}{\text{número total de clavos}} = \frac{3\,275}{3\,586} = 0{,}9133$

**En la web**

Ejercicios de iniciación: ley de Laplace.

**En la web**

Calcula probabilidades realizando las actividades "Urna con bolas" y "Baraja".

**Piensa y practica**

**1.** Extraemos una carta de una baraja española con 40 naipes. Halla la probabilidad de obtener:

a) El as de espadas.

b) El rey de bastos.

c) Una figura (sota, caballo o rey).

d) Una copa.

**2.** En un campamento hay 32 jóvenes europeos, 13 americanos, 15 africanos y 23 asiáticos. Se elige al azar a su portavoz. ¿Qué probabilidad hay de que sea europeo?

**3.** Al hacer girar la aguja, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número par?




Figura 4.69 Contenidos del Tercer Curso orientadas a las Enseñanzas Académicas de Educación Secundaria. Editorial Anaya

## Otras aplicaciones de la ley de Laplace

En la web
Experiencia: carrera de fichas.

En la web
Calcula probabilidades realizando las actividades "Dominó", "Dos dados" y "Lotería".

Hay ocasiones en las que la aplicación de la ley de Laplace no es tan fácil como en los ejemplos anteriores. Veamos dos experiencias en las que el recuento de los casos posibles y los casos favorables tiene una cierta complicación.

■ **Experiencia I.** ***Lanzamos dos dados y sumamos sus puntuaciones.***

Los posibles resultados son 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12 (compruébalo).

Pero estos once casos no tienen la misma probabilidad: podrías verlo lanzando varias veces dos dados y observando que las sumas 6, 7 y 8 se dan con bastante frecuencia, mientras que las sumas 2 y 12 ocurren muy raramente. Veamos a qué se debe esto:

| + | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 3 | 4 | ⑤ | 6 | 7 |
| | 3 | 4 | ⑤ | 6 | 7 | 8 |
| | 4 | ⑤ | 6 | 7 | 8 | 9 |
| | ⑤ | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

- La suma 2 solo se consigue con dos unos, y la suma 12, con dos seises.
- Sin embargo, la suma 5 se puede conseguir de cuatro formas:



Para evaluar estas probabilidades, analicemos la experiencia de lanzar dos dados y anotar sus resultados. Cada uno de los 36 casilleros de la tabla del margen es un caso, y todos ellos tienen la misma probabilidad. Si ahora ponemos en cada casillero la suma de los dos dados, podremos contar muy fácilmente cuántos casos tiene cada suceso. Por ejemplo:

$$P[5] = \frac{\text{número de casos en los que la suma es 5}}{\text{número de casos posibles}} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

| NÚMERO DE CARAS | | |
|---|---|---|
| | 2 CARAS | 1 CARA |
| | 1 CARA | 0 CARAS |

■ **Experiencia II.** ***Lanzamos dos monedas y observamos el número de caras que obtenemos.***

Al lanzar dos monedas, pueden salir 0 caras, 1 cara o 2 caras. Sin embargo, estos tres casos no son igualmente probables. Para hallar sus probabilidades, hacemos como antes.

En la tabla del margen vemos claramente que:

$$P[0\ \text{CARAS}] = \frac{1}{4} \qquad P[1\ \text{CARA}] = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \qquad P[2\ \text{CARAS}] = \frac{1}{4}$$

En la web Refuerza la ley de Laplace.

### Piensa y practica

**4.** Calcula las restantes probabilidades en la **Experiencia I.** (Sumar 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12).

**5.** En la **Experiencia I:**

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea menor que 6?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mayor que 6?

c) ¿Y de que esté entre 4 y 7, ambos incluidos?

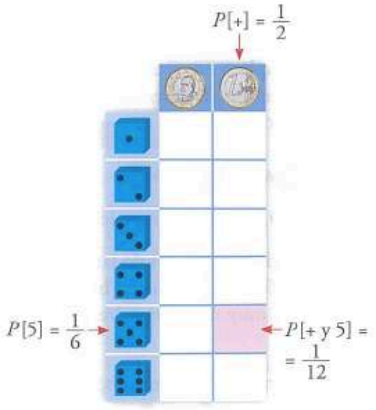
**6.** *Lanzamos dos dados y nos fijamos en la mayor de las puntuaciones.*

Completa en tu cuaderno el cuadro. ¿Cuál es la probabilidad de que la mayor de las puntuaciones sea 1?

¿Y de que sea 2? ¿Y 3? ¿Y 4? ¿Y 5? ¿Y 6?

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| | | 2 | 3 | 4 | | |
| | | | | | 5 | |
| | | | | | 5 | |
| | | | | | 5 | 6 |
| | | | | | 6 | 6 |

Figura 4.70 Contenidos del Tercer Curso orientadas a las Enseñanzas Académicas de Educación Secundaria. Editorial Anaya

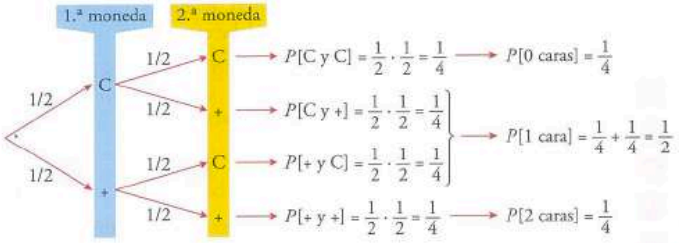



## Experiencias compuestas. Diagramas en árbol

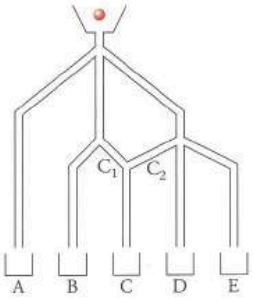
Si lanzamos una moneda y un dado, ¿cuál es la probabilidad de obtener cruz (+) en la moneda y 5 en el dado? Esta es una experiencia compuesta de otras dos ("lanzar una moneda" y "lanzar un dado"). La probabilidad pedida es el producto de las probabilidades, pues cada resultado de la moneda puede darse con cada resultado del dado: $P[+ \text{ y } 5] = P[+] \cdot P[5] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

Para estudiar estas experiencias compuestas es muy útil el **diagrama en árbol.**

La **Experiencia II,** analizada en la página anterior, puede describirse mediante un diagrama en árbol:



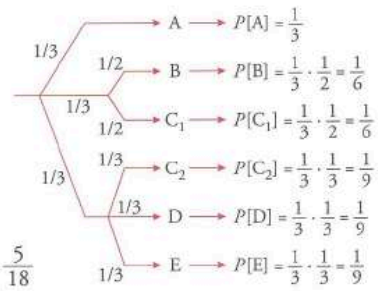

■ **Experiencia III.** ***Soltamos una bola desde el embudo de arriba del aparato del margen. ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en cada casilla? (Suponemos que en cada ramificación la bola tiene la misma probabilidad de ir a cada ramal).***




Resolvemos previamente, a la derecha, otra experiencia en la que los dos ramales $C_1$ y $C_2$ se mantengan separados.

Como en el aparato del margen los ramales $C_1$ y $C_2$ se unen en un único ramal, la probabilidad de C es:

$$P[C] = P[C_1] + P[C_2] = \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{5}{18}$$




### Piensa y practica

**7.** Lanzamos dos dados. Halla la probabilidad de obtener par en el primero y múltiplo de 3 en el segundo.

**8.** Sacamos una bola de la 1.ª urna y la echamos en la 2.ª. Luego, sacamos una bola de la 2.ª urna.

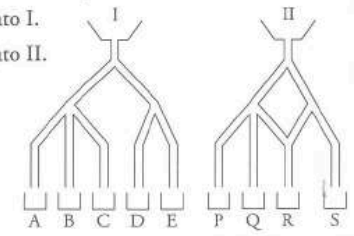



¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas sacadas sean azules?

**9.** ¿Cuál es la probabilidad de que una bola que se deja caer por el embudo caiga en cada casillero?

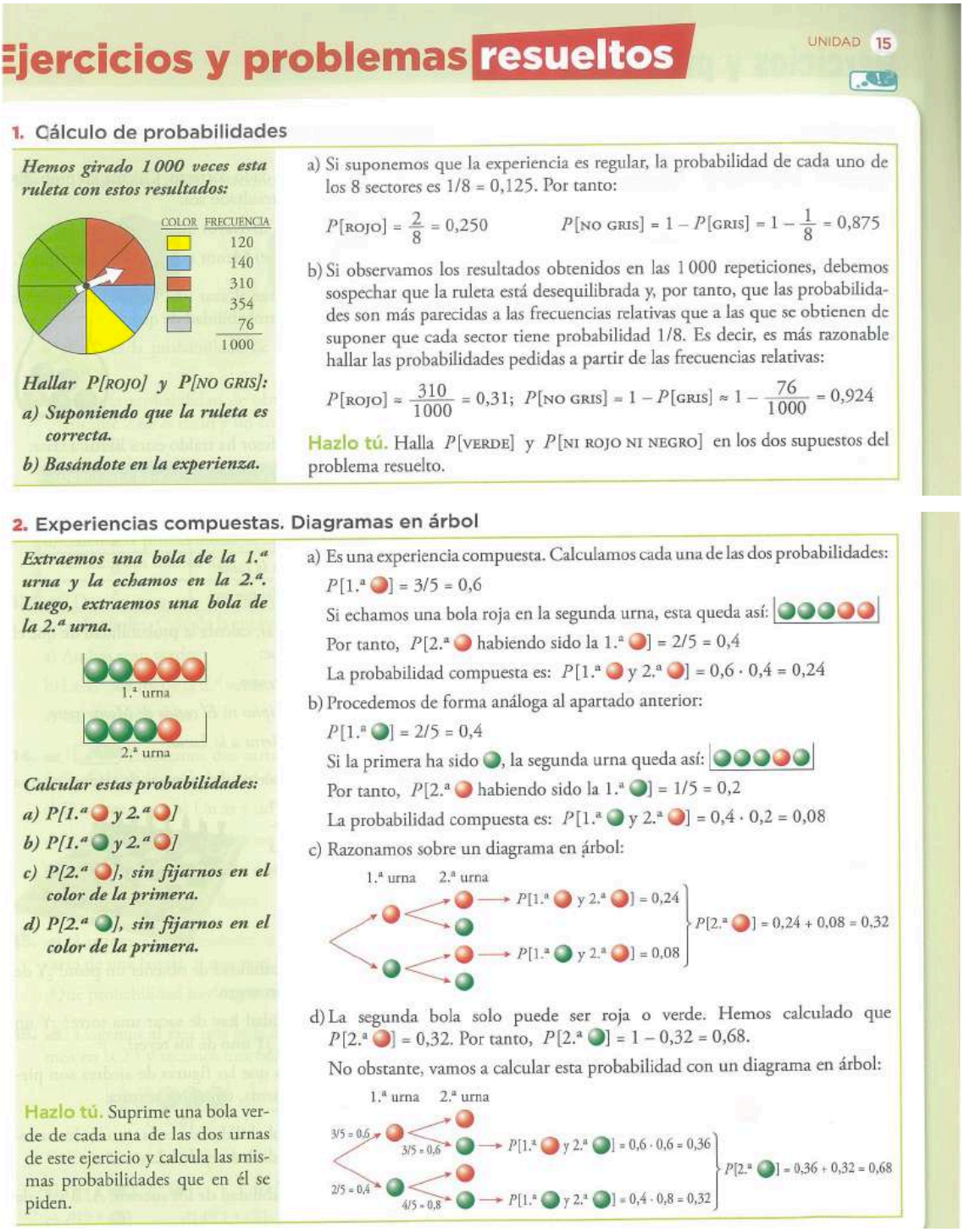
a) En el aparato I.

b) En el aparato II.




En la web Calcula probabilidades realizando las actividades "Los caminos", "Urna" y "El ratón".

Figura 4.71 Contenidos del Tercer Curso orientadas a las Enseñanzas Académicas de Educación Secundaria. Editorial Anaya



# Ejercicios y problemas resueltos

UNIDAD 15

## 1. Cálculo de probabilidades

***Hemos girado 1 000 veces esta ruleta con estos resultados:***



| COLOR | FRECUENCIA |
|---|---|
| | 120 |
| | 140 |
| | 310 |
| | 354 |
| | 76 |
| | 1 000 |

***Hallar P[ROJO] y P[NO GRIS]:***

***a) Suponiendo que la ruleta es correcta.***

***b) Basándote en la experienza.***

a) Si suponemos que la experiencia es regular, la probabilidad de cada uno de los 8 sectores es 1/8 = 0,125. Por tanto:

$P[\text{ROJO}] = \frac{2}{8} = 0{,}250 \qquad P[\text{NO GRIS}] = 1 - P[\text{GRIS}] = 1 - \frac{1}{8} = 0{,}875$

b) Si observamos los resultados obtenidos en las 1 000 repeticiones, debemos sospechar que la ruleta está desequilibrada y, por tanto, que las probabilidades son más parecidas a las frecuencias relativas que a las que se obtienen de suponer que cada sector tiene probabilidad 1/8. Es decir, es más razonable hallar las probabilidades pedidas a partir de las frecuencias relativas:

$P[\text{ROJO}] \approx \frac{310}{1000} = 0{,}31; \quad P[\text{NO GRIS}] = 1 - P[\text{GRIS}] \approx 1 - \frac{76}{1000} = 0{,}924$

**Hazlo tú.** Halla $P[\text{VERDE}]$ y $P[\text{NI ROJO NI NEGRO}]$ en los dos supuestos del problema resuelto.

## 2. Experiencias compuestas. Diagramas en árbol

***Extraemos una bola de la 1.ª urna y la echamos en la 2.ª. Luego, extraemos una bola de la 2.ª urna.***




***Calcular estas probabilidades:***

***a) P[1.ª 🔴 y 2.ª 🔴]***

***b) P[1.ª 🟢 y 2.ª 🔴]***

***c) P[2.ª 🔴], sin fijarnos en el color de la primera.***

***d) P[2.ª 🟢], sin fijarnos en el color de la primera.***

**Hazlo tú.** Suprime una bola verde de cada una de las dos urnas de este ejercicio y calcula las mismas probabilidades que en él se piden.

a) Es una experiencia compuesta. Calculamos cada una de las dos probabilidades:

$P[1.^{\text{a}}\ \text{🔴}] = 3/5 = 0{,}6$

Si echamos una bola roja en la segunda urna, esta queda así: 🟢🟢🟢🔴🔴

Por tanto, $P[2.^{\text{a}}\ \text{🔴}$ habiendo sido la $1.^{\text{a}}\ \text{🔴}] = 2/5 = 0{,}4$

La probabilidad compuesta es: $P[1.^{\text{a}}\ \text{🔴}$ y $2.^{\text{a}}\ \text{🔴}] = 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}24$

b) Procedemos de forma análoga al apartado anterior:

$P[1.^{\text{a}}\ \text{🟢}] = 2/5 = 0{,}4$

Si la primera ha sido 🟢, la segunda urna queda así: 🟢🟢🟢🟢🔴

Por tanto, $P[2.^{\text{a}}\ \text{🔴}$ habiendo sido la $1.^{\text{a}}\ \text{🟢}] = 1/5 = 0{,}2$

La probabilidad compuesta es: $P[1.^{\text{a}}\ \text{🟢}$ y $2.^{\text{a}}\ \text{🔴}] = 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}08$

c) Razonamos sobre un diagrama en árbol:



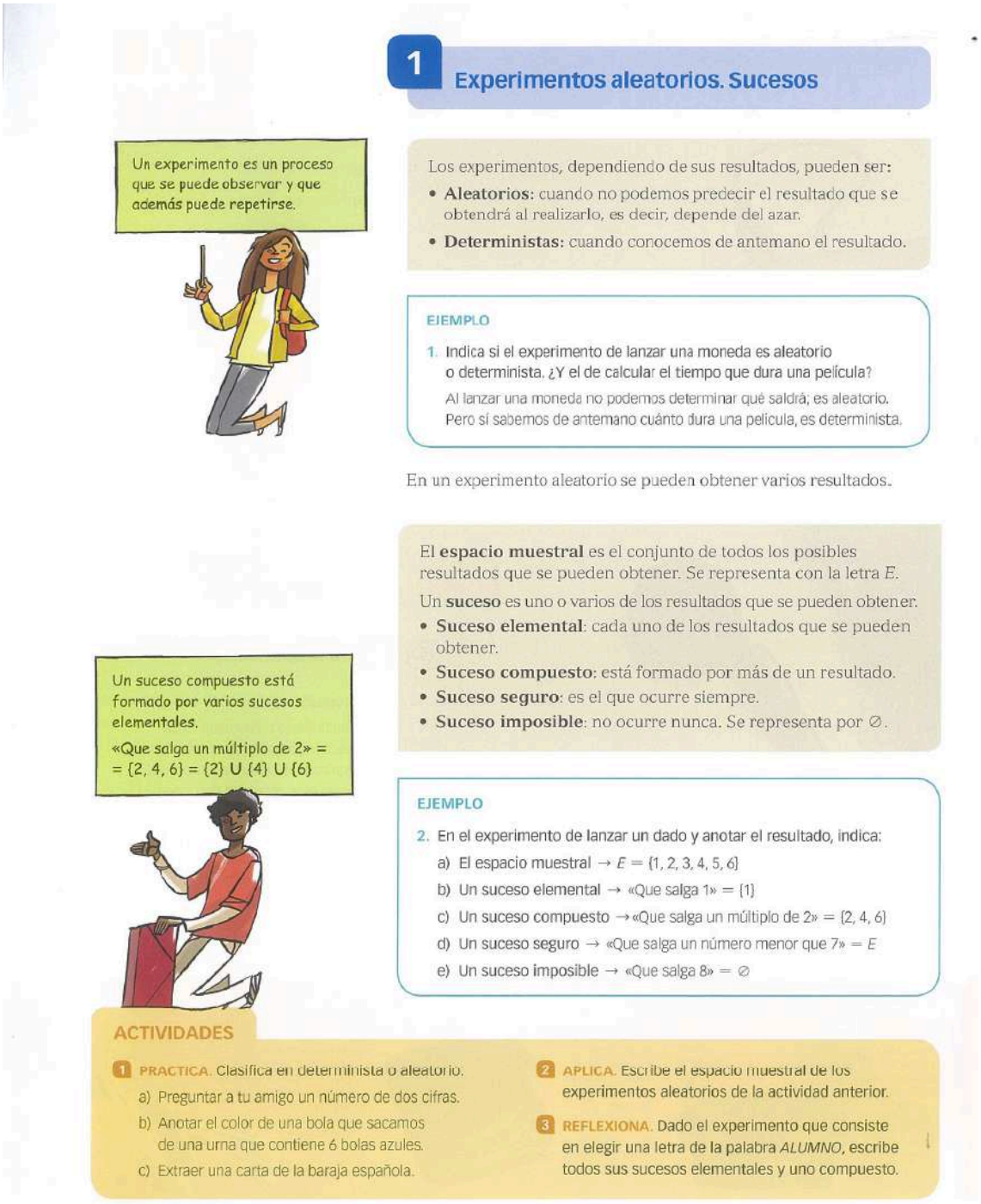

d) La segunda bola solo puede ser roja o verde. Hemos calculado que $P[2.^{\text{a}}\ \text{🔴}] = 0{,}32$. Por tanto, $P[2.^{\text{a}}\ \text{🟢}] = 1 - 0{,}32 = 0{,}68$.

No obstante, vamos a calcular esta probabilidad con un diagrama en árbol:




Figura 4.72 Contenidos del Tercer Curso orientadas a las Enseñanzas Académicas de Educación Secundaria. Editorial Anaya

Editorial Santillana



1 Experimentos aleatorios. Sucesos

Un experimento es un proceso que se puede observar y que además puede repetirse.

Los experimentos, dependiendo de sus resultados, pueden ser:

- **Aleatorios:** cuando no podemos predecir el resultado que se obtendrá al realizarlo, es decir, depende del azar.
- **Deterministas:** cuando conocemos de antemano el resultado.

EJEMPLO

1. Indica si el experimento de lanzar una moneda es aleatorio o determinista. ¿Y el de calcular el tiempo que dura una película?

   Al lanzar una moneda no podemos determinar qué saldrá; es aleatorio. Pero sí sabemos de antemano cuánto dura una película, es determinista.

En un experimento aleatorio se pueden obtener varios resultados.

El **espacio muestral** es el conjunto de todos los posibles resultados que se pueden obtener. Se representa con la letra *E*.

Un **suceso** es uno o varios de los resultados que se pueden obtener.

- **Suceso elemental**: cada uno de los resultados que se pueden obtener.
- **Suceso compuesto**: está formado por más de un resultado.
- **Suceso seguro**: es el que ocurre siempre.
- **Suceso imposible**: no ocurre nunca. Se representa por ∅.

Un suceso compuesto está formado por varios sucesos elementales.

«Que salga un múltiplo de 2» = = {2, 4, 6} = {2} ∪ {4} ∪ {6}

EJEMPLO

2. En el experimento de lanzar un dado y anotar el resultado, indica:
   a) El espacio muestral → $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
   b) Un suceso elemental → «Que salga 1» = {1}
   c) Un suceso compuesto → «Que salga un múltiplo de 2» = {2, 4, 6}
   d) Un suceso seguro → «Que salga un número menor que 7» = *E*
   e) Un suceso imposible → «Que salga 8» = ∅

ACTIVIDADES

1 PRACTICA. Clasifica en determinista o aleatorio.
   a) Preguntar a tu amigo un número de dos cifras.
   b) Anotar el color de una bola que sacamos de una urna que contiene 6 bolas azules.
   c) Extraer una carta de la baraja española.

2 APLICA. Escribe el espacio muestral de los experimentos aleatorios de la actividad anterior.

3 REFLEXIONA. Dado el experimento que consiste en elegir una letra de la palabra *ALUMNO*, escribe todos sus sucesos elementales y uno compuesto.

Figura 4.73 Contenidos del Tercer Curso orientadas a las Enseñanzas Académicas de Educación Secundaria. Editorial Santillana

SABER HACER

## Determinar el espacio muestral utilizando un diagrama de árbol

**En un restaurante ofrecen un menú compuesto por sopa o verduras de primer plato, y carne, pescado o pasta de segundo. Si se tiene que elegir un solo plato de primero y otro de segundo, ¿cuáles son todas las posibilidades de elección?**

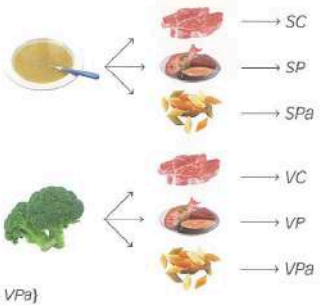
El diagrama de árbol es un gráfico utilizado para contar, como si fueran rutas o ramas de un árbol, los posibles resultados de un experimento aleatorio.

**Pasos a seguir**

1. Para construir el diagrama de árbol, fijamos la primera posibilidad de elección.
2. Añadimos el resto de posibilidades, partiendo en cada una de la primera, y escribimos los resultados.
3. Determinamos el espacio muestral fijándonos en las ramas finales.

La primera elección será sopa o verduras.

Si hemos elegido sopa de primero, de segundo podemos elegir carne, pescado o pasta. Lo mismo si hemos elegido verduras.




$E = \{SC, SP, SPa, VC, VP, VPa\}$

El espacio muestral indica todas las posibilidades de elección.

## ACTIVIDADES

4 Utiliza un diagrama de árbol para determinar el espacio muestral del experimento que consiste en escoger una camiseta y un pantalón de un armario en el que hay dos camisetas, una verde y otra roja, y tres pantalones, uno azul, otro negro y otro marrón.

5 Se extraen dos cartas de la baraja española y se anota el palo al que pertenecen. Dibuja el diagrama de árbol para este experimento y, a partir de él, escribe el espacio muestral.



6 Determina, utilizando un diagrama de árbol, todos los posibles resultados que se pueden obtener al realizar estos experimentos aleatorios.

a) Lanzar dos dados.

b) Lanzar tres monedas.

7 En una bolsa tenemos 4 bolas rojas y 7 bolas verdes. Dibuja el diagrama de árbol y describe los sucesos elementales del espacio muestral si:

a) Se escogen dos bolas al azar y se anota su color.

b) Se escogen tres bolas y se anota su color.

8 Realizamos el siguiente experimento aleatorio: primero lanzamos un dado y anotamos el número de su cara superior.

- Si el resultado es un número par, lanzamos una moneda y anotamos el resultado.
- Si es impar, volvemos a lanzar el dado y anotamos el número de su cara superior.

a) Indica todos los resultados posibles que podemos obtener.

b) Determina el suceso «Que salga número par».

9 En una urna tenemos 5 bolas numeradas del 1 al 5. Utiliza un diagrama de árbol para determinar el espacio muestral en cada uno de estos experimentos aleatorios.




a) Si sacamos una bola, y sin echarla a la urna, sacamos otra bola.

b) Si sacamos una bola, la volvemos a echar a la urna, y sacamos una segunda bola.

c) Si sacamos tres bolas a la vez.

Figura 4.74 Contenidos del Tercer Curso orientadas a las Enseñanzas Académicas de Educación Secundaria. Editorial Santillana

## 2 Operaciones con sucesos

| Cuando decimos... | Escribimos |
|---|---|
| Ocurre $A$ o $B$ | $A \cup B$ |
| Ocurren $A$ y $B$ | $A \cap B$ |
| No ocurre $A$ | $\overline{A}$ |



**RESUELVE EL RETO**

Las abejas macho nacen de huevos sin fecundar, por tanto tienen madre pero no padre. Las abejas hembra nacen de huevos fecundados. ¿Cuántos antepasados tendrá una abeja macho en la sexta generación?

### 2.1. Unión e intersección de sucesos

- La **unión de dos sucesos** $A$ y $B$, $A \cup B$, es otro suceso formado por los sucesos elementales de $A$ y $B$.
- La **intersección de dos sucesos** $A$ y $B$, $A \cap B$, es otro suceso formado por los sucesos elementales comunes de $A$ y $B$.

**EJEMPLO**

3. En el experimento de lanzar un dado numerado del 1 al 6, expresa mediante una unión o una intersección de sucesos el obtener:
   a) Número impar o mayor que 3. b) Número par y múltiplo de 3.

   a) Sea $A$ = «Obtener número impar» = {1, 3, 5}
   $B$ = «Obtener número mayor que 3» = {4, 5, 6}
   «Obtener número impar o mayor que 3» = $A \cup B$ = {1, 3, 4, 5, 6}

   b) Si hacemos: $A$ = «Obtener número par» = {2, 4, 6}
   $B$ = «Obtener múltiplo de 3» = {3, 6}
   «Obtener número par y múltiplo de 3» = $A \cap B$ = {6}

### 2.2. Suceso complementario

El **suceso contrario o complementario** de un suceso $A$, $\overline{A}$, está formado por todos los sucesos elementales que no están en $A$.

**EJEMPLO**

4. En el experimento que consiste en lanzar un dado numerado del 1 al 6, expresa el suceso «Obtener un número impar» como un suceso complementario.

   Si $A$ = «Obtener un número par», entonces:
   $\overline{A}$ = «No obtener un número par» = «Obtener un número impar»

**ACTIVIDADES**

10 **PRACTICA.** Considera el experimento de extraer una carta de una baraja española. Utiliza la unión y la intersección de sucesos para expresar:
   a) $A$ = «Que la carta sea un as o un rey»
   b) $B$ = «Que la carta sea un rey o sea de copas»
   c) $C$ = «Que la carta sea el caballo de bastos»

11 **APLICA.** Dados los sucesos $A$ = {2, 4, 6, 8, 10, 12}, $B$ = {3, 6, 9, 12} y $C$ = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, calcula:
   a) $A \cup B$ c) $A \cup B \cup C$
   b) $A \cap C$ d) $A \cap B \cap C$

12 **REFLEXIONA.** Dado el suceso $A$ = {2, 4, 6, 8}, ¿puedes calcular $\overline{A}$?

Figura 4.75 Contenidos del Tercer Curso orientadas a las Enseñanzas Académicas de Educación Secundaria. Editorial Santillana

## Realizar operaciones con sucesos

En el experimento que consiste en lanzar una moneda y, después, sacar una bola de una caja en la que hay 3 bolas: una de color rojo, otra azul y otra verde, considerando los siguientes sucesos:

$A$ = «Que la bola que saquemos sea roja» $B$ = «Que salga cara y la bola no sea azul»

Determina los sucesos: a) $A \cup B$

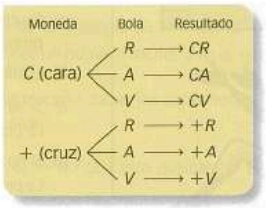
b) $\overline{A \cap B}$ (el complementario de $A \cap B$)

c) $\overline{A} \cup B$ (el complementario de $A$, unión $B$)

Para calcular $\overline{A}$ podemos tomar el espacio muestral $E$ y eliminar los elementos de $A$.

**Pasos a seguir**

1. Determinamos el espacio muestral.




$E = \{CR, CA, CV, +R, +A, +V\}$

2. Definimos los sucesos que nos dan.

$A$ = «Que la bola que saquemos sea roja» = $\{CR, +R\}$

$B$ = «Que salga cara y la bola no sea azul» = $\{CR, CV\}$

3. Realizamos las operaciones con sucesos:
   - La unión está formada por todos los sucesos elementales, eliminando las repeticiones.
   - La intersección, por los sucesos elementales comunes.
   - El complementario, por los sucesos del espacio muestral que no están en el suceso del que hallamos el complementario.

a) $A \cup B = \{\overbrace{+R}^{A}, \underbrace{CR, CV}_{B}\}$

b) $A \cap B = \{CR\}$

$\overline{A \cap B} = \{\cancel{CR}, CA, CV, +R, +A, +V\} = \{CA, CV, +R, +A, +V\}$

c) $\overline{A} = \{\cancel{CR}, CA, CV, \cancel{+R}, +A, +V\} = \{CA, CV, +A, +V\}$

$\overline{A} \cup B = \{CA, CV, +A, +V, CR\}$

## ACTIVIDADES

**13** En un monedero tenemos monedas de 1, 2, 5, 10, 20 y 50 céntimos y sacamos una de ellas al azar. Llamamos:

$A$ = «Sacar una moneda cuyo valor sea mayor o igual que 20 céntimos»

$B$ = «Sacar una moneda cuyo valor sea múltiplo de 5»

$C$ = «Sacar una moneda cuyo valor sea un número impar»

Calcula:

a) $A \cup B \cup C$ c) $\overline{A} \cap C$ e) $\overline{A} \cup \overline{B}$

b) $A \cap B \cap C$ d) $\overline{A \cap C}$ f) $\overline{A \cup B}$

**14** Lanzamos dos dados, uno de color rojo y otro azul, y anotamos el número que aparece en su cara superior. Considerando los siguientes sucesos:

$A$ = «Salir el mismo número en los dos dados»

$B$ = «La suma de los dos números es 9»

$C$ = «El producto de los dos números es mayor que 30»

a) Calcula:

I. $A \cup \overline{B}$ III. $\overline{A} \cap \overline{B}$ V. $\overline{A} \cup \overline{B}$

II. $A \cap B \cap C$ IV. $\overline{A \cap B}$ VI. $\overline{A \cup C}$

b) ¿Qué ocurriría si los dados fuesen del mismo color?

Figura 4.76 Contenidos del Tercer Curso orientadas a las Enseñanzas Académicas de Educación Secundaria. Editorial Santillana

## 3 Probabilidad de un suceso. Regla de Laplace

La **probabilidad**, $P$, de un suceso es un número entre 0 y 1 que indica el grado de posibilidad de que ocurra dicho suceso.




**EJEMPLO**

5. Una organización vende 500 papeletas para el sorteo de un viaje.
   a) Si una sola persona ha comprado las 500 papeletas, ¿qué probabilidad tiene de que le toque el viaje?
   b) ¿Qué ocurrirá si no tiene ninguna papeleta?

   a) Si ha comprado todas las papeletas, es seguro que le tocará el viaje. La probabilidad es 1: $P(\text{Le toque el viaje}) = 1$
   b) Si no tiene ninguna papeleta, es imposible que le toque. La probabilidad es 0: $P(\text{Le toque el viaje}) = 0$

**RESUELVE EL RETO**

Mi vecino me ha dicho que tiene 2 hijos y me ha hablado de uno de ellos que es chico. ¿Cuál es la probabilidad de que sean los dos chicos?

Dos sucesos de un experimento aleatorio son **equiprobables** si tienen la misma probabilidad de ocurrir. Si todos los sucesos elementales de un experimento son equiprobables, el **experimento** es **regular**.

En un experimento regular, la probabilidad de que ocurra un suceso $A$, $P(A)$, se puede calcular aplicando la **regla de Laplace**.

$$P(A) = \frac{\text{n.º de casos favorables al suceso } A}{\text{n.º de casos posibles}}$$

**EJEMPLO**

6. Determina los casos en los que se puede aplicar la regla de Laplace.
   a) En un sorteo para el que se han vendido 1000 papeletas.
   b) En tirar una moneda y ver si cae de pie.

   a) Todas las papeletas tienen las mismas posibilidades. Los sucesos elementales son equiprobables. Se puede aplicar la regla de Laplace.
   b) La probabilidad entre caer de pie y tumbada no es la misma. No son sucesos equiprobables y no se puede aplicar la regla de Laplace.

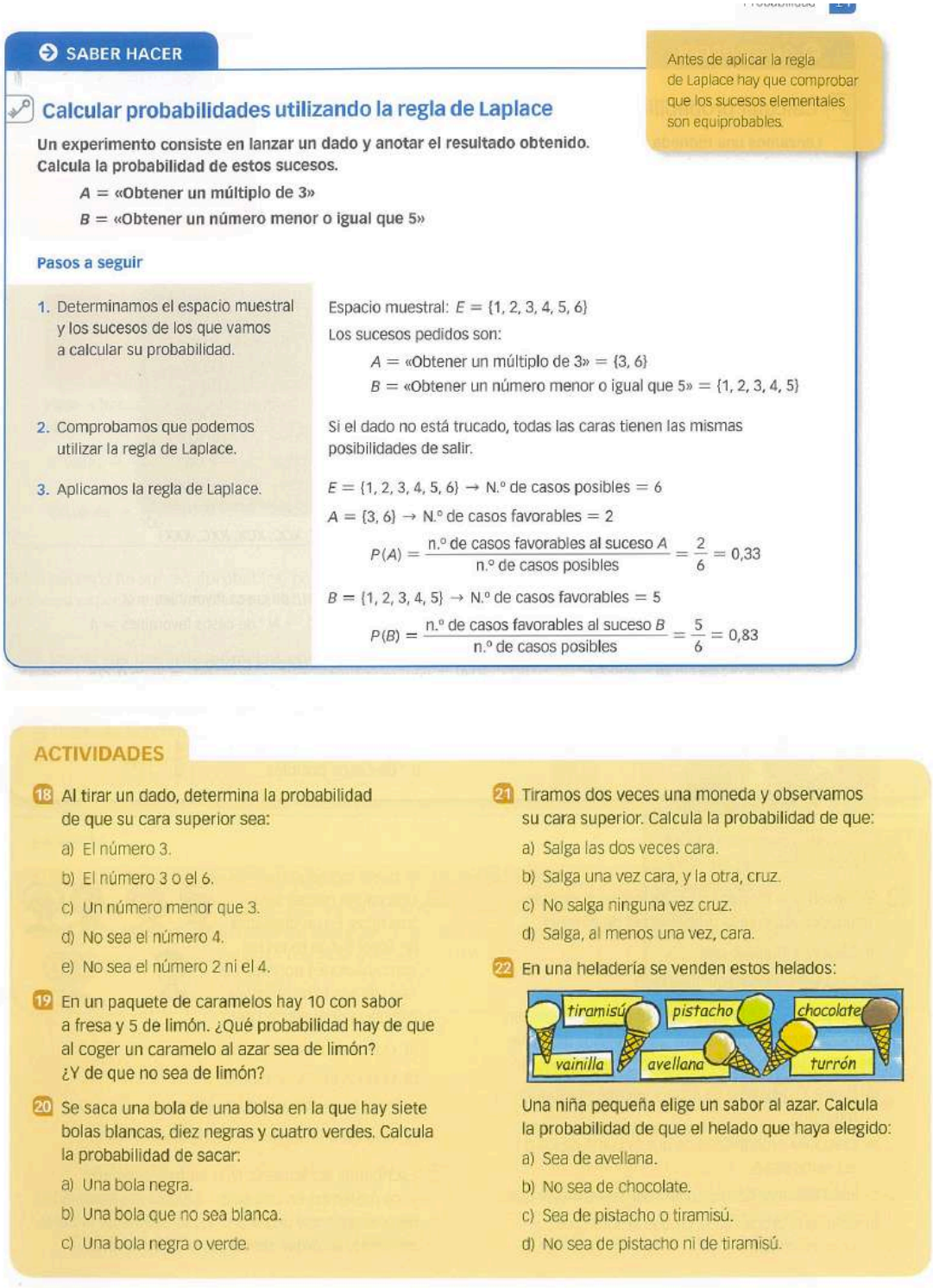
**ACTIVIDADES**

15 PRACTICA. Calcula la probabilidad de estos sucesos referidos al lanzamiento de un dado.
   a) Que salga un número mayor que 7.
   b) Que salga un 4.

16 APLICA. En el experimento anterior, ¿se puede aplicar la regla de Laplace?

17 REFLEXIONA. ¿Cómo sería un dado en el que sus sucesos elementales no fuesen equiprobables?

Figura 4.77 Contenidos del Tercer Curso orientadas a las Enseñanzas Académicas de Educación Secundaria. Editorial Santillana



SABER HACER

## Calcular probabilidades utilizando la regla de Laplace

Antes de aplicar la regla de Laplace hay que comprobar que los sucesos elementales son equiprobables.

**Un experimento consiste en lanzar un dado y anotar el resultado obtenido. Calcula la probabilidad de estos sucesos.**

**$A$ = «Obtener un múltiplo de 3»**

**$B$ = «Obtener un número menor o igual que 5»**

**Pasos a seguir**

1. Determinamos el espacio muestral y los sucesos de los que vamos a calcular su probabilidad.

Espacio muestral: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Los sucesos pedidos son:

$A$ = «Obtener un múltiplo de 3» = $\{3, 6\}$

$B$ = «Obtener un número menor o igual que 5» = $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

2. Comprobamos que podemos utilizar la regla de Laplace.

Si el dado no está trucado, todas las caras tienen las mismas posibilidades de salir.

3. Aplicamos la regla de Laplace.

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow$ N.º de casos posibles $= 6$

$A = \{3, 6\} \rightarrow$ N.º de casos favorables $= 2$

$$P(A) = \frac{\text{n.º de casos favorables al suceso } A}{\text{n.º de casos posibles}} = \frac{2}{6} = 0{,}33$$

$B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow$ N.º de casos favorables $= 5$

$$P(B) = \frac{\text{n.º de casos favorables al suceso } B}{\text{n.º de casos posibles}} = \frac{5}{6} = 0{,}83$$

## ACTIVIDADES

18 Al tirar un dado, determina la probabilidad de que su cara superior sea:

a) El número 3.

b) El número 3 o el 6.

c) Un número menor que 3.

d) No sea el número 4.

e) No sea el número 2 ni el 4.

19 En un paquete de caramelos hay 10 con sabor a fresa y 5 de limón. ¿Qué probabilidad hay de que al coger un caramelo al azar sea de limón? ¿Y de que no sea de limón?

20 Se saca una bola de una bolsa en la que hay siete bolas blancas, diez negras y cuatro verdes. Calcula la probabilidad de sacar:

a) Una bola negra.

b) Una bola que no sea blanca.

c) Una bola negra o verde.

21 Tiramos dos veces una moneda y observamos su cara superior. Calcula la probabilidad de que:

a) Salga las dos veces cara.

b) Salga una vez cara, y la otra, cruz.

c) No salga ninguna vez cruz.

d) Salga, al menos una vez, cara.

22 En una heladería se venden estos helados:



Una niña pequeña elige un sabor al azar. Calcula la probabilidad de que el helado que haya elegido:

a) Sea de avellana.

b) No sea de chocolate.

c) Sea de pistacho o tiramisú.

d) No sea de pistacho ni de tiramisú.

Figura 4.78 Contenidos del Tercer Curso orientadas a las Enseñanzas Académicas de Educación Secundaria. Editorial Santillana

## Calcular probabilidades utilizando un diagrama de árbol

**Lanzamos una moneda al aire tres veces y anotamos el resultado obtenido. Calcula la probabilidad de estos sucesos.**

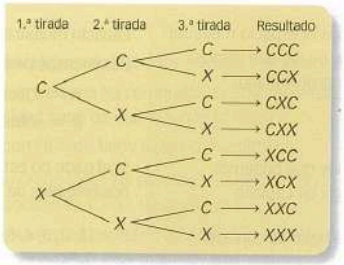
**$A$ = «Obtener dos caras»**

**$B$ = «Obtener más de una cruz»**

Si lanzamos la misma moneda tres veces, los resultados *CCX* y *CXC* no son el mismo. Si lanzamos tres monedas iguales a la vez, solo podemos distinguir si hemos obtenido 1 cara, 2 caras, ..., no el orden. Es decir, *CCX* y *CXC* son el mismo resultado, obtener 2 caras.

**Pasos a seguir**

1. Determinamos el espacio muestral, utilizando un diagrama de árbol, para hallar el número de casos posibles.




$E = \{CCC, CCX, CXC, CXX, XCC, XCX, XXC, XXX\}$

N.º de casos posibles $= 8$

2. Hallamos el número de casos favorables de los sucesos que nos interesan.

$A = \{CCX, CXC, XCC\} \rightarrow$ N.º de casos favorables $= 3$

$B = \{CXX, XCX, XXC, XXX\} \rightarrow$ N.º de casos favorables $= 4$

3. Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(A) = \frac{\text{n.º de casos favorables al suceso } A}{\text{n.º de casos posibles}} = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

$$P(B) = \frac{\text{n.º de casos favorables al suceso } B}{\text{n.º de casos posibles}} = \frac{4}{8} = 0{,}5$$

## ACTIVIDADES

23 Se lanzan una moneda y un dado y se anotan los resultados. Calcula la probabilidad de obtener:

a) Cara y un número par.

b) Cruz y un número múltiplo de 3.

24 Adela y Susana escriben, cada una en un papel, un número comprendido entre 1 y 4, ambos inclusive. Después, suman los dos números que han escrito.

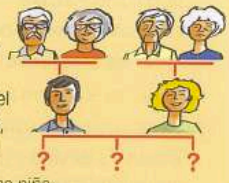
a) Dibuja el diagrama de árbol y escribe el espacio muestral.

b) Calcula la probabilidad de que la suma de los dos números sea 6.

c) Halla la probabilidad de que la suma sea mayor que 7.

d) Calcula la probabilidad de que la suma sea un número par.

25 Una pareja planea tener tres hijos. En un diagrama de árbol indica todas las combinaciones posibles del sexo de sus hijos. Después, calcula la probabilidad de:




a) Que sean dos niños y una niña.

b) Que los tres sean niñas.

c) Que al menos uno de ellos sea niño.

d) Que los tres tengan el mismo sexo.

26 Escribimos las letras O, N, U en tres papelitos y los metemos en una bolsa. Calcula la probabilidad de que, sacando uno a uno los papelitos de la bolsa, se forme, en orden de salida, la palabra UNO.

Figura 4.79 Contenidos del Tercer Curso orientadas a las Enseñanzas Académicas de Educación Secundaria. Editorial Santillana

## 4 Frecuencia y probabilidad

La **frecuencia relativa**, $h_i$, de un suceso es el cociente entre las veces que ocurre el suceso y el total de veces que se realiza el experimento.

**EJEMPLO**

7. Realizamos el experimento que consiste en extraer una judía de un saco con judías blancas y judías pintas, anotar su color y devolverla al saco.

| Veces que se realiza el experimento | 10 | 100 | 1000 | 1500 |
|---|---|---|---|---|
| N.º de veces que extraemos una judía blanca | 6 | 67 | 687 | 1048 |

Halla la frecuencia relativa de extraer una judía blanca según el número de veces que se realiza el experimento.

10 veces $\rightarrow \frac{6}{10} = 0{,}6$ 1000 veces $\rightarrow \frac{687}{1000} = 0{,}687$

100 veces $\rightarrow \frac{67}{100} = 0{,}67$ 1500 veces $\rightarrow \frac{1048}{1500} = 0{,}699$

Si los sucesos no son equiprobables, podemos calcular probabilidades de forma experimental mediante el estudio de sus frecuencias relativas.

La **ley de los grandes números** afirma que, a medida que aumentan las veces que se realiza un experimento aleatorio, la frecuencia relativa de un suceso se va aproximando a su probabilidad.



En el experimento de sacar una judía del saco, los sucesos elementales son sacar judía blanca o sacar judía pinta. Solo serán equiprobables si hay el mismo número de judías blancas que de pintas.

**EJEMPLO**

8. En el experimento anterior, halla la probabilidad de obtener judía blanca.

No podemos aplicar la regla de Laplace al no conocer las judías que hay de cada clase. Pero, al aumentar las veces que realizamos el experimento, la frecuencia relativa de obtener una judía blanca se aproxima a 0,7.

$P(\text{Obtener judía blanca}) = 0{,}7$

**ACTIVIDADES**

27 **PRACTICA.** Tenemos un dado trucado con el cual hemos obtenido estos resultados.

| Lanzamientos | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Veces que sale 4 | 3 | 7 | 10 | 13 | 16 | 19 |

¿Qué probabilidad asignarías al suceso «Salir 4»?

28 **APLICA.** En el experimento de la actividad anterior, ¿podemos afirmar que el dado está trucado? ¿Por qué?

29 **REFLEXIONA.** Una máquina fabrica chinchetas. ¿Cómo calcularías la probabilidad de que, escogida una chincheta al azar, sea defectuosa?

Figura 4.80 Contenidos del Tercer Curso orientadas a las Enseñanzas Académicas de Educación Secundaria. Editorial Santillana

## 5 Propiedades de la probabilidad

### 5.1. Sucesos compatibles e incompatibles




Cuando dos sucesos pueden ocurrir a la vez, decimos que son **compatibles**; en caso contrario, se denominan **incompatibles**.

**EJEMPLO**

9. En el experimento de lanzar un dado decide si estos sucesos son compatibles o incompatibles.

   $A$ = «Obtener 4» $B$ = «Obtener número par»

   $C$ = «Obtener un número mayor que 5»

   $A$ y $B$ son compatibles, ya que 4 es un número par y, por tanto, pertenece a ambos sucesos.

   $B$ y $C$ son también compatibles, ya que 6 pertenece a ambos sucesos.

   $A$ y $C$ son incompatibles, ningún resultado ocurre en ambos a la vez.

**RESUELVE EL RETO**

Una bolsa de caramelos tiene 10 caramelos y puede haber cualquier cantidad de caramelos de limón y de naranja. Incluso todos pueden ser de un mismo sabor. ¿Qué probabilidad hay de que al coger uno no sea de limón?

### 5.2. Propiedades

- Para cualquier suceso $A$ se cumple que: $0 \leq P(A) \leq 1$.
- La probabilidad de un suceso seguro es 1, $P(E) = 1$, y la probabilidad de un suceso imposible es 0, $P(\varnothing) = 0$.
- Si dos sucesos son incompatibles, la probabilidad de su unión es:
  $$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
- Si dos sucesos son compatibles, la probabilidad de su unión es:
  $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
- Si $\overline{A}$ es el suceso complementario de $A$, su probabilidad es:
  $$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

**ACTIVIDADES**

30 **PRACTICA.** Se extrae una carta de la baraja española y se consideran estos sucesos.

$A$ = «Salir as, rey, caballo o sota»

$B$ = «Salir una carta de bastos»

$C$ = «Salir un rey»



a) Estudia la compatibilidad de estos sucesos dos a dos.

b) Encuentra un suceso incompatible con cada uno de ellos y otro incompatible con los tres a la vez.

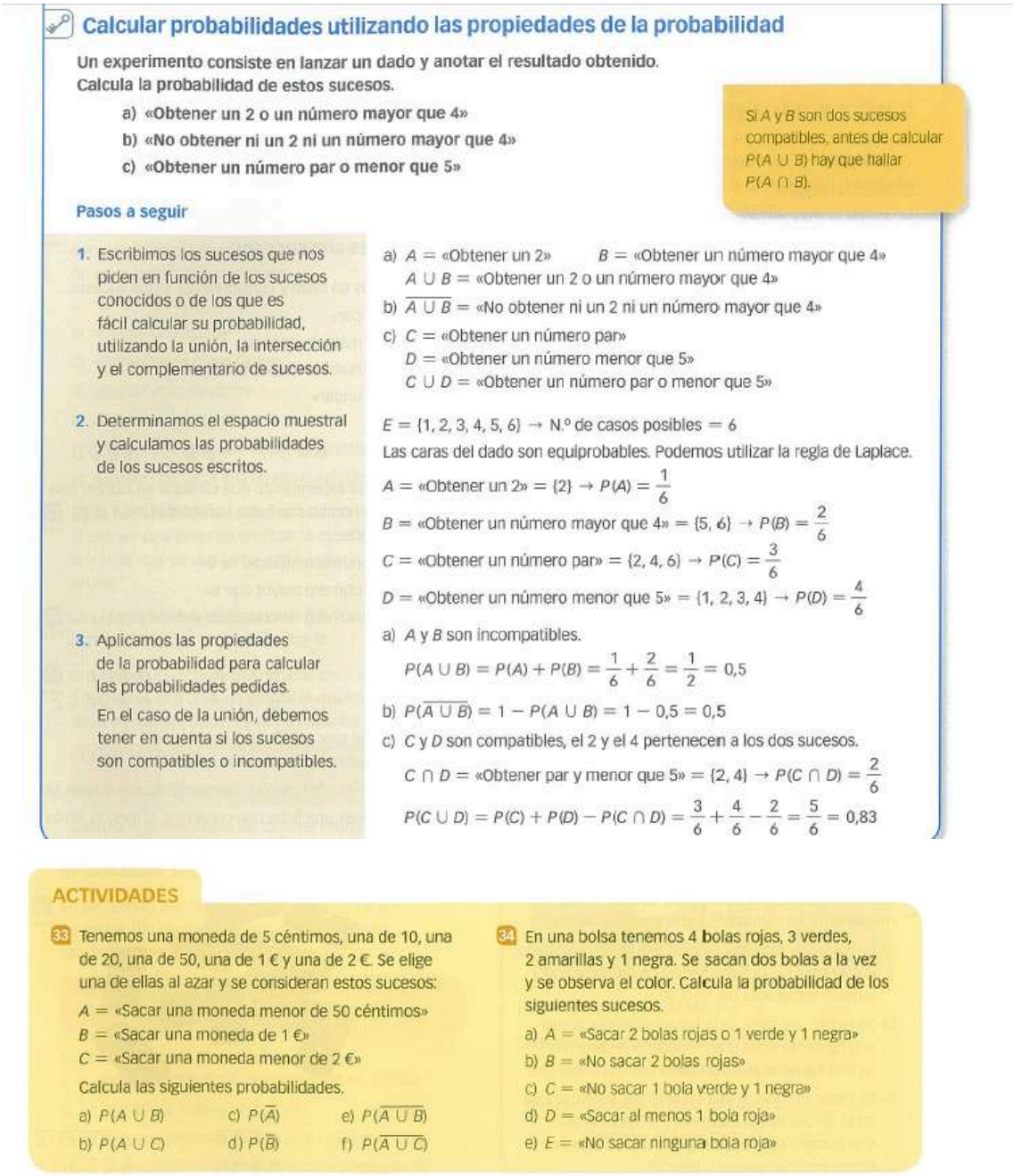
31 **APLICA.** Tenemos un experimento cuyo espacio muestral es: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y tomamos los sucesos: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 7\}$, $C = \{2, 4, 6, 8\}$ y $D = \{1, 5, 9\}$. Estudia la compatibilidad de estos sucesos dos a dos.

32 **REFLEXIONA.** Si un suceso $A$ está contenido en otro $B$, razona si estas igualdades son verdaderas o falsas.

a) $P(A) = P(B)$ c) $P(\overline{B}) = 1 - P(A)$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ d) $P(A \cap B) = P(A)$

Figura 4.81 Contenidos del Tercer Curso orientadas a las Enseñanzas Académicas de Educación Secundaria. Editorial Santillana



## Calcular probabilidades utilizando las propiedades de la probabilidad

**Un experimento consiste en lanzar un dado y anotar el resultado obtenido. Calcula la probabilidad de estos sucesos.**

**a) «Obtener un 2 o un número mayor que 4»**

**b) «No obtener ni un 2 ni un número mayor que 4»**

**c) «Obtener un número par o menor que 5»**

Si $A$ y $B$ son dos sucesos compatibles, antes de calcular $P(A \cup B)$ hay que hallar $P(A \cap B)$.

**Pasos a seguir**

1. Escribimos los sucesos que nos piden en función de los sucesos conocidos o de los que es fácil calcular su probabilidad, utilizando la unión, la intersección y el complementario de sucesos.

a) $A$ = «Obtener un 2» $B$ = «Obtener un número mayor que 4»
$A \cup B$ = «Obtener un 2 o un número mayor que 4»

b) $\overline{A \cup B}$ = «No obtener ni un 2 ni un número mayor que 4»

c) $C$ = «Obtener un número par»
$D$ = «Obtener un número menor que 5»
$C \cup D$ = «Obtener un número par o menor que 5»

2. Determinamos el espacio muestral y calculamos las probabilidades de los sucesos escritos.

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow$ N.º de casos posibles $= 6$

Las caras del dado son equiprobables. Podemos utilizar la regla de Laplace.

$A$ = «Obtener un 2» $= \{2\} \rightarrow P(A) = \frac{1}{6}$

$B$ = «Obtener un número mayor que 4» $= \{5, 6\} \rightarrow P(B) = \frac{2}{6}$

$C$ = «Obtener un número par» $= \{2, 4, 6\} \rightarrow P(C) = \frac{3}{6}$

$D$ = «Obtener un número menor que 5» $= \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow P(D) = \frac{4}{6}$

3. Aplicamos las propiedades de la probabilidad para calcular las probabilidades pedidas.

En el caso de la unión, debemos tener en cuenta si los sucesos son compatibles o incompatibles.

a) $A$ y $B$ son incompatibles.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

b) $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

c) $C$ y $D$ son compatibles, el 2 y el 4 pertenecen a los dos sucesos.

$C \cap D$ = «Obtener par y menor que 5» $= \{2, 4\} \rightarrow P(C \cap D) = \frac{2}{6}$

$P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6} = 0{,}83$

### ACTIVIDADES

**33** Tenemos una moneda de 5 céntimos, una de 10, una de 20, una de 50, una de 1 € y una de 2 €. Se elige una de ellas al azar y se consideran estos sucesos:

$A$ = «Sacar una moneda menor de 50 céntimos»
$B$ = «Sacar una moneda de 1 €»
$C$ = «Sacar una moneda menor de 2 €»

Calcula las siguientes probabilidades.

a) $P(A \cup B)$ c) $P(\overline{A})$ e) $P(\overline{A \cup B})$
b) $P(A \cup C)$ d) $P(\overline{B})$ f) $P(\overline{A \cup C})$

**34** En una bolsa tenemos 4 bolas rojas, 3 verdes, 2 amarillas y 1 negra. Se sacan dos bolas a la vez y se observa el color. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos.

a) $A$ = «Sacar 2 bolas rojas o 1 verde y 1 negra»
b) $B$ = «No sacar 2 bolas rojas»
c) $C$ = «No sacar 1 bola verde y 1 negra»
d) $D$ = «Sacar al menos 1 bola roja»
e) $E$ = «No sacar ninguna bola roja»

Figura 4.82 Contenidos del Tercer Curso orientadas a las Enseñanzas Académicas de Educación Secundaria. Editorial Santillana

## El diagrama en árbol para confeccionar conjuntos ordenados

La **estrategia del casillero** nos resulta útil para cierto tipo de problemas. Pero hay situaciones que se razonan mejor con la estrategia del **diagrama en árbol.**

| QUINIELA DE 4.º H | |
|---|---|
| Mallorca – Deportivo | ❑ |
| Betis – Albacete | ❑ |

- **Enunciado 6.** *Se juegan los partidos de ida de las semifinales de la Copa del Rey de fútbol. Son Mallorca-Deportivo y Betis-Albacete. Los chicos y las chicas de 4.º H son muy dados a hacer apuestas. Confeccionan una quiniela con los dos partidos.*

  *En cada cuadrito hay que poner 1, X o 2. Para ganar, hay que acertar los dos resultados. La cantidad recaudada se reparte entre todos los ganadores.*

  *a) ¿Cuántas quinielas tuvo que rellenar Mario, el forofo, que quería tener la seguridad de ganar?*

  *b) ¿Cuántas quinielas tendría que haber hecho Mario la semana anterior para acertar los cuatro partidos de vuelta de los cuartos de final de la Copa del Rey?*

- **Enunciado 7.** *Antonio, Beatriz, Carmen y Darío juegan la fase final de un campeonato de pimpón. Hay una copa para el campeón y una placa para el subcampeón.*

  *a) ¿De cuántas formas pueden adjudicarse los trofeos?*

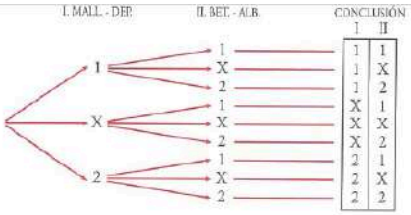
  *b) ¿Cuántas posibles clasificaciones finales puede haber?*

**Aclaración**

En estos enunciados, la estrategia del casillero no resulta eficaz. Por eso recurrimos al diagrama en árbol.

Observa la sencillez de las siguientes **resoluciones:**

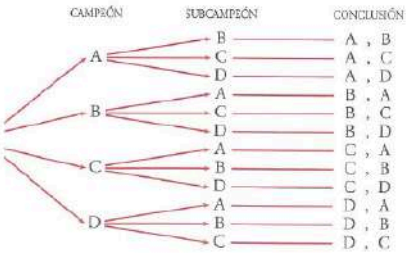
En **6 a):** ¿Cuántas quinielas hay que hacer para acertar los dos partidos?




Hay tres posibilidades para acertar el primer partido. A cada una de esas tres posibilidades le corresponden las tres que se necesitan para acertar el otro partido:

$3 \cdot 3 = 9$ quinielas

En **7 a):** ¿De cuántas formas pueden repartirse los dos trofeos?



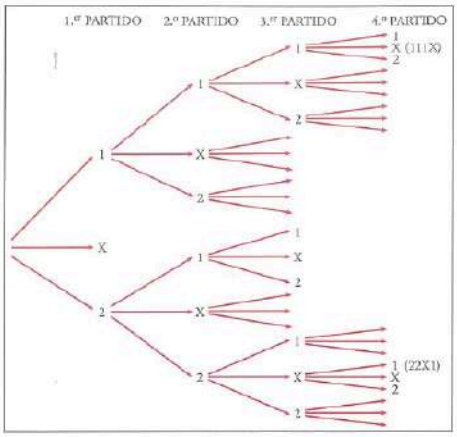

Hay cuatro posibilidades para el puesto de campeón. Cada una de ellas se puede completar con 3 opciones para el subcampeón:

$4 \cdot 3 = 12$ posibilidades

**El orden importa**

Con el diagrama en árbol se consigue formar y contar conjuntos ordenados.

- Observa que no es lo mismo X, 2 que 2, X. (Si Deportivo gana en Mallorca, 2, y Betis-Albacete empatan, X, no ganará la quiniela quien haya puesto esos signos en otro orden).
- Y en el segundo ejemplo, no es lo mismo AB que BA. ¡No es igual quedar campeón que subcampeón!




El **diagrama en árbol** tiene la ventaja de que permite pensar, paso a paso, en este tipo de problemas en los que las distintas posibilidades se van multiplicando.

Antes de dar cada paso, nos cuestionaremos a cuántas ramas da lugar la nueva situación en la que nos encontramos.

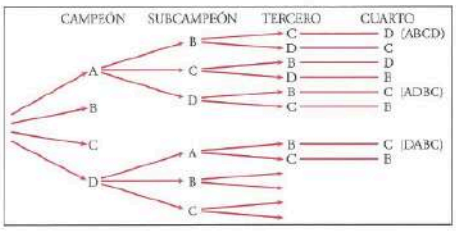
Resolvamos los enunciados 6 b) y 7 b).

- **Enunciado 6 b). Resolución**

En cada paso, el número de posibilidades se multiplica por 3, pues el resultado de cada partido no depende de los anteriores.

El número de quinielas posibles es:

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$$




- **Enunciado 7 b). Resolución**

Hay 4 posibles campeones, pero, una vez fijado el campeón, solo puede haber 3 subcampeones. Y si fijamos al 1.º y al 2.º, solo quedan 2 aspirantes para el 3.er lugar. Conocidos los 1.º, 2.º y 3.º, para el 4.º lugar solo queda un candidato.

El número de posibilidades es:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

**En la web**

Ejemplos de conteos con diagramas en árbol.

El diagrama en árbol es un procedimiento óptimo para elaborar o, simplemente, contabilizar conjuntos ordenados.

Con el **diagrama en árbol** se puede pensar paso a paso y permite ver cuáles son las distintas posibilidades que se dan en cada uno de esos pasos.

Si en lugar de pormenorizar todas las posibilidades solo queremos contarlas, podremos dejar el árbol incompleto o, incluso, simplemente imaginarlo:

*¿Cuántas flechas hay que poner en primer lugar? ¿Cuántas salen de cada uno de esos resultados?...*

**Ejercicio resuelto**

***¿De cuántas formas se pueden repartir 3 medallas entre las 12 participantes de una carrera?***

1.er lugar: 12.
2.º lugar: Por cada una de las anteriores, 11.
3.er lugar: Por cada una de las anteriores, 10.

Total:
$12 \times 11 \times 10 =$
$= 1\,320$ posibilidades

**Piensa y practica**

**3.** Alberto, Beatriz y Claudia van a ver a su abuelo. Al irse, este les dice: "Escoged cada uno el libro que queráis de estos", y les muestra 10 libros distintos. ¿De cuántas formas pueden hacer su elección?

Figura 4.83 Contenidos del Cuarto Curso orientadas a las Enseñanzas Académicas de Educación Secundaria. Editorial Anaya

# 1 Sucesos aleatorios

Recordemos:

Se llama **suceso aleatorio** a aquel acontecimiento en cuya realización influye el azar.

**Experiencia aleatoria** es aquella cuyo resultado es un suceso aleatorio.



Hay experiencias aleatorias provocadas y otras cuyos resultados se consiguen mediante observación. Por ejemplo, son provocadas:

— Lanzar un dado (o dos, o tres, ...), lanzar una o más monedas, extraer uno o más naipes de una baraja o bolas de una bolsa, ...

— Efectuar un experimento de laboratorio y analizar cualitativa o cuantitativamente el resultado.

Y son del segundo tipo (conseguidas mediante observación):

— Encuestar a los miembros de un colectivo y recabar su opinión respecto a algún acontecimiento, o detalles sobre sus hábitos, aficiones, ... o sus medidas anatómicas (estatura, peso, ...).

— Contar cuántos coches pasan por un lugar durante cinco minutos en distintas horas del día, en distintos días de la semana, ...

## Nomenclatura

**Caso** es cada uno de los posibles resultados que pueden ocurrir al efectuar una experiencia aleatoria. También se llama suceso elemental.

— "3 de copas" es un caso al extraer una carta de una baraja.

— Al lanzar dos dados (uno rojo y uno verde), un caso es obtener "2 en el rojo y 5 en el verde". Este caso se suele designar así: (2, 5).

**Espacio muestral** es el conjunto de todos los posibles casos que pueden ocurrir al efectuar una experiencia aleatoria. Se suele designar mediante la letra $E$, y también se denomina suceso universal.

— En la experiencia "extraer una carta de la baraja", el espacio muestral tiene 40 casos: todos los naipes de la baraja.

— Al lanzar dos dados, el espacio muestral consta de 36 elementos:

$E = \{(1, 1), (1, 2), \ldots, (1, 6), (2, 1), \ldots, (2, 6), \ldots, (5, 1), (5, 2), \ldots, (5, 6), (6, 1), \ldots, (6, 5), (6, 6)\}$

**Suceso** es cualquier conjunto de casos.

— AS y BASTOS son dos posibles sucesos de "extraer un naipe de la baraja".

— "Sale 5 en el dado verde" = $\{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5), (6, 5)\}$ o bien, "suman 4" = $\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$, son posibles sucesos de la experiencia "lanzar un dado rojo y un dado verde".

El suceso universal, $E$, también se llama **suceso seguro,** pues *ocurre* siempre.

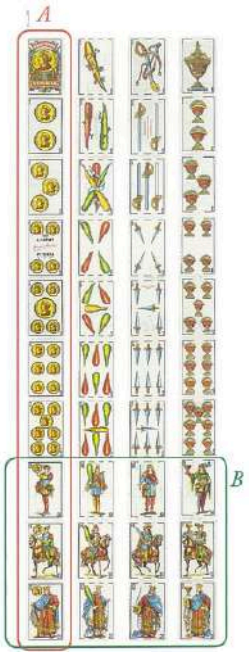
También consideramos suceso a $\varnothing$ (vacío), que no contiene ningún caso. Naturalmente, no *ocurre* nunca y se llama **suceso imposible.**

En la web

Actividades para repasar los conceptos de experimento aleatorio, espacio muestral y suceso.

Figura 4.84 Contenidos del Cuarto Curso orientadas a las Enseñanzas Académicas de Educación Secundaria. Editorial Anaya

## Relaciones y operaciones con sucesos




La **unión** de dos sucesos $A$ y $B$, que se designa $A \cup B$, es el suceso formado por todos los elementos de $A$ y los de $B$.

La **intersección** de dos sucesos $A$ y $B$, que se designa $A \cap B$, es el suceso formado por los elementos que pertenecen simultáneamente a $A$ y a $B$.

El suceso $A \cup B$ *ocurre* cuando lo hacen $A$ o $B$ o ambos.

El suceso $A \cap B$ *ocurre* cuando lo hacen a la vez $A$ y $B$.

Por ejemplo, considera que el espacio muestral $E$ y los sucesos $A$ y $B$ son los siguientes:

$E$ = CARTAS DE UNA BARAJA ESPAÑOLA (son 40) $A$ = OROS $B$ = FIGURAS

Entonces:

$A \cup B =$ 

$A \cap B =$ 

Dos sucesos son **incompatibles** cuando no tienen en común ningún suceso elemental. Es decir, es imposible que *ocurran* simultáneamente.

Si los sucesos $A$ y $B$ son incompatibles, entonces $A \cap B = \varnothing$.

En la baraja española, los sucesos OROS y ESPADAS son incompatibles.

Un suceso, $S'$, se dice que es **contrario** del suceso $S$ cuando entre ambos se reparten los elementos del espacio muestral. Es decir, siempre ocurre uno u otro, pero nunca ocurren simultáneamente.

Si $S'$ es el suceso contrario de $S$, entonces $S \cap S' = \varnothing$ y $S \cup S' = E$.

**En la web**

Actividades para reforzar la relación entre un suceso y su contrario.

El suceso contrario a $A$ = OROS es $A'$ = COPAS, ESPADAS O BASTOS. $A$ tiene 10 elementos y $A'$ tiene 30.

### Piensa y practica

**1.** Una bolsa tiene 10 bolas numeradas del 1 al 10. La experiencia consiste en sacar una bola y anotar su número.

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) Considera estos sucesos:

$A$ = "número primo" $B$ = "múltiplo de 3"

Describe los sucesos siguientes:

$A$ $A'$ $A \cup B$ $A \cup A'$

$B$ $B'$ $A \cap B$ $A \cap A'$

**2.** Lanzamos tres veces una moneda.

a) Completa en tu cuaderno el espacio muestral:

$E$ = {(C, C, C), (C, C, +), (C, +, C), ...}

b) Describe los siguientes sucesos:

$A$ = "la primera vez salió cara"

$B$ = "hay al menos dos caras"

c) Describe los sucesos $A \cup B$, $A \cap B$, $A'$ y $B'$.

d) Describe un suceso que sea incompatible con $A$ y con $B$. ¿Será incompatible con $A \cup B$?

Figura 4.85 Contenidos del Cuarto Curso orientadas a las Enseñanzas Académicas de Educación Secundaria. Editorial Anaya

## 2 Probabilidades de los sucesos. Propiedades




La **probabilidad** de un **suceso** $S$, que se designa $P[S]$, indica el grado de confianza que podemos tener en que ese suceso ocurra. Se expresa mediante un número comprendido entre 0 y 1.

Por ejemplo, $P[S] = \frac{1}{3}$ significa que, a la larga, el suceso $S$ ocurre una de cada tres veces que se realiza la experiencia.

Si $P[S]$ es un número próximo a 0, el suceso es *poco probable*.

Si $P[S]$ es un número próximo a 1, el suceso es *muy probable*.

### Propiedades de las probabilidades de los sucesos

La probabilidad de que ocurra el suceso seguro es 1; esto es natural, pues ocurre el 100 % de las veces que se realiza la experiencia. También es natural que ese 100 % se reparta entre los sucesos elementales de que consta la prueba. Las siguientes propiedades son traducción de estos hechos.

**Propiedades de la probabilidad**

- La probabilidad del suceso imposible es cero:

  $P[\varnothing] = 0$

  La probabilidad del suceso seguro es 1:

  $P[E] = 1$

  La probabilidad de cualquier otro suceso es un número comprendido entre 0 y 1:

  $0 < P[S] < 1$

- La suma de las probabilidades de los sucesos elementales es 1. Esto se expresa de la manera siguiente:

  Si $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, entonces:

  $P[x_1] + P[x_2] + \ldots + P[x_n] = 1$

- La probabilidad de un suceso es la suma de las probabilidades de sus sucesos elementales:

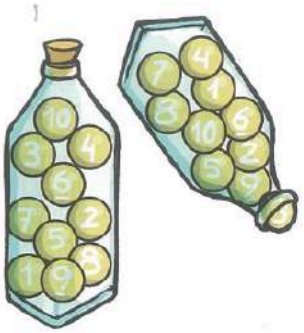
  Si $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$, entonces:

  $$P[S] = P[s_1] + P[s_2] + \ldots + P[s_k]$$

- Si dos sucesos $S$ y $S'$ son contrarios, entonces la suma de sus probabilidades es igual a 1:

  $$P[S] + P[S'] = 1 \rightarrow P[S'] = 1 - P[S]$$

Figura 4.86 Contenidos del Cuarto Curso orientadas a las Enseñanzas Académicas de Educación Secundaria. Editorial Anaya



**Ejemplo**

Tenemos diez bolas numeradas dentro de una botella. Se anota el número que corresponde a la bola que se queda encajada en la boca de la botella. Vamos a asignar probabilidades.

En los diez números de las bolas, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, se dan las siguientes relaciones:

- $P[E] = P[1] + P[2] + P[3] + P[4] + P[5] + P[6] + P[7] + P[8] + P[9] + P[10] = 1$
- Probabilidad de un suceso que consta de varios casos:

  $S = \{1, 3, 5, 7, 9\} \rightarrow P[S] = P[1] + P[3] + P[5] + P[7] + P[9]$
- La probabilidad del suceso contrario de $S$ es:

  $P[S'] = P[2] + P[4] + P[6] + P[8] + P[10] =$

  $= P[E] - (P[1] + P[3] + P[5] + P[7] + P[9]) = 1 - P[S]$

Para asignar valores concretos a esas probabilidades, debemos conocer cómo son las bolas que hay dentro de la botella:

Si las bolas tienen el mismo tamaño y el mismo peso, la probabilidad de cada número es 1/10.



a) **Si las bolas son iguales en tamaño y en peso,** los 10 sucesos elementales tienen la misma probabilidad (son **equiprobables**). En tal caso:

- $P[1] = P[2] = P[3] = P[4] = P[5] = P[6] = P[7] = P[8] = P[9] = P[10] = \frac{1}{10}$
- $P[S] = P[\{1, 3, 5, 7, 9\}] = P[1] + P[3] + P[5] + P[7] + P[9] = 5 \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{2}$
- $P[S'] = 1 - P[S] = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Si las bolas tienen distintos tamaños y pesos, los números tienen probabilidades distintas de salir.



b) **Si los tamaños y los pesos de las bolas son distintos,** los sucesos elementales no tienen la misma probabilidad:

- El reparto de probabilidades puede ser cualquiera, siempre que su suma sea 1. Por ejemplo:
  - $P[1] = P[2] = P[3] = 0{,}08$
  - $P[4] = P[5] = P[6] = P[9] = 0{,}15$
  - $P[7] = P[8] = 0{,}05$
  - $P[10] = 0{,}06$
- $P[S] = P[\{1, 3, 5, 7, 9\}] = P[1] + P[3] + P[5] + P[7] + P[9] =$

  $= 0{,}08 + 0{,}08 + 0{,}15 + 0{,}05 + 0{,}15 = 0{,}51$
- $P[S'] = 1 - P[S] = 1 - 0{,}51 = 0{,}49$

Realmente, en este caso, la asignación de probabilidades debe hacerse mediante experimentación, como se explica en el siguiente apartado.

**Piensa y practica**

1. Halla la probabilidad de los sucesos $A = \{2, 3, 4, 8, 9, 10\}$ y $A'$, tanto en el caso de las bolas iguales como en el que tienen distintos pesos y tamaños.

Figura 4.87 Contenidos del Cuarto Curso orientadas a las Enseñanzas Académicas de Educación Secundaria. Editorial Anaya

# 3 Probabilidades en experiencias simples

## Experiencias irregulares



Para hallar la probabilidad de un suceso correspondiente a una experiencia irregular (una chincheta, o un dado cargado, o extraer una bola de una botella con una composición heterogénea en tamaños y pesos, ...), no queda más remedio que experimentar. Es decir, repetir la experiencia muchas veces, averiguar la frecuencia relativa de ese suceso y asignarle ese valor (aproximado) a la probabilidad. Cuantas más veces repitamos la experiencia, más fiable será el valor asignado.

Por ejemplo, si en una bolsa hay bolas de cinco colores (●, ●, ●, ○ y ●) y realizamos 100 veces la experiencia de extraer, mirar, anotar y devolver a la bolsa, obteniendo los siguientes resultados:

$f(●) = 34,\ f(●) = 23,\ f(●) = 21,\ f(○) = 8,\ f(●) = 14$

les asignaríamos los siguientes valores a las probabilidades:

$P[●] \approx fr(●) = 0{,}34;\ P[●] \approx fr(●) = 0{,}23;\ P[●] \approx fr(●) = 0{,}21;$

$P[○] \approx fr(○) = 0{,}08;\ P[●] \approx fr(●) = 0{,}14$

## Experiencias regulares. Ley de Laplace

Si la experiencia aleatoria se realiza con un instrumento regular (dado correcto, baraja completa, botella con bolas homogéneas en tamaños y pesos de la que se extrae una, ...), entra en juego la ley de Laplace. Recordémosla:

- Si el espacio muestral tiene $n$ casos y la experiencia es *regular*, entonces todos ellos tienen la misma probabilidad, $1/n$.
- Si un suceso tiene $k$ casos, entonces su probabilidad es $k/n$.

$$P[S] = \frac{\text{número de casos favorables a } S}{\text{número total de casos posibles}}$$

Por ejemplo, en una bolsa hay 40 bolas idénticas salvo en el color. De ellas, 15 son rojas. Entonces, al extraer una bola al azar:

$$P[\text{Roja}] = \frac{15}{40} = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

### Problemas resueltos

**1.** ***Lanzamos un dado con forma de dodecaedro regular, con las caras numeradas del 1 al 12. Calcular:***

***a) P [8]***

***b) P [menor que 3]***

***c) P [impar]***

***d) P [número primo]***

***e) P [mayor que 4 y menor que 8]***

a) $P[8] = \frac{1}{12}$. Hay 12 casos, y el "8" es uno de ellos.

b) Solo 1 y 2 son menores que 3 $\rightarrow$ $P[\text{menor que } 3] = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

c) Hay 6 números impares menores que 12 $\rightarrow$ $P[\text{impar}] = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

d) 2, 3, 5, 7, 11 son primos $\rightarrow$ $P[\text{número primo}] = \frac{5}{12}$

e) $P[\{5, 6, 7\}] = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

Figura 4.88 Contenidos del Cuarto Curso orientadas a las Enseñanzas Académicas de Educación Secundaria. Editorial Anaya

**2.** ***Se han fabricado con un molde varios miles de dados. Sospechamos que son incorrectos. ¿Cómo procedemos para averiguar si son o no correctos? En caso de que no lo sean, ¿cómo averiguaremos la probabilidad de cada cara?***

Podemos suponer que todos los dados son idénticos. Experimentamos con varios efectuando, en total, 1 000 lanzamientos. Estos son los resultados:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | 154 | 123 | 236 | 105 | 201 | 181 |
| $fr$ | 0,154 | 0,123 | 0,236 | 0,105 | 0,201 | 0,181 |

Observamos que algunas de las frecuencias relativas se diferencian demasiado del valor 1/6 = 0,166...

Puesto que el número de experimentaciones (1 000) es suficientemente grande, podemos concluir que el dado es defectuoso. Tomaremos las frecuencias relativas de las distintas caras como valores aproximados de sus respectivas probabilidades.

**3.** ***Lanzamos dos dados correctos y anotamos las diferencias de las puntuaciones.***

***a) ¿Cuál es el espacio muestral?***

***b) ¿Qué probabilidad tiene cada caso?***

***c) Hallar la probabilidad del suceso "la diferencia es mayor que 3".***

| | • | •• | ••• | •••• | ••••• | •••••• |
|---|---|---|---|---|---|---|
| • | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| •• | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| ••• | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| •••• | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| ••••• | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 |
| •••••• | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |

A partir de la tabla de la izquierda, construimos la distribución siguiente:

| DIFERENCIAS | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| N.º DE VECES | 6 | 10 | 8 | 6 | 4 | 2 |
| PROBABILIDAD | 6/36 | 10/36 | 8/36 | 6/36 | 4/36 | 2/36 |

a) y b) En la tabla anterior aparece el espacio muestral, $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, con las probabilidades asociadas a cada caso.

c) $P$[diferencia mayor que 3] = $P[\{4, 5\}]$ = 4/36 + 2/36 = 6/36 = 1/6

**4.** ***Un juego de cartas solo distingue estas posibilidades: FIGURA (sota, caballo o rey), AS, MENOR QUE 6 (2, 3, 4, 5), MAYOR QUE 5 (6, 7).***

***a) ¿Cuál es el espacio muestral?***

***b) Dar la probabilidad de cada caso.***

***c) ¿Cuál es la probabilidad de "NO FIGURA"?***

Hay 40 cartas. La probabilidad de cada una es 1/40.

a) En este juego, el espacio muestral es $E$ = {"FIGURA", "AS", "< 6", "> 5"}.

b) Hay 3 figuras en cada palo ⟶ $P$[FIGURA] = 12/40 = 3/10 = 0,3

Hay 4 ases en la baraja ⟶ $P$[AS] = 4/40 = 1/10 = 0,1

Hay 4 números < 6 en cada palo → $P$[< 6] = 16/40 = 2/5 = 0,4

Hay 2 números > 5 en cada palo → $P$[> 5] = 8/40 = 1/5 = 0,2

c) $P$[no FIGURA] = 1 − $P$[FIGURA] = 1 − 0,3 = 0,7

## Piensa y practica

En la web Actividades para reforzar el cálculo de probabilidades sencillas.

**1.** Lanzamos un dado con forma de octaedro, con sus caras numeradas del 1 al 8. Evalúa estas probabilidades:

a) $P$[múltiplo de 3]

b) $P$[menor que 5]

c) $P$[número primo]

d) $P$[no múltiplo de 3]

**2.** Lanzamos dos dados y anotamos *la menor de las puntuaciones*.

a) Escribe el espacio muestral e indica la probabilidad de cada uno.

b) Calcula:

$P$[< 4] $P$[no < 4]

En la web Cálculo de probabilidades mediante la ley de Laplace.

Figura 4.89 Contenidos del Cuarto Curso orientadas a las Enseñanzas Académicas de Educación Secundaria. Editorial Anaya

# 4 Probabilidades en experiencias compuestas

**Recuerda**

Las siguientes experiencias:

a) *extraer tres cartas de una baraja,*

b) *lanzar cinco dados,*

se pueden considerar como experiencias compuestas de otras simples:

a) *Extraer una carta de una baraja, después otra, y después otra.*

b) *Lanzar un dado, y otro… y otro.*

Las experiencias simples que forman una experiencia compuesta pueden ser *dependientes* o *independientes.*

Dos o más experiencias aleatorias se llaman **independientes** cuando el resultado de cada una de ellas no depende del resultado de las demás.

Por ejemplo, el lanzamiento de dos dados puede considerarse como composición de dos pruebas (un dado y otro dado) independientes, pues el resultado de cada dado no influye en el otro.

Dos o más experiencias aleatorias se llaman **dependientes** cuando el resultado de cada una de ellas influye en las probabilidades de las siguientes.

Por ejemplo, extraer dos cartas de una baraja (una carta seguida de otra carta) es la composición de dos pruebas *dependientes,* pues el resultado de la primera influye en las probabilidades de los sucesos de la segunda:

La 1.ª es AS. Quedan 3 ASES en 39 cartas.



La 1.ª no es AS. Quedan 4 ASES en 39 cartas.



| 1.ª extracción | quedan | 2.ª extracción |
|---|---|---|
| AS | 39 cartas, 3 ASES | $P[\text{AS}] = 3/39$ |
| NO AS | 39 cartas, 4 ASES | $P[\text{AS}] = 4/39$ |

Como vemos, las probabilidades de los sucesos en la 2.ª extracción *dependen* de lo que ocurrió en la 1.ª.

## Extracciones con o sin reemplazamiento



"Extraemos una bola de esta bolsa y, después, otra". Falta un dato: ¿la que hemos extraído la echamos de nuevo a la bolsa antes de la 2.ª extracción o no?

— "Sacamos una bola, la miramos, la devolvemos a la bolsa, removemos y volvemos a sacar", lo resumimos así: "sacamos dos bolas **con reemplazamiento**".

— "Sacamos una bola, la miramos y sacamos otra" se resume así: "sacamos dos bolas **sin reemplazamiento**".

En el primer caso, las experiencias son independientes. En el segundo, dependientes.

**En la web**

Actividades para reforzar la distinción entre experiencias dependientes e independientes.

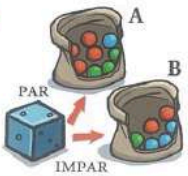
**Piensa y practica**

**1.**



Lanzamos un dado y, después, sacamos una bola de la bolsa. Estas dos experiencias, ¿son dependientes o independientes?

**2.**




Lanzamos un dado. Si sale par, extraemos una bola de la bolsa A. Si sale impar, de la B. Las experiencias, ¿son dependientes o independientes?

Figura 4.90 Contenidos del Cuarto Curso orientadas a las Enseñanzas Académicas de Educación Secundaria. Editorial Anaya

UNIDAD 12

# 5 Composición de experiencias independientes

Es más sencillo calcular las probabilidades de los sucesos compuestos descomponiéndolos en sucesos simples.

**Experiencias independientes**

El resultado de cada experiencia **no influye** en el resultado de la siguiente.

Cuando varias experiencias aleatorias son independientes, la probabilidad de que ocurra $S_1$ en la primera, $S_2$ en la segunda, etc., es:

$$P[S_1 \text{ y } S_2 \text{ y } \ldots] = P[S_1] \cdot P[S_2] \cdot \ldots$$

## Problemas resueltos

**1.** ***Lanzamos dos dados, uno rojo (R) y otro verde (V). Hallar estas probabilidades:***

***a) 3 en R y 5 en V***

***b) 5 en R y 3 en V***

***c) un 3 y un 5***

***d) PAR en R y > 2 en V***

***"PAR" = {2, 4, 6}***

***"> 2" = {3, 4, 5, 6}***

a) $P[3 \text{ en R y } 5 \text{ en V}] = P[3] \cdot P[5] = 1/6 \cdot 1/6 = 1/36$

b) $P[5 \text{ en R y } 3 \text{ en V}] = P[5] \cdot P[3] = 1/6 \cdot 1/6 = 1/36$

c) $P[\text{un 3 y un 5}] = P[3 \text{ en R y } 5 \text{ en V}] + P[5 \text{ en R y } 3 \text{ en V}] =$

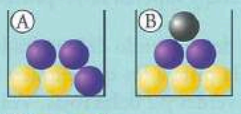
$$= \left(\frac{1}{36}\right) + \left(\frac{1}{36}\right) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

d) $P[\text{PAR en R y} > 2 \text{ en V}] =$

$$= P[\text{PAR}] \cdot P[> 2] = \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1,1 | 2,1 | 3,1 | 4,1 | 5,1 | 6,1 |
| 1,2 | 2,2 | 3,2 | 4,2 | 5,2 | 6,2 |
| 1,3 | 2,3 | 3,3 | 4,3 | 5,3 | 6,3 |
| 1,4 | 2,4 | 3,4 | 4,4 | 5,4 | 6,4 |
| 1,5 | 2,5 | 3,5 | 4,5 | 5,5 | 6,5 |
| 1,6 | 2,6 | 3,6 | 4,6 | 5,6 | 6,6 |

**2.** ***Sacamos una bola de A y una bola de B. Calcular:***




***a) P[ y ]***

***b) P[ y ]***

***c) P[ y ]***

***d) P [una de ellas y otra ]***

***e) P [la segunda ]***

a) $P[\bigcirc \text{ y } \bigcirc] = P[1.^a \bigcirc] \cdot P[2.^a \bigcirc] = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$

b) $P[\bigcirc \text{ y } \bullet] = P[1.^a \bigcirc] \cdot P[2.^a \bullet] = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$

c) $P[\bullet \text{ y } \bigcirc] = P[1.^a \bullet] \cdot P[2.^a \bigcirc] = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{6} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$

d) $P[\text{una de ellas } \bigcirc \text{ y otra } \bullet] = P[\bigcirc \text{ y } \bullet] + P[\bullet \text{ y } \bigcirc] = \frac{4}{30} + \frac{9}{30} = \frac{13}{30}$

e) $P[\text{la } 2.^a \bullet] = P[\text{cualquier cosa la } 1.^a] \cdot P[\text{la } 2.^a \bullet] = 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

## Piensa y practica

En la web Refuerza el cálculo de probabilidades en experiencias independientes.

**1.** Se extraen 3 cartas con reemplazamiento. Halla:

a) $P[\text{AS en } 1.^a \text{ y FIGURA en } 2.^a \text{ y } 3.^a]$ b) $P[3 \text{ ASES}]$

c) $P[\text{un AS y dos FIGURAS}]$ d) $P[\text{ningún AS}]$

**2.** Se lanzan 5 monedas. Halla la probabilidad de:

a) 5 caras b) alguna cruz

**3.** Lanzamos 3 monedas. Calcula:

a) $P[\text{tres caras}]$ b) $P[\text{ninguna cara}]$ c) $P[\text{alguna cara}]$

**4.** Se lanzan dos monedas y un dado. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara en ambas monedas y seis en el dado? ¿Cuál, la de obtener cruz en las monedas y par en el dado?

En la web Cálculo de probabilidades en experiencias independientes.

Figura 4.91 Contenidos del Cuarto Curso orientadas a las Enseñanzas Académicas de Educación Secundaria. Editorial Anaya

# 6 Composición de experiencias dependientes

**Experiencias dependientes**

El resultado de cada experiencia influye en las probabilidades de las siguientes.

Si dos sucesos $S_1$ y $S_2$ corresponden a pruebas dependientes, la probabilidad de que ocurra $S_1$ en la 1.ª y $S_2$ en la 2.ª es:

$$P[S_1 \text{ y } S_2] = P[S_1] \cdot P[S_2 \text{ en la 2.ª} / S_1 \text{ en la 1.ª}] = P[S_1] \cdot P[S_2 / S_1]$$

La expresión $P[S_2 / S_1]$ se llama **probabilidad condicionada:** probabilidad de $S_2$ **condicionada** a que ocurra $S_1$.

Para tres sucesos dependientes:

$$P[S_1 \text{ y } S_2 \text{ y } S_3] = P[S_1] \cdot P[S_2 / S_1] \cdot P[S_3 / S_1 \text{ y } S_2]$$

La probabilidad condicionada $P[S_3 / S_1 \text{ y } S_2]$ significa "probabilidad de que ocurra $S_3$ supuesto que ocurrieron $S_1$ y $S_2$".

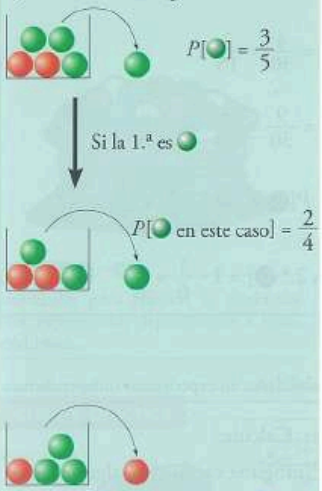
**Ejercicio resuelto**

***De una urna con 3 bolas verdes y 2 rojas, extraemos dos bolas. Calcular la probabilidad de que:***

***a) Ambas sean verdes.***

***b) La 1.ª sea roja y la 2.ª, verde.***

***c) Las dos sean rojas.***




a) Imaginemos una gran cantidad de gente. Cada uno de ellos tiene una urna con 3 bolas verdes y 2 bolas rojas. Son sometidos a dos pruebas:

**1.ª prueba:** Han de extraer bola verde. (La dejan fuera).

**2.ª prueba:** Han de volver a extraer verde.

Averigüemos qué proporción de gente supera cada prueba y, en consecuencia, qué proporción supera las dos.

PRIMERA EXTRACCIÓN  $P[●] = 3/5$. Por término medio, 3 de cada 5 individuos extraen bola verde y superan la 1.ª prueba.

Ahora, la composición de la urna se modifica dependiendo del resultado de la primera prueba. Como estamos siguiendo la pista a los que extraen bola verde, estos tienen ahora una urna con 2 bolas verdes y 2 bolas rojas. Veamos *qué proporción de ellos* supera la 2.ª prueba.

SEGUNDA EXTRACCIÓN  $P[●] = 2/4$. Por término medio, 2 de cada 4 de los que superan la 1.ª prueba superan también la 2.ª.

Proporción de individuos que superan ambas pruebas: $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$. Es decir:

$$P[● \text{ y } ●] = P[● \text{ la 1.ª}] \cdot P[● \text{ la 2.ª} / ● \text{ la 1.ª}] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

Estas pruebas son **dependientes,** porque el resultado de la primera influye en la segunda.

b) $P[● \text{ y } ●] = P[● \text{ la 1.ª}] \cdot P[● \text{ la 2.ª} / ● \text{ la 1.ª}] = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

c) $P[● \text{ y } ●] = P[● \text{ la 1.ª}] \cdot P[● \text{ la 2.ª} / ● \text{ la 1.ª}] = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

**En la web**

Amplía, con más actividades, el cálculo de probabilidades en experiencias dependientes utilizando diagramas en árbol.

Figura 4.92 Contenidos del Cuarto Curso orientadas a las Enseñanzas Académicas de Educación Secundaria. Editorial Anaya

## Descripción de la experiencia mediante un diagrama en árbol

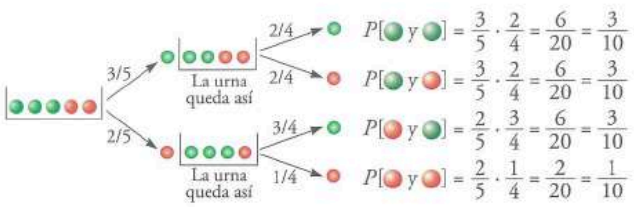
La experiencia de la página anterior se puede describir sistemáticamente, y de forma muy clara, mediante un **diagrama en árbol:**

**Recuerda**

Significado de algunas probabilidades:

$\frac{2}{5} = P[\bigcirc \text{ en la 1.ª}]$

$\frac{3}{4} = P[\bigcirc \text{ en 2.ª} / \bigcirc \text{ en 1.ª}]$




### Ejercicio resuelto

***Extraemos tres cartas de una baraja española. Hallar la probabilidad de obtener tres ASES.***

$P[3 \text{ ASES}] = P[\text{AS en 1.ª y AS en 2.ª y AS en 3.ª}] =$

$= P[\text{AS en 1.ª}] \cdot P[\text{AS en 2.ª / AS en 1.ª}] \cdot P[\text{AS en 3.ª / AS en 1.ª y 2.ª}] =$

$= \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38}$

**Observa**

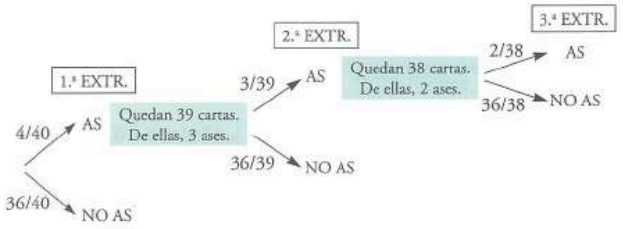
Si en la 1.ª sale AS, quedan 3 ASES en 39 cartas. Por tanto:

$P[\text{AS en 2.ª / AS en 1.ª}] = \frac{3}{39}$

Análogamente:

$P[\text{AS en 3.ª / AS en 1.ª y 2.ª}] = \frac{2}{38}$

Lo describimos en un diagrama en árbol:




$P[3 \text{ ASES}] = P[\text{AS y AS y AS}] = P[\text{AS}] \cdot P[\text{AS en 2.ª / AS en 1.ª}] \cdot$

$\cdot P[\text{AS en 3.ª / AS en 1.ª y 2.ª}] = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} = \frac{1}{2\,470}$

En la web: Cálculo de probabilidades en experiencias dependientes.

**Piensa y practica**

1. Extraemos dos cartas de una baraja española. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera sea un REY y la segunda un AS?
2. Completa el diagrama en árbol del ejercicio resuelto de esta página y sobre él halla $P[\text{NINGÚN AS}]$.
3. Una urna contiene 5 bolas negras y 3 blancas. Extraemos tres bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres sean blancas? ¿Y negras?
4. Se extraen, una tras otra, 3 cartas de una baraja. ¿Cuál es la probabilidad de obtener BASTOS las tres veces?
   a) Supón que se extraen con reemplazamiento.
   b) Supón que se extraen sin reemplazamiento.
5. Una urna A tiene tres bolas blancas y una negra. Otra B tiene una bola negra. Sacamos una bola de A y la echamos en B. Removemos y sacamos una bola de B. ¿Cuál es la probabilidad de que esta sea blanca?

Figura 4.93 Contenidos del Cuarto Curso orientadas a las Enseñanzas Académicas de Educación Secundaria. Editorial Anaya

# 7 Tablas de contingencia

TIPO DE ACTIVIDAD EXTRAESCOLAR

| CURSO | CULTURAL | DEPORTIVA | NINGUNA | TOTAL |
|---|---|---|---|---|
| 1.º | 12 | 36 | 72 | 120 |
| 2.º | 15 | 40 | 45 | 100 |
| 3.º | 21 | 44 | 35 | 100 |
| 4.º | 24 | 40 | 16 | 80 |
| TOTAL | 72 | 160 | 168 | 400 |

En un centro docente hay 400 estudiantes de la ESO (120 de 1.º, 100 de 2.º, 100 de 3.º y 80 de 4.º). Cada uno de ellos puede participar en una actividad extraescolar (solo en una o en ninguna). Hay actividades extraescolares de dos tipos: culturales y deportivas.

En la tabla adjunta se describe el reparto de estudiantes según su curso y según el tipo de actividad en la que participan.

Es una **tabla de contingencia,** porque describe un colectivo de individuos (los estudiantes de un centro) repartidos por dos conceptos (curso y actividad extraescolar). En cada concepto hay varias clases (4 cursos, 3 actividades). Cada individuo está contabilizado en alguna casilla y solo en una.

### Interpretar una tabla

Observa la tabla que tienes arriba y responde:

a) ¿Cuántos estudiantes del centro participan en actividades culturales? ¿Cuántos de ellos son de 2.º?

b) ¿Cuántos estudiantes del centro no participan en ninguna actividad extraescolar? De ellos, ¿cuántos son de 4.º?

c) ¿Cuántos estudiantes de 3.º participan en actividades deportivas?

d) ¿Cuántos estudiantes que participan en actividades deportivas son de 3.º?

## Proporciones y probabilidades

En la tabla anterior podemos calcular multitud de proporciones. Por ejemplo:

a) ¿Qué proporción del total son estudiantes de 1.º?

Hay 120 de un total de 400. Por tanto, 120/400 = 0,30. Son el 30%.

b) ¿Qué proporción de estudiantes de 1.º participan en actividades culturales?

12 de un total de 120 estudiantes de 1.º: 12/120 = 0,10. El 10%.

¿Cómo interpretamos estas proporciones como probabilidades? Veamos:

a) Tomamos al azar un estudiante del centro. ¿Qué probabilidad hay de que sea de 1.º?

$P[1.º] = 120/400 = 0{,}30$

b) Tomamos al azar un estudiante de 1.º. ¿Qué probabilidad hay de que participe en una actividad cultural?

$P[\text{CULTURAL} / 1.º] = 12/120 = 0{,}10$

¿Cómo designamos a los 44 estudiantes que se encuentran en la intersección de la fila **3.º** y la columna **DEPORTIVA**? Son los estudiantes de 3.º que participan en una actividad deportiva. Podríamos calcular la probabilidad de que al elegir, al azar, un estudiante del centro, sea de 3.º y que participe en una actividad deportiva:

$$P[3.º \text{ y DEPORTIVA}] = P[3.º \cap \text{DEPORTIVA}] = 44/400 = 0{,}11$$

**En la web**

HOJA DE CÁLCULO con la que podrás trabajar con tablas de contingencia.

| | CULTURAL | DEPORTIVA | NINGUNA | TOTAL |
|---|---|---|---|---|
| 1.º | 12 | 36 | 72 | 120 |
| 2.º | 15 | 40 | 45 | 100 |
| 3.º | 21 | 44 | 35 | 100 |
| 4.º | 24 | 40 | 16 | 80 |
| TOTAL | 72 | 160 | 168 | 400 |

## Probabilidades condicionadas

Una de las probabilidades obtenidas arriba, $P[\text{CULTURAL} / 1.º]$, es una **probabilidad condicionada.** El colectivo de referencia no es el total de estudiantes del centro, sino solo los de 1.º.

Análogamente, $P[3.º / \text{CULTURAL}]$ significa que el colectivo de referencia es el conjunto de estudiantes que participan en alguna actividad cultural y nos preguntamos por la probabilidad de que, al elegir uno de ellos al azar, sea de 3.º.

Figura 4.94 Contenidos del Cuarto Curso orientadas a las Enseñanzas Académicas de Educación Secundaria. Editorial Anaya

## Ejercicios resueltos

**1.** ***Explicar el significado de los números que se resaltan en la tabla.***

| | CULTURAL | DEPORTIVA | NINGUNA | TOTAL |
|---|---|---|---|---|
| 1.º | 12 | 36 | **72** | 120 |
| 2.º | 15 | **40** | 45 | 100 |
| 3.º | **21** | 44 | 35 | 100 |
| 4.º | 24 | 40 | 16 | **80** |
| TOTAL | 72 | **160** | 168 | **400** |

- 400 es el total de estudiantes del centro.
- 80 es el número de estudiantes de 4.º.
- 160 es el número de estudiantes que participan en alguna actividad deportiva.
- 21 es el número de estudiantes de 3.º que participan en alguna actividad cultural, es decir, "**3.º y CULTURAL**" (o bien "**3.º ∩ CULTURAL**").
- 40 estudiantes de 2.º que participan en alguna actividad deportiva.
- 72 estudiantes de 1.º que no participan en NINGUNA actividad extraescolar.

**2.** ***Explicar lo que significa cada una de las siguientes expresiones y dar su valor:***

***P [3.º]***

***P [NINGUNA]***

***P [2.º / NINGUNA]***

***P [NINGUNA / 2.º]***

$P$[3.º]: proporción de estudiantes del centro que son de 3. º. Es decir, la probabilidad de que, al tomar un estudiante del centro al azar, sea de 3.º.

$P[3.º] = 100/400 = 1/4 = 0{,}25$

$P$[NINGUNA]: proporción de estudiantes que no practican ninguna actividad.

$P[\text{NINGUNA}] = 168/400 = 0{,}42$

$P$[2.º / NINGUNA]: entre los estudiantes que no practican NINGUNA actividad extraescolar, qué proporción son de 2.º.

$P[2.º / \text{NINGUNA}] = 45/168 = 0{,}27$

$P$[NINGUNA / 2.º]: entre los estudiantes de 2.º, qué proporción no practica NINGUNA actividad extraescolar.

$P[\text{NINGUNA} / 2.º] = 45/100 = 0{,}45$

**3.** ***Para analizar la evolución de la participación en actividades CULTURALES al avanzar la edad, ¿qué proporciones hemos de calcular y comparar?***

Hemos de comparar $P$[CULT./1.º], $P$[CULT./2.º], $P$[CULT./3.º], $P$[CULT./4.º].

$P[\text{CULT.} / 1.º] = 12/120 = 0{,}10$
$P[\text{CULT.} / 2.º] = 15/100 = 0{,}15$
$P[\text{CULT.} / 3.º] = 21/100 = 0{,}21$
$P[\text{CULT.} / 4.º] = 24/80 = 0{,}30$

La participación en actividades culturales evoluciona, de 1.º a 4.º, así:

$10\% \rightarrow 15\% \rightarrow 21\% \rightarrow 30\%$

Es claro que aumenta con la edad.

## Piensa y practica

En la web Refuerza el trabajo con tablas de contingencia.

**1.** Explica el significado de los números 120, 168, 12, 45 y 40 de la tabla del ejercicio resuelto anterior.

**2.** Explica lo que significa, para la tabla del ejercicio resuelto anterior, estas expresiones y da su valor:

a) $P$[1.º] b) $P$[CULTURAL]

c) $P$[4.º / CULTURAL] d) $P$[CULTURAL / 4.º]

**3.** Queremos analizar, partiendo de los datos de la tabla del ejercicio resuelto anterior, la evolución del absentismo (falta de participación) en actividades extraescolares cualesquiera, al aumentar la edad. Calcula las proporciones que convenga y compáralas.

**4.** En una bolsa hay 40 bolas huecas, y dentro de cada una hay un papel en el que pone sí o NO, según esta tabla:

| | 🔴 | 🟢 | 🔵 | TOTAL |
|---|---|---|---|---|
| SÍ | 15 | 4 | 1 | 20 |
| NO | 5 | 4 | 11 | 20 |
| TOTAL | 20 | 8 | 12 | 40 |

a) Describe los sucesos sí, NO, 🔴, 🔴 / sí, sí / 🔴 y calcula sus probabilidades.

b) Hemos sacado una bola roja. ¿Qué probabilidad hay de que haya sí en su interior? ¿Y si la bola es azul?

c) Se ha sacado una bola y dentro pone sí. ¿Cuál es la probabilidad de que sea 🔴? ¿Y 🟢? ¿Y 🔵?

En la web Cálculo de probabilidades en tablas de contingencia.

Figura 4.95 Contenidos del Cuarto Curso orientadas a las Enseñanzas Académicas de Educación Secundaria. Editorial Anaya

# Ejercicios y problemas resueltos

## 1. Las figuras de la baraja

***Se extraen tres cartas de una baraja de 40. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres sean FIGURAS (sota, caballo y rey)?***

**RESOLUCIÓN SIN COMBINATORIA**

Composición de tres experiencia dependientes.

En la baraja hay 12 figuras:

$$P[3\text{ F}] = P[1.^{\text{a}}\text{ F}] \cdot P[2.^{\text{a}}\text{ F} / 1.^{\text{a}}\text{ F}] \cdot P[3.^{\text{a}}\text{ F} / 1.^{\text{a}}\text{ F y } 2.^{\text{a}}\text{ F}] = \frac{12}{40} \cdot \frac{11}{39} \cdot \frac{10}{38} = \frac{11}{494}$$

**RESOLUCIÓN RECURRIENDO A LA COMBINATORIA**

Casos favorables: extraer 3 figuras de un total de 12 $\rightarrow C_{12}^3$

Casos posibles: extraer 3 cartas de un total de 40 $\rightarrow C_{40}^3$

$$P[3\text{ F}] = \frac{C_3^{12}}{C_{40}^3} = \frac{(12 \cdot 11 \cdot 10)/(3 \cdot 2 \cdot 1)}{(40 \cdot 39 \cdot 38)/(3 \cdot 2 \cdot 1)} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{40 \cdot 39 \cdot 38} = \frac{11}{494}$$

Como es natural, coinciden los dos resultados.

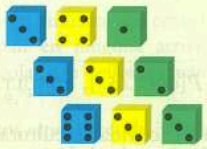
**Hazlo tú.** Extraemos tres cartas de una baraja de 40. Calcula la probabilidad de que sean oros.

## 2. Los dados

***Se lanzan tres dados.***

***a) Calcular la probabilidad de que el valor mediano sea "3".***

***Por ejemplo:***



***b) Calcular la probabilidad de que el valor mediano sea 6.***

Casos posibles al tirar tres dados: $VR_6^3 = 6^3 = 216$

a) Casos favorables al suceso "3" = "EL 3 ES EL VALOR MEDIANO". Los contamos:

- $a$ $b$ $\begin{cases} a = \\ b = \end{cases}$ $2 \cdot 3 = 6$ posibilidades

  Pero podría ser o cualquier otra permutación. Cada posibilidad anterior admite $P_3 = 6$ ordenaciones distintas.

  Por tanto, en total hay $6 \cdot 6 =$ **36 casos.**

- $b \rightarrow$ 3 posibilidades. Cada una admite 3 ordenaciones.

  Por tanto, hay $3 \cdot 3 =$ **9 casos.**

- $a$ $\rightarrow$ 2 posibilidades, 3 ordenaciones $\rightarrow$ **6 casos**

- $\rightarrow$ **1 caso**

En total, $36 + 9 + 6 + 1 = 52$ casos favorables $\rightarrow P[3] = 52/216 = 0{,}241$

b) Casos favorables al suceso "6" = "EL MEDIANO ES 6". Los contamos:

- $a$ . Donde $a$ puede ser 1, 2, 3, 4, 5. Son 5 casos.

  Cada uno admite 3 ordenaciones ($a$ 6 6; 6 $a$ 6 y 6 6 $a$). Hay, pues, **15 casos.**

- . Solo **1 caso.**

En total hay 16 casos favorables. $P[6] = \frac{16}{216} = 0{,}074$

**Hazlo tú.**

a) Tiramos 3 dados. Calcula, paso a paso, la probabilidad de que el valor mediano sea "2".

b) Tiramos 3 dados. Calcula la probabilidad de que el mayor resultado sea "4".

Atención. Observamos que, por simetría, se dan las siguientes igualdades:

$P[1] = P[6]$; $P[2] = P[5]$; $P[3] = P[4]$. Por tanto, $P[1] + P[2] + P[3] = 0{,}5$.

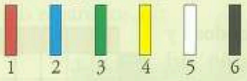
Podemos obtener la probabilidad de cada cara:

$P[1] = P[6] = 0{,}074$; $P[3] = P[4] = 0{,}241$;
$P[2] = P[5] = 0{,}5 - (0{,}074 + 0{,}241) = 0{,}185$

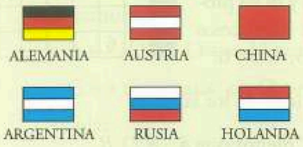
Figura 4.96 Contenidos del Cuarto Curso orientadas a las Enseñanzas Académicas de Educación Secundaria. Editorial Anaya

## 3. Juego de las banderas

***Tenemos 6 fajos de pegatinas:***




***Con ellas queremos formar alguna de estas banderas:***




***Hallar la probabilidad de conseguir una de estas banderas mediante cada uno de estos procedimientos:***

***a) Lanzamos un dado, tomamos la pegatina correspondiente al número obtenido y la pegamos en horizontal; lanzamos otro dado y pegamos la pegatina que toque debajo de la primera...***

***b) Lanzamos tres dados y tomamos los colores que toquen. Con ellos intentamos formar una de las banderas.***

El número de resultados posibles al lanzar tres veces un dado (o tres dados distintos) es: $VR_6^3 = 6^3 = 216$

Estos son los casos posibles en los dos procedimientos descritos.

Calculemos los casos favorables y, en consecuencia, la probabilidad en cada uno de los dos procedimientos:

a) Puesto que las franjas se colocan una a una, de arriba abajo, la única posibilidad de conseguir cada una de las banderas es que salgan esos colores y en ese orden. Por tanto, solo hay 6 casos favorables (las seis banderas).

La probabilidad de que se obtenga una de las banderas es:

$$P[\text{una de las seis banderas}] = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$$

b) Si en los dados sale 6, 1, 4, se puede formar la bandera de Alemania. Pero también si sale cualquiera de las posibles permutaciones de esos 3 números: $3! = 6$.

| | | |
|---|---|---|
| ALEMANIA | NRA → 3! = 6 formas | Hay 19 formas distintas de conseguir alguna de las 6 banderas. |
| AUSTRIA | RBR → 3 formas | |
| CHINA | RRR → 1 forma | |
| ARGENTINA | ABA → 3 formas | |
| RUSIA | BAR → 6 formas | |
| HOLANDA | RBA ↗ | |

Si se obtiene RBA es lo mismo que si se obtiene BAR. El jugador deberá decidir si forma la bandera de Rusia o la de Holanda, pero cualquiera de ellas vale.

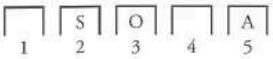
$$P[\text{alguna de las 6 banderas}] = \frac{19}{216}$$

## 4. Cinco butacas para tres personas

***En la cola del cine hay tres personas: un chico (O), una chica (A) y una señora (S). La taquillera les dice que solo queda libre la primera fila en la que hay 5 asientos. ¿Cuál es la probabilidad de que chico y chica caigan juntos?***

**Hazlo tú.** Tres personas se sitúan al azar en 6 asientos. ¿Cuál es la probabilidad de que dos en concreto estén juntas? ¿Y si solo se sentaran dos personas en los 6 asientos?

Para contar el número de casos posibles, ordenamos a las tres personas O, A, S y, en ese orden, asignamos a cada uno un asiento del 1 al 5:

De este modo, 352 significa: 


Hay, pues, $V_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ formas distintas de situarse (casos posibles).

Contemos los casos favorables: O y A juntos. Para eso, hace falta que les toquen los asientos 1, 2 o 2, 3 o 3, 4 o 4, 5.

En cada uno de los casos pueden ser OA o AO: dos posibilidades.

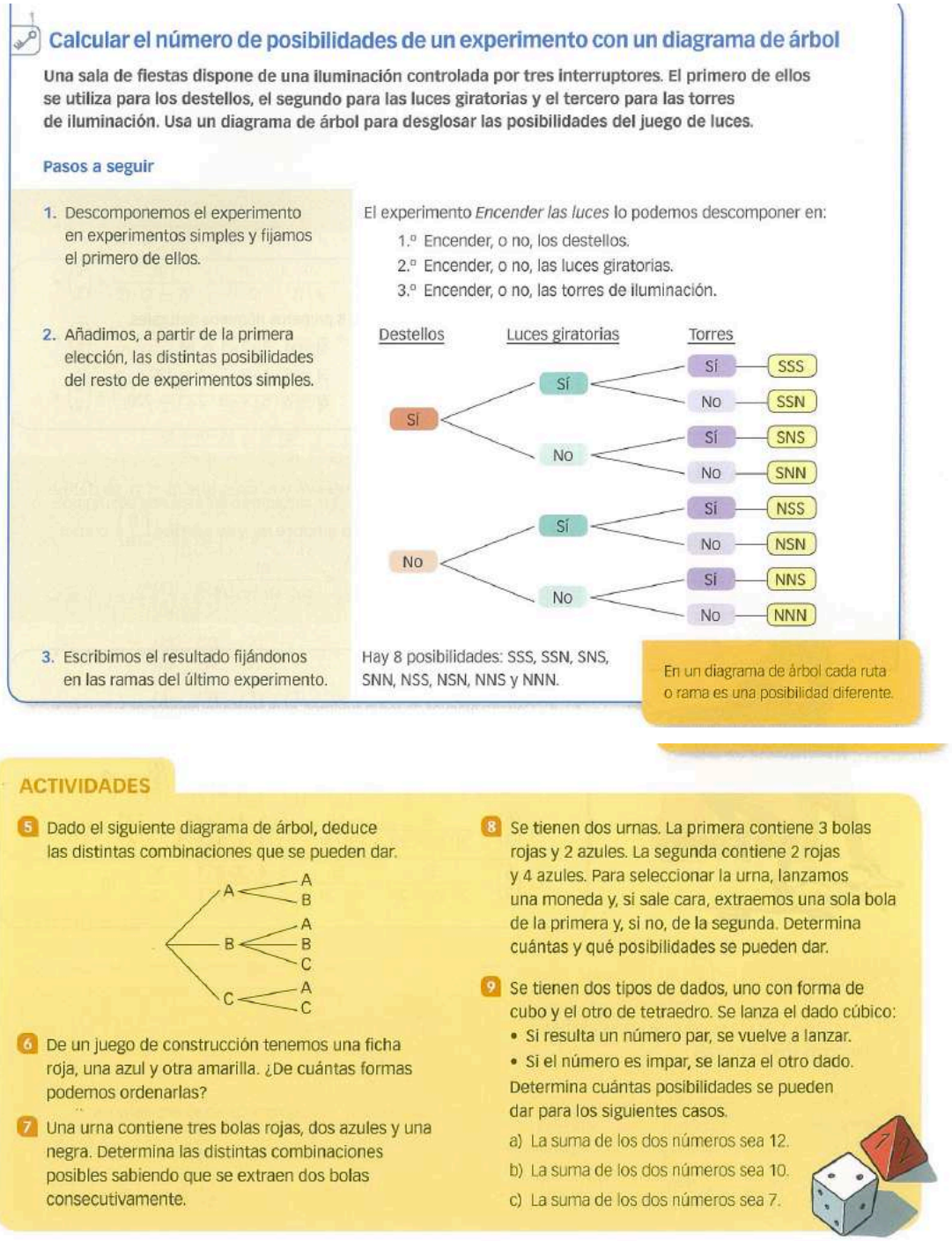
Y, además, la señora, S, puede estar en cualquiera de los otros 3 asientos. Por tanto:

Casos posibles = $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$

$$P[\text{O y A juntos}] = \frac{24}{60} = \frac{2}{5} = 0,4$$

Figura 4.97 Contenidos del Cuarto Curso orientadas a las Enseñanzas Académicas de Educación Secundaria. Editorial Anaya

Editorial Santillana



## Calcular el número de posibilidades de un experimento con un diagrama de árbol

**Una sala de fiestas dispone de una iluminación controlada por tres interruptores. El primero de ellos se utiliza para los destellos, el segundo para las luces giratorias y el tercero para las torres de iluminación. Usa un diagrama de árbol para desglosar las posibilidades del juego de luces.**

**Pasos a seguir**

1. Descomponemos el experimento en experimentos simples y fijamos el primero de ellos.

El experimento *Encender las luces* lo podemos descomponer en:

1.º Encender, o no, los destellos.
2.º Encender, o no, las luces giratorias.
3.º Encender, o no, las torres de iluminación.

2. Añadimos, a partir de la primera elección, las distintas posibilidades del resto de experimentos simples.



3. Escribimos el resultado fijándonos en las ramas del último experimento.

Hay 8 posibilidades: SSS, SSN, SNS, SNN, NSS, NSN, NNS y NNN.

En un diagrama de árbol cada ruta o rama es una posibilidad diferente.

### ACTIVIDADES

**5** Dado el siguiente diagrama de árbol, deduce las distintas combinaciones que se pueden dar.



**6** De un juego de construcción tenemos una ficha roja, una azul y otra amarilla. ¿De cuántas formas podemos ordenarlas?

**7** Una urna contiene tres bolas rojas, dos azules y una negra. Determina las distintas combinaciones posibles sabiendo que se extraen dos bolas consecutivamente.

**8** Se tienen dos urnas. La primera contiene 3 bolas rojas y 2 azules. La segunda contiene 2 rojas y 4 azules. Para seleccionar la urna, lanzamos una moneda y, si sale cara, extraemos una sola bola de la primera y, si no, de la segunda. Determina cuántas y qué posibilidades se pueden dar.

**9** Se tienen dos tipos de dados, uno con forma de cubo y el otro de tetraedro. Se lanza el dado cúbico:

- Si resulta un número par, se vuelve a lanzar.
- Si el número es impar, se lanza el otro dado.

Determina cuántas posibilidades se pueden dar para los siguientes casos.

a) La suma de los dos números sea 12.
b) La suma de los dos números sea 10.
c) La suma de los dos números sea 7.

Figura 4.98 Contenidos del Cuarto Curso orientadas a las Enseñanzas Académicas de Educación Secundaria. Editorial Santillana

## 1 Experimentos aleatorios. Sucesos

**RESUELVE EL RETO**

¿Cuántos sucesos diferentes tiene un experimento aleatorio que solo tiene 2 sucesos elementales?

Un **experimento aleatorio** es aquel del que no podemos predecir su resultado, es decir, que depende de la suerte o del azar.

Cuando conocemos el resultado del experimento antes de realizarlo, decimos que es un **experimento determinista**.

### Sucesos

E → Espacio muestral
Ø → Conjunto vacío
El conjunto vacío no tiene ningún elemento.

Un **suceso elemental** es cada uno de los posibles resultados de un experimento aleatorio. El conjunto de todos los sucesos elementales se llama **espacio muestral**.

Un **suceso compuesto** es aquel que está formado por dos o más sucesos elementales.



**EJEMPLO**

1. Extraemos una bola de una urna donde tenemos bolas de 1, 2, 3 y 4 colores. Describe el espacio muestral y escribe 2 sucesos que no sean elementales.

El espacio muestral tiene 4 sucesos elementales:

$E$ = {1 color, 2 colores, 3 colores, 4 colores}

Dos sucesos compuestos son, por ejemplo:

$A$ = «Sacar una bola de al menos 3 colores» = {3 colores, 4 colores}

$B$ = «Sacar una bola con un número par de colores» = {2 colores, 4 colores}

### ACTIVIDADES

**1** PRACTICA. Clasifica los siguientes experimentos en deterministas o aleatorios.

a) Extraer una carta de la baraja española.
b) Medir la altura de un puente.
c) Averiguar el número de goles de un partido de fútbol.
d) Medir el ángulo desigual de un triángulo isósceles.
e) Elegir, con los ojos tapados, un refresco de una nevera con muchos tipos de refrescos.
f) Abrir un libro por la mitad y anotar el número de la página izquierda.
g) Medir la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

**2** APLICA. Escribe el espacio muestral de los siguientes experimentos aleatorios.

a) Sacar una tarjeta de una urna en la que hay tarjetas numeradas del 1 al 8.
b) Escoger una moneda de un monedero en el que hay monedas de 2, 5, 10 y 20 céntimos.
c) Lanzar dos dados y sumar las puntuaciones.

**3** REFLEXIONA. En el experimento *Elegir un número al azar y anotar su resto al dividir entre 3*:

a) ¿Cuál es su espacio muestral?
b) Pon un ejemplo de suceso compuesto.
c) Pon un ejemplo de suceso distinto al conjunto vacío.

Figura 4.99 Contenidos del Cuarto Curso orientadas a las Enseñanzas Académicas de Educación Secundaria. Editorial Santillana

## 2 Operaciones con sucesos

La **unión** de dos sucesos, $A$ y $B$, es otro suceso formado por todos los sucesos elementales que hay en $A$ o en $B$, y se escribe $\boldsymbol{A \cup B}$.

La **intersección** de dos sucesos, $A$ y $B$, es otro suceso formado por todos los sucesos comunes de $A$ y $B$, y se escribe $\boldsymbol{A \cap B}$.

**SE ESCRIBE ASÍ**

Que ocurra $A$ o $B \rightarrow A \cup B$

Que ocurra $A$ y $B \rightarrow A \cap B$

Si $A \cap B \neq \emptyset$, los sucesos $A$ y $B$ pueden ocurrir simultáneamente, y decimos que son **compatibles**. En caso contrario son **incompatibles**.

El **suceso contrario** o **complementario** de un suceso $A$ es otro suceso, que escribimos como $\overline{A}$, y que está formado por los sucesos elementales del espacio muestral que no están en $A$.

**EJEMPLO**

2. En el experimento *Lanzar un dado y anotar su puntuación*, consideramos los siguientes sucesos:

$A$ = «Número par» $B$ = «Múltiplo de 3» $C$ = «Divisor de 5»

a) Calcula sus uniones e intersecciones.

$A = \{2, 4, 6\}$ $B = \{3, 6\}$ $C = \{1, 5\}$

$A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$ $A \cup C = \{1, 2, 4, 5, 6\}$ $B \cup C = \{1, 3, 5, 6\}$

$A \cap B = \{6\}$ $A \cap C = \{\emptyset\}$ $B \cap C = \{\emptyset\}$

b) ¿Qué parejas de sucesos son compatibles?

Los únicos sucesos compatibles son $A$ y $B$ porque $A \cap B = \{6\} \neq \emptyset$.

c) Calcula los sucesos contrarios de $A$ y de $B$.

Espacio muestral $\rightarrow E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\overline{A} = \overline{\{2, 4, 6\}} = \{1, 3, 5\}$ $\overline{B} = \overline{\{3, 6\}} = \{1, 2, 4, 5\}$

d) Calcula $\overline{A \cap B}$ y $\overline{A \cap C}$.

$\overline{A \cap B} = \overline{\{6\}} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $\overline{A \cap C} = \overline{\{\emptyset\}} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = E$



El suceso contrario del suceso contrario coincide con el suceso de partida.

$\overline{\overline{A}} = A$

**ACTIVIDADES**

4 **PRACTICA.** En el experimento *Extraer una carta de una baraja española* se consideran estos sucesos:

$A$ = «Salir as» $B$ = «Salir bastos»

Calcula $A \cup B$ y $A \cap B$. ¿Son compatibles $A$ y $B$?

5 **APLICA.** Con los sucesos de la actividad anterior, calcula $\overline{A}$ y $\overline{B}$. ¿Son compatibles estos dos sucesos?

6 **REFLEXIONA.** Dados un experimento aleatorio y un suceso $A$, halla:

a) $A \cup A$ b) $A \cap A$

7 **REFLEXIONA.** Considera los sucesos $A$ y $B$ de un experimento aleatorio cuyo espacio muestral es $E$. Si $A$ es el contrario de $B$, ¿es cierto que $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{B \cap A}$?

Figura 4.100 Contenidos del Cuarto Curso orientadas a las Enseñanzas Académicas de Educación Secundaria. Editorial Santillana

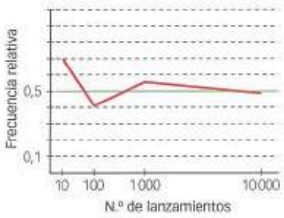
## 3 Frecuencia y probabilidad

La **probabilidad**, $P$, **de un suceso** es una función que a cada suceso de un experimento aleatorio le asocia un número entre 0 y 1, que indica la facilidad de que el suceso ocurra.

Si repetimos un experimento aleatorio un número muy grande de veces, la probabilidad de un suceso coincide con el número hacia el que se aproximan las frecuencias relativas de dicho suceso.

Esta propiedad se conoce como **ley de los grandes números**.

Este hecho nos proporciona una herramienta muy útil para calcular probabilidades de manera experimental.




**EJEMPLO**

3. Calcula la probabilidad de que al lanzar una moneda salga cara.

Sin aplicar la regla de Laplace, realizamos el experimento numerosas veces y contamos el número de caras que van saliendo.

| Número de lanzamientos | Número de caras ($f_i$) | Frecuencia relativa ($h_i$) |
|---|---|---|
| 10 | 7 | 0,7 |
| 100 | 41 | 0,41 |
| 1000 | 556 | 0,556 |
| 10000 | 4968 | 0,4968 |

Observa que las frecuencias relativas se aproximan al valor de la probabilidad que podemos asignar de forma teórica.

$$P(\text{cara}) = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

### ACTIVIDADES

8 **PRACTICA.** Se ha lanzado una moneda 80 veces, obteniéndose 54 caras. ¿Cuál es la frecuencia relativa del suceso *Salir cruz*?

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{54}{100}$ c) $\frac{13}{40}$ d) $\frac{54}{80}$

9 **APLICA.** Una empresa fabrica bombillas. Se quiere calcular la probabilidad de que, escogida una al azar, sea defectuosa. Explica qué proceso debe seguir.



10 **REFLEXIONA.** En una urna hay tarjetas numeradas del 4 al 9. Se extrae una tarjeta, se anota el resultado y se devuelve a la urna. Estos son los datos que hemos obtenido tras repetir el experimento 300 veces.

| N.º | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | 50 | 49 | 45 | 47 | 57 | 52 |

A la vista de los datos de la tabla, calcula la probabilidad de que, al extraer una tarjeta:

a) Se obtenga un número múltiplo de 3.

b) Se obtenga un número mayor que 7.

Figura 4.101 Contenidos del Cuarto Curso orientadas a las Enseñanzas Académicas de Educación Secundaria. Editorial Santillana

## 4 Probabilidad de un suceso

La probabilidad de un suceso es un número entre 0 y 1. Cuanto más se acerque la probabilidad de un suceso a 1, mayor será la posibilidad de que ocurra y, recíprocamente, cuanto más se acerque a 0, más difícil será que suceda.

Un **suceso seguro** es aquel que siempre ocurre, y su probabilidad es 1. Por ejemplo: $P(E) = 1$.

Se dice que un suceso es un **suceso imposible** cuando nunca sucede, es decir, cuando su probabilidad es 0. Por ejemplo: $P(\varnothing) = 0$.

**EJEMPLO**

4. Sobre una mesa hay dos cartas boca abajo, una es un as y la otra, un rey.



a) Si escogemos una de las dos, ¿cuál es la probabilidad de escoger el rey?

La probabilidad de escoger un rey o un as será igual. Si repartimos la probabilidad entre los dos sucesos:

$$P(\text{rey}) = \frac{1}{2} \qquad P(\text{as}) = \frac{1}{2}$$

b) Si añadimos una carta más, un caballo, ¿cuál es la probabilidad de que eligiendo una carta salga un rey?

Sobre la mesa tenemos tres cartas con la misma probabilidad de ser elegidas; por tanto, tenemos que repartir la probabilidad entre los tres sucesos.

$$P(\text{rey}) = \frac{1}{3} \qquad P(\text{as}) = \frac{1}{3} \qquad P(\text{caballo}) = \frac{1}{3}$$



La probabilidad de un suceso $A$ está siempre entre 0 y 1.

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Además, tenemos que:

$$P(E) = 1 \qquad P(\varnothing) = 0$$

### ACTIVIDADES

**11** **PRACTICA.** Se saca una bola de una bolsa en la que hay 3 bolas: una blanca, una negra y otra verde. Calcula la probabilidad de sacar:

a) La bola negra.

b) La bola blanca.

c) La bola negra, la blanca o la verde.

**12** **APLICA.** Halla las probabilidades de estos sucesos al extraer una carta de la baraja española.

a) Sacar el caballo de copas.

b) Sacar el tres de bastos.

c) Sacar una carta de bastos.

d) Sacar el as de oros.

e) Sacar un caballo.

f) Sacar un as.

**13** **REFLEXIONA.** Leticia tiene seis latas de conserva iguales pero con diferente contenido: atún, sardinas, navajas, mejillones, pulpo y berberechos.

Su hermano les ha quitado el envoltorio de cartón, y no sabe qué hay en cada una de ellas. Si escoge una lata al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Su contenido sea atún.

b) Su contenido sea pulpo o berberechos.

c) El nombre del producto contenga la letra *s*.

d) El nombre del producto contenga la letra *z*.

Figura 4.102 Contenidos del Cuarto Curso orientadas a las Enseñanzas Académicas de Educación Secundaria. Editorial Santillana

## 5 Regla de Laplace

Un **experimento** es **regular** cuando todos sus sucesos elementales tienen la misma probabilidad, es decir, son **sucesos equiprobables**.

La regla de Laplace nos permite calcular probabilidades de un suceso cuando el experimento aleatorio es regular.

La **regla de Laplace** afirma que la probabilidad de un suceso es igual al número de sucesos elementales que contiene dividido entre el número total de sucesos elementales del espacio muestral.

$$P(A) = \frac{\text{n.º de casos favorables a } A}{\text{n.º de casos posibles}}$$

Para poder aplicar la regla de Laplace, los sucesos elementales tienen que ser equiprobables.



**EJEMPLO**

5. En una bolsa tenemos 50 bolas de colores: 25 blancas, 15 rojas, 5 azules y 5 amarillas. Si extraemos una bola al azar, calcula cuál es la probabilidad de sacar una de cada uno de los colores.

Es un experimento regular, porque la probabilidad de escoger cualquiera de las 50 bolas es la misma. Si aplicamos la regla de Laplace:

$$P(\text{blanca}) = \frac{\text{n.º bolas blancas}}{\text{n.º total de bolas}} = \frac{25}{50} = 0{,}5$$

$$P(\text{roja}) = \frac{\text{n.º bolas rojas}}{\text{n.º total de bolas}} = \frac{15}{50} = 0{,}3$$

$$P(\text{azul}) = \frac{\text{n.º bolas azules}}{\text{n.º total de bolas}} = \frac{5}{50} = 0{,}1$$

$$P(\text{amarilla}) = \frac{\text{n.º bolas amarillas}}{\text{n.º total de bolas}} = \frac{5}{50} = 0{,}1$$

**ACTIVIDADES**

14 **PRACTICA.** En un aula hay 17 chicos y 19 chicas. Se elige una persona al azar. Determina la probabilidad de los siguientes sucesos.

a) Ser un chico. b) Ser una chica.

15 **APLICA.** En el experimento aleatorio *Tirar un dado y anotar el número de su cara superior*, calcula la probabilidad de estos sucesos.

$A$ = «Número par» $C$ = «Número mayor que 3»
$B$ = «Múltiplo de 3» $D$ = «Número impar»

16 **REFLEXIONA.** En un dado se suprime la cara 6 y se añade otra cara 1. ¿Cuál es el espacio muestral? ¿Son los sucesos elementales equiprobables? ¿Puedes calcular su probabilidad?

17 **REFLEXIONA.** En una hucha hay tres monedas de 2 € por cada cuatro de 1 €. Razona cuál es la probabilidad de que, escogida al azar una moneda de esa hucha, sea de 2 € y si es necesario conocer el número de monedas que hay para realizar ese cálculo.

Figura 4.103 Contenidos del Cuarto Curso orientadas a las Enseñanzas Académicas de Educación Secundaria. Editorial Santillana

SABER HACER

## Utilizar la regla de Laplace para calcular probabilidades

Cuando los experimentos son más complejos, para contar los sucesos elementales se suelen utilizar los métodos de conteo.

**Consideramos el experimento aleatorio *Extraer una bola de una urna que contiene 10 bolas numeradas del 0 al 9*.**

**a) Halla la probabilidad de obtener un número impar.**

**b) Calcula la probabilidad de obtener un número primo.**

**c) ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número menor que 2?**

**Pasos a seguir**

1. Hallamos el espacio muestral y los sucesos de los que queremos hallar su probabilidad.

$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

a) $A =$ «Obtener un número impar» $= \{1, 3, 5, 7, 9\}$

b) $B =$ «Obtener un número primo» $= \{2, 3, 5, 7\}$

c) $C =$ «Obtener un número menor que 2» $= \{0, 1\}$

2. Evaluamos si los sucesos elementales son equiprobables.

Todas las bolas tienen la misma probabilidad de ser elegidas; por tanto, los sucesos elementales son equiprobables.

3. Contamos el número de sucesos elementales de cada suceso y aplicamos la regla de Laplace.

a) $P(A) = \dfrac{\text{n.º casos favorables}}{\text{n.º casos posibles}} = \dfrac{5}{10} = 0{,}5$

b) $P(B) = \dfrac{\text{n.º casos favorables}}{\text{n.º casos posibles}} = \dfrac{4}{10} = 0{,}4$

c) $P(C) = \dfrac{\text{n.º casos favorables}}{\text{n.º casos posibles}} = \dfrac{2}{10} = 0{,}2$

## ACTIVIDADES

**18** Marta tiene en su estuche pinturas de distintos colores: 4 rojas, 6 amarillas, 9 azules y 2 verdes. Si escoge al azar una de ellas, calcula la probabilidad de que sea:

a) Roja.

b) Azul.

c) Verde.

**19** Jorge tiene 5 camisas de manga larga, 8 de manga corta y 7 camisetas. Si elige una prenda al azar, calcula la probabilidad de que sea:

a) Una camisa de manga larga.

b) Una camiseta.

c) Una camisa.



**20** En el bar del instituto venden bocadillos de chorizo, jamón, tortilla o queso. Hoy los han envuelto con papel de aluminio y nadie sabe de qué es cada uno. Tienen en total 40 bocadillos, la mitad de tortilla, la octava parte de chorizo y los de jamón son el doble que los de queso. Ana compra un bocadillo. Calcula la probabilidad de:

a) Que sea de jamón.

b) Que sea de queso o tortilla.

c) Que no sea de tortilla.

d) Que no sea de queso ni de tortilla.

**21** Al lanzar un dado de parchís, se consideran los sucesos:

$A =$ «Salir número par» $C =$ «Salir divisor de 6»

$B =$ «Salir 4 o 5»

Calcula las probabilidades de estos sucesos:

a) $(A \cap B) \cup C$ c) $\overline{A}, \overline{B}$, y $\overline{C}$

b) $(A \cup B) \cap C$ d) $\overline{A \cup C}$

Figura 4.104 Contenidos del Cuarto Curso orientadas a las Enseñanzas Académicas de Educación Secundaria. Editorial Santillana

## 6 Propiedades de la probabilidad

- La probabilidad no puede ser menor que 0 ni mayor que 1.
$$0 \leq P(A) \leq 1$$
- La probabilidad del suceso seguro es 1 y la probabilidad del suceso imposible es 0.
$$P(E) = 1 \qquad P(\varnothing) = 0$$
- La probabilidad de cualquier suceso es igual a 1 menos la probabilidad de su contrario.
$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$
- Cuando dos sucesos son incompatibles, la probabilidad de su unión es la suma de sus probabilidades.
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
- Para dos sucesos cualesquiera, $A$ y $B$, se verifica siempre que la probabilidad de la unión es igual a la suma de las probabilidades menos la probabilidad de la intersección.
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$




**EJEMPLO**

6. De los 25 alumnos que hay en la clase de 4.º de ESO, 20 aprobaron la primera evaluación, 17 la segunda y 15 las dos. Calcula la probabilidad de que escogido un alumno al azar:

a) No haya aprobado la primera evaluación.

$A$ = «Aprobar la primera evaluación» $\rightarrow P(A) = \frac{20}{25} = 0{,}8$

«No aprobar la primera evaluación» $= \overline{A}$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

b) Haya aprobado la primera o la segunda evaluación.

«Aprobar la primera o la segunda evaluación» $= A \cup B$

$B$ = «Aprobar la segunda evaluación» $\rightarrow P(B) = \frac{17}{25} = 0{,}68$

$A \cap B$ = «Aprobar las dos evaluaciones» $\rightarrow P(A \cap B) = \frac{15}{25} = 0{,}6$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}8 + 0{,}68 - 0{,}6 = 0{,}88$

**ACTIVIDADES**

22 **PRACTICA.** Se extrae una de las 40 cartas de la baraja española. Calcula las siguientes probabilidades.

a) Que no sea un oro.

b) Que sea una sota o un caballo.

c) Que sea una figura de espadas.

d) Que sea un número menor que 6.

23 **APLICA.** Se extrae una carta de la baraja española. Calcula la probabilidad de que sea:

a) Una figura o una espada.

b) Un basto o menor que 3.

24 **REFLEXIONA.** Sean $A$ y $B$ dos sucesos incompatibles de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0{,}2$ y $P(A \cup B) = 0{,}6$. Calcula $P(B)$.

Figura 4.105 Contenidos del Cuarto Curso orientadas a las Enseñanzas Académicas de Educación Secundaria. Editorial Santillana

**SABER HACER**

## Calcular probabilidades utilizando sus propiedades

**Consideramos el experimento aleatorio *Lanzar un dado y anotar la puntuación de su cara superior*. Calcula las probabilidades de estos sucesos.**

**a) Obtener múltiplo de 2.**
**b) Obtener múltiplo de 3.**
**c) Obtener múltiplo de 2 y de 3.**
**d) Obtener un número que no sea múltiplo de 3.**

Los sucesos elementales son incompatibles entre sí, luego la probabilidad de su unión es la suma de sus probabilidades.

**Pasos a seguir**

1. Calculamos las probabilidades de los sucesos elementales.

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$P(1) = \frac{1}{6} \quad P(2) = \frac{1}{6} \quad P(3) = \frac{1}{6} \quad P(4) = \frac{1}{6} \quad P(5) = \frac{1}{6} \quad P(6) = \frac{1}{6}$

2. Escribimos los sucesos que nos piden en función de sucesos conocidos mediante la unión, la intersección y el complementario de sucesos.

a) $A =$ «Obtener múltiplo de 2» $= \{2, 4, 6\} = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}$

b) $B =$ «Obtener múltiplo de 3» $= \{3, 6\} = \{3\} \cup \{6\}$

c) $C =$ «Obtener múltiplo de 2 y de 3» $= A \cap B$

d) $D =$ «Obtener un número no múltiplo de 3» $= \overline{B}$

3. Aplicamos las propiedades de la probabilidad y hallamos el valor buscado.

a) $P(A) = P(\{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = 0{,}5$

b) $P(B) = P(\{3\} \cup \{6\}) = P(\{3\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = 0{,}33$

c) $P(C) = P(A \cap B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cup B)}_{P(\{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \{6\}) = \frac{4}{6}} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{4}{6} = \frac{1}{6} = 0{,}17$

d) $P(D) = P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = 0{,}67$

## ACTIVIDADES

25 En una bolsa hay 3 canicas blancas, 8 negras, 6 azules y 1 verde. Calcula la probabilidad de que, escogida una al azar, sea:

a) Blanca o verde.
b) Negra o azul.
c) Ni blanca ni azul.
d) Ni verde ni negra.

26 Calcula la probabilidad de no sacar ni ases ni figuras al extraer una carta de la baraja española.

27 En un grupo de amigos, al 70 % les gusta el fútbol o el baloncesto y al 12 % les gustan ambos deportes. Sabiendo que al 74 % no les gusta el fútbol, calcula la probabilidad de que, escogido al azar un componente del grupo, le guste solo el baloncesto.

28 Se ha trucado un dado de 6 caras, de modo que las caras que son números primos tienen doble probabilidad de salir que las que no lo son. ¿Cuál es la probabilidad de cada una de las caras? ¿Y la probabilidad de obtener un número par?

29 En una urna se tienen tarjetas rojas numeradas del 1 al 5 y tarjetas azules numeradas del 6 al 9. Se escoge una al azar. Calcula la probabilidad de que sea:

a) Una tarjeta roja o azul.
b) Una tarjeta con un número mayor que 3.
c) Una tarjeta roja con el número 6.
d) Una tarjeta azul con un número par.
e) Una tarjeta con un número que es múltiplo de 4.

Figura 4.106 Contenidos del Cuarto Curso orientadas a las Enseñanzas Académicas de Educación Secundaria. Editorial Santillana

## 7 Probabilidad condicionada

**NO OLVIDES**

Si sabemos que ha ocurrido un suceso $B$, a partir de ello los únicos casos que se pueden producir están contenidos en $B$. Es decir, $B$ pasa a ser el nuevo espacio muestral.

El cálculo de la probabilidad de un suceso $B$, cuando sabemos que ha ocurrido otro suceso $A$, se denomina **probabilidad condicionada**. Se escribe $P(B/A)$ y se lee «probabilidad de $B$ condicionada a $A$».

| | Botas | No botas | Total |
|---|---|---|---|
| Chico | 8 | 2 | 10 |
| Chica | 10 | 5 | 15 |
| Total | 18 | 7 | 25 |

**EJEMPLO**

7. A una excursión van 10 chicos y 15 chicas. Llevan botas 8 chicos y 10 chicas y escogemos una persona al azar. Halla la probabilidad de que:

a) Lleve botas y sea chico.

Organizamos los datos en una tabla de doble entrada, llamada **tabla de contingencia** y los utilizamos para calcular las probabilidades.

$P(\text{botas} \cap \text{chico}) = \frac{8}{25} = 0{,}32$

b) No lleve botas o sea chico.

$P(\text{no botas} \cup \text{chico}) = P(\text{no botas}) + P(\text{chico}) - P(\text{no botas} \cap \text{chico})$

$= \frac{7}{25} + \frac{10}{25} - \frac{2}{25} = \frac{15}{25} = 0{,}6$

c) Sea chica, sabiendo que lleva botas. $P(\text{chica/botas}) = \frac{10}{18} = 0{,}56$



La regla del producto se puede utilizar para calcular el valor de la probabilidad condicionada.

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(A/B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)}$$

Dos sucesos, $A$ y $B$, son **independientes** cuando que ocurra uno no influye en que ocurra el otro. En caso contrario, decimos que los sucesos son **dependientes**.

$A$ y $B$ son independientes si $P(B/A) = P(B)$ y $P(A/B) = P(A)$.

### Regla del producto

La **regla del producto** es una forma de calcular la probabilidad de la intersección de sucesos.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B)$$

$A$ y $B$ son independientes, entonces $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

### ACTIVIDADES

30 APLICA. En una clase leen el periódico 10 de las 15 chicas, y 6 de los 11 chicos. Si elegimos un estudiante al azar, halla la probabilidad de que:

a) Lea el periódico y sea chico.

b) No lea el periódico o sea chico.

c) Sea chica, sabiendo que lee el periódico.

d) Lea el periódico, sabiendo que es chica.

31 PRACTICA. En una guardería hay 10 niños y 12 niñas. Si 6 niños saben andar y 6 niñas no saben andar, calcula la probabilidad de que, elegido uno de ellos al azar, sea niño y no sepa andar.

32 REFLEXIONA. Se extraen tres cartas de la baraja española. Calcula la probabilidad de que cada una sea de distinto palo.

Figura 4.107 Contenidos del Cuarto Curso orientadas a las Enseñanzas Académicas de Educación Secundaria. Editorial Santillana

## SABER HACER

### Calcular probabilidades en experimentos compuestos

**En una clase hay 8 chicos y 12 chicas. De ellos, 5 chicos y 8 chicas van a clase en bicicleta, y el resto usa el transporte escolar. Eligiendo a un estudiante al azar, calcula la probabilidad de que sea chica y vaya en bicicleta.**

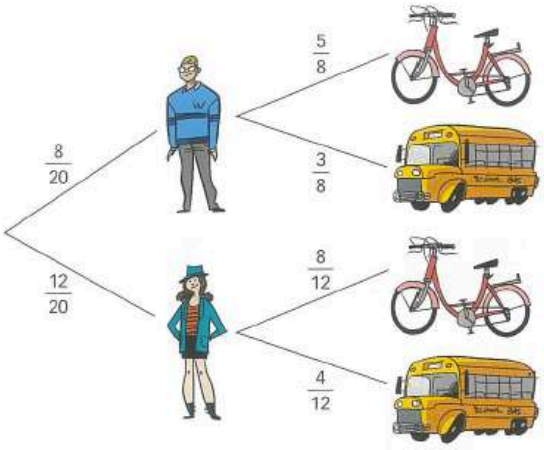
Para hacer el diagrama de árbol, se descompone el experimento compuesto en otros más simples.

**Pasos a seguir**

1. Construimos un diagrama de árbol en el que figuren todas las posibilidades.

2. Hallamos las probabilidades de cada una de las posibilidades.

3. Aplicamos la regla del producto para hallar la probabilidad pedida.




$$P(\text{chica} \cap \text{bicicleta}) = P(\text{chica}) \cdot P(\text{bicicleta/chica}) = \frac{12}{20} \cdot \frac{8}{12} = \frac{8}{20} = 0{,}4$$

## ACTIVIDADES

33 Se lanza un dado. Si sale 1, se lanza una moneda; si sale otro número, se extrae una carta de la baraja española. Calcula la probabilidad de obtener:

a) Un 3 y una sota.
b) Una sota.
c) Cara en la moneda.
d) Un número par y una figura.
e) Un número impar y un as.
f) Un número impar y cruz en la moneda.

34 Se escogen al azar dos bolas de una bolsa con 9 bolas azules, 12 bolas rojas y 7 bolas blancas. Calcula la probabilidad de que:

a) Las dos bolas sean de igual color.
b) Las dos bolas sean de distinto color.
c) Una de las bolas sea blanca.
d) La segunda bola sea blanca.

35 En una caja de bombones hay 5 bombones de chocolate blanco y 15 de chocolate negro. Si 2 bombones de chocolate blanco y 10 de chocolate negro tienen relleno de licor y escogemos un bombón al azar, calcula la probabilidad de los sucesos que aparecen a continuación.

a) Sea de chocolate negro y esté relleno.
b) No tenga relleno o sea de chocolate blanco.
c) Sea de chocolate blanco, sabiendo que es relleno.
d) Sea relleno, sabiendo que es de chocolate negro.

36 Se lanzan dos monedas. Si salen dos caras, se lanza una sola moneda; si no, se lanza un dado. Calcula la probabilidad de que se obtengan:

a) Tres caras.
b) Dos cruces y un 6.
c) Una cara, una cruz y un 2.

Figura 4.108 Contenidos del Cuarto Curso orientadas a las Enseñanzas Académicas de Educación Secundaria. Editorial Santillana

4.º ESO. Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Aplicadas

Editorial Anaya

UNIDAD 13

# 1 Obtención de probabilidades: ¿experimentación o cálculo matemático?

## Experiencias regulares e irregulares

### Experiencias regulares

Hay experiencias aleatorias diseñadas de manera que las probabilidades de los sucesos de que constan son previsibles.



Por ejemplo, al lanzar una moneda podemos considerar que es igual de probable que salga una cara o la otra. Por tanto, a cada una le asignamos la probabilidad de 1/2. Lo mismo ocurre con la extracción de una carta de una baraja: todas son igualmente probables y, por tanto, la probabilidad de cada una de ellas es 1/40.

### Experiencias irregulares



En otras experiencias es imposible prever el valor de las probabilidades de los sucesos. Solo se pueden conocer, aproximadamente, experimentando.

Por ejemplo, al lanzar una chincheta y comprobar si cae con la punta hacia arriba o ladeada, no podemos saber, *a priori*[1], cómo de probables son cada uno de los dos sucesos. Conseguiremos tener una idea haciéndolo muchas veces y anotando los resultados.

Esta forma de proceder también es válida aunque la experiencia sea regular: la experimentación servirá para evaluar aproximadamente el valor de la probabilidad si no somos capaces de conseguirla mediante cálculos combinatorios. Veamos un ejemplo histórico.

(1) *a priori*: antes de empezar.

## Un problema del caballero De Meré



Uno de los problemas que el caballero De Meré propuso a su amigo Pascal es el siguiente:

*Al lanzar cuatro dados, ¿qué es más ventajoso, apostar a que salga algún 6 o a que no salga ningún 6?*

Él tenía la costumbre de anotar todas sus jugadas y así basarse en la experiencia para apuestas posteriores. De este modo había llegado a la conclusión de que es más probable "algún 6" que "ningún 6".

Pascal y Fermat construyeron una teoría basándose en la cual se obtiene que:

$$P[\text{ningún 6}] = \frac{625}{1\,296} \qquad P[\text{algún 6}] = \frac{671}{1\,296}$$

El jugador, experimentalmente, llegó a una conclusión correcta, pero con inseguridad. Su amigo le respondió con seguridad y precisión gracias a su enfoque matemático.

En las siguientes páginas vamos a recorrer un camino teórico que nos permitirá enfocar y resolver con precisión algunos problemas de probabilidad.

Figura 4.109 Contenidos del Cuarto Curso orientadas a las Enseñanzas Aplicadas de Educación Secundaria. Editorial Anaya

# 2 Sucesos aleatorios

En nuestras vivencias de cada día nos encontramos con muchos acontecimientos de los que no podríamos predecir si ocurrirán o no. Dependen del azar. Por ejemplo:

| DEPENDEN DEL AZAR | NO DEPENDEN DEL AZAR |
|---|---|
| Lloverá mañana. | Amanecerá mañana. |
| Ganará mi equipo de liga. | Se jugará la liga. |
| Al lanzar la moneda, saldrá cara. | Al lanzar la moneda, caerá. |
| Me tocará el gordo de Navidad. | Tocará el gordo a algún número. |

**Etimología**

**Aleatorio:** Relativo al azar.

En latín, *alea* significa *dado* y también *suerte, azar*.

Se llaman **sucesos aleatorios** aquellos acontecimientos en cuya realización influye el azar.

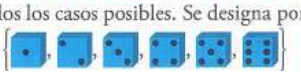
## Experiencias aleatorias

Para estudiar el azar y sus propiedades, podemos realizar experiencias aleatorias, es decir, experimentos cuyos resultados dependen del azar. Por ejemplo, estudiemos la experiencia aleatoria consistente en lanzar un dado y observar lo que sale.

- **Caso** es cada uno de los resultados que puede obtenerse al realizar una experiencia aleatoria.

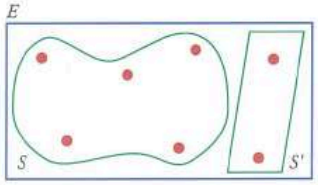
  Los posibles casos al *lanzar un dado* son: 

- **Espacio muestral** es el conjunto de todos los casos posibles. Se designa por $E$.

  En el dado, el espacio muestral es: $E =$ 

- **Sucesos** son los subconjuntos del espacio muestral. Algunos sucesos (hay muchos más) de la experiencia *lanzar un dado* son:






— $S'$ es el suceso contrario de $S$.
— $S'$ ocurre siempre y cuando no ocurra $S$.

- Se llama **experiencia aleatoria** a aquella cuyo resultado depende del azar.
- Cada posible resultado de una experiencia aleatoria se llama **caso.**
- **Espacio muestral** es el conjunto de todos los casos posibles.
- Los **sucesos** son subconjuntos extraídos del espacio muestral.
- Los casos también son sucesos. Se llaman **sucesos elementales** o **individuales.**
- El espacio muestral, $E$, se llama suceso total o **suceso seguro.**
- Se llama **suceso imposible,** $\varnothing$, al que no tiene ningún caso.
- Se llama suceso contrario de $S$ a su complementario; es decir, aquel cuyos casos le faltan a $S$ para completar el suceso seguro. Se designa por $S'$.

Figura 4.110 Contenidos del Cuarto Curso orientadas a las Enseñanzas Aplicadas de Educación Secundaria. Editorial Anaya

## Ejercicio resuelto

***En los experimentos aleatorios siguientes, determinar su espacio muestral y poner algunos ejemplos de sucesos:***

***a) Lanzar dos monedas y contar el número de caras.***

***b) Extraer una carta de una baraja española y anotar lo que sale.***

***c) Tomar, al azar, la ficha de uno de los socios de una biblioteca y analizar sus datos.***

a) El espacio muestral es: $E$ = {0 CARAS, 1 CARA, 2 CARAS}

Un suceso: ALGUNA CARA = {1 CARA, 2 CARAS}

Otro suceso: MENOS DE DOS CARAS = {0 CARAS, 1 CARA}

b) El espacio muestral consta de 40 casos: cada una de las cartas de la baraja.

Algunos sucesos:

AS = 

COPAS = 

c) El espacio muestral consta de tantos casos como socios haya en la biblioteca.

Algunos sucesos:

SOCIOS QUE HAN SACADO MÁS DE DIEZ LIBROS ESTE AÑO.

SOCIOS MENORES DE QUINCE AÑOS.

SOCIOS CON MÁS DE DIEZ AÑOS DE ANTIGÜEDAD.

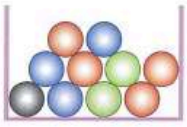
**En la web**

Ejercicios de iniciación: sucesos aleatorios.

## Piensa y practica

**1.** En una urna hay 10 bolas de cuatro colores.

*Sacamos una bola y anotamos su color.*



a) ¿Es una experiencia aleatoria?

b) Escribe el espacio muestral.

c) Inventa cinco sucesos.

**2.** Tenemos caramelos de fresa, naranja, limón y piña.

*Cogemos uno sin mirar y comprobamos su sabor.*

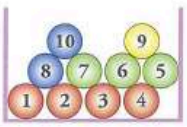
a) ¿Es una experiencia aleatoria?

b) Escribe el espacio muestral.

c) Inventa dos sucesos que tengan más de un caso.

**3.** En una urna hay 10 bolas numeradas.

*Sacamos una bola y anotamos el número.*




a) ¿Es una experiencia aleatoria?

b) Escribe el espacio muestral.

c) Inventa cinco sucesos.

**4.** Daniel le ha regalado a su hermana María una caja de bombones de chocolate.

*Saca un bombón y ve si es de chocolate.*

¿Es una experiencia aleatoria?

¿Por qué?

Figura 4.111 Contenidos del Cuarto Curso orientadas a las Enseñanzas Aplicadas de Educación Secundaria. Editorial Anaya

# 3 Probabilidad de un suceso




La **probabilidad** de un suceso indica el grado de confianza que podemos tener en que ese suceso ocurra. Se expresa mediante un número comprendido entre 0 y 1.

Para designar la probabilidad de un suceso $S$ ponemos $P[S]$.

Por ejemplo, $P[S] = \frac{1}{5}$ significa que, a grandes rasgos, el suceso ocurre una de cada cinco veces que se realiza la experiencia.

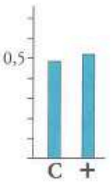
- Si $P[S]$ es un número próximo a cero, el suceso es poco probable.
- Si $P[S]$ es próximo a uno, el suceso es muy probable.

## Ley fundamental del azar

Se lanzan 1 000 veces una moneda y 1 000 veces una chincheta. Estos son los resultados obtenidos:

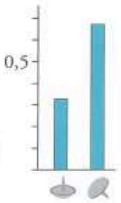
MONEDA

| | $f$ | $f_r$ |
|---|---|---|
| C | 483 | 0,483 |
| + | 517 | 0,517 |
| TOTAL | 1 000 | 1 |




CHINCHETA

| | $f$ | $f_r$ |
|---|---|---|
| 👍 | 327 | 0,327 |
| 👎 | 673 | 0,673 |
| TOTAL | 1 000 | 1 |




**Recuerda**

$f$ (frecuencia) es el número de veces que ocurre un suceso.

$f_r$ (frecuencia relativa) es la proporción de veces que ocurre el suceso.

- Observamos que, en la moneda, las frecuencias relativas de C y + son próximas a 1/2, lo cual es lógico, pues, por término medio, la mitad de las veces sale C y la otra mitad +. El valor de la frecuencia relativa es muy próximo al de la probabilidad.

$$\text{Como } P[\text{C}] = \frac{1}{2} \text{ y } P[+] = \frac{1}{2} \text{ entonces } f_r[\text{C}] \approx \frac{1}{2} \text{ y } f_r[+] \approx \frac{1}{2}$$

- Sin embargo, en la chincheta, las frecuencias relativas de 👍 y 👎 son muy distintas de 1/2, pues estos dos sucesos ocurren en proporciones distintas. Sus probabilidades son números desconocidos, pero, seguramente, serán próximos a las frecuencias relativas obtenidas.

$$f_r(👍) = 0{,}327;\ f_r(👎) = 0{,}673 \Rightarrow P[👍] \approx 0{,}327;\ P[👎] \approx 0{,}673$$

**Probabilidades importantes**

La probabilidad del suceso seguro es 1: $P[E] = 1$.

La probabilidad del suceso imposible es 0: $P[\varnothing] = 0$.

La probabilidad de cualquier suceso $S$ cumple que $0 \leq P[S] \leq 1$.

Si $P[S] = p$, entonces la probabilidad del suceso contrario a $S$ es $P[S'] = 1 - p$.

Al repetir muchas veces, $N$, una experiencia aleatoria, la frecuencia relativa de cada suceso, $S$, toma valores muy parecidos a su probabilidad:

$$f_r(S) \approx P[S]$$

Y cuanto más grande sea $N$ más se parece $f_r(S)$ a $P[S]$.

Esta propiedad se llama **ley de los grandes números.**

**En la web**

Experiencia: dos metas para una ficha.

Figura 4.112 Contenidos del Cuarto Curso orientadas a las Enseñanzas Aplicadas de Educación Secundaria. Editorial Anaya

## Cómo se mide la probabilidad de un suceso

**En la web**

Lectura: ¿Es posible dar leyes que regulen el azar?

Si el suceso pertenece a una **experiencia regular,** como en el caso de la moneda visto en la página anterior, se puede evaluar la probabilidad sin necesidad de experimentar. Se hará *asignando la misma probabilidad a todos los casos.*

Si la **experiencia** es **irregular,** *a priori* desconocemos la probabilidad de cada uno de los casos. La única forma de adquirir información sobre tales probabilidades es *experimentar.*

En cualquier tipo de experiencia, la suma de las probabilidades de todos los casos es 1.

### Ejercicios resueltos

**1.** ***¿Qué probabilidad es razonable asignar a cada cara de un dado correcto?***

Como el dado es correcto, la experiencia (lanzar el dado y mirar la cara que sale) es regular. Cada una de las seis caras saldrá, por término medio, una de cada seis veces. Por tanto, lo razonable es asignar a cada cara la probabilidad 1/6.

**2.** ***Lanzamos un dado 1 000 veces y obtenemos los siguientes resultados:***

$f(1) = 157$ $f(2) = 171$

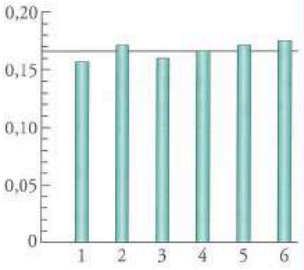
$f(3) = 160$ $f(4) = 166$

$f(5) = 171$ $f(6) = 175$

***¿Se puede suponer que el dado es correcto?***

Representamos los resultados obtenidos.

| CARA | FREC. | FREC. RELATIVA |
|---|---|---|
| ⚀ | 157 | 157/1 000 = 0,157 |
| ⚁ | 171 | 171/1 000 = 0,171 |
| ⚂ | 160 | 160/1 000 = 0,160 |
| ⚃ | 166 | 166/1 000 = 0,166 |
| ⚄ | 171 | 171/1 000 = 0,171 |
| ⚅ | 175 | 175/1 000 = 0,175 |




Si el dado es correcto, la probabilidad de cada cara es 1/6 = 0,166... Las frecuencias relativas obtenidas son todas ellas valores bastante próximos a este. Por tanto, por su comportamiento en estas 1 000 tiradas, el dado parece correcto.

**3.** ***En las estadísticas de un jugador de fútbol, realizadas a lo largo del presente campeonato, de todos sus tiros a puerta se han contado 35 goles y 189 fallos. ¿Qué probabilidad le asignamos a cada uno de los dos sucesos?***

La única forma de asignar una probabilidad a este tipo de sucesos es experimentar. O bien, recurrir a la experiencia almacenada.

Esta experiencia se reduce a 35 + 189 = 224 tiros a puerta. Los resultados son:

GOLES: 35 de 224 → 35/224 = 0,15625

FALLOS: 189 de 224 → 189/224 = 0,84375

Por tanto, asignamos:

$P[\text{GOL}] = 0{,}15625$ $P[\text{FALLO}] = 0{,}84375$

### Piensa y practica

**1.** En una bolsa hay 90 bolas idénticas, numeradas del 1 al 90.

a) ¿Cuál es la probabilidad de extraer la bola con el número 17?

b) Si solo hubiera diez bolas numeradas del 11 al 20, ¿cuál sería la probabilidad de obtener el 17?

**2.** En una caja hay dos tipos de galletas: las de chocolate, *CH*, y las normales, *N*. Sacamos una al azar, la miramos y la devolvemos a la caja.

Si hemos extraído 27 galletas de chocolate y 13 galletas normales, ¿qué valores asignarías a $P[CH]$ y a $P[N]$?

Figura 4.113 Contenidos del Cuarto Curso orientadas a las Enseñanzas Aplicadas de Educación Secundaria. Editorial Anaya

# 4 Ley de Laplace para experiencias regulares

**Ten en cuenta**

$P[\square, \square, \square] =$

$= P[\square] + P[\square] + P[\square] =$

$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$

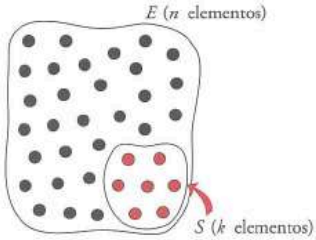
Hemos pintado las caras de un dado de los colores siguientes:

de rojo. El rojo saldrá 3 veces de cada 6: $P[\square] = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

de verde. El verde saldrá 2 veces de cada 6: $P[\square] = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

de amarillo. El amarillo saldrá 1 vez de cada 6: $P[\square] = \frac{1}{6}$

Estos resultados se pueden generalizar para evaluar la probabilidad de un suceso cualquiera relacionado con un instrumento aleatorio regular.




Realizamos una experiencia aleatoria con un instrumento regular.

El espacio muestral tiene $n$ elementos (casos) y, por tanto, la probabilidad de cada caso es $1/n$.

$S$ es un suceso que consta de $k$ elementos.

Entonces, la probabilidad de $S$ es: $P[S] = \frac{k}{n}$

Esto se expresa del modo siguiente:

$$P[S] = \frac{\text{número de casos favorables a } S}{\text{número total de casos posibles}}$$ LEY DE LAPLACE

**Problemas resueltos**

| | |
|---|---|
| ROJAS | 40 |
| VERDES | 25 |
| AZULES | 15 |
| NEGRAS | 10 |

**1.** ***En una bolsa tenemos 90 bolas de colores, todas del mismo tamaño, repartidas como indica la tabla del margen. Si sacamos una al azar, calcular las probabilidades de que sea de uno u otro color.***

$P[\bullet] = \frac{40}{90} = \frac{4}{9}$; $P[\bullet] = \frac{25}{90} = \frac{5}{18}$; $P[\bullet] = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$; $P[\bullet] = \frac{10}{90} = \frac{1}{9}$

**2.** ***En una caja hay 3 586 clavos, de los cuales 311 son defectuosos. Calcular la probabilidad de que, al extraer un clavo:***

***a) Sea defectuoso.*** ***b) Sea correcto.***

a) $P[\text{DEFECTUOSO}] = \frac{\text{número de clavos defectuosos}}{\text{número total de clavos}} = \frac{311}{3586} = 0{,}0867$

b) Hay $3586 - 311 = 3275$ clavos correctos.

$P[\text{CORRECTO}] = \frac{\text{número de clavos correctos}}{\text{número total de clavos}} = \frac{3275}{3586} = 0{,}9133$

**En la web**

Ejercicios de iniciación: ley de Laplace.

**En la web**

Cálculo de probabilidades mediante la ley de Laplace.

**Piensa y practica**

**1.** Extraemos una carta de una baraja española con 40 naipes. Halla la probabilidad de obtener:

a) El as de espadas.

b) El rey de bastos.

c) Una figura (sota, caballo o rey).

d) Una copa.

**2.** En un campamento hay 32 jóvenes europeos, 13 americanos, 15 africanos y 23 asiáticos. Se elige al azar a su portavoz. ¿Qué probabilidad hay de que sea europeo?

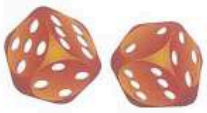
**3.** Al hacer girar la aguja, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número par?




Figura 4.114 Contenidos del Cuarto Curso orientadas a las Enseñanzas Aplicadas de Educación Secundaria. Editorial Anaya

UNIDAD 13

# 5 Experiencias compuestas. Diagramas en árbol



El lanzamiento de dos dados puede considerarse una *experiencia compuesta* de dos experiencias simples: lanzar un dado y lanzar otro dado.

Las experiencias simples que forman una experiencia compuesta pueden ser **dependientes** o **independientes.**

Dos o más experiencias aleatorias son **independientes** cuando el resultado de cada una de ellas no depende del resultado de las demás, y son **dependientes** cuando el resultado de cada una influye en las probabilidades de las siguientes.

Por ejemplo, el lanzamiento de dos dados puede considerarse como composición de dos pruebas *independientes*, pues el resultado de cada uno no influye en el otro. Sin embargo, la extracción de dos cartas de una baraja (una carta seguida de otra) es la composición de dos pruebas *dependientes*, pues el resultado de la primera influye en las probabilidades de los sucesos de la segunda.

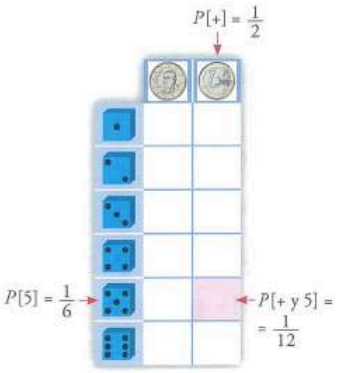
La 1.ª es AS. Quedan 3 ASES en 39 cartas.



La 1.ª no es AS. Quedan 4 ASES en 39 cartas.



| 1.ª extracción | quedan | 2.ª extracción |
|---|---|---|
| AS | 39 cartas, 3 ASES | $P[\text{AS}] = 3/39$ |
| NO AS | 39 cartas, 4 ASES | $P[\text{AS}] = 4/39$ |




## Composición de experiencias independientes

Es más sencillo calcular las probabilidades de los sucesos compuestos descomponiéndolos en sucesos simples.

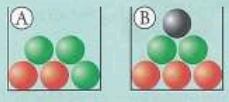
Cuando varias experiencias aleatorias son independientes, la probabilidad de que ocurra $A$ en la primera y $B$ en la segunda es: $P[A \text{ y } B] = P[A] \cdot P[B]$.

Por ejemplo, si lanzamos una moneda y un dado, ¿cuál es la probabilidad de obtener cruz (+) en la moneda y 5 en el dado? Esta es una experiencia compuesta de otras dos ("lanzar una moneda" y "lanzar un dado"). La probabilidad pedida es el producto de las probabilidades, pues cada resultado de la moneda puede darse con cada resultado del dado:

$$P[+ \text{ y } 5] = P[+] \cdot P[5] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

## Ejercicio resuelto

**1.** ***Sacamos una bola de A y una bola de B. Calcular:***




***a) P[🔴 y 🔴]*** ***b) P[🔴 y 🟢]***

***c) P[🟢 y 🔴]***

***d) P[una de ellas 🔴 y otra 🟢]***

***e) P[la segunda ⚫]***

a) $P[\text{🔴 y 🔴}] = P[\text{1.ª 🔴}] \cdot P[\text{2.ª 🔴}] = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$

b) $P[\text{🔴 y 🟢}] = P[\text{1.ª 🔴}] \cdot P[\text{2.ª 🟢}] = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$

c) $P[\text{🟢 y 🔴}] = P[\text{1.ª 🟢}] \cdot P[\text{2.ª 🔴}] = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{6} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$

d) $P[\text{una de ellas 🔴 y otra 🟢}] = P[\text{🔴 y 🟢}] + P[\text{🟢 y 🔴}] = \frac{4}{30} + \frac{9}{30} = \frac{13}{30}$

e) $P[\text{la 2.ª ⚫}] = P[\text{cualquier cosa la 1.ª}] \cdot P[\text{la 2.ª ⚫}] = 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

En la web Cálculo de probabilidades en experiencias independientes.

Figura 4.115 Contenidos del Cuarto Curso orientadas a las Enseñanzas Aplicadas de Educación Secundaria. Editorial Anaya

**Experiencias independientes**

El resultado de cada experiencia no influye en el resultado de la siguiente.

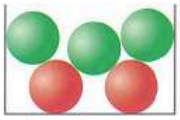
## Experiencias dependientes. Probabilidad condicionada

Si dos sucesos $A$ y $B$ corresponden a pruebas dependientes, la probabilidad de que ocurra $A$ en la 1.ª y $B$ en la 2.ª es:

$$P[A \text{ y } B] = P[A] \cdot P[B \text{ en la 2.ª} / A \text{ en la 1.ª}] = P[A] \cdot P[B/A]$$

La expresión $P[B/A]$ se llama **probabilidad condicionada:** probabilidad de $B$ condicionada a que ocurra $A$.

Esto se puede generalizar para más de dos sucesos.



Por ejemplo, si tenemos una urna como la del margen, con 3 bolas verdes y 2 rojas y extraemos dos bolas (primero una y luego otra), vamos a calcular la probabilidad de que ambas sean verdes.

En la primera extracción, la probabilidad de verde es muy fácil de obtener:

PRIMERA EXTRACCIÓN  $P[\text{verde}] = \frac{3}{5}$

En la segunda extracción, la urna ya no tiene 5 bolas, sino 4. Y solo dos de ellas son verdes. Por tanto:

SEGUNDA EXTRACCIÓN  $P[\text{verde}] = \frac{2}{4}$

La probabilidad final es, por tanto:

$$P[\text{verde y verde}] = P[\text{verde la 1.ª}] \cdot P[\text{verde la 2.ª} / \text{verde la 1.ª}] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

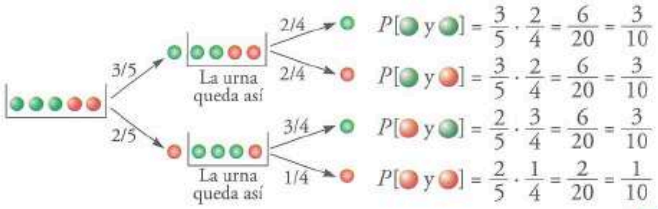
**Recuerda**

Significado de algunas probabilidades:

$\frac{2}{5} = P[\text{roja en la 1.ª}]$

$\frac{3}{4} = P[\text{verde en la 2.ª} / \text{roja en la 1.ª}]$

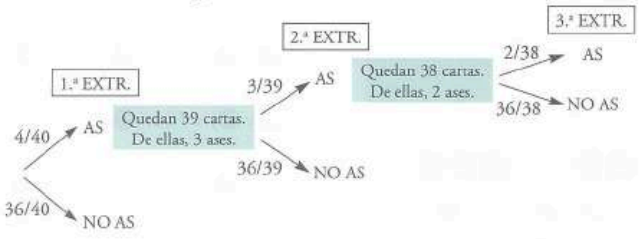
Esta experiencia se puede describir sistemáticamente, y de forma muy clara, mediante un **diagrama en árbol:**




## Ejercicios resueltos

**2.** ***Extraemos tres cartas de una baraja española. Hallar la probabilidad de obtener tres ASES.***

Lo describimos en un diagrama en árbol:

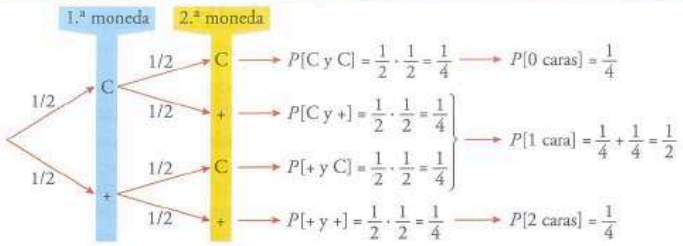



$$P[3 \text{ ASES}] = P[\text{AS y AS y AS}] = P[\text{AS}] \cdot P[\text{AS en 2.ª} / \text{AS en 1.ª}] \cdot$$

$$\cdot P[\text{AS en 3.ª} / \text{AS en 1.ª y 2.ª}] = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} = \frac{1}{2\,470}$$

Figura 4.116 Contenidos del Cuarto Curso orientadas a las Enseñanzas Aplicadas de Educación Secundaria. Editorial Anaya

**3.** ***Lanzamos dos monedas y observamos el número de caras que obtenemos. Calcular las probabilidades de obtener 0 caras, 1 cara y 2 caras.***




**4.** ***Volvamos al problema de los 4 dados que el jugador De Meré propuso a su amigo, el matemático Pascal:***

***Si lanzamos cuatro dados, ¿cuál es la probabilidad de obtener 6 en alguno de ellos?***

Empecemos por calcular la probabilidad del *suceso contrario:* "no obtener ningún 6". No obtener ningún 6 en cuatro dados es:

"no 6 en el 1.º" y "no 6 en el 2.º" y "no 6 en el 3.º" y "no 6 en el 4.º"

Como las cuatro experiencias son independientes:

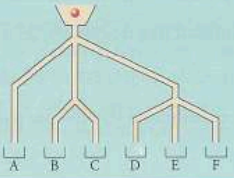
$$P[\text{ningún 6}] = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{625}{1\,296}$$

El suceso "alguno de los cuatro es 6" es el contrario a "ninguno de los cuatro es 6".

Recordemos que si $P[S] = p$, la probabilidad de su contrario es $P[P'] = 1 - p$. Por tanto:

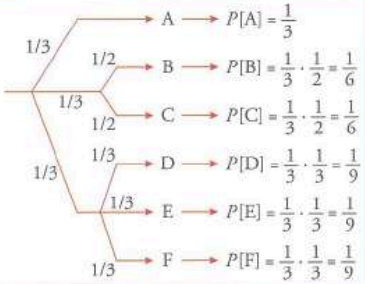
$$P[\text{algún 6}] = 1 - P[\text{ningún 6}] = 1 - \frac{625}{1\,296} = \frac{671}{1\,296}$$

**5.** ***Soltamos una bola en el embudo. Hallar la probabilidad de que caiga en cada casilla.***




Suponemos que cada vez que la bola llega a una ramificación, tiene la misma probabilidad de ir a cada rama.

Utilizamos un diagrama en árbol para calcular la probabilidad de que la bola caiga en cada una de las casillas.




## Piensa y practica

**1.** Lanzamos dos dados. Halla la probabilidad de obtener par en el primero y múltiplo de 3 en el segundo.

**2.** Sacamos una bola de la 1.ª urna y la echamos en la 2.ª. Luego, sacamos una bola de la 2.ª urna.



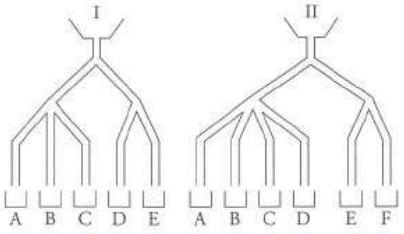

a) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas sacadas sean azules?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que alguna bola sea azul? Hazlo mediante la probabilidad del suceso contrario.

**3.** ¿Cuál es la probabilidad de que cada bola que se deja caer por el embudo caiga en cada casillero?

a) En el aparato I.

b) En el aparato II.




En la web Cálculo de probabilidades en experiencias dependientes.

Figura 4.117 Contenidos del Cuarto Curso orientadas a las Enseñanzas Aplicadas de Educación Secundaria. Editorial Anaya

# 6 Tablas de contingencia

| CURSO | TIPO DE ACTIVIDAD EXTRAESCOLAR | | | |
|---|---|---|---|---|
| | CULTURAL | DEPORTIVA | NINGUNA | TOTAL |
| 1.º | 12 | 36 | 72 | 120 |
| 2.º | 15 | 40 | 45 | 100 |
| 3.º | 21 | 44 | 35 | 100 |
| 4.º | 24 | 40 | 16 | 80 |
| TOTAL | 72 | 160 | 168 | 400 |

En un centro docente hay 400 estudiantes de la ESO (120 de 1.º, 100 de 2.º, 100 de 3.º y 80 de 4.º). Cada uno de ellos puede participar en una actividad extraescolar (solo en una o en ninguna). Hay actividades extraescolares de dos tipos: culturales y deportivas.

En la tabla adjunta se describe el reparto de estudiantes según su curso y según el tipo de actividad en la que participan.

Es una **tabla de contingencia,** porque describe un colectivo de individuos (los estudiantes de un centro) repartidos por dos conceptos (curso y actividad extraescolar). En cada concepto hay varias clases (4 cursos, 3 actividades). Cada individuo está contabilizado en alguna casilla y solo en una.

### Interpretar una tabla

Observa la tabla que tienes arriba y responde:

a) ¿Cuántos estudiantes del centro participan en actividades culturales? ¿Cuántos de ellos son de 2.º?

b) ¿Cuántos estudiantes del centro no participan en ninguna actividad extraescolar? De ellos, ¿cuántos son de 4.º?

c) ¿Cuántos estudiantes de 3.º participan en actividades deportivas?

d) ¿Cuántos estudiantes que participan en actividades deportivas son de 3.º?

## Proporciones y probabilidades

En la tabla anterior podemos calcular multitud de proporciones. Por ejemplo:

a) ¿Qué proporción del total son estudiantes de 1.º?

Hay 120 de un total de 400. Por tanto, 120/400 = 0,30. Son el 30 %.

b) ¿Qué proporción de estudiantes de 1.º participan en actividades culturales?

12 de un total de 120 estudiantes de 1.º: 12/120 = 0,10. El 10 %.

¿Cómo interpretamos estas proporciones como probabilidades? Veamos:

a) Tomamos al azar un estudiante. ¿Qué probabilidad hay de que sea de 1.º?

$P[1.º] = 120/400 = 0{,}30$

b) Tomamos al azar un estudiante de 1.º. ¿Qué probabilidad hay de que participe en una actividad cultural?

$P[\text{CULTURAL} / 1.º] = 12/120 = 0{,}10$

¿Cómo designamos a los 44 estudiantes que se encuentran en la intersección de la fila **3.º** y la columna **DEPORTIVA**? Son los estudiantes de 3.º que participan en una actividad deportiva. Podríamos calcular la probabilidad de que al elegir, al azar, un estudiante del centro, sea de 3.º y que participe en una actividad deportiva:

$$P[3.º \text{ y DEPORTIVA}] = P[3.º \cap \text{DEPORTIVA}] = 44/400 = 0{,}11$$

**En la web**

HOJA DE CÁLCULO con la que podrás trabajar con tablas de contingencia.

| | CULTURAL | DEPORTIVA | NINGUNA | TOTAL |
|---|---|---|---|---|
| 1.º | 12 | 36 | 72 | 120 |
| 2.º | 15 | 40 | 45 | 100 |
| 3.º | 21 | 44 | 35 | 100 |
| 4.º | 24 | 40 | 16 | 80 |
| TOTAL | 72 | 160 | 168 | 400 |

## Probabilidades condicionadas

Una de las probabilidades obtenidas arriba, $P[\text{CULTURAL} / 1.º]$, es una **probabilidad condicionada.** El colectivo de referencia no es el total de estudiantes del centro, sino solo los de 1.º.

Análogamente, $P[3.º / \text{CULTURAL}]$ significa que el colectivo de referencia es el conjunto de estudiantes que participan en alguna actividad cultural y nos preguntamos por la probabilidad de que, al elegir uno de ellos al azar, sea de 3.º.

Figura 4.118 Contenidos del Cuarto Curso orientadas a las Enseñanzas Aplicadas de Educación Secundaria. Editorial Anaya

## Ejercicios resueltos

**1.** ***Explicar el significado de los números que se resaltan en la tabla.***

| | CULTURAL | DEPORTIVA | NINGUNA | TOTAL |
|---|---|---|---|---|
| 1.º | 12 | 36 | **72** | 120 |
| 2.º | 15 | **40** | 45 | 100 |
| 3.º | **21** | 44 | 35 | 100 |
| 4.º | 24 | 40 | 16 | **80** |
| TOTAL | 72 | **160** | 168 | **400** |

- 400 es el total de estudiantes del centro.
- 80 es el número de estudiantes de 4.º.
- 160 es el número de estudiantes que participan en alguna actividad deportiva.
- 21 es el número de estudiantes de 3.º que participan en alguna actividad cultural, es decir, "**3.º y CULTURAL**" (o bien "**3.º ∩ CULTURAL**").
- 40 estudiantes de 2.º que participan en alguna actividad deportiva.
- 72 estudiantes de 1.º que no participan en NINGUNA actividad extraescolar.

**2.** ***Explicar lo que significa cada una de las siguientes expresiones y dar su valor:***

P [3.º]

P [NINGUNA]

P [2.º / NINGUNA]

P [NINGUNA / 2.º]

$P$[3.º]: proporción de estudiantes del centro que son de 3. º. Es decir, la probabilidad de que, al tomar un estudiante del centro al azar, sea de 3.º.

$P[3.º] = 100/400 = 1/4 = 0{,}25$

$P$[NINGUNA]: proporción de estudiantes que no practican ninguna actividad.

$P[\text{NINGUNA}] = 168/400 = 0{,}42$

$P$[2.º / NINGUNA]: entre los estudiantes que no practican NINGUNA actividad extraescolar, qué proporción son de 2.º.

$P[2.º / \text{NINGUNA}] = 45/168 = 0{,}27$

$P$[NINGUNA / 2.º]: entre los estudiantes de 2.º, qué proporción no practica NINGUNA actividad extraescolar.

$P[\text{NINGUNA} / 2.º] = 45/100 = 0{,}45$

**3.** ***Para analizar la evolución de la participación en actividades CULTURALES al avanzar la edad, ¿qué proporciones hemos de calcular y comparar?***

Hemos de comparar $P$[CULT./1.º], $P$[CULT./2.º], $P$[CULT./3.º], $P$[CULT./4.º].

$P[\text{CULT.} / 1.º] = 12/120 = 0{,}10$
$P[\text{CULT.} / 2.º] = 15/100 = 0{,}15$
$P[\text{CULT.} / 3.º] = 21/100 = 0{,}21$
$P[\text{CULT.} / 4.º] = 24/80 = 0{,}30$

La participación en actividades culturales evoluciona, de 1.º a 4.º, así:

$10\% \rightarrow 15\% \rightarrow 21\% \rightarrow 30\%$

Es claro que aumenta con la edad.

## Piensa y practica

En la web Refuerza el trabajo con tablas de contingencia.

**1.** Explica el significado de los números 120, 168, 12, 45 y 40 de la tabla del ejercicio resuelto anterior.

**2.** Explica lo que significa, para la tabla del ejercicio resuelto anterior, estas expresiones y da su valor:

a) $P$[1.º] b) $P$[CULTURAL]

c) $P$[4.º / CULTURAL] d) $P$[CULTURAL / 4.º]

**3.** Queremos analizar, partiendo de los datos de la tabla del ejercicio resuelto anterior, la evolución del absentismo (falta de participación) en actividades extraescolares cualesquiera, al aumentar la edad. Calcula las proporciones que convenga y compáralas.

**4.** En una bolsa hay 40 bolas huecas, y dentro de cada una hay un papel en el que pone sí o NO, según esta tabla:

| | 🔴 | 🟢 | 🔵 | TOTAL |
|---|---|---|---|---|
| SÍ | 15 | 4 | 1 | 20 |
| NO | 5 | 4 | 11 | 20 |
| TOTAL | 20 | 8 | 12 | 40 |

a) Describe los sucesos sí, NO, 🔴, 🔴 / sí, sí / 🔴 y calcula sus probabilidades.

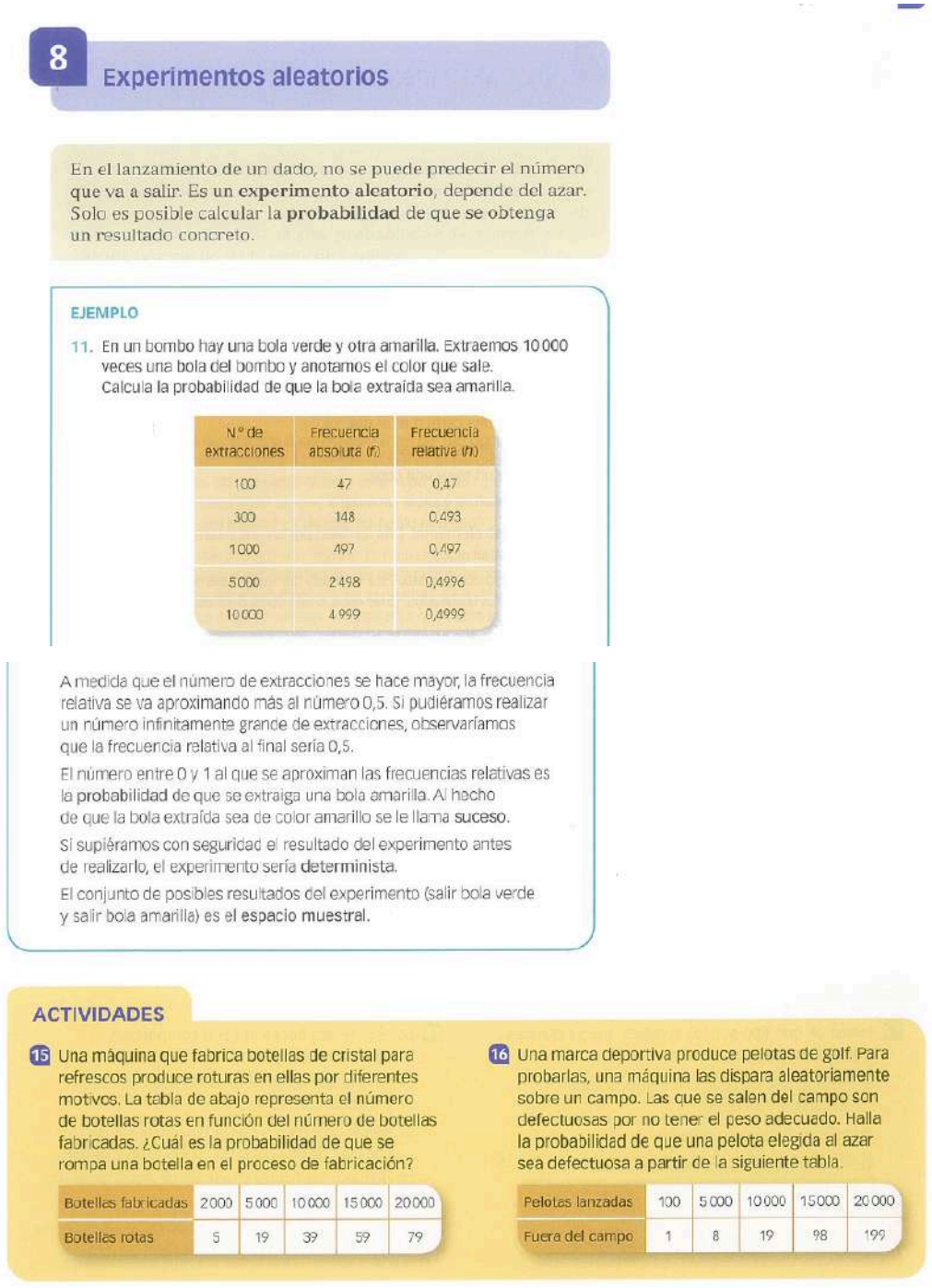
b) Hemos sacado una bola roja. ¿Qué probabilidad hay de que haya sí en su interior? ¿Y si la bola es azul?

c) Se ha sacado una bola y dentro pone sí. ¿Cuál es la probabilidad de que sea 🔴? ¿Y 🟢? ¿Y 🔵?

En la web Cálculo de probabilidades en tablas de contingencia.

Figura 4.119 Contenidos del Cuarto Curso orientadas a las Enseñanzas Aplicadas de Educación Secundaria. Editorial Anaya

Editorial Santillana



## 8 Experimentos aleatorios

En el lanzamiento de un dado, no se puede predecir el número que va a salir. Es un **experimento aleatorio**, depende del azar. Solo es posible calcular la **probabilidad** de que se obtenga un resultado concreto.

**EJEMPLO**

11. En un bombo hay una bola verde y otra amarilla. Extraemos 10 000 veces una bola del bombo y anotamos el color que sale. Calcula la probabilidad de que la bola extraída sea amarilla.

| Nº de extracciones | Frecuencia absoluta (f) | Frecuencia relativa (h) |
|---|---|---|
| 100 | 47 | 0,47 |
| 300 | 148 | 0,493 |
| 1 000 | 497 | 0,497 |
| 5 000 | 2 498 | 0,4996 |
| 10 000 | 4 999 | 0,4999 |

A medida que el número de extracciones se hace mayor, la frecuencia relativa se va aproximando más al número 0,5. Si pudiéramos realizar un número infinitamente grande de extracciones, observaríamos que la frecuencia relativa al final sería 0,5.

El número entre 0 y 1 al que se aproximan las frecuencias relativas es la **probabilidad** de que se extraiga una bola amarilla. Al hecho de que la bola extraída sea de color amarillo se le llama **suceso**.

Si supiéramos con seguridad el resultado del experimento antes de realizarlo, el experimento sería **determinista**.

El conjunto de posibles resultados del experimento (salir bola verde y salir bola amarilla) es el **espacio muestral**.

**ACTIVIDADES**

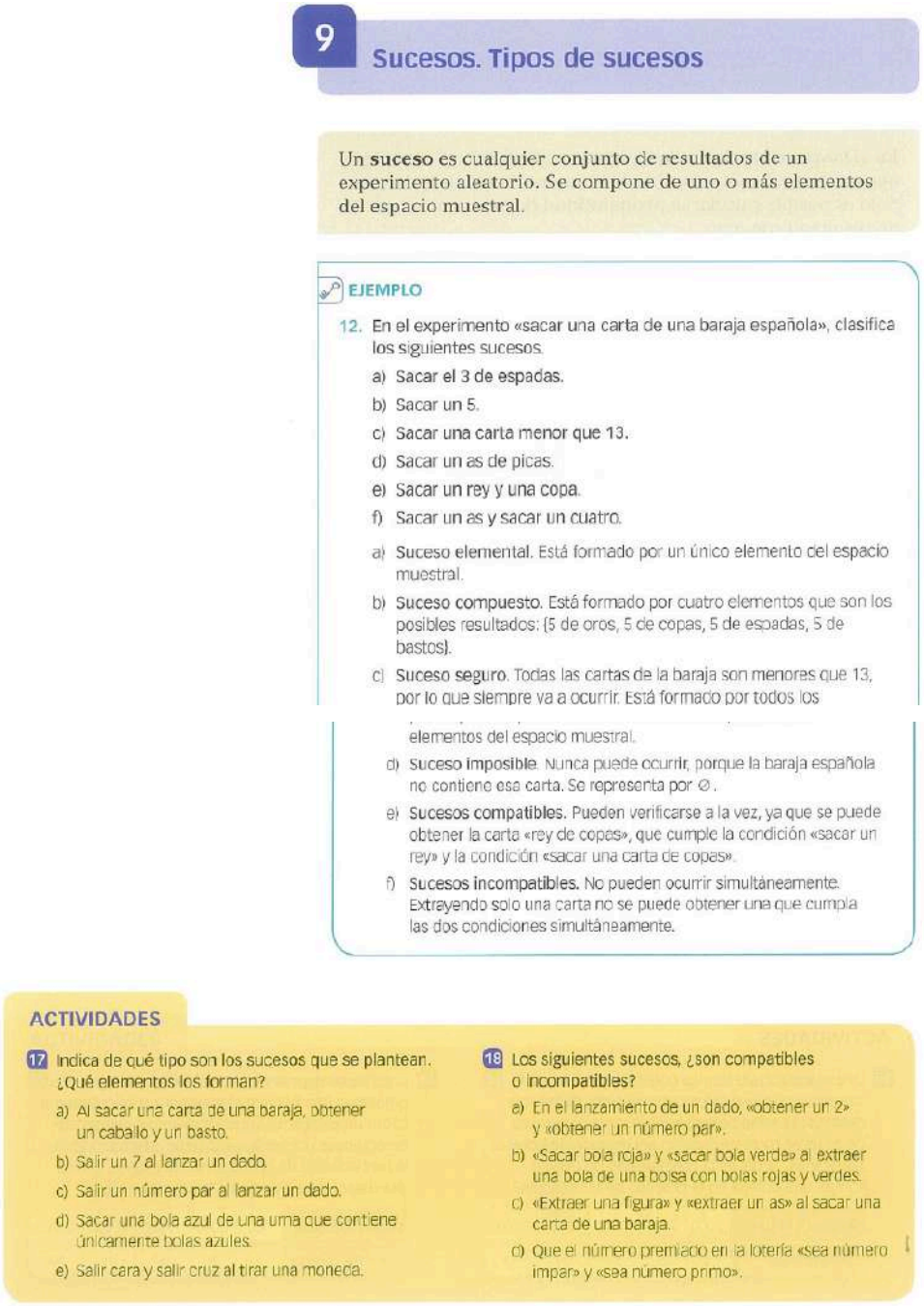
15 Una máquina que fabrica botellas de cristal para refrescos produce roturas en ellas por diferentes motivos. La tabla de abajo representa el número de botellas rotas en función del número de botellas fabricadas. ¿Cuál es la probabilidad de que se rompa una botella en el proceso de fabricación?

| Botellas fabricadas | 2 000 | 5 000 | 10 000 | 15 000 | 20 000 |
|---|---|---|---|---|---|
| Botellas rotas | 5 | 19 | 39 | 59 | 79 |

16 Una marca deportiva produce pelotas de golf. Para probarlas, una máquina las dispara aleatoriamente sobre un campo. Las que se salen del campo son defectuosas por no tener el peso adecuado. Halla la probabilidad de que una pelota elegida al azar sea defectuosa a partir de la siguiente tabla.

| Pelotas lanzadas | 100 | 5 000 | 10 000 | 15 000 | 20 000 |
|---|---|---|---|---|---|
| Fuera del campo | 1 | 8 | 19 | 98 | 199 |

Figura 4.120 Contenidos del Cuarto Curso orientadas a las Enseñanzas Aplicadas de Educación Secundaria. Editorial Santillana



## 9 Sucesos. Tipos de sucesos

Un **suceso** es cualquier conjunto de resultados de un experimento aleatorio. Se compone de uno o más elementos del espacio muestral.

**EJEMPLO**

12. En el experimento «sacar una carta de una baraja española», clasifica los siguientes sucesos.
    a) Sacar el 3 de espadas.
    b) Sacar un 5.
    c) Sacar una carta menor que 13.
    d) Sacar un as de picas.
    e) Sacar un rey y una copa.
    f) Sacar un as y sacar un cuatro.

a) **Suceso elemental.** Está formado por un único elemento del espacio muestral.

b) **Suceso compuesto.** Está formado por cuatro elementos que son los posibles resultados: {5 de oros, 5 de copas, 5 de espadas, 5 de bastos}.

c) **Suceso seguro.** Todas las cartas de la baraja son menores que 13, por lo que siempre va a ocurrir. Está formado por todos los elementos del espacio muestral.

d) **Suceso imposible.** Nunca puede ocurrir, porque la baraja española no contiene esa carta. Se representa por ∅.

e) **Sucesos compatibles.** Pueden verificarse a la vez, ya que se puede obtener la carta «rey de copas», que cumple la condición «sacar un rey» y la condición «sacar una carta de copas».

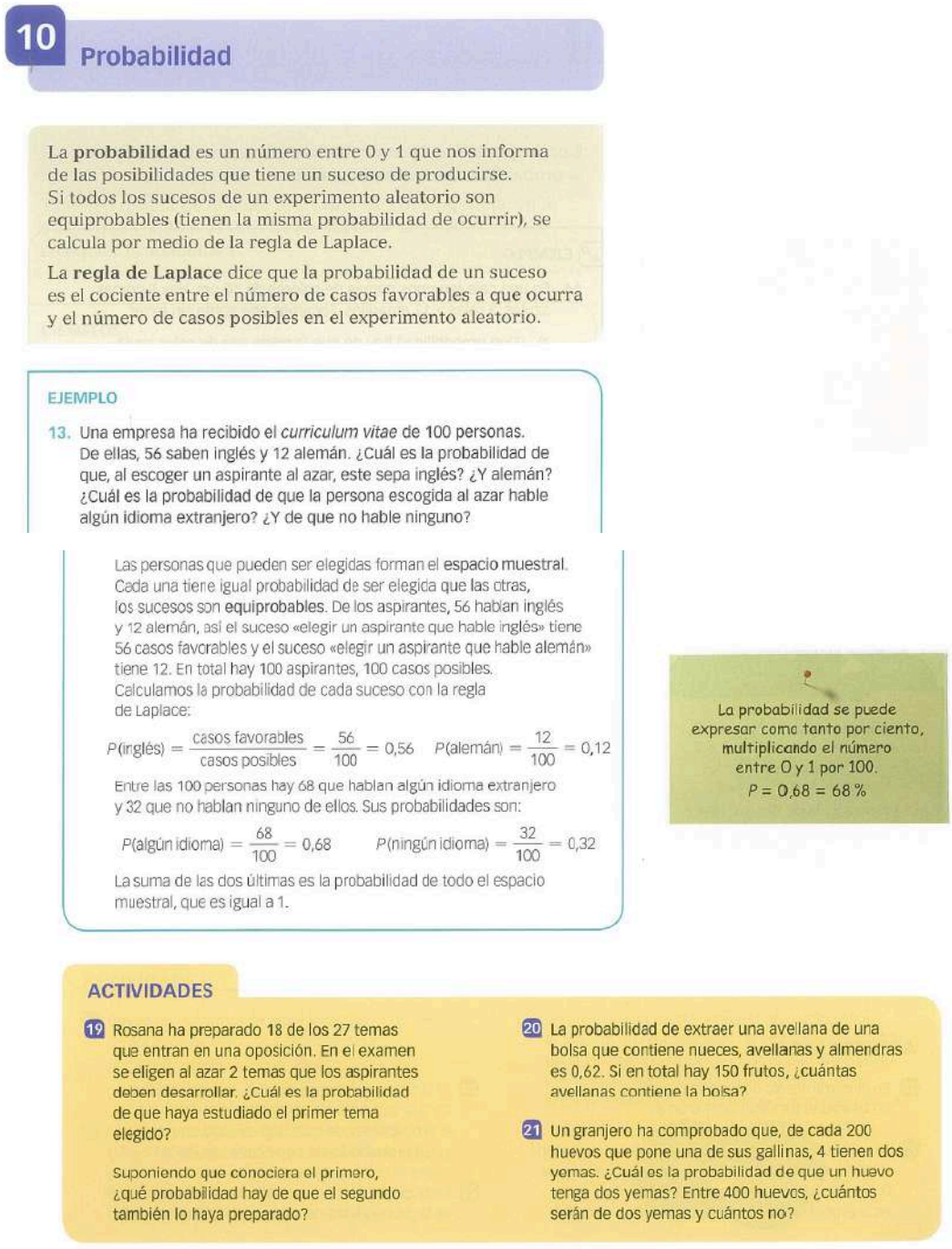
f) **Sucesos incompatibles.** No pueden ocurrir simultáneamente. Extrayendo solo una carta no se puede obtener una que cumpla las dos condiciones simultáneamente.

**ACTIVIDADES**

17 Indica de qué tipo son los sucesos que se plantean. ¿Qué elementos los forman?
a) Al sacar una carta de una baraja, obtener un caballo y un basto.
b) Salir un 7 al lanzar un dado.
c) Salir un número par al lanzar un dado.
d) Sacar una bola azul de una urna que contiene únicamente bolas azules.
e) Salir cara y salir cruz al tirar una moneda.

18 Los siguientes sucesos, ¿son compatibles o incompatibles?
a) En el lanzamiento de un dado, «obtener un 2» y «obtener un número par».
b) «Sacar bola roja» y «sacar bola verde» al extraer una bola de una bolsa con bolas rojas y verdes.
c) «Extraer una figura» y «extraer un as» al sacar una carta de una baraja.
d) Que el número premiado en la lotería «sea número impar» y «sea número primo».

Figura 4.121 Contenidos del Cuarto Curso orientadas a las Enseñanzas Aplicadas de Educación Secundaria. Editorial Santillana



# 10 Probabilidad

La **probabilidad** es un número entre 0 y 1 que nos informa de las posibilidades que tiene un suceso de producirse.
Si todos los sucesos de un experimento aleatorio son equiprobables (tienen la misma probabilidad de ocurrir), se calcula por medio de la regla de Laplace.

La **regla de Laplace** dice que la probabilidad de un suceso es el cociente entre el número de casos favorables a que ocurra y el número de casos posibles en el experimento aleatorio.

**EJEMPLO**

13. Una empresa ha recibido el *curriculum vitae* de 100 personas. De ellas, 56 saben inglés y 12 alemán. ¿Cuál es la probabilidad de que, al escoger un aspirante al azar, este sepa inglés? ¿Y alemán? ¿Cuál es la probabilidad de que la persona escogida al azar hable algún idioma extranjero? ¿Y de que no hable ninguno?

Las personas que pueden ser elegidas forman el **espacio muestral**. Cada una tiene igual probabilidad de ser elegida que las otras, los sucesos son **equiprobables**. De los aspirantes, 56 habían inglés y 12 alemán, así el suceso «elegir un aspirante que hable inglés» tiene 56 casos favorables y el suceso «elegir un aspirante que hable alemán» tiene 12. En total hay 100 aspirantes, 100 casos posibles. Calculamos la probabilidad de cada suceso con la regla de Laplace:

$$P(\text{inglés}) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{56}{100} = 0{,}56 \qquad P(\text{alemán}) = \frac{12}{100} = 0{,}12$$

Entre las 100 personas hay 68 que hablan algún idioma extranjero y 32 que no hablan ninguno de ellos. Sus probabilidades son:

$$P(\text{algún idioma}) = \frac{68}{100} = 0{,}68 \qquad P(\text{ningún idioma}) = \frac{32}{100} = 0{,}32$$

La suma de las dos últimas es la probabilidad de todo el espacio muestral, que es igual a 1.

La probabilidad se puede expresar como tanto por ciento, multiplicando el número entre 0 y 1 por 100.
$P = 0{,}68 = 68\,\%$

**ACTIVIDADES**

19. Rosana ha preparado 18 de los 27 temas que entran en una oposición. En el examen se eligen al azar 2 temas que los aspirantes deben desarrollar. ¿Cuál es la probabilidad de que haya estudiado el primer tema elegido?

    Suponiendo que conociera el primero, ¿qué probabilidad hay de que el segundo también lo haya preparado?

20. La probabilidad de extraer una avellana de una bolsa que contiene nueces, avellanas y almendras es 0,62. Si en total hay 150 frutos, ¿cuántas avellanas contiene la bolsa?

21. Un granjero ha comprobado que, de cada 200 huevos que pone una de sus gallinas, 4 tienen dos yemas. ¿Cuál es la probabilidad de que un huevo tenga dos yemas? Entre 400 huevos, ¿cuántos serán de dos yemas y cuántos no?

Figura 4.122 Contenidos del Cuarto Curso orientadas a las Enseñanzas Aplicadas de Educación Secundaria. Editorial Santillana

## 11 Propiedades de la probabilidad

Las **propiedades de la probabilidad** ayudan a calcular la probabilidad de cualquier suceso.

El suceso **contrario** a un suceso $A$ es el que se verifica cuando no ocurre $A$. Se representa por $\bar{A}$ o $A^c$.

**EJEMPLO**

14. En una caja tenemos gomas de colores de 10 cm. Hay 5 gomas azules, 3 rojas y 12 amarillas. Sacamos una goma sin mirar.

a) ¿Qué probabilidad hay de que la goma sea de color azul?

Gomas azules = 5 Total de gomas = 20 $\rightarrow P(\text{azul}) = \frac{5}{20} = 0{,}25$

b) ¿Qué probabilidad hay de que la goma mida 10 cm?

Todas las gomas miden 10 cm. $\rightarrow P(10\text{ cm}) = \frac{20}{20} = 1$

El suceso seguro tiene probabilidad 1, siempre ocurre.

c) ¿Qué probabilidad hay de que la goma sea blanca?

Ninguna goma es blanca. $\rightarrow P(\text{blanca}) = \frac{0}{20} = 0$

El suceso imposible tiene probabilidad 0, nunca ocurre.

d) ¿Qué probabilidad hay de que la goma sea azul o roja?

Gomas azules = 5 Gomas rojas = 3 $\rightarrow P(\text{azul} \cup \text{roja}) = \frac{5+3}{20} = 0{,}4$

$P(\text{azul}) + P(\text{roja}) = \frac{5}{20} + \frac{3}{20} = \frac{5+3}{20} = 0{,}4$

En general, la probabilidad de la **unión de dos sucesos**, $A$ y $B$, es la suma de las probabilidades de $A$ y de $B$ menos la probabilidad de la intersección.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Si los sucesos $A$ y $B$ son incompatibles, $P(A \cap B) = 0$, por tanto:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

e) ¿Qué probabilidad hay de que la goma no sea roja?

Gomas rojas = 3 Gomas no rojas = 20 − 3

$P(\text{no roja}) = \frac{20-3}{20} = \frac{20}{20} - \frac{3}{20} = 1 - \frac{3}{20} = 1 - P(\text{roja}) = 0{,}85$

La probabilidad de un suceso es 1 menos la probabilidad del contrario.



La **unión** de dos sucesos, $A \cup B$, ocurre cuando se verifica $A$ o $B$. Es el suceso formado por los elementos de $A$ y los de $B$.

La **intersección** de dos sucesos, $A \cap B$, ocurre cuando se verifican al mismo tiempo $A$ y $B$. Se compone de los elementos comunes de $A$ y $B$.

### ACTIVIDADES

22 En el lanzamiento de un dado, ¿cuál es la probabilidad de sacar un 1 o un 6?

23 La probabilidad de que los clientes de una cafetería tomen café es 0,68, de que tomen una tostada es 0,17 y de que tomen ambos es 0,52. ¿Cuál es la probabilidad de que tomen café o tostada?

24 Al lanzar una ficha de dominó, la probabilidad de que salga el lado punteado es el doble de la probabilidad de que salga el lado sin puntear. ¿Qué probabilidades tiene cada resultado?

25 En la extracción de una carta de una baraja, ¿cuál es la probabilidad de sacar un caballo o un rey?

Figura 4.123 Contenidos del Cuarto Curso orientadas a las Enseñanzas Aplicadas de Educación Secundaria. Editorial Santillana

## 12 Diagramas de árbol. Tablas de contingencia

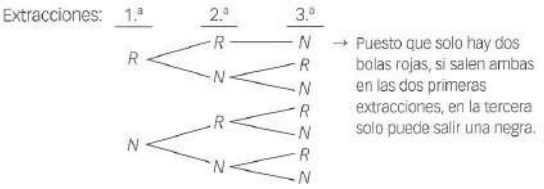
Para conocer con exactitud el número de sucesos del espacio muestral es útil confeccionar un **diagrama de árbol**.

También resulta de utilidad una **tabla de contingencia**, en la que organizando los datos de los sucesos, se puede calcular cualquier probabilidad.

**EJEMPLOS**

15. En una urna tenemos dos bolas rojas y tres negras. Si hacemos tres extracciones consecutivas sin reponer las bolas, ¿cuál es la probabilidad de obtener 2 rojas? ¿Y 2 negras? ¿Y de que sean negras la primera y la última?

Realizamos un diagrama de árbol las tres extracciones, teniendo en cuenta las bolas que quedan en la urna tras extraer cada bola.




El espacio muestral es $E = \{RRN, RNR, RNN, NRR, NRN, NNR, NNN\}$

$$P_{2R} = \frac{3}{7} \qquad P_{2N} = \frac{3}{7} \qquad P_{N\text{-}N} = \frac{2}{7}$$

16. Un grupo de doce chicos y nueve chicas van a una feria. Cuatro chicas y siete chicos se suben a la noria. Si elegimos una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea chico y no se suba a la noria?

Elaboramos la tabla de contingencia del margen.

$$P(\text{chico} \cap \overline{\text{noria}}) = \frac{5}{21} = 0{,}24$$

| | Chicos | Chicas | Totales |
|---|---|---|---|
| Noria | 7 | 4 | 11 |
| No noria | 5 | 5 | 10 |
| Totales | 12 | 9 | 21 |

**ACTIVIDADES**

26. Dibuja un diagrama de árbol y calcula el número de sucesos de estos dos experimentos:
   a) Lanzar un dado al aire 3 veces.
   b) Lanzar una moneda y después otra.

27. En una bolsa hay tres bolas numeradas del 1 al 3. Hacemos tres extracciones consecutivas sin devolver las bolas. Elabora un diagrama de árbol para calcular la probabilidad de que la sucesión obtenida sea 321.

28. En un reproductor de *compact disc* utilizamos la función de reproducción aleatoria para escuchar un disco con 4 canciones. ¿Cuántas posibilidades hay para el orden en que se van a escuchar? ¿Qué probabilidad hay de que el orden sea 1-3-2-4?



Figura 4.124 Contenidos del Cuarto Curso orientadas a las Enseñanzas Aplicadas de Educación Secundaria. Editorial Santillana

## 13 Sucesos dependientes e independientes

Muchos experimentos consisten en la realización de dos pruebas de forma consecutiva: sacar una bola de una urna y después otra, tirar dos veces una moneda, etc. Estos experimentos se denominan **compuestos**.



**EJEMPLOS**

17. En una caja hay 7 bolígrafos azules, 4 rojos y 5 negros. Indica qué tipos de sucesos son los siguientes.

a) Sacar un bolígrafo rojo y, sin devolverlo a la caja, sacar después otro bolígrafo.

b) Sacar un bolígrafo azul y después sacar otro, devolviendo antes el primero a la caja.

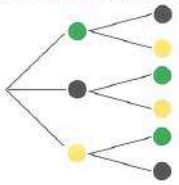
a) Son sucesos **dependientes**. El hecho de extraer el primer bolígrafo y no devolverlo condiciona la extracción del segundo, ya que al realizar la segunda extracción hay un bolígrafo rojo menos en la caja.

b) Los sucesos son **independientes**. Al hacer la segunda extracción, el número de bolígrafos es el mismo que al hacer la primera.



18. En una urna hay una bola verde, otra negra y otra amarilla. Escribe el espacio muestral correspondiente a la extracción de dos bolas de forma consecutiva y sin devolución.

Hacemos un diagrama de árbol para ver las posibilidades.



Los sucesos son dependientes. Si representamos por *V*, *N* y *A* cada uno de ellos, el espacio muestral es $E = \{VN, VA, NV, NA, AV, AN\}$.

**ACTIVIDADES**

29 Indica si los siguientes sucesos son dependientes o independientes.

a) Lanzar una moneda y luego un dado.

b) Lanzar una moneda dos veces seguidas.

c) Sacar dos bolas de una urna sin devolución.

d) Sacar dos cartas de una baraja sin devolver la primera.

e) Sacar del bolsillo dos monedas seguidas.

30 En un cajón hay 4 calcetines azules, 3 marrones y 2 negros. Se extraen dos calcetines de forma consecutiva, sin devolver el primero. Escribe el espacio muestral correspondiente. ¿En cuántas ocasiones los dos calcetines son del mismo color?

31 Escribe el espacio muestral correspondiente a sacar tres calcetines de forma consecutiva en el ejercicio anterior.

Figura 4.125 Contenidos del Cuarto Curso orientadas a las Enseñanzas Aplicadas de Educación Secundaria. Editorial Santillana

## 14 Probabilidad de experimentos compuestos

La probabilidad de que ocurran dos sucesos independientes en un experimento compuesto es el producto de las probabilidades.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

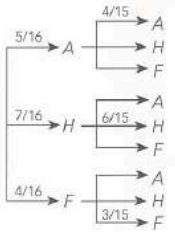
Si los sucesos son dependientes, la probabilidad del segundo está condicionada por el hecho de que haya ocurrido el primero. Se representa $P(B/A)$.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

**EJEMPLO**

19. En la caja registradora de una tienda de *souvenirs*, hay 5 monedas de euro alemanas (*A*), 7 holandesas (*H*) y 4 francesas (*F*). Al devolver el cambio con 2 monedas de euro a un cliente, ¿cuál es la probabilidad de que ambas monedas sean del mismo país?

Hacemos un diagrama de árbol teniendo en cuenta que la probabilidad del segundo está condicionada por el primero.




Hay tres sucesos que verifican lo que plantea el enunciado, es decir, que las dos monedas sean del mismo país. En este caso, las probabilidades se suman.

$$P(\text{mismo país}) = P(A) \cdot P(A/A) + P(H) \cdot P(H/H) + P(F) \cdot P(F/F)$$

$$P(\text{mismo país}) = \frac{5}{16} \cdot \frac{4}{15} + \frac{7}{16} \cdot \frac{6}{15} + \frac{4}{16} \cdot \frac{3}{15} = \frac{37}{120} = 0{,}3$$

**ACTIVIDADES**

32. ¿Cuál es la probabilidad de que al tirar una moneda al aire dos veces seguidas salga cara y cruz?

33. En un concurso de televisión se regalan 5 coches entre los espectadores que llamen al programa. El modelo de coche es el mismo, variando el color. Hay 2 coches rojos, 2 negros y 1 blanco. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos primeros ganadores reciban coches del mismo color?

34. En una máquina dispensadora de bebidas, el encargado de reponerla se ha confundido y ha colocado en el carril de arriba diferentes refrescos, concretamente 6 refrescos de naranja, 14 de limón y 9 de cola. Si sacamos de ese carril 2 refrescos consecutivamente, ¿cuál es la probabilidad de que los dos sean de cola? ¿Cuál es la probabilidad de que el primero sea de limón y el segundo de naranja? ¿Y cuál es si el primero es de cola y el segundo de limón?

Figura 4.126 Contenidos del Cuarto Curso orientadas a las Enseñanzas Aplicadas de Educación Secundaria. Editorial Santillana

#### 4.3.2.6 COMPARATIVA

En este apartado se realizará una comparativa entre lo establecido en el currículo de Matemáticas de la Comunidad Autónoma de Canarias y las dos editoriales más vendidas en Canarias, para así observar si los libros de texto cumplen con lo establecido en el currículo.

| ETAPA | ORIENTACIONES CURRICULARES | EDITORIAL ANAYA | EDITORIAL SANTILLANA |
|---|---|---|---|
| **PRIMER CURSO. EDUCACIÓN PRIMARIA** | | Posible, imposible y seguro. | |
| **SEGUNDO CURSO. EDUCACIÓN PRIMARIA** | | Experiencias aleatorias. Posible, imposible y seguro. | Seguro, posible e imposible. |
| **TERCER CURSO. EDUCACIÓN PRIMARIA** | Utilización del lenguaje del Azar. Valoración de los sucesos como más o menos probables, posibles e imposibles. | | |
| **CUARTO CURSO. EDUCACIÓN PRIMARIA** | Identificación del carácter aleatorio de experiencias en situaciones de juego. Uso del vocabulario propio de la Probabilidad con expresiones como suceso, describiéndolo como "seguro, probable e imposible". Acercamiento al cálculo de probabilidades como número de casos favorables entre el de casos posibles, para sucesos cuyo resultado coincida con las fracciones y porcentajes ¼, 25%, ½, 50%, 3/4, 75% y 100%. | Experiencias aleatorias. Suceso seguro, posible o probable e imposible. | Seguro, posible e imposible. Más probable y menos probable. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **QUINTO CURSO. EDUCACIÓN PRIMARIA** | Identificación del carácter aleatorio de algunas experiencias en la vida cotidiana. Uso del vocabulario propio de la Probabilidad con expresiones como suceso, describiéndolo, como "seguro, probable, imposible". Relación de la probabilidad de un suceso (comprendida entre 0 y 1), con las fracciones y los porcentajes. Cálculo de la probabilidad de un suceso como el número de casos favorables entre el de casos posibles para sucesos equiprobables (Regla de Laplace). | Probabilidad. Regla de Laplace. | Más probable y menos probable. Probabilidad. Diagrama de árbol. |
| **SEXTO CURSO. EDUCACIÓN PRIMARIA** | Relación de la probabilidad de un suceso (comprendida entre 0 y 1), con las fracciones y los porcentajes. Confianza en las propias posibilidades e interés por utilizar las herramientas tecnológicas en la comprensión de los contenidos funcionales. Cálculo de la probabilidad de un | Probabilidades y fracciones. Regla de Laplace. Diagrama de árbol. | Probabilidad. Regla de Laplace. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | suceso como el número de casos favorables entre el de casos posibles para sucesos equiprobables (Regla de Laplace). | | |
| **1.º ESO** | Diferenciación entre los fenómenos deterministas y los aleatorios. Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos y diseño de experiencias para su comprobación. Aproximación a la noción de probabilidad mediante el concepto de frecuencia relativa y la simulación o experimentación. Distinción entre sucesos elementales equiprobables y no equiprobables. Determinación del espacio muestral en experimentos sencillos y uso de tablas y diagramas de árbol sencillos. Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace en experimentos sencillos. | Sucesos aleatorios (espacio muestral y suceso). Probabilidad | Experimentos aleatorios. Probabilidad. Regla de Laplace. |
| **2.º ESO** | | | Experimentos aleatorios. Sucesos. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | Probabilidad de un suceso. |
| **3.º ESO. Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas** | Identificación de experiencias aleatorias, sucesos y espacio muestral. Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace. Uso de diagramas de árbol. Significado y aplicación de permutaciones y factorial de un número. Utilización de la Probabilidad para la toma de decisiones fundamentadas en diferentes contextos. | Sucesos aleatorios. Probabilidad de un suceso. Ley de Laplace para experiencias regulares. Diagrama de árbol. | Experimentos aleatorios. Sucesos. Operaciones con sucesos. Probabilidad de un suceso. Regla de Laplace. Diagrama de árbol. Frecuencia y probabilidad. Propiedades de la Probabilidad. |
| **4.º ESO. Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas** | Introducción a la combinatoria: combinaciones, variaciones y permutaciones. Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace y otras técnicas de recuento. Cálculo de probabilidades simple y compuesta. Identificación de sucesos dependientes e independientes. Reconocimiento de experiencias aleatorias compuestas. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para la asignación de | Variaciones y permutaciones. Combinaciones. Sucesos aleatorios. Probabilidades de los sucesos. Propiedades. Probabilidades en experiencias simples. Probabilidades en experiencias compuestas. Composición de experiencias independientes. Composición de experiencias dependientes. Tablas de contingencia. Probabilidad condicionada. | Números combinatorios. Variaciones. Permutaciones. Combinaciones. Experimentos aleatorios. Sucesos. Operaciones con sucesos. Frecuencia y probabilidad. Probabilidad de un suceso. Regla de Laplace. Propiedades de la Probabilidad. Probabilidad condicionada. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | probabilidades. Cálculo de probabilidad condicionada. Utilización del vocabulario adecuado para la descripción y cuantificación de situaciones relacionadas con el Azar. | | |
| **4.º ESO. Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Aplicadas** | Cálculo de la frecuencia de un suceso aleatorio. Cálculo de probabilidades mediante la Regla de Laplace. Cálculo de probabilidades simple y compuesta. Identificación de sucesos dependientes e independientes. Uso del diagrama en árbol. Investigación de los juegos y situaciones donde interviene el Azar. | Sucesos aleatorios. Probabilidad de un suceso. Ley de Laplace para experiencias regulares. Experiencias compuestas. Diagramas en árbol. Tablas de contingencia. | Experimentos aleatorios. Sucesos. Tipos de sucesos. Probabilidad. Regla de Laplace. Propiedades de la Probabilidad. Diagramas de árbol. Tablas de contingencia. Sucesos dependientes e independientes. Probabilidad de experimentos compuestos. |

Tabla 4.19 Cuadro resumen de los contenidos en Educación Obligatoria

Observando la tabla anterior, según lo establecido en el currículo en el segundo ciclo de primaria aparece, en ambas editoriales, suceso seguro, posible e imposible y también señalan una parte de lo descrito en el currículo: *"…Valoración de los resultados de experiencias en las que interviene el Azar, para apreciar que hay sucesos más o menos probables…"* . En último ciclo de primaria ambas editoriales trabajan lo marcado en el currículo.

Una vez analizada la Educación Primaria, observamos la Educación Secundaria. En el primer curso, ambas editoriales especifican lo concretado en el currículo. En el tercer curso ambas editoriales trabajan muchos de los contenidos del currículo tales como: regla de Laplace, probabilidad de un suceso y sucesos aleatorios. En el último curso de la Educación Secundaria los alumnos de Académicas y también los de Aplicadas, ambas editoriales trabajan lo establecido en el currículo.

### 4.3.3 CALCULADORA

#### 4.3.3.1 HISTORIA

Las primeras calculadoras fueron los ábacos construidos a menudo como un marco de madera con cuentas deslizantes sobre alambres. Los ábacos fueron usados durante siglos antes de la adopción del sistema escrito de numerales árabes y aún siguen siendo empleados por mercaderes y oficinistas de China y otras partes del mundo.

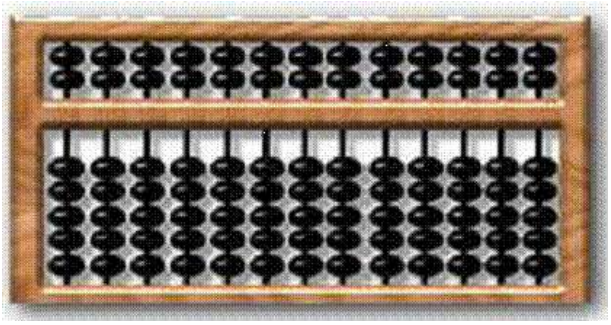


Figura 4.25 Imagen del ábaco

En 1623, el alemán Wilhelm Schickard fue quien creó un primer dispositivo capaz de realizar operaciones aritméticas. Esta máquina automática era un aparato grande lleno de palancas que podía sumar y restar números hasta seis dígitos. El "reloj calculador", como se le conocía, puede ser considerado la primera calculadora mecánica de nuestra historia. Sin embargo, no se tuvo constancia de ella hasta tres siglos después, en 1957, cuando el historiador Franz Hammer descubrió unas cartas que Schickard escribió a su amigo Johannes Kepler en las que le explicaba el mecanismo del funcionamiento de este aparato y adjuntaba bocetos de cómo era.

Más tarde, en 1642, Blaise Pascal se interesó por diseñar y construir una máquina de sumar a la que bautizó “Pascalina” y con la que se podían realizar las cuatro operaciones matemáticas básicas (sumar, restar, multiplicar y dividir). La “Pascalina” se utilizó tal y como su creador la había presentado hasta 1902 cuando James L. Dalton cambió las palancas que la componían por botones, mejorando su diseño y haciéndola más funcional. De esta primera calculadora se conservan viejos ejemplares que han influido en las posteriores calculadoras mecánicas.

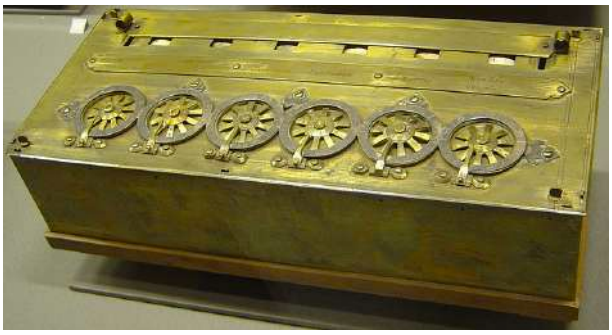


Figura 4.26 Pascalina

Ninguna calculadora sustituyó a la “Pascalina” hasta mediados del siglo XX, concretamente en 1948, cuando Curt Herzstark fabricó la calculadora mecánica denominada Curta. Fue la primera calculadora compacta, cabía en una mano y esa portabilidad ayudó a aumentar sus ventas, pese a su elevado precio. Al igual su precursora, con esta máquina se podía sumar, restar, multiplicar y dividir.



Figura 4.27 La calculadora Curta

A mediados de los 50, IBM presentó una calculadora de considerables dimensiones basada en transistores. A finales de esta década, IBM y Casio lanzaron sus primeras calculadoras comerciales, la IBM 608 y la 14-A, respectivamente. A pesar de ser coetáneas existían dos diferencias entre ellas, ya que solo Casio lanzó un modelo totalmente compacto y eléctrico que iba integrada dentro de un escritorio. Por su parte,

la de IBM era electrónica y había que almacenarla en distintas salas y su precio era bastante elevado, aproximadamente 80.000 dólares.

La primera calculadora totalmente electrónica fue hecha en 1961 por la compañía británica Bell Punch, llamada "Sumlock Comptometer ANITA".

En 1970 Sanyo, Canon y Sharp lanzaron al mercado calculadoras portátiles con pilas que se vendieron por todo el mundo con mucha rapidez. Tan solo un año después se desarrolló la primera calculadora en un chip con el nombre de MK6010 de Mostek, En ese mismo año, Texas Instruments lanzó una nueva calculadora que se convirtió en el modelo para las calculadoras alrededor del mundo. Eran muy caras pero gracias a los avances tecnológicos en unos pocos años estuvieron al alcance del bolsillo de muchos.

La primera calculadora científica fue lanzada sólo dos años después, en 1973, por Texas Instruments. La SR-10 costaba unos 150 dólares y ya incluía un botón para pi. Con el paso de los años fue completándose con funciones logarítmicas o trigonometría.

En 1980 aparecieron las primeras calculadoras financieras y fue en ese momento cuando las compañías centraron sus esfuerzos en su desarrollo para mejorarlas. Este hecho ha permitido que podamos disfrutar de ellas en casi cualquier dispositivo electrónico, desde un reloj hasta un teléfono móvil.

A finales del siglo XX, gracias a tecnologías como la del Sensor CMOS (sensor que detecta la luz) y de paneles solares salieron al mercado calculadoras programables o sin necesidad de pilas. El avance continuo de las tecnologías ha permitido mejorar estos aparatos añadiendo derivadas, integrales, ecuaciones diferenciales y todo tipo de operaciones, llevando las Matemáticas a nuestros bolsillos y haciendo nuestras vidas más fáciles.

#### 4.3.3.2. LA CALCULADORA COMO RECURSO DIDÁCTICO

Tanto dentro como fuera de la comunidad educativa, la introducción de la calculadora en el currículo de la Enseñanza Primaria ha suscitado un importante debate en torno a las presuntas consecuencias negativas que su uso puede tener sobre el aprendizaje y sobre cuál es la edad más adecuada para iniciar a los alumnos en su uso.

Aunque existe una extensa documentación sobre los beneficios del uso de la calculadora, existen muchos escépticos, que afirman que puede perjudicar la habilidad matemática de los alumnos. Algunos padres y educadores se resisten a la incorporación temprana de la calculadora basan sus creencias: 1.º) que la calculadora no desarrolla el

razonamiento matemático, puesto que para utilizarla basta con seguir exactamente las instrucciones de funcionamiento y 2.º) que la calculadora limita la adquisición de las habilidades de cálculo numérico de los alumnos. El *Informe Cockcroft (1985)*, afirma que: *"la investigación ha demostrado que, los alumnos habituados a usar la calculadora mejoran su actitud hacia la matemática, las destrezas de cálculo, la comprensión de los conceptos y la resolución de problemas"*.

Desde su invención hace más de 30 años, las calculadoras han evolucionado desde la más simple de sólo cuatro funciones hasta la nueva generación de calculadoras gráficas. Por otra parte, el costo de la calculadora básica es tan bajo que cada alumno de la escuela primaria puede tener una.

Asimismo, la investigación sugiere que la calculadora es una herramienta valiosa que enriquece la comprensión matemática. Su uso proporciona a los maestros y alumnos más tiempo para concentrar el esfuerzo y la atención en la comprensión de conceptos y en el pensamiento crítico, además, estimula la exploración natural de estrategias y la aplicación de procedimientos intuitivos.

A la luz de los resultados obtenidos en muchas investigaciones, los educadores en Matemática recomiendan el uso de la calculadora en la Escuela Primaria desde la década de los 80 del siglo pasado, reflejando así, el cambio en la sociedad que pasó de realizar cálculos con lápiz y papel al uso dominante de la calculadora en los lugares de trabajo.

Las calculadoras son simplemente una herramienta que puede ayudar a los estudiantes a resolver problemas. Cuando son usadas apropiadamente mejoran el aprendizaje y el pensamiento, pero no lo reemplazan. Una real comprensión de la Matemática es el resultado de entender qué es lo que se está preguntando, diseñar un plan para resolver el problema, decidir qué operaciones son adecuadas y determinar si la respuesta tiene o no sentido. Los estudiantes que usan apropiadamente la calculadora tienen más tiempo para explorar e investigar lo cual aumenta sus posibilidades de encontrar respuestas con sentido (Hembree and Dessart, 1986; Pomerantz and Waits, 1996) consultar https://es.wikipedia.org/wiki/Calculadora.

Diversas investigaciones han buscado evaluar los efectos de la utilización de las calculadoras gráficas en el *rendimiento* y la formación matemática de los estudiantes en los cursos superiores de secundaria y en los cursos de precálculo de la universidad.

Ruthven (1990) examinó el rendimiento en Matemática de estudiantes que habían tenido acceso permanente a las calculadoras gráficas en el transcurso de sus dos

últimos años de secundaria. Notó que al aumentar el éxito del estudiante se redujo su ansiedad, generando indirectamente un mayor rendimiento en aquellos que usaron calculadora gráfica. Además, sostiene que una mayor exposición a imágenes gráficas simbólicas a través del uso de la calculadora gráfica, incrementa la competencia y la confianza de los estudiantes. Estos factores particularmente mejoran su rendimiento.

Quesada y Maxwell (1994) realizaron una investigación en cuyo examen final aquellos alumnos que usaron calculadoras gráficas obtuvieron mejores resultados en las categorías referidas a las propiedades de las funciones, gráficos, problemas con palabras y ecuaciones, aunque no fue así en las preguntas de elección múltiple. Según los autores, la aproximación gráfica agregó una nueva luz al conocimiento de conceptos, y permitió que los estudiantes mantuvieran su interés en los distintos temas. La aproximación manual y la habilidad de comprobar sus respuestas con la calculadora gráfica aumentaron la motivación de los estudiantes.

Gómez (1997) estudió los efectos de la introducción de la calculadora gráfica en el aula en dos cursos de precálculo. Los cambios en el comportamiento de los alumnos fueron los más importantes y en ellos la presencia de las calculadoras gráficas tuvo una influencia más directa. Se notó un mayor interés del alumno por el contenido, como consecuencia de una forma nueva de interactuar con este. La profesora dejó de ser la única autoridad válida en el aula y el libro de texto perdió una parte de su rol llenando la calculadora gráfica estos espacios en un proceso en el que el estudiante se pudo sentir más cómodo para tener ideas, desarrollarlas, verificarlas e intentar justificarlas ante la profesora y sus compañeros.

Las distintas investigaciones en el nivel elemental sugieren que la calculadora es un importante instrumento de apoyo didáctico, ya que su uso permite ejercitar determinados cálculos favoreciendo una selección de estrategias apropiadas. En alguna de ellas se ha llegado a la conclusión de que los alumnos que habían hecho uso de la calculadora mejoraron su actitud hacia la Matemática, en las destrezas de cálculos mentales, en la comprensión de conceptos y en la adquisición de estrategias adecuadas para la resolución de problemas. Además, el conjunto de investigaciones no muestra que el uso de las calculadoras haya producido algún efecto adverso sobre la capacidad básica de cálculo.

A pesar de todos sus beneficios y capacidades, las calculadoras nunca serán capaces de reemplazar a la mente humana. Por ejemplo, cuando se trata de leer y comprender una situación problemática, escribir una apropiada ecuación a un problema,

elegir las operaciones que hay que usar, interpretar correctamente la solución que aparece en el visor de la calculadora y determinar si la respuesta es apropiada o no, desde el punto de vista del problema. Las calculadoras junto con las destrezas mentales, aquellas con lápiz y papel, y la estimación, cuando son apropiadas, componen las herramientas que ayudan al alumno a resolver problemas.

Por otro lado, otras investigaciones proporcionan resultados promisorios en cuanto a la potencialidad de las calculadoras gráficas como apoyo en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática. Las mismas sugieren presentar los conceptos matemáticos y utilizar la calculadora gráfica para reforzarlos y avanzar más allá en el conocimiento, recordando que la tecnología complementa el curso, pero no es la base del mismo. Los cambios se deben producir incorporando la calculadora gráfica dentro del proceso de aprendizaje y se deben integrar sin sacrificar la profundidad de los conceptos matemáticos.

Del Puerto S. y Minnaard C. (2002) afirman que el desempeño de los alumnos mejora con el uso de las calculadoras gráficas. Esto sugiere la necesidad de incorporarlas cada vez más en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas durante el último ciclo de la secundaria y el primer ciclo universitario.

Ya decía Santaló (1981): *"La aplicación de las calculadoras a ciertos problemas numéricos y la conveniencia de su tratamiento dentro de la enseñanza para todos, aparece día a día como una necesidad mayor. El mundo está siendo dominado por la informática y los futuros ciudadanos deben estar preparados para entender los complejos mecanismos que la sostienen, mecanismos que eran muy complejos hasta hace pocos años, pero que se van simplificando y van quedando "al alcance de todos" gracias a los progresos de la técnica (sobre todo la electrónica) y de su sostén matemático"*.

Las calculadoras no entienden Matemática pero facilitan considerablemente la comprensión de la misma.

#### 4.3.3.3 MOTIVOS Y PREOCUPACIONES POR EL USO DE LA CALCULADORA

En la mayoría de los países, los estudiantes usan las calculadoras en sus tareas escolares. Hubo cierta resistencia inicial a la idea por el temor de que las habilidades aritméticas básicas se resentirían. Permanece cierto desacuerdo sobre la importancia de la habilidad para realizar cálculos a mano o mentalmente, con algunos planes de estudio

restringiendo el uso de la calculadora hasta que se logra cierto nivel de destreza matemática, mientras que otros se centran más en enseñar técnicas de estimación y resolución de problemas.

Hay otras preocupaciones, como que un alumno use la calculadora erróneamente pero crea que la respuesta es correcta porque fue el resultado dado por la calculadora. Los profesores intentan combatir esto animando a los estudiantes a realizar manualmente una estimación del resultado y asegurar que se acerca al resultado calculado. En este sentido, la calculadora pasa a ser una "muleta" más que una herramienta didáctica, pudiendo frenar a los estudiantes durante un examen si estos se dedican a comprobar incluso los cálculos más triviales en la calculadora.

Las calculadoras actualmente están al alcance de todos, dado a su bajo coste, su fácil transporte y su ahorro de trabajo. Sin embargo, en las aulas siguen siendo objetos no gratos, ya que escasea su uso en los primeros años escolares e incluso hasta en la universidad. La calculadora parece más un enemigo que un aliado. Los motivos contra ella son diversos, los más escuchados son que impiden el cálculo mental, que no favorecen la comprensión de las operaciones y que es fácil equivocarse al teclear.

- Impiden el cálculo mental. La calculadora bien usada es un aliado para el cálculo mental. Precisamente por su rapidez, agilidad, economía y ecología, ya que no hay que utilizar lápiz y papel. Esta herramienta permite pensar y comprobar, fomentando así el uso del cálculo mental.
- No favorecen la comprensión de las operaciones. Las operaciones se comprenden con materiales manipulativos tanto objetos de nuestra vida real como ábacos u otras herramientas. Además que la calculadora bien usada puede también ayudar a la comprensión, su uso sustituye los pesados cálculos que ya no corresponden a nuestros días.
- Es fácil equivocarse al teclear. Los seres humanos estimamos, valoramos y repetimos las operaciones si el resultado no nos convence.

Una vez expuestos los inconvenientes sobre el uso de la calculadora, a continuación desarrollamos los motivos para su uso.

- Es necesario aprender su uso. Los alumnos en secundaria, bachillerato o universidad no saben usar la calculadora científica más simple y tardan más tiempo para realizar simples cálculos o los hacen erróneamente lo que les dificulta el avance en la comprensión.

- Se fomenta el espíritu crítico. Si nos acostumbramos a ellas podemos posicionarnos de forma crítica ante ellas. Por el contrario, si las prohibimos o reducimos exageradamente su uso, los estudiantes las utilizarán como algo que por sí solas resuelven los problemas.
- Los cálculos escritos y reiterativos reducen el interés por las Matemáticas. Los niños se aburren profundamente con las Matemáticas cuando estas están plagadas de hojas y hojas de monótonos cálculos escritos.

### 4.3.4 DADOS

Un dado es un objeto de forma poliédrica (aunque en la RAE, en su definición, sólo prevé que sea cúbico) preparado para mostrar un resultado aleatorio cuando es lanzado sobre una superficie horizontal, desde la mano o por medio de un cubilete, en cuyo caso los resultados ocurren con una probabilidad que se distribuye mediante una distribución uniforme discreta. El dado más convencional cuenta con seis caras por lo que la probabilidad de obtener un número (de los 6) es de 1 entre 6, es decir, 16,67%. Si lanzamos 2 dados de 6 caras será del 4,76%.

Fueron también muy usados en Roma y Grecia, como consta por algunas pinturas de vasijas y por los objetos mismos frecuentemente hallados en excavaciones. En Roma se llamaban *álea,* como dijo Julio César al cruzar el Rubicón: *Alea jacta est*: "La suerte está echada". De *álea* proviene aleatorio 'al azar'.

Los sumerios y asirios utilizaban un hueso extraído del talón de animales como ovejas, ciervos o caballos, denominado astrágalo o talus, que tallaban para que pudieran caer en cuatro posiciones distintas, por lo que son considerados como los precursores de los dados.

Aunque generalmente se hacían de marfil o hueso, se encuentran varios de ágata, bronce y vidrio y no faltan algunos fraudulentos que tienen o han tenido relleno de plomo en uno de sus lados. Los romanos designaban todas estas piezas con el nombre de téseras de juego (*tésserae lusóriae*) pero también llamaban téseras a los billetes de entradas para los teatros y las diferentes clases de bonos y medallas de premios que solían hacerse de metal, marfil o hueso con figuras grabadas.

#### 4.3.4.1 TIPOS DE DADOS

Dados cúbicos

Los dados habituales son cubos pequeños, de entre 8 y 25 mm de arista y cuyas caras están numeradas de 1 a 6 (normalmente mediante disposiciones de puntos), de tal manera que las caras opuestas suman 7 puntos. Hay entonces dos configuraciones posibles: una tiene los números 1, 2 y 3 convergiendo en un vértice en el sentido de las agujas del reloj y la otra en sentido contrario.



Figura 4.28 Dado cúbico

Dados no cúbicos

Dados en forma de rodillo o trompo. Estos tienen el inconveniente de requerir una superficie más lisa y menos inclinada y su rodadura tarda más en estabilizarse. Se muestran dados de 6, 8, 10, 12 y 20 caras.



Figura 4.29 Dados no cúbicos

En otros tiempos, los dados con formas no cúbicas eran empleados casi en exclusivo por adivinos y en otras prácticas ocultas, por ejemplo, en Japón se utilizaba

uno con forma de dodecaedro regular y en cada cara se tenían grabados a los animales del zodiaco chino, el cual se utilizaba en principio como elemento místico y luego pasó a ser un elemento lúdico, pero recientemente se han popularizado en los juegos de rol. Normalmente, son de plástico y en sus caras hay dígitos en lugar de puntos. Se suelen emplear los sólidos platónicos para fabricar dados de 4, 6, 8, 12 y 20 caras, aunque también se pueden encontrar otras formas para los dados de 10, 30, 100 y otros números de caras o incluso para los dados antes mencionados.

Se describen con frecuencia por su número de caras de manera abreviada, siendo dX un dado de X caras. De forma más general, YdX supone lanzar Y dados, cada uno de los cuales tiene X caras. Para adaptar las puntuaciones disponibles a cierto baremo, se puede añadir una constante al lanzamiento, o multiplicar una tirada por otro número para evitar lanzamientos de un número excesivo de dados. Así, **1d10 + 5** significa lanzar un dado de 10 caras y al resultado sumarle 5, mientras que **2 × 3d8** significa tirar tres dados de 8 caras cada uno y multiplicar el resultado por dos.

Dados con otras inscripciones

Aunque normalmente se inscriben números en las caras de los dados se pueden emplear otros símbolos. Por ejemplo:

- Dados de póker, con las siguientes inscripciones, reminiscencias del juego de cartas: nueve (de picas en negro), diez (de diamantes en rojo), sota (azul), reina (verde), rey (rojo) y as (de tréboles en negro).
- En Warhammer se emplean dados especiales para determinar si un disparo de artillería da en el blanco. Uno de ellos tiene dos caras con una diana (da en el blanco) y cuatro con flechas (el tiro sale desviado) y el otro determina por cuantos centímetros falla el tiro, con lo cual tiene cinco inscripciones: 5, 10, 15, 20 y 25 centímetros, o bien, 2, 4, 6, 8, 10 pulgadas en los países anglosajones y una explosión que indica que el arma ha reventado.

Distribución de probabilidades

A veces se puede simular la tirada de un dado no disponible. Por ejemplo, los dados de 100 caras, también llamados *dados porcentuales*, son casi esféricos, muy caros y difíciles de encontrar en tiendas, pero se puede simular su tirada con dos dados de 10, uno que represente las decenas y otro las unidades. Esto puede hacerse fácilmente si cada dado es de un color distinto y se acuerda antes del lanzamiento cuál de ellos representa las decenas y cuál las unidades, pero en ocasiones no hace falta eso, pues algunos dados de 10 caras ya se fabrican numerados 0, 10, 20…90.



Figura 4.30 Dado porcentual

Dados trucados

Los dados pueden alterarse de muchas maneras para hacer trampas en los juegos que los requieren: pueden redondearse algunas aristas, algunas caras pueden tener una forma ligeramente distinta a un cuadrado para favorecer la aparición de ciertos resultados. Una manera común es agregar algún material pesado oculto debajo de una de las caras para favorecer un resultado. Los dados empleados en los casinos suelen ser transparentes para dificultar estas maneras de engañar.

### 4.3.4.2 EL DADO COMO RECURSO DIDÁCTICO

Hacer juegos de dados es una manera divertida para aprender sobre la Probabilidad.

Con los juegos de Matemáticas de Probabilidad los niños aprenden a resolver problemas y a determinar la suerte al Azar. Estos tipos de juegos les enseña razonamiento estratégico y los ayuda con muchas habilidades matemáticas tales como agregar figuras mentalmente y relacionar las habilidades de geometría y multiplicación.

El juego del cerdo

El objetivo de este juego de Probabilidad es ser el primer jugador que tenga 100 puntos o más, como se describe en la página web de Scholastic. Hagan turnos para que los niños tiren dos dados, cada niño los puede tirar las veces que quiera, pero si el número uno aparece en alguno de los dados, el niño pierde su turno, no recibe puntos y sus puntos vuelven a cero. Los niños deben sumar mentalmente todos sus puntos a

medida que tiran los dados, una vez que hayan terminado su turno deben registrarlos y sumar así sus puntos cada turno al total final. Esta es una manera divertida para aprender diferentes métodos de estrategia.

Carrera de autos

El maestro puede hacer este juego simulando una carrera de autos en una cartulina. Pide a cada niño que lleve un auto pequeño de juguete para hacer la carrera, como un matchbox. El primer jugador lanzará su dado y mueve su auto varios espacios a lo largo del carril de carreras, según la página web Mathwire. El segundo jugador hace lo mismo y el juego continúa hasta que uno de los jugadores cruce la línea de meta y gane. Explica a los niños cómo es que este es un verdadero juego de azar y discutan sobre las probabilidades de lograr un número alto cada vez que lanzan el dado.

Enfrentamiento

El maestro puede hacer un registro y numerar hojas para este divertido juego. Que cada niño coloque rotuladores o contadores en seis números diferentes, como lo describe la página web Mathwire. El primer niño debe lanzar el dado y después quitar el rotulador del espacio del número relacionado. El segundo niño hace lo mismo. Es común que salga un número de un espacio que ya salió antes después de lanzar el dado en varios turnos. Cuando esto pasa, el niño pierde su turno para darle oportunidad al siguiente. El primer niño que quite todos los rotuladores gana. Habla con los niños sobre cómo es que el juego depende del Azar y que no es verdaderamente un juego de habilidades.

Juego de dados de la verbena

En el tablero hay seis cuadrados marcados 1, 2, 3, 4, 5, 6. Se invita a los jugadores a colocar tanto dinero como deseen en cualquiera de estos cuadrados. Se arrojan entonces tres dados. Si el número que se ha elegido aparece en un solo dado, uno recupera el dinero de la apuesta más una cantidad igual. Si el número aparece en dos de los dados, uno recupera el dinero apostado más dos veces esa misma cantidad. Si el número aparece en tres dados, uno recupera el dinero más tres veces la misma cantidad. Por supuesto que si el número no aparece en ninguno de los dados, el dueño se queda con nuestro dinero.

Para aclararlo por medio con un ejemplo, supongamos que usted apuesta 1 euro al número 6. Si un dado muestra un 6, usted recupera su euro más otro euro. Si hay dos dados que muestren 6, usted recupera su euro y gana dos más. Si los dados que muestran un 6 son los tres, usted recupera su euro y gana tres euros más. Cualquier

jugador podría razonar: la probabilidad de que mi número aparezca en un dado es de l/6, pero como los dados son tres, las probabilidades deben ser de 3/6 o 1/2, por lo tanto el juego es justo. Por supuesto que esto es lo que el dueño del juego desea que se suponga, pues la suposición es falaz.

Es decir, de las 216 maneras igualmente probables en que pueden ser arrojados los dados, usted ganará en 91 casos y perderá en los otros 125. De modo que la probabilidad de ganar lo mismo que se apostó o más es de 91/216 (que transformado a probabilidad de ganar lo mismo que se apostó es de 100/216), y la probabilidad de perder es de 125/216.

Si los dados mostraran siempre números diferentes, el juego sería justo. Supongamos que todos los cuadrados estuvieran cubiertos por una apuesta de un euro. En cada tirada que mostrara tres números diferentes, el operador ganaría tres euros y tendría que pagar otros tres. Pero en los dobles gana un euro, y en los triples, dos. A la larga, por cada euro apostado por un jugador, indiferentemente de cómo juegue el dinero y en qué cantidades, le cabe esperar una pérdida de alrededor de 7,87 céntimos. Esto da al dueño un beneficio de 7,87 por ciento sobre cada apuesta de un euro.

La página del Ministerio de Educación, cultura y deporte también propone una tarea con dados para explicar la aplicación de la Probabilidad, mostrando el resultado del problema a través de una explicación audiovisual.

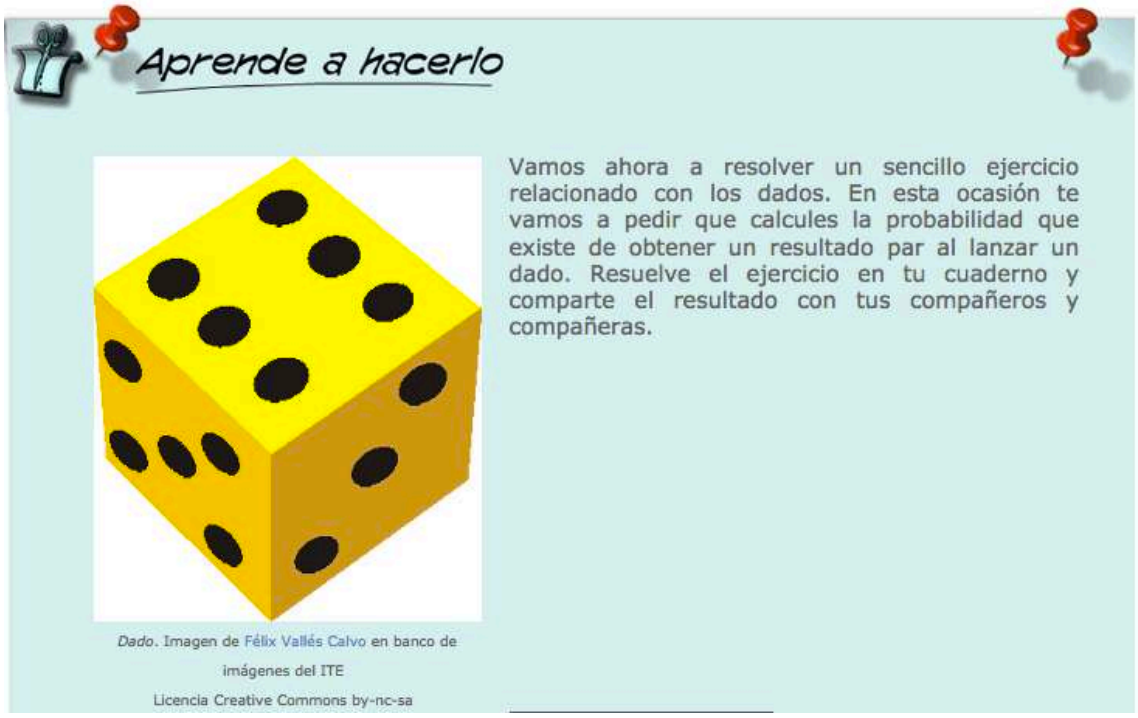



Figura 4.31 Enunciado del problema del dado

### 4.3.5 CARTAS

Los juegos de cartas se juegan con unas cartulinas, llamadas naipes o cartas, que forman una baraja y que deben mezclarse (barajarse) antes de jugar, suelen ser unas estampas rectangulares, pero en algunos países como la India pueden tener formas redondas, hechas de cartón o material plástico, que tienen un dibujo por una cara y ciertos objetos en la otra o un número de figuras variable. En determinados juegos se usan complementos para realizar apuestas o llevar puntuaciones. Los juegos de naipes estarían incluidos en la familia de juegos de mesa. Hay varios tipos de baraja (conjunto de naipes o cartas), cada región o país posee las suyas propias, algunas más conocidas que otras, como por ejemplo la baraja inglesa, francesa, española o de Tarot. Los juegos de naipes más conocidos son el Tute, el Mus y la Brisca (en España), el Truco, (en Argentina, Chile, Paraguay, Venezuela y Uruguay), el Bridge, el Póquer y la Canasta.

Según la RAE, naipe es "cada una de las cartulinas rectangulares, de aproximadamente un decímetro de alto y de seis a siete centímetros de ancho, cubiertas de un dibujo uniforme por una cara y que llevan pintados en la otra cierto número de objetos, de uno a nueve en la baraja española, y de uno a diez en la francesa, o una de las tres figuras correspondientes a cada uno de los cuatro palos de la baraja". Definida así es simplemente una herramienta, un instrumento, creado con una finalidad lúdico-intelectual, aunque el aspecto lúdico haya terminado por adueñarse por completo de la baraja, oscureciendo el componente intelectivo.

#### 4.3.5.1 HISTORIA

En China se jugaba con un tipo de naipe que derivó del papel moneda y de las fichas del dominó. En Persia se originó el Ganjifa o Gânjaphâ, un tipo de juego de cartas que se hizo popular en la India durante el imperio mogol en el siglo XVI. En India se jugaba el Dasavatara Ganjifa, juego que está formado por una baraja con diez palos basados en los diez avatares o reencarnaciones del dios Visnú: pescado, tortuga, jabalí, león, enano, hacha, arco y flecha, rayo, caracola y caballo. La mayoría de los naipes indios son redondos, de diferentes tamaños y están hechos con cartón lacado, cartón piedra y en ocasiones marfil. Igualmente, en Japón se juega los juegos de cartas Karuta y sus dos barajas más populares son el Hanafuda y el Uta-garuta.



Figura 4.32 Las cartas de India

Lo más probable es que los naipes llegasen a Europa desde Oriente, introducidos por los árabes a través de los reinos cristianos de España, aunque también se dice que fueron traídos por los cruzados. La primera versión puede apoyarse en que la baraja más antigua sea la llamada "española" y que los palos de la baraja árabe eran monedas, copas, cimitarras y bastones, que evolucionarían después a oros, copas, espadas y bastos.

Al parecer, el Consell de Cent, prohibió los juegos de cartas en 1310, en Barcelona, siendo esta la mención más antigua del juego de naipes en Europa, y que prueba que ya llevaba años existiendo, para que se llegara a la prohibición. También en otras partes de España, eran conocidos los naipes, pues los estatutos de la orden de caballería de la Banda fundada por don Alfonso XI de Castilla en 1331, prohibían a los caballeros jugar a los naipes. Igual prohibición dictó don Juan I de Castilla en 1387. Del reino de Aragón pudieron pasar a Italia, a partir de la conquista de Sicilia por Pedro III de Aragón (1282). Efectivamente, los italianos pretenden haberlos conocido ya en 1299 y si, como creen algunos, los naipes dieron ocasión al grabado sobre madera también a los italianos debería atribuirse esta invención. Pero lo más seguro es que, si vinieron de Oriente, también vino con ellos el modo de impresión.

En Francia, en 1337, en las constituciones de la Abadía de San Víctor, en Marsella, se menciona, prohibiéndolo a los frailes, un juego que llaman «páginas» que podría referirse a los naipes: *quod nulla persona audeat nec praesumat ludere ad taxillos nec ad paginas*. En agosto de 1381, el hijo de un mercader de Marsella, a punto de embarcar para Alejandría, promete abstenerse de los juegos de azar, entre los que nombra la baraja: *nahipi*.

Un decreto del Senado de Venecia de 1441 prohibió la introducción de naipes en la Señoría indicando que su fabricación después de haber sido floreciente se hallaba en decadencia por las importaciones de barajas extranjeras. Los naipes del siglo XV que se conservan en Venecia y otras ciudades son más grandes que las de hoy y de un cartón grueso parecido al papel de algodón de los antiguos manuscritos. Las figuras resaltan sobre campo de oro y son: tres reyes, dos mujeres (en algunos naipes antiguos se pintaban mujeres en lugar de hombres sobre los caballos. En algunas zonas de Andalucía, los ases estaban representados en forma de muchachos desnudos) y dos sotas, una de ellas a caballo. Cada figura lleva un bastón, una espada o una moneda. Los colores parecen aplicados por medio de unos contra moldes.

A partir de la primitiva baraja española de 56 cartas, cuatro palos de catorce cartas, se creó la del Tarot, añadiendo veintidós naipes, sin palo específico, los arcanos mayores, y manteniendo el resto de la baraja. Sin embargo parece que la primera baraja distinta de la española fue la "baraja alemana", con cuatro palos (campanas, hojas, corazones y bellotas) con diez números y tres figuras. Con el tiempo perdió los números 2 al 5, ambos inclusive, quedando una baraja de treinta y seis cartas. Como la alemana, la baraja francesa, sustituye los números de las figuras por letras, R (*roi*), D (*dame*) y V (*valet*), soslayando así el maleficio del número trece, y, también como la alemana y la española más moderna, deja reducidas las figuras a tres. Sus palos son picas, corazones, tréboles y diamantes. La inglesa deriva de la francesa, cambiando los nombres de las figuras, J (*jack*), Q (*queen*) y K (*king*) y también del as (A).

### 4.3.5.2 TIPOS DE BARAJAS

Barajas europeas clásicas

La *baraja española* tiene 48 naipes, y a veces 2 comodines (baraja de 50), repartidos en cuatro palos: oros, copas, espadas y bastos. La baraja de 48 cartas está numerada del 1 (as) al 9, siendo las figuras el 10 (sota), el 11 (caballo) y el 12 (rey), y muy frecuentemente hay en el mercado mazos de 40 naipes, sin los ochos y los nueves, puesto que muchos juegos así lo requieren.

La *baraja napolitana* es igual que la española de 40 cartas, con la diferencia de que la sota está numerada como 8, el caballo como 9 y el rey como 10. Probablemente la baraja española fue adoptada en Nápoles durante el dominio de Aragón y ha evolucionado posteriormente más en España que en Italia, por lo que la napolitana es parecida a la antigua baraja española.

La *baraja alemana* consta de un total de 40 cartas numeradas del 6 al 10, seguidas por *Unter* o *Bauer* (inferior o campesino), *Ober* o *Dame* (superior o dama), *König* (rey) y *Daus* o *Ass* (dos o as). Están repartidas en cuatro palos: *Schellen* (campanas), *Gras* o *Grün* o *Laub* (pasto, verde o follaje), *Herz* o *Rot* (corazón o rojo) y *Eichel* (bellota). Existen varias derivaciones de esta baraja como la centroeuropea, la franca o la suiza.

La *baraja francesa* consta de 52 cartas distribuidas en 4 palos (corazones, diamantes, picas y tréboles) siendo numeradas del 1 (as) al 10 y seguidas por la V (de la voz francesa *valet* o paje), la D (de *dame* o señora) y la R (de *Roi* o rey). Tradicionalmente, tanto los corazones como los diamantes se representan en rojo mientras que las picas y los tréboles en color negro.

La *baraja inglesa* es semejante a la baraja francesa pero el As lleva A (de *ace*) y las figuras llevan la J (de la voz inglesa *jack* o paje), la Q (de *queen* o reina) y la K (de *king* o rey).



Baraja española Baraja alemana Baraja francesa Baraja inglesa

Figura 4.33 Las cartas española, alemana, francesa e inglesa

Barajas que toman como modelo el modelo clásico añadiendo cartas

La *baraja de Tarot* está compuesta de 78 cartas divididas en 22 naipes conocidos como arcanos mayores, 40 arcanos menores y 16 honores o figuras. Estos dos últimos grupos están clasificados en cuatro palos: espadas, copas, bastos y oros, del mismo modo que la baraja española.

La *baraja Minchiate* es semejante a la del Tarot, pero con 40 arcanos.

Barajas asiáticas

Las *barajas Karuta*: barajas japonesas clásicas, siendo las barajas más populares la Hanafuda y la Uta-garuta.

Las barajas Ganjifa o Gânjaphâ: barajas originadas en Persia, cuya variación de este tipo de juego de cartas, llamada Dasavatara ganjifa, se hizo popular en la India.

#### 4.3.5.3 LA BARAJA COMO RECURSO DIDÁCTICO

Las cartas se asocian de forma inmediata con actitudes nada recomendables como son las tendencias adictivas del juego, comportamientos asociales, como hacer trampas para conseguir de la manera que sea ganar o especular con intención de apostar, que ponen en riesgo el control y la mesura con que se deben realizar estas prácticas lúdicas.

Por esta razón los juegos de cartas han sido tradicionalmente prohibidos o desaconsejados en los centros escolares, mientras que otras prácticas lúdicas, como el ajedrez, son estimulados, pues de forma innegable se les reconoce una importante utilidad en el adiestramiento de la capacidad, de memorización, de raciocinio y de planificación de estrategias mentales. Además de entretenidos, son en realidad "juegos matemáticos", o mejor, juegos que se ganan o se pierden en función del éxito con que se hayan aplicado estas prácticas matemáticas.

Es habitual que muchos escolares las lleven a los centros para jugar en los ratos libres o recreos. Las barajas de cartas son reconocidas como elementos de su realidad y sus juegos resultan familiares a una gran mayoría, con lo que la motivación didáctica de las Matemáticas a partir de los naipes es muy elevada.

Introducir un aspecto lúdico en el aula ayudaría a desvestir la materia que pretendemos enseñar de la seriedad y solemnidad que a menudo rodean a la asignatura y la acercaría a los gustos de los alumnos, mostrándoles implícitamente que las Matemáticas se pueden encontrar en cualquier parte de nuestra vida diaria.

Ambos, los juegos de naipes y las Matemáticas, tienen muchos rasgos en común en cuanto a la explotación de su finalidad educativa. Las Matemáticas dotan a los individuos de un conjunto de instrumentos que potencian y enriquecen sus estructuras mentales y los posibilitan para explorar y actuar en la realidad. Los juegos de cartas enseñan a los escolares a dar los primeros pasos en el desarrollo de técnicas intelectuales, potencian el pensamiento lógico, desarrollan hábitos de razonamiento, enseñan a pensar con espíritu crítico y crean la base para una posterior formalización del pensamiento matemático (Ferrero, 1991). Los juegos de cartas ayudarán a que nuestro alumnado descubra y describa, por ejemplo, unas leyes a las que el Azar obedece con disciplina: la teoría de las probabilidades. Así, el alumno como jugador, o el jugador como alumno comprenderá que el mundo del Azar, de apariencia caótica e impredecible, puede ser domesticado y encauzado.

Los juegos que se llevan al aula de Matemáticas son los que se juegan en las salas de estar de las casas, en bares, casinos o centros de reunión.

- Cálculo de probabilidades, como sucede en todos los juegos de envite, por ejemplo el *Póker*.
- Recuento de posibilidades, que podrán abordarse por diagramas de árbol, siempre que haya que considerar tantos o perdidas, como el *Tute subastado*.

La página del Ministerio de Educación, cultura y deporte también propone una tarea con cartas para explicar la aplicación de la Probabilidad, mostrando el resultado del problema a través de una explicación audiovisual.

#### 4.3.5.4 EXPERIENCIAS PRÁCTICAS EN EL AULA

Una de las más notables es la de Robert N. Baker, de la universidad Alaska Southeast, en su artículo de 1999 "Cards in classroom: Academics and Applications", en la que explica su experiencia con el uso de los juegos de naipes en la universidad. Para este autor el uso de cartas facilita la explicación de la Probabilidad y desarrolla el cálculo mental de manera casi inmediata. En cuanto a la Probabilidad, el juego permite diseñar estrategias de enseñanza que no se pueden lograr sin el uso de esta lógica. Baker nos describe cómo explicando detenidamente el juego *Cribbage* el alumno puede obtener directamente conceptos básicos de la teoría de juegos, o también cómo, solamente con el propio acto de jugar a las cartas, los jugadores interactúan y necesitan de cálculos matemáticos para poder ganar el juego. Y quizás, lo más importante, Baker cuenta como los alumnos prefieren este tipo de explicación, siendo sus resultados mucho mejores y más satisfactorios que con los métodos tradicionales de enseñanza de las Matemáticas.

En nuestro país, podemos fijarnos en el magnífico trabajo en un instituto de enseñanza secundaria "Luis Carrillo de Sotomayor" de Baena, donde se transformó la Biblioteca del centro en casino por un día. El alumnado de 2.º de Bachillerato Tecnológico y 1.º de Bachillerato de Ciencias Sociales hizo una selección de diferentes juegos de azar entre los que se encontraban dos juegos de cartas (el póquer y las siete y media). La selección de los juegos fue supervisada por el profesorado de Matemáticas con la idea de que cubrieran los principales conceptos que deberían asimilar. En concreto, el manejo del cálculo de probabilidades en espacios equiprobables, el uso de métodos de conteo como la combinatoria, la comprobación empírica de las leyes de los

grandes números y, por último, el cálculo de probabilidades condicionadas y aplicación de algunos teoremas importantes como el Teorema de Bayes.

Juego de Póquer

El objetivo de este juego es plantear la complicación del cálculo de las probabilidades de ganar, cuando el resultado final depende de los resultados de un descarte previo.

a) Descripción del juego: Se reparten cinco cartas, de una baraja francesa de 52 cartas, a cada uno de los jugadores. Cada jugador observa sus cartas y decide de cuáles descartarse con el fin de obtener aquella combinación que mejor se adapte a las cartas que posee y que sea lo más alta posible, dentro de la escala que se da a continuación. Puede suceder que tenga que descartarse incluso de las cinco. Después, se vuelven a repartir tantas cartas, a cada jugador, como cartas de las que se haya descartado. Una vez que cada jugador tiene sus cinco cartas en mano, se levantan todas las cartas. El ganador del juego es aquel que posee la mayor jugada siendo el orden de mayor a menor el siguiente:

- Escalera de color: cinco cartas seguidas del mismo palo.
- Póquer: cuatro cartas iguales
- Full: dos cartas iguales y otras tres cartas iguales.
- Color: cinco cartas del mismo palo, no consecutivas.
- Escalera: cinco cartas consecutivas de distintos palos.
- Trío: tres cartas iguales.
- Dobles parejas: cuatro cartas iguales dos a dos.
- Pareja: dos cartas iguales.

b) Material necesario: Una baraja de cartas francesa.

c) Cartulina de presentación del juego: Aunque el juego descrito anteriormente considera que el jugador puede descartarse, las probabilidades aquí calculadas son sin descartes, con el fin de facilitar los cálculos.

| PÓQUER: Gana la mejor jugada | |
|---|---|
| JUGADAS | POSIBILIDAD |
| Escalera de color | 0,002% |
| Póquer | 0,024% |
| Full | 0,144% |
| Color | 0,197% |

| | |
|---|---|
| Escalera | 0,392% |
| Trío | 2,113% |
| Dobles parejas | 4,754% |
| Pareja | 42,257% |
| Menos que pareja | 50,118% |

Tabla 4.16 Posibilidad de la jugada de póquer

Juego las siete y media

El objetivo de este juego es manejar el concepto de probabilidad condicionada (probabilidad de cada resultado en función de las cartas obtenidas hasta ese momento).

a) Descripción del juego: Disponemos de una baraja española de 40 cartas, donde todas las cartas tienen por valor su valor nominal salvo las figuras que valen media. El juego consiste en ir pidiendo cartas hasta conseguir que la suma de los puntos se acerque lo más posible a "siete y media" sin pasarse. Los jugadores mantiene una carta cubierta, pero la banca tiene que descubrirlas todas. Gana aquel que tenga "siete y media" o el que más se aproxime sin pasarse. En caso de empate, gana el cruprier.
b) Material necesario: Una baraja española de cartas.
c) Cartulina de presentación del juego: En este caso, dado que la probabilidad de ganar depende de los resultados que se van obteniendo en cada etapa del juego, no se pudo hacer una cartulina con probabilidades generales.

| SIETE Y MEDIA: Obtener "siete y media" |
|---|
| Planteamiento de las probabilidades de "ganar si me planto" y de "pasarme si pido otra", teniendo en cuenta las cartas descubiertas. |

Tabla 4.17 Planteamiento de las opciones posibles de cada paso

La valoración de la actividad fue altamente positiva en todos los niveles. Desde el punto de vista didáctico por la alta participación del alumnado y la ilusión que mostraron en su ejecución. Los conceptos utilizados para la realización de la actividad se estudiaron de forma más profunda y fueron asimilados mejor que en cursos anteriores. Todo esto se plasmó en unos resultados notablemente mejores que en años anteriores, en los que los temas de Probabilidad y Estadística fueron introducidos mediante métodos tradicionales, basados fundamentalmente en clases magistrales por

parte del profesor y propuesta de problemas, para su resolución por parte del alumno (García-Ligero M. E., García-Ligero M. J. y Román P., 2009).

Otro trabajo de relevancia es en el que se plantea una serie de juegos como recurso didáctico en el aula de Matemáticas. Estos juegos nos permiten introducir algunos conceptos de Probabilidad en Secundaria y, además, pueden incitar a los alumnos a plantearse numerosas cuestiones que les ayuden a comprender los diversos problemas donde el Azar está inmerso.

Para trabajar los sucesos compatibles e incompatibles este se puede realizar mediante las probabilidades con cartas.

a) Descripción del material didáctico: Una baraja de cartas española.
b) Instrucciones y objetivo del juego: Dado un experimento, se trata de calcular un suceso determinado.
c) Propuesta para los alumnos: En el experimento "extraer una carta de una baraja española", ¿cuál es la probabilidad de que salga:

   a) El as de oros  b) Un caballo  c) El rey de copas  d) Un basto?

Si la carta es el seis de espadas, han ocurrido también otros muchos sucesos como "salir una espada", "salir un seis", "salir un número menor que 7", etc. En cambio no habrán ocurrido otros muchos sucesos como "salir el seis de oros", "salir el siete de espadas", "salir una copa", etc.

Algunos sucesos pueden ocurrir simultáneamente y otros no. Entre los sucesos del apartado anterior, ¿hay algunos que pueden ocurrir a la vez?

Fíjate en los siguientes sucesos:

A = Salir una figura (sota, caballo o rey)

B = Salir un oro

Compara de forma análoga los pares de sucesos del apartado anterior, o sea:

A = Salir el as de oros y salir el rey de copas

B = Salir un caballo y salir un basto

Y deduce si son o no compatibles.

d) Objetivos didácticos del juego: Reconocimiento de sucesos compatibles e incompatibles.

Resumiendo todo lo anterior, diremos que dos sucesos son compatibles si pueden ocurrir simultáneamente, y diremos que son incompatibles si no pueden ocurrir a la vez.

### 4.3.6 PARCHÍS

El nombre del parchís proviene de la palabra *pacisi*, que significa veinticinco en hindi, ya que veinticinco era el máximo resultado posible que se podía obtener al lanzar las conchas que hacían las veces de dados.

El parchís es un juego de mesa derivado del pachisi. Es muy popular en España. Se juega con 1 dado y 5 fichas para cada uno de los jugadores (de dos a cuatro, aunque también hay tableros para 6 u 8 jugadores). El objeto del juego es que cada jugador lleve sus fichas desde la salida hasta la meta intentando, en el camino, comerse a las demás. El primero en conseguirlo será el ganador.

#### 4.3.6.1 HISTORIA

El Pachisi es un juego originario de la India, en donde nació en el siglo XVI. El tablero original era el mismo jardín del palacio del emperador mongol Akbar el Grande, quien gobernó la India desde 1556 hasta 1605. El parchís es una variación de este juego, como lo son el parcheesi, el ludo o el parqués. El tablero actual de forma de cruz es tan solo una representación del original. El centro del tablero representa el trono en que se colocaba el emperador en el centro del patio. Por su parte, las fichas eran las muchachas indias más bellas que se movían de casilla en casilla marcadas sobre el pavimento de acuerdo con la puntuación de los dados lanzados por el emperador y se disputaban el honor de jugar para este. Los dados que decidían la suerte de los participantes consistían en cauríes, conchas de moluscos pintadas de colores que antiguamente se habían utilizado como monedas que contaban un punto si caían con el hueco hacia arriba.

Durante la ocupación británica, el juego se hizo muy popular entre los colonos y no tardó en ponerse de moda en Occidente.

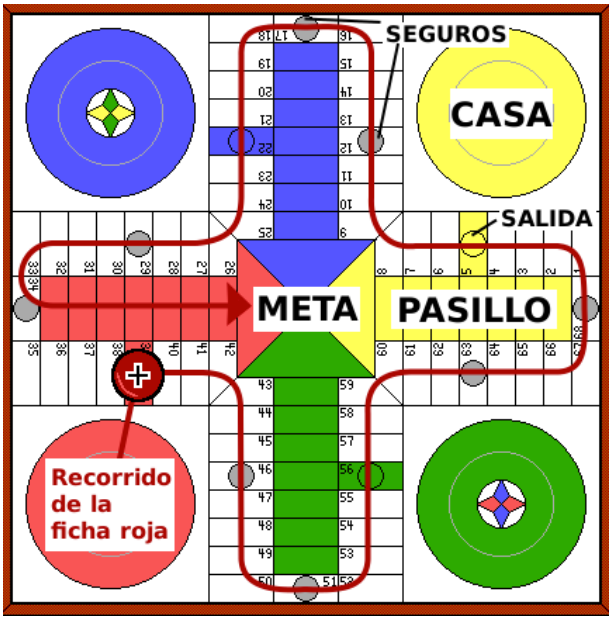



Figura 4.34 Tablero del parchís

#### 4.3.6.2 REGLAS DEL PARCHÍS

Para jugar será necesario tener las cuatro fichas de cada color y un dado. Cada jugador elegirá un color: amarillo, azul, rojo o verde. Para saber quien comienza la partida se lanzará el dado y el que obtenga la mayor puntuación empezará. Al comenzar el juego todas las fichas estarán en casa (en su color correspondiente). La partida se desarrolla por turnos. Para poder sacar una ficha de casa se deberá sacar un 5. Cada jugador lanzará el dado una sola vez en cada turno, salvo que saque un 6 que volverá a tirar. Cuando la puntuación obtenida con el dado no permita mover ninguna ficha no hará nada. En el resto de los casos el jugador está obligado a mover cualquiera de las fichas que tiene sobre las casillas, fuera de casa. Las fichas se mueven en sentido contrario a las agujas del reloj desde la salida de su color hasta la meta. Las fichas que están en la casa y en la meta no se pueden mover. Una ficha no puede moverse a una casilla en la que ya existan 2 fichas ya juntas. Cuando una ficha está en una casilla y cae otra en esa misma, esa ficha que estaba primeramente será comida por la segunda quien contará 20 casillas desde donde está, y la que ha sido comida deberá ir a casa para volver a empezar. Gana aquel jugador que consiga llevar a la meta las cuatro fichas de su color.

Aunque se trata de un juego de azar, porque no puedes saber que obtendrás al tirar el dado, también se desarrollan estrategias personales para conseguir ganar el juego.

#### 4.3.6.3 EL PARCHÍS COMO RECURSO DIDÁCTICO

Con este juego hablamos de un juego de estrategias, de probabilidades, aunque sea a un nivel muy básico, por lo que puede ser un punto de partida para hablar sobre el Azar y la ley de probabilidades de Laplace.

Cada movimiento de un jugador viene determinado por los puntos que obtiene al lanzar un dado, lo cual nos provoca un serie de preguntas:

- ¿Cuál es la probabilidad de obtener el número deseado en la primera tirada?
- ¿Y en la segunda? etc.
- ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos 6 consecutivos?
- ¿Tiene la misma probabilidad sacar un 4 que un 3 al tirar un dado una sola vez?

En probabilidad, al hecho de obtener un dos (o cualquier otro número) al lanzar un dado se le llama suceso, y como cada vez que tiramos un dado su resultado no afecta al resultado de la siguiente tirada, entonces se dice que el suceso es independiente y equiprobable a obtener otro número cualquiera, siendo la probabilidad de cada uno de ellos 1/6.

Cuando hablamos de "sacar un número determinado en la segunda jugada" es, en lenguaje matemático, "sacar ese número en la segunda jugada y no haberlo obtenido en la primera". Su probabilidad del suceso será (5/6)(1/6), que es inferior a 1/6.

Repitiendo sucesivamente la misma operación, la probabilidad de sacar un número determinado en la tercera jugada es (5/6)(5/6)(1/6). En la n-ésima tirada la probabilidad será: $(1/6)(5/6)^{n-1}$

A menudo cuando hablamos de "mala suerte" nos referimos a que el Azar es contrario a nuestros intereses, nos perjudica. Pero un gran número de veces de nuestra situación actual ha sido provocada por malas decisiones, malas jugadas. Tirada a tirada, vamos aprendiendo empíricamente a tomar decisiones, a esclarecer y resolver problemas del juego.

Mucho antes de que los niños y niñas dispongan de argumentos matemáticos de probabilidades, practican la toma de decisiones, empiezan a preguntarse sobre el concepto de Probabilidad. Nuestro juego formalmente es un camino pedagógico eficaz que nos permitirá introducir posteriormente estas nociones, argumentos, teoremas y axiomas. Trabajar con dados y azar con niños y niñas de la ESO les ayudará a comprender el concepto de Probabilidad y los conceptos de la Estadística de probabilidades, para algunos tan difícil de asimilar en etapas posteriores.

Al alumnado de Educación Primaria le gusta explorar sobre la casualidad y disfrutan con ello. Los juegos deben permitirles explorar diversos aspectos de la Probabilidad y recoger y analizar datos en un ambiente de resolución de problemas.

Resulta difícil atribuir actividades o juegos determinados para cada ciclo, porque el mismo puede ser utilizado a distintas edades, dependiendo del contexto en el que nos encontremos y de lo que queramos conseguir con él.

Los niños suelen tener sus primeras experiencias probabilísticas con juegos del tipo parchís, oca, etc. Los preconceptos probabilísticos que tienen son producto de su experiencia, son experimentales. Cuando en el parchís están a tiro de "uno" para entrar en casa y ganar la partida, el uno que no ha salido, y puede ocurrir que le salga una serie de…cuatros. Para él es mucho más difícil que salga el "uno" que cualquiera otro número, por ejemplo, el cuatro.

Esta experiencia suya, limitada, puede chocar con el carácter apriorístico del tratamiento de la Probabilidad en el aula, porque tratándose de un dado cúbico normal, el profesor dice porque así lo tiene él claro (teórico, pero no hay experimentación suficiente en clase) que los seis sucesos son equiprobables:

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = 1/6$$

Por ello, y sólo de modo orientativo, podemos enumerar algunos juegos de los más característicos para Educación Primaria, porque la variedad es enorme.

Por último existe un recurso interactivo, *Parchís y dados cargados*, orientado para alumnos y alumnas para enseñar acerca de los juegos de azar y opciones aleatorias. El recurso permite trabajar conceptos básicos de análisis y descripción de procesos aleatorios, así como cuantificar la probabilidad de ocurrencia de eventos equiprobables.

### 4.3.7 BINGO

El bingo es un juego de azar que consiste en un bombo con un número determinado de bolas numeradas en su interior. Los jugadores juegan con cartones con números aleatorios escritos en ellos, dentro del rango correspondiente. Un locutor va sacando bolas del bombo, anunciando los números en voz alta. Si un jugador tiene dicho número en su cartón lo tacha, y el juego continúa así hasta que alguien consigue marcar todos los números de su cartón.

Se trata de un juego muy popular en todo el mundo del que existen dos variedades típicas, que son la de 90 bolas y la de 75 bolas.

#### 4.3.7.1 HISTORIA

Algunas teorías remontan el origen de este popular juego de azar al tiempo de la cultura romana. Otras lo relacionan a la antigua Italia en el siglo XVI, pero lo realmente cierto es que constituye una de las primeras formas de juego popular.

La historia conocida de este juego (no aceptada por todos los historiadores) se remonta a la época de los bárbaros y los potentados que cobraban los famosos impuestos a diferentes aldeas de países, nacionales, capitales y entre otros estamentos de la sociedad en épocas remotas.

El juego, en general, consistía en integrar en un recipiente varias bolas con números que representaban a diferentes aldeas de las diferentes potencias y sobre la base de los aciertos los caballeros y soldados hacían los cobros en oro, plata, minerales, joyas y otros objetos de valor como compensación y retribución de su suerte en ser elegidos. En varias ocasiones, los valores adquiridos eran para el uso de construcciones y en otras los utilizaban para la alimentación de grandes masas de ejércitos y entre otros para combatir conflictos y conquistas.

Con el transcurso de los años y debido a nuevas normas asociadas a la sociedad y leyes que promulgaron grandes potentados como es el caso de los romanos, estos juegos que anteriormente se utilizaban para el recaudo de dinero y riquezas, empezaron a ser utilizados para brindar diversión a los diferentes visitantes y exploradores del mundo en busca de negocios y sobre la base de esto las ideas que se crearon fueron basadas en brindar diversión con juegos, bailes, mujeres y estamentos de prestigio con otras disciplinas como fueron los dados, las barajas, y otros juegos que ahora divierten a millones de jugadores y apasionados apostadores en el mundo.

En cambio, numerosos historiadores y especialistas afirman que el origen de esta costumbre es la lotería italiana, cuando se unieron los reinos de Italia en 1530. La hipótesis, de gran aceptación, afirma que el antecesor del popular juego es “Il Giocco del Lotto d`Italia”, una lotería nacional que era jugada semanalmente y se ha extendido en el tiempo hasta la fecha actual.

En 1770, este juego llamó la atención a los franceses, quienes lo denominaron Le Lotto, y se estableció con las reglas que se siguen aún en la actualidad. Fueron los primeros en jugar con las tarjetas de bingo, fichas y en cantar en voz alta los números. En esta época, sólo fue jugado por la gente de la alta aristocracia. Los premios no eran organizados de la manera actual sino que se extendían en numerosas posibilidades de reconocimiento por ganar.

En los años 1800 el bingo se propagó rápidamente por toda Europa. Los juegos de bingo educativos se hicieron populares. En 1850 fue diseñado un juego de bingo en Alemania para enseñarle a los niños las tablas de multiplicar, además de otros juegos de bingo educativo como "bingo para deletrear", "bingo animal", "bingo histórico". Estos bingos fueron diseñados para proporcionarles a los niños de 3 a 6 años de edad un poco de diversión y al mismo tiempo, enseñarles a cantar y a reconocer los números.

Después de extenderse por toda Europa el juego comenzó a presentarse en Norteamérica. En un principio el juego se hizo popular en las ferias de los pueblos y festivales. Consistía en un organizador que sacaba discos enumerados de una caja de cigarros mientras los jugadores marcaban los números en sus tarjetas colocando alubias (beans) sobre ellas y se gritaba "beano" si ganaban.

Durante una visita al carnaval de Atlanta en 1929, Edwin Lowe, un vendedor de juguetes de Nueva York, descubrió el Beano. Lowe notó la gran emoción que sentían los jugadores. Intentó participar en un juego de Beano esa misma noche, pero no consiguió un sitio. Los jugadores estaban muy enganchados y cuando el hombre que llevaba el juego de Beano intentó cerrar el chiringuito, los jugadores simplemente rechazaron dejar de jugar. Finalmente, a las 3 de la mañana, según cuenta la historia, el organizador dejó paso a Lowe. Al regresar a Nueva York, Lowe compró algunas alubias y todo el resto de cosas necesarias para poder realizar el juego. Invitó a algunos amigos a su apartamento para poner a prueba su nuevo juego. Antes de lo que se imaginaba, sus amigos estaban jugando al Beano con la misma emoción y fervor que los que había visto en el carnaval. Durante un juego, Lowe estudió el comportamiento de un jugador que estaba a punto de ganar. Sólo necesitaba un número más para completar su tarjeta, pero se ponía más y más nervioso cuando veía que su número no salía. Finalmente, cuando consiguió tapar todos sus números, de la emoción gritó:" B-B-B-BINGO!" en vez de Beano. Esto es lo que explica su nombre de hoy en día. Una vez dado a conocer en Norteamérica, rápidamente se extendió en el resto del mundo.

Un cura de Wilkes-Barre, Pensilvania, es el hombre responsable de introducir por primera vez el bingo como forma de recaudar fondos para la iglesia. Un miembro de la congregación sugirió utilizar el juego para poder obtener dinero para mantenimiento. Fue entonces, cuando el juego del bingo, original, que solo ofrecía 24 variantes únicas de tarjetas, se fue expandiendo. Dado que cada vez eran más los miembros de la iglesia que tomaban parte en el juego del bingo, se repartían más cartones. Los curas pronto se dieron cuenta de que muchos jugadores ganaban el mismo juego, por lo tanto buscaron

nuevas formas para hacer que las combinaciones de números fueran únicas. Para ello, pidieron ayuda a Lowe, quien contrató a un profesor de Matemáticas de la universidad de Columbia, llamado Carl Leffler, para que lo ayudase a incrementar la cantidad de combinaciones en las tarjetas de bingo. Para 1930, Leffler ya había creado más de 6000 tarjetas de bingo con combinaciones únicas.

Esta nueva forma de bingo hizo que este juego se consolidara como forma para recaudar fondos. Para 1934, ya había más de 10000 bingos semanales operativos en toda América del Norte. Desde las iglesias hasta las reservas de indios americanos, todos ellos eran jugadores de bingo que gastaban semanalmente 90 millones de dólares en bingo solamente en el norte de América.

En 1977 se autorizó el bingo en España. Se inventó un nuevo sistema de bingo diferente al que imperaba por entonces: el bingo de 90 números. En la década de los ochenta se vivió una auténtica fiebre del "bingo moderno" cuando las máquinas y los salones de juego entraron en escena.

#### 4.3.7.2 JUEGO DEL BINGO

El juego del bingo se compone de un bombo con bolas numeradas, cartones con números aleatorios impresos y rotuladores o fichas para tachar o tapar estos. Una partida consiste en extraer las bolas del bombo al azar y cantar su respectiva numeración. Los jugadores, provistos de cartones, tacharán el número cuando éste sea cantado por el cajero. Al completar una línea horizontal en un cartón, el jugador deberá cantar "línea" y se llevará un pequeño porcentaje del total recaudado con la venta de los cartones. Cuando un jugador consigue tachar todos los números de su cartón, tendrá que gritar "bingo" y se convertirá en el ganador de la partida llevándose, así, el porcentaje mayor de la recaudación en concepto de premio.

#### 4.3.7.3 ELEMENTOS

En el juego del bingo se necesitan un bombo, las bolillas o bolas de números, cartones y un espacio de mesas.

Máquinas extractoras

El bombo está formado por dos cúpulas semiesféricas transparentes muy resistentes a los golpes, ya que han de soportar el impacto de las bolas.

Las cúpulas tienen 50x50 cm. El modo de girar del bolillero puede variar, puede ser movido por una manija, de forma manual, o mediante un motor eléctrico que lo hace girar.

Una vez que una de las bolillas fue separada, se dice su número y se continúa mezclando. En el caso del bolillero manual, mientras se retira la bolilla separada se detiene el mezclado. Con el bolillero eléctrico el mezclado no se detiene nunca porque la bolilla se desliza por un canal.

En ambos casos, luego de que el número es anunciado, los jugadores deberán marcar las coincidencias en todos los cartones de bingo que posean.

Bolas

Las bolas para el bingo tienen las siguientes características:

Material: nitrato de celulosa. Impresas en 10 posiciones

Colores: negro, azul, verde, rojo y naranja, fondo blanco

Diámetro: 38,5 mm (+/ 0,5 mm)

Peso: 2,5 g (+/ 0,5 g)

Cartones

Los cartones son una de las piezas fundamentales para poder jugar al Bingo. Estos son fabricados en material adecuado para facilitar que puedan ser marcados por los jugadores, y son válidos exclusivamente para una sola partida.

En el anverso de cada cartón figura la serie a la que pertenece, rango de número de cartones dentro de cada serie asignado al establecimiento, número de orden y número de cartones que integran la serie. En el dorso se consignan los impuestos a satisfacer, así como un extracto de las principales reglas del juego. Igualmente se consigna en el dorso de los cartones la advertencia de que la división de los dos cartones de la unidad de venta, así como las marcas o tachaduras que impidan la lectura de los elementos identificativos del cartón, inutiliza éste a efectos de premio.

Los cartones de bingo son fabricados por la "Real Casa de la Moneda. Fábrica Nacional de Moneda y Timbre". Los Cartones de Bingo se imprimen a 4 colores e incorporan numeración. En cada serie salen 1944 cartones de bingo, esto se debe al proceso de fabricación (54 planchas de 36 cartones cada una), aparte de este criterio de 1944 cartones, también existe el de 3888 (múltiplo de 1944). Estos dos criterios se utilizan en todas las salas de bingo.

Las series se entregan en tiras de 6 cartones dispuestas verticalmente y cada tira consta de los 90 números que intervienen en el juego del bingo.

### 4.3.7.4 CATEGORÍAS PROFESIONALES

Jefe/a de Sala: ejercerá la dirección y control general del funcionamiento de la sala, adoptando las decisiones relativas a la marcha de las distintas operaciones de acuerdo con las normas técnicas del bingo y adecuando el ritmo de aquellas en consideración a la afluencia de público, cartones, cuidará del correcto funcionamiento de todos los aparatos, instalaciones y servicios; ejercerá la jerarquía sobre todo el personal al servicio de la sala; será el responsable de la correcta marcha de la contabilidad específica del juego, así como la tenencia y custodia de la propia sala, de las autorizaciones precisas para su funcionamiento y de la documentación relativa al personal.

Jefe/a de Mesa: será el responsable de la comprobación de las bolas y cartones; llevará la contabilidad de los cartones vendidos para cada sorteo; efectuará la determinación de los premios de línea o bingo respectivamente, comprobará los cartones premiados, informando de todo ello a los jugadores, será responsable del libro de actas de registro y llevará el control del "stock" de cartones por partida. Contestará individualmente cuantas peticiones de información o reclamaciones formulen los jugadores y consignará todo ello, así como las incidencias que se produzcan, en el acta.

Locutor/a-Vendedor/a: realizará la venta directa de los cartones y la recaudación de su importe, que entregará junto con los cartones sobrantes al Cajero/a; retirará de la mesa, antes de efectuar la venta de los nuevos cartones, los utilizados por los jugadores en la jugada anterior y repasará las series dentro de su jornada laboral. En su turno de Locutor/a pondrá en funcionamiento la máquina cuando se inicie la jugada, leerá en voz alta el número de la bola según el orden de salida; apagará la máquina al finalizar el juego y abonará a los jugadores los importes de línea y bingo, contando su importe en el momento del abono.

Admisión y Control: será el encargado/a de controlar la entrada de jugadores en la sala de juego, comprobando que el carnet corresponde a la persona que lo presenta, y negando la entrada a las personas que lo tuvieran prohibido, dando cuenta al Jefe/a de Sala de los incidentes. Tendrá asimismo como misión el control del fichero de visitantes y su actualización.

Servicios Auxiliares: estas categorías: administración, aparcacoches, porteros/as, vigilantes y personal de limpieza, etc., no están comprendidas entre las técnicas del Bingo y realizarán las funciones propias de sus especialidades, sin que les sea exigida credencial de juego o permiso gubernativo alguno.

#### 4.3.7.5 TIPOS DE BINGO

Bingo simultáneo

En el bingo simultáneo se juega sobre 90 números, del 1 al 90, ambos incluidos, y de forma simultánea por jugadores presentes en diferentes salas de juego colectivas de dinero y azar, integrados en una Red de distribución.

Los cartones están formados por quince números diferentes entre ellos, compuestos de 3 filas y 9 columnas. Además tendrán el soporte material adecuado para facilitar que puedan ser marcados por los jugadores, siendo válidos exclusivamente para una partida.

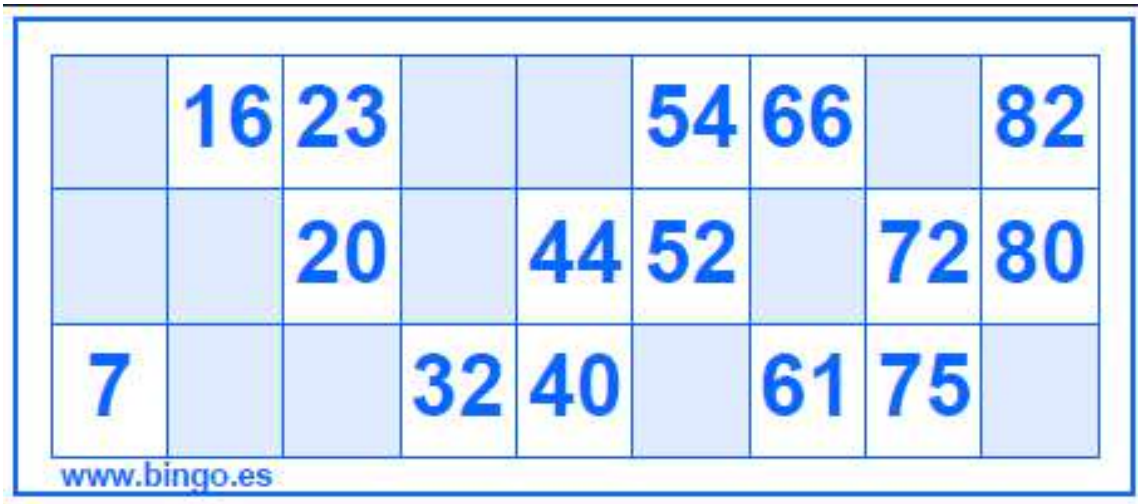



Figura 4.35 Cartón de bingo

Bingo online

El cartón en este caso es visual y no existe coste de impresión del papel. Los jugadores de todas las salas juegan la misma partida de manera simultánea.

*Bingo electrónico online*

El formado del cartón corresponde con el clásico español, 15 números sobre 90; la única diferencia es el uso de un terminal electrónico.

*Bingo 75*

Es el Bingo americano, muy jugado en red. Tiene formato de cartón y juego de 24 números sobre 75 (la casilla central no tiene número). Basado en la realización de figuras dentro del cartón se pueden obtener diferentes posibilidades de premios de bingo

(líneas, diagonales, cruces, etc.). Estas figuras se llaman “patrones”, y cada juego tiene uno o más patrones que dan premio. La composición del cartón es la siguiente: en la columna “B” se ubican los números entre el 1 y el 15, en la columna “I” los números del 16 al 30, en la “N” los números del 31 al 45, en la “G” del 46 al 60 y finalmente en la columna “O” los números del 61 al 75.

| B | I | N | G | O |
|---|---|---|---|---|
| | 17 | 35 | 54 | 61 |
| 8 | | 41 | 48 | 68 |
| 4 | 23 | | 52 | 70 |
| 7 | 28 | 37 | | 74 |
| 11 | 19 | 33 | 50 | |

Figura 4.35. Cartón del *Bingo 75*.

*Bingo flash*

Bingo electrónico en red con formato “flash”, 3 números sobre 15. El sorteo consistirá en extraer 9 bolas. Los cartones utilizados tienen 3 números que van desde el número 1 al 15 y cada número tiene un color de 6 posibles, en caso de completar el cartón en la extracción número 3, el premio de bingo equivale a pagar la apuesta realizada por 30, en caso de completar el cartón en la extracción número 4, el premio equivale a pagar la apuesta realizada por 15 y así sucesivamente.

*Cash bingo*

Bingo electrónico en red con formato de cartón de 16 números sobre 80. El Cash Bingo se juega sobre cartones (virtuales) en los cuales los 16 números se representan en cuatro columnas de cuatro números cada una. En la primera columna se sitúan los números del 1 al 20, y es de color rojo. En la segunda columna se sitúan los números del 21 al 40 y es de color amarillo. En la tercera columna se sitúan los números del 41 al 60, y es de color azul. Finalmente, en la cuarta columna se sitúan los números del 61 al 80 y es de color blanco.

Binjuegos

Es el equivalente a la modalidad del bingo interconectado acumulado con múltiples estructuraciones de premios, que se juega en una sala virtual formada por los

terminales distribuidos en las diversas salas, jugando los diversos jugadores de forma totalmente asíncrona pues su objetivo de premio se construye en una fracción porcentual sobre un acumulado general, y que por los límites que tienen las estructuras, los premios son fijos. El cartón es virtual. Las modalidades de juegos dentro de Binjuegos son: Bingo 33 y Bingo Keno.

*Bingo 33*

Juego de bingo electrónico con formato de cartón clásico, 15 números sobre 90, jugado sobre terminales electrónicos. El jugador compra un determinado número de cartones, y a continuación inicia la extracción de un sorteo de 33 bolas. Una vez finalizadas las extracciones, se comprueba el número de líneas, dobles líneas y bingo obtenidos por el jugador.

*Bingo Keno*

Juego de bingo electrónico que consiste en seleccionar 10 números de 80 posibles. Esta selección puede ser automática o manual. Seguidamente, el jugador inicia la secuencia de extracción de un sorteo de 20 bolas, y finalizadas las extracciones se comprueba el número de aciertos obtenidos. Existe un plan de ganancias dependiendo del número de aciertos.

**4.3.7.6 PROBABILIDADES EN EL BINGO**

Es muy sencillo calcular las probabilidades en el bingo. Un jugador únicamente necesita dividir el número de cartones que una persona está jugando por el número de cartones que están en juego. Por ejemplo, si una persona tiene un cartón y están siendo jugados un total de 100 cartones, las probabilidades de ganar de esa persona son de 1% o una de cien.

Frecuentemente, los jugadores están interesados en saber qué números tienen las mayores probabilidades de ser anunciados. Muchas personas han intentado calcular esto. Desafortunadamente todos los números tienen igual probabilidad de ser elegidos. Ahora, esto implica la aceptación de algunos supuestos, sobre todo que no haya defectos en la máquina o que el "anunciador" generado por ordenador (en línea) no haya sido manipulado de ninguna manera para obtener un resultado especifico. Con el paso del tiempo, todos los números tendrán la misma posibilidad de ser seleccionados, sólo porque un número en particular es anunciado varias veces en el

transcurso de varios juegos y otros no, no significa que un número en particular tiene mayores probabilidades de ser anunciado que otro.

#### 4.3.7.7 ESTRATEGIAS EN EL BINGO

Existen estrategias para que una persona se dé la mejor oportunidad posible se ganar en el bingo.

- *Comprar cartones anticipadamente:* Muchas páginas de internet con juegos de azar como el bingo brindan esa posibilidad. Esto permite asegurar unos cartones favoritos si se tienen, y sobre todo evitar tener que comprar cada vez que se vaya a iniciar una nueva partida. Muchos sitios de juegos ofrecen paquetes de cartones a precios favorables: más cantidad por menos dinero.
- *Elegir los cartones lo más variado posible:* Esto significa que tendremos menor probabilidad de perdernos cualquier ficha anunciada.
- *Elegir los cartones lo más parecidos posibles:* Nos asegurará varias victorias si tenemos un número anunciado – claro, todo según tu suerte.
- *Elegir la opción de auto-marcador (Auto-Dauber):* Requiere una sencilla configuración en nuestra sesión del bingo site. Como su nombre lo dice, marca automáticamente los números anunciados en nuestros cartones, por lo que nos previene de olvidar marcar alguno. Algunos sitios anuncian 'BINGO' automáticamente, pero la mayoría tiene un botón rojo en el que se hace clic para poder anunciarlo, así que el auto-marcador resulta útil para no perder la victoria por simple descuido, y lo cual te permite comprar muchos más cartones de bingo para la misma partida.
- *Jugar partidas con pocos jugadores:* Esto incrementa nuestras probabilidades de ganar. En las salas de bingo existen horas de mayor y menor afluencia de jugadores en línea. Con algo de experiencia, el jugador podrá reconocerlas y elegir la que le sea más conveniente para jugar. Aunque hay que tener en cuenta que el número de jugadores casi siempre es proporcional al valor del premio.

El matemático Joseph E.Granville, el inventor de las estrategias de reservas de mercado que tuvieron un gran éxito, dedicó gran parte de su espíritu analítico al juego de Bingo. Luego de varios años de búsquedas, desarrolló estrategias que han dado pruebas y que le darán una visión diferente y competitiva para probar su suerte al Bingo.

Las técnicas de Granville son tan simples que todo el mundo puede usarlas. No hay que hacer cálculos complicados ni grandes cálculos mentales. Granville sólo utiliza los procedimientos que usted debe seguir paso a paso y que lo harán ganar en cualquier juego de Bingo.

Varios estudios llevaron a Granville a la inevitable conclusión según la cual cada juego de Bingo sigue modelos definidos… modelos sobre los cuales el jugador es por lo general inconsciente. Utilizando estos modelos descubrió cómo dominar las probabilidades en el bingo, las relaciones cruciales entre los números de bingo que ganan y el panel en donde se anuncian. Él nos demuestra cómo utilizar estas verdades simples y demostradas para elegir más cartones de bingo ganadores.

Dado que las probabilidades son iguales, esto se llama distribución uniforme. Como las bolas salen de la máquina al azar, hay que tener en cuenta tres cosas:

1. Debe haber una cantidad igual de números que terminan en 1, 3, 4, 5, etc.
2. Los números pares e impares deben equilibrarse.
3. Los números fuertes y débiles deben equilibrarse.

### 4.3.7.8 EL BINGO COMO RECURSO DIDÁCTICO

Plantear un bingo en educación servirá para centrar a los alumnos y conseguir que presten atención en una determinada tarea, ya que tan en auge se encuentra.

El mecanismo a la hora de utilizar el bingo en educación es parecido al tradicional, aunque difiere en algunos aspectos. Por ejemplo, no necesitamos números sino objetivos, de forma que el cartón que cada alumno tiene, tendrá una serie de objetivos. Pueden ser diferentes para cada uno, o común a toda una clase; esto deberá decidirlo el docente.

Usar un bingo en educación puede tener varios y diversos objetivos**.** Por ejemplo, podemos hacer que los objetivos de nuestra clase sean los siguientes:

- Dar la respuesta correcta a un ejercicio planteado por el profesor.
- Ayudar a un compañero a entender un determinado concepto.
- Salir a la pizarra a explicar un ejercicio.
- Completar un determinado tema.
- Organizar los apuntes, utilizando colores diferentes para títulos, enunciados, etc.
- Utilizar bolígrafo en vez de lápiz en clase.
- No necesitar la goma de borrar durante un día entero.

En todos los casos será el profesor o docente el que decida qué objetivos plantear en este bingo educativo, adecuándose a variables como diversidad del alumnado, tiempo necesario para completar los cartones, número de objetivos por cartón o muchos más. Depende, única y exclusivamente, del profesor.

Una vez tengas claro qué objetivos vas a marcar y cómo vas a utilizar el bingo en educación, puedes crear los cartones e imprimirlos. Y existen múltiples herramientas para ello, desde crearlos de una forma artesanal con aplicaciones de ofimática o con plantillas y software específico.

Por ejemplo, una búsqueda con los términos "bingo templates" (que podríamos traducir como plantillas de bingo) nos lleva a miles de resultados, todos ellos válidos para lo que buscamos aunque, ciertamente, enfocados al juego de azar. Una búsqueda más específica ("bingo education templates") nos lleva por ejemplo a esta sencilla plantilla (Fig. 4.36) igualmente válida y editable para que la personalicemos con nuestros objetivos.




Figura 4.36 Plantilla de bingo de "bingo education templates"

Otros enlaces interesantes son por ejemplo Tools For Educators, donde podremos crear bingos con imágenes predefinidas que serán interesantes para infantil y los primeros cursos de Primaria.

| | | |
|---|---|---|
| adjectives and opposites | 3x3 | 4x4 |
| animals bingo | 3x3 | 4x4 |
| bathroom objects | 3x3 | 4x4 |
| body parts | 3x3 | 4x4 |
| buildings | 3x3 | 4x4 |
| chores | 3x3 | 4x4 |
| clothing and accessories | 3x3 | 4x4 |
| classroom objects bingo (stationery) | 3x3 | 4x4 |
| Christmas bingo | 3x3 | 4x4 |
| countries | 3x3 | 4x4 |
| daily routines bingo | 3x3 | 4x4 |
| Easter bingo | 3x3 | 4x4 |
| family members | 3x3 | 4x4 |
| fantasy | 3x3 | 4x4 |
| feelings and emotions | 3x3 | 4x4 |
| food (food, drinks, desserts, condiments, snacks) | 3x3 | 4x4 |
| fruit and vegetables | 3x3 | 4x4 |
| hair (physical descriptions) | 3x3 | 4x4 |
| Halloween bingo | 3x3 | 4x4 |
| health worksheets (problems and feelings) | 3x3 | 4x4 |
| hobbies and free time activities | 3x3 | 4x4 |
| house | 3x3 | 4x4 |
| insects and bugs | 3x3 | 4x4 |
| kitchen | 3x3 | 4x4 |
| living room objects | 3x3 | 4x4 |
| months, dates, and days of the week | 3x3 | 4x4 |
| music | 3x3 | 4x4 |
| nature images | 3x3 | 4x4 |
| numbers bingo | 3x3 | 4x4 |
| part-time jobs | 3x3 | 4x4 |
| passive verbs | 3x3 | 4x4 |
| people, jobs, occupations bingo | 3x3 | 4x4 |
| phrasal verbs bingo | 3x3 | 4x4 |
| places around town | 3x3 | 4x4 |
| plural nouns (regular and irregular) | 3x3 | 4x4 |
| prepositions bingo (place and movement) | 3x3 | 4x4 |
| pronouns (subject, object, possessive) | 3x3 | 4x4 |
| questions | 3x3 | 4x4 |
| recess activities | 3x3 | 4x4 |
| school bingo (building and subjects) | 3x3 | 4x4 |
| science bingo | 3x3 | 4x4 |
| shapes and colors bingo | 3x3 | 4x4 |
| sports (recreation, play, go) | 3x3 | 4x4 |
| St. Patrick's Day bingo | 3x3 | 4x4 |
| superhero abilities | 3x3 | 4x4 |
| Thanksgiving bingo | 3x3 | 4x4 |
| tools | 3x3 | 4x4 |
| transportation | 3x3 | 4x4 |
| Valentine's Day bingo | 3x3 | 4x4 |
| verbs bingo (combination of all 5 sets from MES) | 3x3 | 4x4 |
| weather bingo | 3x3 | 4x4 |

Figura 4.37 Plantilla de bingo de “Tools For Educators”

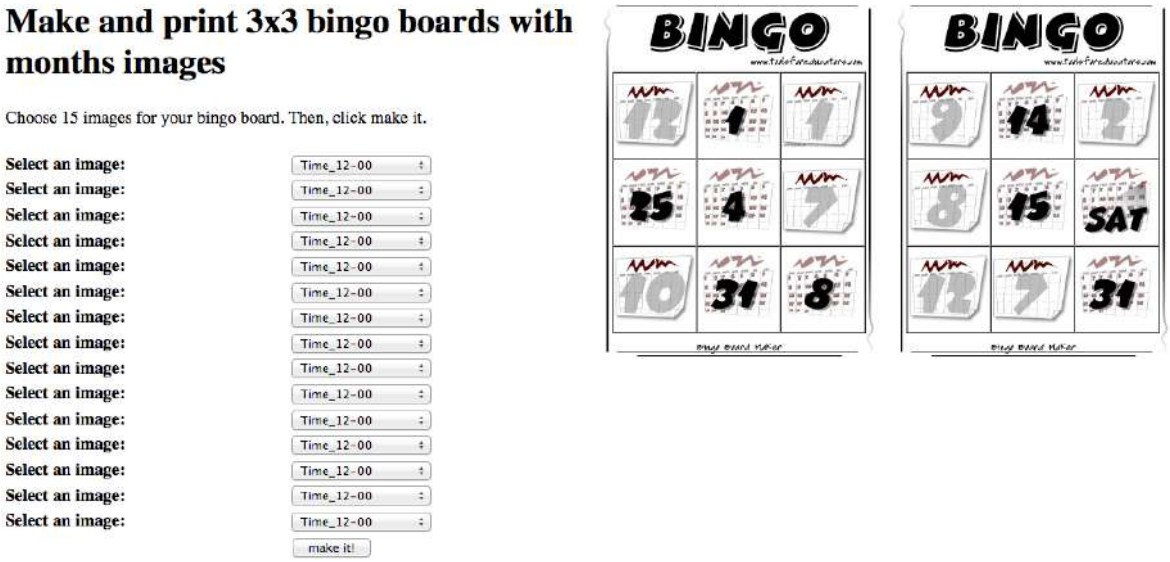
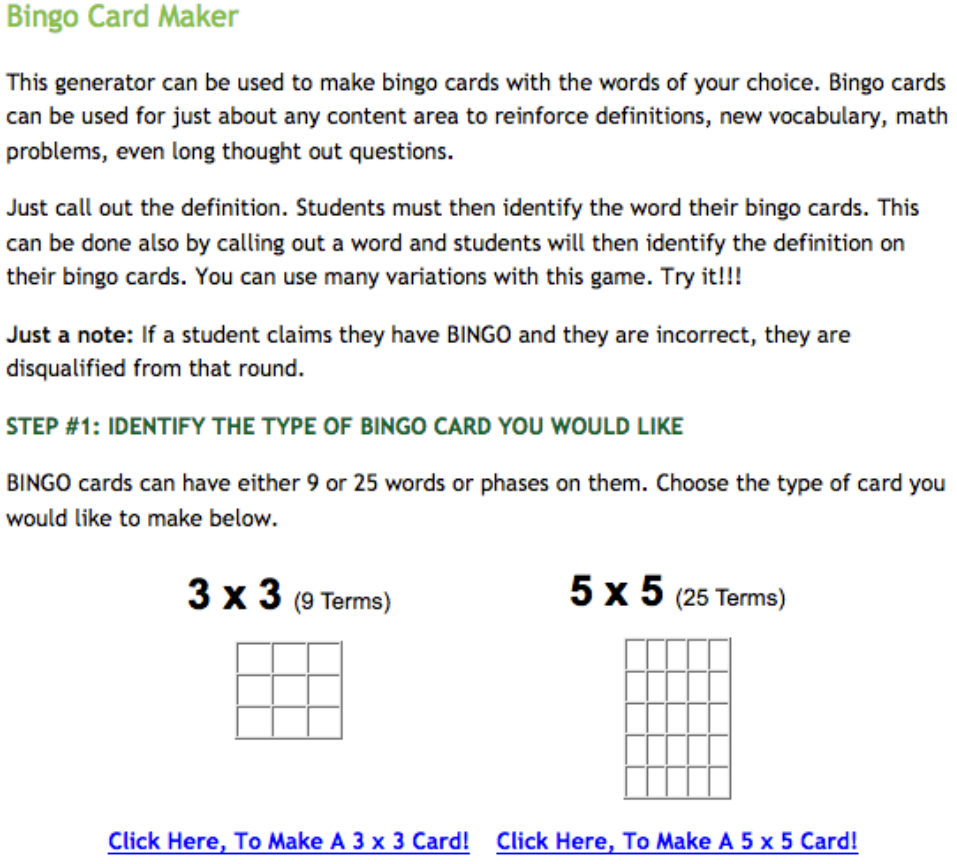



Figura 4.38 Plantilla de bingo de "Tools For Educators"

El generador de bingos de TeAchnology que es fácil y sencillo de utilizar.



| | | |
|---|---|---|
| La probabilidad del suceso seguro | La probabilidad de un suceso | La regla de Laplace |
| La probabilidad de la intersecciÃ³n de dos sucesos disjuntos | varÃa entre 0 y 1 | 0 |
| P(A)+P(Ac) = 1 | 1 | se utiliza para sucesos equiprobables |

Type in the 9 words that you would like to appear on the card below.

Word 1: La probabilidad del suceso seguro

Word 2: La probabilidad de un suceso

Word 3: La regla de Laplace

Word 4: probabilidad de la intersección de dos sucesos disjuntos

Word 5: varía entre 0 y 1

Word 6: 0

Word 7: P(A)+P(Ac) = 1

Word 8: 1

Word 9: se utiliza para sucesos equiprobables

FREE BINGO SPACE!

Figura 4.39 Plantilla de bingo de "Generador de bingos de TeAchnology"

Más específico aún es el Bingo Card Generator, que de forma trivial permite personalizar y editar los objetivos a poner en los cartones. Tan sencillo como escribir líneas (una por cada "casilla") y la herramienta se encargará del resto. También permite elegir entre algunas de las sencillas plantillas disponibles, todo de forma gratuitamente.

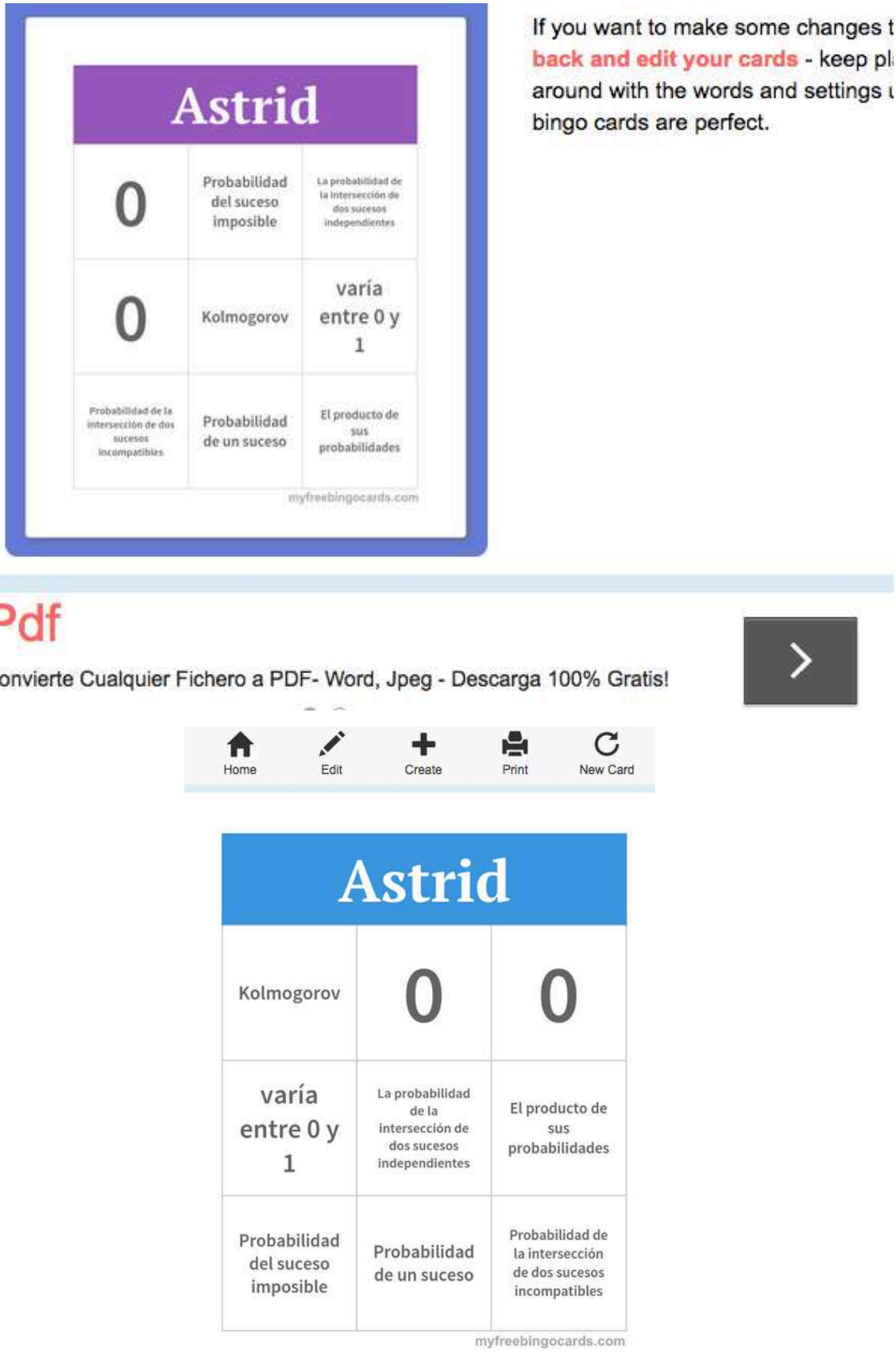



Figura 4.40 Plantilla de bingo de "Bingo Card Generator"

A un golpe de búsqueda encontrarás muchos otros recursos para poder crear tus

cartones de bingo educativo.

Una vez lo hayas llevado a cabo también puedes plantear recompensas para los que consigan línea, para los cartones al completo o incluso para los que, simplemente, consigan completar las casillas. Esto deberá ir al gusto de cada docente, siendo él el que decida cómo premiar el juego.

El uso de bingo en educación no es algo nuevo, ni mucho menos, y múltiples docentes hablan de los beneficios de su uso en el aula. Sea cual sea tu materia o la edad de tus chavales, éste es uno de esos recursos que van a más y que puedes probar en tu propia aula con una sencilla preparación.

No sólo en Matemáticas podemos utilizar el bingo sino también en cualquier otra asignatura o materia. Por ejemplo, en Química. Franco-Mariscal, Tomás-Serrano, Jara-Cano, Ortíz-Tudela (2010) han sustituido los cartones del bingo por tablas periódicas, mientras que la extracción de las bolas se ha simulado mediante una aplicación informática que genera una secuencia aleatoria de elementos químicos. El formato del cartón coincide con una tabla periódica convencional en la que están todos los elementos químicos, excepto los de transición interna. En ella se resaltan una serie de elementos, concretamente 16, que son sus opciones de juego. Cada estudiante tiene un cartón diferente y la posibilidad de ganar es la misma para cada jugador. Se han diseñado cartones con tres niveles de dificultad: Nivel 1 (sencillo). En las casillas del cartón de bingo aparecen los símbolos de los elementos. Este nivel no requiere grandes conocimientos previos del alumno sobre los nombres de los elementos; basta con relacionar el símbolo del elemento presentado en la pantalla con el del cartón; Nivel 2 (medio). En esta modalidad, en el cartón aparecen los nombres de los elementos en lugar de los símbolos químicos. Para poder jugar en este nivel se requiere que los alumnos sean capaces de relacionar el nombre de los elementos con su correspondiente símbolo químico; Nivel 3 (experto). En este nivel las casillas en las que se sitúan los elementos con los que se ha de jugar aparecen en blanco. Este nivel es mucho más complicado, ya que no requiere tan solo conocer el nombre del elemento y su asociación con el símbolo, sino que además es necesaria una noción mínima sobre el lugar que ocupan los elementos en la tabla. De otro modo no hay tiempo suficiente para revisar el resto de elementos, de forma que los jugadores han de ser capaces de asociar cada elemento con su periodo y grupo. En todos los niveles, las bolas se extraen con una aplicación informática que ha sido desarrollada por los estudiantes de 2.º de Bachillerato (18 años) en 2007. La experiencia se llevó a cabo durante el curso 2008-

2009 con 58 alumnos de 3.º de ESO, pertenecientes a tres grupos diferentes del IES Vega del Táder de Molina de Segura (Murcia, España).

### 4.3.8 MONEDAS

La moneda es una pieza de un material resistente, de peso y composición uniforme, normalmente de metal acuñado en forma de disco y con los distintivos elegidos por la autoridad emisora, que se emplea como medida de cambio por su valor legal o intrínseco y como unidad de cuenta. También se llama moneda a la divisa de curso legal de un Estado. Su nombre en lenguas romances proviene del latín “moneta”, debido a que la casa en donde se acuñaban en Roma estaba anexa al templo de Juno Moneta diosa de la Memoria, encontrándose esta actividad bajo su protección.

#### 4.3.8.1 HISTORIA

A raíz del trueque, siendo el intercambio de objetos o servicios por otros equivalentes, presentaba dificultades para las transacciones, por lo cual comenzaron a aparecer distintas formas de "mercancías-moneda" como unidad de cuenta. Estas mercancías como medio de pago tampoco eran prácticas, ya que muchas eran perecederas, y eran difíciles de acumular. Como solución se sustituyeron pronto por objetos o materiales realizados en metales preciosos. Estos metales preciosos tomaban muchas formas, por ejemplo ladrillos, aros, placas, polvo, navajas o cuchillos. Por razones prácticas y de uniformidad se adoptó la forma circular, en forma de discos de diferentes tamaños pero fácilmente transportables.

Ya en el año 1100 a. C. circulaban en China miniaturas de cuchillos de bronce, hachas y otras herramientas utilizadas para reemplazar a las herramientas verdaderas que servían de medio de cambio. En 1979 y 1980 fueron descubiertas algunas monedas del antiguo reino de Loulan, que al parecer datan del período Mesolítico.

Las primeras monedas acuñadas con carácter oficial fueron hechas en Lidia, un pueblo de Asia Menor, aproximadamente entre los años 680 y 560 a.C. Fue probablemente durante el reinado de Ardis de Lidia cuando los lidios empezaron a acuñar moneda, aunque algunos numismáticos han propuesto fechas anteriores o posteriores, como el reinado de Giges de Lidia o el de Creso "El Opulento". Estas acuñaciones llevan como símbolo heráldico un león representando a la Dinastía Mermnada a la cual pertenecían los reyes. Después de la experiencia de Lidia comenzaron a acuñarse monedas por orden de Darío de Persia, luego de la conquista de

Lidia, y posteriormente en Grecia. Más tarde, las monedas proliferaron rápidamente en todos los países desarrollados del mundo. Tanto los monarcas como los aristócratas, las ciudades y las instituciones empezaron a acuñar dinero con su sello identificativo para certificar la autenticidad del valor metálico de la moneda. Algunas de las primeras monedas tenían una composición muy estable, como es el caso del dracma emitido en Atenas en el siglo VI a.C., con un contenido en torno a los 65-67 gramos de plata fina, o como la redonda moneda china, "qian", de cobre, aparecida en el siglo IV y que se mantuvo como moneda oficial durante dos mil años. Sin embargo, las monedas siempre se limaban o recortaban para sacar el metal precioso que contenían por lo que las autoridades que las emitían estaban tentadas a rebajar la acuñación asegurándose beneficios a corto plazo al reducir el contenido de metales preciosos.

Una vez creadas, las monedas originaron un sistema monetario cuyas características han permanecido, en esencia, constantes durante milenios. Uno de los cambios que ha perdurado fue la introducción, en las monedas europeas del siglo XVII, de las ranuras en los bordes con el fin de evitar que se limasen.

El papel moneda fue introducido por primera vez en China, en torno al siglo IX, como dinero en efectivo intercambiable por certificados emitidos para el gobierno de la dinastía Tang por los bancos privados. Respaldado por la potente autoridad del Estado chino, este dinero conservaba su valor en todo el imperio, evitando así la necesidad de transportar la pesada plata. Convertido en monopolio del Estado bajo la dinastía Song, el papel moneda ha pervivido durante toda la historia china a pesar de las perturbaciones causadas por los cambios políticos y de que la emisión del papel moneda no estaba respaldada ni por plata ni por otras reservas. Apareció por primera vez en Occidente en el siglo XVI, cuando se empezaron a emitir pagarés por parte de los bancos para respaldar los depósitos monetarios de sus clientes. Estos medios de cambio proliferaron y las autoridades coloniales francesas de Canadá utilizaban cartas de juego firmadas por el gobernador como promesa de pago desde 1685, ya que el envío de dinero desde Francia era muy lento. Se fue haciendo popular a lo largo del siglo XVIII, pero seguía siendo dinero crediticio que se emitía para respaldar los depósitos de oro o plata. El dinero fiduciario, cuando surgió, era normalmente una medida de urgencia para tiempos de guerra, como los papiros americanos. Los bancos privados fueron sustituidos paulatinamente por bancos centrales como autoridades emisoras de papel moneda.

A finales del siglo XIX la caída del valor del oro acarreó la creación de un

patrón oro internacional en el que todas las monedas podían intercambiarse por oro y el valor del dinero estaba fijado por la paridad de la moneda con el oro. Casi todos los gobiernos suspendieron la convertibilidad de sus monedas durante la I Guerra Mundial, perdiéndose todo el interés por volver a introducir el patrón oro internacional tras la Gran Depresión. El Reino Unido abandonó el patrón oro en 1931 y la transformación de las monedas mundiales a dinero fiduciario con valores fijados totalmente por la demanda del mercado culminó con el abandono de la vinculación del dólar estadounidense en 1971.

#### 4.3.8.2 PARTES DE LA MONEDA

Anverso: Es la cara o faz que se considera principal en las monedas y medallas por llevar el busto o efigie del rey, persona, divisa nacional o alegoría, así como la fecha de acuñación.

Reverso: Es la cara secundaria donde se indica el valor monetario. Puede contener escenas sociales, históricas, religiosas, políticas, etc. Es de contenido más libre, al no contener información preestablecida, como el anverso.

Canto: Es el grosor de la pieza, normalmente trabajado geométricamente. También puede presentar leyendas.

Impronta: Son las leyendas y figuras de las dos caras de la moneda.

Leyenda: Es cada una de las inscripciones escritas de cada cara.

Tipos: Son los elementos figurativos de cada cara.

Marca: Es la letra o símbolo que indica la cruz de acuñación.

Campos: Son los espacios libres y superficies lisas.

Exergo: Es todo lo que queda por debajo del borde sobresaliente que aparece a veces, generalmente en el reverso, que suele contener leyendas relativas a la fecha de acuñación y otras.

Valor facial: Es el adjudicado nominalmente por la ceca o entidad emisora.

Grafila u orla: Es el adorno en relieve, generalmente de puntos o de línea, que tienen las monedas en su anverso o reverso, junto al listel.

Listel: Es el reborde o filete que presentan las monedas modernas, que rodea su circunferencia.

Firmas: Son las acreditaciones de quienes emiten la moneda, ya sean ensayadores, gobernadores o directores de bancos.

### 4.3.8.3 LA MONEDA COMO RECURSO DIDÁCTICO

Catalina Ponce Huertas (2009) realiza la siguiente experiencia para buscar una explicación a la probabilidad indefinible, dejando al alumnado lanzando una y otra vez una moneda sobre la mesa y le pide que vaya anotando sus resultados con la esperanza de hallar en las series de resultados una pauta predecible del comportamiento del Azar. Se le pide que anote el resultado de cien lanzamientos y que los anote en el cuaderno, por ejemplo:

CC++CC+++CC++++CCCCC

CC++CCCCCCC+++C+++++

C+C++++CC++++CCCCC++

C+++++CC++C+C+CCC+++

C+C+C++C+++C++++CCC+

Lo primero que el alumno o alumna debe observar es que hay, aproximadamente, tantas caras como cruces (46 caras y 54 cruces); este resultado parece concordar con la sensación de que es tan fácil que salgo cara como cruz en cada uno de los lanzamientos. Si en lugar de los cien lanzamientos consideramos tan sólo los cincuenta primeros el sentido de que el número de caras será "aproximadamente igual" al de cruces debe diferir poco, su diferencia debe estar próxima a cero después de cualquier serie de lanzamientos. Esta apreciación el alumnado la irá observando a medida que aumente el número de lanzamientos. Aún así, es interesante hacerle ver al alumnado que es erróneo pensar en que el comportamiento al azar de la moneda supone una especie de equilibrio, de modo que la diferencia entre el número de caras y el de cruces oscila alrededor de cero, con frecuentes empates; más bien es todo lo contrario los empates son infrecuentes y durante largos periodos uno de los resultados será mucho más frecuente que otro, pero si se interpretase la aproximación entre el número de caras y de cruces en términos relativos, si que estaríamos de acuerdo con la experiencia, basándose esta en el concepto frecuentista de la Probabilidad.

Cuando una moneda se lanza numerosas veces, la frecuencia relativa del número de caras se aproxima a un valor ideal que denominaremos probabilidad de que aparezca "cara", llegando así a un concepto de probabilidad llamado frecuentista, ya que es una idealización de las frecuencias observadas.

La práctica nos demuestra que, si el número de pruebas necesarias para calcular la frecuencia relativa se realizan todas ellas en igualdad de condiciones, y además, el número de experimentos realizados es suficientemente grande, la frecuencia relativa

tiende a la estabilidad, es decir, tiende a aproximarse a un número fijo cuando se aumenta el número de veces que se ha repetido el experimento aleatorio considerado, lo cual significa que en distintas pruebas la frecuencia relativa varía poco oscilando alrededor de un número constante.

A la hora de asignar la probabilidad a los sucesos ligados a un experimento aleatorio, es crucial entender que la frecuencia con que se espera que se presente cada uno de ellos, depende de la evidencia de que se disponga acerca del experimento. Por ejemplo, si se lanzan dos monedas equilibradas y se anotan los resultados de las caras superiores, evidentemente hay cuatro casos posibles.

CC CX XC XX (X indica cruz)

cuyas probabilidades deben ser iguales, puesto que con monedas equilibradas es igual de fácil obtener una cara que una cruz. De manera que:

- probabilidad de obtener dos caras = ¼
- probabilidad de obtener dos cruces = ¼
- probabilidad de obtener una cara y una cruz = ½

Ortiz, Mohamed y Contreras (2011) plantearon a una muestra de 167 profesores en formación de Educación Primaria de la Universidad de Granada dos problemas sobre el enfoque frecuencial de la Probabilidad, tomados de Green (1983b), uno de ellos basado en monedas mientras que el otro trabaja con chinchetas. Nosotros nos centraremos en el problema de las monedas, debido a que es el recurso que estamos analizando.

Problema 1. Una moneda equilibrada se lanza al aire cinco veces y sale CARA las cinco veces. De las siguientes frases, señala la que consideres correcta:

(A) La próxima vez es más probable que otra vez salga CARA…

(B) La próxima vez es más probable que salga CRUZ…

(C) La próxima vez es igual de probable que salga CARA o CRUZ…

(D) No lo sé…

¿Por qué? (Green, 1983b)

En este problema se trata de evaluar la percepción de la independencia en ensayos repetidos en las mismas condiciones y que han sido descritos en las investigaciones de Truran y Truran (1997). En él se preguntaba cuál sería el resultado más probable la próxima vez en el experimento de lanzamiento de una moneda si los cinco primeros lanzamientos habían salido cinco caras. Se exponen los resultados de los cinco lanzamientos anteriores para ver si influye en la comparación. Es posible detectar

efectos de recencia negativa o positiva, sesgos que han sido descritos en las investigaciones a partir del trabajo de Piaget e Inhelder (1951) y que posteriormente han sido atribuidos a la heurística de la representatividad por Khaneman, Slovic y Tversky (1982).

Entre los argumentos utilizados por los profesores en formación, la justificación mayoritaria fue la correcta "*puede salir cualquiera de los dos resultados*" (77,9%), distinguiendo entre los que aplican la regla de Laplace (53,8%) y los que han respondido sin hacer uso de la Probabilidad (24,1%). Entre los argumentos incorrectos, hubo un importante porcentaje de profesores en formación que consideró que "*se debe al Azar*" (9,5%), seguido de los que opinaron que es más difícil que vuelva a salir cara (5,7%).

Gea, M. M., Fernandes, J. A., Batanero, C., Benavides, A. J. (2016) pretenden enfrentar al alumno de quinto curso de Educación Primaria a una experiencia aleatoria sencilla, como es el lanzamiento de una moneda, con la que puede desarrollar su razonamiento probabilístico, a la vez que evaluar su intuición sobre el Azar mediante diversas preguntas guiadas que conforman un cuestionario diseñado para la propia experiencia. La enseñanza también permitirá desarrollar estas intuiciones en los estudiantes, ya que se hace uso de conceptos previos (variable estadística, distribución unidimensional, resúmenes estadísticos, etc.) y representaciones gráficas (diagrama de puntos y de barras) que ellos mismos utilizan para analizar los resultados y mostrar la adecuación de sus respuestas.

El primer paso en el diseño fue fundamentar el significado de referencia del Azar, basándose en una tarea propuesta por Green (1991), reduciendo a diez los lanzamientos de la moneda para adaptar el tiempo de enseñanza a dos sesiones de 50 minutos cada una. En la primera sesión, los estudiantes predicen los resultados, contestan a preguntas sobre la certeza de obtener un resultado concreto y proponen un patrón de resultados aleatorios del experimento. En la segunda sesión, se lanza realmente la moneda diez veces y se pide al alumno interpretar los resultados obtenidos, así como relacionarlos con los propuestos en la sesión anterior. En ambas sesiones los alumnos respondieron individualmente a las preguntas del cuestionario y posteriormente ponían en común sus respuestas.

Los resultados del estudio se han obtenido de las respuestas de 24 estudiantes (17 niños y 7 niñas) de un colegio de Granada, con una formación pobre en Estadística y Probabilidad según la profesora, permitiendo a esta medir la correspondencia del

significado personal que los estudiantes poseen sobre el azar con el significado institucional pretendido (Godino, Batanero, Font, 2007) e informan de dificultades y errores que muestran los estudiantes en el desempeño de este concepto, como por ejemplo, la heurística del resultado próximo o falacia del jugador (Savard, 2014) en la que el estudiante considera que el resultado de la siguiente experiencia cambia la tendencia de los resultados obtenidos. Por otra parte, se describe una secuencia de enseñanza que puede ser implementada en cualquier nivel inicial de introducción al Azar y la Probabilidad. En este sentido, la revisión de investigaciones que se presenta en esta experiencia también ayudará al profesor en la comprensión del razonamiento probabilístico de sus estudiantes.

Carmen Batanero (2009) pidió a algunos niños lanzar una moneda 150 veces. Algunos lo hicieron correctamente. Otros hicieron trampas. Anotaron con la letra C la aparición de una cara y con + una cruz. Estos son los resultados de Clara y Luisa:

Clara:

*C+C+ +CC+ +CC+C+C+ +C+ +C+CCC+ + +CC*
*C+ + C++C+C+C+ +CC+CCC+C+C+CC+ + +C*
*C++C+C+ +C C+C++CC + C++CC+CC+ C+++*
*C++CC++C++C+C+CC+C++CC+C+C++CCC*
*+CC+ +C+C+ +CC+ + +C+ + +C+C++CCC++*

Luisa:

+CC+++C++++C+CC+++CCCC+++CC+CC
C+++C++++++C+C+C+C++++CCCCCC+C
CC+C+CC+CCCCC+CCC++CCC+C+CCCCC
CCCC++C+CCCCCCC+++++CCCC++C+C+
CC+CC+CC++++++C+CC ++CCC++CCC

Mostramos las frecuencias de caras y cruces obtenidas para Clara y Luisa. En principio, parece que Luisa se desvía más de los esperado en una secuencia aleatoria. En la tabla 4.17 se muestran las frecuencias de caras y cruces en las secuencias.

| | C | + |
|---|---|---|
| Clara | 72 | 78 |
| Luisa | 67 | 83 |
| Teórica | 75 | 75 |

Tabla 4.17 Frecuencias de caras y cruces en las secuencias

En lugar de contar en las secuencias los resultados del experimento simple consistente en lanzar una moneda, podríamos considerar que las niñas lanzan las monedas de 2 en 2. Hay cuatro resultados equiprobables al lanzar una moneda, por lo

que, redondeando un poco, podemos esperar que aparezcan aproximadamente 18 veces cada uno de los posibles resultados. En la tabla 4.18 se muestran los resultados obtenidos para Clara y Luisa.

| | CC | C+ | +C | ++ |
|---|---|---|---|---|
| Clara | 12 | 30 | 18 | 15 |
| Luisa | 25 | 21 | 12 | 17 |
| Teórica | 18 | 18 | 18 | 18 |

Tabla 4.18 Frecuencias de los diferentes resultados al lanzar las monedas 2 a 2

En este caso parece que es Clara la que más se aparta de lo esperado.

El ejemplo analizado nos muestra, por un lado, la dificultad de aplicar la idea de aleatoriedad en una situación práctica, por lo engañoso de nuestras intuiciones. Por otro, el ejemplo nos muestra que la aleatoriedad no admite una definición simple y ni siquiera puede describirse por un único modelo. En la situación propuesta, se necesita varios para decidir sobre la aleatoriedad de las dos secuencias.

El ejemplo también muestra con claridad la diferencia entre modelo y realidad. De hecho, no se espera que la sucesión de Clara o Luisa sean "exactamente iguales al modelo" y admitimos como "razonables" unas desviaciones respecto a lo esperado en el modelo, siempre que sean pequeñas.

La página del Ministerio de Educación, cultura y deporte también propone dos tareas con monedas para explicar la aplicación de la Probabilidad, mostrando el resultado de uno de los problemas (tarea 1) a través de una explicación audiovisual, mientras que el otro (tarea 2) lo expresa por medio del diagrama de árbol.

Tarea 1




Figura 4.41. Enunciado de la tarea 1

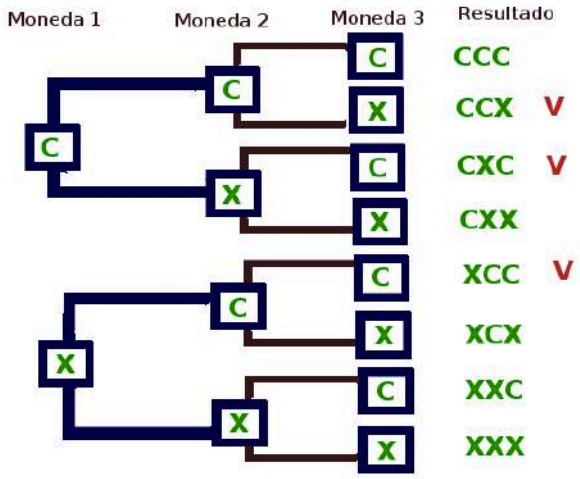
Tarea 2

## Aprende a hacerlo

En esta ocasión lanzaremos tres monedas al aire y calcularemos cuántas formas posibles existen de obtener dos caras y una cruz. Atrévete a hacer el cálculo antes de ver la solución.



Observa la siguiente imagen que representa el árbol de lanzamiento de las tres monedas. **C** representa cara y **X** representa cruz:




*Árbol de lanzamientos*. Imagen de Mariano Real Pérez en Flickr
Licencia Creative Commons by-nc-sa

Según el árbol anterior, podemos observar que existen 3 formas distintas de obtener 2 caras y 1 cruz. Además, existen 8 posibles resultados al lanzar las tres monedas. Observamos que los resultados distintos son:

- 0 caras y 3 cruces
- 1 cara y 2 cruces
- 2 caras y 1 cruz
- 3 caras y 0 cruces

Pero todos los resultados no tienen las mismas posibilidades de salir. Mientras 0 caras y 3 cruces solamente se puede obtener de una forma (ver el árbol), 2 caras y 1 cruz se puede obtener de tres formas distintas.

Figura 4.42 Enunciado de la tarea 2

# CAPÍTULO 5

# CONSTRUCCIÓN DEL CUESTIONARIO

5.1 Introducción
5.2 El estudio de evaluación de Green
  5.2.1 Análisis conceptual del cuestionario tomado de las investigaciones de Green
5.3 Evaluación de intuiciones probabilísticas por Fischbein y Gazit
  5.3.1 Análisis conceptual del cuestionario tomado de las investigaciones de Fischbein y Gazit
5.4 Cuestionario sobre Azar y Probabilidad

## 5.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se describe la elaboración del cuestionario que nos servirá para evaluar el conocimiento matemático de los profesores y futuros docentes de la Educación Básica. Para alcanzar este fin, se describen las investigaciones de los autores en los que hemos elegido los distintos ítems, tales como: (a) el trabajo de Green, (b) el trabajo de Fischbein y Gazit. A continuación, se profundizan en los ítems elegidos para así justificar la elección de los mismos en la construcción del cuestionario.

Las investigaciones descritas en el Capítulo 2 se basan en experimentos o entrevistas. Otros investigadores desarrollaron cuestionarios de evaluación que pudiesen ser respondidos en forma escrita para evaluar el razonamiento probabilístico en muestras más amplias, tratando de generalizar los resultados de las investigaciones previas, realizadas usualmente con grupos pequeños.

Aunque la teoría de desarrollo en etapas de Piaget ha sido interpretada con frecuencia en forma restrictiva, tanto Piaget e Inhelder (1951) como Fischbein (1975) indican como componentes básicos del razonamiento probabilístico la capacidad combinatoria y el razonamiento proporcional, que no pueden reducirse una a la otra. Green (1982; 1983a y 1983b) estuvo interesado en establecer niveles de razonamiento probabilístico y la edad media de acceso a los mismos, construyendo para ello un cuestionario de una amplia validez de contenido, tomando datos de una gran muestra de alumnos elegidos en forma representativa y aplicando la técnica del escalograma de Guttman. Sin embargo, muchos de los ítems empleados en su test hubieron de ser desechados para llegar a definir una escala que finalmente quedó constituida por ítems demasiado homogéneos, perdiendo parte de la validez de contenido del test completo. Por otro lado, Fischbein y Gazit (1984) muestran la existencia de factores culturales que afectan a las respuestas intuitivas de los alumnos.

Cañizares (1997) comparó los dos instrumentos de evaluación utilizados por Green (1983a) y por Fischbein y Gazit (1984), en sus características estructurales. El análisis de contenido de cada pregunta en ambos instrumentos mostró que el test de Fischbein y Gazit contempla el peso de creencias arraigadas y factores culturales, que corresponderían tanto a una aproximación intuitiva como a una subjetiva, incluyendo también contextos naturalistas y de loterías, escasamente representados en el de Green. Este contiene una mayor variedad de conceptos probabilísticos; Fischbein y Gazit se centran en la comparación de probabilidades.

## 5.2 EL ESTUDIO DE EVALUACIÓN DE GREEN

Green (1982, 1983a y 1983b) llevó a cabo su trabajo en el que su principal objetivo fue investigar qué conceptos (desarrollo cognitivo) o intuiciones aleatorias están presentes en la mente de los niños de edad comprendida entre 11 y 16 años.

Para llevar a cabo este proyecto fue necesario diseñar un test especial de conceptos probabilísticos para administrarlo a una muestra de 2930 estudiantes ingleses. El autor no realiza una comparación de los diversos significados de la Probabilidad; la mayoría de sus ítems evalúan el significado clásico de la Probabilidad, aunque incluye alguna pregunta sobre el significado subjetivo o frecuencial.

La mayoría de los ítems son de elección múltiple y en muchos de ellos se pide a los estudiantes que escriban las razones de sus elecciones. El test constó de 26 ítems, divididos en subítems, de los que se obtenía una puntuación total de 50 puntos. Los subítems fueron clasificados en tres categorías, lo que permitió asignar a cada uno, además de la puntuación total del test (comprendida entre 0 y 50), una puntuación verbal (entre 0 y 15; 30% de la puntuación total), que estudia el uso de lenguaje específico y su aplicación en situaciones de incertidumbre; una puntuación en combinatoria (entre 0 y 6, 12% de la puntuación) y una puntuación probabilística (entre 0 y 29, 58% de la puntuación) que estudia el nivel de desarrollo del razonamiento probabilístico, según la teoría de Piaget. Este cuestionario se divide en dos tipos de ítems: unos evalúan las intuiciones de los sujetos sobre la aleatoriedad: secuencias de resultados aleatorios obtenidas mediante un modelo de proceso de Bernoulli, procesos de Poisson en el plano y convergencia estocástica. Otros ítems plantean problemas de probabilidades, evaluando el sesgo de equiprobabilidad, aplicación del principio de indiferencia, heurística de representatividad, comparación de probabilidades y probabilidad compuesta. El contenido matemático de esta parte es comparación de probabilidades en experimentos simples, probabilidad geométrica, independencia, esperanza matemática, juego equitativo, razonamiento combinatorio y probabilidad condicionada.

Con el fin de determinar las estrategias empleadas por niños y niñas de distintas edades, así como la utilización o no del razonamiento proporcional, Green asigna a cada alumno un nivel de conceptos, agrupando para ello algunas cuestiones del test en subgrupos que representan diferentes niveles. Para encontrarse en un nivel determinado, es preciso haber superado todos los inferiores, así como la puntuación mínima para acceder al nivel dado. Los subgrupos y las puntuaciones mínimas para acceder a ellos

fueron optimizados por medio del escalograma de Guttman. El resultado fue una escala que comprendía tres niveles (además del nivel 0, que indica fracaso absoluto).

Para estudiar la relación entre estos niveles y las etapas piagetianas, Green tiene en cuenta el trabajo de Piaget e Inhelder (1951) y las respuestas dadas por los sujetos a los ítems de comparación de probabilidades, por lo que se podría afirmar una equivalencia entre los niveles de conceptos probabilísticos de Green y las etapas del desarrollo de la idea de azar que propone Piaget.

Además aplicó un test de razonamiento general, registró la calificación del profesor de Matemáticas durante ese curso y entrevistó a algunos chicos acerca de sus respuestas. Este autor observa que el patrón de respuesta es similar para estudiantes entre 11 y 13 años, con un rendimiento inferior al de los de 14 a 16 años; y que los niños tienen un mayor nivel probabilístico que las niñas.

Los ítems de combinatoria fueron difíciles. Los alumnos tienen habilidad verbal pobre para describir de forma correcta situaciones probabilísticas; no desarrollan de manera espontánea significados comunes para términos que indican distintos grados de probabilidad. También es pobre la aplicación de los diagramas de árbol y del principio de multiplicación de probabilidades. Se les dificultó realizar inferencias desde un muestreo, exhibiendo una tendencia al sesgo de equiprobabilidad, sin diferenciar las características de la situación aleatoria. Asimismo se vieron dificultades con tareas en las que la simetría era un factor fundamental para definir el espacio muestral. Los estudiantes resolvieron mejor preguntas de tipo combinatorio que de proporciones.

El autor observó diversas estrategias de resolución según el contexto de la tarea: en la comparación de probabilidades en urnas la elección se argumentó con (a) mayor número total de casos, (b) mayor número de casos favorables, (c) más casos favorables que desfavorables, (d) mayor proporción entre casos favorables y desfavorables. En situaciones en ruletas se argumentó con (a) concepto de área, (b) comparación numérica, (c) comparación de razones, (d) características físicas de la aguja, (e) continuidad, (f) separación.

A la vista de sus descubrimientos, Green afirma que sólo a partir de un extenso programa basado en actividades de clase se podrían eliminar los errores de pensamiento que muestran, tanto los alumnos estudiados, como los adultos, en este campo. Es necesaria una actividad práctica desde corta edad a partir de la cual construir experiencias adecuadas, a su nivel cognitivo, para el alumno.

### 5.2.1 ANÁLISIS CONCEPTUAL DEL CUESTIONARIO TOMADO DE LAS INVESTIGACIONES DE GREEN

El cuestionario tomado de las investigaciones de Green (Green, 1982, 1983a y 1983b), consta de 26 ítems por los cuales puede obtenerse un máximo de 50 puntos. Esta puntuación es descompuesta por Green en tres componentes diferenciados:

a) *Puntuación verbal*: Expresa la capacidad de comprensión del niño del lenguaje de probabilidad y se obtiene a partir de los ítems 7, 13, 14, 15 y 16, por los que puede conseguirse un total de 15 puntos.
b) *Puntuación combinatoria*: Evalúa la capacidad de razonamiento combinatorio a partir de los ítems 9, 10 y 26 por los cuales puede obtenerse hasta un total de 6 puntos.
c) *Puntuación probabilística:* Conformada a partir del resto de los ítems, esta parte del cuestionario otorga hasta 26 puntos y puede dividirse a su vez en dos tipos de ítems: Los ítems 11, 12 y 20 evalúan las intuiciones de los sujetos sobre la aleatoriedad. Más precisamente, el ítem 20 evalúa la intuición de los alumnos sobre las secuencias de resultados aleatorios obtenidas mediante un modelo de proceso de Bernoulli, (Serrano et al., 1991). Los ítems 11 y 12 evalúan las intuiciones de los alumnos sobre los procesos de Poisson en el plano y la convergencia estocástica. Estos tres ítems no han sido tenidos en cuenta por Green para la determinación del nivel probabilístico, puesto que sus puntuaciones no correlacionan con las obtenidas en el resto de la prueba. Los demás ítems plantean problemas de comparación de probabilidades de tipo diverso.

Puesto que estamos interesados por la problemática del conocimiento del Azar y la Probabilidad, a continuación analizamos cada uno de los ítems, utilizados en el cuestionario del test de Green referidos a este punto. Sobre cada uno de ellos se analiza el contenido matemático, contexto y otros aspectos que pueden influir en las respuestas de los participantes. Las variables que vamos a considerar son las siguientes:

- *Conocimiento evaluado*: Conceptos o procedimientos que precisa el alumno para resolver el problema, ya que el cuestionario evalúa una gama muy amplia de contenidos: comparación y asignación de probabilidades simples y compuestas; probabilidad condicional; esperanza; juego equitativo, muestreo, etc.
- *Contexto*: Juega un papel importante en las situaciones probabilísticas. Un contexto de juego de azar moviliza más fácilmente en el alumno la idea de

experimento aleatorio que un contexto físico. Por otro lado, ciertas investigaciones han mostrado que los alumnos no siempre consideran equivalentes dos generadores aleatorios isomorfos desde un punto de vista probabilístico (Truran, 1994a y 1994b; Fischbein el al., 1991) o que no usan las mismas estrategias en dos problemas equivalentes al variar el contexto (Maury, 1984).

- *Representación gráfica:* En algunos casos, la presencia de una representación gráfica puede tener influencia en las respuestas de los participantes.
- *Tipo de respuesta:* La respuesta pedida al participante puede ser de elección múltiple o abierta. En algunos casos pueden presentarse ambos tipos.
- *Espacio muestral*: Número de espacios muestrales considerados; número de elementos en cada uno y si es posible o no admitir el principio de indiferencia para la asignación de probabilidades a los sucesos.
- *Posible sesgo:* Algunos ítems están diseñados para estudiar la incidencia de determinados sesgos descritos en la literatura. En ocasiones se incluyen distractores específicos en la redacción del ítem con este fin.

**La escala de nivel probabilístico**

Como hemos indicado, además de poder obtener puntuaciones combinatorias, verbales y probabilísticas a partir del test de Green, este autor usó parte de los ítems para situar a los niños en un nivel de razonamiento probabilístico, de acuerdo con las teorías de Piaget. La escala para establecer el nivel probabilístico ha sido elaborada como se muestra en la tabla 5.1.

| Nivel | Items en el nivel | Criterio para superar |
|---|---|---|
| 0 | | Fracaso en el nivel 1 |
| 1 | 3, 4, 5, 26a | Responder correctamente a 2 de los 4 ítems |
| 2 | 2, 6b(resp.), 6b(razonamiento), 6e(resp.), 6e(razonamiento), 6d(resp.), 9,10,18, 19(resp.), 19(razonamiento) | Responder correctamente a 7 de los 11 ítems |
| 3 | 6d(razonamiento), 6e(resp.) | Responder correctamente a los 3 ítems |

Tabla 5.1 Criterios de definición del nivel probabilístico de Green

Los contenidos cubiertos incluyen comparación de probabilidades de sucesos simples en experimentos simples, caso de equiprobabilidad y no equiprobabilidad;

probabilidad geométrica, independencia, esperanza matemática, razonamiento combinatorio, razonamiento proporcional y probabilidad condicional.

Los sesgos evaluados se refieren al sesgo de equiprobabilidad (ítems 2, 3, 18, 19), aplicación correcta del principio de indiferencia (ítem 4, 19), representatividad (ítem 5), estrategias de razonamiento proporcional (ítem 6), combinatorio (ítems 10 y 26).

Se han dejado fuera de la escala los ítems siguientes, que cubren un amplio espectro de ideas estocásticas fundamentales, contextos y posibles sesgos de razonamiento:

Ítem 1 (evaluación de creencia en factores causales);

Ítems 7, 12, 13, 14, 15, 16 (comprensión verbal);

Ítem 8 (probabilidades binomiales);

Ítems 11, 12, 29 (convergencia estocástica; percepción de la aleatoriedad);

Ítem 17 (comparación de probabilidades; efecto de la disposición física en contexto de trompos);

Ítems 21, 22 (5 apartados) (experimentos compuestos en contexto de canales; probabilidad del suceso simple y compuesto en experimentos compuestos; regla de la suma; distractores subjetivos);

Ítem 23 (probabilidad frecuencial en contexto de ruletas; no puede aplicarse la regla de Laplace);

Ítem 24 (variabilidad del muestreo; heurística de la representatividad);

Ítem 25 (muestreo; estimación).

En adición a estas limitaciones, Truran (1994c) realiza un análisis de este instrumento, indicando que las situaciones contempladas en la escala se refieren siempre a espacios muestrales finitos y con un pequeño número de elementos. Excepto el ítem 9, los sucesos elementales son equiprobables; y el alumno conoce la estructura del espacio muestral de antemano. La mayor parte de las preguntas se refieren a la comparación de probabilidades simples y sólo una sobre el concepto de juego equitativo. No hay en la escala situaciones de predicción de resultados o generación de resultados aleatorios.

## Ítems elegidos para el cuestionario

**Ítem 1:** Una ficha redonda es roja por una cara y verde por la otra. Se sostiene con la cara roja hacia arriba y se lanza al aire. Da vueltas en el aire y después cae al suelo. ¿Qué cara tiene más posibilidades de salir? ¿O, piensas que no hay ninguna diferencia entre las dos?. Señala la respuesta correcta:

(A) La cara roja tiene más posibilidades ___

(B) La cara verde tiene más posibilidades ___

(C) No hay ninguna diferencia ___

(D) No lo sé ___

Conocimiento evaluado: Se trata de comparar las probabilidades de los sucesos en un experimento simple con dos sucesos elementales y la aplicación por el alumno del principio de indiferencia.

Contexto: Fichas de dos colores (monedas). Sólo un experimento consistente en el lanzamiento de la moneda.

Representación gráfica: No hay.

Tipo de respuesta: Elección múltiple.

Espacio muestral: E ={C, X}, caso de sucesos simples equiprobables por razón de simetría física.

Posible sesgo: Búsqueda de relaciones causales. La elección de los distractores A ó B puede suponer la influencia de una situación inicial en la predicción del resultado del experimento o la preferencia subjetiva por uno de los dos colores.

**Ítem 2:** Una clase de Matemáticas tiene 13 niños y 16 niñas. Cada nombre de los alumnos se escribe sobre un trozo de papel. Todos los trozos se ponen en un sombrero. El profesor saca uno sin mirar. Señala la frase correcta:

(A) Es más probable que el nombre sea de un niño que de una niña ___

(B) Es más probable que el nombre sea de una niña que de un niño ___

(C) Es igual de probable que sea un niño que una niña ___

(D) No lo sé ___

Conocimiento evaluado: Se pide comparar las probabilidades de los sucesos elementales en un experimento aleatorio simple con dos resultados no equiprobables y la discriminación, por parte del alumno, entre sucesos equiprobables y no equiprobables.

Contexto*:* Situación de muestreo usando papeles con nombre de niño/niña (13 niños/16 niñas), realizando una extracción al Azar.

Representación gráfica: No hay.

Tipo de respuesta: Elección múltiple.

Espacio muestral: E ={niño, niña}. Se precisa comparar dos sucesos simples que no son equiprobables por razón de la composición de la urna.

Posible sesgo: Generalización incorrecta de la regla de Laplace, mostrando el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre y Durand, 1988). Para contestar correctamente no es preciso el razonamiento proporcional, basta con comparar cantidades absolutas. La respuesta errónea también podría indicar que el alumno considera un espacio muestral diferente, cuyos elementos serían cada uno de los alumnos de la clase (29 sucesos elementales equiprobables) y que interpreta la pregunta como obtener la probabilidad que tiene cada uno de los niños y niñas de la clase.

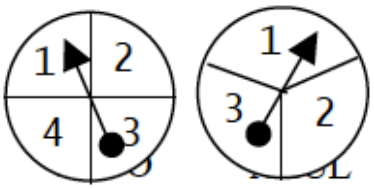
**Ítem 3:** La figura muestra dos discos (ruletas) que tienen agujas que una vez giradas se detienen y apuntan a un número. ¿Con qué disco es más fácil obtener un 3? Señala la respuesta correcta:

(A) Es más fácil obtener 3 en el disco rojo ___

(B) Es más fácil obtener 3 en el disco azul ___

(C) Los dos discos dan la misma posibilidad de obtener 3 ___

(D) No lo sé ___




ROJO AZUL

¿Por qué eliges esa respuesta?

.....

Conocimiento evaluado: Se pide comparar la probabilidad de un mismo suceso en dos experimentos aleatorios diferentes. Cada uno de los experimentos consta de un número finito de sucesos equiprobables, aunque el número de sucesos no coincide en los dos experimentos.

Contexto: Ruletas seccionadas con agujas giratorias, divididas en distinto número de sectores de igual área. Es un contexto continuo en el que la probabilidad de los sucesos se determina mediante la relación del área de la parte al área total. Sin embargo, también puede aplicarse la regla de Laplace porque las áreas en que están divididas cada una de las ruletas son iguales.

Representación gráfica: Se representan gráficamente las dos ruletas.

Tipo de respuesta: Elección múltiple con justificación de la respuesta.

Espacio muestral: Dos espacios muestrales: E ={1, 2, 3, 4} y E'={1, 2, 3}. Dos funciones de probabilidad: P1: E [0,1] y P2:E' [0,1]. Sucesos equiprobables por razón de simetría física: igual área ocupada por cada sector. El alumno ha de elegir el espacio probabilístico más conveniente para obtener el suceso dado.

Posible sesgo: El problema no se puede resolver correctamente sólo comparando cantidades absolutas, por lo que puede servir para detectar si el alumno hace este tipo de

comparación. Al ser un contexto continuo (en dos dimensiones) hay que comparar las proporciones de áreas ocupadas por cada color o bien aplicar la proporcionalidad. Al número de sectores favorables y posibles de cada ruleta.

**Ítem 5:**.Una moneda se lanza al aire cinco veces y sale CARA las cinco veces. Señala la frase que consideres correcta:

(A) La próxima vez es más probable que otra vez salga CARA ___
(B) La próxima vez es más probable que salga CRUZ ___
(C) La próxima vez es igual de probable que salga CARA o CRUZ ___
(D) No lo sé ___

Conocimiento evaluado: Evalúa la percepción de la independencia de ensayos repetidos en las mismas condiciones.

Contexto: Lanzamiento de monedas. Se indica que se han efectuado varios lanzamientos y el resultado obtenido en ellos.

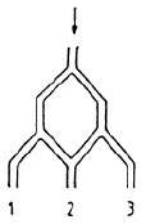
Representación gráfica: No hay.

Tipo de respuesta: Elección múltiple.

Espacio muestral: Es finito, E ={C, X}. Consta de dos sucesos simples equiprobables por razón de simetría física.

Posible sesgo: Se exponen los resultados de los cinco lanzamientos anteriores para ver si influye en la comparación.

**Ítem 21 (d):** Ahora haz lo mismo para este conjunto de canales:




(A) Por cada canal pasará aproximadamente el mismo número de bolas ___
(B) Por 2 pasarán aproximadamente el doble de bolas que por 1 ó 3 ___
(C) Aproximadamente la mitad pasarán por 1 y la mitad por 3 ___
(D) Unas pocas pasarán por 1, casi todas por 2 unas pocas por 3 ___
(E) Ninguna de éstas ___

Conocimiento evaluado: Comparación de probabilidades de sucesos simples y compuestos en experimentos compuestos. Aplicación de la regla de la suma de probabilidades.

Contexto: Canales bifurcados por donde se dejan caer bolas. Contexto discreto con carácter frecuencial.

Representación gráfica: El dibujo del canal.

Tipo de respuesta: Elección múltiple.

Espacio muestral: Tres sucesos simples no equiprobables: E={1, 2, 3} y la función de probabilidad P:E [0,1], con P(1)=P(3)=1/4 y P(2)=1/2.

Posible sesgo: La simetría geométrica del dibujo puede provocar en algunos alumnos una respuesta de equiprobabilidad. Para calcular la probabilidad del suceso compuesto, los alumnos deben aplicar la regla de la suma.

Aparecen la palabras "mitad" y "doble", por lo que, aunque no tiene que haber cálculo de probabilidades, sí se espera intuición de proporción.

## 5.3 EVALUACIÓN DE INTUICIONES PROBABILÍSTICAS POR FISCHBEIN Y GAZIT

Para el presente trabajo, es de especial relevancia la citada investigación de Fischbein y Gazit (1984), interesados en la influencia que la enseñanza de la Probabilidad puede tener indirectamente en los juicios probabilísticos intuitivos. El estudio tuvo por objeto evaluar el efecto de un curso de Probabilidad, dirigido a alumnos de 10 a 13 años, en algunos errores intuitivos probabilísticos típicos.

Para los autores sólo es posible desarrollar nuevas aptitudes intuitivas si el alumno se involucra personalmente en una actividad práctica que le proporcione la experiencia necesaria. Así, el programa de enseñanza, en conjunto, presentaba a los niños situaciones que les ofrecían la oportunidad de resolver actividades calculando probabilidades y prediciendo resultados en situaciones de incertidumbre. Se experimentaba con dados, monedas y extracciones de bolas en urnas para observar, recopilar y resumir diferentes conjuntos de resultados aleatorios, en lugar de calcular probabilidades u observar frecuencias relativas de forma teórica.

Se diseñaron 12 lecciones con esta metodología, que incluían el concepto de suceso seguro, posible e imposible; sucesos en un experimento aleatorio; posibilidades; probabilidad y frecuencia relativa, y la relación entre ellos. Se trabajó el recuento de resultados y el cálculo de probabilidades en sucesos simples y compuestos. El programa de enseñanza fue impartido a un total de 285 alumnos, utilizándose grupos paralelos de control (en total 305 alumnos en las clases de control).

Los instrumentos de evaluación fueron dos cuestionarios. El primero sólo fue administrado en las clases experimentales, y estaba diseñado para evaluar hasta qué punto los alumnos sometidos al programa de enseñanza, habían asimilado los conceptos enseñados, y eran capaces de usarlos. El segundo cuestionario no requería conocimientos especiales sobre probabilidad, y les fue administrado a todos los alumnos

(tanto a los de las clases experimentales como a los de las clases de control). Estaba diseñado para valorar el efecto indirecto de la instrucción sobre los errores intuitivos de los niños.

Este segundo cuestionario no requiere haber recibido instrucción alguna en Probabilidad, por lo que evalúa las concepciones intuitivas de los estudiantes previas y posteriores a cualquier programa de enseñanza. Consta de 8 ítems, de los cuales cuatro evalúan las estrategias de razonamiento erróneas utilizadas por los alumnos en problemas de elección de urnas, y si emplean o no el razonamiento proporcional. El resto de ítems tratan las intuiciones que los alumnos tienen sobre el suceso seguro y falacias relacionadas con la "suerte" y la heurística de representatividad.

Entre las conclusiones obtenidas, los autores ponen de manifiesto el fracaso de ambos cuestionarios para los alumnos de 5.º curso (10 - 11 años), para los que, aunque pudieron dar ejemplos de sucesos seguros, posibles e imposibles, parece que la mayoría de las nociones fueron demasiado difíciles. Sin embargo, afirman que, a partir de 6.º curso, podría llevarse a cabo una enseñanza sistemática sobre probabilidad, sin excesiva dificultad (alrededor del 60% - 70% de los alumnos de este nivel fueron capaces de comprender y usar correctamente la mayoría de los conceptos programados), y desde luego, con toda seguridad a partir de 7.º (80% - 90% de éxito). Los autores aseguran que tal programa tuvo un efecto beneficioso en los prejuicios y errores de los niños con respecto a secuencias de sucesos en situaciones de incertidumbre.

Por otra parte, las lecciones no mejoraron el razonamiento proporcional, encontrando, incluso, un efecto negativo de la instrucción. Los autores opinan al respecto que el pensamiento probabilístico y el razonamiento proporcional están basados en dos esquemas mentales distintos, aunque puedan compartir el mismo origen, a un nivel intuitivo muy básico, en la intuición de las frecuencias relativas (Fischbein, 1975). Por eso, un progreso en una dirección no implica una mejora en la otra. Aunque el cálculo probabilístico puede requerir el cálculo y comparación de razones, la probabilidad, como actitud mental específica, no implica, necesariamente, una comprensión formal de los conceptos proporcionales. Esta dificultad podría salvarse, según los autores, diseñando ejercicios especiales, en los que los alumnos puedan enfrentarse con cálculos no proporcionales y sus respectivas implicaciones en estimaciones probabilísticas. En cualquier caso, Fischbein aboga indiscutiblemente por una introducción sistemática de las nociones probabilísticas desde los primeros años de escuela, y lo expresa en los siguientes términos: *"En el mundo contemporáneo, la*

*educación científica no puede ser reducida, de forma rentable, a una interpretación unívocamente determinista de los sucesos. Una cultura científica eficaz exige una educación del pensamiento estadístico y probabilístico... Para ello, es necesario educar, desde la primera infancia, la compleja base intuitiva relevante para el pensamiento probabilístico; de esta manera se puede conseguir un balance genuino y constructivo entre lo posible y lo determinado, en el funcionamiento de la inteligencia"* (Fischbein, 1975).

### 5.3.1 ANÁLISIS CONCEPTUAL DEL CUESTIONARIO TOMADO DE LAS INVESTIGACIONES DE FISCHBEIN Y GAZIT

Los ítems empleados en nuestra investigación han sido tomados del segundo cuestionario de Fischbein y Gazit (1984).

En el test de Fischbein y Gazit se considera que para otorgar capacidad de razonamiento probabilístico, a nivel primario, es decir, a un sujeto sin instrucción específica en Probabilidad, este debe mostrar capacidad para:

1. Identificar el suceso seguro, distinguiéndolo del inseguro, aleatorio o probabílístico (ítem F1).
2. Aceptar el principio de indiferencia o equiprobabilidad de sucesos por razones de simetría, o ausencia de razones suficientes en contra (ítems F3, F4, F5, F6, F7, F8).
3. Identificar experimentos independientes, a pesar de factores culturales (creencias o sesgos de razonamiento) que establecen relaciones de causa-efecto sin fundamento (ítems F2, F3, F4, y F5).
4. Utilizar el razonamiento proporcional para comparar probabilidades de sucesos, ya sea razonando en un esquema parte-parte o en un esquema parte-todo (ítems F6, F7 y F8). En estos tres ítems sobre bolas contenidas en urnas, la composición de éstas es proporcional de razones 2, 3/4 y 3, respectivamente. En todos los casos el número de bolas negras es el doble que el de blancas.
5. Apreciar un juego como equitativo (ítem F8).
6. Apreciar las características de la convergencia en probabilidad (estabilidad de las frecuencias; ley del Azar o de los grandes números) (ítems sobre loterías, F3, F4 y F6; también el ítem F8 se plantea una secuencia de experimentos aleatorios, por lo que requiere la apreciación de la estabilidad de las frecuencias a largo plazo)
7. Combinatoria; enumeración y recuento de posibilidades. En los ítems referidos a la presencia de bolas en cajas se requiere que el sujeto sea capaz de contar el número

de resultados posibles y a favor del suceso que interesa. También puede razonar relacionando casos favorables con casos desfavorables, o estableciendo una correspondencia que ponga de manifiesto la proporcionalidad entre los elementos.

Los contextos usados por Fischbein y Gazit son loterías (ítems F3, F4, y F5), extracción de bolas (ítems F1, F6, F7 y F8), sucesos "naturalistas" (ítem F2.). Los sesgos que Fischbein y Gazit han tenido en cuenta en los enunciados de los ítems de su test, y que el alumno debe superar mediante el uso intuitivo de las herramientas matemáticas mencionadas, son los siguientes:

- sesgo de representatividad (Kahneman, Slovic y Tversky, 1982)
- falacia del jugador
- factores causales improcedentes en situaciones puramente aleatorias (entrar con el pié derecho, uso de la inteligencia)

Procediendo de forma análoga a como lo hemos hecho con el instrumento de Green, analizamos a continuación este instrumento, que consta de ocho ítems.

### Ítems elegidos para el cuestionario

**Ítem 4:** Olivia y Juana van a comprar un billete de lotería y sólo quedan dos números: el 123456 y el 378146. Olivia prefiere jugar al primero, porque dice que es más fácil que en un sorteo resulten los números consecutivos. Juana, por el contrario, opina que la lotería es algo azaroso y, por tanto, el número 378146 tiene más posibilidades de salir. ¿Cuál es tu opinión respecto a las dos actitudes, la de Olivia y la de Juana?

Conocimiento evaluado: Se trata de un ítem de comparación de dos probabilidades de sucesos elementales en experimentos compuestos. Se introducen factores de tipo subjetivo.

Contexto: Números en la lotería.

Representación gráfica: No hay.

Tipo de respuesta: Respuesta abierta.

Espacio muestral: Finito, pero muy numeroso, ya que consta de $10^6$ casos. Sucesos simples equiprobables (razón frecuencial y simetría física)

Posible sesgo (estrategia): El alumno debe reconocer la equiprobabilidad de los sucesos. Puede manifestarse de nuevo la heurística de la representatividad, por la cual no se admite como aleatorio las secuencias de resultados ordenados.

**Ítem 6:** Pablo tiene 100 bolas blancas y 50 negras en una caja. Miguel tiene en su caja 200 bolas blancas y 100 negras. Sin mirar, cada uno toma una bola de su propia caja. Compara sus posibilidades de extraer una bola negra. Marca con una X la respuesta correcta:

a) Pablo tiene mayor posibilidad de extraer una bola negra

b) Miguel tiene mayor posibilidad de extraer una bola negra

c) Sus posibilidades de extraer una bola negra son iguales

d) Es imposible dar una respuesta con los datos del problema

Conocimiento evaluado: Comparación de probabilidades simples de un mismo suceso en dos experimentos con sólo dos sucesos no equiprobables. Situación en que la composición de las urnas es proporcional (la misma clase de equivalencia).

Contexto: Comparación de urnas con bolas blancas y negras, cuyos contenidos son proporcionales, de razón 2 (100b/50n, 200b/100n). Se pide comparar las probabilidades de obtener bola negra (Contexto discreto).

Representación gráfica: No hay.

Tipo de respuesta: Elección múltiple.

Espacio muestral: Dos experimentos aleatorios con el mismo espacio muestral E={b,n} y la misma función de probabilidad. Los sucesos elementales no son equiprobables por razón de la composición de las urnas, pero éstas son equivalentes por tener composiciones proporcionales.

Posible sesgo: La comparación absoluta de casos favorables conduciría a error, por lo que es preciso utilizar el razonamiento proporcional o, al menos, el establecimiento de una correspondencia entre los elementos que componen las urnas.

**Ítem 7:** Pilar tiene 10 años. En su caja hay 40 bolas blancas y 20 negras. Rosa tiene 8 años. En su caja hay 30 bolas blancas y 15 negras. Cada una saca una bola de su propia caja sin mirar. Rosa opina que Pilar tiene mayor posibilidad de extraer una bola blanca porque ella es mayor, y por tanto es la más inteligente de las dos. ¿Cuál es tu opinión sobre esto?

Conocimiento evaluado: Comparación de probabilidades simples de un mismo suceso en dos experimentos con sólo dos sucesos no equiprobables. Situación en que la composición de las urnas es proporcional (la misma clase de equivalencia).

Contexto: Elección entre dos urnas con bolas blancas y negras cuyos contenidos son proporcionales, de razón=3/4 (40b/20n, 30b/15n). Se pide comparar las probabilidades de extraer blanca.(Contexto discreto).

Representación gráfica: No hay.

Tipo de respuesta: Respuesta abierta

Espacio muestral: Un espacio muestral, E={b, n}, con dos sucesos no equiprobables por razón de composición de las urnas. Una misma función de probabilidad (P(b)=2/3, P(n)=1/3), por lo que las urnas son equivalentes.

Posible sesgo (estrategia): Caso análogo al anterior, en que para hacer la comparación

es necesario el razonamiento proporcional o la correspondencia entre los elementos, aunque ahora cambia la razón de proporcionalidad entre las urnas de un n.º entero a un racional. El distractor de la edad de la niñas puede influir en el establecimiento de falsas relaciones causales por parte de los alumnos.

El test de Fischbein y Gazit introduce elementos de tipo subjetivo no considerados en el de Green, que pudieran influir en la asignación y comparación de probabilidades por parte de los alumnos.

## 5.4 CUESTIONARIO SOBRE AZAR Y PROBABILIDAD

El cuestionario consta de 15 ítems, los cuales tratan tres bloques de la Probabilidad. Los ítems 1, 2 y 3 se basan en la comparación de probabilidades, concretamente, el ítem 1 compara las probabilidades de los sucesos en un experimento simple con dos sucesos elementales; el ítem 2 compara las probabilidades de los sucesos elementales en un experimento aleatorio simple con dos resultados no equiprobables y la discriminación, por parte del alumno, entre sucesos equiprobables y no equiprobables; el ítem 3 compara la Probabilidad de un mismo suceso en dos experimentos aleatorios diferentes, en el que cada uno consta de un número finito de sucesos equiprobables, aunque el número de sucesos no coincide en los dos experimentos; el ítem 4 evalúa la percepción de la independencia de ensayos repetidos en las mismas condiciones; el ítem 5 compara las probabilidades de sucesos simples y compuestos en experimentos compuestos; el ítem 6 compara dos probabilidades de sucesos elementales en experimentos compuestos en el que se introducen factores de tipo subjetivo; los ítems 7 y 8 comparan probabilidades simples de un mismo suceso en dos experimentos con sólo dos sucesos no equiprobables; el ítem 9 trata la aplicación de la regla de Laplace en la que todos los sucesos elementales son igualmente probables; el ítem 10 se basa en la combinatoria en la que se evalúa la aplicación de la regla de Laplace mediante el empleo de combinatoria; el ítem 11 trata la Probabilidad de la intersección de sucesos dependientes; el ítem 12 se basa en la comparación de probabilidades de experimentos compuestos e independientes; los ítems 13, 14 y 15 tratan de conocer cuáles son los recursos didácticos empleados en el aula para el proceso de enseñanza-aprendizaje en la Probabilidad.

**Ítem 1:** Una ficha redonda es roja por una cara y verde por la otra. Se sostiene con la cara roja hacia arriba y se lanza al aire. Da vueltas en el aire y después cae al suelo. ¿Qué cara tiene más posibilidades de salir? ¿O piensas que no hay ninguna diferencia

entre las dos?. Señala la respuesta correcta:

(A) La cara roja tiene más posibilidades ___

(B) La cara verde tiene más posibilidades ___

(C) No hay ninguna diferencia ___

(D) No lo sé ___

**Ítem 2:** Una clase de Matemáticas tiene 13 niños y 16 niñas. Cada nombre de los alumnos se escribe sobre un trozo de papel. Todos los trozos se ponen en un sombrero. El profesor saca uno sin mirar. Señala la frase correcta:

(A) Es más probable que el nombre sea de un niño que de una niña ___

(B) Es más probable que el nombre sea de una niña que de un niño ___

(C) Es igual de probable que sea un niño que una niña ___

(D) No lo sé ___

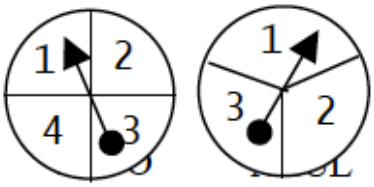
**Ítem 3:** La figura muestra dos discos (ruletas) que tienen agujas que una vez giradas se detienen y apuntan a un número. ¿Con qué disco es más fácil obtener un 3? Señala la respuesta correcta:

(A) Es más fácil obtener 3 en el disco rojo ___

(B) Es más fácil obtener 3 en el disco azul ___

(C) Los dos discos dan la misma posibilidad de obtener 3 ___

(D) No lo sé ___




ROJO AZUL

¿Por qué eliges esa respuesta?

.....

**Ítem 4:**.Una moneda se lanza al aire cinco veces y sale CARA las cinco veces. Señala la frase que consideres correcta:

(A) La próxima vez es más probable que otra vez salga CARA ___

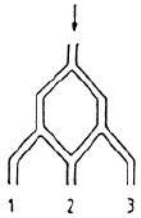
(B) La próxima vez es más probable que salga CRUZ ___

(C) La próxima vez es igual de probable que salga CARA o CRUZ ___

(D) No lo sé ___

**Ítem 5:** Supón que dejamos caer muchas bolas en el conjunto de canales dibujado:

Señala la frase que mejor describa dónde esperas tú que vayan las bolas.




(A) Por cada canal pasará aproximadamente el mismo número de bolas ___

(B) Por 2 pasarán aproximadamente el doble de bolas que por 1 ó 3 ___

(C) Aproximadamente la mitad pasarán por 1 y la mitad por 3 ___

(D) Unas pocas pasarán por 1, casi todas por 2 unas pocas por 3 ___

(E) Ninguna de éstas ___

**Ítem 6:** Olivia y Juana van a comprar un billete de lotería y sólo quedan dos números: el 123456 y el 378146. Olivia prefiere jugar al primero, porque dice que es más fácil que en un sorteo resulten los números consecutivos. Juana, por el contrario, opina que la lotería es algo azaroso y, por tanto, el número 378146 tiene más posibilidades de salir. ¿Cuál es tu opinión respecto a las dos actitudes, la de Olivia y la de Juana?

**Ítem 7:** Pablo tiene 100 bolas blancas y 50 negras en una caja. Miguel tiene en su caja 200 bolas blancas y 100 negras. Sin mirar, cada uno toma una bola de su propia caja. Compara sus posibilidades de extraer una bola negra. Marca con una X la respuesta correcta:

a) Pablo tiene mayor posibilidad de extraer una bola negra

b) Miguel tiene mayor posibilidad de extraer una bola negra

c) Sus posibilidades de extraer una bola negra son iguales

d) Es imposible dar una respuesta con los datos del problema

**Ítem 8:** Pilar tiene 10 años. En su caja hay 40 bolas blancas y 20 negras. Rosa tiene 8 años. En su caja hay 30 bolas blancas y 15 negras. Cada una saca una bola de su propia caja sin mirar. Rosa opina que Pilar tiene mayor posibilidad de extraer una bola blanca porque ella es mayor, y por tanto es la más inteligente de las dos. ¿Cuál es tu opinión sobre esto?

**Ítem 9:** Se lanzan dos dados; si la suma de puntos obtenidos es mayor que siete el jugador gana; si vale siete, la tirada es nula, y si es inferior a siete, el jugador pierde ¿Cuál es la probabilidad de ganar? ¿Es equitativo este juego?

**Ítem 10**: A un congreso de científicos asisten 100 congresistas. De ellos, 80 hablan francés y 40 inglés. ¿Cuál es la probabilidad de que 2 congresistas elegidos al azar no puedan entenderse sin intérprete?

**Ítem 11**: Supongamos que una urna contiene 3 bolas rojas y 2 blancas y nos preguntamos cuál será la probabilidad de que, tomando 3 bolas de la urna, sin reemplazamiento, las 3 sean rojas.

**Ítem 12**: Cada uno de los motores de un avión puede averiarse durante un vuelo, con probabilidad 0,01. El avión puede continuar su vuelo si funcionan al menos la mitad de los motores ¿Qué es más seguro, un avión de 2 o de 4 motores?

**Ítem 13:** Analizando los distintos recursos didácticos disponibles para la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad, ¿cuáles son los que has utilizado en tu proceso de enseñanza-aprendizaje?

(A) Libro de texto ___
(B) Calculadora ___
(C) Ambos ___
Otros ___
En caso de ser otros, ¿cuáles?

**Ítem 14:** ¿Qué recursos educativos en Internet sobre probabilidad conoces? ¿Los has utilizado en tu proceso de enseñanza-aprendizaje?

**Ítem 15**: ¿Conoces el recurso didáctico LABAPC? En caso afirmativo, especificar para qué materia lo ha empleado y el porqué de su uso.

(A) Sí ___

(B) No ___

Observaciones

# CAPÍTULO 6

# EVALUACIÓN DE CONOCIMIENTOS DE LOS DOCENTES EN EJERCICIO Y FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA Y SECUNDARIA


6.1 Introducción
6.2 Objetivos e hipótesis de los Estudios 2 y 3
6.3 Material
6.4 Docentes en ejercicio de Educación Primaria
  6.4.1 Contexto educativo
  6.4.2 Muestra de docentes en ejercicio de Educación Primaria
6.5 Futuros docentes de Educación Primaria
  6.5.1 Contexto educativo y muestra de futuros docentes
6.6 Docentes en ejercicio de Educación Secundaria Obligatoria
  6.6.1 Contexto educativo
  6.6.2 Muestra de docentes en ejercicio de Educación Secundaria
6.7 Futuros docentes de Educación Secundaria Obligatoria
  6.7.1 Contexto educativo y muestra de futuros docentes
  6.8 Análisis de datos estadísticos
    6.8.1 Análisis
    6.8.2 Comparativa
      6.8.2.1 Comparativa entre profesores en ejercicio
      6.8.2.2 Comparativa entre los futuros profesores
      6.8.2.3 Comparativa entre profesores en ejercicio y futuros profesores de Educación Primaria
      6.8.2.4 Comparativa entre profesores en ejercicio y futuros profesores de Educación Secundaria

## 6.1 INTRODUCCIÓN

En Educación Primaria, el contenido sobre el estudio de la Probabilidad simple aparece explícitamente, incluyendo la comprensión del lenguaje ordinario relacionado con el Azar y la Probabilidad (que para un futuro maestro incluiría el comprender los enunciados del tipo "si" o condicional y del tipo "y" o conjunción) y el cálculo de probabilidades sencillas aplicando la Regla de Laplace.

Esto nos ha llevado a plantear el Estudio 2 de las competencias matemáticas de los profesores de Educación Primaria, en relación a la interpretación de probabilidades simples y compuestas.

El profesor que tiene que explicar el tema de Probabilidad, en la Educación Secundaria Obligatoria, debiera ser capaz de reconocer los sesgos que cometen los estudiantes y ayudarles a superarlos, de este modo, podrá prepararlos para la correcta toma de decisiones en su vida personal y profesional, pero es posible que los mismos profesores tengan estos razonamientos erróneos, con lo que podrían incluso transmitirlos a sus alumnos (Stohl, 2005).

El Estudio 3, que se presenta en este capítulo, está orientado a evaluar la presencia de la Probabilidad en una muestra de profesores de Educación Secundaria. Al mismo tiempo se desea evaluar el conocimiento común de dicho contenido, pues dicho conocimiento es esencial en la toma de decisiones instruccionales (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001). En lo que sigue, se describen los objetivos e hipótesis de los Estudios 2 y 3, la muestra y el contexto en que se toman los datos.

## 6.2 OBJETIVOS E HIPÓTESIS DE LOS ESTUDIOS 2 Y 3

El Estudio 2 se orienta en evaluar el conocimiento común de los profesores de Educación Primaria en relación con algunos objetos matemáticos. Más concretamente, podemos diferenciar el siguiente objetivo en el estudio.

**Objetivo**

*Objetivo 1. Analizar el conocimiento común de Probabilidad que ponen de manifiesto los profesores de Educación Primaria en el cálculo de probabilidades simples y compuestas.*

Para lograr este objetivo plantearemos cuestiones en las que tengan que calcular estas probabilidades una muestra de profesores en ejercicio.

**Hipótesis**

*H1: Respecto a este estudio, esperamos que nuestros resultados muestren un conocimiento suficiente de los profesores de la muestra sobre la Probabilidad, tanto respecto al conocimiento matemático, como en relación a las componentes evaluadas del conocimiento didáctico.*

Esta hipótesis se basa en los resultados de investigaciones previas, tales como la de Azcárate (1995), Begg y Edward (1999), Watson (2001) y Ortiz, Nordin, Batanero, Serrano y Rodríguez (2006), en las que se muestran numerosos sesgos de razonamiento que es razonable que aparezcan también en los profesores y esperamos que estos resultados se repliquen en nuestro trabajo.

La importancia del citado objetivo es que permitirán obtener información sobre las necesidades formativas de los profesores, que pueda servir para preparar materiales didácticos y mejorar la acción educativa con los futuros profesores.

El estudio 3 se orienta en evaluar el conocimiento común de los profesores de Educación Secundaria en relación con algunos objetos matemáticos. Más concretamente, podemos diferenciar el siguiente objetivo en el estudio.

**Objetivo**

*Objetivo 1. Analizar el conocimiento común de probabilidad que ponen de manifiesto los profesores de Educación Secundaria en el cálculo de probabilidades simples y compuestas.*

Para lograr este objetivo plantearemos cuestiones en las que tengan que calcular estas probabilidades una muestra de profesores en ejercicio.

**Hipótesis**

*H1: Esperamos encontrar una proporción baja de profesores en la muestra que presente los sesgos evaluados en el estudio.*

Aunque son muy escasas las investigaciones de evaluación del razonamiento probabilístico de futuros profesores de secundaria, los estudios en futuros profesores de primaria (Azcárate, 1995; Begg y Edawrd, 1999; Watson, 2001; Pereira-Mendoza, 2002; Batanero, Godino y Cañizares, 2005; Tarr y Lannin, 2005; Ortiz, Nordin, Batanero, Serrano y Rodríguez, 2006), indican que estos presentan sesgos relacionados

con la Probabilidad. Por otro lado, los sesgos son también frecuentes en los alumnos de secundaria, por lo que los futuros profesores y docentes en ejercicio debieran haberlos superado y saber evaluarlos en sus alumnos.

## 6.3 MATERIAL

La recogida de datos se realizó durante el segundo cuatrimestre del curso 2013-2014. Las instrucciones para cumplimentarlo, tiempo disponible e instrucciones fueron iguales en todos los grupos de profesores. Para la recogida de datos se contactó con algunos profesores de Matemáticas de distintos centros de la isla de Gran Canaria.

El cuestionario se rellenó de forma individual, por escrito, de forma que cada profesor expresase sus conocimientos en Probabilidad y el empleo de los recursos didácticos en el aula.

## 6.4 DOCENTES EN EJERCICIO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

### 6.4.1 CONTEXTO EDUCATIVO Y MUESTRA

Como se ha indicado, los profesores participantes provienen de distintos centros de la isla de Gran Canaria y todos imparten el área de Matemáticas.

Para elegir la muestra se analizaron los diferentes centros y se realizó un muestreo aleatorio simple, al no existir ningún ranking que los clasifique. Fueron seleccionados siete colegios públicos (CEIP Santa Bárbara, CEIP Salvador Manrique de Lara, CEIP Gíner de Los Ríos, CEIP Aguadulce, CEIP Rafael Gómez Santos, CEIP Juan del Río Ayala, CEIP Gran Canaria).

## 6.5 FUTUROS DOCENTES DE EDUCACIÓN PRIMARIA

### 6.5.1 CONTEXTO EDUCATIVO Y MUESTRA

Los futuros profesores participantes son estudiantes del tercer curso del Grado de Educación Primaria de la universidad de Las Palmas de Gran Canaria.

A la hora de tener una idea del conocimiento matemático adquirido a lo largo de la vida de los participantes, es necesario saber la procedencia del Bachillerato. La mayoría de ellos han cursado el Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales.




Figura 6.1 Bachillerato de procedencia de los futuros maestros

## 6.6 DOCENTES EN EJERCICIO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

### 6.6.1 CONTEXTO EDUCATIVO Y MUESTRA

Los profesores participantes provienen de distintos centros de la isla de Gran Canaria y todos imparten la materia de Matemáticas.

Para elegir la muestra se analizaron los diferentes centros y se realizó un muestreo aleatorio simple. Fueron seleccionados siete centros públicos (IES Guanarteme, IES El Rincón, IES La Feria del Atlántico, IES Siete Palmas, IES Vega de San José, IES San Mateo e IES La Atalaya).

## 6.7 FUTUROS DOCENTES DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

### 6.7.1 CONTEXTO EDUCATIVO Y MUESTRA DE FUTUROS DOCENTES

Los futuros profesores participantes son estudiantes del Máster Universitario en Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas de la universidad de Las Palmas de Gran Canaria, concretamente de las especialidades de Tecnología y Biología y Geología, es decir, del ámbito científico-tecnológico. Como indica el siguiente gráfico la mayoría de los futuros profesores de secundaria pertenecen a la especialidad de Tecnología; también se especifica la titulación de cada participante.

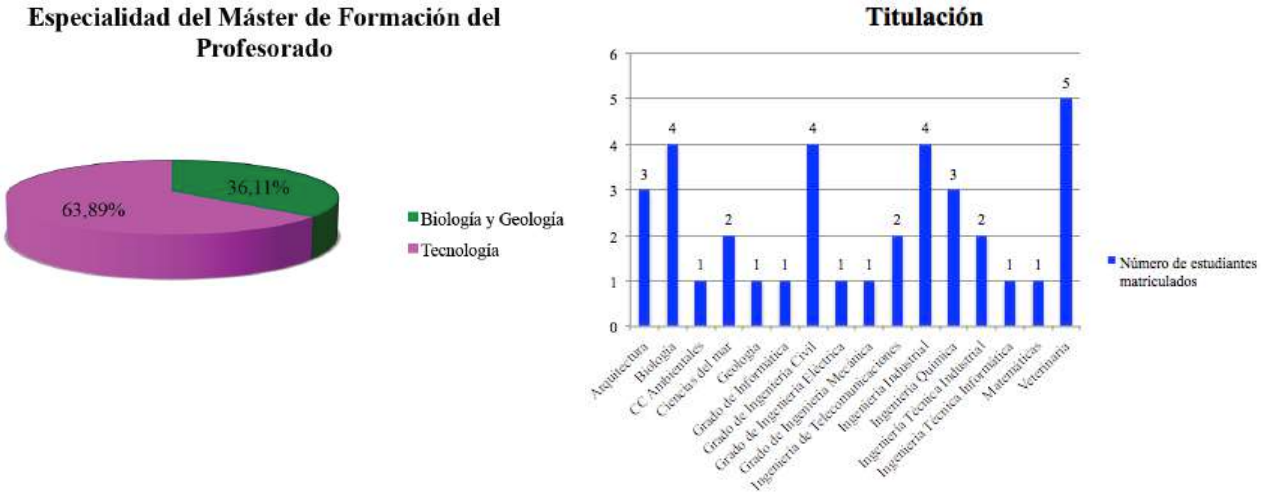



Figura 6.2 Especialidad y titulación de los participantes de Educación Secundaria Obligatoria

## 6.8 ANÁLISIS DE DATOS ESTADÍSTICOS

En esta sección se desarrollan los distintos análisis de los resultados del cuestionario elaborado por nuestra muestra, así como cinco comparativas.

### 6.8.1 ANÁLISIS

En este trabajo se realizan cuatro análisis de los resultados. El primero de ellos estudia el número de docentes que contestan bien a cada uno de los ítems; el segundo se basa en el número de respuestas correctas; el tercero estudia la relación existente entre el número de respuestas correctas en los ítems de opción simple y los de opción múltiple y el cuarto comprueba si influye las respuestas correctas con la categoría del profesor.

Análisis 1

Se analiza el número de participantes que contestaron correctamente e incorrectamente a cada uno de los ítems sobre el conocimiento matemático.

En la Tabla 6.1 se presentan las diferentes respuestas encontradas, junto con el porcentaje de respuestas correctas para cada ítem en los cuatro grupos de nuestra muestra. Mientras que en la Tabla 6.2 se observa qué recursos didácticos emplean los participantes en el aula durante el proceso de enseñanza-aprendizaje del Azar y la Probabilidad.

| | Maestros en ejercicio (n=35) | | Futuros maestros (n=52) | | Profesores en ejercicio (n=35) | | Futuros Profesores (n=36) | | Muestra global | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Frecuencia | Porcentaje | Frecuencia | Porcentaje | Frecuencia | Porcentaje | Frecuencia | Porcentaje | Frecuencia | Porcentaje |
| **Ítem 1** | 29 | 82,86 | 51 | 98,08 | 33 | 94,29 | 33 | 91,67 | 146 | 92,41 |
| **Ítem 2** | 30 | 85,71 | 49 | 94,23 | 32 | 91,43 | 35 | 97,22 | 146 | 92,41 |
| **Ítem 3** | 35 | 100 | 48 | 92,31 | 35 | 100 | 35 | 97,22 | 153 | 96,84 |
| **Ítem 4** | 28 | 80 | 41 | 78,85 | 33 | 94,29 | 35 | 97,22 | 137 | 86,71 |
| **Ítem 5** | 16 | 45,71 | 26 | 50 | 22 | 62,86 | 20 | 55,56 | 84 | 53,16 |
| **Ítem 6** | 22 | 62,86 | 23 | 44,23 | 33 | 94,29 | 23 | 63,89 | 101 | 63,92 |
| **Ítem 7** | 26 | 74,29 | 38 | 73,08 | 32 | 91,43 | 32 | 88,89 | 128 | 81,01 |
| **Ítem 8** | 20 | 57,14 | 38 | 73,08 | 33 | 94,29 | 28 | 77,78 | 119 | 75,32 |
| **Ítem 9** | 0 | 0 | 15 | 28,85 | 20 | 57,14 | 2 | 5,56 | 37 | 23,42 |
| **Ítem 10** | 0 | 0 | 0 | 0 | 13 | 37,14 | 0 | 0 | 13 | 8,23 |
| **Ítem 11** | 1 | 2,86 | 1 | 1,92 | 32 | 91,43 | 19 | 52,78 | 53 | 33,54 |
| **Ítem 12** | 15 | 42,86 | 15 | 28,85 | 27 | 77,15 | 17 | 47,22 | 74 | 46,84 |

Tabla 6.1 Número de ítems contestados por los participantes y su porcentaje

- En la muestra global, el ítem 3 es el que ha obtenido un 96,84% de respuestas acertadas, el cual hace referencia a comparar la probabilidad de un mismo suceso en dos experimentos aleatorios diferentes. Mientras que los ítem 9 (Ley del Azar), 10 (combinatoria) y 11 (probabilidad condicional) fueron los que alcanzaron peores resultados, con un 23,42%, 8,23% y 33,54% respectivamente.
- En cada uno de los grupos de nuestra muestra, en el ítem 9 los resultados de los maestros es de 0% y los futuros maestros 28,85% y 0% para el ítem 10, un 2,86% y 1,92%, respectivamente, en el ítem 11, mientras que los profesores de secundaria obtuvieron 57,14%, 37,14% y 91,43% y los futuros profesores 5,56%, 0% y 52,78% para los mismos ítems.

| | Maestros en ejercicio (n=35) | | Futuros maestros (n=52) | | Profesores en ejercicio (n=35) | | Futuros Profesores (n=36) | | Muestra global | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Frecuencia | Porcentaje | Frecuencia | Porcentaje | Frecuencia | Porcentaje | Frecuencia | Porcentaje | Frecuencia | Porcentaje |
| **Libro de texto** | 0 | 0 | 1 | 1,92 | 0 | 0 | 3 | 8,33 | 4 | 2,53 |
| **Calculadora** | 0 | 0 | 8 | 15,38 | 0 | 0 | 3 | 8,33 | 11 | 6,96 |
| **Libro de texto y calculadora** | 23 | 65,71 | 33 | 63,46 | 25 | 71,43 | 26 | 72,22 | 107 | 67,72 |
| **Otros** | 12 | 34,29 | 10 | 19,23 | 10 | 28,57 | 4 | 11,11 | 36 | 22,78 |
| **LABAPC** | 0 | 0 | 44 | 84,62 | 0 | 0 | 0 | 0 | 44 | 27,85 |

Tabla 6.2 Resultados en los ítems 13, 14 y 15

- Los tres últimos ítems hacen referencia a los recursos didácticos empleados en el aula o en el proceso de enseñanza-aprendizaje.
- La mayoría del profesorado participante emplea el libro de texto y la calculadora como herramientas de apoyo a la hora de impartir sus clases en el aula.

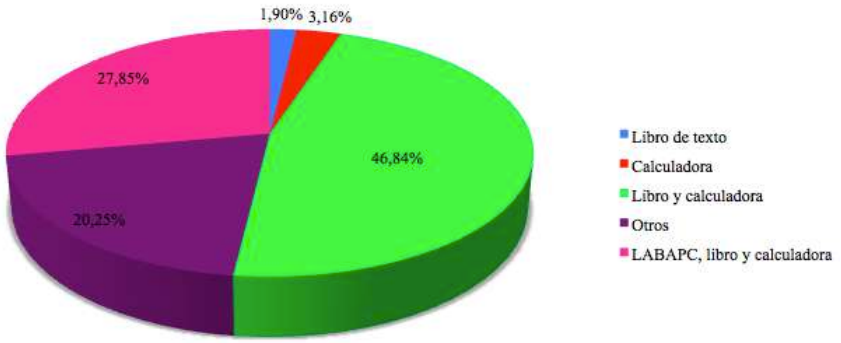



Figura 6.3 Porcentaje de recursos didácticos empleados en el aula por nuestra muestra

Análisis 2

Se analiza el número de respuestas correctas y los recursos didácticos empleados en el aula de cada uno de los grupos de nuestra muestra.

Análisis del número de respuestas correctas

Maestros en ejercicio (n=35)

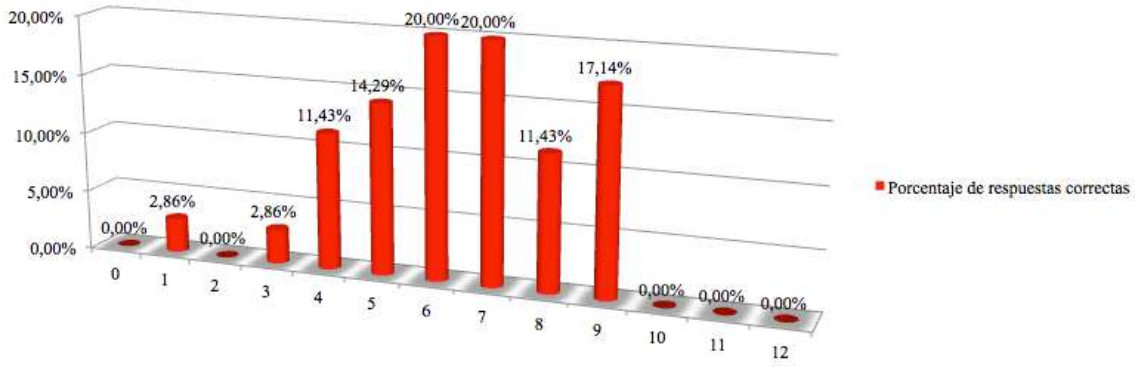



Figura 6.4 Número de respuestas correctas de los maestros en ejercicio

Dentro de los profesores de primaria el número ha fluctuado entre 1 y 9 ítems, concretamente, el 68,57% entre 6 y 9 ítems correctamente.

Futuros maestros (n=52)

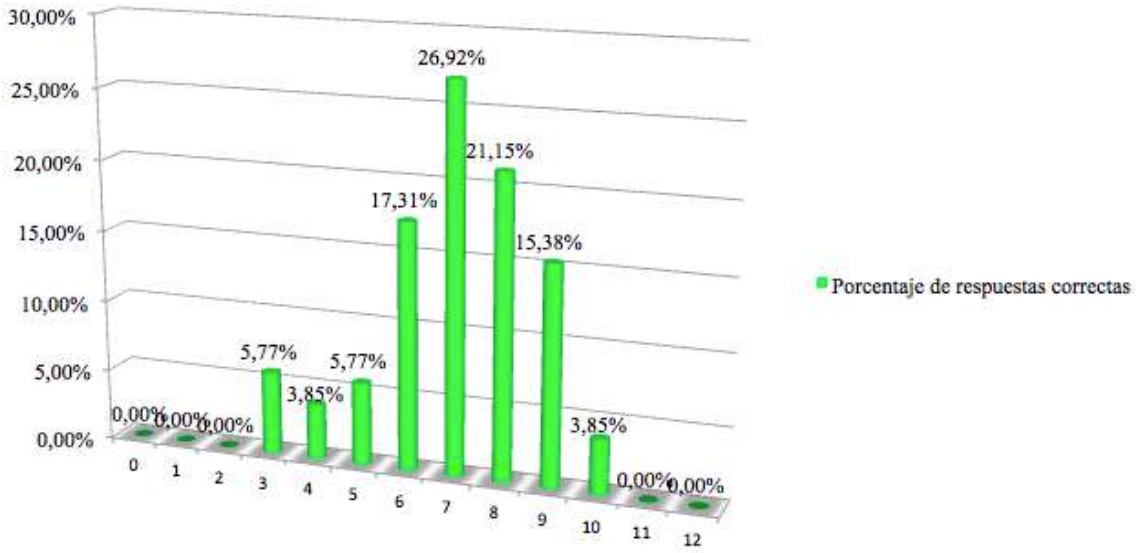



Figura 6.5 Número de respuestas correctas de los futuros maestros

Los futuros maestros contestaron correctamente entre 3 y 10 ítems, concretamente el 80,8% contestó entre 6 y 9 ítems correctamente.

Profesores en ejercicio (n=35)

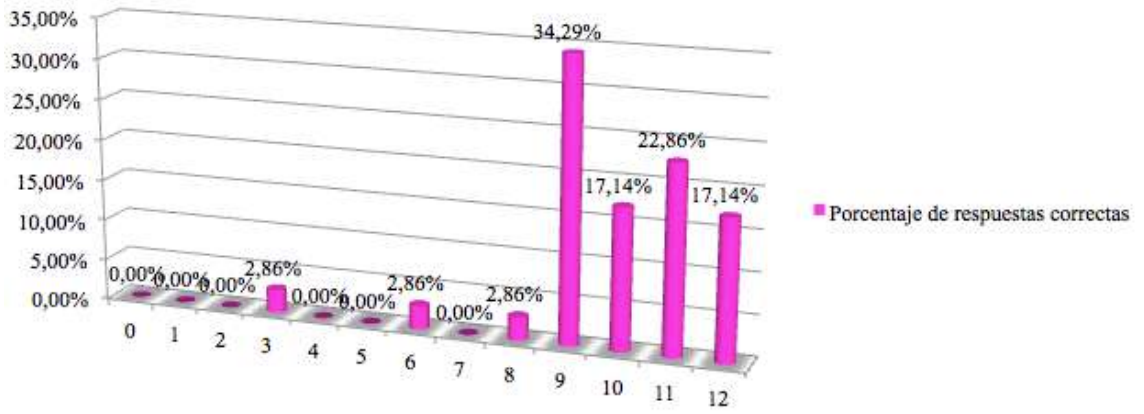



Figura 6.6 Número de respuestas correctas de los profesores en ejercicio

Para los profesores de secundaria el número ha fluctuado entre 3 y 12 ítems, concretamente, el 91,43% de ellos contestaron entre 9 y 12 preguntas correctamente.

Futuros profesores (n=36)

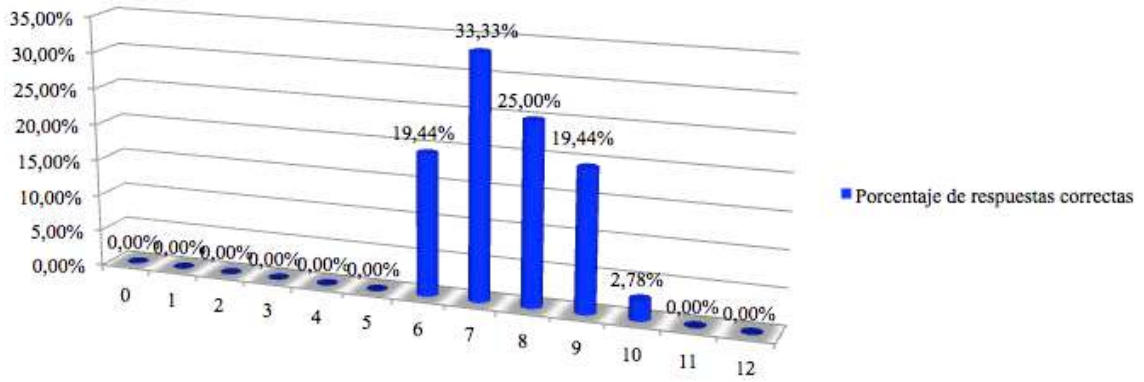



Figura 6.7 Número de respuestas correctas de los futuros profesores de Educación Secundaria.

En el caso de los futuros profesores de Educación Secundaria el número de respuestas correctas ha sido entre 6 y 10, concretamente, el 97,21% obtuvieron entre 6 y 9 ítems correctos.

Muestra global (n=158)

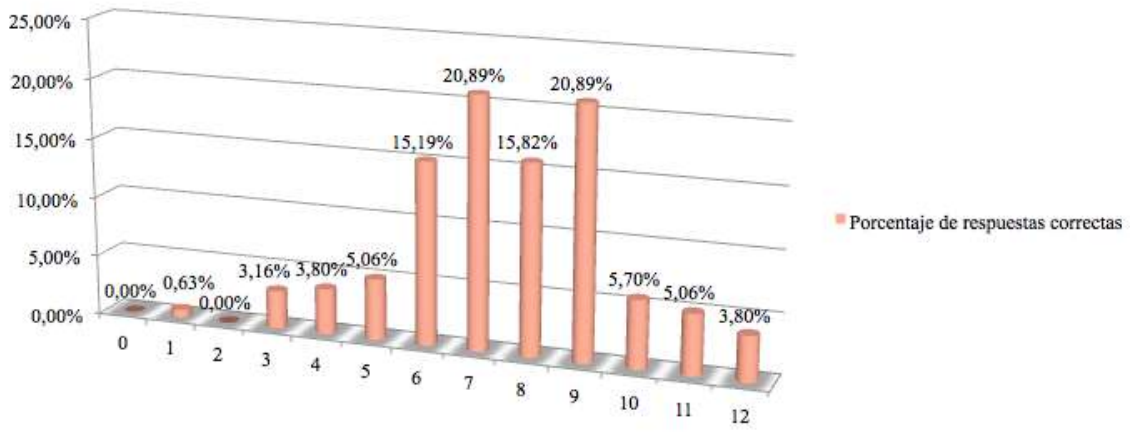



Figura 6.8 Número de respuestas correctas de la muestra global

El número de respuestas correctas ha fluctuado entre 6 y 9 ítems, correspondiéndose con el 72,79% de la muestra.

Los valores descriptivos de las muestras, Tabla 6.3, indican que el valor medio de respuestas correctas fue inferior para el grupo de los maestros, con 6,34 y 7 respuestas correctas de media con respecto al 9,86 y 7,53 de media de respuestas correctas de la muestra de profesores de secundaria.

| | Maestros en ejercicio (n=35) | Futuros maestros (n=52) | Profesores en ejercicio (n=35) | Futuros Profesores (n=36) | Muestra global (n=158) |
|---|---|---|---|---|---|
| **Media** | 6,34 | 7 | 9,86 | 7,53 | 7,61 |
| **Desviación típica** | 1,91 | 1,69 | 1,79 | 1,09 | 2,08 |
| **Coeficiente de variación** | 0,30 | 0,24 | 0,18 | 0,15 | 0,27 |
| **Coeficiente de asimetría** | -0,49 | -0,60 | -1,60 | 0,25 | -0,19 |
| **Curtosis** | 0,01 | 0,06 | 4,19 | -0,86 | 0,19 |
| **Mínimo** | 1 | 3 | 3 | 6 | 1 |
| **Máximo** | 9 | 10 | 12 | 10 | 12 |

Tabla 6.3 Análisis descriptivo de ítems correctos por profesor

Análisis 3

Este análisis trata de conocer si existe relación entre el número correcto de ítems de respuesta única e ítems de respuesta abierta, para así poder detectar los posibles sesgos en razonamiento probabilístico de los profesores. Para ello se realiza el coeficiente de correlación lineal de Pearson, obteniéndose,

| Coeficiente de correlación lineal de Pearson | Muestra global de profesores en ejercicio | Maestros en ejercicio (n = 35) | Profesores en ejercicio (n = 35) | Muestra global de futuros profesores | Futuros maestros (n =52) | Futuros profesores (n = 36) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| r | 0,74 | 0,34 | 0,70 | 0,40 | 0,46 | 0,21 |

Tabla 6.4 Coeficiente de correlación lineal de Pearson de cada muestra

Todos los coeficientes de correlación lineal observados son positivos por lo que existe una relación de dependencia positiva entre las variables, es decir, a medida que aumenta el número de respuestas correctas en los ítems de opción única, aumenta el número de respuestas correctas en los correspondientes a respuesta abierta. Sin embargo, centrando nuestra atención a las muestras globales, cabe destacar que los profesores en ejercicio han alcanzado r=0,74, por tanto, existe una relación fuerte entre las variables, mientras que los futuros profesores han obtenido r=0,40, siendo una relación débil. Si observamos cada uno de los grupos de las muestras, este refleja que los maestros en ejercicio presentan una relación más débil (r=0,34) que la de los futuros maestros (r=0,46). Por el contrario, los profesores en ejercicio superan a los futuros profesores alcanzando un r=0,70, es decir, existe una relación fuerte.

Análisis 4

Se comprueba la existencia de relación entre las respuestas correctas en los 12 ítems y la categoría del profesor. Como consecuencia se ha realizado un test Chi-cuadrado de contraste de hipótesis, para determinar si se rechaza o no la idea de independencia entre la categoría del docente y sus conocimientos en Azar y Probabilidad, obteniendo

| Muestra global (n=158) | Chi-cuadrado | Grados de libertad | p | Contraste de hipótesis |
|---|---|---|---|---|
| | 39,24 | 12 | 0,05 | Se rechaza la hipótesis de independencia |

Tabla 6.5 Resultado del contraste de hipótesis de independencia Chi- cuadrado

Por otro lado se quiere conocer si el hecho de introducir la asignatura de *Matemática y su didáctica III* y el recurso didáctico *LABAPC* en el Grado de Educación Primaria influye o no a la hora de responder a los 12 ítems. Por tanto, se ha llevado a cabo un test Chi-cuadrado de contraste de hipótesis para determinar si se rechaza o no la idea de independencia entre los docentes en ejercicio y los futuros maestros y sus

conocimientos en Azar y Probabilidad. También se ha elaborado el mismo contraste que el anterior a los profesores en ejercicio y a los futuros profesores de Educación Secundaria.

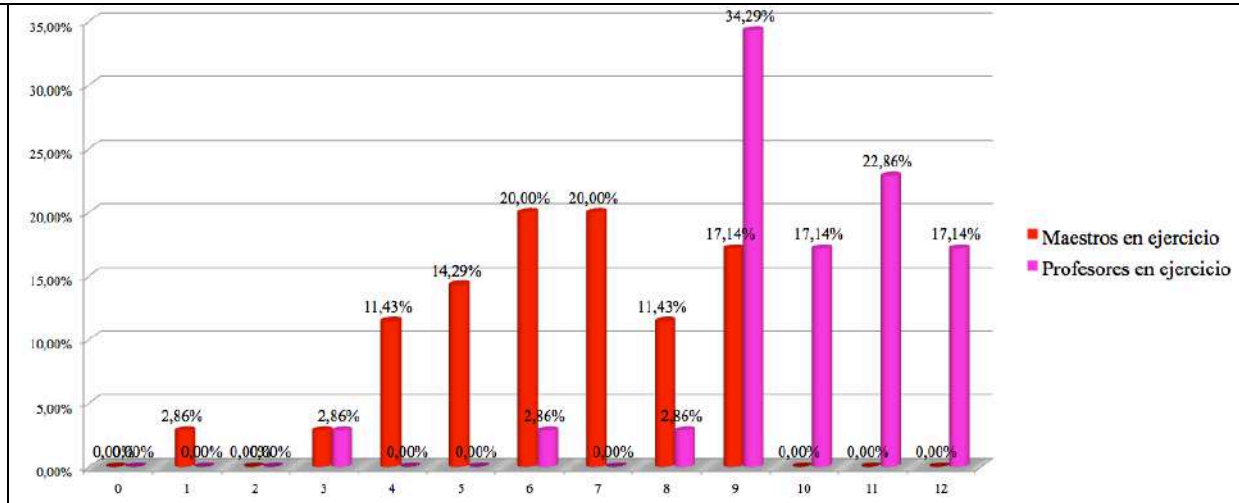
### 6.8.2 COMPARATIVA

En esta sección se hacen distintas comparativas con las distintas muestras obtenidas, entre ellas, en función de los distintos análisis realizados en el apartado anterior. Posteriormente se elabora una comparativa de nuestros resultados con los obtenidos en el estudio de María Jesús Cañizares.

### 6.8.2.1 COMPARATIVA ENTRE PROFESORES EN EJERCICIO

<table>
<tr><th>ANÁLISIS</th><th></th><th>COMPARATIVA</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>
<table>
<tr><th></th><th colspan="2">Maestros en ejercicio (n=35)</th><th colspan="2">Profesores en ejercicio (n=35)</th></tr>
<tr><th></th><th>Frecuencia</th><th>Porcentaje</th><th>Frecuencia</th><th>Porcentaje</th></tr>
<tr><td>Ítem 1</td><td>29</td><td>82,86</td><td>33</td><td>94,29</td></tr>
<tr><td>Ítem 2</td><td>30</td><td>85,71</td><td>32</td><td>91,43</td></tr>
<tr><td>Ítem 3</td><td>35</td><td>100</td><td>35</td><td>100</td></tr>
<tr><td>Ítem 4</td><td>28</td><td>80</td><td>33</td><td>94,29</td></tr>
<tr><td>Ítem 5</td><td>16</td><td>45,71</td><td>22</td><td>62,86</td></tr>
<tr><td>Ítem 6</td><td>22</td><td>62,86</td><td>33</td><td>94,29</td></tr>
<tr><td>Ítem 7</td><td>26</td><td>74,29</td><td>32</td><td>91,43</td></tr>
<tr><td>Ítem 8</td><td>20</td><td>57,14</td><td>33</td><td>94,29</td></tr>
<tr><td>Ítem 9</td><td>0</td><td>0</td><td>20</td><td>57,14</td></tr>
<tr><td>Ítem 10</td><td>0</td><td>0</td><td>13</td><td>37,14</td></tr>
<tr><td>Ítem 11</td><td>1</td><td>2,86</td><td>32</td><td>91,43</td></tr>
<tr><td>Ítem 12</td><td>15</td><td>42,86</td><td>27</td><td>77,15</td></tr>
</table>
</td><td>Ambas muestras contestaron correctamente al ítem 3. Sin embargo, ninguno de los maestros en ejercicio contestaron a las preguntas 9 y 10 y sólo un 37,14% de los profesores en ejercicio respondieron al ítem 10.</td></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><th></th><th colspan="2">Maestros en ejercicio (n=35)</th><th colspan="2">Profesores en ejercicio (n=35)</th></tr>
<tr><th></th><th>Frecuencia</th><th>Porcentaje</th><th>Frecuencia</th><th>Porcentaje</th></tr>
<tr><td>Libro de texto</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Calculadora</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Libro de texto y calculadora</td><td>23</td><td>65,71</td><td>25</td><td>71,43</td></tr>
<tr><td>Otros</td><td>12</td><td>34,29</td><td>10</td><td>28,57</td></tr>
<tr><td>LABAPC</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table>
</td><td>La mayoría de los docentes de nuestra muestra ha utilizado en su proceso de enseñanza-aprendizaje y utiliza en el aula el libro de texto y la calculadora.</td></tr>
</table>

**2**




El número de respuestas correctas ha fluctuado entre 1 y 9 en la muestra de los maestros en ejercicio. Sin embargo, para los profesores en ejercicio ha estado comprendida entre 3 y 12 ítems. El 40% de los docentes de Educación Primaria han contestado correctamente entre 6 y 7 ítems y el 34,29% de los profesores a 9 preguntas.

| | Maestros en ejercicio (n=35) | Profesores en ejercicio (n=35) |
|---|---|---|
| **Media** | 6,34 | 9,86 |
| **Desviación típica** | 1,91 | 1,79 |
| **Coeficiente de variación** | 0,30 | 0,18 |
| **Coeficiente de asimetría** | -0,49 | -1,60 |
| **Curtosis** | 0,01 | 4,19 |
| **Mínimo** | 1 | 3 |
| **Máximo** | 9 | 12 |

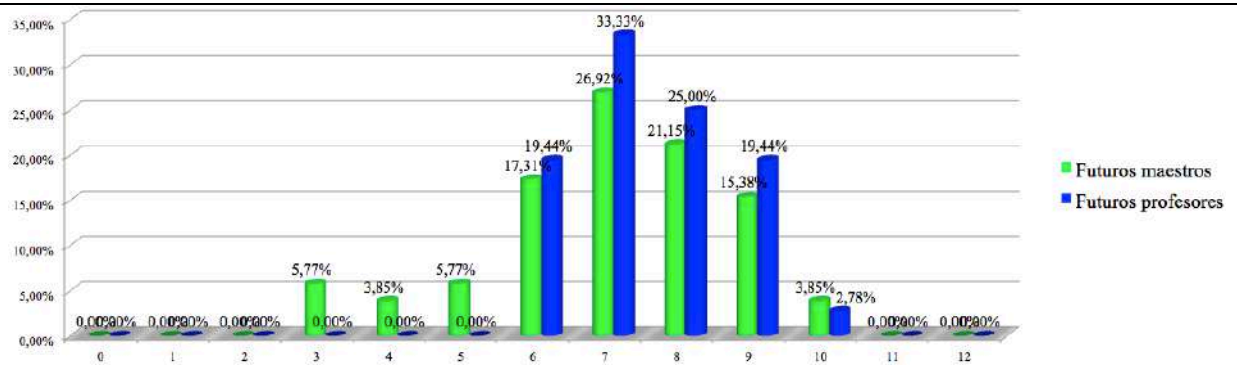
Por término medio, los maestros contestaron correctamente a 6,34 preguntas, mientras que los profesores respondieron bien a 3 ítems más. Dado a que ambos coeficientes de variación son menores a 0,3 se pueden considerar representativas estas medias, aunque la muestra de los profesores en ejercicio es más homogénea.

<table>
<tr>
<td>3</td>
<td>
<table>
<tr><th>Coeficiente de correlación lineal de Pearson</th><th>Maestros en ejercicio (n = 35)</th><th>Profesores en ejercicio (n = 35)</th></tr>
<tr><td>r</td><td>0,34</td><td>0,70</td></tr>
</table>
</td>
<td>Los coeficientes de correlación lineal observados son positivos por lo que existe una relación de dependencia positiva entre las variables, es decir, a medida que aumenta el número de respuestas correctas en los ítems de opción única, aumenta el número de respuestas correctas en los correspondientes a respuesta abierta. Cabe destacar que los profesores en ejercicio han alcanzado r=0,70, por tanto, existe una relación fuerte entre las variables mientras que los maestros en ejercicio presentan una relación más débil (r=0,34).</td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>
<table>
<tr><th>Profesores y maestros en ejercicio (n=70)</th><th>Chi-cuadrado</th><th>Grados de libertad</th><th>p</th><th>Contraste de hipótesis</th></tr>
<tr><td></td><td>45,3</td><td>12</td><td>0,05</td><td>Se rechaza la hipótesis de independencia</td></tr>
</table>
</td>
<td>Al ser rechazada la hipótesis de independencia, podemos asegurar que la categoría del profesor influye al contestar las 12 preguntas.</td>
</tr>
</table>

Tabla 6.6 Comparativa entre los profesores de Educación Primaria y Secundaria en ejercicio

### 6.8.2.2 COMPARATIVA ENTRE LOS FUTUROS PROFESORES

<table>
<tr><th>ANÁLISIS</th><th></th><th>COMPARATIVA</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>
<table>
<tr><th></th><th colspan="2">Futuros maestros (n=52)</th><th colspan="2">Futuros Profesores (n=36)</th></tr>
<tr><th></th><th>Frecuencia</th><th>Porcentaje</th><th>Frecuencia</th><th>Porcentaje</th></tr>
<tr><td>Ítem 1</td><td>51</td><td>98,08</td><td>33</td><td>91,67</td></tr>
<tr><td>Ítem 2</td><td>49</td><td>94,23</td><td>35</td><td>97,22</td></tr>
<tr><td>Ítem 3</td><td>48</td><td>92,31</td><td>35</td><td>97,22</td></tr>
<tr><td>Ítem 4</td><td>41</td><td>78,85</td><td>35</td><td>97,22</td></tr>
<tr><td>Ítem 5</td><td>26</td><td>50</td><td>20</td><td>55,56</td></tr>
<tr><td>Ítem 6</td><td>23</td><td>44,23</td><td>23</td><td>63,89</td></tr>
<tr><td>Ítem 7</td><td>38</td><td>73,08</td><td>32</td><td>88,89</td></tr>
<tr><td>Ítem 8</td><td>38</td><td>73,08</td><td>28</td><td>77,78</td></tr>
<tr><td>Ítem 9</td><td>15</td><td>28,85</td><td>2</td><td>5,56</td></tr>
<tr><td>Ítem 10</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Ítem 11</td><td>1</td><td>1,92</td><td>19</td><td>52,78</td></tr>
<tr><td>Ítem 12</td><td>15</td><td>28,85</td><td>17</td><td>47,22</td></tr>
</table>
</td><td>El 98,08% de los futuros maestros contestó correctamente al ítem 1, mientras que el 97,22% de los futuros profesores lo hicieron con las preguntas 2, 3 y 4. Sin embargo, ninguno de los futuros docentes contestaron a la pregunta 10.</td></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><th></th><th colspan="2">Futuros maestros (n=52)</th><th colspan="2">Futuros Profesores (n=36)</th></tr>
<tr><th></th><th>Frecuencia</th><th>Porcentaje</th><th>Frecuencia</th><th>Porcentaje</th></tr>
<tr><td>Libro de texto</td><td>0</td><td>0,00</td><td>3</td><td>8,33</td></tr>
<tr><td>Calculadora</td><td>2</td><td>0,04</td><td>3</td><td>8,33</td></tr>
<tr><td>Libro de texto y calculadora</td><td>0</td><td>0,00</td><td>26</td><td>72,22</td></tr>
<tr><td>Otros</td><td>6</td><td>15,34</td><td>4</td><td>11,11</td></tr>
<tr><td>LABAPC</td><td>44</td><td>84,62</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table>
</td><td>El 84,62% de los futuros maestros utilizan el LABAPC en su proceso de enseñanza-aprendizaje. Sin embargo, los futuros profesores han utilizado o utilizan en el aula el libro de texto y la calculadora.</td></tr>
</table>

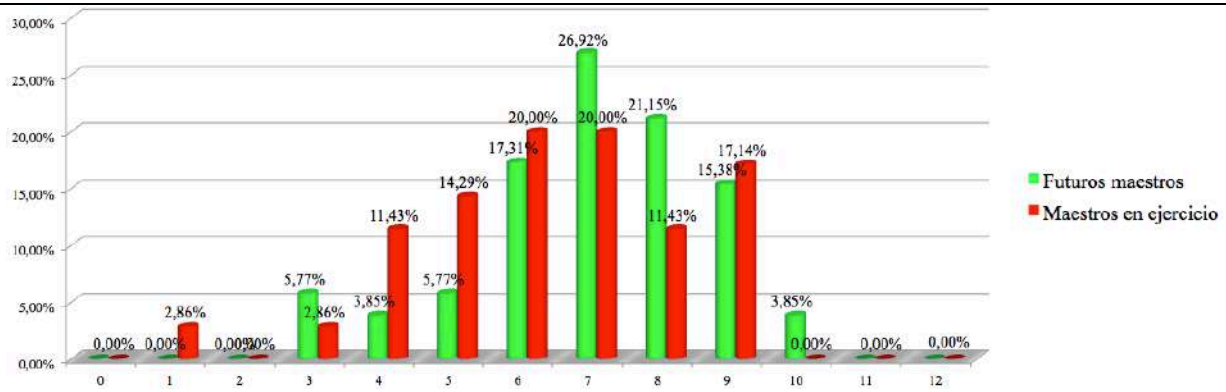
<table>
<tr>
<td rowspan="2">2</td>
<td> 
</td>
<td>El número de respuestas correctas ha fluctuado entre 3 y 10 en la muestra de los futuros maestros. Sin embargo, para los futuros profesores ha estado comprendida entre 6 y 10 ítems. El 48,07% de los futuros docentes de Educación Primaria han contestado correctamente entre 7 y 8 ítems y el 58,33% de los futuros profesores.</td>
</tr>
<tr>
<td>
<table>
<tr><th></th><th>Futuros maestros (n=52)</th><th>Futuros Profesores (n=36)</th></tr>
<tr><td>Media</td><td>7</td><td>7,53</td></tr>
<tr><td>Desviación típica</td><td>1,69</td><td>1,09</td></tr>
<tr><td>Coeficiente de variación</td><td>0,24</td><td>0,15</td></tr>
<tr><td>Coeficiente de asimetría</td><td>-0,60</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Curtosis</td><td>0,06</td><td>-0,86</td></tr>
<tr><td>Mínimo</td><td>3</td><td>6</td></tr>
<tr><td>Máximo</td><td>10</td><td>10</td></tr>
</table>
</td>
<td>Por término medio, los futuros maestros contestaron correctamente a 7 preguntas, mientras que los futuros profesores respondieron bien a 7,53 ítems. Dado a que ambos coeficientes de variación son menores a 0,3 se pueden considerar representativas estas medias, aunque la muestra de los futuros profesores es más homogénea.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>3</td>
<td>
<table>
<tr><th>Coeficiente de correlación lineal de Pearson</th><th>Futuros maestros (n =52)</th><th>Futuros profesores (n = 36)</th></tr>
<tr><td>r</td><td>0,46</td><td>0,21</td></tr>
</table>
</td>
<td>Los coeficientes de correlación lineal observados son positivos por lo que existe una relación de dependencia positiva entre las variables, es decir, a medida que aumenta el número de respuestas correctas en los ítems de opción única, aumenta el número de respuestas correctas en los correspondientes a respuesta abierta. Cabe destacar que los futuros profesores han alcanzado r=0,21, por tanto, existe una relación fuerte entre las variables mientras que los futuros maestros presentan una relación más fuerte (r=0,46).</td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>
<table>
<tr><th>Futuros maestros y profesores (n=88)</th><th>Chi-cuadrado</th><th>Grados de libertad</th><th>p</th><th>Contraste de hipótesis</th></tr>
<tr><td></td><td>3,72</td><td>12</td><td>0,05</td><td>Se acepta la hipótesis de independencia</td></tr>
</table>
</td>
<td>La hipótesis de independencia es aceptada. Por tanto, la categoría del profesor, en este caso, no influye al contestar los 12 ítems.</td>
</tr>
</table>

Tabla 6.7 Comparativa entre futuros profesores de Educación Primaria y Secundaria

### 6.8.2.3 COMPARATIVA ENTRE PROFESORES EN EJERCICIO Y FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA

<table>
<tr><th>ANÁLISIS</th><th></th><th>COMPARATIVA</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>
<table>
<tr><th></th><th colspan="2">Maestros en ejercicio (n=35)</th><th colspan="2">Futuros maestros (n=52)</th></tr>
<tr><th></th><th>Frecuencia</th><th>Porcentaje</th><th>Frecuencia</th><th>Porcentaje</th></tr>
<tr><td>Ítem 1</td><td>29</td><td>82,86</td><td>51</td><td>98,08</td></tr>
<tr><td>Ítem 2</td><td>30</td><td>85,71</td><td>49</td><td>94,23</td></tr>
<tr><td>Ítem 3</td><td>35</td><td>100</td><td>48</td><td>92,31</td></tr>
<tr><td>Ítem 4</td><td>28</td><td>80</td><td>41</td><td>78,85</td></tr>
<tr><td>Ítem 5</td><td>16</td><td>45,71</td><td>26</td><td>50</td></tr>
<tr><td>Ítem 6</td><td>22</td><td>62,86</td><td>23</td><td>44,23</td></tr>
<tr><td>Ítem 7</td><td>26</td><td>74,29</td><td>38</td><td>73,08</td></tr>
<tr><td>Ítem 8</td><td>20</td><td>57,14</td><td>38</td><td>73,08</td></tr>
<tr><td>Ítem 9</td><td>0</td><td>0</td><td>15</td><td>28,85</td></tr>
<tr><td>Ítem 10</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Ítem 11</td><td>1</td><td>2,86</td><td>1</td><td>1,92</td></tr>
<tr><td>Ítem 12</td><td>15</td><td>42,86</td><td>15</td><td>28,85</td></tr>
</table>
</td><td>El 98,08% de los futuros maestros contestó correctamente al ítem 1, mientras que el 100% de los maestros en ejercicio lo hicieron en el ítem 3. Sin embargo, ninguno de ellos contestaron al ítem 10.</td></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><th></th><th colspan="2">Maestros en ejercicio (n=35)</th><th colspan="2">Futuros maestros (n=52)</th></tr>
<tr><th></th><th>Frecuencia</th><th>Porcentaje</th><th>Frecuencia</th><th>Porcentaje</th></tr>
<tr><td>Libro de texto</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0,00</td></tr>
<tr><td>Calculadora</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>0,04</td></tr>
<tr><td>Libro de texto y calculadora</td><td>23</td><td>65,71</td><td>0</td><td>0,00</td></tr>
<tr><td>Otros</td><td>12</td><td>34,29</td><td>6</td><td>15,34</td></tr>
<tr><td>LABAPC</td><td>0</td><td>0</td><td>44</td><td>84,62</td></tr>
</table>
</td><td>El 84,62% de los futuros maestros utilizan el LABAPC en su proceso de enseñanza-aprendizaje. Sin embargo, los maestros en ejercicio han utilizado o utilizan en el aula el libro de texto y la calculadora.</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td rowspan="2">2</td>
<td> 
</td>
<td>El número de respuestas correctas ha fluctuado entre 3 y 10 en la muestra de los futuros maestros. Sin embargo, para los maestros en ejercicio ha estado comprendida entre 1 y 9 ítems. El 48,07% de los futuros docentes de Educación Primaria han contestado correctamente entre 7 y 8 ítems y el 40% de los maestros en ejercicio entre 6 y 7 ítems.</td>
</tr>
<tr>
<td>
<table>
<tr><th></th><th>Maestros en ejercicio (n=35)</th><th>Futuros maestros (n=52)</th></tr>
<tr><td>Media</td><td>6,34</td><td>7</td></tr>
<tr><td>Desviación típica</td><td>1,91</td><td>1,69</td></tr>
<tr><td>Coeficiente de variación</td><td>0,30</td><td>0,24</td></tr>
<tr><td>Coeficiente de asimetría</td><td>-0,49</td><td>-0,60</td></tr>
<tr><td>Curtosis</td><td>0,01</td><td>0,06</td></tr>
<tr><td>Mínimo</td><td>1</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Máximo</td><td>9</td><td>10</td></tr>
</table>
</td>
<td>Por término medio, los futuros maestros contestaron correctamente a 7 ítems, mientras que los futuros profesores respondieron bien a 7,53 ítems. Dado a que ambos coeficientes de variación son menores a 0,3 se pueden considerar representativas estas medias, aunque la muestra de los futuros profesores es más homogénea.</td>
</tr>
</table>

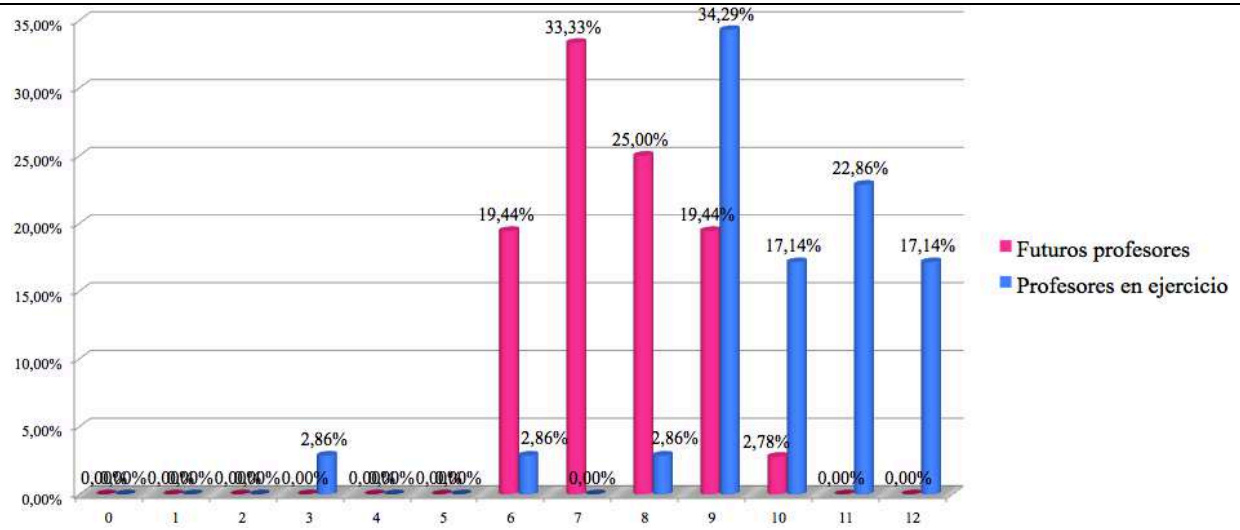
<table>
<tr>
<td>3</td>
<td>
<table>
<tr><th>Coeficiente de correlación lineal de Pearson</th><th>Maestros en ejercicio (n = 35)</th><th>Futuros maestros (n =52)</th></tr>
<tr><td>r</td><td>0,34</td><td>0,46</td></tr>
</table>
</td>
<td>Los coeficientes de correlación lineal observados son positivos por lo que existe una relación de dependencia positiva entre las variables, es decir, a medida que aumenta el número de respuestas correctas en los ítems de opción única, aumenta el número de respuestas correctas en los correspondientes a respuesta abierta. Cabe destacar que los futuros maestros han alcanzado r=0,46, por tanto, existe una relación fuerte entre las variables mientras que los maestros en ejercicio presentan una relación menos fuerte (r=0,34).</td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>
<table>
<tr><th>Maestros en ejercicio y futuros maestros (n=87)</th><th>Chi-cuadrado</th><th>Grados de libertad</th><th>p</th><th>Contraste de hipótesis</th></tr>
<tr><td></td><td>8,30</td><td>12</td><td>0,05</td><td>Se rechaza la hipótesis de independencia</td></tr>
</table>
</td>
<td>El hecho de introducir la asignatura de Matemática y su didáctica III y el recurso didáctico LABAPC en el Grado de Educación Primaria, influye a la hora de responder a los 12 ítems.</td>
</tr>
</table>

Tabla 6.8 Comparativa entre maestros en ejercicio y futuros maestros

### 6.8.2.4 COMPARATIVA ENTRE PROFESORES EN EJERCICIO Y FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

<table>
<tr><th>ANÁLISIS</th><th></th><th>COMPARATIVA</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>
<table>
<tr><th></th><th colspan="2">Profesores en ejercicio (n=35)</th><th colspan="2">Futuros Profesores (n=36)</th></tr>
<tr><th></th><th>Frecuencia</th><th>Porcentaje</th><th>Frecuencia</th><th>Porcentaje</th></tr>
<tr><td>Ítem 1</td><td>33</td><td>94,29</td><td>33</td><td>91,67</td></tr>
<tr><td>Ítem 2</td><td>32</td><td>91,43</td><td>35</td><td>97,22</td></tr>
<tr><td>Ítem 3</td><td>35</td><td>100</td><td>35</td><td>97,22</td></tr>
<tr><td>Ítem 4</td><td>33</td><td>94,29</td><td>35</td><td>97,22</td></tr>
<tr><td>Ítem 5</td><td>22</td><td>62,86</td><td>20</td><td>55,56</td></tr>
<tr><td>Ítem 6</td><td>33</td><td>94,29</td><td>23</td><td>63,89</td></tr>
<tr><td>Ítem 7</td><td>32</td><td>91,43</td><td>32</td><td>88,89</td></tr>
<tr><td>Ítem 8</td><td>33</td><td>94,29</td><td>28</td><td>77,78</td></tr>
<tr><td>Ítem 9</td><td>20</td><td>57,14</td><td>2</td><td>5,56</td></tr>
<tr><td>Ítem 10</td><td>13</td><td>37,14</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Ítem 11</td><td>32</td><td>91,43</td><td>19</td><td>52,78</td></tr>
<tr><td>Ítem 12</td><td>27</td><td>77,15</td><td>17</td><td>47,22</td></tr>
</table>
</td><td>El 97,22% de los futuros profesores contestaron correctamente a los ítem 2, 3 y 4, mientras que el 100% de los profesores en ejercicio lo hicieron con la pregunta 3. Sin embargo, ninguno de los futuros profesores contestaron a la pregunta 10.</td></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><th></th><th colspan="2">Profesores en ejercicio (n=35)</th><th colspan="2">Futuros Profesores (n=36)</th></tr>
<tr><th></th><th>Frecuencia</th><th>Porcentaje</th><th>Frecuencia</th><th>Porcentaje</th></tr>
<tr><td>Libro de texto</td><td>0</td><td>0</td><td>3</td><td>8,33</td></tr>
<tr><td>Calculadora</td><td>0</td><td>0</td><td>3</td><td>8,33</td></tr>
<tr><td>Libro de texto y calculadora</td><td>25</td><td>71,43</td><td>26</td><td>72,22</td></tr>
<tr><td>Otros</td><td>10</td><td>28,57</td><td>4</td><td>11,11</td></tr>
<tr><td>LABAPC</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table>
</td><td>Los futuros y los profesores en ejercicio han utilizado o utilizan en el aula el libro de texto y la calculadora, siendo un 71,43% y 72,22% respectivamente.</td></tr>
</table>

**2**




El número de respuestas correctas ha fluctuado entre 6 y 10 en la muestra de los futuros profesores. Sin embargo, para los profesores en ejercicio ha estado comprendida entre 3 y 12 ítems. El 58,33% de los futuros docentes de Educación Secundaria han contestado correctamente entre 7 y 8 ítems y el 34,29% de los profesores en ejercicio a 9 ítems.

| | Profesores en ejercicio (n=35) | Futuros Profesores (n=36) |
|---|---|---|
| **Media** | 9,86 | 7,53 |
| **Desviación típica** | 1,79 | 1,09 |
| **Coeficiente de variación** | 0,18 | 0,15 |
| **Coeficiente de asimetría** | -1,60 | 0,25 |
| **Curtosis** | 4,19 | -0,86 |
| **Mínimo** | 3 | 6 |
| **Máximo** | 12 | 10 |

Por término medio, los futuros profesores contestaron correctamente a 7,53 ítems, mientras que los profesores en ejercicio respondieron bien a 9,86 ítems. Dado a que ambos coeficientes de variación son menores a 0,3 se pueden considerar representativas estas medias, aunque la muestra de los futuros profesores es más homogénea.

<table>
<tr>
<td>3</td>
<td>
<table>
<tr><th>Coeficiente de correlación lineal de Pearson</th><th>Profesores en ejercicio (n = 35)</th><th>Futuros profesores (n = 36)</th></tr>
<tr><td>r</td><td>0,70</td><td>0,21</td></tr>
</table>
</td>
<td>Los coeficientes de correlación lineal observados son positivos por lo que existe una relación de dependencia positiva entre las variables, es decir, a medida que aumenta el número de respuestas correctas en los ítems de opción única, aumenta el número de respuestas correctas en los correspondientes a respuesta abierta. Cabe destacar que los futuros profesores han alcanzado r=0,21, por tanto, existe una relación fuerte entre las variables mientras que los profesores en ejercicio presentan una relación más fuerte (r=0,70).</td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>
<table>
<tr><th></th><th>Chi-cuadrado</th><th>Grados de libertad</th><th>p</th><th>Contraste de hipótesis</th></tr>
<tr><td>Profesores en ejercicio y futuros profesores (n=71)</td><td>42,78</td><td>12</td><td>0,05</td><td>Se rechaza la hipótesis de independencia</td></tr>
</table>
</td>
<td>Al rechazar la hipótesis de independencia, podemos asegurar que influye la categoría del profesor a la hora de contestar los 12 ítems.</td>
</tr>
</table>

Tabla 6.9 Comparativa entre profesores en ejercicio y futuros profesores

### 6.8.2.5 COMPARATIVA CON LA TESIS DE LA DOCTORA MARÍA JESÚS CAÑIZARES

La muestra que participó en la primera parte del estudio de esta doctora estuvo formada por un total de 320 niños y niñas de edades comprendidas entre 10 y 14 años, que cursaban sus estudios en tres colegios públicos de la ciudad de Jaén.

La recogida de datos se llevó a cabo durante el curso 1987-88 y la participación de los centros fue voluntaria. Los niños respondieron a los cuestionarios como una actividad más a desarrollar en la clase de Matemáticas.

El cuestionario de Green constaba de 251 alumnos y alumnas de edades comprendidas entre 11 y 14 años. Sin embargo, en el test de Fischbein y Gazit participaron 320 niños.

| Ítem | Cañizares | | | Tesis |
|---|---|---|---|---|
| Green | 6.º | 7.º | 8.º | |
| 1 | 68,1 | 87,4 | 80,8 | 92,41 |
| 2 | 63,7 | 75,9 | 68,5 | 92,41 |
| 3 | 79,1 | 77,0 | 75,3 | 96,84 |
| 4 | 78,0 | 87,4 | 83,6 | 86,71 |
| 5 | 38,5 | 39,1 | 34,2 | 53,16 |

Tabla 6.10 Comparativa entre de los ítems del cuestionario de Green de Cañizares y nuestra tesis. Porcentaje de respuestas correctas

Como cabe esperar nuestra muestra presenta mejores resultados que los de Cañizares , debido a que nuestra investigación se realiza con profesores. Aunque los niños de 12 años, en el ítem 4, obtuvieron un mayor porcentaje, existiendo así un problema en nuestra muestra, al evaluar la percepción de independencia de ensayos repetidos en las mismas condiciones.

| Ítem | Cañizares | | | | Tesis |
|---|---|---|---|---|---|
| F - G | 5.º | 6.º | 7.º | 8.º | |
| 6 | 26,1 | 37,4 | 39,1 | 50,7 | 63,92 |
| 7 | 39,1 | 54,9 | 59,3 | 68,1 | 81,01 |
| 8 | 68,1 | 78,0 | 73,6 | 91,8 | 75,32 |

Tabla 6.11 Comparativa entre de los ítems del cuestionario de Fischbein y Gazit de Cañizares y nuestra tesis. Porcentaje de respuestas correctas

En los ítems relacionados con Fischbein y Gazit, en la mayoría de los ítems nuestra muestra obtuvo mejores resultados, salvo en la pregunta 8, en la cual los niños de 6.º y 8.º superaron a los profesores, concretamente el 78% y 91,8% de los niños frente al 75,32% de los profesores, tratándose de la comparación de probabilidades.

### 6.8.3 TIPOLOGÍA DE ERRORES

Una vez analizados y comparados los resultados en los apartados anteriores. Esta sección se muestra los distintos errores cometidos por los participantes a la hora de responder los distintos ítems relacionados con el conocimiento matemático del profesor acerca del Azar y la Probabilidad.

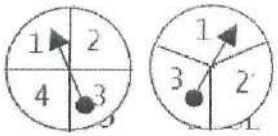
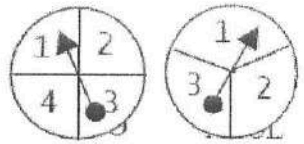
| Ítem | Grupo | Error cometido | ni | % | Imagen |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Maestros en ejercicio | La cara roja tiene más posibilidades | 6 | 3,80 | **Item 1:** Una ficha redonda es roja por una cara y verde por la otra. Se sostiene con la cara roja hacia arriba y se lanza al aire. Da vueltas en el aire y después cae al suelo. ¿Qué cara tiene más posibilidades de salir? ¿O, piensas que no hay ninguna diferencia entre las dos?. Señala la respuesta correcta:<br>(A) La cara roja tiene más posibilidades X<br>(B) La cara verde tiene más posibilidades ___<br>(C) No hay ninguna diferencia ___<br>(D) No lo sé ___ |
| | Profesores en ejercicio | La cara roja tiene más posibilidades | 2 | 1,27 | **Item 1:** Una ficha redonda es roja por una cara y verde por la otra. Se sostiene con la cara roja hacia arriba y se lanza al aire. Da vueltas en el aire y después cae al suelo. ¿Qué cara tiene más posibilidades de salir? ¿O, piensas que no hay ninguna diferencia entre las dos?. Señala la respuesta correcta:<br>(A) La cara roja tiene más posibilidades X<br>(B) La cara verde tiene más posibilidades ___<br>(C) No hay ninguna diferencia ___<br>(D) No lo sé ___ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Futuros maestros | La cara verde tiene más posibilidades | 1 | 0,63 | **Ítem 1:** Una ficha redonda es roja por una cara y verde por la otra. Se sostiene con la cara roja hacia arriba y se lanza al aire. Da vueltas en el aire y después cae al suelo. ¿Qué cara tiene más posibilidades de salir? ¿O, piensas que no hay ninguna diferencia entre las dos? Señala la respuesta correcta:<br>(A) La cara roja tiene más posibilidades ___<br>(B) *La cara verde tiene más posibilidades* X<br>(C) No hay ninguna diferencia ___<br>(D) No lo sé ___ |
| | Futuros profesores | La cara roja tiene más posibilidades | 3 | 1,90 | **Item 1:** Una ficha redonda es roja por una cara y verde por la otra. Se sostiene con la cara roja hacia arriba y se lanza al aire. Da vueltas en el aire y después cae al suelo. ¿Qué cara tiene más posibilidades de salir? ¿O, piensas que no hay ninguna diferencia entre las dos?. Señala la respuesta correcta:<br>(A) La cara roja tiene más posibilidades X<br>(B) La cara verde tiene más posibilidades ___<br>(C) No hay ninguna diferencia ___<br>(D) No lo sé ___ |
| | | La cara verde tiene más posibilidades | | | **Ítem 1:** Una ficha redonda es roja por una cara y verde por la otra. Se sostiene con la cara roja hacia arriba y se lanza al aire. Da vueltas en el aire y después cae al suelo. ¿Qué cara tiene más posibilidades de salir? ¿O, piensas que no hay ninguna diferencia entre las dos? Señala la respuesta correcta:<br>(A) La cara roja tiene más posibilidades ___<br>(B) *La cara verde tiene más posibilidades* X<br>(C) No hay ninguna diferencia ___<br>(D) No lo sé ___ |

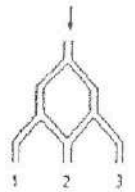
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | Maestros en ejercicio | Es más probable que el nombre sea de un niño que de una niña | 5 | 3,16 | Ítem 2: Una clase de matemáticas tiene 13 niños y 16 niñas. Cada nombre de los alumnos se escribe sobre un trozo de papel. Todos los trozos se ponen en un sombrero. El profesor saca uno sin mirar. Señala la frase correcta:<br>(A) Es más probable que el nombre sea de un niño que de una niña X<br>(B) Es más probable que el nombre sea de una niña que de un niño ___<br>(C) Es igual de probable que sea un niño que una niña ___<br>(D) No lo sé ___ |
| | Profesores en ejercicio | Es más probable que el nombre sea de un niño que de una niña | 3 | 1,90 | Ítem 2: Una clase de matemáticas tiene 13 niños y 16 niñas. Cada nombre de los alumnos se escribe sobre un trozo de papel. Todos los trozos se ponen en un sombrero. El profesor saca uno sin mirar. Señala la frase correcta:<br>(A) Es más probable que el nombre sea de un niño que de una niña X<br>(B) Es más probable que el nombre sea de una niña que de un niño ___<br>(C) Es igual de probable que sea un niño que una niña ___<br>(D) No lo sé ___ |

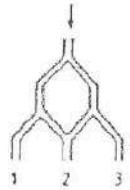
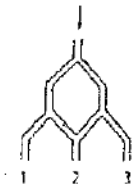
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Es igual de probable que sea un niño que una niña | | | **Ítem 2:** Una clase de matemáticas tiene 13 niños y 16 niñas. Cada nombre de los alumnos se escribe sobre un trozo de papel. Todos los trozos se ponen en un sombrero. El profesor saca uno sin mirar. Señala la frase correcta:<br>(A) Es más probable que el nombre sea de un niño que de una niña ___<br>(B) Es más probable que el nombre sea de una niña que de un niño ___<br>(C) Es igual de probable que sea un niño que una niña X<br>(D) No lo sé ___ |
| | Futuros maestros | Es más probable que el nombre sea de un niño que de una niña | 3 | 1,90 | **Ítem 2:** Una clase de matemáticas tiene 13 niños y 16 niñas. Cada nombre de los alumnos se escribe sobre un trozo de papel. Todos los trozos se ponen en un sombrero. El profesor saca uno sin mirar. Señala la frase correcta:<br>(A) Es más probable que el nombre sea de un niño que de una niña X<br>(B) Es más probable que el nombre sea de una niña que de un niño ___<br>(C) Es igual de probable que sea un niño que una niña ___<br>(D) No lo sé ___ |

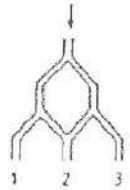
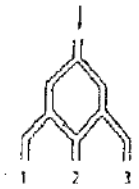
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Es igual de probable que sea un niño que una niña | | | **Ítem 2:** Una clase de matemáticas tiene 13 niños y 16 niñas. Cada nombre de los alumnos se escribe sobre un trozo de papel. Todos los trozos se ponen en un sombrero. El profesor saca uno sin mirar. Señala la frase correcta:<br>(A) Es más probable que el nombre sea de un niño que de una niña ___<br>(B) Es más probable que el nombre sea de una niña que de un niño ___<br>(C) Es igual de probable que sea un niño que una niña X<br>(D) No lo sé ___ |
| | Futuros profesores | Es igual de probable que sea un niño que una niña | 1 | 0,63 | **Ítem 2:** Una clase de matemáticas tiene 13 niños y 16 niñas. Cada nombre de los alumnos se escribe sobre un trozo de papel. Todos los trozos se ponen en un sombrero. El profesor saca uno sin mirar. Señala la frase correcta:<br>(A) Es más probable que el nombre sea de un niño que de una niña ___<br>(B) Es más probable que el nombre sea de una niña que de un niño ___<br>(C) Es igual de probable que sea un niño que una niña X<br>(D) No lo sé ___ |

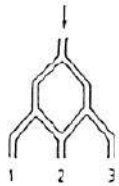
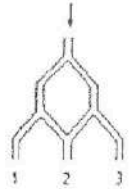
<table>
<tr>
<td>3</td>
<td>Futuros maestros</td>
<td>Es más fácil obtener 3 en el disco rojo</td>
<td>4</td>
<td>2,53</td>
<td>Ítem 3: La figura muestra dos discos (ruletas) que tienen agujas que una vez giradas se detienen y apuntan a un número. ¿Con qué disco es más fácil obtener un 3?<br>Señala la respuesta correcta:<br>(A) Es más fácil obtener 3 en el disco rojo ___<br>(B) Es más fácil obtener 3 en el disco azul ___<br>(C) Los dos discos dan la misma posibilidad de obtener 3 ___<br>(D) No lo sé ___<br>  <br>ROJO AZUL<br>¿Por qué eliges esa respuesta?<br>Porque las partes están igualmente Porque hay menos nºs y casillas más grandes</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>Los dos discos dan la misma posibilidad de obtener 3</td>
<td></td>
<td></td>
<td>Ítem 3: La figura muestra dos discos (ruletas) que tienen agujas que una vez giradas se detienen y apuntan a un número. ¿Con qué disco es más fácil obtener un 3?<br>Señala la respuesta correcta:<br>(A) Es más fácil obtener 3 en el disco rojo ___<br>(B) Es más fácil obtener 3 en el disco azul ___<br>(C) Los dos discos dan la misma posibilidad de obtener 3 X<br>(D) No lo sé ___<br>  <br>ROJO AZUL<br>¿Por qué eliges esa respuesta?<br>Porque me parece la más adecuada.</td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>Maestros en ejercicio</td>
<td>La próxima vez es más probable que salga CRUZ</td>
<td>7</td>
<td>4,43</td>
<td>(A) La próxima vez es más probable que otra vez salga CARA ___<br>(B) La próxima vez es más probable que salga CRUZ X<br>(C) La próxima vez es igual de probable que salga CARA o CRUZ ___<br>(D) No lo sé ___</td>
</tr>
</table>

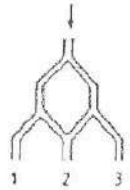
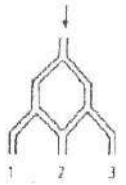
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | No lo sé | | | (A) La próxima vez es más probable que otra vez salga CARA ___<br>(B) La próxima vez es más probable que salga CRUZ ___<br>(C) La próxima vez es igual de probable que salga CARA o CRUZ ___<br>(D) No lo sé X |
| | Profesores en ejercicio | La próxima vez es más probable que salga CARA | 2 | 1,27 | (A) La próxima vez es más probable que otra vez salga CARA X<br>(B) La próxima vez es más probable que salga CRUZ ___<br>(C) La próxima vez es igual de probable que salga CARA o CRUZ ___<br>(D) No lo sé ___ |
| | Futuros maestros | La próxima vez es más probable que salga CARA | 11 | 6,96 | (A) La próxima vez es más probable que otra vez salga CARA X<br>(B) La próxima vez es más probable que salga CRUZ ___<br>(C) La próxima vez es igual de probable que salga CARA o CRUZ ___<br>(D) No lo sé ___ |
| | | La próxima vez es más probable que salga CRUZ | | | (A) La próxima vez es más probable que otra vez salga CARA ___<br>(B) La próxima vez es más probable que salga CRUZ X<br>(C) La próxima vez es igual de probable que salga CARA o CRUZ ___<br>(D) No lo sé ___ |

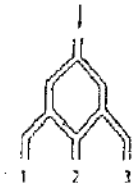
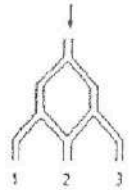
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | No lo sé | | | (A) La próxima vez es más probable que otra vez salga CARA ___<br>(B) La próxima vez es más probable que salga CRUZ ___<br>(C) La próxima vez es igual de probable que salga CARA o CRUZ ___<br>(D) No lo sé X |
| | Futuros profesores | La próxima vez es más probable que salga CRUZ | 1 | 0,63 | (A) La próxima vez es más probable que otra vez salga CARA ___<br>(B) La próxima vez es más probable que salga CRUZ X<br>(C) La próxima vez es igual de probable que salga CARA o CRUZ ___<br>(D) No lo sé ___ |
| 5 | Maestros en ejercicio | Por cada canal pasará aproximadamente el mismo número de bolas | 19 | 12,03 | **Ítem 5:** Supón que dejamos caer muchas bolas en el conjunto de canales dibujado:<br>Señala la frase que mejor describa dónde esperas tú que vayan las bolas.<br>  <br>(A) Por cada canal pasará aproximadamente el mismo número de bolas X<br>(B) Por 2 pasarán aproximadamente el doble de bolas que por 1 ó 3 ___<br>(C) Aproximadamente la mitad pasarán por 1 y la mitad por 3 ___<br>(D) Unas pocas pasarán por 1, casi todas por 2 unas pocas por 3 ___<br>(E) Ninguna de éstas ___ |

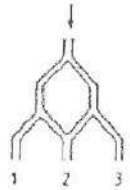
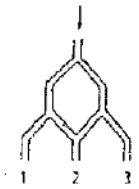
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Unas pocas pasarán por 1, casi todas por 2 unas pocas por 3 | | | **Ítem 5:** Supón que dejamos caer muchas bolas en el conjunto de canales dibujado:<br>Señala la frase que mejor describa dónde esperas tú que vayan las bolas.<br>  <br>(A) Por cada canal pasará aproximadamente el mismo número de bolas ___<br>(B) Por 2 pasarán aproximadamente el doble de bolas que por 1 ó 3 ___<br>(C) Aproximadamente la mitad pasarán por 1 y la mitad por 3 ___<br>(D) Unas pocas pasarán por 1, casi todas por 2 unas pocas por 3 X<br>(E) Ninguna de éstas ___ |
| | | Ninguna de éstas | | | **Ítem 5:** Supón que dejamos caer muchas bolas en el conjunto de canales dibujado:<br>Señala la frase que mejor describa dónde esperas tú que vayan las bolas.<br>  <br>(A) Por cada canal pasará aproximadamente el mismo número de bolas ___<br>(B) Por 2 pasarán aproximadamente el doble de bolas que por 1 ó 3 ___<br>(C) Aproximadamente la mitad pasarán por 1 y la mitad por 3 ___<br>(D) Unas pocas pasarán por 1, casi todas por 2 unas pocas por 3 ___<br>(E) Ninguna de éstas X |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Profesores en ejercicio | Unas pocas pasarán por 1, casi todas por 2 unas pocas por 3 | 6 | 4,43 | **Ítem 5:** Supón que dejamos caer muchas bolas en el conjunto de canales dibujado:<br>Señala la frase que mejor describa dónde esperas tú que vayan las bolas.<br>  <br>(A) Por cada canal pasará aproximadamente el mismo número de bolas ___<br>(B) Por 2 pasarán aproximadamente el doble de bolas que por 1 ó 3 ___<br>(C) Aproximadamente la mitad pasarán por 1 y la mitad por 3 ___<br>(D) Unas pocas pasarán por 1, casi todas por 2 unas pocas por 3 X<br>(E) Ninguna de éstas ___ |
| | | Ninguna de éstas | | | **Ítem 5:** Supón que dejamos caer muchas bolas en el conjunto de canales dibujado:<br>Señala la frase que mejor describa dónde esperas tú que vayan las bolas.<br>  <br>(A) Por cada canal pasará aproximadamente el mismo número de bolas ___<br>(B) Por 2 pasarán aproximadamente el doble de bolas que por 1 ó 3 ___<br>(C) Aproximadamente la mitad pasarán por 1 y la mitad por 3 ___<br>(D) Unas pocas pasarán por 1, casi todas por 2 unas pocas por 3 ___<br>(E) Ninguna de éstas X |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Sin respuesta | 1 | | **Ítem 5:** Supón que dejamos caer muchas bolas en el conjunto de canales dibujado:<br>Señala la frase que mejor describa dónde esperas tú que vayan las bolas.<br>  <br>(A) Por cada canal pasará aproximadamente el mismo número de bolas ___<br>(B) Por 2 pasarán aproximadamente el doble de bolas que por 1 ó 3 ___<br>(C) Aproximadamente la mitad pasarán por 1 y la mitad por 3 ___<br>(D) Unas pocas pasarán por 1, casi todas por 2 unas pocas por 3 ___<br>(E) Ninguna de éstas ___ |
| | Futuros maestros | Por cada canal pasará aproximadamente el mismo número de bolas | 26 | 16,46 | Ítem 5: Supón que dejamos caer muchas bolas en el conjunto de canales dibujado:<br>Señala la frase que mejor describa dónde esperas tú que vayan las bolas.<br>  <br>(A) Por cada canal pasará aproximadamente el mismo número de bolas X<br>(B) Por 2 pasarán aproximadamente el doble de bolas que por 1 ó 3 ___<br>(C) Aproximadamente la mitad pasarán por 1 y la mitad por 3 ___<br>(D) Unas pocas pasarán por 1, casi todas por 2 unas pocas por 3 ___<br>(E) Ninguna de éstas ___ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Unas pocas pasarán por 1, casi todas por 2 unas pocas por 3 | | | **Ítem 5:** Supón que dejamos caer muchas bolas en el conjunto de canales dibujado:<br>Señala la frase que mejor describa dónde esperas tú que vayan las bolas.<br>  <br>(A) Por cada canal pasará aproximadamente el mismo número de bolas ___<br>(B) Por 2 pasarán aproximadamente el doble de bolas que por 1 ó 3 ___<br>(C) Aproximadamente la mitad pasarán por 1 y la mitad por 3 ___<br>(D) Unas pocas pasarán por 1, casi todas por 2 unas pocas por 3 X<br>(E) Ninguna de éstas ___ |
| | | Aproximadamente la mitad pasarán por 1 y la mitad por 3 | | | **Ítem 5:** Supón que dejamos caer muchas bolas en el conjunto de canales dibujado:<br>Señala la frase que mejor describa dónde esperas tú que vayan las bolas.<br>  <br>(A) Por cada canal pasará aproximadamente el mismo número de bolas ___<br>(B) Por 2 pasarán aproximadamente el doble de bolas que por 1 ó 3 ___<br>(C) Aproximadamente la mitad pasarán por 1 y la mitad por 3 X<br>(D) Unas pocas pasarán por 1, casi todas por 2 unas pocas por 3 ___<br>(E) Ninguna de éstas ___ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Ninguna de éstas | | | **Ítem 5:** Supón que dejamos caer muchas bolas en el conjunto de canales dibujado:<br>Señala la frase que mejor describa dónde esperas tú que vayan las bolas.<br>  <br>(A) Por cada canal pasará aproximadamente el mismo número de bolas ___<br>(B) Por 2 pasarán aproximadamente el doble de bolas que por 1 ó 3 ___<br>(C) Aproximadamente la mitad pasarán por 1 y la mitad por 3 ___<br>(D) Unas pocas pasarán por 1, casi todas por 2 unas pocas por 3 ___<br>(E) Ninguna de éstas X |
| | Futuros profesores | Por cada canal pasará aproximadamente el mismo número de bolas | 16 | 10,13 | Ítem 5: Supón que dejamos caer muchas bolas en el conjunto de canales dibujado:<br>Señala la frase que mejor describa dónde esperas tú que vayan las bolas.<br>  <br>(A) Por cada canal pasará aproximadamente el mismo número de bolas X<br>(B) Por 2 pasarán aproximadamente el doble de bolas que por 1 ó 3 ___<br>(C) Aproximadamente la mitad pasarán por 1 y la mitad por 3 ___<br>(D) Unas pocas pasarán por 1, casi todas por 2 unas pocas por 3 ___<br>(E) Ninguna de éstas ___ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Unas pocas pasarán por 1, casi todas por 2 unas pocas por 3 | | | **Ítem 5:** Supón que dejamos caer muchas bolas en el conjunto de canales dibujado:<br>Señala la frase que mejor describa dónde esperas tú que vayan las bolas.<br>  <br>(A) Por cada canal pasará aproximadamente el mismo número de bolas ___<br>(B) Por 2 pasarán aproximadamente el doble de bolas que por 1 ó 3 ___<br>(C) Aproximadamente la mitad pasarán por 1 y la mitad por 3 ___<br>(D) Unas pocas pasarán por 1, casi todas por 2 unas pocas por 3 X<br>(E) Ninguna de éstas ___ |
| | | Ninguna de éstas | | | **Ítem 5:** Supón que dejamos caer muchas bolas en el conjunto de canales dibujado:<br>Señala la frase que mejor describa dónde esperas tú que vayan las bolas.<br>  <br>(A) Por cada canal pasará aproximadamente el mismo número de bolas ___<br>(B) Por 2 pasarán aproximadamente el doble de bolas que por 1 ó 3 ___<br>(C) Aproximadamente la mitad pasarán por 1 y la mitad por 3 ___<br>(D) Unas pocas pasarán por 1, casi todas por 2 unas pocas por 3 ___<br>(E) Ninguna de éstas X |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | Maestros en ejercicio | Ambas tienen razón | 13 | 8,23 | **Ítem 6:** Olivia y Juana van a comprar un billete de lotería y sólo quedan dos números: el 123456 y el 378146. Olivia prefiere jugar al primero, porque dice que es más fácil que en un sorteo resulten los números consecutivos. Juana, por el contrario, opina que la lotería es algo azaroso y, por tanto, el número 378146 tiene más posibilidades de salir. ¿Cuál es tu opinión respecto a las dos actitudes, la de Olivia y la de Juana? Que ambas están en lo cierto. Es la misma la opinión de uno como la de la otra. |
| | | Sin respuesta | 8 | | **Ítem 6:** Olivia y Juana van a comprar un billete de lotería y sólo quedan dos números: el 123456 y el 378146. Olivia prefiere jugar al primero, porque dice que es más fácil que en un sorteo resulten los números consecutivos. Juana, por el contrario, opina que la lotería es algo azaroso y, por tanto, el número 378146 tiene más posibilidades de salir. ¿Cuál es tu opinión respecto a las dos actitudes, la de Olivia y la de Juana? |
| | Profesores en ejercicio | Sin respuesta | 2 | 1,27 | **Ítem 6:** Olivia y Juana van a comprar un billete de lotería y sólo quedan dos números: el 123456 y el 378146. Olivia prefiere jugar al primero, porque dice que es más fácil que en un sorteo resulten los números consecutivos. Juana, por el contrario, opina que la lotería es algo azaroso y, por tanto, el número 378146 tiene más posibilidades de salir. ¿Cuál es tu opinión respecto a las dos actitudes, la de Olivia y la de Juana? |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Futuros maestros | Lo que opina Olivia | 29 | 18,35 | **Ítem 6:** Olivia y Juana van a comprar un billete de lotería y sólo quedan dos números: el 123456 y el 378146. Olivia prefiere jugar al primero, porque dice que es más fácil que en un sorteo resulten los números consecutivos. Juana, por el contrario, opina que la lotería es algo azaroso y, por tanto, el número 378146 tiene más posibilidades de salir. ¿Cuál es tu opinión respecto a las dos actitudes, la de Olivia y la de Juana?<br>Opino igual que Olivia. |
| | | Lo que opina Juana | | | **Ítem 6:** Olivia y Juana van a comprar un billete de lotería y sólo quedan dos números: el 123456 y el 378146. Olivia prefiere jugar al primero, porque dice que es más fácil que en un sorteo resulten los números consecutivos. Juana, por el contrario, opina que la lotería es algo azaroso y, por tanto, el número 378146 tiene más posibilidades de salir. ¿Cuál es tu opinión respecto a las dos actitudes, la de Olivia y la de Juana?<br>ESTOY DE ACUERDO CON JUANA. |
| | | Sin respuesta | 1 | | **Ítem 6:** Olivia y Juana van a comprar un billete de lotería y sólo quedan dos números: el 123456 y el 378146. Olivia prefiere jugar al primero, porque dice que es más fácil que en un sorteo resulten los números consecutivos. Juana, por el contrario, opina que la lotería es algo azaroso y, por tanto, el número 378146 tiene más posibilidades de salir. ¿Cuál es tu opinión respecto a las dos actitudes, la de Olivia y la de Juana? |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Futuros profesores | Lo que opina Juana | 13 | 8,23 | **Ítem 6:** Olivia y Juana van a comprar un billete de lotería y sólo quedan dos números: el 123456 y el 378146. Olivia prefiere jugar al primero, porque dice que es más fácil que en un sorteo resulten los números consecutivos. Juana, por el contrario, opina que la lotería es algo azaroso y, por tanto, el número 378146 tiene más posibilidades de salir. ¿Cuál es tu opinión respecto a las dos actitudes, la de Olivia y la de Juana?<br>Me quedo con la opinión de Juana ya que, los números salen al azar y de manera aleatoria, es muy complicado que salgan consecutivos. |
| | | Sin respuesta | 1 | | **Ítem 6:** Olivia y Juana van a comprar un billete de lotería y sólo quedan dos números: el 123456 y el 378146. Olivia prefiere jugar al primero, porque dice que es más fácil que en un sorteo resulten los números consecutivos. Juana, por el contrario, opina que la lotería es algo azaroso y, por tanto, el número 378146 tiene más posibilidades de salir. ¿Cuál es tu opinión respecto a las dos actitudes, la de Olivia y la de Juana? |
| 7 | Maestros en ejercicio | Es imposible dar una respuesta con los datos del problema | 9 | 5,70 | **Ítem 7:** Pablo tiene 100 bolas blancas y 50 negras en una caja. Miguel tiene en su caja 200 bolas blancas y 100 negras. Sin mirar, cada uno toma una bola de su propia caja. Compara sus posibilidades de extraer una bola negra. Marca con una X la respuesta correcta:<br>a) Pablo tiene mayor posibilidad de extraer una bola negra<br>b) Miguel tiene mayor posibilidad de extraer una bola negra<br>c) Sus posibilidades de extraer una bola negra son iguales<br>√ d) Es imposible dar una respuesta con los datos del problema |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Sin respuesta | 2 | | **Ítem 7:** Pablo tiene 100 bolas blancas y 50 negras en una caja. Miguel tiene en su caja 200 bolas blancas y 100 negras. Sin mirar, cada uno toma una bola de su propia caja. Compara sus posibilidades de extraer una bola negra. Marca con una X la respuesta correcta:<br>a) Pablo tiene mayor posibilidad de extraer una bola negra<br>b) Miguel tiene mayor posibilidad de extraer una bola negra<br>c) Sus posibilidades de extraer una bola negra son iguales<br>d) Es imposible dar una respuesta con los datos del problema |
| | Profesores en ejercicio | Miguel tiene mayor posibilidad de extraer una bola negra | 3 | | Ítem 7: Pablo tiene 100 bolas blancas y 50 negras en una caja. Miguel tiene en su caja 200 bolas blancas y 100 negras. Sin mirar, cada uno toma una bola de su propia caja. Compara sus posibilidades de extraer una bola negra. Marca con una X la respuesta correcta:<br>a) Pablo tiene mayor posibilidad de extraer una bola negra<br>Xb) Miguel tiene mayor posibilidad de extraer una bola negra<br>c) Sus posibilidades de extraer una bola negra son iguales<br>d) Es imposible dar una respuesta con los datos del problema |
| | Futuros maestros | Miguel tiene mayor posibilidad de extraer una bola negra | 14 | 8,86 | Ítem 7: Pablo tiene 100 bolas blancas y 50 negras en una caja. Miguel tiene en su caja 200 bolas blancas y 100 negras. Sin mirar, cada uno toma una bola de su propia caja. Compara sus posibilidades de extraer una bola negra. Marca con una X la respuesta correcta:<br>a) Pablo tiene mayor posibilidad de extraer una bola negra<br>Xb) Miguel tiene mayor posibilidad de extraer una bola negra<br>c) Sus posibilidades de extraer una bola negra son iguales<br>d) Es imposible dar una respuesta con los datos del problema |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Futuros profesores | Miguel tiene mayor posibilidad de extraer una bola negra | 4 | 2,53 | **Ítem 7:** Pablo tiene 100 bolas blancas y 50 negras en una caja. Miguel tiene en su caja 200 bolas blancas y 100 negras. Sin mirar, cada uno toma una bola de su propia caja. Compara sus posibilidades de extraer una bola negra. Marca con una X la respuesta correcta:<br>a) Pablo tiene mayor posibilidad de extraer una bola negra<br>X b) Miguel tiene mayor posibilidad de extraer una bola negra<br>c) Sus posibilidades de extraer una bola negra son iguales<br>d) Es imposible dar una respuesta con los datos del problema |
| 8 | Maestros en ejercicio | La inocencia es muy bonita | 15 | 9,49 | blanca porque ella es mayor, y por tanto es la más inteligente de las dos. ¿Cuál es tu opinión sobre esto?<br>Que la inocencia es muy bonita |
| | | La probabilidad de Rosa es mayor porque tiene más bolas blancas | | | **años. En su caja hay 30 bolas blancas y 15 negras. Cada una saca una bola de su propia caja sin mirar. Rosa opina que Pilar tiene mayor posibilidad de extraer una bola blanca porque ella es mayor, y por tanto es la más inteligente de las dos. ¿Cuál es tu opinión sobre esto?**<br>LA POSIBILIDAD DE QUE PILAR SACA UNA BOLA BLANCA ES MAYOR PORQUE TIENE MÁS BOLAS BLANCAS QUE ROSA |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Sin respuesta | 4 | | años. En su caja hay 30 bolas blancas y 15 negras. Cada una saca una bola de su propia caja sin mirar. Rosa opina que Pilar tiene mayor posibilidad de extraer una bola blanca porque ella es mayor, y por tanto es la más inteligente de las dos. ¿Cuál es tu opinión sobre esto? |
| | Profesores en ejercicio | Pienso que no tiene que ser así porque puede coger también una negra | 2 | 1,27 | blanca porque ella es mayor, y por tanto es la más inteligente de las dos. ¿Cuál es tu opinión sobre esto?<br>Pienso que no tiene que ser así, porque puede coger también una negra. |
| | Futuros maestros | Opino lo mismo que Rosa | 14 | 8,86 | años. En su caja hay 30 bolas blancas y 15 negras. Cada una saca una bola de su propia caja sin mirar. Rosa opina que Pilar tiene mayor posibilidad de extraer una bola blanca porque ella es mayor, y por tanto es la más inteligente de las dos. ¿Cuál es tu opinión sobre esto?<br>Opino lo mismo que Rosa |
| | | Tiene más posibilidad el que menos bolas tenga | | | años. En su caja hay 30 bolas blancas y 15 negras. Cada una saca una bola de su propia caja sin mirar. Rosa opina que Pilar tiene mayor posibilidad de extraer una bola blanca porque ella es mayor, y por tanto es la más inteligente de las dos. ¿Cuál es tu opinión sobre esto?<br>La edad no importa porque es sin mirar, tiene más posibilidades Rosa, porque son menos bolas. |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Pilar tiene razón porque tiene más bolas blancas | | | años. En su caja hay 30 bolas blancas y 15 negras. Cada una saca una bola de su propia caja sin mirar. Rosa opina que Pilar tiene mayor posibilidad de extraer una bola blanca porque ella es mayor, y por tanto es la más inteligente de las dos. ¿Cuál es tu opinión sobre esto? Tiene razón porque Pilar tiene más bolas blancas y tiene mayor posibilidad de extraer una antes que Rosa. Pero no tiene razón en el sentido de que porque es mayor que ella. |
| | | La edad no tiene que ver con la inteligencia | | | años. En su caja hay 30 bolas blancas y 15 negras. Cada una saca una bola de su propia caja sin mirar. Rosa opina que Pilar tiene mayor posibilidad de extraer una bola blanca porque ella es mayor, y por tanto es la más inteligente de las dos. ¿Cuál es tu opinión sobre esto? El azar no tiene nada que ver con la inteligencia y mucho menos con la edad |
| | | Sin respuesta | 2 | | años. En su caja hay 30 bolas blancas y 15 negras. Cada una saca una bola de su propia caja sin mirar. Rosa opina que Pilar tiene mayor posibilidad de extraer una bola blanca porque ella es mayor, y por tanto es la más inteligente de las dos. ¿Cuál es tu opinión sobre esto? |

<table>
<tr><td></td><td>Futuros profesores</td><td>Que tienen la misma probabilidad</td><td>8</td><td>5,06</td><td rowspan="2">años. En su caja hay 30 bolas blancas y 15 negras. Cada una saca una bola de su propia caja sin mirar. Rosa opina que Pilar tiene mayor posibilidad de extraer una bola blanca porque ella es mayor, y por tanto es la más inteligente de las dos. ¿Cuál es tu opinión sobre esto? Que Rosa es inexperta, las dos tienen las mismas posibilidades, a menos que Pilar sea una tramposilla y Rosa la conozca bien....</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Que Rosa es una inexperta a menos que Pilar sea una tramposilla…</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>9</td><td>Profesores en ejercicio</td><td>La probabilidad es $\frac{15}{36}$ y no es equitativo</td><td>15</td><td>9,49</td><td>Item 9: Se lanzan dos dados; si la suma de puntos obtenidos es mayor que siete el jugador gana; si vale siete, la tirada es nula, y si es inferior a siete, el jugador pierde ¿Cuál es la probabilidad de ganar? ¿Es equitativo este juego?<br>$P(G) = \frac{15}{36}$ ; No es equitativo<br>$< 50\%$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>La probabilidad es $\frac{15}{36}$ y no es equitativo porque la probabilidad de obtener suma 7 es inferior a las otras probabilidades.</td><td></td><td></td><td>Item 9: Se lanzan dos dados; si la suma de puntos obtenidos es mayor que siete el jugador gana; si vale siete, la tirada es nula, y si es inferior a siete, el jugador pierde ¿Cuál es la probabilidad de ganar? ¿Es equitativo este juego?<br>La probabilidad es $\frac{15}{36}$, y no es equitativo, porque la mayor parte, las sumas dan inferior a 7 ó 7.</td></tr>
</table>

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | P(ganar) $=\frac{6}{21}$. No es equitativo | | | **Ítem 9:** Se lanzan dos dados; si la suma de puntos obtenidos es mayor que siete el jugador gana; si vale siete, la tirada es nula, y si es inferior a siete, el jugador pierde ¿Cuál es la probabilidad de ganar? ¿Es equitativo este juego?<br>P(Gana) = $\frac{6}{21}$<br>No. |
| | | El juego no es equitativo. Es equitativo la probabilidad de ganar y la de perder pero no la de la tirada nula que es inferior | | | **Ítem 9:** Se lanzan dos dados; si la suma de puntos obtenidos es mayor que siete el jugador gana; si vale siete, la tirada es nula, y si es inferior a siete, el jugador pierde ¿Cuál es la probabilidad de ganar? ¿Es equitativo este juego?<br>la prob. de ganar = $\frac{15}{36}$<br>la de que la tirada sea nula = $\frac{6}{36}$<br>y la de perder = $\frac{15}{36}$<br>El juego no es equitativo, es equitativo la probabilidad de ganar y la de perder pero no la de que sea tirada nula que es inferior. |
| | | Sin respuesta | 1 | | **Ítem 9:** Se lanzan dos dados; si la suma de puntos obtenidos es mayor que siete el jugador gana; si vale siete, la tirada es nula, y si es inferior a siete, el jugador pierde ¿Cuál es la probabilidad de ganar? ¿Es equitativo este juego? |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Futuros maestros | La probabilidad de ganar es del 50% | 37 | 23,42 | **Ítem 9:** Se lanzan dos dados; si la suma de puntos obtenidos es mayor que siete el jugador gana; si vale siete, la tirada es nula, y si es inferior a siete, el jugador pierde ¿Cuál es la probabilidad de ganar? ¿Es equitativo este juego?<br>La probabilidad de ganar es el 50%. |
| | | No es equitativo | | | **Ítem 9:** Se lanzan dos dados; si la suma de puntos obtenidos es mayor que siete el jugador gana; si vale siete, la tirada es nula, y si es inferior a siete, el jugador pierde ¿Cuál es la probabilidad de ganar? ¿Es equitativo este juego?<br>NO es equitativo. |
| | | La probabilidad es alta. No es equitativo | | | **Ítem 9: Se lanzan dos dados; si la suma de puntos obtenidos es mayor que siete el jugador gana; si vale siete, la tirada es nula, y si es inferior a siete, el jugador pierde ¿Cuál es la probabilidad de ganar? ¿Es equitativo este juego?**<br>la probabilidad de gana es alta, no es equilibrado |
| | | No es equitativo debido a que hay 6 números del 1 al 7 y del 7 al 12 hay 5, por lo que hay mayores posibilidades de perder que de ganar | | | **Ítem 9:** Se lanzan dos dados; si la suma de puntos obtenidos es mayor que siete el jugador gana; si vale siete, la tirada es nula, y si es inferior a siete, el jugador pierde ¿Cuál es la probabilidad de ganar? ¿Es equitativo este juego?<br>No es equitativo debido a que hay 6 nºs del 1 al 7 y del 7 al 12 hay 5, por lo que hay mayores posibilidades de perder que de ganar |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | La probabilidad es nula. Es más probable que pierda. No es equitativo porque es cuestión de suerte | | | **Ítem 9:** Se lanzan dos dados; si la suma de puntos obtenidos es mayor que siete el jugador gana; si vale siete, la tirada es nula, y si es inferior a siete, el jugador pierde ¿Cuál es la probabilidad de ganar? ¿Es equitativo este juego?<br>La probabilidad es nula. Es más probable que pierda.<br>No es equitativo porque es cuestión de suerte. |
| | | Pueden salir valores de 2 a 12. La probabilidad de que sea mayor que 7 es $\frac{6}{11}$ | | | **Ítem 9:** Se lanzan dos dados; si la suma de puntos obtenidos es mayor que siete el jugador gana; si vale siete, la tirada es nula, y si es inferior a siete, el jugador pierde ¿Cuál es la probabilidad de ganar? ¿Es equitativo este juego?<br>PUEDEN SALIR VALORES DE 2 a 12. LA PROBABILIDAD DE QUE SEA MAYOR DE 7 es $\frac{6}{11} = 0,545 \rightarrow 54,5\%$ |
| | | La probabilidad de ganar es $\frac{5}{11}$ | | | **Ítem 9:** Se lanzan dos dados; si la suma de puntos obtenidos es mayor que siete el jugador gana; si vale siete, la tirada es nula, y si es inferior a siete, el jugador pierde ¿Cuál es la probabilidad de ganar? ¿Es equitativo este juego?<br>5 → 11 → $\frac{5}{11} = 0'45$<br>Gana / Posibilidad / Probabilidad<br>NO, el juego no es equitativo. |

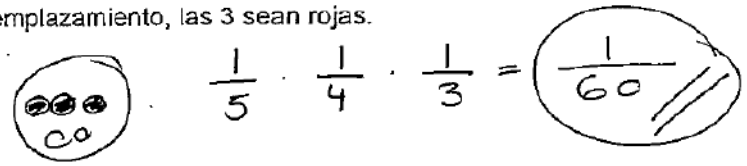
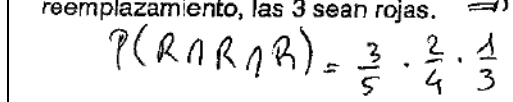
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | La probabilidad de ganar es 1 entre 3, es decir, un 33,3% y es equitativo | | | Ítem 9: Se lanzan dos dados; si la suma de puntos obtenidos es mayor que siete el jugador gana; si vale siete, la tirada es nula, y si es inferior a siete, el jugador pierde ¿Cuál es la probabilidad de ganar? ¿Es equitativo este juego?<br>La probabilidad de ganar es 1 entre 3, es decir un 33,3 %.<br>Y es equitativo. |
| | | Entiendo que es más o menos equitativo la probabilidad es casi la misma aunque un poco superior es la de ganar | | | **Ítem 9:** Se lanzan dos dados; si la suma de puntos obtenidos es mayor que siete el jugador gana; si vale siete, la tirada es nula, y si es inferior a siete, el jugador pierde ¿Cuál es la probabilidad de ganar? ¿Es equitativo este juego?<br>  <br>$\frac{28}{49} : 0,57 \Rightarrow 57\%$<br>Entiendo que es más o menos equitativo la probabilidad es casi la misma aunque un poco superior es la de ganar<br>**Ítem 10**: A un congreso de científicos asisten 100 |
| | | La probabilidad es $\frac{15}{36}$ y no es equitativo | | | **Ítem 9:** Se lanzan dos dados; si la suma de puntos obtenidos es mayor que siete el jugador gana; si vale siete, la tirada es nula, y si es inferior a siete, el jugador pierde ¿Cuál es la probabilidad de ganar? ¿Es equitativo este juego?<br>La posibilidad de ganar es 15 de 36 = 41,67%<br>No lo es. |

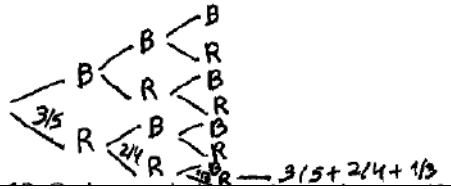
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Sin respuesta | 7 | | Ítem 9: Se lanzan dos dados; si la suma de puntos obtenidos es mayor que siete el jugador gana; si vale siete, la tirada es nula, y si es inferior a siete, el jugador pierde ¿Cuál es la probabilidad de ganar? ¿Es equitativo este juego? |
| | Futuros profesores | La probabilidad de ganar es $\frac{24}{36}$. No es equitativo | 34 | 21,52 | Ítem 9: Se lanzan dos dados; si la suma de puntos obtenidos es mayor que siete el jugador gana; si vale siete, la tirada es nula, y si es inferior a siete, el jugador pierde ¿Cuál es la probabilidad de ganar? ¿Es equitativo este juego? $\frac{24}{36}$ No. |
| | | Hay más probabilidad de perder porque hay un valor menos de opción de ganar ya que el 7 cuenta como nulo y para que fuese equitativo debería ser > 6 = ganar y ≤ 6 = perder | | | Ítem 9: Se lanzan dos dados; si la suma de puntos obtenidos es mayor que siete el jugador gana; si vale siete, la tirada es nula, y si es inferior a siete, el jugador pierde ¿Cuál es la probabilidad de ganar? ¿Es equitativo este juego? Hay más probabilidad de perder. Porque hay un valor menos de opción de ganar ya que el 7 (>6) cuenta como nulo y para que fuese equitativo debería ser >6 = ganar y ≤6 = perder. |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Hay más posibilidades de sacar menos de 7 que más, pues el mínimo sería 2 y el máximo 12 | | | **Ítem 9:** Se lanzan dos dados; si la suma de puntos obtenidos es mayor que siete el jugador gana; si vale siete, la tirada es nula, y si es inferior a siete, el jugador pierde ¿Cuál es la probabilidad de ganar? ¿Es equitativo este juego?<br>HAY MAS POSIBILIDADES DE SACAR MENOS DE 7 QUE MAS, PUES EL MÍNIMO SERÍA 2 Y EL MAXIMO 12 |
| | | La probabilidad de ganar es del 50% | | | **Ítem 9:** Se lanzan dos dados; si la suma de puntos obtenidos es mayor que siete el jugador gana; si vale siete, la tirada es nula, y si es inferior a siete, el jugador pierde ¿Cuál es la probabilidad de ganar? ¿Es equitativo este juego?<br>2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12<br>50% 50%<br>ES equitativo - la probabilidad si la tirada no es nula es 50% |
| | | La probabilidad de ganar es baja porque la probabilidad de sacar un siete es $\frac{12}{14}$ | | | **Ítem 9:** Se lanzan dos dados; si la suma de puntos obtenidos es mayor que siete el jugador gana; si vale siete, la tirada es nula, y si es inferior a siete, el jugador pierde ¿Cuál es la probabilidad de ganar? ¿Es equitativo este juego?<br>LA POSIBILIDAD DE GANAR ES BAJA, PORQUE LA PROBABILIDAD DE SACAR UN SIETE ES 12/14 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Sin respuesta | 9 | | **Ítem 9:** Se lanzan dos dados; si la suma de puntos obtenidos es mayor que siete el jugador gana; si vale siete, la tirada es nula, y si es inferior a siete, el jugador pierde ¿Cuál es la probabilidad de ganar? ¿Es equitativo este juego? |
| 10 | Profesores en ejercicio | La probabilidad es del 25% | 22 | 13,92 | **Ítem 10**: A un congreso de científicos asisten 100 congresistas. De ellos, 80 hablan francés y 40 inglés. ¿Cuál es la probabilidad de que 2 congresistas elegidos al azar no puedan entenderse sin intérprete?<br>80 — 100<br>20 — X<br>$\frac{2000}{80} =$ 25% |
| | | No sabemos de los 20 restantes cuantos hablan sólo francés o sólo inglés… | | | **Item 10**: A un congreso de científicos asisten 100 congresistas. De ellos, 80 hablan francés y 40 inglés. ¿Cuál es la probabilidad de que 2 congresistas elegidos al azar no puedan entenderse sin intérprete? No sabemos de los 20 restantes Cuantos hablan sólo francés o sólo inglés. Pues al azar podemos elgir 2 que sólo repan francés o dos que sólo repan inglés o 1 que repa francés y otro inglés. La pregunta no está bien formulada. |
| | | La probabilidad es del 20% | | | **Ítem 10**: A un congreso de científicos asisten 100 congresistas. De ellos, 80 hablan francés y 40 inglés. ¿Cuál es la probabilidad de que 2 congresistas elegidos al azar no puedan entenderse sin intérprete? 20% |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | La probabilidad es $\frac{4}{5}$ | | | **Ítem 10**: A un congreso de científicos asisten 100 congresistas. De ellos, 80 hablan francés y 40 inglés. ¿Cuál es la probabilidad de que 2 congresistas elegidos al azar no puedan entenderse sin intérprete?<br>$\frac{4}{5}$ |
| | | Sin respuesta | 5 | | **Ítem 10**: A un congreso de científicos asisten 100 congresistas. De ellos, 80 hablan francés y 40 inglés. ¿Cuál es la probabilidad de que 2 congresistas elegidos al azar no puedan entenderse sin intérprete? |
| 11 | Maestros en ejercicio | | 34 | 21,52 | 20 hablan inglés / frances<br>**Ítem 11**: Supongamos que una urna contiene 3 bolas rojas y 2 blancas y nos preguntamos cuál será la probabilidad de que, tomando 3 bolas de la urna, sin reemplazamiento, las 3 sean rojas. RRR BB<br>60%<br>RRR, RRB, RRB<br>RRR, RRB, RRB<br>RBB, RRB, RBB<br>RBB, RBR, RBB |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Profesores en ejercicio | | 3 | 1,90 | **Ítem 11**: Supongamos que una urna contiene 3 bolas rojas y 2 blancas y nos preguntamos cuál será la probabilidad de que, tomando 3 bolas de la urna, sin reemplazamiento, las 3 sean rojas.  |
| | Futuros maestros | | 51 | 32,28 | **Ítem 11**: Supongamos que una urna contiene 3 bolas rojas y 2 blancas y nos preguntamos cuál será la probabilidad de que, tomando 3 bolas de la urna, sin reemplazamiento, las 3 sean rojas.  |
| | Futuros profesores | | 17 | 10,76 | **Ítem 11**: Supongamos que una urna contiene 3 bolas rojas y 2 blancas y nos preguntamos cuál será la probabilidad de que, tomando 3 bolas de la urna, sin reemplazamiento, las 3 sean rojas.  |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | **Ítem 11:** Supongamos que una urna contiene 3 bolas rojas y 2 blancas y nos preguntamos cuál será la probabilidad de que, tomando 3 bolas de la urna, sin reemplazamiento, las 3 sean rojas.<br>$\frac{3}{5}\frac{B}{6} + \frac{2}{5}\frac{5}{5} = \frac{15}{5} + \frac{10}{5}$<br>LA POSIBILIDAD DE QUE SEAN LAS 3 BOLAS SEAN ROJAS ES 15/5 |
| | | | | | Item 11: Supongamos que una urna contiene 3 bolas rojas y 2 blancas y nos preguntamos cuál será la probabilidad de que, tomando 3 bolas de la urna, sin reemplazamiento, las 3 sean rojas.<br>  <br>$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = 0,1 \rightarrow 0,1 \cdot 100 = 10$<br>la probabilidad es un 10% |
| 12 | Maestros en ejercicio | | 20 | 12,66 | Ítem 11: Supongamos que una urna contiene 3 bolas rojas y 2 blancas y nos preguntamos cuál será la probabilidad de que, tomando 3 bolas de la urna, sin reemplazamiento, las 3 sean rojas.<br>315 |
| | Profesores en ejercicio | | 8 | 5,06 | Ítem 12: Cada uno de los motores de un avión puede averiarse durante un vuelo, con probabilidad 0,01. El avión puede continuar su vuelo si funcionan al menos la mitad de los motores. ¿Qué es más seguro, un avión de 2 o de 4 motores?<br>El de 4 motores, porque tienen que averiarse 2. |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Futuros maestros | | 37 | 23,42 | **Ítem 12:** Cada uno de los motores de un avión puede averiarse durante un vuelo, con probabilidad 0,01. El avión puede continuar su vuelo si funcionan al menos la mitad de los motores. ¿Qué es más seguro, un avión de 2 o de 4 motores?<br>E 1 motor = 0,01<br>2 motores = 0,02 ← avión más seguro.<br>4 motores = 0,04 → mayor probabilidad. |
| | | | | | **Ítem 12:** Cada uno de los motores de un avión puede averiarse durante un vuelo, con probabilidad 0,01. El avión puede continuar su vuelo si funcionan al menos la mitad de los motores. ¿Qué es más seguro, un avión de 2 o de 4 motores?<br>el de 2 motores. |
| | Futuros profesores | | 19 | 12,03 | **Ítem 12:** Cada uno de los motores de un avión puede averiarse durante un vuelo, con probabilidad 0,01. El avión puede continuar su vuelo si funcionan al menos la mitad de los motores. ¿Qué es más seguro, un avión de 2 o de 4 motores?<br>Entiendo que un avión es más seguro durante el vuelo si tiene sus 4 motores en funcionamiento. Puesto que de averiarse puede continuar el trayecto. |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | Ítem 12: Cada uno de los motores de un avión puede averiarse durante un vuelo, con probabilidad 0,01. El avión puede continuar su vuelo si funcionan al menos la mitad de los motores. ¿Qué es más seguro, un avión de 2 o de 4 motores?<br>Es más seguro uno de 4 motores, porque la Probabilidad de que se rompan 2 de 4 motores es $P = 0'01 \cdot 0'01 = 0'0001$ y la de que se rompa 1 de 2 motores es $P = 0'01$. |
| | | | | | Ítem 12: Cada uno de los motores de un avión puede averiarse durante un vuelo, con probabilidad 0,01. El avión puede continuar su vuelo si funcionan al menos la mitad de los motores. ¿Qué es más seguro, un avión de 2 o de 4 motores?<br>Lo mismo. Igual de seguros. |

Tabla 6.12 Tipología de errores

# CAPÍTULO 7

# LABAPC. LABORATORIO BÁSICO DE AZAR, PROBABILIDAD Y COMBINATORIA


7.1 Introducción
7.2 Justificación de su creación
7.3 LABAPC
  7.3.1 Objetivos perseguidos por LABAPC
7.4 Motivos de la nomenclatura LABAPC
  7.4.1 ¿Por qué "Laboratorio"?
  7.4.2 ¿Por qué "Básico"?
  7.4.3 ¿Por qué "Combinatoria"?
7.5 Estructura de LABAPC
  7.5.1 Azar y Probabilidad
  7.5.2 Análisis de problemas
  7.5.3 Combinatoria
  7.5.4 Equipamiento experimental
7.6 Consideraciones metedológico-didácticas
7.7 Experiencia de utilización con los alumnos

## 7.1 INTRODUCCIÓN

Una vez que se han analizado los distintos significados de la Probabilidad, en el capítulo 1, tomando sólo aquellos que afectan a la Educación Básica descrita en el currículo español (significado intuitivo, clásico, frecuencial y subjetivo) y habiendo sintetizado, en el capítulo 2, las distintas investigaciones según estos significados, empezando por el de Piaget en el significado clásico, el de Fischbein en el significado intuitivo, las asociadas al significado frecuencial y las relacionadas con el significado subjetivo.

En este capítulo se abordará el Estudio 4 sobre el Laboratorio Básico de Azar, Probabilidad y Combinatoria (LABAPC), véase la Web: http://ntic.educacion.es/w3//eos/MaterialesEducativos/mem2010/labazar/index.html.

Como se ha especificado anteriormente, en la última década del siglo XX tiene lugar una propuesta de cambio curricular en la enseñanza de la Probabilidad en todos los niveles educativos. No sólo en España, sino en otros países, se diseñan currículos en los que se sugiere iniciar esta enseñanza a una edad más temprana que la establecida, introduciendo la Probabilidad en su acepción frecuencial. La metodología recomendada está basada en la experimentación y simulación de experimentos aleatorios. Los estudiantes deben formular hipótesis, comprobar conjeturas y depurar sus teorías sobre la base de la nueva información. Se supone que esta metodología ayudará a superar las dificultades y obstáculos que, sobre el desarrollo de la intuición del Azar han descrito distintos autores, como Fischbein y Gazit (1984). Diversos autores españoles recomiendan abordar los temas de Azar y Probabilidad desde edades tempranas. Normalmente se toman como referentes los trabajos de Fischbein (1975) y Piaget (1975) basados en juegos de azar, dado que favorecen su adquisición de la manera más natural: la intuitiva. Estos trabajos experimentales producen resultados exitosos en la aplicación de juegos de azar para la enseñanza de Probabilidad, dado su carácter intuitivo, facilitando pasar de las intuiciones primarias sobre el Azar (las que se forman antes e independientemente de una enseñanza sistemática) a las intuiciones secundarias (que se forman después de un proceso sistemático de enseñanza).

En Educación Primaria se trata fundamentalmente de desarrollar una intuición probabilística lo más ajustada posible. Los métodos de asignación probabilística serán la estadística de la ocurrencia de los sucesos a estudio y el contraste antes y después de la experimentación. Todos los niños tienen, en mayor o menor medida, una opinión a priori desde edades muy tempranas de lo posible aunque indeterminado (intuición del

azar). El principal objetivo en esta etapa se centra en ajustar estos dos modos de asignación probabilística.

En Educación Secundaria Obligatoria, una aproximación frecuencial a la probabilidad sólo es posible si se realizan experimentos aleatorios, bajo las mismas condiciones, múltiples veces, es decir, si se experimenta la validez de la Ley del Azar o Ley de los Grandes Números.

La comprensión de la idea de frecuencia relativa, de la convergencia de las frecuencias relativas a algún valor que representa la probabilidad y la consideración de rachas de sucesos, son, sin duda, puntos claves para lograr el éxito en la enseñanza con este nuevo enfoque y esto es prácticamente imposible si sólo se recurre al libro de texto y otros materiales impresos.

## 7.2 JUSTIFICACIÓN DE SU CREACIÓN

Para conseguir el éxito en la enseñanza con este nuevo enfoque será necesario el uso de materiales analógicos específicos, ya que sería prácticamente imposible si se recurre solamente al libro de texto y a otros materiales impresos. Los materiales analógicos que permiten experimentar las propiedades de la frecuencia relativa y de la probabilidad presentan el inconveniente de que son escasísimos en las aulas, en todas las etapas y niveles. En el caso en el que el centro disponga de algún material, el profesorado puede tomar una actitud reticente a su utilización, ya sea por tradición pedagógica o por otras razones (parece una actividad "menos seria", "genera mucho desorden y pérdida de tiempo"…), por lo que el uso esporádico del material lo convierte en algo anecdótico más que en una herramienta metodológica. Esta situación empeora si se le suma el hecho de que el Azar y la Probabilidad es un bloque de contenidos relegado en la programación.

Por otra parte, estamos en la era digital, por lo que los materiales digitales que abordan esta temática son numerosos. No obstante, la mayoría de ellos son archivos en formato .pdf que se limitan a la exposición ordenada de contenidos teóricos y/o presentación de problemas resueltos. Son relativamente pocas las propuestas que incluyen "*applets*" (Descartes, Matemáticas Interactivas, de Eduteka, proyecto Agrega…) interactivos para la simulación de experimentos.

## 7.3 LABAPC

LABAPC es un recurso multimedia, en forma de página web, formado por más de cincuenta aplicaciones o instrumentos interactivos, íntimamente interrelacionadas entre sí (por su contenido, sus procedimientos, su interfaz…), creado por Juan García Moreno y que obtuvo el Primer Premio a Materiales Educativos del 2010 del Ministerio de Educación y Ciencias (MEC).

Las aplicaciones están concebidas para abordar la enseñanza y aprendizaje de la Probabilidad a través de una metodología basada en la experimentación y simulación aleatorias desde un enfoque frecuentista, que permita una experimentación estocástica repetible de cada situación-problema propuesto, apoyado en nociones estadísticas básicas y en conocimientos esenciales de combinatoria.

El hecho de ser una propuesta suficiente para abordar los contenidos en las etapas de 2.º y 3.er ciclos de Primaria y los cuatro cursos de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO), no se limita a ser una colección de "applets" y no se renuncia a un tratamiento, lo más ilustrativo y didáctico posible, de contenidos y procedimientos. A este respecto, el análisis y contraste de los resultados de los experimentos permite introducir, de manera contextualizada, los conceptos y procedimientos que conducen a la teoría y propiedades básicas de la Probabilidad.

### 7.3.1 OBJETIVOS PERSEGUIDOS POR LABAPC

Este material se destina, en primer lugar, a la comunidad docente, concretamente, para aquellos docentes innovadores dispuestos a experimentar un nuevo recurso didáctico que les permita un mejor tratamiento curricular de la Probabilidad y la Combinatoria.

A continuación se describen los objetivos perseguidos por LABAPC.

| OBJETIVOS | |
|---|---|
| 1. El desarrollo del **razonamiento inductivo**, el aprender a intuir, plantear hipótesis, hacer conjeturas, generalizar… A nivel de aprendizaje, la forma de razonar puede tener tanto interés como los propios contenidos conceptuales y es totalmente irrenunciable en Matemáticas. | 6. **Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos**, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados. |

| | |
|---|---|
| 2. El desarrollo del **razonamiento argumentativo o deductivo**, animando a los alumnos a ensayar argumentaciones cada vez más fundamentadas y convincentes, motivándolos en la capacidad para detectar inconsistencias en los razonamientos propios y ajenos, a que se enfoquen en explicar, verificar, comunicar, sistematizar y descubrir. | 7. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: **utilizar técnicas de recogida de la información** y procedimientos de medida. |
| 3. Favorecer una **actitud positiva ante la experimentación y la simulación** y el desarrollo de la confianza en la propia capacidad para experimentar, descubrir y comunicar. | 8. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información. Analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes. |
| 4. Favorecer una actitud positiva ante **la resolución de problemas** y mostrar confianza en la propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito, o para **plantear problemas nuevos**. | 9. **Utilizar de forma adecuada los distintos medios tecnológicos** (calculadoras, ordenadores, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje. |
| 5. Favorecer el disfrute de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos y utilitarios de las Matemáticas. | 10. Actuar ante los problemas que se plantean en la vida cotidiana de acuerdo con modos propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones, **identificando** |

| | |
|---|---|
| | **errores conceptuales, falacias, mitos, falsas creencias…** |
| | 11. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado. |

Tabla 7.1 Objetivos perseguidos por LABAPC

Estos objetivos constituyen el grueso de lo que se debe perseguir con el currículo de Matemáticas, sobre todo a la finalización de la ESO.

Se ha tenido en cuenta que las aplicaciones ayuden al profesorado en la atención a la diversidad. Es por ello, que el profesorado es el que debe conocer previamente el contenido de LABAPC, ya que dispone de aplicaciones que pueden ser utilizadas con alumnos de diferentes edades y niveles y en la que hay que distinguir entre las aplicaciones cerradas para el tratamiento de un determinado aspecto que no admite fácilmente gradación en niveles de dificultad y las abiertas, que pueden abordarse desde diferentes puntos de vista, con diferente intencionalidad, en torno a conceptos diferentes, etc.

## 7.4 MOTIVOS DE LA NOMENCLATURA LABAPC

En esta sección se analizará la denominación de LABAPC, dándole respuesta a las preguntas: ¿Por qué "Laboratorio"?, ¿Por qué "Básico"?, ¿Por qué "Combinatoria"?

### 7.4.1 ¿POR QUÉ "LABORATORIO"?

Porque se pone mayor énfasis en la simulación, experimentación y análisis que en la exposición de información. El Azar y la Probabilidad tratan, sobre todo, de experimentos aleatorios. Parece lógico poner el énfasis en la experimentación, al menos como punto de partida.

LABAPC dispone de un sólido equipamiento experimental. Aunque la mayor parte de las aplicaciones tienen elementos interactivos que permiten la simulación de experimentos aleatorios, se dedica un apartado del menú de aplicaciones a ofrecer

instrumentos para la experimentación. Se trata de aplicaciones polivalentes, configurables, que permiten un buen grado de libertad de uso por parte de alumnos y profesores.

En su conjunto, facilitan enormemente la realización de múltiples experimentos aleatorios así como una aproximación frecuentista a la probabilidad en la que el alumno pueda ser dueño de su propia incertidumbre. Es destacable, también, la idoneidad de estas aplicaciones para generar un sinfín de datos aprovechables en el estudio de la Estadística.

Este tipo de metodología frecuentista a la probabilidad no sólo persigue aceptar con mayor naturalidad la medida científica de la incertidumbre que supone la Regla de Laplace sino también, poner de manifiesto con mayor rotundidad, el isomorfismo o equivalencia de experimentos aleatorios; facilitar, en mayor medida, la superación de errores conceptuales, falsas creencias y condiciones a los que parece estar sometido el Azar; fomentar la actitud de valorar el poder de la simulación y la experimentación en sí mismas y como métodos de anticipación de resultados y la singularidad y creatividad que aportan algunos de ellos.

### 7.4.2 ¿POR QUÉ "BÁSICO"?

Porque pretende facilitar la adquisición de conocimientos, procedimientos, actitudes y desarrollo de competencias matemáticas, en torno a los bloques de Azar, Probabilidad y Combinatoria, que pueden considerarse como razonables y fundamentales para los alumnos a lo largo de las Etapas Primaria (sobre todo de 3.$^{er}$ ciclo) y Secundaria.

### 7.4.3 ¿POR QUÉ "COMBINATORIA"?

Cuando se pretende construir el espacio muestral de un experimento compuesto, surge, de manera natural, como un problema de lógica, la necesidad de realizar agrupaciones, de poner la Combinatoria al servicio de la realización correcta de esas agrupaciones, según se repitan los elementos o no, según se puedan tomar todos los elementos de que disponemos o no, según influya o no el orden de colocación de los elementos…

La combinatoria se presenta como necesaria para el cálculo de probabilidades, tanto empírica como teórica, y ligada concretamente al recuento y obtención de todos los sucesos posibles en un experimento aleatorio. Aparece con frecuencia en el contexto

de análisis de las situaciones-problema más complejas propuestas en LABAPC. No obstante, también recibe un tratamiento específico y se le ha asignado un bloque del menú de aplicaciones.

En menor medida, y aún pudiendo ser una continuación lógica de muchas de las tareas propuestas, se abordan formalmente las medidas de centralización y dispersión para que exista una coordinación Probabilidad-Estadística.

## 7.5 ESTRUCTURA DE LABAPC

Este material pretende situarse justo allí donde no pueden situarse los materiales impresos estáticos. En ningún momento es incompatible con los mismos. Dado a que se pueden encontrar fácilmente en la red buenas baterías de problemas estandarizados sobre Probabilidad y Combinatoria, no se dedica  esfuerzo a esa tarea sino que se sugieren sitios en los que encontrar material complementario. A excepción de un escaso número de aplicaciones dedicadas a ilustrar de manera interactiva aspectos teóricos (Triángulo de Pascal y números combinatorios, álgebra de sucesos, tabla-resumen de combinatoria) todas las demás plantean una situación-problema a la que se puede dar una primera respuesta experimental, mediante simulación, y luego se analiza a la luz de las propiedades básicas de la Probabilidad y/o con la ayuda de las técnicas de recuento de la Combinatoria.

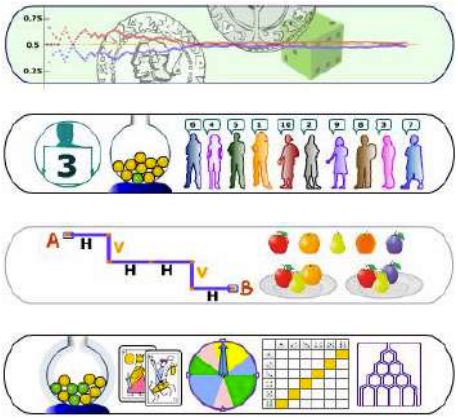
Estos materiales te permitirán simular experimentos aleatorios (como lanzar dados o monedas, extraer bolas de una urna, extraer cartas de una baraja, etc…). Podrás repetir un experimento tantas veces como desees, incluso dejar al ordenador generando datos mientras meriendas, para descubrir, analizando los datos correspondientes a los sucesos que se dan, las regularidades que se presentan.

El total de las aplicaciones que forma LABAPC, se organizan en cuatro bloques: **Azar y Probabilidad**, **Situaciones Problemáticas**, **Combinatoria** y **Equipamiento Experimental**.




Figura 7.1 Cabecera de LABAPC

Estos son los logotipos de cada una de los bloques del menú principal (se utilizan como botones):





"Ir al menú de Azar y Probabilidad" (que contiene veinte aplicaciones)

"Ir al menú de Situaciones problemáticas" (que contiene seis aplicaciones)

"Ir al menú Combinatoria" (que contiene nueve aplicaciones)

"Ir al menú de Equipamiento Experimental" (catorce aplicaciones)

Logotipo general de LABAPC. Se trata de un botón que permite acceder desde cualquier aplicación al menú principal.

Figura 7.2 Logotipos de cada uno de los bloques de LABAPC

### 7.5.1 AZAR Y PROBABILIDAD

Azar y Probabilidad se corresponde con el primer bloque del LABAPC. Está dividido en dos partes: Azar e incertidumbre y Aproximación frecuencial a la Probabilidad.

1a. Azar e incertidumbre. Se trata de un conjunto de siete aplicaciones diferentes que se muestran como siete capítulos de un mismo todo. Pueden ser trabajadas por alumnos de 2.º y 3.er ciclos de Primaria. Se trata de sencillas situaciones-juego que ponen a los alumnos en situaciones de mayor o menor incertidumbre para que diferencien las situaciones deterministas de las de azar, así como un primer contacto con el análisis de lo que puede ocurrir en cada juego (sucesos) con mayor o menor facilidad. Algunas de ellas están dotadas de cuestionarios de autoevaluación con preguntas de respuesta múltiple, o bien de actividades de clasificación mediante etiquetas desplazables. A continuación se muestran algunos capítulos de LABAPC.




Figura 7.3 Logotipos del bloque Azar y Probabilidad y sus capítulos

## CAPÍTULO 1

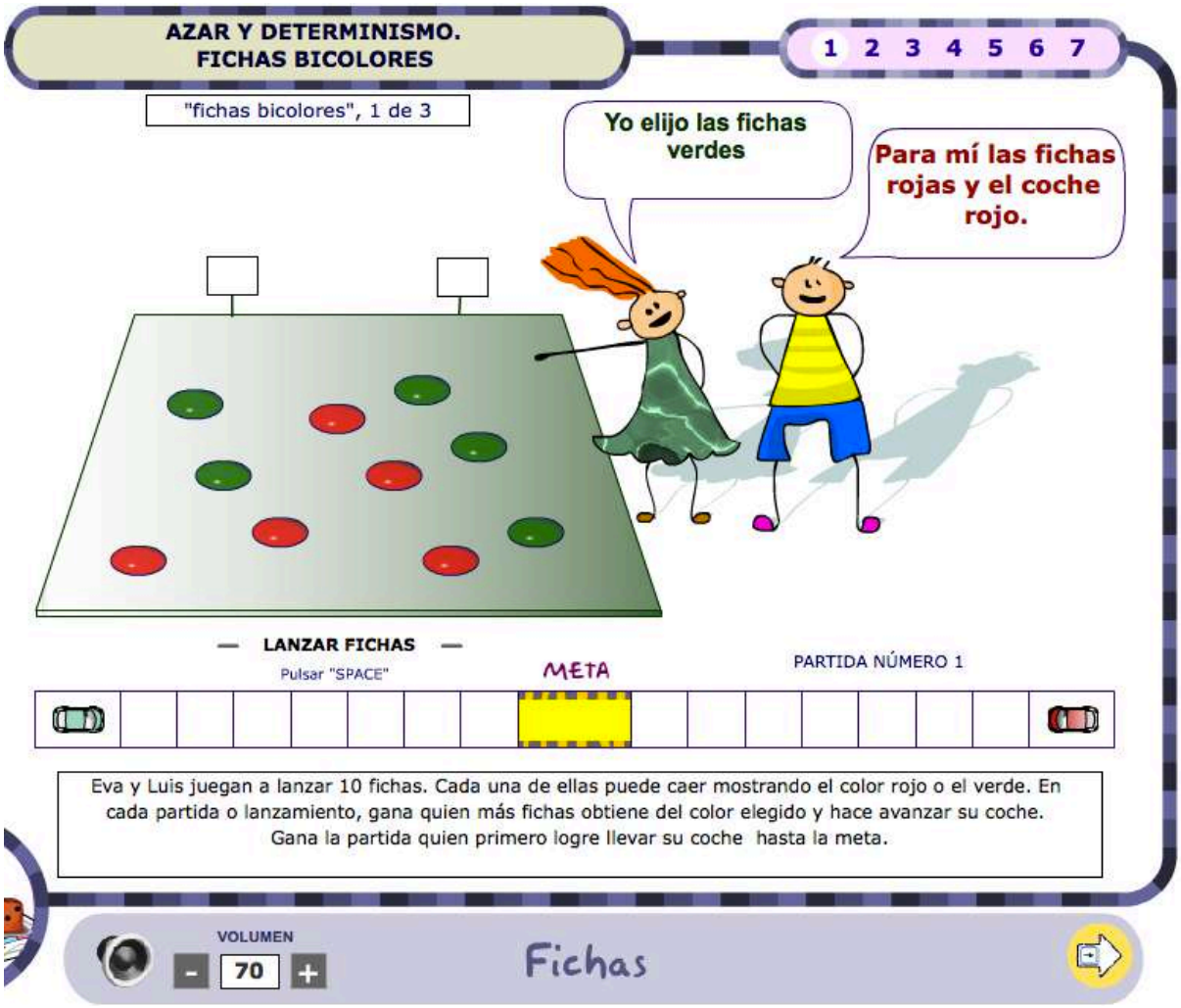



Figura 7.4 Capítulo 1. Azar y determinismo. Fichas bicolores

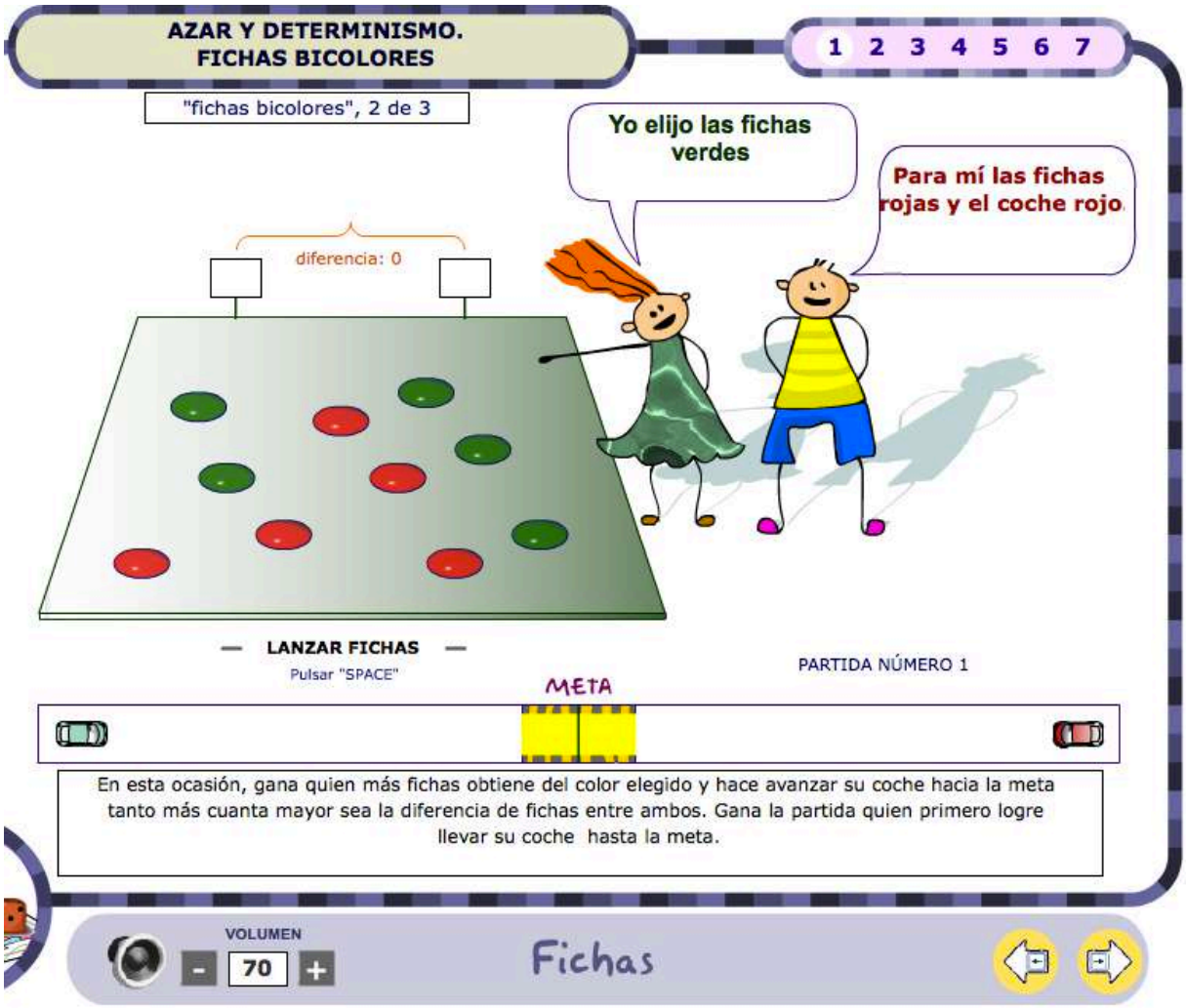



Figura 7.5 Capítulo 1. Azar y determinismo. Fichas bicolores




Figura 7.6 Capítulo 1. Azar y determinismo. Fichas bicolores

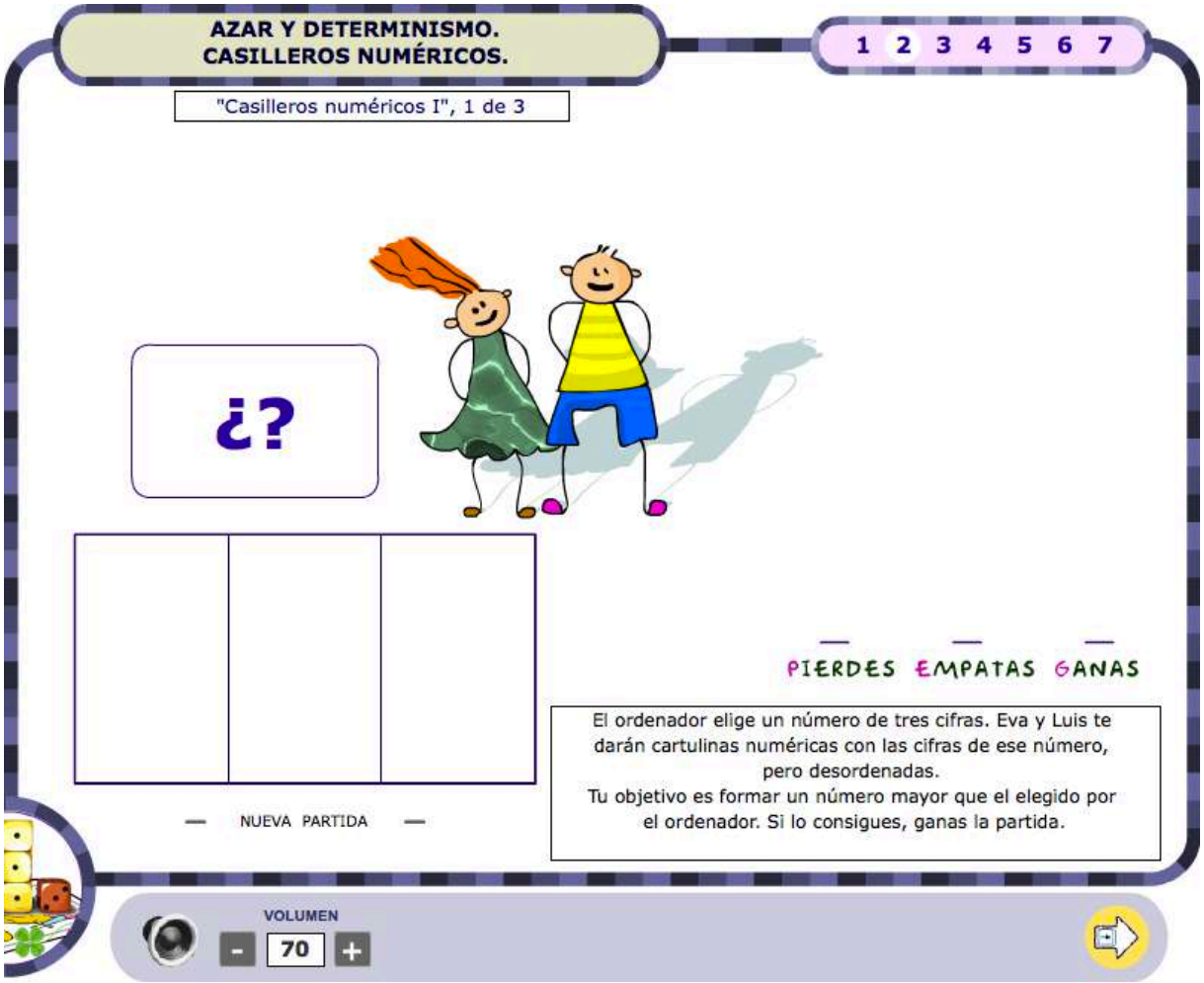



Figura 7.7 Capítulo 2. Azar y determinismo. Casilleros numéricos

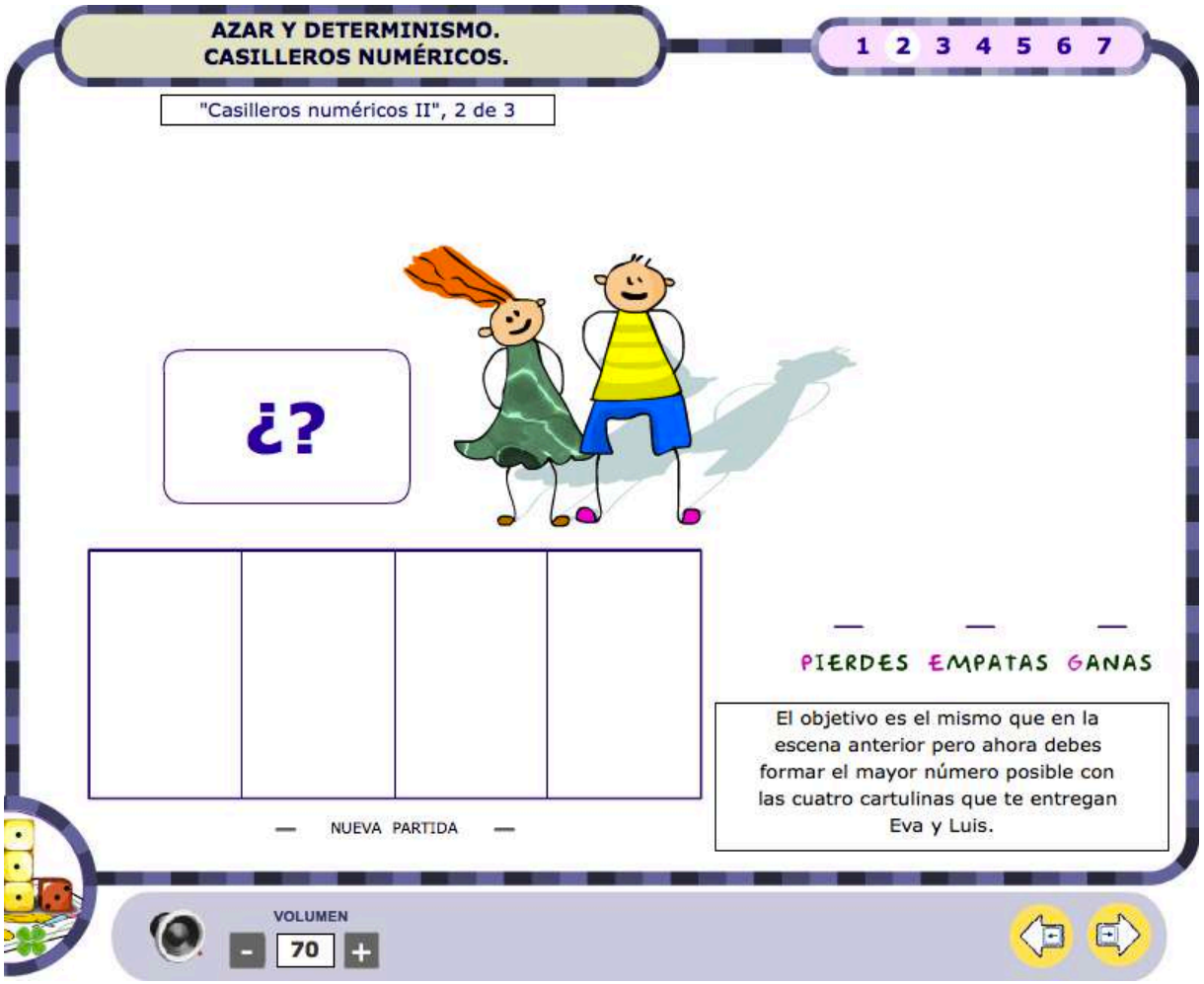



Figura 7.8 Capítulo 2. Azar y determinismo. Casilleros numéricos




Figura 7.9 Capítulo 2. Azar y determinismo. Casilleros numéricos

## CAPÍTULO 3

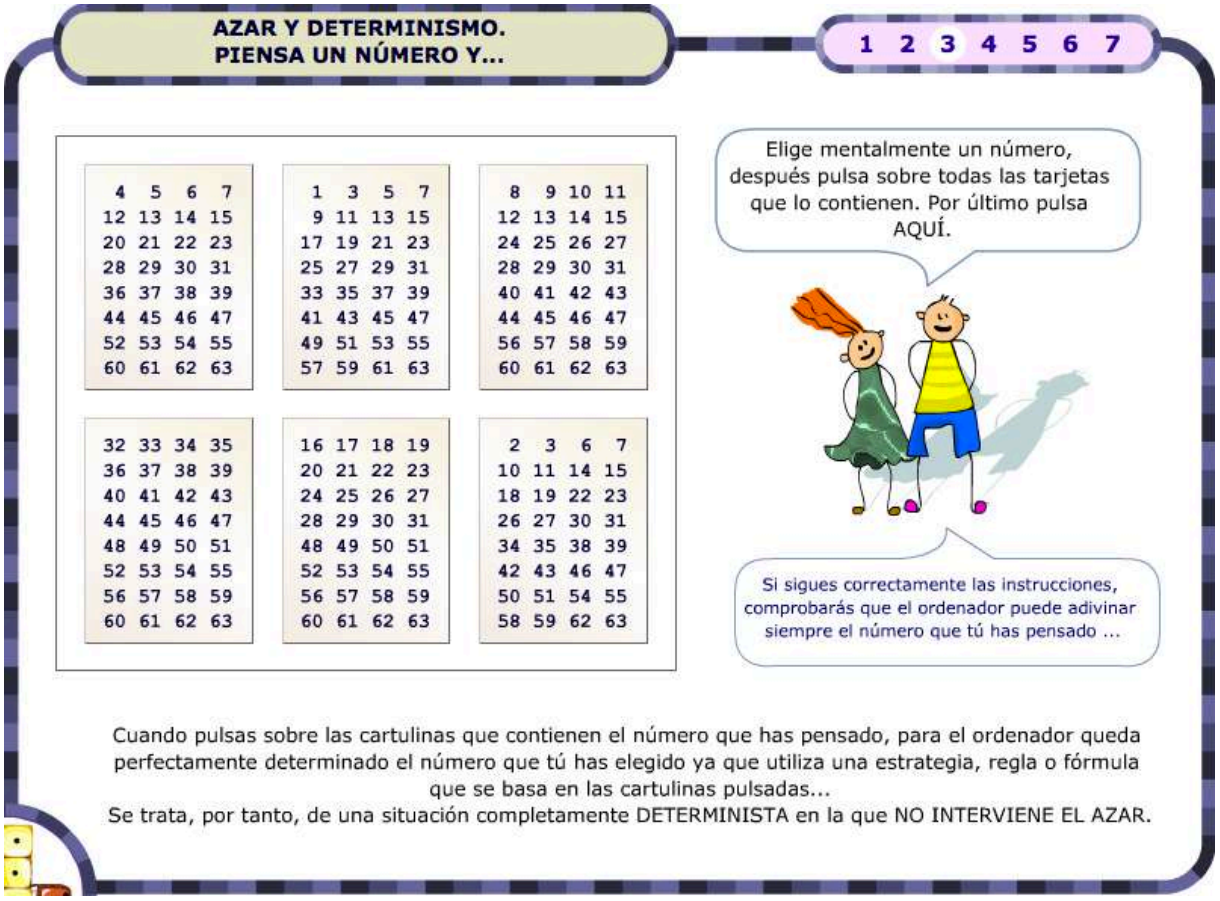



Figura 7.10 Capítulo 3. Azar y determinismo. Piensa un número y…

## CAPÍTULO 4




Figura 7.11 Capítulo 4. Azar y determinismo. ¿Qué ostra tiene perla?




Figura 7.12 Capítulo 4. Azar y determinismo. ¿Qué ostra tiene perla?

# CAPÍTULO 5




Figura 7.13 Capítulo 5. Azar y determinismo. Baraja




Figura 7.14 Capítulo 5. Azar y determinismo. Baraja

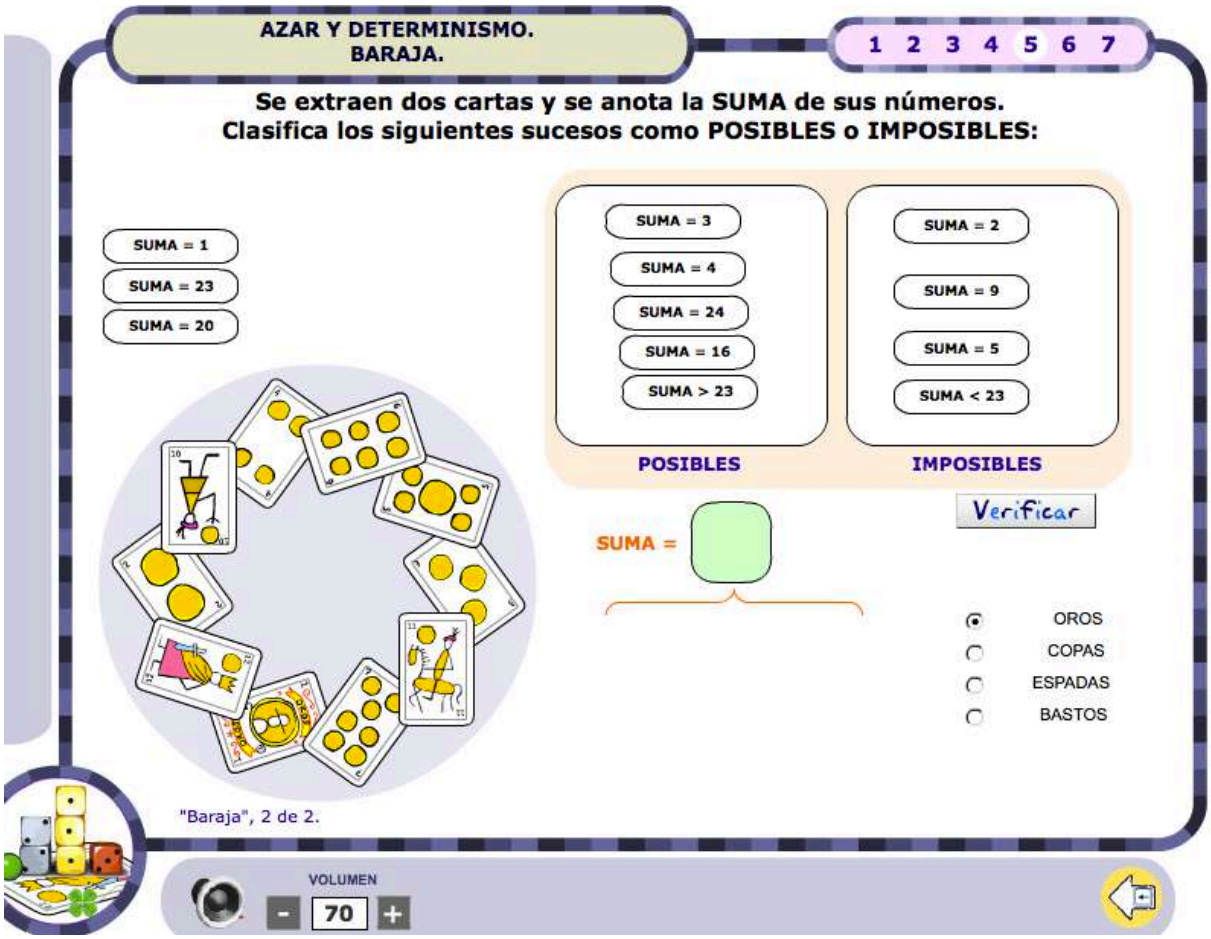



Figura 7.15 Capítulo 5. Azar y determinismo. Baraja

## CAPÍTULO 6

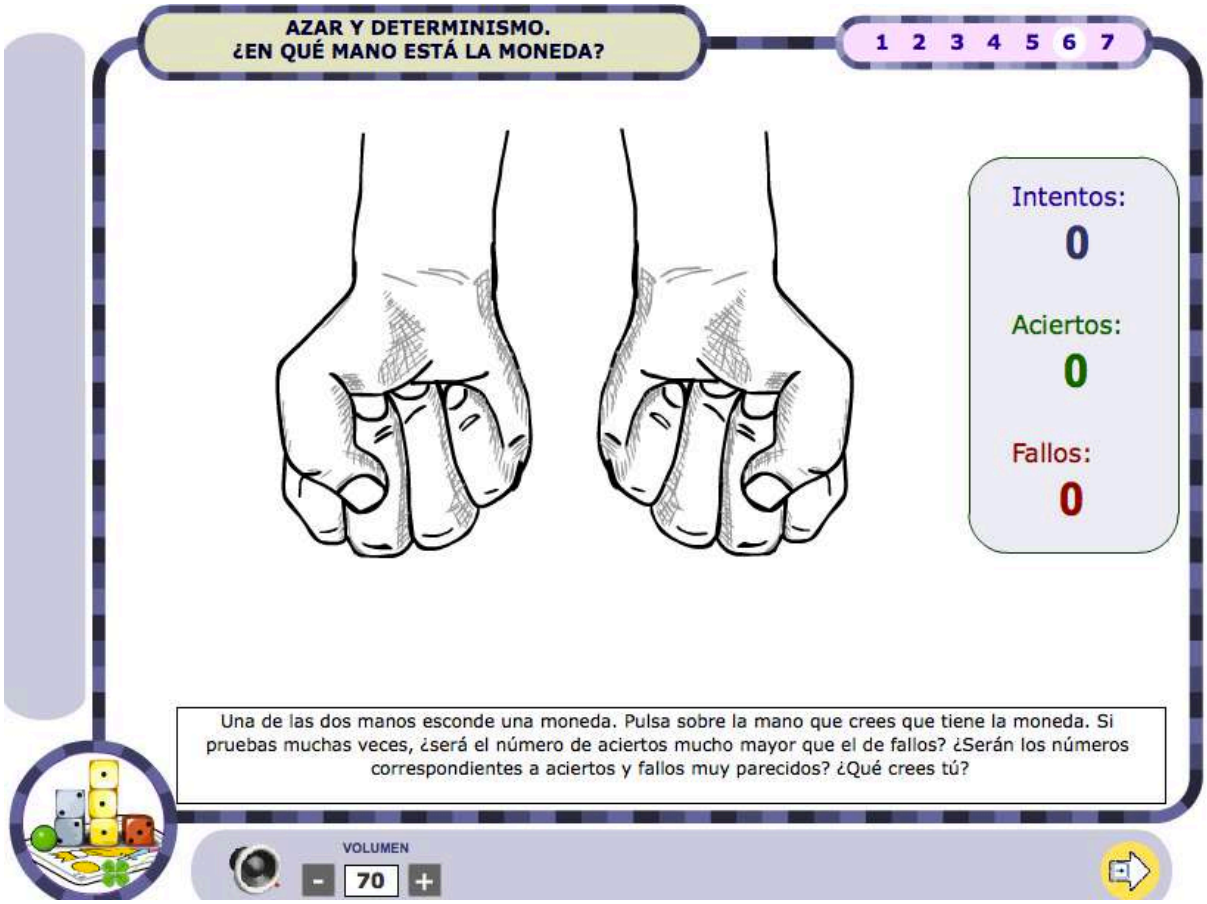



Figura 7.16 Capítulo 6. Azar y determinismo. ¿En qué mano está la moneda?

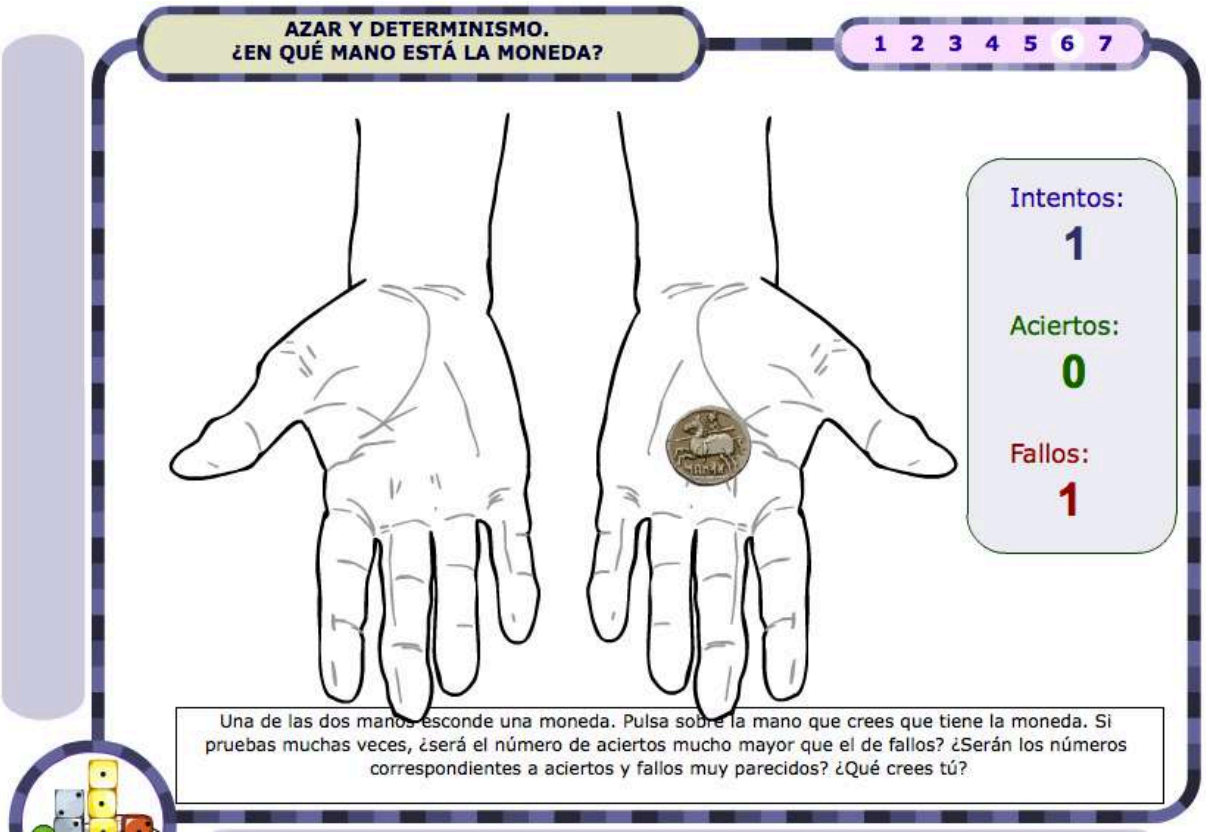



Figura 7.17 Capítulo 6. Azar y determinismo. ¿En qué mano está la moneda?

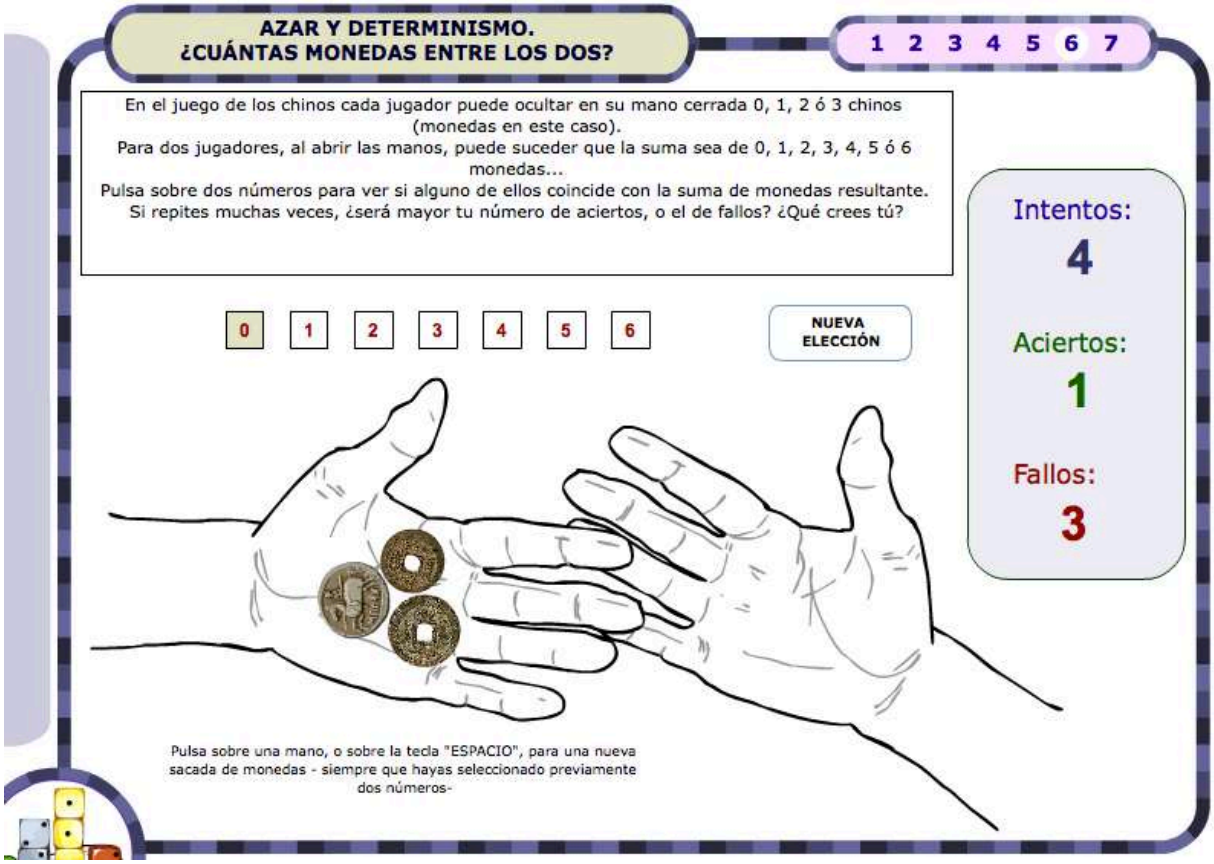



Figura 7.18 Capítulo 6. Azar y determinismo. ¿En qué mano está la moneda?

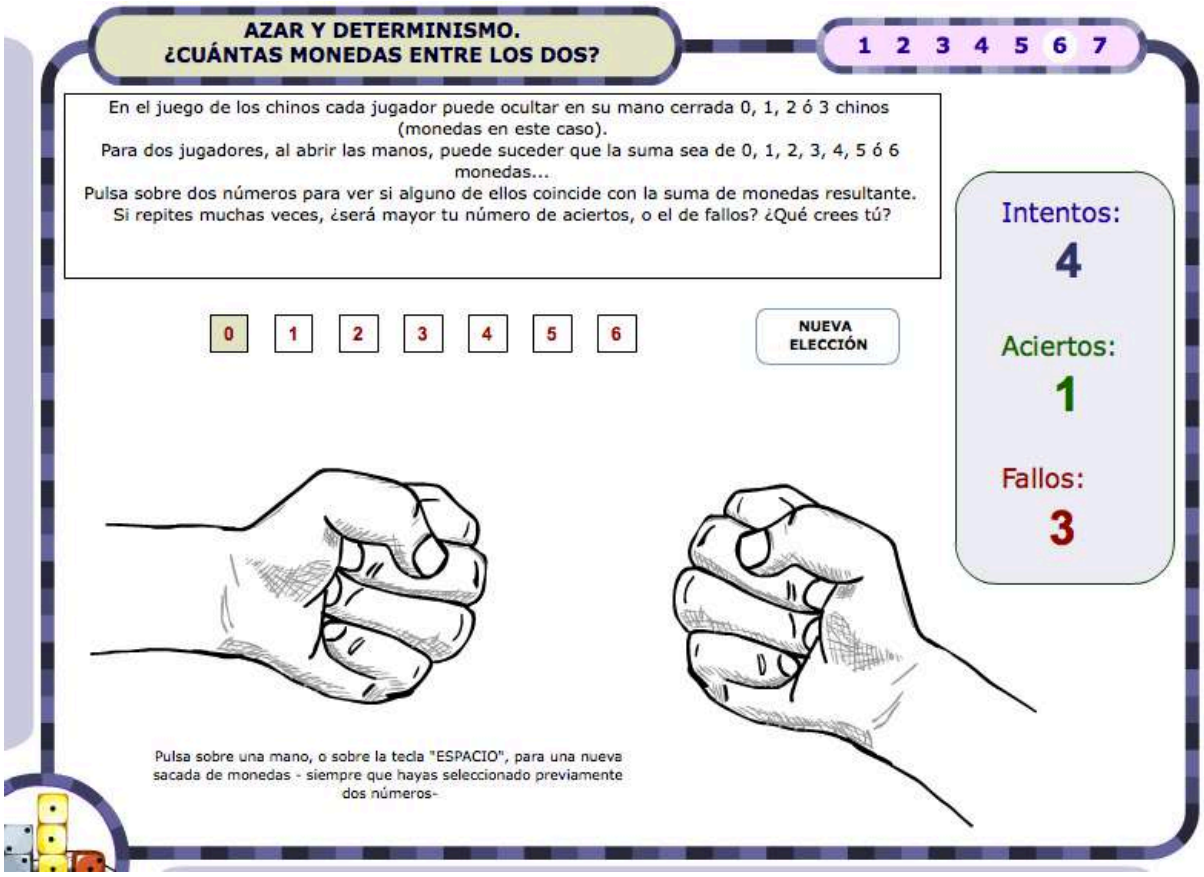



Figura 7.19 Capítulo 6. Azar y determinismo. ¿En qué mano está la moneda?

# CAPÍTULO 7

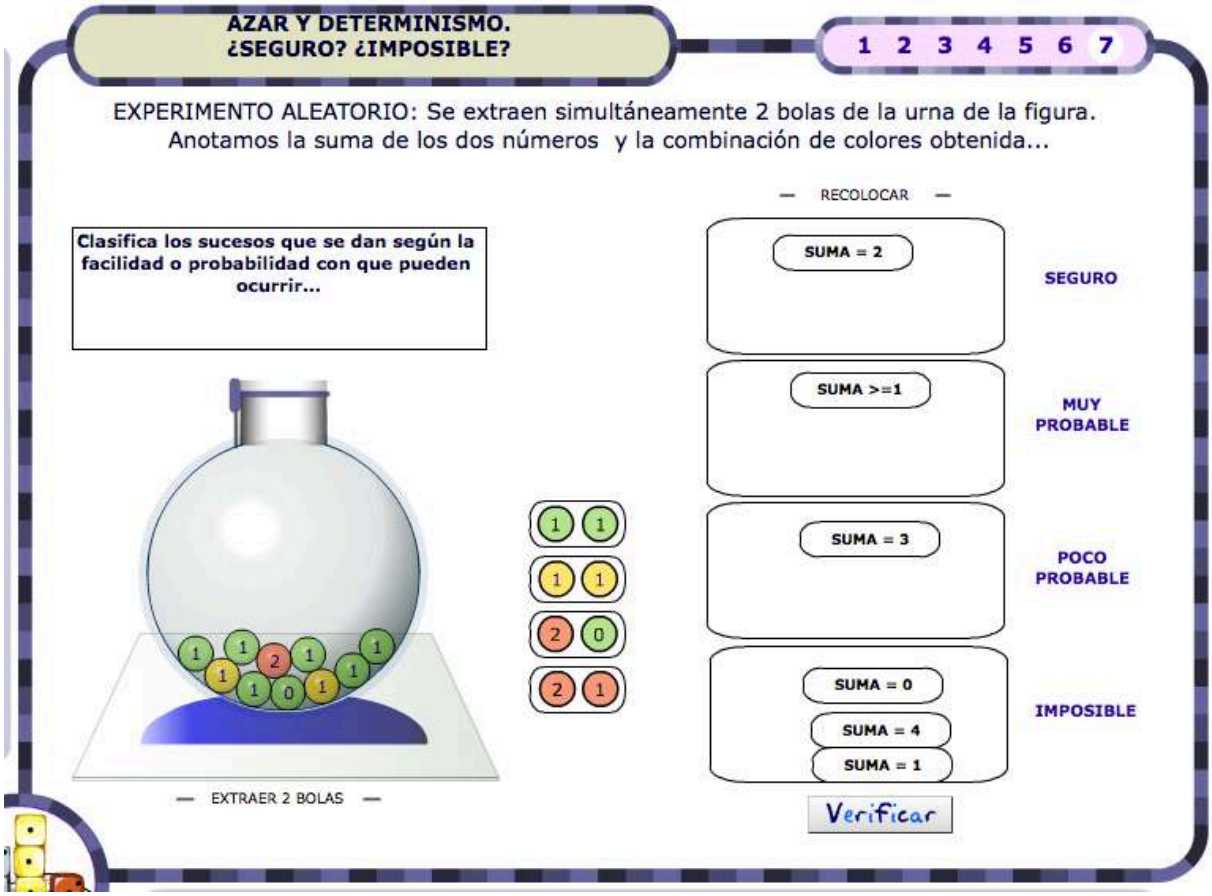



Figura 7.20 Capítulo 7. Azar y determinismo. ¿Seguro? ¿Imposible?

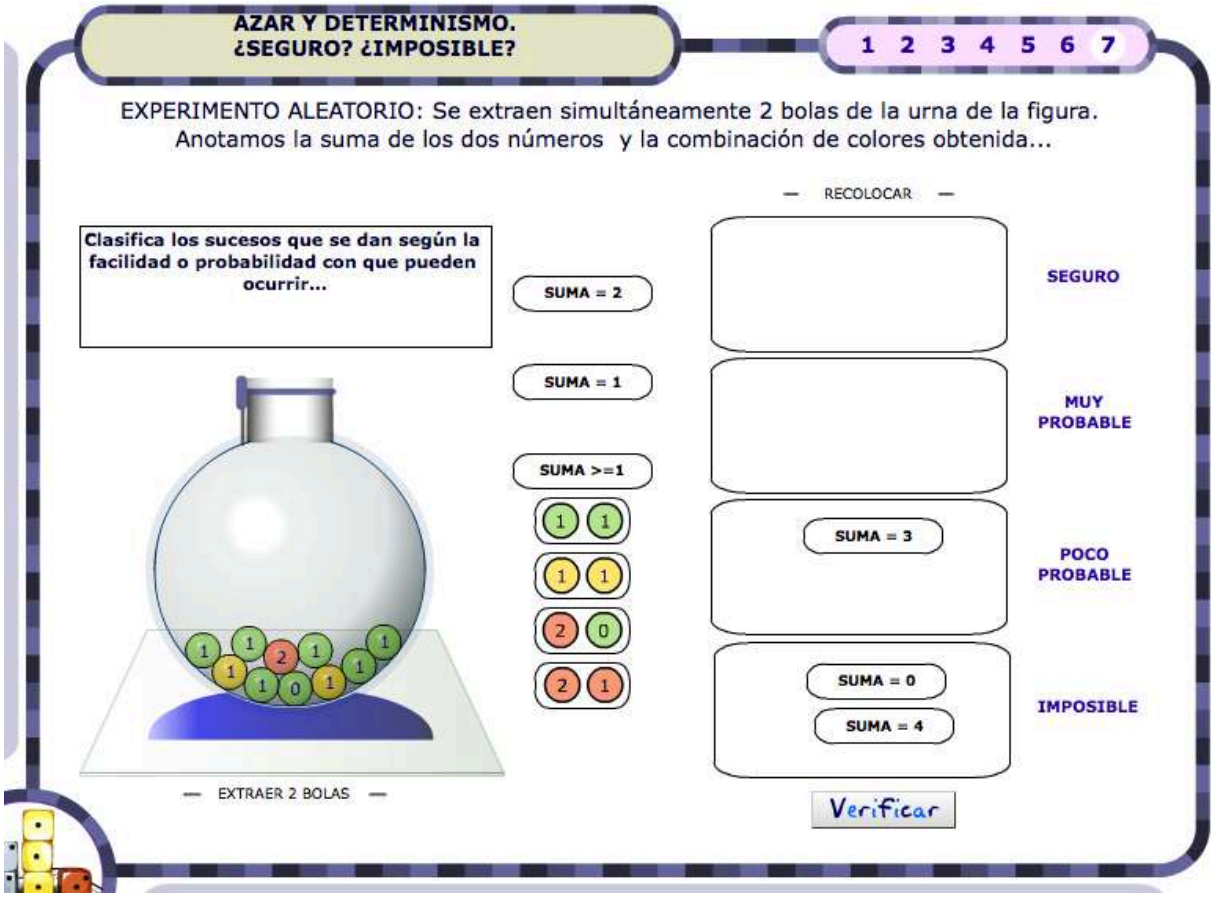



Figura 7.21 Capítulo 7. Azar y determinismo. ¿Seguro? ¿Imposible?

1b. Aproximación frecuencial a la Probabilidad. Se trata de veinte aplicaciones que, desde diferentes perspectivas, tratan las nociones fundamentales de Azar y Probabilidad dejando intuir sus múltiples posibilidades y usos (sucesos simples y compuestos, álgebra básica de sucesos, construcción de espacios muestrales, frecuencias absolutas y relativas de sucesos, experimentos aleatorios equivalentes o isomorfos, modelos probabilísticos, Ley del Azar o de los Grandes Números, métodos de simulación, etc.). A continuación se muestran algunos ejemplos de las cuestiones planteadas.




**Al lanzar 2 dados muchas veces y anotar la suma de los números obtenidos es más frecuente, por lo general, obtener la suma 7 que obtener la suma 10. ¡Compruébalo!**

**¿Por qué crees que ocurrirá esto?**

**EXPERIMENTO ALEATORIO 1.**
**Extraer aleatoriamente una bola de la urna, registrar su color (verde o amarillo) y devolverla a la urna.**

Figura 7.22 Aplicaciones sobre la aproximación frecuencial a la Probabilidad

## APLICACIÓN. ELIGE UN CIRCUITO CON BOLAS

Esta aplicación presenta 7 circuitos diferentes y actividades con etiquetas desplazables. Cuando una bola que cae choca con un tope del circuito puede tomar, con la misma facilidad (probabilidad) por la bifurcación de la derecha o por la de la izquierda. Cada circuito tiene un diseño diferente y un número determinado de salidas A, B, C, D)… Se trata de estimar la fracción o porcentaje de bolas que toman por cada una de las salidas.

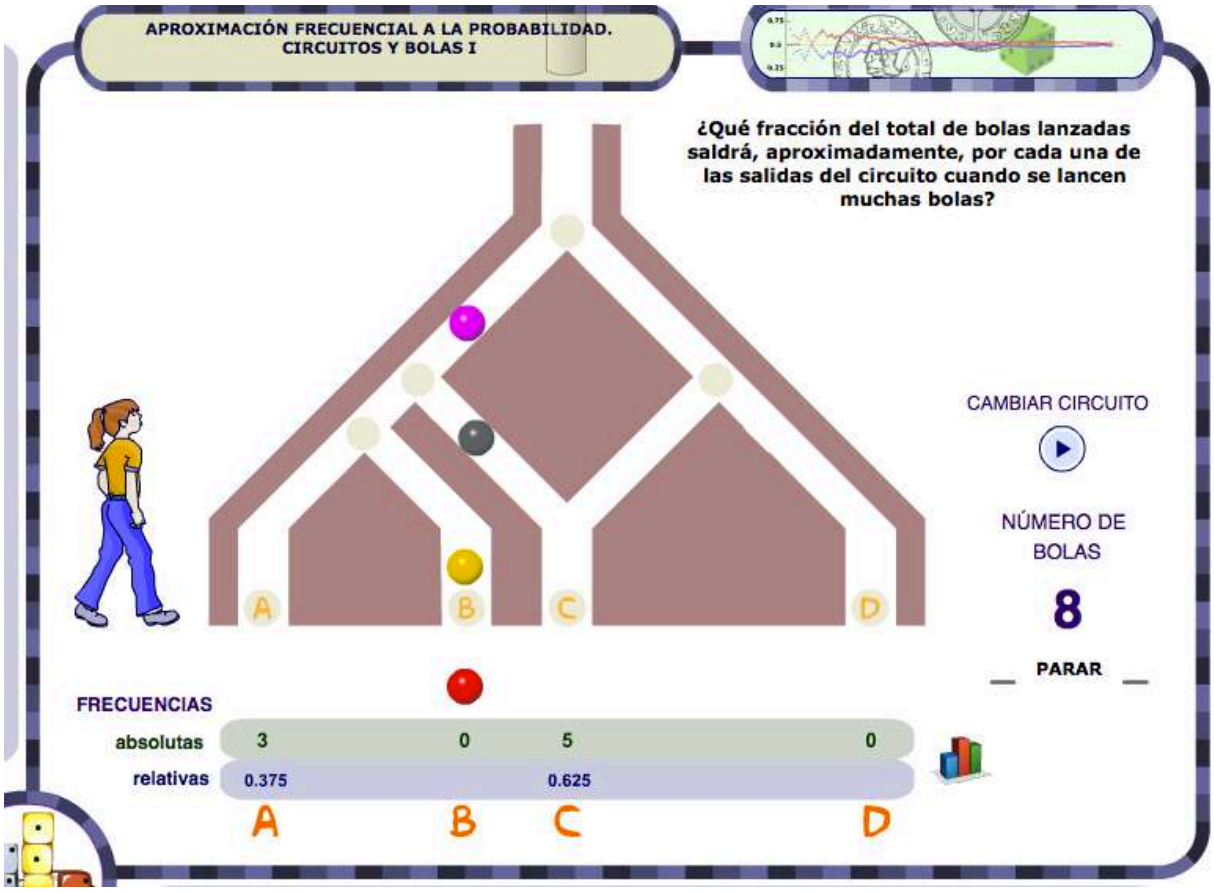



Figura 7.23 Aplicación sobre la aproximación frecuencial a la Probabilidad. Circuitos y bolas I

## APLICACIÓN. EL RESCATE DEL NÁUFRAGO

Se ha producido un naufragio. Un náufrago puede ser rescatado por el yate de salvamento marítimo o bien atrapado por los tiburones. Su suerte depende del resultado que se obtenga al lanzar una moneda. Según se obtenga cara o escudo el náufrago podrá tomar el camino para su rescate o el camino hacia los tiburones. La aplicación ofrece varios circuitos probabilísticas diferentes. En cada uno de ellos habrá que razonar si es más fácil que se salve o que sea atrapado.

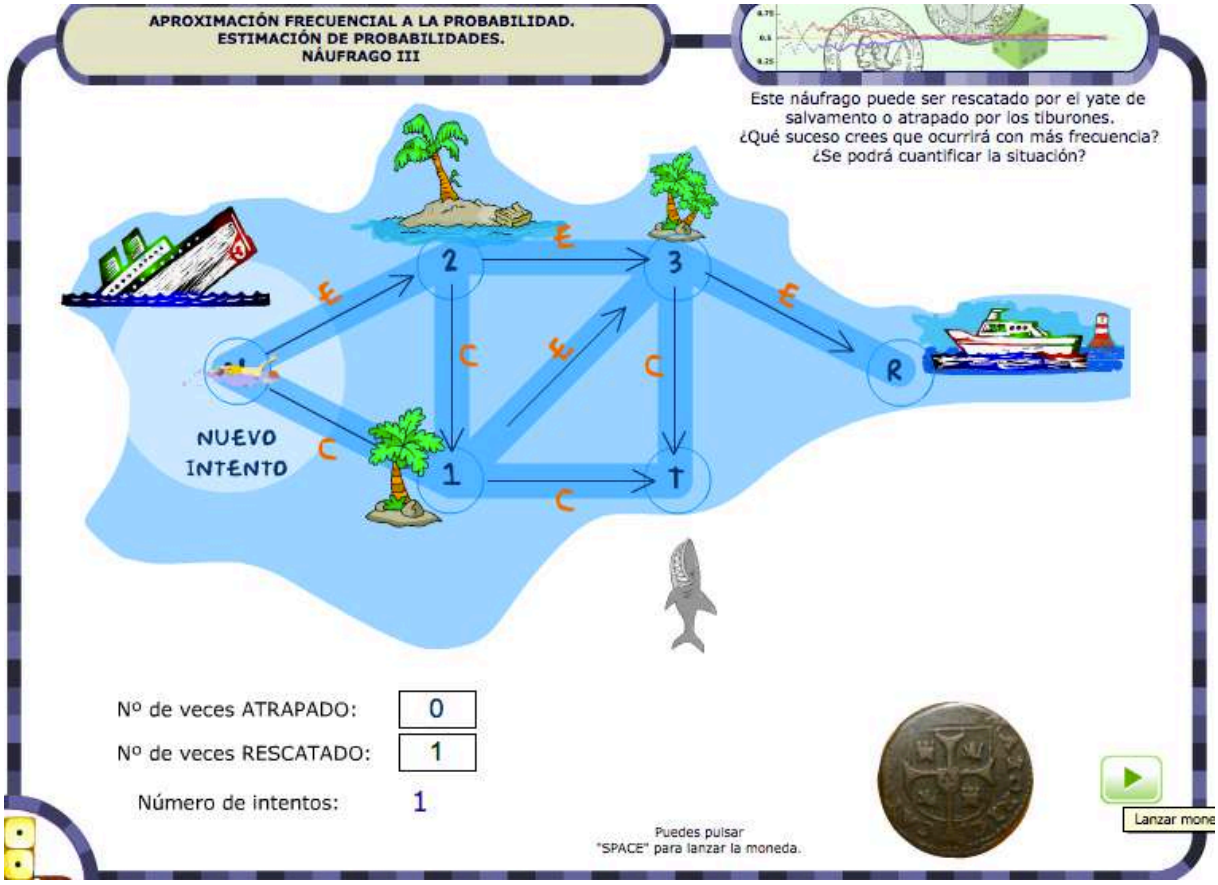



Figura 7.24 Aplicación sobre la aproximación frecuencial a la Probabilidad. El rescate del náufrago




Figura 7.25 Aplicación sobre la aproximación frecuencial a la Probabilidad. El rescate del náufrago




Figura 7.26 Aplicación sobre la aproximación frecuencial a la Probabilidad. El rescate del náufrago

## APLICACIÓN. LANZAMIENTO DE UN DADO

Se experimenta con los sucesos posibles en cada caso, sus frecuencias absolutas y relativas. Se construyen sus espacios muestrales. Se consideran sucesos simples y compuestos, etc…

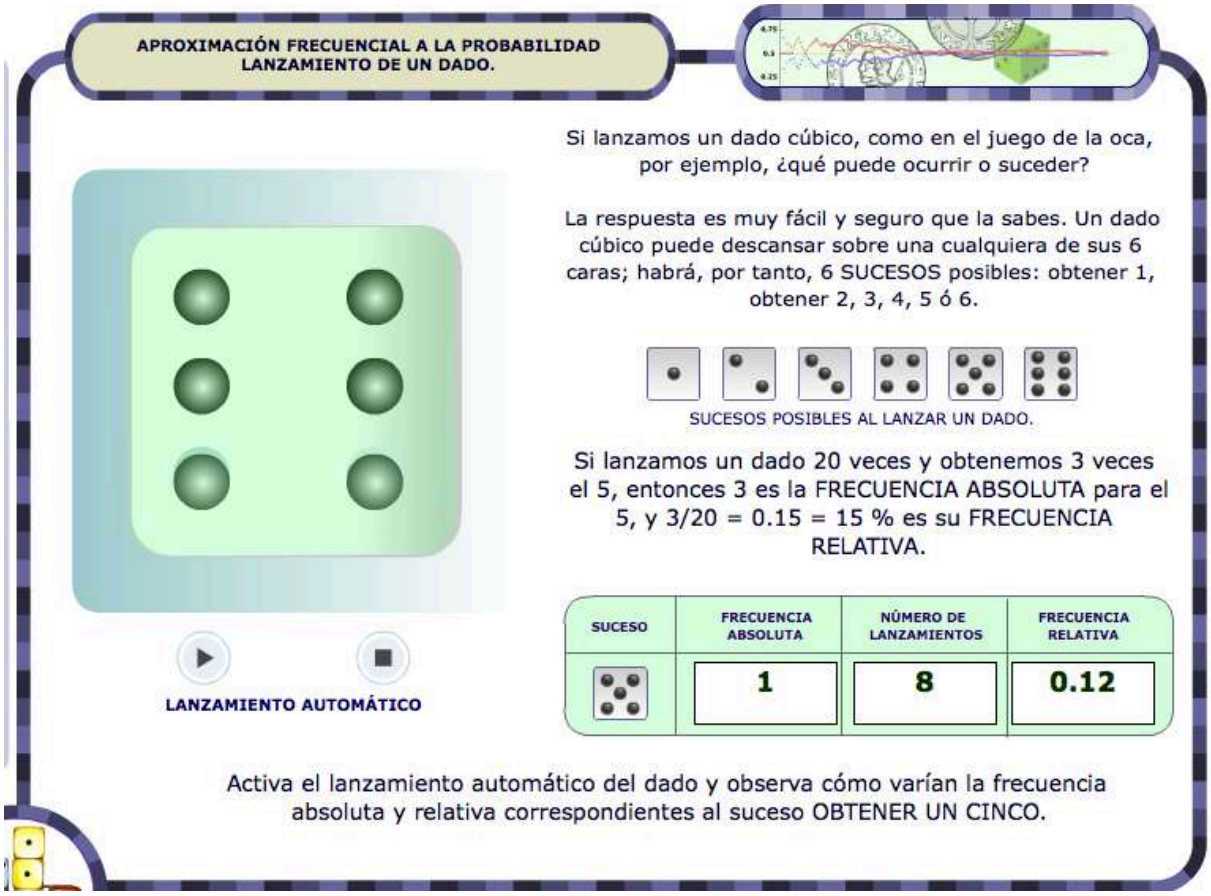



Figura 7.27 Aplicación sobre la aproximación frecuencial a la Probabilidad. Lanzamiento de un dado

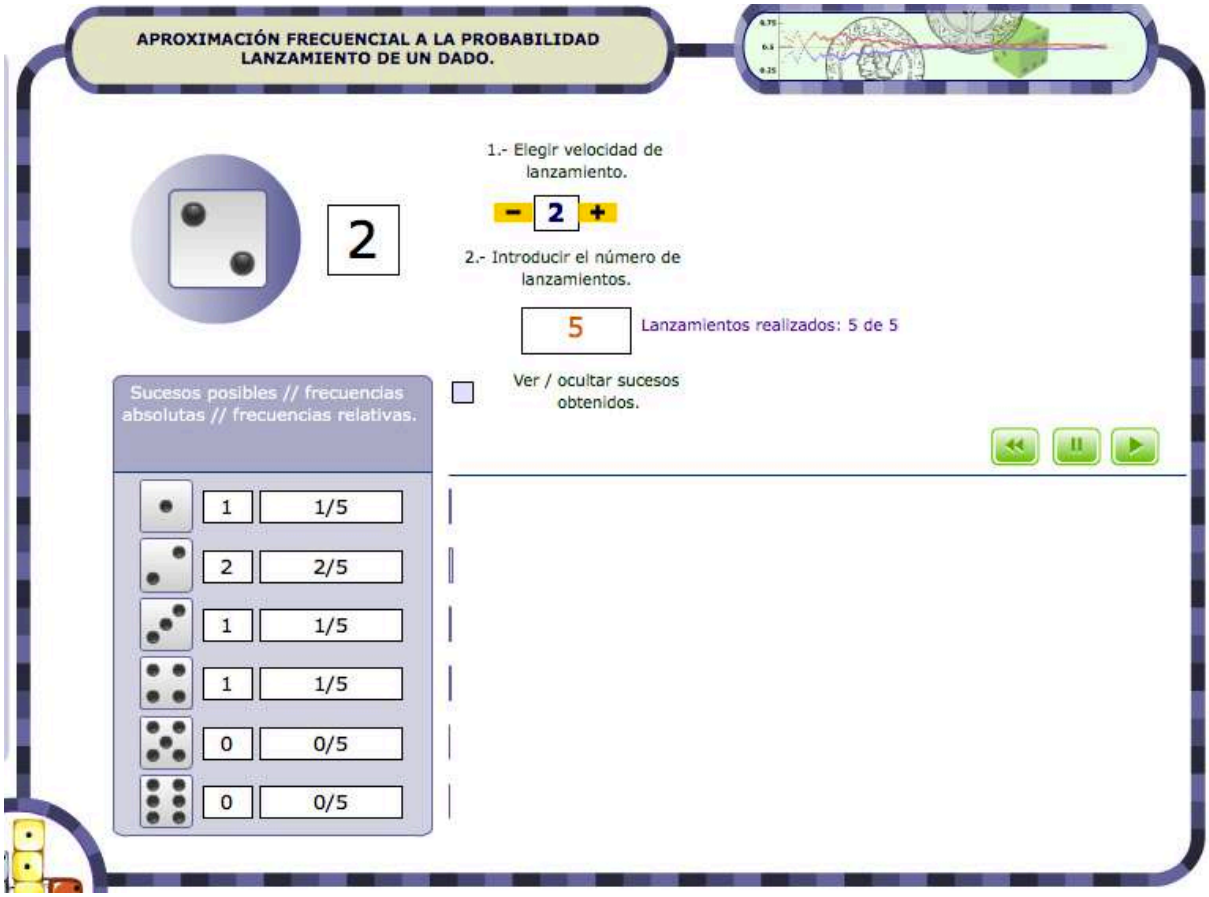



Figura 7.28 Aplicación sobre la aproximación frecuencial a la Probabilidad. Lanzamiento de un dado

## APLICACIÓN. AL LANZAR DOS DADOS

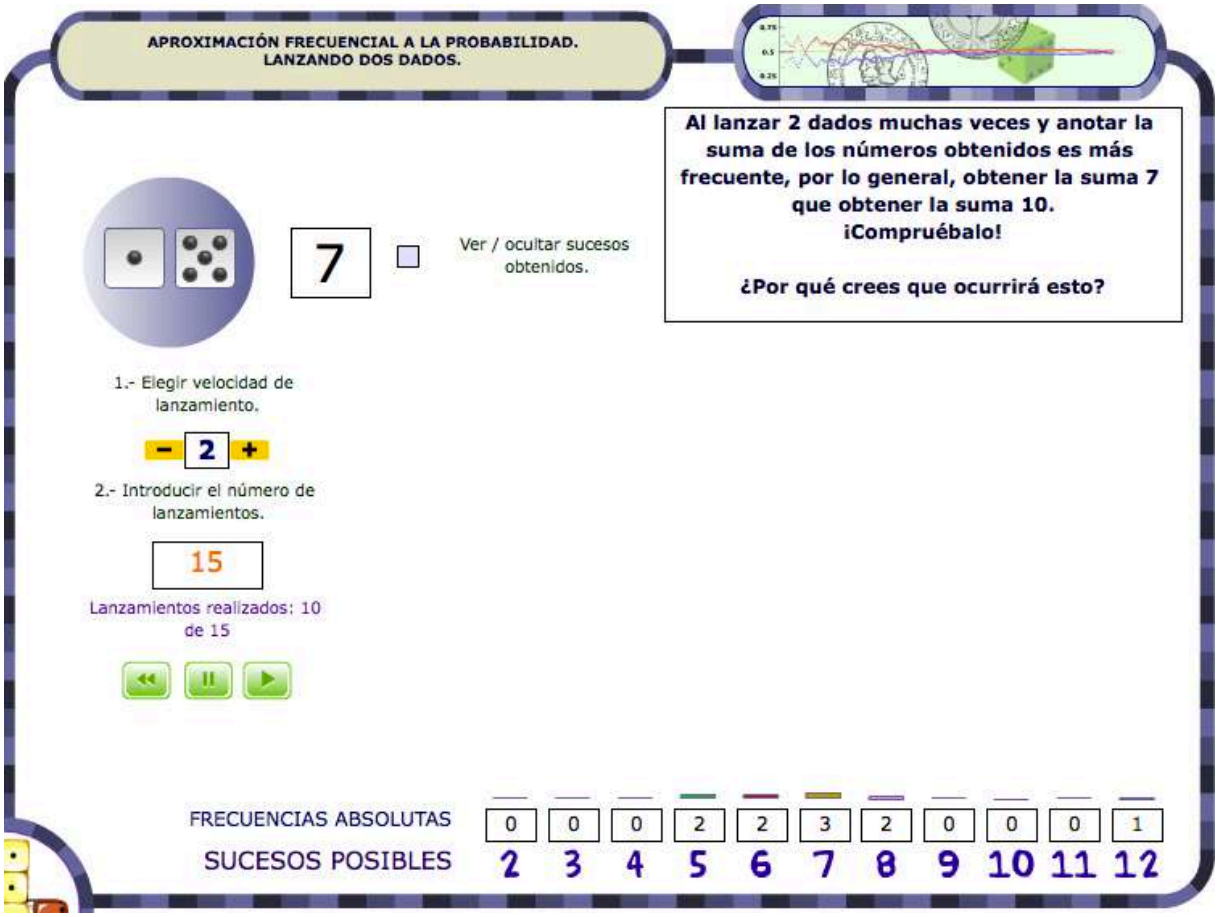



Figura 7.29 Aplicación sobre la aproximación frecuencial a la Probabilidad. Al lanzar dos dados

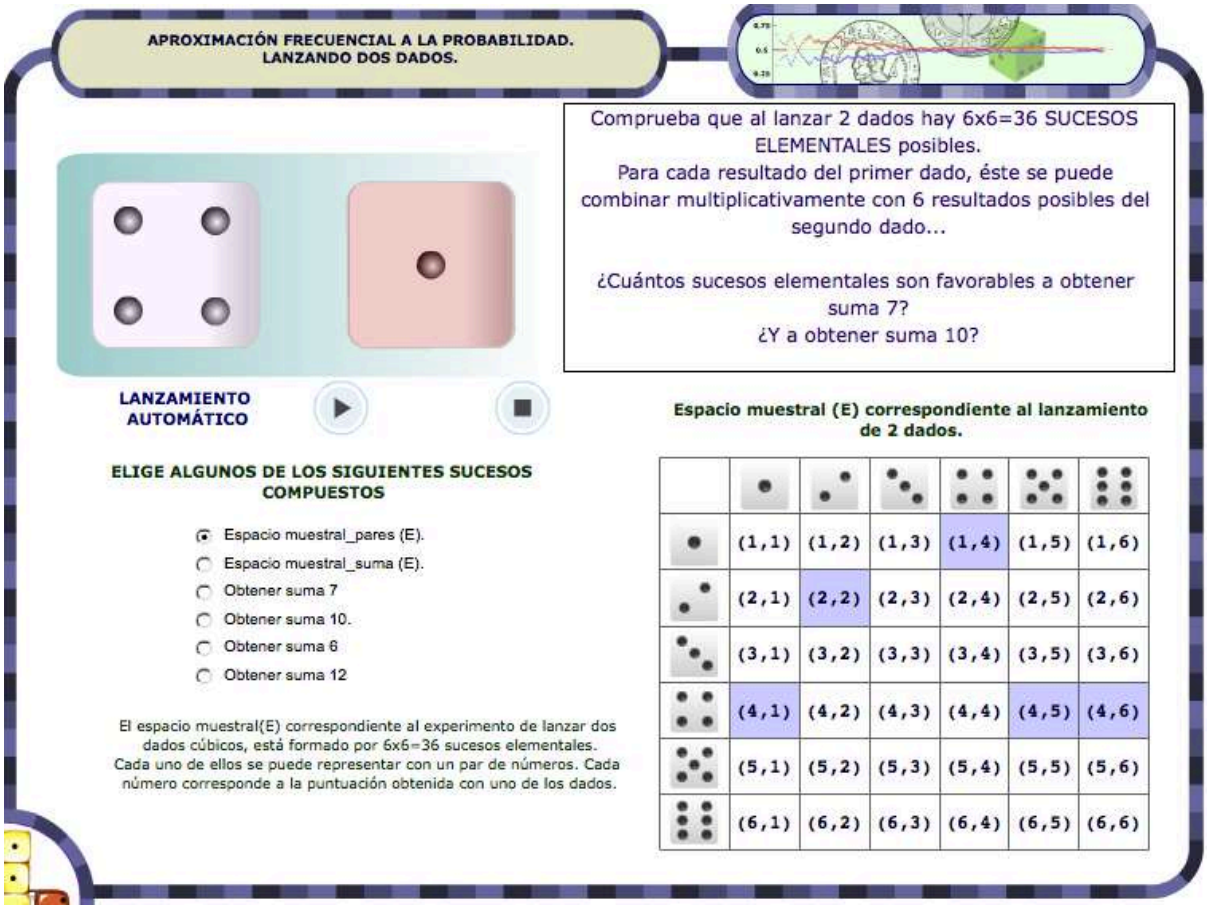



Figura 7.30 Aplicación sobre la aproximación frecuencial a la Probabilidad. Al lanzar dos dados




Figura 7.31 Aplicación sobre la aproximación frecuencial a la Probabilidad. Al lanzar dos dados

## APLICACIÓN. LANZAMIENTO DE UNA Y DOS MONEDAS

Se experimenta cómo al lanzar muchas veces una moneda y representar gráficamente las frecuencias relativas de cara y escudo, éstas se aproximan a 1/2 = 0,5 en mayor medida, por lo general, cuanto mayor es el número de lanzamientos.




Figura 7.32 Aplicación sobre la aproximación frecuencial a la Probabilidad. Lanzamiento de una moneda

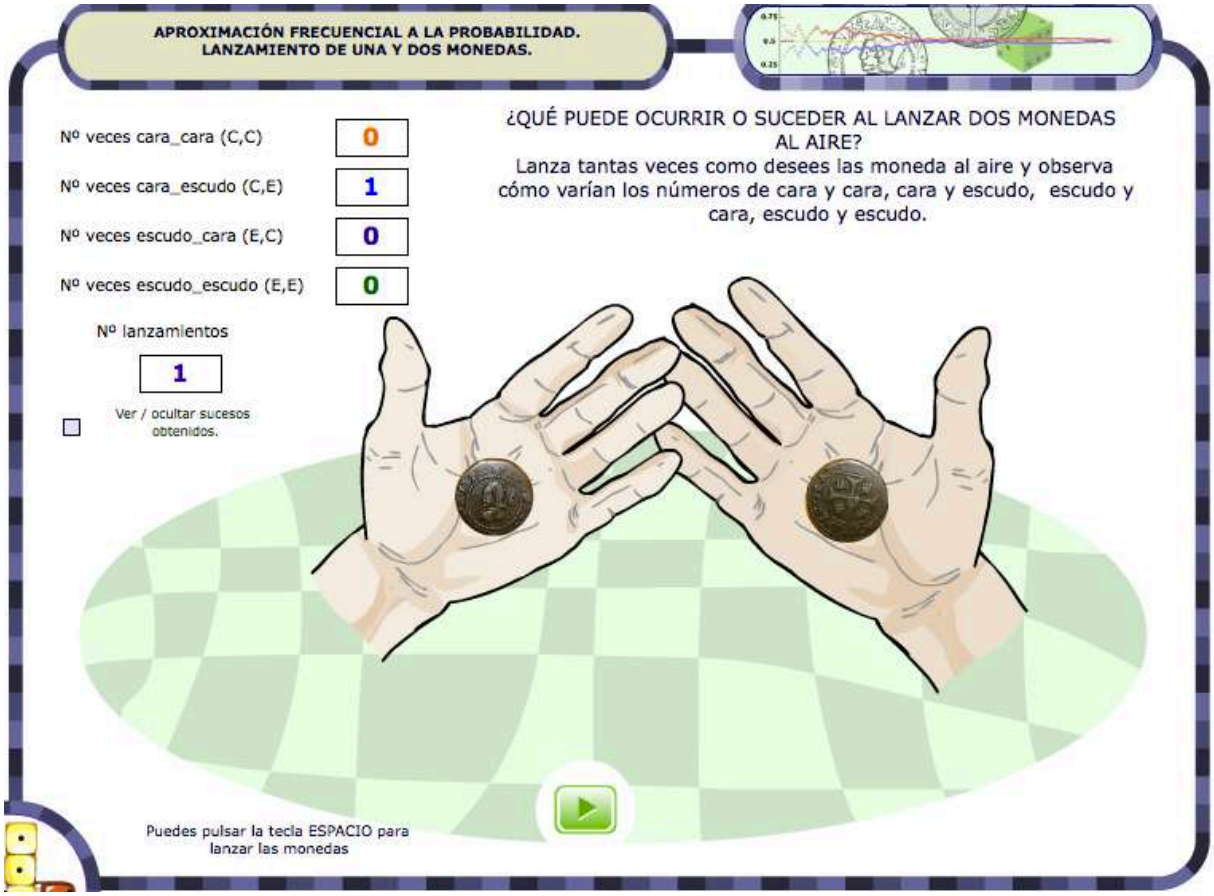



Figura 7.33 Aplicación sobre la aproximación frecuencial a la Probabilidad. Lanzamiento de dos monedas

## APLICACIÓN. DIAGRAMA EN ÁRBOL PARA TRES MONEDAS

**Diagrama en árbol interactivo** correspondiente al espacio muestral (conjunto de todos los sucesos posibles) asociado al experimento aleatorio de lanzar 3 monedas al aire.

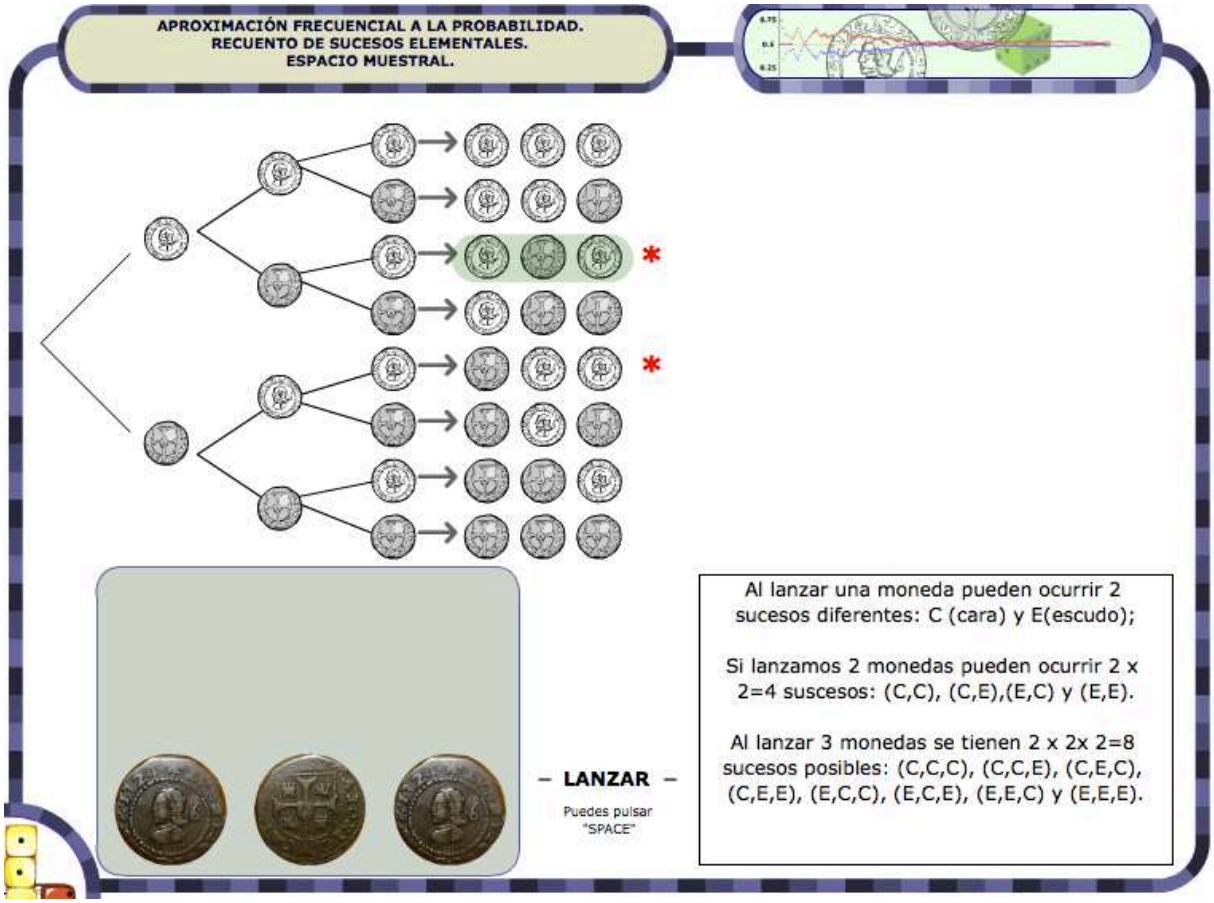



Figura 7.34 Aplicación sobre la aproximación frecuencial a la Probabilidad. Diagrama en árbol para tres monedas

## APLICACIÓN. URNA CON 4 BOLAS Y CASILLEROS

Se extraen una a una, y aleatoriamente, las 4 bolas numeradas contenidas en la urna y se anota el número formado con las cuatro cifras, correspondiendo la primera bola extraída a las unidades de millar, la segunda a las centenas y, así, sucesivamente...

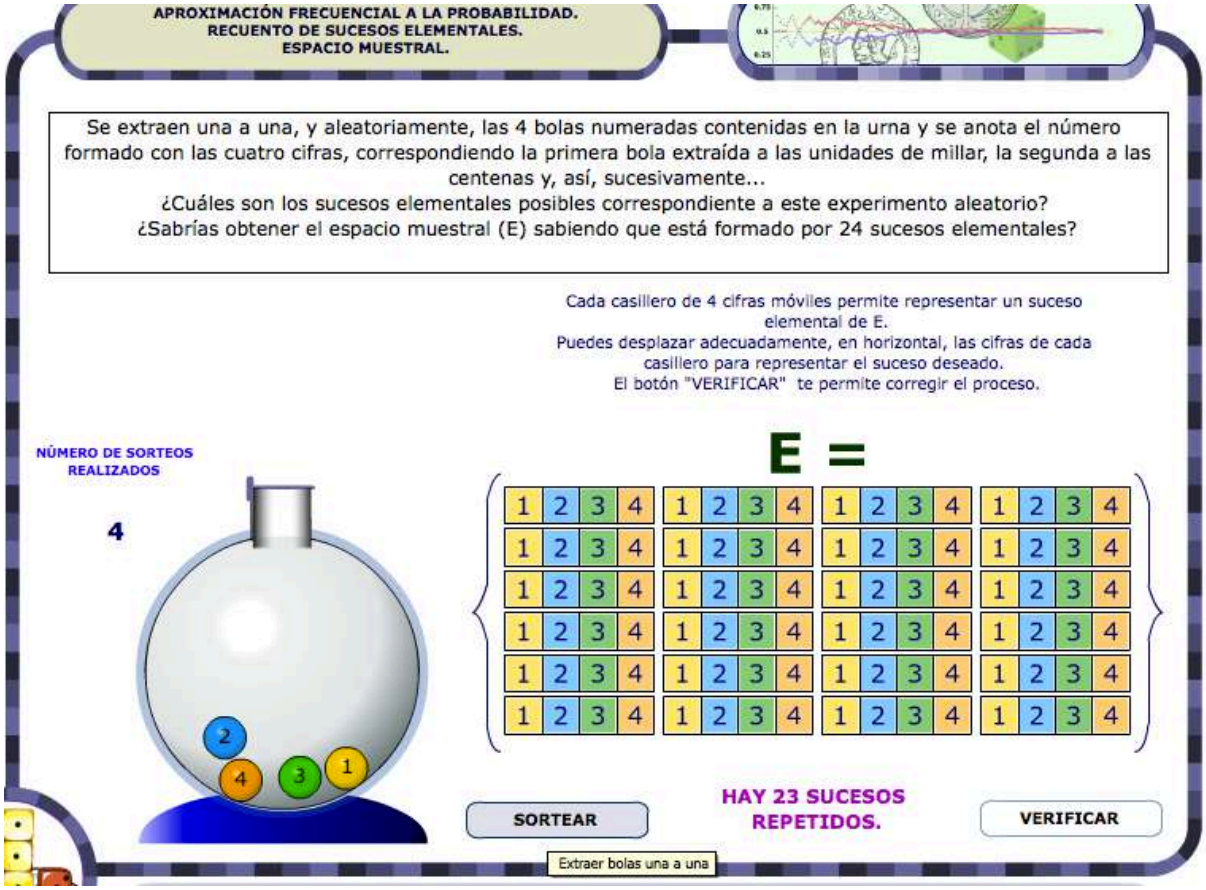



Figura 7.35 Aplicación sobre la aproximación frecuencial a la Probabilidad.

Urna con 4 bolas y casilleros

Cada casillero de 4 cifras móviles permite representar un suceso elemental de E. Puedes desplazar adecuadamente, en horizontal, las cifras de cada casillero para representar el suceso deseado. El botón "VERIFICAR" te permite corregir el proceso.

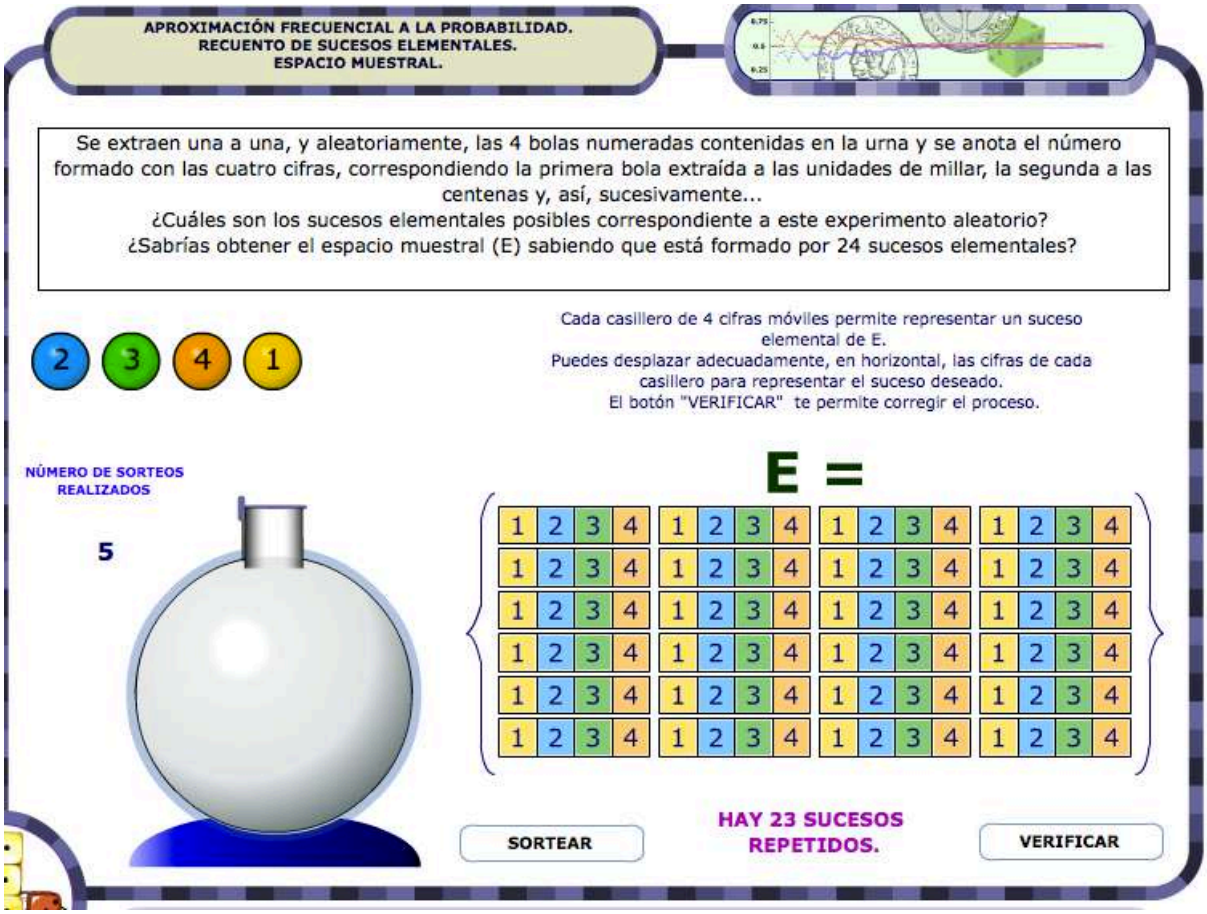



Figura 7.36 Aplicación sobre la aproximación frecuencial a la Probabilidad.

Urna con 4 bolas y casilleros

**Obtener el espacio muestral (E)** utilizando un diagrama en árbol como éste. Pulsando sobre los botones circulares se comprender el significado de cada rama del diagrama.

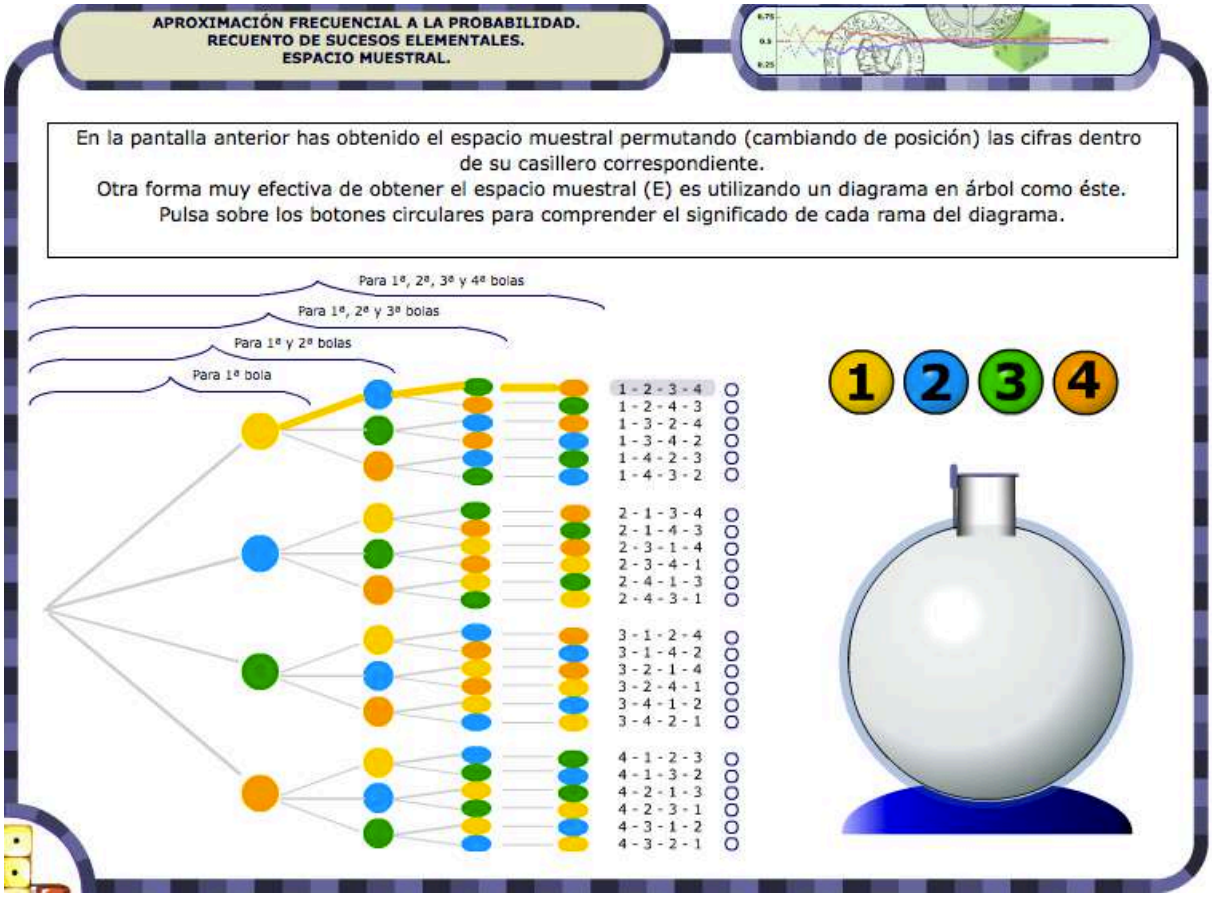



Figura 7.37 Aplicación sobre la aproximación frecuencial a la Probabilidad.

Urna con 4 bolas y casilleros

## APLICACIÓN. CONVERGENCIA DE LAS FRECUENCIAS RELATIVAS I

Observa que, por lo general, cuando aumenta el número de lanzamientos **la frecuencia relativa de un suceso se aproxima en mayor medida al valor que expresa su probabilidad teórica.**

Podríamos definir la VARIABILIDAD del suceso como la distancia que separa el punto correspondiente al valor experimental de su frecuencia relativa de la recta que representa el valor de su probabilidad teórica.

A medida que aumenta el número de bolas lanzadas, por lo general, la VARIABILIDAD es menor, las frecuencias relativas convergen (se aproximan en mayor medida) hacia sus valores teóricos.

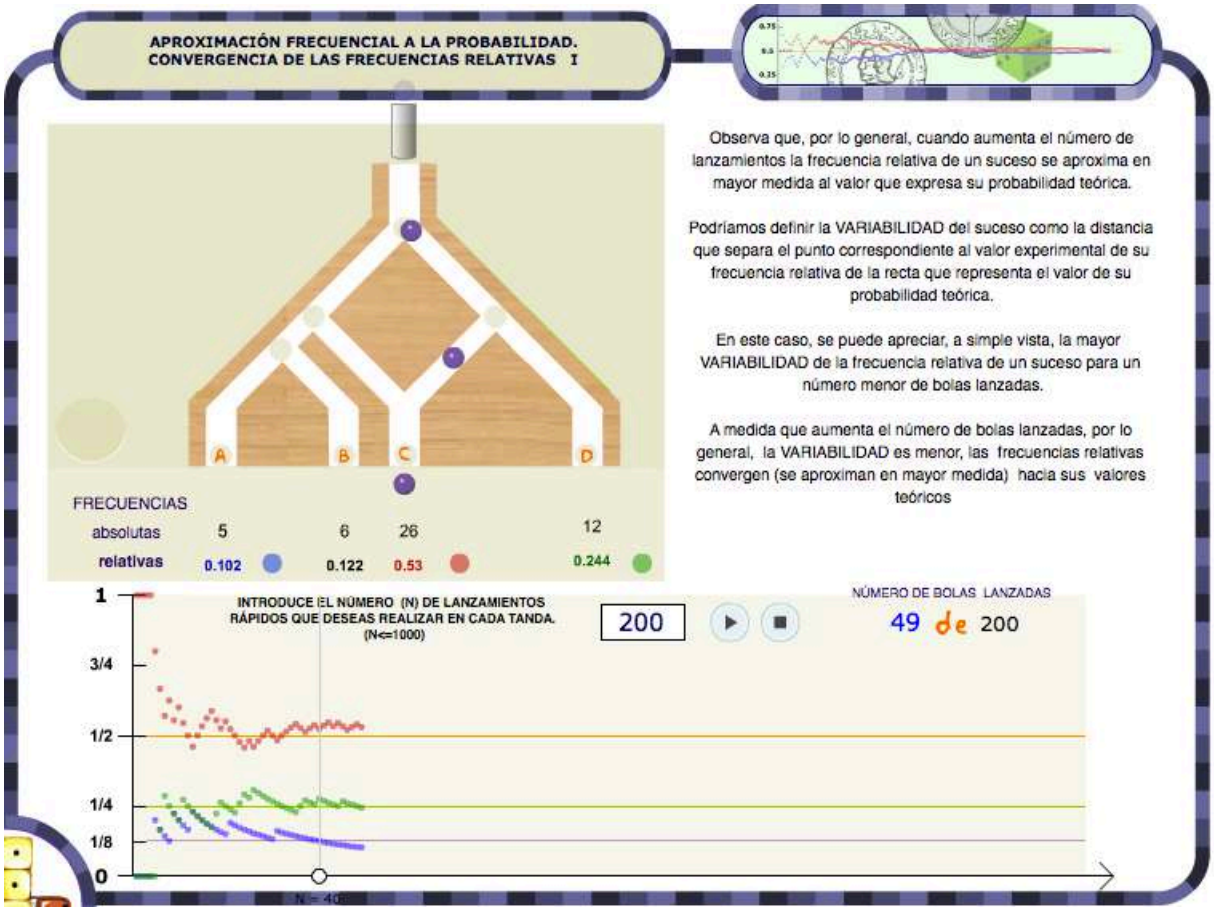



Figura 7.38 Aplicación sobre la aproximación frecuencial a la Probabilidad. Convergencia de las frecuencias relativas I

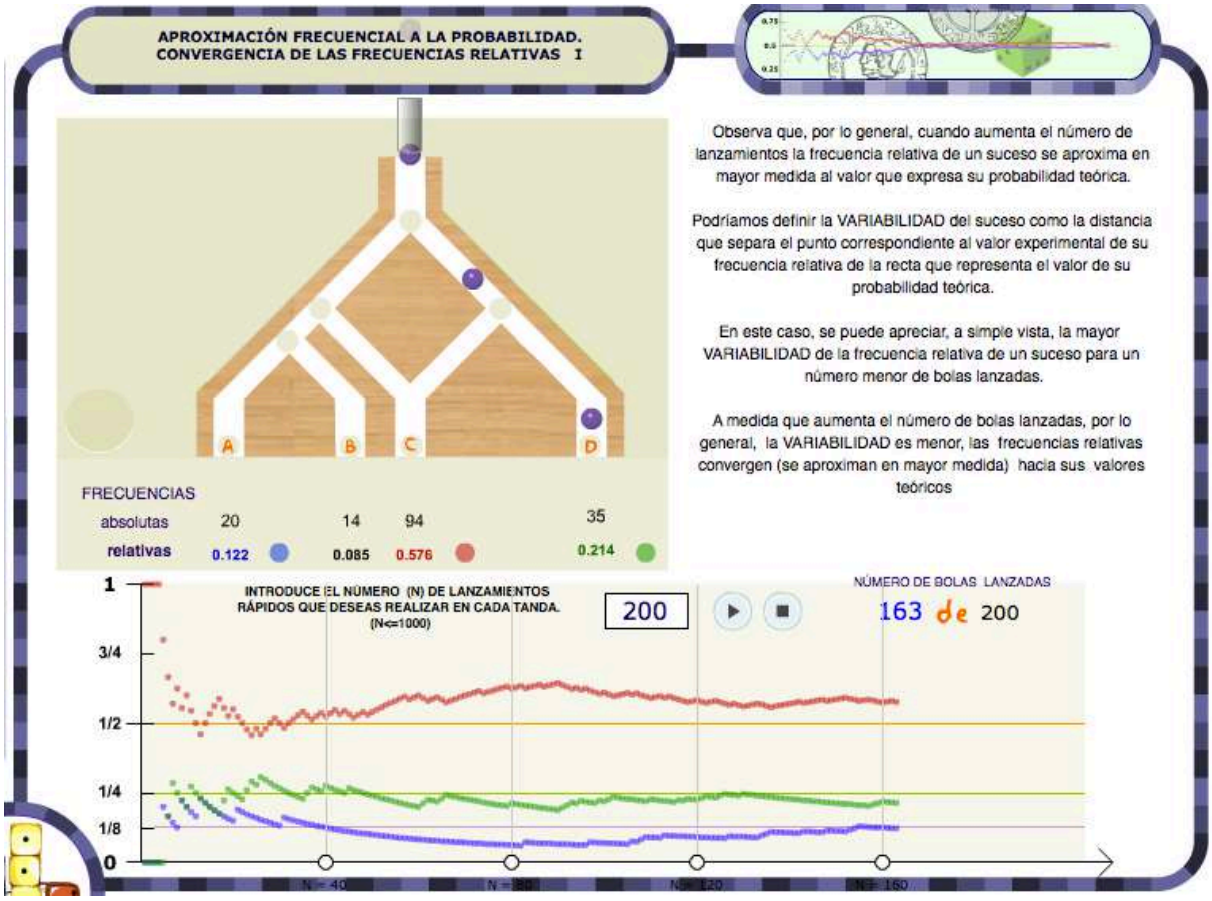



Figura 7.39 Aplicación sobre la aproximación frecuencial a la Probabilidad. Convergencia de las frecuencias relativas I

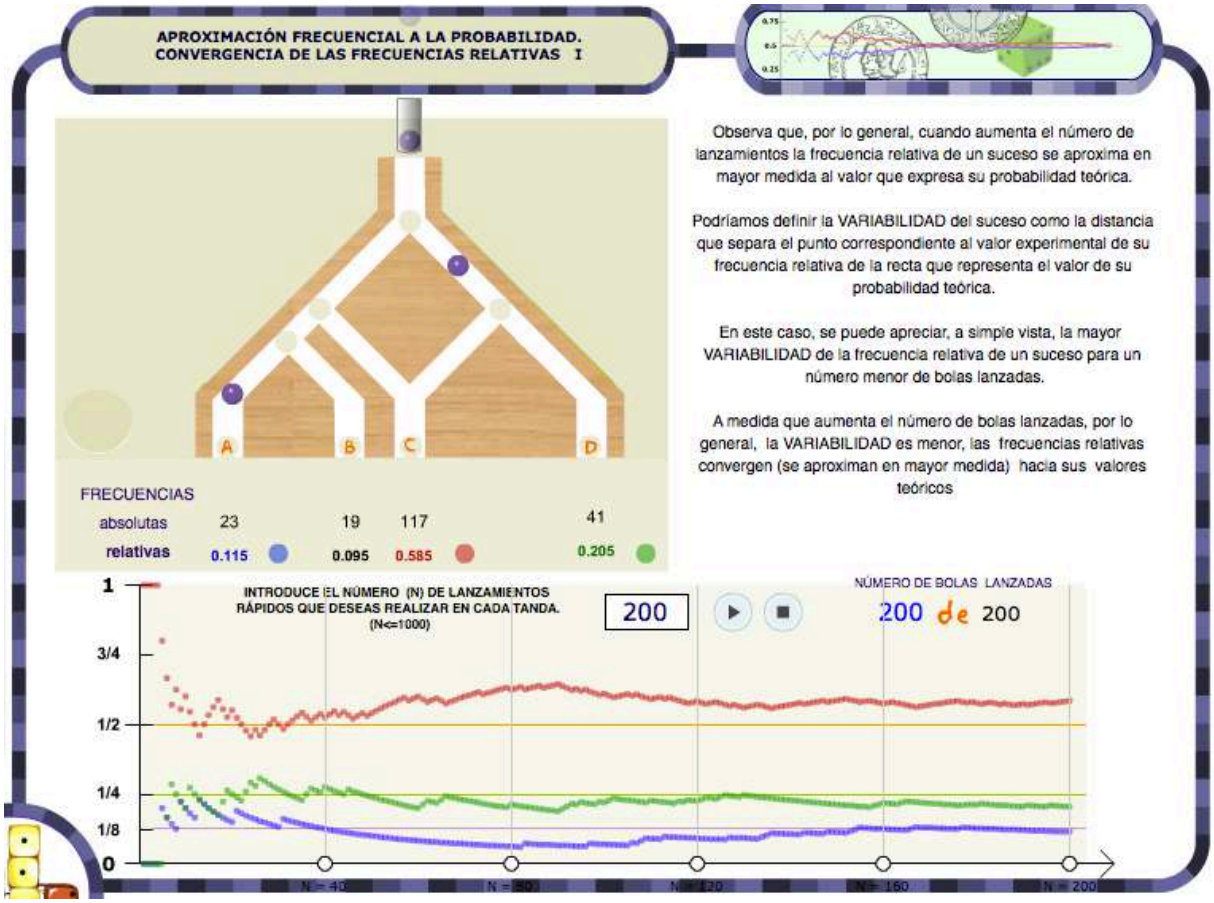



Figura 7.40 Aplicación sobre la aproximación frecuencial a la Probabilidad. Convergencia de las frecuencias relativas I

## APLICACIÓN. ÁLGEBRA DE SUCESOS

Aplicación que sólo pretende ilustrar de manera interactiva definiciones y propiedades de los sucesos, lo que se conoce como **álgebra de sucesos.**

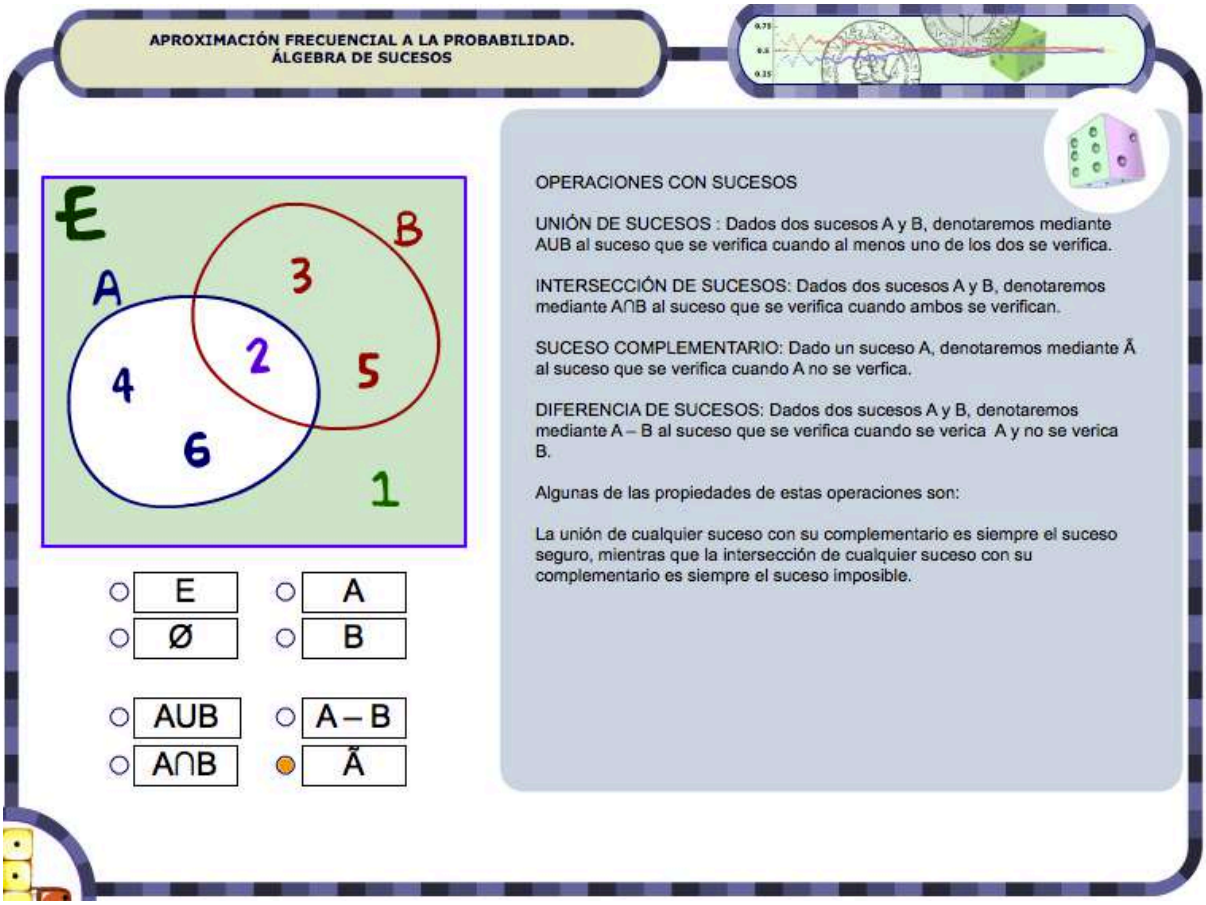



Figura 7.41 Aplicación sobre la aproximación frecuencial a la Probabilidad. Álgebra de sucesos

## APLICACIÓN. EXPERIMENTOS ALEATORIOS EQUIVALENTES I

### EXPERIMENTO ALEATORIO 1

Extraer aleatoriamente una bola de la urna, registrar su color (verde o amarillo) y devolverla a la urna.

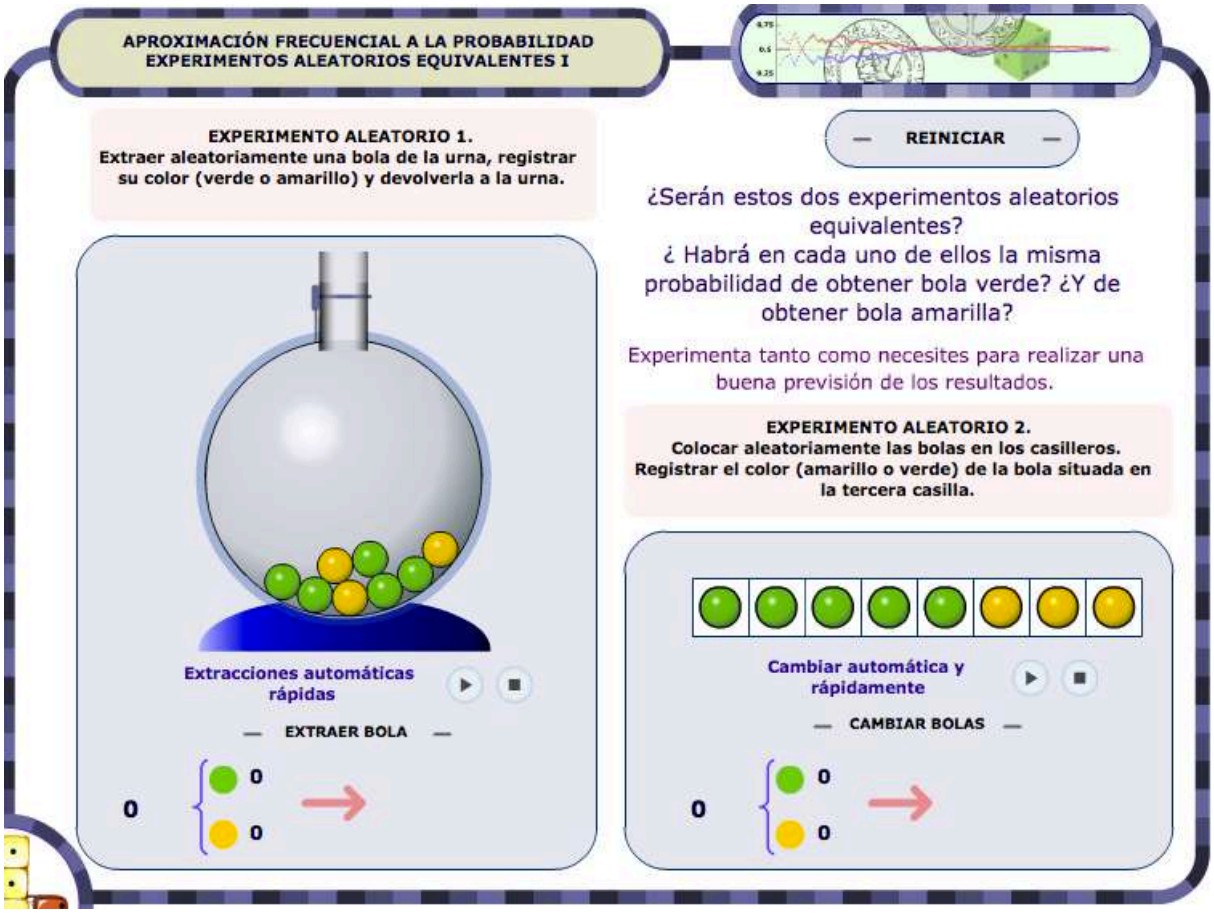



Figura 7.42 Aplicación sobre la aproximación frecuencial a la Probabilidad. Experimentos aleatorios equivalentes I. Experimento aleatorio 1

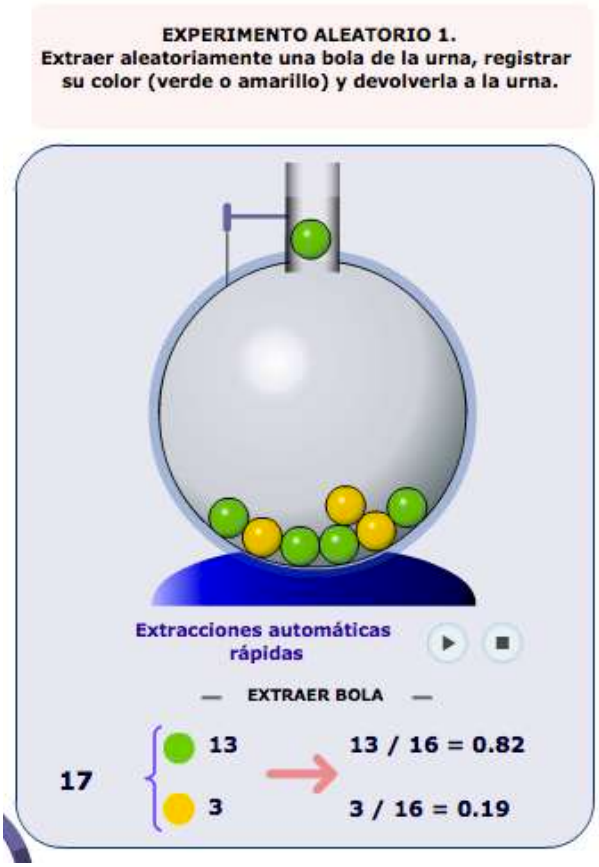



Figura 7.43 Aplicación sobre la aproximación frecuencial a la Probabilidad. Experimentos aleatorios equivalentes I. Experimento aleatorio 1

**EXPERIMENTO ALEATORIO 2**

Colocar aleatoriamente las bolas en los casilleros. Registrar el color (amarillo o verde) de la bola situada en la tercera casilla.

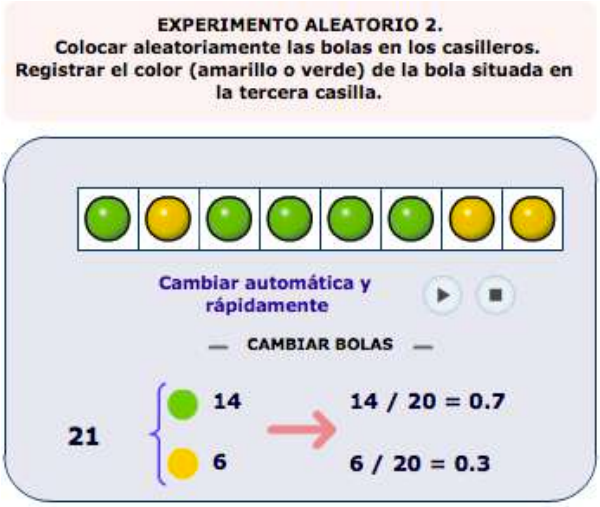



Figura 7.44 Aplicación sobre la aproximación frecuencial a la Probabilidad. Experimentos aleatorios equivalentes I. Experimento aleatorio 2

¿Serán estos dos experimentos aleatorios equivalentes? ¿ Habrá en cada uno de ellos la misma probabilidad de obtener bola verde? ¿Y de obtener bola amarilla?

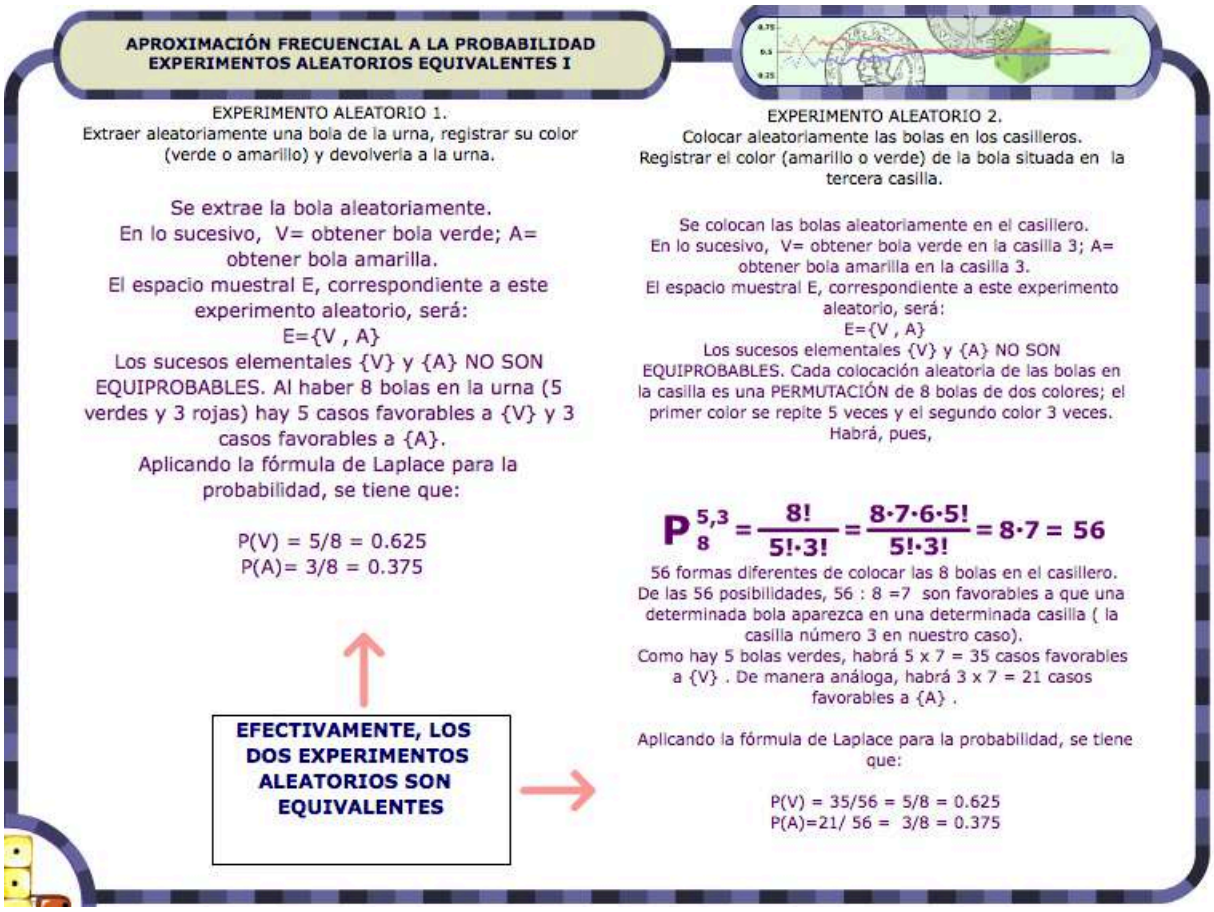



Figura 7.45 Aplicación sobre la aproximación frecuencial a la Probabilidad. Experimentos aleatorios equivalentes I

## APLICACIÓN. EXPERIMENTOS ALEATORIOS EQUIVALENTES II

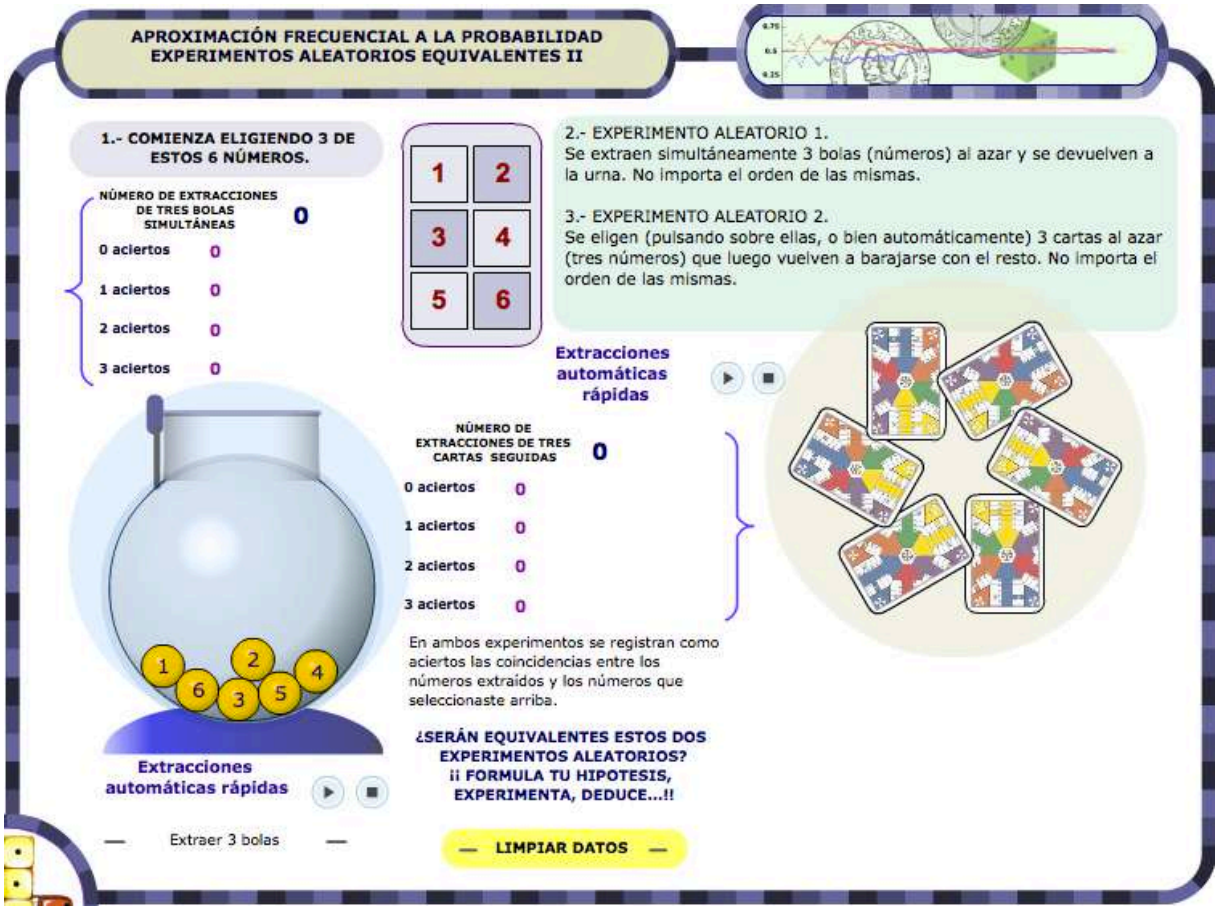



Figura 7.46 Aplicación sobre la aproximación frecuencial a la Probabilidad. Experimentos aleatorios equivalentes II

Comienza eligiendo 3 de estos 6 números.

**EXPERIMENTO ALEATORIO 1**

Se extraen simultáneamente 3 bolas (números) al azar y se devuelven a la urna. No importa el orden de las mismas.

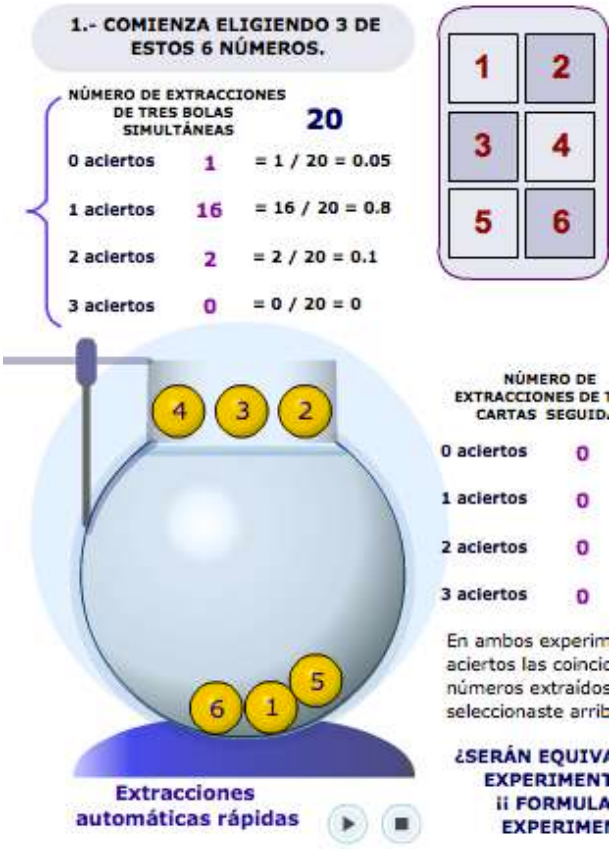



Figura 7.47 Aplicación sobre la aproximación frecuencial a la Probabilidad. Experimentos aleatorios equivalentes II

**EXPERIMENTO ALEATORIO 2**

Se eligen (pulsando sobre ellas, o bien automáticamente) 3 cartas al azar (tres números) que luego vuelven a barajarse con el resto. No importa el orden de las mismas.

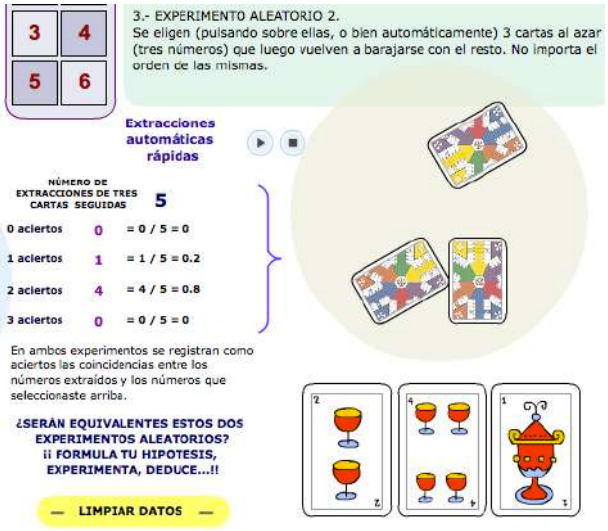


Figura 7.48 Aplicación sobre la aproximación frecuencial a la Probabilidad. Experimentos aleatorios equivalentes II

En ambos experimentos se registran como aciertos las coincidencias entre los números extraídos y los números que seleccionaste arriba.

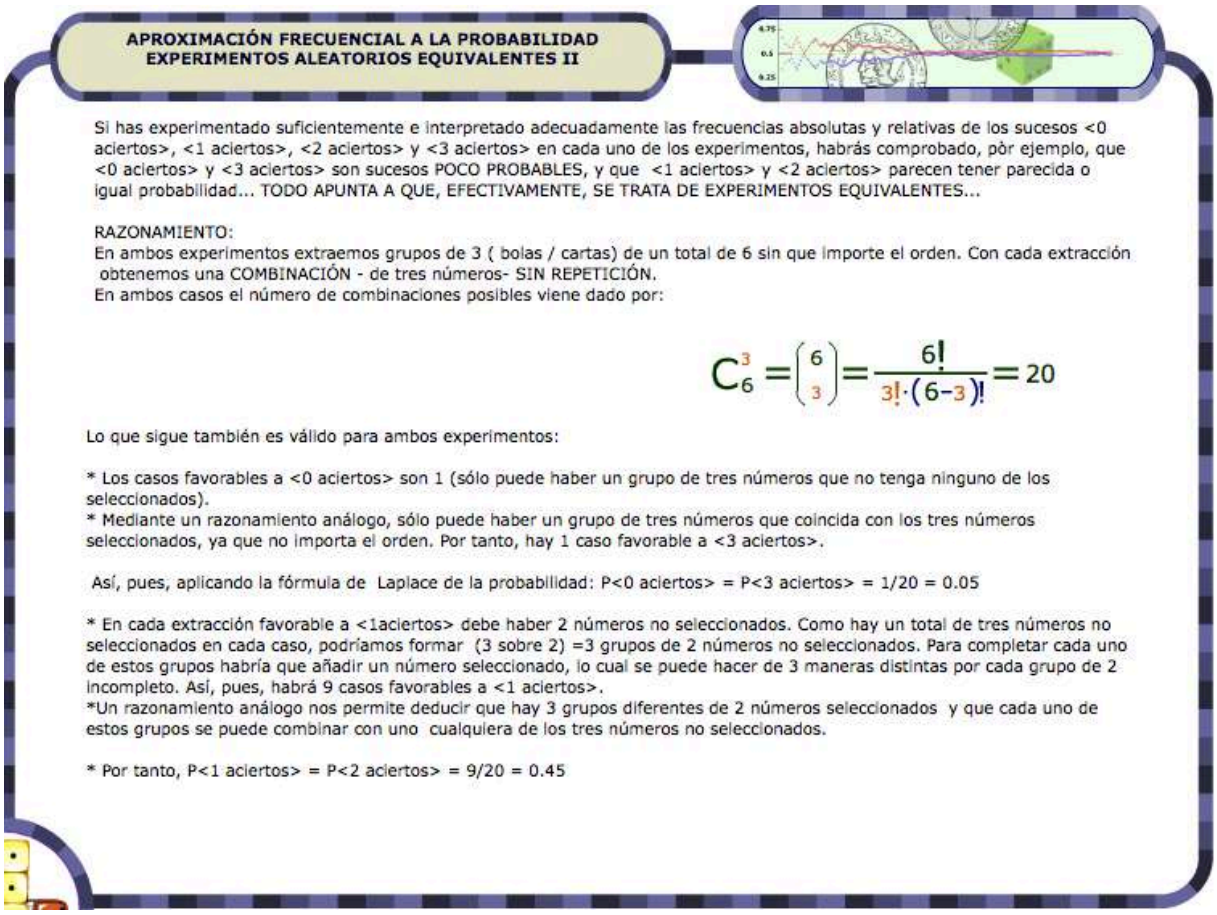



Figura 7.49 Aplicación sobre la aproximación frecuencial a la Probabilidad. Experimentos aleatorios equivalentes II

## APLICACIÓN. DESAPARICIÓN DE DADOS

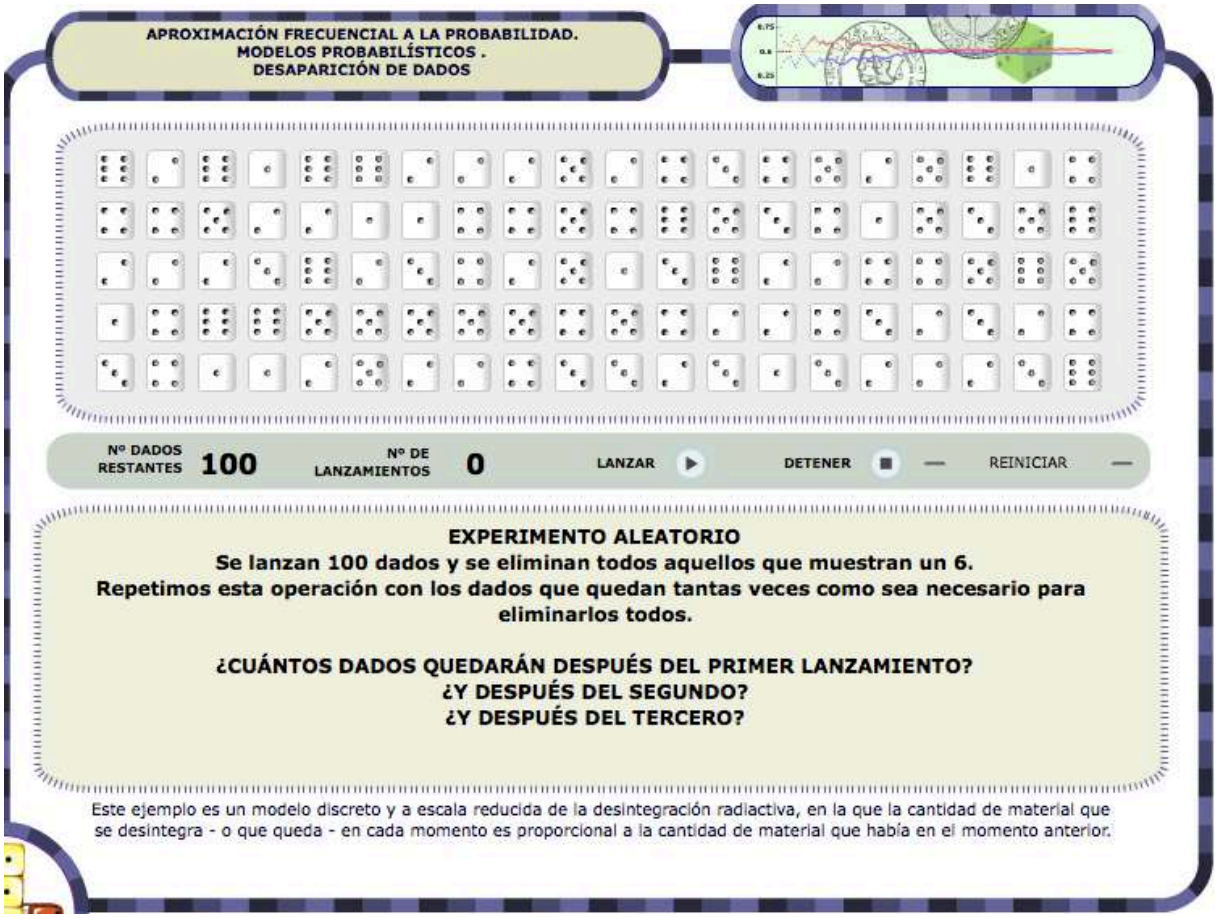



Figura 7.50 Aplicación sobre la aproximación frecuencial a la Probabilidad. Desaparición de dados




Figura 7.51 Aplicación sobre la aproximación frecuencial a la Probabilidad. Desaparición de dados

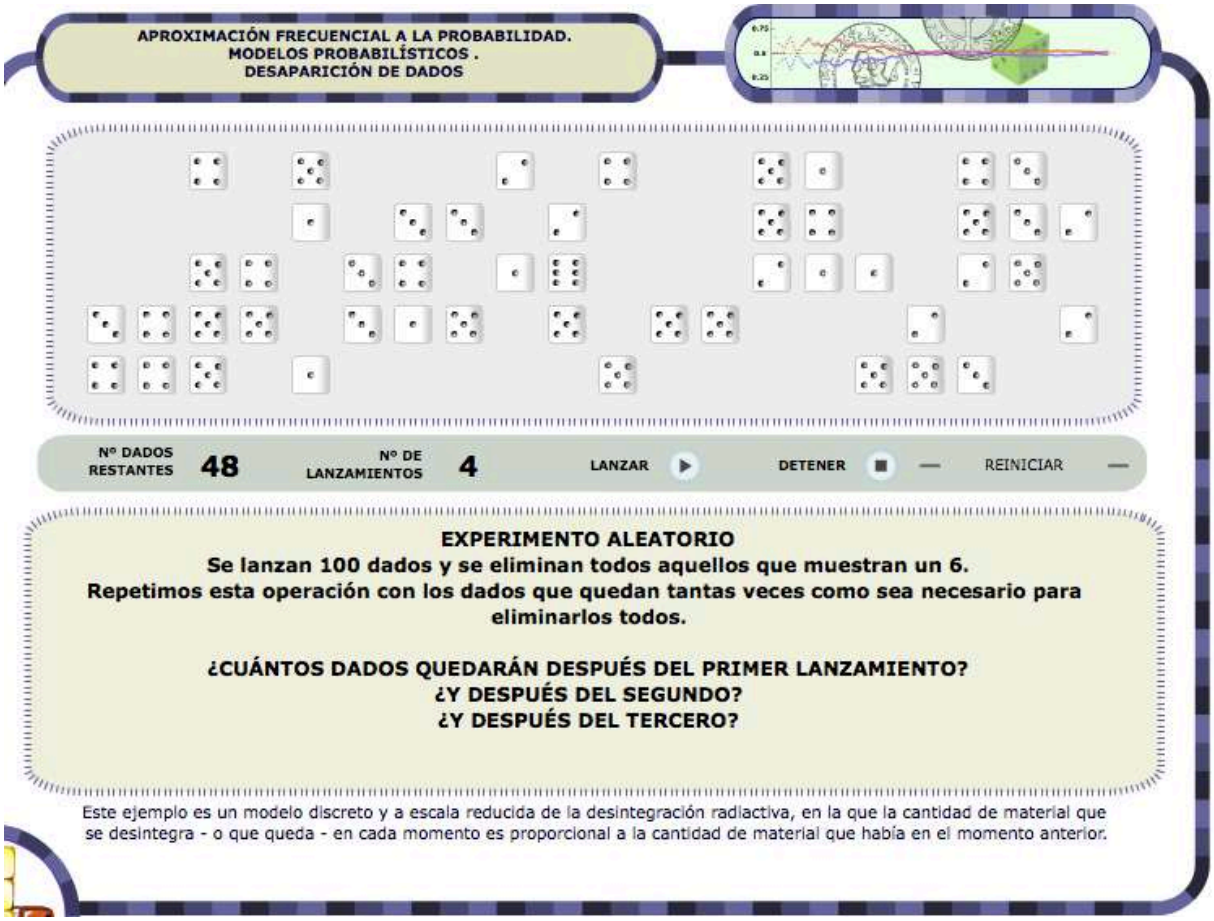



Figura 7.52 Aplicación sobre la aproximación frecuencial a la Probabilidad. Desaparición de dados

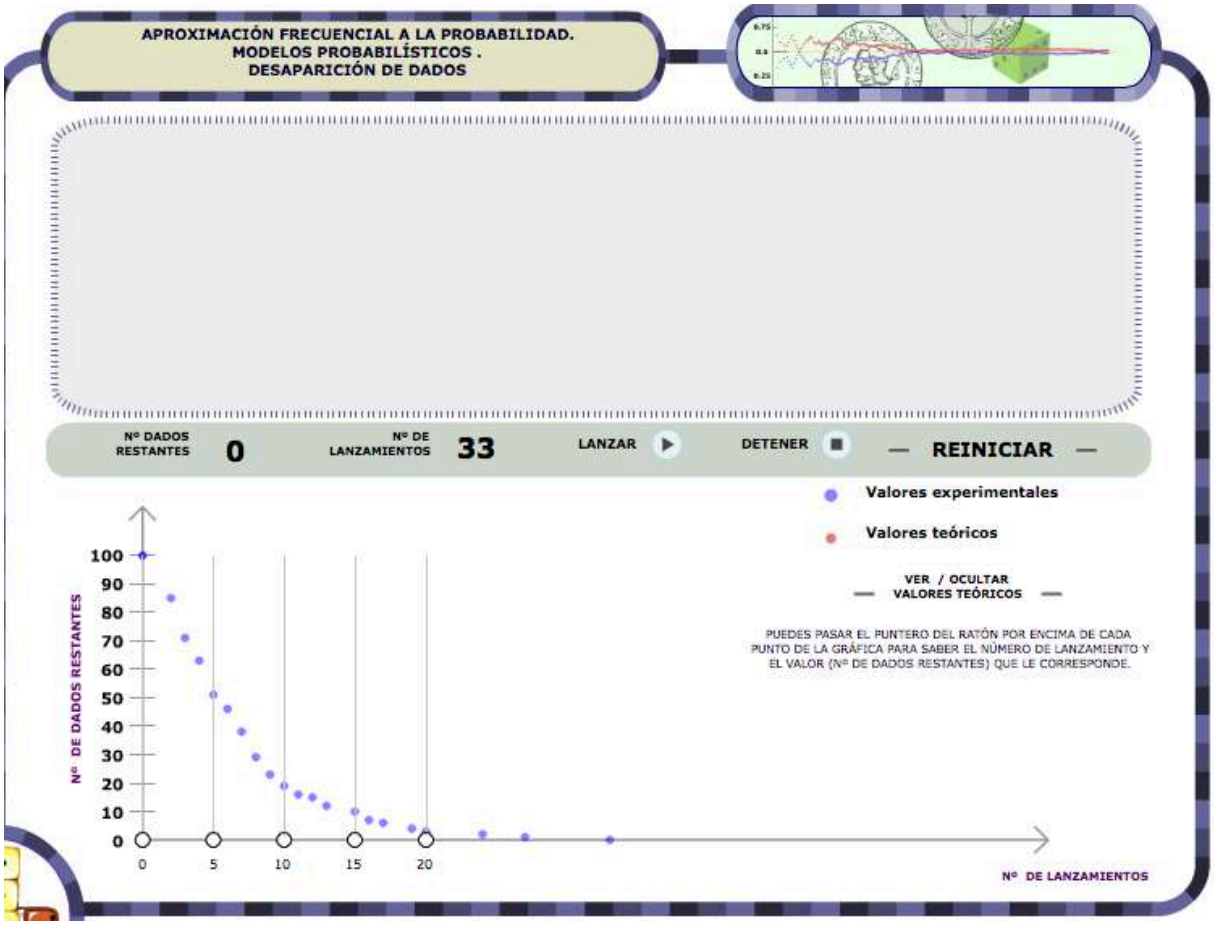



Figura 7.53 Aplicación sobre la aproximación frecuencial a la Probabilidad. Desaparición de dados




Figura 7.54 Aplicación sobre la aproximación frecuencial a la Probabilidad. Desaparición de dados

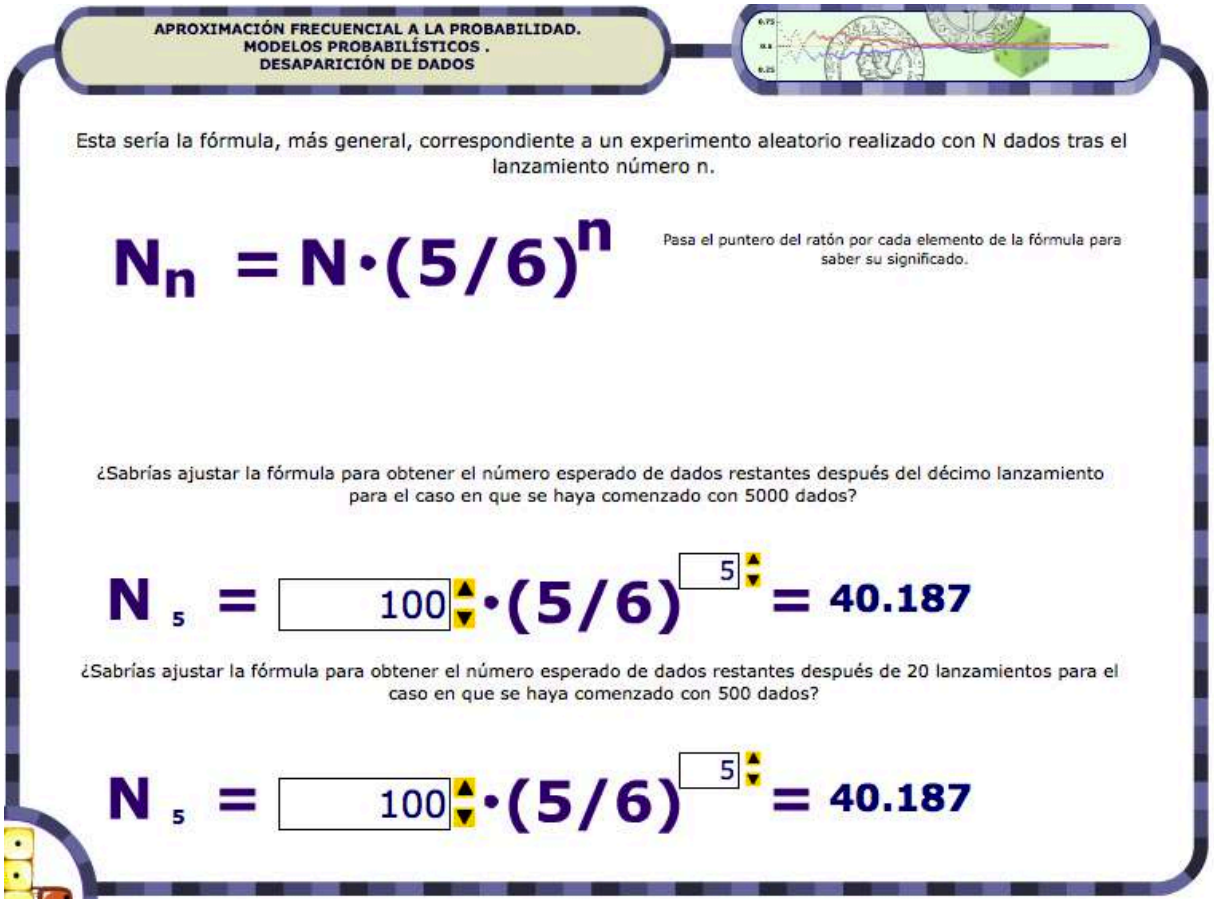



Figura 7.55 Aplicación sobre la aproximación frecuencial a la Probabilidad. Desaparición de dados

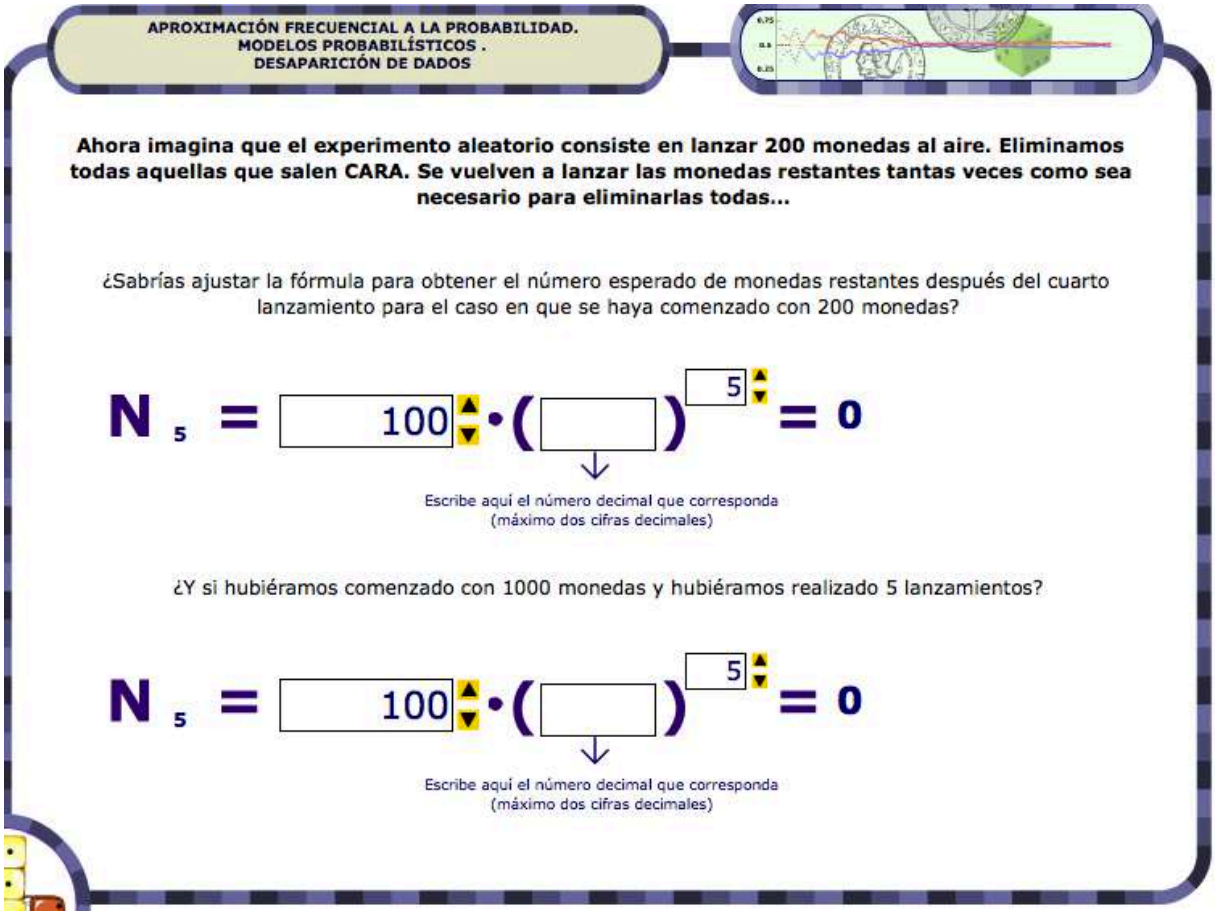



Figura 7.56 Aplicación sobre la aproximación frecuencial a la Probabilidad. Desaparición de dados

## APLICACIÓN. LANZAMIENTO SIMULTÁNEO DE N MONEDAS

Vamos a comenzar **lanzando simultáneamente 6 monedas al aire** un buen número de veces y anotando el número de caras que obtenemos en cada lanzamiento.




Figura 7.57 Aplicación sobre la aproximación frecuencial a la Probabilidad. Lanzamiento simultáneo de n monedas

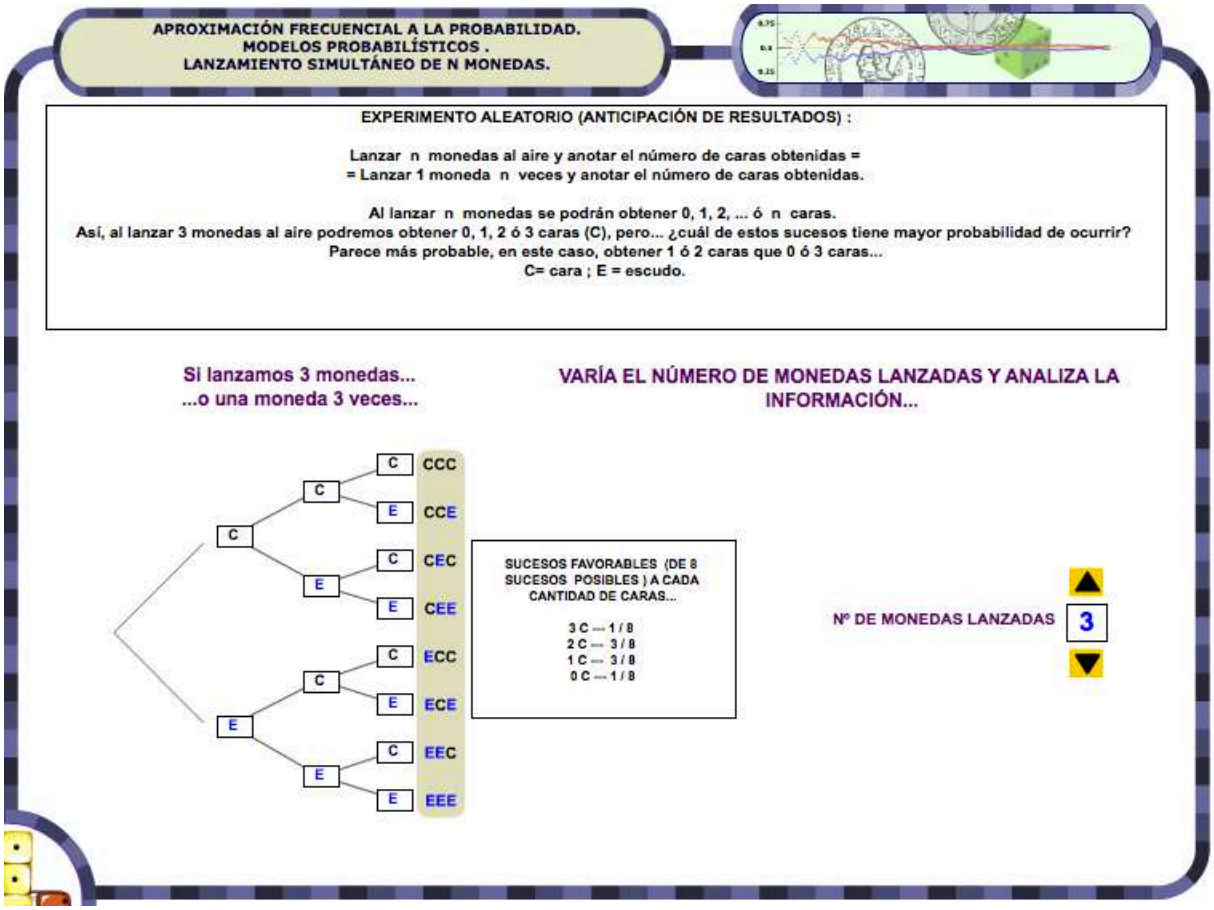



Figura 7.58 Aplicación sobre la aproximación frecuencial a la Probabilidad. Lanzamiento simultáneo de n monedas

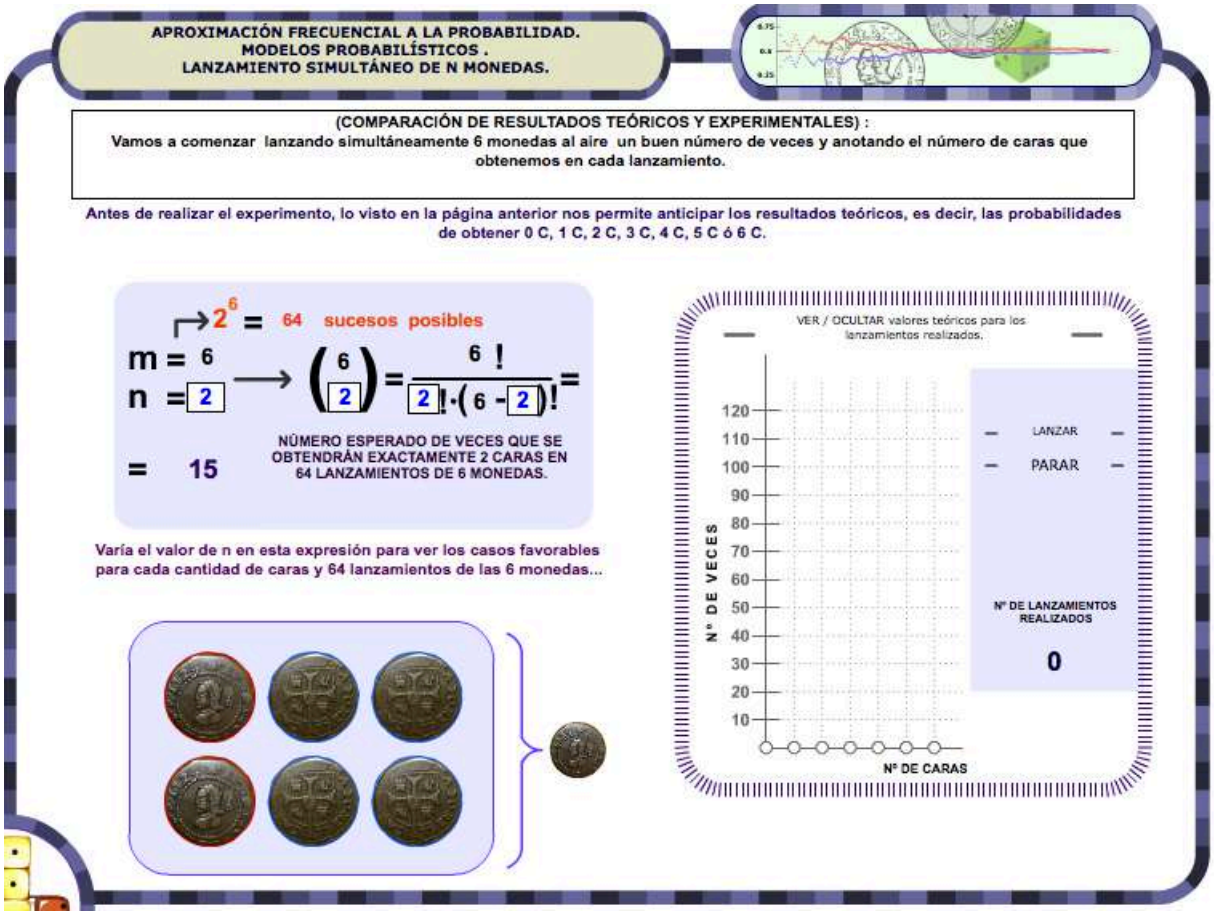



Figura 7.59 Aplicación sobre la aproximación frecuencial a la Probabilidad. Lanzamiento simultáneo de n monedas

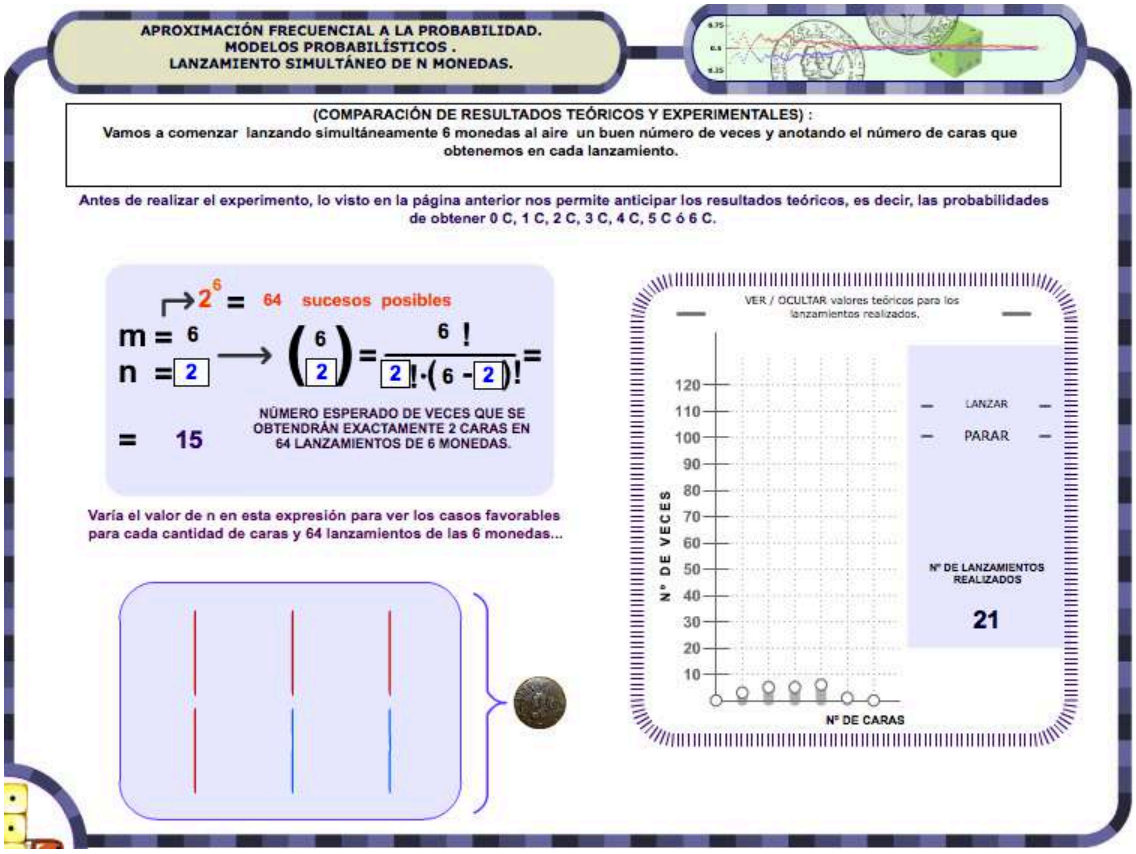



Figura 7.60 Aplicación sobre la aproximación frecuencial a la Probabilidad. Lanzamiento simultáneo de n monedas

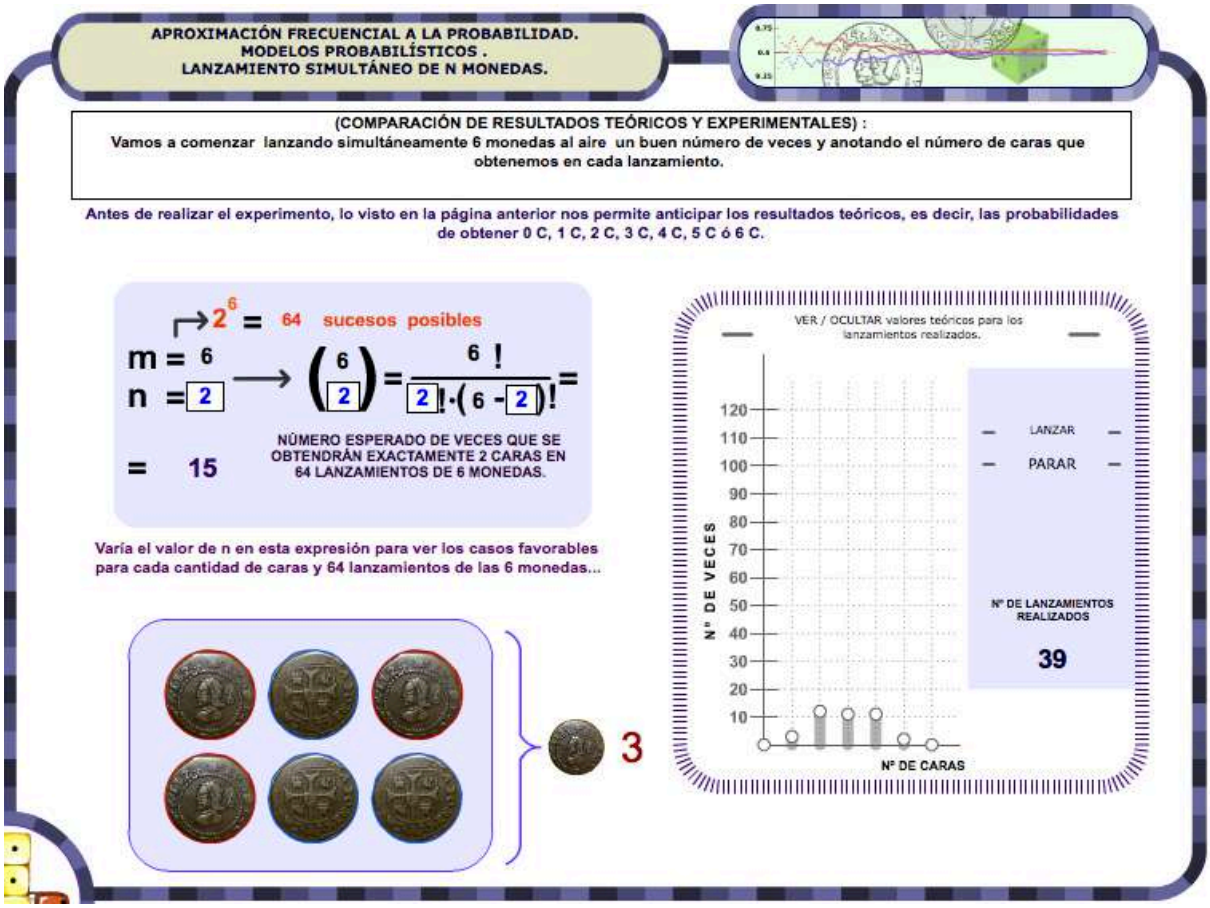



Figura 7.61 Aplicación sobre la aproximación frecuencial a la Probabilidad. Lanzamiento simultáneo de n monedas

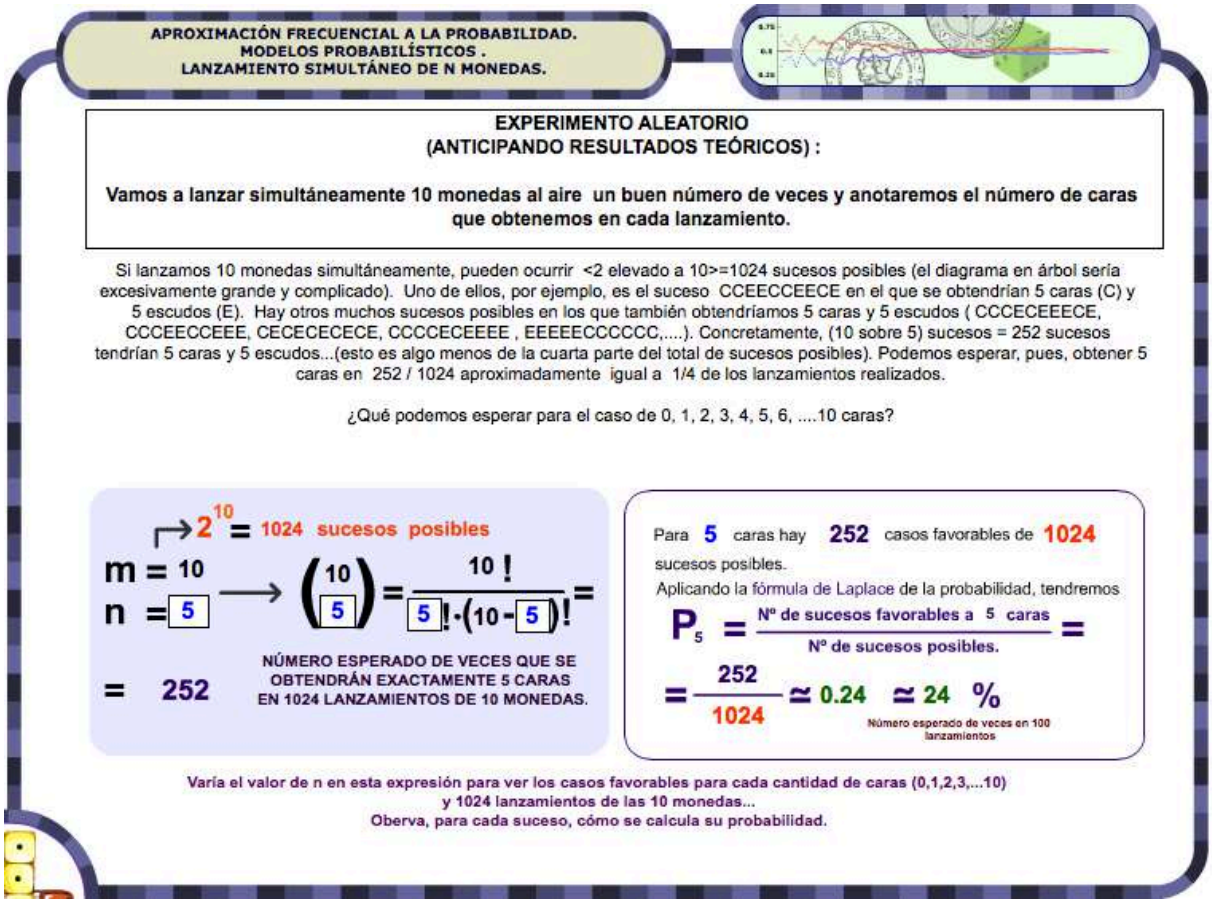



Figura 7.62 Aplicación sobre la aproximación frecuencial a la Probabilidad. Lanzamiento simultáneo de n monedas

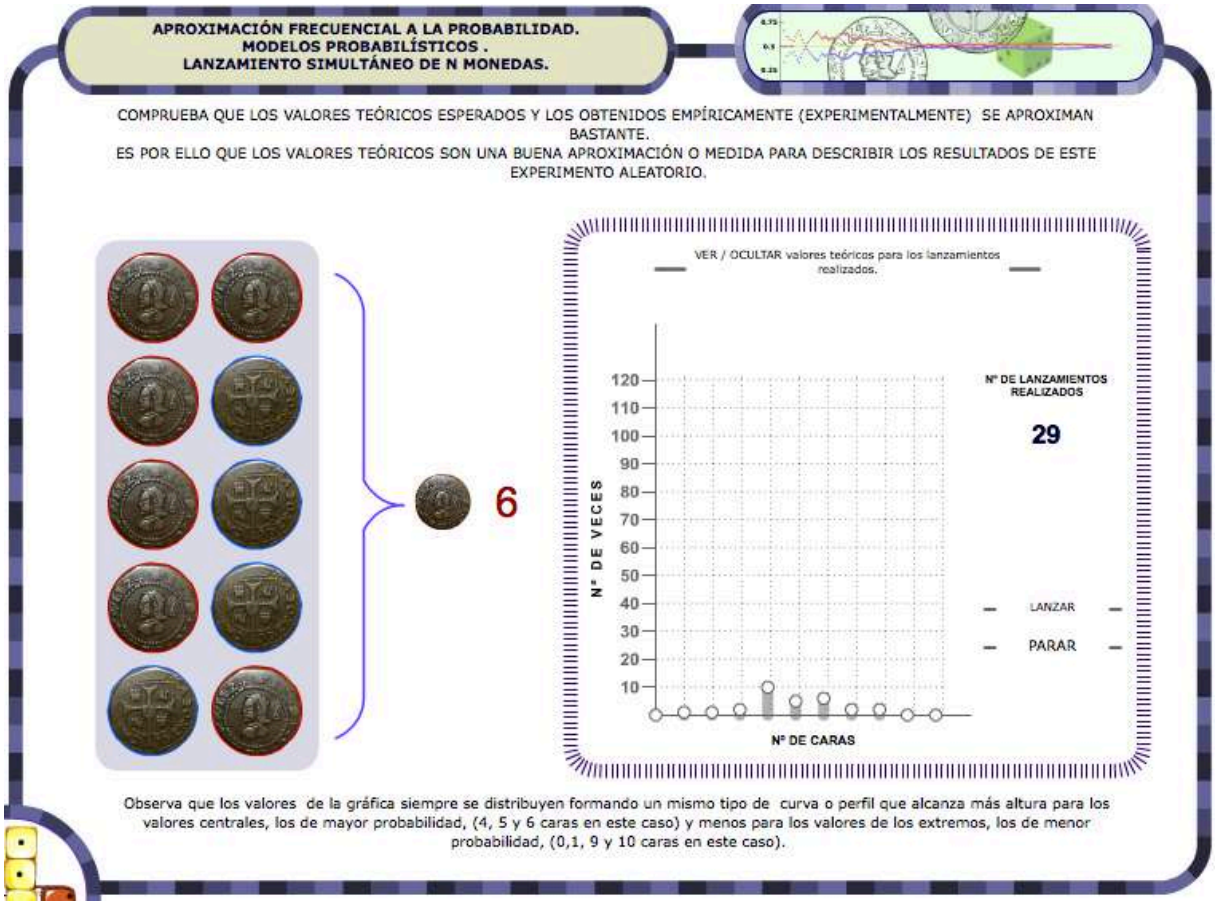



Figura 7.63 Aplicación sobre la aproximación frecuencial a la Probabilidad. Lanzamiento simultáneo de n monedas

## APLICACIÓN. APARATO DE GALTON O BINOSTATO

El llamado Aparato de Galton o binostato y su relación con el Triángulo de Tartaglia (o de Pascal) y los números combinatorios.

En un **Aparato de Galton** se dejan caer bolas por un circuito y lo recorren por la acción de la fuerza de la gravedad. Cuando una bola choca contra un tope, tiene la misma probabilidad de ir hacia la izquierda que hacia la derecha.

Aquí tienes simulado un Aparato de Galton de 4 filas de topes (5 salidas). ¿Cuál será la probabilidad de que una bola salga por A? ¿Y la probabilidad de que salga por B? ¿Y de que salga por C?

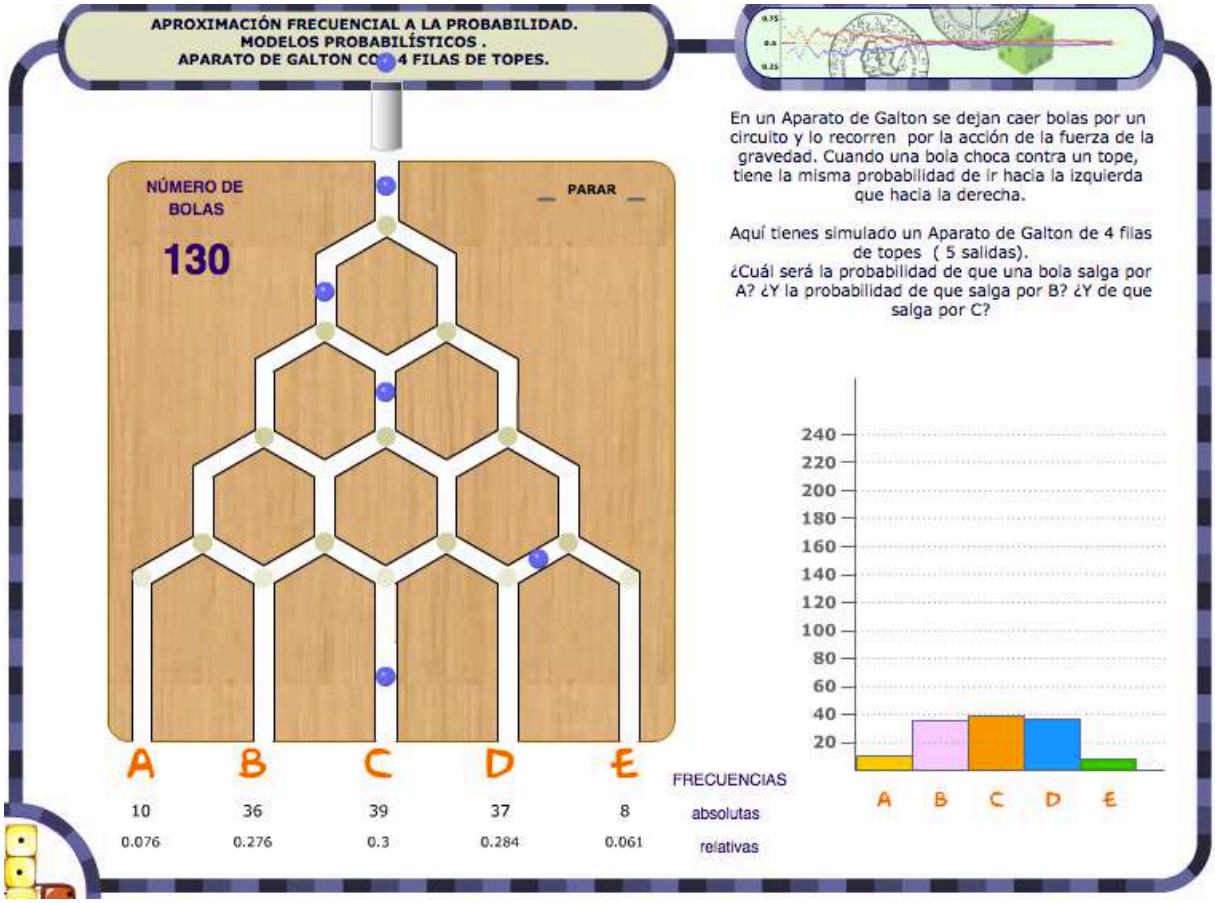



Figura 7.64 Aplicación sobre la aproximación frecuencial a la Probabilidad.

Aparato de Galton o binostato

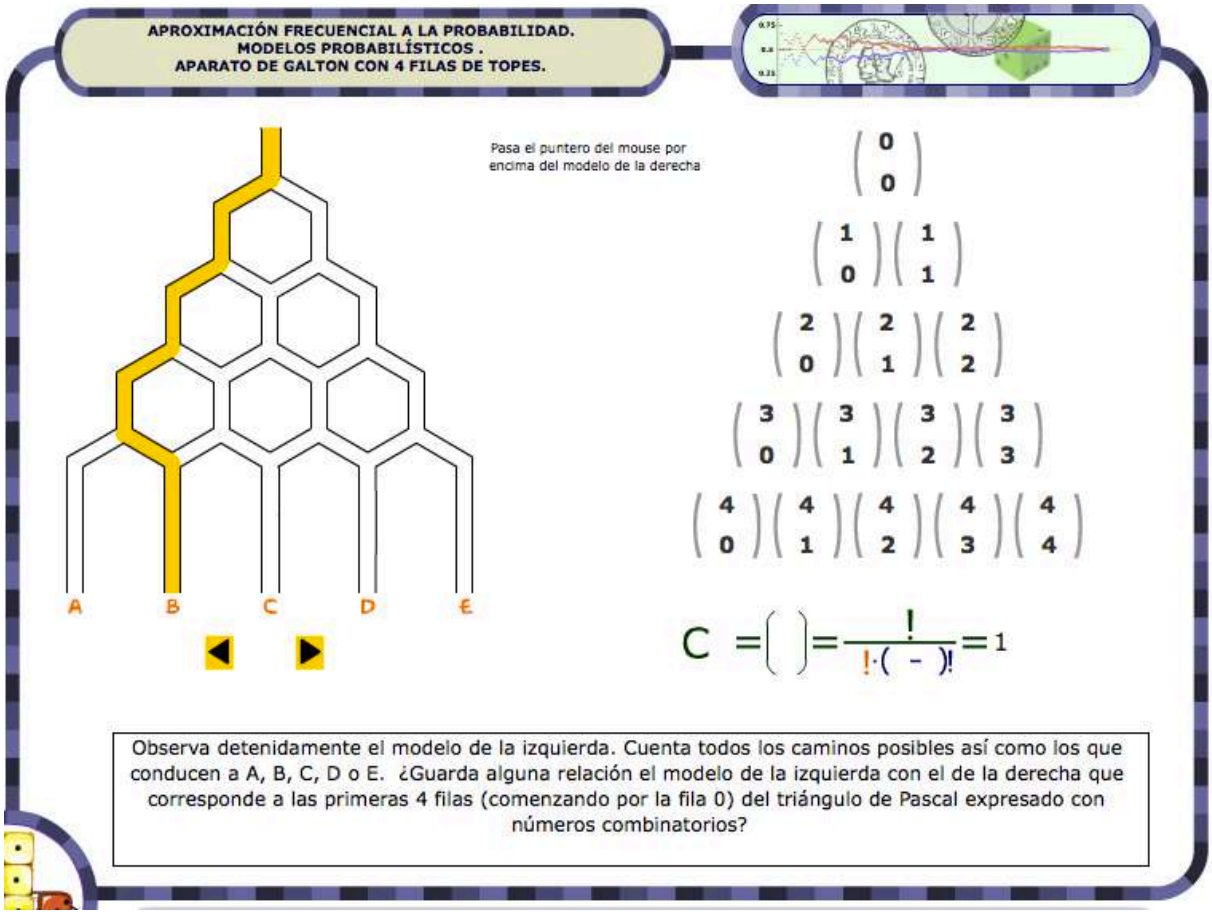



Figura 7.65 Aplicación sobre la aproximación frecuencial a la Probabilidad.

Aparato de Galton o binostato

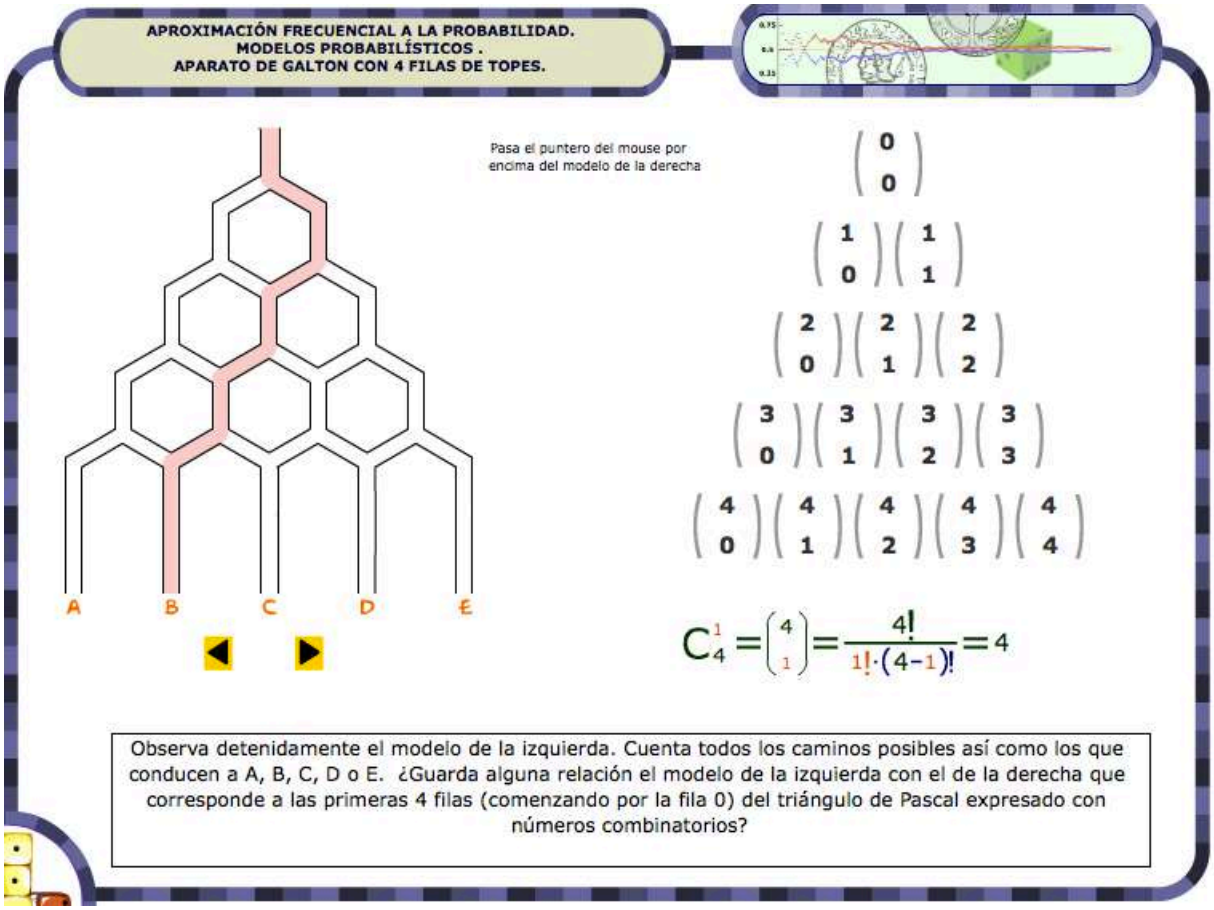



Figura 7.66 Aplicación sobre la aproximación frecuencial a la Probabilidad.

Aparato de Galton o binostato

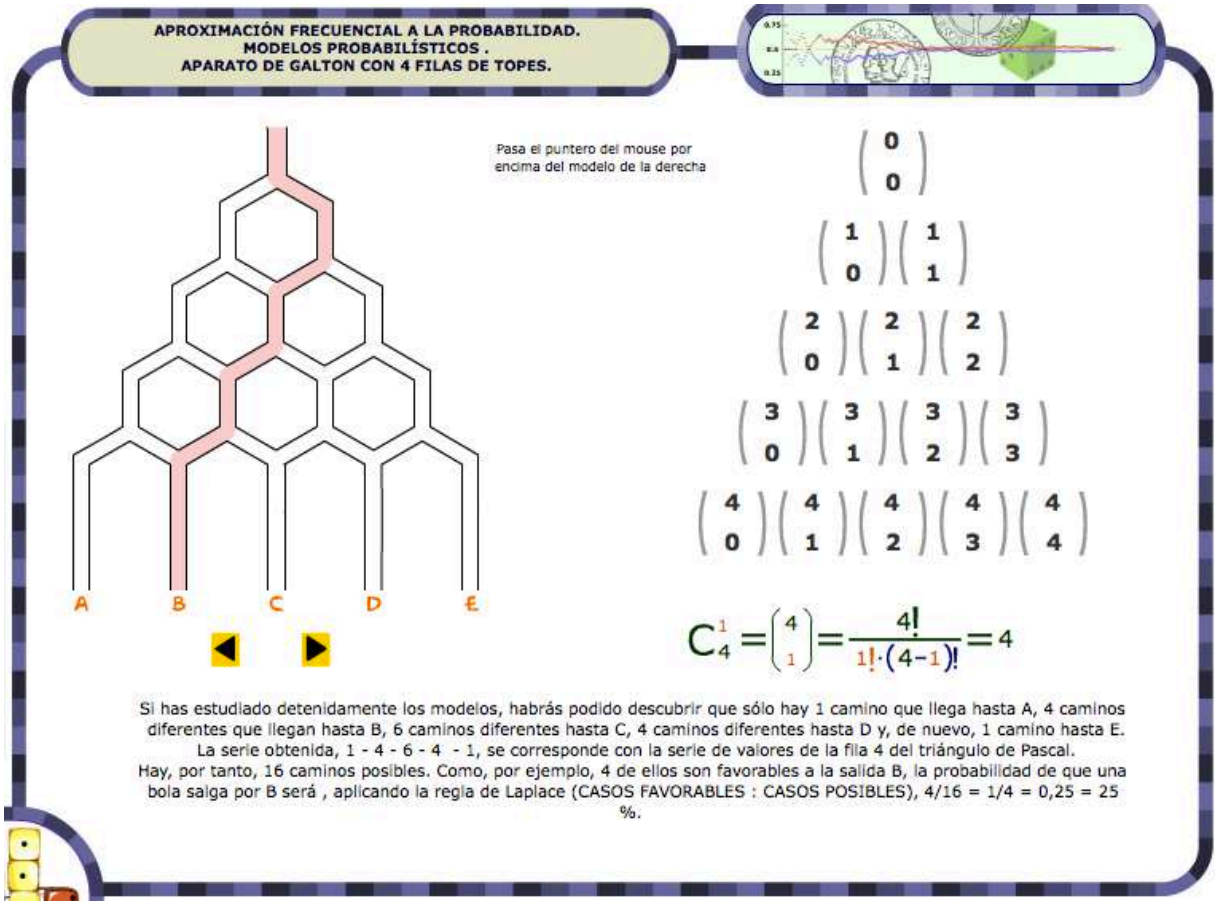



Figura 7.67 Aplicación sobre la aproximación frecuencial a la Probabilidad. Aparato de Galton o binostato

## APLICACIÓN. TABLAS DE NÚMEROS ALEATORIOS

Aplicación que genera **tablas de números aleatorios** que pueden ser utilizados en diferentes situaciones.

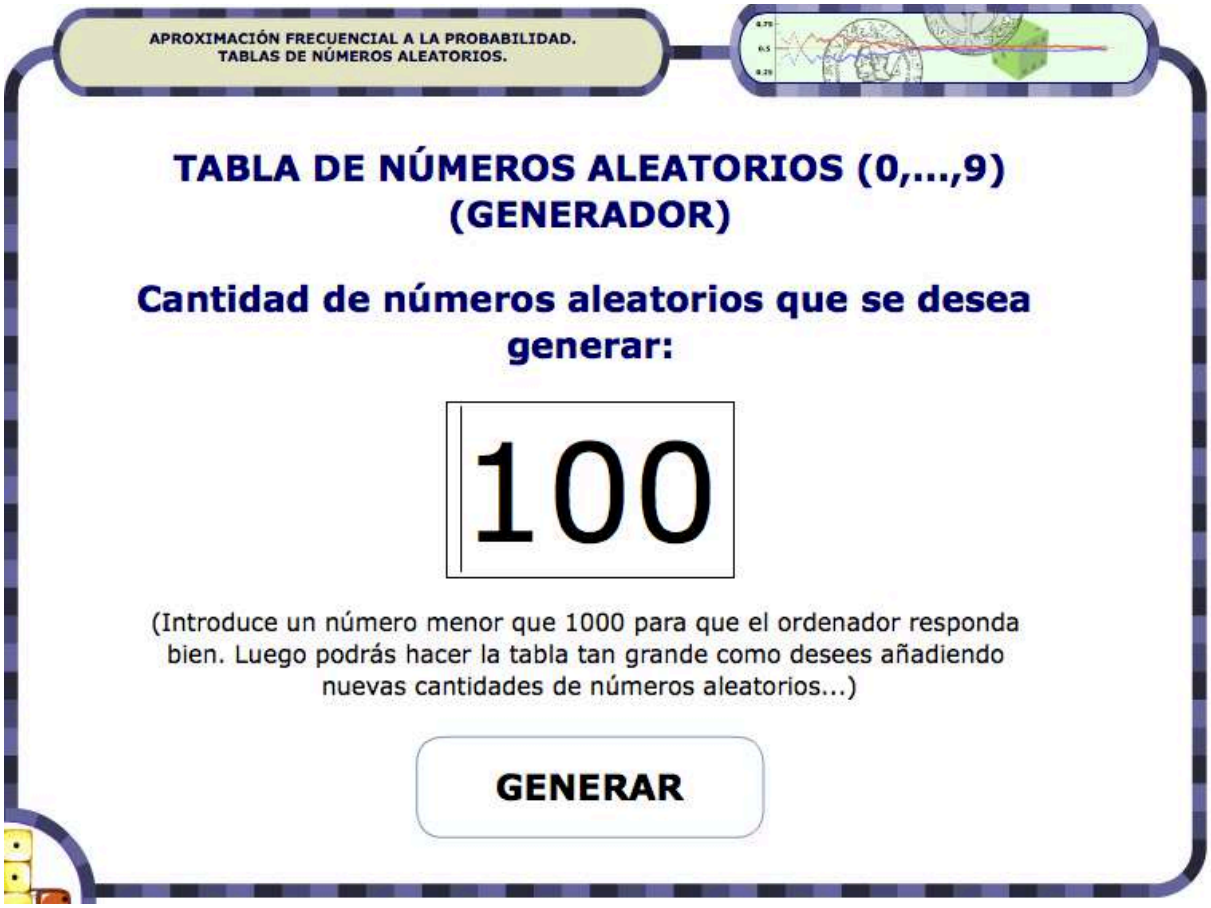



Figura 7.68 Aplicación sobre la aproximación frecuencial a la Probabilidad. Tablas de números aleatorios

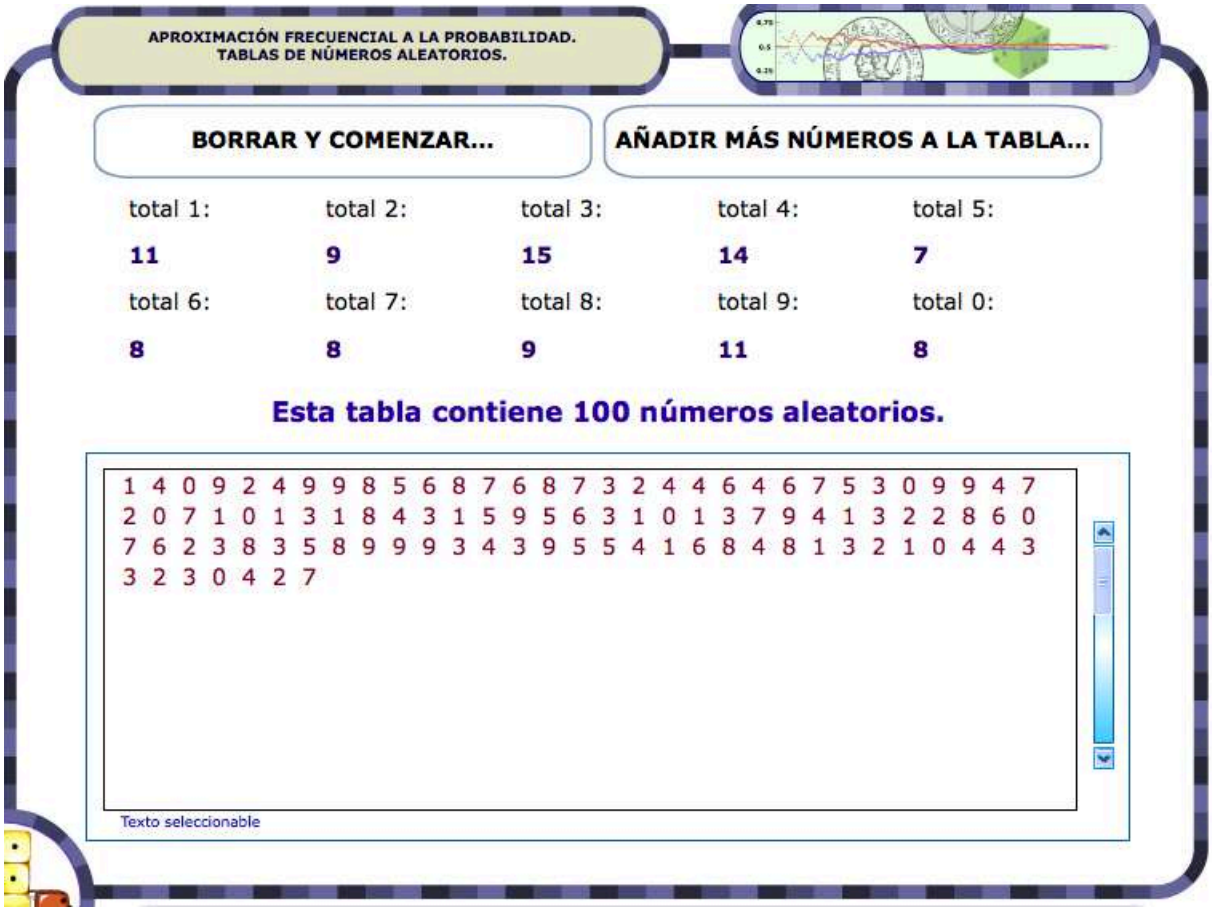



Figura 7.69 Aplicación sobre la aproximación frecuencial a la Probabilidad. Tablas de números aleatorios

### 7.5.2 ANÁLISIS DE PROBLEMAS

En este apartado se ha optado por elegir seis aplicaciones que permiten la simulación, previa a un análisis teórico detallado, de situaciones problemáticas relevantes. Así, por ejemplo, una de estas aplicaciones ofrece la oportunidad de simular los dos primeros problemas que se pueden considerar en la historia de la Probabilidad. Se trata de dos problemas sobre lanzamiento de dados propuesto por el caballero de Meré a Pascal. Otras aplicaciones de este bloque analizan pormenorizadamente las probabilidades de acertar en loterías y quinielas, etc. A continuación se ilustran algunos ejemplos de modos diferentes de simulación de sorteo relacionados con la comprensión y análisis de la situación.




Figura 7.70 Cabecera de Situaciones problemáticas

**APLICACIÓN. UN SORTEO MUY DISCUTIDO.**

Se realiza una simulación del sorteo, por dos procedimientos diferentes, un número suficiente de veces. Entonces se podrá observar cómo las frecuencias relativas se estabilizan en torno a un valor próximo a 1/10 = 0,1.

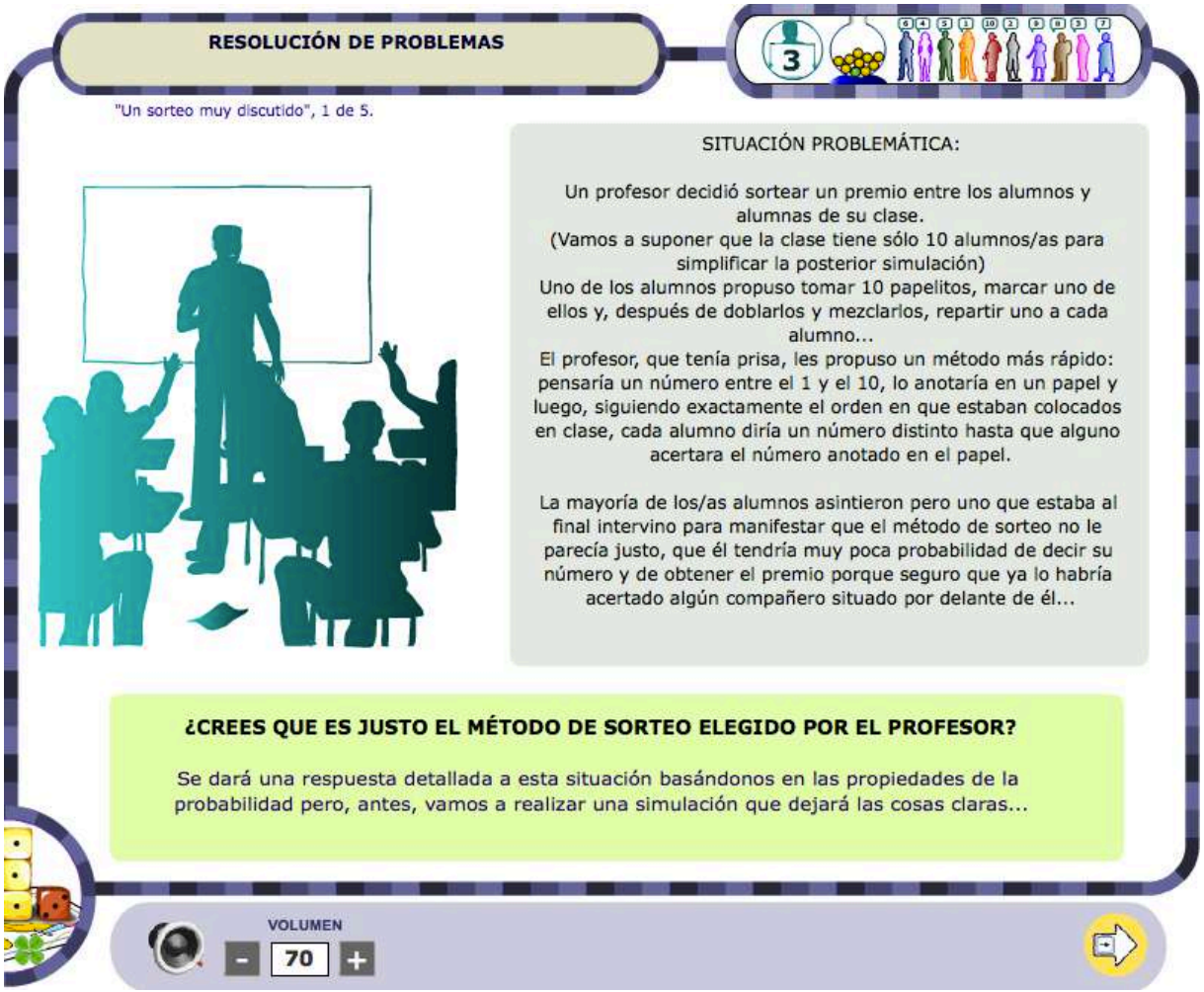



Figura 7.71 Aplicación sobre Situaciones problemáticas. Un sorteo muy discutido

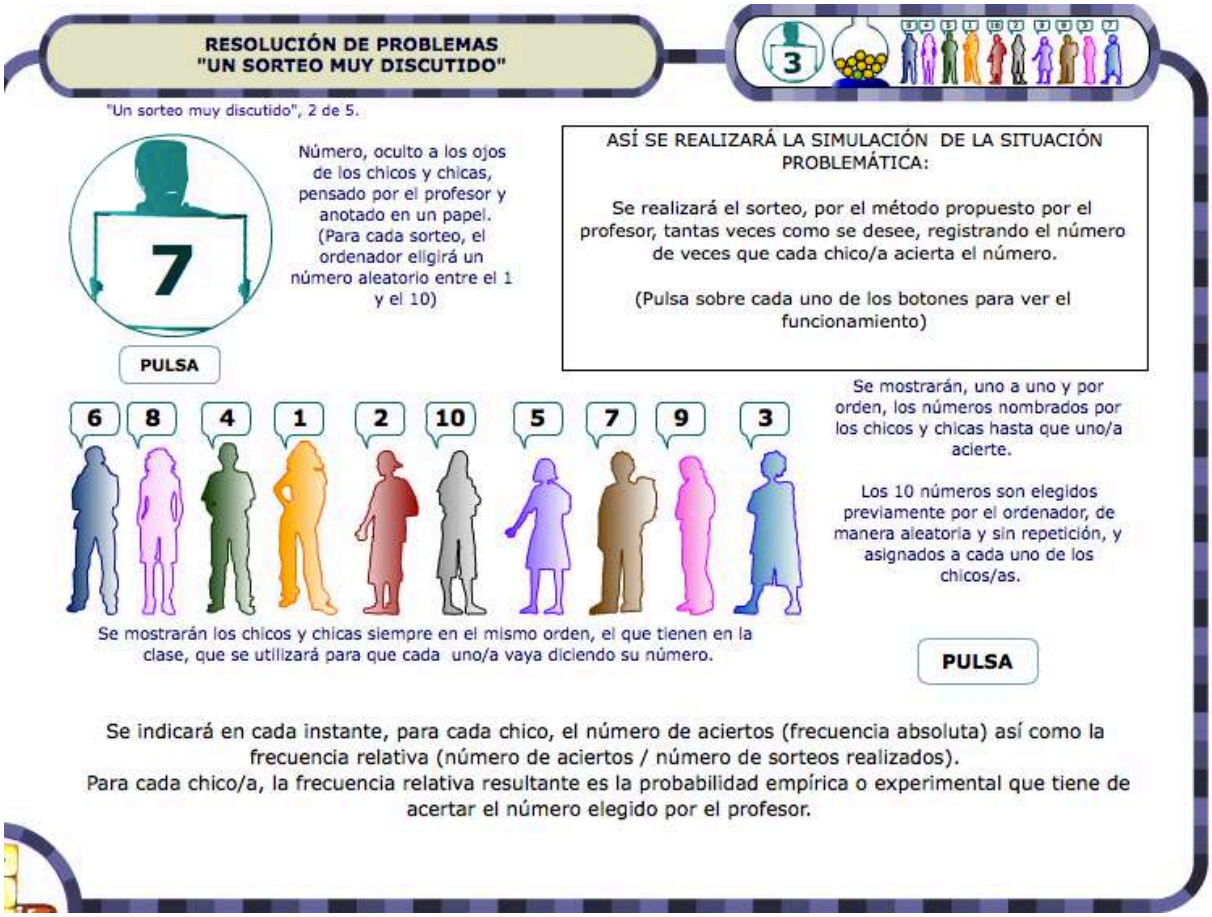



Figura 7.72 Aplicación sobre Situaciones problemáticas. Un sorteo muy discutido

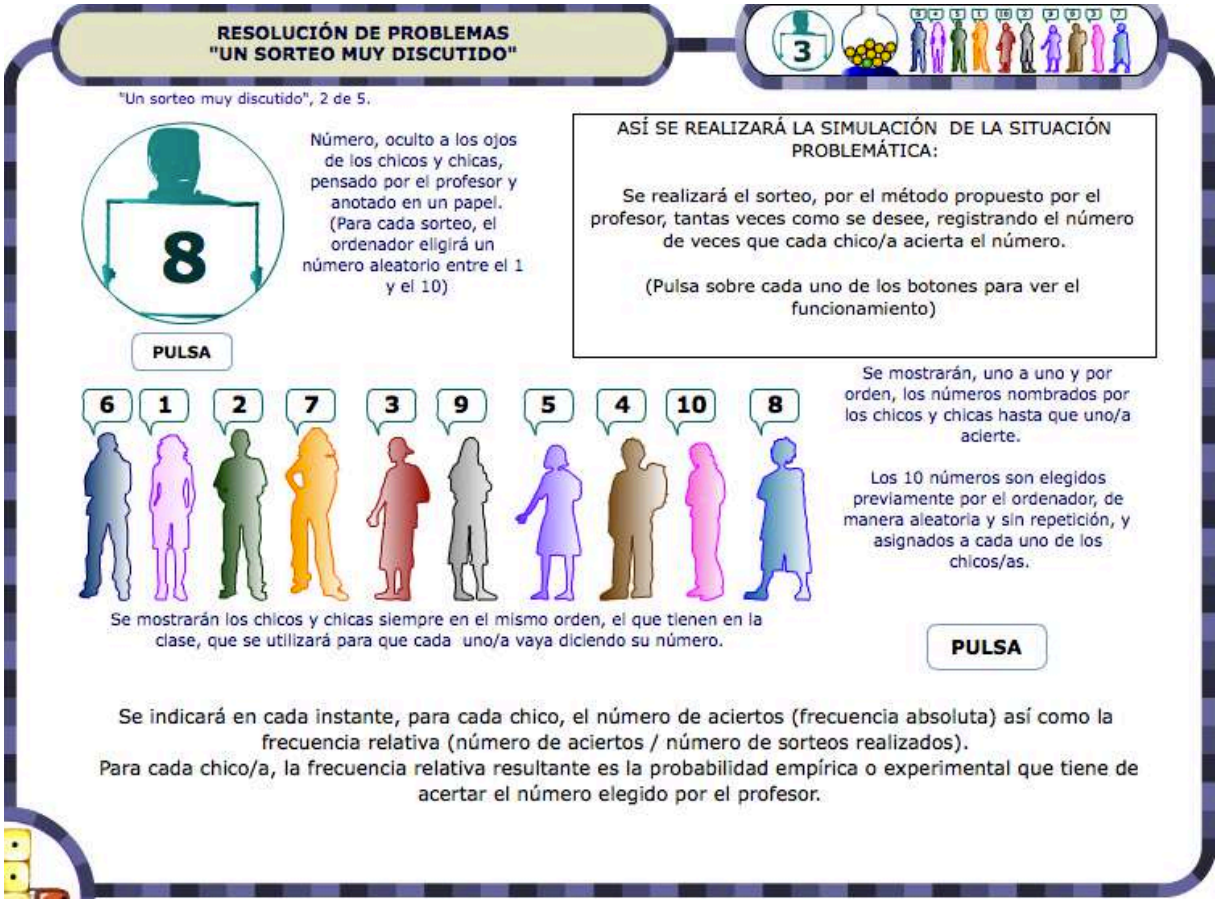



Figura 7.73 Aplicación sobre Situaciones problemáticas. Un sorteo muy discutido




Figura 7.74 Aplicación sobre Situaciones problemáticas. Un sorteo muy discutido




Figura 7.75 Aplicación sobre Situaciones problemáticas. Un sorteo muy discutido

## APLICACIÓN. EL CABALLERO QUE NO QUERÍA PERDER.




Figura 7.76 Aplicación sobre Situaciones problemáticas. El caballero que no quería perder

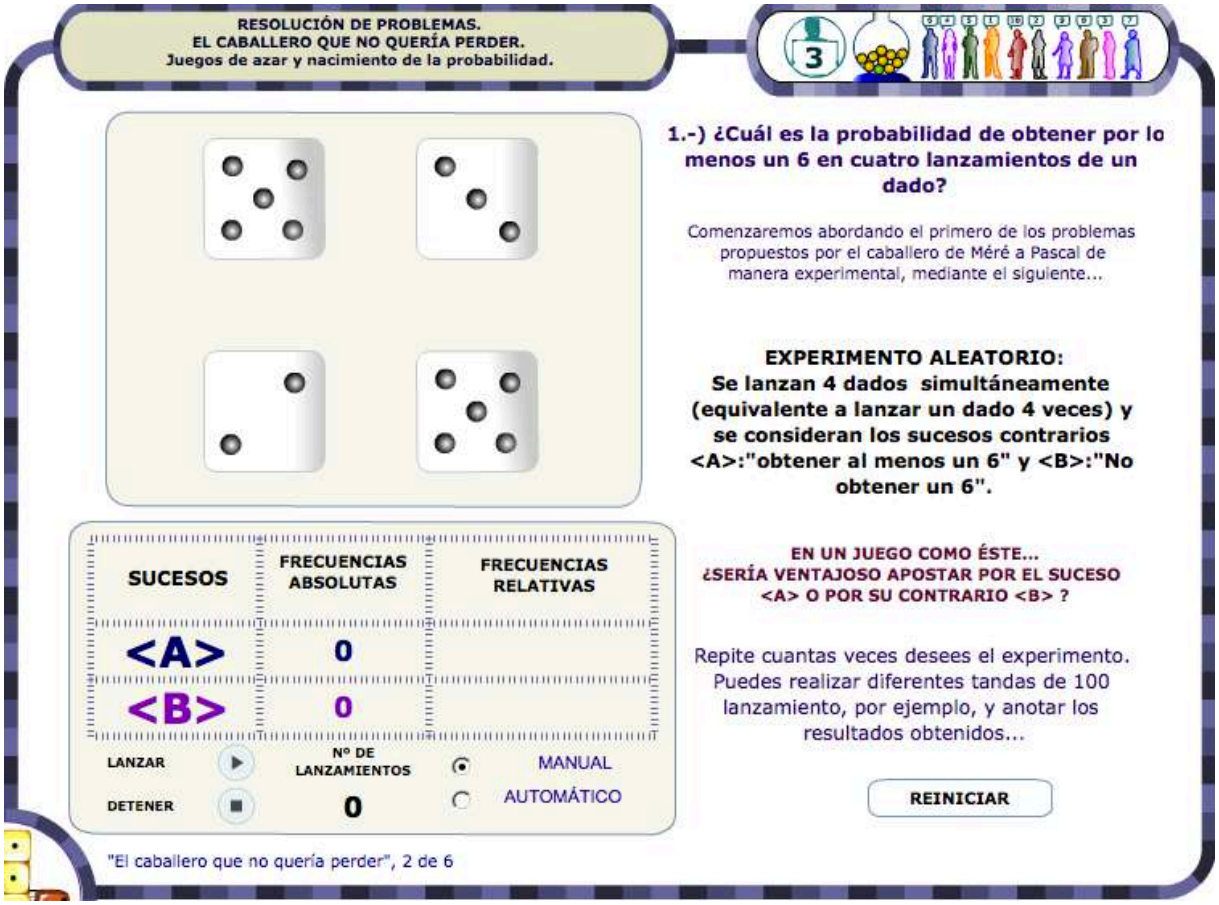



Figura 7.77 Aplicación sobre Situaciones problemáticas. El caballero que no quería perder




Figura 7.78 Aplicación sobre Situaciones problemáticas. El caballero que no quería perder

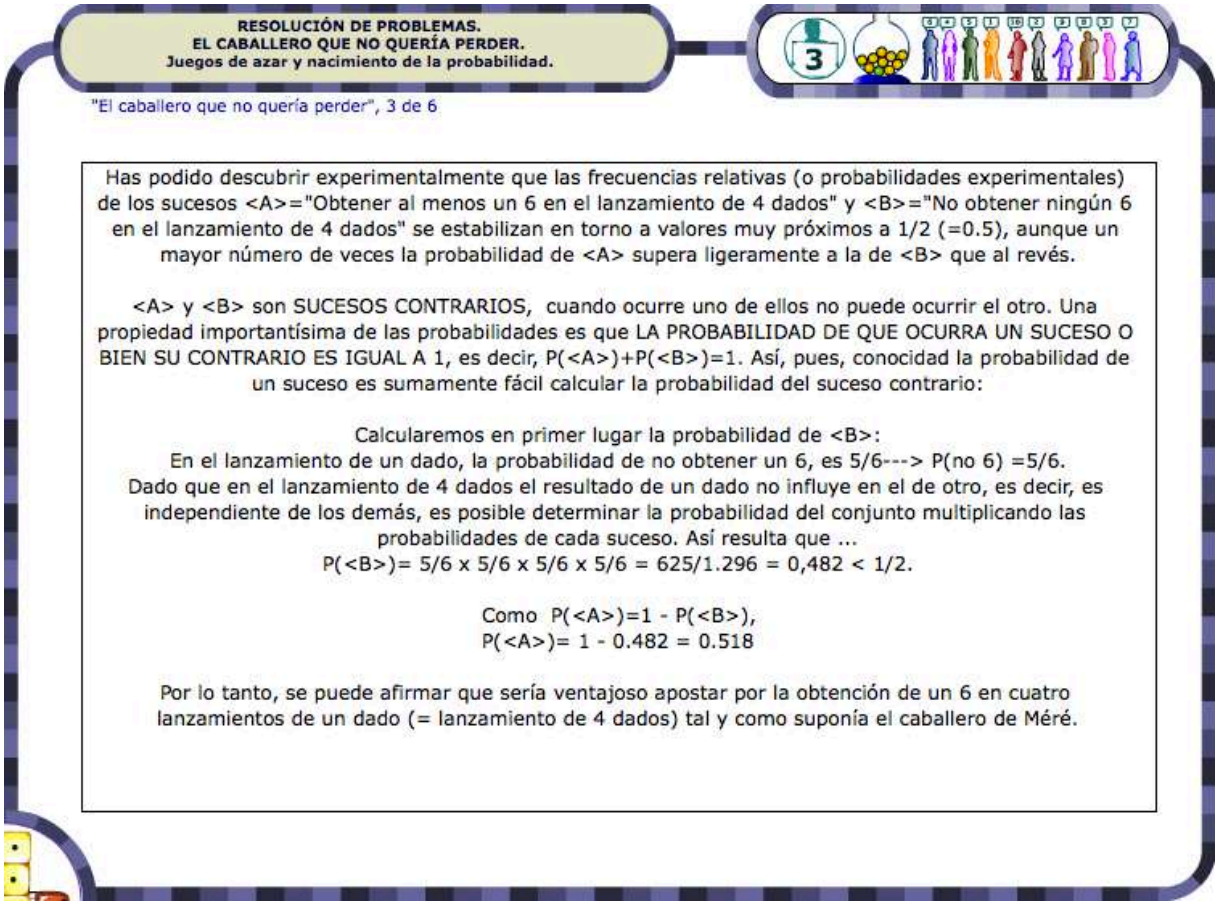



Figura 7.79 Aplicación sobre Situaciones problemáticas. El caballero que no quería perder

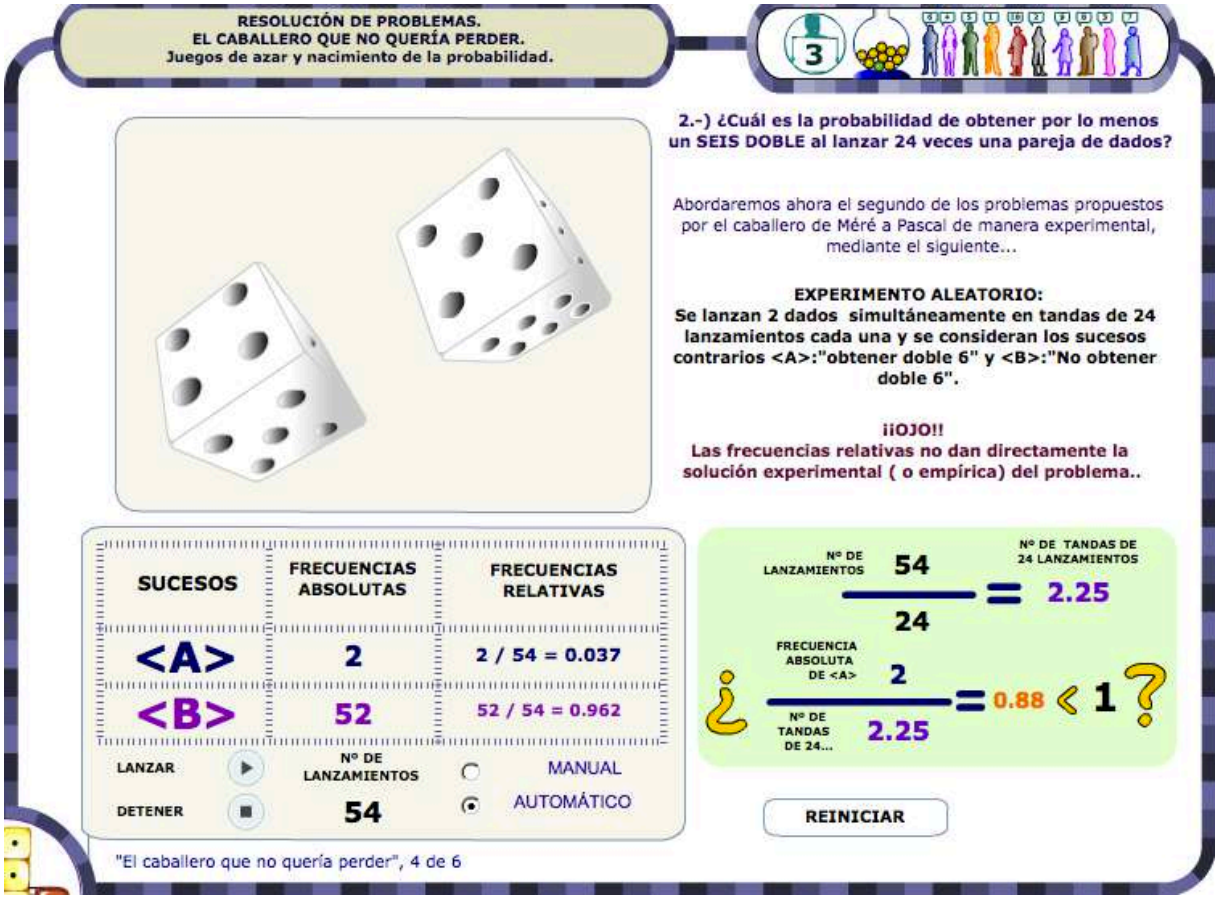



Figura 7.80 Aplicación sobre Situaciones problemáticas. El caballero que no quería perder

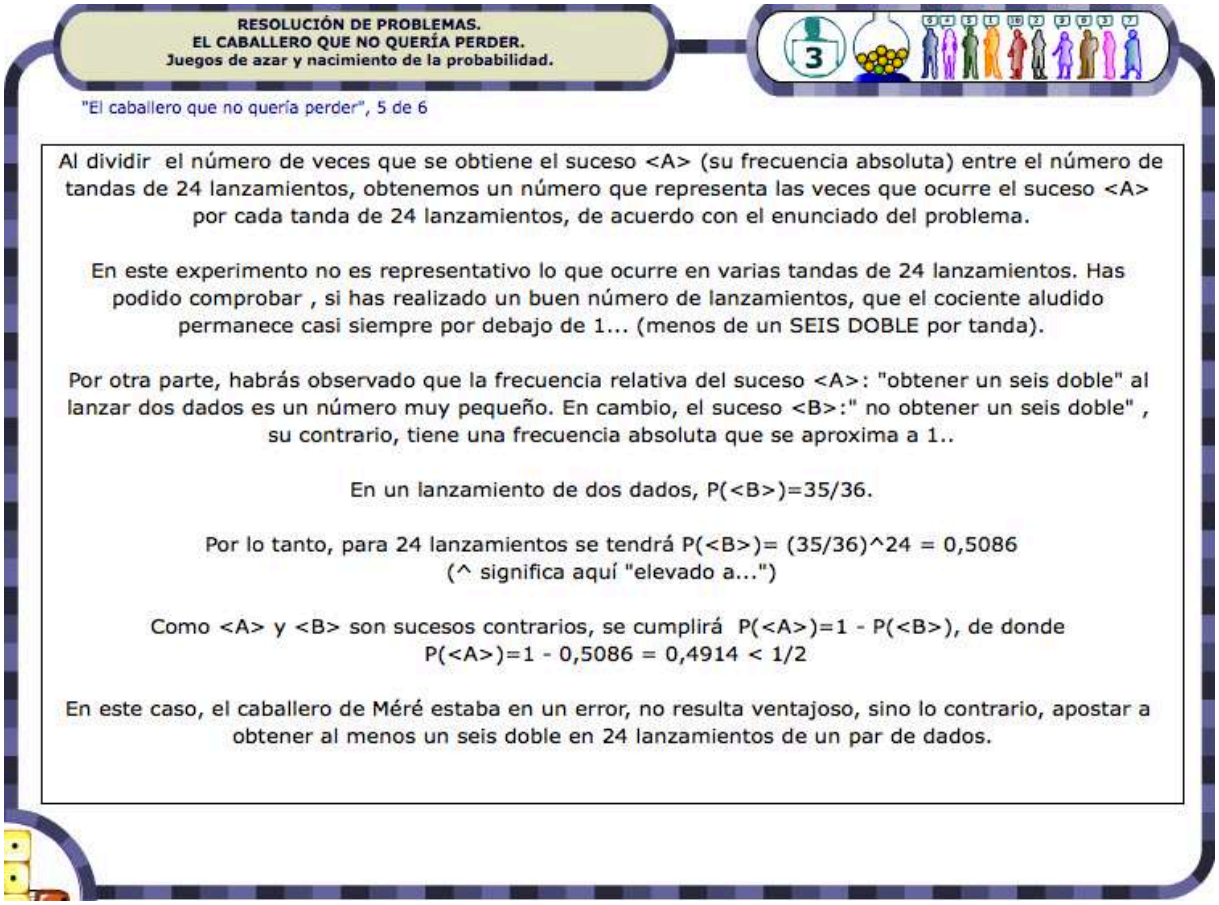



Figura 7.81 Aplicación sobre Situaciones problemáticas. El caballero que no quería perder

## APLICACIÓN. EXTRAER DOS BOLAS DE UNA URNA Y…

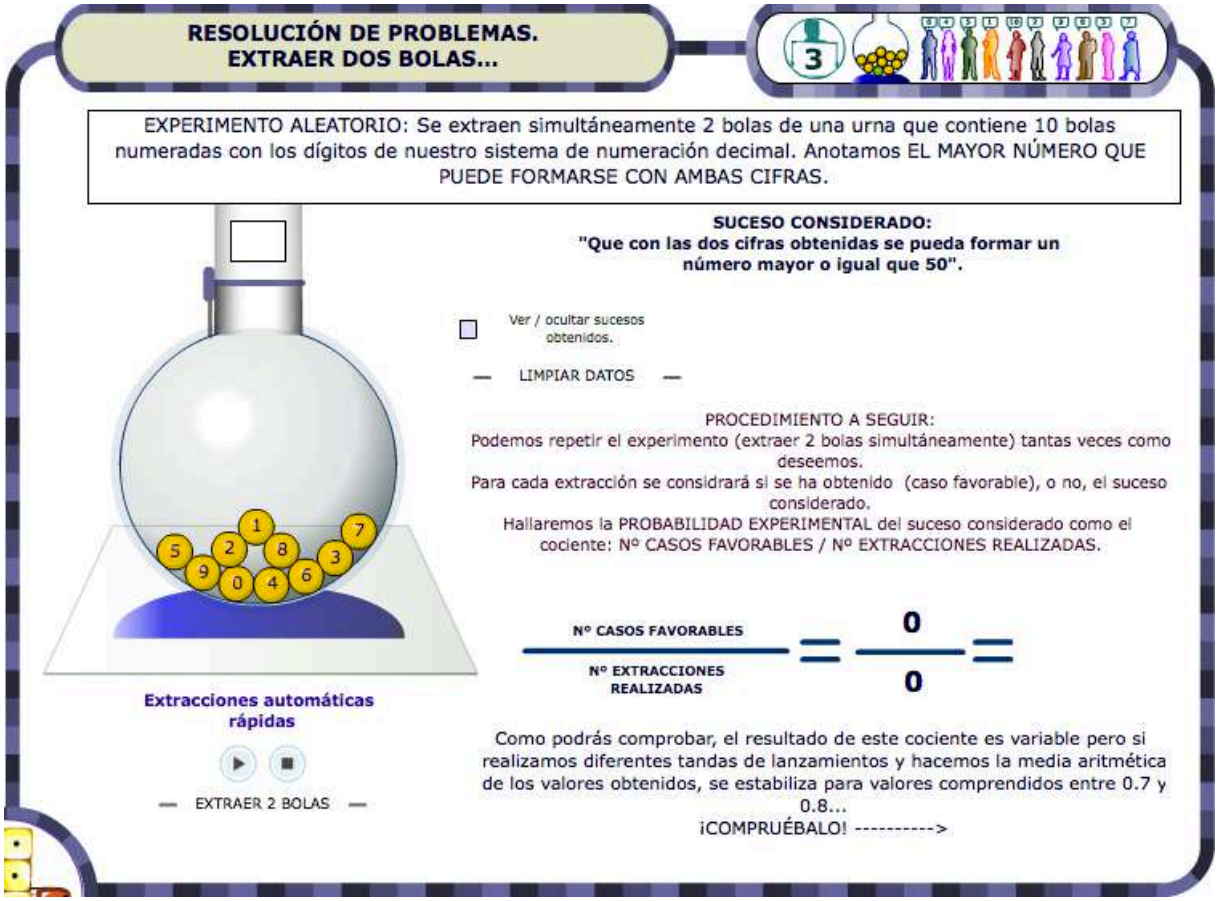



Figura 7.82 Aplicación sobre Situaciones problemáticas. Extraer dos bolas de una urna y…

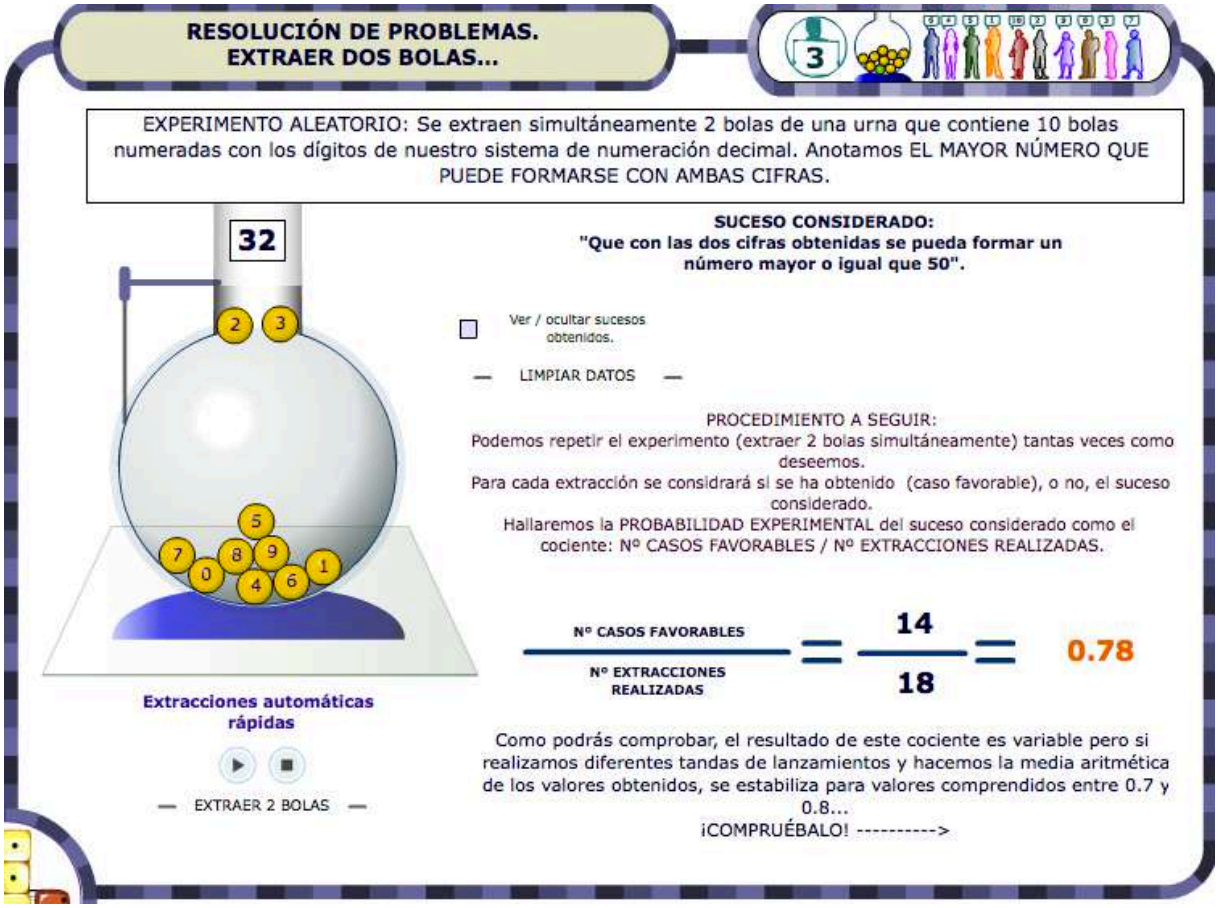



Figura 7.83 Aplicación sobre Situaciones problemáticas. Extraer dos bolas de una urna y…

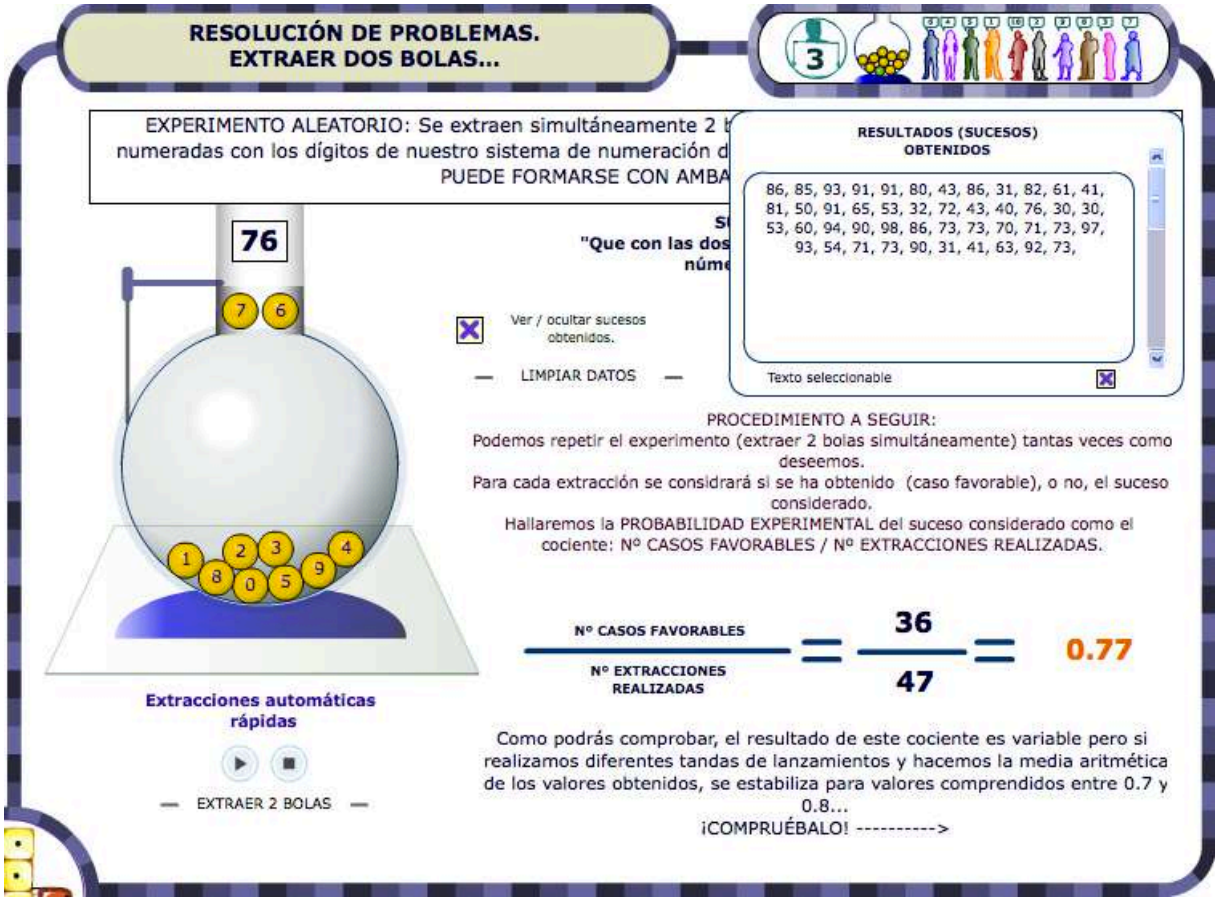



Figura 7.84 Aplicación sobre Situaciones problemáticas. Extraer dos bolas de una urna y…

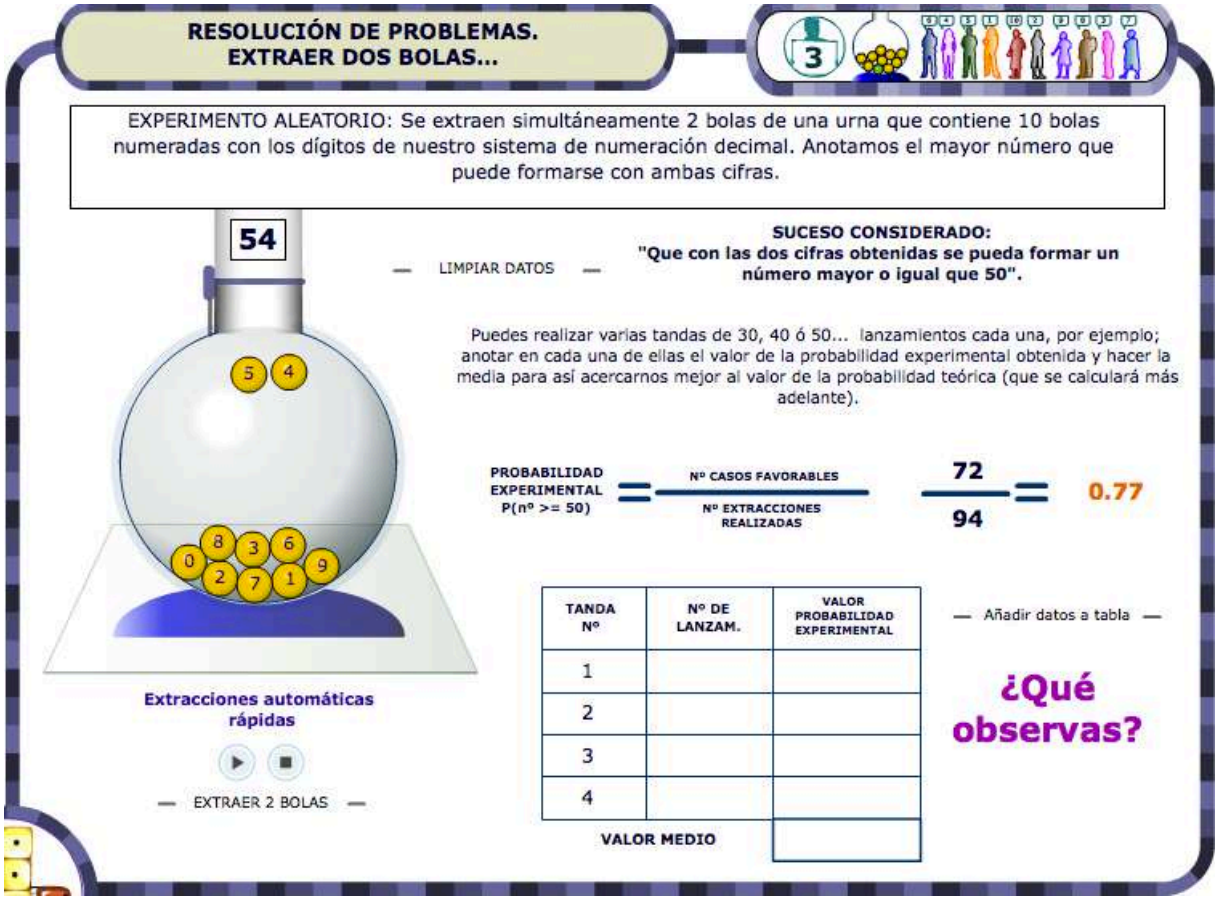



Figura 7.85 Aplicación sobre Situaciones problemáticas. Extraer dos bolas de una urna y…




Figura 7.86 Aplicación sobre Situaciones problemáticas. Extraer dos bolas de una urna y…




Figura 7.87 Aplicación sobre Situaciones problemáticas. Extraer dos bolas de una urna y…




Figura 7.88 Aplicación sobre Situaciones problemáticas. Extraer dos bolas de una urna y…

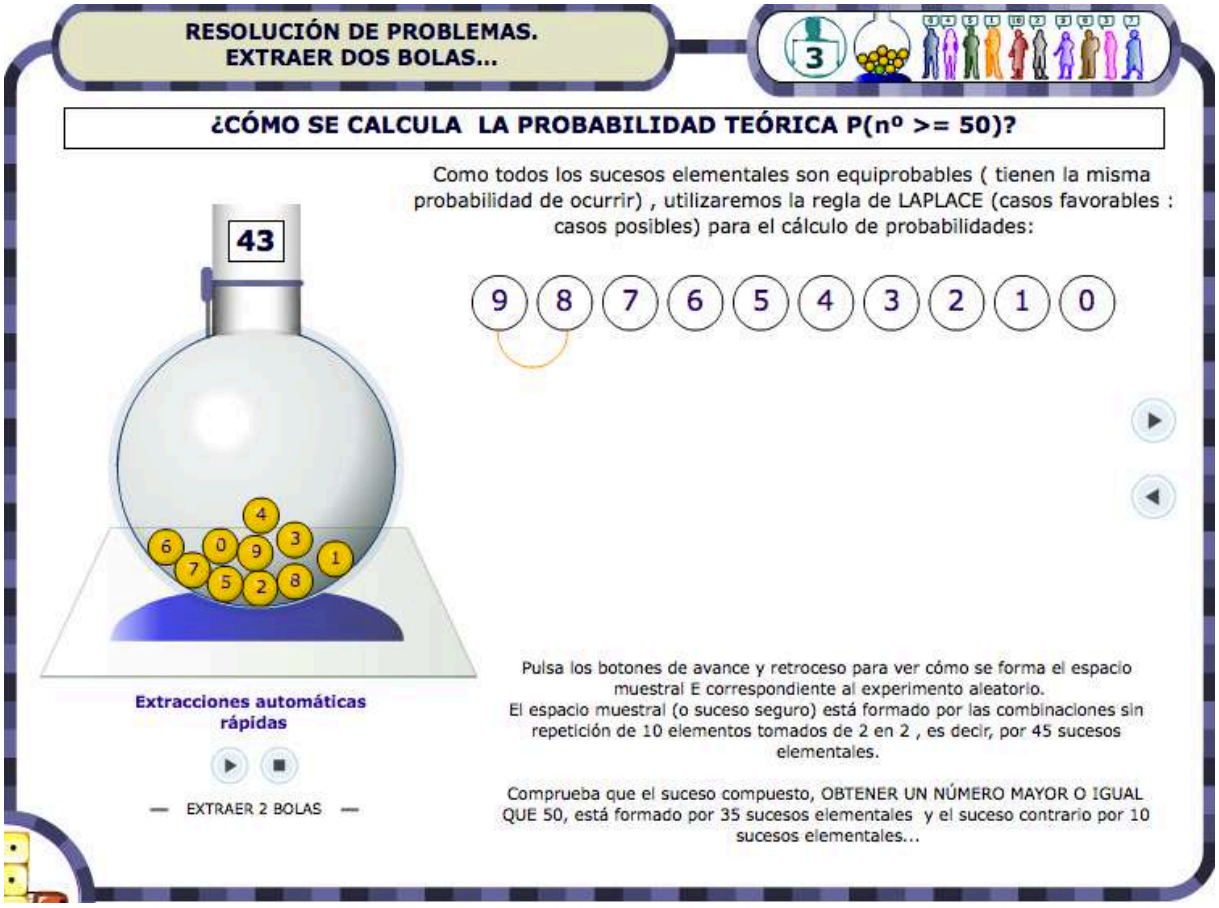



Figura 7.89 Aplicación sobre Situaciones problemáticas. Extraer dos bolas de una urna y…

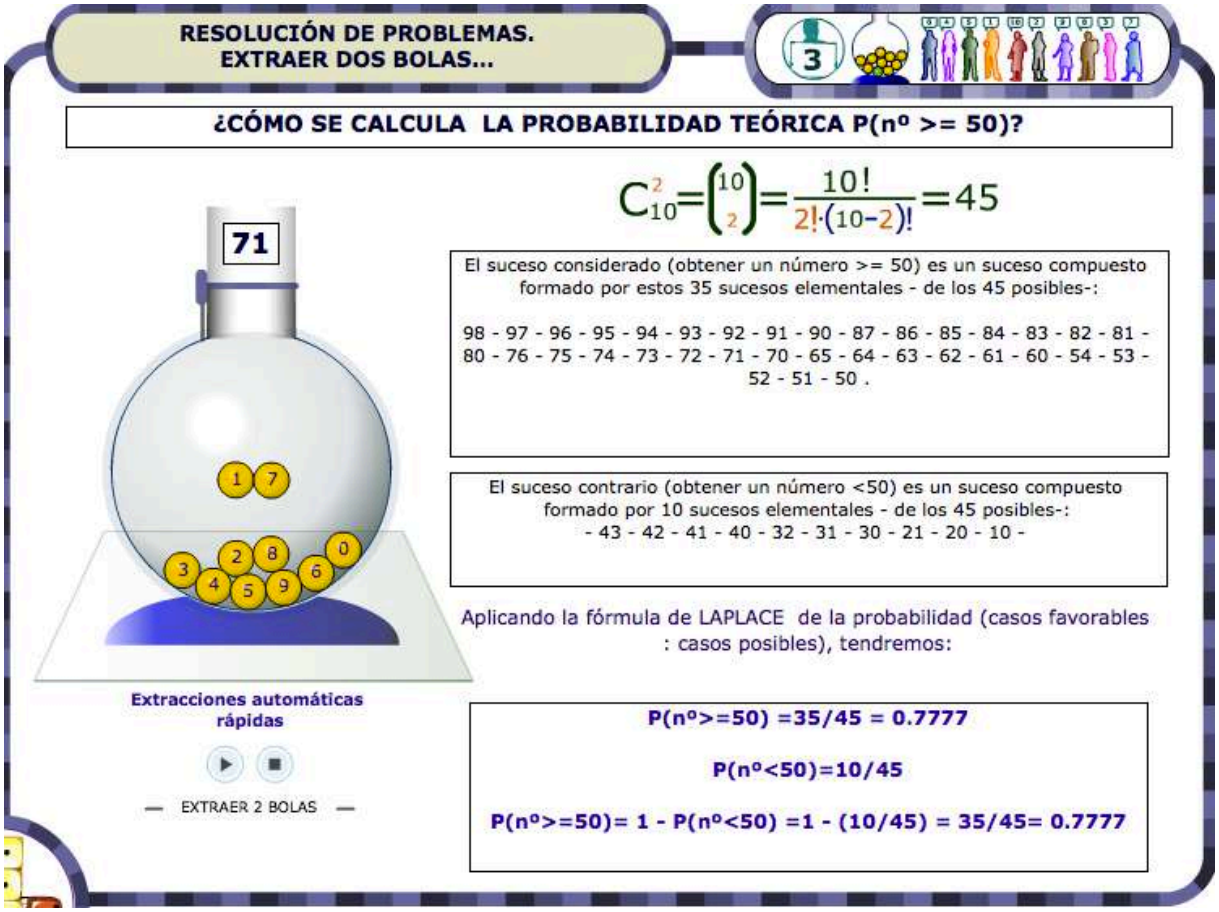



Figura 7.90 Aplicación sobre Situaciones problemáticas. Extraer dos bolas de una urna y…

## APLICACIÓN. LOTERÍA I

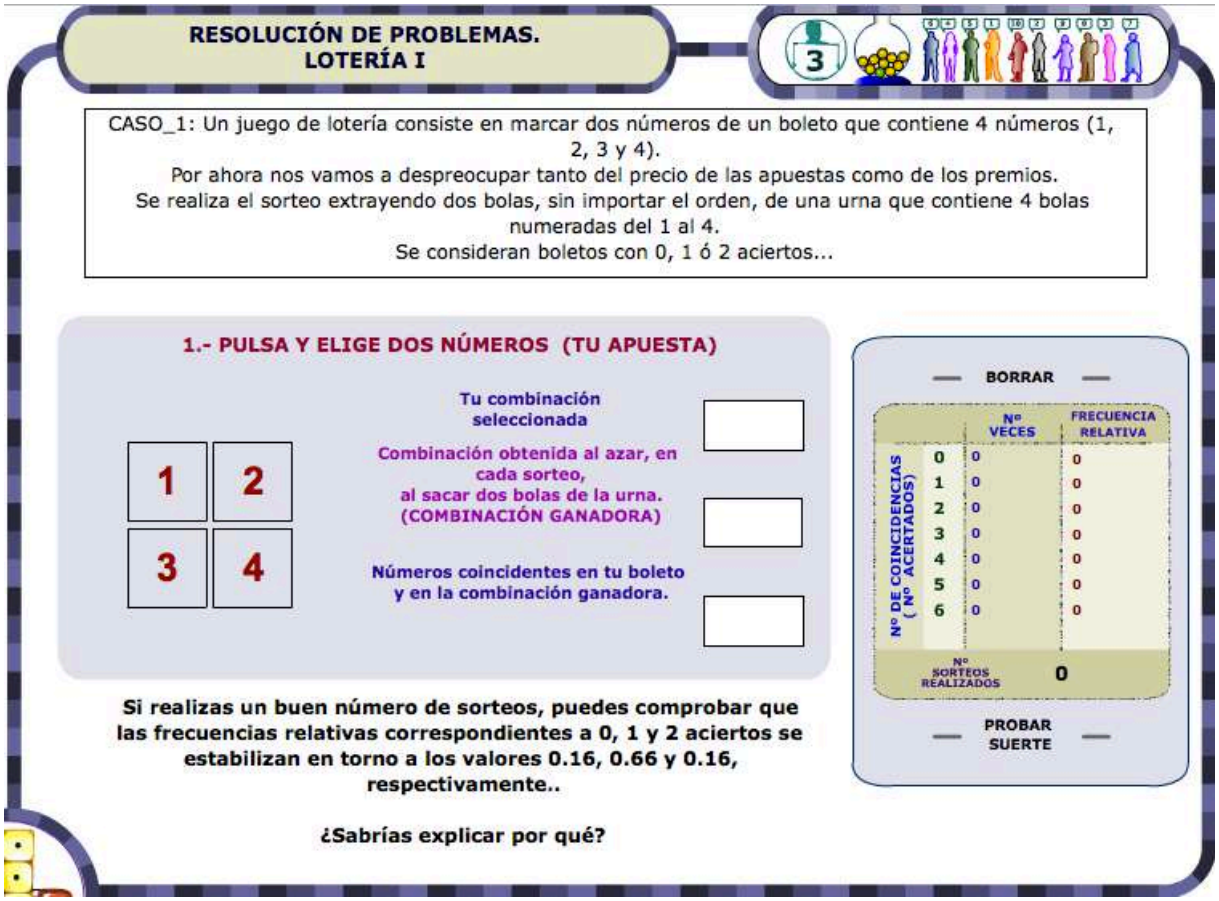



Figura 7.91 Aplicación sobre Situaciones problemáticas. Lotería I

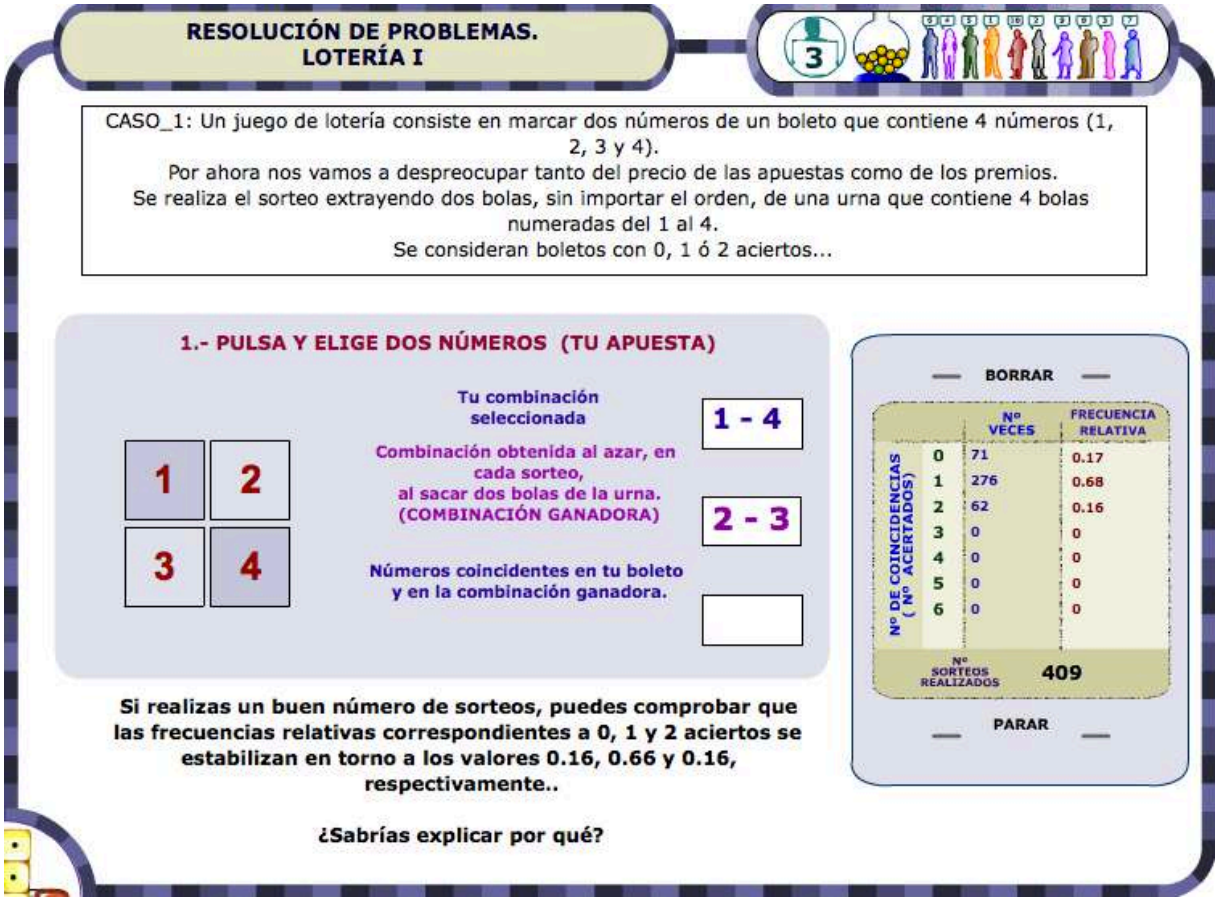



Figura 7.92 Aplicación sobre Situaciones problemáticas. Lotería I

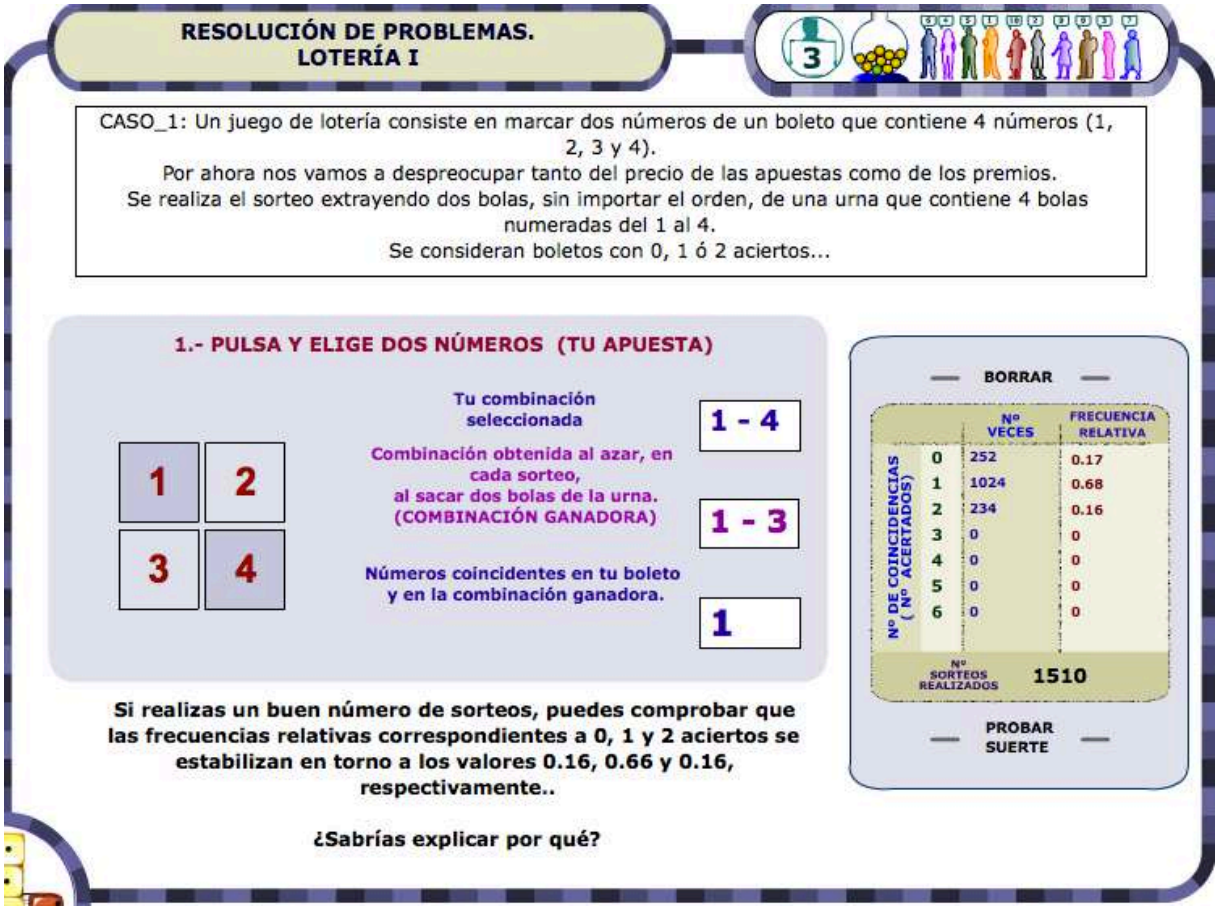



Figura 7.93 Aplicación sobre Situaciones problemáticas. Lotería I




Figura 7.94 Aplicación sobre Situaciones problemáticas. Lotería I

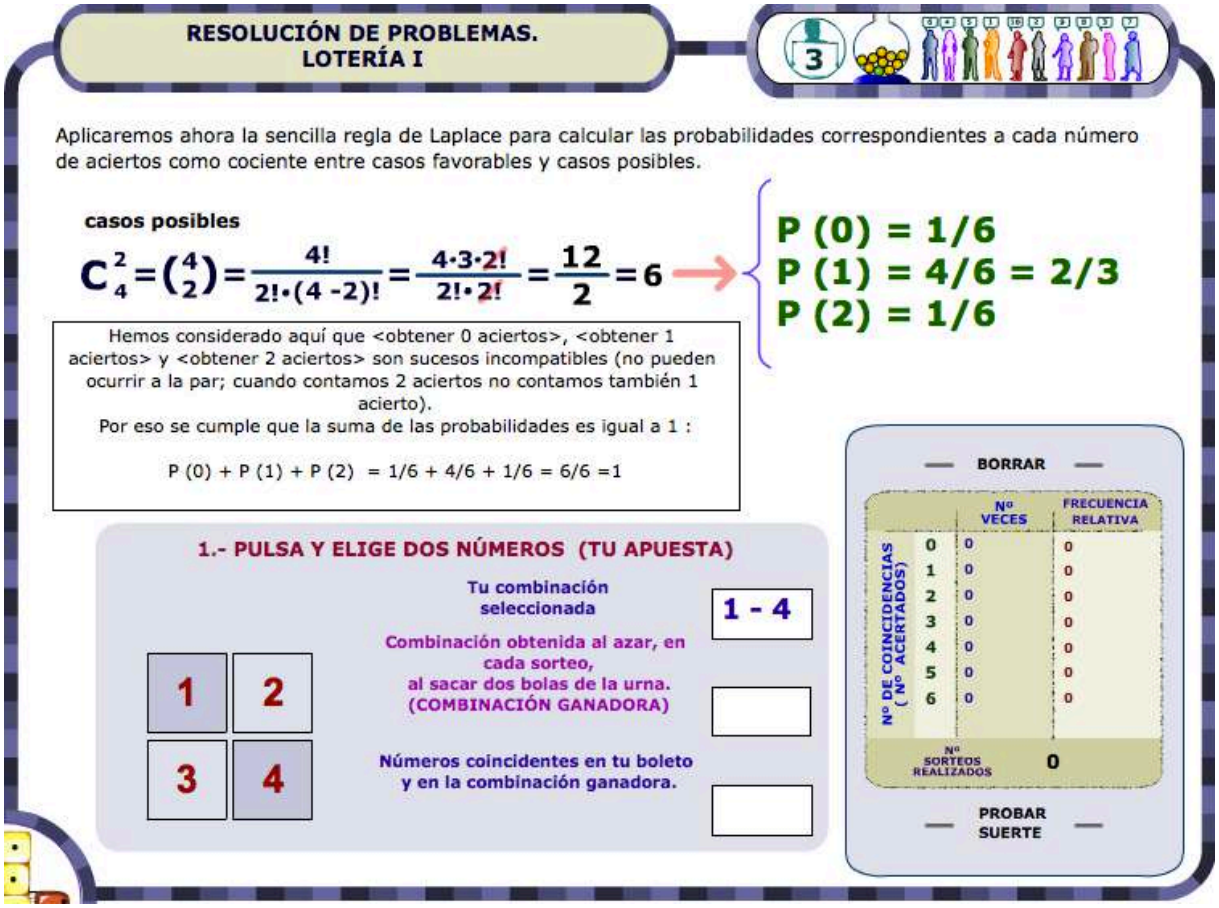



Figura 7.95 Aplicación sobre Situaciones problemáticas. Lotería I

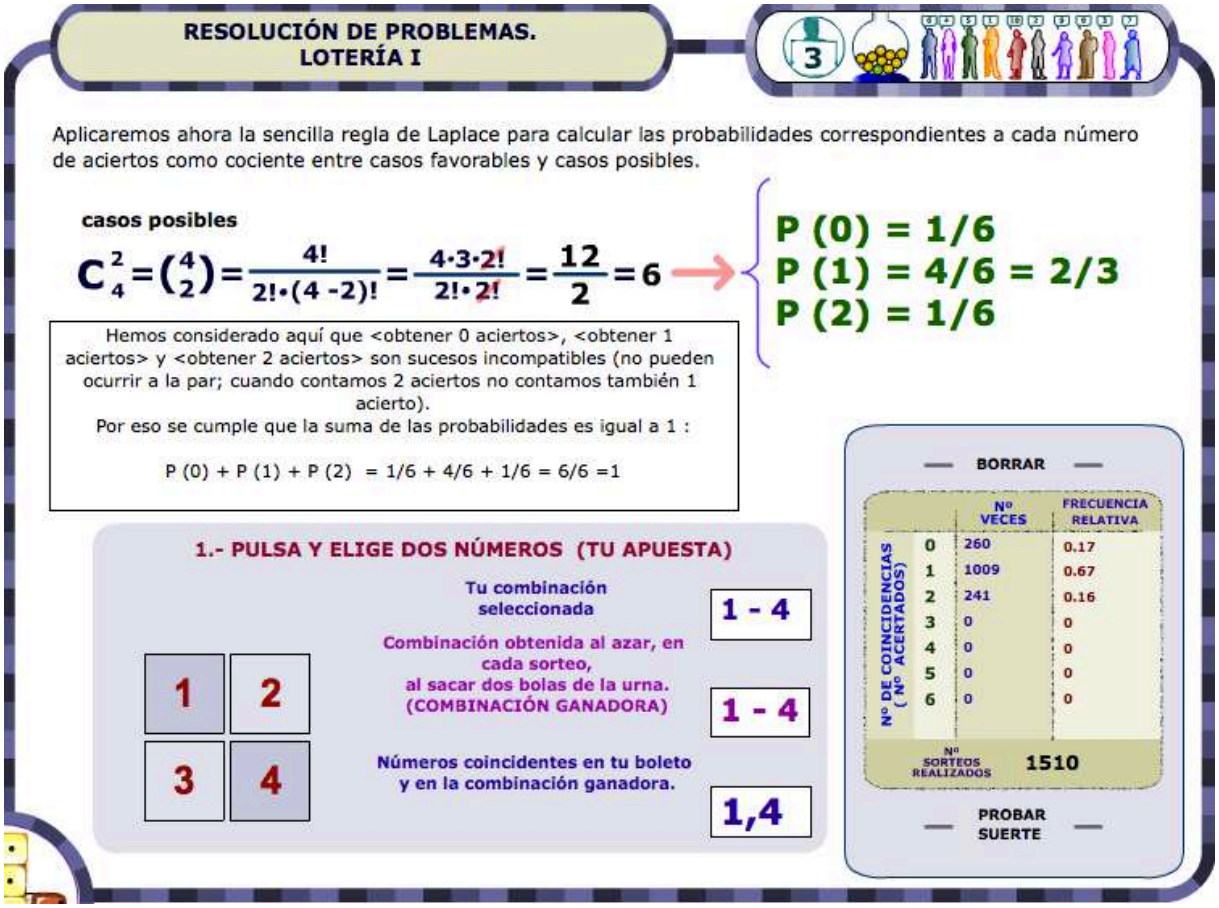



Figura 7.96 Aplicación sobre Situaciones problemáticas. Lotería I

## APLICACIÓN. LOTERÍA II

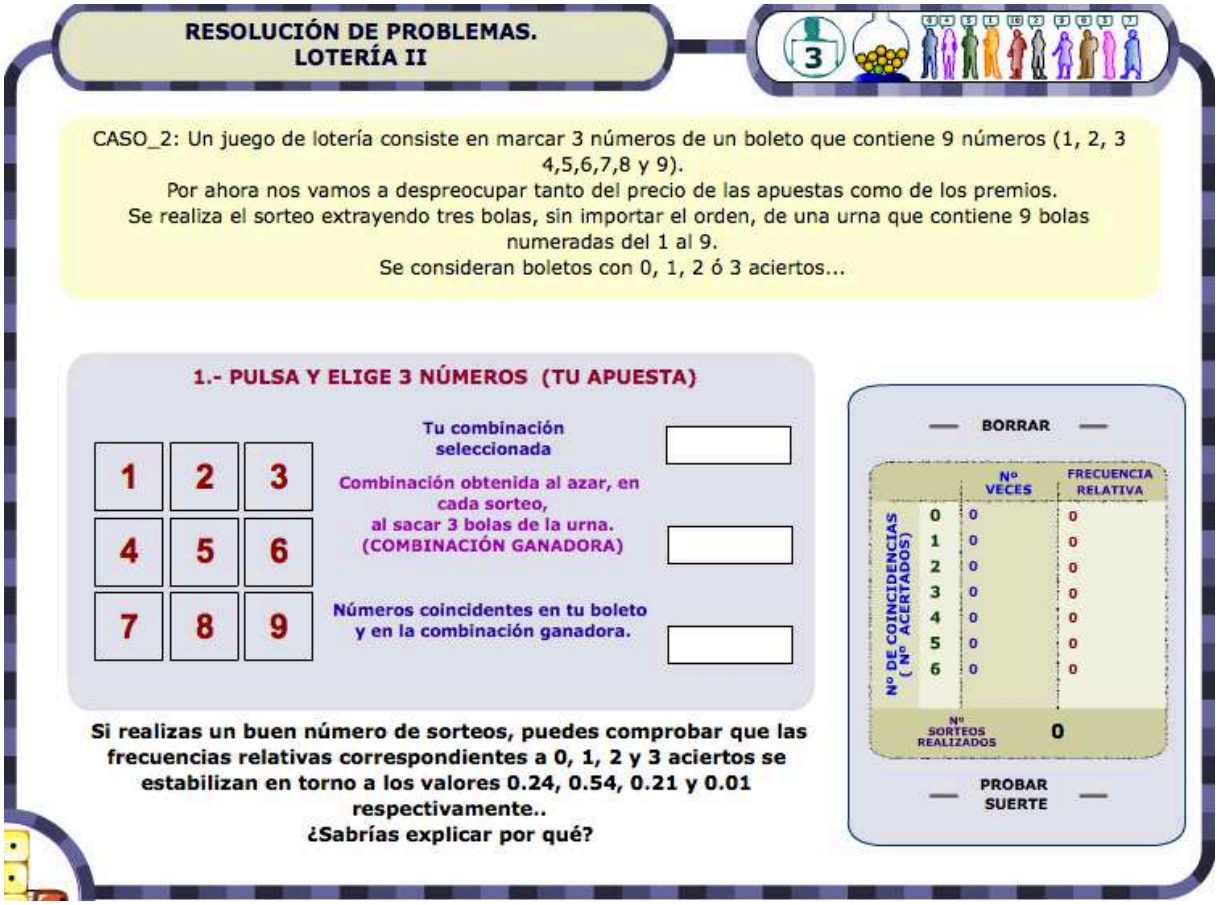



Figura 7.97 Aplicación sobre Situaciones problemáticas. Lotería II

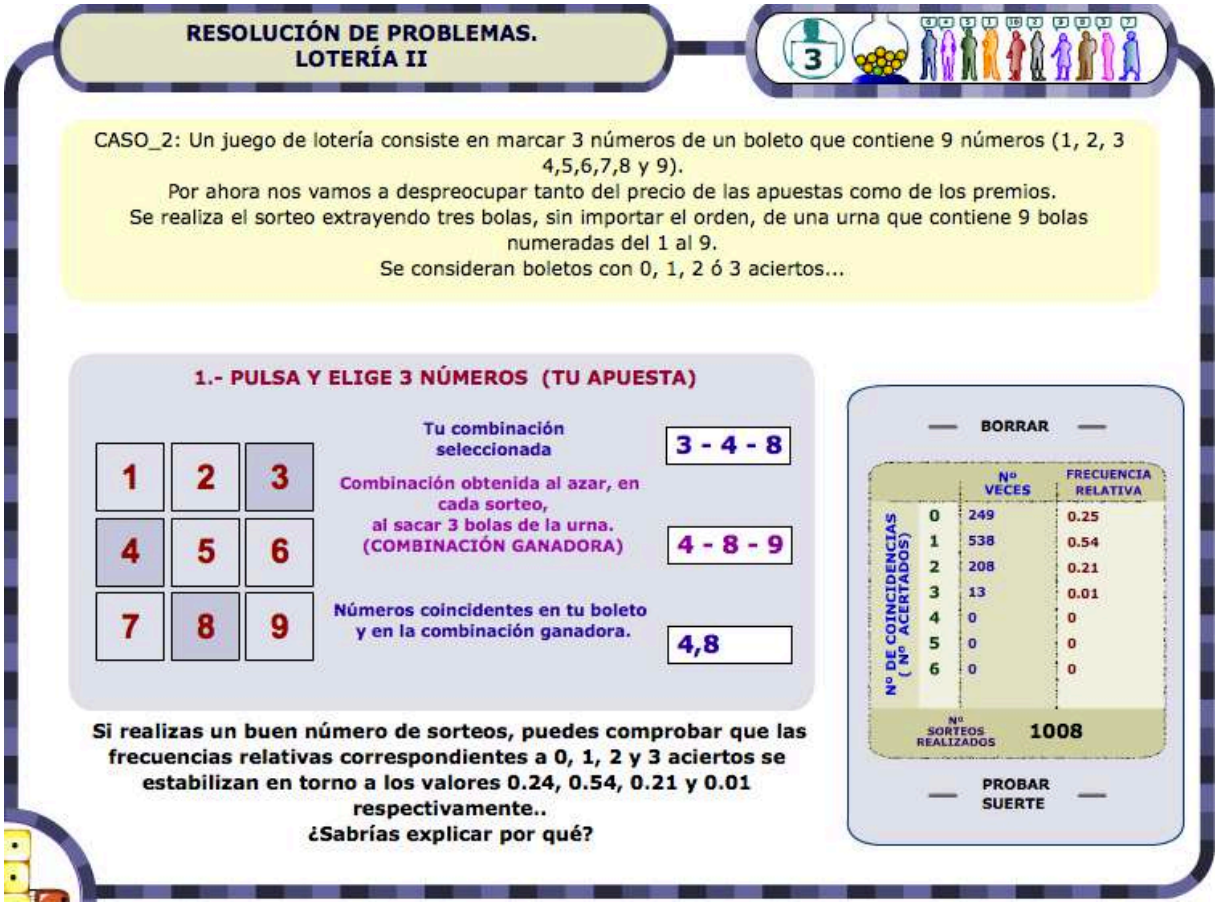



Figura 7.98 Aplicación sobre Situaciones problemáticas. Lotería II

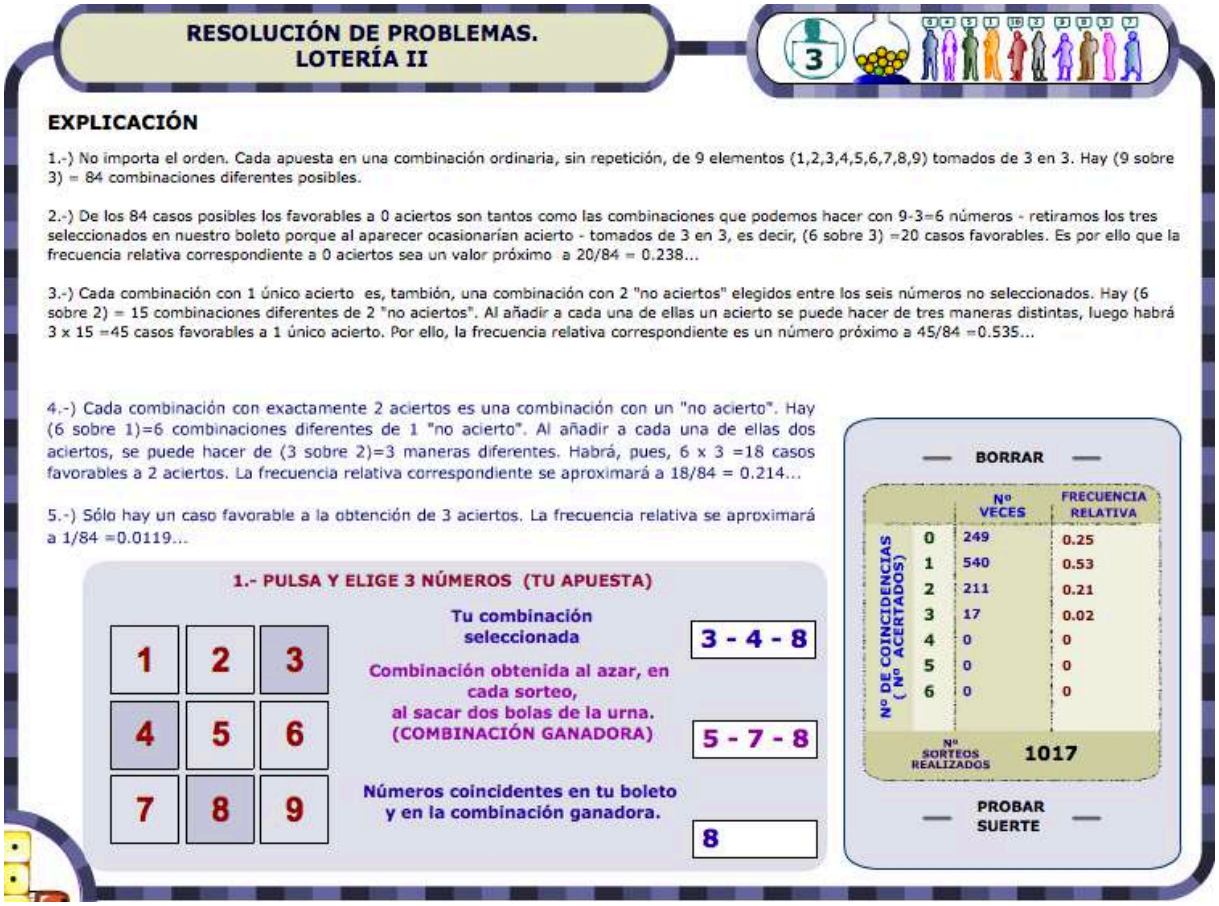



Figura 7.99 Aplicación sobre Situaciones problemáticas. Lotería II

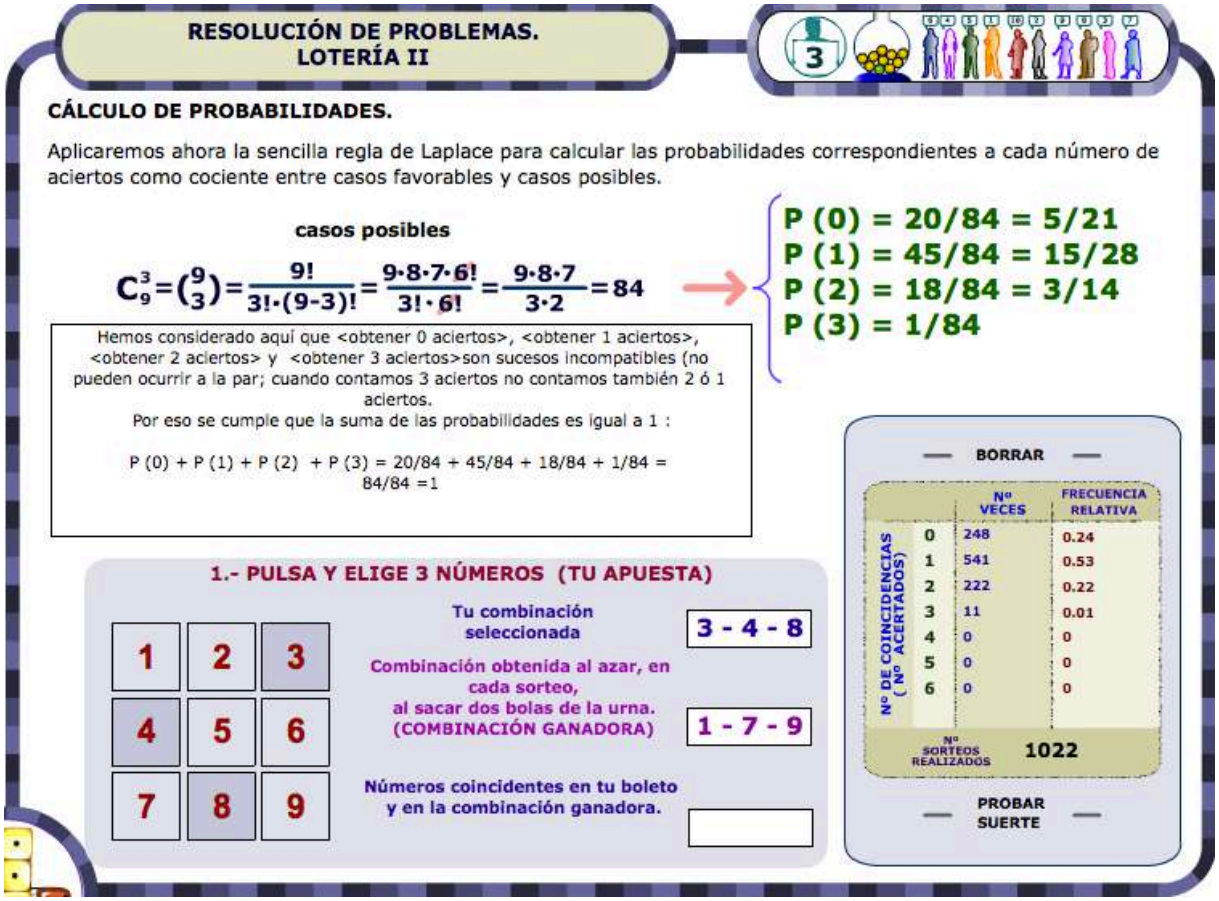



Figura 7.100 Aplicación sobre Situaciones problemáticas. Lotería II

## APLICACIÓN. QUINIELAS




Figura 7.101 Aplicación sobre Situaciones problemáticas. Quinielas

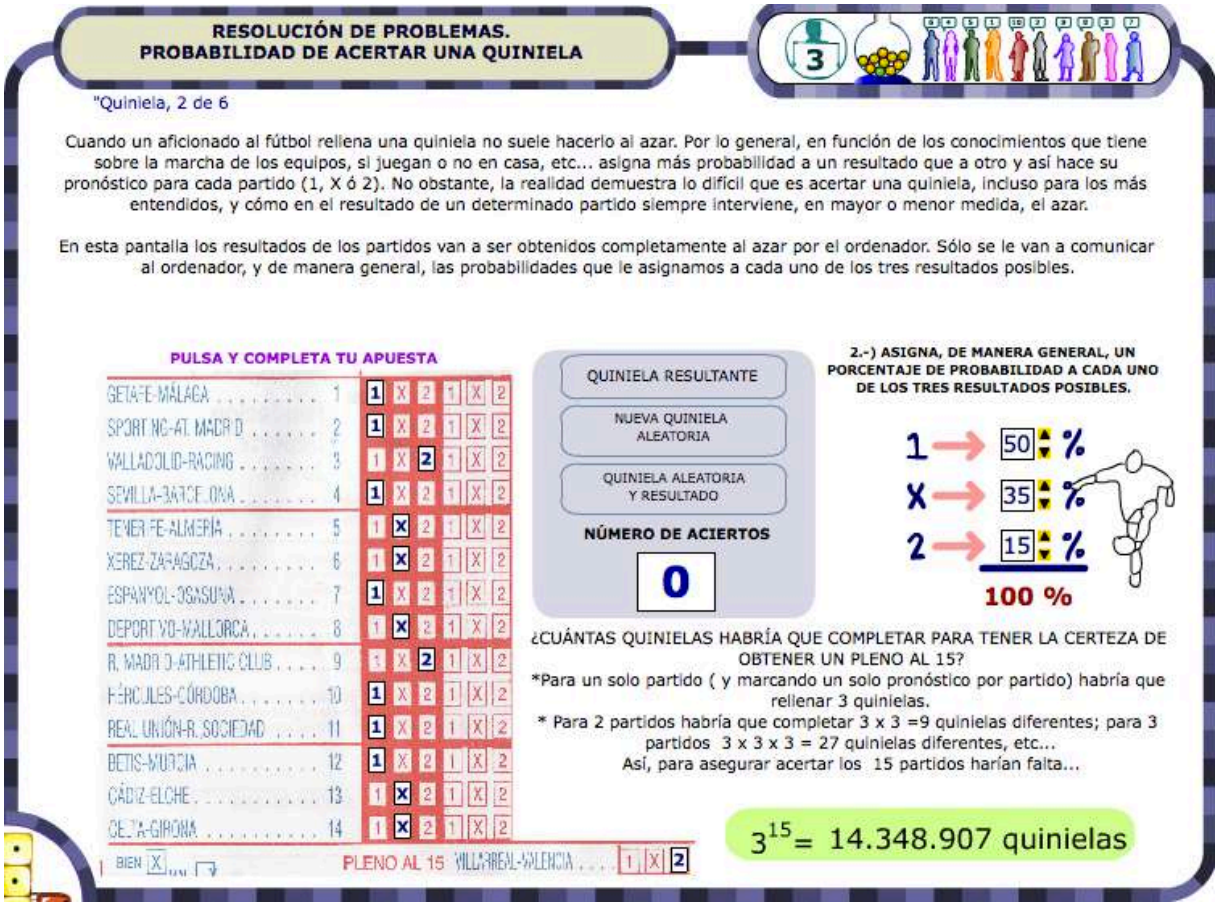



Figura 7.102 Aplicación sobre Situaciones problemáticas. Quinielas

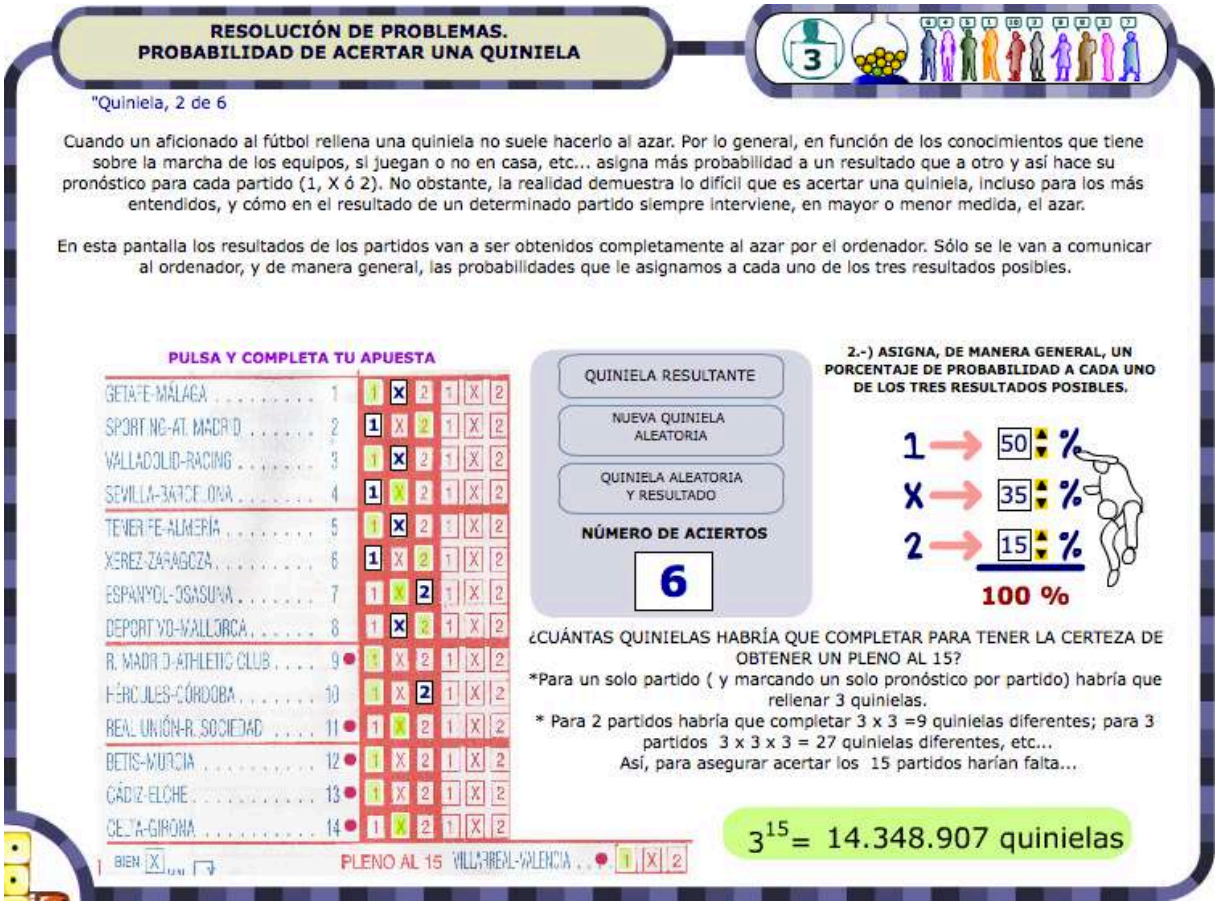



Figura 7.103 Aplicación sobre Situaciones problemáticas. Quinielas

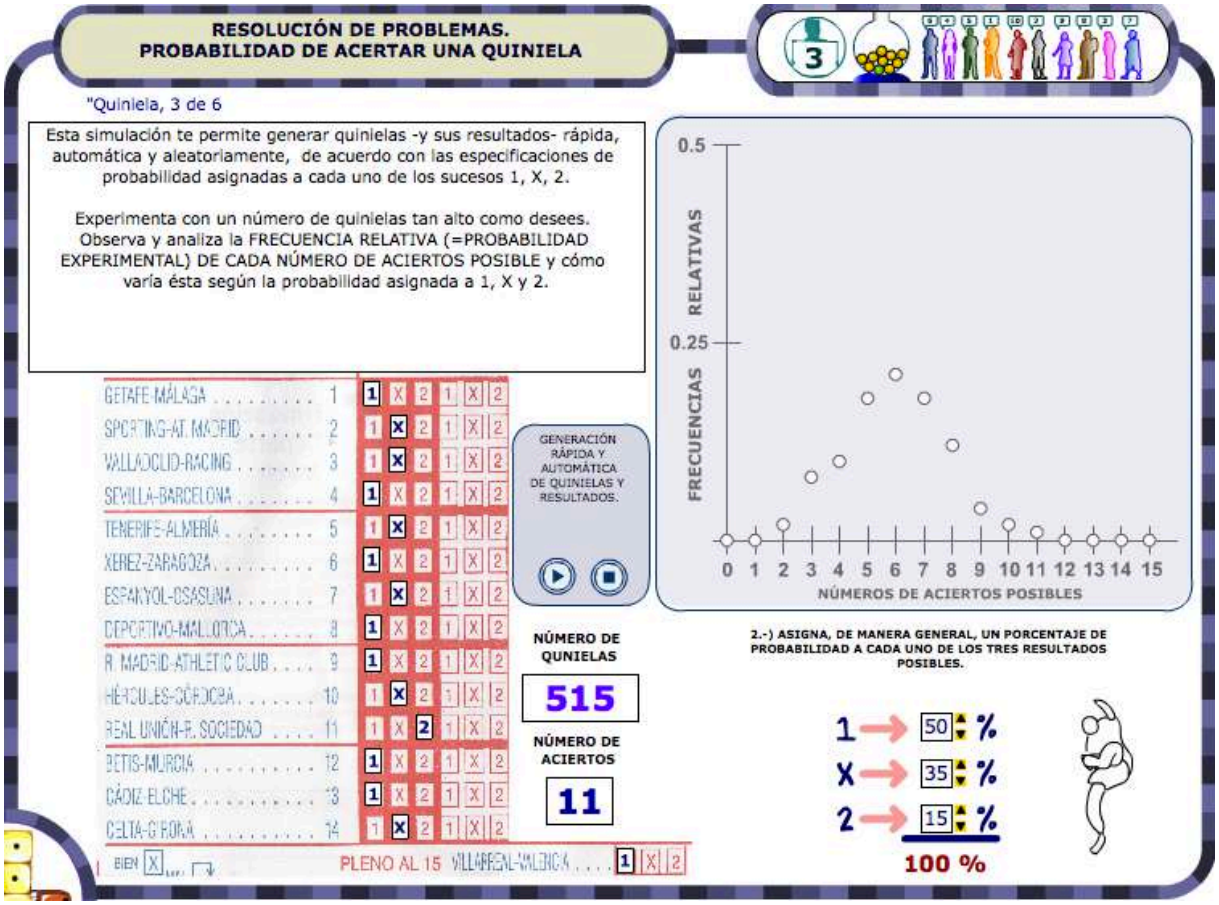



Figura 7.104 Aplicación sobre Situaciones problemáticas. Quinielas

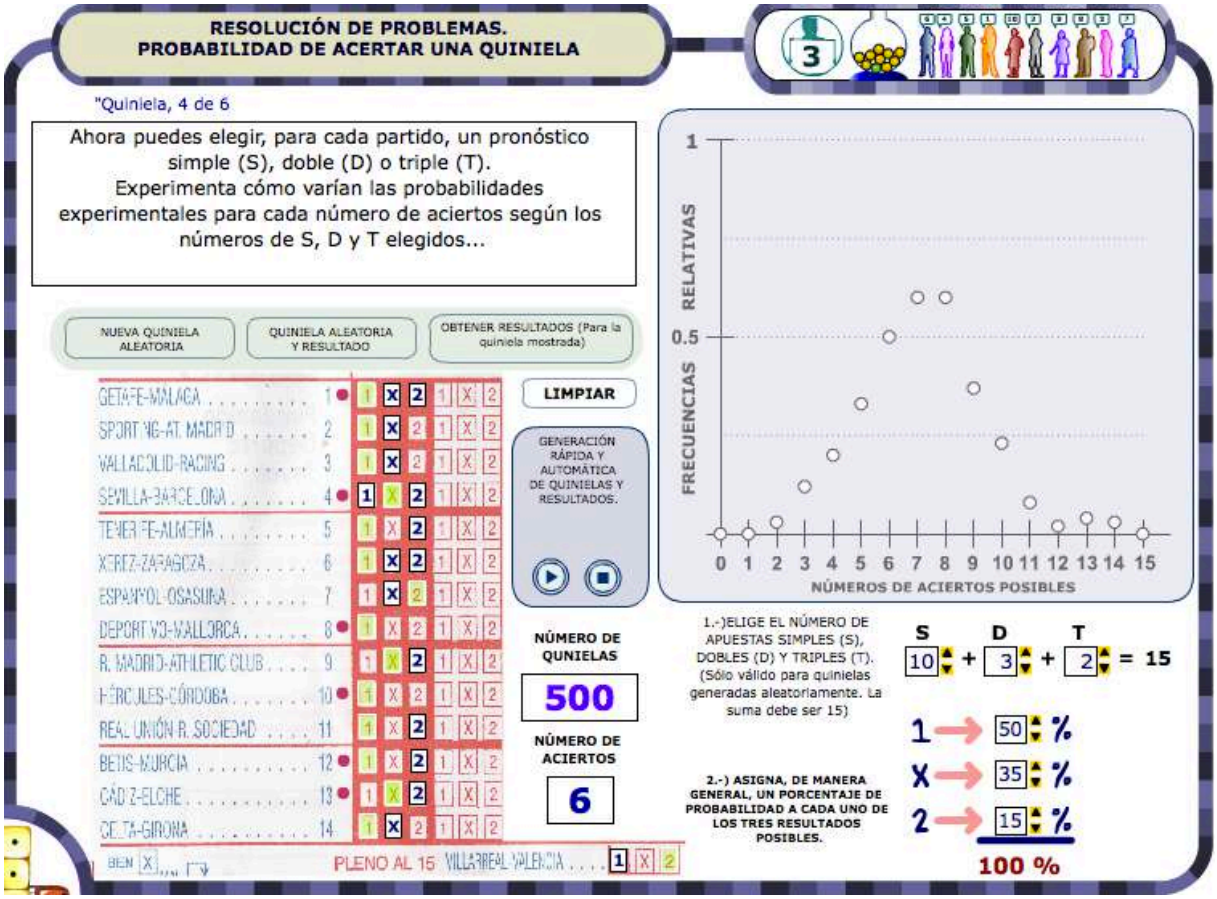



Figura 7.105 Aplicación sobre Situaciones problemáticas. Quinielas




Figura 7.106 Aplicación sobre Situaciones problemáticas. Quinielas

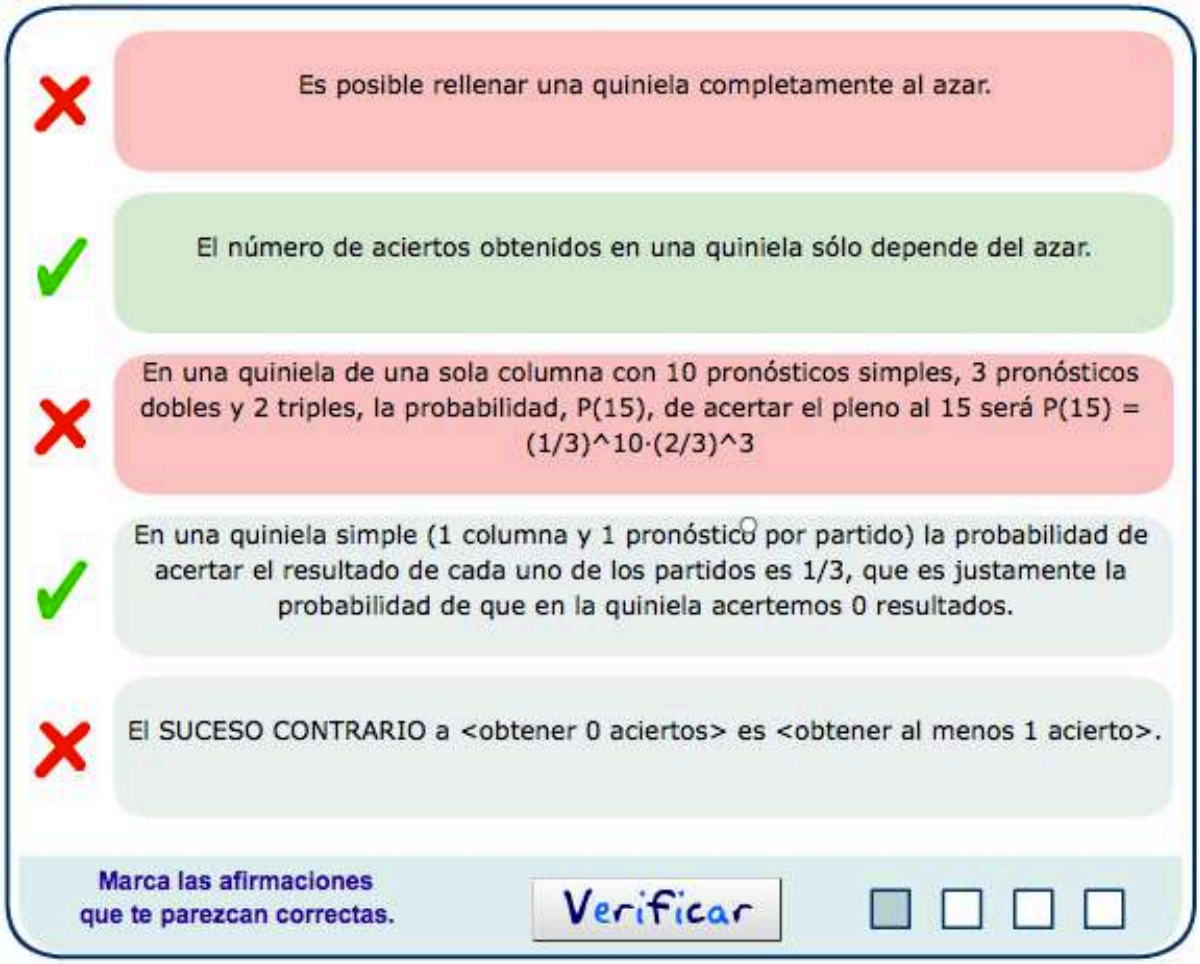



Figura 7.107 Aplicación sobre Situaciones problemáticas. Quinielas

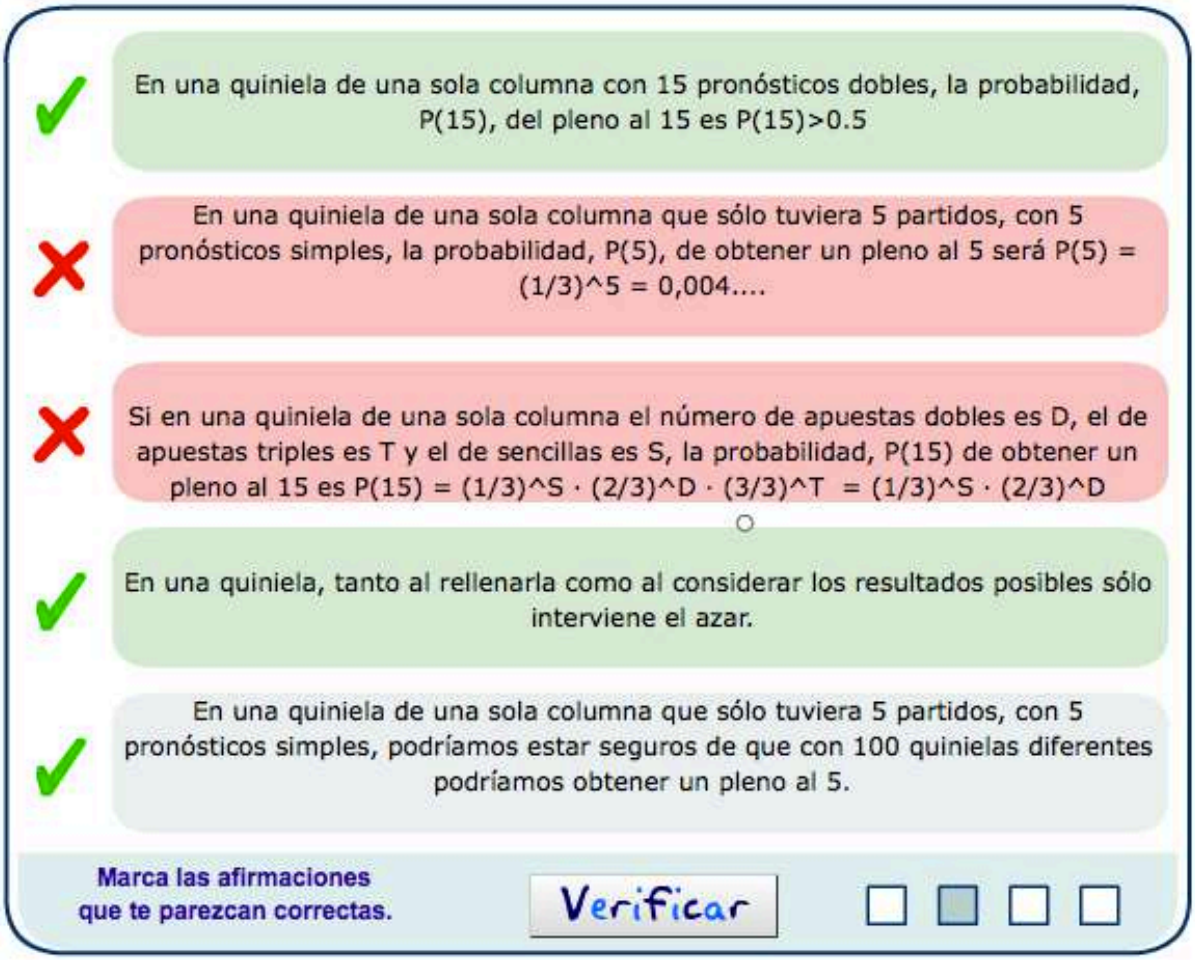



Figura 7.108 Aplicación sobre Situaciones problemáticas. Quinielas

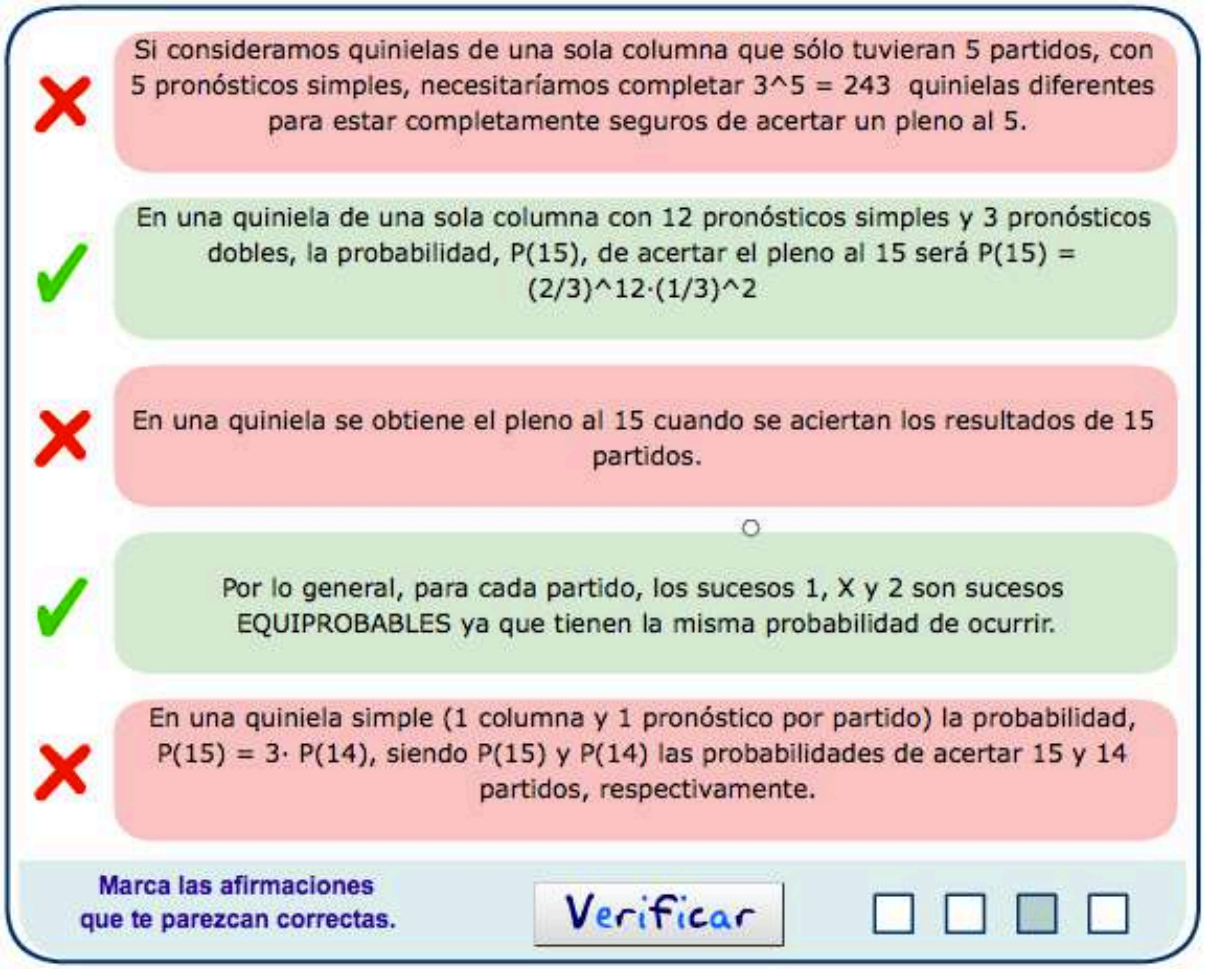



Figura 7.109 Aplicación sobre Situaciones problemáticas. Quinielas

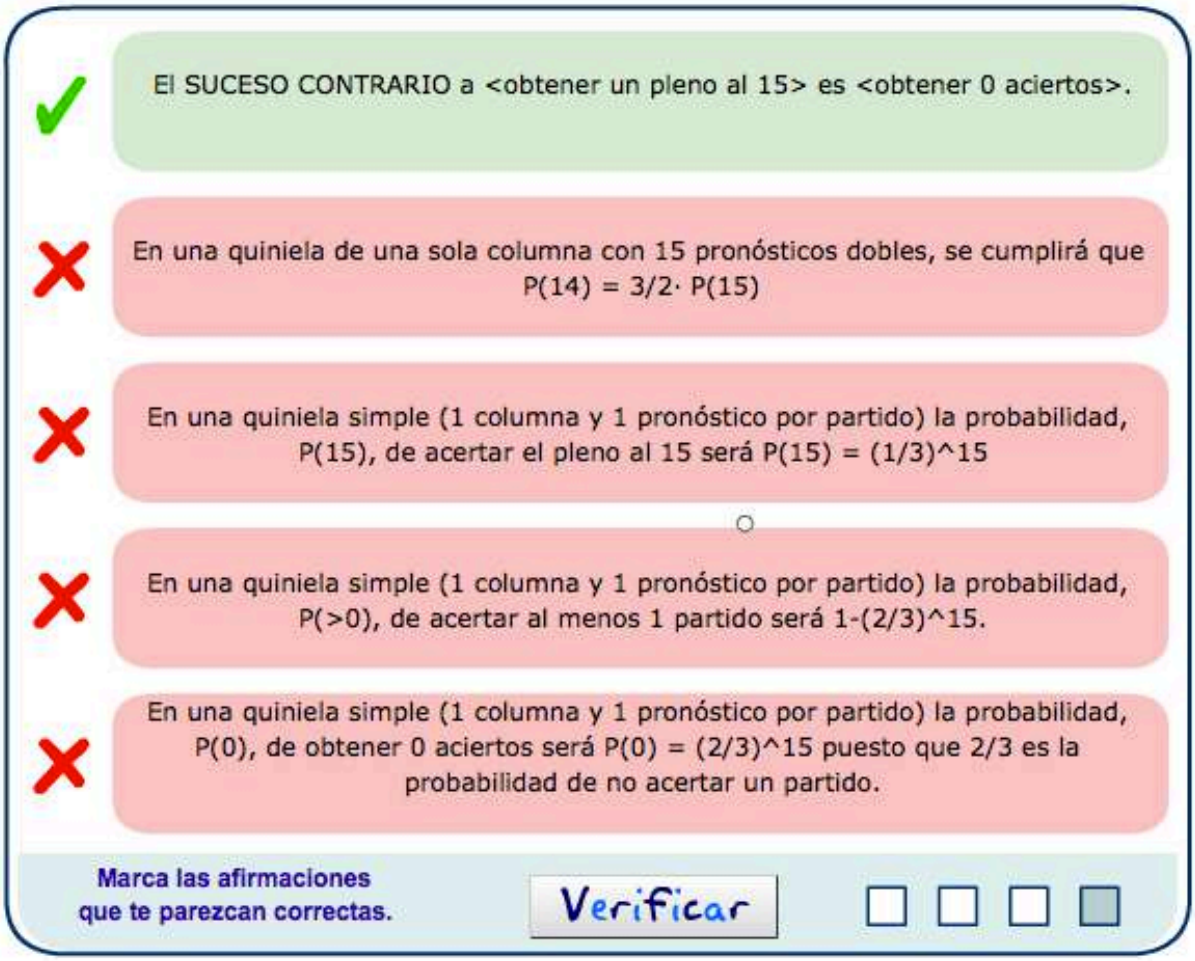



Figura 7.110 Aplicación sobre Situaciones problemáticas. Quinielas

El análisis de las situaciones problemáticas propuestas se basa exclusivamente en las propiedades fundamentales de los sucesos y la probabilidad, que se recogen en la tabla, así como las técnicas de recuento básicas de la Combinatoria.

| SUCESO | PROBABILIDAD |
|---|---|
| Para cualquier suceso S, siempre se tiene que $0 \leq p(S) \leq 1$ | Al lanzar un dado, la probabilidad de obtener un 3, por ejemplo, es 1/6, ya que los sucesos posibles son 6 y sólo hay un suceso favorable (que salga un 3). |
| Si S es un suceso seguro, $p(S) = 1$ y si S es un suceso imposible, $p(S) = 0$ | Al lanzar un dado el suceso "que salga un número mayor que 6" es un suceso IMPOSIBLE y tiene probabilidad 0. En cambio, el suceso "que salga un número menor que 7" es un suceso SEGURO y tiene probabilidad 1. |

| | |
|---|---|
| La suma de las probabilidades de dos sucesos contrarios es 1: p(no S) = 1- p(S) | En el lanzamiento de un dado, p(sacar un 6) = 1- p(no sacar ningún 6) |
| Si A y B son sucesos distintos, P(A o B) = P(A) + p(B) | En un lanzamiento de un dado, p(sacar un número par o sacar un 3) = p(sacar un número par) + p(sacar un 3) = ½ + 1/6 = 2/3 |
| Si A y B son sucesos independientes, P(A y B) = P(A) · P(B) | Al lanzar dos dados no obtener ningún 6: p(no 6 en dos lanzamientos) = p(no 6) · p(no 6) = 5/6 · 5/6 = 25/36 |

Tabla 7.2 Propiedades fundamentales de los sucesos y la Probabilidad

### 7.5.3 COMBINATORIA

Se trata de nueve aplicaciones diferentes que permitirán al alumno de manera activa, a través de retos propuestos, descubrir el secreto de las técnicas de recuento, de las diferentes formas y posibilidades de agrupar elementos…

Ejemplos de propuestas de actividades de construcción e investigación sobre "caminos lógicos" en una cuadrícula (situaciones-problema que pretenden ser contextos creativos y motivadores para tratar, en este caso, las permutaciones con repetición).

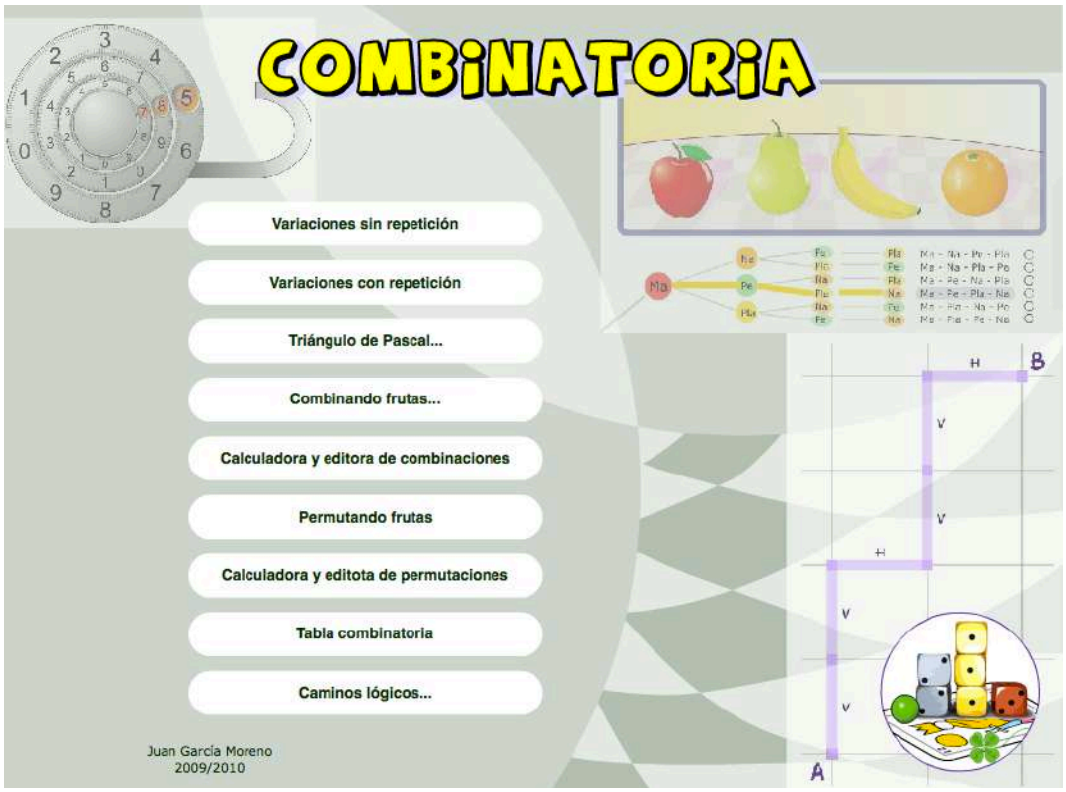



Figura 7.111 Cabecera de Combinatoria

## APLICACIÓN. VARIACIONES SIN REPETICIÓN




Figura 7.112 Aplicación sobre Combinatoria. Variaciones sin repetición

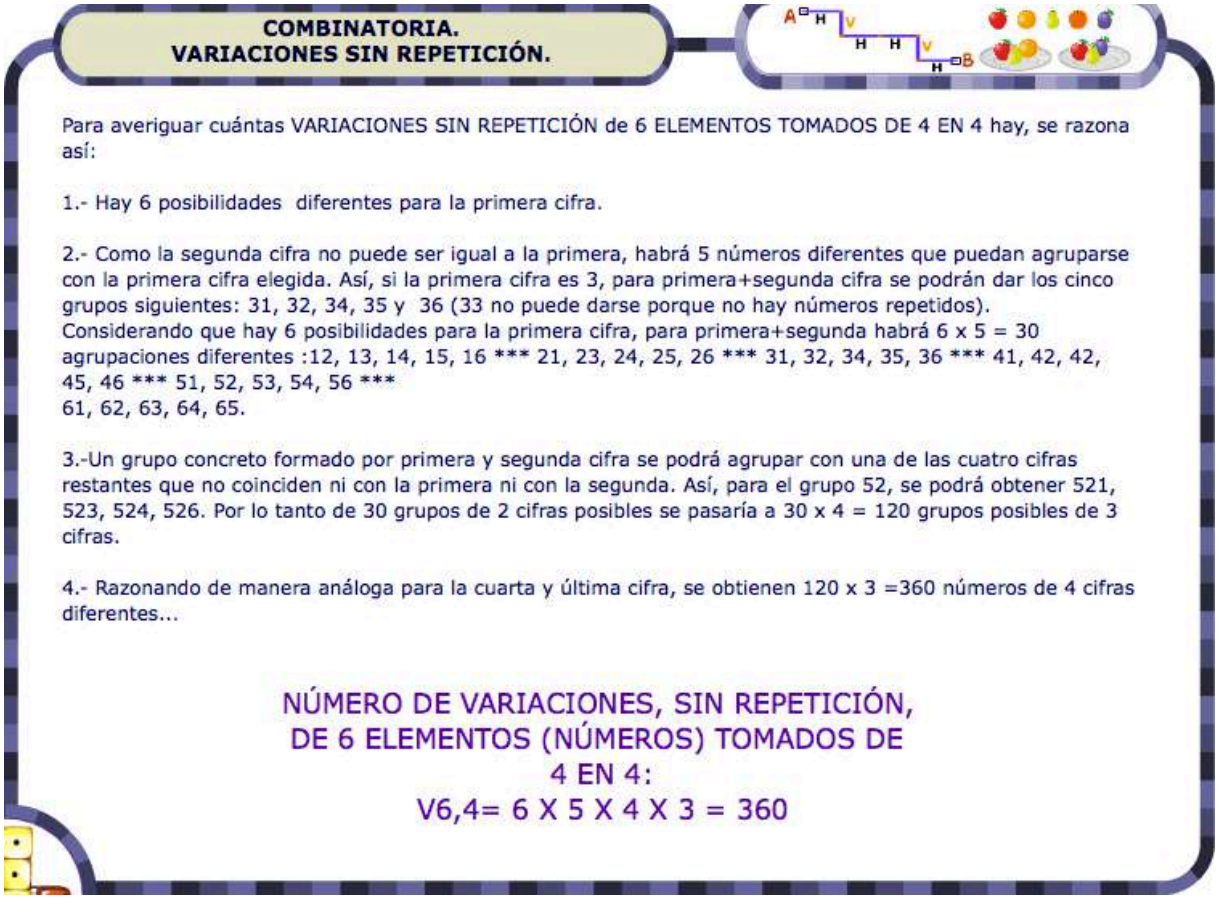



Figura 7.113 Aplicación sobre Combinatoria. Variaciones sin repetición

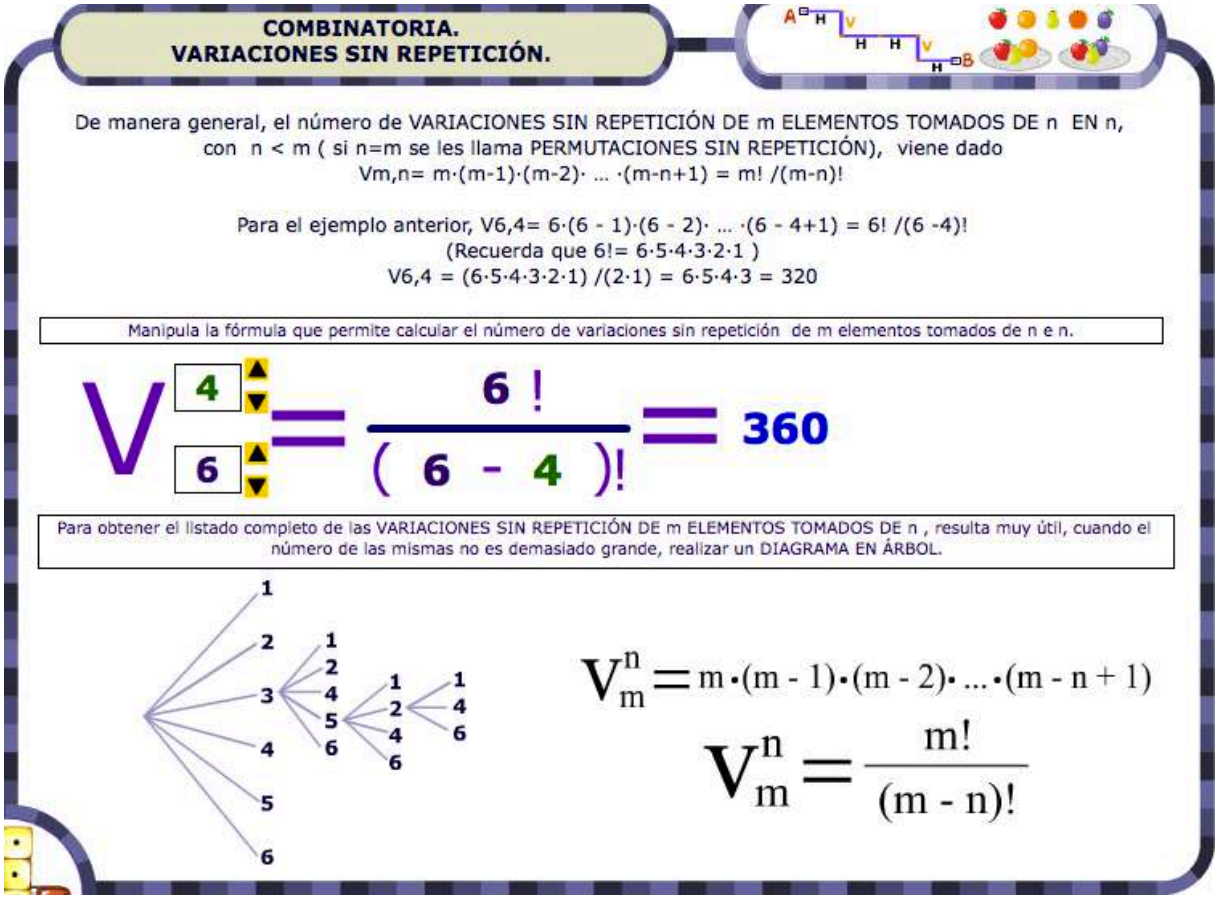



Figura 7.114 Aplicación sobre Combinatoria. Variaciones sin repetición

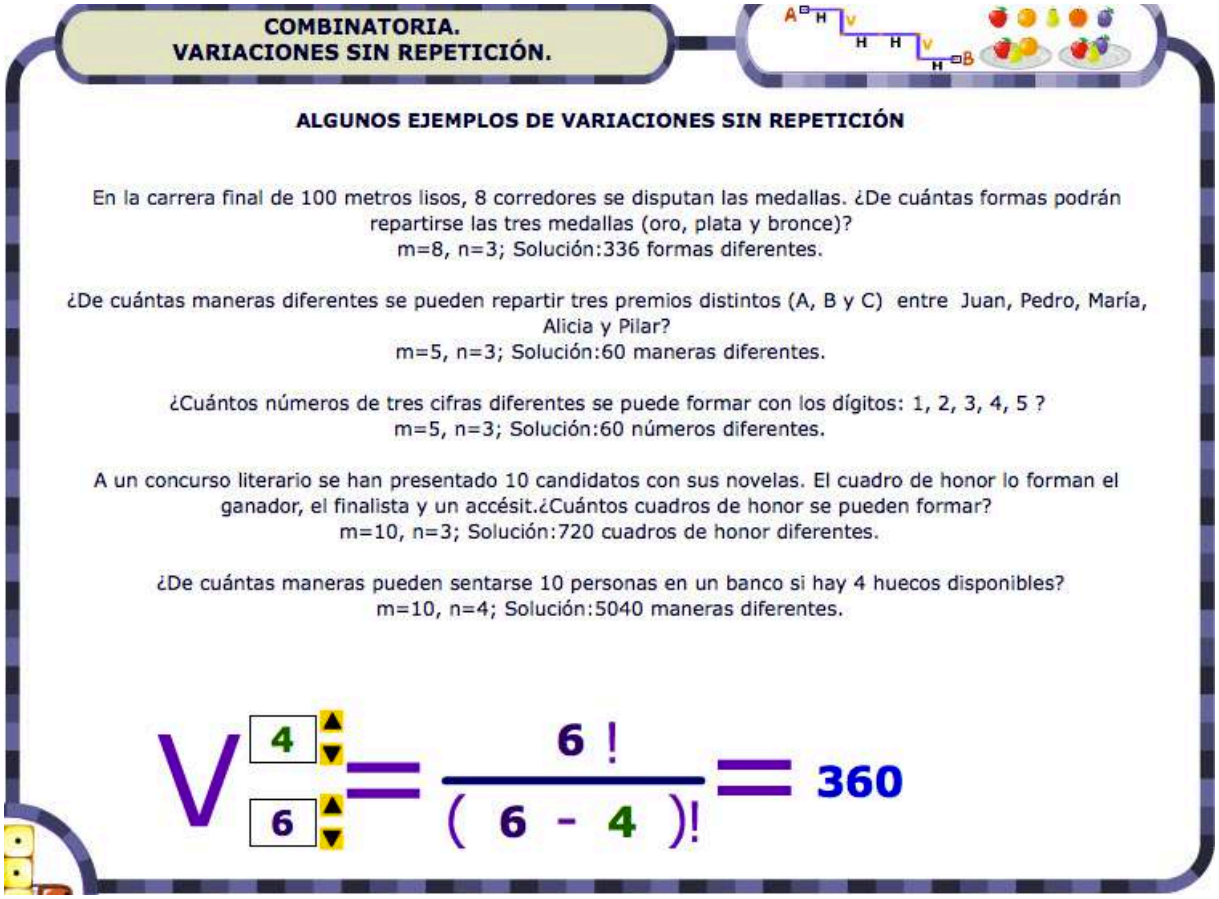



Figura 7.115 Aplicación sobre Combinatoria. Variaciones sin repetición

## APLICACIÓN. VARIACIONES CON REPETICIÓN

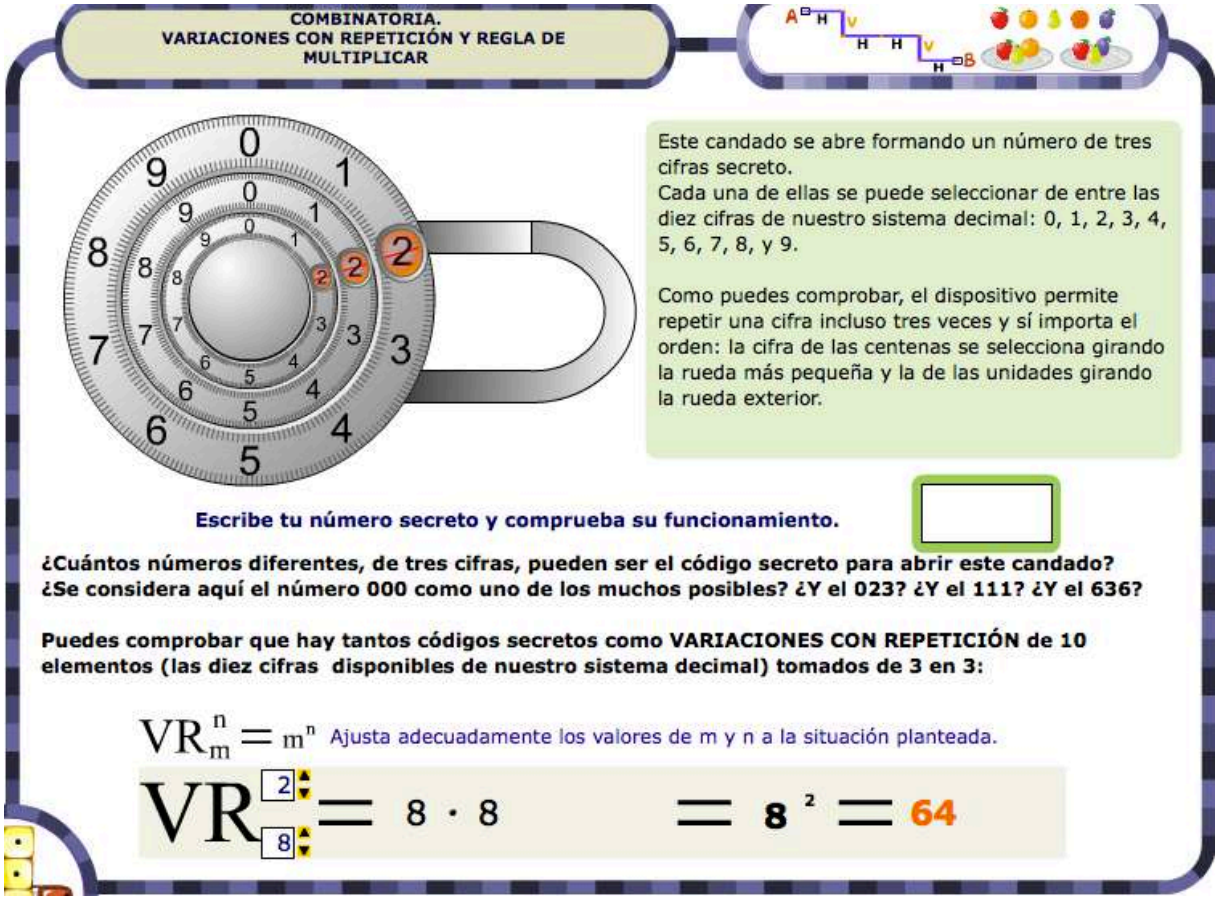



Figura 7.116 Aplicación sobre Combinatoria. Variaciones con repetición

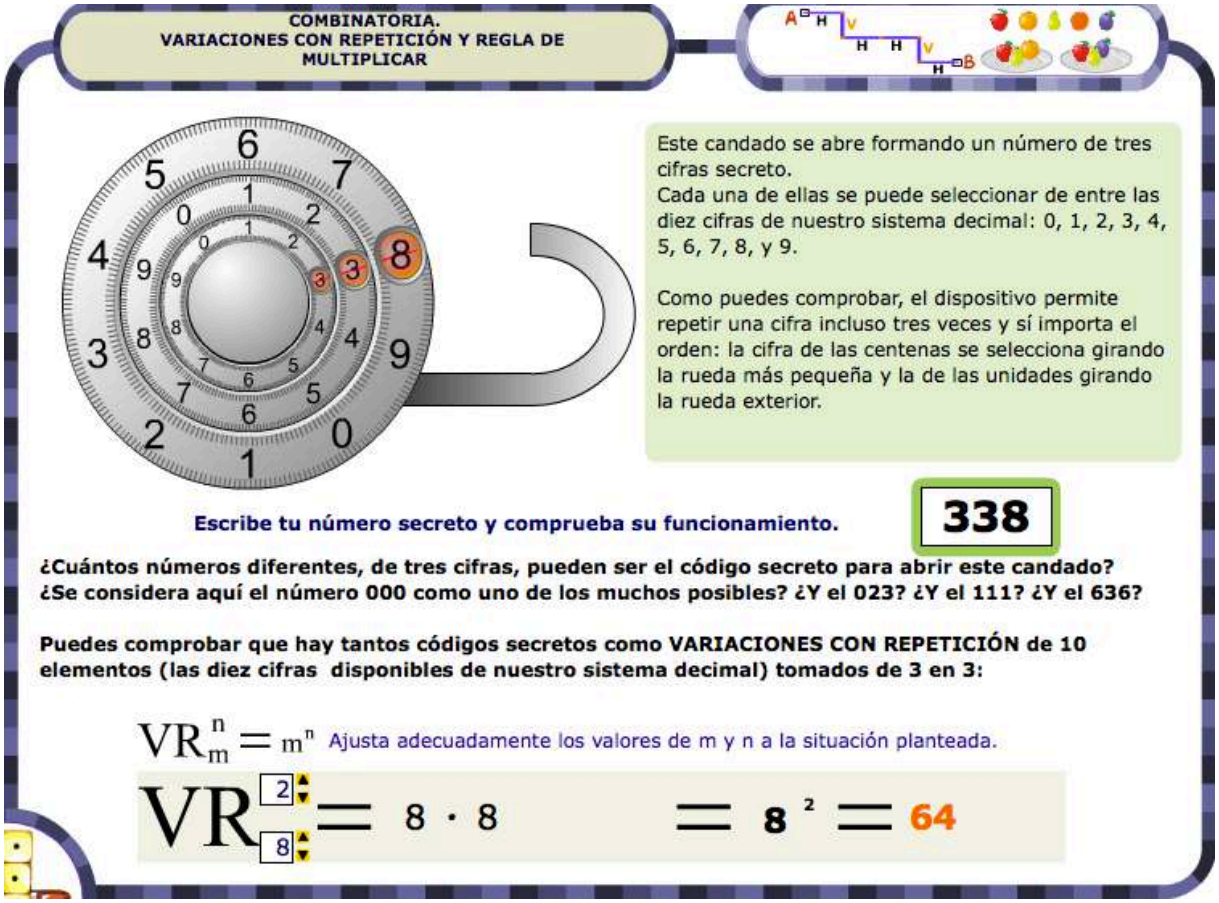



Figura 7.117 Aplicación sobre Combinatoria. Variaciones con repetición

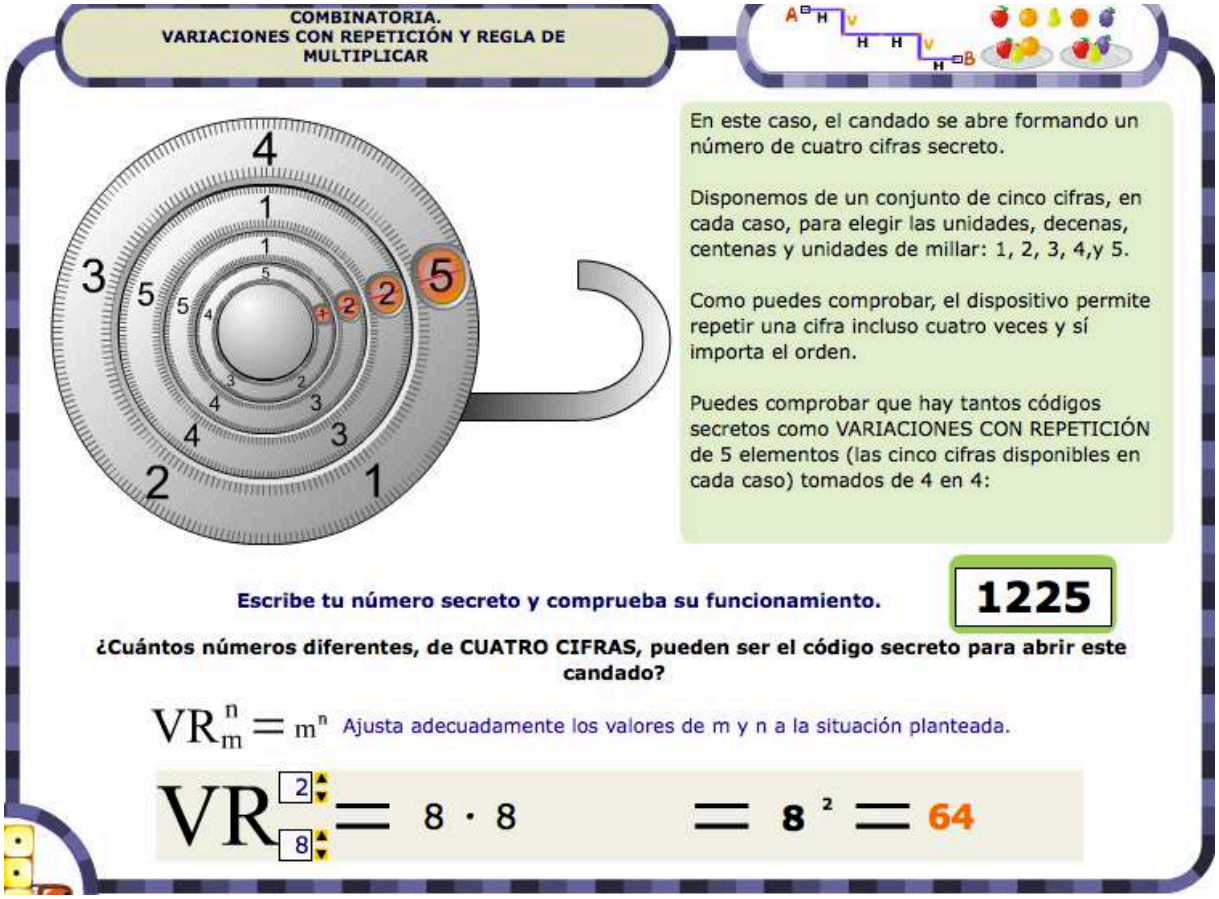



Figura 7.118 Aplicación sobre Combinatoria. Variaciones con repetición




Figura 7.119 Aplicación sobre Combinatoria. Variaciones con repetición

## APLICACIÓN. TRIÁNGULO DE PASCAL

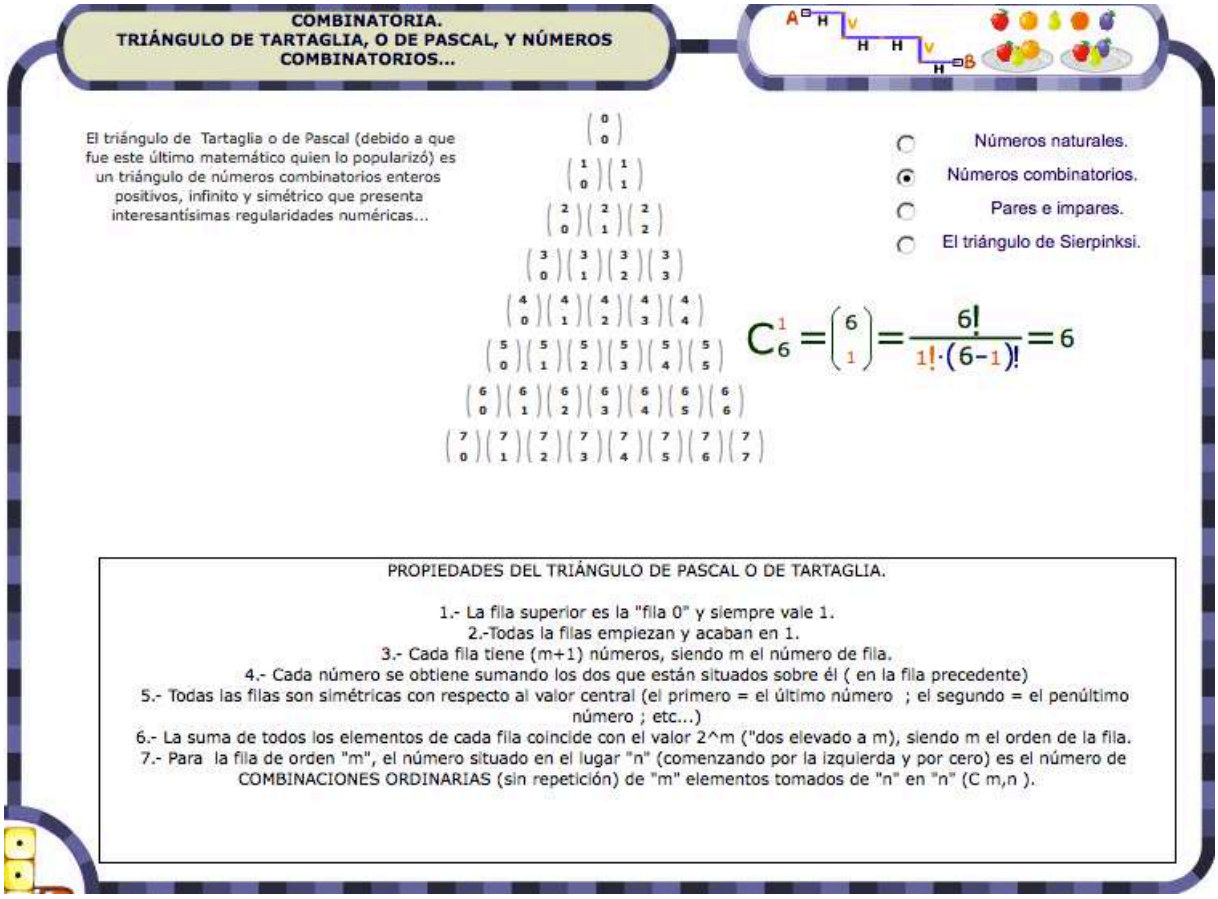



Figura 7.120 Aplicación sobre Combinatoria. Triángulo de Pascal

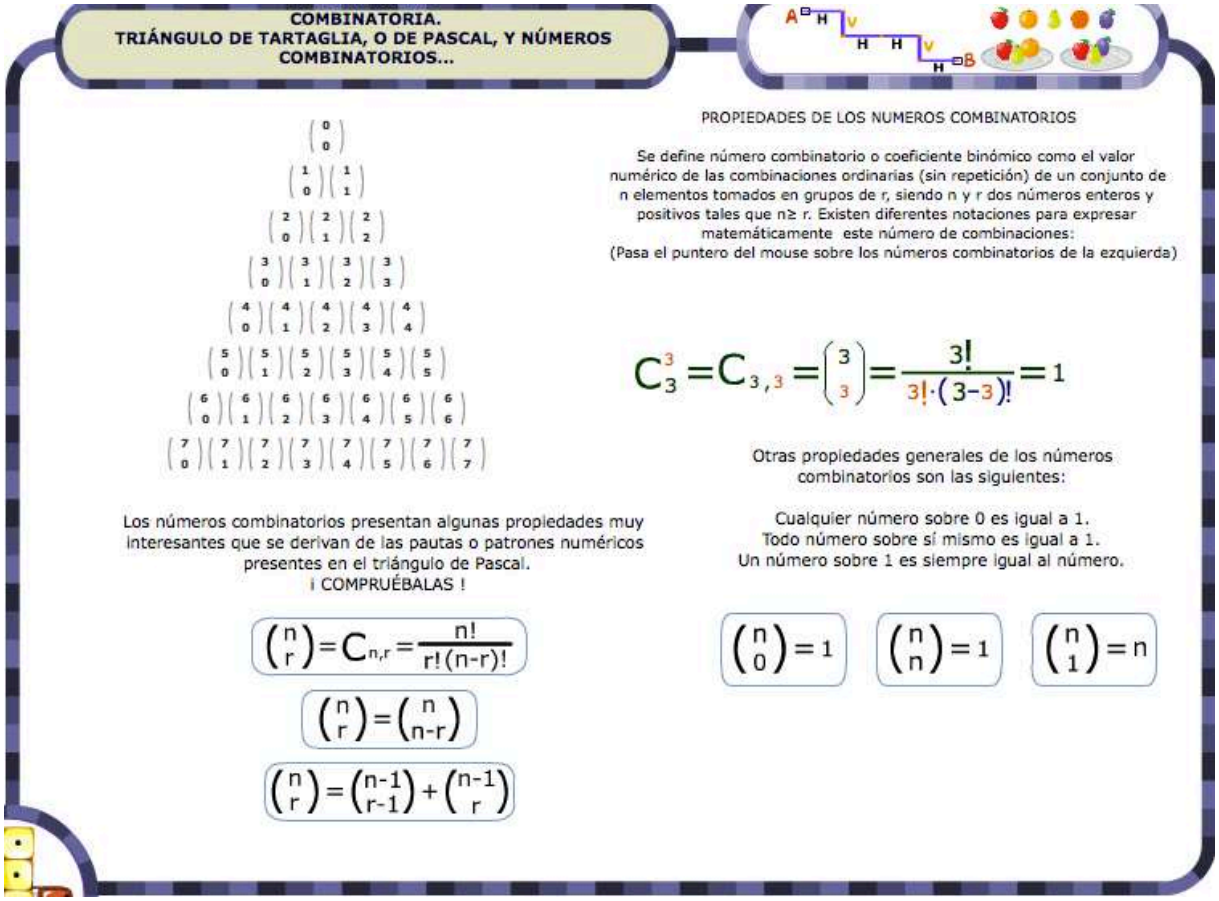



Figura 7.121 Aplicación sobre Combinatoria. Triángulo de Pascal

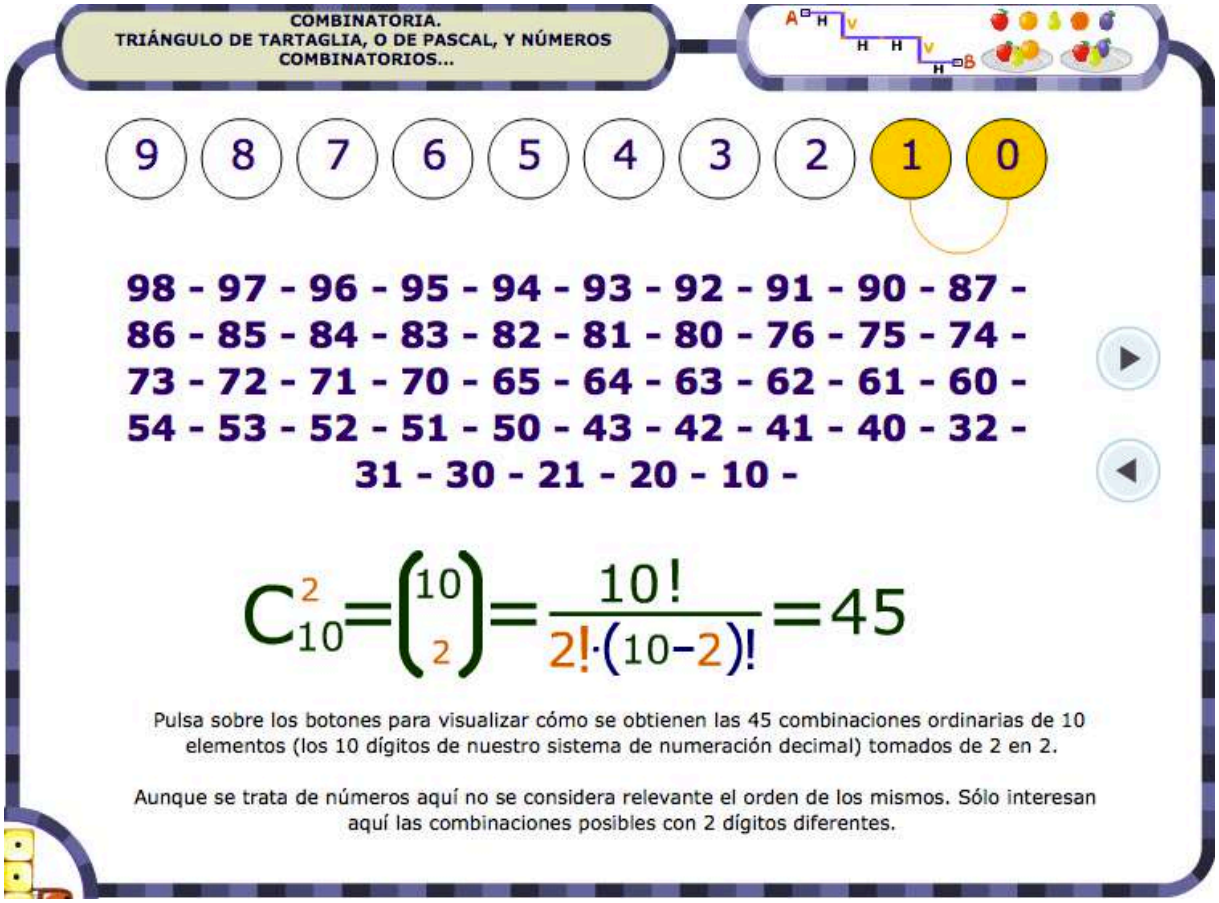



Figura 7.122 Aplicación sobre Combinatoria. Triángulo de Pascal

## APLICACIÓN. COMBINANDO FRUTAS




Figura 7.123 Aplicación sobre Combinatoria. Combinando frutas

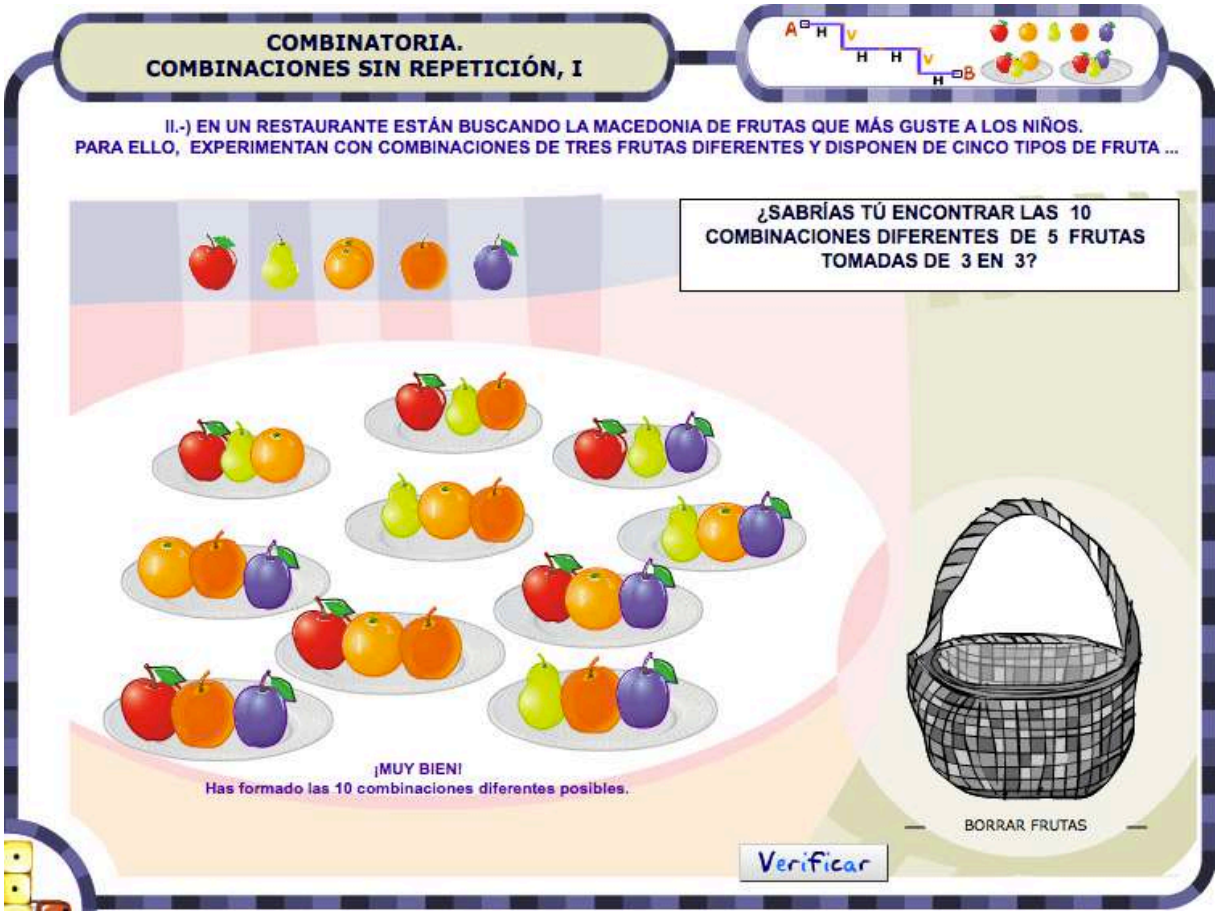



Figura 7.124 Aplicación sobre Combinatoria. Combinando frutas

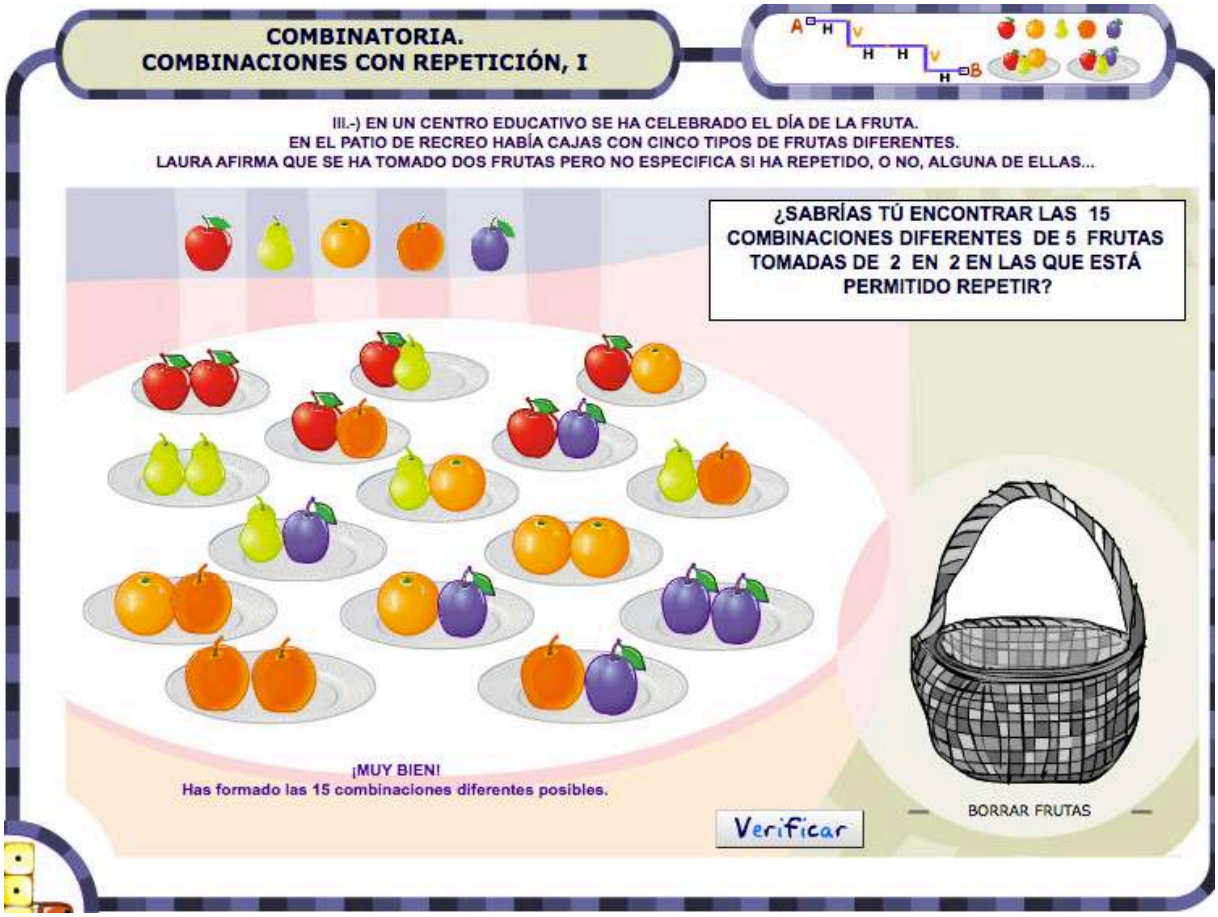



Figura 7.125 Aplicación sobre Combinatoria. Combinando frutas

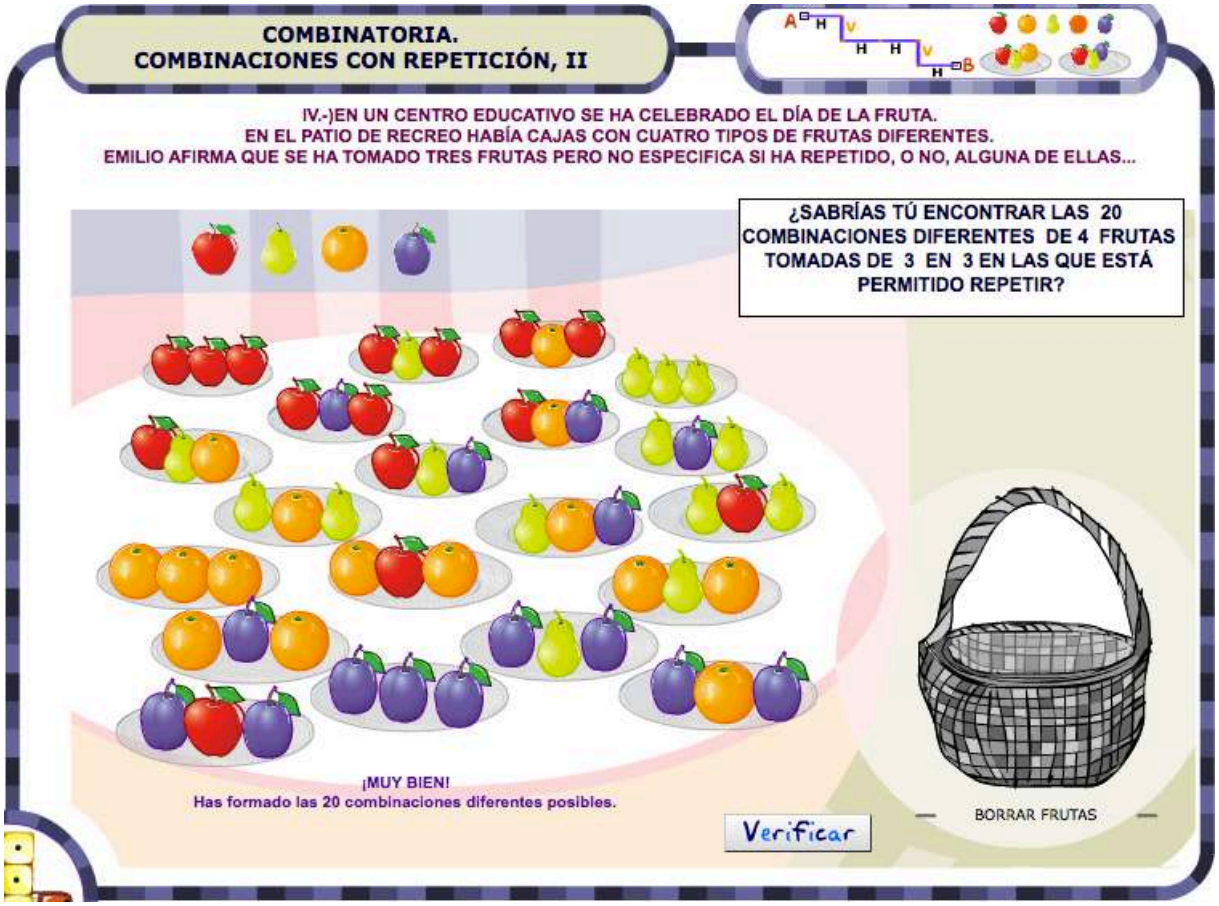



Figura 7.126 Aplicación sobre Combinatoria. Combinando frutas

## APLICACIÓN. CALCULADORA Y EDITORA DE COMBINACIONES

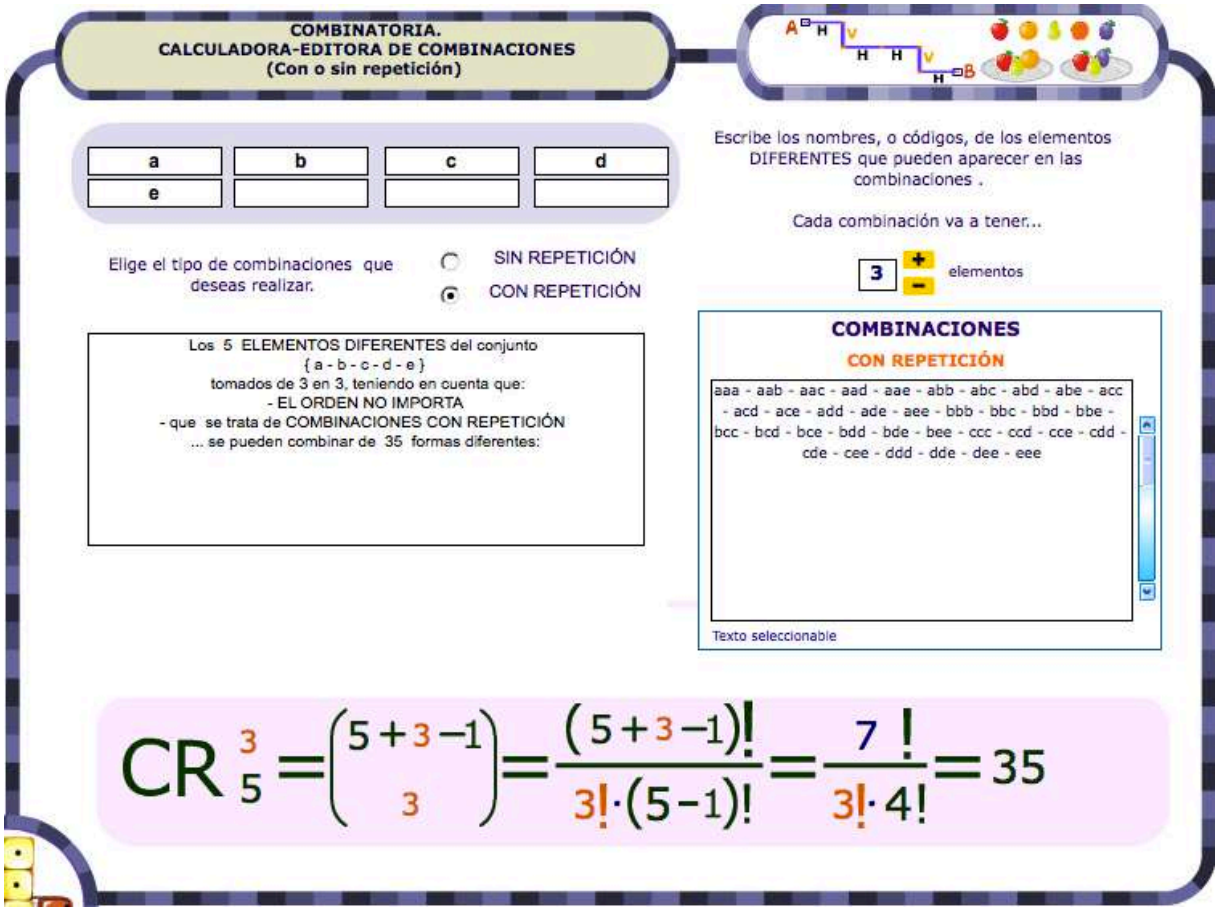



Figura 7.127 Aplicación sobre Combinatoria. Calculadora y editora de combinaciones

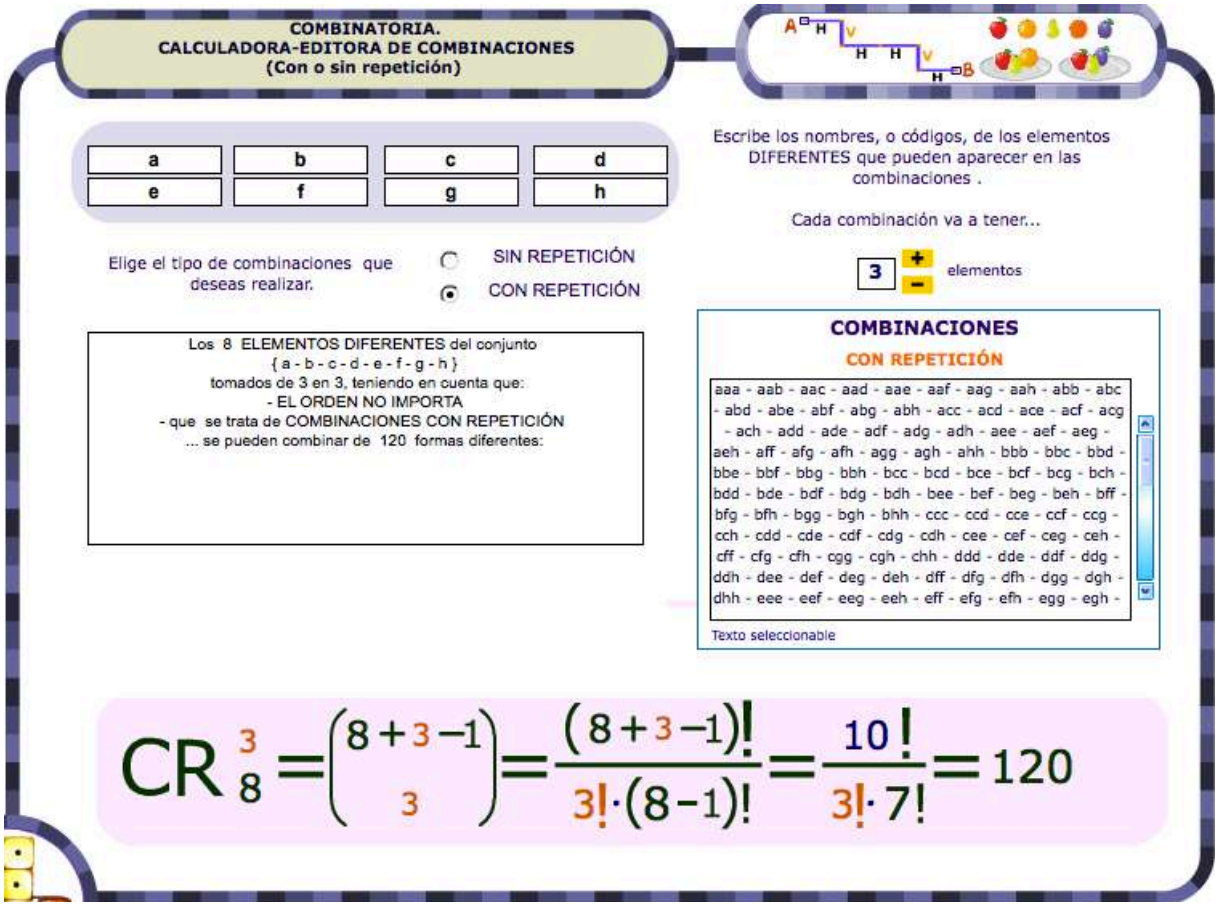



Figura 7.128 Aplicación sobre Combinatoria. Calculadora y editora de combinaciones

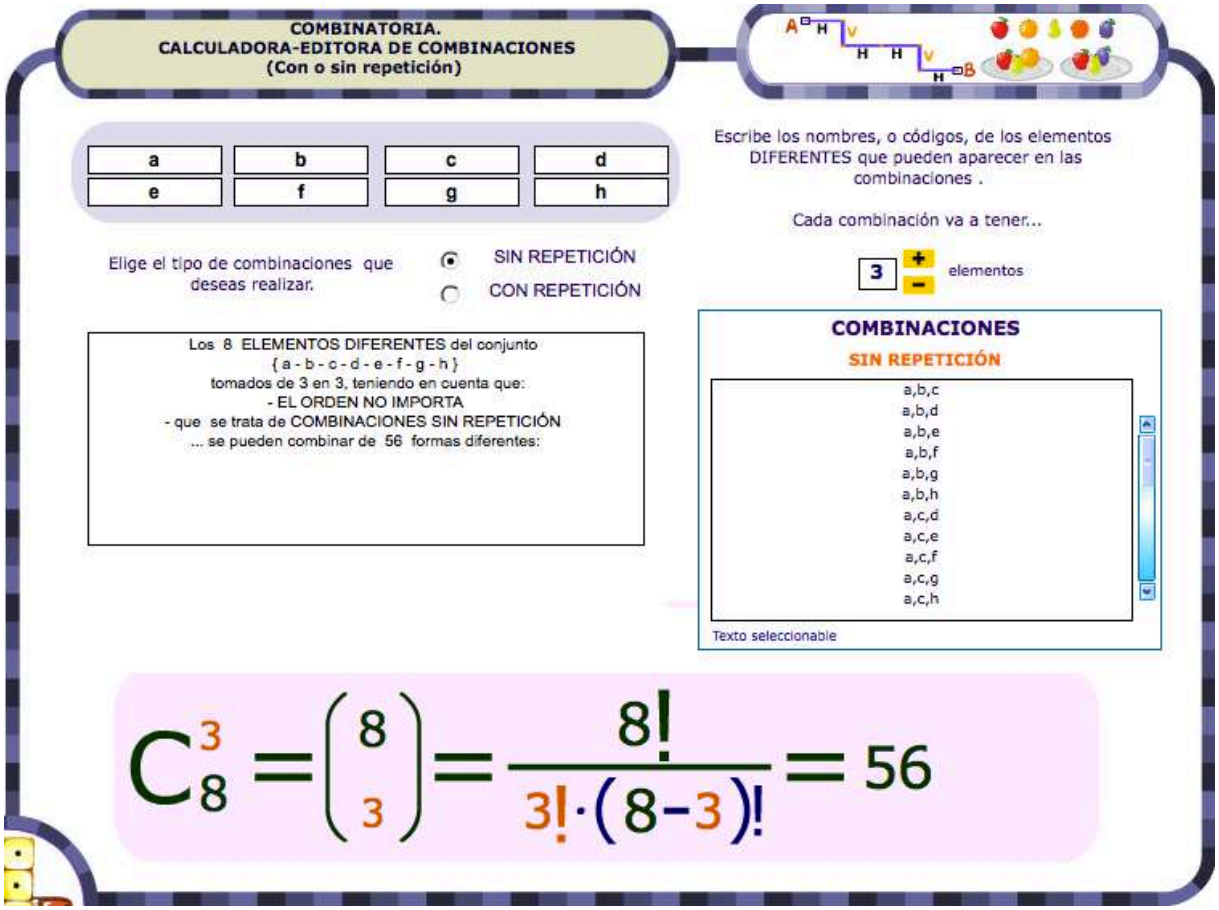



Figura 7.129 Aplicación sobre Combinatoria. Calculadora y editora de combinaciones

## APLICACIÓN. PERMUTANDO FRUTAS

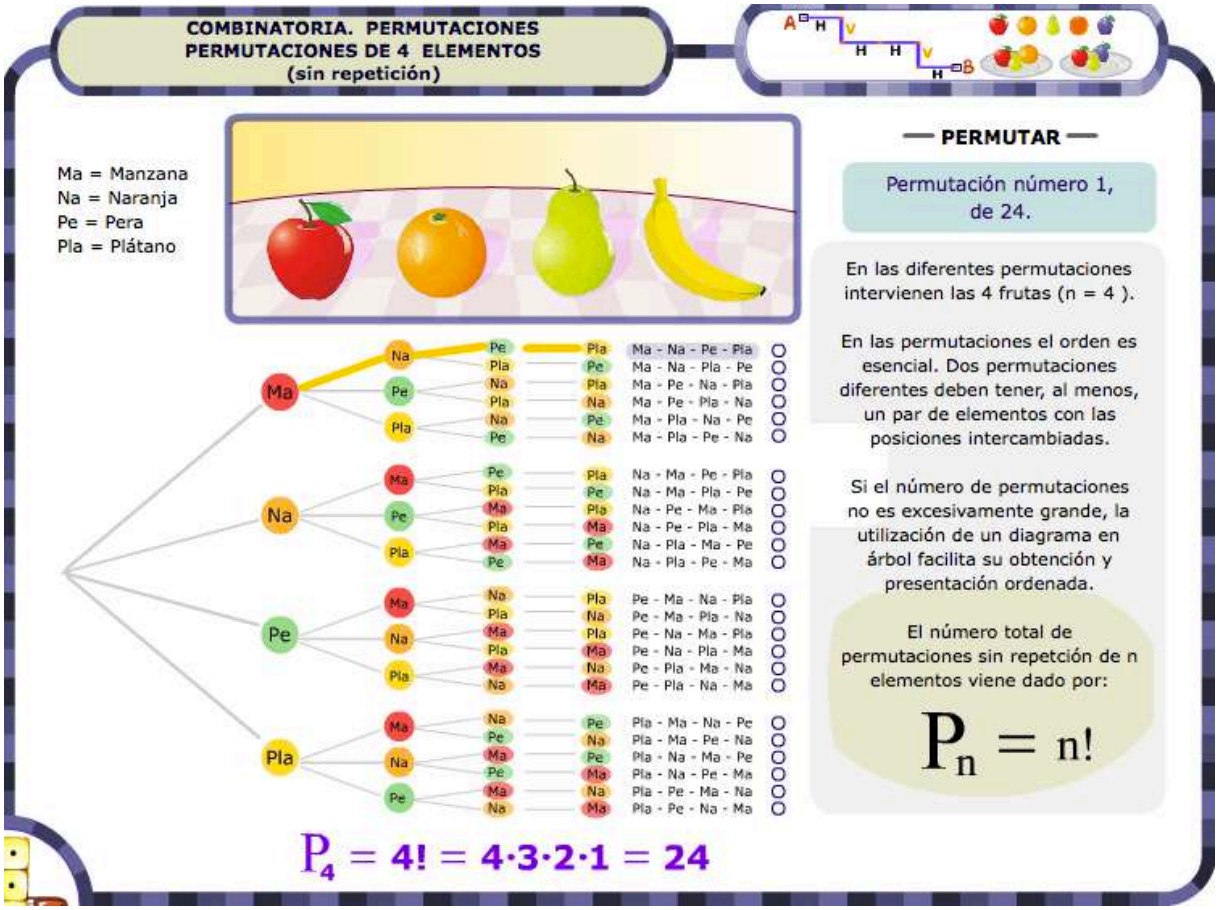



Figura 7.130 Aplicación sobre Combinatoria. Permutando frutas

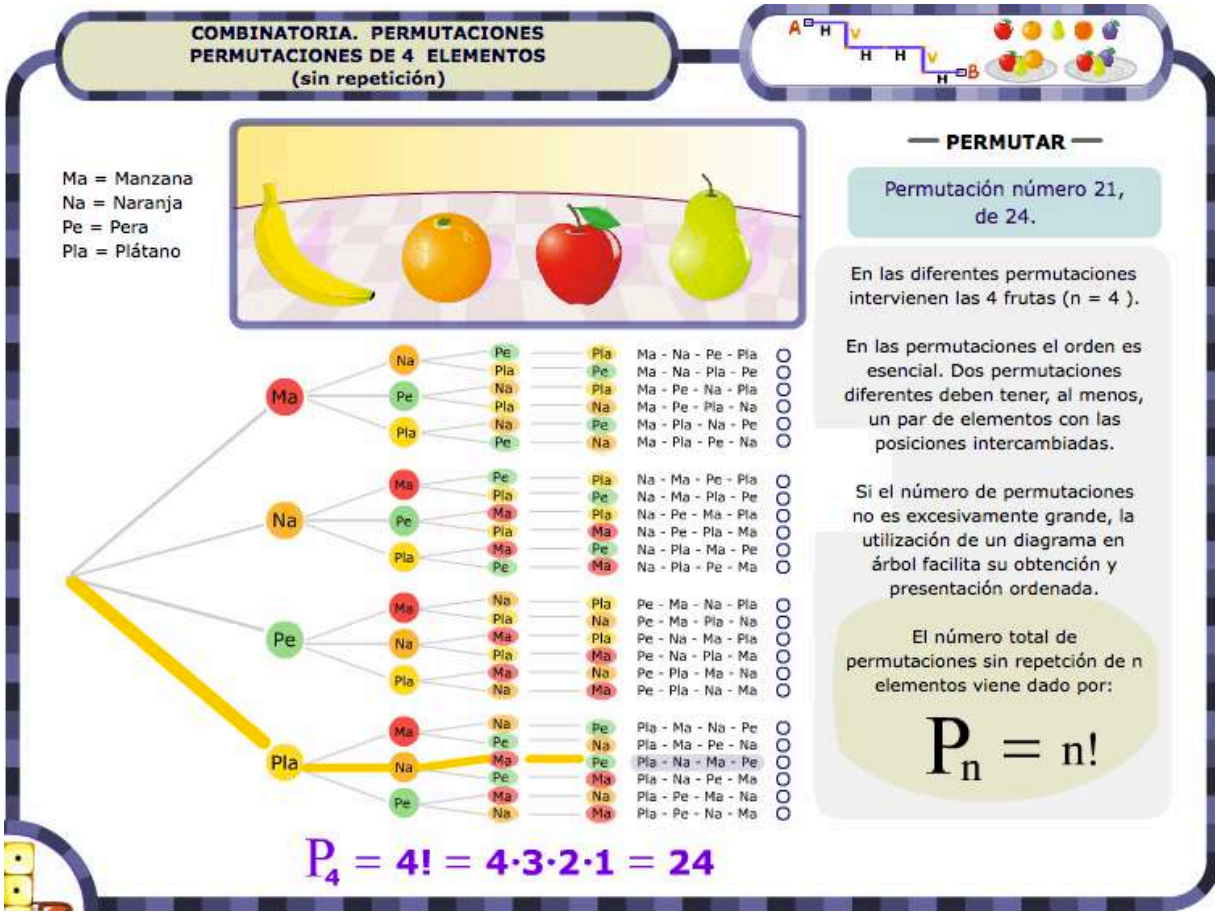



Figura 7.131 Aplicación sobre Combinatoria. Permutando frutas




Figura 7.132 Aplicación sobre Combinatoria. Permutando frutas

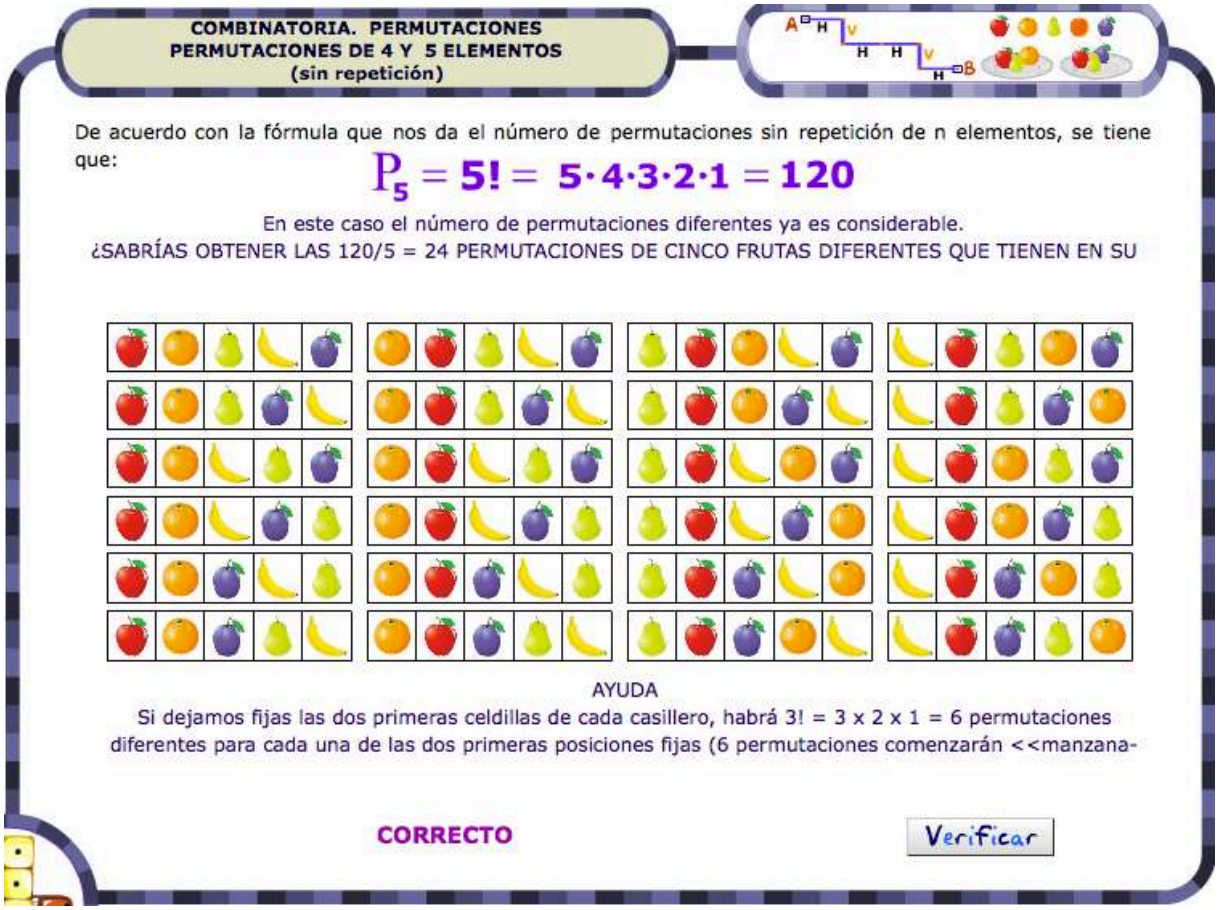



Figura 7.133 Aplicación sobre Combinatoria. Permutando frutas

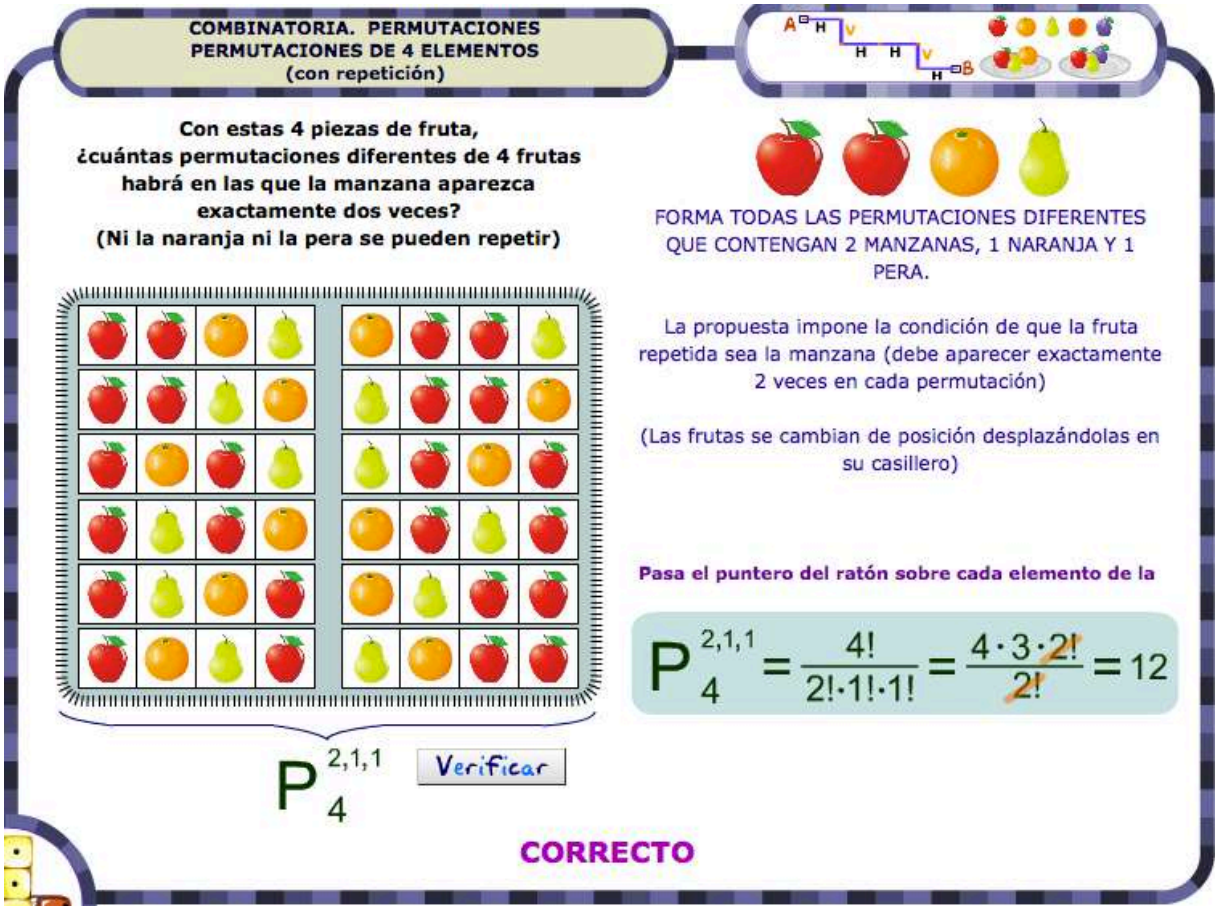



Figura 7.134 Aplicación sobre Combinatoria. Permutando frutas

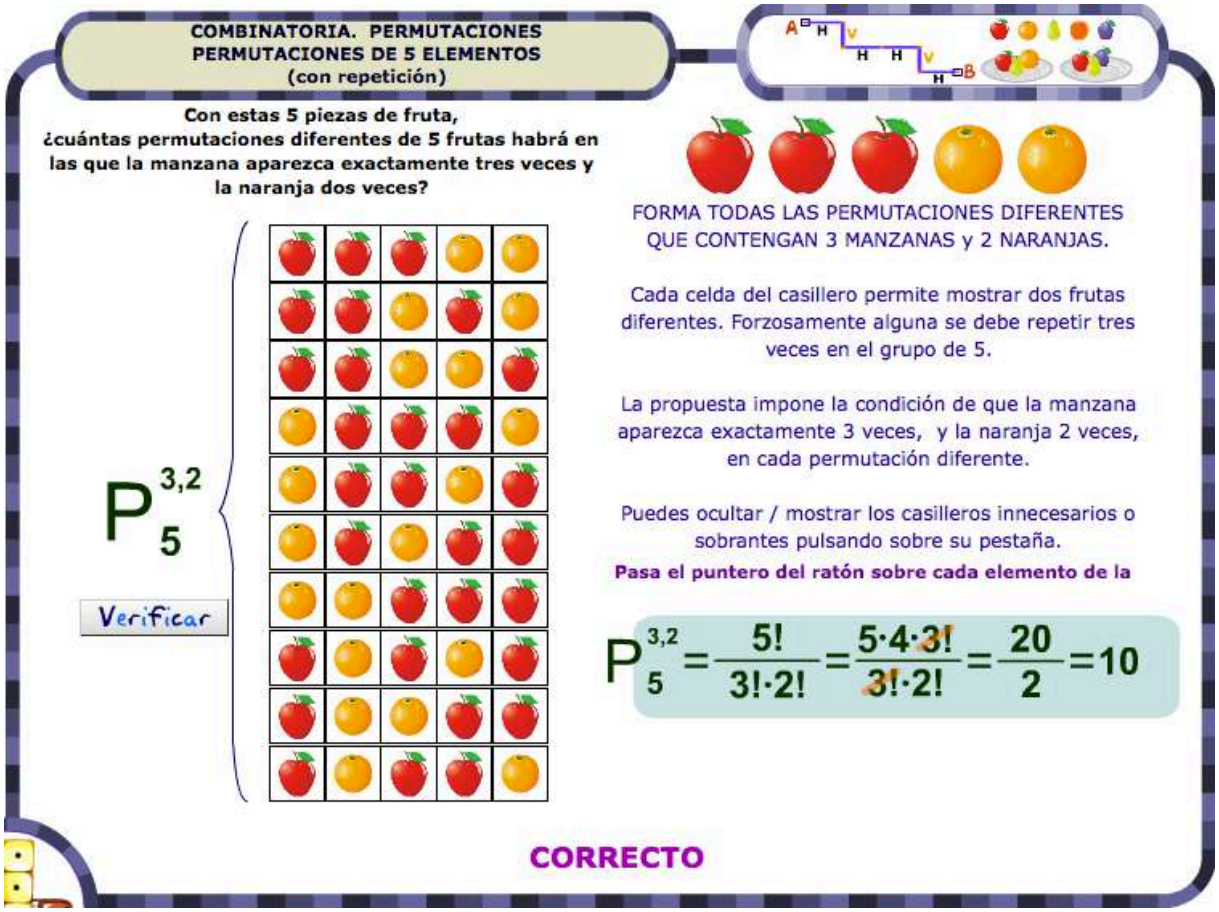



Figura 7.135 Aplicación sobre Combinatoria. Permutando frutas

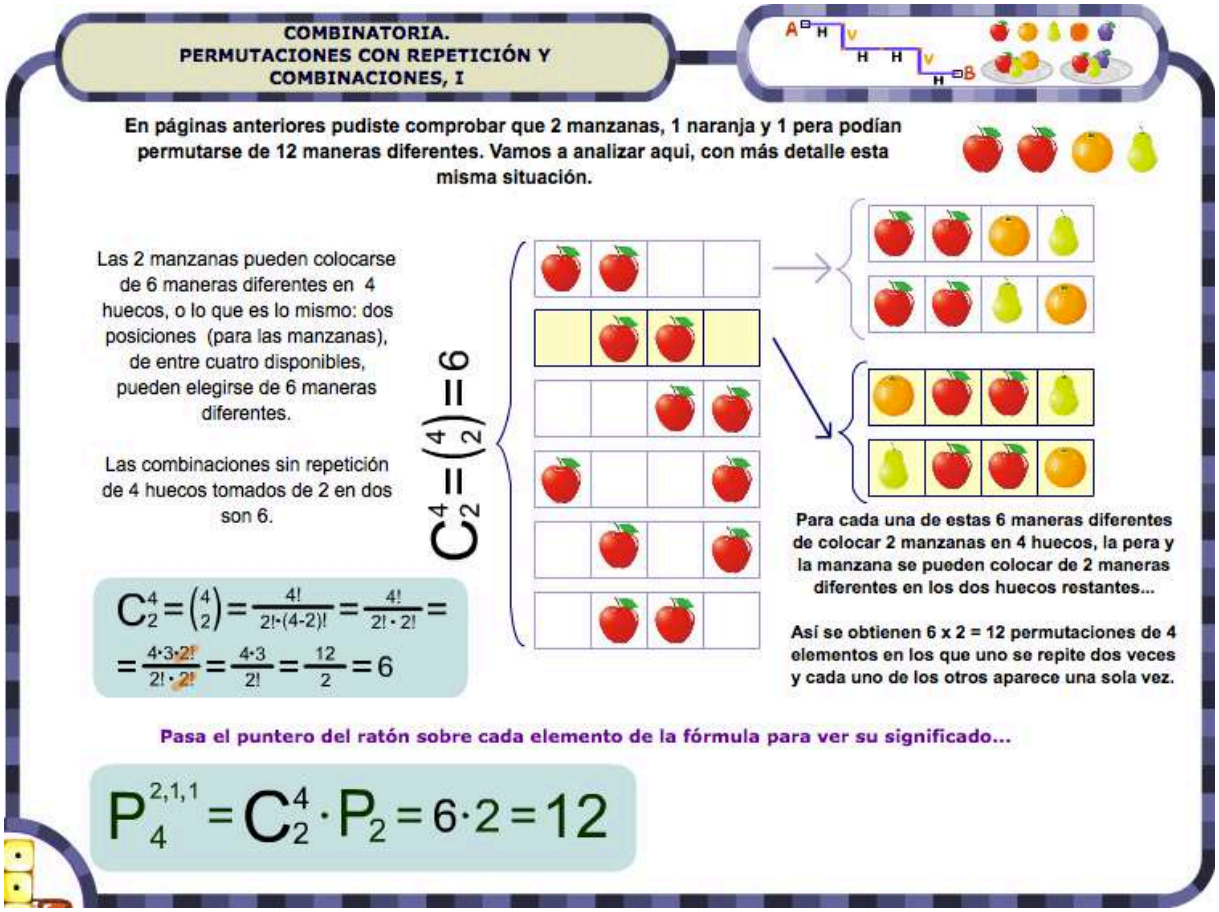



Figura 7.136 Aplicación sobre Combinatoria. Permutando frutas

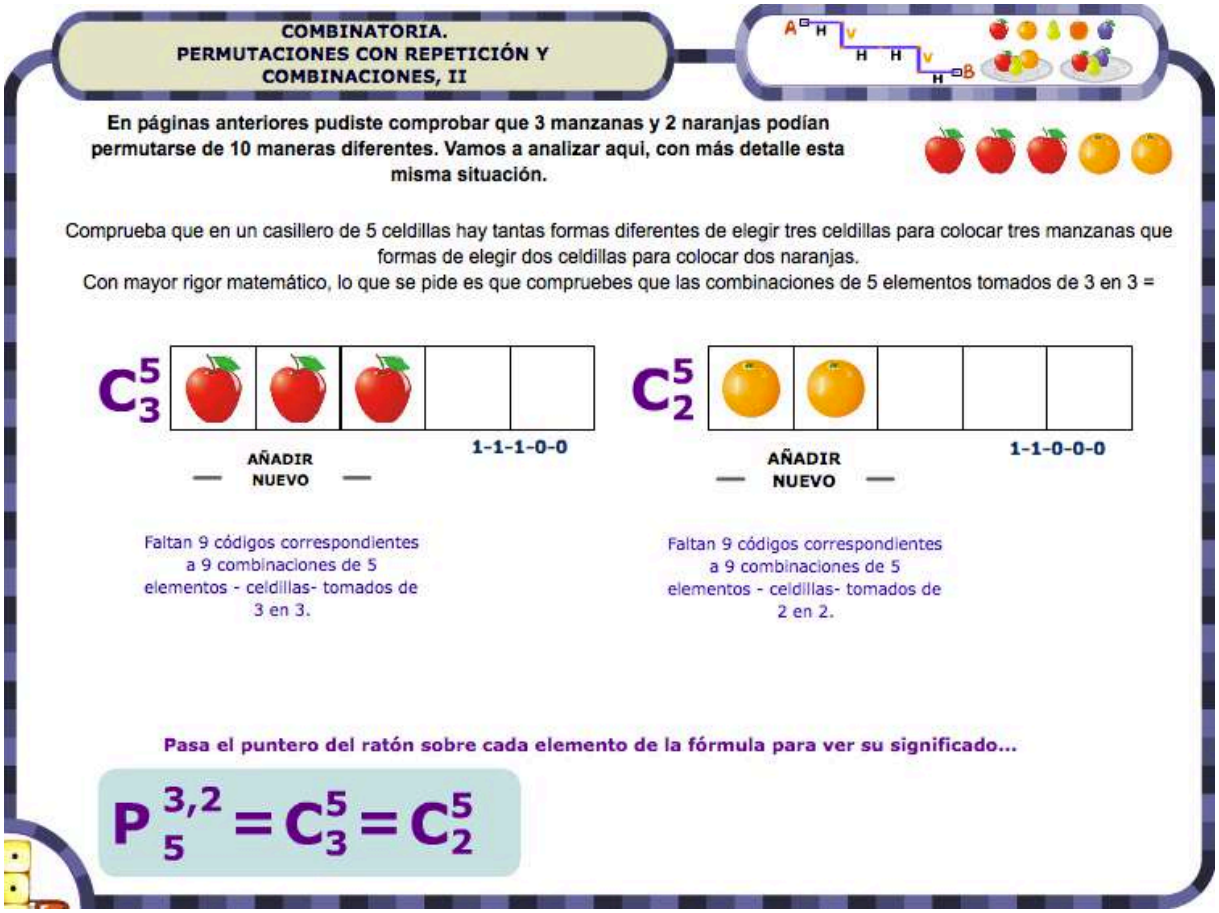



Figura 7.137 Aplicación sobre Combinatoria. Permutando frutas

## APLICACIÓN. CALCULADORA Y EDITORA DE PERMUTACIONES

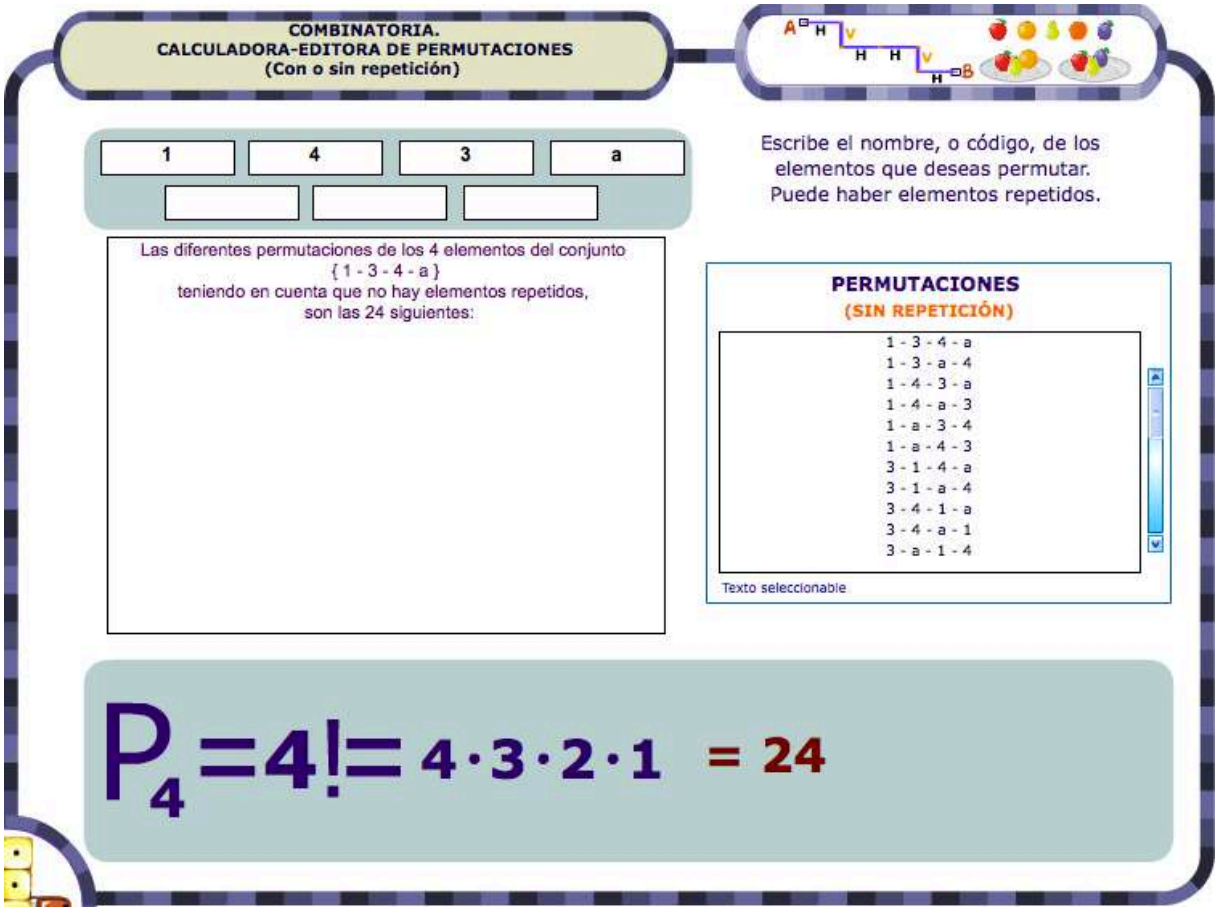



Figura 7.138 Aplicación sobre Combinatoria. Calculadora y editora de permutaciones

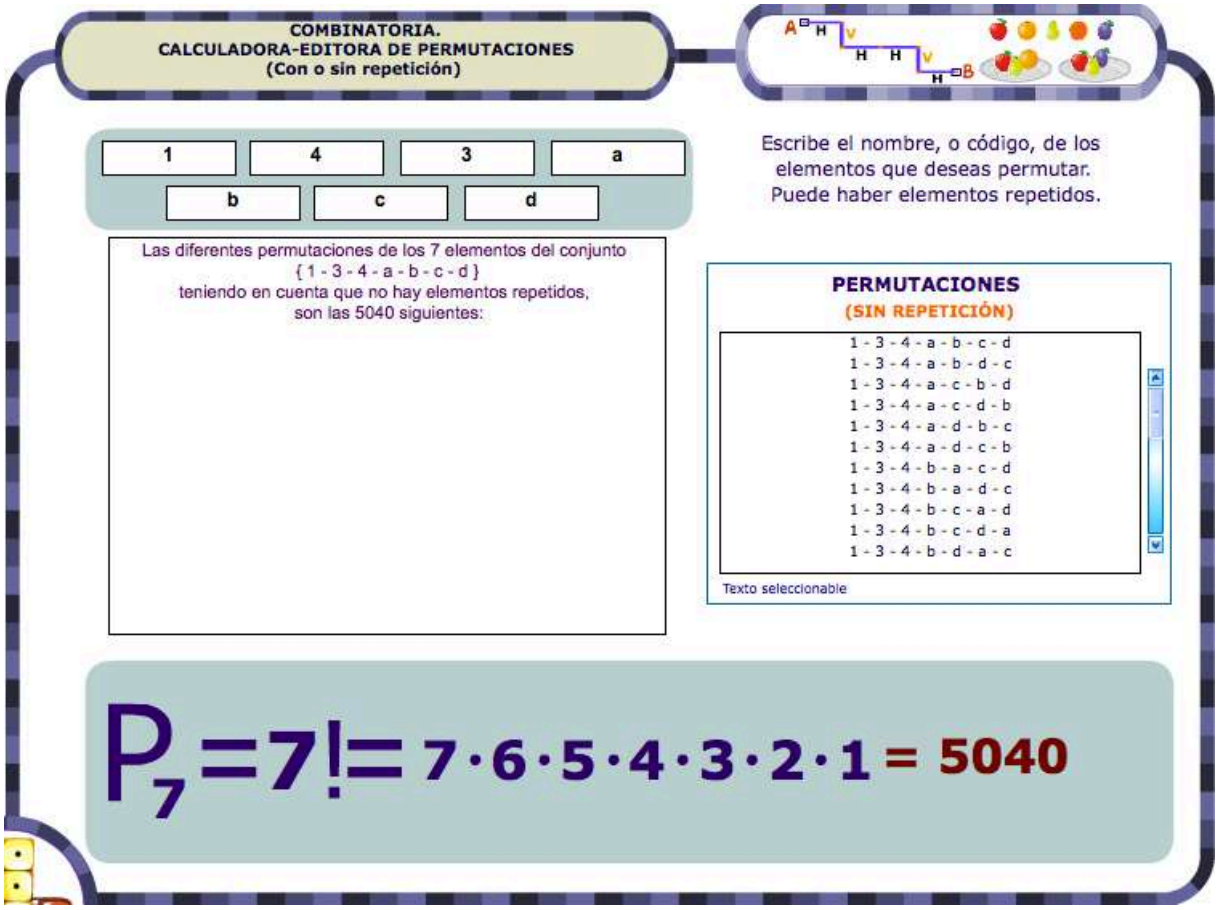



Figura 7.139 Aplicación sobre Combinatoria. Calculadora y editora de permutaciones

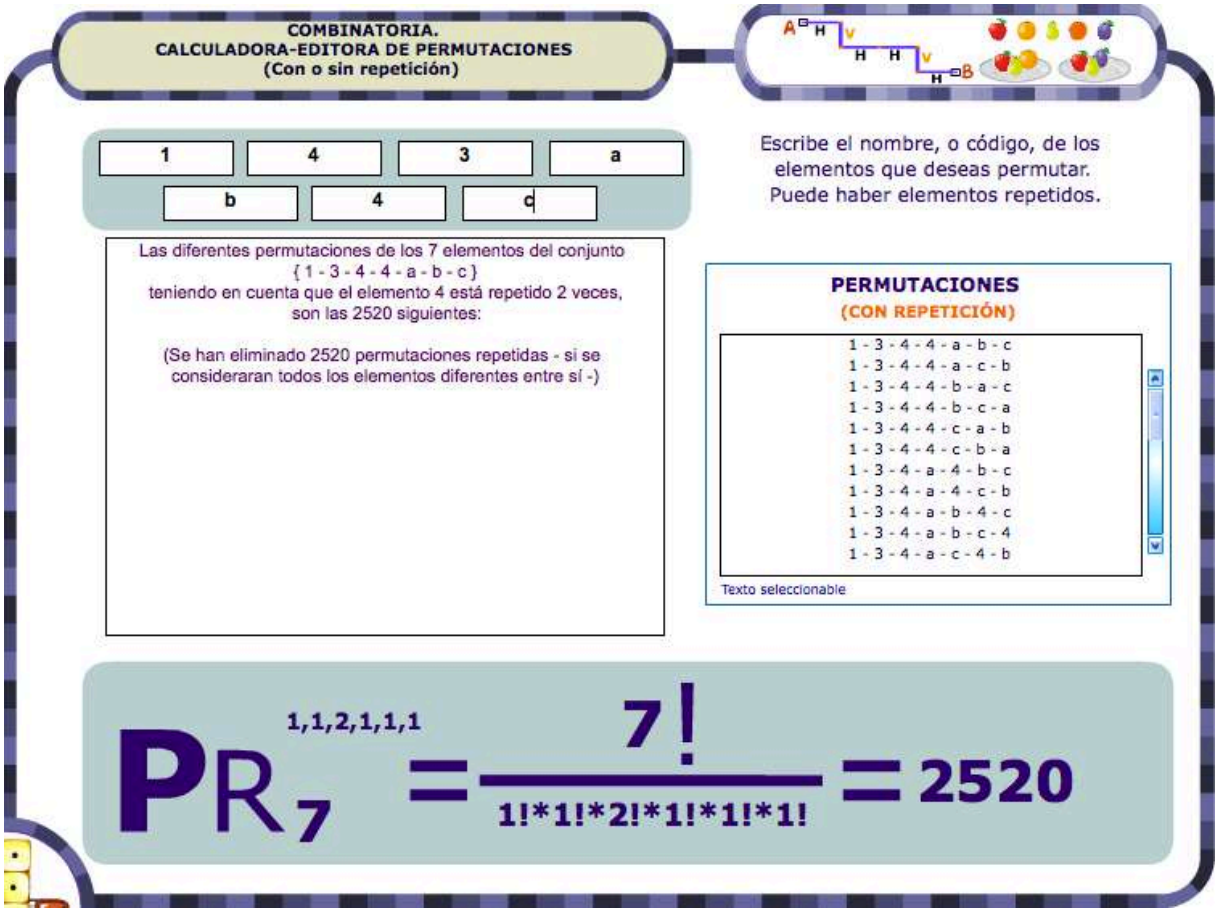
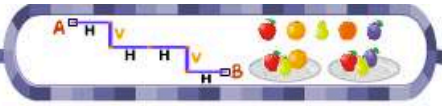



Figura 7.140 Aplicación sobre Combinatoria. Calculadora y editora de permutaciones

## APLICACIÓN. TABLA COMBINATORIA

**COMBINATORIA.**
**TRIÁNGULO DE TARTAGLIA, O DE PASCAL, Y NÚMEROS COMBINATORIOS...**




| Agrupaciones | Tipo | ¿Importa orden? | ¿Pueden repetirse? | Elementos por grupo | Elementos disponibles | En cada agrupación | FÓRMULA |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| VARIACIONES | sin repetición | SI | NO | n | m | n < m | $V_m^n = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)$ <br> $V_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$ |
| | con repetición | | SI | | | n < m, n > m | $VR_m^n = m^n$ |
| PERMUTACIONES | sin repetición | SI | NO | | | n = m | $P_n = n!$ |
| | con repetición | | SI | | | | $P_n^{a,b,c\ldots} = \frac{n!}{a!b!c!\ldots}$ |
| COMBINACIONES | sin repetición | NO | NO | | | n ≤ m | $C_m^n = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$ <br> $C_m^n = \frac{V_m^n}{P_n}$ |
| | con repetición | | SI | | | | $CR_m^n = \binom{m+n-1}{n} = \frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}$ |

Figura 7.141 Aplicación sobre Combinatoria. Tabla combinatoria

## APLICACIÓN. CAMINOS LÓGICOS

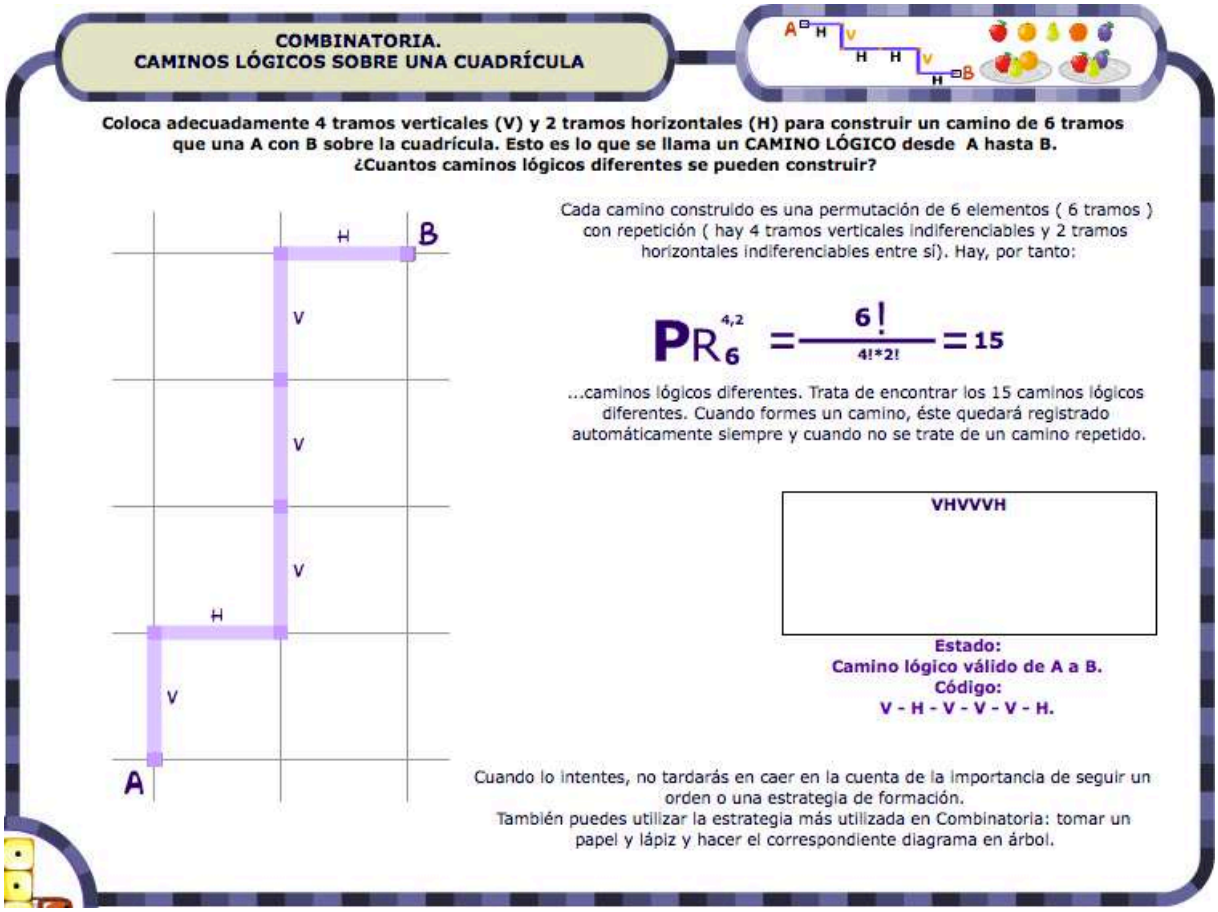



Figura 7.142 Aplicación sobre Combinatoria. Caminos lógicos

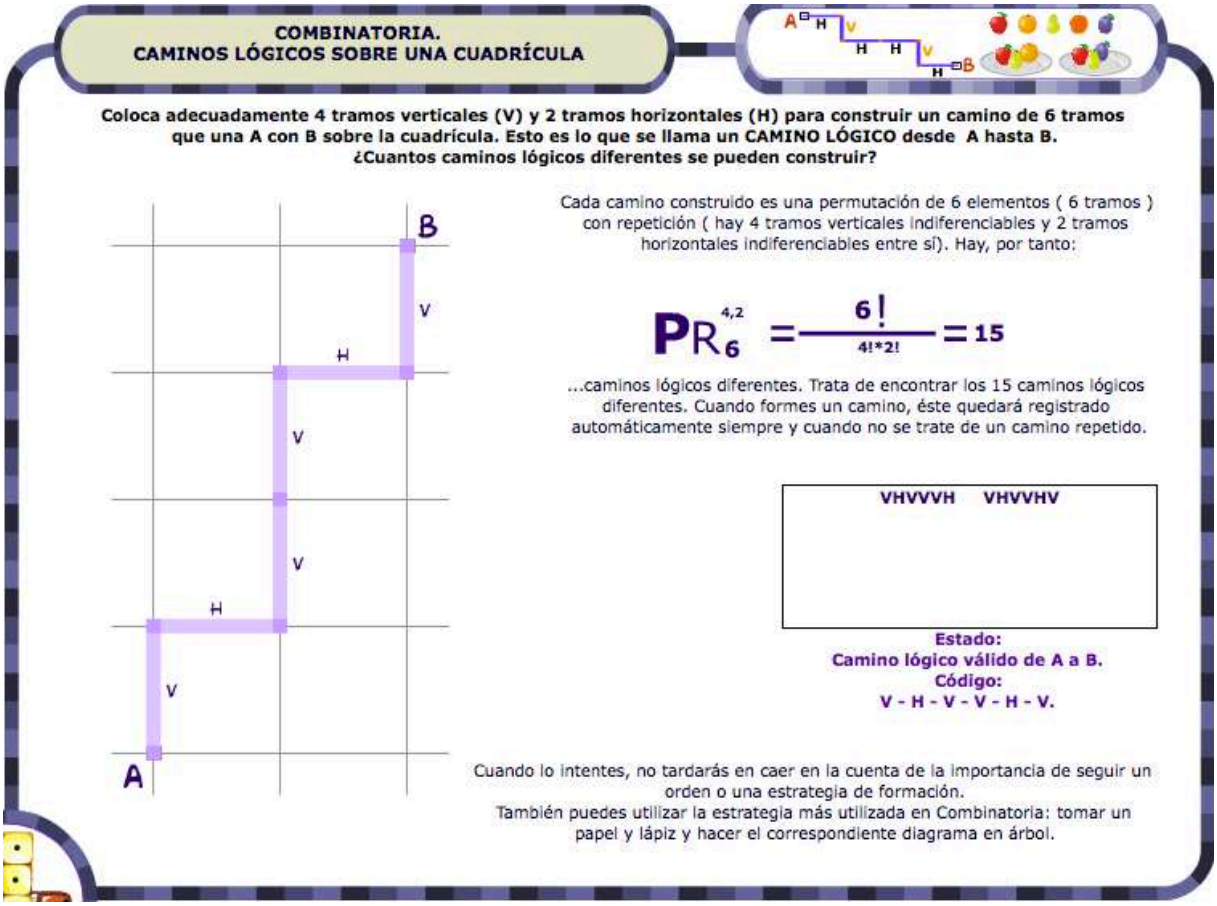



Figura 7.143 Aplicación sobre Combinatoria. Caminos lógicos

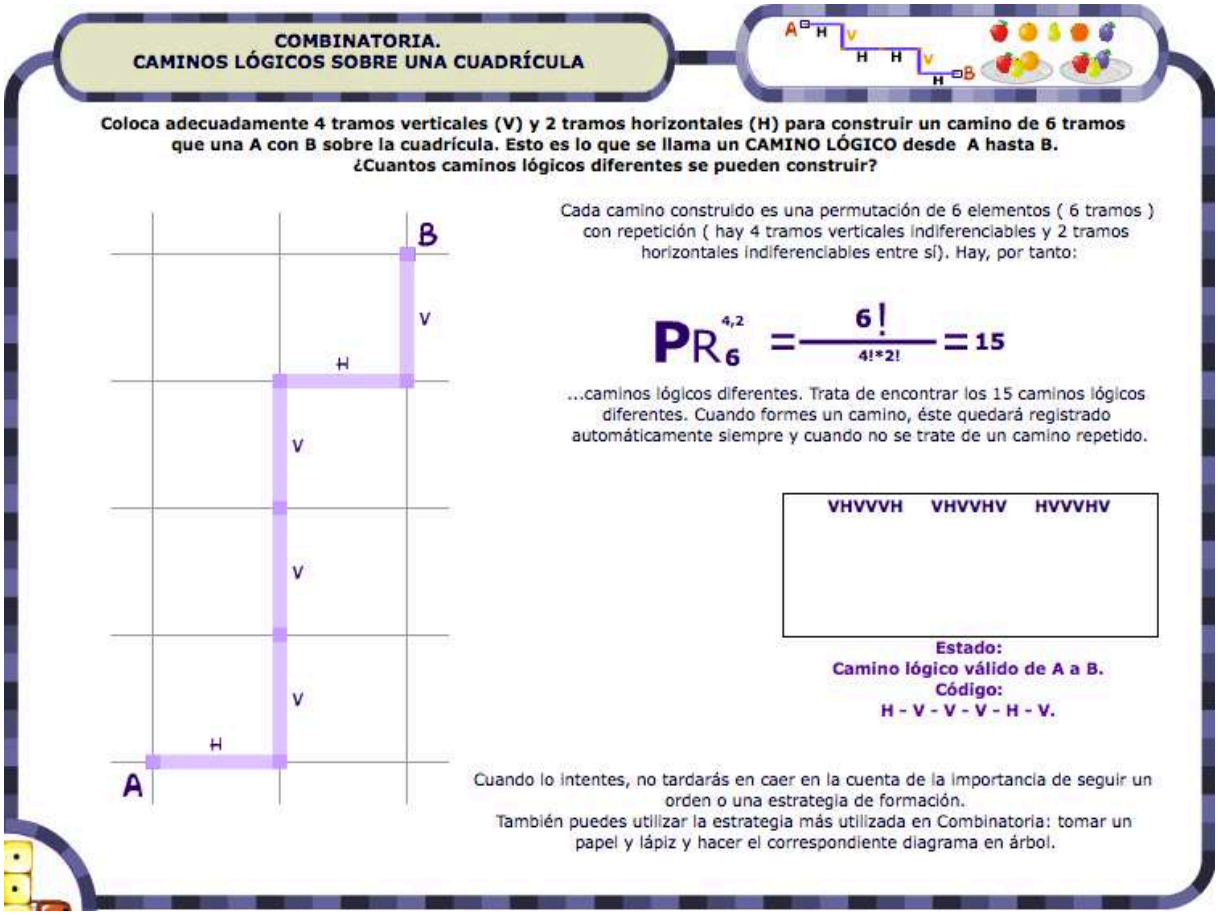



Figura 7.144 Aplicación sobre Combinatoria. Caminos lógicos

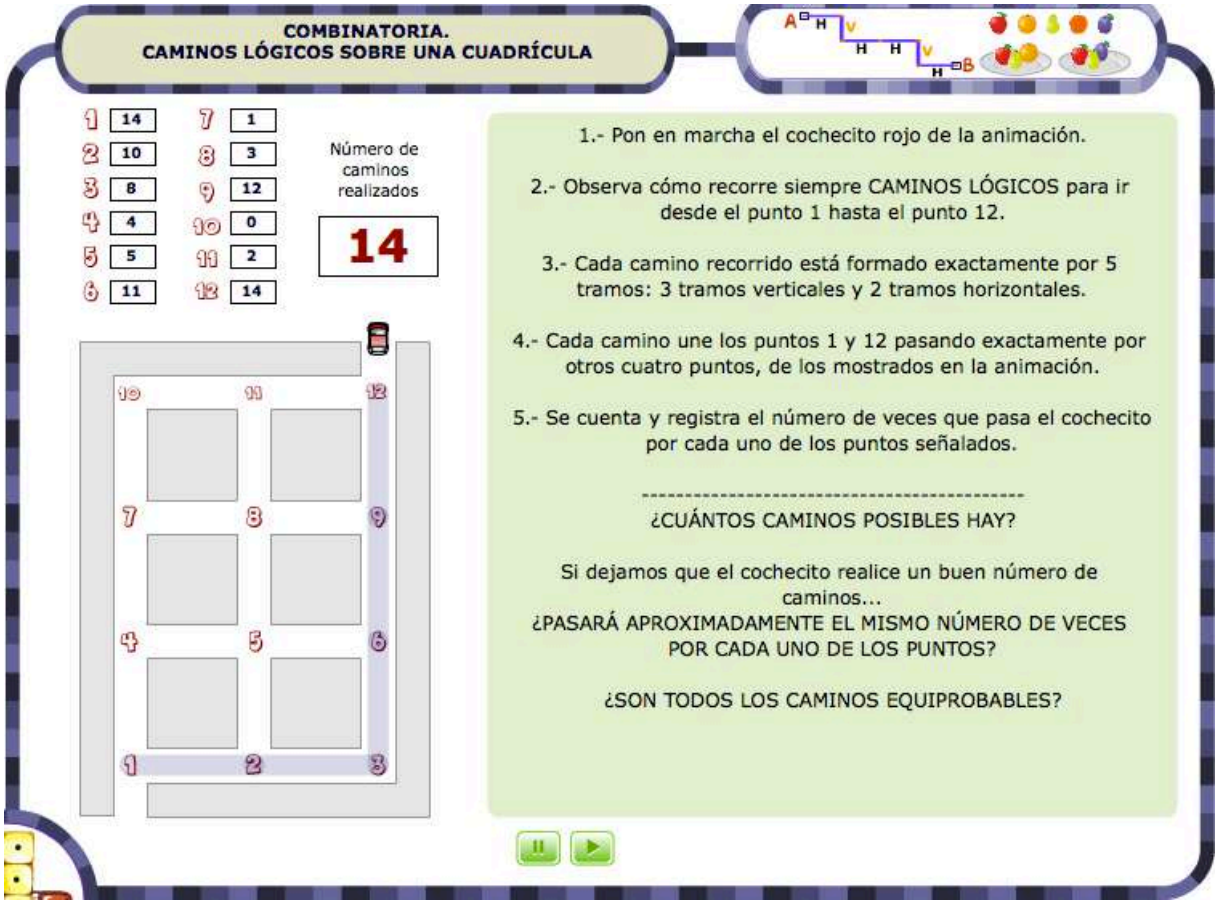



Figura 7.145 Aplicación sobre Combinatoria. Caminos lógicos




Figura 7.146 Aplicación sobre Combinatoria. Caminos lógicos

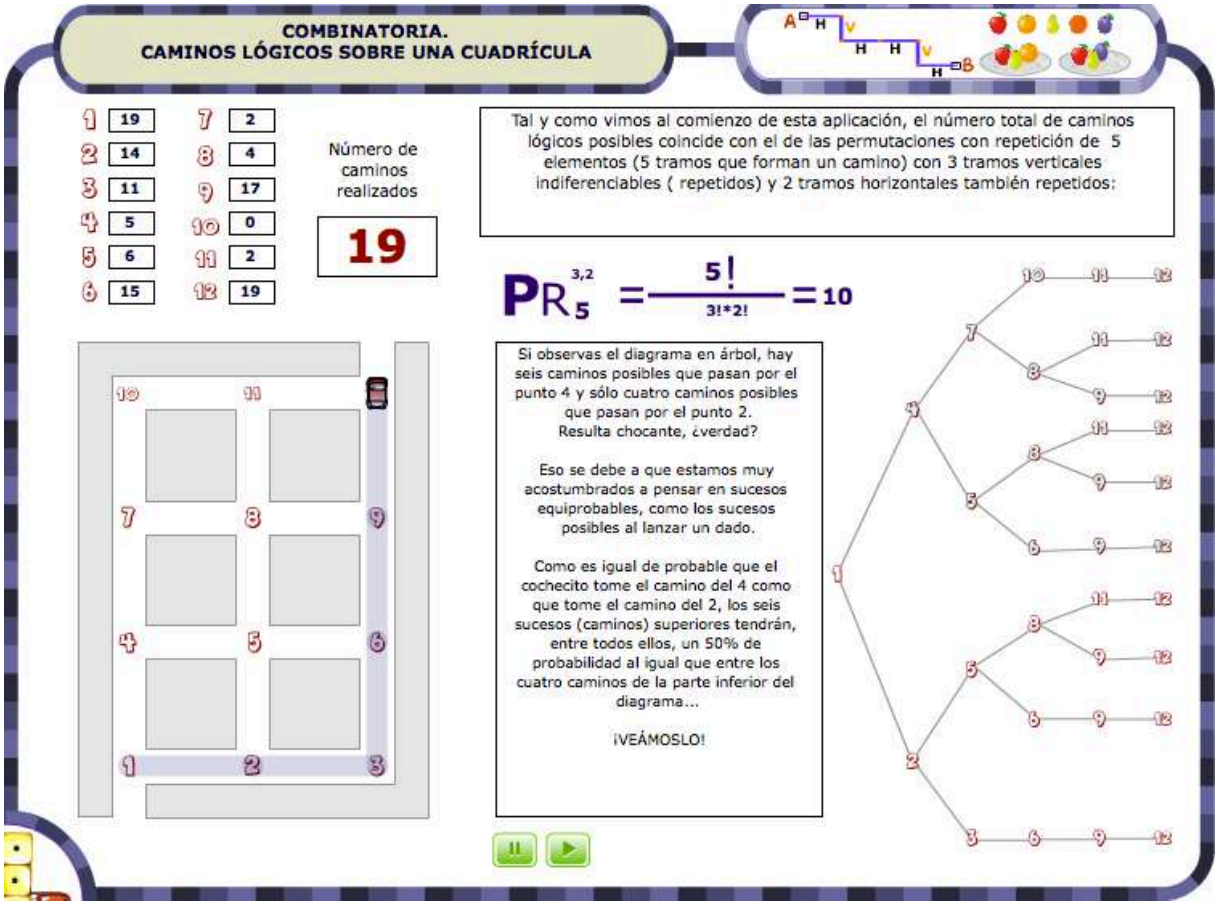



Figura 7.147 Aplicación sobre Combinatoria. Caminos lógicos

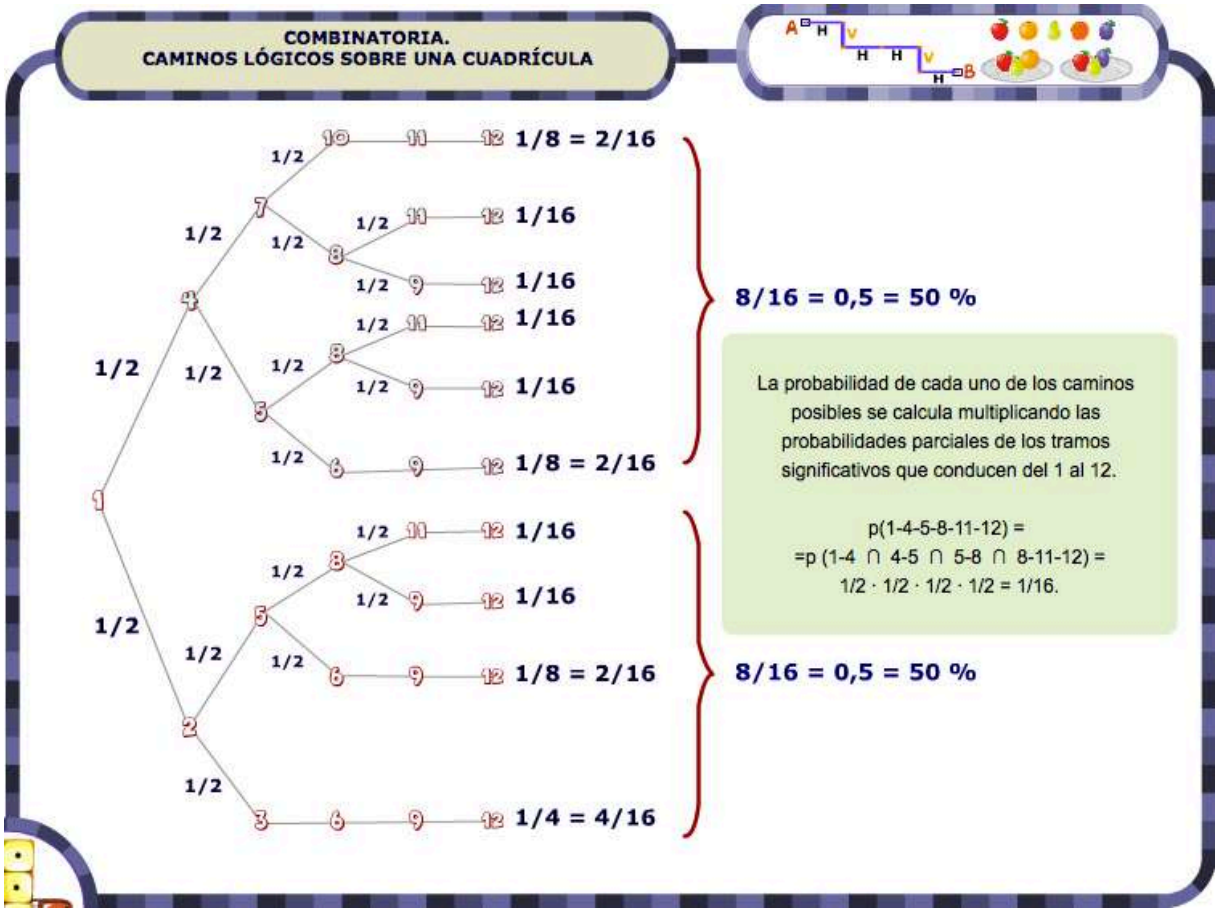



Figura 7.148 Aplicación sobre Combinatoria. Caminos lógicos

### 7.5.4 EQUIPAMIENTO EXPERIMENTAL

Las principales características de este bloque de aplicaciones, que permiten nombrar el trabajo, en su conjunto, como "laboratorio". Por citar un ejemplo de aplicación abierta, divergente, versátil, configurable, el lector podrá comprobar las posibilidades de una urna para extracción de bolas, con o sin reposición, con bolas simuladas de manera realista para las cuales se puede configurar su número total, la proporción de cada color, el número de bolas que se desea extraer de manera simultánea, el tipo de extracción, la posibilidad de visualizar, o no, número de bolas, etc.

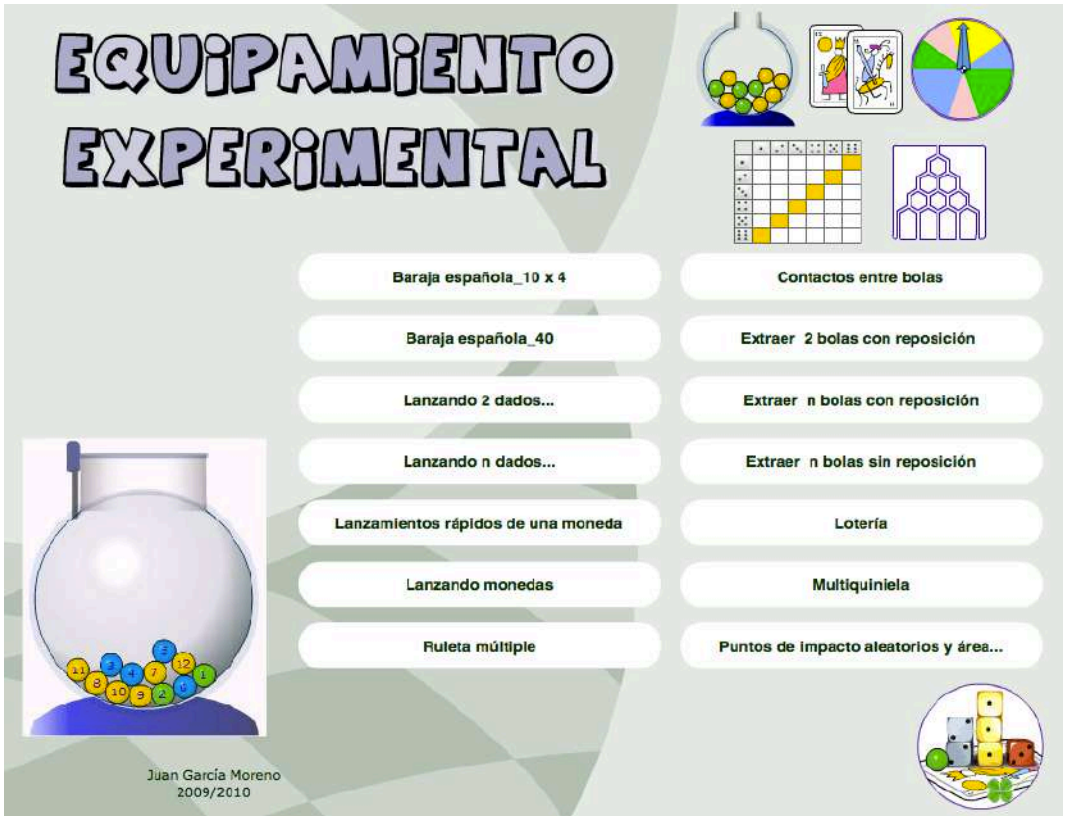



Figura 7.149 Cabecera de Equipamiento experimental

Se trata de aplicaciones muy cuidadas en sus aspectos interactivos, que han requerido un enorme esfuerzo de programación e incluso de maquetación. En la realización de LABAPC, se ha tenido en cuenta en todo momento el estado actual de las TIC y, en particular, la presencia cada vez mayor de pizarras digitales en las aulas.

## APLICACIÓN. BARAJA ESPAÑOLA 10X4

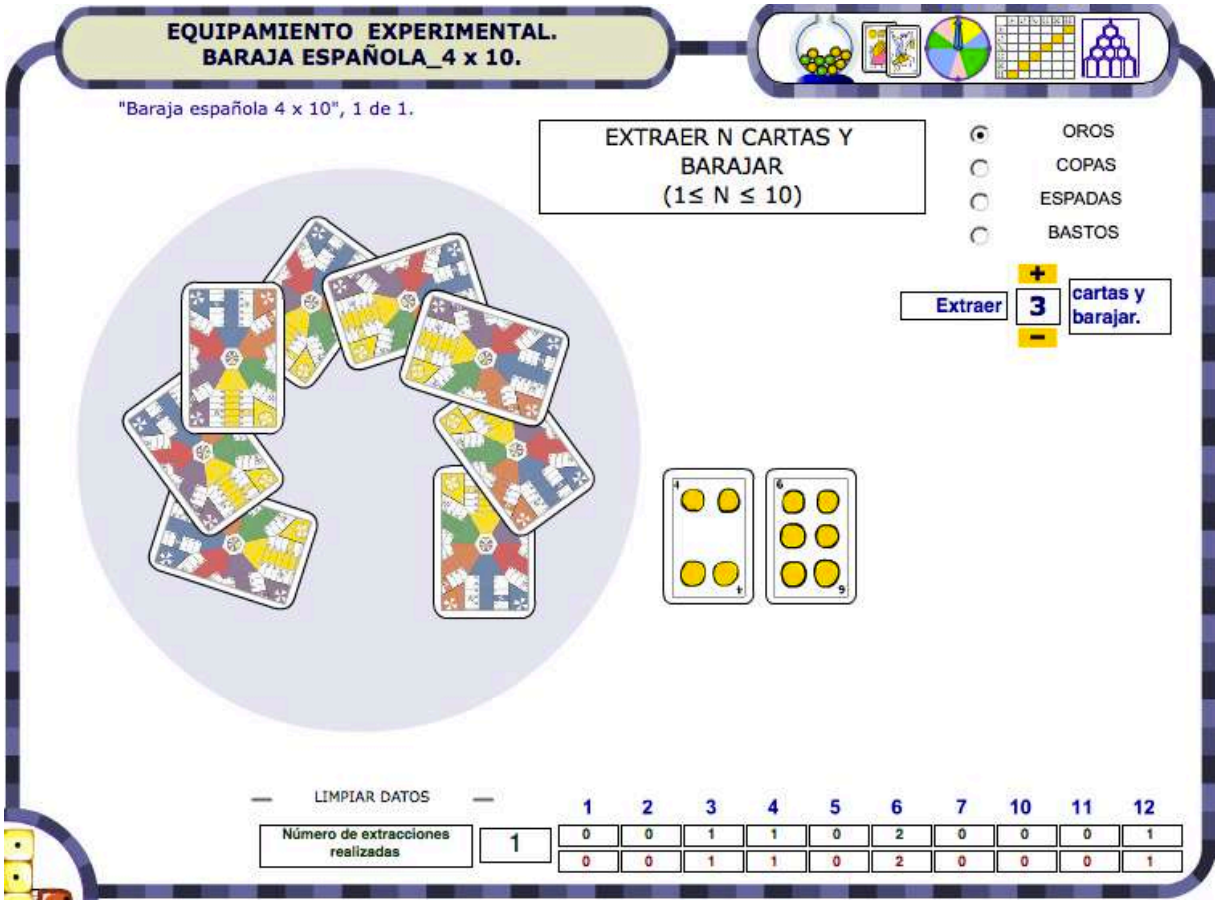



Figura 7.150 Aplicación sobre Equipamiento Experimental. Baraja española 10X4

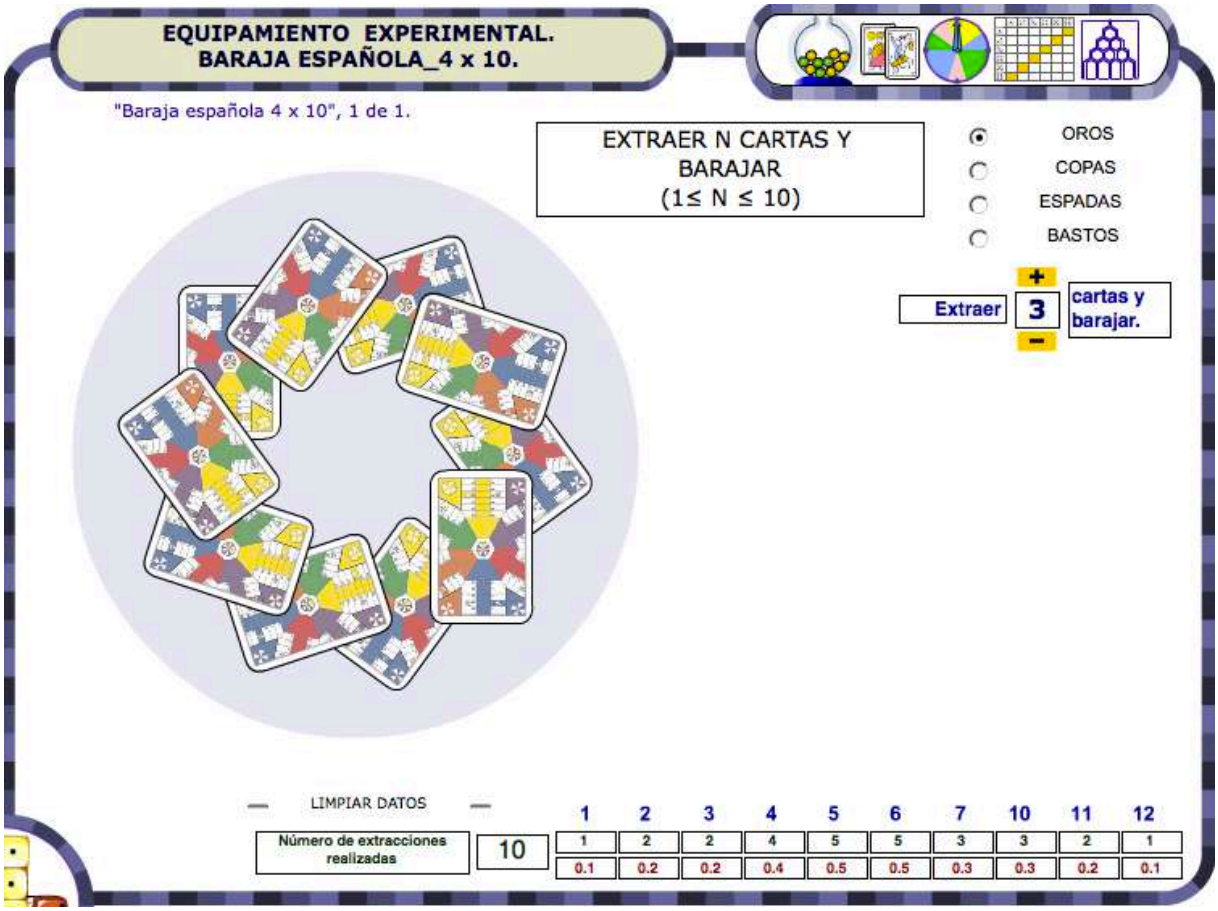



Figura 7.151 Aplicación sobre Equipamiento Experimental. Baraja española 10X4

## APLICACIÓN. BARAJA ESPAÑOLA 40

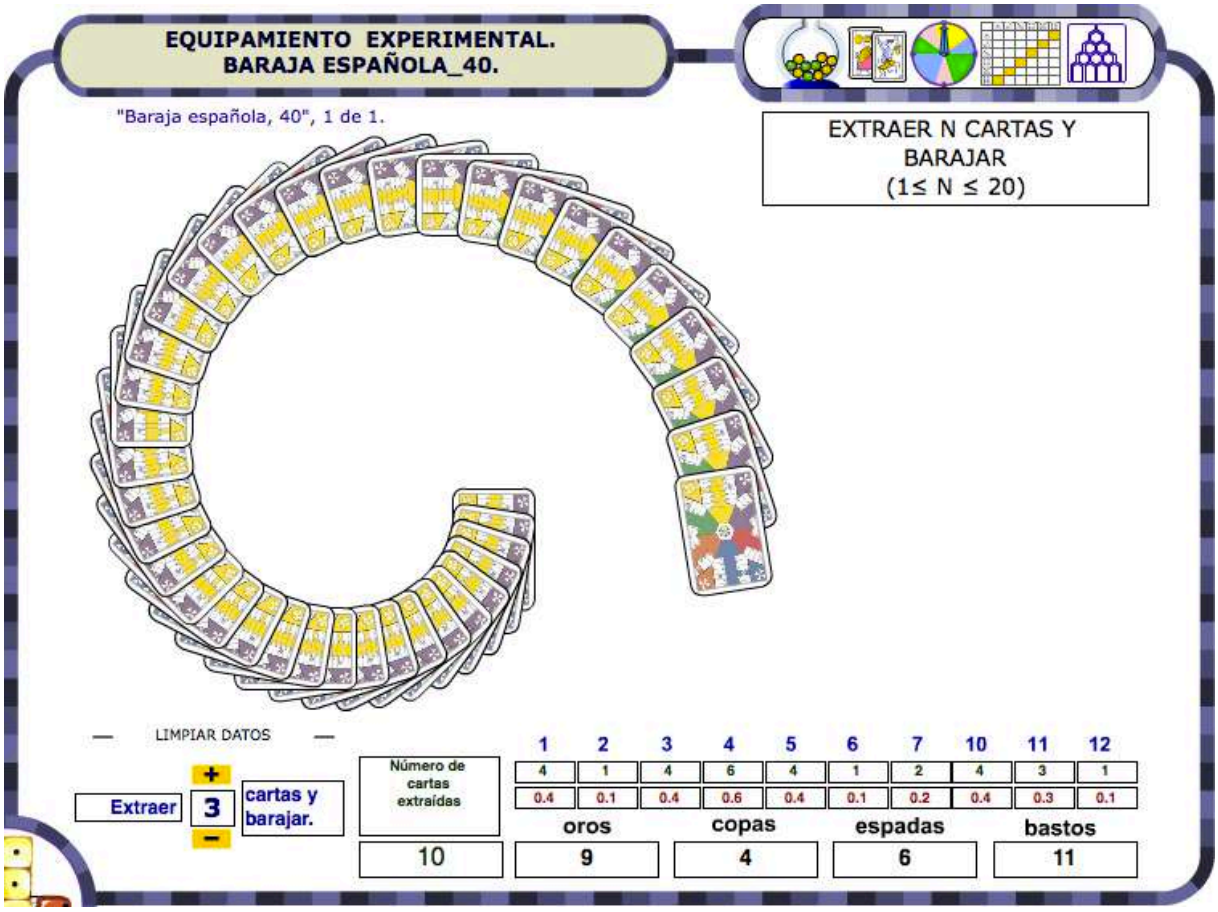



Figura 7.152 Aplicación sobre Equipamiento Experimental. Baraja española 40

## APLICACIÓN. LANZANDO DOS DADOS

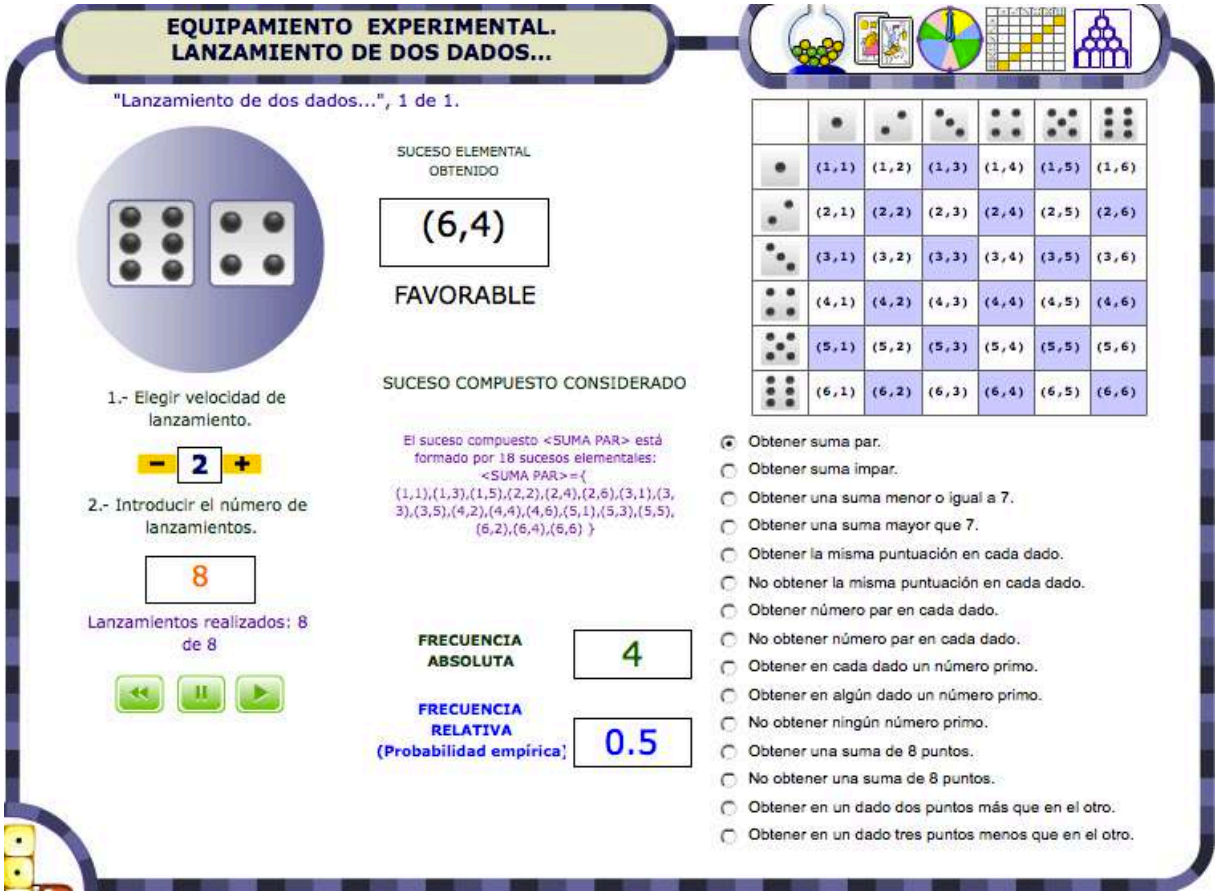



Figura 7.153 Aplicación sobre Equipamiento Experimental. Lanzando dos dados

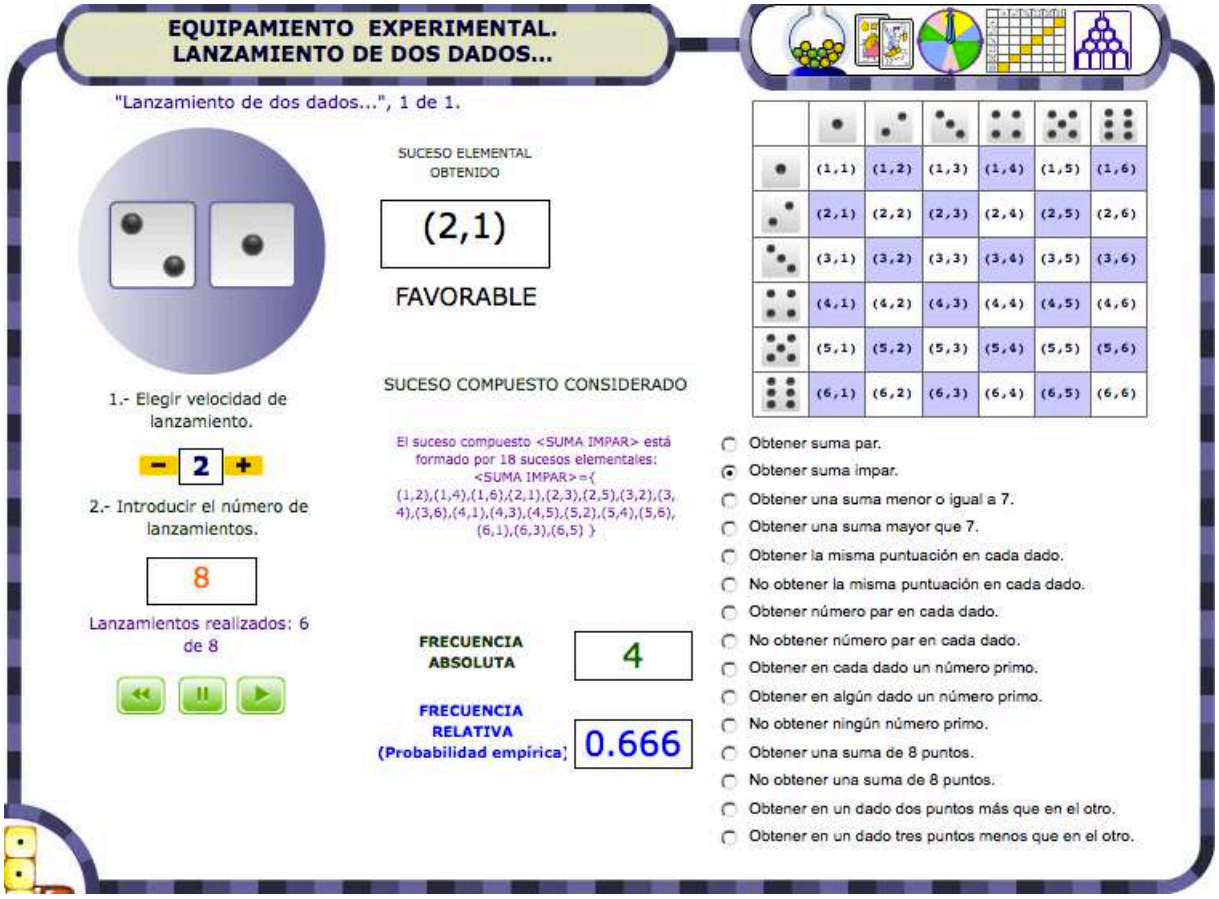



Figura 7.154 Aplicación sobre Equipamiento Experimental. Lanzando dos dados

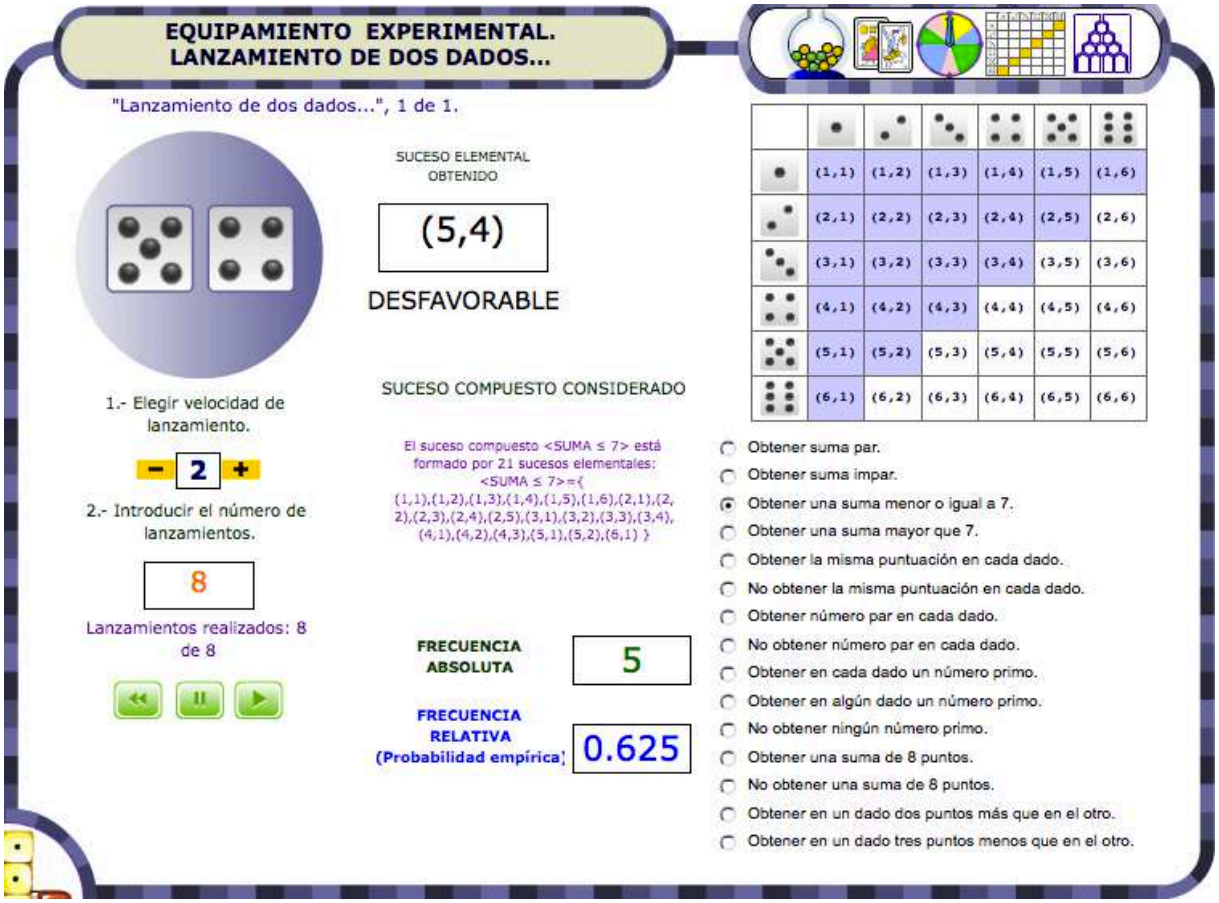



Figura 7.155 Aplicación sobre Equipamiento Experimental. Lanzando dos dados

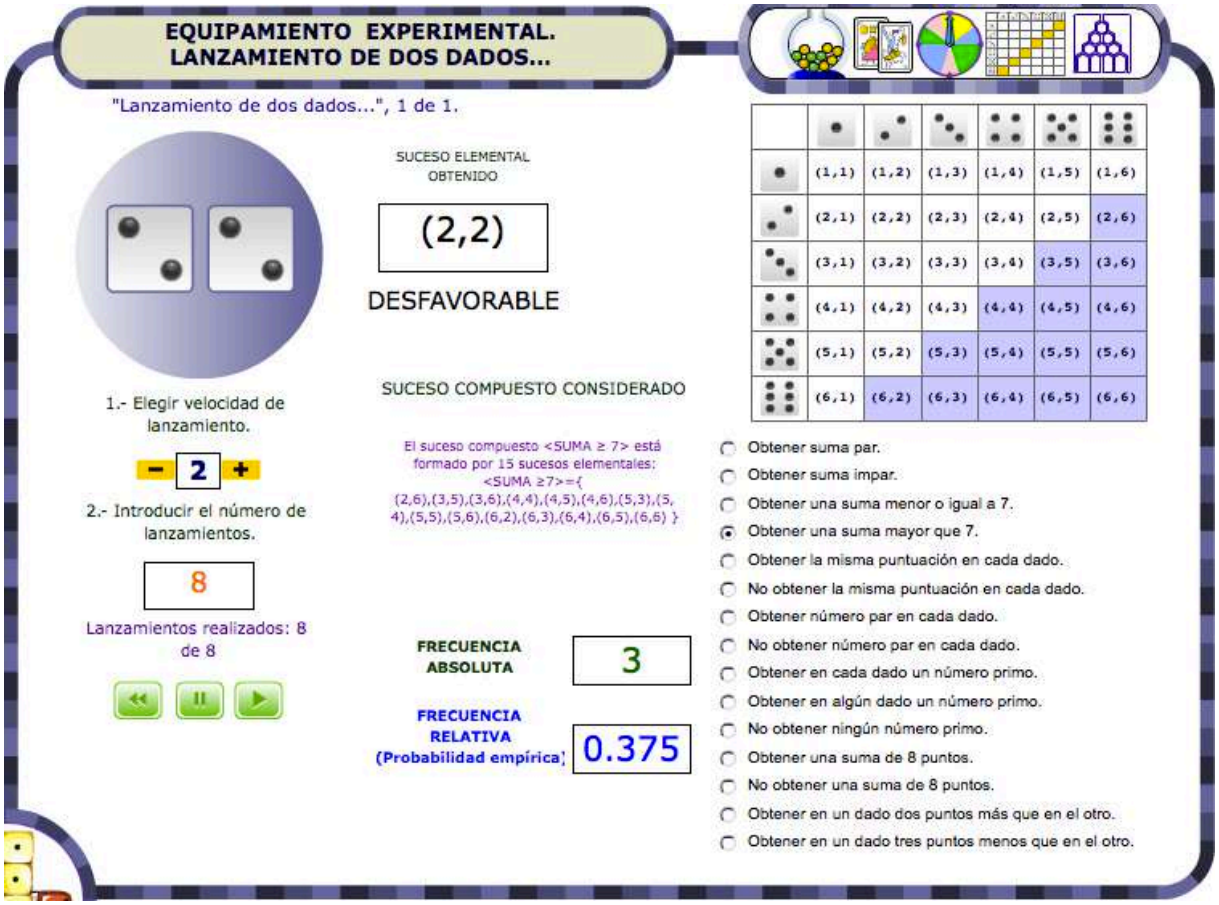



Figura 7.156 Aplicación sobre Equipamiento Experimental. Lanzando dos dados

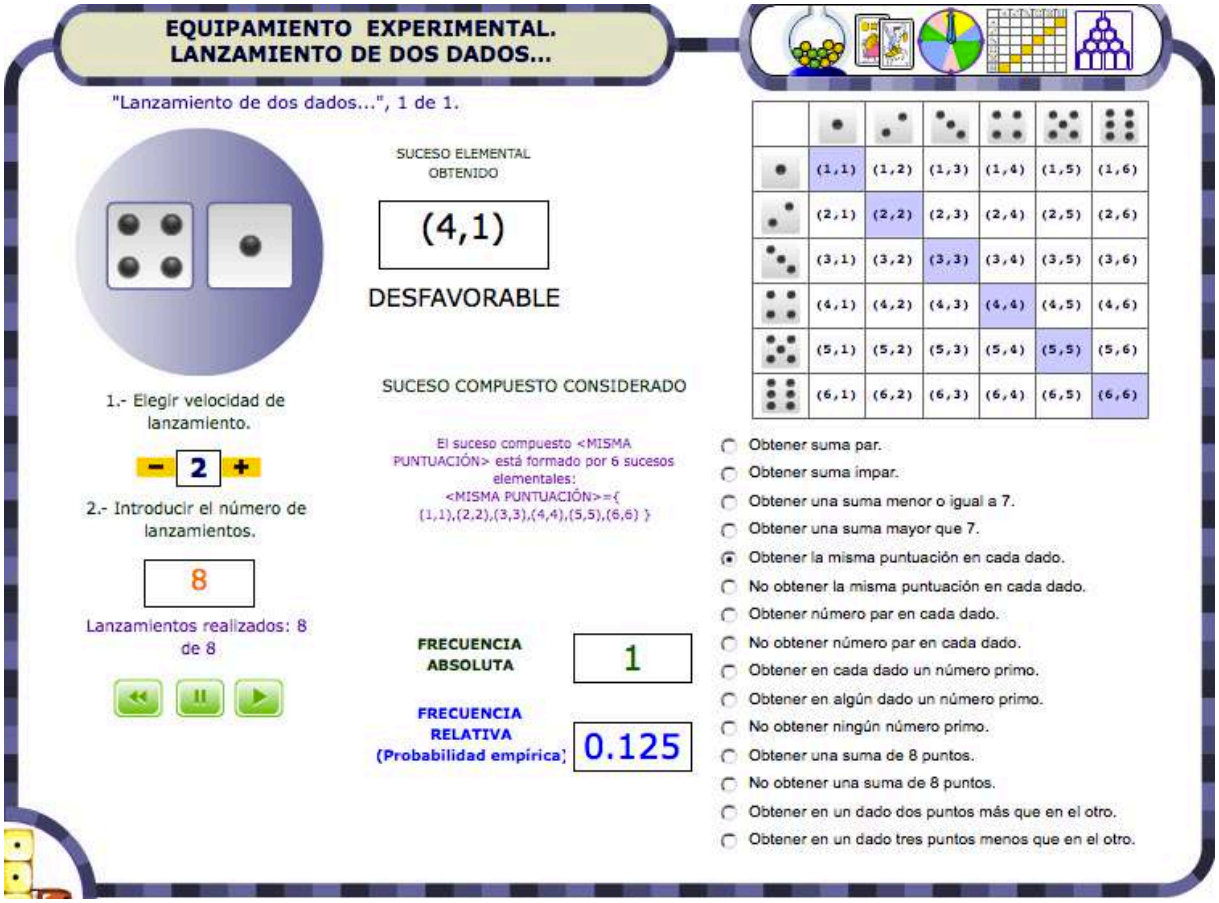



Figura 7.157 Aplicación sobre Equipamiento Experimental. Lanzando dos dados

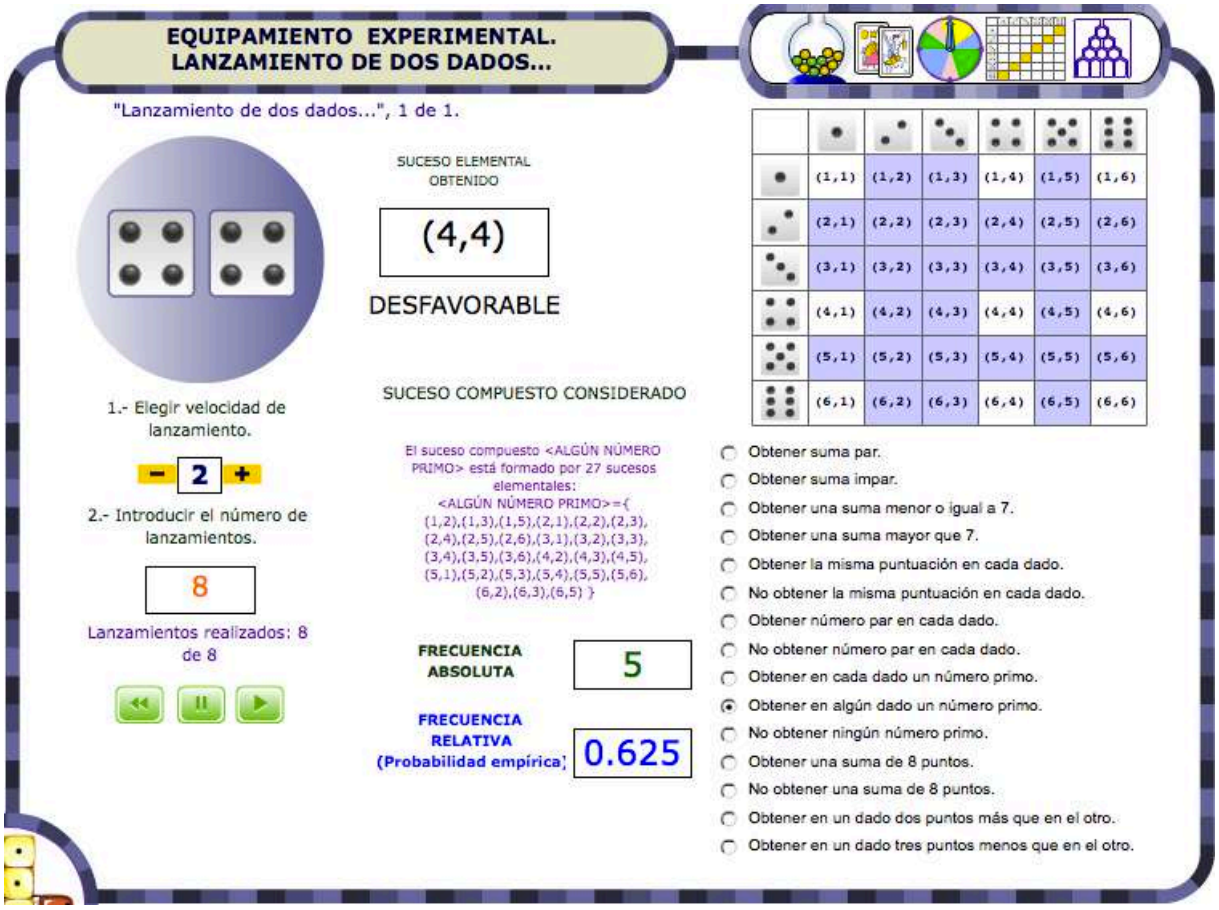



Figura 7.158 Aplicación sobre Equipamiento Experimental. Lanzando dos dados

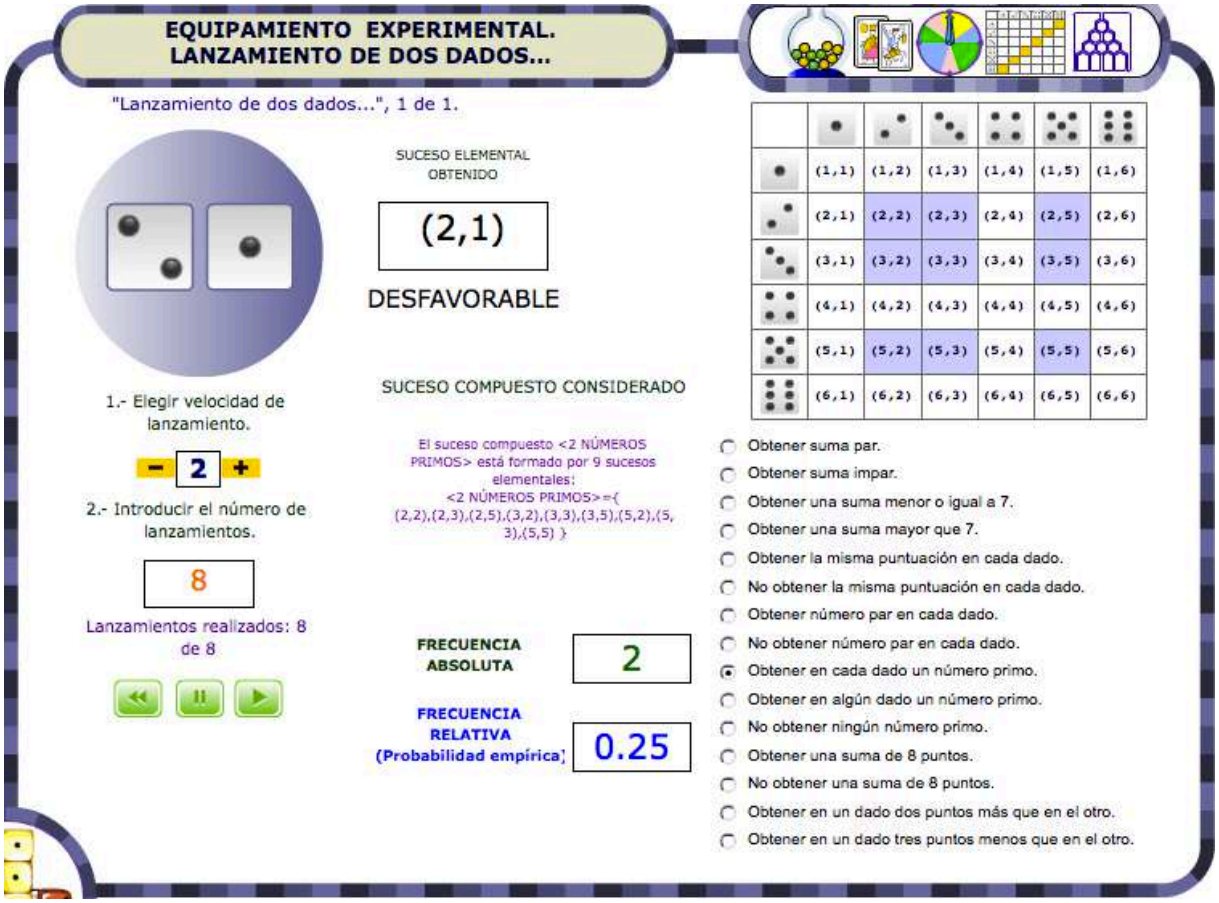



Figura 7.159 Aplicación sobre Equipamiento Experimental. Lanzando dos dados

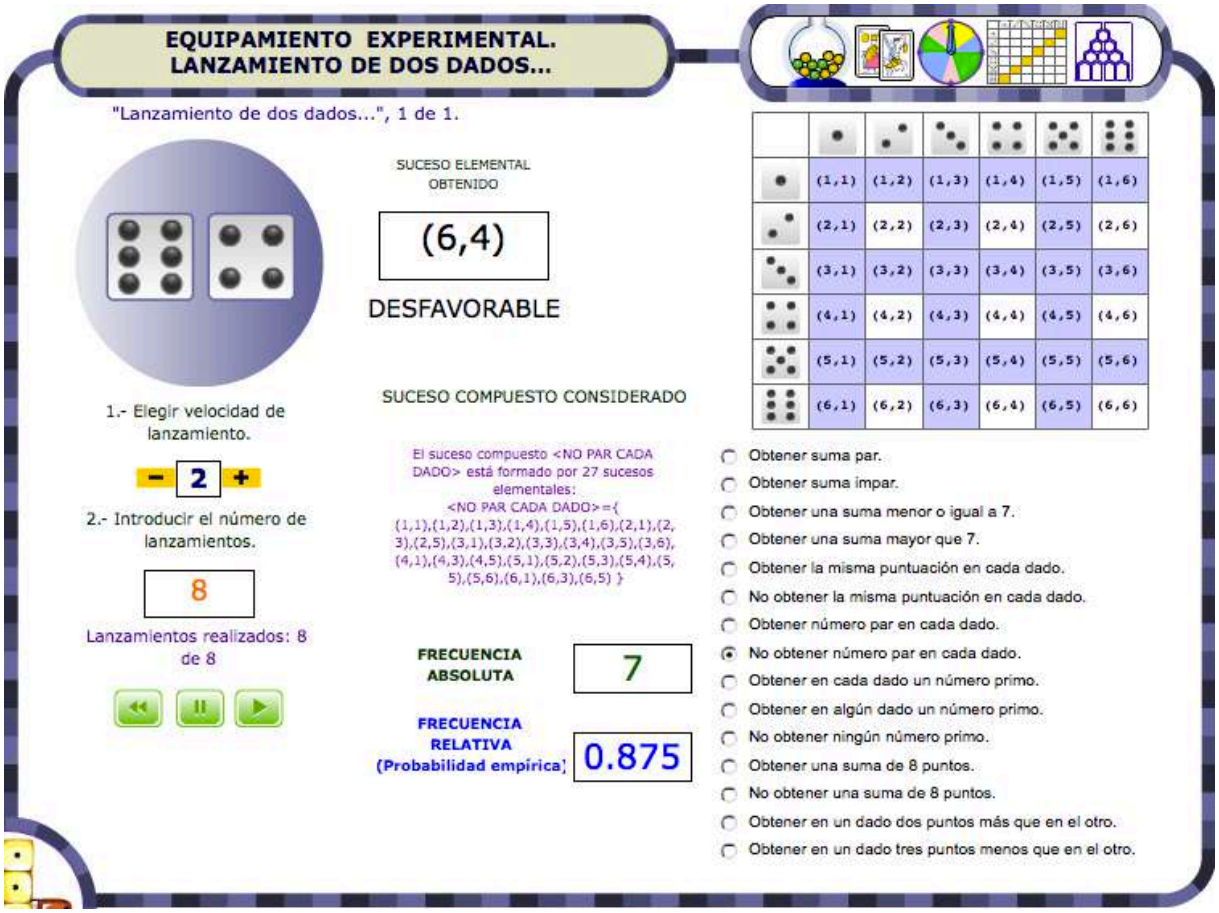



Figura 7.160 Aplicación sobre Equipamiento Experimental. Lanzando dos dados

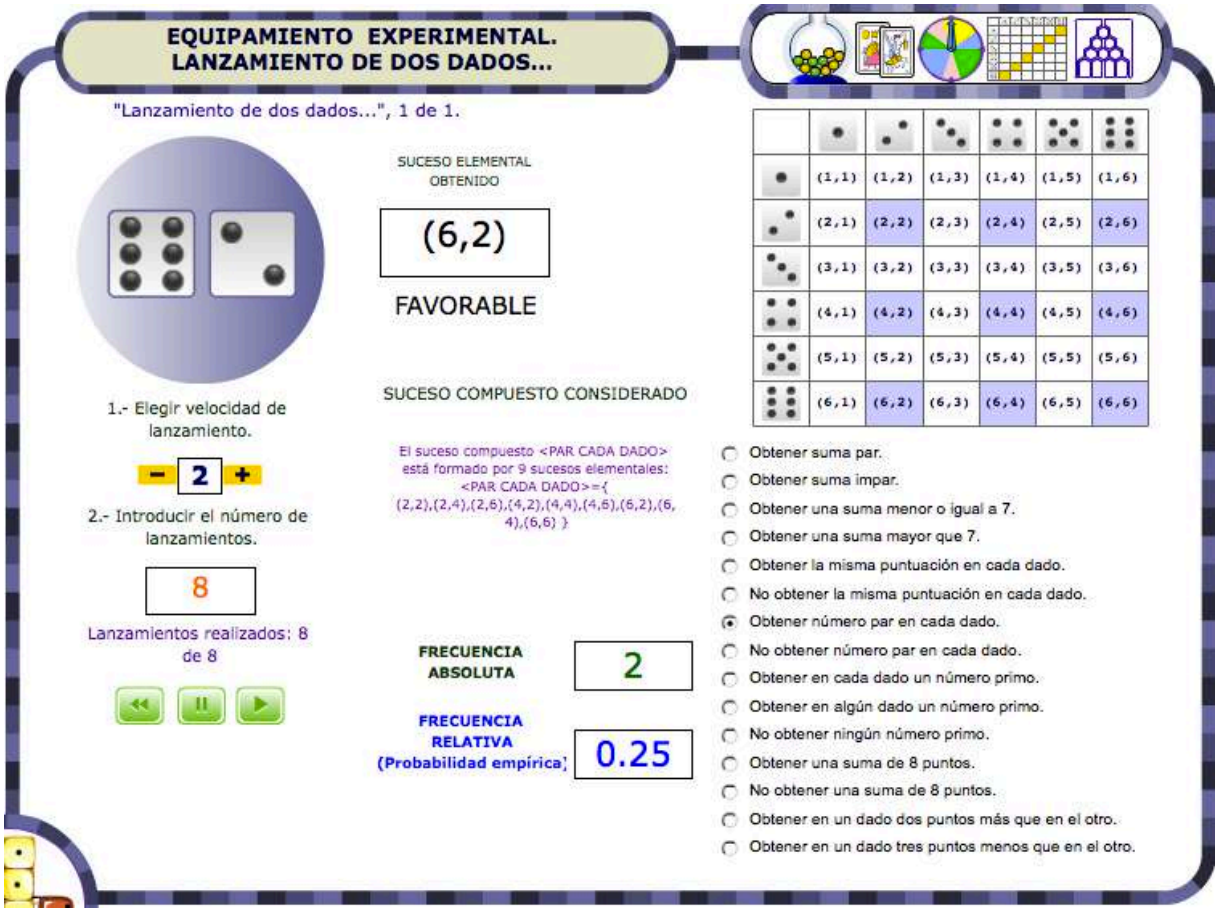



Figura 7.161 Aplicación sobre Equipamiento Experimental. Lanzando dos dados

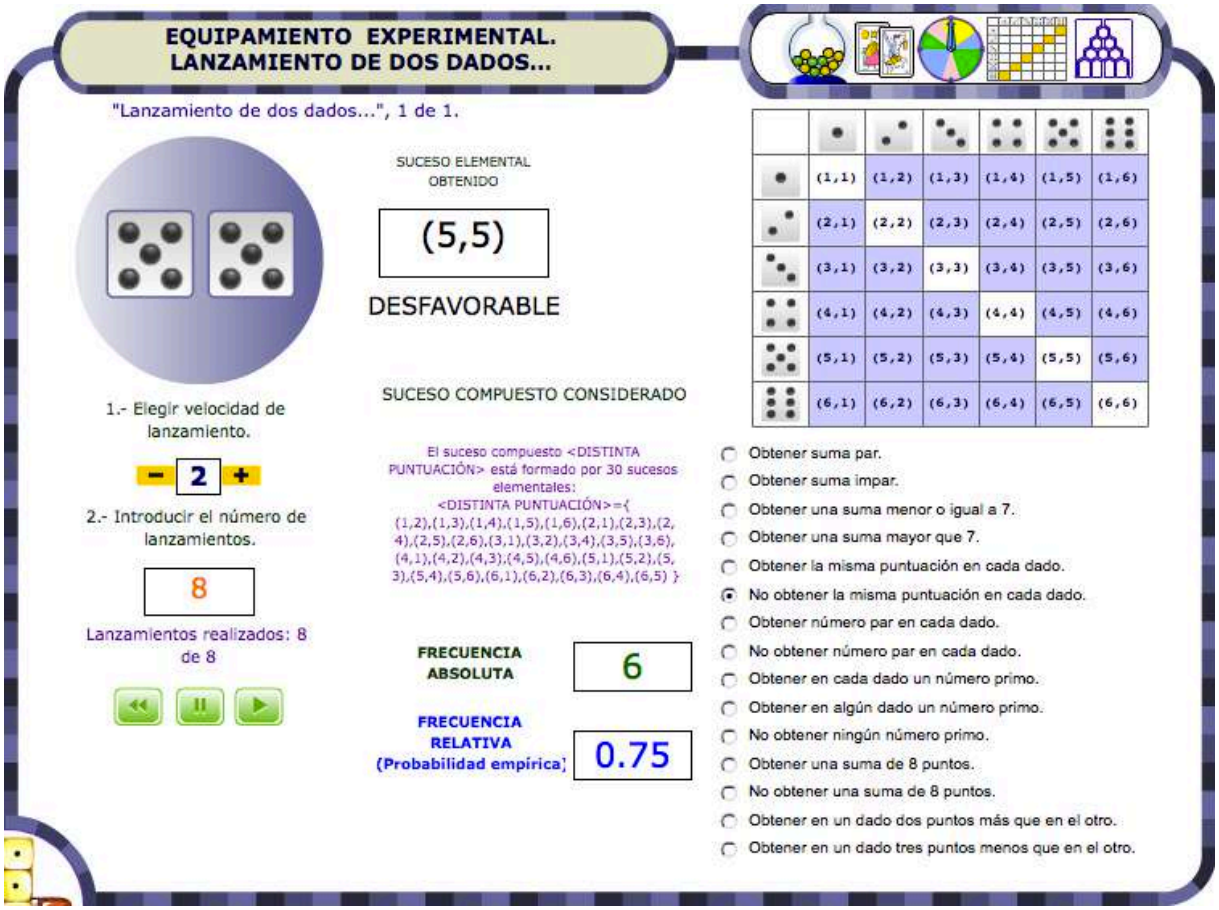



Figura 7.162 Aplicación sobre Equipamiento Experimental. Lanzando dos dados

## APLICACIÓN. LANZANDO N DADOS

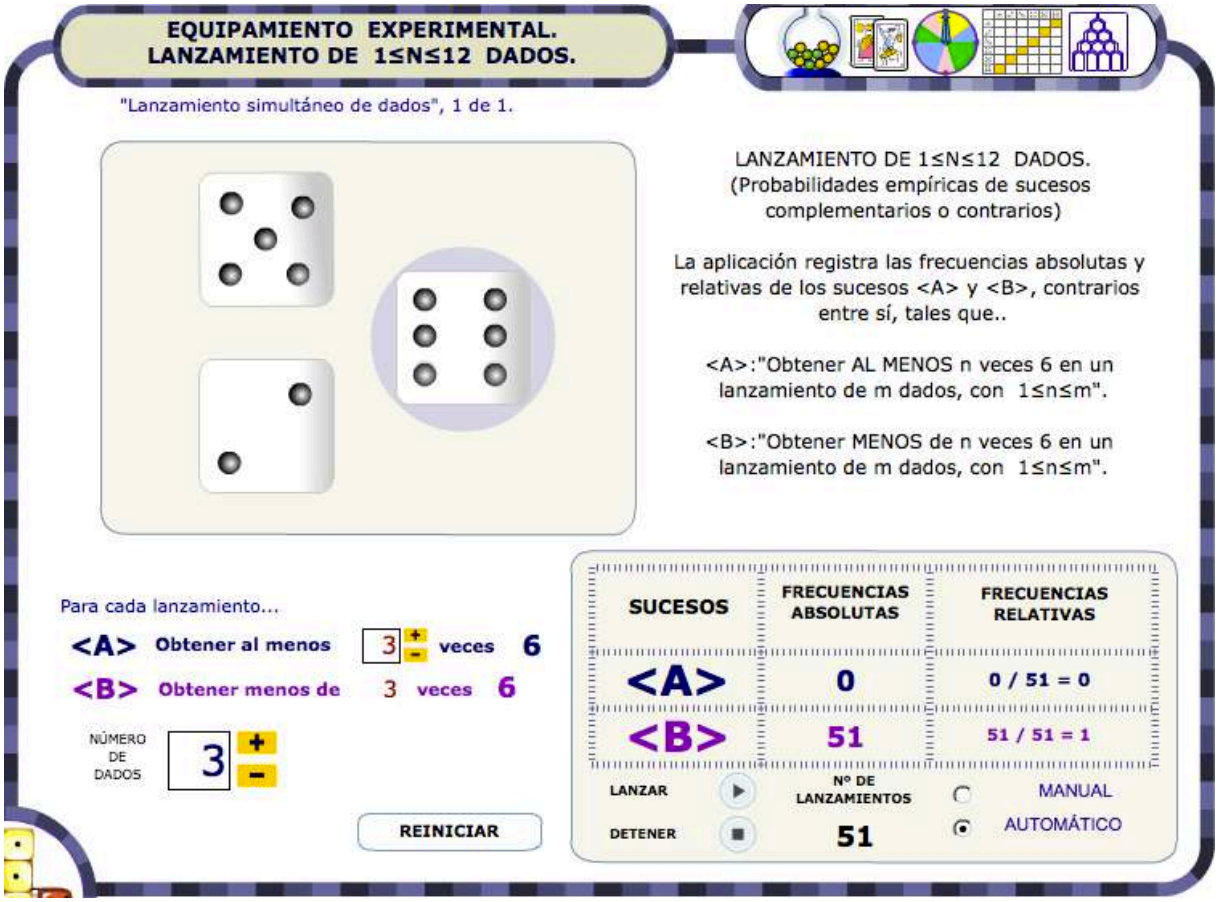



Figura 7.163 Aplicación sobre Equipamiento Experimental. Lanzando n dados

## APLICACIÓN. LANZAMIENTOS RÁPIDOS DE UNA MONEDA

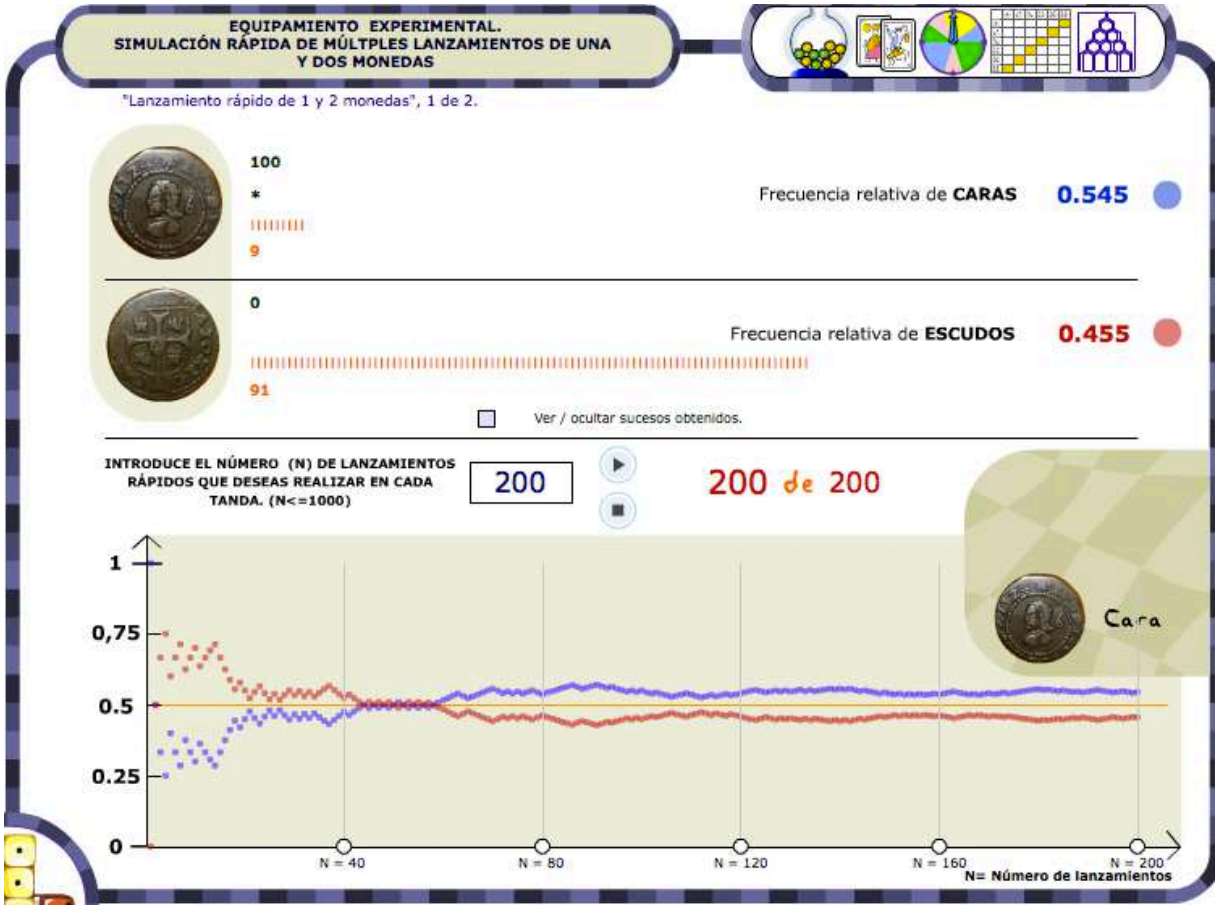



Figura 7.164 Aplicación sobre Equipamiento Experimental. Lanzamientos rápidos de una moneda




Figura 7.165 Aplicación sobre Equipamiento Experimental. Lanzamientos rápidos de una moneda

## APLICACIÓN. LANZANDO MONEDAS




Figura 7.166 Aplicación sobre Equipamiento Experimental. Lanzando monedas




Figura 7.167 Aplicación sobre Equipamiento Experimental. Lanzando monedas

## APLICACIÓN. RULETA MÚLTIPLE

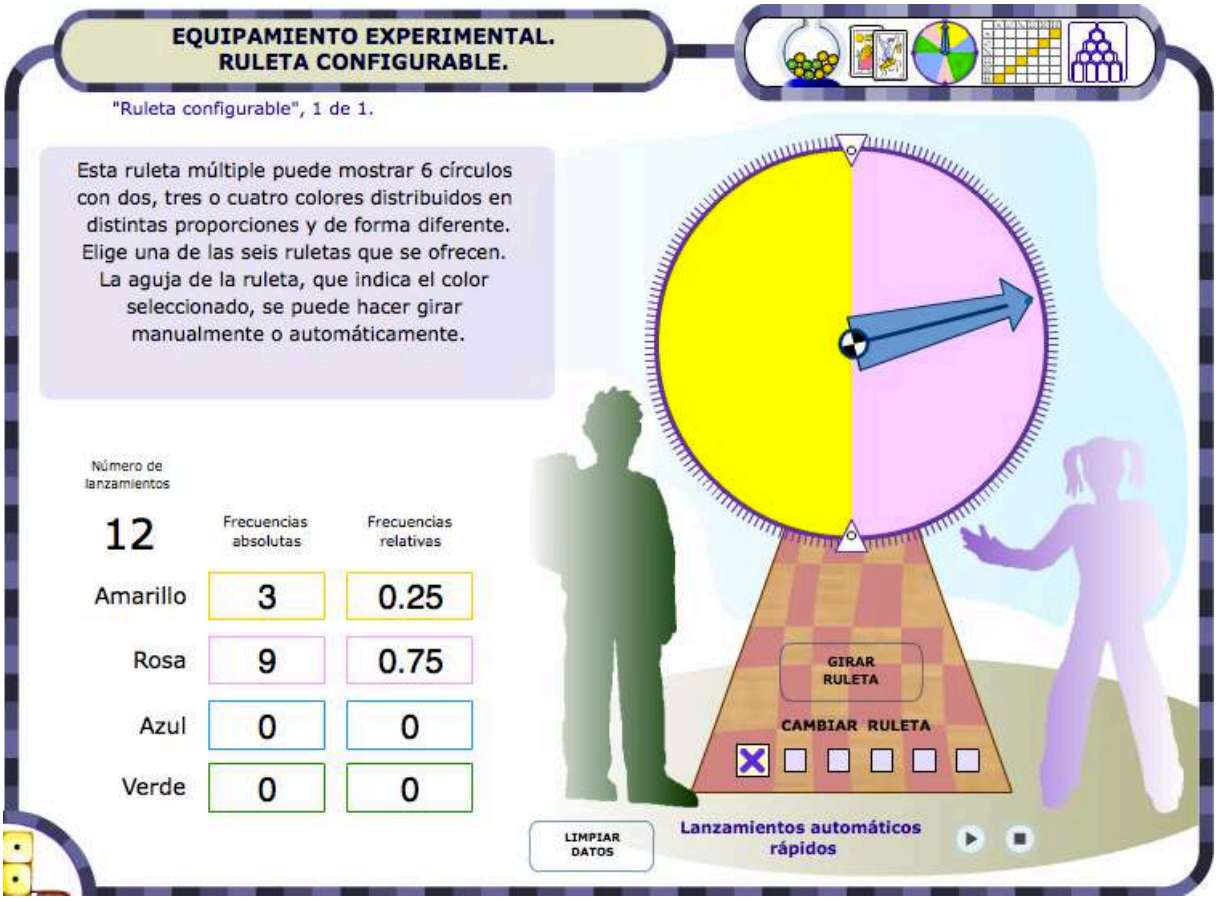



Figura 7.168 Aplicación sobre Equipamiento Experimental. Ruleta múltiple

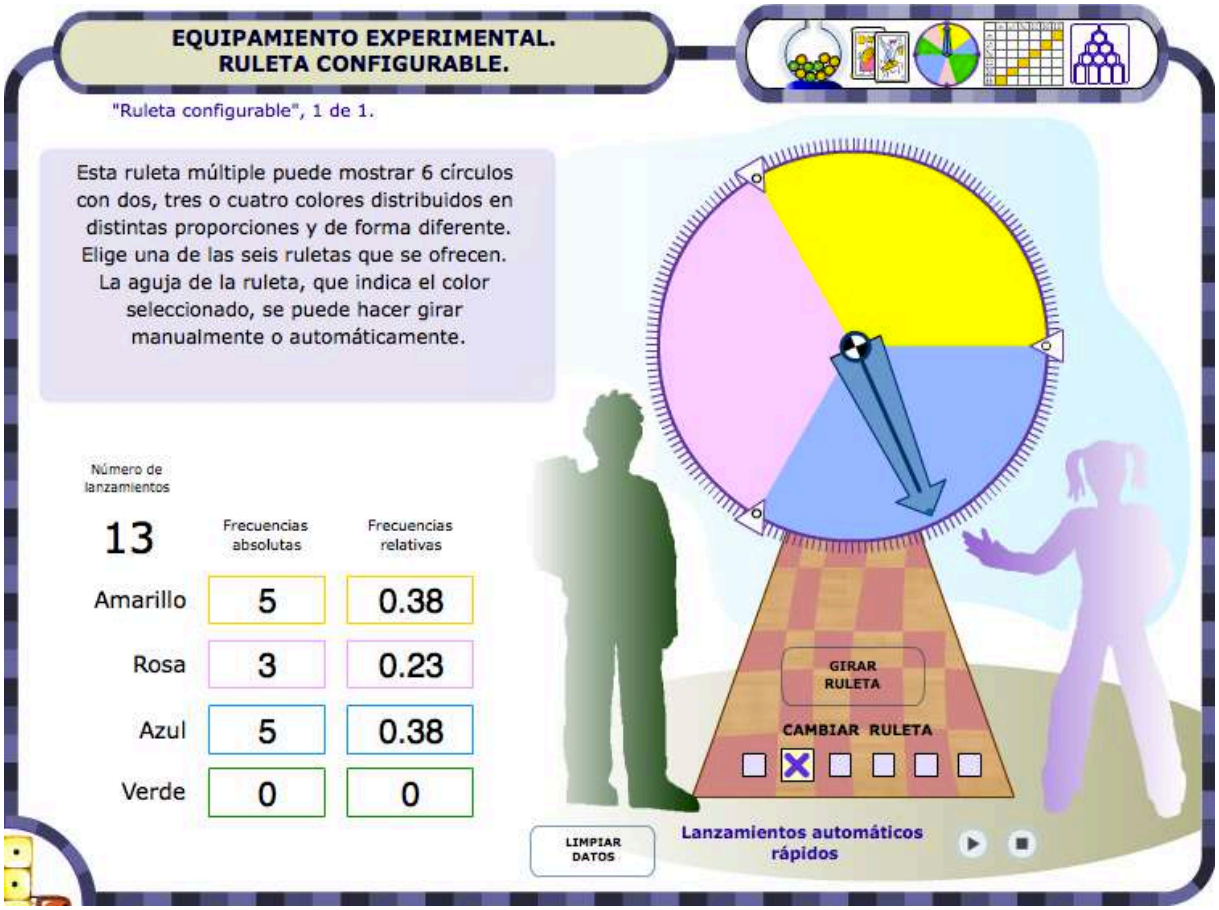



Figura 7.169 Aplicación sobre Equipamiento Experimental. Ruleta múltiple

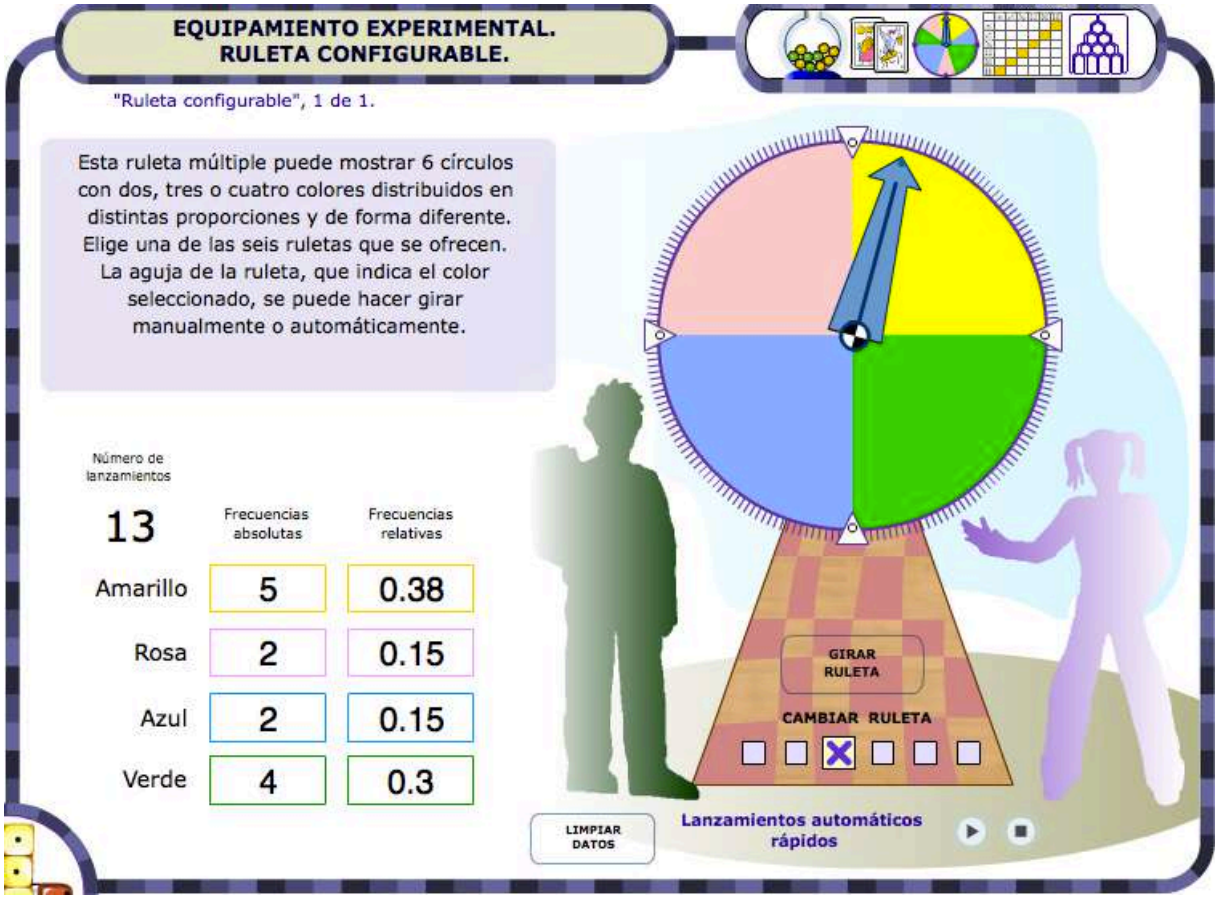



Figura 7.170 Aplicación sobre Equipamiento Experimental. Ruleta múltiple

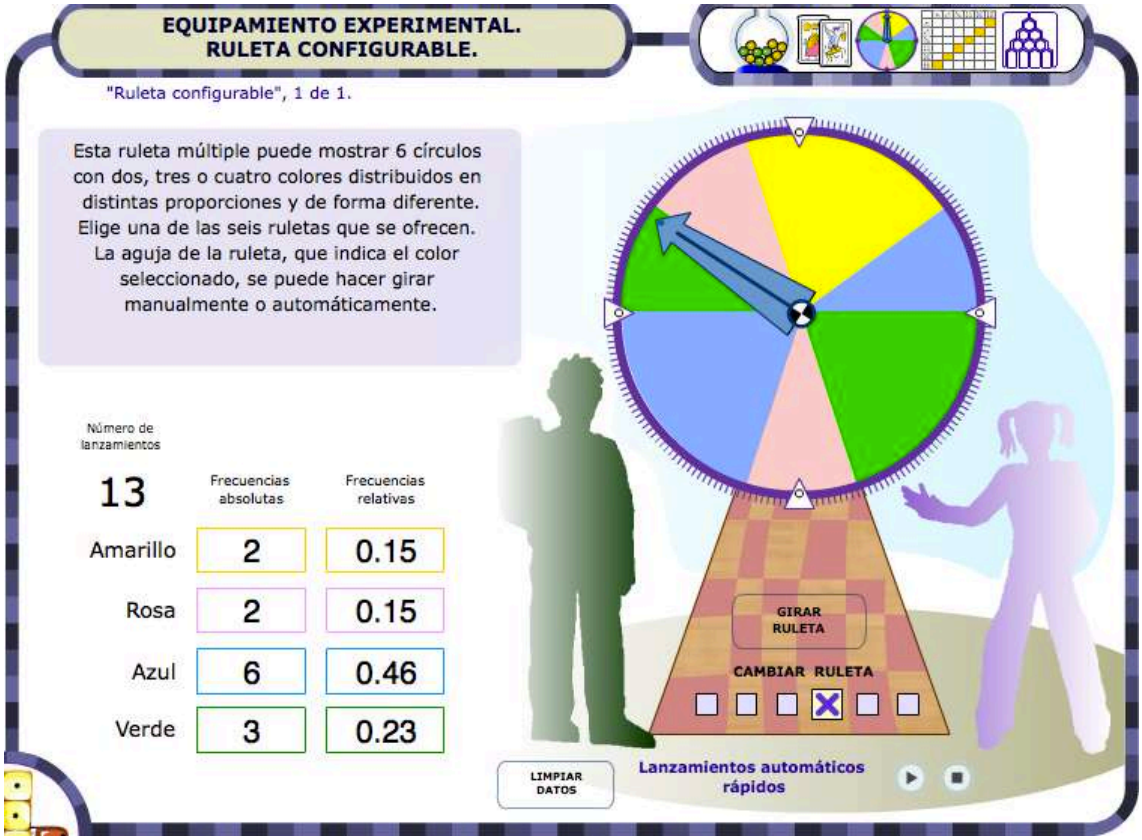



Figura 7.171 Aplicación sobre Equipamiento Experimental. Ruleta múltiple

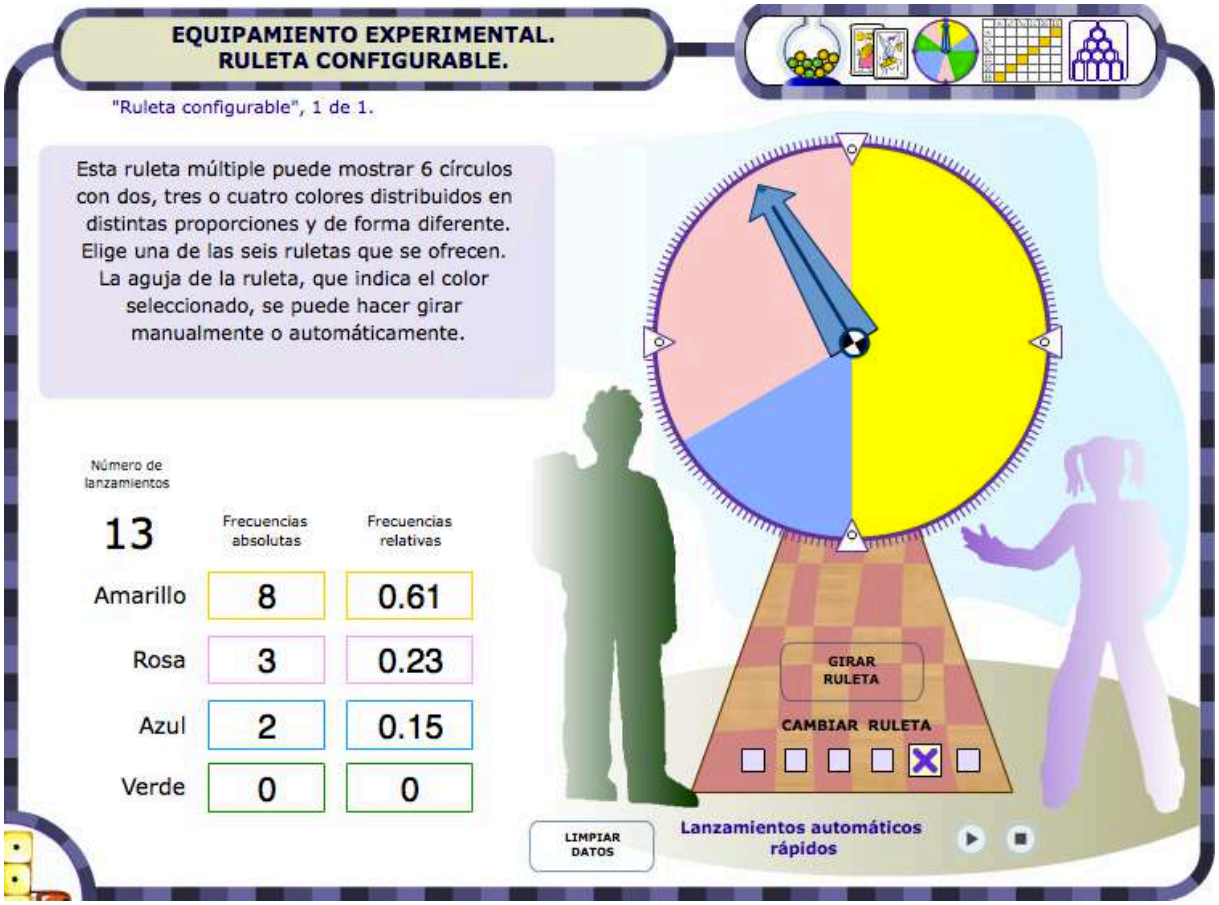



Figura 7.172 Aplicación sobre Equipamiento Experimental. Ruleta múltiple

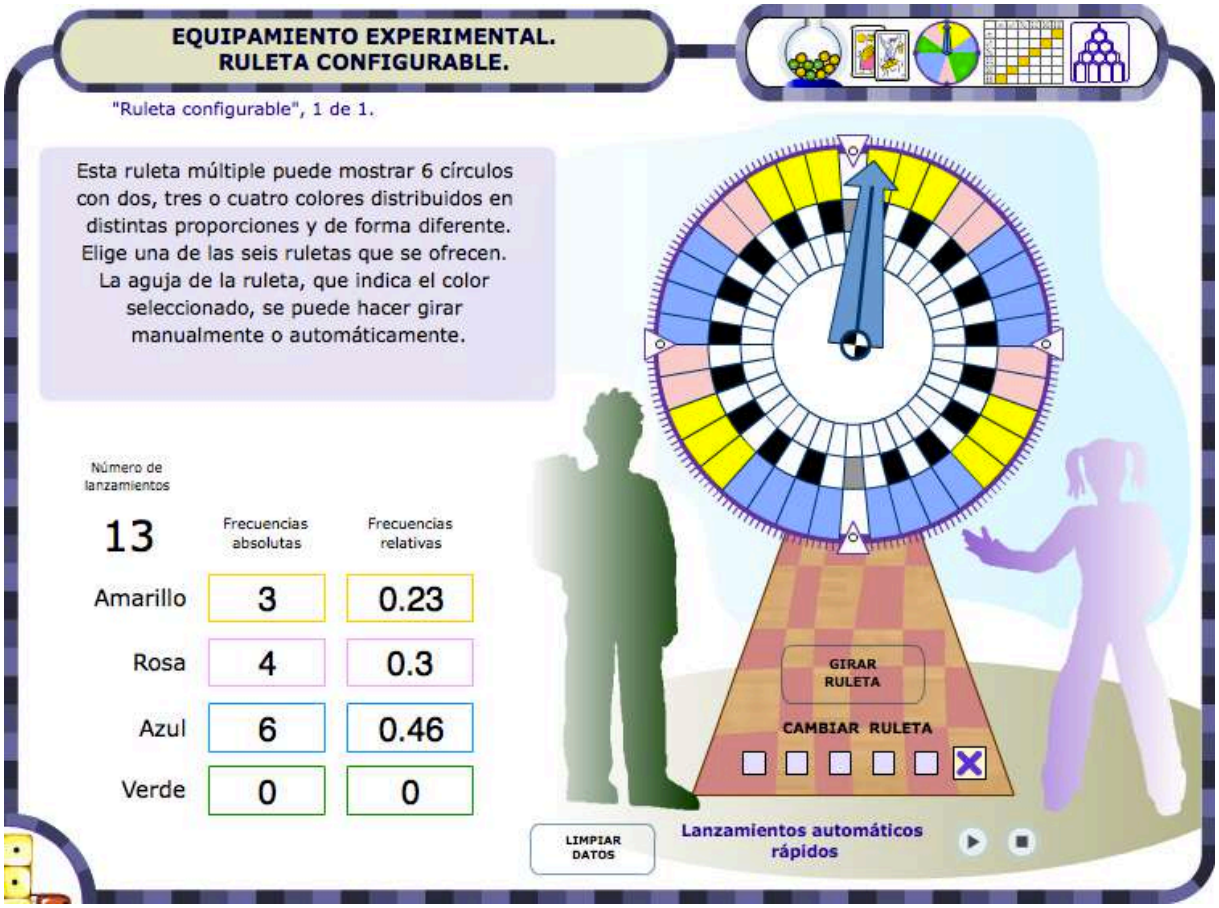



Figura 7.173 Aplicación sobre Equipamiento Experimental. Ruleta múltiple

## APLICACIÓN. CONTACTOS ENTRE BOLAS

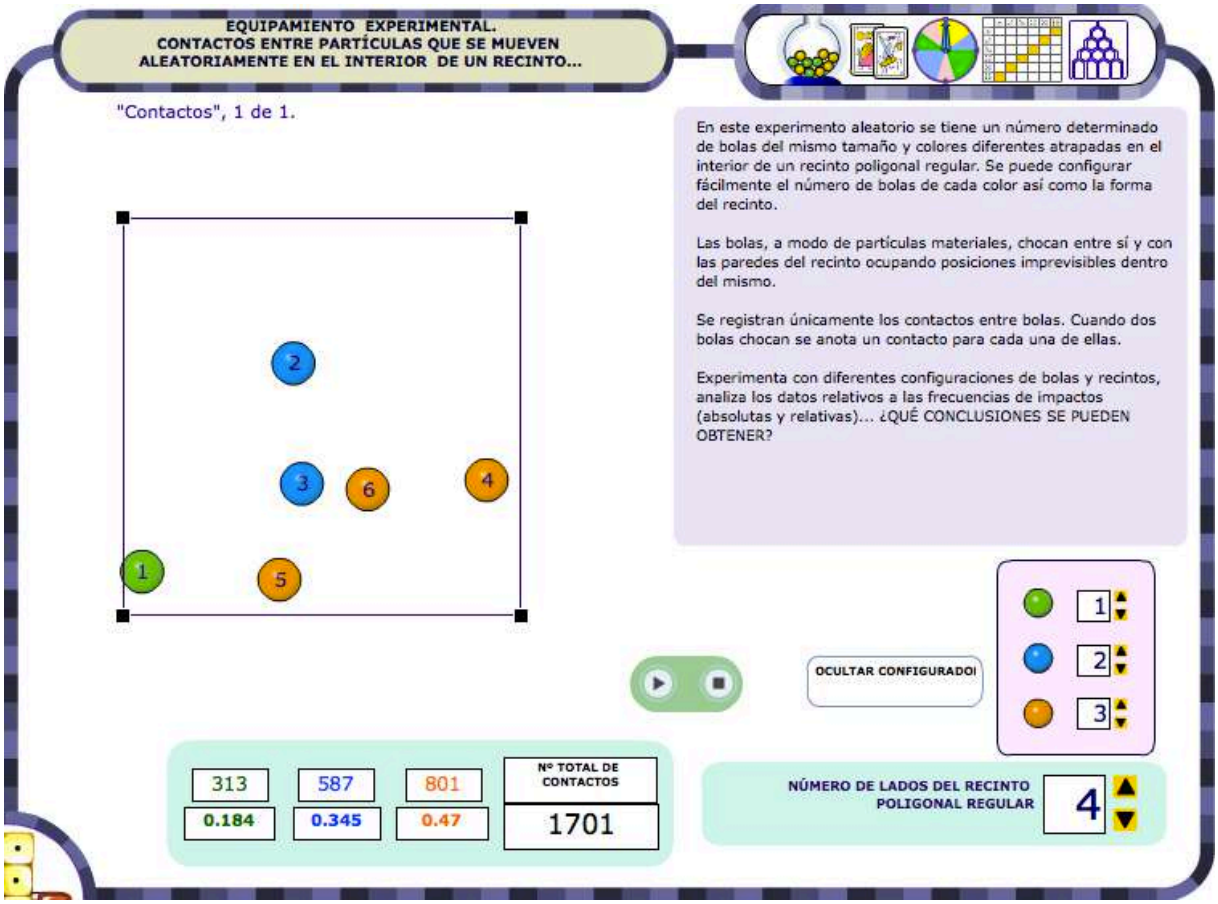



Figura 7.174 Aplicación sobre Equipamiento Experimental. Contactos entre bolas

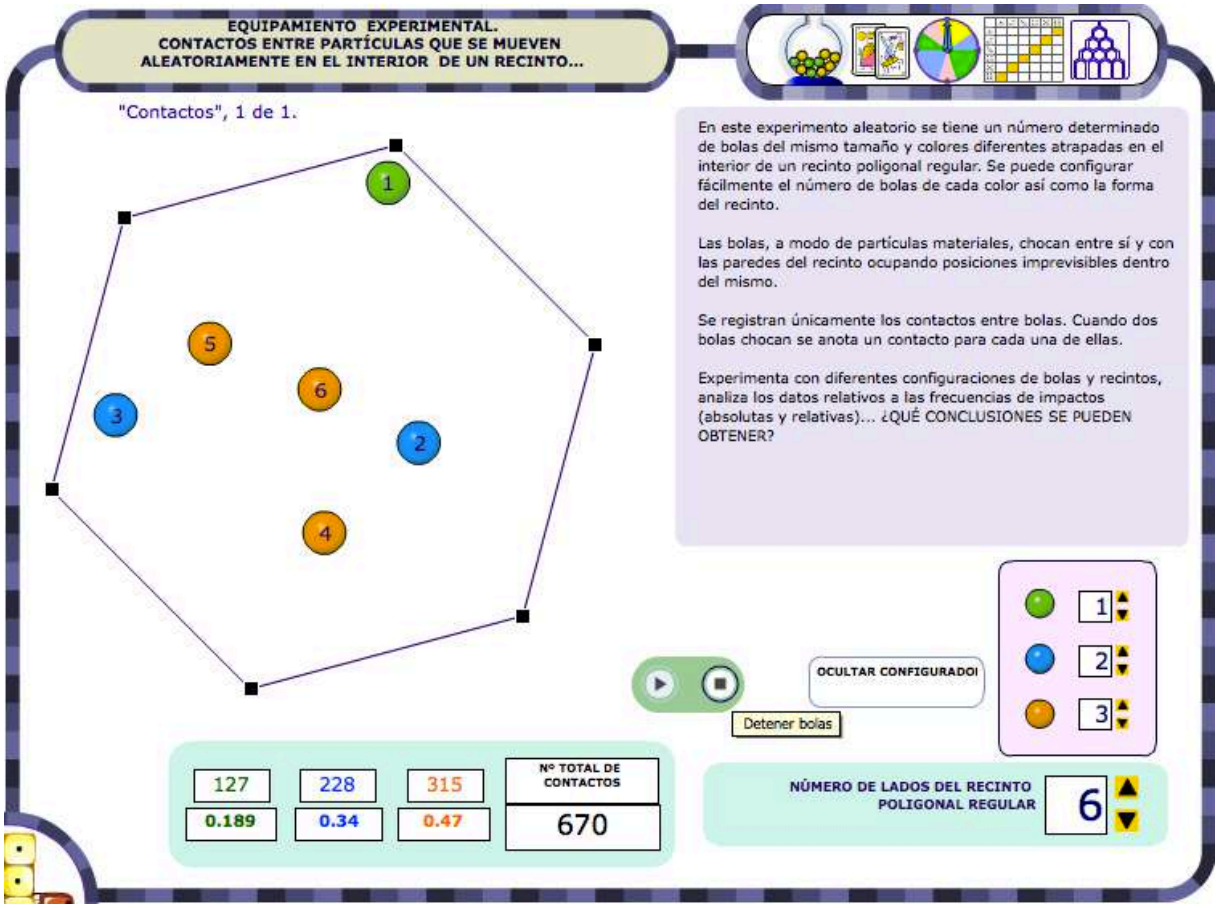



Figura 7.175 Aplicación sobre Equipamiento Experimental. Contactos entre bolas

## APLICACIÓN. EXTRAER DOS BOLAS CON REPOSICIÓN

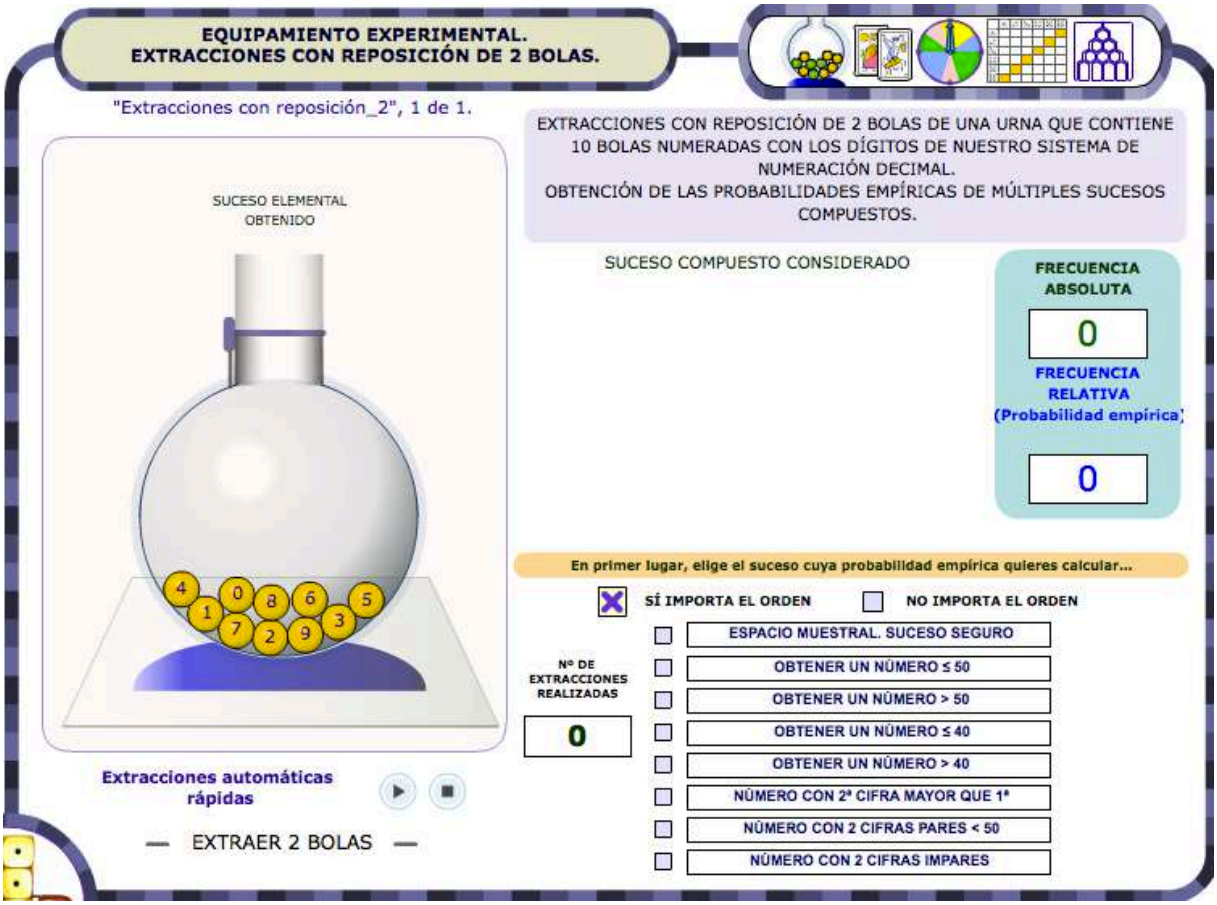



Figura 7.176 Aplicación sobre Equipamiento Experimental. Extraer dos bolas con reposición

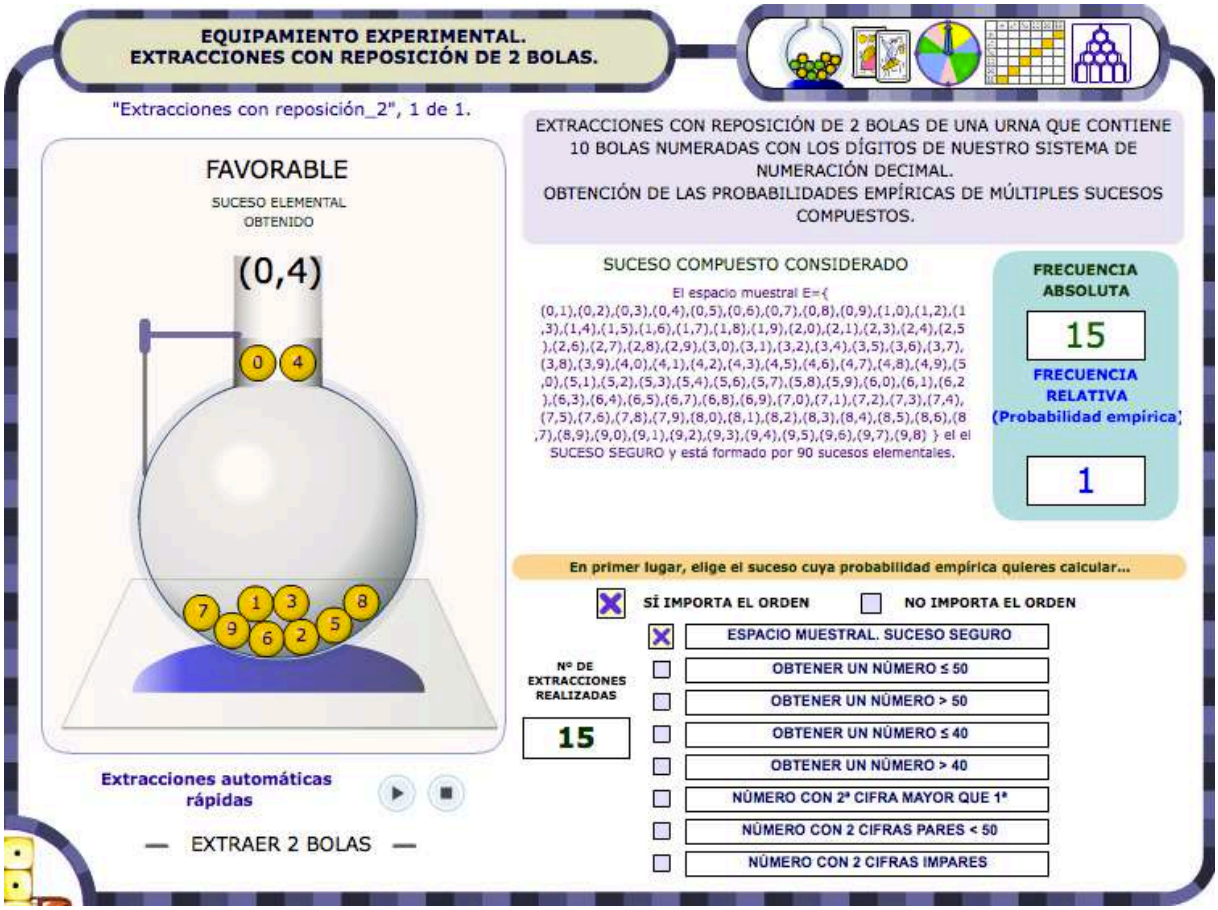



Figura 7.177 Aplicación sobre Equipamiento Experimental. Extraer dos bolas con reposición

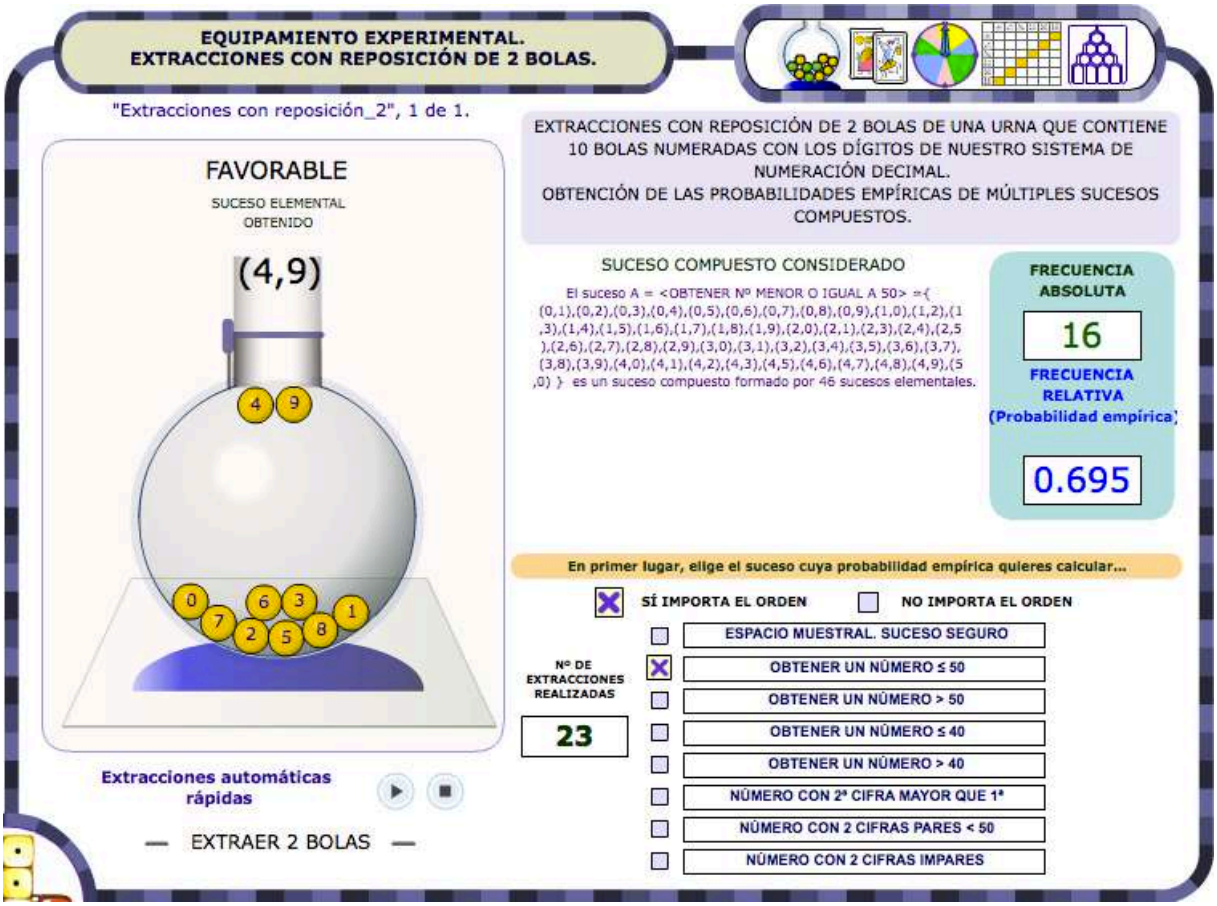



Figura 7.178 Aplicación sobre Equipamiento Experimental. Extraer dos bolas con reposición

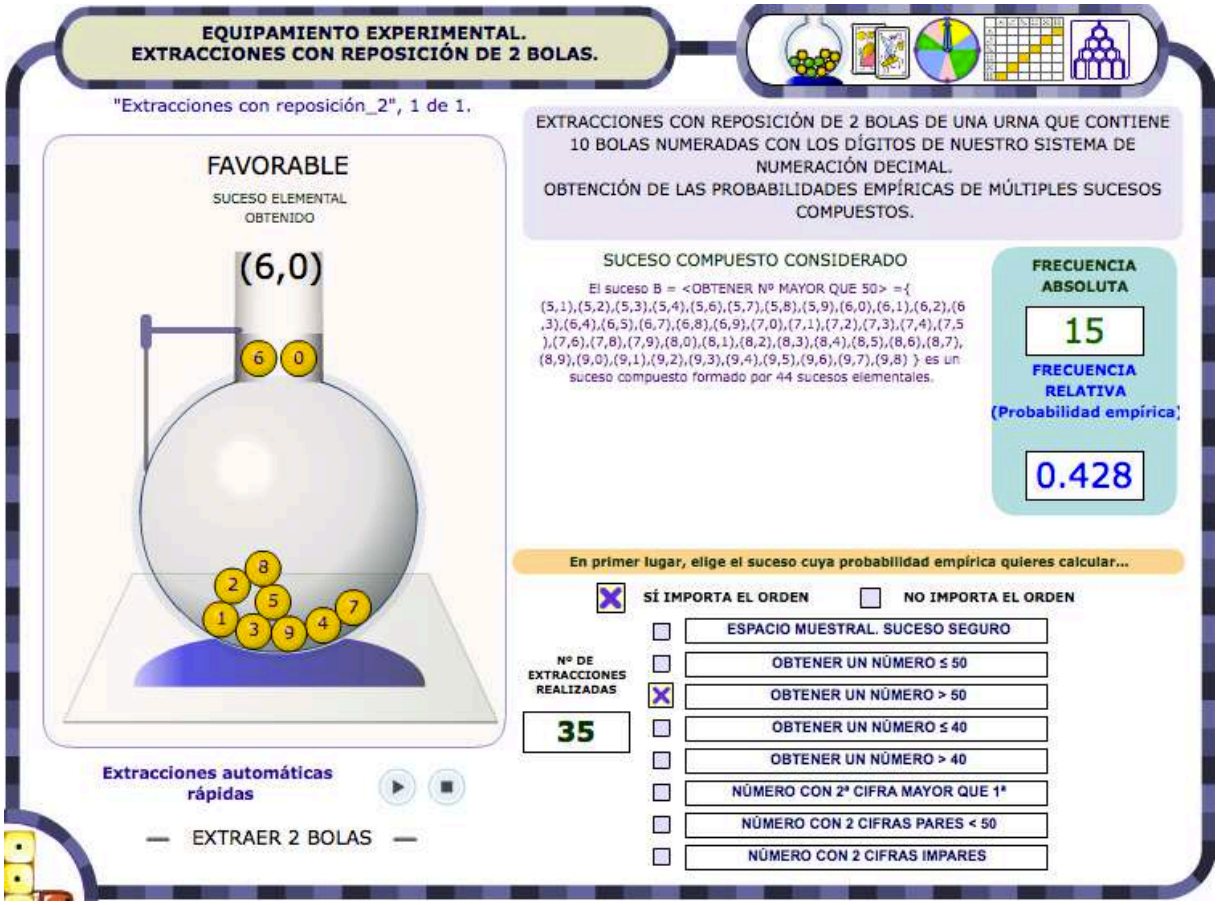



Figura 7.179 Aplicación sobre Equipamiento Experimental. Extraer dos bolas con reposición

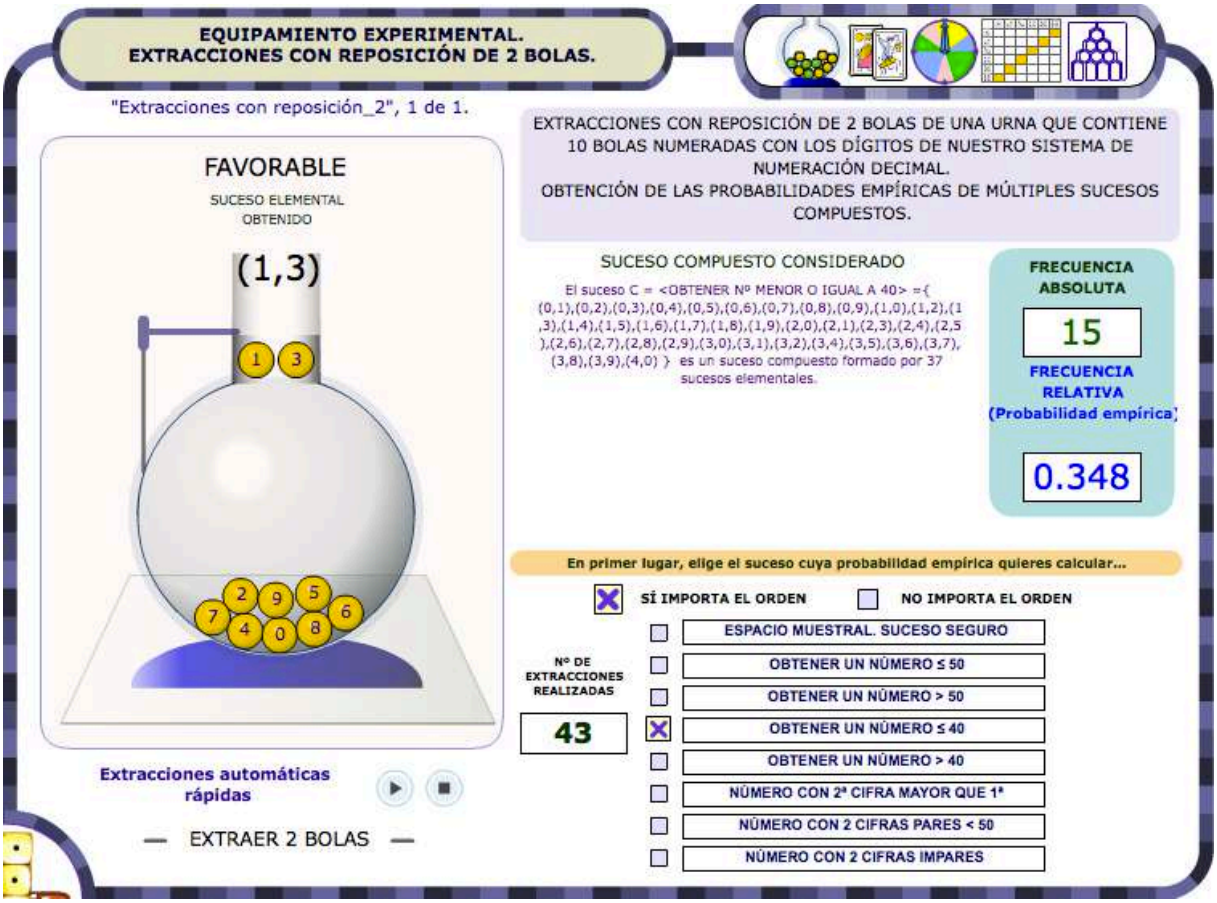



Figura 7.180 Aplicación sobre Equipamiento Experimental. Extraer dos bolas con reposición

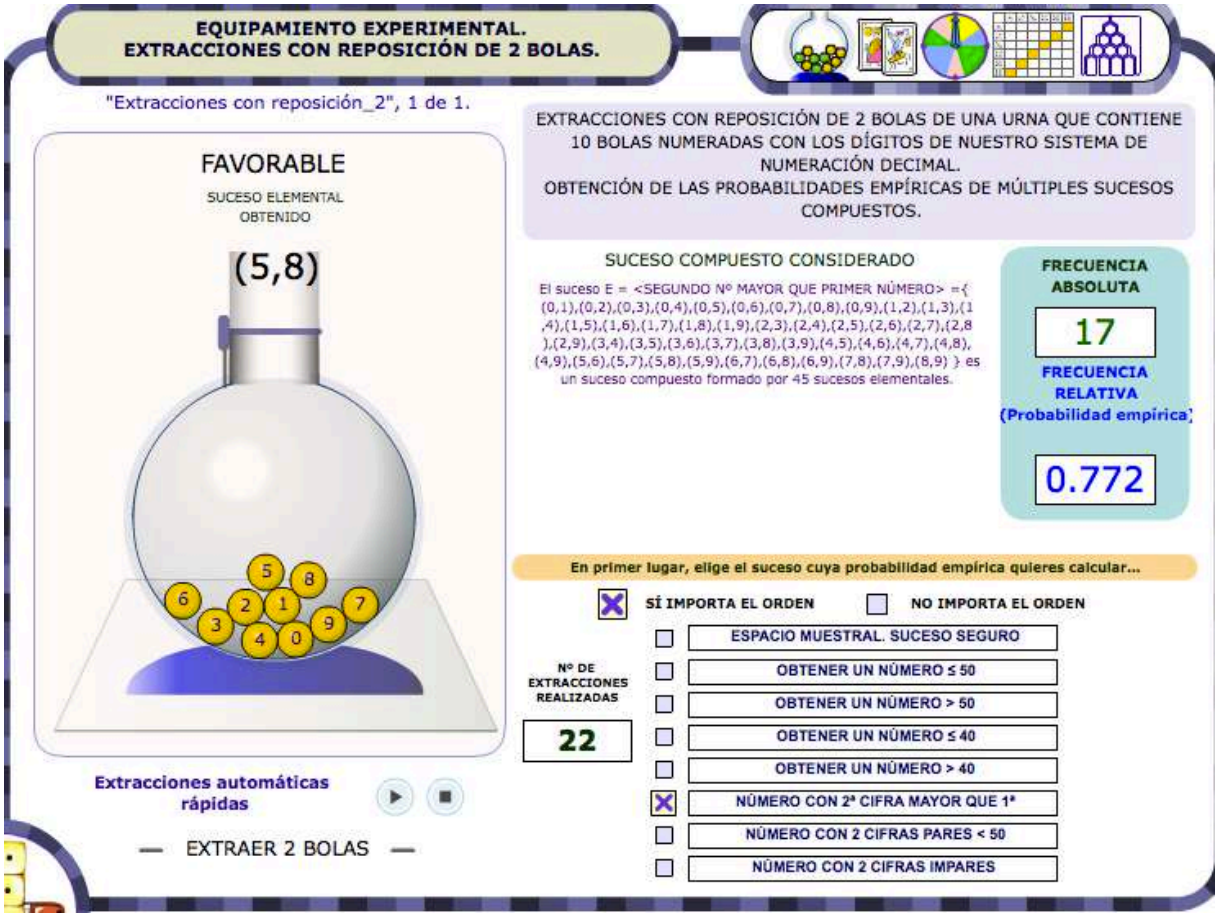



Figura 7.181 Aplicación sobre Equipamiento Experimental. Extraer dos bolas con reposición

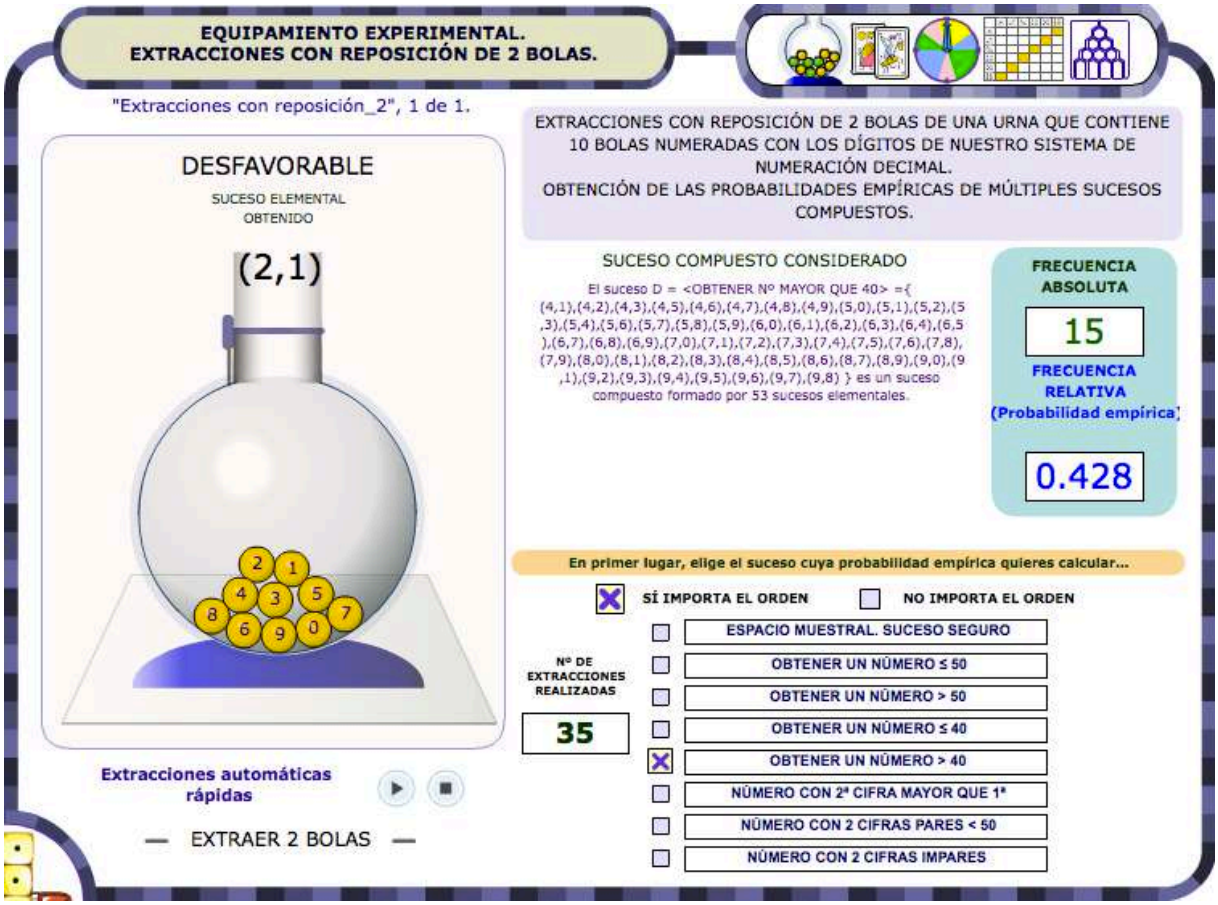



Figura 7.182 Aplicación sobre Equipamiento Experimental. Extraer dos bolas con reposición

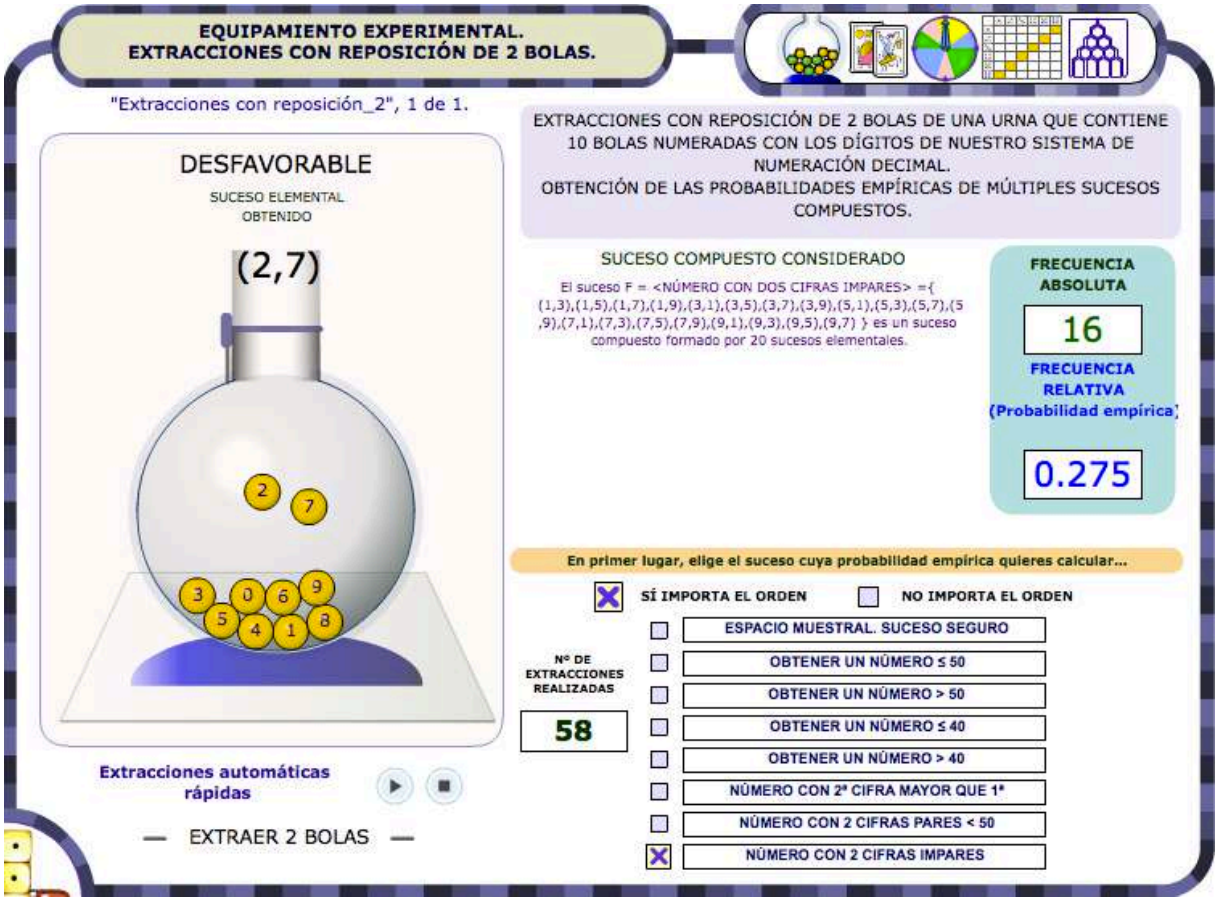



Figura 7.183 Aplicación sobre Equipamiento Experimental. Extraer dos bolas con reposición

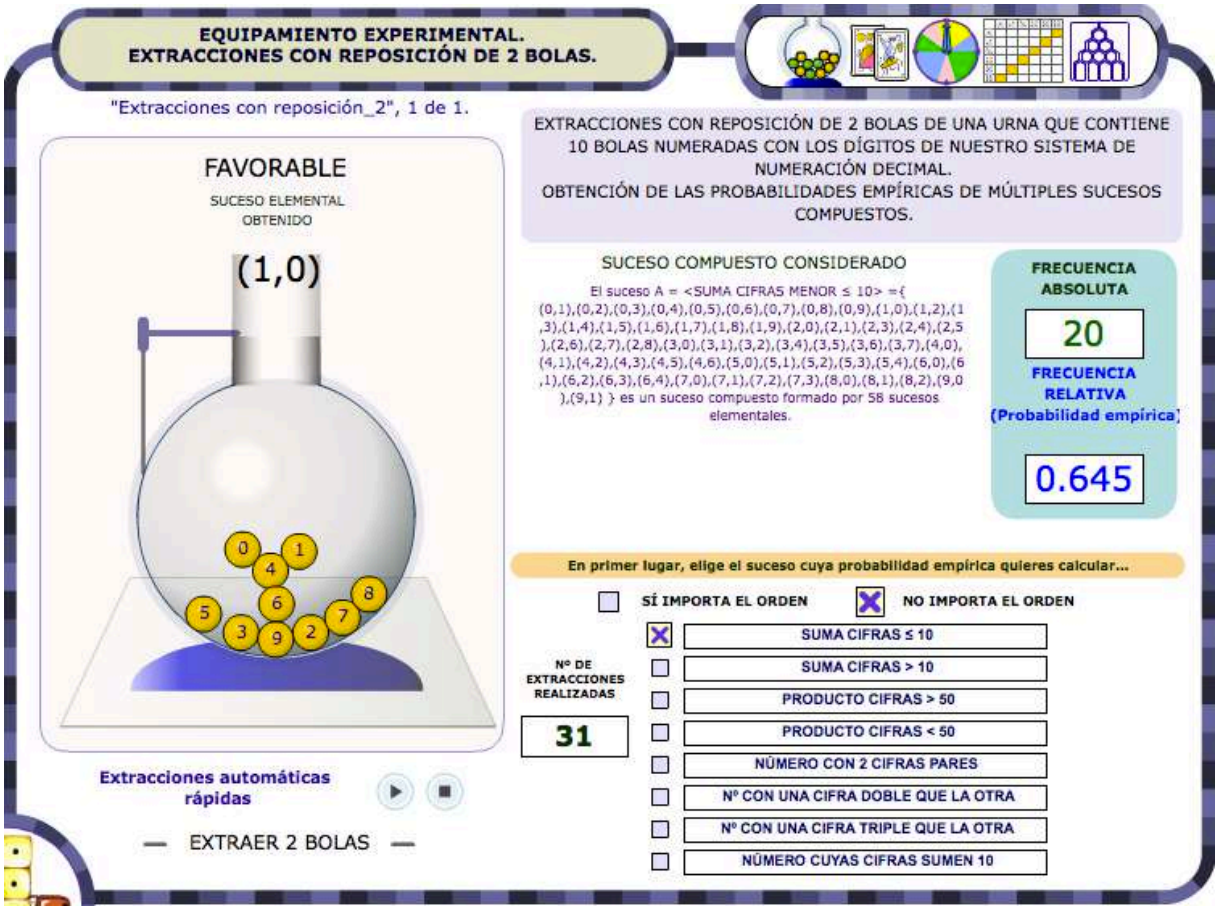



Figura 7.184 Aplicación sobre Equipamiento Experimental. Extraer dos bolas con reposición

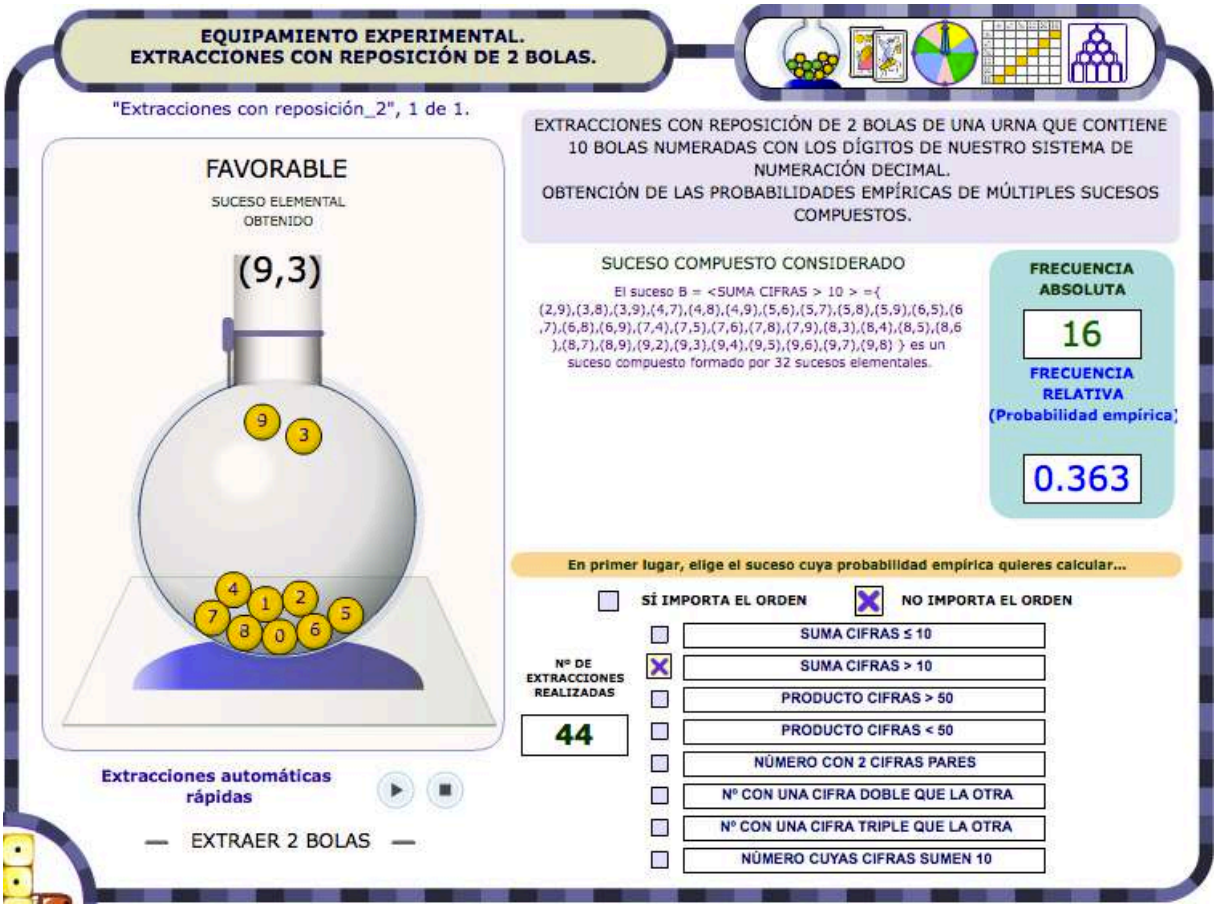



Figura 7.185 Aplicación sobre Equipamiento Experimental. Extraer dos bolas con reposición

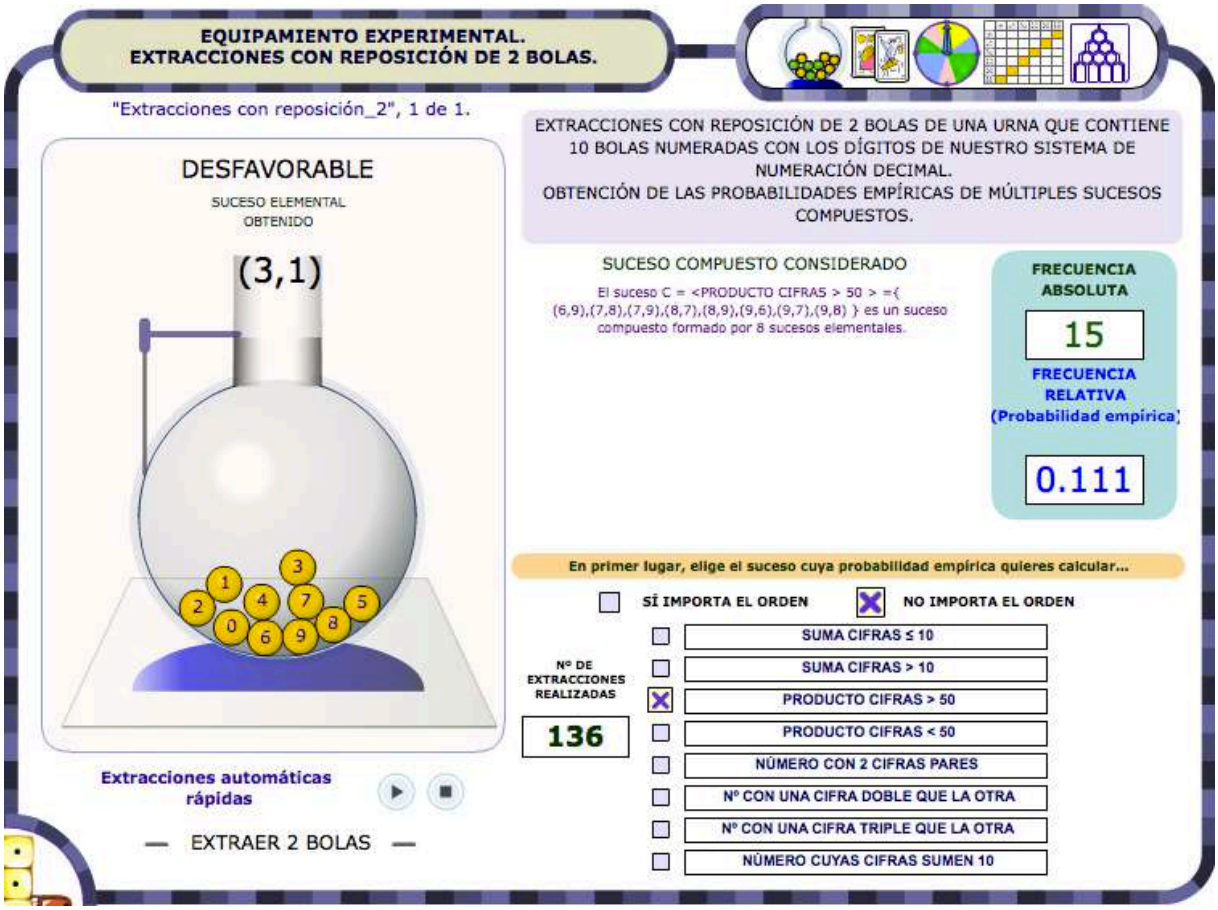



Figura 7.186 Aplicación sobre Equipamiento Experimental. Extraer dos bolas con reposición

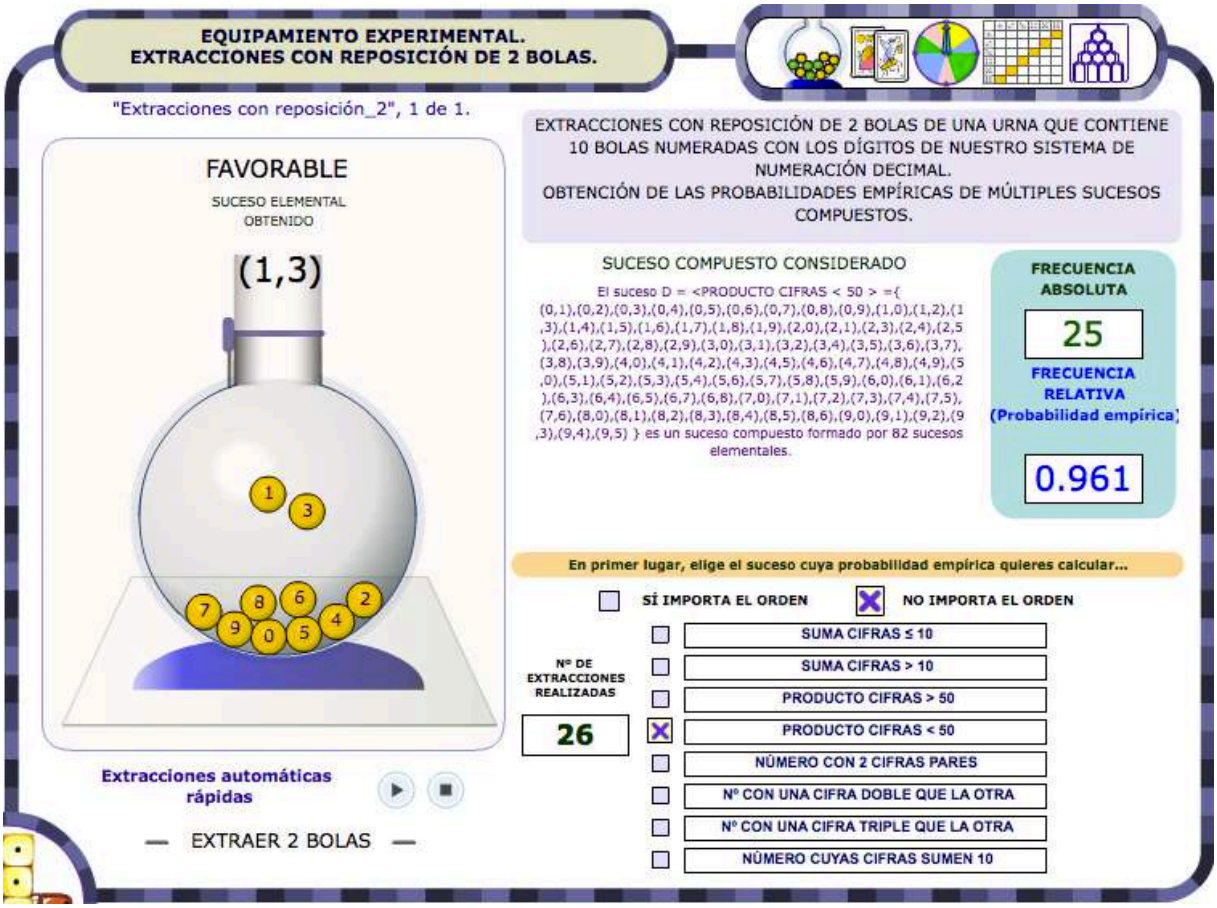



Figura 7.187 Aplicación sobre Equipamiento Experimental. Extraer dos bolas con reposición

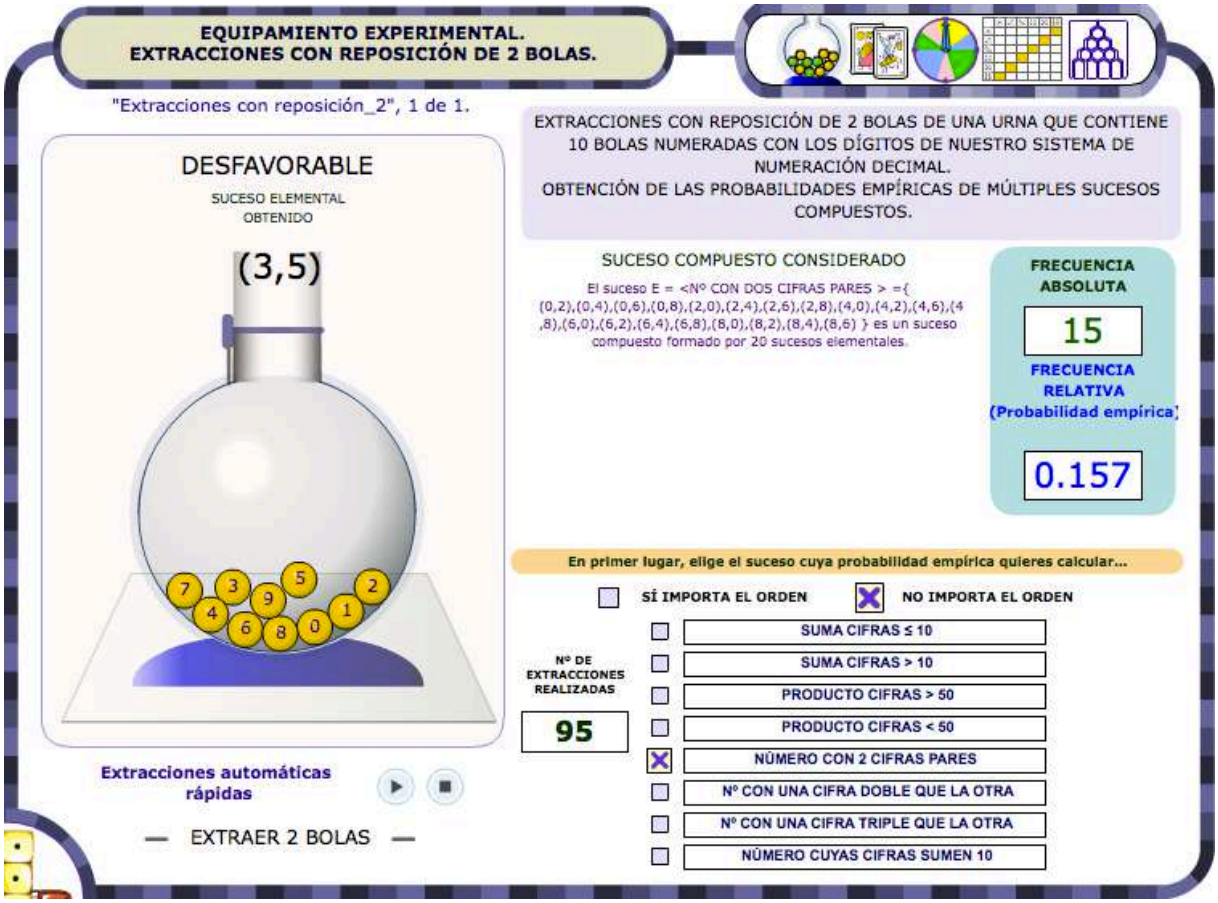



Figura 7.188 Aplicación sobre Equipamiento Experimental. Extraer dos bolas con reposición

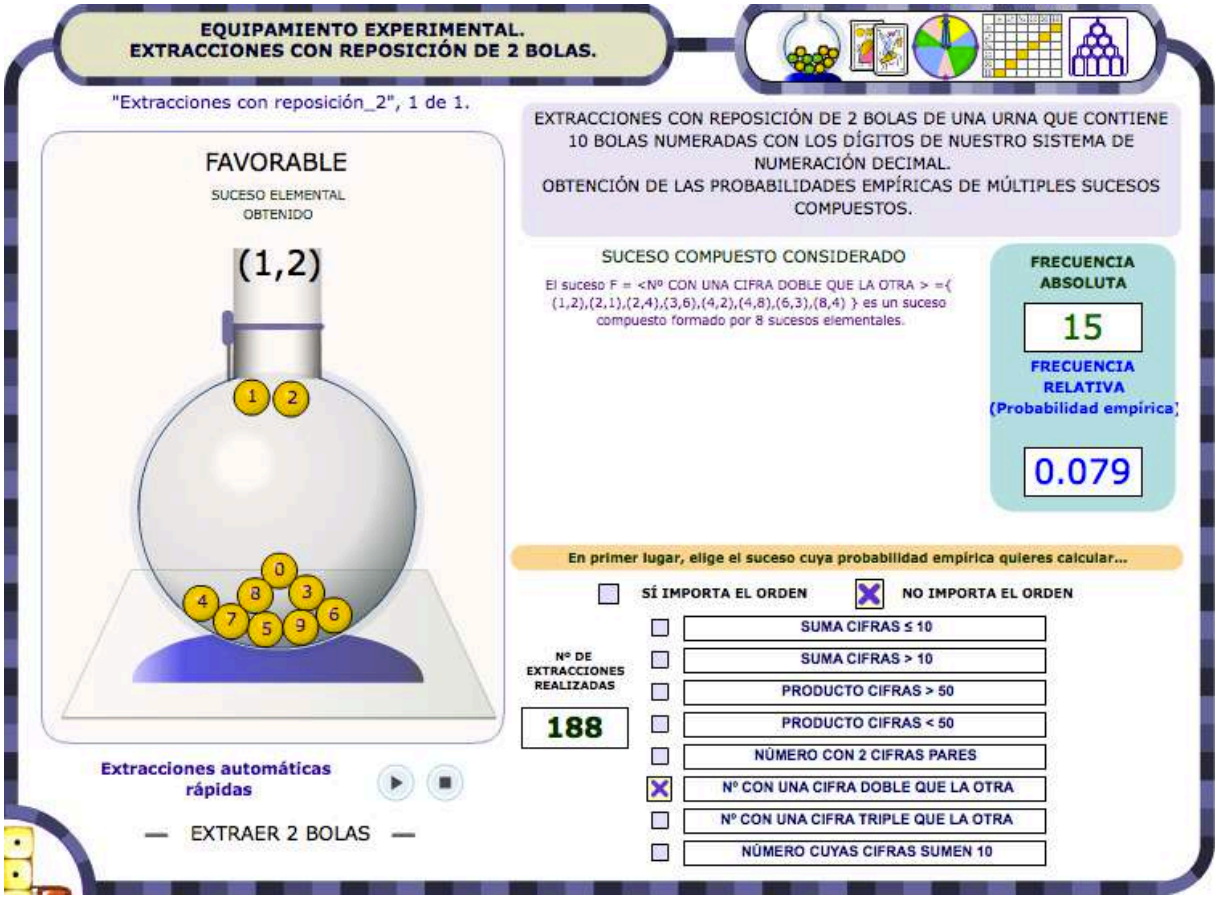



Figura 7.189 Aplicación sobre Equipamiento Experimental. Extraer dos bolas con reposición

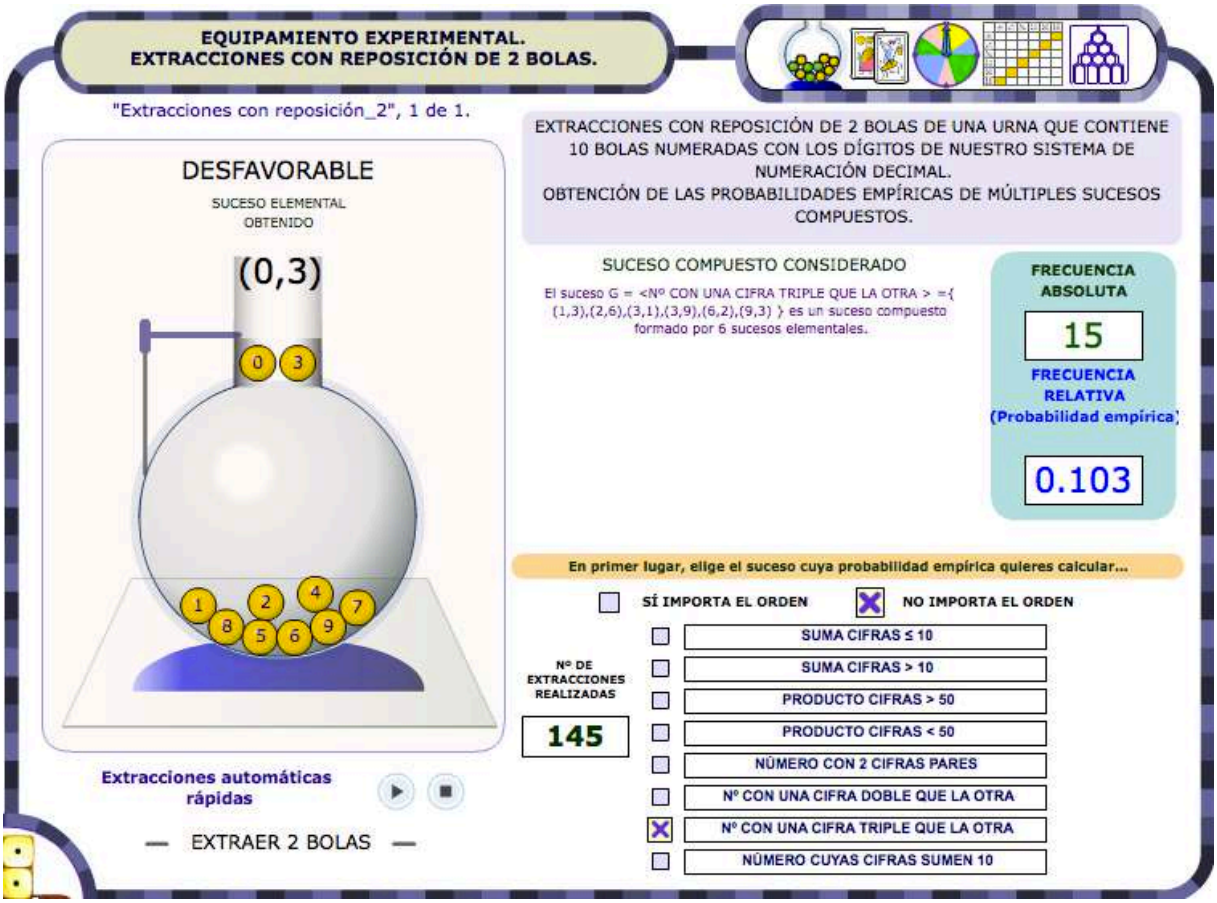



Figura 7.190 Aplicación sobre Equipamiento Experimental. Extraer dos bolas con reposición

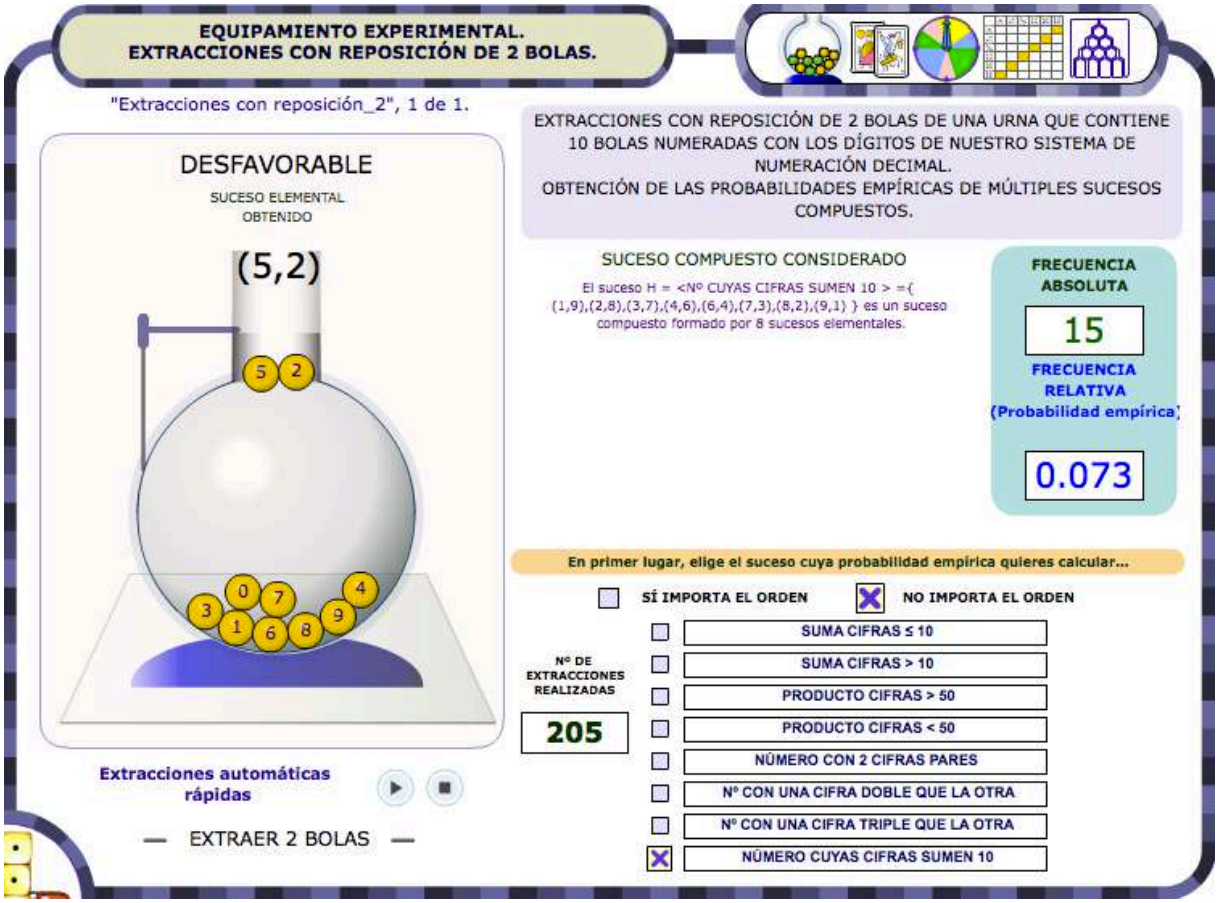



Figura 7.191 Aplicación sobre Equipamiento Experimental. Extraer dos bolas con reposición

## APLICACIÓN. EXTRAER N BOLAS CON REPOSICIÓN

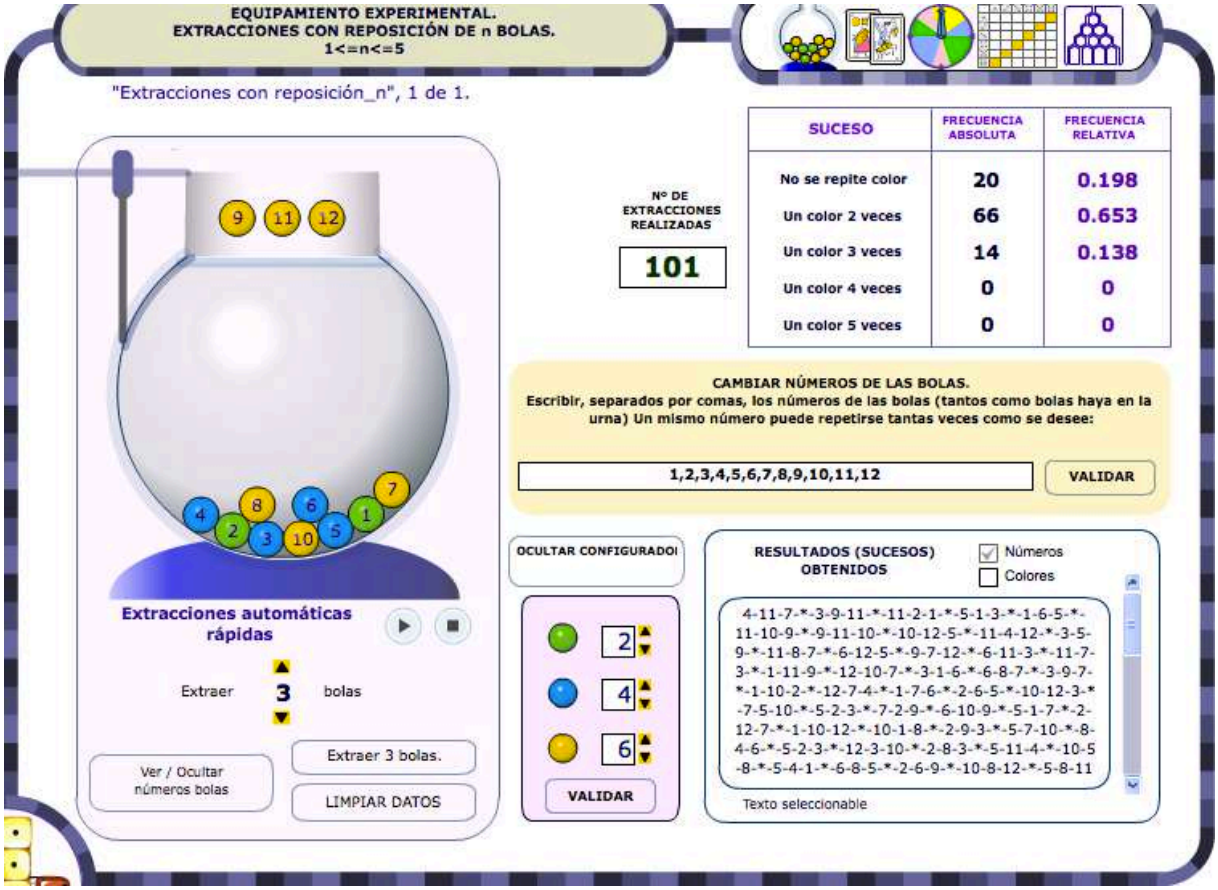



Figura 7.192 Aplicación sobre Equipamiento Experimental. Extraer n bolas con reposición

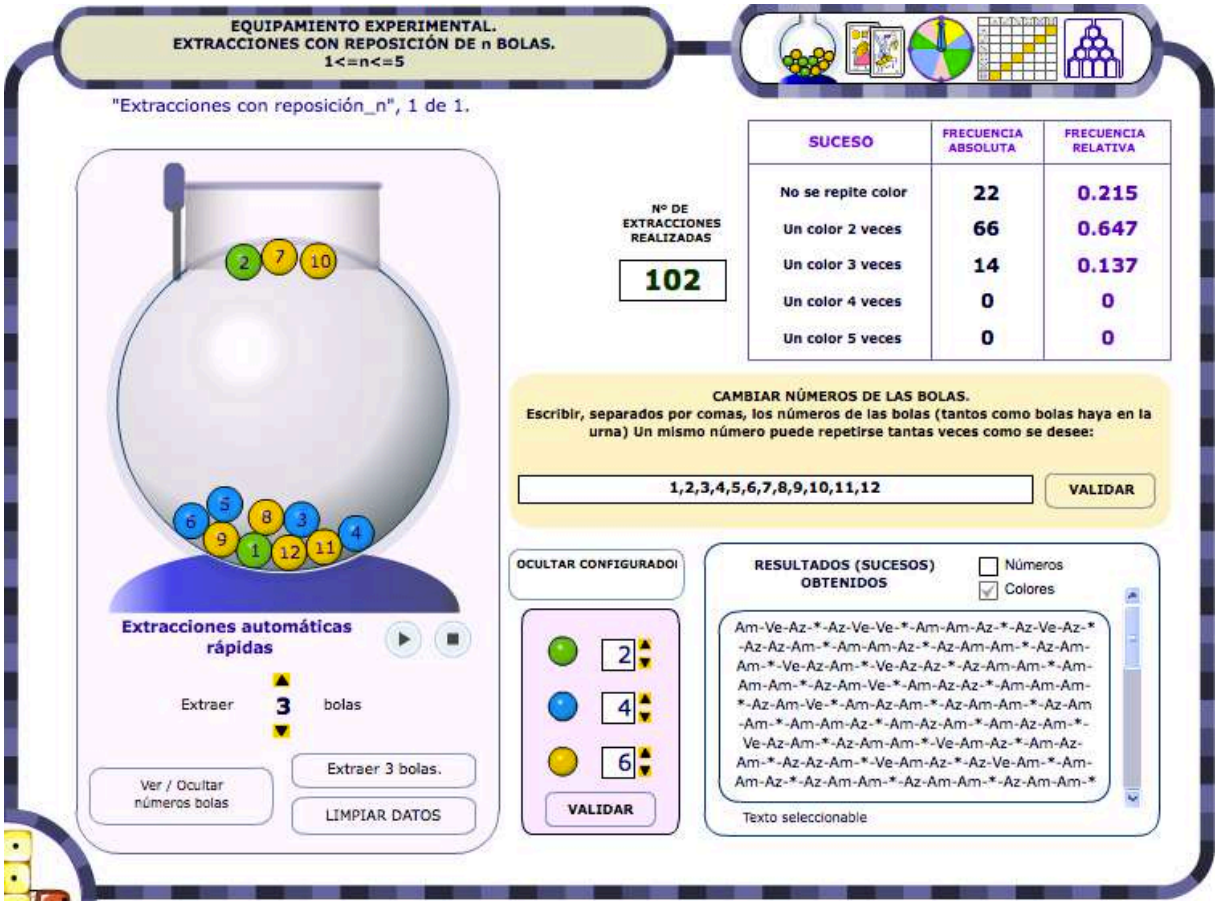



Figura 7.193 Aplicación sobre Equipamiento Experimental. Extraer n bolas con reposición

## APLICACIÓN. EXTRAER N BOLAS SIN REPOSICIÓN




Figura 7.194 Aplicación sobre Equipamiento Experimental. Extraer n bolas sin reposición

## APLICACIÓN. LOTERÍA

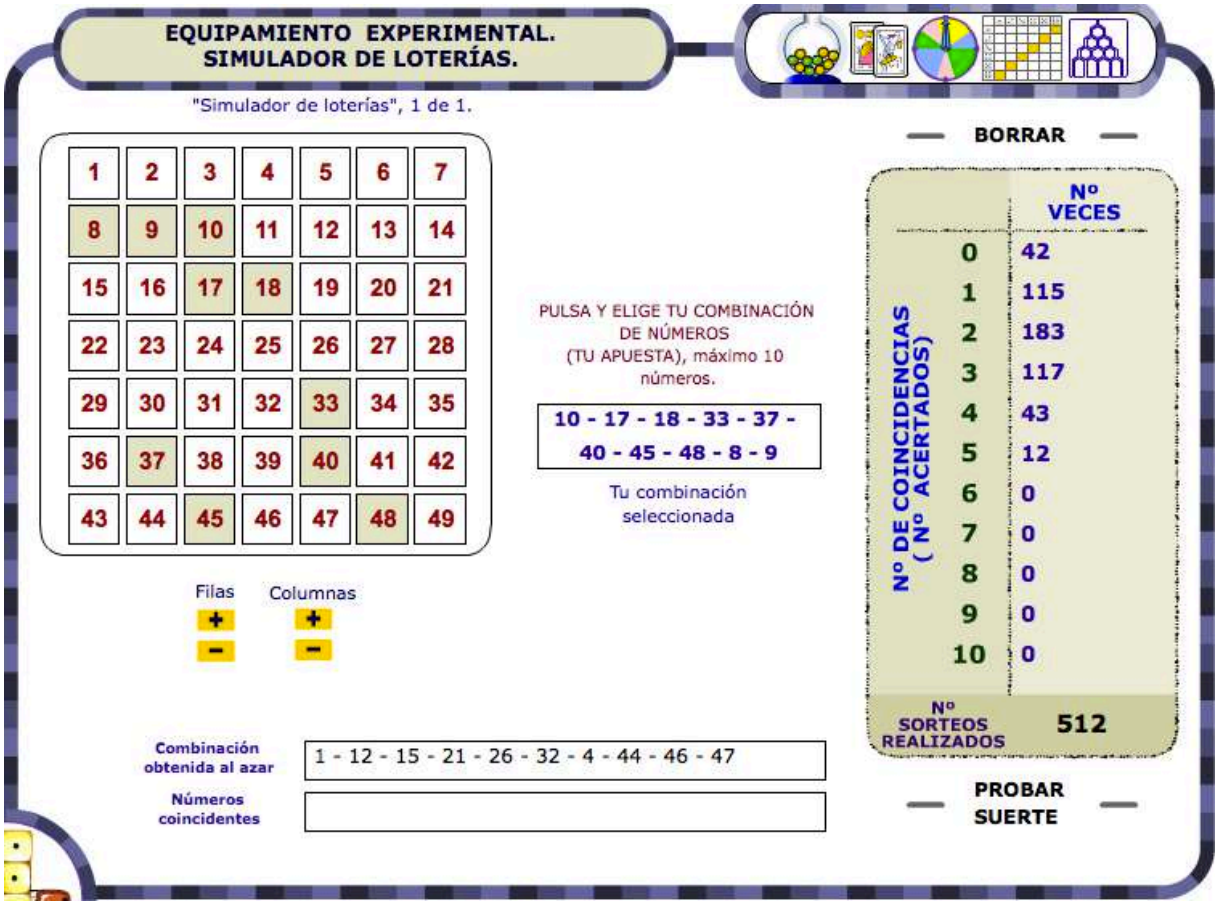



Figura 7.195 Aplicación sobre Equipamiento Experimental. Lotería

## APLICACIÓN. MULTIQUINIELA

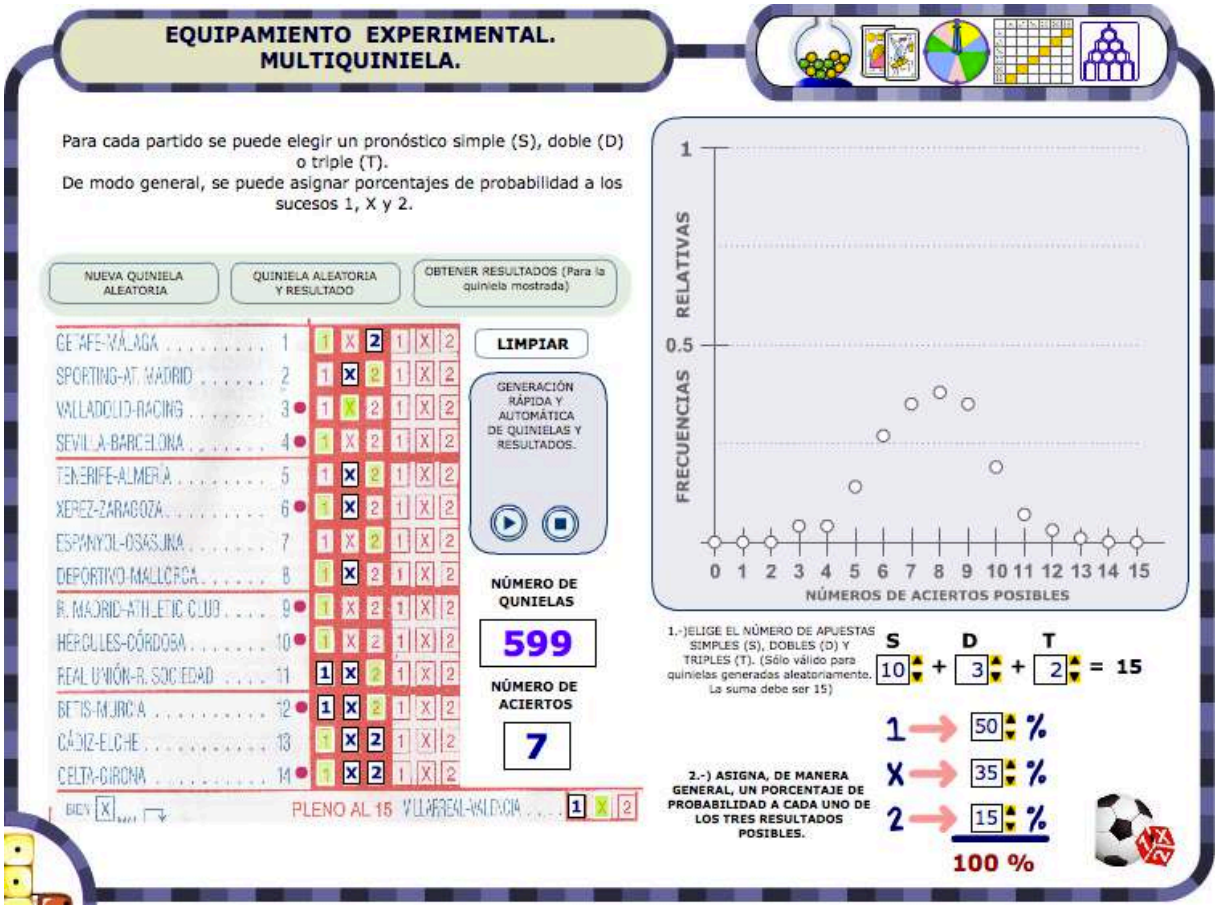



Figura 7.196 Aplicación sobre Equipamiento Experimental. Multiquiniela

## APLICACIÓN. PUNTOS DE IMPACTO ALEATORIOS Y ÁREA…

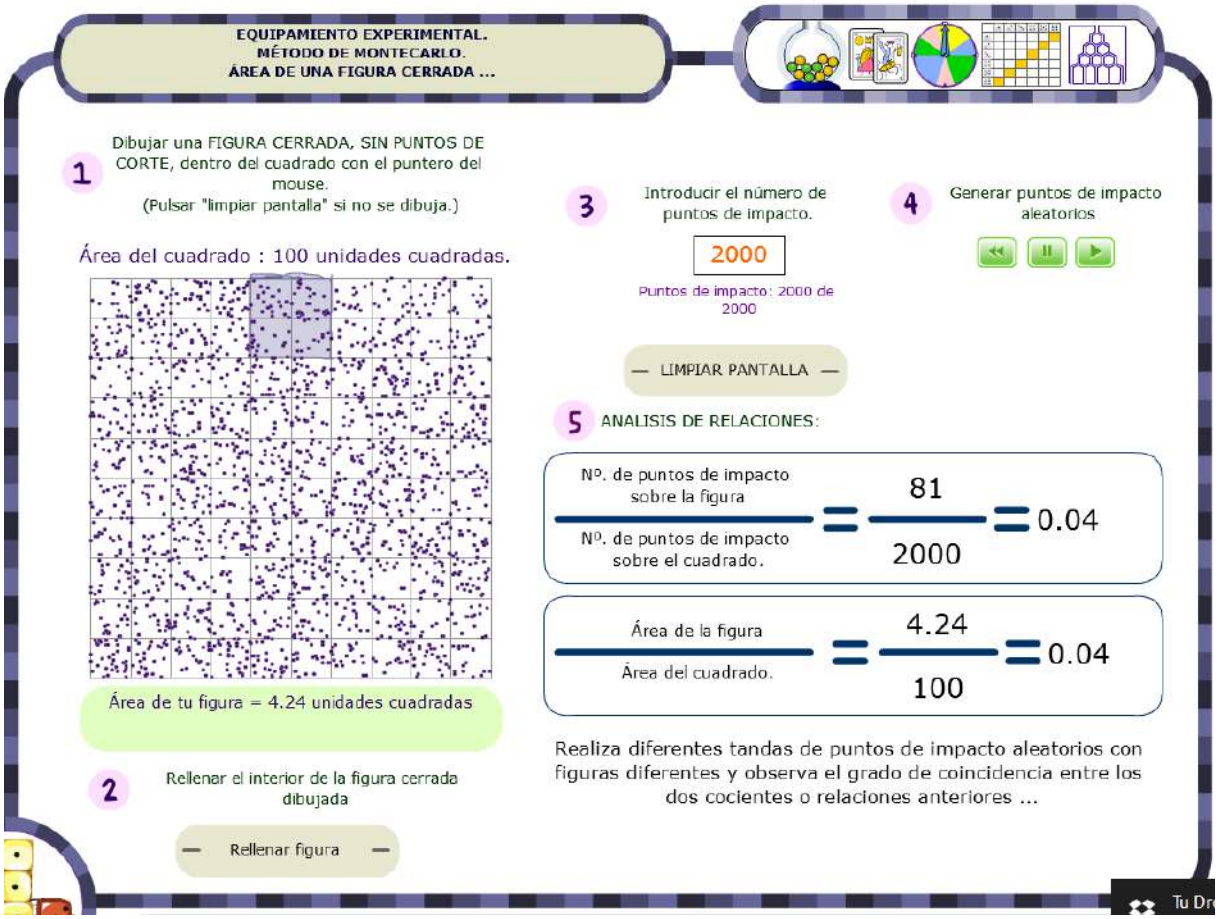



Figura 7.197 Aplicación sobre Equipamiento Experimental. Puntos de impacto aleatorios y área…

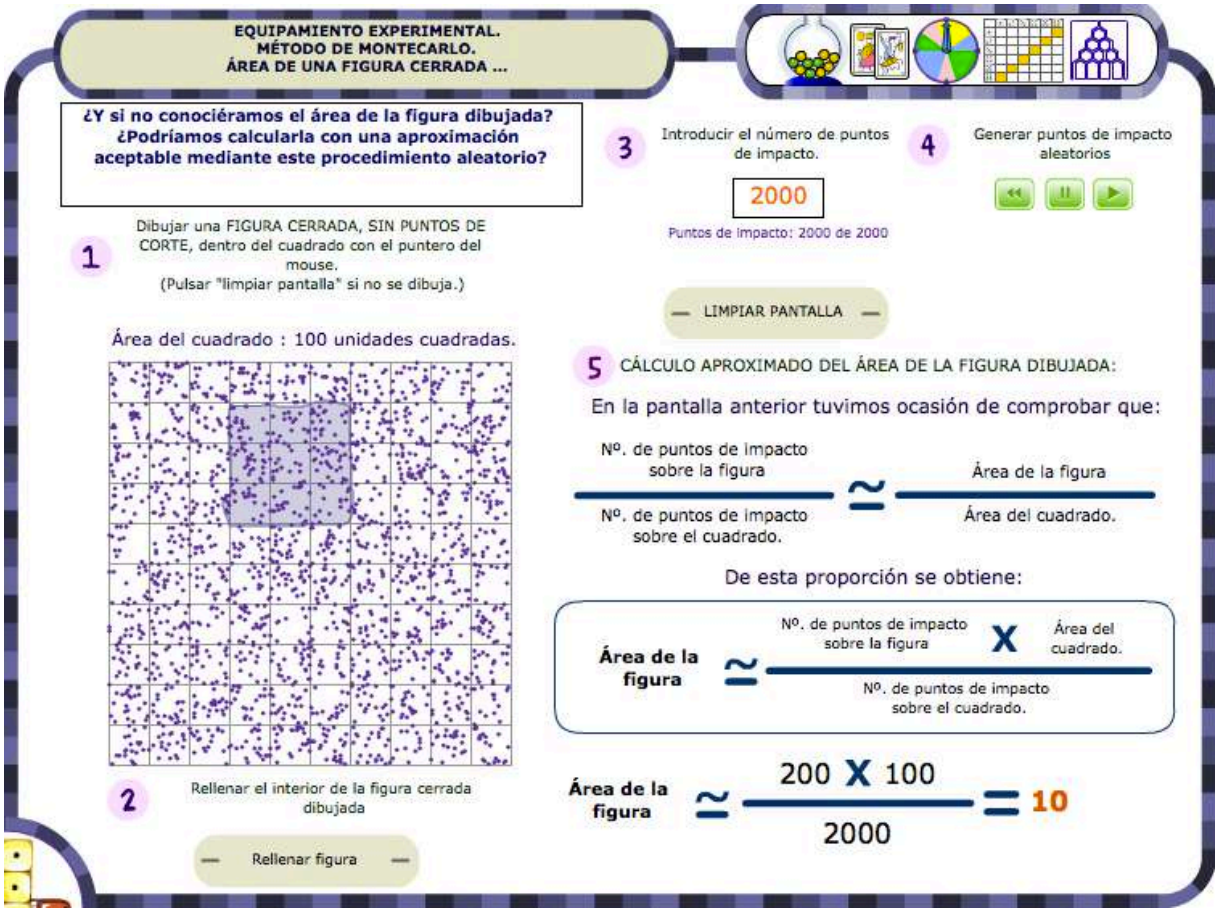



Figura 7.198 Aplicación sobre Equipamiento Experimental. Puntos de impacto aleatorios y área…

## 7.6 CONSIDERACIONES METODOLÓGICO-DIDÁCTICAS

Según Juan García Moreno (2010b) se apoya en el modelo de enseñanza-aprendizaje CAIT (Constructivo, Autorregulado, Interactivo y Tecnológico).

El aprender a aprender desde una perspectiva constructivista centrada en el alumnado, proponiéndole tareas que este pueda desempeñar de manera autónoma o semidirigida y en las que el rol del profesorado en el aula es el de orientar y facilitar la tarea de construcción del significado en el alumnado. No se puede esperar simplemente que los estudiantes, por sí mismos, construyan los conocimientos pretendidos, hay que descubrir, aprovechar, incluso crear, los conflictos cognitivos que se presenten, con el fin de superarlos y hacer progresar el aprendizaje.

Los alumnos deben ser capaces de encontrar una explicación probabilística de los resultados de las simulaciones y no permanecer en un nivel puramente perceptivo, empírico, sin comprender la naturaleza y justificación de las regularidades o irregularidades que observan en la ocurrencia de sucesos y en las frecuencias relativas.

Un aprendizaje situado en contextos simulados que afectan a ámbitos de la realidad de los alumnos. Esto hace que los significados no sólo se comprendan mejor sino que, además, se transfieran a otras situaciones. Se aplican para lograr objetivos previamente definidos y motivan a los alumnos a construir más conocimientos).

Auto-regulado. Es un aprendizaje auto-regulado porque el profesor transfiere al alumno la dirección de su propio aprendizaje. El alumno adquiere autonomía personal sin que esto signifique prescindir del profesor, pues es ahora cuando aquel alumno necesitará un tipo de ayuda o mediación más cualificada.

Interactivo. Es un aprendizaje interactivo porque permite construir el conocimiento de manera propia y personal a partir de los diferentes puntos de vista que cada uno tiene sobre la información adquirida. La construcción del conocimiento es cualitativamente más rica cuando la persona cuenta con numerosas versiones de un mismo suceso o fenómeno de la realidad y puede, a partir de todas ellas, construir la suya propia, permite pasar de la construcción personal a la construcción social del conocimiento.

## 7.7 EXPERIENCIA DE UTILIZACIÓN CON ALUMNOS

La experiencia ha sido contada por Juan García Moreno (2010c), el cual especifica que la mayoría de las aplicaciones han sido experimentadas con los alumnos del 2.º y 3.er ciclos de Educación Primaria, en el marco de un grupo de trabajo intercentros, denominado "*La argumentación en Matemáticas a partir de imágenes generadoras y modelos dinámicos*", de la localidad de Lebrija (Sevilla).

El grupo de trabajo tuvo su origen en la necesidad de unificar estrategias de resolución de problemas así como en la forma de ir abordándolas a lo largo de Infantil y Primaria.

El autor indica que *estimular la producción de explicaciones orales para extraer la información (explícita o implícita) contenida en las imágenes, de forma más o menos exhaustiva, en el contexto de resolución de problemas, así como la mejora paulatina del procesamiento oral de las explicaciones, de manera que vayan tomando la forma de argumentaciones objetivas y convincentes, además de estimular la atención y la creatividad, y predisponer a los/as alumnos/as para anticipar soluciones en problemas, era una forma eficaz de abordar el desarrollo de la argumentación como competencia comunicativa ("Experiencia de utilización con alumnos. La argumentación en Matemáticas a partir de imágenes generadoras y modelos dinámicos*" Moreno, J.,

2010c).

Las bases teóricas están basadas en Vigostky, quien sostiene que el aprendizaje no está supeditado al desarrollo, sino que este puede ser potenciado por las prácticas de enseñanza.

Desde la Didáctica de las Matemáticas se asume que el conocimiento matemático se sustenta en dos modos de comprensión y expresión. Uno se realiza de forma directa, intuitiva y es de naturaleza creativa y subjetiva, el otro se lleva a cabo de manera reflexiva, es decir lógica y es de naturaleza analítica y objetiva.

Partiendo de estas bases teóricas, el grupo de trabajo llevó a la práctica servirse de imágenes fijas, de modelos dinámicos como estímulos para la producción comunicativa oral de los alumnos, contemplando tiempos para el intercambio grupal y colectivo de explicaciones subjetivas, de forma que se favorezca la progresiva promoción y aceptación natural de los mejores razonamientos, los argumentos más convincentes.

Las aplicaciones de LABAPC se han experimentado, sobre todo, a través de la pizarra digital para provocar interpretaciones individuales en tiempos de trabajo colectivo. A este respecto, el autor (Moreno J., 2010c) destaca:

- Es indudablemente positivo el carácter motivador de las imágenes generadoras y, más aún, de los modelos dinámicos para el fin perseguido. Su presentación a través de la pizarra digital los convierten en recursos óptimos para la educación.
- Una variable a tener en cuenta es el "arte" del profesorado como mediador, como regulador de los aprendizajes, como generador de conflictos cognitivos…
- Se pone de manifiesto ciertos hechos explicados por las investigaciones didácticas en relación con las intuiciones primarias del azar.
- También se pone de manifiesto la existencia de falsas creencias sobre el Azar.
- Se suele aceptar con facilidad el argumento "más explicativo" dado por algún alumno del grupo.
- Los errores conceptuales, que pueden estar arraigados en un primer acercamiento a una situación que les cree conflicto cognitivo, no tardan en abandonarse tras la comprobación y análisis de los datos de experiencias repetidas.
- No hay mucha dificultad en reconocer los experimentos que son puramente deterministas de los que son puramente aleatorios.

- Los datos relativos a las frecuencias absolutas de sucesos son suficientes en algunos alumnos para intentar una argumentación lógica bien fundamentada.
- Este tipo de materiales, así utilizados, permiten conocer más a fondo, de otra manera, la esencia de los procesos de enseñanza-aprendizaje.

Para concluir el autor no solo considera este tipo de material adecuado para el conocimiento más a fondo de los procesos de enseñanza-aprendizaje, sino también su potencial paralelo para la investigación didáctica, así como, material óptimo para una enseñanza de calidad.

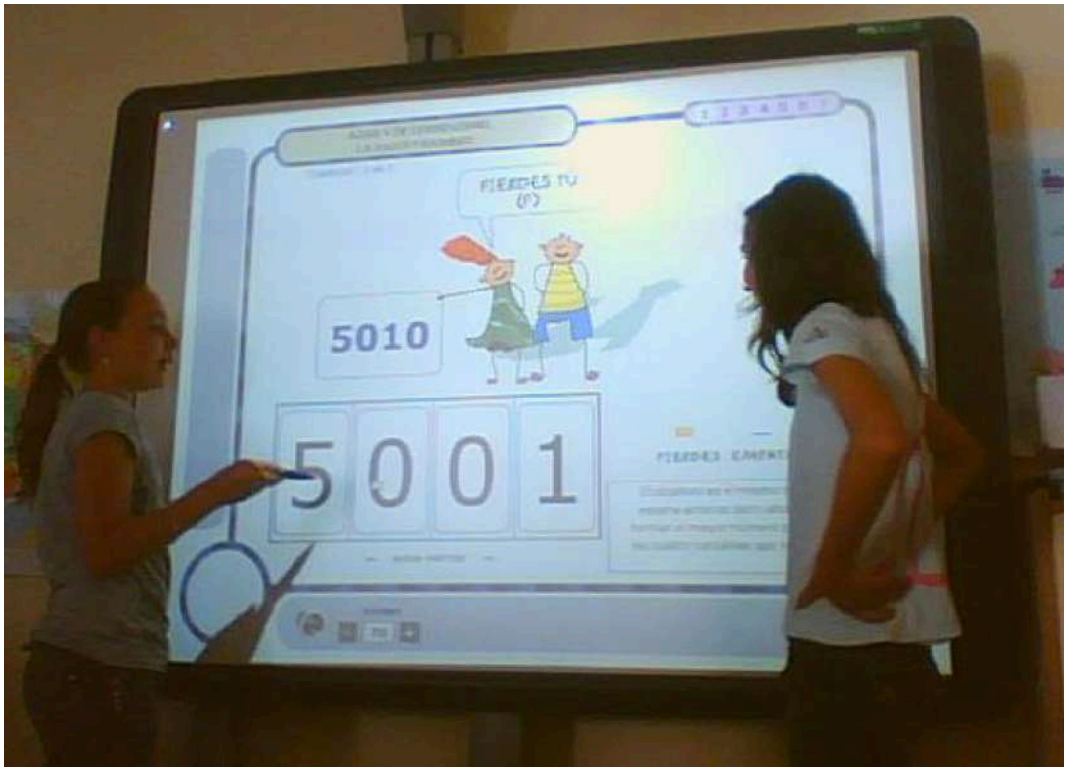



Figura 7.199 LABAPC en pizarra digital

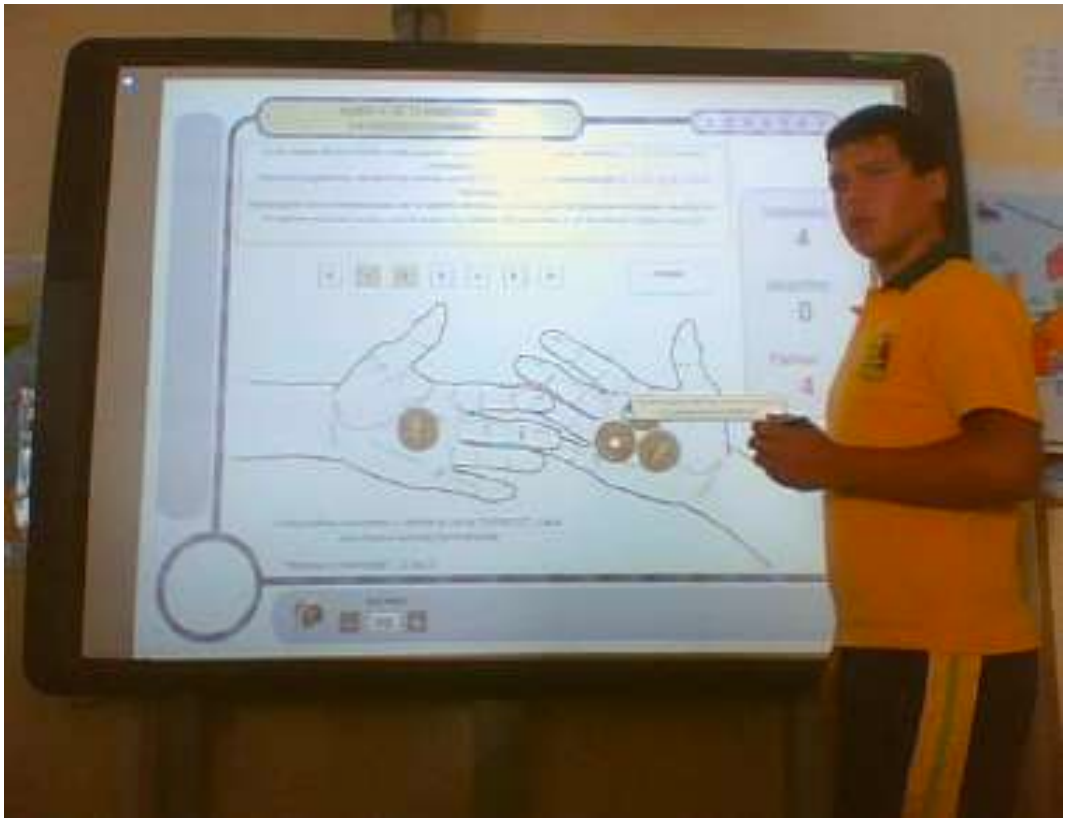


Figura 7.200 LABAPC en pizarra digital

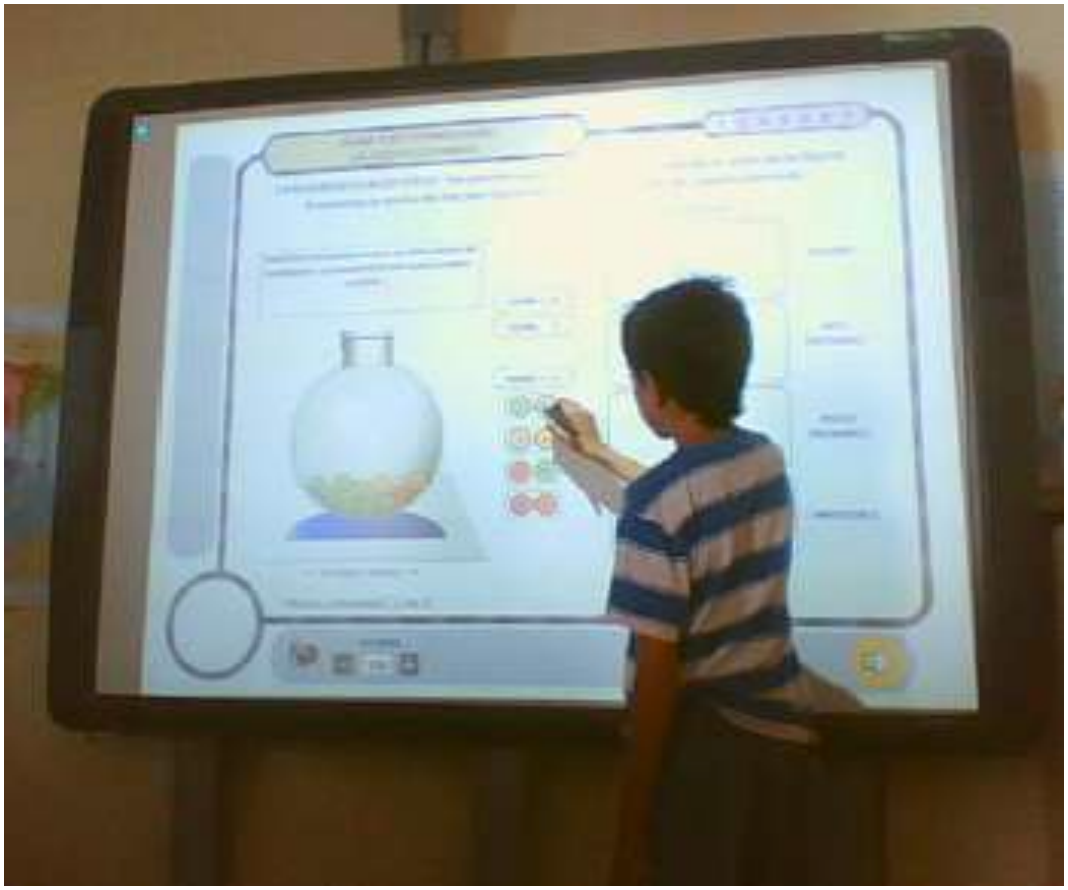


Figura 7.201 LABAPC en pizarra digital

# CAPÍTULO 8

# CONCLUSIONES

8.1 Introducción
8.2 Conclusiones respecto a los objetivos generales del trabajo
8.3 Aportaciones y limitaciones del estudio
8.4 Líneas de investigación futuras

## 8.1 INTRODUCCIÓN

En esta Memoria hemos presentado una serie de Estudios, todos ellos relacionados con la formación de profesores para enseñar el Azar y la Probabilidad y que comparten el mismo marco teórico.

En el Estudio 1 se han analizado los recursos didácticos, gráficos e informáticos utilizados o que podrían ser útiles a la hora de la enseñanza- aprendizaje del Azar y la Probabilidad. Los abundantes recursos permiten organizar situaciones de reflexión matemática y didáctica para los profesores.

En los Estudios 2 y 3 se abordó la evaluación de los conocimientos de los profesores y futuros profesores tanto de Educación Primaria como de Secundaria sobre el Azar y la Probabilidad para recabar información sobre las necesidades formativas de los profesores en algunos puntos de su conocimiento matemático y didáctico.

En el Estudio 4 se ha analizado el recurso didáctico LABAPC dado que ha resultado útil para la enseñanza y el aprendizaje del Azar y la Probabilidad en la Educación Obligatoria, y se han descrito sus aplicaciones y una experiencia con alumnos.

Aunque cada uno de estos estudios es independiente de los demás, todos ellos están relacionados con el Azar y la Probabilidad. Además, todos ellos se han apoyado en las mismas nociones teóricas del Enfoque Ontosemiótico de la Didáctica de la Matemática, propuesto por Godino y sus colaboradores: Teoría de los significados institucionales y personales de los objetos matemáticos (Godino y Batanero, 1994, 1998), Teoría de las funciones semióticas (Godino, 2002; Godino, Batanero y Roa, 2005) y Teoría de las configuraciones didácticas (Godino, Contreras y Font, 2006), junto con los tipos de análisis asociados a dichas teorías. Por otro lado se ha considerado el marco teórico de Hill, Ball y Schilling (2008) para describir las categorías de conocimientos del profesor que fueron objeto de estudio, y la metodología propuesta por Godino (2009) para la evaluación de estos conocimientos. En resumen, esta problemática, marco teórico e instrumentos analíticos compartidos (en mayor o en menor grado) en los diferentes estudios otorgan una unidad a la investigación en su conjunto.

En este capítulo final, para no ser reiterativos, nos limitaremos a exponer las conclusiones generales que se deducen del conjunto de estudios realizados. Dichas conclusiones se discuten en relación con los objetivos generales del trabajo, las aportaciones y limitaciones del estudio y las líneas de investigación futuras.

## 8.2 CONCLUSIONES RESPECTO A LOS OBJETIVOS GENERALES DEL TRABAJO

En el primer capítulo se describió el Objetivo general planteado en el Trabajo, que fue el siguiente:

*Objetivo general: Recabar información sobre las necesidades formativas de los profesores en la Educación Primaria y Secundaria, respecto a su conocimiento matemático y didáctico relativo al Azar y a la Probabilidad y analizar algunos recursos didácticos que podrían ser útiles para atender estas necesidades.*

Dicho objetivo general se divide en unos objetivos específicos. Para responder a estos objetivos se organizaron cuatro estudios bien diferenciados.

*Objetivo 1. Analizar los contenidos del Azar y la Probabilidad presentados en los documentos curriculares de Educación Primaria y Secundaria.*

Este objetivo se requiere para fundamentar la construcción de nuestros cuestionarios. En la sección 1.7 se analizan las directrices curriculares de la Educación Obligatoria para el Azar y la Probabilidad (MEC, 2006; Consejería de Educación, 2007 y 2014).

*Objetivo 2. La investigación pretende proporcionar alguna información sobre el conocimiento matemático de la Probabilidad y evaluarlo en una muestra de profesores de Educación Primaria y Secundaria.*

Para responder a este objetivo se organizaron dos estudios. En el Estudio 2 sobre *Evaluación del conocimiento matemático y didáctico de profesores en ejercicio y de futuros profesores de Educación Primaria* y, en el Estudio 3 sobre *Evaluación del conocimiento matemático y didáctico de profesores en ejercicio y de futuros profesores de Educación Secundaria,* presentados en el capítulo 6, se propuso un cuestionario de 15 preguntas, algunas de respuesta única, otras de respuesta abierta y tres relacionadas con los recursos didácticos empleados en el aula, a una muestra de 158 profesores en ejercicio y futuros profesores. Se compararon los resultados de los 8 primeros ítems con los obtenidos por Cañizares (1997) en un cuestionario semejante y con una muestra de alumnos y alumnas entre 10 y 14 años, pertenecientes a tres colegios públicos de Jaén y un colegio privado de Granada.

Además de cumplir el Objetivo planteado para la Tesis, en este Estudio no se confirman las hipótesis planteadas en el capítulo 6 pues, el análisis y resultados

obtenidos en las preguntas relacionadas con la comparación de probabilidades fue correctamente contestada.

Sin embargo, la mayoría de los maestros y futuros profesores fue incapaz de aplicar correctamente la regla de Laplace, de calcular probabilidad de la intersección de sucesos dependientes y de comparar probabilidades de experimentos compuestos e independientes. El hecho de dejar en blanco muchos ítems indica también una pobreza de conocimientos de Probabilidad.

Nuestros resultados resultaron mejores que los del estudio de Cañizares (1997), salvo en el ítem 8, sobre Comparación de probabilidades simples de un mismo suceso en dos experimentos con sólo dos sucesos no equiprobables. Aún así, nuestra muestra presenta sesgos en relación con la Probabilidad.

En resumen, los Estudios 2 y 3 de evaluación contribuyen a proporcionar información detallada de las necesidades formativas de los profesores en ejercicio y los futuros profesores de Educación Primaria y Secundaria respecto al Azar y a la Probabilidad; de este modo, podemos afirmar que hemos cumplido nuestro segundo objetivo.

*Objetivo 3. Evaluar el empleo de algunos recursos didácticos que sirvan para ayudar a los profesores en ejercicio, o futuros profesores, respecto a las limitaciones observadas en su conocimiento especializado del contenido del Azar y la Probabilidad.*

Para cumplir con este objetivo, en el capítulo 4 se describe el Estudio 1, *Análisis de recursos didácticos, gráficos e informáticos,* se analizan los distintos recursos didácticos que se pueden utilizar en el aula para el proceso de enseñanza y aprendizaje del Azar y la Probabilidad, así como la actividad matemática ligada a los recursos, las posibles dificultades en el trabajo con ellos y su idoneidad didáctica.

Nuestra hipótesis sobre este estudio fue que *podríamos identificar una variedad de recursos que mostrasen la riqueza de objetos matemáticos relacionados con la Probabilidad*.

Las conclusiones del Estudio 1 indican el cumplimiento del objetivo y la validez de la hipótesis previa. El resultado de este estudio fue un listado bastante amplio de recursos que proporcionan ayudas de aprendizaje, con las que podemos ampliar las actividades propuestas en el libro de texto, plantean una visión diferente del término Probabilidad, dado que contemplan muchas situaciones de la vida diaria, permiten la visualización de objetos abstractos, la simulación y la experimentación con experimentos aleatorios. En resumen, proporcionan un apoyo visual y experimental del

que carecen los libros de texto. Estos recursos se han de incorporar dentro de unas unidades didácticas adecuadas a los estudiantes o los futuros profesores ya que los libros de texto, por sí solos, no resuelven las dificultades presentadas a la hora de plantear una enseñanza de la Probabilidad.

*Objetivo 4. Se analizará el recurso didáctico LABAPC (Laboratorio Básico de Azar, Probabilidad y Combinatoria).*

En el capítulo 7 se presenta el Estudio 4, titulado *Análisis del recurso didáctico LABAPC-Laboratorio Básico de Azar, Probabilidad y Combinatoria,* dada la novedad que resulta ser este recurso didáctico y, como especifica la hipótesis establecida, esperando que la aplicación del LABAPC mejore el rendimiento académico del alumnado y del profesorado de la Educación Obligatoria, así como su conocimiento profesional sobre el Azar y la Probabilidad.

Las conclusiones del Estudio 4 indican el cumplimiento del objetivo y de la hipótesis previa. El resultado fue un conjunto de aplicaciones bastante amplio que proporciona ayudas de aprendizaje, basadas en muchas situaciones de la vida diaria que permite la visualización de simulaciones y la experimentación con experimentos aleatorios a la vez que, como se especificó anteriormente, proporciona un apoyo visual y experimental del que carecen los libros de texto.

## 8.3 APORTACIONES Y LIMITACIONES DEL ESTUDIO

El Trabajo realizado presenta una serie de aportaciones de interés para la Didáctica de la Probabilidad y la formación de los profesores, las principales de ellas se resumen a continuación.

En primer lugar, proporcionamos una información detallada sobre los sesgos y las dificultades en el razonamiento relacionado con la Probabilidad tanto en futuros profesores como en profesores en ejercicio de la Educación Obligatoria (Estudios 2 y 3).

Aunque el cuestionario utilizado no es original, sino que fue tomado de investigaciones previas, la mejora en los protocolos de recogida de datos y el análisis de las respuestas a las preguntas planteadas son mucho más profundos que el realizado en las investigaciones de donde se tomó el instrumento, lo que confiere a nuestro estudio mayor validez, con respecto a los originales.

- Todo ello permite no solo confirmar los hallazgos de Green (1983), Fischbein y Gazit (1984) y Godino, Batanero y Cañizares (1987), sino identificar nuevos

conflictos semióticos o explicar conflictos ya descritos en la comprensión de la Probabilidad en profesores en formación y en ejercicio. En los Estudios 2 y 3 fueron los siguientes:

- La elección de los distractores A o B puede suponer la influencia de una situación inicial en la predicción del resultado del experimento o la preferencia subjetiva por uno de los dos colores.
- Mal empleo de la regla de Laplace, ya que a veces no incluyen la equiprobabilidad.
- Confundir las cantidades absolutas con las proporciones de áreas ocupadas por cada color.
- La simetría geométrica del dibujo puede provocar una respuesta de equiprobabilidad.
- No tratar los sucesos elementales como sucesos equiprobables.

Por otro lado, se realiza una comparación detallada de los resultados en cada ítem y el número de ítems correctos, relacionados con problemas abiertos, con la muestra de estudiantes de Cañizares (1997). Se obtiene la conclusión de que, aunque los conocimientos para resolver problemas son mejores en los profesores en ejercicio de Educación Secundaria, en general, los futuros profesores de Educación Primaria obtienen mejores resultados a los que están en ejercicio.

Al estudiar la posible relación entre sesgos de razonamiento y conocimiento formal, se confirmó la hipótesis de ausencia de correlación significativamente fuerte entre uno y otro tipo de ítems.

Por otro lado, nuestra evaluación de algunos aspectos del conocimiento didáctico en los Estudios 1 y 4 proporciona aportaciones originales, que pueden ser útiles tanto a los formadores de profesores como a los propios profesores para organizar actividades formativas sobre Probabilidad.

Finalmente, hemos realizado un estudio de las investigaciones previas relacionadas con nuestro objeto de investigación, que clasificamos en dos apartados:

1. Investigaciones sobre formación de profesores para enseñar Probabilidad. Se incluyen los aspectos afectivos que influyen en la labor del profesor (actitudes y creencias), estudios de evaluación de los conocimientos probabilísticos de los profesores, y los relacionados con su conocimiento didáctico para enseñar Probabilidad. Se hace también un pequeño resumen de algunos modelos

específicos que describen los componentes del conocimiento profesional del profesor en el campo de la Estadística.

2. Investigaciones sobre la comprensión de la Probabilidad y temas relacionados con ella. Analizamos la comprensión conceptual y procedimental, experimentos de enseñanza del tema e investigaciones centradas en el análisis de libros de texto.
3. Destacamos, asimismo, el hecho de que, a lo largo del periodo de elaboración de la Tesis, estos resultados se han ido exponiendo en varias Jornadas de Didáctica de la Matemática y publicando en diversas revistas, entre las que destacamos la revista en la que se recogen las ponencias presentadas en la XIII Reunión Interuniversitaria sobre Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática.

**Limitaciones del trabajo**

Como todo trabajo empírico, esta Tesis tiene sus limitaciones. En cada uno de los estudios de evaluación realizados, el tamaño de la muestra ha sido razonable, pero las muestras son intencionales. En este sentido, los resultados de los contrastes estadísticos deben ser interpretados con precaución, y estar referidos siempre referidos a los contextos utilizados en el estudio. Por otro lado, los contextos geográficos han sido limitados. Sería necesario en todos los casos completar nuestros estudios con nuevas muestras en diferentes contextos que permitiesen ver si se confirman nuestros resultados.

Por otro lado, los datos en los estudios de evaluación se toman a partir de cuestionarios o protocolos escritos, sin tener una interacción directa con los participantes; por lo tanto, no pueden describirse de una forma completa la complejidad y riqueza de los conocimientos de las distintas muestras de profesores. Los resultados podrían complementarse con entrevistas en profundidad a los futuros profesores o a aquellos profesores que presenten los sesgos más importantes, con la finalidad de explicar sus causas con mayor detalle.

Finalmente, el trabajo realizado se centra principalmente en el análisis de los recursos didácticos para la enseñanza-aprendizaje del Azar y la Probabilidad, en especial el LABAPC, con un peso pequeño en la evaluación de los conocimientos matemáticos del profesor, sobre la cual se podrían complementar nuestros resultados con nuevos estudios.

## 8.4 LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN FUTURAS

Como consecuencia de las limitaciones señaladas en nuestro trabajo, surgen también nuevas líneas de investigación para continuar el análisis de la formación de profesores para enseñar Azar y Probabilidad.

Los estudios de evaluación realizados sobre el conocimiento matemático de los profesores en este tema podrían complementarse con nuevas tareas, pues la investigación previa es escasa. Tanto en la evaluación de los profesores de Educación Primaria como en los de Secundaria, sería posible ampliar el rango de problemas planteados. Por ejemplo, se podrían ensayar versiones abiertas de ítems de opción múltiple.

Otra línea muy amplia de investigación es la de formación de los conocimientos didácticos de los profesores, que se estudia de forma limitada en los Estudios 1 y 4. El éxito de las nuevas propuestas curriculares para la Educación Primaria y Secundaria dependerá de la formación de los profesores que han de llevarla a cabo. En este sentido, aprovechando el trabajo realizado sobre el análisis de recursos didácticos, en especial el LABAPC, sería necesario continuar el trabajo de diseño de situaciones didácticas para la formación de profesores y realizar nuevas evaluaciones de idoneidad didáctica.

**BIBLIOGRAFÍA**


Amir, G. y Williams, J. (1994). The influence of children's culture on their probabilistic thinking. En J. P. Pontes y J. F. Matos (Eds.), Proceedings of the XVIII Conference on the Psychology of Mathematics Education (v.2, pp. 24-31). Lisboa: Universidad de Lisboa.

Aspinwall, L. y Tarr, J. E. (2001). Middle school students' understanding of the role sample size plays in experimental probability. The Journal of Mathematical Behavior, 20(2), 229-245.

Azcárate, P. (1995). *El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad*. Tesis doctoral. Universidad de Cádiz.

Ball, D. L., y Bass, H. (2009). With an eye on the mathematical horizon: knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures. Trabajo presentado en *43rd Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*. Oldenburg, Alemania.

Ball, D. L., Lubienski, S. T., & Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. *Handbook of research on teaching*, *4*, 433-456.

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Baker, R.N. (1999) Cards in the classroom: academics and applications (1999), extraido el 15 de septiembre desde http://www.amatyc.org/publications/electronicproceedings/ portland24/baker/baker.pdf

Batanero, C. (2001). Didáctica de la Estadística. *Granada: Universidad de Granada*.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 8*(3), 247-264.

Batanero, C. (2009). La simulación como instrumento de modelización en probabilidad. *Revista Educación y Pedagogía*, *15*(35).

Batanero, C. (2013). La comprensión de la probabilidad en los niños:¿Qué podemos aprender de la investigación?. *Atas do III Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola*, 9-21.

Batanero, C., Biehler, R., Maxara, C., Engel, J. y Vogel, M. (2005). Using simulation to bridge teachers content and pedagogical knowledge in probability. In *15th ICMI Study Conference: The Professional education and development of teachers of mathematics*.

Batanero, C., Burrill, G. y Reading, C. (2011). *Teaching statistics in school mathematics-Challenges for teaching and teacher education. Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI and IASE study.* New York: Springer.

Batanero, C., Díaz, C. (2007). Meaning and understanding of mathematics. The case of probability. En J. P. Van Bendegen y K. François (Eds.), *Philosophical dimensions in mathematics education.* (pp. 107-127). New York: Springer.

Batanero, C. y Díaz, C. (2011). Training school teachers to teach probability: Reflections and challenges. Chilean Journal of Statistics, 2(2), en prensa.

Batanero, C. y Díaz, C. (2012). Training school teachers to teach probability: reflections and challenges. *Chilean Journal of Statistics*, *3*(1), 3-13.

Batanero, C., Godino, J. D. y Cañizares, M. J. (2005). Simulation as a tool to train Pre-service School Teachers. In *Proceedings of ICMI First African Regional Conference*.

Batanero, C., Godino, J. D., Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of statistics Education*, *12*(1), 1-19.

Batanero, C., Henry, M., y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). New York: Springer.

Begg, A. y Edward, R. (1999). Teachers' ideas about teaching statistics. Trabajo presentado en el Annual Meeting of the Australian Association for Research in Education and the New Zealand Association for Research in Education. Melbourne, Australia.

Bernoulli, J. (1713). *Ars conjectandi*. Impensis Thurnisiorum, fratrum.

Burgess, T. (2008). Teacher knowledge for teaching statistics through investigations. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey: ICMI e IASE.

Burgess, T. A. (2011). Teacher knowledge of and for statistical investigations. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education* (pp. 259-270). New York: Springer.

Canada, D. L. (2008). Conceptions of distribution held by middle school students and preservice teachers. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference. Monterrey: ICMI e IASE. Online: www.ugr.es/~icmi/iase_study/. Carter, T. A. (2008). Preservice teacher knowledge and understanding of probability and statistics. En G. Kulm (Ed.), *Teacher knowledge and practice in middle grades mathematics* (pp. 19-43). Rotterdam: Sense Publishers.

Cañizares, M. J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Carter, T. A. (2008). Preservice teacher knowledge and understanding of probability and statistics. En G. Kulm (Ed.), *Teacher knowledge and practice in middle grades mathematics* (pp. 19-43). Rotterdam: Sense Publishers.

Checa, A. N. (1998). Estadística y probabilidad: Una propuesta didáctica para la enseñanza secundaria. *Revista interuniversitaria de formación del profesorado*, (32), 59-72.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires: Aique.

Chick, H. L. y Pierce, R. U. (2008). Teaching statistics at the primary school level: Beliefs, affordances, and pedagogical content knowledge. *Joint ICMI/IASE study: Teaching statistics in School mathematics. Challenges for teaching and teacher education. Proceedings of the ICMI Study*, *18*.

Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Contreras, J. M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Contreras J. M., Batanero, C., Díaz, C., y Fernández, J. A. (2011). Prospective teachers' common and specialized knowledge in a probability task. Trabajo presentado en *Seventh Conference of European Research in Mathematics Education, CERME 7*, Rzeszow, Polonia.

Consejería de Educación. Comunidad Autónoma de Canarias (2007a). *DECRETO 126/2007, de 24 de mayo, por el que se establece la ordenación y el currículo de*

*la Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de Canarias.*

Consejería de Educación. Comunidad Autónoma de Canarias (2007b). *DECRETO 127/2007, de 24 de mayo, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Canarias.*

Consejería de Educación. Comunidad Autónoma de Canarias (2014). *DECRETO 89/2014, de 1 de agosto, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de Canarias.*

Consejería de Educación. Comunidad Autónoma de Canarias (2015). *DECRETO 315/2015, de 28 de agosto, por el que se establece la ordenación de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Canarias.*

Cooney, T. (1994). Research and teacher education: In search of common ground. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(6), 608-636.

Cordero, F., y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socio epistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *10*7-38.

Davies, H. (1965). Development of the probability concept in children. Child Development, 36, 779-788.

Del Puerto, S., & Minnaard, C. (2002). La calculadora como recurso didáctico. *Universidad CAECE, Buenos Aires Argentina. PDF*.

Díaz, C. (2003). Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico. Implicaciones para la enseñanza de la Estadística. In *Actas del 27 Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa* (pp. 3611-3621).

Díaz, C. (2007). *Viabilidad de la enseñanza de la inferencia bayesiana en el análisis de datos en psicología*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Dugdale S. (2001). Pre-service teachers use of computer simulation to explore probability. *Computers in the Schools, 17 (1/2)*, 173-182.

Eichler, A. (2008). Teachers' classroom practice and students' learning. *Joint ICMI/IASE study: Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. Proceedings of the ICMI Study*, *18*.

Estrada, A. (2007). Actitudes hacia la estadística: un estudio con profesores de educación primaria en formación y en ejercicio. In *Investigación en educación matemática: comunicaciones de los grupos de investigación del XI Simposio de la SEIEM, celebrado en La Laguna del 4 al 7 de septiembre de 2007* (pp. 121-140). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Estrada, A. y Batanero, C. (2008). *Explaining teachers' attitudes towards statistics*. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (2008).

Estrada, A., Batanero, C., y Fortuny, J. M. (2004). Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores en formación y en ejercicio. *Enseñanza de las Ciencias, 22*(2), 263-274.

Even, R. (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: Prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*(2), 94-116.

Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics. (pp. 292-297). Canada: International Statistical Institute.

Falk, R., Falk, R. y Levin, I. (1980). A potential for learning probability in young children. Educational Studies in Mathematics, 11, 181-204.

Falk, R., Wilkening, F. (1998). Childrens construction of fair chances: Adjusting probabilities. Developmental Psychology, 34(6), 1340-1357.

Ferrero, L. (1991). *El juego y la matemática*. Madrid: La Muralla SA.

de Finetti, B. (1937). La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives. Annales de l'Institute Henri Poincaré, 7, 1-68.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic reasoning in children.* Dordrech: Reidel.

Fischbein, E. y Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? Educational Studies in Mathematics, 15(1), 1-24.

Fischbein, E., y Gazit, A. (1988). The combinatorial solving capacity in children and adolescents. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 5, 193-198.

Fischbein, E., Nello, M. S. y Marino, M. S. (1991). Factors affecting probability judgements in children and adolescents. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 523–549.

Fischbein, E., Pamput, E. y Minzat, I. (1970 a). Comparison of fractions and the chance concepts in children. *Child Development,* 41, 365-376.

Fischbein, E., Pamput, E. y Minzat, I. (1970 b). Effects of age and instruction on combinatorial ability in children. *The British Journal of Educational Psychology,* 40, 261-270.

Fishbein, E. y Schnarch, D. (1996). Intuitions and schemata in probabilistic thinking. En Puig, L. y Gutierrez, A. (Eds.), Proceedings of the XX Conference on the Psychology of Mathematics Education (v.2, pp. 353-360). Universidad de Valencia.

García-Ligero, M. E., García-Ligero, M. J. y Román, P. (2009): "Una experiencia didáctica sobre probabilidad mediante un casino". *Revista de Investigación Operacional*, 30-3; págs. 266-278.

Garfield, J. B., y Ben-Zvi, D. (2008). Preparing school teachers to develop students' statistical reasoning. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics.*

*Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey: ICMI e IASE.

Gea, M. M., Fernandes, J. A., Batanero, C. y Benavides, A. J. (2016). Intuición sobre el azar: Análisis de una experiencia aleatoria con alumnos de Educación Primaria.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en didactique des Mathématiques*, *22*(2/3), 237-284.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Online: http://www.ugr.es/local/jgodino

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20*, 13- 31.

Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Funciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *IX Seminário de Investigaçao em Educaçao Matemática*, 25-45.

Godino, J. D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1987). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares.* Madrid: Síntesis.

Godino, J. D., Batanero, C. y Flores, P. (1999). El análisis didáctico del contenido matemático como recurso en la formación de profesores. En *Homenaje al profesor Oscar Sáenz Barrio* (pp. 165-185). Granada: Departamento de Didáctica y Organización Escolar.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39*, 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C. y Roa, R. (2005). Análisis onto-semiótico de problemas combinatorios y de su resolución por estudiantes universitarios. *Educational Studies in Mathematics*, *60*(1), 3-36.

Godino, J. D., Batanero, C., Roa, R. y Wilhelmi, M. R. (2008). Assessing and developing pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers through project work. *Joint ICMI/IASE study: teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. Proceedings of the ICMI study*, *18*.

Godino, J. D., Contreras, Á. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *26*(76), 39.

Goldberg, E. (1966). Probability judgment by preschool children: Task conditions and performance. Child Development, 37, 157-167.

Gómez, E. (2014). *Evaluación y desarrollo del conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad en futuros profesores de educación primaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Gómez, E. y Contreras, J. M. (2013). Significados de la probabilidad en el currículo español para la educación primaria. *Probabilidad Condicionada: Revista de didáctica de la Estadística*, (2), 571-578.

Gómez, P. (1997). Interacción social, discurso matemático y calculadora gráfica en el salón de clase.

Gonzato, M., Godino, J. D., y Neto, T. (2011). Evaluación de conocimientos didáctico-matemáticos sobre la visualización de objetos tridimensionales. *Educación*

*Matemática, 23,* (3), 5-37.

Green, D. R. (1982). *Probability concepts in school pupils aged 11-16 years.*Tesis Doctoral. Universidad de Loughborough.

Green, D. R. (1983 a). School pupils' probability concepts. *Teaching Statistics*, 5 (2), 34-42.

Green, D. R. (1983 b). A Survey of probabilistic concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. En D. R. Grey et al. (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (v.2, p. 766 - 783). University of Sheffield.

Green, D. R. (1991). A longitudinal study of children's probability concepts. En D. Vere Jones (Ed.), *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics* (pp. 320-328). Dunedin: Universidad de Otago.

Groth, R. E. (2008). Navigating layers of uncertainty in teaching statistics through case discussion. *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study*, *18*.

Haller, S. K. (1997). Adopting probability curricula: The content and pedagogical content knowledge of middle grades teachers. Tesis Doctoral. Universidad de Minnesota, Estados Unidos.

Herbel-Eisenmann, B. A. (2007). From intended curriculum to written curriculum: Examining the" voice" of a mathematics textbook. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(4), 344-369.

Hill, H. C., Ball, D. L., y Schilling, S. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(4), 372-400.

Hill, H. C., Schilling, S. G., y Ball, D. L. (2004). Developing measures of teachers'

mathematics knowledge for teaching. *The Elementary School Journal*, *105*(1), 11- 30.

Hoemann, H. W. y Ross, B. M. (1971). Children's understanding of probability concepts. Child Development, 42(1), 221-236.

Jaworski, B. (2001). Developing mathematics teaching: teachers, teacher educators and researchers as co-learners. En L. Lin y T. J. Cooney (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 295-320). Dordrecht: Kluwer.

Kahneman, D., Slovic, P. y Tversky, A. (Eds.). (1982). Judgment under uncertainty: Heuristic and biases. New York: Cambridge University Press.

Konold, C. (1989). Informal conceptions of probability. Cognition and Instruction, 6, 59-98.

Kolmogorov, A. (1956). *Foundations of the theory of probability.* New York: Chelsea (trabajo original publicado en 1933).

Langer, E. J. (1982). The illusion of control. En D. Kahneman, P. Slovic, y A. Tversky (Eds.), Judgment under uncertainty: Heuristic and biases (pp. 231-238). New York: Cambridge University Press.

Lázaro, A. F. R., Ródenas, M. C. E., & Alonso, R. I. (2012). Bicentenario de la "Teoríe analytique des probabilités" 1812-2012.

Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 557-568.

Lee, H. S. y Hollebrands, K. (2008). Preparing to teach data analysis and probability with technology. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey: ICMI e IASE.

Lee, H. S., y Hollebrands, K. (2011). Characterizing and developing teachers' knowledge for teaching statistics with technology. En C. Batanero, G. Burrill, y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI and IASE study* (pp. 359-369). New York: Springer.

Lee, H. S., Angotti, R. L. y Tarr, J. E. (2010). Making comparisons between observed data and expected outcomes: students' informal hypothesis testing with probability simulation tools. Statistics Education Research Journal, 9(1), 68-96. Online: www.stat.auckland.ac.nz/serj.

Llinares, S. (1998). La investigación "sobre" el profesor de matemáticas: aprendizaje del profesor y práctica profesional. *Aula*, *10,* 153-179.

Loeve, M. (1976). *Teoría de la probabilidad.* Madrid: Editorial Tecnos.

Lonjedo, M. A., y Huerta, M. P. (2005). La naturaleza de las cantidades presentes en el problema de probabilidad condicional. Su influencia en el proceso de resolución del problema. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática IX. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 203-212). Córdoba: SEIEM.

Lonjedo, M. A., y Huerta, M. P. (2007). Análisis del comportamiento de los estudiantes en la resolución de problemas isomorfos de probabilidad condicional. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en educación matemática XI. Once Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 273-282). Badajoz: SEIEM.

López, C. E. (2006). Stochastics and the professional knowledge of teachers. In *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*.

Maury, S. (1984). La quantification des probabilités: analyse des arguments utilisés par les élèves de classe de seconde. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 5(2), 187-214.

Mayén, S. A. (2009). *Comprensión de las medidas de tendencia central en estudiantes mexicanos de educación secundaria y bachillerato*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

MEC (1985). *Las Matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft*. Madrid: Subdirección General de Perfeccionamiento del Profesorado- Ministerio de Educación y Ciencia.

MEC (2006a). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria.*

MEC (2006b). *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.*

Méndez García de Paredes, L. (2011): Contribución de los juegos de cartas a la adquisición de las destrezas matemáticas, extraído el 25 de abril de 2016 desde https://www.feandalucia.ccoo.es/docuipdf.aspx?d=8736&s=

Mohamed, N. (2012). *Evaluación del conocimiento de los futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Mohr, M. J. (2008) Mathematics knowledge for teaching: The case of preservice teachers. En G. Kulm (Ed.), Teacher knowledge and practice in middle grades mathematics (pp. 19-43). Rotterdam: Sense Publishers.

Moreno J. (2010a). Guía didáctica. Laboratorio Básico de Azar, Probabilidad y Combinatoria.

Moreno J. (2010b). *Guía para el/la alumno/a*. Laboratorio Básico de Azar, Probabilidad y Combinatoria.

Moreno J. (2010c). *Experiencia de utilización con alumnos*. Laboratorio Básico de

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Niess, M. L. (2005). Preparing teachers to teach science and mathematics with technology: Developing a technology pedagogical content knowledge. *Teaching and Teacher Education, 21*, 509-523.

Ojeda, A. M. (1995). Dificultades del alumnado respecto a la probabilidad condicional. *UNO*, 5, 37-55.

Ortiz, J. J. (2002). La probabilidad en los libros de texto. Universidad de Granada.

Ortiz, J., Batanero, C., y Contreras, C. (2012). Conocimiento de profesores en formación sobre la idea de juego equitativo. *Revista Latino Americana de Matemática Educativa 15* (1), 63-91

Ortiz, J., Mohamed, N., Batanero, C., Serrano, L., & Rodríguez, J. D. (2006). Comparación de probabilidades en maestros en formación. En P. Bolea, M. J. González y N. Moreno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 268-276). Huesca: SEIEM.

Ortiz, J. J., Mohamed, N., & Contreras, J. M. (2011). Significado personal del enfoque frecuencial de la probabilidad en profesores en formación.

Ortiz, J., Nordin, N., Batanero, C., Serrano, L., y Rodríguez, J. (2006). Comparación de probabilidades en maestros en formación. En P. Bolea, M. J. González y N. Moreno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 268-276). Huesca: SEIEM.

Pereira-Mendoza, L. (2002). Would you allow your accountant to perform surgery? Implications for education of primary teachers. In *Proceedings of the Sixth International Conference on the Teaching of Statistics*.

Piaget, J., Inhelder E. (1951). *La genése de l'idée de hasard chez l'enfant*. París: Presses Universitaires de France.

Polaki, M. V. (2002). Using instruction to identify key features of Basotho elementary students' growth in probabilistic thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 4*, 285-314.

Ponte, J. P. (2008). Investigar a nossa própria prática: uma estratégia de formacao e de construcao do conhecimento profissional. *PNA, 2(4)*, 153-180.

Pratt, D. (1998). The co-ordination of meanings for randomness. For the Learning of Mathematics, 18(3), 2-11.

Pratt, D. (2000). Making sense of the total of two dice. Journal for Research in Mathematics Education, 31, 602-625.

Pratt, D. (2005). How do teachers foster students' understanding of probability? En G. Jones (Ed.), Exploring Probability in School (pp. 171-189). New York: Springer

Pratt, D. y Noss, R. (2002). The micro-evolution of mathematical knowledge: The case of randomness. Journal of the Learning Sciences, 11(4), 453-488.

Quesada, A. R., & Maxwell, M. E. (1994). The effects of using graphing calculators to enhance college students' performance in precalculus. *Educational Studies in Mathematics*, *27*(2), 205-215.

Ruthven, K. (1990). The influence of graphic calculator use on translation from graphic to symbolic forms. *Educational studies in mathematics*, *21*(5), 431-450.

Sáenz, C. (1998) Teaching probability for the conceptual change. *Educational studies in mathematics, 35*(3), 233-254.

Sánchez, E. (1996). Dificultades en la comprensión del concepto de eventos independientes. En F. Hitt (Ed.), Investigaciones en Matemática Educativa (pp. 389-404). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Santaló L. (1981). *Enseñanza de la Matematica en la Escuela Media*. Buenos Aires: Ed Docencia.

Savage. L.J. (1972). *The Foundations of Statistics*. Dover: New York.

Savard, A. (2014). Developing probabilistic Thinking: What about people's conceptions?. In E. J. Chernoff & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking. Presenting plural perspectives* (pp. 283-298). Berlin, Heidelberg: Springer.

Schoenfeld, A. H., y Kilpatrick, J. (2008). Toward a theory of proficiency in teaching mathematics. En D. Tirosh y T. Wood (Eds.), *Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 321-354). Rotterdam: Sense Publishers.

Serradó, A., Cardeñoso, J. y Azcárate, P. I. L. A. R. (2005). Los obstáculos en el aprendizaje del conocimiento probabilístico: su incidencia desde los libros de texto. *Statistics Education Research Journal*, *4*(2), 59-81.

Serradó, A., Azcárate, P., y Cardeñoso, J. M. (2006). Analyzing teacher resistance to teaching probability in compulsory education. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador, Bahia, Brasil: International Statistical Institute e IASE. Disponible en: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/.

Serrano, L. (1996). Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Serrano, L., Batanero, C. y Godino, J. D. (1991). Sucesiones de ensayos de Bernouilli y procesos estocásticos asociados. *Actas de las V Jornadas Andaluzas de*

*profesores de matemáticas,* (pp. 233-247). Granada: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Serrano, L, Ortíz, J. J. y Rodríguez, J. D. (2009) La simulación como recurso didáctico en la enseñanza de la probabilidad. En L. Serrano, (Ed.), Tendencias actuales de la investigación en educación estocástica (pp. 157-178). Universidad de Granada.

Shaughnessy, J. M., y Ciancetta, M. (2002). Students' understanding of variability in a probability environment. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on the Teaching of Statistics*, Cape Town, South Africa [CD-ROM]. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Shulman, L. S. (1986a). Paradigm and research programs in the study of teaching: A contemporary perspective. En M. C. Witrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 3-36). New York: Macmillan.

Shulman, L. S. (1986b). Those who understand: Knowledge growth in teaching. Educational Researcher, 15(2), 4 - 14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. Harvard Educational Review, 57(1), 1-22.

Steinbring, H. (1990). The nature of stochastical knowledge and the traditional mathematics curriculumsome experience with in-service training and developing materials. *Training teachers to teach statistics*, 2-19.

Stohl, H. (2005). Facilitating students' problem solving: Prospective teachers' learning trajectory in technological contexts. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(3), 223-254.

Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical thinking and learning*, *11*(4), 258-288.

Tauber, L. (2001). *La construcción del significado de la distribución normal a partir de actividades de análisis de datos*. Tesis doctoral. Universidad de Sevilla.

Truran, J. (1994a). Children's understanding of random generators. En: J. Garfield (Eds). *Research Papers from the Fourth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS IV)*. The International Study Group for Research on Learning Probability and Statistics.University of Minnesota.

Truran, J. (1994b). Examination of a relationship between children's estimation of probabilities and their understanding of proportion. En J. P. Ponte and J. F. Matos (Eds), *Proceedings ot the XVIII International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (v4, pp. 337-344). University of Lisbon.

Truran, J. (1994c). Diagnosting children's probabilistic understanding. Comunicación presentada en la Conferencia anual del Mathematics Education Research Group of Australasia, New South Wales, Julio, 1994.

Truran, J. & Truran, K. (1997). Statistical Independence - One concept or two? Implications for research and for clasroom practice. En B. Philips (Ed.), Papers on statistical education presented at ICME-8 (pp. 87-100). Swinburne University of Technology

Tversky, A. y Kahneman, D. (1974): Judgement under uncertainity: Heuristics and biases. Science.185, 1124-1131.

Tversky, A. y Kahneman, D. (1982). Judgments of and by representativeness. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), Judgement under uncertainty: Heuristics and biases (pp. 117- 128). New York: Cambridge University Press.

Vásquez, C., & i Pastells, Á. A. (2014). Enseñanza de la Probabilidad en Educación Primaria. Un Desafío para la Formación Inicial y Continua del Profesorado. *Números*, (85), 5-23.

Venn, J. (2006). *The logic of chance*. Courier Corporation.

Von Mises, R. (1957). *Probability, statistics, and truth*. Courier Corporation.

Watson, J. M. (2001). Profiling teachers' competence and confidence to teach particular mathematics topics: The case of data and chance. Journal of Mathematics Teacher Education, 4, 305-337.

Wild, C., y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, *67*(3), 221-248.

Wood, T. (2008). The international handbook of mathematics teacher education. Rotterdam: Sense Publishers.

Yost, P., Siegel, A. Y Andrews, J. N. (1962). Non verbal probability judgement by young children. Child Development, 33, 769-780.

**WEBGRAFÍA**

Consejería de Educación. Comunidad Autónoma de Canarias (2015). *Ordenación y currículos LOMCE. Borradores de los currículos LOMCE de la ESO*. http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/web/secundaria/informacion/ordenacion-curriculo/ordenacion-curriculos-lomce.html [consulta: 2 de octubre de 2015]

MEC (2005). *PISA 2003. Pruebas de Matemáticas y de Solución de Problemas.* http://www.mecd.gob.es/dctm/ievaluacion/internacional/pisa2003liberados.pdf?documentId=0901e72b801106c6 [consulta: 3 de marzo de 2015]

MEC (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: Matemáticas.* http://www.mecd.gob.es/inee/Ultimos_informes/PISA-2012.html [consulta: 27 de febrero de 2015]

MEC (2013). *Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos (PISA 2012).* http://www.mecd.gob.es/inee/Ultimos_informes/PISA-2012.html [consulta: 3 de marzo de 2015]

Real Academia Española de la Lengua. http://www.rae.es/ [consulta: 8 de marzo de 2015]

Real Academia Española de la Lengua. http://lema.rae.es/drae/?val=aleatorio [consulta: 5 de mayo de 2015]

Arquitecto
http://www2.ulpgc.es/index.php?pagina=plan_estudio&ver=aextinguir&tipoplan=1&codigo=100_1000_10_3 [consulta: 7 de octubre de 2015]

Grado en Educación Primaria.
http://www2.ulpgc.es/index.php?pagina=plan_estudio&ver=pantalla&numPantalla=99&nCodAsignatura=41720&codTitulacion=4017&codPlan=40&tipotitulacion=G&codEspecialidad= [consulta: 7 de octubre de 2015]

Grado en Ingeniería Civil. Curso de adaptación
http://www2.ulpgc.es/index.php?pagina=plan_estudio&ver=pantalla&numPantalla=99&nCodAsignatura=45400&especialidadCursoAdaptacion=01&planCursoAdaptacion=30&codTitulacion=4019&codPlan=40&tipotitulacion=G&codEspecialidad= [consulta: 7 de octubre de 2015]

Grado en Ingeniería Eléctrica
http://www2.ulpgc.es/index.php?pagina=plan_estudio&ver=pantalla&numPantalla=99&nCodAsignatura=44210&codTitulacion=4040&codPlan=40&tipotitulacion=G&codEspecialidad= [consulta: 7 de octubre de 2015]

Grado en Ingeniería Informática
http://www2.ulpgc.es/index.php?pagina=plan_estudio&ver=pantalla&numPantalla=99&nCodAsignatura=40811&codTitulacion=4008&codPlan=40&tipotitulacion=G&codEspecialidad= [consulta: 7 de octubre de 2015]

Grado en Ingeniería Mecánica
http://www2.ulpgc.es/index.php?pagina=plan_estudio&ver=pantalla&numPantalla=99&nCodAsignatura=44510&codTitulacion=4042&codPlan=40&tipotitulacion=G&codEspecialidad= [consulta: 7 de octubre de 2015]

Ingeniero de Telecomunicación
http://www2.ulpgc.es/index.php?pagina=plan_estudio&ver=aextinguir&tipoplan=1&codigo=110_1100_13_3 [consulta: 7 de octubre de 2015]

Ingeniero Industrial
http://www2.ulpgc.es/index.php?pagina=plan_estudio&ver=aextinguir&tipoplan=1&codigo=105_1050_10_3 [consulta: 7 de octubre de 2015]

Ingeniero Químico
http://www2.ulpgc.es/index.php?pagina=plan_estudio&ver=aextinguir&tipoplan=1&codigo=105_1051_10_3 [consulta: 7 de octubre de 2015]

Ingeniero Técnico de Obras Públicas, especialidad en Hidrología
http://www2.ulpgc.es/index.php?pagina=plan_estudio&ver=aextinguir&tipoplan=1&codigo=105_1310_10_1 [consulta: 7 de octubre de 2015]

Ingeniero Técnico en Informática de Sistemas
http://www2.ulpgc.es/index.php?pagina=plan_estudio&ver=aextinguir&tipoplan=1&codigo=180_1201_11_1 [consulta: 7 de octubre de 2015]

Ingeniero Técnico Industrial, especialidad en Electricidad
http://www2.ulpgc.es/index.php?pagina=plan_estudio&ver=aextinguir&tipoplan=1&codigo=105_1312_10_1 [consulta: 7 de octubre de 2015]

Ingeniero Técnico Industrial, especialidad en Mecánica
http://www2.ulpgc.es/index.php?pagina=plan_estudio&ver=aextinguir&tipoplan=1&codigo=105_1314_10_1 [consulta: 7 de octubre de 2015]

Licenciado en Ciencias del Mar
http://www2.ulpgc.es/index.php?pagina=plan_estudio&ver=aextinguir&tipoplan=1&codigo=160_1600_10_3 [consulta: 7 de octubre de 2015]
Licenciado en Matemáticas
Probabilidades I.
http://193.145.105.233/programas/query.php?code=290582012&data=prog1112 [consulta: 27 de octubre de 2015]
Probabilidades II.
http://193.145.105.233/programas/query.php?code=290580916&data=prog1112 [consulta: 27 de octubre de 2015]

Licenciado en Veterinaria
http://www2.ulpgc.es/index.php?pagina=plan_estudio&ver=aextinguir&tipoplan=1&codigo=185_1850_10_3 [consulta: 7 de octubre de 2015]

Aparato de Galton
http://descargas.pntic.mec.es/cedec/mat3/contenidos/u12/M3_U12_contenidos/33_reflxionando_sobre_la_probabilidad.html [consulta: 18 de octubre de 2016]

Bingo
Calculando las probabilidades en el Bingo. http://es.classicasinos.com/bingo/bingo-odds.html [consulta: 5 de septiembre de 2016]
Estrategias de bingo. http://www.juegodebingo.org/estrategias/ [consulta: 5 de septiembre de 2016]
Alguien investigó estrategias sobre bingo… http://www.cantaelbingo.com/ [consulta: 5 de septiembre de 2016]
El bingo, un recurso clásico con gran valor en educación. http://www.educaciontrespuntocero.com/recursos/bingo-en-educacion-gamificacion-aula/34909.html [consulta: 5 de septiembre de 2016]
https://es.wikipedia.org/wiki/Bingo [consulta: 28 de agosto de 2016]

Calculadora

¿Cuál es el origen y la evolución de la calculadora? http://www.europapress.es/economia/noticia-cual-origen-evolucion-calculadora-20150217173510.html [consulta: 16 de diciembre de 2015]

3 motivos para usar las calculadoras en clase. http://aprendiendomatematicas.com/3-motivos-para-usar-las-calculadoras-en-clase/ [consulta: 16 de diciembre de 2015]

https://es.wikipedia.org/wiki/Calculadora [consulta: 16 de diciembre 2015]

Cartas

https://es.wikipedia.org/wiki/Baraja [consulta: 25 de abril 2016]

Dados

https://es.wikipedia.org/wiki/Dado [consulta: 17 de diciembre de 2015]

Problemas de probabilidades y teoría de juegos. http://www.librosmaravillosos.com/acertijossamloyd/capitulo02.html [consulta: 18 de diciembre de 2015]

Juegos de probabilidad para niños. http://www.ehowenespanol.com/juegos-probabilidad-ninos-lista_379220/ [consulta: 18 de diciembre de 2015]

Diagrama de árbol.

http://es.slideshare.net/yadiraazpilcueta/presentacin1-de-diagrama-de-arbol-11790936 [consulta: 11 de noviembre de 2015]

http://es.slideshare.net/LalisEspinoza/diagrama-de-arbol-12579808 [consulta: 11 de noviembre de 2015]

http://proyectodescartes.org/canals/descripcion.htm [consulta: 13 de noviembre de 2015]

http://proyectodescartes.org/canals/materiales_didacticos/PL-CB-14-JS/index.html [consulta: 16 de noviembre de 2015]

Diagrama de Carroll

https://es.wikipedia.org/wiki/Diagrama_de_Carroll [consulta: 17 de noviembre de 2015]

http://es.slideshare.net/Hespinoza/diagramas-de-carroll [consulta: 18 de noviembre de 2015]

https://es.wikipedia.org/wiki/Lewis_Carroll [consulta: 21 de noviembre de 2015]

Diagrama de Venn-Euler

http://www.red.edu.pe/blog/matematica/carroll-diagramas-de-clasificacion-y-organizacion-cuantitativa.html [consulta: 20 de noviembre de 2015]

https://es.wikipedia.org/wiki/Diagrama_de_Venn [consulta: 21 de noviembre de 2015]

http://www.ecured.cu/Diagrama_de_Venn [consulta: 21 de noviembre de 2015]

Parchís

https://es.wikipedia.org/wiki/Parch%C3%ADs [consulta: 27 de agosto de 2016]

Problema de Monty Hall

http://www.youtube.com/watch?v=aTu0gEmscVk [consulta: 13 de diciembre de 2015]

http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/estadistica_y_probabilidad/estimacion/monty_hall/actividad.html [consulta: 13 de diciembre de 2015]

http://www.matematicasdigitales.com/cambiamos-de-puerta-el-problema-de-monty-hall/ [consulta: 13 de diciembre de 2015]

http://www.estadisticaparatodos.es/taller/montyhall/montyhall.html [consulta: 13 de diciembre de 2015]

Applets. Se propone a los estudiantes, que en grupos de trabajo, construyan secuencias de actividades para su desarrollo en el aula, utilizando recursos didácticos (prensa y publicidad; juegos de azar; dispositivos físicos como dados, ruletas, urnas, dianas, monedas, etc.; calculadora; y applets), especificando el tipo de tareas que tiene que resolver el alumno (juegos y sorteos; experimentación y estimación frecuencial de probabilidades; construcción de dispositivos aleatorios; etc.), los problemas e interrogantes planteados (gestión del aula), los aspectos organizativos, los recursos a utilizar, y la evaluación. Para los applets pueden consultar, entre otras, las siguientes direcciones:

- http://www.matemath.com/azar/flash/camellos.html [consulta: 22 de marzo de 2017].
- http://www.matemath.com/azar/flash/acorralado.html [consulta: 22 de marzo de 2017].
- http://www.matemath.com/azar/ [consulta: 22 de marzo de 2017].

- http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_186_g_1_t_5.html?open=activities&from=category_g_1_t_5.html [consulta: 22 de marzo de 2017].
- http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_305_g_3_t_5.html?from=category_g_3_t_5.html [consulta: 22 de marzo de 2017].
- http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_186_g_3_t_5.html?open=activities&from=category_g_3_t_5.html [consulta: 22 de marzo de 2017].