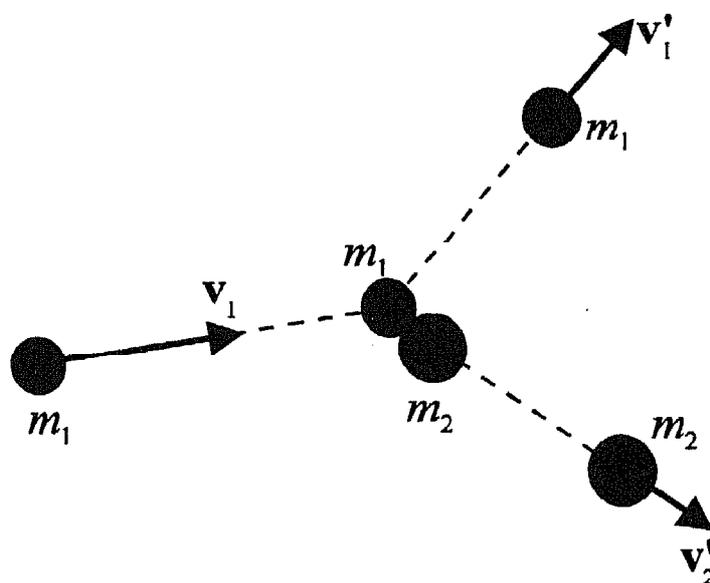


GUÍA PARA UN CURSO DE FÍSICA GENERAL

MECÁNICA I



Pablo Martel Escobar
Juan M. Gil de la Fe
Luis García Weil
Ángeles Marrero Díaz



Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

**Pablo Martel Escobar
Juan M. Gil de la Fe
Luis García Weil
Ángeles Marrero Díaz**

Profesores del Departamento de Física de la ULPGC

**GUÍA PARA UN CURSO DE FÍSICA
GENERAL
MECÁNICA I**

Las Palmas de Gran Canaria
Noviembre 1994

**Edita: Servicio de Reprografía de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.
Campus Universitario de Tafira (Las Palmas de Gran Canaria).**

Fotocopiadora:

Marca: Rank Xerox.

Modelo: 5090

Número de Serie: 1104236487

I.S.B.N.: 84-7806-117-7

Depósito legal: G.C. 1291-1994

PRÓLOGO :

El presente volumen surge como el primer tomo de una obra que pretenderá abarcar todos los temas tratados en un curso estándar de *Física General* a nivel de un primer curso de carrera universitaria. Este volumen *Mecánica I*, y en general toda la obra de próxima aparición, se concibe como un libro de apuntes de clase, que intenta evitar al alumno el centrar su atención, casi exclusivamente, en la reproducción de las fórmulas escritas por el profesor en la pizarra, permitiendo así a los discentes atender a los razonamientos y consideraciones de orden más físico o fenomenológico expuestas por el profesor en las clases.

Si se lee este volumen dedicado a la mecánica se podrá observar como la mayor parte de las justificaciones aparecen a continuación de las palabras *En efecto* y enmarcadas. Con ello se pretende distinguir de una forma clara entre lo fundamental, los resultados, y sus demostraciones. No por tal motivo estas justificaciones han de ser obviadas por sistema pues pensamos que es muy importante que el alumno intente entenderlas, y así, con ese esfuerzo irá adquiriendo madurez en el razonamiento científico, madurez que se hace esencial en cualquier disciplina de esta índole y que además, dota de una mejor disposición a la hora de entender los aspectos físicos de cada cuestión en concreto.

Además, en este volumen no incluimos ejemplos, ni fenomenología, ni cuestiones, ni problemas resueltos o propuestos. Esto -en concordancia con el espíritu de partida de no ser sustituto de un libro de texto- se hace deliberadamente con la finalidad de que el alumno necesite, para la preparación de la asignatura, consultar algunos de los tratados que de esta disciplina existen en la bibliografía, que son numerosos y en ocasiones difícilmente superables.

Este primer tomo comienza con un capítulo de carácter matemático donde se expone de manera concisa la herramienta básica del álgebra vectorial, cálculo vectorial y teoría de campos, de aplicación en todo el resto del curso. Seguidamente dedicamos dos capítulos al estudio de la aproximación de punto material, estudiando en uno la cinemática y en el otro la dinámica. El capítulo cuarto versa sobre un modelo algo más complejo, el de sistema de partículas, mostrando en el siguiente y último una de sus principales aplicaciones, como es la del sólido rígido. Para finalizar hemos añadido cinco apéndices: El primero dedicado a recordar a modo de formulario una serie de expresiones de la matemática elemental que pudieran ser de utilidad para los alumnos en la resolución de problemas. El segundo corresponde al capítulo primero, y en él se expone un estudio de carácter general de las coordenadas curvilíneas ortogonales, particularizando al final a los casos de mayor utilidad práctica (las coordenadas cartesianas, las cilíndricas y las esféricas). El triedro de Frenet, que se expone en el apéndice tercero, es un concepto de utilidad en el estudio, realizado en el capítulo segundo, dedicado a la descripción intrínseca del movimiento de un punto.

Finalmente, los apéndices cuarto y quinto recogen dos casos particulares de movimiento de un sólido rígido, el péndulo físico y el de torsión. El movimiento de estos péndulos, correspondiente al de un sólido en torno a una posición de equilibrio estable, recobrará interés en el tema dedicado al estudio de los movimientos oscilatorios.

Finalmente nos gustaría agradecer las valiosas sugerencias y correcciones hechas por nuestros compañeros del Departamento de Física de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, así como la fundamental ayuda prestada por aquellos que han sido nuestros alumnos que con sus atinadas preguntas y sus errores han contribuido de manera decisiva en la elaboración de este texto. No quisiéramos acabar estas palabras de presentación sin el ruego expreso a todos aquellos que utilicen este libro de que nos hagan llegar tanto los errores detectados como las sugerencias oportunas.

Los autores

Las Palmas de Gran Canaria, noviembre de 1994

ÍNDICE:

TEMA 1.- Elementos de álgebra y cálculo vectoriales	1
1.- Magnitudes escalares y vectoriales	1
2.- Álgebra vectorial	2
2.1 Suma y diferencia de vectores. Producto de un vector por un escalar	2
2.2 Vectores unitarios	4
2.3 Proyección de un vector sobre un eje	4
2.4 Triedro de referencia. Componentes cartesianas	5
2.5 Producto escalar de dos vectores	9
2.6 Producto vectorial de dos vectores. Representación vectorial de una superficie.	10
2.7 Producto mixto de tres vectores	14
3.- Teoría de momentos	15
3.1 Momento de un vector respecto a un punto	15
3.2 Momento de un vector respecto a un eje	17
3.3 Sistema de vectores deslizantes	18
4.- Cálculo vectorial	19
4.1 Derivada de una función vectorial de variable real	19
4.2 Integración de una función vectorial de variable real	22
5.- Introducción a la teoría de campos	24
5.1 Definición de campo	24
5.2 Representación gráfica de un campo escalar. Superficies de nivel	25
5.3 Representación gráfica de un campo vectorial. Líneas de campo	25
5.4 Flujo y circulación	26
5.5 Gradiente. Divergencia. Rotacional	28
5.6 Operador Nabla de Hamilton y Laplaciana	32
5.7 Campos potenciales y solenoidales	34
TEMA 2.- Cinemática del punto	37
1.- Introducción. Descripción del movimiento	37
2.- Trayectoria. Vector posición. Vector desplazamiento	38
3.- Velocidad y aceleración	39
3.1 Conceptos de velocidad media y velocidad instantánea	39
3.2 Conceptos de aceleración media y aceleración instantánea	40
4.- Determinación de las ecuaciones del movimiento	41

	42
5.- Descripción intrínseca del movimiento	42
5.1 Posición de la partícula. Espacio recorrido	44
5.2 Descripción intrínseca de la velocidad. Velocidad escalar.	45
5.3 Componentes intrínsecas de la aceleración	46
5.4 Ecuaciones escalares del movimiento	47
6- Clasificación de los movimientos a partir de las componentes intrínsecas de la aceleración.	48
7.- Estudio de algunos movimientos	48
7.1 Movimiento rectilíneo	49
7.2 Movimientos curvilíneos en el plano	55
8- Movimientos relativo	56
8.1 Composición de velocidades en el movimiento relativo	58
8.2 Composición de aceleraciones en el movimiento relativo	60
8.3 Transformaciones de Galileo	61
8.4 Transformaciones de Lorentz-Einstein	63
 TEMA 3.- Dinámica de la partícula	 63
1.- Introducción.	63
2- Leyes de la Mecánica	63
3.- Tipos de interacciones en la naturaleza	68
4.- Fuerzas de reacción en apoyos	71
4.1 Fuerzas de rozamiento	72
5- Fuerzas elásticas	75
6- Momento angular. Conservación del momento angular	76
7- Impulso lineal y angular	80
8- Trabajo de una fuerza. Energía cinética	80
9- Potencia	82
10- Trabajo realizado por una fuerza conservativa. Energía potencial	83
10.1 Campos uniformes	84
10.2 Campos de fuerzas centrales con simetría esférica	85
11- Principio de conservación de la energía	87
12- Teorema de la energía mecánica	87
13- Leyes de la Mecánica en los SRNI	88

TEMA 4.- Dinámica de los sistemas de partículas	91
1.- Definición de los sistemas de puntos materiales. Clasificación	91
2- Fuerzas interiores y exteriores	92
3.- Movimiento de un sistema de partículas	93
4.- Centro de masas. Propiedades	95
5- Momento angular. Teorema del momento angular	97
6- Energía cinética. Teorema del trabajo y de la energía cinética	98
7- Movimiento de un sistema en torno al centro de masas	101
8- Energía potencial de un sistema de partículas	105
9- Conservación de la energía	106
10- Fuerzas impulsivas y colisiones	108
TEMA 5.- Cinemática y dinámica del sólido rígido	111
1- Introducción. Grados de libertad	111
2- Cinemática del sólido rígido	112
2.1 Movimiento de traslación	112
2.2 Movimiento de rotación en torno a un eje fijo	113
2.3 Movimiento general del sólido	114
3- Dinámica del sólido rígido	117
3.1 Dinámica de traslación	118
3.2 Dinámica de rotación en torno a un eje fijo. Momento de inercia	119
3.3 Estudio de un movimiento de rotación y traslación combinados de un sólido rígido. Movimiento de rodadura	131
4- Condiciones de equilibrio	136
Apéndice I.- Herramientas matemáticas	139
I.1- Áreas y volúmenes	139
I.2.- Geometría analítica	139
I.3.- Binomio de Newton	141
I.4.- Funciones trigonométricas	141

I.5.- Funciones exponenciales y logarítmicas	142
I.6.- Tabla de derivadas	143
I.7.- Tabla de integrales	143
I.8.- Desarrollos en serie de Taylor	144
I.9.- Relaciones para el producto vectorial	144
I.10.- Relaciones en las que interviene ∇	144
Apéndice II.- Coordenadas curvilíneas ortogonales	145
Apéndice III.- Triedro intrínseco de Frenet	153
Apéndice IV.- El péndulo compuesto o físico	157
Apéndice V.- El péndulo de torsión	159

TEMA 1. ELEMENTOS DE ÁLGEBRA Y CÁLCULO VECTORIALES.

1.- Magnitudes escalares y vectoriales.

Se denomina *magnitud* a todo aquello que es susceptible de ser medido. Podemos distinguir dos tipos de magnitudes: las *magnitudes primarias*, que no se definen mediante una relación con otras magnitudes y las *magnitudes secundarias*, que se definen mediante una relación con otras magnitudes.

Todas las magnitudes que trataremos pertenecerán a dos grupos: *magnitudes escalares* y *magnitudes vectoriales*. Las magnitudes escalares son aquellas cuya medida queda completamente especificada por un número real y su unidad (masa, longitud, temperatura). Las magnitudes vectoriales son más complejas que las *escalares* y vienen representadas por lo que se conoce como un *vector* (desplazamiento, velocidad, fuerza).

Un vector, \mathbf{a} o \vec{a} (Fig.1.1), se define como un segmento orientado que viene caracterizado por:

- un *origen* (o punto de aplicación): Punto A .
- un escalar o *módulo*, a o $|\vec{a}|$, que viene dado por la longitud del segmento AA' . Este módulo es siempre positivo, e independiente de la dirección del vector.
- una *dirección*, dada por la recta r que contiene al segmento AA' (también llamada recta soporte).
- un *sentido*, que se indica mediante una punta de flecha, y coincide con el del recorrido desde A (origen) hasta A' (extremo).

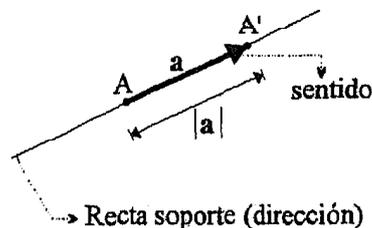


Fig.1.1

Los vectores pueden clasificarse en:

- Vectores *libres*, que vienen caracterizados por su módulo, dirección y sentido,

quedando indeterminado su origen (campo gravitatorio uniforme en una determinada region del espacio).

- Vectores *deslizantes*, para los cuales es necesario especificar además la recta soporte (fuerza aplicada a un sólido rígido).
- Vectores *localizados*, ligados o fijos, que quedan caracterizados además por su punto de aplicación (velocidad y aceleración de una partícula).

2.- Álgebra vectorial.

Las reglas que daremos a continuación sólo son válidas para vectores libres.

2.1.- Suma y diferencia de vectores. Producto de un vector por un escalar.

Dos vectores libres \mathbf{a} y \mathbf{b} son *iguales* si tienen el mismo módulo, dirección y sentido (Fig.1.2). Un vector con igual dirección y módulo que un vector \mathbf{a} pero con sentido opuesto recibe el nombre de *vector opuesto* y se denota por $-\mathbf{a}$ (Fig.1.3).

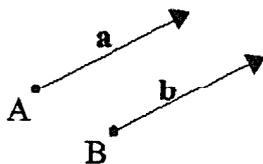


Fig.1.2

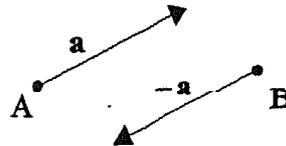


Fig.1.3

Dados tres vectores \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} , *la suma* se define como el vector \mathbf{d} que se obtiene colocando el origen de \mathbf{c} en el extremo de \mathbf{b} y el origen de \mathbf{b} en el extremo de \mathbf{a} . Uniendo el origen de \mathbf{a} con el extremo de \mathbf{c} y asignando el sentido desde el origen de \mathbf{a} hacia el extremo de \mathbf{c} obtenemos el vector suma \mathbf{d} ((Fig.1.4), *regla del polígono*). Escribimos entonces:

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} \quad (1.1)$$

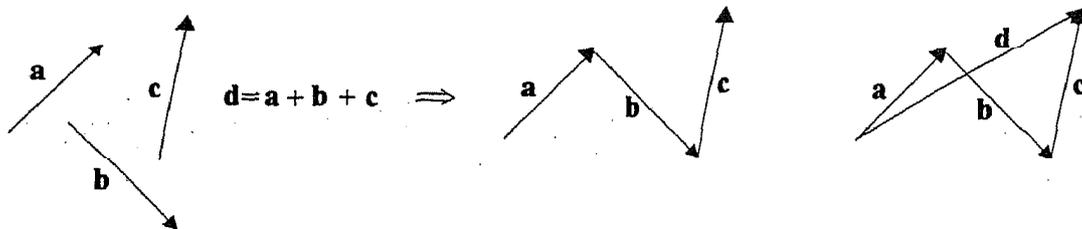


Fig.1.4

Otra forma de sumar vectores gráficamente es usar *la regla del paralelogramo*. Con

ella se obtiene la suma de dos vectores a y b llevando el origen de b a a y completando el paralelogramo trazando los lados paralelos a ambos vectores. Uniéndolo el origen común con el vértice opuesto del paralelogramo se obtiene el vector suma c (Fig.1.5).

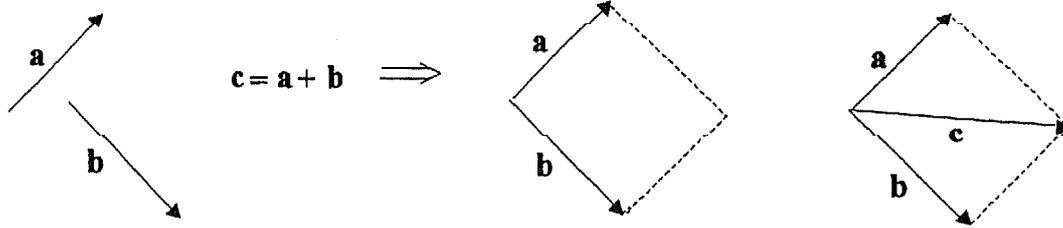


Fig.1.5

Dados dos vectores a y b , la *diferencia* se define como el vector c que se obtiene de sumar a con el opuesto de b (Fig.1.6). Escribimos entonces:

$$c = a - b = a + (-b) \tag{1.2}$$

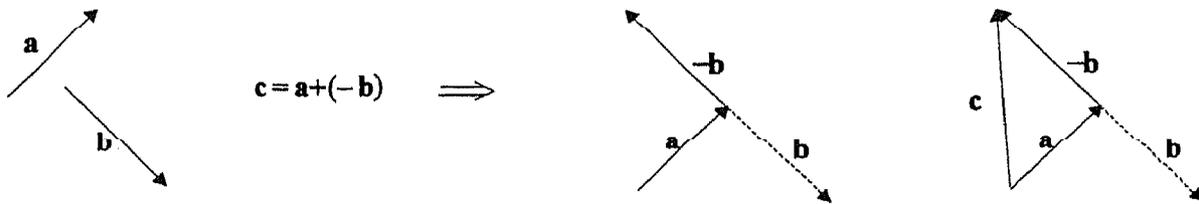


Fig.1.6

El *producto de un vector a por un escalar k* se define como un vector e , que tiene un módulo k veces el de a , dirección la de a , y un sentido que depende del signo del escalar (Fig.1.7). Es decir:

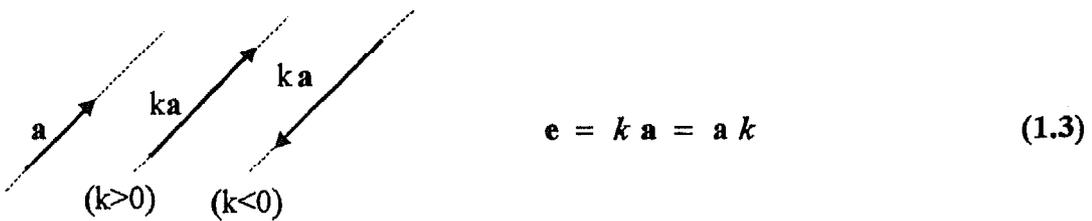


Fig.1.7

Propiedades :

i) La suma es *asociativa*:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

ii) La suma es *conmutativa*:

$$a + b = b + a$$

iii) Existe el *elemento neutro* para la suma, *vector cero 0*, tal que:

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$$

iv) Existe *elemento simétrico* para la suma. Dado un vector \mathbf{a} su simétrico es un vector \mathbf{b} , tal que:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

Así, el simétrico de \mathbf{a} es $\mathbf{b} = -\mathbf{a}$ (el simétrico es el opuesto).

v) El producto de un vector por un escalar es *asociativo*:

$$k(q\mathbf{a}) = (kq)\mathbf{a}$$

vi) El producto de un vector por un escalar es *distributivo* respecto a la suma de escalares:

$$(k+q)\mathbf{a} = k\mathbf{a} + q\mathbf{a}$$

vii) El producto de un vector por un escalar es *distributivo* respecto a la suma de vectores:

$$k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$$

viii) Si $\mathbf{0}$ es el vector cero y 0 es el escalar cero, se cumple que:

$$k\mathbf{0} = 0\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

2.2.- Vectores unitarios

Se llama *vector unitario* a un vector de módulo unidad. Así, un vector unitario en la dirección de \mathbf{a} , \mathbf{u}_a , será:

$$\mathbf{u}_a = \frac{1}{a}\mathbf{a} \quad (1.4)$$

donde a es el módulo de \mathbf{a} . Y como consecuencia de (1.4) se tiene:

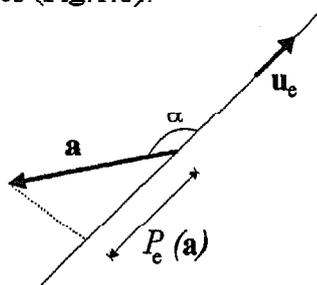
$$\mathbf{a} = a\mathbf{u}_a \quad (1.5)$$

2.3.- Proyección de un vector sobre un eje.

Una recta en el espacio determina una dirección y dos sentidos. Para orientarla se elige como positivo uno de los sentidos, asociando a la dicha recta un vector unitario con la dirección de la recta y con sentido el elegido. Una recta orientada se denomina *eje* (Fig.1.8).

Definimos la *proyección de un vector sobre un eje*, como el escalar que se obtiene de

multiplicar el módulo del vector por el coseno del menor ángulo que forman el vector y el vector unitario asociado a dicho eje. Dado un vector \mathbf{a} , su proyección sobre un eje e , $P_e(\mathbf{a})$, es (Fig. 1.8):



$$P_e(\mathbf{a}) = a \cos \alpha \quad (1.6)$$

Fig.1.8

Propiedades:

- i) Si $\mathbf{a} = \mathbf{b} \Rightarrow P_e(\mathbf{a}) = P_e(\mathbf{b})$
- ii) $P_e(k\mathbf{a}) = k P_e(\mathbf{a})$

2.4.- Triedro de referencia. Componentes cartesianas.

2.4.1.- TRIEDRO DE REFERENCIA.

Se llama *triedro de referencia* a tres ejes perpendiculares que se cortan en un punto denominado *origen del triedro de referencia*. Notaremos a los ejes por X, Y, Z y a los vectores unitarios asociados como $\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y$ y \mathbf{u}_z respectivamente. Podemos distinguir dos tipos de triedros: *dextrógiro* (a derechas) y *levógiro* (a izquierdas). El triedro dextrógiro se puede conseguir con la mano derecha, haciendo coincidir el dedo índice con el eje X , el corazón o medio con el eje Y y el pulgar con el eje Z (Fig. 1.9).

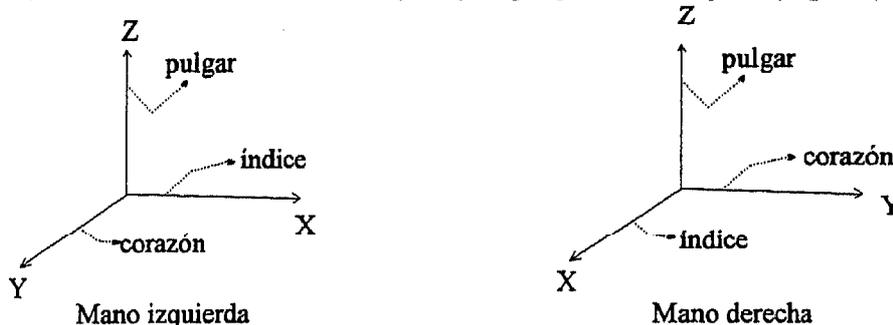


Fig.1.9

En adelante trabajaremos con triedros de referencia dextrógiros y notaremos a $\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y$ y \mathbf{u}_z como \mathbf{i}, \mathbf{j} y \mathbf{k} respectivamente. Es lo que denominaremos *triedro cartesiano*. En él, la posición de un punto P del espacio puede especificarse de diferentes formas (Fig. 1.10). Dicho punto puede referirse respecto del triedro, mediante las variables $(x, y, z), (r, \varphi, \theta)$,

ó (ρ, φ, z) . El primer caso corresponde al *sistema de coordenadas cartesianas*, el segundo al *sistema de coordenadas esféricas* y el último al *sistema de coordenadas cilíndricas*.

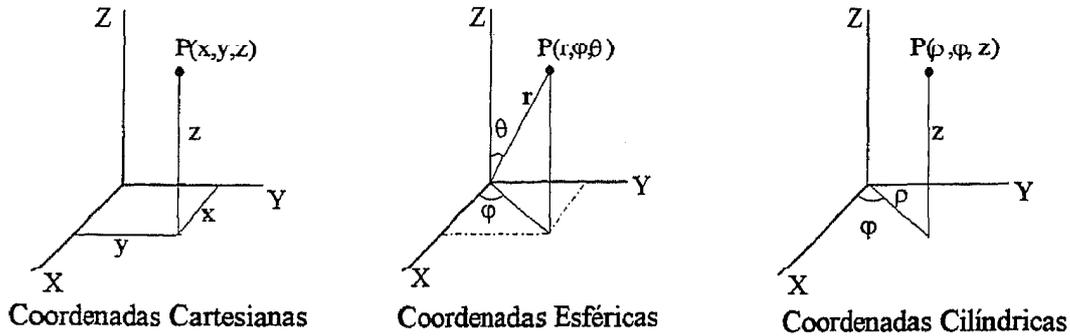


Fig.1.10

Trataremos detalladamente las coordenadas cartesianas, el resto de los sistemas de referencia serán tratados en el Apéndice II.

2.4.2- COMPONENTES CARTESIANAS.

Sean un sistema de coordenadas cartesiano de referencia y un vector **a**. Se ve gráficamente que podemos obtener **a** como la suma de tres vectores dirigidos sobre los ejes X, Y y Z, que son respectivamente **a_x**, **a_y** y **a_z** (Fig.1.11).

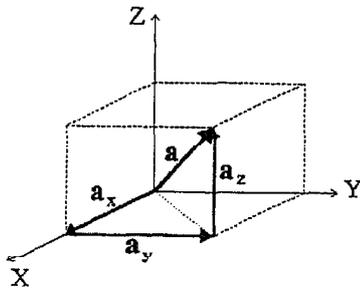


Fig.1.11

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z \quad (1.7)$$

A las proyecciones sobre los ejes X,Y,Z (**a_x**, **a_y**, **a_z**), se les denomina *componentes cartesianas de a* y vienen dadas por:

$$a_i = P_i(\mathbf{a}) = a \cos \alpha_i \quad ; \quad i = x, y, z \quad (1.8)$$

donde α_x , α_y y α_z son los menores ángulos que forman el vector **a** y los vectores unitarios asociados a los ejes X, Y, Z (Fig.1.12). A los cosenos de dichos ángulos se les conoce como *cosenos directores*.

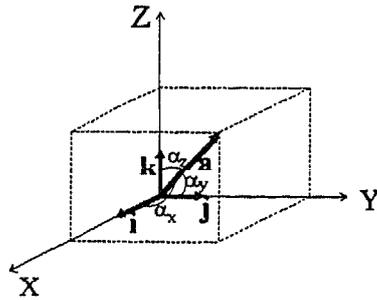


Fig.1.12

De (1.8) se deduce que las componentes pueden ser positivas o negativas dependiendo de los valores de los cosenos directores. Se observa de (1.8) también que:

$$\cos \alpha_x = \frac{a_x}{a}, \quad \cos \alpha_y = \frac{a_y}{a}, \quad \cos \alpha_z = \frac{a_z}{a} \quad (1.9)$$

De las (Fig.1.11 y 1.12) se observa que el vector a_x no es más que la componente de a a la largo del eje X , multiplicado por el vector unitario i . Teniendo esto en cuenta y a partir de (1.7) y (1.8), a se puede escribir como:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} = a (\cos \alpha_x \mathbf{i} + \cos \alpha_y \mathbf{j} + \cos \alpha_z \mathbf{k}) \quad (1.10)$$

a esto se conoce como *expresión analítica de a* en un sistema de coordenadas cartesianas.

En efecto:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_x &= a_x \mathbf{i} = a \cos \alpha_x \mathbf{i} \\ \mathbf{a}_y &= a_y \mathbf{j} = a \cos \alpha_y \mathbf{j} \\ \mathbf{a}_z &= a_z \mathbf{k} = a \cos \alpha_z \mathbf{k} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} = \\ = a (\cos \alpha_x \mathbf{i} + \cos \alpha_y \mathbf{j} + \cos \alpha_z \mathbf{k})$$

Otra forma abreviada de expresar el vector a en un sistema de coordenadas cartesianas es:

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z) = a (\cos \alpha_x, \cos \alpha_y, \cos \alpha_z) \quad (1.11)$$

Es importante resaltar que si cambiamos de sistema de coordenadas cartesiano cambiará la representación del vector, es decir, cambiarán sus componentes, pero el vector seguirá siendo el mismo.

2.5.- Producto escalar de dos vectores:

Dados \mathbf{a} y \mathbf{b} , su *producto escalar*, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, se define como:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a b \cos \alpha \quad (1.15)$$

El *significado geométrico* del producto escalar es que dicho producto es igual al módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él (Fig. 1.13).

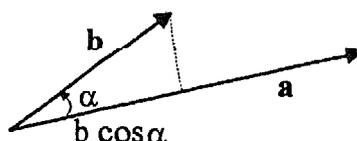


Fig. 1.13

Propiedades

- i) *Commutativo*: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
- ii) *Distributivo* respecto a la suma de vectores: $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{b}$
- iii) *Asociativo respecto a escalares*: $(k \mathbf{a}) \cdot (t \mathbf{b}) = k t (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$
- iv) Si $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$
- v) $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$; $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$
- vi) $a = |\mathbf{a}| = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})^{1/2}$
- vii) $P_c(\mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}$
- viii) $a_x = P_x(\mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i}$; $a_y = P_y(\mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{j}$; $a_z = P_z(\mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{k}$

Una consecuencia de estas propiedades es que:

$$P_c(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = P_c(\mathbf{a}) + P_c(\mathbf{b})$$

En efecto:

La demostración es inmediata a partir de las propiedades (vii) y (ii) del producto escalar.

El producto escalar de dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} en función de las componentes cartesianas se puede expresar como:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (1.16)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \cdot (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) = \\ &= (\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}) a_x b_x + (\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}) a_x b_y + (\mathbf{i} \cdot \mathbf{k}) a_x b_z + \\ &+ (\mathbf{j} \cdot \mathbf{i}) a_y b_x + (\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}) a_y b_y + (\mathbf{j} \cdot \mathbf{k}) a_y b_z + \\ &+ (\mathbf{k} \cdot \mathbf{i}) a_z b_x + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}) a_z b_y + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) a_z b_z \end{aligned}$$

De las propiedades (ii) y (v) resulta:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

El módulo de un vector en función de sus componentes puede expresarse, usando la propiedad (vi), como:

$$a = |\mathbf{a}| = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})^{1/2} = (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)^{1/2} \quad (1.17)$$

A partir de la definición de producto escalar es posible calcular el ángulo que forman \mathbf{a} y \mathbf{b} como:

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{a b} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{a b} \quad (1.18)$$

2.6.- Producto vectorial de dos vectores. Representación vectorial de una superficie.

2.6.1.- PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES.

Dados \mathbf{a} y \mathbf{b} , su *producto vectorial* se define como un vector \mathbf{c} , perpendicular al plano determinado por \mathbf{a} y \mathbf{b} , de módulo el producto de sus módulos por el seno del ángulo que forman y sentido dado por el avance de un tornillo de rosca derecha que se hace girar llevando \mathbf{a} sobre \mathbf{b} siguiendo el menor ángulo (Fig.1.14).

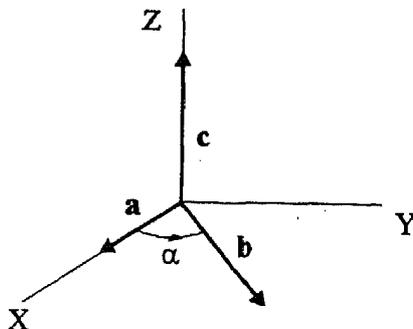
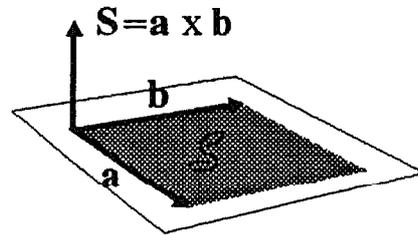
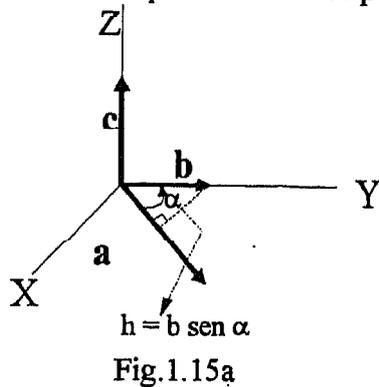


Fig.1.14

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad ; \quad c = a b \sin \alpha \quad (1.19)$$

La interpretación *geométrica* del producto vectorial es que su módulo representa al área del paralelogramo formado por los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} (Fig.1.15a). Por tanto, el producto vectorial podría utilizarse para representar áreas planas (Fig.1.15b).



Propiedades:

i) *Anticonmutativo* (produce inversión en la rotación):

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

ii) *No-asociativo* para el producto vectorial sucesivo:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

En efecto:

Ya que en caso contrario podría darse:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$$

donde el primer miembro de la igualdad es un vector nulo, mientras que el segundo miembro puede ser en general un vector distinto del nulo.

iii) *Asociativo* para la multiplicación por un escalar:

$$k \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times k \mathbf{b} = k (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

iv) *Distributivo* respecto a la suma:

$$\mathbf{c} \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{c} \times \mathbf{a} + \mathbf{c} \times \mathbf{b}$$

v) Si $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$

Una consecuencia de las propiedades anteriores es:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = -\mathbf{j} \times \mathbf{i} = \mathbf{k}; \mathbf{j} \times \mathbf{k} = -\mathbf{k} \times \mathbf{j} = \mathbf{i}; \mathbf{k} \times \mathbf{i} = -\mathbf{i} \times \mathbf{k} = \mathbf{j}; \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0} \quad (1.20)$$

En función de las componentes cartesianas, el producto vectorial se expresa:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k} \quad (1.21)$$

En efecto:

Expresando los vectores en componentes y aplicando la propiedad (iv):

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \times (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) = \\ &= (\mathbf{i} \times \mathbf{i})a_x b_x + (\mathbf{i} \times \mathbf{j})a_x b_y + (\mathbf{i} \times \mathbf{k})a_x b_z + \\ &+ (\mathbf{j} \times \mathbf{i})a_y b_x + (\mathbf{j} \times \mathbf{j})a_y b_y + (\mathbf{j} \times \mathbf{k})a_y b_z + \\ &+ (\mathbf{k} \times \mathbf{i})a_z b_x + (\mathbf{k} \times \mathbf{j})a_z b_y + (\mathbf{k} \times \mathbf{k})a_z b_z \end{aligned}$$

De (1.20):

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k}$$

2.6.2.- REPRESENTACIÓN VECTORIAL DE UNA SUPERFICIE.

Se ha visto que es posible asociar un vector \mathbf{c} ($\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$) a una superficie plana, la del paralelogramo generado por \mathbf{a} y \mathbf{b} , de área igual al módulo de su producto vectorial. Similarmente, si consideramos una superficie plana cualquiera \mathcal{S} (Fig.1.16), cuya periferia C está orientada como indica la flecha, podemos asociarle un vector \mathbf{S} , de módulo, S , igual al área de la superficie, con dirección perpendicular a la superficie y con sentido aquél en el cual avanza un tornillo de rosca derecha que gire en el mismo sentido en el que se orienta la superficie.

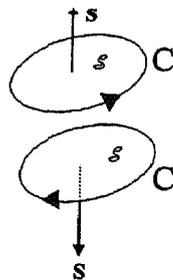


Fig.1.16

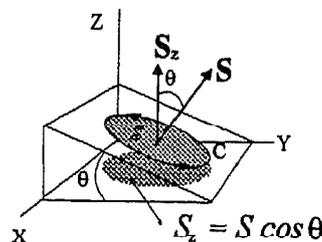


Fig.1.17

Supongamos que tenemos una superficie \mathcal{S} que forma un ángulo θ con el plano XY (Fig.1.17). El área de la proyección de \mathcal{S} en el plano XY es $S \cos \theta$. Pero la normal al plano de la superficie también forma un ángulo θ con el eje Z . Por consiguiente la componente Z del vector \mathbf{S} es $S_z = S \cos \theta$, que nos da el área de la superficie proyectada sobre el plano XY . De la misma manera S_x nos la daría respecto del plano YZ y S_y del plano XZ .

Si una superficie \mathcal{S} no es plana, se divide en áreas planas representadas por S_i , de modo que:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \dots + \mathbf{S}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{S}_i \tag{1.22}$$

donde S_i es el vector que representa a la superficie \mathcal{S}_i (Fig.1.18). Esta relación no es cierta, en general, para los módulos de S_i .

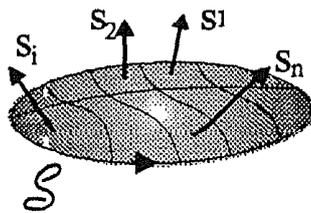


Fig.1.18

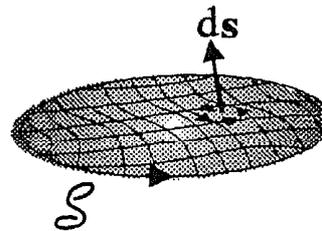


Fig.1.19

Si una superficie \mathcal{S}_i tiene que ser muy pequeña para que pueda considerarse plana, se representa mediante un vector $d\mathbf{S}$, cuyo módulo, dS , es el área del elemento \mathcal{S}_i , su dirección la normal a la superficie y, su sentido el de avance de un tornillo de rosca derecha cuando se le hace girar según un sentido fijado. Cuando se toma una superficie \mathcal{S} limitada por un contorno C y se fija un sentido para el recorrido de dicho contorno, al dividir la superficie en elementos $d\mathcal{S}$, el recorrido del contorno de estos elementos debe tener el mismo sentido de recorrido que el del contorno C (Fig.1.19). Entonces se cumple:

$$\mathbf{S} = \int d\mathbf{S} \quad , \quad S \neq \int dS \tag{1.23}$$

Si la superficie es cerrada (encierra un volumen), los vectores $d\mathbf{S}$ representativos de cualquier elemento de esta superficie tienen, por convenio, el sentido tomado de dentro a fuera del volumen que encierra la superficie (Fig.1.20), pudiéndose demostrar que en este caso \mathbf{S} es el vector nulo.

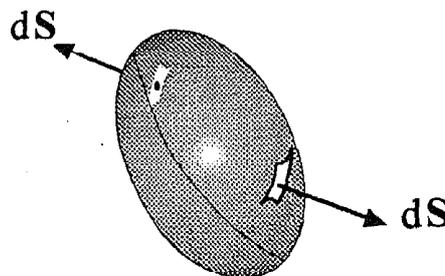


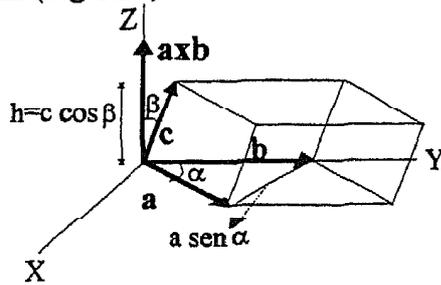
Fig.1.20

2.7.- Producto mixto de tres vectores.

Dados \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} se define su *producto mixto* como:

$$\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (1.24)$$

La interpretación geométrica que admite es que su valor absoluto coincide con el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores \mathbf{a} , \mathbf{b} , y \mathbf{c} tomados con un origen común (Fig. 1.21).



$$V = \text{área base} \cdot h = a b c \operatorname{sen} \alpha \cos \beta$$

Fig. 1.21

Se expresa en coordenadas cartesianas como:

$$\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (1.25)$$

En efecto:

Sabemos que

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k}$$

y si multiplicamos escalarmente \mathbf{c} por este resultado se obtiene:

$$\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (a_y b_z - a_z b_y) c_x + (a_z b_x - a_x b_z) c_y + (a_x b_y - a_y b_x) c_z$$

Si comparamos esta última expresión con el producto vectorial de \mathbf{a} y \mathbf{b} , vemos que:

$$\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

El producto mixto cumple la denominada *propiedad cíclica*:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \quad (1.26)$$

En efecto:

En la expresión (1.26) se observan dos permutaciones de las posiciones de los vectores en cada lado de la igualdad. Usando (1.25), estas permutaciones son equivalentes a realizar dos permutaciones en las filas del determinante que, como es sabido, no altera el resultado.

3.- Teoría de momentos

3.1.- Momento de un vector con respecto a un punto

El *momento de un vector a* (deslizante o ligado) *con respecto a un punto O* (Fig.1.22), M_o , se define como:

$$\mathbf{M}_o = \mathbf{r} \times \mathbf{a} \quad (1.27)$$

siendo \mathbf{r} un vector con origen en O y extremo en un punto A cualquiera de la recta soporte de \mathbf{a} . El módulo del momento de \mathbf{a} con respecto a O , M_o , se obtiene multiplicando el módulo de \mathbf{a} por la distancia más corta entre su recta soporte y el punto O , d (Fig.1.22).

$$M_o = a r \operatorname{sen} \alpha = a d \quad (1.28)$$

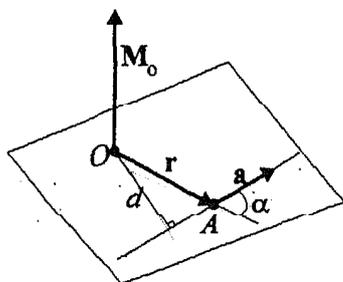


Fig.1.22

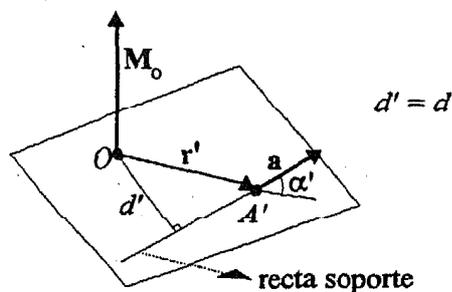


Fig.1.23

En efecto:

De la (Fig. 1.22) se observa que $d = r \operatorname{sen} \alpha$.

El momento de un vector con respecto a un punto no varía al cambiar el punto de aplicación de \mathbf{a} sobre la recta soporte. Así, cualquier *vector deslizante* de igual módulo, dirección, sentido y recta soporte, pero distinto punto de aplicación que \mathbf{a} tiene el mismo momento respecto al mismo punto O que dicho vector \mathbf{a} .

En efecto:

De las (Fig. 1.22 y 23) se observa que aún cambiando el punto de aplicación de \mathbf{a} sobre la recta soporte, la distancia menor entre el O y dicha recta sigue siendo la misma.

Teorema de cambio de polo

Si O y O' son dos puntos y \mathbf{a} un vector (Fig. 1.24) se cumple que:

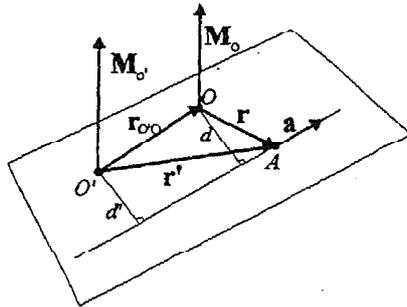


Fig. 1.24

$$\mathbf{M}_{O'}(\mathbf{a}) = \mathbf{M}_O(\mathbf{a}) + \mathbf{r}_{O'O} \times \mathbf{a} \quad (1.29)$$

En efecto:

De la (Fig. 1.24) se observa que:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{r}_{O'O}$$

con lo cual:

$$\mathbf{M}_{O'}(\mathbf{a}) = \mathbf{r}' \times \mathbf{a} = (\mathbf{r} + \mathbf{r}_{O'O}) \times \mathbf{a} = \mathbf{r} \times \mathbf{a} + \mathbf{r}_{O'O} \times \mathbf{a} = \mathbf{M}_O(\mathbf{a}) + \mathbf{r}_{O'O} \times \mathbf{a}$$

Teorema de Varignon:

Si un vector es suma de varios *concurrentes* (tienen el mismo origen), su momento respecto a un punto O es la suma de los momentos de los sumandos con respecto al mismo punto.

En efecto:

$$\left. \begin{array}{l} \text{si } \mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_n \\ \text{y} \\ (\mathbf{M}_O)_i = \mathbf{r} \times \mathbf{a}_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{r} \times \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r} \times \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^n (\mathbf{M}_O)_i$$

3.2.- Momento de un vector con respecto a un eje

Dados un eje e cuyo vector unitario es \mathbf{u}_e , un punto O cualquiera sobre dicho eje y un vector \mathbf{a} . Se define el momento del vector \mathbf{a} con respecto al eje e (Fig.1.25), $M_e(\mathbf{a})$, como:

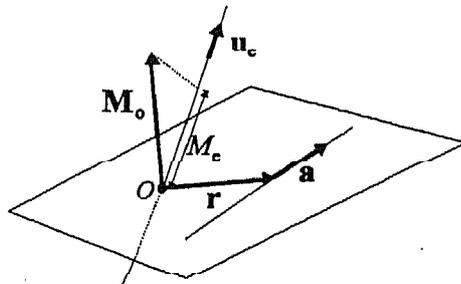


Fig.1.25

$$M_e(\mathbf{a}) = P_e(\mathbf{M}_O(\mathbf{a})) = \mathbf{M}_O(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u}_e \quad (1.30)$$

Propiedades:

i) El momento de un vector con respecto a un eje no depende del punto del eje elegido para calcularlo.

En efecto:

Sean O y O' dos puntos sobre el eje respecto de los cuales vamos a calcular el momento. De (1.30) y (1.29) obtenemos:

$$M_e(\mathbf{a}) = \mathbf{M}_O(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u}_e = (\mathbf{M}_{O'}(\mathbf{a}) - \mathbf{r}_{O'O} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{u}_e = \mathbf{M}_{O'}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u}_e - (\mathbf{r}_{O'O} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{u}_e$$

$\mathbf{r}_{O'O}$ está sobre el eje (paralelo a \mathbf{u}_e) y el resultado de $(\mathbf{r}_{O'O} \times \mathbf{a})$ es un vector perpendicular a $\mathbf{r}_{O'O}$ (también lo será a \mathbf{u}_e). Entonces:

$$M_e(\mathbf{a}) = \mathbf{M}_O(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u}_e = \mathbf{M}_{O'}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u}_e - 0 = \mathbf{M}_{O'}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u}_e$$

ii) El momento de un vector con respecto a un eje es nulo si dicho vector y el eje son coplanarios.

En efecto:

A partir de (1.30) se obtiene:

$$M_e(\mathbf{a}) = \mathbf{M}_o(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u}_e = (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{u}_e$$

Por ser coplanarios \mathbf{r} debe estar en el mismo plano, luego $(\mathbf{r} \times \mathbf{a})$ dará lugar a un vector perpendicular el plano (para que sea perpendicular a \mathbf{r} y a \mathbf{a}). Luego será perpendicular también a \mathbf{u}_e . Así:

$$M_e(\mathbf{a}) = (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{u}_e = 0$$

3.3.- Sistema de vectores deslizantes

Dado un sistema de vectores deslizantes A_1, A_2, \dots, A_n se denomina *resultante del sistema* al vector libre \mathbf{R} igual a la suma de los vectores libres equipolentes a A_1, A_2, \dots, A_n .

Se define el *momento resultante del sistema respecto a un punto O*, \mathbf{M}_o , como la suma de los momentos con respecto a O de cada uno de los vectores del sistema. El punto O es el denominado *centro de reducción* o *centro de momentos*. Al tomar diferentes centros de reducción se obtienen diferentes momentos resultantes para el mismo sistema, luego el vector momento resultante es un vector ligado. La relación entre los momentos resultantes con respecto a O y a O' es la *ecuación de cambio de centro de reducción* y tiene la forma:

$$\mathbf{M}_{o'} = \mathbf{M}_o + \mathbf{r}_{o'o} \times \mathbf{R} \quad (1.31)$$

Todo sistema que tenga resultante nula recibe el nombre de *par*. En estos sistemas el momento resultante es independiente del centro de reducción (evidente a partir de (1.31)).

El vector resultante, \mathbf{R} , es un *invariante vectorial del sistema* ya que es independiente del centro de reducción elegido.

El producto escalar de \mathbf{R} con el momento resultante del sistema con respecto a cualquier punto de reducción es un *invariante escalar del sistema*.

En efecto:

$$\text{De (1.31): } \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_{o'} = \mathbf{R} \cdot (\mathbf{M}_o + \mathbf{r}_{o'o} \times \mathbf{R}) = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_o + \mathbf{R} \cdot (\mathbf{r}_{o'o} \times \mathbf{R}) = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_o$$

Esta última propiedad equivale a decir que la proyección del momento resultante sobre la recta soporte de \mathbf{R} es constante.

En efecto:

De la proposición anterior:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_o \cdot \mathbf{R} = \mathbf{M}_{o'} \cdot \mathbf{R} &\Leftrightarrow M_o R \cos\alpha = M_{o'} R \cos\beta \Leftrightarrow R P_R(\mathbf{M}_o) = R P_R(\mathbf{M}_{o'}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow P_R(\mathbf{M}_o) = P_R(\mathbf{M}_{o'}) \end{aligned}$$

donde α y β son los ángulos que forman \mathbf{M}_o y $\mathbf{M}_{o'}$, respectivamente con la recta soporte de \mathbf{R} .

El *momento mínimo del sistema* es el momento resultante que sea paralelo a \mathbf{R} .

En efecto:

Como hemos visto que las proyecciones han de ser iguales:

$$P_R(\mathbf{M}_{o'}) = P_R(\mathbf{M}_o) = M_o \cos\alpha \Leftrightarrow M_o = \frac{P_R(\mathbf{M}_o)}{\cos\alpha}$$

por lo que el momento mínimo se logrará cuando el denominador sea máximo, es decir, cuando $\alpha=0$

Se denomina *eje central* al lugar geométrico de los puntos respecto a los cuales el momento resultante del sistema es mínimo.

4.- Cálculo vectorial

4.1.- Derivada de una función vectorial de variable real.

Sea un vector, \mathbf{h} , que depende de un escalar λ , $\mathbf{h}(\lambda)$. Esto significa que el vector varía (módulo y/o dirección) al hacerlo λ (Fig.1.26), de modo que los extremos del vector $\mathbf{h}(\lambda)$ generan una curva (Fig.1.27).

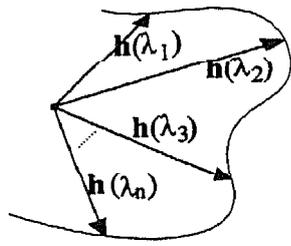


Fig.1.26

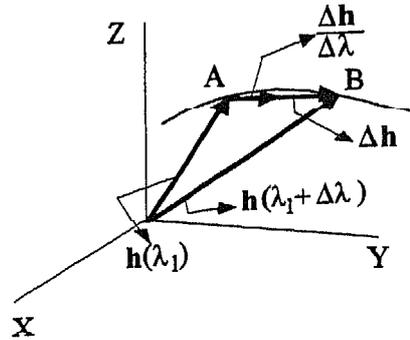


Fig.1.27

Dado un sistema de referencia, si consideramos $\mathbf{h}(\lambda_1)$ y $\mathbf{h}(\lambda_1 + \Delta \lambda)$ (Fig.1.27) vemos que:

$$\Delta \mathbf{h}(\lambda_1) = \mathbf{h}(\lambda_1 + \Delta \lambda) - \mathbf{h}(\lambda_1)$$

Se define la derivada del vector \mathbf{h} respecto del escalar λ como:

$$\frac{d\mathbf{h}}{d\lambda} = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{h}}{\Delta\lambda} = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{\mathbf{h}(\lambda + \Delta\lambda) - \mathbf{h}(\lambda)}{\Delta\lambda} \quad (1.32)$$

y vemos que es un vector, cuya dirección es tangente a la curva descrita por los extremos del vector \mathbf{h} , en el punto considerado (Fig. 1.29).

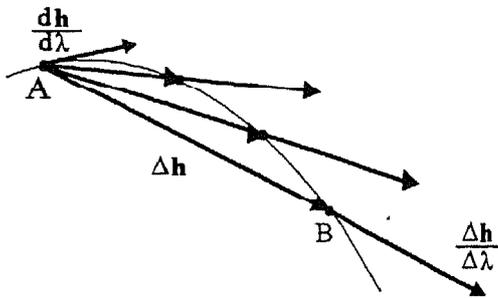


Fig.1.28

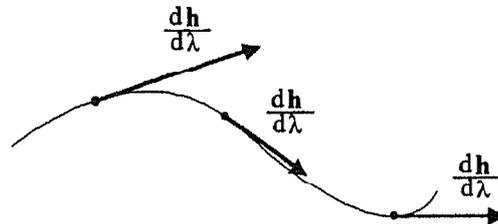


Fig.1.29

En efecto:

Para un $\Delta\lambda$ dado $\Delta\mathbf{h}/\Delta\lambda$ tiene la dirección de $\Delta\mathbf{h}$ y en el límite ($\Delta\lambda \rightarrow 0$) B se encuentra muy cercano a A y $\Delta\mathbf{h}/\Delta\lambda$ coincide en dirección con la tangente en A (Fig. 1.28).

Propiedades:

i) *Derivada de la suma de vectores:*

$$\frac{d}{d\lambda} (\mathbf{a}(\lambda) \pm \mathbf{b}(\lambda)) = \frac{d\mathbf{a}(\lambda)}{d\lambda} \pm \frac{d\mathbf{b}(\lambda)}{d\lambda}$$

ii) *Derivada del producto de una función vectorial por un escalar*

$$\text{a) Si } k = \text{cte: } \frac{d}{d\lambda}(k \mathbf{a}(\lambda)) = k \frac{d\mathbf{a}(\lambda)}{d\lambda}$$

$$\text{b) Si } k = k(\lambda): \frac{d}{d\lambda}(k \mathbf{a}(\lambda)) = k(\lambda) \frac{d\mathbf{a}(\lambda)}{d\lambda} + \mathbf{a}(\lambda) \frac{dk(\lambda)}{d\lambda}$$

iii) *Derivada del producto escalar de dos funciones vectoriales*

$$\frac{d}{d\lambda}(\mathbf{a}(\lambda) \cdot \mathbf{b}(\lambda)) = \frac{d\mathbf{a}(\lambda)}{d\lambda} \cdot \mathbf{b}(\lambda) + \mathbf{a}(\lambda) \cdot \frac{d\mathbf{b}(\lambda)}{d\lambda}$$

iv) *Derivada del producto vectorial de dos funciones vectoriales*

$$\frac{d}{d\lambda}(\mathbf{a}(\lambda) \times \mathbf{b}(\lambda)) = \frac{d\mathbf{a}(\lambda)}{d\lambda} \times \mathbf{b}(\lambda) + \mathbf{a}(\lambda) \times \frac{d\mathbf{b}(\lambda)}{d\lambda}$$

$$\text{v) Si } \mathbf{a} = \mathbf{a}(s) \text{ y } s = s(\lambda): \frac{d\mathbf{a}}{d\lambda} = \frac{d\mathbf{a}}{ds} \frac{ds}{d\lambda}$$

De estas propiedades se deduce que:

$$\frac{d\mathbf{a}}{d\lambda} = \frac{\mathbf{a}}{a} \cdot \frac{da}{d\lambda}$$

En efecto:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})}{d\lambda} &= \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{d\lambda} + \frac{d\mathbf{a}}{d\lambda} \cdot \mathbf{a} = 2 \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{d\lambda} \\ \frac{d(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})}{d\lambda} &= \frac{d(a^2)}{d\lambda} = 2a \frac{da}{d\lambda} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d\mathbf{a}}{d\lambda} = \frac{\mathbf{a}}{a} \cdot \frac{da}{d\lambda}$$

Si la expresión de $\mathbf{h}(\lambda)$ en componentes cartesianas es:

$$\mathbf{h}(\lambda) = h_x(\lambda)\mathbf{i} + h_y(\lambda)\mathbf{j} + h_z(\lambda)\mathbf{k} \quad (1.33)$$

y suponiendo que los vectores unitarios \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} no dependen de λ , entonces, utilizando las propiedades (i) y (ii), se obtiene:

$$\frac{d\mathbf{h}}{d\lambda} = \frac{dh_x}{d\lambda}\mathbf{i} + \frac{dh_y}{d\lambda}\mathbf{j} + \frac{dh_z}{d\lambda}\mathbf{k} \quad (1.34)$$

En general un vector $\mathbf{h}(\lambda)$ se puede expresar como:

$$\mathbf{h}(\lambda) = h(\lambda) \mathbf{u}(\lambda) \quad (1.35)$$

donde \mathbf{u} es un vector unitario en la dirección de \mathbf{h} , entonces:

a) Si el vector \mathbf{h} sólo varía en módulo, sus extremos describen una recta, que es la que contiene a todos los vectores, luego \mathbf{h} será paralelo a $d\mathbf{h}/d\lambda$.

En efecto:

$$\text{si } \mathbf{u}(\lambda) = \text{cte} \Rightarrow \frac{d\mathbf{h}}{d\lambda} = \frac{dh}{d\lambda} \mathbf{u} \Leftrightarrow \frac{d\mathbf{h}}{d\lambda} \parallel \mathbf{u}$$

b) Si el vector \mathbf{h} sólo varía en dirección, pero no en módulo, los extremos de \mathbf{h} describen una circunferencia y \mathbf{h} será perpendicular a $d\mathbf{h}/d\lambda$.

En efecto:

si $h(\lambda) = \text{cte} \Rightarrow \frac{d\mathbf{h}}{d\lambda} = h \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda}$ y como los extremos del vector unitario \mathbf{u} describen una circunferencia al variar λ , el vector $d\mathbf{u}/d\lambda$ tendrá dirección normal a $\mathbf{u} \Rightarrow \frac{d\mathbf{h}}{d\lambda} \perp \mathbf{u}$

c) Si \mathbf{h} varía en módulo y en dirección la derivada de un vector se puede descomponer como suma de dos vectores, uno que lleva la dirección del vector sin derivar y el otro una dirección perpendicular a él. De modo que es posible separar las variaciones en el módulo de \mathbf{h} ($dh/d\lambda$), de las variaciones en dirección ($d\mathbf{u}/d\lambda$), es decir:

$$\frac{d\mathbf{h}}{d\lambda} = \frac{dh}{d\lambda} \mathbf{u} + h \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda} \quad (1.36)$$

4.2.- Integración de una función vectorial de variable real.

Dada una magnitud vectorial, $\mathbf{h}(\lambda)$, que depende de un escalar λ decimos que existe otra magnitud vectorial, $\mathbf{k}(\lambda)$, a la que llamamos *integral indefinida de $\mathbf{h}(\lambda)$* , si se cumple:

$$\frac{d\mathbf{k}}{d\lambda} = \mathbf{h}(\lambda)$$

y denotamos a \mathbf{k} como:

$$\mathbf{k} = \int \mathbf{h} d\lambda + \mathbf{c} \quad (1.37)$$

donde \mathbf{c} representa cualquier vector constante.

En cuanto a la integral definida en un cierto intervalo $[\lambda_1, \lambda_2]$ de una magnitud vectorial, $\mathbf{h}(\lambda)$, se procede de forma similar al caso de funciones reales. Dividimos el intervalo $[\lambda_1, \lambda_2]$ en una partición numerable de N intervalos $[\lambda_{i-1}, \lambda_i]$ de longitud $\Delta\lambda_i = \lambda_i - \lambda_{i-1}$, de manera que:

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \sum_{i=1}^N \Delta\lambda_i$$

Sea $\xi_i \in (\lambda_{i-1}, \lambda_i)$, definimos la integral de la función vectorial \mathbf{h} de variable real λ como:

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \mathbf{h}(\lambda) d\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \mathbf{h}(\xi_i) \Delta\lambda_i \quad (1.38)$$

Propiedades:

i) Si \mathbf{h} y \mathbf{g} son funciones vectoriales de λ :

$$\int (\mathbf{h} + \mathbf{g}) d\lambda = \int \mathbf{h} d\lambda + \int \mathbf{g} d\lambda$$

ii) Si α no es función de λ :

$$\int \alpha \mathbf{h} d\lambda = \alpha \int \mathbf{h} d\lambda$$

iii) Si $c \in [a, b]$ entonces:

$$\int_a^b \mathbf{h} d\lambda = \int_a^c \mathbf{h} d\lambda + \int_c^b \mathbf{h} d\lambda$$

iv) Si $\mathbf{v} = \text{cte}$ y γ es función de λ : a) $\int \mathbf{v} \cdot \mathbf{h} d\lambda = \mathbf{v} \cdot \int \mathbf{h} d\lambda$

$$\text{b) } \int \mathbf{v} \times \mathbf{h} d\lambda = \mathbf{v} \times \int \mathbf{h} d\lambda$$

$$\text{c) } \int \gamma \mathbf{v} d\lambda = \mathbf{v} \int \gamma d\lambda$$

$$\text{iv) } \int_a^b \mathbf{h} d\lambda = - \int_b^a \mathbf{h} d\lambda$$

Si la magnitud vectorial, \mathbf{h} , está representada en un sistema cartesiano de referencia y son h_x , h_y , h_z sus componentes en dicho sistema, la integral de $\mathbf{h}(\lambda)$ se puede descomponer en:

$$\int \mathbf{h}(\lambda) d\lambda = \left(\int h_x(\lambda) d\lambda \right) \mathbf{i} + \left(\int h_y(\lambda) d\lambda \right) \mathbf{j} + \left(\int h_z(\lambda) d\lambda \right) \mathbf{k} \quad (1.39)$$

5.- Introducción a la teoría de campos.

5.1.- Definición de campo.

Un *campo* es toda magnitud física que toma un valor para cada punto del espacio y en cada instante de tiempo independientemente del sistema de coordenadas elegido.

Si la magnitud física es un escalar $\phi(x,y,z,t)$ hablamos de un *campo escalar*. Se trata pues de una relación de correspondencia que asigna a cada punto de una cierta región del espacio, Ω , en un instante dado, un único número, el escalar $\phi(x,y,z,t)$ (Fig.1.30). Cuando la magnitud física es un vector $\mathbf{A}(x,y,z,t)$ hablamos de un *campo vectorial*. En este caso se trata de una relación de correspondencia que asigna en un instante dado a cada punto de una cierta región del espacio, Ω , un vector $\mathbf{A}(x,y,z,t)$ (Fig.1.31).

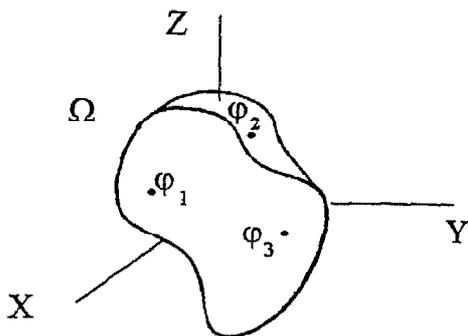


Fig.1.30

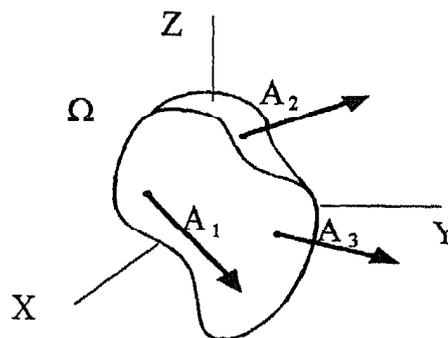


Fig.1.31

Se dice que un campo, escalar o vectorial es *estacionario* cuando la magnitud física que representa el campo no depende del tiempo:

$$\varphi(x, y, z, t) = \varphi(x, y, z)$$

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = \mathbf{A}(x, y, z)$$

5.2.- Representación gráfica de un campo escalar. Superficies de nivel.

Una forma sencilla de obtener información de un campo escalar es a través de la representación de sus superficies de nivel.

Dado un campo escalar $\varphi(x, y, z)$ se definen las *superficies de nivel o equiescalares* como el lugar geométrico de los puntos del espacio que tienen el mismo valor de φ . Dos superficies equiescalares cualesquiera no pueden cortarse ni tener puntos comunes ya que esto supondría que en el mismo punto del espacio existen dos valores distintos para el mismo campo. Si φ_0 es un valor determinado de la magnitud φ , la superficie de nivel asociada a él estará constituida por los puntos del espacio que verifiquen $\varphi(x, y, z) = \varphi_0$, por lo que existirán tantas superficies de nivel como valores posibles de φ_0 . El convenio usual para su representación es trazar algunas de las posibles superficies de nivel a las que correspondiesen los valores de la magnitud escalar $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_i, \dots$ de modo que la diferencia entre el valor de dos superficies consecutivas sea constante (Fig.1.32). Este convenio permite visualizar la forma del campo y su variación, ya que una mayor cantidad de superficies de nivel en una región dada implicará mayor variación del campo.

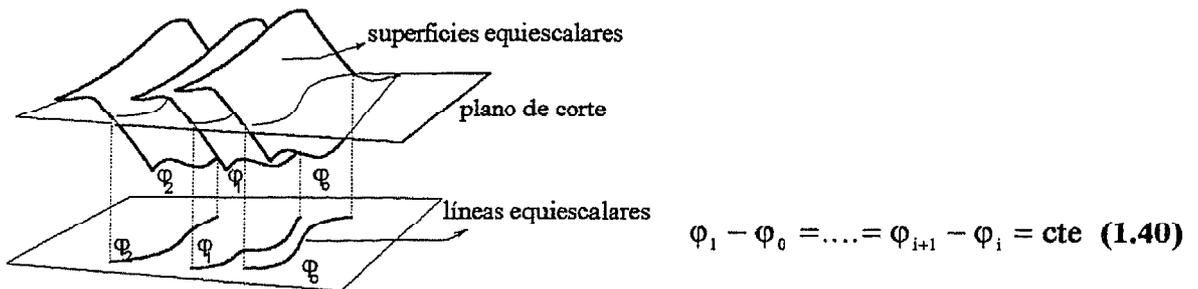


Fig.1.32

En numerosas ocasiones resulta más clara la representación del campo a partir de las *líneas equiescalares o líneas de nivel*. Estas líneas se obtienen al intersectar un plano con las superficies equiescalares. En la representación debe cumplirse que $\varphi_{i+1} - \varphi_i = cte$, para cualquier valor de i (Fig.1.32).

5.3.- Representación gráfica de un campo vectorial. Líneas de campo.

La representación gráfica de un campo vectorial $A(x,y,z,t)$ se realiza mediante las llamadas *líneas de campo* o *líneas vectoriales*, que se caracterizan porque los vectores campo son tangentes a ellas en todo punto. A estas líneas se le asocia el mismo sentido que A (Fig.1.33).

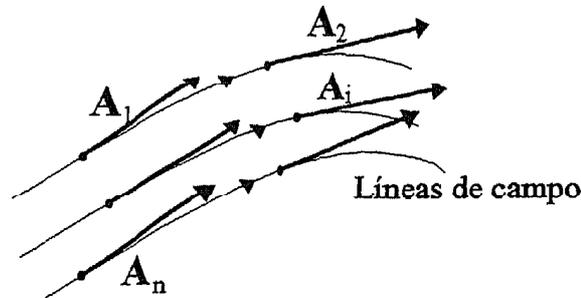


Fig.1.33

Con objeto de obtener información sólo se dibujan algunas líneas de campo. Para ello se suele seguir el siguiente convenio:

$$\frac{dN}{dS_n} = k |A| \quad (1.41)$$

donde dN es el número de líneas de campo que atraviesan la superficie transversal a dichas líneas, dS_n , y k es una constante que suele tomarse igual a la unidad (Fig.1.34).

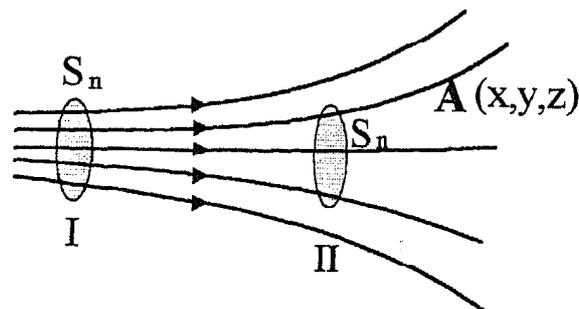


Fig.1.34

El concepto de líneas de campo permite hacerse una idea de la dirección, sentido e intensidad de campo en una determinada región. Así, de la Fig.1.34 se observa que el campo es más intenso en I que en II ya que $(N/S_n)_I > (N/S_n)_{II}$.

5.4.- Flujo y circulación.

Ambas magnitudes ayudan a visualizar propiedades de un campo vectoriales y no tienen carácter local.*

5.4.1.- FLUJO, Φ .

Se define el *flujo elemental* de campo vectorial \mathbf{A} a través de una superficie infinitesimal dS , $\delta\Phi$, como:

$$\delta\Phi = A dS \cos\alpha = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.42)$$

donde α es el ángulo entre \mathbf{A} y el vector $d\mathbf{S}$ (Fig.1.35).

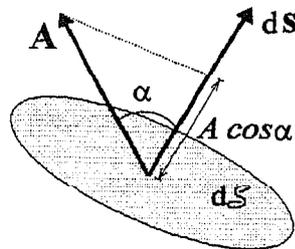


Fig.1.35

A partir de (1.42) podemos definir el *flujo del campo \mathbf{A} a través a una superficie \mathcal{S}* , Φ , como:

$$\Phi = \int_{\mathcal{S}} \delta\Phi = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_S ds \quad (1.43)$$

* Sea φ una magnitud con valores en cada punto del espacio (*magnitud local*) y Φ una magnitud en la que no se puede definir un valor en un punto (*no local*). La nomenclatura utilizada para *cantidades infinitesimales* de estas magnitudes es respectivamente, $d\varphi$ y $\delta\Phi$. Cuando se integran estas magnitudes entre dos puntos del espacio obtendremos:

$$\int_1^2 d\varphi = \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \quad \text{Es decir, la diferencia de valores de } \varphi \text{ entre los puntos 1 y 2}$$

$$\int_1^2 \delta\Phi = \Phi \quad \text{Es la cantidad total de } \Phi \text{ entre 1 y 2, ya que la integral lo que ha hecho es sumar pequeñas cantidades de } \Phi.$$

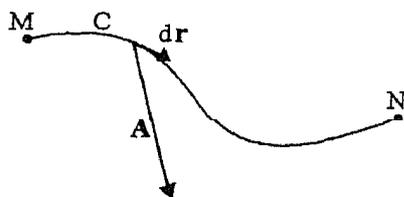
El número de líneas de campo que atraviesan la superficie \mathcal{S} representa el flujo a través de dicha superficie. (Se obtiene directamente de sustituir (1.41) en (1.43)). Además, de (1.42) se puede deducir que el flujo no está definido para un punto del campo (si $ds \rightarrow 0$, $\delta\Phi \rightarrow 0$).

5.4.2.- CIRCULACIÓN, Γ .

Se define la *circulación elemental* de un campo vectorial A a lo largo de un elemento de línea dr , $\delta\Gamma$, como:

$$\delta\Gamma = A \cdot dr \quad (1.44)$$

Si C es una curva comprendida entre M y N , totalmente contenida en el campo vectorial (Fig.1.36), la *circulación de dicho campo vectorial A sobre la curva C* , Γ , se define como:



$$\Gamma = \int_C A \cdot dr = \int_{M,C}^N A \cdot dr \quad (1.45)$$

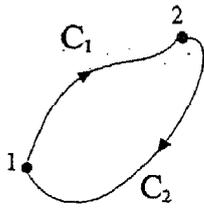
Fig.1.36

Como se ve, en general, la circulación depende de la curva, y no es una magnitud local (de (1.44) es evidente que si $dr \rightarrow 0$, $\delta\Gamma \rightarrow 0$).

Si para cualquier curva cerrada, C , se verifica que $\oint_C A \cdot dr = 0$, entonces la circulación es independiente de la curva.

En efecto:

Si dividimos la curva C en dos curvas, C_1 y C_2 , de forma que :



$$\left. \begin{aligned} \oint_C A \cdot dr &= \int_{1,C_1}^2 A \cdot dr + \int_{2,C_2}^1 A \cdot dr = \int_{1,C_1}^2 A \cdot dr - \int_{1,C_2}^2 A \cdot dr \\ \text{Como } \oint_C A \cdot dr &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \int_{1,C_1}^2 A \cdot dr = \int_{1,C_2}^2 A \cdot dr$$

A un campo que cumpla esta condición se la llama *conservativo* y admite un campo escalar asociado llamado *potencial*.

5.5.- Gradiente. Divergencia. Rotacional.

A diferencia del flujo y de la circulación, estas tres magnitudes nos hablan de características locales de los campos escalares, en el caso del gradiente, y de los vectoriales para la divergencia y el rotacional.

5.5.1.- GRADIENTE.

Sean φ_1 y φ_2 dos superficies equiescalares del campo $\varphi(x,y,z)$. Al ir de un punto P en φ_1 a cualquier punto, Q, de φ_2 , la función $\varphi(x,y,z)$ experimenta un cambio $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ (Fig.1.37). Se define la *derivada direccional* del escalar φ en la dirección dada por el vector unitario u_r como:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\Delta r} = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta r} \tag{1.46}$$

su significado es el cambio de φ por unidad de longitud en la dirección dada por u_r (Fig.1.38).

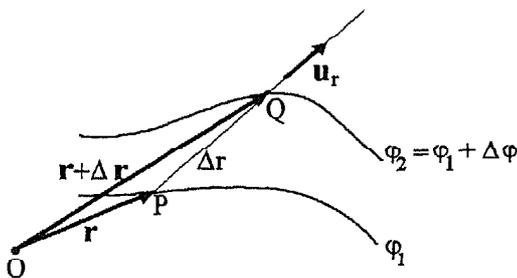


Fig.1.37

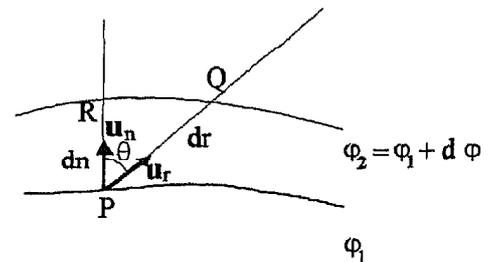


Fig.1.38

La derivada direccional a lo largo de la normal es, entonces, $\frac{d\varphi}{dn}$ y de la (Fig.1.38) se observa que $dn = dr \cos\theta$. Luego:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{d\varphi}{dn} \frac{dn}{dr} = \frac{d\varphi}{dn} \cos\theta \tag{1.47}$$

Se define el *gradiente* de φ , $\mathbf{grad} \varphi$, en un punto P como un vector cuyo módulo es el valor absoluto de la derivada direccional según la dirección normal a la superficie equiescalar en el punto P y cuya dirección y sentido vienen dadas por un vector unitario normal a dicha superficie, \mathbf{n} , con sentido el de crecimiento de φ (Fig. 1.39). Esto es:

$$\mathbf{grad} \varphi = \left| \frac{d\varphi}{dn} \right| \mathbf{n} \quad (1.48)$$

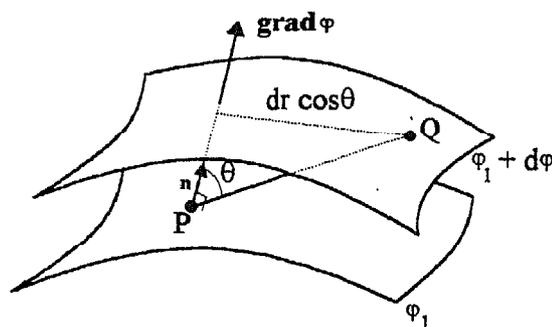


Fig. 1.39

Usando esta expresión se puede reescribir (1.47) como:

$$\frac{d\varphi}{dr} = |\mathbf{grad} \varphi| \cos \theta \quad (1.49)$$

Además recordando la definición de la proyección:

$$\frac{d\varphi}{dr} = |\mathbf{grad} \varphi| \cos \theta = \mathbf{grad} \varphi \cdot \mathbf{u}_r \quad (1.50)$$

o también:

$$d\varphi = \mathbf{grad} \varphi \cdot \mathbf{u}_r dr = \mathbf{grad} \varphi \cdot d\mathbf{r} \quad (1.51)$$

Para obtener la expresión del gradiente en coordenadas cartesianas es necesario hacer uso de las derivadas parciales. *La derivada parcial de una función escalar* φ , función de tres variables, x, y, z , *respecto de una de las variables* es el resultado de derivar dicha función respecto a la variable deseada, suponiendo constantes las otras dos:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)_{y,z=cte}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \left(\frac{d\varphi}{dy} \right)_{x,z=cte}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)_{x,y=cte}$$

En coordenadas cartesianas se puede escribir el gradiente de φ como:

$$\mathbf{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k} \quad (1.52)$$

donde $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ y $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ son las derivadas parciales con respecto a x , y , z .

Propiedades:

- i) $\mathbf{grad}(\varphi_1 + \varphi_2) = \mathbf{grad}(\varphi_1) + \mathbf{grad}(\varphi_2)$
- ii) Si m es constante: $\mathbf{grad}(m\varphi) = m\mathbf{grad}(\varphi)$

5.5.2.- DIVERGENCIA.

Se define la *divergencia* de una campo \mathbf{A} en un punto P como:

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\delta\Phi}{dV}$$

donde Φ es el flujo a través de una superficie que encierra un volumen V .

Dependiendo del signo de la divergencia se pueden clasificar los puntos de la región en donde existe campo en *manantiales o fuentes* (divergencia positiva) y en *sumideros* (divergencia negativa). Su valor nos indica la densidad de fuentes o de sumideros del campo. Un campo cuya divergencia sea nula en todos los puntos se denomina *campo solenoidal* y no tiene fuentes ni sumideros (Se trataran con mayor profundidad en el punto 5.7).

La expresión cartesiana de la divergencia es:

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1.53)$$

Teorema de la divergencia

Sea S la superficie que encierra un volumen V , inmersa en un campo vectorial \mathbf{A} , entonces:

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \operatorname{div}\mathbf{A} dV \quad (1.54)$$

5.5.3.- ROTACIONAL.

Sea un campo vectorial A y una línea cerrada C que limita a una superficie S (Fig.1.40). La circulación de A a lo largo de la curva, en el sentido indicado será:

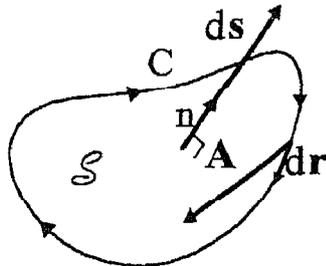


Fig.1.40

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad (1.55)$$

Si dividimos S en n pequeñas superficies, S_1, S_2, \dots, S_n , manteniendo el mismo sentido de circulación (Fig.1.41):

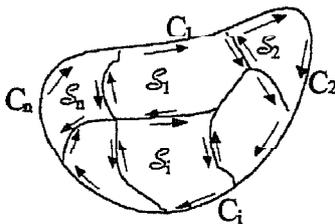


Fig.1.41

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \oint_{C_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \dots + \oint_{C_n} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots + \Gamma_n$$

Dividiendo (1.55) por el área, S , de la región encerrada por la curva C y calculando el límite de dicho cociente cuando el área tiende a cero obtenemos una cantidad que se identifica con la proyección sobre la normal a la superficie de un vector llamado *rotacional de A*, esto es:

$$\text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad (1.56)$$

En realidad el rotacional es un operador vectorial cuya aplicación al campo vectorial A , en coordenadas cartesianas viene dada por la siguiente expresión:

$$\text{rot } \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (1.57)$$

Propiedades:

i) Si φ es un campo escalar : $\text{rot}(\text{grad } \varphi) = \mathbf{0}$ decimos entonces que el gradiente de un campo escalar es *irrotacional* (tiene siempre rotacional nulo).

Teorema de Stokes

La circulación a lo largo de una línea cerrada de un campo vectorial es igual al flujo de su rotacional a través de cualquier superficie limitada por la curva. Es decir:

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.58)$$

5.6.- Operadores Nabla de Hamilton y Laplaciana.**5.6.1.- OPERADOR NABLA.**

El operador *Nabla de Hamilton* es un operador diferencial vectorial, que se designa mediante ∇ , aplicable tanto a funciones escalares como vectoriales, y que se define en coordenadas cartesianas, como:

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.59)$$

I. Aplicado a campos escalares:

$$\nabla \varphi = \mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (1.60)$$

que si la comparamos con (1.52) vemos que es el gradiente del campo escalar φ , luego:

$$\nabla \varphi = \text{grad } \varphi \quad (1.61)$$

II. Aplicado a campos vectoriales, y teniendo en cuenta su naturaleza vectorial, se puede aplicar como producto escalar o como producto vectorial. Esto es:

II.1.- Si lo aplicamos como producto escalar a un vector \mathbf{A} obtenemos un campo escalar tal que:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1.62)$$

Comparando esta expresión con (1.53) vemos se obtiene la *divergencia* del campo vectorial \mathbf{A} , luego:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \text{div } \mathbf{A} \quad (1.63)$$

II.2.- Si lo hacemos operar como producto vectorial obtenemos un campo vectorial de expresión:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (1.64)$$

Comparándola con (1.57) se concluye que:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (1.65)$$

5.6.2.- LAPLACIANA.

Es un operador escalar que se define como:

$$\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.66)$$

Este operador puede ser aplicado (como producto de escalares) a un escalar $\varphi(x, y, z)$, obteniéndose el escalar:

$$\Delta \varphi = \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad (1.67)$$

y también a un vector $\mathbf{A}(x, y, z)$ (como producto de un escalar por un vector. En este caso se obtiene el vector:

$$\Delta \mathbf{A} = \nabla^2 \mathbf{A} = \nabla^2(A_x \mathbf{i}) + \nabla^2(A_y \mathbf{j}) + \nabla^2(A_z \mathbf{k}) = \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2} \quad (1.68)$$

Algunas operaciones y propiedades del producto de estos operadores diferenciales con escalares y vectores se pueden encontrar en el Apéndice II.

5.7.- Campos potenciales y solenoidales.

5.7.1.- CAMPOS POTENCIALES.

Dado un campo vectorial $\mathbf{A}(x,y,z)$, decimos que es un *campo potencial* si existe un campo escalar $\varphi(x,y,z)$, tal que:

$$\mathbf{A}(x,y,z) = -\nabla\varphi \quad (1.69)$$

donde $\varphi(x,y,z)$ es el potencial escalar de $\mathbf{A}(x,y,z)$.

Propiedades:

i) Si $\varphi(x,y,z)$ es el potencial escalar de \mathbf{A} , $\varphi' = \varphi + \text{cte}$ también lo es, ya que:

$$\nabla\varphi' = \nabla(\varphi + \text{cte}) = \nabla\varphi + \nabla\text{cte} = \nabla\varphi \Rightarrow \mathbf{A} = -\nabla\varphi = -\nabla\varphi'$$

ii) Si $\mathbf{A}(x,y,z)$ es un campo potencial y también conservativo, es decir su circulación no depende de la curva elegida, sólo depende de los puntos inicial y final. Se demuestra sin más que sustituir la definición de campo potencial en el teorema de Stokes.

iii) Si $\mathbf{A}(x,y,z)$ es potencial, es irrotacional.

iv) En un campo potencial las líneas de campo son abiertas.

5.7.2.- CAMPOS SOLENOIDALES.

Un campo $\mathbf{A}(x,y,z)$ decimos que es *solenoidal* si existe un vector \mathbf{B} tal que:

$$\mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{B} \quad (1.70)$$

donde \mathbf{B} es el *potencial vector*.

Propiedades:

i) Un campo solenoidal tiene divergencia nula, ya que:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

y del Apéndice I vemos que esto es nulo.

ii) El flujo a través de cualquier superficie cerrada de un campo solenoidal es nulo, ya que al tener divergencia nula no hay manantiales ni sumideros.

TEMA 2. CINEMÁTICA DEL PUNTO.

1.- Introducción. Descripción del movimiento.

Por *movimiento* entendemos la variación aparente de la posición de un cuerpo en el transcurso del tiempo. En este capítulo nos ocuparemos de su descripción sin tener en cuenta el por qué de su origen. A la parte de la Física encargada de este tipo de estudios se le conoce con el nombre de *Cinemática*.

Comenzamos dando una serie de definiciones que son imprescindibles para la comprensión del movimiento. Simplificaremos el estudio haciendo uso de la aproximación de *punto material* o de *partícula* que consiste en ver a todo cuerpo como un punto geométrico al que se le asocia una cierta masa. De esta forma los cuerpos carecen de dimensiones y de estructura interna. Esta aproximación será válida cuando las dimensiones del cuerpo sean despreciables frente a la trayectoria que describe y evidentemente el error que se comete en la localización del cuerpo cuando utilizamos esta aproximación es al menos del orden de las dimensiones del mismo. En cambio si el movimiento es el de un cuerpo rígido y es únicamente de traslación, el considerarlo como un punto material deja de ser una aproximación, mientras que si el cuerpo tiene rotación dicha aproximación no es válida.

Decimos que un cuerpo u objeto A se encuentra en movimiento respecto de otro B , cuando su posición respecto al segundo está cambiando con el tiempo. Si la posición no cambia decimos que el cuerpo está en reposo. De esta definición se deduce que el que un cuerpo esté en movimiento o en reposo es relativo pues para el estudio del movimiento hemos de tomar uno de referencia. Es decir, un cuerpo puede estar moviéndose respecto a un determinado objeto y sin embargo permanecer en reposo respecto a otro, por lo que en cualquier estudio del movimiento de un objeto es necesario especificar el objeto de referencia. Para la descripción del movimiento asociaremos al objeto de referencia un triedro con origen en el mismo, y lo denominaremos ahora sistema de referencia. La elección del sistema de referencia es arbitraria, aunque resulta útil escoger aquél que simplifique la descripción del movimiento.

2.- Trayectoria. Vector de posición. Vector desplazamiento.

Podemos caracterizar la posición de un punto, respecto de un sistema de referencia de diversas maneras y cada una da lugar a un sistema de coordenadas diferente. Utilizaremos principalmente el sistema de coordenadas cartesiano. En éste la posición de un punto está definida por las coordenadas x , y y z .

A la curva que describe una partícula en su movimiento se le denomina *trayectoria*. A las coordenadas de la partícula en cada instante de tiempo se les pueden considerar como las componentes de un vector que recibe el nombre de *vector de posición* (Fig.2.1), $\mathbf{r}(t)$

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad (2.1)$$

Este vector tiene origen en el sistema de referencia elegido y extremo en la partícula. Las componentes del vector de posición cuando están expresadas en función del tiempo reciben el nombre de *ecuaciones paramétricas de la trayectoria*.

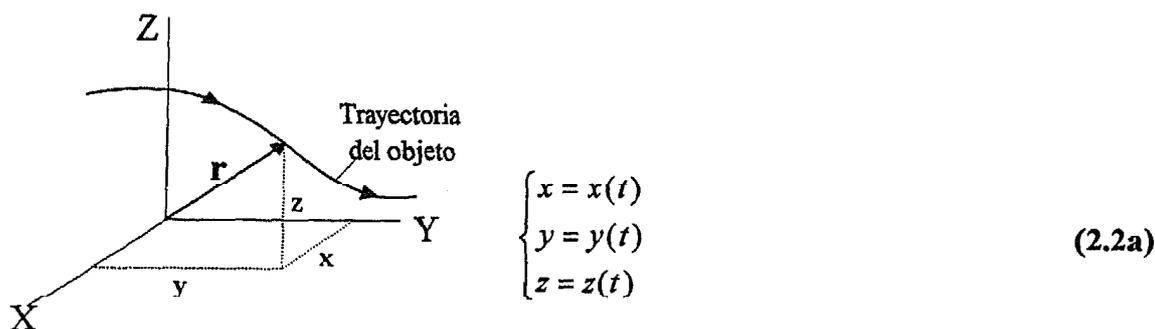


Fig.2.1

Eliminando t en (2.2a) encontraremos una o unas relaciones entre x , y , z que representan al lugar geométrico descrito por el extremo de \mathbf{r} en el transcurso del tiempo. A estas relaciones se les denomina *ecuaciones de la trayectoria* que tienen la siguiente forma :

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (2.2b)$$

donde la trayectoria viene expresada como la intersección de las dos superficies de (2.2b).

La diferencia entre el vector de posición en el tiempo t_f , $\mathbf{r}(t_f) = \mathbf{r}_f$, y el vector de posición en el tiempo t_i , $\mathbf{r}(t_i) = \mathbf{r}_i$, recibe el nombre de *vector desplazamiento*, $\Delta\mathbf{r}$ (Fig.2.2).

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t_f) - \mathbf{r}(t_i) = \mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i \quad (2.3)$$

e indica el cambio de posición entre los puntos P_i y P_f .

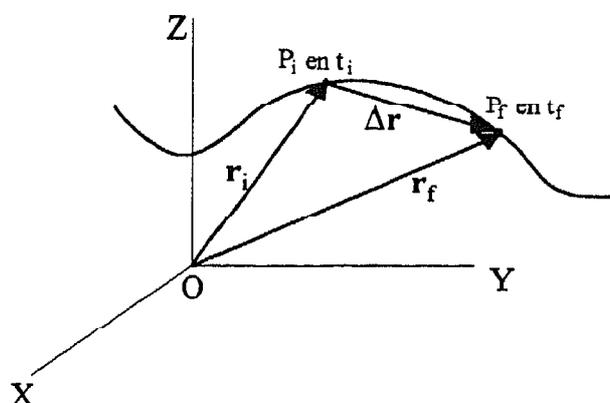


Fig. 2.2

Cuando los puntos P_i y P_f estén infinitamente próximos podremos expresar la longitud de arco recorrida por la partícula sobre la trayectoria, dl , en función de las coordenadas cartesianas de la siguiente forma:

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} \quad (2.4)$$

además, para estas longitudes infinitesimales dl coincide con el módulo del correspondiente vector desplazamiento infinitesimal, $d\mathbf{r}$. Desde el punto de vista físico la integral de la expresión anterior $l(t)$ representa la longitud de arco de trayectoria recorrida por la partícula en un determinado intervalo finito de tiempo.

3.- Velocidad y aceleración.

3.1.- Conceptos de velocidad media y velocidad instantánea.

La *velocidad media* de una partícula, \mathbf{v}_m , durante el intervalo de tiempo $\Delta t = t_f - t_i$, se define como el vector desplazamiento asociado a dos instantes de tiempo dividido por el intervalo de tiempo.

$$\mathbf{v}_m = \frac{\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \mathbf{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \mathbf{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t} \mathbf{k} = (v_m)_x \mathbf{i} + (v_m)_y \mathbf{j} + (v_m)_z \mathbf{k} \quad (2.5)$$

El *vector velocidad*, se define como el límite de la velocidad media, cuando el intervalo de

tiempo tiende a cero, esto es, la derivada del vector de posición respecto al tiempo.

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{v}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (2.6)$$

Este vector, en un instante dado, tendrá la dirección de la tangente a la trayectoria en dicho instante (en efecto: basta tener en cuenta la definición de la derivada de un vector con respecto a un escalar).

Teniendo en cuenta (2.1) y (2.6) podemos expresar la velocidad en función de sus componentes cartesianas como:

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} \quad (2.7)$$

Las dimensiones de la velocidad son $[\mathbf{v}] = \text{LT}^{-1}$ y sus unidades, en el SI, m s^{-1} .

3.2.- Conceptos de aceleración media y aceleración instantánea.

Del mismo modo que definíamos la velocidad media, *la aceleración media*, \mathbf{a}_m , de una partícula en un intervalo de tiempo Δt , es el cambio de velocidad de la partícula dividido por dicho intervalo de tiempo. Esto es

$$\mathbf{a}_m = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \mathbf{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \mathbf{j} + \frac{\Delta v_z}{\Delta t} \mathbf{k} = (a_m)_x \mathbf{i} + (a_m)_y \mathbf{j} + (a_m)_z \mathbf{k} \quad (2.8)$$

El vector aceleración se define como:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{a}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (2.9)$$

La aceleración es un vector que tiene la misma dirección que el cambio instantáneo de la velocidad y es tangente a la curva descrita por los extremos del vector velocidad, esta curva recibe el nombre de *hodógrafa del movimiento*.

Teniendo en cuenta (2.7) y (2.9) el vector aceleración en función de las componentes cartesianas queda como:

$$\mathbf{a} = \frac{dv_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt} \mathbf{k} = \frac{d^2 x}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \mathbf{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \mathbf{k} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} \quad (2.10)$$

Las dimensiones de la aceleración son $[\mathbf{a}] = \text{LT}^{-2}$ y sus unidades, en el SI, son ms^{-2} .

4.- Determinación de las ecuaciones del movimiento.

Conociendo una condición inicial para el vector velocidad, $\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0$, podremos calcular el vector velocidad en cualquier instante de tiempo a partir de la siguiente expresión:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{a} dt \quad (2.11)$$

En efecto:

$$\text{De 2.9} \Rightarrow dv = a dt \Rightarrow \int_{\mathbf{v}_0}^{\mathbf{v}} dv = \int_{t_0}^t a dt \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{a} dt$$

La expresión (2.11) equivale a las siguientes expresiones escalares:

$$v_x = v_{0x} + \int_{t_0}^t a_x dt \quad ; \quad v_y = v_{0y} + \int_{t_0}^t a_y dt \quad ; \quad v_z = v_{0z} + \int_{t_0}^t a_z dt \quad (2.12)$$

Análogamente, con la condición inicial $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$, el vector posición en cualquier instante de tiempo se puede calcular a partir de:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{v} dt \quad (2.13)$$

En efecto:

$$\text{De 2.6} \Rightarrow dr = v dt \Rightarrow \int_{r_0}^r dr = \int_{t_0}^t v dt \Rightarrow r = r_0 + \int_{t_0}^t v dt$$

La expresión (2.13) equivale a las siguientes expresiones escalares:

$$x = x_0 + \int_{t_0}^t v_x dt \quad ; \quad y = y_0 + \int_{t_0}^t v_y dt \quad ; \quad z = z_0 + \int_{t_0}^t v_z dt \quad (2.14)$$

Sustituyendo (2.11) en (2.13) de manera inmediata podemos obtener:

$$r = r_0 + v_0(t - t_0) + \int_{t_0}^t \left(\int_{t_0}^t a dt \right) dt \quad (2.15)$$

5.- Descripción intrínseca del movimiento.

Hasta el momento hemos hecho una descripción vectorial del movimiento basada en el concepto de vector de posición. En esta descripción la trayectoria es generada por las diferentes posiciones que va tomando en el tiempo. En cada instante t tendremos los vectores $r(t)$ que da la posición de la partícula, $v(t)$ que nos indicará hacia donde se mueve y con qué rapidez, y $a(t)$ que nos indicará los cambios en módulo y dirección de $v(t)$.

A continuación vamos a exponer otra forma de describir el movimiento de una partícula. Se basa en el conocimiento de la trayectoria, es decir, en el estudio del movimiento sobre un camino conocido.

5.1.- Posición de la partícula. Espacio recorrido.

En principio consideremos una trayectoria abierta (sin bucles), C , de tal manera que la partícula no pasa dos veces por el mismo lugar. Fijando un punto de referencia sobre la trayectoria, O , podremos situar la posición de la partícula por medio de la *abscisa curvilínea*, $s(t)$ (Fig 2.3)

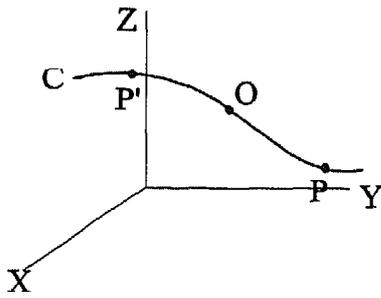


Fig 2.3

Si la partícula está en un punto tal como P (a la derecha de O), la posición de la partícula vendrá dada por:

$$s(t) = \text{longitud del arco } OP$$

Si la partícula está en un punto tal como P' (a la izquierda de O), la posición de la partícula vendrá dada por:

$$s(t) = -\text{longitud del arco } P'O$$

De esta forma hemos fijado un origen, O , en la curva C y sobre ella hemos determinado dos sentidos. Además, $s(t)$, bajo las hipótesis asumidas para la trayectoria, representa también el espacio recorrido por la partícula $l(t)$. Ahora bien, dichas hipótesis son excesivamente restrictivas pues dejan fuera movimientos importantes como: los oscilatorios en los que existen instantes diferentes que corresponden al mismo valor de s , o aquellos de trayectoria cerrada (como los circulares). En estos casos no es claro que $s(t)$ coincida con el espacio recorrido.

Supongamos un movimiento en el que la partícula oscila entre los puntos A y B como indica la figura:

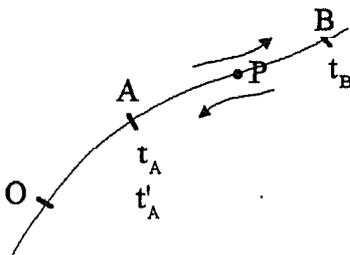


Fig. 2.4

En el instante t_A la partícula se encuentra en A y va hacia B , punto al que llega en el instante t_B , y del que retorna hacia A alcanzándolo de nuevo en t'_A , de manera que $t_A < t_B < t'_A$.

Es fácil darse cuenta de que $s(t)$ es una función creciente entre los instantes t_A y t_B y que decrece entre t_B y t'_A . Así que $s(t)$ sólo representará el espacio recorrido entre los instantes t_A y t_B ya que $l(t)$ ha de ser siempre creciente en el tiempo. Es fácil demostrar que el espacio recorrido en este caso será :

$$l(t) = \begin{cases} s(t) - s(t_A) & \text{si } t_A \leq t \leq t_B \\ 2s(t_B) - (s(t) + s(t_A)) & \text{si } t_B \leq t \leq t'_A \end{cases} \quad (2.16)$$

En efecto :

En un punto tal como P , cuando la partícula regresa, el espacio recorrido por ésta será igual a una longitud de arco $AB = s(t_B) - s(t_A)$, más un arco igual a $s(t_B) - s(t)$. (Fig.2.4)

En el caso en que se hubiesen completado varias oscilaciones sería necesario conocer el número de oscilaciones completas para poder determinar el espacio recorrido. Lo mismo sucedería si la trayectoria fuese una curva cerrada en cuyo caso sería imprescindible conocer el número de vueltas completas a la hora de determinar el espacio total recorrido.

5.2.- Descripción intrínseca de la velocidad. Velocidad escalar.

Hemos visto en el apartado anterior la importancia de distinguir los intervalos temporales en los que $s(t)$ decrece a la hora de determinar el espacio recorrido. Para esto podemos definir la siguiente magnitud

$$V = \frac{ds}{dt} \quad (2.17)$$

a la que llamaremos *velocidad escalar* y que tendrá signo positivo cuando $s(t)$ sea creciente y negativo cuando ésta decrezca. Para encontrar los instantes de tiempo en los que $s(t)$ pasa de crecer a decrecer basta buscar aquéllos en los que V se anule.

Por otro lado, en el apéndice III se establece como dada una curva, C , es posible definir en cada punto tres vectores unitarios perpendiculares entre sí que constituyen el *triedro intrínseco* o *de Frenet*. Estos vectores son : \mathbf{u}_t que tiene la dirección tangente a la curva y que tomaremos con el sentido de crecimiento de $s(t)$, \mathbf{u}_n que lleva la dirección normal y que apunta a la concavidad de la curva, y por último \mathbf{u}_b que representa la dirección binormal y que viene dado por el producto vectorial de los otros dos (Fig. 2.5).

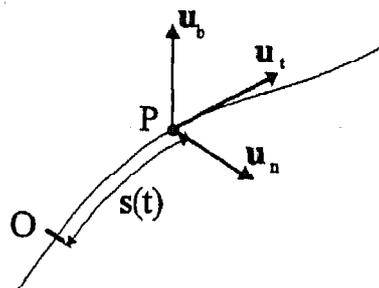


Fig 2.5

A partir de esto podemos expresar el vector velocidad en este triedro de la siguiente forma:

$$\mathbf{v}(t) = V(t)\mathbf{u}_t \quad (2.18)$$

En efecto :

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d\mathbf{r}}{ds} = v(t) \mathbf{u}_t$$

donde hemos utilizado que $\mathbf{u}_t = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$ pues la dirección de la cuerda tiende a la de la tangente cuando la longitud de arco tiende a cero y el módulo del vector desplazamiento tiende a confundirse con la longitud de arco.

De la expresión (2.18) es inmediato deducir que el módulo del vector velocidad coincide con el valor absoluto de la velocidad escalar. En realidad, en todos aquellos movimientos en los que s sea una función monótonamente creciente en el tiempo, la velocidad escalar no es más que el módulo del vector.

5.3.- Componentes intrínsecas de la aceleración.

Teniendo en cuenta la relación (2.18) y la definición del vector aceleración, tenemos

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{u}_t + v \frac{d\mathbf{u}_t}{dt} \quad (2.19)$$

Esta expresión representa la separación del vector aceleración en dos componentes: una tangencial, $(dv/dt) \mathbf{u}_t$, y otra normal, $v (d\mathbf{u}_t/dt)$, a la trayectoria (Fig 2.6). La primera es tangencial por tener la dirección de la velocidad y la segunda es normal por cumplirse que $\mathbf{u}_t \perp (d\mathbf{u}_t/dt)$ (ver Apéndice III).

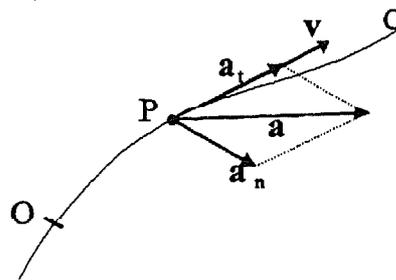


Fig 2.6

La descomposición (2.19) de \mathbf{a} también se puede expresar :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \mathbf{u}_t + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{u}_n \quad (2.20)$$

donde ρ es el radio de curvatura de la trayectoria en el punto (ver Apéndice III)

En efecto :

$$\frac{d\mathbf{u}_t}{dt} = \frac{d\mathbf{u}_t}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{d\mathbf{u}_t}{ds} v \quad \frac{d\mathbf{u}_t}{ds} = \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_n \quad (\text{Apéndice III}) \quad \text{y} \quad v^2 = V^2$$

estas tres expresiones unidas a (2.19) demuestran (2.20).

La fórmula anterior no es más que la expresión del vector aceleración en el triedro intrínseco a la trayectoria, es decir :

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_t \mathbf{u}_t + a_n \mathbf{u}_n + a_b \mathbf{u}_b \\ a_t &= \frac{dV}{dt}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad a_b = 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Al ser la componente según la dirección binormal nula la aceleración será un vector contenido en el plano osculador a la trayectoria. Las componentes intrínsecas de la aceleración, a_t y a_n , reciben el nombre de *aceleraciones tangencial y normal* respectivamente. La primera mide los cambios en el módulo de la velocidad y la segunda los cambios en la dirección de v . Por último, el módulo de la aceleración en cualquier punto de la trayectoria es,

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(dV/dt)^2 + (v^2/\rho)^2} \quad (2.22)$$

5.4.- Ecuaciones escalares del movimiento.

Análogamente a lo que se hizo en el apartado cuarto, podremos obtener unas ecuaciones del movimiento pero ahora de naturaleza escalar. Así conociendo la siguiente condición inicial para la velocidad escalar $V(t_0) = V_0$, se tiene :

$$V = V_0 + \int_{t_0}^t a_t dt \quad (2.23)$$

En efecto:

$$\text{De (2.21)} \Rightarrow dV = a_t dt \Rightarrow \int_{V_0}^V dV = \int_{t_0}^t a_t dt \Rightarrow V = V_0 + \int_{t_0}^t a_t dt$$

Análogamente, con la condición inicial $s(t_0) = s_0$, la abscisa curvilínea en cualquier instante de tiempo se puede calcular a partir de:

$$s(t) = s_0 + \int_{t_0}^t v \, dt \quad (2.24)$$

En efecto:

$$\text{De (2.17)} \Rightarrow ds = v \, dt \Rightarrow \int_{s_0}^s ds = \int_{t_0}^t v \, dt \Rightarrow s = s_0 + \int_{t_0}^t v \, dt$$

Sustituyendo (2.23) en (2.24) de manera inmediata podemos obtener:

$$s = s_0 + v_0(t - t_0) + \int_{t_0}^t \left(\int_{t_0}^t a_t \, dt \right) dt \quad (2.25)$$

6.- Clasificación de los movimientos a partir de las componentes intrínsecas de la aceleración.

Vamos a clasificar los distintos tipos de movimiento atendiendo a los diferentes valores que pueden tomar las componentes intrínsecas de la aceleración.

(I) Respecto de la componente tangencial :

I.1.- Si $a_t = 0 \Rightarrow v = cte \Rightarrow v = cte$. *Movimiento Uniforme.*

I.2.- Si $a_t = cte \neq 0$

Movimiento Uniformemente Acelerado (si $a_t > 0$).

Movimiento Uniformemente Desacelerado (si $a_t < 0$).

I.3.- Si $a_t \neq cte$ *Movimiento Variado o No Uniforme.*

(II) Respecto de la componente normal :

II.1.- Si $\rho = \infty (\Rightarrow a_n = 0)$ *Movimiento Rectilíneo.*

II.2.- Si $\rho = cte = R$ *Movimiento Circular.*

II.3.- Si $\rho \neq cte$ *Movimiento Curvilíneo.*

7.- Estudio de algunos movimientos.

7.1.- Movimientos rectilíneos.

Para todos éstos se cumple que la aceleración normal es nula, $a_n = 0$, y consecuentemente con esto \mathbf{r} , \mathbf{v} y \mathbf{a} son vectores paralelos a la trayectoria recta. Si hacemos coincidir la trayectoria con el eje X se darán las siguientes identificaciones:

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{i}; \quad s = x; \quad \mathbf{r} = x\mathbf{i}; \quad \mathbf{v} = V\mathbf{i} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} \quad \text{y} \quad \mathbf{a} = a_t\mathbf{i} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} \quad (2.26)$$

Dentro de éstos se pueden destacar dos:

- Movimientos rectilíneos uniformes (M.R.U.)

Por ser uniforme $a_t = 0$ con lo que $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, y la velocidad viene dada por un vector constante, así el vector posición se obtiene de (2.13) y (2.26)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}(t - t_0) = \{x_0 + V(t - t_0)\}\mathbf{i} \quad (2.27)$$

en donde se ha tenido en cuenta que V es constante.

- Movimientos Rectilíneos Uniformemente Acelerados o Decelerados (M.R.U.A.).

Por ser rectilíneo uniformemente acelerado, $a_t = cte$. De la ecuación (2.11) podemos obtener el vector velocidad:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}(t - t_0) = \{V_0 + a_t(t - t_0)\}\mathbf{i} \quad (2.28)$$

El vector de posición se obtiene de (2.15), resultando:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\mathbf{a}(t - t_0)^2 = \left\{x_0 + V_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a_t(t - t_0)^2\right\}\mathbf{i} \quad (2.29)$$

7.2.- Movimientos curvilíneos en el plano.

De todos los posibles movimientos curvilíneos ($\alpha_n \neq 0$) existentes, estudiaremos en detalle únicamente aquéllos cuya trayectoria esté contenida en el plano. Distinguiremos los siguientes tipos:

- Movimientos circulares (M.C.U), (M.C.U.A.).

En este caso especial, la trayectoria es un círculo y $\rho = R = cte$. Una particularidad de los movimientos circulares es que se pueden plantear con magnitudes características del mismo (θ, ω, α), en vez de utilizar las ya vistas (s, v, a). A las primeras se les denominan *magnitudes angulares* y a las segundas *lineales*.

Comenzamos con el *desplazamiento angular*, θ que es el ángulo barrido por el radio de la circunferencia, R , cuando la partícula describe, a partir de un punto O , un arco de longitud s (Fig 2.7). Su expresión en radianes es

$$\theta = \frac{s}{R} \quad (2.30)$$

Del mismo modo se define la *velocidad angular*, como:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (2.31)$$

A esta velocidad angular, que se ha definido como una magnitud escalar, se le puede dar carácter vectorial, ω , asociándole como dirección la perpendicular al plano del movimiento, sentido el de avance de un tornillo de rosca derecha girado en el mismo sentido en que se mueve la partícula (Fig.2.7). De este modo, por ejemplo, si la partícula gira alrededor del eje z del sistema de coordenadas, ω , sólo tendrá componente en esa dirección pudiendo expresarse como

$$\omega = \omega \mathbf{k} \quad (2.32)$$

donde el módulo viene dado por el valor absoluto de la expresión (2.31).

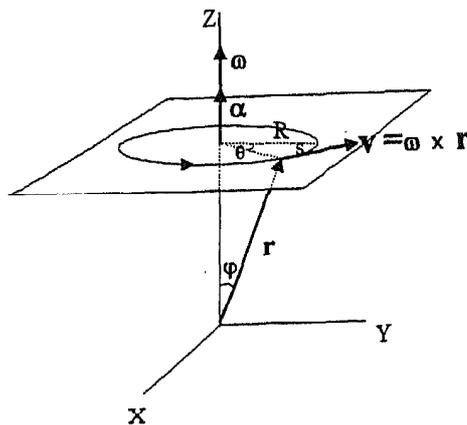


Fig 2.7

Como el desplazamiento angular no tiene dimensiones, la velocidad angular tiene dimensiones de T^{-1} y la unidad en el SI de ω es el rad/s.

De modo análogo podemos definir la *aceleración angular* como:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad (2.33)$$

En el caso que nos ocupa la dirección de la velocidad angular es constante por lo que

$$\alpha = \alpha \mathbf{k} = \frac{d\omega}{dt} \mathbf{k} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \mathbf{k} \quad (2.34)$$

La aceleración angular tiene dimensiones de T^{-2} y unidades en el SI de rad/s^2 .

Hay que tener en cuenta que estas variables angulares han sido definidas para el caso particular del movimiento circular pero pueden generalizarse a cualquier tipo de movimiento. En este caso hay que tener en cuenta que la velocidad angular, que en general tiene la dirección binormal (dirección variable con el tiempo), y la aceleración angular no tienen por qué tener iguales direcciones. Asimismo, el módulo de la aceleración angular no coincide con la derivada del módulo de la velocidad angular (basta derivar $\omega = (d\theta/dt)\mathbf{u}_b$ para verlo).

Vamos a establecer a continuación las relaciones existentes entre las magnitudes angulares (θ, ω, α) y las lineales (s, v, a). Consideremos una partícula que describe un movimiento circular. Si tenemos (2.30), observamos que:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(R\theta)}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} = R\omega \Rightarrow v = R|\omega| \quad (2.35)$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(R\omega)}{dt} = R\alpha \quad (2.36)$$

Es fácil deducir la siguiente relación entre los vectores velocidad lineal y angular :

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (2.37)$$

En efecto : De la Fig.2.7 observamos que $R = r \operatorname{sen} \varphi$ y por tanto, de (2.35) podemos escribir

$$v = |\omega| r \operatorname{sen} \varphi$$

además es inmediato comprobar de la Fig. 2.7 como la dirección y sentido de $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ también coinciden con las del vector velocidad.

A partir de la expresión anterior obtenemos :

$$\mathbf{a} = (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}) + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) \quad (2.38)$$

En efecto: A partir de la definición del vector aceleración, de (2.37) y teniendo en cuenta las reglas de derivación de las funciones vectoriales, obtenemos:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} \right) + \left(\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}) + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v})$$

Además es fácil comprobar que en la expresión anterior el primer sumando corresponde al vector aceleración tangencial y el segundo es el vector aceleración normal, es decir :

$$\mathbf{a}_t = a_t \mathbf{u}_t = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} \quad , \quad \mathbf{a}_n = a_n \mathbf{u}_n = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (2.39)$$

En efecto: De la Fig. 2.8 se ve como $\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}$ es un vector perpendicular al plano formado por $\boldsymbol{\alpha}$ y \mathbf{r} (que es el plano de $\boldsymbol{\omega}$ y \mathbf{r}) y por tanto, es un vector de igual dirección que \mathbf{v} , o sea tangente a la trayectoria. De la misma figura podemos ver como el segundo sumando, $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$, está dirigido hacia el centro de la circunferencia y en dirección radial

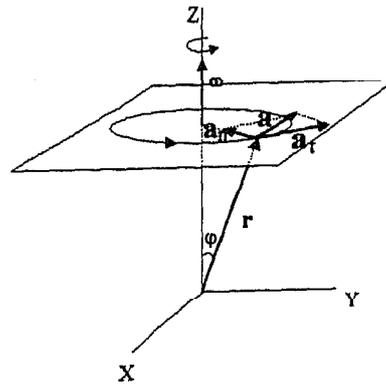


Fig 2.8

En cuanto a los módulos de estas expresiones es inmediato comprobar :

$$|\alpha \times \mathbf{r}| = |\alpha| r \sin \varphi = \left| \frac{d\omega}{dt} \right| R = \left| \frac{dv}{dt} \right| = |a_t|$$

el valor absoluto contempla la posibilidad de que la aceleración angular o componente tangencial del vector aceleración sean negativas.

$$|\omega \times \mathbf{v}| = \frac{v}{R} v \sin 90^\circ = \frac{v^2}{R} = a_n$$

Si la componente tangencial de la aceleración es nula, $a_t = 0$, el movimiento se llama *movimiento circular uniforme* (M.C.U.), y en él se verifica que ω es constante y α es cero (basta tener en cuenta que v y R son constantes).

Este movimiento estaría gobernado por :

$$s(t) = s_0 + v(t - t_0) \quad \text{o} \quad \theta(t) = \theta_0 + \omega(t - t_0) \quad (2.40)$$

En efecto:

Basta tener en cuenta (2.24) junto a que v es constante para deducir la primera ecuación, y de ésta, de (2.30) y de (2.35) se obtiene la segunda.

Una característica del movimiento circular uniforme, es que el movimiento es periódico. Se dice que una partícula realiza un movimiento periódico cuando su posición se repite cada cierto intervalo de tiempo, llamándosele a este tiempo *periodo* (T) y a su inversa *frecuencia* (f). Ambas cantidades están relacionadas por la siguiente expresión

$$f = \frac{1}{T} \quad (2.41)$$

En el caso del M.C.U. el período es el tiempo requerido para realizar una vuelta completa y la frecuencia es el número de revoluciones por unidad de tiempo. Cuando el período se expresa en segundos, la frecuencia debe expresarse en 1/segundos, unidad denominada *hertz* (Hz). Algunas veces la frecuencia de un movimiento se expresa en revoluciones por minuto (rpm).

Si la componente tangencial de la aceleración es constante, $a_t = cte$, el movimiento se conoce como *movimiento circular uniformemente acelerado* (M.C.U.A), y las ecuaciones que lo gobiernan son :

$$V = V_0 + a_t(t - t_0) \quad o \quad \omega = \omega_0 + \alpha(t - t_0) \quad (2.42)$$

$$s = s_0 + V_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a_t(t - t_0)^2 \quad o \quad \theta = \theta_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2 \quad (2.43)$$

En efecto :

Las primeras ecuaciones de (2.42) y (2.43) se deducen a partir de (2.23) y (2.25) respectivamente, sin más que tener en cuenta que $a_t = cte$. Las dos segundas son inmediatas a partir de las primeras y de las relaciones entre las magnitudes lineales y angulares (2.30), (2.35) y (2.36).

- Movimientos con aceleración constante.

En este caso y teniendo en cuenta que el vector aceleración es constante, y sin más que integrar (2.11) y (2.15) se tienen las siguientes ecuaciones :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}(t - t_0) \quad (2.44)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\mathbf{a}(t - t_0)^2 \quad (2.45)$$

Una característica muy interesante de este tipo de movimientos es que se produce en el plano. Para ver esto basta tener en cuenta las ecuaciones (2.44) y (2.45) en donde se aprecia que tanto el vector velocidad como el vector desplazamiento están contenidos en el plano formado por \mathbf{v}_0 y \mathbf{a} . Este plano será siempre el mismo por ser estos dos vectores constantes, además teniendo en cuenta que el vector desplazamiento describe con su extremo la trayectoria, ésta estará contenida en el plano definido por \mathbf{v}_0 y \mathbf{a} .

- Movimiento curvilíneo general en un plano

La Fig.2.9 representa una partícula que describe una trayectoria curvilínea en un plano.

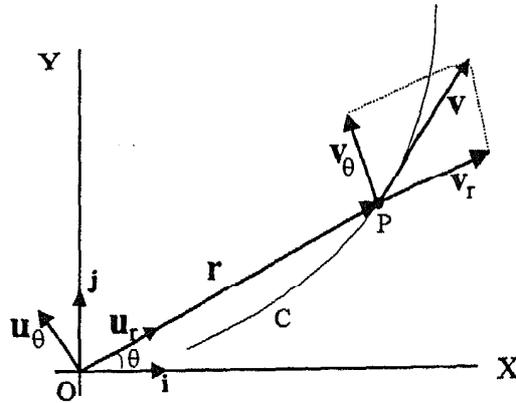


Fig.2.9

Usando coordenadas polares, esto es, dando la posición de la partícula mediante los vectores unitarios \mathbf{u}_r (paralelo a \mathbf{r}) y \mathbf{u}_θ (perpendicular a \mathbf{r}), podemos escribir :

$$\mathbf{r} = r \mathbf{u}_r \quad (2.46)$$

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta \quad (2.47)$$

En efecto : De (2.46), que es inmediata, tenemos :

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r \mathbf{u}_r) = \frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r + r \frac{d\mathbf{u}_r}{dt}$$

por otro lado, los vectores unitarios polares tienen la siguiente expresión en función de los cartesianos :

$$\mathbf{u}_r = \cos\theta \mathbf{i} + \text{sen}\theta \mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_\theta = -\text{sen}\theta \mathbf{i} + \cos\theta \mathbf{j}$$

con lo que

$$\frac{d}{dt} \mathbf{u}_r = -\text{sen}\theta \frac{d\theta}{dt} \mathbf{i} + \cos\theta \frac{d\theta}{dt} \mathbf{j} = \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta$$

En (2.47) $(dr/dt)\mathbf{u}_r$ es un vector paralelo a \mathbf{r} y que se llama *velocidad radial*; v_r , y da cuenta del cambio de la distancia, r , de la partícula al origen O . El término $r(d\theta/dt)\mathbf{u}_\theta$ es un vector perpendicular a \mathbf{r} y mide el cambio en la dirección de \mathbf{r} , o rotación de la partícula alrededor de O ; este recibe el nombre de *velocidad transversal*, v_θ . Esto es:

$$v_r = \frac{dr}{dt} \quad v_\theta = r \frac{d\theta}{dt} = \omega r \quad (2.48)$$

aquí $\omega = d\theta/dt$ es la velocidad angular. En el movimiento circular no hay velocidad radial porque el radio es constante; esto es $dr/dt = 0$, y la velocidad es enteramente transversal.

De manera análoga a lo hecho con el vector velocidad podemos demostrar la siguiente descomposición en una parte radial y otra transversal para el vector aceleración :

$$\mathbf{a} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2 \right) \mathbf{u}_r + \left(2 \frac{dr}{dt} \omega + r \frac{d\omega}{dt} \right) \mathbf{u}_\theta = a_r \mathbf{u}_r + a_\theta \mathbf{u}_\theta \quad (2.49)$$

En efecto:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(v_r \mathbf{u}_r)}{dt} + \frac{d(v_\theta \mathbf{u}_\theta)}{dt}$$

y de (2.48) se tiene :

$$\frac{d(v_r \mathbf{u}_r)}{dt} = \frac{dv_r}{dt} \mathbf{u}_r + v_r \frac{d\mathbf{u}_r}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} \mathbf{u}_r + \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta$$

$$\frac{d(v_\theta \mathbf{u}_\theta)}{dt} = \frac{dv_\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta + v_\theta \frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} = \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \mathbf{u}_\theta - r\omega^2 \mathbf{u}_r$$

en esta última expresión hemos utilizado que :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{u}_\theta = -\cos\theta \frac{d\theta}{dt} \mathbf{i} - \sin\theta \frac{d\theta}{dt} \mathbf{j} = \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_r = \omega \mathbf{u}_r$$

8.- Movimiento relativo.

Al inicio del tema indicamos que el movimiento es un concepto relativo, porque siempre debe referirse a un sistema de referencia determinado. En este apartado estudiaremos el movimiento de una partícula vista por dos observadores situados en sistemas de referencia diferentes, uno de los cuales se traslada y rota, con velocidad angular ω , con respecto al otro. Al primero se le denomina *sistema de referencia móvil* ($O'X'Y'Z'$) mientras que al segundo, *sistema de referencia fijo* ($OXYZ$). El objetivo fundamental de este apartado será establecer relaciones entre las magnitudes de ambos sistemas de referencia. Para esto, consideremos a una partícula P que se mueve respecto

de ambos sistemas de referencia (Fig.2.10).

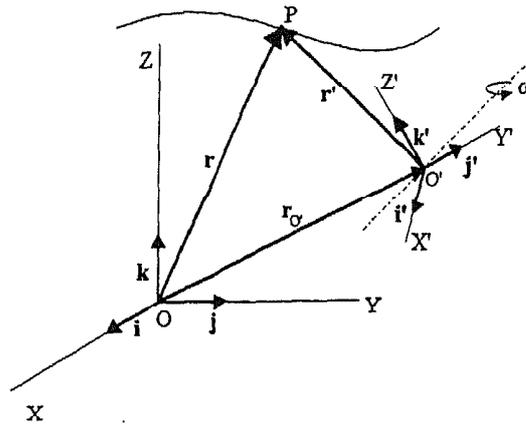


Fig. 2.10

En esta situación se llama *movimiento absoluto* de la partícula P , al movimiento que posee respecto del sistema fijo ($OXYZ$). Se llama *movimiento relativo* de la partícula P , al movimiento que posee respecto del sistema móvil ($O'X'Y'Z'$). Y finalmente, se denomina *movimiento de arrastre* al que posee la partícula respecto del sistema fijo pero considerándola rígidamente unida al sistema móvil, o sea manteniendo constantes sus coordenadas (x',y',z') en el sistema móvil.

8.1.- Composición de velocidades en el movimiento relativo.

Volviendo al movimiento de P (Fig. 2.10), y representando con primas a las magnitudes con respecto al sistema móvil y sin ellas a las referidas al fijo, tendremos que el vector posición con respecto a cada uno de estos sistemas tiene las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \\ \mathbf{r}'(t) &= x'(t)\mathbf{i}' + y'(t)\mathbf{j}' + z'(t)\mathbf{k}' \end{aligned} \quad (2.50)$$

y de la Fig. 2.10 se puede hallar la siguiente relación entre ambos :

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t) + \mathbf{r}_{O'}(t) \quad (2.51)$$

donde $\mathbf{r}_{O'}(t)$ da la posición de O' en cada instante.

A partir de esta expresión se puede demostrar la siguiente relación entre los vectores

velocidad :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_a \quad (2.52)$$

que indica que, la *velocidad absoluta* de P (respecto de $OXYZ$), \mathbf{v} , es igual a la *relativa* (respecto de $O'X'Y'Z'$ considerados como fijos), \mathbf{v}' , más la de *arrastre*, \mathbf{v}_a . Las expresiones de cada una de estas velocidades es :

$$\mathbf{v}(t) = \left\{ \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\}_{i,j,k} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k} \quad (2.53)$$

$$\mathbf{v}'(t) = \left\{ \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right\}_{i',j',k'} = \frac{dx'}{dt} \mathbf{i}' + \frac{dy'}{dt} \mathbf{j}' + \frac{dz'}{dt} \mathbf{k}' \quad (2.54)$$

$$\mathbf{v}_a = \left\{ \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\}_{x',y',z'} = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad (2.55)$$

donde $\mathbf{v}_{O'} = d\mathbf{r}_{O'}/dt$, es la velocidad del punto O' con respecto a O .

En efecto :

Derivando con respecto al tiempo (2.51) obtenemos

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_{O'}}{dt}$$

que es igual a

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \frac{d}{dt} (x'(t)\mathbf{i}' + y'(t)\mathbf{j}' + z'(t)\mathbf{k}') + \mathbf{v}_{O'} = \\ &= \frac{dx'}{dt} \mathbf{i}' + \frac{dy'}{dt} \mathbf{j}' + \frac{dz'}{dt} \mathbf{k}' + x' \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + y' \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + z' \frac{d\mathbf{k}'}{dt} + \mathbf{v}_{O'} \end{aligned}$$

Recordando las definiciones de los distintos movimientos tenemos las siguientes identificaciones :

$$\mathbf{v}(t) = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}'(t) = \frac{dx'}{dt} \mathbf{i}' + \frac{dy'}{dt} \mathbf{j}' + \frac{dz'}{dt} \mathbf{k}'$$

de manera que, podemos asociar lo que resta de la ecuación con el movimiento de arrastre

del punto P , ya que en estos términos se mantienen constantes las coordenadas x', y', z' . La velocidad de arrastre, \mathbf{v}_a , será pues

$$\mathbf{v}_a = x' \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + y' \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + z' \frac{d\mathbf{k}'}{dt} + \mathbf{v}_O'$$

ésta se puede expresar de una forma más concisa si tenemos en cuenta que los vectores unitarios \mathbf{i}' , \mathbf{j}' y \mathbf{k}' , que varían con el tiempo, se pueden considerar como vectores de posición de una partícula que realiza un movimiento circular y de (2.37) se tiene:

$$\frac{d\mathbf{i}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}' \quad ; \quad \frac{d\mathbf{j}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}' \quad ; \quad \frac{d\mathbf{k}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}'$$

e introduciendo estas relaciones en la expresión anterior se llega a

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_O' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$$

8.2.-Composición de aceleraciones en el movimiento relativo

La aceleración absoluta se puede expresar :

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_a + \mathbf{a}_c \quad (2.56)$$

donde

$$\mathbf{a}(t) = \left\{ \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right\}_{i,j,k} = \frac{dv_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt} \mathbf{k} \quad (2.57)$$

La aceleración relativa será

$$\mathbf{a}'(t) = \left\{ \frac{d\mathbf{v}'}{dt} \right\}_{i',j',k'} = \frac{dv'_x}{dt} \mathbf{i}' + \frac{dv'_y}{dt} \mathbf{j}' + \frac{dv'_z}{dt} \mathbf{k}' \quad (2.58)$$

La aceleración de arrastre viene dada por :

$$\mathbf{a}_a = \left\{ \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right\}_{x',y',z'} = \mathbf{a}_O' + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \quad (2.59)$$

El último término de (2.56), que no puede considerarse de arrastre ya que conlleva variaciones temporales de las coordenadas x',y',z' , recibe el nombre de *aceleración complementaria o de Coriolis* :

$$\mathbf{a}_c = 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}') \quad (2.60)$$

En efecto :

De (2.52) obtenemos

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}'}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_a}{dt}$$

si ahora derivamos la expresión para la velocidad relativa tendremos :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}'}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dx'}{dt} \mathbf{i}' + \frac{dy'}{dt} \mathbf{j}' + \frac{dz'}{dt} \mathbf{k}' \right) = \\ &= \frac{d^2x'}{dt^2} \mathbf{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2} \mathbf{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2} \mathbf{k}' + \frac{dx'}{dt} \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt} \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt} \frac{d\mathbf{k}'}{dt} \end{aligned}$$

y recordando que en la definición de movimiento relativo decíamos que consideramos fijos los ejes del sistema de referencia móvil $O'X'Y'Z'$, tenemos que la aceleración relativa será:

$$\mathbf{a}' = \frac{d^2x'}{dt^2} \mathbf{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2} \mathbf{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2} \mathbf{k}'$$

con lo que $d\mathbf{v}'/dt$ queda:

$$\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \mathbf{a}' + \frac{dx'}{dt} \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt} \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt} \frac{d\mathbf{k}'}{dt}$$

y si tenemos en cuenta el resultado de la demostración anterior para las derivadas de los vectores unitarios según los ejes móviles se tendrá :

$$\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$$

Derivando ahora la expresión para la velocidad de arrastre:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{v}_a}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\mathbf{v}_{O'} + x' \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + y' \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + z' \frac{d\mathbf{k}'}{dt} \right) = \\ &= \mathbf{a}_{O'} + x' \frac{d^2\mathbf{i}'}{dt^2} + y' \frac{d^2\mathbf{j}'}{dt^2} + z' \frac{d^2\mathbf{k}'}{dt^2} + \frac{dx'}{dt} \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt} \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt} \frac{d\mathbf{k}'}{dt}\end{aligned}$$

en donde $\mathbf{a}_{O'} = d\mathbf{v}_{O'}/dt$, es la aceleración del punto O' con respecto a O . De esta manera se tiene que :

$$\frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = \mathbf{a}_{O'} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$$

el último término de esta expresión implica una variación de las coordenadas en el sistema móvil y por tanto no puede ser de arrastre, así que la aceleración de arrastre se puede escribir como

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_{O'} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$$

Por último sustituyendo las expresiones deducidas para $d\mathbf{v}'/dt$ y $d\mathbf{v}_a/dt$ en aquella para $d\mathbf{v}/dt$ tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \mathbf{a}_{O'} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' = \\ &= \mathbf{a}' + \mathbf{a}_{O'} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}')\end{aligned}$$

8.3.- Transformaciones de Galileo

A continuación analizaremos un caso particular muy sencillo, en el que el movimiento del sistema de referencia móvil respecto del fijo es de traslación con velocidad constante, es decir, rectilíneo y uniforme. En este caso la velocidad angular será nula, $\boldsymbol{\omega} = 0$, ya que el sistema móvil no rota y por tanto no existe variación de los vectores unitarios. También se tendrá que la aceleración del sistema móvil respecto del fijo es nula, $\mathbf{a}_{O'} = 0$, por ser la velocidad de O' respecto de O constante.

En este caso (2.51), (2.52) y (2.56) tomarán la siguiente forma :

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}' + \mathbf{v}_{O'} t, \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{O'}, \\ \mathbf{a} &= \mathbf{a}' \end{aligned} \quad (2.61)$$

donde se ha tenido en cuenta que $\mathbf{r}_{O'} = \mathbf{v}_{O'} t$.

A estas relaciones junto con la condición $t=t'$, que dan la ley de transformación entre las magnitudes absolutas y relativas, se les conoce como *transformación de Galileo*.

Si hacemos coincidir los ejes X y X' con la trayectoria del sistema móvil, la transformación de Galileo toma la siguiente forma

$$\begin{aligned} x &= x' + v_{O'} t \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= t' \end{aligned} \quad (2.62)$$

El hecho de que la aceleración sea un invariante para todos los observadores que se muevan, unos con respecto a otros, con un movimiento rectilíneo uniforme, permite considerar este carácter de invariancia para todas aquellas leyes de la Física que dependan de dicha magnitud, como sucede con las leyes de la Mecánica. Así *las leyes básicas de la Mecánica serán las mismas para todos los observadores en movimiento relativo rectilíneo uniforme*. Este resultado se conoce como el *principio de relatividad de Galileo*.

8.4.- Transformaciones de Lorentz-Einstein

Es fácil darse cuenta como este resultado anterior no se puede extender a toda la Física ya que cualquier ley que dependa de la velocidad, como sucede con las leyes básicas del Electromagnetismo, no sería un invariante galileano. De esta forma, de ser válidas las Transformaciones de Galileo, el Electromagnetismo no se formularía igual para todos los *observadores inerciales* (los que se mueven unos con respecto a otros con movimiento rectilíneo uniforme). Y consecuentemente con esto, los fenómenos eléctricos y ópticos deberían ser diferentes para dos observadores inerciales. Sin embargo, los físicos Michelson y Morley en 1881 comprobaron experimentalmente que la velocidad de la luz es la misma medida desde dos observadores inerciales, resultado experimental que se opone a (2.62).

Este dilema fue resuelto por Einstein quien en 1905 estableció su principio de la relatividad a partir de dos postulados que enunciaremos a continuación

1.- *Las leyes de la naturaleza tienen la misma forma matemática en todos los sistemas de referencia inerciales.*

2.- *La velocidad de la luz en el vacío es la misma para todos los sistemas de referencia inerciales.*

Alrededor de 1890 el físico holandés Lorentz había encontrado unas transformaciones que eran compatibles con la invariancia de la velocidad de la luz en el vacío y que dejaban invariantes a las leyes básicas de Electromagnetismo (ecuaciones de Maxwell) bajo el cambio de sistema de referencia inercial. Estas transformaciones tienen la siguiente forma cuando tomamos los ejes X y X' en la dirección de la trayectoria del sistema móvil:

$$\begin{aligned}x' &= \gamma (x - v_o t) = \frac{x - v_o t}{\sqrt{1 - v_o^2 / c^2}} \\y &= y' \\z &= z' \\t' &= \gamma \left(t - \frac{v_o x}{c^2} \right) = \frac{t - v_o x / c^2}{\sqrt{1 - v_o^2 / c^2}}\end{aligned}\tag{2.63}$$

Las ecuaciones (2.63) son conocidas como *Transformaciones de Lorentz*. De manera que el principio de relatividad de Einstein se puede enunciar diciendo que *todas las leyes físicas son invariantes bajo una transformación de Lorentz*.

En las ecuaciones (2.63) el factor $\gamma = 1/\sqrt{1 - v_o^2 / c^2}$ tiende a la unidad cuando la velocidad relativa entre los dos sistemas de referencia, v_o , es una velocidad pequeña en comparación con la de la luz, c : En estas circunstancias el término $v_o x / c^2$ tiende a cero, y así, las ecuaciones (2.63) tienden a ser iguales a (2.62). Así, en situaciones en las que las velocidades sean pequeñas comparadas con c no hay diferencia entre las transformaciones Lorentziana y Galileana, y podremos seguir usando la última en la mayor parte de los problemas que encontraremos.

TEMA 3. DINÁMICA DE LA PARTÍCULA.

1.- Introducción.

En el tema anterior se estudió el movimiento de una partícula desde un punto de vista cinemático, es decir, sin preocuparse de porqué una partícula llevaba un tipo de movimiento u otro. Se vio que el movimiento de una partícula quedaba perfectamente descrito con el conocimiento de los vectores de posición, velocidad y aceleración.

En el presente tema se analizan los factores que determinan el movimiento de una partícula y se establecen las leyes de la Mecánica de la partícula, con las que podremos resolver el problema fundamental de la dinámica: conocidos los factores que determinan el movimiento, encontrar $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{v}(t)$.

El establecer las leyes para un punto material o partícula puede parecer una drástica simplificación del problema real ya que en principio éstas no serían aplicables a los objetos que no pueden ser considerados como partículas. Sin embargo, como veremos en el tema siguiente, cualquier objeto extenso puede ser considerado como un conjunto de partículas y las leyes para estos objetos se obtienen de aplicar las leyes de la Mecánica a cada una de las partículas que lo forman.

2.- Leyes de la Mecánica.

Considérese a una partícula. Se define su *medio* como el resto de partículas del universo. Se observa que el tipo de movimiento que posee una partícula (rectilíneo uniforme, circular uniforme...) depende del medio que la rodea. A la influencia que ejerce el medio sobre la partícula se le denomina *interacción*, y como veremos, así como existe una gran variedad de medios sólo hay unos pocos tipos de interacciones.

Se define una *partícula libre* como aquélla que no está sujeta a ningún tipo de interacción con el medio. Como veremos a lo largo del tema, todo medio ejerce algún tipo de influencia sobre el movimiento de las partículas, con lo que las partículas libres no existen. Sin embargo este concepto es de gran utilidad ya que en la práctica se pueden encontrar situaciones en las que la influencia del medio es despreciable o equivalente a la

que ejerce el vacío, es decir, ninguna. En estos casos se tendrá que las partículas se comportan como libres.

Una vez introducida la noción de partícula libre, la *primera ley de la Mecánica* establece que "una partícula libre permanece en reposo o se mueve con un movimiento rectilíneo uniforme respecto de ciertos sistemas de referencia, denominados *sistemas de referencia inerciales* (SRI)".

Esta ley es conocida también con el nombre de *primera ley de Newton o ley de inercia*, y establece la tendencia natural que tienen las partículas a no modificar su estado de movimiento cuando no se les perturba. A esta propiedad se le llama *inercia* y también se le puede ver como la resistencia que ofrecen las partículas ante una perturbación externa.

Teniendo en cuenta esta primera ley y las transformaciones de Galileo vistas en el tema anterior, se deduce fácilmente que un sistema que tenga un movimiento de traslación uniforme respecto de un SRI, es también un SRI.

En efecto:

Sea O, X, Y, Z un sistema de referencia inercial y O', X', Y', Z' un sistema de referencia con un movimiento de traslación uniforme respecto de O . De las transformaciones de Galileo se tiene que

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_O$$

y por tanto:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_O$$

y como para una partícula libre \mathbf{v} es constante se tiene que \mathbf{v}' también lo será ya que \mathbf{v}_O lo es, con lo que O' será un sistema de referencia inercial.

Además, esto implica que un SRI está asociado a una partícula libre. Por tanto, también se trata de un ente ideal, aunque en la práctica bajo determinadas condiciones podemos considerar un sistema de referencia dado como inercial.

A los sistemas de referencia que no cumplen la ley de inercia se les denominan *sistemas de referencia no inerciales* (SRNI) y como se ha visto, son aquellos que poseen respecto de un SRI un movimiento distinto al de traslación uniforme. Las leyes de la Mecánica

serán establecidas en los SRI, y en el apartado 13 de este tema se formularán para los SRNI.

Se define el *momento lineal* de una partícula como:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (3.1)$$

donde m es la masa y \mathbf{v} es la velocidad de la partícula. Sus unidades en el SI son m kg s^{-1} y su ecuación de dimensiones es $[\mathbf{p}] = \text{MLT}^{-1}$.

Teniendo en cuenta (3.1) se puede expresar alternativamente la ley de inercia diciendo que *una partícula libre se mueve con \mathbf{p} constante respecto de un SRI*.

Dado un sistema de n partículas (Fig.3.1), se define el momento lineal del sistema como

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \dots + \mathbf{p}_n \quad (3.2)$$

siendo \mathbf{p}_i el momento lineal de la partícula i .

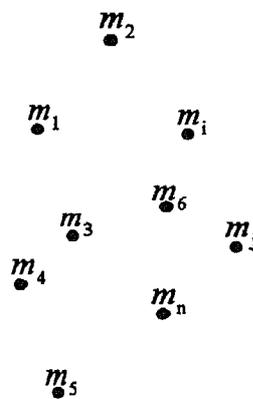


Fig. 3.1.

Se dice que un sistema de partículas está *aislado* cuando las únicas interacciones posibles son entre las partículas del propio sistema, no existiendo influencia alguna del medio. *La segunda ley de la mecánica* establece que en un sistema de partículas aislado

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i = \text{cte} \quad (3.3)$$

esto es, el momento lineal total de un sistema aislado de partículas permanece constante. Este resultado también se conoce con el nombre de *principio de conservación del momento lineal* y una forma alternativa de expresarlo es:

$$\Delta p = \sum_{i=1}^n \Delta p_i = \Delta p_1 + \Delta p_2 + \dots + \Delta p_n = 0 \quad (3.4)$$

Si se considera a una de las partículas de este sistema, por ejemplo la partícula 1, podemos ver al resto de las partículas como su medio (Fig.3.2).

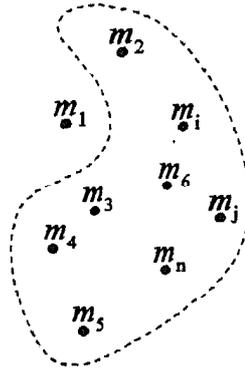


Fig. 3.2.

Si se despeja Δp_1 de la ecuación (3.4) se tiene:

$$\Delta p_1 = -\sum_{i=2}^n \Delta p_i = -(\Delta p_2 + \Delta p_3 + \dots + \Delta p_n) \quad (3.5)$$

esto es, la variación del momento lineal de una partícula se debe a una variación del momento lineal de las partículas del medio. Por tanto, en una interacción se intercambia momento.

Si se divide la expresión anterior por un intervalo de tiempo, Δt , y se hace tender a cero, entonces

$$\frac{dp_1}{dt} = -\left(\frac{dp_2}{dt} + \frac{dp_3}{dt} + \dots + \frac{dp_n}{dt}\right) \quad (3.6)$$

Se define *la fuerza* que ejerce el medio sobre la partícula 1 como

$$\mathbf{F}_1 = \frac{dp_1}{dt} \quad (3.7)$$

Se observa que el concepto de fuerza representa la interacción de una partícula con su medio. Esta definición de la fuerza es precisamente *la segunda ley de Newton*. La unidad de la fuerza en el SI es el Newton ($N = \text{kg m s}^{-2}$) y su ecuación de dimensiones es la siguiente $[F] = \text{MLT}^{-2}$.

Recordando (3.1) se puede expresar (3.7) como

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} \quad (3.8)$$

y si m es constante, entonces

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a} \quad (3.9)$$

Si la partícula es libre, de (3.8) y (3.9) se observa que \mathbf{F} es nulo, ya que como hemos visto, tanto \mathbf{p} como \mathbf{v} permanecen en este caso constantes.

La ecuación (3.9) nos permite determinar el tipo de movimiento de la partícula siempre que se conozca la fuerza que actúa sobre ella. Para determinar la fuerza asumiremos que:

a) Se cumple el *principio de superposición* que dice que:

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \dots + \mathbf{F}_{1n} \quad (3.10)$$

en donde \mathbf{F}_{1i} es la fuerza que ejerce la partícula i sobre la partícula 1, supuestas ambas aisladas del resto del medio (Fig.3.3).

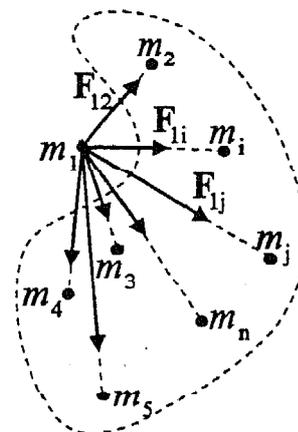


Fig. 3.3.

b) Las F_{ii} son conocidas.

Dadas dos partículas 1 y 2, *la tercera ley de la Mecánica* establece que:

$$F_{12} = -F_{21} \quad (3.11)$$

en donde además la línea de acción de ambas fuerzas viene dada por la recta que une a ambas partículas (Fig.3.4). A esta ley se le conoce también con el nombre de *Principio de Acción y Reacción*.

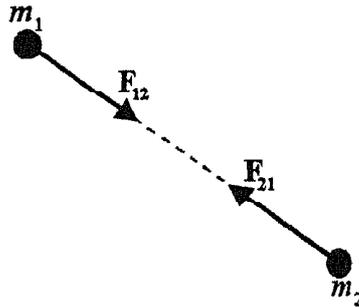


Fig. 3.4.

3.- Tipos de interacciones en la Naturaleza.

Desde el punto de vista de nuestra percepción sensorial podríamos distinguir, en principio, dos tipos de fuerzas: las de contacto (resistencia al movimiento de un objeto que se desliza sobre una superficie rugosa, una patada al balón,...) y las interacciones a distancia (fuerza de atracción tierra-sol, fuerza de repulsión entre electrones,...). Sin embargo desde el punto de vista de la Física no existe diferencia alguna entre estos dos tipos de interacciones. En realidad en las fuerzas que hemos llamado de contacto, éste no se produce realmente, siempre existe una distancia, aunque microscópica, entre las moléculas de los objetos que interactúan. Así por tanto, la diferencia está en nuestra manera de percibir, incapaz de apreciar distancias microscópicas. Aún después de todo lo dicho, en ocasiones, seguiremos manteniendo esta distinción entre fuerzas de contacto y a distancia.

En el seno de la Mecánica Clásica se supone que las interacciones se transmiten de forma instantánea, es decir, con velocidad infinita. Hoy se sabe que ninguna interacción se puede transmitir a velocidad mayor que la de propagación de la luz. En la Física actual el modelo de interacción entre dos partículas consiste en los siguientes pasos:

- 1) Una de las partículas emite otra, llamada *partícula mediadora*, con el contenido de la interacción (momento lineal y energía).
- 2) La partícula mediadora se propaga de una a otra de las partículas que interactúan con una velocidad menor o igual que la de la luz.
- 3) La segunda partícula absorbe a la mediadora, adquiriendo así la cantidad de momento lineal y energía que transmitía esta partícula.

Es importante señalar que cuando una partícula está haciendo de mediadora no se puede detectar. En este sentido se suele decir que las partículas mediadoras son virtuales.

Sin embargo, cuando las partículas se desplazan a velocidades pequeñas en comparación a la velocidad de la luz el modelo de interacción clásico (la interacción a distancia se propaga instantáneamente) es buena aproximación de la realidad física.

En la siguiente tabla mostramos las interacciones fundamentales existentes en la Naturaleza, su intensidad relativa con respecto a la más intensa de ellas, el alcance de la interacción, la partícula mediadora y el escenario típico donde actúan estas interacciones.

Interacción	Intensidad Relativa	Alcance (metros)	Partículas mediadoras	Escenario
Nuclear fuerte	1	10^{-15}	Piones	Núcleos
Electromagnética	10^{-2}	∞	Fotones	Átomos, moléculas
Nuclear débil	10^{-12}	$<10^{-17}$	Bosones	Desintegración β
Gravitatoria	10^{-40}	∞	Gravitones	Cosmos

Tabla 3.1

Interacción nuclear fuerte: Es responsable de la estabilidad de los núcleos manteniendo unidos a sus constituyentes. Como se ve en la Tabla 3.1 las partículas mediadoras son los *piones* (π^\pm, π^0) que tienen una masa en reposo de alrededor de 2.505×10^{-28} kg. Un resultado importante es que el alcance, r , de la interacción guarda una relación de proporcionalidad inversa con la masa de la partícula mediadora. Esta es:

$$mr = \frac{h}{2\pi c} \quad (3.12)$$

donde h es la constante de Planck (6.626×10^{-34} Js⁻¹) y c la velocidad de la luz en el vacío (2.998×10^8 ms⁻¹).

También son interacciones fuertes las responsables de la existencia del protón y del neutrón que son estados ligados de tres partículas elementales llamadas *quarks*. Cuando la interacción es entre quarks la partícula mediadora es el *gluón* y a estas interacciones se les denomina *cromodinámicas*.

Interacciones electromagnéticas: Son responsables de las interacciones entre los electrones y el núcleo dentro de un átomo o las que gobiernan las interacciones entre los átomos que forman las moléculas. Las interacciones entre objetos magnetizados o con carga eléctrica son también de esta naturaleza. La partícula mediadora es el *fotón* (γ) cuya masa en reposo es nula. Este último hecho está de acuerdo, según la expresión (3.12), con que estas interacciones sean de alcance infinito.

Interacción nuclear débil: A ésta se deben las desintegraciones β de los núcleos y en general todos los procesos en los que interviene un tipo de partículas elementales llamadas *neutrinos*. Así esta interacción es la que gobierna el proceso de desintegración de un neutrón, n , en un protón, p , un electrón, e , y un antineutrino electrónico, $\bar{\nu}_e$, ($n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$). Las partículas mediadoras de este tipo de interacción son los *bosones cargados* (W^+ , W^-) y el *bosón neutro* (Z^0) cuyas masas son del orden de 1.435×10^{-25} kg para los primeros y de 1.623×10^{-25} kg para el tercero. Estas masas tan grandes, como se observa en la expresión (3.12) son las que hacen que el alcance sea tan pequeño, más de 100 veces menor que el alcance de las interacciones fuertes. Los trabajos realizados por los físicos Glasgow, Weinberg y Salam entre los años 1962-68 llevaron a unificar esta interacción a la electromagnética en una sola interacción fundamental llamada *electrodébil*.

Interacción gravitatoria: Esta depende de la masa de los objetos y son siempre atractivas. Son las que gobiernan el movimiento planetario o las responsables de las mareas. Además esta es la única interacción que admite ser expresada mediante una ley matemática sencilla, que es *la ley de Gravitación Universal de Newton*:

$$\mathbf{F}_G = -G \frac{mm'}{r^2} \mathbf{u}_r \quad (3.13)$$

donde G es la constante de gravitación universal, m y m' son las masas de las partículas que interactúan, r es la distancia que las separa y \mathbf{u}_r es un vector unitario en la dirección de la línea de unión de las dos partículas. Al igual que las otras interacciones fundamentales, las gravitatorias tendrían que ser mediadas a través de una partícula llamada *gravitón*, que tendría que tener masa nula (por ser de alcance infinito), de la cual no hay evidencia experimental.

Si observamos los alcances de estas interacciones fundamentales en la Tabla 3.1 es fácil darse cuenta que la explicación de la Física a escala macroscópica se puede fundamentar en sólo dos de estas interacciones: las gravitatorias y las electromagnéticas.

Cuando estudiamos el movimiento de los objetos materiales en la Tierra, la única contribución gravitatoria apreciable es la fuerza de atracción que la Tierra ejerce sobre el objeto (su peso). De ésta manera todas las demás interacciones macroscópicas tendrán que ser de origen electromagnético. Así las tensiones en cuerdas y cables, las fuerzas elásticas, las reacciones en apoyos (rozamientos), etc., son resultados estadísticos de tener en cuenta las interacciones electromagnéticas de las moléculas de las superficies de los objetos en contacto.

En este contexto de la física macroscópica las interacciones a distancia se explican apoyándose en el concepto de campo. De esta manera cuando dos partículas interactúan a distancia suponemos que lo hacen según el siguiente mecanismo: Una de ellas dota a una región del espacio de una serie de propiedades, esto es, que crea un campo en dicha región, de manera que la otra partícula (sensible a dichas propiedades) sufriría la acción del campo al penetrar en esta región.

4.- Fuerzas de reacción en apoyos.

Cuando una partícula material P se apoya sobre una superficie sólida S se producen interacciones de naturaleza electromagnética entre los átomos de las capas superficiales adyacentes de la partícula y la superficie sólida. Estas interacciones son difíciles de analizar en detalle, pero su manifestación macroscópica se puede modelizar mediante un par de acción-reacción (Fig.3.5) (R es la acción y R' la reacción procedente de la partícula y τ representa el plano tangente a la superficie S).

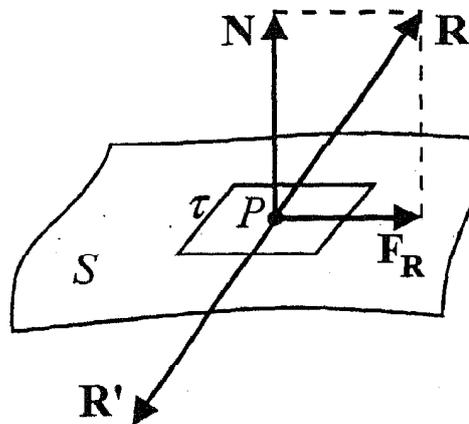


Fig. 3.5.

Ahora bien, como nos ocupamos del movimiento de la partícula y consideramos fija la superficie sólo nos interesa \mathbf{R} .

Normalmente \mathbf{R} se descompone como suma de dos componentes (Fig. 3.5):

$$\mathbf{R} = \mathbf{N} + \mathbf{F}_R \quad (3.14)$$

donde a \mathbf{N} que es perpendicular al plano tangente τ se le denomina *normal*, y a \mathbf{F}_R que está contenida en el plano tangente τ se le llama *fuerza de rozamiento* o *fricción*.

4.1.- Fuerzas de rozamiento.

Podemos distinguir dos tipos de rozamiento: *Rozamiento seco* y *rozamiento fluido*.

4.1.1.- Rozamiento seco.

Es el producido entre dos cuerpos sólidos. Algunas características generales de esta fuerza son:

a) Dependen de la naturaleza y condiciones de las dos superficies sólidas en contacto (acabado, películas superficiales, temperatura, grado de contaminación...), pero con buena aproximación no dependen del área de contacto entre los dos sólidos.

b) Son tangentes a la superficie de contacto de ambos cuerpos.

c) Aparecen sobre ambos cuerpos al aplicar una fuerza sobre uno de ellos, pudiendo haber o no deslizamiento relativo de éstos.

Para analizar este tipo de fuerzas supongamos un bloque que descansa sobre una mesa horizontal, pudiendo distinguir las siguientes situaciones que quedan reflejadas en la Fig.3.6 y en el gráfico de la Fig.3.7, donde se representa la fuerza de rozamiento frente a la fuerza aplicada.

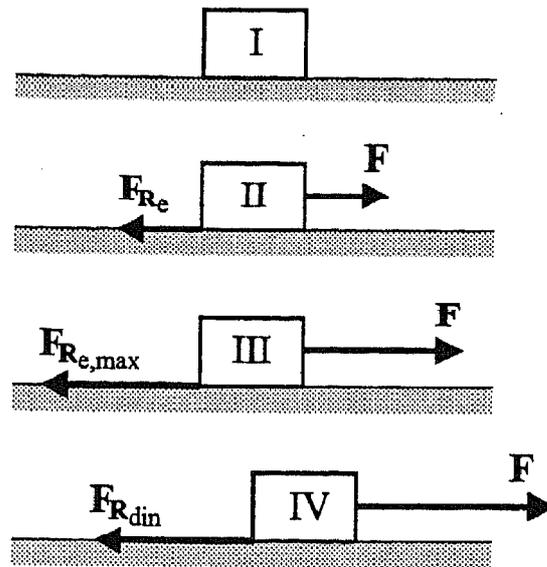


Fig. 3.6.

I) Inicialmente el bloque se encuentra en equilibrio bajo la acción de su propio peso y la normal N .

II) Si ahora aplicamos una fuerza F que vamos aumentando gradualmente de manera que el bloque no se pone en movimiento, por la segunda ley de Newton debe de estar actuando sobre él una fuerza igual y de sentido contrario F_{R_e} , que se conoce como *fuerza de rozamiento estática*. Se cumple entonces que:

$$F_{R_e} = -F \quad (3.15)$$

III) La situación anterior se continúa repitiendo hasta que llega un momento en el que la fuerza aplicada es tal que si se aumentase un poco su módulo, el bloque se pondría en movimiento. A la fuerza de rozamiento en esta situación límite se le llama *fuerza de rozamiento estática máxima* y se ha encontrado que su expresión es:

$$F_{R_{e,max}} = -\mu_{est} N \mathbf{u}_v \quad (3.16)$$

donde μ_{est} es el *coeficiente de rozamiento estático*, que es característico de las superficies en contacto y $\mathbf{u}_v = \mathbf{v}/v$ es un vector unitario en la dirección de la velocidad del bloque con respecto a la superficie.

IV) Una vez el bloque se pone en movimiento al seguir aumentando la fuerza aplicada, la fuerza de rozamiento disminuye y toma un valor constante independiente de ésta, igual a:

$$F_{rd} = -\mu_{din} N u_v \quad (3.17)$$

donde μ_{din} es el *coeficiente de rozamiento dinámico*. En esta situación a la fuerza de rozamiento se le conoce como *fuerza de rozamiento dinámica*.

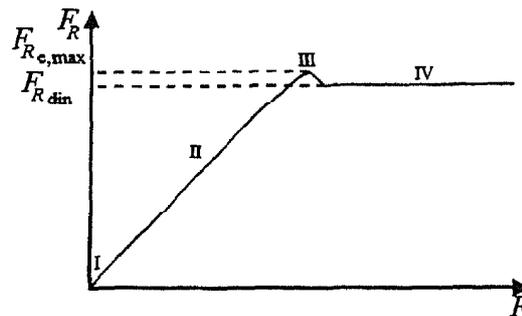


Fig. 3.7.

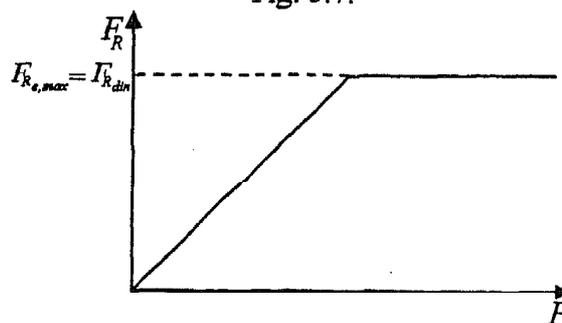


Fig. 3.8.

En numerosos casos prácticos la situación reflejada por la curva de la Fig.3.7 queda idealizada por la gráfica de la Fig.3.8.

Para la mayoría de las sustancias $\mu_{est} > \mu_{din}$. Algunos valores de estos coeficientes para diferentes sustancias se muestran en la Tabla 3.2.

Material	μ_{est}	μ_{din}
Acero sobre acero	0.74	0.57
Aluminio sobre acero	0.61	0.47
Vidrio sobre vidrio	0.94	0.40
Caucho sobre hormigón	0.90	0.80
Acero sobre hielo	0.10	0.06

Tabla 3.2.

4.1.2.- Rozamiento fluido.

Es el que tiene lugar entre capas contiguas de fluido que se mueven a diferentes velocidades o el que sufre un sólido que penetra un fluido. El comportamiento de esta fuerza depende de muchas cosas, incluyendo por ejemplo la forma del sólido que se sumerge en el fluido, la velocidad del objeto respecto del fluido y la naturaleza del fluido. A estas fuerzas de rozamiento se les suele llamar *fuerzas viscosas*.

En bastantes situaciones prácticas, cuando un objeto se mueve a bajas velocidades en un fluido, la resistencia que pone el fluido al movimiento del sólido puede obtenerse por una expresión del tipo,

$$\mathbf{F}_f = -b\mathbf{v} \quad (3.18)$$

donde b es una constante de proporcionalidad y \mathbf{v} es la velocidad del sólido.

5.- Fuerzas elásticas.

Aunque ya se estudiará más detalladamente este tipo de fuerzas, cuando se traten los medios continuos, conviene mencionar algunas de las características más importantes de éstas, dada su importancia práctica.

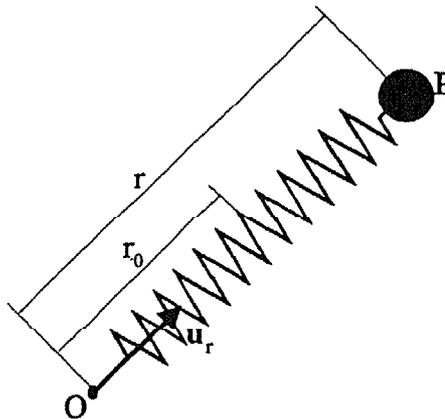


Fig. 3.9.

Tomaremos como ejemplo típico de cuerpo elástico a un muelle o resorte (Fig. 3.9). Cuando un resorte se estira o se comprime una longitud $\Delta r = r - r_0$ (siendo r su longitud deformada y r_0 su longitud sin deformar), se verifica que dicho resorte ejercerá una fuerza con el objeto de recuperar su longitud original, cuya expresión es aproximadamente:

$$\mathbf{F}_{el} = -k\Delta r\mathbf{u}_r = -k[\Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j} + \Delta z\mathbf{k}] = -k[(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}] \quad (3.19)$$

donde k se conoce como la *constante del resorte* y \mathbf{u}_r es un vector unitario en la dirección del resorte. La expresión anterior se conoce como *ley de Hooke* y es válida siempre que la deformación del resorte no supere un cierto límite. Obsérvese que cuando el resorte está estirado $\Delta r > 0$, y entonces \mathbf{F}_{el} tiene sentido opuesto a \mathbf{u}_r . Del mismo modo cuando el resorte está comprimido $\Delta r < 0$ y \mathbf{F}_{el} tiene el mismo sentido que \mathbf{u}_r . Es decir la fuerza elástica se opone a que P sea desplazado. En este sentido se suele llamar a esta *fuerza recuperadora*.

6.- Momento angular. Conservación del momento angular.

Se define el *momento angular* o *cinético*, \mathbf{L}_O , de una partícula de masa m que se mueve con velocidad \mathbf{v} , respecto de un punto O , desde el cual se mide el vector de posición de la partícula \mathbf{r} , como (Fig.3.10)

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \quad (3.20)$$

El momento angular es perpendicular al plano determinado por \mathbf{r} y \mathbf{v} . Sus unidades en el SI son $\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$ y su ecuación de dimensiones es $[\mathbf{L}_O] = \text{ML}^2\text{T}^{-1}$.

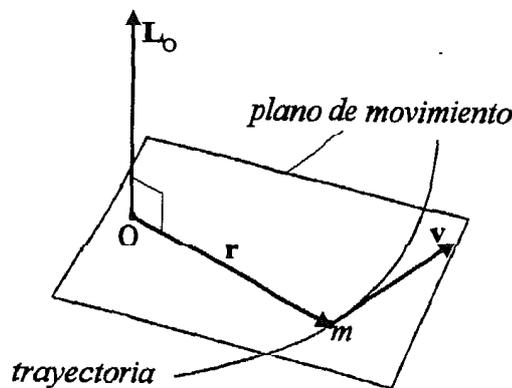


Fig. 3.10.

En general \mathbf{L}_O cambia (en magnitud y dirección) mientras transcurre el movimiento de la partícula. Si la partícula se mueve en un plano y el punto O se toma en él, la dirección de \mathbf{L}_O no cambia y permanece perpendicular a dicho plano. Un caso particular interesante donde esto ocurre cuando la partícula describe un *movimiento curvilíneo en el plano*. En este caso si se calcula el momento angular respecto del punto O (Fig.3.11), \mathbf{L}_O será un vector de módulo $mr^2\omega$ y dirección la de la velocidad angular ω . Esto es:

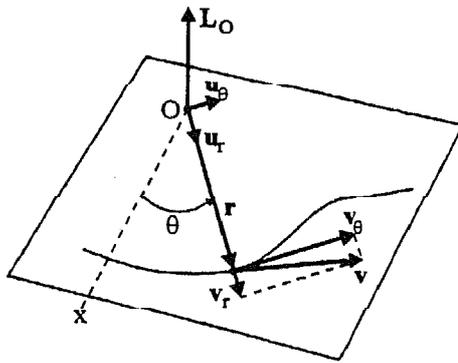


Fig. 3.11.

$$L_O = mr^2 \omega \quad (3.21)$$

En efecto:

En este caso la velocidad \mathbf{v} se puede expresar como suma de una componente radial,

$\mathbf{v}_r = \frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r$, y transversal, $\mathbf{v}_\theta = r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta$ (Fig. 3.11). Entonces L_O será

$$L_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = m(\mathbf{r} \times (\mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\theta)) = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}_\theta \quad (3.22)$$

ya que \mathbf{r} es paralelo a \mathbf{v}_r . Por ello el módulo de L_O es

$$L_O = mrv_\theta \sin \frac{\pi}{2} = mr^2 \frac{d\theta}{dt} = mr^2 \omega$$

ya que \mathbf{r} y \mathbf{v}_θ son perpendiculares.

En cuanto a su dirección, ya que $\mathbf{v}_\theta = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, sustituyendo en (3.22), se tiene que:

$$L_O = m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

y utilizando la siguiente propiedad del producto vectorial de tres vectores:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}$$

se deduce que:

$$L_O = mr^2 \boldsymbol{\omega} - m(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r} = mr^2 \boldsymbol{\omega}$$

ya que como \mathbf{r} es perpendicular a $\boldsymbol{\omega}$ el segundo término de la expresión anterior es nulo.

En el caso de un movimiento curvilíneo en el plano L_O puede variar en magnitud al hacerlo r ó ω .

Un caso particular de movimiento curvilíneo en el plano es el caso de un movimiento circular (Fig.3.12). Así, si se toma el punto O como centro de la trayectoria circular descrita por la partícula, L_O vendrá dado también por la expresión (3.21). En este caso la distancia r permanece constante por lo que el módulo de L_O únicamente puede variar al hacerlo ω . Se tiene por tanto:

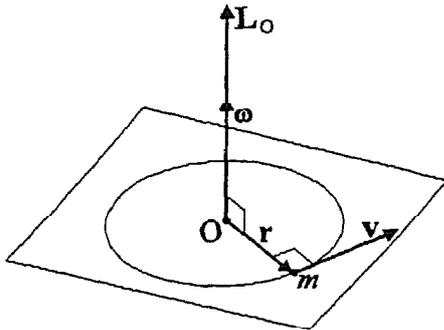


Fig. 3.12.

$$L_O = mr^2\omega \quad (3.23)$$

En efecto:

En el caso del movimiento circular $v = v_\theta$ con lo cual resulta inmediato verificar que se cumple (3.23).

Se define el momento de una fuerza respecto de un punto O , M_O , como

$$M_O = r \times F \quad (3.24)$$

Sus unidades en el SI son N m y su ecuación de dimensiones es $[M_O] = ML^2T^{-2}$.

El teorema del momento angular establece que:

$$M_O = \frac{dL_O}{dt} \quad (3.25)$$

En efecto:

Derivando (3.20) respecto a t se tiene

$$\begin{aligned} \frac{dL_O}{dt} &= \frac{d}{dt}(r \times p) = \frac{dr}{dt} \times p + r \times \frac{dp}{dt} = \\ &= v \times p + r \times F = r \times F \end{aligned}$$

Si el momento resultante de todas las fuerzas que actúan sobre una partícula, respecto a un punto O , es nulo, el momento angular respecto a ese punto se conserva. A esto se conoce como *teorema de conservación del momento angular*.

Del teorema anterior se tiene que el momento angular se conserva respecto de cualquier punto del espacio, cuando la partícula es libre o bien la resultante de las fuerzas que actúan sobre la partícula es nula. Pero además se conserva también cuando la partícula se encuentra sometida a un tipo especial de fuerzas llamadas *fuerzas centrales*. Se dice que un campo de fuerzas es central cuando las direcciones de las fuerzas pasan por un mismo punto llamado *centro del campo* (Fig.3.13).

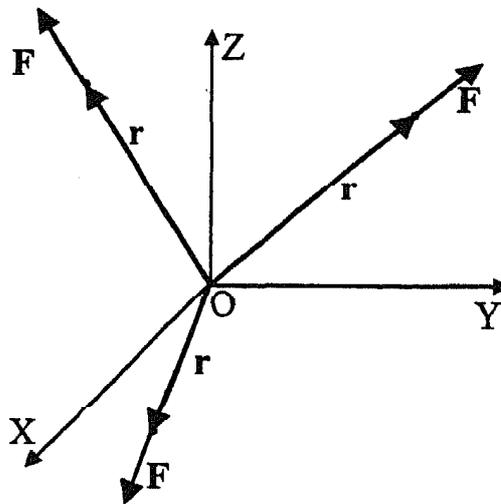


Fig. 3.13

Si tomamos el punto O como centro de campo es fácil observar que el momento angular respecto a ese punto se conserva ya que \mathbf{r} es paralelo a \mathbf{F} y por tanto $\mathbf{M}_O=0$.

La expresión de una fuerza central en coordenadas esféricas es,

$$\mathbf{F} = F(r, \theta, \varphi) \mathbf{u}_r \quad (3.26)$$

Si F es sólo función de r entonces se denomina *fuerza central con simetría esférica*.

Otro caso importante son las *fuerzas axiales*, que se caracterizan porque su dirección pasa por un eje fijo. En este caso, la componente del momento de fuerzas según ese eje es nula, conservándose la componente del momento angular según ese eje.

7.- Impulso lineal y angular.

El *impulso lineal* de una fuerza en el intervalo de tiempo entre t y t' se define como

$$\mathbf{I} = \int_t^{t'} \mathbf{F} dt \quad (3.27)$$

Sus unidades en el SI son N s y su ecuación de dimensiones es $[I] = \text{MLT}^{-1}$.

Se puede demostrar que el impulso lineal es igual a:

$$\mathbf{I} = \mathbf{p}' - \mathbf{p} \quad (3.28)$$

En efecto:

Teniendo en cuenta (3.8) se tiene que (3.27) es igual a:

$$\mathbf{I} = \int_t^{t'} \mathbf{F} dt = \int_t^{t'} \frac{d\mathbf{p}}{dt} dt = \int_{\mathbf{p}(t)}^{\mathbf{p}(t')} d\mathbf{p} = \mathbf{p}(t') - \mathbf{p}(t) = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$$

De manera análoga al impulso lineal, se define el impulso angular como

$$\mathbf{J}_O = \int_t^{t'} \mathbf{M}_O dt \quad (3.29)$$

y sus unidades en el SI son N m s y su ecuación de dimensiones es $[J] = \text{ML}^2\text{T}^{-1}$.

De igual forma, se puede demostrar que:

$$\mathbf{J}_O = \mathbf{L}'_O - \mathbf{L}_O \quad (3.30)$$

En efecto:

Teniendo en cuenta (3.25) se tiene que (3.29) es igual a:

$$\mathbf{J}_O = \int_t^{t'} \mathbf{M}_O dt = \int_t^{t'} \frac{d\mathbf{L}_O}{dt} dt = \int_{\mathbf{L}_O(t)}^{\mathbf{L}_O(t')} d\mathbf{L}_O = \mathbf{L}_O(t') - \mathbf{L}_O(t) = \mathbf{L}'_O - \mathbf{L}_O$$

8.- Trabajo de una fuerza. Energía cinética.

Se define el *trabajo elemental* realizado por una fuerza, δW , como:

$$\delta W = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F ds \cos\theta \quad (3.31)$$

donde el ángulo θ es aquél formado por la fuerza, \mathbf{F} , y el desplazamiento, $d\mathbf{r}$ (Fig.3.14).

Generalizando (3.31), se define el *trabajo* realizado por una fuerza sobre una partícula, que se desplaza desde la posición A a la posición B a lo largo de una trayectoria C (Fig.3.14), como:

$$W_{AB}^C = \int_{A,C}^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{A,C}^B F ds \cos\theta = \int_{A,C}^B F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad (3.32)$$

es decir, es la circulación del campo \mathbf{F} a lo largo de C entre los puntos A y B . La unidad del trabajo en el SI es el Julio ($J=N\ m$) y su ecuación de dimensiones es $[W]=ML^2T^{-2}$.

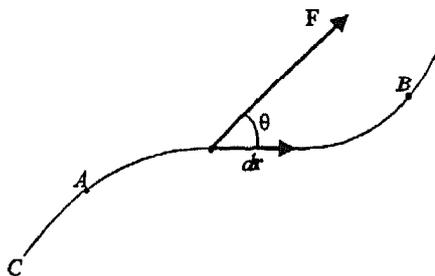


Fig. 3.14.

El trabajo en general depende de la trayectoria seguida por la partícula. Esto es:

$$\int_{A,C_1}^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \neq \int_{A,C_2}^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (3.33)$$

El trabajo realizado para desplazar una partícula desde la posición A a la posición B a lo largo de una trayectoria C , puede también expresarse como

$$W_{AB}^C = \int_{A,C}^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 \quad (3.34)$$

En efecto:

Teniendo en cuenta que,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot d\mathbf{r} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \\ &= m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = \frac{m}{2} d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \frac{m}{2} d(v^2) = m v dv \end{aligned}$$

la expresión para el trabajo queda,

$$W_{AB}^C = \int_{A,C}^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{A,C}^B mvdv = \left[\frac{1}{2}mv^2 \right]_{A,C}^B = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

como queríamos demostrar.

Si se define la *energía cinética* como

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad (3.35)$$

la expresión del trabajo queda

$$W_{AB}^C = E_c(B) - E_c(A) = \Delta E_c \quad (3.36)$$

lo que se conoce como *teorema del trabajo y la energía cinética* (o teorema de las fuerzas vivas).

De (3.36) es inmediato comprobar como tanto la ecuación de dimensiones como las unidades de la energía cinética son las mismas que las del trabajo.

9.- Potencia.

Se define la *potencia media*, P_m , como:

$$P_m = \frac{W_{AB}^C}{\Delta t} \quad (3.37)$$

donde $\Delta t = t_B - t_A$, es el tiempo que tarda la partícula en desplazarse desde A hasta B .

Se define la *potencia instantánea* como

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{W_{AB}^C}{\Delta t} = \frac{\delta W}{dt} \quad (3.38)$$

y como $\delta W = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ la potencia instantánea puede también expresarse como,

$$P = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (3.39)$$

donde \mathbf{v} es la velocidad con que se mueve la partícula.

La unidad de la potencia en el SI es el vatio ($W=J\ s^{-1}$), aunque para ciertas aplicaciones prácticas se suele utilizar el caballo de vapor ($CV=746\ W$). La ecuación de dimensiones de la potencia es $[P] = ML^2T^{-3}$.

10.- Trabajo realizado por una fuerza conservativa. Energía potencial.

Una fuerza \mathbf{F} es conservativa si existe un campo escalar U tal que:

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k} = -\nabla U \quad (3.40)$$

A la función U se le denomina *energía potencial* y su unidad en el SI es el Julio. Entonces el trabajo realizado por una fuerza conservativa a lo largo de una trayectoria cualquiera, C , será:

$$W_{AB}^C = U(A) - U(B) = -\Delta U \quad (3.41)$$

En efecto:

De (1.50) hemos visto que la derivada direccional de una función escalar a lo largo de una dirección cualquiera está relacionada con el gradiente de dicha función por:

$$\frac{dU}{dr} = \nabla U \cdot \mathbf{u}_r$$

de donde se tiene:

$$dU = \nabla U \cdot d\mathbf{r}\mathbf{u}_r = \nabla U \cdot d\mathbf{r}$$

con lo que el trabajo queda:

$$W_{AB}^C = \int_{A,C}^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{A,C}^B \nabla U \cdot d\mathbf{r} = -\int_{A,C}^B dU = U(A) - U(B)$$

Algunas de las propiedades más importantes de las fuerzas conservativas son:

- 1) Una fuerza es conservativa si y solo si su rotacional es nulo. Esto es, $\nabla \times \mathbf{F} = 0$.
- 2) Una fuerza es conservativa si y solo si el trabajo realizado entre dos puntos A y B es independiente de la trayectoria recorrida por la partícula. Es decir $\int_{A,C}^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de C .

3) Una fuerza es conservativa si y solo si el trabajo realizado a lo largo de cualquier trayectoria cerrada es nulo:

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

Seguidamente veremos cual es la expresión que toma U en el caso de ciertos campos de fuerzas conservativas de especial interés, como son el caso de un campo de fuerzas uniforme y un campo de fuerzas centrales con simetría esférica.

10.1.- Campos uniformes.

Un campo de fuerzas uniforme se caracteriza en que \mathbf{F} es constante en todo punto del campo (Fig.3.15).

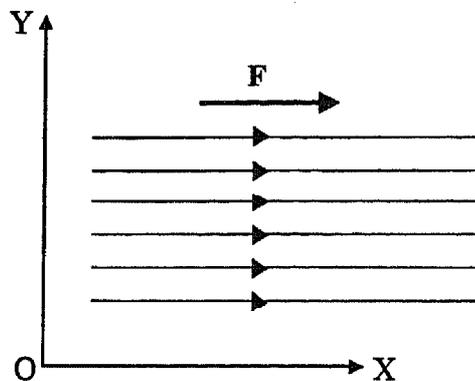


Fig. 3.15.

Tomando $\mathbf{F} = F\mathbf{i}$, se tiene que

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial F}{\partial z} \mathbf{j} - \frac{\partial F}{\partial y} \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

y por tanto de la primera propiedad de los campos de fuerzas conservativos vemos que un campo uniforme lo es.

Por tanto, este campo tiene asociada una energía potencial U , que podemos conocer teniendo en cuenta que de la expresión (3.40)

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} - \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k} = F\mathbf{i}$$

con lo cual

con lo cual

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0 \Rightarrow F = -\frac{dU}{dx}$$

con lo que U es solo función de x , e integrando la primera de estas expresiones obtenemos U

$$\int dU = -\int F dx \Rightarrow U(x) = -Fx + \text{cte}$$

y si se toma el origen de energía potencial en $x=0$, es decir $U(0)=0$, se tiene que $\text{cte}=0$ y por tanto:

$$U(x) = -Fx \quad (3.42)$$

Este tipo de campos representa aproximadamente bien situaciones reales. Así por ejemplo, si consideramos una región del espacio próxima a la superficie de la Tierra, y no demasiado extensa, entonces en ella el campo de gravedad terrestre g se puede considerar uniforme con buena aproximación y crea sobre una partícula de masa m una fuerza constante, el *peso*, que como hemos visto tiene por expresión, $\mathbf{P} = m\mathbf{g} = -mg\mathbf{k}$. Entonces aplicando (3.42) tenemos:

$$U(z) = mgz$$

donde se supone que $U(0)=0$.

10.2. - Campos de fuerzas centrales con simetría esférica.

Teniendo en cuenta que en este caso, $\mathbf{F} = F(r)\mathbf{u}_r$, se tiene que el rotacional de \mathbf{F} (expresado en coordenadas esféricas) es:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_r & \mathbf{u}_\theta & \mathbf{u}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ F & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \mathbf{u}_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \mathbf{u}_\varphi = 0$$

ya que $\frac{\partial F}{\partial \varphi} = \frac{\partial F}{\partial \theta} = 0$, y por tanto queda demostrado que se trata de un campo conservativo.

A continuación se determina la expresión que toma la energía potencial, U , en los siguientes casos:

$$a) F = \frac{C}{r^2}$$

Teniendo en cuenta (3.40) se observa que:

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{u}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \mathbf{u}_\theta - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \mathbf{u}_\varphi = \frac{C}{r^2} \mathbf{u}_r$$

con lo cual:

$$F = -\frac{\partial U}{\partial r}, \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad F = -\frac{dU}{dr}$$

e integrando la primera de estas expresiones obtenemos:

$$\int dU = -\int \frac{C}{r^2} dr \quad \Rightarrow \quad U(r) = \frac{C}{r} + \text{cte}$$

y si se toma el origen de potencial en el infinito, es decir $U(r)=0$ cuando $r \rightarrow \infty$, se tiene que $\text{cte}=0$ y por tanto:

$$U(r) = \frac{C}{r} \tag{3.43}$$

Las fuerzas gravitatorias y las electrostáticas son fuerzas de este tipo. Para las primeras C toma el valor $-Gm_1 m_2$, y para las segundas el valor $Kq_1 q_2$.

b) $F=C(r-r_0)$, donde r_0 es una constante. Procediendo de forma análoga al caso anterior se tiene que para este campo la energía potencial U tiene por expresión general:

$$U(r) = -\frac{1}{2} C (r - r_0)^2 + \text{cte}$$

y si se toma el origen de potencial en $r=r_0$, es decir $U(r_0)=0$, se tiene que $\text{cte}=0$ y por tanto:

$$U(r) = -\frac{1}{2} C (r - r_0)^2 \tag{3.44}$$

La fuerza elástica es una fuerza de este tipo donde $C=-k$.

11.- Principio de conservación de la energía.

Se define la *energía total* (o *energía mecánica total*) de una partícula como

$$E = E_c + U \quad (3.45)$$

De este modo, se observa que si todas las fuerzas que actúan sobre una partícula son conservativas se conserva la energía total. Esto es:

$$E = E_c + U = \text{cte} \quad (3.46)$$

En efecto:

Del teorema del trabajo y la energía cinética obtuvimos que el trabajo realizado por todas las fuerzas para desplazar un objeto entre dos puntos cualesquiera A y B a lo largo de una curva C es

$$W_{AB}^C = E_c(B) - E_c(A) = \Delta E_c$$

y si únicamente están actuando fuerzas conservativas se tiene además que:

$$W_{AB}^C = U(A) - U(B) = -\Delta U$$

e igualando ambas expresiones se tiene finalmente

$$\Delta E_c + \Delta U = \Delta(E_c + U) = 0$$

lo cual quiere decir que:

$$E = E_c + U = \text{cte}$$

12.- Teorema de la energía mecánica.

Si sobre una partícula están actuando fuerzas conservativas, F_C , y no conservativas o disipativas, F_{NC} , se tiene que:

$$W_{NC} = \Delta E \quad (3.47)$$

y a esta expresión se le conoce como el *teorema de la energía mecánica*.

En efecto:

En este caso, del teorema del trabajo y la energía cinética:

$$W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r} + \int_A^B \mathbf{F}_{NC} \cdot d\mathbf{r} = E_c(B) - E_c(A) \quad (3.48)$$

Además, el trabajo de las fuerzas conservativas dará origen a una energía potencial, tal que:

$$\int_A^B \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r} = U(A) - U(B)$$

con lo cual la expresión (3.48) queda:

$$W_{NC} + U(A) - U(B) = E_c(B) - E_c(A)$$

donde $W_{NC} = \int_A^B \mathbf{F}_{NC} \cdot d\mathbf{r}$. Con lo cual se tiene:

$$W_{NC} = E(B) - E(A) = \Delta E$$

13.- Leyes de la Mecánica en los SRNI

Hasta el momento se han enunciado las leyes de la mecánica en los SRI. En muchas situaciones reales no se dispone de un sistema de referencia inercial por lo que se hace necesario establecer las leyes en los SRNI. Además en algunos casos, incluso disponiendo de un SRI, se hace más sencillo resolver algunos problemas en estos sistemas.

Considérese un SRI, O, X, Y, Z , y un SRNI, $O'X', Y', Z'$. De la ecuación (2.56) del tema anterior se tiene que

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_o + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}' + 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}') + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$$

Si multiplicamos la relación anterior por la masa m de la partícula, y se tiene en cuenta la segunda ley de Newton, se tiene que

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}' + m(\mathbf{a}_o + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}' + 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}') + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')) \quad (3.49)$$

En la expresión anterior aparece en el primer miembro la fuerza a la que está sometida la partícula. En el segundo miembro se tiene la masa de la partícula multiplicada por su

aceleración respecto del sistema no inercial, y un segundo término que da cuenta del estado de movimiento de O', X', Y', Z' respecto de O, X, Y, Z al que denominaremos *término inercial*.

Con la ecuación anterior queda resuelto el problema fundamental de la dinámica para el observador no inercial ya que conociendo la influencia del medio sobre la partícula, a través de \mathbf{F} , y su estado de movimiento respecto de un observador inercial, a través del término inercial, determina \mathbf{a}' y a partir de ésta la velocidad y la posición.

De esta forma las leyes de la Mecánica vendrían dadas para un observador no inercial por la ecuación (3.49). No se cumpliría la ley de inercia ya que una partícula libre podría estar acelerada a causa del término de inercia.

Esta forma de establecer las leyes presenta dos inconvenientes. El primero es que el observador no inercial podrá utilizar la ecuación (3.49) únicamente en el caso de conocer su estado de movimiento respecto de un observador inercial. Y el segundo es que es de desear que las leyes de la mecánica sean lo más parecidas posible en los dos tipos de sistemas de referencia.

Existe una forma alternativa de presentar las leyes que consiste en considerar el término de inercia como una fuerza. Si se denota por \mathbf{F}_I a este término con signo menos, al que llamaremos en adelante *fuerza de inercia*, se tiene para un observador no inercial que

$$\begin{aligned}\mathbf{F}' &= m\mathbf{a}' \\ \mathbf{F}' &= \mathbf{F} + \mathbf{F}_I \\ \mathbf{F}_I &= -m(\mathbf{a}_o + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}' + 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}') + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'))\end{aligned}\tag{3.50}$$

consiguiendo de esta forma mantener la forma de la segunda ley de Newton. Además ahora los observadores no inerciales resolverían el problema fundamental de la dinámica exactamente igual que los inerciales: determinando las fuerzas que actúan sobre la partícula.

Con la introducción de las fuerzas de inercia las leyes en estos sistemas quedan:

1.- Si sobre una partícula la fuerza que actúa (considerando también las de inercia) es nula, entonces se mueve con velocidad constante o momento lineal constante.

$$2.- \quad \mathbf{F}' = \frac{d\mathbf{p}'}{dt} = m\mathbf{a}' \quad ; \quad \mathbf{F}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_I$$

La diferencia fundamental está en que para los observadores no inerciales el medio no es el único agente que puede causar una aceleración sobre una partícula. Esto se ve fácilmente en la ecuación (3.50) en donde si no hay medio, $\mathbf{F}=0$, puede haber aceleración debido al término de inercia.

Las fuerzas de inercia son denominadas también *fuerzas ficticias* en el sentido de que, como se observa en la ecuación (3.50), son debidas al estado de movimiento del observador y no a una interacción con el medio. Esta fuerza está compuesta de cuatro términos de los cuales al término $-2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}')$ se le llama *fuerza de Coriolis*, al término $-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$ *fuerza centrífuga* y al término $-m\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}'$ *fuerza azimutal*.

A continuación se presentan algunas situaciones en las que aparecen las fuerzas de inercia.

1.- Si O', X', Y', Z' sólo se traslada con aceleración \mathbf{a}_o respecto de O, X, Y, Z .

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{F}_I = -m\mathbf{a}_o$$

2.- Rotación de O', X', Y', Z' con velocidad angular constante y origen fijo.

$$\left. \begin{array}{l} \boldsymbol{\omega} = \text{cte} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \\ \mathbf{a}_{o'} = \mathbf{0} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{F}_I = -2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}') - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$$

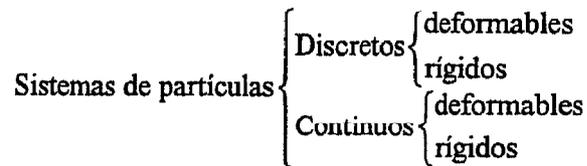
Si además la partícula se encuentra en reposo respecto de O', X', Y', Z' o se mueve en una recta paralela al eje de rotación se tiene

$$\left. \begin{array}{l} \boldsymbol{\omega} = \text{cte} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \\ \mathbf{a}_{o'} = \mathbf{0} \\ \mathbf{v}' = \mathbf{0} \text{ o } \boldsymbol{\omega} \parallel \mathbf{v}' \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{F}_I = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$$

TEMA 4. DINÁMICA DE LOS SISTEMAS DE PARTÍCULAS.

1.- Definición de sistema de puntos materiales. Clasificación.

En el tema anterior se ha tratado la dinámica de un cuerpo sin tener en cuenta sus dimensiones. Hay ocasiones en las que es necesario considerar las dimensiones del objeto en estudio (su estructura interna). En estos casos se utilizan modelos más complejos para el estudio dinámico, denominados *sistemas de partículas o de puntos materiales*. Estos admiten la siguiente clasificación:



Los sistemas de partículas *discretos* son los que constan de un número finito de puntos materiales (Fig.4.1). Cuando bajo la acción de una fuerza no se modifican las distancias relativas entre las partículas constituyentes del sistema, se habla de un sistema de partículas *rígido*. En caso contrario el sistema es *deformable*.

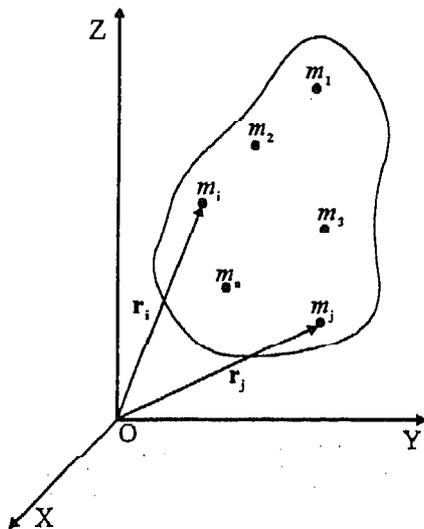


Fig. 4.1

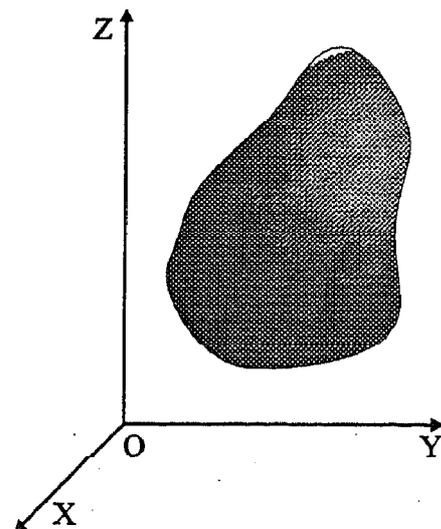


Fig. 4.2

Se dice que un sistema de partículas es *continuo* cuando se supone que la distribución de materia llena completamente el volumen que ocupa dicho sistema (Fig.4.2). Los sistemas continuos son *deformables* cuando cambian su forma bajo la acción de una fuerza. Por el contrario, cuando la forma no varía se habla de un sistema *rígido*.

Aunque en realidad a nivel microscópico, todo objeto material tiene una estructura discreta compuesta por un número elevado de puntos materiales (moléculas, átomos, partículas elementales, etc., según sea la escala con la que se está estudiando el problema), para estudiar el comportamiento a nivel macroscópico de los cuerpos se les considera como sistemas continuos en muchas aplicaciones.

En lo que sigue de capítulo estudiaremos la dinámica de un sistema de partículas discreto formado por n puntos materiales de masas m_1, m_2, \dots, m_n , y localizados en las posiciones $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$, respecto a un sistema de referencia inercial.

2.- Fuerzas interiores y exteriores.

Ya que las partículas que constituyen el sistema pueden interactuar entre sí o con otras partículas ajenas al mismo, es conveniente distinguir entre dos tipos de fuerzas:

a) *Fuerzas exteriores*: Son las fuerzas ejercidas sobre las partículas del sistema por agentes externos a dicho sistema. Así \mathbf{F}_i^e será la resultante de las fuerzas exteriores sobre la partícula i (Fig.4.3).

b) *Fuerzas interiores*: Son las fuerzas que ejercen entre sí las partículas constituyentes del sistema. Supondremos que este tipo de fuerzas cumplen la tercera ley de Newton y, que por tanto, están dirigidas según la recta de unión de cada dos partículas. Así, si \mathbf{f}_{ij} representa la fuerza interior que actúa sobre la partícula i debido a su interacción con la partícula j (Fig.4.3), se tendrá que:

$$\mathbf{f}_{ij} = -\mathbf{f}_{ji} \quad (4.1)$$

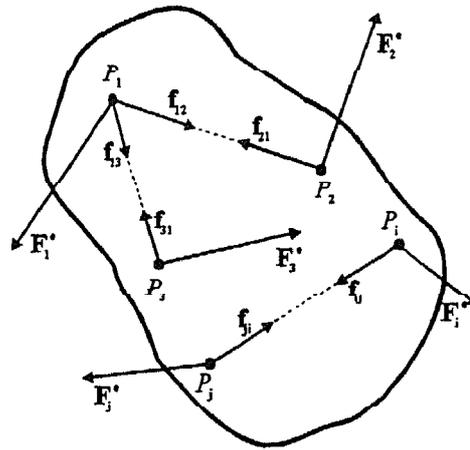


Fig.4.3

De (4.1) se desprende que en un sistema de partículas la resultante de todas las fuerzas interiores es nula, esto es:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{f}_{ij} = \mathbf{0} \tag{4.2}$$

En efecto:

Como una partícula no interacciona sobre si misma $\mathbf{f}_{ii} = \mathbf{0}$ y, por tanto:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{f}_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \mathbf{f}_{ij} = \sum_{i < j}^n \mathbf{f}_{ij} + \sum_{i > j}^n \mathbf{f}_{ij} = \sum_{i < j}^n (\mathbf{f}_{ij} + \mathbf{f}_{ji})$$

y en virtud de (4.1) el término en paréntesis en la expresión anterior será nulo, ya que:

$$\mathbf{f}_{ij} + \mathbf{f}_{ji} = \mathbf{f}_{ij} - \mathbf{f}_{ij} = \mathbf{0}$$

con lo cual el sumatorio anterior será nulo.

3.- Movimiento de un sistema de partículas.

El *momento lineal* de un sistema de partículas, \mathbf{p} , se define como

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i \tag{4.3}$$

donde \mathbf{p}_i , m_i y \mathbf{v}_i son el momento lineal, la masa y la velocidad de la partícula i .

El *teorema del momento lineal* o *ecuación del movimiento* de un sistema de partículas establece que

$$\mathbf{F}^e = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (4.4)$$

donde $\mathbf{F}^e = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^e$, es la resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema.

En efecto:

Si \mathbf{F}_i es la resultante de las fuerzas que actúan sobre la partícula i , es decir:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^e + \mathbf{f}_{i1} + \mathbf{f}_{i2} + \dots + \mathbf{f}_{in} = \mathbf{F}_i^e + \sum_{j=1}^n \mathbf{f}_{ij}$$

el movimiento de la partícula i viene gobernado por la ecuación (3.8),

$$\mathbf{F}_i = \frac{d\mathbf{p}_i}{dt}$$

de modo que sumando para todas las partículas del sistema, obtenemos por un lado teniendo en cuenta (4.2):

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^n \left(\mathbf{F}_i^e + \sum_{j=1}^n \mathbf{f}_{ij} \right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^e + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{f}_{ij} = \mathbf{F}^e$$

y por otro lado, teniendo en cuenta (4.3):

$$\sum_{i=1}^n \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i \right) = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

e igualando ambas expresiones obtenemos (4.4).

El *teorema de conservación del momento lineal* establece que si la resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre un sistema de partículas es nula el momento lineal del mismo se conserva.

En efecto:

De la expresión (4.4) observamos que si $\mathbf{F}^e = \mathbf{0}$ esto quiere decir que el momento lineal, \mathbf{p} , ha de permanecer constante en el tiempo.

El *impulso mecánico* de un sistema de partículas, \mathbf{I} , se define como

$$\mathbf{I} = \sum_{i=1}^n \mathbf{I}_i \quad (4.5)$$

donde \mathbf{I}_i es el impulso correspondiente a la partícula i .

El impulso mecánico de un sistema de partículas verifica la siguiente relación

$$\mathbf{I} = \int_t^{t'} \mathbf{F}^e dt = \mathbf{p}(t') - \mathbf{p}(t) = \Delta \mathbf{p} \quad (4.6)$$

En efecto:

Para la partícula i se tiene que:

$$\mathbf{I}_i = \int_t^{t'} \mathbf{F}_i dt = \int_t^{t'} \left(\mathbf{F}_i^e + \sum_{j=1}^n \mathbf{f}_{ij} \right) dt = \mathbf{p}_i(t') - \mathbf{p}_i(t)$$

y sumando para todas las partículas del sistema se tiene por un lado, considerando (4.2):

$$\mathbf{I} = \sum_{i=1}^n \mathbf{I}_i = \sum_{i=1}^n \int_t^{t'} \mathbf{F}_i dt = \sum_{i=1}^n \int_t^{t'} \left(\mathbf{F}_i^e + \sum_{j=1}^n \mathbf{f}_{ij} \right) dt = \int_t^{t'} \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^e dt + \int_t^{t'} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{f}_{ij} dt = \int_t^{t'} \mathbf{F}^e dt$$

y por otro lado, teniendo en cuenta (4.5):

$$\mathbf{I} = \sum_{i=1}^n \mathbf{I}_i = \sum_{i=1}^n (\mathbf{p}_i(t') - \mathbf{p}_i(t)) = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i(t') - \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i(t) = \mathbf{p}(t') - \mathbf{p}(t) = \Delta \mathbf{p}$$

e igualando ambas expresiones obtenemos (4.6).

4.- Centro de masas. Propiedades.

Para un sistema de partículas el *centro de masas* se define como el punto geométrico cuya posición respecto a un sistema de referencia es:

$$\mathbf{r}_{\text{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{M} \quad (4.7)$$

donde M es la masa total del sistema. Esto es:

$$M = \sum_{i=1}^n m_i \quad (4.8)$$

Se define la *velocidad del centro de masas* como

$$\mathbf{v}_{\text{CM}} = \frac{d\mathbf{r}_{\text{CM}}}{dt} \quad (4.9)$$

puediéndose expresar también a través de

$$\mathbf{v}_{\text{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i}{M} \quad (4.10)$$

En efecto:

Derivando (4.7) respecto a t teniendo en cuenta que la masa permanece constante

$$\mathbf{v}_{\text{CM}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{M} \right) = \frac{1}{M} \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \right) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i$$

obtenemos (4.10).

De forma análoga, la *aceleración del centro de masas* se define como

$$\mathbf{a}_{\text{CM}} = \frac{d\mathbf{v}_{\text{CM}}}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i}{M} \quad (4.11)$$

Teniendo en cuenta las expresiones (4.10) y (4.3) se tiene que el momento lineal del sistema se puede expresar como

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i = M \mathbf{v}_{\text{CM}} \quad (4.12)$$

y de (4.4), utilizando las expresiones (4.11) y (4.12)

$$\mathbf{F}^e = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt} (M \mathbf{v}_{\text{CM}}) = M \frac{d\mathbf{v}_{\text{CM}}}{dt} = M \mathbf{a}_{\text{CM}} \quad (4.13)$$

Los resultados de las expresiones (4.12) y (4.13) nos llevan a enunciar el *teorema del centro de masas*, que dice: *El centro de masas de un sistema de partículas se mueve como un punto material con una masa igual a la del sistema, M , y con una fuerza resultante aplicada en él, igual a la resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema, F^e .*

5.- Momento angular. Teorema del momento angular.

El *momento angular* de un sistema de partículas con respecto a un punto O se define como:

$$\mathbf{L}_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{L}_{O_i} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i \quad (4.14)$$

donde \mathbf{L}_{O_i} es el momento angular de la partícula i con respecto al mismo punto O .

El *teorema del momento angular* para un sistema de partículas establece:

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \mathbf{M}_O^e = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^e \quad (4.15)$$

En efecto:

Por simplicidad se justificará el teorema anterior para el caso de dos partículas (Fig. 4.4).

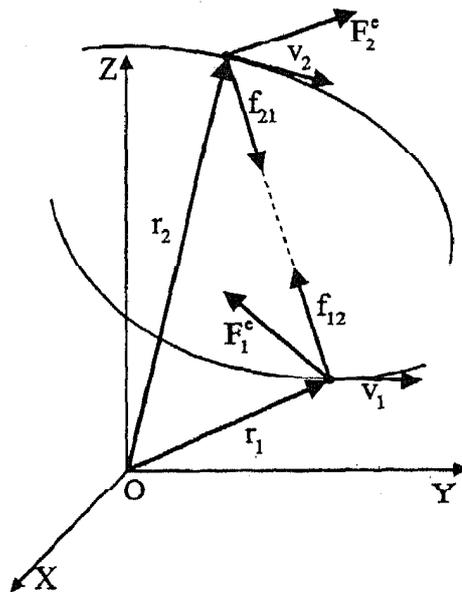


Fig. 4.4.

De este modo, el momento que actúa sobre la partícula 1 será:

$$\mathbf{M}_{O_1} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 = \mathbf{r}_1 \times (\mathbf{F}_1^c + \mathbf{f}_{12}) = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1^c + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{f}_{12} = \frac{d\mathbf{L}_{O_1}}{dt}$$

y el momento que actúa sobre la partícula 2 será:

$$\mathbf{M}_{O_2} = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{r}_2 \times (\mathbf{F}_2^c + \mathbf{f}_{21}) = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2^c + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{f}_{21} = \frac{d\mathbf{L}_{O_2}}{dt}$$

Sumando ambos momentos tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O &= \mathbf{M}_{O_1} + \mathbf{M}_{O_2} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1^c + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2^c + (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{f}_{12} \\ &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1^c + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2^c = \mathbf{M}_{O_1}^c + \mathbf{M}_{O_2}^c = \mathbf{M}_O^c \end{aligned}$$

ya que $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ es paralelo a \mathbf{f}_{12} .

Y además considerando (4.14) se tiene también que:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_{O_1} + \mathbf{M}_{O_2} = \frac{d\mathbf{L}_{O_1}}{dt} + \frac{d\mathbf{L}_{O_2}}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{L}_{O_1} + \mathbf{L}_{O_2}) = \frac{d\mathbf{L}_O}{dt}$$

e igualando ambas expresiones obtenemos (4.15).

El *teorema de conservación del momento angular* establece que si el momento resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre un sistema de partículas, respecto de un punto O , es nulo, el momento angular del sistema respecto al punto O se conserva.

En efecto:

De la expresión (4.15) observamos que si $\mathbf{M}_O^c = \mathbf{0}$ esto quiere decir que el momento angular respecto al punto O , \mathbf{L}_O , ha de permanecer constante en el tiempo.

6.- Energía cinética. Teorema del trabajo y la energía cinética.

La *energía cinética* de un sistema de partículas se define como

$$E_c = \sum_{i=1}^n E_{c_i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (4.16)$$

y el *trabajo debido a las fuerzas exteriores* como

$$W_{AB}^{ext} = \sum_{i=1}^n \int_{A,C_i}^B F_i^e \cdot dr_i \tag{4.17}$$

Análogamente el trabajo debido a las fuerzas interiores se define como

$$W_{AB}^{int} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{A,C_i}^B f_{ij} \cdot dr_i = \sum_{i<j} \int_{A,C_{ij}}^B f_{ij} \cdot dr_{ij} \tag{4.18}$$

donde A y B indican el estado en el que se encuentra el sistema en los instantes t_A y t_B , respectivamente, dr_i es el espacio recorrido por la partícula i a lo largo de la curva C_i en un tiempo dt , y $dr_{ij} = dr_i - dr_j$.

En efecto:

La igualdad de la expresión (4.18) se deduce del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{A,C_i}^B f_{ij} \cdot dr_i &= \sum_{i<j} \int_{A,C_i}^B f_{ij} \cdot dr_i + \sum_{i>j} \int_{A,C_i}^B f_{ij} \cdot dr_i = \sum_{i<j} \int_{A,C_i}^B f_{ij} \cdot dr_i + \sum_{i<j} \int_{A,C_j}^B f_{ji} \cdot dr_j = \\ &= \sum_{i<j} \int_{A,C_i}^B f_{ij} \cdot dr_i - \sum_{i<j} \int_{A,C_j}^B f_{ij} \cdot dr_j = \sum_{i<j} \int_{A,C_{ij}}^B f_{ij} \cdot (dr_i - dr_j) = \sum_{i<j} \int_{A,C_{ij}}^B f_{ij} \cdot dr_{ij} \end{aligned}$$

El teorema del trabajo y la energía cinética para un sistema de partículas establece que:

$$E_c(t_B) - E_c(t_A) = W_{AB}^{ext} + W_{AB}^{int} \tag{4.19}$$

En efecto:

De nuevo, por simplicidad, se justificará este teorema para el caso de un sistema de dos partículas de masas m_1 y m_2 , sujetas a la acción de las fuerzas exteriores F_1^e y F_2^e , e interiores f_{12} y f_{21} (Fig.4.5).

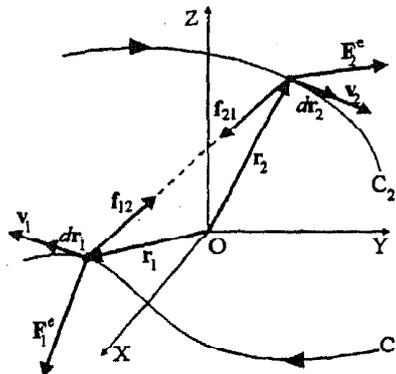


Fig. 4.5.

La ecuación del movimiento para cada una de las partículas es

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_1^c + \mathbf{f}_{12} = m_1 \mathbf{a}_1$$

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_2^c + \mathbf{f}_{21} = m_2 \mathbf{a}_2$$

y multiplicando escalarmente estas ecuaciones por los espacios recorridos por cada partícula en un intervalo de tiempo dt , esto es, por $d\mathbf{r}_1$ y $d\mathbf{r}_2$, se tiene

$$m_1 \mathbf{a}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 = \mathbf{F}_1^c \cdot d\mathbf{r}_1 + \mathbf{f}_{12} \cdot d\mathbf{r}_1$$

$$m_2 \mathbf{a}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 = \mathbf{F}_2^c \cdot d\mathbf{r}_2 + \mathbf{f}_{21} \cdot d\mathbf{r}_2 = \mathbf{F}_2^c \cdot d\mathbf{r}_2 - \mathbf{f}_{12} \cdot d\mathbf{r}_2$$

Integrando ambas ecuaciones entre los instantes t_A y t_B se obtiene,

$$\int_{A,C_1}^B m_1 \mathbf{a}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 = \int_{A,C_1}^B \mathbf{F}_1^c \cdot d\mathbf{r}_1 + \int_{A,C_1}^B \mathbf{f}_{12} \cdot d\mathbf{r}_1$$

$$\int_{A,C_2}^B m_2 \mathbf{a}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 = \int_{A,C_2}^B \mathbf{F}_2^c \cdot d\mathbf{r}_2 + \int_{A,C_2}^B \mathbf{f}_{21} \cdot d\mathbf{r}_2 = \int_{A,C_2}^B \mathbf{F}_2^c \cdot d\mathbf{r}_2 - \int_{A,C_2}^B \mathbf{f}_{12} \cdot d\mathbf{r}_2$$

y sumando ahora ambas ecuaciones, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i \cdot d\mathbf{r}_i &= \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \cdot d\mathbf{r}_i = \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} dt = \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \cdot \mathbf{v}_i dt = \mathbf{v}_i \cdot \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} dt = \\ &= \mathbf{v}_i \cdot d\mathbf{v}_i = \frac{1}{2} d(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i) = \frac{1}{2} dv_i^2 = v_i dv_i \end{aligned}$$

resulta

$$\int_{A,C_1}^B m_1 v_1 dv_1 + \int_{A,C_2}^B m_2 v_2 dv_2 = \int_{A,C_1}^B \mathbf{F}_1^c \cdot d\mathbf{r}_1 + \int_{A,C_2}^B \mathbf{F}_2^c \cdot d\mathbf{r}_2 + \int_{A,C_{12}}^B \mathbf{f}_{12} \cdot d\mathbf{r}_{12}$$

Ahora bien, considerando que:

$$\int_A^B m_i v_i dv_i = \frac{1}{2} m_i (v_i^2(t_B) - v_i^2(t_A)) = E_{c_i}(t_B) - E_{c_i}(t_A)$$

$$\int_{A,C_1}^B \mathbf{F}_1^c \cdot d\mathbf{r}_1 + \int_{A,C_2}^B \mathbf{F}_2^c \cdot d\mathbf{r}_2 = W_{AB}^{\text{ext}}$$

$$\int_{A,C_{12}}^B \mathbf{f}_{12} \cdot d\mathbf{r}_{12} = W_{AB}^{\text{int}}$$

obtenemos finalmente:

$$(E_{c_1}(t_B) + E_{c_2}(t_B)) - (E_{c_1}(t_A) + E_{c_2}(t_A)) = W_{AB}^{\text{ext}} + W_{AB}^{\text{int}}$$

esto es:

$$\Delta E_c = E_c(t_B) - E_c(t_A) = W_{AB}^{\text{ext}} + W_{AB}^{\text{int}}$$

7.- Movimiento del sistema en torno al centro de masas.

En este apartado se establece la relación que existe entre la descripción del movimiento del sistema de partículas con respecto al sistema fijo, $OXYZ$, denominado también *sistema laboratorio* (SL), y la correspondiente descripción con respecto a un sistema que tiene su origen en el centro de masas y que mantiene los ejes paralelos a los del sistema fijo, $O'X'Y'Z'$. A este último se le conoce como *sistema centro de masas* (SCM).

De este modo, la relación que existe entre la posición de la partícula i , con respecto al SL, \mathbf{r}_i , y al SCM, \mathbf{r}'_i (Fig.4.6), es:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{r}_{\text{CM}} \quad (4.20)$$

siendo \mathbf{r}_{CM} la posición del centro de masas con respecto al SL.

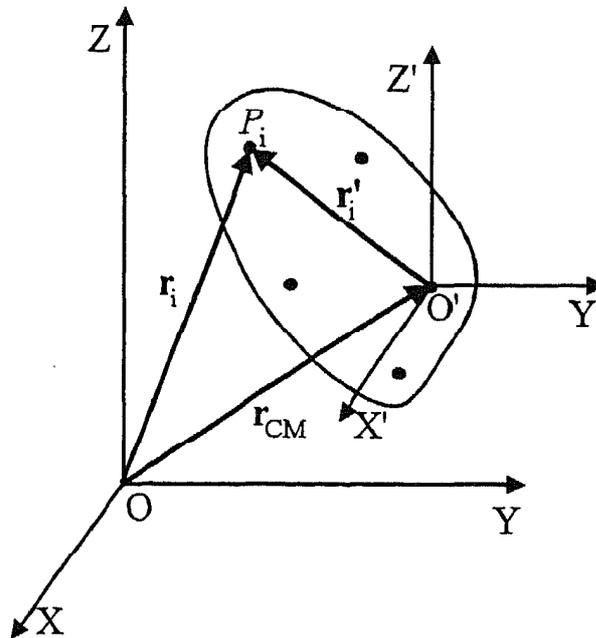


Fig. 4.6.

Con respecto a las velocidades la relación existente es

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_{\text{CM}} \quad (4.21)$$

En efecto:

Si derivamos con respecto al tiempo la expresión (4.20) se tiene:

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'_i}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_{CM}}{dt}$$

y como los ejes del SCM se mantienen siempre paralelos a los del SL:

$$\frac{d\mathbf{r}'_i}{dt} = \mathbf{v}'_i$$

y obtenemos la expresión (4.21).

De forma análoga a las velocidades, la relación existente entre las aceleraciones es:

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{a}'_i + \mathbf{a}_{CM} \quad (4.22)$$

De las expresiones (4.20), (4.21) y (4.22) se deduce que:

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i = \mathbf{0} \quad , \quad \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}'_i = \mathbf{0} \quad , \quad \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}'_i = \mathbf{0} \quad (4.23)$$

lo que implica que el momento lineal del sistema con respecto al SCM es nulo. Esto es:

$$\mathbf{p}' = M\mathbf{v}'_{CM} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}'_i = \mathbf{0} \quad (4.24)$$

En efecto:

Sólo se demuestra la primera de las igualdades de (4.23), siendo la demostración de las dos restantes completamente análoga. Así teniendo en cuenta (4.20) y (4.7):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i &= \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{CM}) = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i - \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_{CM} = \\ &= \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i - M\mathbf{r}_{CM} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i - \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i = \mathbf{0} \end{aligned}$$

La relación entre el momento angular del sistema con respecto al SL, \mathbf{L}_O , y el momento angular con respecto al SCM, $\mathbf{L}_{O'}$, es:

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{L}_{O'} + \mathbf{L}_{CM} = \mathbf{L}_{O'} + \mathbf{r}_{CM} \times M\mathbf{v}_{CM} \quad (4.25)$$

donde a L_O se le llama *momento angular intrínseco o spin* y a L_{CM} , que es el momento angular del centro de masas con respecto al SL, *momento angular orbital*.

En efecto:

Se demuestra (4.25) teniendo en cuenta que el momento angular de la partícula i del sistema respecto al SL es

$$\begin{aligned} L_{O_i} &= \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = (\mathbf{r}'_i + \mathbf{r}_{CM}) \times m_i (\mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_{CM}) = \\ &= \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i + \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}_{CM} + \mathbf{r}_{CM} \times m_i \mathbf{v}'_i + \mathbf{r}_{CM} \times m_i \mathbf{v}_{CM} \end{aligned}$$

y sumando para todas las partículas, se tiene

$$L_O = \sum_{i=1}^n L_{O_i} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}_{CM} + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_{CM} \times m_i \mathbf{v}'_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_{CM} \times m_i \mathbf{v}_{CM}$$

El primer sumando de esta expresión representa el momento angular del sistema respecto del SCM. Esto es:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times \mathbf{p}'_i = \sum_{i=1}^n L_{O_i} = L_O$$

El segundo sumando es nulo ya que teniendo en cuenta (4.23) resulta:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}_{CM} = \left(\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i \right) \times \mathbf{v}_{CM} = \mathbf{0}$$

De forma análoga el tercer sumando es nulo ya que considerando (4.23) de nuevo resulta:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_{CM} \times m_i \mathbf{v}'_i = \mathbf{r}_{CM} \times \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}'_i = \mathbf{0}$$

Por último el cuarto sumando es igual al momento angular del centro de masas respecto del SL. Esto es:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_{CM} \times m_i \mathbf{v}_{CM} &= \mathbf{r}_{CM} \times \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_{CM} = \mathbf{r}_{CM} \times \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) \mathbf{v}_{CM} = \\ &= \mathbf{r}_{CM} \times M \mathbf{v}_{CM} = \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{p} = L_{CM} \end{aligned}$$

y por tanto se observa que se verifica (4.25).

El teorema del momento angular para el SCM establece:

$$\frac{d\mathbf{L}_{O'}}{dt} = \mathbf{M}_{O'}^c = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i^c \quad (4.26)$$

En efecto:

Si se deriva la expresión (4.25) respecto al tiempo se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}_O}{dt} &= \frac{d\mathbf{L}_{O'}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_{CM}}{dt} \times M\mathbf{v}_{CM} + \mathbf{r}_{CM} \times M \frac{d\mathbf{v}_{CM}}{dt} = \\ &= \frac{d\mathbf{L}_{O'}}{dt} + \mathbf{v}_{CM} \times M\mathbf{v}_{CM} + \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{F}^c = \frac{d\mathbf{L}_{O'}}{dt} + \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{F}^c \end{aligned}$$

El primer término de esta ecuación coincide, por el teorema del momento angular, con el momento total con respecto a O, pudiendo expresarse:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O^c &= \frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^c = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}'_i + \mathbf{r}_{CM}) \times \mathbf{F}_i^c = \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i^c + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{F}_i^c = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i^c + \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{F}^c \end{aligned}$$

y comparando estas dos últimas expresiones se observa que:

$$\frac{d\mathbf{L}_{O'}}{dt} = \mathbf{M}_{O'}^c = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i^c$$

En cuanto a la energía cinética la relación que existe entre aquella observada por el SL y el SCM es:

$$E_c = E'_c + \frac{1}{2} Mv_{CM}^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \frac{1}{2} Mv_{CM}^2 \quad (4.27)$$

y recibe el nombre de *Teorema de Kőening*.

En efecto:

Haciendo uso de la expresión (4.21) se tiene:

$$\begin{aligned}
 E_c &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (\mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_{CM})^2 = \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_{CM} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2
 \end{aligned}$$

y como el segundo sumando es igual a

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_{CM} = \left(\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}'_i \right) \cdot \mathbf{v}_{CM} = 0$$

donde se ha hecho uso de la ecuación (4.23), entonces queda:

$$E_c = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) v_{CM}^2 = E'_c + \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

8.- Energía potencial de un sistema de partículas.

Cuando las fuerzas exteriores que actúan sobre un sistema de partículas son conservativas, existe para cada partícula, i , una *energía potencial externa*, U_i^e , que da cuenta de la interacción descrita por \mathbf{F}_i^e , de forma que:

$$\mathbf{F}_i^e = -\text{grad}(U_i^e) = -\nabla U_i^e \quad (4.28)$$

Teniendo en cuenta la expresión (4.17) se tiene que el trabajo realizado por las fuerzas exteriores es igual a:

$$\begin{aligned}
 W^{\text{ext}} &= \sum_{i=1}^n \int_{A, C_i}^B \mathbf{F}_i^e \cdot d\mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^n \int_{A, C_i}^B -\nabla U_i^e \cdot d\mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^n - \int_{A, C_i}^B dU_i^e = \\
 &= \sum_{i=1}^n (U_i^e(A) - U_i^e(B)) = \sum_{i=1}^n U_i^e(A) - \sum_{i=1}^n U_i^e(B)
 \end{aligned}$$

y definiendo la *energía potencial externa de un sistema de partículas* como:

$$U^{\text{ext}} = \sum_{i=1}^n U_i^e \quad (4.29)$$

se tiene que:

$$W^{\text{ext}} = -\Delta U^{\text{ext}} \quad (4.30)$$

Del mismo modo, cuando las fuerzas interiores son conservativas, se puede describir la interacción entre dos partículas cualquiera del sistema i y j por medio de la energía potencial correspondiente a dicha interacción, U_{ij} . Esta energía potencial verifica que:

1) U_{ij} es válida tanto para explicar la acción de la partícula i sobre j , como de la partícula j sobre i .

2) $U_{ii} = 0$ para cualquier i , ya que $\mathbf{f}_{ii} = 0$.

3) U_{ij} sólo depende de la distancia entre las partículas i y j . O sea, $U_{ij} = U_{ij}(r_{ij})$ para cualquier i y j .

4) Para una evolución del sistema de un cierto estado A a otro B , se cumple:

$$\int_A^B \mathbf{f}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij} = -\Delta U_{ij} = U_{ij}(A) - U_{ij}(B) \quad (4.31)$$

A partir de esta última expresión y utilizando también (4.18) se tiene que:

$$W_{AB}^{\text{int}} = \sum_{i < j}^n \int_{A, C_i}^B \mathbf{f}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij} = \sum_{i < j}^n (U_{ij}(A) - U_{ij}(B)) = \sum_{i < j}^n U_{ij}(A) - \sum_{i < j}^n U_{ij}(B)$$

y definiendo la *energía potencial interna del sistema de partículas* como:

$$U^{\text{int}} = \sum_{i < j}^n U_{ij} \quad (4.32)$$

se tiene que:

$$W_{AB}^{\text{int}} = -\Delta U^{\text{int}} \quad (4.33)$$

9.- Conservación de la energía.

Se define la *energía propia de un sistema de partículas* como

$$E_p = E_c + U^{\text{int}} \quad (4.34)$$

De este modo, si las fuerzas internas son conservativas se cumple que:

$$W_{AB}^{\text{ext}} = E_p(B) - E_p(A) = \Delta E_p \quad (4.35)$$

En efecto:

Si las fuerzas internas son conservativas la expresión (4.19) del teorema del trabajo y la energía cinética para un sistema de partículas queda:

$$E_c(B) - E_c(A) = W_{AB}^{\text{ext}} - \Delta U^{\text{int}} = W_{AB}^{\text{ext}} + U^{\text{int}}(A) - U^{\text{int}}(B)$$

esto es:

$$W_{AB}^{\text{ext}} = (E_c(B) + U^{\text{int}}(B)) - (E_c(A) + U^{\text{int}}(A)) = E_p(B) - E_p(A)$$

Si además el sistema de partículas está aislado, entonces se cumple que:

$$\Delta E_p = 0 \quad \Rightarrow \quad E_p(A) = E_p(B) \quad (4.36)$$

esto es, la energía propia de un sistema aislado se conserva.

En efecto:

Si el sistema está aislado, entonces $W_{AB}^{\text{ext}} = 0$ ya que no interactúa con su medio exterior, y entonces (4.35) queda como: $\Delta E_p = 0$.

La energía propia del sistema con respecto al SCM se denomina *energía interna*. Esta es:

$$E_p' = E_c' + U^{\text{int}} \quad (4.37)$$

donde se ha tenido en cuenta que la energía potencial interna es invariante al cambio de sistema de referencia, ya que depende únicamente de las distancias relativas entre las partículas del sistema.

Se define la *energía total del sistema de partículas* como:

$$E = E_c + U^{\text{int}} + U^{\text{ext}} \quad (4.38)$$

De este modo, si tanto las fuerzas externas e internas son conservativas se cumple que:

$$\Delta E = 0 \quad \Rightarrow \quad E(A) = E(B) \quad (4.39)$$

esto es, la energía total se conserva.

En efecto:

Si en un sistema de partículas tanto las fuerzas externas como las fuerzas internas son conservativas, la expresión (4.35) toma la forma:

$$\Delta E_p + \Delta U^{\text{ext}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta(E_p + U^{\text{ext}}) = \Delta(E_c + U^{\text{int}} + U^{\text{ext}}) = 0$$

En el caso en que actúan sobre el sistema fuerzas exteriores conservativas y disipativas (no conservativas) se tiene que:

$$(W_{AB}^{\text{ext}})_d = \Delta E \quad (4.40)$$

donde $(W_{AB}^{\text{ext}})_d$ es el trabajo debido a las fuerzas exteriores no conservativas.

En efecto:

Si sobre el sistema actúan fuerzas exteriores conservativas y disipativas, la expresión (4.35) toma la forma:

$$(W_{AB}^{\text{ext}})_d - \Delta U^{\text{ext}} = \Delta E_p \quad \Rightarrow \quad (W_{AB}^{\text{ext}})_d = \Delta(E_p + U^{\text{ext}}) = \Delta E$$

10.- Fuerzas impulsivas y colisiones.

Un tipo de fuerzas importantes son las denominadas *fuerzas impulsivas* que se caracterizan por ser muy intensas y actuar durante un intervalo de tiempo muy pequeño, con lo cual su impulso durante este corto intervalo de tiempo no es nulo. Así son fuerzas de este tipo las que gobiernan la explosión de una granada, o las de los fenómenos de percusión (patada a un balón, batazo a una pelota,...).

Durante los pequeños intervalos de tiempo en que éstas actúan, se puede considerar nulo el impulso del resto de las fuerzas actuantes sobre el sistema. En el caso de que en un sistema de partículas actúen fuerzas impulsivas internas, por la expresión (4.6) se observa que durante el corto intervalo de tiempo en que éstas actúan se verifica que:

$$\mathbf{I} = \int_{t_A}^{t_D} \mathbf{F}^e dt = \mathbf{p}(t_D) - \mathbf{p}(t_A) = 0$$

lo que implica que:

$$\mathbf{p}(t_A) = \mathbf{p}(t_D) \quad (4.41)$$

donde t_A es el instante en que comienzan a actuar las fuerzas impulsivas y t_D cuando terminan de acabar.

Es importante distinguir entre (4.41) y el principio de conservación del momento lineal, ya que este último afirma que el momento lineal del sistema tiene el mismo valor en cualquier instante de tiempo, mientras que (4.41) tan solo indica la igualdad de los momentos lineales del sistema en los instantes t_A y t_D , sin afirmar nada sobre el momento lineal en un instante fuera o, incluso, dentro del intervalo de tiempo comprendido entre t_A y t_D .

Un fenómeno muy importante que se encuentra gobernado por la acción de las fuerzas impulsivas son las *colisiones*. Una colisión es la interacción entre dos o más partículas que tiene lugar en un intervalo de tiempo muy pequeño, en una región delimitada del espacio, que tiene una gran intensidad y en la que, como en toda interacción, se intercambia energía y momento. Las fuerzas impulsivas que gobiernan el problema pueden ser muy complicadas o incluso desconocidas. Ahora bien, durante el corto intervalo de tiempo en que éstas actúan se puede despreciar el impulso debido a las fuerzas exteriores, y además su trabajo, ya que la colisión se produce en una región delimitada del espacio. Por tanto, si t_A y t_D son respectivamente el instante justo antes y justo después de la colisión, en virtud de (4.36) y (4.41) se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t_A) &= \mathbf{p}(t_D) \\ (E_c + U^{\text{int}})(t_A) &= (E_c + U^{\text{int}})(t_D) \end{aligned} \quad (4.42)$$

Para una colisión entre dos partículas se verificará:

$$\mathbf{p}_1(t_A) + \mathbf{p}_2(t_A) = \mathbf{p}_1(t_D) + \mathbf{p}_2(t_D) \quad (4.43)$$

y

$$E_{c_1}(t_A) + E_{c_2}(t_A) + U_{12}(t_A) = E_{c_1}(t_D) + E_{c_2}(t_D) + U_{12}(t_D) \quad (4.44)$$

Aquellas colisiones en las que no hay un cambio en la energía potencial interna, se les denomina *colisiones elásticas*, y para éstas la expresión (4.44) se reduce a:

$$E_{c_1}(t_A) + E_{c_2}(t_A) = E_{c_1}(t_D) + E_{c_2}(t_D) \quad (4.45)$$

Cuando lo anterior no se cumple a las colisiones se les llaman *colisiones no elásticas* o *inelásticas*. De entre las colisiones no elásticas (inelásticas) podemos destacar las *totalmente inelásticas*, que se caracterizan por la unión de las dos partículas en una después de la colisión, quedando (4.43) como:

$$\mathbf{p}_1(t_A) + \mathbf{p}_2(t_A) = (m_1 + m_2)\mathbf{v}(t_D) \quad (4.46)$$

Este formalismo de colisiones entre partículas es válido para explicar los choques entre cuerpos con dimensiones, si el centro de masas de los cuerpos que colisionan se encuentran en la denominada *línea de choque*. Esta línea de choque es la normal a las superficies de contacto durante el choque. Estos choques son llamados *choques centrales*. Cuando esto no ocurre el choque se llama *excéntrico*.

Puede ocurrir que un choque no sea perfectamente elástico ni tampoco totalmente inelástico. El grado de elasticidad de un choque viene dado por un número que recibe el nombre de *coeficiente de restitución*, ρ , que se define como:

$$\rho = \frac{v_2(t_D) - v_1(t_D)}{v_1(t_A) - v_2(t_A)} \quad (4.47)$$

Si $\rho=0$, la colisión es totalmente inelástica y si $\rho=1$, la colisión es elástica.

TEMA 5. CINEMÁTICA Y DINÁMICA DEL SÓLIDO RÍGIDO.

1.- Introducción. Grados de libertad.

Un *sólido rígido*, como ya fue mencionado en el tema anterior, es un caso importante y especial de sistema de partículas, en el cual las distancias relativas entre todas sus partículas permanecen constantes.

En la naturaleza un gran número de objetos se comportan, con muy buena aproximación, como un sólido rígido. Esto se debe a que las fuerzas que actúan sobre sus partículas no son lo suficientemente intensas como para variar apreciablemente, desde un punto de vista macroscópico, las distancias relativas. Cuando las fuerzas modifican estas distancias, hay que recurrir a otros modelos para realizar el estudio.

En el siguiente apartado se abordarán los aspectos cinemáticos del movimiento del sólido rígido y se discutirá cuántos parámetros son necesarios para determinar la posición del sólido en cada instante de tiempo. Al número de estos parámetros se le llaman *grados de libertad del movimiento*. Como habitualmente la posición viene determinada por las coordenadas, los grados de libertad suelen ser el número de coordenadas. Sin embargo en algunas situaciones es más conveniente especificar la posición no con coordenadas sino con otro tipo de parámetros.

En el caso de una partícula se vio que su posición quedaba determinada con $x(t), y(t)$ y $z(t)$. Por tanto en el movimiento más general de una partícula se tienen tres *grados de libertad*. Si el movimiento de la partícula está limitado a ciertas regiones del espacio, los *grados de libertad* disminuyen. Por ejemplo, si se le obliga a moverse por una determinada recta y se elige el eje X en la dirección de la recta, la posición de la partícula queda fijada sólo con $x(t)$. Si en lugar de una trayectoria recta se tiene una curva, la coordenada $s(t)$ definida en el tema de cinemática determinaría su posición. En estos casos se tendría un *grado de libertad* para el movimiento.

Para un sistema de N partículas se necesitan tres grados de libertad por cada una de ellas, con lo que los *grados de libertad* serán en este caso $3N$.

Para un sólido rígido se restringe en cierta medida el movimiento de las partículas que lo constituyen, por lo que es de esperar que los grados de libertad sean inferiores a $3N$.

2.-Cinemática del sólido rígido.

A continuación se analizan los movimientos de traslación y rotación en torno a un eje fijo, para luego estudiar el movimiento general del sólido rígido.

2.1.- Movimiento de traslación.

Todas las partículas del sólido describen trayectorias paralelas de modo que las líneas que unen dos puntos cualesquiera del sólido permanecen siempre paralelas a su posición inicial (Fig.5.1).

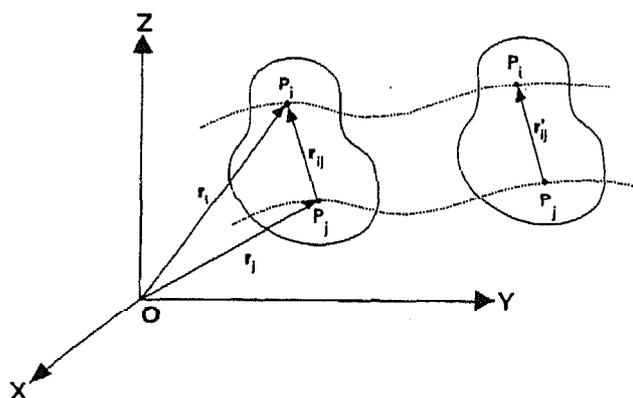


Fig. 5.1

En el movimiento de traslación la posición del sólido queda determinada conociendo la de una cualquiera de sus partículas, P_i , es decir conociendo $x_i(t)$, $y_i(t)$ y $z_i(t)$, con lo que se tienen tres *grados de libertad*. Además, todas las partículas tienen la misma velocidad y aceleración.

En efecto:

En la figura 5.1 se observa que

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_j(t) &= \mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_{ij}(t) \\ \mathbf{r}_{ij}(t) &= \mathbf{r}_{ij}(t') \end{aligned} \quad (5.1)$$

Como \mathbf{r}_{ij} es un vector constante, si se conoce por ejemplo la posición de la partícula i en cada instante de tiempo y los \mathbf{r}_{ij} en el instante inicial, el movimiento del resto de las

partículas del sólido quedará determinado por (5.1). Por tanto el movimiento queda determinado por $x_i(t)$, $y_i(t)$ y $z_i(t)$, con lo que se tienen tres grados de libertad. (las condiciones iniciales no se contabilizan en el cálculo de los grados de libertad). Además derivando la primera expresión de (5.1) se obtiene que

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_j \text{ y } \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_j$$

en donde se ha tenido en cuenta que los r_{ij} son constantes.

2.2.-Movimiento de rotación en torno a un eje fijo.

Todas las partículas del sólido describen trayectorias circulares en planos perpendiculares al eje de rotación. Los centros de las órbitas circulares descritas por cada P_i se encuentran sobre el eje de rotación. (Fig 5.2)

En este caso la posición del sólido también queda determinada por la posición de una partícula pero sólo se tiene ahora un *grado de libertad*. Esto se debe a que en el movimiento circular basta dar la coordenada angular, θ , para localizar la partícula. (Fig.5.3)

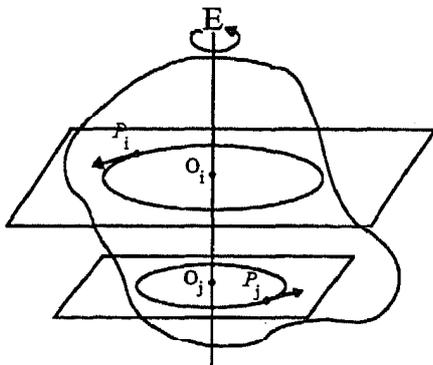


Fig. 5.2

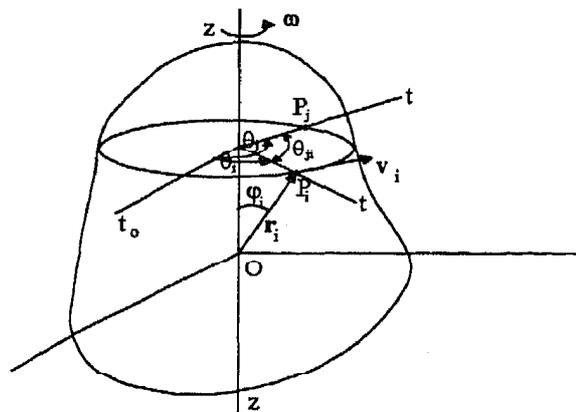


Fig. 5.3

En efecto:

El vector de posición de una partícula i viene dado por (Fig 5.3)

$$\mathbf{r}_i = z_i \mathbf{k} + R_i (\cos \theta_i \mathbf{i} + \text{sen} \theta_i \mathbf{j}) \quad (5.2)$$

en donde z_i y R_i son constantes en el tiempo. Sea $\theta_{ji} = \theta_j - \theta_i$ (Fig 5.3), entonces

$$\theta_j(t) = \theta_i(t) + \theta_{ji}(t) \quad (5.3)$$

Las θ_{ji} son constantes durante el movimiento debido a que el sólido es rígido y por tanto la coordenada angular de cualquier partícula j se puede determinar a partir de la i , y de conocer los θ_{ji} , a través de (5.3). Conocidas las variables angulares de todas las partículas, se determina el vector de posición a partir de (5.2). Por consiguiente se tiene un *grado de libertad*.

Si escogemos el eje de rotación sobre el eje Z del sistema coordenado, como se ha hecho en la (Fig. 5.3), se tiene que $\omega = \omega(t)\mathbf{k}$ para todas las partículas. Como el movimiento de las partículas es circular se tienen las siguientes relaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_i = \omega \times \mathbf{r}_i \\ \mathbf{a}_i = \alpha \times \mathbf{r}_i + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}_i) \end{array} \right. \quad \text{donde} \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega = \frac{d\theta_i}{dt} \mathbf{k} \\ \alpha = \frac{d\omega}{dt} \mathbf{k} \end{array} \right. \quad (5.4)$$

La coordenada angular de una partícula P_i , $\theta_i(t)$, se obtiene de la siguiente relación

$$\left. \begin{array}{l} \omega = \frac{d\theta_i}{dt} \mathbf{k} \\ \omega = \omega(t)\mathbf{k} \end{array} \right\} \Rightarrow \omega(t) = \frac{d\theta_i}{dt} \Rightarrow \theta_i(t) = \theta_i(0) + \int \omega(t) dt \quad (5.5)$$

En la ecuación anterior se observa que $\theta_i(t)$ queda determinado por la velocidad angular y por tanto se puede decir también, que el parámetro que determina el movimiento es la velocidad angular. Este sería un ejemplo en el que se podría tomar como grado de libertad un parámetro que no representa una coordenada.

2.3.-Movimiento general del sólido rígido.

En este caso se estudia el movimiento desde dos sistemas de referencia: uno con origen en un punto O' del sólido y solidario a él, y otro fijo con origen en O (fig.5.4). Al punto O' se le denomina *punto de reducción*.

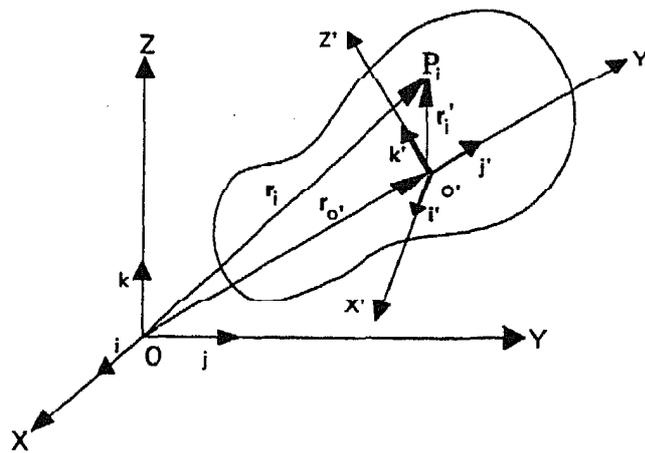


Fig. 5.4

Sea \mathbf{r}_i' la posición de un punto del sólido, P_i , respecto de O' y \mathbf{r}_i el vector de posición de P_i respecto del origen fijo O . Entonces se cumple

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{r}_i' \quad (5.6)$$

y su derivada respecto a t es (ver apartado 8 del capítulo 2)

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i' \quad (5.7)$$

en donde la velocidad angular viene dada por $\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}$. Para obtener la expresión anterior se ha tenido en cuenta las ecuaciones (2.52) y (2.55) del capítulo 2, y que la velocidad relativa, \mathbf{v}_i' , es nula por estar las partículas del sólido en reposo respecto del sistema de referencia móvil.

La expresión (5.7) nos indica que en cada instante, la velocidad de un punto cualquiera, P_i , del sólido rígido, es igual a la suma de dos componentes: una, $\mathbf{v}_{O'}$, que es la velocidad del punto de reducción, común para todos los puntos del sistema, y que corresponde a un movimiento de traslación del cuerpo con respecto al sistema de referencia fijo y otra, $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i'$, que corresponde a un movimiento de rotación alrededor de un eje que pasa por O' , llamado *eje instantáneo de rotación y desplazamiento*. Este resultado se conoce como *teorema de Chasles*. Además se puede demostrar que la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ es independiente de cual sea la elección del punto de reducción.

En efecto:

Si se considera O'' como punto de reducción, de la ecuación (5.7) se tiene

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{O''} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i'' \quad (5.8)$$

donde ω^* es la velocidad angular en torno al eje instantáneo que pasa por O''

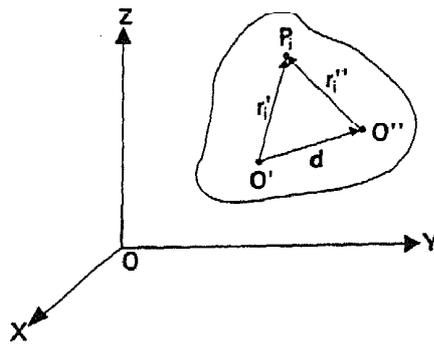


Fig.5.5

En cambio, si se toma O' como punto de reducción, se tiene que

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{O'} + \omega \times \mathbf{r}_i' \tag{5.9}$$

Como $\mathbf{r}_i' = \mathbf{r}_i'' + \mathbf{d}$ (Fig 5.5), sustituyendo en la expresión anterior queda

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{O'} + \omega \times \mathbf{r}_i'' + \omega \times \mathbf{d}$$

Además como respecto de O' se cumple que

$$\mathbf{v}_{O''} = \mathbf{v}_{O'} + \omega \times \mathbf{d}$$

entonces despejando de la ecuación anterior $\mathbf{v}_{O'}$, y sustituyendo en (5.9) se tiene que

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{O''} + \omega \times \mathbf{r}_i''$$

Finalmente comparando la ecuación anterior con (5.8) observamos que $\omega^* = \omega$.

Existe una diferencia entre la velocidad angular que aparece en la expresión (5.4) y la que aparece en (5.7). En el primer caso representa la velocidad angular de las partículas en un movimiento circular y en el segundo el cambio de orientación de los ejes móviles respecto de los fijos. Por tanto ahora tendrá en general las tres componentes (y no sólo la componente Z). Esto hace que ahora la velocidad angular esté representando la variación de tres ángulos y no de uno sólo. Estos ángulos son los que forman los ejes móviles respecto de los fijos, y son denominados *ángulos de Euler* (Fig.5.6).

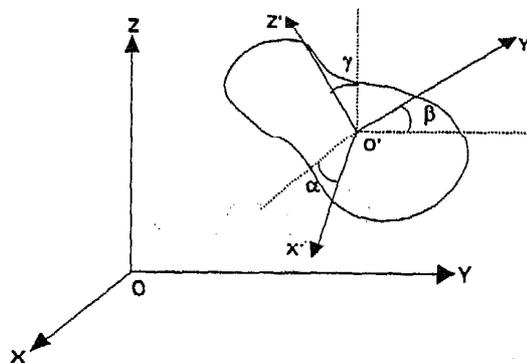


Fig. 5.6

Por tanto ahora la rotación va a tener tres grados de libertad, y considerando los otros tres de la traslación, se concluye que el movimiento más general de un sólido rígido posee seis *grados de libertad*.

En la siguiente figura se muestra como el movimiento de un sólido rígido se puede obtener como una combinación de una traslación y una rotación. Por ejemplo, cuando pasa de la posición 1 a la posición 2, puede considerarse como una traslación representada por el desplazamiento CC' y una rotación alrededor del eje que pasa por C' .

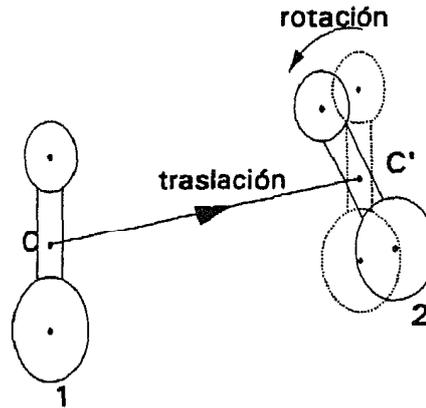


Fig. 5.7

3.- Dinámica del sólido rígido.

Con el objeto de resolver el problema dinámico del sólido rígido, analizaremos las siguientes ecuaciones

$$\mathbf{F}^e = M\mathbf{a}_{CM} \quad (5.10)$$

$$\mathbf{M}_O = \frac{d\mathbf{L}_O}{dt} \quad (5.11)$$

Las dos ecuaciones anteriores dan lugar a seis ecuaciones escalares independientes, que permitirán determinar los seis *grados de libertad* de un sólido rígido en el caso del movimiento general.

Una propiedad importante de estos sistemas es que el trabajo debido a las fuerzas interiores es nulo, esto es

$$W^{int} = 0 \quad (5.12)$$

En efecto:

El trabajo de las fuerzas internas viene dado por (4.18) como

$$W^{int} = \sum_{i < j} \int_A^B \mathbf{f}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij}$$

y como en un sólido rígido $d\mathbf{r}_{ij} = 0$, se tiene

$$\mathbf{f}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij} = f_{ij} dr_{ij} \cos\theta_{ij} = 0$$

y por tanto

$$W^{int} = 0$$

De esta forma, se tiene que

$$W = W^{ext} = \sum_{i=1}^n \int_A^B \mathbf{F}_i^e \cdot d\mathbf{r}_i \quad (5.13)$$

Hay que tener en cuenta que lo anterior es general para un sólido rígido, y por tanto válido para cualquier tipo de movimiento que realice el sólido.

3.1.- Dinámica de traslación.

En el caso de un movimiento de traslación del sólido se ha visto que basta con conocer la posición de una de sus partículas a lo largo del tiempo. La ecuación (5.10) nos proporciona esta información para *el centro de masas* del sólido, supuesto que se conocen las fuerzas externas. El estado de movimiento del resto de las partículas vendrá determinado por la ecuación (5.1).

En un movimiento de traslación, el trabajo de las fuerzas externas viene dado por

$$W^{ext} = \int_A^B \mathbf{F}^e \cdot d\mathbf{r}_{CM} \quad (5.14)$$

En efecto:

Teniendo en cuenta la ecuación (4.17), y que $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{CM}$ en una traslación y por tanto $d\mathbf{r}_i = d\mathbf{r}_{CM}$, se tiene que

$$W^{ext} = \int_A^B \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^e \right) \cdot d\mathbf{r}_{CM} = \int_A^B \mathbf{F}^e \cdot d\mathbf{r}_{CM}$$

La energía cinética viene dada por

$$E_C = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 \quad (5.15)$$

En efecto:

Sólo hay que tener en cuenta la definición de la energía cinética para un sistema de partículas, dada por (4.16), y que todas las partículas del sólido tienen la misma velocidad en una traslación. Por tanto

$$E_C = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) v_{CM}^2 = \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

La potencia en el movimiento de traslación viene dada por

$$P = \mathbf{F}^c \cdot \mathbf{v}_{CM} \quad (5.16)$$

En efecto:

Teniendo en cuenta (5.13) y (5.14) se tiene que

$$\delta W = \mathbf{F}^c \cdot d\mathbf{r}_{CM} = \mathbf{F}^c \cdot \mathbf{v}_{CM} dt \Rightarrow \frac{\delta W}{dt} = \mathbf{F}^c \cdot \mathbf{v}_{CM} \Rightarrow P = \mathbf{F}^c \cdot \mathbf{v}_{CM}$$

3.2.- Dinámica de rotación en torno a un eje fijo. Momento de inercia.

Consideremos un sólido rígido que rota en torno a un eje e con una velocidad angular ω como se indica en la (Fig.5.8). Describamos el movimiento respecto del sistema de referencia fijo $OXYZ$.

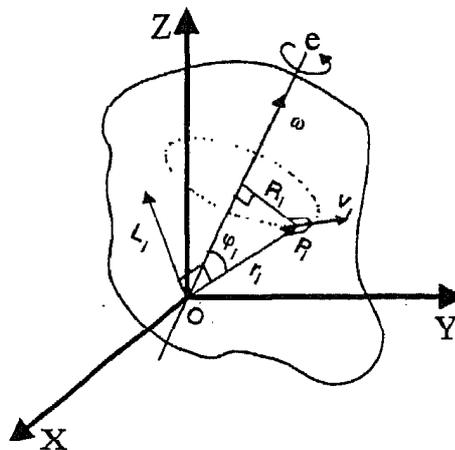


Fig. 5.8

Como se ha visto, cada una de sus partículas describe una órbita circular con centro en el eje e . Así por ejemplo, la partícula P_i describe un círculo de radio R_i con una velocidad $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$, siendo \mathbf{r}_i el vector de posición con respecto al origen O . El módulo de la velocidad es $v_i = \omega r_i \sin \varphi_i = \omega R_i$. Ya que las trayectorias circulares están contenidas en un plano perpendicular al eje de giro, la velocidad angular tendrá la dirección del eje de giro.

Dicho esto, el momento angular de una partícula P_i con respecto al origen O es

$$\mathbf{L}_{O_i} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \quad (5.17)$$

en donde

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k} \quad ; \quad \mathbf{r}_i = x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k} \quad (5.18)$$

Realizando los cálculos pertinentes se obtiene para el momento angular total

$$\mathbf{L}_O = L_{Ox} \mathbf{i} + L_{Oy} \mathbf{j} + L_{Oz} \mathbf{k} \quad \begin{cases} L_{Ox} = I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z \\ L_{Oy} = I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z \\ L_{Oz} = I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z \end{cases} \quad (5.19)$$

en donde

$$\begin{aligned} I_{xy} = I_{yx} &= -\sum_{i=1}^n m_i x_i y_i \quad ; \quad I_{xx} = \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2) \\ I_{xz} = I_{zx} &= -\sum_{i=1}^n m_i x_i z_i \quad ; \quad I_{yy} = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + z_i^2) \\ I_{yz} = I_{zy} &= -\sum_{i=1}^n m_i y_i z_i \quad ; \quad I_{zz} = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{aligned} \quad (5.20)$$

En efecto:

El momento angular total viene dado por

$$\mathbf{L}_O = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)$$

Se trata entonces de hacer los productos vectoriales teniendo en cuenta (5.18).

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix} = (\omega_y z_i - \omega_z y_i) \mathbf{i} - (\omega_x z_i - \omega_z x_i) \mathbf{j} + (\omega_x y_i - \omega_y x_i) \mathbf{k}$$

El siguiente producto vectorial a realizar es

$$\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ (\omega_y z_i - \omega_z y_i) & -(\omega_x z_i - \omega_z x_i) & (\omega_x y_i - \omega_y x_i) \end{vmatrix}$$

Realizando el producto vectorial y organizando los términos convenientemente se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) = & \left[(y_i^2 + z_i^2) \omega_x - x_i y_i \omega_y - x_i z_i \omega_z \right] \mathbf{i} + \\ & \left[-y_i x_i \omega_x + (x_i^2 + z_i^2) \omega_y - z_i y_i \omega_z \right] \mathbf{j} + \\ & \left[-z_i x_i \omega_x - z_i y_i \omega_y + (x_i^2 + y_i^2) \omega_z \right] \mathbf{k} \end{aligned}$$

Introduciendo este resultado en L_O , se obtiene la ecuación (5.19) si se tienen en cuenta las definiciones (5.20).

A los " I " con subíndices distintos se les llaman *productos de inercia* y a los que tienen los subíndices iguales, *momentos de inercia*. Se puede ver que las cantidades $y_i^2 + z_i^2$, $x_i^2 + z_i^2$ y $x_i^2 + y_i^2$ son los cuadrados de las distancias de la partícula i a los ejes X, Y y Z respectivamente. Por tanto los momentos de inercia, I_{xx} , I_{yy} e I_{zz} , son cantidades que dan idea de como está distribuida la masa del sólido en torno a los ejes X, Y y Z respectivamente.

Habitualmente los momentos de inercia se escriben con un solo subíndice, es decir, I_x, I_y e I_z .

Si tomamos el eje Z del sistema coordinado sobre el eje de rotación del sólido rígido (Fig. 5.9) se tiene que $\omega_x = \omega_y = 0$, y tomando $\omega = \omega_z$ la ecuación (5.19) queda

$$\mathbf{L}_O = L_{Ox}\mathbf{i} + L_{Oy}\mathbf{j} + L_{Oz}\mathbf{k} \quad \begin{cases} L_{Ox} = I_{xz} \omega \\ L_{Oy} = I_{yz} \omega \\ L_{Oz} = I_z \omega \end{cases} \quad (5.21)$$

$$I_z = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2$$

$$\omega = \omega \mathbf{k}$$

en donde $R_i^2 = x_i^2 + y_i^2$, es la distancia al cuadrado de la partícula P_i al eje Z que ahora coincide con el de rotación.

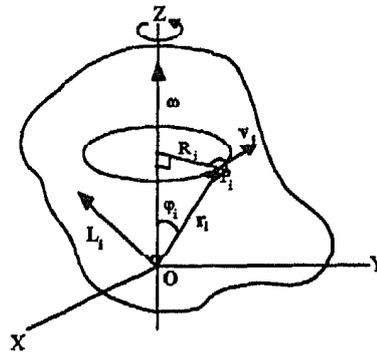


Fig. 5.9

Se puede demostrar que para cada cuerpo, existen al menos tres ejes de rotación perpendiculares entre sí para los cuales los productos de inercia se anulan. Estos ejes se llaman *ejes principales de inercia* del sólido y a los momentos de inercia asociados a éstos se denominan *momentos principales de inercia*.

Cuando el cuerpo presenta algún tipo de simetría, los ejes principales de inercia coinciden con los de simetría. Algunos ejemplos se ilustran en las siguientes figuras, en donde se representa por X_0, Y_0 y Z_0 a los ejes principales (fig. 5.10).

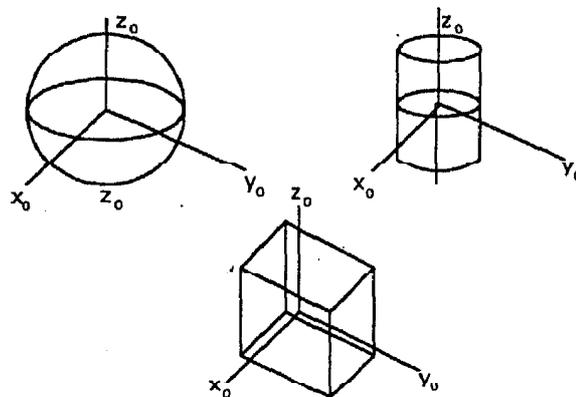


Fig. 5.10

Cuando un sólido rota en torno a un eje principal de inercia, el momento angular es paralelo a la velocidad angular y por tanto al eje de rotación. Esto es

$$\mathbf{L}_O = I_z \boldsymbol{\omega} \quad (5.22)$$

En efecto:

Teniendo en cuenta que al rotar en torno a un eje principal se cumple que $I_{xz} = I_{yz} = 0$, y la ecuación (5.21), se tiene que

$$\begin{cases} L_{Ox} = L_{Oy} = 0 \\ L_{Oz} = I_z \omega_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{L}_O = L_{Oz} \mathbf{k} = I_z \omega \mathbf{k} \\ \boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{L}_O = I_z \boldsymbol{\omega}$$

Por otro lado, de la expresión (5.22) se obtiene la siguiente expresión entre componentes

$$L_O = I_z \omega \quad (5.23)$$

Si el eje de rotación no es principal el momento angular no va a ser paralelo a la velocidad angular.

En efecto:

Se ve fácilmente con tener en cuenta en (5.21), que ahora los productos de inercia no son nulos y por tanto se tiene que el momento angular tiene componentes x, y y z , lo que hace que no sea paralelo a la velocidad angular, que sólo tiene componente z .

En este caso no se tiene una expresión como la (5.23), pero sí una similar para la componente Z del momento angular

$$L_{Oz} = I_z \omega \quad (5.24)$$

Si seguimos considerando el eje de rotación sobre el eje Z , e introducimos (5.21) en la expresión (5.11), se obtiene para un sólido rígido que rota en torno a un eje fijo

$$\mathbf{M}_O^e = \frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \frac{d(I_{xz}\omega)}{dt} \mathbf{i} + \frac{d(I_{yz}\omega)}{dt} \mathbf{j} + \frac{d(I_z\omega)}{dt} \mathbf{k} \quad (5.25)$$

Si el sólido rígido rota alrededor de un eje principal de inercia se tiene

$$\mathbf{M}_O^e = I_z \boldsymbol{\alpha} \quad (5.26)$$

En efecto:

En este caso los productos de inercia son nulos con lo que la ecuación (5.25) queda como

$$\mathbf{M}_O^c = \frac{d(I_z \omega)}{dt} \mathbf{k}$$

Como se está considerando al eje de rotación fijo, las partículas describen movimientos circulares en torno a él (Fig. 5.9), de modo que la distancia de estas partículas al eje se mantiene constante, y entonces tenemos que $I_z = \text{cte}$. De este modo, la ecuación anterior queda:

$$\mathbf{M}_O^c = \frac{d(I_z \omega)}{dt} \mathbf{k} = I_z \frac{d\omega}{dt} \mathbf{k} = I_z \alpha \mathbf{k} = I_z \alpha$$

donde α es la aceleración angular del sólido rígido.

Si $\mathbf{M}_O^c = \mathbf{0}$ entonces la ecuación (5.26) indica que ω es constante, ya que $I_z = \text{cte}$. Es decir, la velocidad angular de un sólido rígido que gira alrededor de un eje principal de inercia, permanece constante cuando sobre él no actúan momentos debidos a fuerzas exteriores. O dicho de otro modo, no hace falta que hayan fuerzas externas para mantener a un sólido rígido rotando con velocidad angular constante en torno a un eje principal.

Si el sólido rota en torno un eje que no es principal se tiene

$$\begin{aligned} M_{Oz} &= I_z \alpha \\ M_{Ox} &= I_{xz} \alpha + \frac{dI_{xz}}{dt} \omega \\ M_{Oy} &= I_{yz} \alpha + \frac{dI_{yz}}{dt} \omega \end{aligned} \quad (5.27)$$

En efecto:

De la ecuación (5.25) se tiene para la componente z

$$M_{Oz}^c = \frac{d(I_z \omega)}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \alpha$$

en donde se ha tenido en cuenta que aquí también I_z es constante. Para las componentes x e y

$$M_{Ox} = \frac{d(I_{xz}\omega)}{dt} = I_{xz} \frac{d\omega}{dt} + \frac{dI_{xz}}{dt} \omega = I_{xz} \alpha + \frac{dI_{xz}}{dt} \omega$$

$$M_{Oy} = \frac{d(I_{yz}\omega)}{dt} = I_{yz} \frac{d\omega}{dt} + \frac{dI_{yz}}{dt} \omega = I_{yz} \alpha + \frac{dI_{yz}}{dt} \omega$$

en donde se ha tenido en cuenta que los productos de inercia no son independientes del tiempo. Se debe a que aunque la distancia de las partículas al eje permanezcan constantes, es decir R_i , no ocurre lo mismo con las coordenadas x_i , y_i y z_i , ni con sus productos.

En este caso cuando el cuerpo rote con una velocidad angular constante se tiene de (5.27) que

$$M_{Oz} = 0$$

$$M_{Ox} = \frac{dI_{xz}}{dt} \omega$$

$$M_{Oy} = \frac{dI_{yz}}{dt} \omega$$
(5.28)

A diferencia del caso anterior ahora si hace falta la aplicación de fuerzas externas que generen el momento necesario para mantener a un sólido rotando con velocidad angular constante. La misión de estos momentos es obligar al sólido a mantener su eje de rotación fijo.

A continuación se analizan las expresiones del Trabajo, Potencia y Energía cinética de un movimiento de rotación en torno a un eje fijo.

El trabajo se puede expresar como

$$W = \int_A^B M_{O_z}^e d\theta$$
(5.29)

En efecto:

Como las partículas realizan movimientos circulares se tiene que $\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$, y entonces

$$d\mathbf{r}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i dt = \frac{d\theta}{dt} \mathbf{k} \times \mathbf{r}_i dt = \mathbf{k} \times \mathbf{r}_i d\theta$$

en donde se ha supuesto que la rotación es en torno al eje Z. Introduciendo la relación anterior en la del trabajo de la partícula i, se tiene

$$\begin{aligned} \int_A^B \mathbf{F}_i^c \cdot d\mathbf{r}_i &= \int_A^B \mathbf{F}_i^c \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{r}_i) d\theta = \int_A^B \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^c) d\theta = \\ &= \int_A^B \mathbf{k} \cdot \mathbf{M}_{O_i}^c d\theta = \int_A^B M_{O_z}^c d\theta \end{aligned}$$

e introduciendo la relación anterior en (5.13) se obtiene

$$W = \sum_{i=1}^n \int_A^B M_{O_z}^c d\theta = \int_A^B M_{O_z}^c d\theta$$

La potencia en una rotación viene dada por

$$P = \mathbf{M}_O^c \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (5.30)$$

En efecto:

De (5.29)

$$\delta W = M_{O_z}^c d\theta = M_{O_z}^c \omega dt = \mathbf{M}_O^c \cdot \boldsymbol{\omega} dt \Rightarrow \frac{\delta W}{dt} = \mathbf{M}_O^c \cdot \boldsymbol{\omega} \Rightarrow P = \mathbf{M}_O^c \cdot \boldsymbol{\omega}$$

Para el caso de un sólido rígido rotando en torno a un eje fijo, la energía cinética es

$$E_c = \frac{1}{2} I_z \omega^2 \quad (5.31)$$

en donde se ha tomado el eje Z sobre el de rotación.

En efecto:

Teniendo en cuenta la definición de energía cinética para un sistema de partículas y el hecho de que cada una de ellas realiza un movimiento circular, esto es $v_i = \omega R_i$, se tiene

$$E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \omega^2 R_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i (m_i R_i^2) \omega^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

Si el sólido gira alrededor de un eje principal de inercia, entonces se verifica la ecuación (5.23). Si en ella se despeja la velocidad angular y se introduce en (5.31), la expresión para la energía cinética queda:

$$E_c = \frac{1}{2} \frac{I_0^2}{I_z} \quad (5.32)$$

Si el eje no es principal se verifica (5.24) y la expresión (5.31) de la energía cinética queda:

$$E_c = \frac{1}{2} \frac{I_{0z}^2}{I_z} \quad (5.33)$$

En el tema anterior se obtuvo que

$$\left(W_{AB}^{\text{ext}} \right)_d = \Delta E \quad \text{con} \quad E = E_c + U^{\text{int}} + U^{\text{ext}} \quad (5.34)$$

en donde se ha considerado que las fuerzas internas son conservativas, mientras que para las externas se tienen además disipativas.

La expresión anterior queda para un sólido rígido como

$$\left(W_{AB}^{\text{ext}} \right)_d = \Delta E = \Delta E_c + \Delta U^{\text{ext}} \quad (5.35)$$

En efecto:

Como las fuerzas internas son conservativas, $W^{\text{int}} = -\Delta U^{\text{int}}$, y teniendo en cuenta que el trabajo de las fuerzas internas es nulo se tiene que $\Delta U^{\text{int}} = 0$.

Hay que tener en cuenta que aunque la energía potencial interna no contribuya a la variación de la energía, sí lo hace al valor de la misma.

Cálculo de momentos de inercia. Teorema de Steiner. Radio de giro.

Veamos ahora como se calcula el momento de inercia, ya que es una magnitud que se maneja continuamente cuando se trata el sólido rígido. Para ello debemos recordar que un sólido rígido está constituido por un número N de partículas. Si este número es lo suficientemente grande en relación al volumen del sólido, se puede considerar a éste como

una distribución continua de masa. En este caso al pasar de una distribución discreta a una continua se tiene

$$I_e = \sum_i m_i R_i^2 \rightarrow I_e = \int R^2 dm \quad (5.36)$$

en donde R es la distancia al eje e del elemento de masa dm . Si ρ es la densidad del cuerpo, entonces $dm = \rho dV$, donde dV es el volumen elemental que ocupa el dm en el sólido. De este modo (5.36) queda

$$I_e = \int \rho R^2 dV \quad (5.37)$$

Si el cuerpo es homogéneo, su densidad es constante y podemos escribir la ecuación anterior como

$$I_e = \rho \int R^2 dV \quad (5.38)$$

y la integral se reduce así a un factor geométrico, igual para todos los cuerpos con la misma forma y tamaño.

Los momentos de inercia respecto de los ejes X, Y y Z quedan ahora como

$$I_x = \int \rho(y^2 + z^2) dV \quad ; I_y = \int \rho(x^2 + z^2) dV \quad ; I_z = \int \rho(x^2 + y^2) dV \quad (5.39)$$

donde $dV = dx dy dz$.

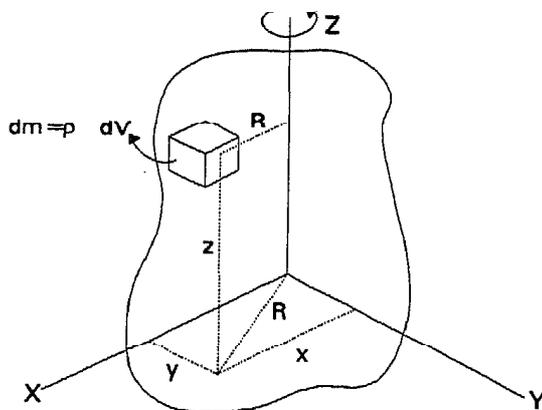


Fig.5.11

Si el cuerpo es una placa muy delgada, de manera que su grosor sea despreciable frente a las otras dos dimensiones se tiene que

$$I_z = I_x + I_y \quad (5.40)$$

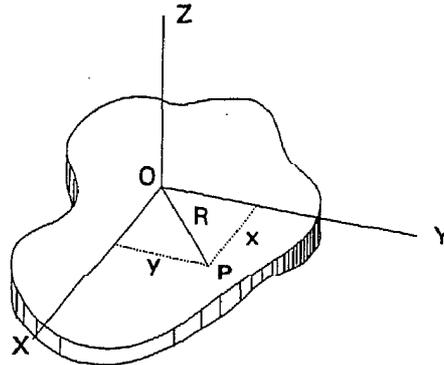


Fig.5.12

En efecto:

En la (Fig.5.12) se ve que $z=0$ para cualquier dm del sólido con lo que de (5.39) se tiene

$$I_x = \int \rho y^2 dV \quad ; \quad I_y = \int \rho x^2 dV$$

y por tanto

$$I_z = \int \rho (x^2 + y^2) dV = \int \rho x^2 dV + \int \rho y^2 dV = I_x + I_y$$

Este resultado se denomina *teorema de los ejes perpendiculares*, y sólo es aplicable para distribuciones de masa planas.

Los momentos de inercia con respecto a ejes paralelos están relacionados por una expresión muy simple. Sea Z un eje arbitrario y Z' un eje paralelo que pasa a través del centro de masa del cuerpo. Si a es la separación entre los dos ejes, se cumple la siguiente relación (Fig.5.12)

$$I_z = I_{z'} + Ma^2 \tag{5.41}$$

donde I_z es el momento de inercia con respecto al eje Z e $I_{z'}$ el momento de inercia con respecto a Z' , M la masa total del sólido y a la distancia entre ejes.

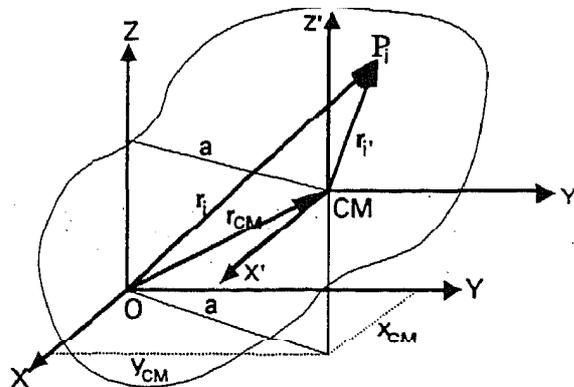


Fig.5.13

En efecto:

Observamos de la (Fig. 5.13) que se cumple

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{r}_{CM} \Rightarrow \begin{cases} x_i = x'_i + x_{CM} \\ y_i = y'_i + y_{CM} \\ z_i = z'_i + z_{CM} \end{cases}$$

Además se tiene que

$$I_z = \sum_i m_i R_i^2 \quad \text{donde} \quad R_i^2 = x_i^2 + y_i^2$$

$$I_z' = \sum_i m_i R_i'^2 \quad \text{donde} \quad R_i'^2 = x_i'^2 + y_i'^2$$

$$\text{y } a^2 = x_{CM}^2 + y_{CM}^2.$$

Para poder relacionar I_z y I_z' hemos de tener presente que

$$R_i^2 = x_i^2 + y_i^2 = (x'_i + x_{CM})^2 + (y'_i + y_{CM})^2 = R_i'^2 + a^2 + 2x'_i x_{CM} + 2y'_i y_{CM}$$

con lo cual tenemos

$$I_z = \sum_i m_i R_i^2 = \underbrace{\sum_i m_i R_i'^2}_I + \underbrace{\sum_i m_i a^2}_{II} + \underbrace{\sum_i m_i 2x'_i x_{CM}}_{III} + \underbrace{\sum_i m_i 2y'_i y_{CM}}_{IV}$$

$$(I) \sum_i m_i R_i'^2 = I_z'$$

$$(II) \sum_i m_i a^2 = a^2 \sum_i m_i = Ma^2$$

$$(III) \sum_i m_i 2x'_i x_{CM} = 2x_{CM} \sum_i m_i x'_i = 0, \text{ ya que } \sum_i m_i x'_i = \sum_i m_i x_i - Mx_{CM} = 0.$$

$$(IV) \sum_i m_i 2y'_i y_{CM} = 0$$

verificándose que

$$I_z = I_z' + Ma^2$$

A esta relación se le denomina *teorema de Steiner*.

Se define el *radio de giro* de un cuerpo con respecto de un eje e , K_e , como la distancia al eje a la cual habría de situarse un punto material de masa igual a la del sólido de manera

que los momentos de inercia, tanto del sólido como del punto material, respecto de dicho eje coincidan. Así:

$$I_c = MK_c^2 \quad \Rightarrow \quad K_c = \sqrt{I_c / M} \quad (5.42)$$

3.3.- Estudio de un movimiento de rotación y traslación combinados de un sólido rígido. Movimiento de rodadura.

Hemos observado que el movimiento más general del sólido rígido, se puede estudiar como una combinación de una traslación de un punto del sólido (el punto de reducción) y una rotación en torno a un eje que pasa por dicho punto (eje instantáneo de rotación), como refleja el teorema de Chasles. Si se toma el *centro de masas* del sólido como punto de reducción, entonces se tendrá:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{CM} + \mathbf{r}'_i, \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{CM} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i, \quad \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_{CM} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}'_i + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i) \quad (5.43)$$

En este caso, al existir traslación y rotación del sólido rígido se necesitan las dos ecuaciones, (5.11) y (5.12), y tomando como punto de reducción el *centro de masas* se tiene

$$\mathbf{F}^c = M\mathbf{a}_{CM} \quad (5.44)$$

que daría cuenta de la traslación del *centro de masas* y

$$\mathbf{M}_{CM}^c = I_{CM}\boldsymbol{\alpha} \quad \text{ó} \quad \mathbf{M}_{CM_{eje}}^c = I_{CM}\boldsymbol{\alpha} \quad (5.45)$$

que dan cuenta de la rotación en torno a un eje que pasa por el *centro de masas*. En el primer caso el eje sería principal de inercia mientras que en el segundo no.

Únicamente vamos a tratar movimientos combinados en casos en los que el eje de rotación no varía su dirección en el transcurso del movimiento. De esta forma aunque el eje de rotación no sea fijo, se tiene que la velocidad angular es un vector constante en dirección y por tanto se puede expresar de la misma forma que cuando el eje es fijo, es decir, $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}$. Esto lleva a que los resultados obtenidos para la rotación en torno a un eje fijo sigan siendo válidos.

En cuanto a las expresiones del trabajo y potencia quedan

$$W = W^{\text{ext}} = \int_A^B M_{O_z}^e d\theta + \int_A^B \mathbf{F}^e \cdot d\mathbf{r}_{\text{CM}} \quad \text{y} \quad P = \mathbf{M}_O^e \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{v}_{\text{CM}} \quad (5.46)$$

En efecto:

Estas expresiones se pueden deducir teniendo en cuenta que se cumple que $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{\text{CM}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i$, y los pasos dados para demostrar (5.14), (5.16), (5.29) y (5.30).

En lo que respecta a la energía cinética, se tiene que

$$E_C = \frac{1}{2} M v_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2} I_{\text{CM}} \omega^2 \quad (5.47)$$

donde M es la masa total, v_{CM} es la velocidad del centro de masas, e I_{CM} es el momento de inercia del sólido respecto al eje de rotación instantáneo que en este caso pasa por el *centro de masas*.

En efecto:

Se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i &= \mathbf{v}_{\text{CM}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i \Rightarrow v_i^2 = v_{\text{CM}}^2 + \omega^2 R_i^2 + 2\mathbf{v}_{\text{CM}} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_i m_i v_i^2 = M v_{\text{CM}}^2 + \left(\sum_i m_i R_i^2 \right) \omega^2 + 2\mathbf{v}_{\text{CM}} \cdot \left(\boldsymbol{\omega} \times \left(\sum_i m_i \mathbf{r}'_i \right) \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} M v_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2} I_{\text{CM}} \omega^2 \end{aligned}$$

en donde se ha tenido en cuenta que $\sum_i m_i \mathbf{r}'_i = \mathbf{0}$. Por último, teniendo en cuenta la definición de la energía cinética se obtiene la expresión (5.47).

Un movimiento que corresponde a este caso particular de movimiento combinado de traslación del sólido y rotación alrededor de un eje que no cambia de orientación es el *movimiento de rodadura*, que es aquel en el que en cada instante de tiempo se puede encontrar un punto del sólido con velocidad nula.

A continuación vamos a estudiar el movimiento de un sólido de forma cilíndrica que se mueve sobre una superficie plana sin cambiar la orientación del eje instantáneo de rotación, y se verá como en un caso el movimiento es de rodadura.

a) El cilindro *desliza*. En este caso el cilindro presenta solamente un movimiento de traslación, por lo que todos los puntos del cilindro tienen la misma velocidad para cualquier instante de tiempo (fig. 5.14).

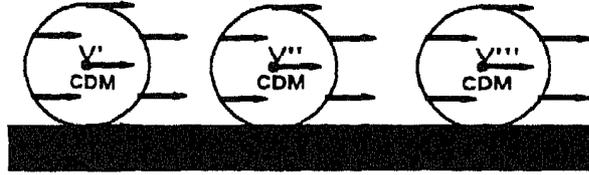


Fig. 5.14

En este caso puede existir o no rozamiento entre el sólido y la superficie de contacto, de lo que dependerá el que se conserve o no la energía del sólido.

b) El cilindro *rueda sin deslizar*. En este caso el cilindro avanza sobre el plano horizontal de modo que la distancia s_{CM} que recorre el CM del sólido viene dada por $s_{CM} = \varphi R$, en donde R es el radio del cilindro y φ el ángulo rotado por el sólido (Fig.5.15).

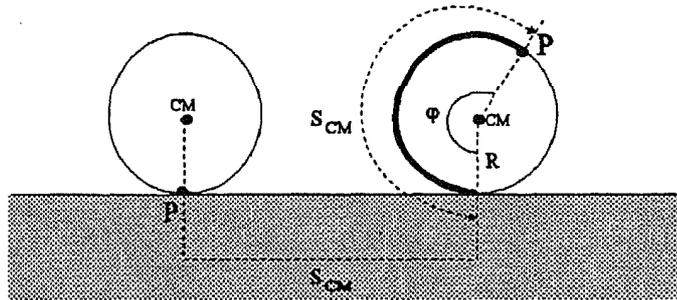


Fig. 5.15

Debido a esto la velocidad y aceleración del centro de masas vendrán dadas por

$$v_{CM} = \omega R \quad ; \quad a_{CM} = \alpha R \quad (5.48)$$

Una propiedad de este tipo de movimiento es que la velocidad instantánea del punto que se encuentra en contacto con la superficie es cero, por lo que este tipo de movimiento es de rodadura.

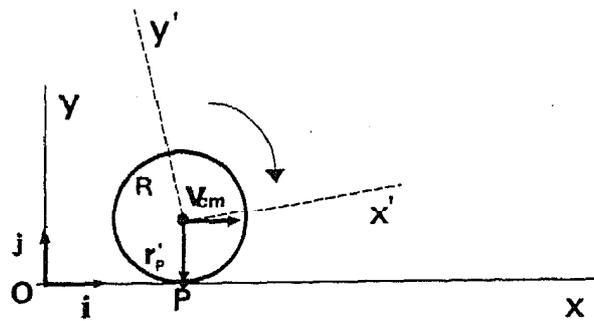


Fig. 5.16

En efecto:

Denotemos por P al punto del cuerpo que en un instante t se encuentra en contacto con la superficie. Si se toma como punto de reducción para el estudio del movimiento al CM se tiene que la velocidad del punto P respecto de un sistema fijo es

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{CM} + \mathbf{v}_P' = \mathbf{v}_{CM} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_P$$

De la (Fig 5.16) se tiene que

$$\mathbf{v}_{CM} = v_{CM} \mathbf{i} \quad ; \quad \boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k} \quad ; \quad \mathbf{r}'_P = -R \mathbf{j}$$

y por tanto teniendo en cuenta (5.48)

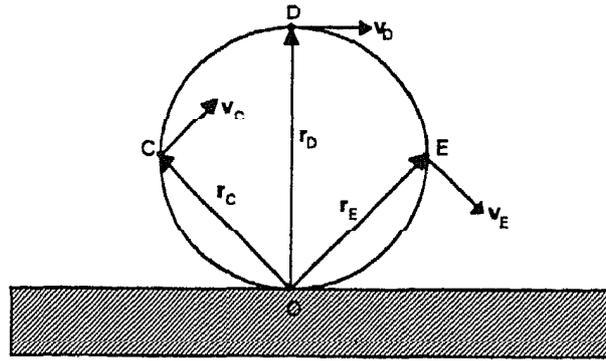
$$\mathbf{v}_P = v_{CM} \mathbf{i} + (-\omega \mathbf{k}) \times (-R \mathbf{j}) = \omega R \mathbf{i} - \omega R \mathbf{i} = \mathbf{0}$$

con lo que la velocidad del punto del sólido que se encuentra en contacto con la superficie es nula.

Esta propiedad hace que para cualquier movimiento de rodadura, sea conveniente tomar como punto de reducción en cada instante de tiempo al punto de velocidad nula, ya que la velocidad de un punto P_i del sólido vendría dada por

$$\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i \quad (5.49)$$

con lo que no aparece el término de traslación. De la ecuación anterior se tiene que el sólido realiza una rotación en cada instante de tiempo en torno al eje que pasa por el punto de velocidad nula (Fig. 5.17).



$$\mathbf{v}_D = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_D^* \quad , \quad \mathbf{v}_C = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_C^* \quad , \quad \mathbf{v}_E = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_E^*$$

Fig. 5.17

Para el caso de rodar sin deslizar es necesario indicar que este movimiento no puede existir en ausencia de rozamiento. Además, como el punto de contacto se encuentra instantáneamente en reposo, la fuerza de rozamiento que actúa es de tipo estático y no dinámico. Esto lleva implícito que para un sólido que rueda sin deslizar, aunque existe fuerza de rozamiento, al no existir desplazamiento del punto de contacto, ésta no produce trabajo.

En efecto:

$$\left. \begin{array}{l} W(\mathbf{F}_R) = \int \mathbf{F}_R \cdot d\mathbf{r}_P \\ d\mathbf{r}_P = \mathbf{v}_P dt = \mathbf{0} \end{array} \right\} \Rightarrow W(\mathbf{F}_R) = 0$$

en donde se ve que el desplazamiento del punto de contacto es nulo ya que su velocidad también lo es.

Por tanto para un sólido que rueda sin deslizar se conserva la energía mecánica, aún a pesar de existir fuerza de rozamiento, siempre y cuando el resto de las fuerzas que están actuando sean conservativas.

c) El cilindro *rueda y desliza*. Como rueda y desliza se tiene que

$$s \neq \theta R \quad , \quad v_{CM} \neq \omega R \quad a_{CM} \neq \alpha R \quad (5.50)$$

y por tanto ahora la velocidad en el punto de contacto no es nula ($v_P \neq 0$).

Si el sólido rueda y desliza al mismo tiempo, debe existir rozamiento. Como el punto de contacto entre ambas superficies no tiene velocidad nula, se tratará de rozamiento dinámico. Además ahora no se conservará la energía total del sólido ya que el rozamiento produce un trabajo.

4.- Condiciones de equilibrio.

Se dice que un sólido está en *equilibrio* cuando las fuerzas externas y los momentos de las fuerzas externas, respecto de cualquier punto O , son nulos. Esto es

$$\sum_i \mathbf{F}_i^e = \mathbf{0} \quad , \quad \sum_i \mathbf{M}_{O_i}^e = \mathbf{0} \quad (5.51)$$

En esta situación se tiene que

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{0} \quad , \quad \frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \mathbf{0} \quad (5.52)$$

con lo que $\mathbf{P} = \text{cte}$ y $\mathbf{L}_O = \text{cte}$ y por tanto

$$\mathbf{v}_{\text{CM}} = \text{cte} \quad , \quad \boldsymbol{\omega} = \text{cte}. \quad (5.53)$$

Estas condiciones no garantizan que el sólido rígido esté en reposo. Además es necesario que el sólido esté inicialmente en reposo.

Si sobre un cuerpo todas las fuerzas que actúan son conservativas, se tiene que la energía potencial externa es máxima o mínima en el equilibrio.

En efecto:

Por simplicidad se hará la demostración para el caso de fuerzas en una dimensión. Se supondrá que todas están en la dirección del eje X .

Teniendo en cuenta la primera condición de equilibrio, y que las fuerzas externas son conservativas, se tiene que

$$\sum_i \mathbf{F}_i^e = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \sum_i -\frac{dU_i^{\text{ext}}}{dx} \mathbf{i} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{dU^{\text{ext}}}{dx} = 0 \quad (5.54)$$

condición que no es más que la que determina el máximo o el mínimo de U^{ext} .

Cuando la energía potencial es mínima se dice que el sólido rígido está en *equilibrio estable* y cuando es máxima, en *equilibrio inestable*.

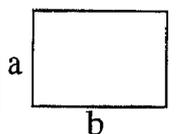
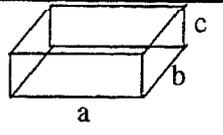
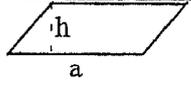
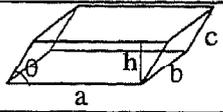
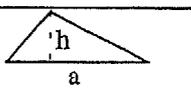
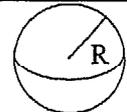
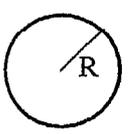
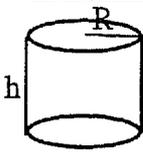
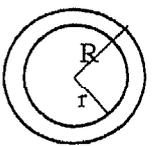
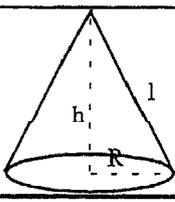
Un hecho importante es que un sólido, que se encuentra en una situación de no equilibrio, siempre tiende a una situación de equilibrio estable.

Si se añade alguna fuerza externa no conservativa, no se verificará la ecuación (5.54), y por lo tanto el sólido no alcanzará el mínimo de energía potencial. En este caso, el cuerpo tenderá a la situación de equilibrio que de el menor valor posible de la energía potencial, y a las fuerzas no conservativas se les denominan *ligaduras*.

Los movimiento en torno a posiciones de equilibrio estable son de gran interés ya que dan lugar a movimientos oscilatorios en torno a dichas posiciones. En los apéndices IV y V se estudian el péndulo compuesto o físico y el péndulo de torsión como ejemplo de lo dicho.

APÉNDICE I: Herramientas matemáticas.

I.1.- Áreas y volúmenes.

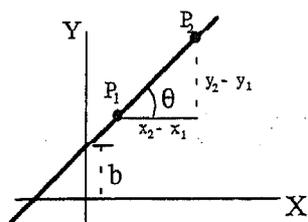
	Rectángulo: $S = a b$		Paralelepípedo: $V = a b c$ $S_{lateral} = ac + bc + ab$
	Paralelogramo: $S = a h$		Paralelepípedo inclinado: $V = a b h = a b c \text{ sen } \theta$
	Triángulo: $S = 1/2 a h$		Esfera: $V = 4/3 \pi R^3$ $S_{lateral} = 4 \pi R^2$
	Círculo: $S = \pi R^2$ Longitud del círculo: $L = 2 \pi R$		Cilindro: $V = h \pi R^2$ $S_{lateral} = h 2 \pi R$ $S_{base} = \pi R^2$
	Corona circular: $S = \pi (R^2 - r^2)$		Cono circular: $V = 1/3 h \pi R^2$ $S_{lateral} = \pi R l$ $S_{base} = \pi R^2$

I.2.- Geometría analítica.

i) Plana:

•Recta:

Representación gráfica:



Ecuación:

•Explícita:

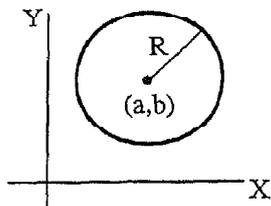
$$y = mx + b; \text{ donde } m = \text{tg} \theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

•Dados dos puntos P_1 y P_2

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m; \text{ donde } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

•**Circunferencia:** Lugar geométrico de los puntos del plano que está a la misma distancia, R, de un punto fijo, centro.

Representación gráfica:



Ecuación:

•De centro en (a, b) y de radio R:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

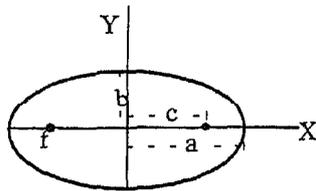
•Implícita:

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$$

centro $(-m/2, -n/2)$; radio $\sqrt{\frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} - p}$

•**Elipse:** Lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos, focos, es constante.

Representación gráfica:



donde f son los focos, c es la semidistancia focal, b es el s menor y a el semieje mayor

Ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

•Excentricidad:

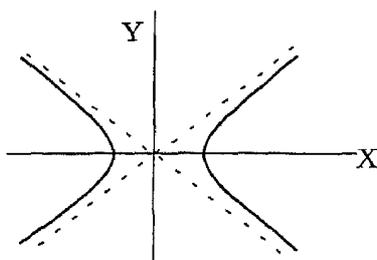
$$e = \frac{c}{a} < 1$$

•Semieje menor:

$$b^2 = a^2 - c^2$$

•**Hipérbola:** Lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos, focos, es constante.

Representación gráfica:



Ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

•Excentricidad:

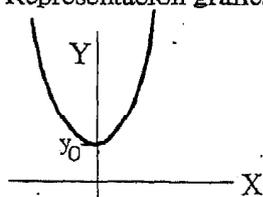
$$e = \frac{c}{a} > 1$$

•Semieje menor:

$$b^2 = c^2 - a^2$$

•**Parábola:** Lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo, foco, y de una recta fija, directriz.

Representación gráfica:



Ecuación:

$$y = y_0 + 2px^2$$

•Excentricidad:

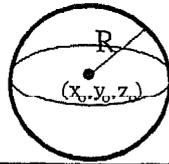
$$e = 1$$

donde p es la distancia del foco a la directriz

ii) En el espacio:

• *Esfera de centro (x_0, y_0, z_0) y de radio R :*

Representación gráfica:

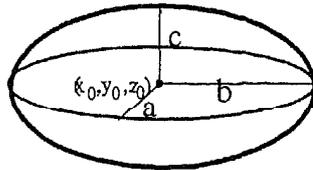


Ecuación:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

• *Elipsoide de centro (x_0, y_0, z_0) y de semiejes a, b, c :*

Representación gráfica:

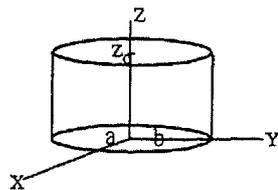


Ecuación:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

• *Cilindro elíptico :*

Representación gráfica:



Ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 ; 0 \leq z \leq z_0$$

I.3.- Binomio de Newton:

$$(x + y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 + \dots + y^n$$

$$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$$

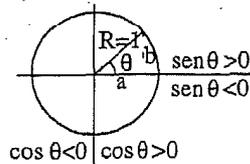
$$(x \pm a)^3 = x^3 \pm 3ax^2 + 3xa^2 \pm a^3$$

$$(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2ax + a^2$$

$$(x + b + c)^2 = x^2 + b^2 + c^2 + 2xb + 2xc + 2bc$$

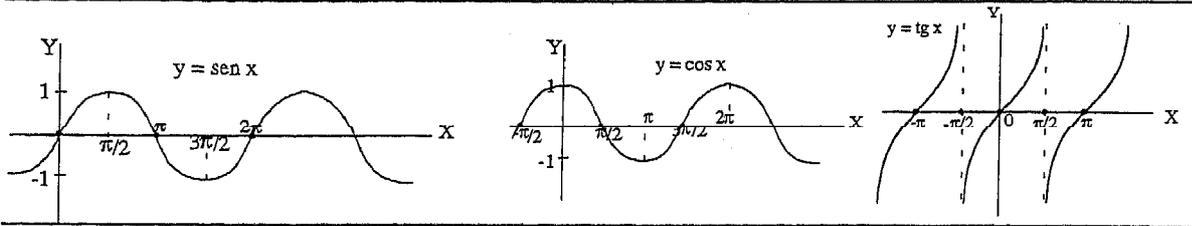
I.4.- Funciones trigonométricas:

Círculo unidad



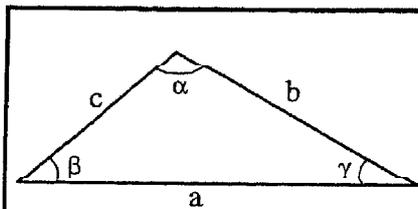
	definición	rango	período	disc.
sen θ	b	[-1, 1]	2π	no existe
cos θ	a	[-1, 1]	2π	no existe
tg θ	b/a	$[-\infty, \infty]$	π	$\pi/2 + k\pi$

Representación gráfica:



Propiedades:

$\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1$	$\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen} \alpha \text{cos} \beta \pm \text{cos} \alpha \text{sen} \beta$
$\text{cos}(\alpha \pm \beta) = \text{cos} \alpha \text{cos} \beta \mp \text{sen} \alpha \text{sen} \beta$	$\text{tg}(\alpha \pm \beta) = (\text{tg} \alpha \pm \text{tg} \beta) / (1 \mp \text{tg} \alpha \text{tg} \beta)$
$\text{sen} 2\alpha = 2 \text{sen} \alpha \text{cos} \alpha$	$\text{cos} 2\alpha = \text{cos}^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha = 1 - 2 \text{sen}^2 \alpha$
$\text{tg} 2\alpha = 2 \text{tg} \alpha / (1 - \text{tg}^2 \alpha)$	$\text{sen}^2 \alpha = (1 - \text{cos} 2\alpha) / 2$
$\text{cos}^2 \alpha = (1 + \text{cos} 2\alpha) / 2$	$\text{sen} \alpha \text{sen} \beta = 1/2 \{ \text{cos}(\alpha - \beta) - \text{cos}(\alpha + \beta) \}$
$\text{cos} \alpha \text{cos} \beta = 1/2 \{ \text{cos}(\alpha - \beta) + \text{cos}(\alpha + \beta) \}$	$\text{sen} \alpha \text{cos} \beta = 1/2 \{ \text{sen}(\alpha - \beta) + \text{sen}(\alpha + \beta) \}$



•Teorema del seno:

$$\frac{a}{\text{sen} \alpha} = \frac{b}{\text{sen} \beta} = \frac{c}{\text{sen} \gamma}$$

•Teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \text{cos} \alpha$$

I.5.- Funciones exponenciales y logarítmicas:

Exponencial	Logarítmica
$\text{exp}_a(x) = a^x$ $\begin{cases} \text{si } a = 10 \Rightarrow \text{exp}_{10}(x) = 10^x \\ \text{si } a = e \Rightarrow \text{exp}_e(x) = e^x \end{cases}$	$\text{log}_a(x) = b \Leftrightarrow a^b = x$; $\begin{cases} \text{si } a = 10 \Rightarrow \text{log}_{10}(x) = \text{log}(x) \\ \text{si } a = e \Rightarrow \text{log}_e(x) = \text{ln}(x) \end{cases}$
<p>Representación gráfica.</p>	<p>Representación gráfica.</p>

Propiedades:	Propiedades:
$a^0 = 1$	$\log_a(1) = 0$
$a^{(x+y)} = a^x a^y$	$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
$a^{(x-y)} = a^x / a^y$	$\log_a(x/y) = \log_a(x) - \log_a(y)$
$a^{kx} = (a^x)^k$	$\log_a(x^k) = k \log_a(x)$
	Cambio de base: $\log_a(x) = \log_b(x) / \log_b(a)$

I.6.- Tabla de derivadas:

$y(x) = x^n \Rightarrow y'(x) = n x^{n-1}$	$y(x) = \text{sen } u \Rightarrow y'(x) = u' \cos u$
$y(x) = k, k = \text{cte} \Rightarrow y'(x) = 0$	$y(x) = \text{cos } u \Rightarrow y'(x) = -u' \text{sen } u$
$y(x) = u^n \Rightarrow y'(x) = n u^{n-1} u'$	$y(x) = \text{tg } u \Rightarrow y'(x) = u' / \text{cos}^2 u$
$y(x) = \sqrt[n]{u} \Rightarrow y'(x) = (1/n \sqrt[n]{u^{n-1}}) u'$	$y(x) = \text{cot } u \Rightarrow y'(x) = -u' / \text{sen}^2 u$
$y(x) = a^u, a = \text{cte} \Rightarrow y'(x) = a^u \ln(a) u'$	$y(x) = \text{arc sen } u \Rightarrow y'(x) = u' / (\sqrt{1-u^2})$
$y(x) = e^u \Rightarrow y'(x) = e^u u'$	$y(x) = \text{arc cos } u \Rightarrow y'(x) = -u' / (\sqrt{1-u^2})$
$y(x) = \ln(u) \Rightarrow y'(x) = u'/u$	$y(x) = \text{arc tg } u \Rightarrow y'(x) = u' / (1+u^2)$
$y(x) = \log_a(u) \Rightarrow y'(x) = u' / (u \ln a)$	

I.7.- Tabla de integrales:

$\int x^{n-1} dx = x^n / n + C$	$\int u' \cos u dx = \text{sen } u + C$
$\int k u' dx = k u + C$	$\int u' \text{sen } u dx = -\text{cos } u + C$
$\int u^{n-1} u' dx = u^n / n + C$	$\int (u' / \text{cos}^2 u) dx = \text{tgu } u + C$
$\int u'/u dx = \ln(u) + C$	$\int u' / \text{sen}^2 u dx = -\text{cot } u + C$
$\int e^u u' dx = e^u + C$	$\int u' / (1+u^2) dx = \text{arc tg } u + C$
$\int (u' / (a^2 - u^2)) dx = (1/2a) \ln (a+u)/(a-u) + C$	$\int [u' / (\sqrt{1-u^2})] dx = \text{arc sen } u + C$
$\int \text{tgu } u' dx = -\ln \text{cos } u + C$	

I.8.- Desarrollos en serie de Taylor:

$(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$	$-1 < x < 1$
$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots$	$-1 < x \leq 1$
$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \dots$	$-1 < x \leq 1$
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$	$-1 < x \leq 1$
$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\text{cos } x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\text{tg } x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} - \dots$	$ x < \frac{\pi}{2}$

I.9.- Relaciones para el producto vectorial

- $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$
- $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$
- $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$
- $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \mathbf{C}\{\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{D})\} - \mathbf{D}\{\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})\} = \mathbf{B}\{\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})\} - \mathbf{A}\{\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})\}$

I.10.- Relaciones en las que interviene ∇ .

- $\nabla(\mathbf{U} + \mathbf{V}) = \nabla\mathbf{U} + \nabla\mathbf{V}$
- $\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}$
- $\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$
- $\nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{A}) = (\nabla\mathbf{U}) \cdot \mathbf{A} + \mathbf{U}(\nabla \cdot \mathbf{A})$
- $\nabla \times (\mathbf{U}\mathbf{A}) = (\nabla\mathbf{U}) \times \mathbf{A} + \mathbf{U}(\nabla \times \mathbf{A})$
- $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$
- $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B})$
- $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B})$
- $\nabla \times (\nabla\mathbf{U}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow$ El rotacional del gradiente de una función escalar es nulo.
- $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow$ La divergencia del rotacional de una función vectorial es nula
- $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

APÉNDICE II: *Coordenadas curvilíneas ortogonales.*

Hemos visto que podemos fijar la posición de un mismo punto en el espacio de diversas formas y que según la que tomemos tendremos los distintos sistemas de coordenadas. Sea el punto P fijado en el espacio por las coordenadas cartesianas x, y, z . También se puede fijar con *las coordenadas curvilíneas* e_1, e_2, e_3 (Fig II.1). Como ambas coordenadas fijan al punto existirán relaciones entre ellas, de forma que:

$$\begin{aligned} x &= x(e_1, e_2, e_3) & ; & & e_1 &= (x, y, z) \\ y &= y(e_1, e_2, e_3) & ; & & e_2 &= (x, y, z) \\ z &= z(e_1, e_2, e_3) & ; & & e_3 &= (x, y, z) \end{aligned}$$

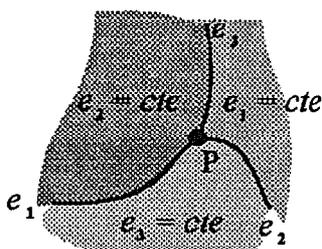


Fig II.1

Las superficies sombreadas son superficies de valores constantes. El corte de dos de ellas da lugar a las líneas de e_1, e_2, e_3 . Así, de la intersección de e_1, e_2 obtenemos la línea coordenada e_3 .

Cuando estas superficies se cortan perpendicularmente en un punto diremos que las líneas son *líneas coordenadas curvilíneas ortogonales* y son con las que trabajaremos.

Un caso particular son las coordenadas cartesianas donde los ejes cartesianos son las líneas coordenadas y las superficies son los planos cartesianos.

La posición de P respecto del origen O se puede expresar a través de:

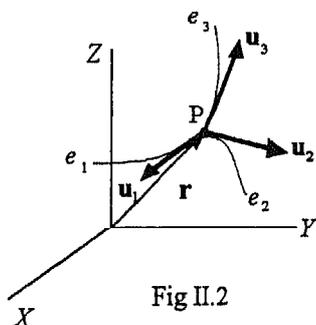


Fig II.2

$$\left. \begin{aligned} r &= xi + yj + zk \\ \text{y como } \begin{cases} x = x(e_1, e_2, e_3) \\ y = y(e_1, e_2, e_3) \\ z = z(e_1, e_2, e_3) \end{cases} \end{aligned} \right\} \Rightarrow r = r(e_1, e_2, e_3) \quad (\text{II.1})$$

Luego, podemos derivar parcialmente r con respecto a cada una de las coordenadas curvilíneas. Entonces podemos definir los vectores unitarios tangentes a cada una de las líneas coordenadas e_1, e_2, e_3 en P (Fig.II.2), u_1, u_2, u_3 , como:

$$u_1 = \frac{\frac{\partial r}{\partial e_1}}{\left| \frac{\partial r}{\partial e_1} \right|} ; \quad u_2 = \frac{\frac{\partial r}{\partial e_2}}{\left| \frac{\partial r}{\partial e_2} \right|} ; \quad u_3 = \frac{\frac{\partial r}{\partial e_3}}{\left| \frac{\partial r}{\partial e_3} \right|} \quad (\text{II.2})$$

También podemos definir los factores de escala h_1, h_2, h_3 como:

$$h_1 = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial e_1} \right| ; \quad h_2 = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial e_2} \right| ; \quad h_3 = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial e_3} \right| \quad (\text{II.3})$$

Usando (II.2) y (II.3) se puede escribir:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial e_1} = h_1 \mathbf{u}_1 ; \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial e_2} = h_2 \mathbf{u}_2 ; \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial e_3} = h_3 \mathbf{u}_3 \quad (\text{II.4})$$

Análogamente, de (II.4) se puede expresar $d\mathbf{r}$ en función de las coordenadas curvilíneas como:

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial e_1} de_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial e_2} de_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial e_3} de_3 = h_1 \mathbf{u}_1 de_1 + h_2 \mathbf{u}_2 de_2 + h_3 \mathbf{u}_3 de_3 = \sum_{i=1}^3 h_i \mathbf{u}_i de_i \quad (\text{II.5})$$

Se define el elemento de longitud entre dos puntos cualesquiera muy cercanos, dl , a partir de:

$$dl^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 h_i^2 (de_i)^2 \quad (\text{II.6})$$

En efecto:

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} &= \sum_{i=1}^3 h_i \mathbf{u}_i de_i \cdot \sum_{i=1}^3 h_i \mathbf{u}_i de_i = (h_1 \mathbf{u}_1 de_1 + h_2 \mathbf{u}_2 de_2 + h_3 \mathbf{u}_3 de_3) \cdot (h_1 \mathbf{u}_1 de_1 + h_2 \mathbf{u}_2 de_2 + h_3 \mathbf{u}_3 de_3) = \\ &= \sum_{i=1}^3 h_i^2 de_i^2 (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i) + \sum_{i=1}^3 \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^3 h_i h_j de_i de_j (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j) \end{aligned}$$

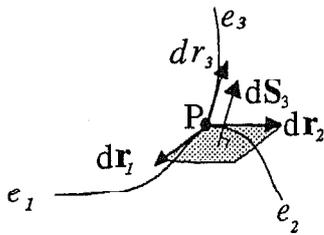
Como las coordenadas curvilíneas que usamos son ortogonales:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i &= 1 \\ \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j &= 0 ; i \neq j \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \delta_{ij} \quad (\delta_{ij} \text{ es la delta de Kronecker. Vale 1 cuando } i = j \text{ y 0 en caso contrario})$$

Con lo que, si dl es el módulo de $d\mathbf{r}$:

$$d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 h_i^2 de_i^2 (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i) + \sum_{i=1}^3 \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^3 h_i h_j de_i de_j (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j) = \sum_{i=1}^3 h_i^2 de_i^2$$

Recordando que el producto vectorial de dos vectores daba lugar a un vector que representaba a la superficie generada por ellos, los elementos de superficie se pueden obtener como (Fig II.3):



$$\begin{aligned} dS_1 &= dr_2 \times dr_3 = (h_2 h_3 de_2 de_3)(\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3) = h_2 h_3 de_2 de_3 \mathbf{u}_1 \\ dS_2 &= dr_3 \times dr_1 = (h_3 h_1 de_3 de_1)(\mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1) = h_3 h_1 de_3 de_1 \mathbf{u}_2 \\ dS_3 &= dr_1 \times dr_2 = (h_1 h_2 de_1 de_2)(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) = h_1 h_2 de_1 de_2 \mathbf{u}_3 \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

Teniendo en cuenta el significado geométrico del producto mixto, el *elemento de volumen* se expresará como:

$$dV = dr_3 \cdot dS_3 = h_3 de_3 \mathbf{u}_3 \cdot (h_1 h_2 de_1 de_2 \mathbf{u}_3) = h_1 h_2 h_3 de_1 de_2 de_3 \quad (\text{II.8})$$

Aunque no se demostraran, las expresiones del operador nábla y del gradiente, la divergencia y el rotacional en coordenadas curvilíneas son:

Operador nábla:

$$\nabla = \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial e_1} \mathbf{u}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial e_2} \mathbf{u}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial e_3} \mathbf{u}_3 \quad (\text{II.9})$$

Gradiente. Si ϕ es un escalar:

$$\nabla \phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial e_1} \mathbf{u}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial e_2} \mathbf{u}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial e_3} \mathbf{u}_3 \quad (\text{II.10})$$

Divergencia. Si \mathbf{A} es una función vectorial:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial(A_1 h_2 h_3)}{\partial e_1} + \frac{\partial(A_2 h_3 h_1)}{\partial e_2} + \frac{\partial(A_3 h_1 h_2)}{\partial e_3} \right] \quad (\text{II.11})$$

Rotacional: Si \mathbf{A} es una función vectorial:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{u}_1 & h_2 \mathbf{u}_2 & h_3 \mathbf{u}_3 \\ \frac{\partial}{\partial e_1} & \frac{\partial}{\partial e_2} & \frac{\partial}{\partial e_3} \\ A_1 h_1 & A_2 h_2 & A_3 h_3 \end{vmatrix} \quad (\text{II.12})$$

A continuación se aplicaran estas definiciones a algunos sistemas de coordenadas.

***Sistema de coordenadas cartesianas:**

En este sistema de coordenadas el punto queda fijado por (Fig II.4):

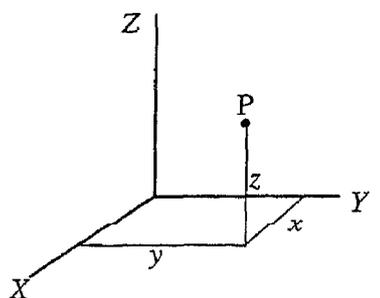


Fig II.4

luego:

$$\left. \begin{array}{l} e_1 = x \quad ; \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{i} \\ e_2 = y \quad ; \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{j} \\ e_3 = z \quad ; \quad \mathbf{u}_3 = \mathbf{k} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Rightarrow h_1 = h_2 = h_3 = 1 \\ \downarrow \\ \text{de 1.3} \end{array} \quad (\text{II.13})$$

y el vector de posición será

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (\text{II.14})$$

Así:

•*Elemento de longitud:* De (II.5) y (II.13) se obtiene que:

$$d\mathbf{r} = h_1\mathbf{u}_1de_1 + h_2\mathbf{u}_2de_2 + h_3\mathbf{u}_3de_3 = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k} \quad (\text{II.15})$$

con lo que el elemento de longitud (de (II.6)) será:

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \quad (\text{II.16})$$

•*Elemento de superficie:* De (II.7) y (II.13):

$$dS_z = dx\,dy\,\mathbf{k} \quad ; \quad dS_x = dy\,dz\,\mathbf{i} \quad ; \quad dS_y = dz\,dx\,\mathbf{j} \quad (\text{II.17})$$

•*Elemento de volumen:* De (II.8) y (II.13):

$$dV = dx\,dy\,dz \quad (\text{II.18})$$

•*Gradiente:*

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k} \quad (\text{II.19})$$

•*Divergencia:*

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial(A_1)}{\partial x} + \frac{\partial(A_2)}{\partial y} + \frac{\partial(A_3)}{\partial z} \quad (\text{II.20})$$

•*Rotacional:*

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} \quad (\text{II.21})$$

***Sistema de coordenadas cilíndricas:**

En este sistema de coordenadas el punto queda fijado por (Fig II.5):

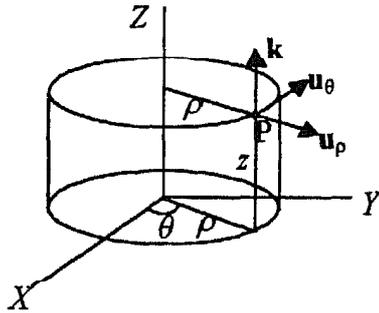


Fig II.5

En él, cuando $z=cte$ se obtiene un plano perpendicular a Z, cuando $\rho=cte$ tenemos un cilindro y cuando $\theta=cte$ un plano perpendicular al plano XY. Así:

$$\begin{aligned} e_1 = \rho & ; \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_\rho \\ e_2 = \theta & ; \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_\theta \\ e_3 = z & ; \quad \mathbf{u}_3 = \mathbf{k} \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

La relación entre las coordenadas cilíndricas y las cartesianas es:

$$\left. \begin{aligned} \rho^2 &= x^2 + y^2 \\ \theta &= \text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \\ z &= z \end{aligned} \right\} \leftrightarrow \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \text{ sen } \theta \\ z = z \end{cases} \quad (\text{II.23})$$

•Factores de escala. A partir de la definición (II.3):

$$h_\rho = 1 \quad ; \quad h_\theta = \rho \quad ; \quad h_z = 1 \quad (\text{II.24})$$

En efecto:

$$h_\rho^2 = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \rho} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial \rho} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial \rho} \mathbf{k}\right)^2 \underset{\text{usando I.22 y I.23}}{=} (\cos \theta \mathbf{i} + \text{sen } \theta \mathbf{j} + 0 \mathbf{k})^2 = 1$$

análogamente se calcularían los otros factores de escala.

•Elemento de longitud. De (II.6):

$$dl = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + dz^2} \quad (\text{II.25})$$

•Elemento de superficie: De (II.7):

$$dS_\rho = \rho d\theta dz \mathbf{u}_\rho \quad ; \quad dS_\theta = d\rho dz \mathbf{u}_\theta \quad ; \quad dS_z = \rho d\rho d\theta \mathbf{k} \quad (\text{II.26})$$

•Elemento de volumen: De (II.8):

$$dV = \rho \, d\rho \, d\theta \, dz \quad (\text{II.27})$$

•Gradiente:

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \mathbf{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \mathbf{u}_\theta + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k} \quad (\text{II.28})$$

•Divergencia:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(A_\rho \rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial(A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(A_z)}{\partial z} \right] \quad (\text{II.29})$$

•Rotacional:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{u}_\rho & \rho \mathbf{u}_\theta & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\theta & A_z \end{vmatrix} \quad (\text{II.30})$$

***Sistema de coordenadas polares:**

Es el sistema de coordenadas cilíndricas cuando solo se trabaja en el plano, es decir, con las variables ρ y θ . Las expresiones para este sistema de coordenadas se obtienen de las coordenadas cilíndricas haciendo $dz = 0$, $\partial/\partial z = 0$. Como es un sistema de coordenadas plano no tiene sentido hablar de elemento de volumen (Fig II.6).

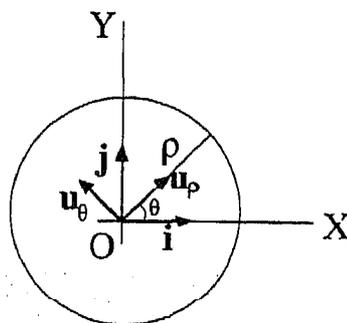


Fig II.6

***Sistema de coordenadas esféricas:**

En este sistema de coordenadas el punto queda fijado por (Fig II.7):

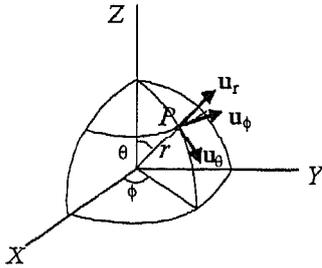


Fig II.7

En él, cuando $\phi = cte$ se obtiene un plano que pasa por z , cuando $\theta = cte$ se tiene un cono cuya base pasa por P y de vértice O y cuando $r = cte$ una esfera. Así:

$$\begin{aligned} e_1 = r & ; \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_r \\ e_2 = \theta & ; \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_\theta \\ e_3 = \phi & ; \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_\phi \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

En él, cuando $\phi = cte$ se obtiene un plano, que pasa por z , cuando $\theta = cte$ es un cono cuya base pasa por P y de vértice O y cuando $r = cte$ una esfera. Así:

La relación entre las coordenadas esféricas y las cartesianas es:

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \phi &= \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \\ \theta &= \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \end{aligned} \right\} \leftrightarrow \begin{cases} x = r \operatorname{sen} \theta \cos \phi \\ y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (\text{II.32})$$

•Factores de escala. A partir de la definición (II.3):

$$h_r = 1 ; h_\theta = r ; h_\phi = r \operatorname{sen} \theta \quad (\text{II.33})$$

•Elemento de longitud. De (II.6):

$$dl = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta d\phi^2} \quad (\text{II.34})$$

•Elemento de superficie: De (II.7):

$$dS_r = r^2 \operatorname{sen} \theta d\theta d\phi \mathbf{u}_r ; \quad dS_\theta = r \operatorname{sen} \theta dr d\phi \mathbf{u}_\theta ; \quad dS_\phi = r dr d\theta \mathbf{u}_\phi \quad (\text{II.35})$$

•Elemento de volumen: De (II.8):

$$dV = r^2 \operatorname{sen} \theta dr d\theta d\phi \quad (\text{II.36})$$

•Gradiente:

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \mathbf{u}_\phi \quad (\text{II.37})$$

•Divergencia:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial (r^2 \sin \theta A_r)}{\partial r} + \frac{\partial (r \sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (r A_\phi)}{\partial \phi} \right] \quad (\text{II.38})$$

•Rotacional:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{u}_r & r \mathbf{u}_\theta & r \sin \theta \mathbf{u}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & r A_\theta & r \sin \theta A_\phi \end{vmatrix} \quad (\text{II.39})$$

APÉNDICE III: *Triedro Intrínseco de Frenet.*

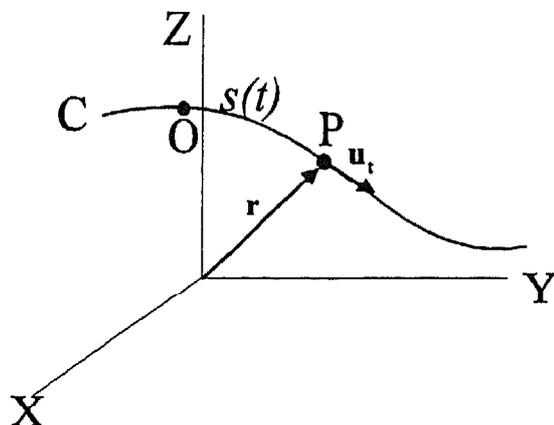


Fig. III.1

Dada una curva podemos definir un triángulo en cada punto, P , de ésta (ver Fig.III.1). Comenzamos definiendo un vector unitario tangente a la curva y que lleva el sentido de crecimiento de la longitud del arco que va desde el origen O en la curva hasta el punto P , $s(t)$. Notaremos a este vector por \mathbf{u}_t , y se puede calcular de la siguiente expresión :

$$\mathbf{u}_t = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \quad (\text{III.1})$$

donde \mathbf{r} es el vector posición de P .

En efecto :

Pues $d\mathbf{r}$ tiene la dirección de la tangente en P y $ds = |d\mathbf{r}|$.

Por otro lado, podemos definir un vector unitario normal a la curva de la siguiente forma :

$$\mathbf{u}_n = \frac{d\mathbf{u}_t}{ds} \left(\left| \frac{d\mathbf{u}_t}{ds} \right| \right)^{-1} \quad (\text{III.2})$$

En efecto :

$$\frac{d(\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{u}_t)}{ds} = \frac{d1}{ds} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d(\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{u}_t)}{ds} = 2\mathbf{u}_t \cdot \frac{d\mathbf{u}_t}{ds}$$

El plano formado por los vectores normal y tangencial recibe el nombre de *plano osculador*. El tercer vector unitario que completa el triedro de Frenet es perpendicular al plano osculador y a la dirección que define se le llama *binormal*. Este vector viene dado por :

$$\mathbf{u}_b = \mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_n \quad (\text{III.3})$$

El plano formado por los vectores normal y binormal recibe el nombre de *plano normal* y el formado por la dirección tangencial y la binormal *plano rectificante*.

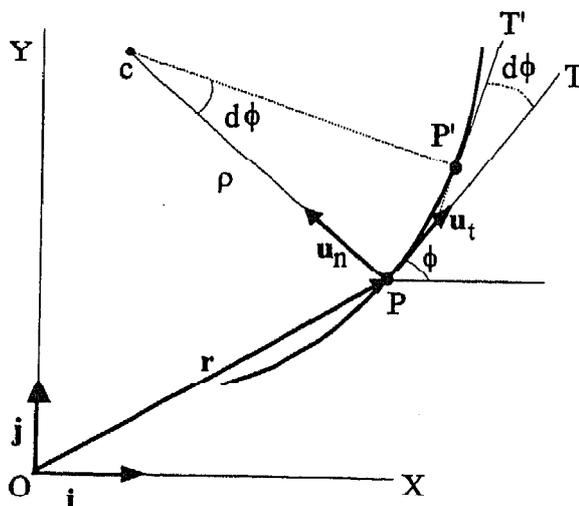


Fig. III.2

Si ϕ es el ángulo que forma la tangente en el punto P con la horizontal (ver Fig. III.2) podremos escribir la siguiente relación entre los vectores normal y tangente :

$$\frac{d\mathbf{u}_t}{ds} = \frac{d\phi}{ds} \mathbf{u}_n \quad (\text{III.4})$$

En efecto :

De la Fig. III.2 es inmediato deducir las siguientes relaciones:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{u}_t = \cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \mathbf{j} \\ \mathbf{u}_n = -\sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{d\mathbf{u}_t}{ds} = -\sin \phi \frac{d\phi}{ds} \mathbf{i} + \cos \phi \frac{d\phi}{ds} \mathbf{j} = \frac{d\phi}{ds} \mathbf{u}_n$$

Se llama *centro de curvatura*, c , al punto donde se cortan dos normales a dos tangentes trazadas en puntos infinitamente próximos (ver Fig. III.2). A la distancia que va desde el punto P hasta el centro de curvatura se le denomina *radio de curvatura*, ρ . Como el arco de curva PP' es infinitesimal se puede suponer que es un arco de circunferencia y entonces se cumplirá :

$$\text{arco}(PP') = ds = \rho d\phi \tag{III.5}$$

y por tanto (III.6) se puede expresar como:

$$\frac{d\mathbf{u}_t}{ds} = \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_n \tag{III.6}$$

Otra expresión que se puede deducir de la anterior es:

$$\frac{d\mathbf{u}_t}{dt} = \frac{V}{\rho} \mathbf{u}_n \tag{III.7}$$

donde t es el tiempo.

En efecto :

Utilizando (III.6) y la regla de la cadena en la derivación se tendrá

$$\frac{d\mathbf{u}_t}{dt} = \frac{d\mathbf{u}_t}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{V}{\rho} \mathbf{u}_n$$

El radio de curvatura en un punto $P(x,y,z)$ de la curva tiene la siguiente expresión:

$$\frac{1}{\rho} = \left| \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} \right| = \sqrt{\left(\frac{d^2 x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{ds^2} \right)^2} \quad (\text{III.8})$$

En efecto:

De (III.1) es inmediato comprobar que:

$$\frac{1}{\rho} = \left| \frac{d \mathbf{u}_t}{ds} \right| = \left| \frac{d}{ds} \left(\frac{d \mathbf{r}}{ds} \right) \right| = \left| \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} \right|$$

APÉNDICE IV: *El péndulo compuesto o físico.*

Cualquier sólido rígido que oscile libremente alrededor de un eje horizontal bajo la acción de la gravedad recibe el nombre de *péndulo compuesto o físico*. De la (Fig.IV.1) observamos que $\mathbf{r}_{\text{CM}} = (d\text{sen}\theta, -d\text{cos}\theta, 0)$ y $\mathbf{P} = (0, -mg, 0)$, siendo por tanto el momento de fuerzas respecto a O

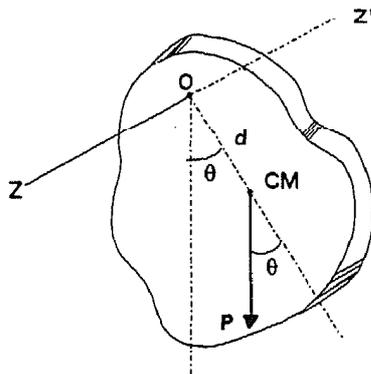


Fig.IV.1

$$\mathbf{M}_O^e = \mathbf{r}_{\text{CM}} \times \mathbf{P} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ d\text{sen}\theta & -d\text{cos}\theta & 0 \\ 0 & -mg & 0 \end{vmatrix} = -mgd\text{sen}\theta \mathbf{k} \quad (\text{IV.1})$$

Como el eje de rotación es fijo, se tiene para la componente Z del momento de fuerzas que (ver ecuación (5.25))

$$M_{O_z}^e = I_z \alpha = I_z \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgd\text{sen}\theta \quad (\text{IV.2})$$

y por tanto,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{I_z} \text{sen}\theta = 0 \quad (\text{IV.3})$$

Si los desplazamientos del *centro de masas* son de pequeña amplitud, de manera que se puede aproximar $\text{sen}\theta \approx \theta$, se tiene

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{I_z} \theta = 0 \quad (\text{IV.4})$$

que es la ecuación de un movimiento oscilatorio armónico simple para θ , y entonces

$$\theta = \theta_0 \text{sen}(\omega t + \alpha) \quad (\text{IV.5})$$

donde θ_0 es la máxima amplitud angular y ω es la frecuencia angular cuya expresión es

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I_z}} \quad (\text{IV.6})$$

siendo por tanto el período de la oscilación

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{mgd}} \quad (\text{IV.7})$$

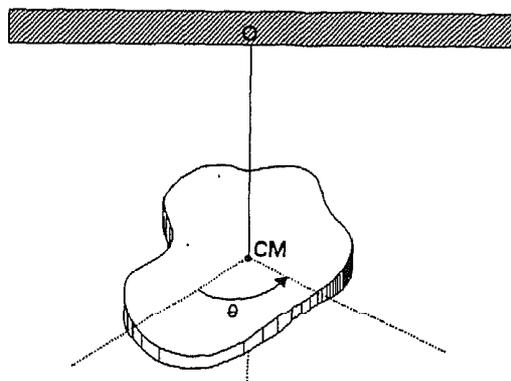
La ecuación anterior proporciona un método para determinar el momento de inercia de figuras planas. Éste vendría dado por

$$I_z = \frac{mgdT^2}{4\pi^2} \quad (\text{IV.8})$$

donde medimos el período de oscilación, y el *centro de masas* lo determinamos colgando el sólido de dos puntos distintos.

APÉNDICE V: *El péndulo de torsión.*

El *péndulo de torsión* consiste de un sólido rígido suspendido de un hilo que pasa por su *centro de masas* y que se encuentra sujeto a un punto fijo (Fig. V.1)



(Fig. V.1)

Cuando el hilo se retuerce un ángulo θ , si se está por debajo del límite elástico, se cumple que

$$M_{CM}^e = -\kappa\theta \quad (V.1)$$

donde κ es el coeficiente de torsión del resorte. Y como por otro lado

$$M_{CM}^e = I_{CM} \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (V.2)$$

se tiene por tanto que

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\kappa}{I_{CM}}\theta = 0 \quad (V.3)$$

que es la ecuación de un movimiento armónico simple de frecuencia

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I_{CM}}} \quad (V.4)$$