PROBLEMAS DE LENGUAJE EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS

por

JOSE M. PACHECO CASTELAO

1. INTRODUCCIÓN.

Nos encontramos en un momento en el cual las matemáticas y su enseñanza parecen preocupar grandemente a los profesionales. Dicha preocupación aparece definida por varios aspectos, a saber:

1. Contenido de los programas.
2. Posibilidad de asimilación de dichos contenidos.
3. Técnicas utilizadas para conseguir la asimilación, por parte de los alumnos, de los tales programas.

Nuestro breve trabajo se refiere a un aspecto, parcial, pero no de la menor importancia, del tercer punto: Los problemas que plantea, en el profesor, en el alumno y en los textos, la utilización conjunta del lenguaje común y el lenguaje simbólico, más o menos formalizado, hoy en uso en el mundo matemático. Procuraremos ver cuáles son las dificultades principales, poniendo ejemplos de texto y de ejercicios «resueltos» por los alumnos, para apoyo de nuestras conclusiones finales.

2. LENGUAJE COMÚN Y LENGUAJE DE LAS MATEMÁTICAS.

Aunque parezca trivial, el primer problema se nos plantea al tener que utilizar el lenguaje común para explicar las nociones matemáticas: Si entendemos que las matemáticas son, como se pretende hoy día, un lenguaje apto para ciertos usos, ¿por qué no presentarlo como tal y hacerlo aprender sin referencia a otros lenguajes, tan imperfectos como son los idiomas habituales?

Cualquiera que haya estudiado algo de matemáticas puede contestar a esta pregunta, con gran razón: «Es imposible tal cosa».

Podría, más aún, compararnos con el estudio de una lengua extranjera, y, más todavía, presentarnos un texto formalizado, de éstos que ahora gustan tanto a los filósofos, y decirnos: «Esto es ininteligible si no recurrimos al lenguaje común para explicarlo un poco». (Véase Russell y Whitehead [5].)

Por eso nos vamos a dedicar a encontrar el exacto compromiso en el uso de los dos lenguajes en la enseñanza.

Primera dificultad

Nada más comenzar un curso de Bachillerato, ya encontramos a los alumnos con la mente compartimentada.

En la hora de Geografía pensarán en Geografía; en la de Literatura, en Literatura, etc. Además, se escandalizarán cuando el profesor de cualquier asignatura recurra a algún artificio matemático sencillo, y lo mismo les pasará en nuestra clase cuando pretendamos que «expliquen» la resolución de un ejercicio. Veamos los siguientes ejemplos, procedentes de un examen en el Instituto:

5) Resolver los siguientes sistemas:

$$\left.\begin{array}{l} x - 2y = 3 \\ -2x + 3y = 1 \end{array}\right\} \text{por dos métodos diferentes, y} \left\{\begin{array}{l} x + 2y \geqslant -1 \\ -x + 3y \leqslant 2 \end{array}\right\} \text{gráficamente}$$

Sustitución

5) $$\left.\begin{array}{l} x - 2y = 3 \\ -2x + 3y = 1 \end{array}\right\} x = 3 + 2y$$

$$-2(3 + 2y) + 3y = 1$$

$$-6 - 4y + 3y = 1$$

$$-4y + 3y = 1 + 6 \text{ ¿?}$$

$$-y = 7$$

$$\boxed{y = -7}$$

$$x = 3 + 2(-7)$$

$$x = 3 - 14$$

$$\boxed{x = -11}$$

Igualación

$$\left.\begin{array}{l} x - 2y = 3 \\ -2x + 3y = 1 \end{array}\right| \begin{array}{l} x = 3 + 2y \\ x = \dfrac{1 - 3y}{-2} \end{array}$$

$$3 + 2y = \frac{1 - 3y}{-2}$$

$$-2(3 + 2y) = 1 - 3y$$

$$-6 - 4y = 1 - 3y$$

$$-4y + 3y = 1 + 6$$

$$-y = 7$$

$$\boxed{y = -7}$$

$$x = 3 + 2(-7)$$

$$x = 3 - 1y$$

$$\boxed{x = -11}$$

Comprobación

$$\begin{matrix} x - 2y = 3 \\ -2x + 3y = 1 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} -11 - 2(-7) = -11 + 14 = 3 \\ -2(-11) + 3(-7) = 22 - 21 = 1 \end{matrix} \right.$$

Este alumno, al presentarle su examen, dijo: «Esto no es la clase de lengua, luego no debo explicar nada. Además, usted sabe de qué trata el problema». Se le respondió: «Si en clase sólo se escribieran las fórmulas en la pizarra, sin explicación hablada alguna, ¿qué pasaría?». No hubo respuesta. Naturalmente no se le aprobó. Otro ejemplo:

2) En una clase de 20 alumnos, ¿cuántas comisiones distintas, de tres personas, pueden formarse?

a) Si no existen cargos.

b) Si existen 3 cargos: presidente, secretario y tesorero.

a) $C^3_{20} = \dfrac{V^3_{20}}{P_3}$; $C^3_{20} = \dfrac{20^{(3)}{}_1}{3!}$; $C^3_{20} = \dfrac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2}$;

$C^3_{20} = 20 \cdot 19 \cdot 3$; $C^3_{20} = \mathit{1.140}$.

b) $V^3_{20} = n^{(k)} = 20^{(3)} = 20 \cdot 19 \cdot 18 = \mathit{6.840}$.

Y así podríamos poner una infinidad. La actitud del alumno es siempre la misma: No hay que mezclar diferentes materias.

Obsérvese que he recogido ejemplos que están correctamente resueltos, lo cual nos lleva de inmediato a la

Segunda dificultad

Un alumno jamás pretenderá de la clase de matemáticas otra cosa que *resolver ejercicios* (no problemas), y, además, siempre dirá: «Lo que interesa es saber resolver los problemas», pues no distinguen entre simple ejercicio y problema, por fácil que éste sea. Naturalmente, la teoría no merece más que una atención colateral y se aprende de prisa y corriendo, cometiéndose errores inmensos. Véase el siguiente ejemplo:

4) Definir: polinomio, término independiente, indeterminada, grado. Demostrar el teorema del resto.

Aplicación: Hallar el resto de $x^4 - x + 1 : x - 5$ usando el teorema y compruébalo con la regla de Ruffini.

Teorema del resto:

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - a)\, q(x) + r(x) \\ p(a) &= (a - a)\, q(a) + r(a) \\ p(a) &= r(a) \end{aligned}$$

Un número (p) es igual a la diferencia de dos números ($x - a$) por otro tercer número q más el resto (r) al sustituir los términos en x por a queda así: que (p) es igual a (r).

Vemos, de los ejemplos anteriores (extraídos de una gran cantidad de ejercicios de Instituto y Facultad), la existencia de graves problemas de lenguaje en la enseñanza de las matemáticas.

Por lo tanto, vamos a explicar brevemente cuál es, en mi opinión, la causa del problema.

Como se ha dicho más arriba, lo que pretendemos, al enseñar matemáticas, es presentar ciertos aspectos del pensamiento humano a la consideración de los alumnos. Da la casualidad de que esta ciencia tiene cierto carácter de lenguaje auxiliar, el cual es de difícil traducción al idioma de la calle. Además, usa un simbolismo que muchas veces podríamos calificar de esotérico, y produce cierto deslumbramiento en los alumnos. Así, pues, no es extraño encontrar alumnos que pretenden «saber matemáticas» porque saben *dibujar* más o menos bellamente los símbolos utilizados.

Un ejemplo: Explicando, en la teoría de los enteros, el proceso de la división con resto, se enuncia: «Dados dos enteros a y b, es posible encontrar otros dos, q y r, tales que $a = bq + r$, llamados cociente y resto, de forma que r menor que b».

Si se hace el dibujo de la clásica división

$$\begin{array}{l|l} a & b \\ \cline{2-2} r & q \end{array}$$

al cabo del tiempo, en unos exámenes orales, me he encontrado, como contestación a la pregunta «¿Qué es el algoritmo de la división en Z?», el dibujo anterior sin más explicación que la de antes: «Ya sabe usted qué es eso».

El ejemplo anterior pone de relieve un aspecto muy importante de los símbolos matemáticos:

El simbolismo debe ser eficaz y operativo (ver Reznikov [4], páginas 301 y ss.). No es de extrañar que el alumno desdeñe explicarnos el algoritmo de la división cuando sabe cómo hacer aparecer los números q y r mediante el tal algoritmo, que sabe usar, pues ya lleva imbuida la idea de que la visión de ese símbolo desencadena un cálculo rutinario. Hecha la experiencia de preguntar: «¿Cómo se efectúa la división?», la respuesta ha sido: «Como no me dé usted números concretos, no sé». Y pretender que expresaran en lenguaje común los pasos de una división, trabajo de titanes.

Tras esta experiencia acerca de símbolos de carácter operativo, que entorpecen la comprensión de la naturaleza de lo que se estudia, citaré otro caso análogo: La notación de Leibniz

$$\frac{dy}{dx}$$

es muy operativa:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{dt},$$

por ejemplo, pero produce en los alumnos un resultado idéntico al anterior: Se aprende a operar y no se sabé qué se está haciendo.

Y ahora la experiencia contraria. Hay símbolos de carácter completamente arbitrario, que no producen más que dolores de cabeza.

Ejemplo: Cuando explicamos el concepto de límite de una sucesión, no veo necesidad alguna de introducir simbólicamente la clasificación de sucesiones nulas, de Cauchy, etc., pues únicamente añaden dificultades accesorias a un tema ya de por si difícil. Esto nos puede llevar a lo que dice Pólya en su libro [3]: «El no entender los símbolos conduce a no poder razonar correctamente sobre ellos». De aquí se comprende fácilmente, ahora, la confusión reinante, para los alumnos, entre problema y ejercicio.

Termino este apartado con algunas precisiones, citando a R. Thom su artículo en el libro [1], cuando sea menester:

Psicológicamente podríamos decir lo siguiente: Mientras que los programas de matemáticas son cada vez mayores y más abstractos, los plazos de aprendizaje no han podido ser acortados por los psicólogos (página 196).

Por tanto, tendremos que usar, en nuestras explicaciones, la herramienta de que disponen los alumnos: el lenguaje común.

En cambio, este lenguaje común, para explicar conceptos abstractos, es largo, lento y premioso; luego el simbolismo puede ser una ayuda, e incluso, como hemos visto, darle un cierto carácter lúdico a la explicación, pero con los inconvenientes vistos más arriba. A este respecto, opina R. Thom (pág. 207):

Lenguaje ordinario	*Lenguaje de la Geometría*
1) Dificultad de establecer clasificaciones y descripciones.	1) Se puede definir una clasificación por un grupo de transformaciones.
2) Entendemos las palabras.	2) Tenemos intuiciones.
3) Sintaxis pobre.	3) Sintaxis rica.

Lenguaje Algebraico
1) Una clase es un mero objeto de trabajo, representado por un símbolo.
2) Los significados son: o fáciles o no existen.
3) Sintaxis ilimitada,

comparando los tres tipos de lenguaje, que evidentemente las ventajas del lenguaje algebraico son innumerables y por tanto debemos abogar por llegar a él como ideal de perfección. Sin embargo, este paso ¡es precisamente lo que nos ocupa!

3. Algunas consideraciones metodológicas.

Vamos a dedicarnos aquí a revisar algunas ideas sobre la aplicación práctica de lo anterior.

En la clase se ha de transmitir una información, definida por el programa. Generalmente, el mayor impedimento para que la transmisión sea eficaz es la superabundancia de temas del programa. Si se pretende estudiar todo, el primer resultado es la destrucción de la característica fundamental de la exposición oral: la posibilidad de corregir y reexplicar, dado que a los alumnos les resulta más difícil tomar notas adecuadas y preguntar y aclarar dudas en clase. El segundo resultado es que el alumno se ve obligado a refugiarse en el texto, procurando digerir los símbolos y diagramas. De todo ello, se acaba por aprender la simbología, como apuntaba más arriba, y se aprende a disponer los cálculos sin más explicación, con la esperanza de que dé el deseado fruto: el aprobado.

Desde luego, el problema radica en lo abstracto de las nociones. Un concepto muy abstracto es difícil de captar y se obvia la dificultad asignándole un símbolo, cosa tangible, con lo cual se aprende uno el símbolo y sigue sin saber el concepto. Un caso típico es la distinción cifra/número. La confusión entre ambos es tal que casi ha cambiado el significado de ambas palabras: «La *cifra* de parados...», o bien: «Las cuentas *numeradas*...». Respecto a este caso concreto, el libro de Kline [2], excelente en muchos aspectos, opina que es innecesaria la distinción (pagina 79). No estoy de acuerdo.

Ya para finalizar, pongo aquí ejemplos de cómo se presenta en un texto clásico (1) y en otro moderno (2) un mismo tema: los logaritmos. Obsérvese cómo el texto clásico (Serret [6]) introduce la noción genéticamente y podemos contestar, con el texto en la mano, a la «inocente» pregunta: «¿Cómo se construye una tabla de logaritmos?». Además, véase el correcto lenguaje usado y compárese con el otro texto.

(1)

Chapitre III

THEORIE DES LOGARITHMES

Définition des logarithmes.—Propriétés fondamentales des logarithmes.—Des différents systèmes de logarithmes.—Des logarithmes de Briggs.—Des Tables de logarithmes.—Disposition des Tables de Callet.—Usage des Tables.—Applications de la théorie des logarithmes.—Remarque sur la théorie des logarithmes.

Définition des logarithmes

347. Soient deux progressions croissantes et indéfinies,

$$1,\ q,\ q^2,\ q^3,\ q^4,\ \ldots,$$
$$0,\ \delta,\ 2\delta,\ 3\delta,\ 4\delta,\ \ldots,$$

l'une par quotient commençant par 1, l'autre par différence commençant par zéro.

On nomme *logarithmes* des nombres qui font partie de la progression par quotient, les nombres qui leur correspondent respectivement dans la progression par différence.

Les deux progressions dont il s'agit constituent un *système de logarithmes*; elles ne sont assujetties qu'à la seule condition de commencer la première par 1, la seconde par zéro.

348. Si l'on insére un même nombre quelconque de moyens par quotient entre chaque terme de la progression par quotient et le suivant, et si, en même temps, on insère le même nombre de moyens par différence entre chaque terme de la progression par différence et le suivant, on obtient deux nouvelles progressions (nos 333 et 336). Cela posé, on nomme *logarithmes* des nombres introduits dans la progression par quotient, les nombres correspondants introduits dans la progression par différence.

(2)

6. DEFINICION DE LOGARITMO: PROPIEDADES

6.1. El logaritmo de un número $y > 0$ en una base dada $a > 0$ es el número x a que debe elevarse a para obtener y. Se denota: $\log_a y = x$, y se lee: el logaritmo de y en base a es igual a x.

Admitiremos que todo número real positivo tiene logaritmo, es decir

$$\forall\ y \in \mathbf{R}_+, \quad \exists\ x \in \mathbf{R} \quad \text{tal que } a^x = y$$

Ejemplos:

- $\log_2 16 = 4$ porque $2^4 = 16$
- $\log_3 81 = 4$ porque $3^4 = 81$
- De las siguientes igualdades en forma exponencial

$$3^2 = 9, \quad 10^{-2} = 0{,}01, \quad 4^3 = 64$$

se obtienen las siguientes igualdades en forma logarítmica:

$$\log_3 9 = 2, \quad \log_{10} 0{,}01 = -2, \quad \log_4 64 = 3$$

- Calculemos $\log_8 4$. Llamaremos $x = \log_8 4$, entonces por definición

$$8^x = 4 \Rightarrow (2^3)^x = 2^2 \Rightarrow 2^{3x} = 2^2 \Rightarrow 3x = 2$$

$$x = \frac{2}{3}\ ; \text{ luego } \log_8 4 = \frac{2}{3}$$

4. Consideración final.

En los párrafos anteriores hemos apuntado algunos problemas del lenguaje y de dónde proceden esos problemas. En mi caso concreto, he procurado solucionarlos a la clásica:

Hacer que los alumnos lleven un cuaderno, en el cual se *dictan* las notas de clase, para evitar así la acumulación de apuntes carentes de valor.

En una hora normal, dedico a dictar (definiciones, enunciados de teoremas, algunas demostraciones, etc.) no más de 20 minutos; el resto del tiempo lo dedico a hablar sobre diferentes ejemplos, etc., y tener algún alumno en la pizarra, corrigiéndole sus defectos de expresión (ejemplo típico: «¿Qué es tal cosa?», «Es cuando...») cuando aparecen. También, en el cuaderno, hago que redacten aquellos ejercicios y problemas que propongo. Sin embargo, la resistencia a este tratamiento es grande y los resultados positivos, inciertos.

5. Bibliografía consultada.

[1] A. G. Howson (ed.): *Developments in Mathematical Education*, Cambridge, 1973. El artículo de Thom se titula «Modern Mathematics, does it exist?».

[2] M. M. Kline: *El fracaso de la Matemática Moderna*, Madrid, 1976.

[3] G. Polya: *How to solve it*, New York, 1957.

[4] Reznikov: *Semiótica y teoría del conocimiento*, Madrid, 1971.

[5] Russell-Whitehead: *Principia Mathematica up to § 56*, New York (sin fecha).

[6] J. A. Serret: *Traité d'Arithmétique*, París, 1852.

Octubre de 1977