Un Tema de Álgebra Lineal

Sistemas de Ecuaciones Lineales

José M. Pacheco
Departamento de Matemáticas de la ULPGC

Introducción.

Una ecuación con una o varias incógnitas es **lineal** si los términos que contienen las cantidades desconocidas son de primer grado en ellas. Así, la ecuación $3x + y = z$ es lineal, pero $x^2 + \cos y = \pi$ ó $xy = \log(x - y)$ no lo son.

Un **sistema** es una familia de ecuaciones con cualquier número tanto de ecuaciones como de incógnitas. Si todas las ecuaciones son lineales, tendremos un sistema lineal. Así, el siguiente sistema es lineal:

$$\begin{cases} 3x + y = z \\ x + y + z = 0 \\ x - y = 33 \end{cases}$$

Sin embargo, este otro no lo es:

$$\begin{cases} 3x + y = z^2 \\ x^y = y^x \end{cases}$$

Un concepto básico es el de **solución** de una ecuación o de un sistema. Si tenemos una ecuación o un sistema con *n* incógnitas, **una solución** de la ecuación (o del sistema) es **un conjunto ordenado de *n* números** tales que sustituidos en la ecuación o sistema, transforman la ecuación en **una identidad**[1] (o las ecuaciones del sistema en las correspondientes identidades). Por ejemplo, el par de números $(x, y) = (3, 4)$ es **una** solución de la ecuación $x + y = 7$.

En este tema estudiaremos sólo ecuaciones y sistemas lineales, y en particular cuando número *n* de ecuaciones es igual al de incógnitas. Por "sistema $n \times m$" entenderemos un sistema lineal con *n* ecuaciones y *m* incógnitas.

El caso 1×1.

Este problema es muy simple: Se trata de estudiar la ecuación $ax = b$. Lo habitual en los cursos elementales es intentar resolverla, esto es, hallar sus soluciones. Todo el mundo sabe que basta con despejar la x dividiendo por *a* toda la ecuación para obtener $x = \frac{b}{a}$.
Sin embargo, hay que afinar más: Esa división **sólo es posible** cuando $a \neq 0$. Por tanto, **si** $a \neq 0$ **la ecuación tiene solución**, y además **es única**, debido a las propiedades aritméticas de los números. Pensando un poco más vemos que incluso siendo $a = 0$ pueden encontrarse soluciones, siempre que $b = 0$, pues **la ecuación** $0x = 0$ **admite infinitas soluciones**: Cualquier número *x* es solución de ella.

[1] Llamamos **identidad** a cualquier expresión que se pueda reducir a la forma 0 = 0.

Si llamamos homogénea a la ecuación $ax = 0$ (la no homogénea es $ax = b$, claro está), podemos resumir la discusión anterior de la siguiente manera:

Teorema: "*Dada la ecuación $ax = b$, se cumple la siguiente* ***alternativa****: O bien las dos ecuaciones* (*homogénea y no homogénea*) *tienen solución única, o bien la homogénea tiene infinitas soluciones y la no homogénea carece de soluciones*"

En efecto, si $a \neq 0$, cualquiera que sea *b* existe solución única: es $\frac{b}{a}$, que se hace 0 en el caso homogéneo. La alternativa corresponde a que $a = 0$, en cuyo caso la no homogénea no puede tener soluciones, pero la homogénea, como vimos antes, admite una infinidad de ellas.

La consecuencia importante es que **o no existen soluciones, o si las hay, entonces o hay sólo una, o infinitas**: ¡es imposible que haya sólo 7 u 8 soluciones![2] Este teorema se conoce habitualmente con el nombre de **Teorema de Rouché-Fröbenius** en los cursos de Álgebra, y como **Teorema *de la alternativa* de Fredholm** en los cursos superiores de Análisis Matemático.

El caso de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Vamos a estudiar detalladamente el sistema lineal:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Del cálculo matricial sabemos que el sistema se puede escribir en la forma $AX = B$, donde $A = \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix}$. Por tanto, **una pregunta natural será**: *Si la ecuación $ax = b$ tenía por solución $x = \frac{b}{a}(= a^{-1}b)$ ¿será posible resolver el sistema en la forma $X = \frac{B}{A}(= A^{-1}B)$?*

Desde luego, para contestar a la pregunta deberemos **aclarar qué puede significar *dividir* una matriz columna por una matriz cuadrada**. Ése es el objetivo de los párrafos siguientes.

Supongamos que nuestro sistema cumple $a \neq 0$. Por tanto, podremos despejar la *x* en la primera ecuación, obteniendo $x = \frac{c - by}{a}$. Llevando este valor a la segunda ecuación, hallaremos la *y*:

$$d\frac{c - by}{a} + ey = f, \text{ de donde } y = \frac{af - cd}{ae - bd}$$

[2] En el Álgebra Lineal basada en la *Aritmética Modular* los conjuntos numéricos pueden ser finitos, p. ej. tener sólo 17 elementos: En ese caso existirían un máximo de 17 soluciones.

Y observamos que **la cantidad** $ae - bd$ **tiene que ser distinta de** 0 **para que la última división se pueda efectuar**: Esta condición es **la análoga de la** $a \neq 0$ **para el caso de una única ecuación con una incógnita**. Sustituyendo ese valor de y en cualquiera de las dos ecuaciones encontramos $x = \dfrac{ce - bf}{ae - bd}$. Recordemos (o introduzcamos) ahora la definición de determinante de una matriz cuadrada 2×2, y tras reconocer que la cantidad $ae - bd$ es precisamente el determinante de la matriz *A*, las soluciones halladas se podrán escribir como:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}},\; y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}},$$

expresiones que se conocen como **Regla de Cramer**. Observemos que **nos vamos acercando al objetivo de** *despejar las incógnitas* '*dividiendo*' *por la matriz A*: Por lo menos ¡ya aparece su determinante en un denominador!

Para alcanzar nuestro propósito, volvamos a las expresiones originales para *x* e *y*, reorganizando un poco las ecuaciones:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}\left(ec - bf\right) = \frac{e}{|A|}c - \frac{b}{|A|}f$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}\left(af - cd\right) = -\frac{d}{|A|}c + \frac{a}{|A|}f$$

Y notamos que hemos obtenido un sistema, donde el lugar de las incógnitas lo ocupan ahora las cantidades *c* y *f*, y el de los términos independientes, las antiguas incógnitas *x* e *y*:

$$\begin{cases} x = \dfrac{e}{|A|}c - \dfrac{b}{|A|}f \\ y = -\dfrac{d}{|A|}c + \dfrac{a}{|A|}f \end{cases}$$

Lo escribimos en forma matricial como $X = \mathrm{M}\, B$, donde

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} \dfrac{e}{|A|} & -\dfrac{b}{|A|} \\ -\dfrac{d}{|A|} & \dfrac{a}{|A|} \end{bmatrix}$$

Y ya hemos **alcanzado nuestro objetivo**: Basta con que llamemos A^{-1} a la matriz M, con lo cual $X = A^{-1}B$, que es la manera correcta de interpretar la '*división*' $X = \dfrac{B}{A}$.

La matriz A^{-1} es la **inversa** de *A*. Su construcción nos dice cómo escribir un **algoritmo sencillo** para el cálculo de la inversa:

1. Dato inicial: La matriz *A*.
2. Calculamos el determinante de *A*. **Si es 0**, **no hay matriz inversa**.
3. Sea, pues, el determinante no nulo. Entonces damos los siguientes pasos:
    a) Cambiamos entre sí los elementos de la diagonal principal (este proceso se conoce como *trasponer* la matriz).
    b) Invertimos el signo de los dos elementos restantes.
    c) Dividimos todo por el determinante de *A*.

En fórmulas:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} e & b \\ d & a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} e & -b \\ -d & a \end{bmatrix} \to \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} e & -b \\ -d & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{e}{|A|} & \dfrac{-b}{|A|} \\ \dfrac{-d}{|A|} & \dfrac{a}{|A|} \end{bmatrix} = A^{-1}$$

Ejemplos.

1. **Hallar** la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Seguimos el algoritmo anterior: como el determinante es no nulo, pues vale -2, procedemos con los pasos siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \to \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} = A^{-1}$$

2. **Resolver** el sistema:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ 3x + 4y &= 6 \end{aligned}$$

Matricialmente, el sistema se escribe:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix},$$

o bien $AX = B$, de manera que $X = A^{-1}B$, esto es

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 9/2 \end{bmatrix}$$

Luego **la solución** será $(x, y) = (-4, \frac{9}{2})$.

Observaciones al caso 2×2.

1. Supongamos que $a = b = 0$, con lo cual el determinante de A se anula. Ahora la primera ecuación es $0x + 0y = c$. Si también es $c = 0$, nos podemos quedar sólo con la segunda ecuación, que tiene dos incógnitas. Despejando una de ellas (si su coeficiente es no nulo), obtenemos infinitas soluciones dependientes de la incógnita no despejada, que hace de parámetro. Si $c \neq 0$, entonces el sistema carece de soluciones, pues la primera ecuación sería $0 = c \neq 0$, lo cual es imposible.
2. Supongamos que $a = d = 0$. También en este caso el determinante se anula. Ahora nos quedan las dos ecuaciones, pero sólo con una incógnita, la segunda: $\begin{cases} by = c \\ ey = f \end{cases}$ Luego el sistema sólo puede tener solución si $y = \frac{c}{b} = \frac{f}{e}$, esto es, si las ecuaciones son proporcionales. En caso contrario, no existen soluciones. Los sistemas con más ecuaciones que incógnitas se llaman **sistemas sobredeterminados**.
3. Cuando $b = d = 0$ el sistema se convierte en dos ecuaciones independientes, una para cada incógnita: $\begin{cases} ax = c \\ ey = f \end{cases}$ Éste es el caso más simple, pues tiene solución única, que se halla resolviendo cada ecuación por separado. Esta clase de sistemas se llama **sistemas diagonales**, y uno de los objetivos básicos del Álgebra Lineal es tratar de transformar cualquier sistema $n \times n$ en otro diagonal: **No siempre es posible** hacerlo, aunque se pueden encontrar otras aproximaciones.
4. Supongamos ahora que $ae - bd = 0$, esto es, el determinante es 0 sin que lo sea ninguno de los elementos de la matriz. Podemos escribir la fórmula anterior también como $\frac{a}{d} = \frac{b}{e}$, que nos dice que el *determinante es nulo si las filas de A son proporcionales*. Ello significa que los primeros miembros del sistema son proporcionales, luego para que el sistema tenga soluciones los segundos miembros han de cumplir la misma proporcionalidad. Esto es, si $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$, el sistema tendrá soluciones (en número infinito), y si $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$, carece de ellas.

Resumamos las observaciones anteriores en forma de **alternativa**:

Teorema (versión 1): "*Si* $\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$, *tanto el sistema dado como el homogéneo* (*el que lleva* $c = f = 0$) *tienen solución única.* ***Alternativamente****, si* $\frac{a}{d} = \frac{b}{e}$, *entonces el sistema homogéneo tiene infinitas soluciones y el no homogéneo carece de solución*".

Más comentarios al caso 2×2.

1. Cuando la matriz 2×2 tiene determinante no nulo, se dice que su **característica**, o **rango**, es 2. Lo escribimos $\chi(A)=2$. En caso contrario, su característica es 1 ó 0. Vale 0 únicamente si todos los elementos de la matriz son nulos.
2. Se puede formar una matriz rectangular de 2 filas y 3 columnas añadiendo a la matriz *A* del sistema la columna de términos independientes. Esta nueva matriz *A** se llama **matriz ampliada** del sistema: $A=\begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} \to A^*=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$, y también se puede **extender a ella** el concepto de característica: La matriz ampliada es de característica 2 si se puede encontrar en ella alguna matriz 2×2 con determinante no nulo. Claramente, si $\chi(A)=2$, también es $\chi(A^*)=2$, pues *A* es parte de *A**. Pero puede ocurrir que $\chi(A^*)=2$ y que $\chi(A)<2$: Ello tiene lugar cuando $\frac{a}{d}=\frac{b}{e}\neq\frac{c}{f}$. Por tanto, reescribimos el teorema anterior en términos de las características de ambas matrices del sistema:

Teorema (versión 2): "*Si* $\chi(A)=2$ (*con lo cual automáticamente es* $\chi(A^*)=2$), *tanto el sistema dado como el homogéneo tienen solución única.* ***Alternativamente***, *si* $\chi(A)<2$ *y* $\chi(A)\leq\chi(A^*)$ *, entonces el sistema homogéneo tiene infinitas soluciones* (*caso de igualdad*) *y el no homogéneo carece de solución* (*cuando se cumple la desigualdad*)".

A diferencia del caso de una única ecuación con una incógnita, cuando existen infinitas soluciones en el caso 2×2, éstas pueden depender ahora de uno o dos parámetros. Dependerán de uno cuando el sistema se quede reducido a una ecuación con dos incógnitas, o sea $\chi(A)=\chi(A^*)=1$, y de dos, cuando $\chi(A)=\chi(A^*)=0$: En este caso, las dos ecuaciones son $0=0$, y las soluciones son todos los posibles pares de números (*x*,*y*). Esta observación da lugar a otra variante del teorema de alternativa:

Teorema (versión 3): "*Si* $\chi(A)=2$ (*con lo cual automáticamente es* $\chi(A^*)=2$), *tanto el sistema dado como el homogéneo tienen solución única. Alternativamente, si* $\chi(A)<2$ *y* $\chi(A)\leq\chi(A^*)$, *entonces el sistema homogéneo tiene infinitas soluciones* (*caso de igualdad*) ***que dependen de*** $2-\chi(A)$ ***parámetros***, *y el no homogéneo carece de solución* (*cuando se cumple la desigualdad*)".

Introducción al caso general $n\times n$.

La mayor dificultad que encontramos al pasar al caso $n\times n$ será establecer con claridad cuáles son las condiciones análogas a la $a\neq 0$ del caso 1×1 y la $ae-bd\neq 0$ del caso 2×2. Llevar a cabo un análisis directo, como los realizados hasta ahora, es muy complicado, y además aparece un problema suplementario, **muy relacionado con la Informática**: El **número de operaciones** necesario para el cálculo de determinantes cada vez más grandes **crece con gran rapidez**, y lo mismo ocurre con el cálculo de los elementos de la matriz inversa. Además, cuando los valores numéricos de los coeficientes son sólo aproximados, los errores se van acumulando en las sucesivas operaciones, llegando a producir soluciones muy alejadas de las verdaderas.

Por ello, vamos a **explotar un poco más la idea de característica**, para continuar con el estudio teórico.

Transformaciones de un sistema que conservan las soluciones.

Para comenzar, fijémonos en que un sistema puede modificarse sin que cambien sus soluciones. Veámoslo:

1. Podemos cambiar de lugar dos ecuaciones entre sí, sin que las soluciones se modifiquen. En efecto, dado el sistema $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$, al intercambiar el orden de las ecuaciones encontraremos $\begin{cases} dx+ey=f \\ ax+by=c \end{cases}$. Si tenemos una solución del primero, al sustituir los valores que sean en el segundo obtendremos las mismas identidades, esto es, tales valores también son soluciones del segundo sistema.
2. Se puede cambiar el orden de las incógnitas sin que ello afecte a las soluciones. Efectivamente, dado el sistema $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$, al intercambiar el orden de las incógnitas encontraremos el nuevo sistema $\begin{cases} ey+dx=f \\ by+ax=c \end{cases}$. El mismo argumento anterior nos prueba que las soluciones no cambiarán.
3. Si hay más de dos ecuaciones e incógnitas, las dos observaciones anteriores se pueden refundir en una: Las soluciones del sistema no cambian si se permutan varias ecuaciones entre sí, y lo mismo ocurre si se permutan varias incógnitas entre sí, o ambas cosas a la vez. **Esta propiedad se usa en los cálculos numéricos de manera sistemática**.
4. Por lo mismo, al multiplicar o dividir algunas ecuaciones por números cualesquiera no nulos, las soluciones también se conservan, y por último, combinando las ideas anteriores tendremos que:
5. Dado un sistema, se puede sustituir cualquier ecuación por una combinación de todas ellas, obtenida multiplicando cada una por un número y luego sumándolo todo, sin que se modifiquen las soluciones del sistema.

Las operaciones anteriores se llaman **transformaciones elementales** del sistema. En la práctica se llevan a cabo sólo sobre las matrices del sistema, *A* y *A**, donde se encuentra toda la información necesaria para estudiarlo y resolverlo. Lo que haremos ahora será calcular características mediante transformaciones elementales. Los sistemas obtenidos unos de otros por transformaciones elementales se denominan **sistemas equivalentes**.

El método de Gauß (Karl Friedrich Gauß, 1777-1855)

Este método consigue simultáneamente varios objetivos: Calcular las características de las matrices del sistema, decidir si tiene soluciones o no, resolverlo si tiene soluciones, e indicar de cuántos parámetros dependerá la solución, caso de que haya infinitas. La **esencia del procedimiento** consiste en escribir el sistema –mediante transformaciones elementales adecuadas- en otro equivalente tal que **cada ecuación tenga una incógnita menos que la anterior**.

Comenzamos ilustrándolo **heurísticamente** con el caso 3×3. Sea el sistema:

Esbozo de retrato de Gauß joven (imagen tomada de www.img.photobucket.com)

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ ex + fy + gz = h \\ ix + ky + lz = m \end{cases}$$

Multipliquemos la segunda ecuación por *e* y restémosle tras ello la primera multiplicada por *a*: **todo ello son tres transformaciones elementales**. El resultado es que la primera ecuación se conserva, pero en la segunda ha desaparecido la *x*. Repitamos el proceso con la tercera ecuación: 3ª por *a* menos 1ª por *i* hacen que desaparezca la *x* de la tercera ecuación, quedando así el sistema:

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ f^* y + g^* z = h^* \\ k^* y + l^* z = m^* \end{cases}$$

Dejemos la primera ecuación tal como está, pues sólo queda trabajar con un sistema 2×2. Repitamos el proceso en las dos últimas ecuaciones para eliminar la *y* de la tercera: 3ª por *f** menos 2ª por *k** nos dan como resultado un sistema donde la primera ecuación tiene tres incógnitas, la segunda dos y la tercera sólo una:

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ f*y+g*z=h* \\ \quad l^{**}z=m^{**} \end{cases}$$

Ahora resolvemos de manera **retrógrada**: Hallamos *z* en la tercera, sustituimos en la segunda, de donde obtenemos *y*, y finalmente saldrá la *x* de la primera ecuación tras introducir en ella los valores calculados antes para *y* y *z*.

Supongamos ahora que sólo trabajamos con las matrices, olvidándonos de las incógnitas, tal como funcionan los ordenadores. El proceso seguido es una serie de transformaciones elementales de la matriz ampliada *A**:

$$A^* = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & k & l & m \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & f* & g* & h* \\ 0 & k* & l* & m* \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & f* & g* & h* \\ 0 & 0 & l^{**} & m^{**} \end{bmatrix} = \hat{A}*,$$

en las que han ido apareciendo ceros en la esquina inferior izquierda de la matriz que corresponde a la matriz *A*, hasta que se ha transformado en esta otra, de un tipo que se llama *matriz triangular*[3] *superior*:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & f* & g* \\ 0 & 0 & l^{**} \end{bmatrix}$$

El determinante de $\hat{A}$ es $af*l^{**} \neq 0$ porque hemos supuesto que *a*, *f** y *l*** han resultado no nulos. Resumamos esto diciendo que la **característica** $\chi(\hat{A})$ **es** 3: **En general, diremos que una matriz cuadrada de orden *n* tiene característica *n* si su determinante es distinto de** 0. Por tanto, la característica $\chi(\hat{A}^*)$ de la matriz ampliada transformada es también 3, pues en ella encontramos la parte $\hat{A}$ que es de característica 3 (nótese que en $\hat{A}^*$ no puede haber matrices de cuadradas de orden mayor que 3). Este hecho nos permitió antes resolver el sistema por las sustituciones retrógradas, luego hemos obtenido el siguiente resultado:

Proposición: "*Si* $\chi(\hat{A}^*) = \chi(\hat{A}) = 3$, *entonces el sistema tiene solución única*"

Observemos ahora que la característica común 3 es igual al número de ceros que quedaron en la última fila, más uno: $\chi(\hat{A}) = 3 = \left[\text{nº de ceros (=2)}\right] + 1$. Si sólo hubieran quedado ceros en esa fila, sería $\chi(\hat{A}) < 3$, y el sistema ya no podría tener solución única: o infinitas, o ninguna.

Vemos, pues, que para el caso $n=3$ el método de Gauß da directamente la característica de la matriz $\hat{A}$, indicando además si el sistema tiene solución o no, y en caso afirmativo, cuántas. Nos dice también cómo hallar las soluciones por

[3] A veces se dice también matriz *diagonal* superior.

sustitución retrógrada, y todo ello con **sólo contar los ceros de la última fila de** $\hat{A}$. Presentemos, por tanto, una nueva versión del teorema de alternativa:

Teorema (versión 4): "*Si el número de ceros de la última fila de* $\hat{A}$ *es* 2, *o sea* $\chi(\hat{A}) = 3$ (*con lo cual automáticamente es* $\chi(\hat{A}^*) = 3$), *tanto el sistema dado como el homogéneo tienen solución única.* ***Alternativamente****, si el número de ceros es* 3, *esto es, si* $\chi(\hat{A}) < 3$ *y* $\chi(\hat{A}) \leq \chi(\hat{A}^*)$, *entonces el sistema homogéneo tiene infinitas soluciones* (*caso de igualdad*), ***que dependen de*** $3 - \chi(\hat{A})$ ***parámetros****, y el no homogéneo carece de solución* (*cuando se cumple la desigualdad*)".

Para el caso $n \times n$ se **intuye de inmediato** el siguiente resultado:

Teorema (versión 5): "*Si el número de ceros de la última fila de* $\hat{A}$ *es* $n-1$, *o sea* $\chi(\hat{A}) = n$ (*con lo cual automáticamente es* $\chi(\hat{A}^*) = n$), *tanto el sistema dado como el homogéneo tienen solución única.* ***Alternativamente****, si el número de ceros es n, esto es, si* $\chi(\hat{A}) < n$ *y* $\chi(\hat{A}) \leq \chi(\hat{A}^*)$, *entonces el sistema homogéneo tiene infinitas soluciones* (*caso de igualdad*), ***que dependen de*** $n - \chi(\hat{A})$ ***parámetros****, y el no homogéneo carece de solución* (*cuando se cumple la desigualdad*)".

La intuición que nos guió al último Teorema puede formalizarse con una demostración por inducción, que dejaremos como ejercicio (bastante pesado, por cierto): Basta con fijarse en el proceso de construcción del método de Gauß del caso 3×3.

Algorítmica del método de Gauß.

El método se puede describir fácilmente en forma algorítmica, para su traducción posterior en programas. Veamos los pasos del algoritmo para el caso de un sistema $n \times n$:

1. **DATOS:** La matriz ampliada A^*, de dimensiones $n \times (n+1)$.
2. **REORDENAR:** filas y columnas (las columnas, sólo en la parte *A*): *Tras este paso, se obtendrá una transformación* $A^* \to A_1^*$, *de manera que la* ***esquina inferior izquierda de*** A_1^* ***contenga la mayor cantidad posible de ceros consecutivos****.*
3. **CONTAR:** el **N**úmero de **C**eros **C**onsecutivos en la **Ú**ltima fila de A_1^*, NCCU (*notemos que es el número de columnas,* ***exceptuada la última****, cuyo último elemento sea un* 0).
4. **Si** $\text{NCCU} = n$, **FIN**: Ocurre que $\chi(\hat{A}) < n$, y el sistema tiene infinitas soluciones, o ninguna, según como sea el último elemento de la última fila de $\hat{A}^*$ (nulo o no).
5. **Si** $\text{NCCU} \leq n-1$, **CONTINUAR**: Las dos características son iguales á *n*, y el sistema tiene solución única.
6. **HACER:** Transformar á 0 todos los elementos de la primera columna de A_1^*, excepto el primero (con el mismo proceso que vimos en el caso 3×3). *Pasamos así a una nueva matriz*: $A_1^* \to A_2^*$.

7. **CAMBIAR:** NCCU por NCCU más el número de ceros consecutivos a los anteriores que hayan aparecido en la última fila de A_2*.
8. **Si** $\text{NCCU} = n-1$, **FIN**: Las dos características son iguales á *n*, y el sistema tiene solución única. **Si** $\text{NCCU} < n-1$, **CONTINUAR.**
9. **VOLVER:** al punto 1, cambiando *A** por A_2*.

En cualquier caso, **el algoritmo termina** con la obtención de la matriz $\hat{A}*$ y la aplicación del teorema de alternativa. Notemos que sólo hemos necesitado considerar el número NCCU.

Algunas observaciones.

a. El método para sistemas de dimensiones cualesquiera.

Consideremos un sistema general, con *n* ecuaciones y *m* incógnitas. El caso en que ambos números son iguales es el estudiado hace un momento.

Supongamos primero que $m > n$ (matriz *A* rectangular "apaisada"). En general, se cumplirá que $\text{NCCU} < m-1$, luego las características serán menores o iguales que el número de incógnitas: Ello significa que **en la última ecuación del sistema quedará más de una incógnita**. Pasando al segundo miembro las que haga falta, nos quedaremos con sólo una y el sistema tendrá infinitas soluciones, que dependerán de tantos parámetros como incógnitas hayamos pasado al segundo miembro.

Supongamos ahora que $n > m$ (matriz *A* rectangular "vertical"). **En este caso el sistema es sobredeterminado**. En general, se tendrá que $\text{NCCU} \geq m$, luego las características serán menores o iguales que el número de filas (de ecuaciones): ello significa que **sobrarán ecuaciones, algunas de ellas del tipo** $0 = c$, con lo cual el sistema no podrá tener soluciones. Si las ecuaciones sobrantes son del tipo $0 = 0$ (últimas filas todas nulas en la matriz *A**), entonces sí puede haber soluciones.

b. Representación matricial de transformaciones elementales.

Las transformaciones elementales sobre una matriz (lo que equivale a hacerlas en el sistema) se realizan multiplicándola de diversas formas por otras matrices adecuadas. Veamos unos ejemplos para ilustrarlo.

Supongamos que se quieren **intercambiar las columnas** de la matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Para ello, buscamos una matriz M_{col} tal que

$$A \times M_{\text{col}} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix} = \hat{A}_{\text{col}}.$$

Se encuentra fácilmente que $M_{\text{col}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Luego cambiar las columnas de *A* entre sí es equivalente a multiplicar *A* por la derecha (también: *post-multiplicar*) por M_{col}

Para **permutar las filas** entre sí, podemos usar la siguiente idea: Si cambiamos el orden del producto de dos matrices, los papeles de filas y columnas en ambas matrices se intercambian. Además, vemos que M_{col} es simétrica, luego:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} = \hat{A}_{\text{fil}}$$

O bien $M_{\text{col}} \times A = \hat{A}_{\text{fil}}$. Aquí hemos multiplicado por la izquierda (también: *pre-multiplicado*) por la matriz M_{col}.

c. Un ejemplo.

Consideremos el sistema: $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x - 4z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$

La matriz A* es: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Vamos a seguir el algoritmo de más arriba. Lo primero será llevar el 0 de la segunda fila a la primera posición de la tercera: Basta cambiar 2ª fila por 3ª y después 1ª columna por 2ª:

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} = A_1^*$$

Ahora tenemos $\text{NCCU} = 1 < 2$, luego continuamos. Eliminaremos el -1 de la segunda fila multiplicando ésta por 2 y sumándole la primera:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Ahora eliminamos el primer 2 de la tercera fila multiplicando la 2ª por 2 y restándosela a la 3ª multiplicada por 3:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \hat{A}^*$$

Vemos que ya tenemos que $\text{NCCU} = 2$, luego el proceso ha terminado. Hemos obtenido lo siguiente:

- La característica de *A* es 3, igual que la de *A**.

- Si volvemos a escribir el sistema transformado, incluyendo sus incógnitas, queda $\begin{cases} 2y + x + 3z = 1 \\ \quad 3x + 5z = 3 \\ \qquad 2z = 0 \end{cases}$ (nótese que **la** *x* **se intercambió con la** *y*).
- La solución es inmediata por sustitución retrógrada: $x = 1, y = 0, z = 0$.