



Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

Facultad de Ciencias de la Educación

Programa Oficial de Doctorado en Formación del Profesorado

**LA COMPETENCIA MATEMÁTICA A TRAVÉS DE LA
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN EDUCACIÓN SECUNDARIA**

Tesis doctoral presentada por

Pedro Jesús Medina Rodríguez

Director

Dr. Sergio Falcón Santana

Director

Dr. Ángel Plaza de la Hoz

Las Palmas de Gran Canaria

2017

A Carmen y a Julia por su apoyo y paciencia durante estos años, por saber escucharme y animarme cuando surgían las dudas.

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a los alumnos que han pasado por mis clases en estos años de profesor, ya que me hicieron darme cuenta de la importancia de realizar este trabajo. A los alumnos que han participado en esta investigación, ya que con su actitud han sido la motivación que necesitaba. A mis compañeros de profesión por sus ánimos continuados.

Quiero agradecerle a la Dra. M^a del Pino Quintana Montesdeoca por ponerme en contacto con los directores de esta tesis; sin su intervención probablemente este trabajo no se habría iniciado. A los directores de esta tesis, Dr. Sergio Falcón Santana y Dr. Ángel Plaza de la Hoz, por todo el tiempo que afectuosamente me han dedicado, por su guía, sabios consejos y ayuda inestimable; sin ellos este trabajo no habría llegado a su fin.

Índice General

Introducción	1
Contextualización del problema de investigación.....	2
Estructura del trabajo	23
Primera Parte.....	27
Capítulo 1. Marco Teórico	27
1.1. Las competencias.....	30
1.2. Competencia Matemática.....	36
1.2.1. La competencia matemática en el Sistema Educativo Español (LOMCE).....	42
1.2.2. La resolución de problemas en el currículo.....	46
1.3. La enseñanza de las matemáticas y la resolución de problemas	55
1.3.1. Aportación al concepto de problema.....	61
1.3.2. Estrategias para enfrentarse a un problema.....	62
1.3.3. PISA y la resolución de problemas	65
1.3.4. Contextos	71
1.3.5. Dificultades que presentan los alumnos en la resolución de problemas	75
1.4. La resolución de problemas como objeto de aprendizaje	79
1.5. Aprender resolviendo problemas	90
1.6. Contenidos.....	91
1.7. Aprendizaje cooperativo	93
1.8. La evaluación.....	94
1.9. Ayudas para la resolución de problemas	99
Segunda Parte.....	103
Capítulo 2. Marco Metodológico.....	103
2.1. Objetivos.....	103
2.1.1. Organización de los objetivos de la investigación.....	104
2.2. Tipo de investigación y diseño utilizado	106
2.3. Contexto y participantes.....	107
2.3.1. Tipos de agrupamientos.....	108
2.4. Procedimiento.....	108
2.4.1. Fases de la investigación.....	109
2.4.1.1. Fase I: Análisis de la comprensión de los enunciados de los problemas.....	109
2.4.1.2. Fase II: Guion para la fase de comprensión.....	112
2.4.1.3. Fase III: Propuestas para la resolución de problemas.....	113
2.4.1.4. Fase IV: Propuesta de aprendizaje de contenidos vía resolución de problemas.....	114

2.4.1.5.	Fase V: Trabajo con el cuadernillo	114
2.4.1.6.	Fase VI: Las representaciones que utilizan	127
2.4.1.7.	Fase VII: La elaboración de un plan	129
2.4.1.8.	Fase VIII: Valorar la explicación de los procedimientos	130
2.4.1.9.	Fase IX: Análisis de los libros de texto.....	130
2.4.1.10.	Fase X: Opinión de los alumnos sobre el trabajo realizado	130
2.5.	Los problemas escolares	133
Capítulo 3.	Propuesta didáctica de contenidos vía problemas.....	135
3.1.1.	Contenidos	138
3.1.1.1.	Progresiones Aritméticas.....	138
3.1.1.2.	Progresiones Geométricas.....	143
Capítulo 4.	Modelo propuesto para la resolución de problemas.....	145
4.1.	Fases en la resolución de problemas	146
4.1.1.	Análisis y comprensión del problema.....	148
4.1.1.1.	Guion para la fase de comprensión.....	152
4.1.2.	Elaboración de un plan	152
4.1.2.1.	Guion para la fase de elaboración de un plan.....	153
4.1.3.	Ejecución y revisión del procedimiento	154
4.1.3.1.	Guion para la fase de ejecución y revisión del procedimiento.....	155
4.1.4.	Verificación de los resultados	155
4.1.4.1.	Guion para la fase de verificación.....	156
Capítulo 5.	Resultados obtenidos con las distintas relaciones de problemas.....	157
5.1.	¿Comprenden los alumnos los enunciados de los problemas?.....	157
5.1.1.	Los cuestionarios.....	157
5.1.1.1.	Cuestionario C1	157
5.1.1.2.	Cuestionario C2	159
5.1.2.	Resultados de los cuestionarios.....	160
5.1.2.1.	Resultados con el cuestionario C1.....	162
5.1.2.2.	Resultados con el cuestionario C2.....	165
5.1.2.3.	Comparación de los dos cuestionarios.....	167
5.1.3.	Guion para la fase de comprensión.	168
5.1.3.1.	Cuestionario C3.	168
5.1.3.2.	Resultados con el cuestionario C3.....	171
5.1.4.	Comparación de los resultados sobre la comprensión de los enunciados.....	173
5.2.	Resultados del cuadernillo	174
5.2.1.	Cuadernillo de problemas	174
5.2.2.	Resultados de las fases de resolución de problemas.....	175
5.2.2.1.	Identifica las fases propuestas en clase	175

5.2.2.2.	Ha comprendido el problema.....	177
5.2.2.3.	Ha ejecutado algún plan.....	179
5.2.2.4.	Aplica diferentes procedimientos	181
5.2.2.5.	Resuelve el problema.....	183
5.2.2.6.	Comprueba el resultado.....	185
5.2.2.7.	Verifica los resultados con el enunciado del problema.....	187
5.2.3.	Correlaciones entre las fases.....	189
5.2.4.	Resultados de cada grupo en las categorías	191
5.2.5.	Resultados de los problemas.....	193
5.2.6.	Procedimientos utilizados en los problemas	194
5.3.	Las representaciones que utilizan.....	195
5.3.1.	Cuestionario C4.....	195
5.3.2.	Resultados del cuestionario C4	197
5.3.3.	Cuestionario C5.....	201
5.3.4.	Resultados cuestionario C5.....	202
5.3.5.	Comparación entre ambos cuestionarios	206
5.4.	La elaboración de un plan	207
5.5.	Resultados sobre la comprensión	209
5.6.	La comunicación de los procedimientos	210
Capítulo 6.	La resolución de problemas en libros de texto	213
6.1.	Resultados de los libros revisados	216
6.1.1.	Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de la editorial SM	216
6.1.2.	Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de la editorial Santillana	224
Capítulo 7.	Opinión de los alumnos sobre la propuesta	233
7.1.	Resultados de las diferentes preguntas de la encuesta.....	233
7.2.	Comparativa de algunas preguntas	242
7.3.	Resultados según el género.....	244
Capítulo 8.	Conclusiones y propuestas	245
8.1.	Propuestas.....	254
Referencias Bibliográficas.....		257
Anexos		273
Anexo I: Breve recorrido histórico del tratamiento de la resolución de problemas en el sistema educativo español		273
Anexo II: La contribución de la resolución de problemas a las competencias clave		283
Anexo III: Rúbrica de evaluación de los problemas del cuadernillo		287
Anexo IV: Rúbrica para la evaluación de las representaciones utilizadas		288

Anexo V: Rúbrica para evaluar la explicación de los procedimientos.....	289
Anexo VI: Rúbrica de evaluación del trabajo en grupo	290
Anexo VII: Encuesta sobre la opinión de los alumnos.....	291
Anexo VIII: Artículos publicados.	292
Anexo IX: Artículos enviados	292

Índice de tablas

Tabla 1: Fases o etapas en la resolución de un problema según diferentes autores.....	89
Tabla 2: Objetivos y fases de investigación.....	131
Tabla 3: Resumen de las fases de la investigación	132
Tabla 4: Altura de las especies (P. Geométricas)	144
Tabla 5: Interpretación de los índices de dificultad	161
Tabla 6: Índice de dificultad del cuestionario C1	161
Tabla 7: Índice de dificultad del cuestionario C2	161
Tabla 8: Calificaciones del cuestionario C1	163
Tabla 9: Calificaciones del cuestionario C2	165
Tabla 10: Índice de dificultad del cuestionario C3	171
Tabla 11: Calificaciones del cuestionario C3	172
Tabla 12: Comparación de los resultados de los trabajo de comprensión	173
Tabla 13: Resultados de identifica las fases propuestas	176
Tabla 14: Resultados de ha comprendido el problema	178
Tabla 15: Resultados de ha ejecutado algún plan	180
Tabla 16: Resultados de aplica diferentes procedimientos	182
Tabla 17: Resultados de resuelve el problema.....	184
Tabla 18: Resultados de comprueba el resultado.....	185
Tabla 19: Resultados de verifica los resultados.....	188
Tabla 20: Resultados de cada grupo en las distintas categorías.....	191

Tabla 21: Calificación total de cada grupo	192
Tabla 22: Resultados de los estadísticos de los problemas.....	193
Tabla 23: Procedimientos realizados por los alumnos.....	194
Tabla 24: Resultados de los problemas del cuestionario C4.....	198
Tabla 25: Tipo de representación en cada problema del cuestionario C4	200
Tabla 26: Resultados cuestionario C5.....	203
Tabla 27: Tipo de representaciones en cada problema del cuestionario C5	205
Tabla 28: Comparación de los cuestionarios C4 y C5	206
Tabla 29: Tipos de representación entre C4 y C5.....	207
Tabla 30: Resultados de los problemas sobre la elaboración de un plan.....	208
Tabla 31: Resumen libro ed. SM (Actividades clave y autoevaluación).....	217
Tabla 32: Resumen de los valores de los indicadores del libro de la Ed. SM	219
Tabla 33: Estímulos en los problemas de la Ed. SM	220
Tabla 34: Resumen de las actividades "Debes saber hacer" Ed. Santillana	225
Tabla 35: Resumen de los valores de los indicadores del libro de la Ed. Santillana	226
Tabla 36: Estímulos en los problemas. Ed. Santillana.....	227
Tabla 37: Comparación de los indicadores entre ambas editoriales	231
Tabla 38: Valoración sobre la capacidad de resolución de problemas	243
Tabla 39: Evolución del gusto por la resolución de problemas	243
Tabla 40: Preguntas con diferencias por género	244
Tabla 41: Tratamiento de la RP en los últimos sistemas educativos	281

Índice de Figuras

Figura 1: Matematización según PISA	70
Figura 2: Problema 1 del cuadernillo.....	121
Figura 3: Reparto de regalos	138
Figura 4: Propuesta de fases de resolución de un problema	148
Figura 5: Calificaciones respecto al sexo de los alumnos (C1)	164
Figura 6: Calificaciones respecto al género de los alumnos (C2).....	166
Figura 7: Calificaciones respecto al género de los alumnos (C3).....	173
Figura 8: Identifica las fases propuesta en clase.....	177
Figura 9: Ha comprendido el problema	179
Figura 10: Ha ejecutado algún plan	181
Figura 11: Aplica diferentes procedimientos.....	183
Figura 12: Resuelve el problema	185
Figura 13: Comprueba el resultado.....	187
Figura 14: Verifica los resultados	189
Figura 15: Procedimientos realizados.....	195
Figura 16: Totales de los problemas cuestionario C4.....	199
Figura 17: Tipos de representaciones utilizadas por los alumnos.....	201
Figura 18: Totales de los problemas cuestionario C5	204
Figura 19: Tipos de representaciones del cuestionario C5	206

Figura 20: Totales de elaboración de un plan	209
Figura 21: Comunicación de los procedimientos.....	211
Figura 22: Primera pregunta de la encuesta	233
Figura 23: Segunda pregunta de la encuesta.....	234
Figura 24: Tercera pregunta de la encuesta	235
Figura 25: Cuarta pregunta de la encuesta.....	235
Figura 26: Quinta pregunta de la encuesta.....	236
Figura 27: Sexta pregunta de la encuesta.....	237
Figura 28: Séptima pregunta de la encuesta	237
Figura 29: Octava pregunta de la encuesta	238
Figura 30: Novena pregunta de la encuesta	239
Figura 31: Décima pregunta de la encuesta	239
Figura 32: Undécima pregunta de la encuesta	240
Figura 33: Duodécima pregunta de la encuesta	241
Figura 34: Decimotercera pregunta de la encuesta	241
Figura 35: Decimocuarta pregunta de la encuesta	242

Introducción

La aparición de las competencias como elemento curricular en las últimas reformas de los sistemas educativos en España ha motivado que en las aulas de secundaria los profesores deban replantearse sus métodos de enseñanza. A partir de ese momento se le pide al profesorado que lo que debe enseñar a sus alumnos¹ va más allá de los contenidos propios de su área, y se pasa a un enfoque competencial de la enseñanza. Esta nueva situación generó en la mayor parte del profesorado la sensación de falta de preparación y de recursos para realizar esta labor. A este problema hay que añadir las dificultades que suelen presentar los alumnos en el área de matemáticas. Por lo tanto, el problema que queremos abordar es la dificultad para integrar la competencia matemática en los procesos de enseñanza y aprendizaje en un aula de secundaria.

La investigación que se presenta en este trabajo se concibió por la necesidad de buscar caminos que facilitasen a los alumnos adquirir la competencia matemática y además, intentar ayudar al profesorado en este proceso proporcionándole algunas herramientas que consideramos que puedan resultar de utilidad. Pero intentar resolver este problema implica clarificar previamente una serie de cuestiones muy importantes para el profesorado. Por ejemplo, los conceptos relacionados con las competencias en general y con la competencia matemática en particular, identificar la presencia de la competencia matemática en el desarrollo curricular del sistema educativo, reflexionar sobre qué metodologías podemos implementar en el aula que pueden favorecer esta adquisición, además de hacer una revisión sobre aspectos relacionados con la evaluación.

En todo momento esta investigación se ha orientado hacia una propuesta realista de trabajo en el aula, es decir, que sea comprensible y de fácil aplicación para el profesorado. La propuesta debe permitirnos alcanzar nuestro objetivo, y además, lo que nos parece más importante es que sea compatible con la impartición del currículo oficial. En todo momento hemos considerado realizar un trabajo que permita al profesorado de matemáticas cubrir sus necesidades de aquellos aspectos teóricos y prácticos que pueda llevar al aula.

¹ Se hará uso del término “alumnos” como genérico.

Contextualización del problema de investigación

Las dificultades que solemos tener los profesores para que los alumnos aprendan matemáticas nos obligan a buscar estrategias didácticas de enseñanza que faciliten la adquisición de los conocimientos por parte de los alumnos, y éste es el objetivo principal de este trabajo: buscar qué estrategias pueden facilitar esta labor. Por lo tanto la intencionalidad de esta trabajo ha sido, apoyándonos por un lado en nuestra experiencia de años de docencia y por otro, en una revisión de numerosos trabajos de investigación, en no quedarnos parados, sino intentar avanzar en posibles soluciones que favorezcan el aprendizaje de las matemáticas.

En las últimas décadas las reformas educativas han ido derivando hacia una preponderancia de la resolución de problemas en los programas educativos de matemáticas, estas reformas han estado apoyadas en investigaciones en educación matemática, tanto a nivel nacional como internacional. Aunque como indica Puig (2008) “la investigación en didáctica de las matemáticas y el desarrollo curricular han sido siempre en España campos separados que han obedecido a lógicas distintas, y que sólo se han conectado en momentos muy especiales” (p.2). Aunque como veremos más adelante las últimas leyes educativas pueden ser uno de esos puntos de conexión debido principalmente a la publicación de informes internacionales que, como las mismas reformas reconocen, han tenido una influencia importante en los cambios en el sistema educativo.

Numerosas líneas de investigación han situado a la resolución de problemas en un papel muy importante en el modo de hacer matemáticas, con un protagonismo especial en el desarrollo del pensamiento matemático. Relacionando la tarea de resolver problemas con la actividad matemática en sí, además, se entiende que en estos procesos de resolución de problemas los alumnos tienen la oportunidad de formular hipótesis, proponer conjeturas, desarrollar estrategias de solución, fomentando la creatividad, potenciando la comunicación, la abstracción, la generalización, etc. La resolución de problemas es una de las habilidades a desarrollar durante la enseñanza obligatoria, junto con las habilidades metacognitivas, las habilidades de razonamiento y las estrategias de aprendizaje (Limón y

Carretero, 1995) y esa debe ser la intención educativa de las actividades que se programen en el aula por el profesorado.

Por éstos y otros motivos se llega a plantear la resolución de problemas como el eje vertebrador del currículo de matemáticas, con un peso fundamental en el desarrollo de los contenidos en el aula y con la intención de que los alumnos desarrollen la capacidad de identificar la funcionalidad de las matemáticas. Por lo tanto, es importante reflexionar sobre lo que aprenden los alumnos cuando resuelven problemas en la escuela. En esta línea Rico (2012) señala que:

Los procesos de modelización y de resolución de problemas están en el núcleo de la actividad matemática y los avances recientes en educación matemática quieren reforzar su presencia en el currículo, de manera que el aprendizaje matemático de los escolares tenga en el dominio de los correspondientes procesos una de sus referencias clave. (p.5)

Su presencia en el currículo favorece que los alumnos capten la importancia de resolver problemas como parte fundamental del modo de hacer matemáticas. Por lo que es importante que la resolución de problemas en el currículo de las matemáticas escolares se traslade al trabajo en el aula que desarrollan los profesores. Entendemos que se debe programar la asignatura durante toda la secundaria de una forma coherente, y esta programación permita incluir un ambiente de resolución de problemas en el aula que vaya más allá de la simple ejercitación de los contenidos.

En la enseñanza de las matemáticas un aspecto a tener en cuenta es la aparición de las competencias básicas en la anterior ley educativa, Ley Orgánica de Educación (LOE 2/2006, de 3 de mayo, de ahora en adelante, LOE). Aunque este hecho no se puede considerar como un fenómeno aislado en nuestro país, sino que hay que entenderlo dentro de un contexto internacional, citemos por ejemplo, el proyecto KOM del Ministerio de Educación de Dinamarca (Niss, 2003), diferentes resoluciones y recomendaciones del Parlamento Europeo y el Consejo de la Unión Europea, el Proyecto DeSeCo de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) (OCDE, 2005).

En la LOE se propusieron ocho competencias básicas que los alumnos debían haber adquirido al finalizar la escolaridad obligatoria:

- Competencia en comunicación lingüística.
- Competencia matemática.
- Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico.
- Tratamiento de la información y competencia digital.
- Competencia social y ciudadana.
- Competencia cultural y artística.
- Competencia para aprender a aprender.
- Autonomía e iniciativa personal.

Con la influencia de los informes de la UNESCO, aprender a ser (Faure, 1972) y la educación encierra un tesoro (Delors, 1996), uno de los aspectos que la LOE proponía fomentar era el aprendizaje a lo largo de toda la vida, y ello implica proporcionar a los jóvenes una educación completa, que abarque los conocimientos y las competencias básicas que resultan necesarias en la sociedad actual, que les permita desarrollar los valores que sustentan la práctica de la ciudadanía democrática, la vida en común y la cohesión social, y que estimule el deseo de seguir aprendiendo y la capacidad de aprender por sí mismos.

Entre las competencias propuestas por la LOE destaca la competencia matemática con sus diferentes dimensiones. Como iremos viendo con una fuerte influencia de la resolución de problemas en el ámbito escolar. En el anexo del Real Decreto (Real Decreto 1631/2006) de la LOE donde se describen las competencias básicas encontramos lo siguiente sobre la competencia matemática:

El desarrollo de la competencia matemática al final de la educación obligatoria, conlleva utilizar espontáneamente -en los ámbitos personal y social- los elementos y razonamientos matemáticos para interpretar y producir información, para resolver problemas provenientes de situaciones cotidianas y para tomar decisiones. (p.4)

En el contexto de la competencia matemática se entiende que resolver problemas es una actividad fundamental en la formación de los futuros ciudadanos y por lo tanto, la capacidad de los ciudadanos de enfrentarse a problemas y resolverlos en su vida diaria es uno de los objetivos más importantes y prioritarios del sistema educativo.

A partir del momento de la publicación de la ley, encontramos que a los objetivos, contenidos y criterios de evaluación, que encontrábamos en leyes educativas anteriores, se incorporan las competencias básicas como nuevo elemento curricular, y este es un aspecto muy importante. Esta introducción de las competencias generaron cambios en la forma de enseñar de los profesores con el objeto de favorecer la adquisición de las competencias básicas. Pero estos cambios afectaron especialmente en la identificación y búsqueda de la forma de evaluar aquellos contenidos considerados imprescindibles para la vida del alumno como futuro ciudadano.

Como consecuencia de estos cambios podríamos decir que se produjo en la escuela una llamada hacia una renovación metodológica, que continua en la actualidad, que intenta alejarse del modo tradicional de enseñar que se identifica como incompatible con la enseñanza de las competencias. No es nuestra intención en este trabajo valorar el efecto que ha tenido este intento de renovación en nuestra escuela, pero la introducción de las competencias como cambio curricular obliga al profesorado a situarse ante este nuevo elemento y ser capaz de comprenderlo e interpretarlo para poder integrarlo en el aula en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Respecto a este aspecto metodológico sobre la competencia matemática en el decreto que desarrolla el currículo de secundaria en la LOE (Real Decreto 1631/2006) podemos leer:

Conviene señalar que no todas las formas de enseñar matemáticas contribuyen por igual a la adquisición de la competencia matemática: el énfasis en la funcionalidad de los aprendizajes, su utilidad para comprender el mundo que nos rodea o la misma selección de estrategias para la resolución de un problema, determinan la posibilidad real de aplicar las matemáticas a diferentes campos de conocimiento o a distintas situaciones de la vida cotidiana. (p.751)

El currículo establece una relación directa entre la metodología a seguir en el aula y la adquisición de la competencia matemática por parte de los alumnos e insistiendo especialmente en la funcionalidad de los aprendizajes y la resolución de problemas como aspecto fundamental de la competencia. Es importante identificar qué metodologías favorecerán la adquisición de la competencia ya que continuar con el modo tradicional no tendrá el efecto deseado. Como indica Gago (2011) la aparición de la competencia matemática genera:

- La necesidad de repensar el aprendizaje de las matemáticas.
- Considerar su valor como instrumento para convivir y comprender el mundo.
- La intención de aplicarlas a lo cotidiano, a lo que utilizamos todos los días. (p.106)

En la actualidad, el sistema educativo español se desarrolla a partir de la Ley Orgánica de Mejora de la Calidad Educativa (Ley 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa, de ahora en adelante, LOMCE) y “se basa en la potenciación del aprendizaje por competencias, integradas en los elementos curriculares para propiciar una renovación en la práctica docente y en el proceso de enseñanza y aprendizaje” (p.170). Por lo tanto, los profesores deben de ser capaces de integrar las competencias en el proceso de enseñanza y aprendizaje y valorar la adquisición de las mismas por parte de los alumnos, inevitablemente esta integración debe suponer un cambio en la metodología docente. Nos encontramos ante una nueva ley que sigue dando continuidad a la LOE y mantiene el currículo por competencias siguiendo las recomendaciones de la Unión Europea. Además, insiste en la renovación metodológica de los procesos de enseñanza y aprendizaje, renovación que implica un esfuerzo de preparación por parte del docente.

En la LOMCE se produce un cambio en la denominación de competencias básicas propuestas por la LOE por la de competencias clave definidas por la Unión Europea. En la LOMCE, la competencia matemática, a diferencia de lo que ocurría en la LOE, pasa a estar integrada en una competencia más general en ciencias, reduciendo este cambio el número de competencias a siete.

Otro elemento que hay que considerar en este cambio hacia un enfoque competencial de la enseñanza y que ha influido considerablemente, son las evaluaciones de las competencias

por parte de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), y con las posteriores publicaciones de los informes PISA (Programme for International Student Assessment²), donde los resultados de los alumnos españoles no fueron favorables quedando por debajo de la media de la OCDE y de muchos países europeos. Tal y como se indica en el decreto que desarrolla la LOMCE “el Informe PISA 2009 arroja unos resultados para España que ponen de relieve el nivel insuficiente obtenido en comprensión lectora, competencia matemática y competencia científica, muy alejado del promedio de los países de la OCDE” (Ley 8/2013, p.97861). Aunque posteriormente, en el informe del 2015 (OCDE, 2015), España obtiene en ciencias la misma puntuación que la media de los países de la OCDE, y en lectura tres puntos superior, en cambio en matemáticas logra una puntuación cuatro puntos inferior a la media de la OCDE.

Las matemáticas se evaluaron en PISA 2000, 2003, 2006, 2009, 2012 y 2015, pero sólo en 2003 y 2012 fueron la principal área de atención. Señalar que en 2015 se realizó una evaluación de la resolución de problemas resueltos a través de una metodología colaborativa.

Cuando hablamos de las pruebas PISA hay dos aspectos que hay que tener en cuenta. En primer lugar, la influencia que los informes PISA han podido tener en las leyes educativas de los países evaluados con un objetivo claro de mejorar sus resultados en ediciones posteriores (Fernández-González, 2015). Introduciendo cambios en los sistemas educativos, como por ejemplo, el enfoque por competencias en los currículos de la enseñanza obligatoria, la potenciación de la utilización de pruebas de evaluación similares a las pruebas PISA, o también introduciendo evaluaciones externas en los centros en diferentes momentos de la escolarización de los alumnos. En el caso de nuestro país vamos a encontrar en la normativa numerosas referencias a estos aspectos citados que argumentan las modificaciones respecto al sistema educativo anterior introducidas en la LOMCE (Ley 8/2013):

Los estudios internacionales ponen de manifiesto que los países que han mejorado de forma relativamente rápida la calidad de sus sistemas educativos han implantado

² Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos

medidas relacionadas con la simplificación del currículo y el refuerzo de los conocimientos instrumentales, la flexibilización de las trayectorias de forma que los estudiantes puedan elegir las más adecuadas a sus capacidades y aspiraciones, el desarrollo de sistemas de evaluación externa...(p.97862)

Veinte países de la OCDE realizan a sus alumnos y alumnas pruebas de esta naturaleza y las evidencias indican que su implantación tiene un impacto de al menos dieciséis puntos de mejora de acuerdo con los criterios de PISA. (p.97863)

Las pruebas serán homologables a las que se realizan en el ámbito internacional y, en especial, a las de la OCDE y se centran en el nivel de adquisición de las competencias. (p.97863)

El segundo aspecto que queremos tener en cuenta, aparte de la influencia en el desarrollo normativo, es que en las pruebas PISA las preguntas que evalúan la competencia matemática principalmente se presentan agrupadas en torno a un texto y/o imagen que sirve de estímulo, por lo que son preguntas con un contenido matemático sobre situaciones problemáticas contextualizadas, y que por lo tanto van más allá de los meros ejercicios de cálculo que habitualmente ocupan el mayor porcentaje de tiempo de dedicación en nuestras aulas de matemáticas.

Estos aspectos mencionados, las competencias como contenido curricular, los informes internacionales y nacionales de evaluación y la valoración en aumento desde la investigación en educación de la resolución de problemas, ha reforzado en los centros la necesidad de insistir en la resolución de problemas como objeto de aprendizaje. Entre el profesorado va calando la idea de que la resolución de problemas es un aspecto fundamental, aunque no el único, que los alumnos deben aprender para la sociedad del futuro. Aunque bien es cierto que en este campo de estudio tal y como señala Gasco (2013) no siempre se ha conseguido llegar a un consenso de cómo se debe enfocar el aprendizaje generándose dudas entre el profesorado de cuál es el enfoque más adecuado.

Aunque la resolución de problemas ha sido fuente de investigación desde diferentes campos (filosófico, psicológico, matemático, educativo) que justifican su importancia en el currículo escolar, creemos que está claro que en la sociedad tecnológica actual con

aspectos educativos no formales como la televisión, internet y sus redes sociales, etc., los niños se enfrentan cada día a situaciones que adquieren la forma de problemas y que ellos deben ser capaces de comprender y aprender de ellas. Por esta razón se pide a los alumnos que sean capaces de movilizar una diversidad de recursos para resolver estas situaciones problemáticas; es decir, deben ser competentes en la resolución de problemas tanto actuales como problemas futuros aún desconocidos. Para conseguirlo, es importante introducir en las clases actuales metodologías de enseñanza y aprendizaje basadas en la resolución de problemas.

En el actual sistema educativo español (LOMCE), el Real Decreto 1105/2014 establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato (Real Decreto 1105/2014). En dicho Real Decreto se define la competencia matemática como “la habilidad para desarrollar y aplicar el razonamiento matemático con el fin de resolver problemas diversos en situaciones cotidianas” (p.170). En la definición encontramos una referencia concreta al desarrollo y aplicación del razonamiento matemático y con un objetivo muy claro: que los alumnos sepan resolver problemas, y que éstos se deben situar en la vida cotidiana del alumno. Los alumnos deben aprender matemáticas para utilizar los contenidos aprendidos durante su escolaridad en el momento oportuno, en aquella situación de su vida, ya sea personal o laboral, en el que los necesiten. Es decir, utilizar conocimientos adquiridos en otros contextos, en este caso académico, para realizar actividades o solucionar situaciones en otro contexto más real. La enseñanza de las matemáticas en la escuela debe fomentar el desarrollo del razonamiento matemático para una utilización funcional del mismo, por lo que la labor del docente debe orientarse hacia ese fin. Según Solar, García, Rojas y Coronado (2014) “el profesor debe acompañar al estudiante para que su actividad matemática de aprendizaje movilice sus competencias y para que sea competente con las matemáticas, no solo como estudiante, sino especialmente, como ciudadano en un contexto sociocultural específico” (p.41). Si la escuela debe formar ciudadanos competentes hay que enseñar a los alumnos que las matemáticas se encuentran en el mundo que nos rodea.

En el Real Decreto de enseñanzas mínimas también se indica que la resolución de problemas se debe entender como uno de los ejes fundamentales en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. También establece una relación necesaria

entre el aprendizaje de las matemáticas y la competencia en comunicación lingüística. Ya que se entiende la necesidad de que los alumnos tengan adquirida la competencia lingüística en un grado suficiente que les facilite la capacidad de leer de forma comprensiva los enunciados de los problemas a los que se enfrenten, imprescindible para poderse hacer una representación del problema, además de este análisis del enunciado deben ser capaces de establecer un plan de acción que llevar a cabo, deben poder comunicar los resultados obtenidos, expresar sus ideas, argumentar sus decisiones, favoreciendo en todo momento del proceso la reflexión, el diálogo y la comunicación matemática.

Respecto a la competencia lingüística es habitual escuchar a los profesores argumentar el fracaso de sus alumnos en la tarea de resolver problemas, y la justificación suele ser por el hecho de que no comprenden lo que leen, resumiendo el problema: “es que no saben leer”, sin valorar, en la mayoría de las ocasiones, que éste es un aspecto que debemos trabajar también desde el área al tener especificidades propias de las matemáticas. Muchas veces con estrategias tan sencillas de aplicar en el aula como han propuesto diferentes autores (Fetrow, 2009; Monroe y Panchyshyn, 2005), por ejemplo, dedicar tiempo a explicar previamente el vocabulario matemático básico, o que los alumnos se acostumbren a leer en voz alta los enunciados de los problemas. También es importante añadir que la escritura de las ideas y de los procesos de resolución dan buenos resultados en la solución de los problemas (Urquhart, 2009) y por lo tanto, se contribuye a mejorar los procesos comunicativos. Los profesores deben fomentar la utilización, siempre que sea posible, del lenguaje matemático, la verbalización por parte del profesor y del alumno de todos los procesos implicados en la resolución de un problema pueden y deben ser estrategias muy útiles también. Hay autores como Serrado y Cardeñoso (2002) que indican que el proceso de verbalización en los alumnos favorece la capacidad de aprender a resolver problemas. Además, los protocolos de pensamiento en voz alta se aceptan generalmente como un medio adecuado para evaluar los procesos mentales de un individuo cuando realiza una determinada tarea (Pugalee, 2004).

En las primeras etapas del aprendizaje de resolución de problemas, relacionar la traslación del lenguaje del día a día a lenguaje matemático (Martínez y Sánchez, 2013), además de la expresión escrita de los procesos realizados, de los razonamientos seguidos o la

argumentación de las soluciones, ya que ayudan a formalizar el pensamiento. Estos procesos se deben convertir en un hábito en los alumnos cada vez que se enfrentan a una situación problemática, y para que esto ocurra los profesores deben pedir a los alumnos que lo hagan y darle la importancia debida evaluando la situación de partida y los progresos que vayan alcanzando.

Una referencia obligada, por su trascendencia en educación matemática y en los estudios de investigación en resolución de problemas, fue la publicación en el año 2000 por parte del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) de su propuesta de Principios y Estándares para la educación matemática en EE.UU. Aunque previamente en 1980 el NCTM (NCTM, 1980), y posteriormente el informe Cockcroft (Millas, Fraguas y Forges, 2002) en el Reino Unido habían llamado a centrar la educación matemática en la resolución de problemas. En el documento sobre Principios y Estándares publicado por el NCTM propone los siguientes estándares de proceso: Resolución de Problemas, Razonamiento y Demostración, Comunicación, Conexiones y Representación. Presenta los estándares como modos destacados de adquirir y usar el conocimiento e incluye la resolución de problemas como uno de ellos y además propone que esta habilidad debe ser enseñada por los profesores en la escuela (Marín y Lupiáñez, 2005).

En Educación Secundaria Obligatoria (ESO) los profesores de matemáticas solemos partir de la base de que los alumnos tienen desarrollada la habilidad de resolver problemas, puesto que sabemos que se han trabajado desde la educación primaria y por lo tanto deben haber aprendido las estrategias necesarias para abordarlos. Pero por nuestra experiencia, y especialmente por los resultados que se obtienen en esta tarea, sabemos que esto no es como pensábamos. Los alumnos suelen llegar a las aulas de secundaria con la estrategia de dividir la resolución del problema en tres apartados: por un lado en el apartado “datos” extraen los datos que vienen en el enunciado de forma explícita pero habitualmente pasando por alto aquéllos que hay que deducir; en el apartado “procedimientos” escriben los procedimientos realizados; por último, en el apartado “resultados”, los que han obtenido. Muchas veces no realizan ningún tipo de comprobación, y cuando lo hacen suele ser una comprobación de los procedimientos y no de la validez de los resultados en el contexto del problema. Nuestra experiencia es que la mayoría de las veces simplemente escriben estos apartados. Aunque no dudamos que puede ser un camino, está claro que

resulta insuficiente. Por lo tanto, desde un punto de vista conductual, creemos que la repetición frecuente de lo que se intenta enseñar se llega a automatizar; es decir, enseñamos a los alumnos a escribir estos apartados, pero no logramos, en la mayoría de las ocasiones, a que aprendan a identificar esos datos, especialmente aquéllos que no aparecen de un forma explícita en el enunciado, establecer un plan de actuación que les lleve a seleccionar el procedimiento adecuado, o verificar los resultados más allá de la mera comprobación de los mismos. La experiencia nos demuestra que realmente los alumnos, incluso los de mayor nivel académico, tienen serias dificultades a la hora de enfrentarse a los problemas. Estamos de acuerdo con Fernández-Bravo, Castillo y Barbarán (2010) cuando dicen que frente a la resolución de problemas los alumnos actúan con:

una incorrecta aplicación de los conocimientos a las situaciones problemáticas y una elección de estrategias procesales en las que, generalmente, interviene el azar y no el razonamiento; la impetuosa necesidad de llegar a un resultado es lo que más le importa al alumno. (p.222)

Es habitual encontrarnos en el aula resolviendo un problema escuchando respuestas irreflexivas sin ningún tipo de argumentación y que suelen acabar con el abandono de la tarea por parte de los alumnos ya que deben reflexionar mucho más de lo que tienen por costumbre ante un problema.

En esta línea hay autores que hacen referencia al aprendizaje memorístico como técnica de resolución de problemas (Hidalgo, Maroto, Ortega y Palacios, 2013). Cuando los alumnos resuelven problemas después de un procedimiento matemático concreto que acaban de aprender suelen intentar asociar el procedimiento con el enunciado y memorizar los pasos a realizar. Realizar muchos problemas rutinarios en clase no es garantía de aprendizaje, aunque no dudamos que sea necesario ya que facilita el hecho de que el alumno recuerde un problema similar ya resuelto cuando se enfrente a un nuevo problema. Es un ejemplo, una vez más, de la diferencia que existe entre el currículo impartido por los profesores en la práctica docente y el currículo realmente alcanzado por los alumnos. Tal y como indican Blanco y Blanco (2009) “la comunidad educativa es consciente del desajuste que existe entre la Matemática que enseñamos en la escuela y el uso que los alumnos hacen de lo aprendido”(p.82).

Como hemos dicho anteriormente, otro aspecto que es importante considerar es el papel que juegan habitualmente los problemas en el aula. Normalmente, se proponen después de la explicación de algún contenido y como ejercitación de los mismos, y mayoritariamente al final de la unidad didáctica como repaso de los contenidos trabajados durante la misma. Esta forma más bien mecánica de trabajar los problemas se convierte en algo que los alumnos acaban asumiendo como rutinario en su trabajo en el área de matemáticas (Sánchez y Fernández, 2003), los alumnos entienden los problemas como un ejercicio de demostración de lo que han aprendido y por lo tanto, lo que deben aplicar es lo último que han estudiado. Aun pudiendo aceptar este papel de la resolución de problemas en el aula, especialmente cuando los libros de texto tienen este planteamiento, e incluso el currículo actual lo mantiene, creemos que es posible ir un poco más allá. Entendemos que es difícil cambiar esta rutina entre el profesorado, más habituado en enfatizar la enseñanza de procedimientos, especialmente procedimientos de cálculo. Creemos en la utilidad de elaborar pautas guiadas de enseñanza de estrategias de resolución de problemas que puedan favorecer su aprendizaje. Además de introducir la enseñanza de la resolución de problemas como objeto de aprendizaje, como veremos que propone el currículo, de forma transversal a lo largo de todos los contenidos.

Y por último, entre estos aspectos que hemos querido resaltar incluimos la dimensión afectiva. Preocupa bastante la falta de motivación que muestran los alumnos desde el momento en que oyen la palabra “problema”, adoptando una actitud que se corresponde normalmente con una predisposición negativa hacia la tarea. Lógicamente esta actitud influye en su comportamiento a la hora de resolver los problemas que se les plantean.

Resolver problemas es una tarea que se ve influenciado por los distintos factores emocionales que manifiestan los alumnos ante dicha tarea, algunos como pueden ser la actitud, interés, confianza, perseverancia, complacencia, motivación, creencias (De Corte, 2015; Sánchez y Fernández, 2003; Vila y Callejo, 2004). Incluyendo también entre estos factores, la ansiedad, frustración o incluso el placer que sienten los alumnos cuando se enfrentan a un problema (Hernández y Socas, 1994). También pueden explicar por qué alumnos con un buen nivel académico fracasan y otros con menor nivel académico obtienen mejores resultados (Tárraga, 2008).

Dentro de estos factores las creencias juegan un papel muy influyente ya que “las creencias matemáticas de un individuo, su punto de vista matemático, forman un sistema regulador de su estructura de conocimiento; dentro de este marco actúa y piensa y a su vez este marco influye fuertemente en su rendimiento” (Vila y Callejo, 2004, p.55). Las experiencias pasadas en la tarea de resolver los problemas en clase condicionará su acercamiento futuro y este un factor que debemos tener en cuenta, ya que es claramente observable en el aula. Respecto a esta dimensión afectiva de las matemáticas en PISA 2012 encontramos que “las actitudes, creencias y emociones de los individuos juegan un papel significativo en el interés y la respuesta que dan a las matemáticas en general y en el uso que hacen de ellas en su vida personal” (MECD, 2013, p.30). Estas creencias no sólo afectan a los alumnos en su manera de actuar ante el aprendizaje sino que afecta a la manera de enseñar de los profesores. Tal y como afirma Font (2004), enseñar matemáticas priorizando la memorización de conceptos y técnicas sin comprender las estructuras que las justifican llevan a una visión mecánica de las matemáticas. Entendemos que hay que facilitar el aprendizaje significativo frente al memorístico que normalmente es la opción más elegida por los alumnos, ya que en estas edades buscan lo inmediato e intentar memorizar la forma de resolver un problema les parece la opción con la que obtienen el resultado de forma más rápida.

Entendemos que esta predisposición negativa descrita anteriormente viene provocada en muchos casos por el fracaso que han experimentado durante años de escolarización generándose una actitud respecto a los problemas que afecta su rendimiento en esta tarea (Castro, 2008). Por otro lado, las investigaciones demuestran que la forma tradicional de trabajar los problemas en clase va en contra del objetivo buscado en la enseñanza, es decir, la búsqueda de la solución a problemas aplicados (Verschaffel, Van Dooren, Greer y Mukhopadhyay, 2010). Autores como Lester (citado por Sánchez y Fernández, 2003) incluyen una cierta dosis de fracaso como elemento necesario en la resolución de problemas. Lógicamente es normal que los alumnos cometan errores y que de los errores se puede aprender, pero un exceso de fracaso suele provocar que los alumnos abandonen esta tarea con prontitud y se concentren en los aspectos más instrumentales donde entienden que pueden tener más posibilidades de éxito. Esto suele provocar que se fundamente el aprendizaje de las matemáticas en la memorización de procedimientos en lugar de una comprensión más razonada que se aleje de los típicos pasos memorizados.

Este hecho se observa muchas veces en la resolución de problemas cuando los alumnos se dedican a la búsqueda de elementos clave “que sustituye a la preocupación por analizar el enunciado o situación problema, y buscar estrategias para su solución” (Blanco y Blanco, 2009, p.83). Los alumnos van adquiriendo una concepción de lo que es la Matemática en general y de la resolución de problemas en particular que se va fortaleciendo a lo largo de los años. Tal y como indican Sánchez y Fernández (2003) “la reproducción no puede ser finalidad en el aprendizaje de la resolución de problemas, sino una fase intermedia capaz de provocar un cambio cualitativo, una transformación, una exposición creativa” (p.169). Cuando los alumnos reproducen aquello que han aprendido previamente tienen más posibilidad de éxito a medida que van progresando en el aprendizaje de los procesos para resolver los problemas.

En este trabajo estamos interesados en mejorar esta dimensión afectiva ante la resolución de problemas convirtiéndose en uno de nuestros focos de interés. Proponiendo herramientas que puedan resultar útiles a los alumnos, siguiendo metodologías que generen reflexión y que además sean participativas, trabajando aspectos como la motivación que puede ejercer el tipo de tarea que les proponemos, buscando emociones positivas relacionadas con el éxito provocado por la comprensión del problema que puede conducir a una resolución acertada del mismo (Sánchez y Fernández, 2003), en definitiva, creando un ambiente de resolución de problemas en el aula.

Pero también debemos entender la resolución de problemas como un aspecto fundamental del trabajo matemático ya que enseñar matemáticas implica desarrollar en los alumnos la capacidad de resolver problemas que aún no conocemos (Godino, Batanero y Font, 2004). Por ello deberíamos ir más allá de enseñar a los alumnos a resolver los problemas rutinarios que nos suelen proponer los libros de texto e intentar introducirlos en la resolución de problemas más complejos que les preparen para situaciones problemáticas del futuro que desconocemos. Es evidente que este es un aspecto que es complicado introducir en un aula de secundaria, ya que la tipología de los alumnos, el ansia del profesor por cumplir la programación, la presión cada vez mayor de obtener resultados positivos, hacen que los alumnos o incluso los profesores lo vean como algo accesorio. Además, la sensación de fracaso en esta tarea son factores que influyen notablemente en la posibilidad de incluirlo en el programa, salvo en momentos puntuales, que por otro lado

suelen ser casi anecdóticos. Pero sí creemos que podemos introducir pequeños cambios en la forma de trabajar en el aula que generen progresos considerables, ya que es importante tener en cuenta que resolver problemas en el contexto escolar contribuye al desarrollo intelectual de los alumnos (Ayllón y Castro, 2002; Castro, 2008). Fomentar el uso de tareas que obliguen a razonar en clase para poder resolverlas y que vayan más allá de la mera reproducción de procedimientos aprendidos, es la línea en la que resolver problemas puede ser un contexto sólido para el aprendizaje de las matemáticas y por lo tanto, para el desarrollo intelectual de los alumnos.

Sobre el beneficio de la utilización de los problemas en el aula, Luque (2002) indica:

cuando la resolución de problemas pasa a ser una parte integral de la docencia en el aula y los alumnos van teniendo éxito en esta tarea, van ganando confianza en el uso de las matemáticas y desarrollarán una mente perseverante, aumentan su capacidad para comunicarse matemáticamente y utilizan procesos de pensamiento de mayor nivel (p. 40).

Respecto al uso de los problemas, en este caso aritméticos, Martínez y Sánchez (2013) realizan una serie de observaciones que argumentan su uso en el aula:

- Suponen un procedimiento sencillo y al alcance de los niños para llegar a la matematización de situaciones de la vida diaria.
- Son el campo de entrenamiento en que los alumnos ensayan, practican y separan del uso ordinario la aplicación del lenguaje matemático.
- Los problemas aritméticos se convierten en la primera vía que transita el alumno para trascender la realidad, tipificarla y modelizarla, y que permite aplicar una forma específica de tratamiento de los datos que, a su vez, es susceptible de volver a integrarse y a explicar, de forma más satisfactoria, esa realidad de que había partido. (p.17)

La revisión bibliográfica realizada nos ha llevado a encontrarnos con dificultades en la terminología utilizada en las numerosas investigaciones consultadas, especialmente por encontrar diferentes acepciones del mismo concepto llevándonos en algunos casos a

confusión. Por esta razón, ha sido muy importante en nuestra investigación intentar aclarar la terminología. Un aspecto especialmente importante ha sido clarificar la diferencia entre los conceptos de problema y ejercicio, e intentar llegar a una definición de cómo lo hemos entendido nosotros en nuestro trabajo.

Los profesores debemos preocuparnos por enseñar a nuestros alumnos a resolver problemas y para ello tenemos que distinguir dos situaciones a veces completamente diferentes cuando deberían ser coincidentes. La primera situación es la que creamos cuando planteamos problemas en clase a nuestros alumnos. Generalmente estos problemas son ideales, con escasas variantes y, a veces, sin demasiada conexión con el mundo real. Planteado el problema, el alumno encasilla la situación en el lugar adecuado y su resolución es entonces prácticamente automática. Ésta sería una perspectiva que podemos entender como tradicional. La segunda situación la constituyen las situaciones problemáticas entendiendo por tales aquéllas en las que no existe un proceso automático de resolución de dicha situación; es decir, los alumnos no han aprendido previamente unos pasos que asocian a la situación y por lo tanto reproducen memorísticamente. Un aspecto intermedio, o que nosotros entendemos como tal, serían aquellos problemas que se les plantean a los alumnos en clase, que aparecen normalmente en la mayoría de los libros de texto, que aunque aparecen asociados a un procedimiento rutinario se pueden utilizar desde un enfoque distinto que favorezca el abordaje a la larga de problemas no tan rutinarios más propios de las situaciones cotidianas de los alumnos o de un contexto más académico, tanto de las matemáticas como de otras ciencias.

Si pensamos en la metodología que aplicamos cuando resolvemos problemas en clase la estrategia de enseñanza se fundamenta en que los alumnos aprenden imitándonos, es decir, reproducen nuestros movimientos e intentan memorizar lo que hace el profesor. En algunos casos, por un abuso de los recursos tecnológicos, se proyectan los problemas resueltos y explicamos los pasos dados al resolverlos con la falsa creencia de que cuantos más problemas se hacen mayor aprendizaje se produce. “Al tratar de resolver problemas, hay que observar e imitar lo que otras personas hacen en casos semejantes” (Polya, 1989, p.12), pero tenemos que preguntarnos cuál es la mejor estrategia que tenemos que seguir los profesores para que tenga el efecto deseado. Lo habitual es explicar los ejercicios verbalizándolos, pero normalmente lo que ocurre es que los alumnos copian lo que

escribimos en la pizarra, mas no lo que decimos. También podemos encontrarnos con profesores que “sabemos resolver los problemas que planteamos a nuestros alumnos, pero no siempre somos conscientes de los pasos que damos para resolverlos, por lo que nos resulta muy difícil ayudar a los alumnos a darlos” (Pozo, Pérez y Domínguez, 1994, p.6). Tenemos la resolución de problemas en clase automatizados, como por ejemplo el esquema que tenemos que dibujar o la ecuación a plantear, ya que a muchos profesores no les gusta enfrentarse a un problema por primera vez y suelen resolver el tipo de problemas que dominan, y con las estrategias ya previstas, sin buscar alternativas, por lo tanto, no muestran a los alumnos el proceso que siguen cuando se sitúan ante un problema “desconocido”, sino que enseñan aquello en lo que se sienten más cómodos.

Muchas veces los profesores no advertimos todo el potencial que tienen los problemas que resolvemos en clase para desarrollar capacidades en los alumnos, no solemos reflexionar sobre las capacidades que se movilizan, tampoco prestamos atención a la enseñanza de estrategias, las utilizamos para resolver los problemas pero no las enseñamos, y la consecuencia es que los alumnos pueden entender que no son procesos matemáticos y que por lo tanto no deben aprenderlas. De Corte (2015) a partir del análisis de numerosas investigaciones concluye que “los estudiantes más exitosos dominan de manera más efectiva y sofisticada las destrezas heurísticas y autorreguladoras y se demuestra también que dichas destrezas pueden ser aprendidas tempranamente” (p.7). Por eso entendemos que debemos enseñarles las estrategias adecuadas y que este proceso puede hacerse de forma gradual desde el comienzo de la escolaridad obligatoria, lógicamente tiene que estar planificado partiendo del currículo y siendo capaces de trasladarlo al aula de una forma coherente y sistemática. “El trabajo del aula debe proponerse desarrollar estrategias para afrontar y resolver problemas, no sólo en la clase, sino para descubrir las matemáticas como una herramienta que les puede ayudar a desarrollarse como ciudadanos” (Hernández, 2000, p.1).

Es evidente que la resolución de una situación matemática es distinta a reconocer cuándo aplicar dicha situación. No nos referimos al fracaso que suelen experimentar los alumnos poco hábiles a la hora de utilizar las matemáticas como herramienta, sino que estamos refiriéndonos a un aspecto más relacionado con la modelización y aplicabilidad de los conceptos matemáticos, y por lo tanto a su transferencia a otros contextos diferentes a

donde fueron aprendidos. Es habitual encontrarnos trabajando con los alumnos una actividad que requiere la solución de una ecuación y los alumnos quedarse bloqueados ya que no encuentran la “x”. La misma situación ocurre en otras asignaturas, incluso en bachillerato, donde ante una fórmula tienen series dificultades para despejar una determinada variable, ya que no asocian la expresión que tienen delante con lo que realizan con asiduidad en matemáticas.

El objetivo principal de nuestra investigación es estudiar cómo favorecer que los alumnos de educación secundaria obligatoria mejoren su competencia matemática y para ello nos centramos fundamentalmente en la resolución de problemas como una dimensión relevante de la competencia matemática y del modo de hacer matemáticas. Lo hacemos tanto por el papel que juega en la vida cotidiana y futura de los alumnos como por la repercusión que tiene el saber resolver problemas en otras áreas de conocimiento, y por lo tanto en sus estudios posteriores. Enseñar a nuestros alumnos a resolver problemas desde el área de matemáticas les facilitará transferir esta habilidad a otras áreas. Somos conscientes de la dificultad que suelen tener para identificar las matemáticas que existen detrás de otros conceptos que estudian en otras áreas, con lo que entendemos que demostrar el aspecto funcional de las matemáticas favorecerá el desarrollo de la competencia matemática.

A estos motivos, hasta ahora señalados, hay que añadir otro no menos importante: la preocupación de los profesores que observamos que en las aulas nos encontramos con un número cada vez mayor de alumnos que tienen una gran dificultad a la hora de resolver problemas, tanto en la comprensión de la situación planteada, como en la selección y aplicación de los contenidos matemáticos necesarios para su resolución, o en la necesaria fase de verificación de los resultados. Observamos que esta dificultad suele afectar a la mayoría de los alumnos, incluso a los de un mayor nivel académico en el área, llegando a considerar que resolver problemas no forma parte de las matemáticas y convirtiéndose en una fuerte fuente de ansiedad.

En nuestro interés por mejorar la competencia matemática hemos partido del análisis de los errores más frecuentes que cometen los alumnos de tercero de educación secundaria obligatoria (3º ESO a partir de aquí) a la hora de afrontar la resolución de problemas. Estos errores son comunes a los señalados por diferentes autores (Fernández, 2010; Sánchez y

Fernández, 2003). Como señalan Kilpatrick, Gómez y Rico (1998) “uno de los trabajos más delicados del profesor es el de guiar a los estudiantes, partiendo de sus errores y concepciones deficientes, hacia un conocimiento oficial que pueda ser validado matemáticamente” (p.9). Posteriormente a este análisis desarrollamos una propuesta de intervención que permita proporcionarles estrategias generales y específicas del área para la resolución de situaciones problemáticas de matemáticas.

Además, elaboramos una propuesta didáctica de contenidos desde un enfoque constructivista y competencial. En este enfoque es el alumno el protagonista de su aprendizaje, aunque teniendo en cuenta ayudas mediadoras por la intervención del profesor, materiales que sirven de guía, etc. (De Corte, 2015; Godino et al., 2004; Sánchez y Fernández, 2003) y entre las ayudas podemos incluir también a sus propios compañeros si el trabajo se realiza en pequeños grupos. Hay autores como Larios (2000) que fundamentan el aprendizaje constructivista de las matemáticas en la interacción entre iguales y con el profesor. Para Godino et al (2004) en el enfoque constructivista “la actividad de los alumnos al resolver problemas se considera esencial para que éstos puedan construir el conocimiento” (p.67). Identificar en un contexto determinado el problema como tal e identificar las matemáticas que se encuentran asociadas favorecerá la comprensión de dichas matemáticas.

Por lo tanto esta propuesta se fundamenta principalmente en la metodología empleada, la cual debe priorizar el saber hacer del alumno y la construcción de conocimientos matemáticos por parte éste, con una tarea guiada por el profesor, aunque con una participación más discreta y optimizada (Lozano y Hernández, 2014) y en actividades desarrolladas en grupo pequeño. Pero también veremos que son muy importantes los materiales preparados como recursos para los alumnos, entendiendo que estos materiales deben encontrarse en un proceso de mejora continua a partir de la interacción de los alumnos con el mismo y los resultados obtenidos en su utilización.

También entendimos que en la propuesta debíamos fomentar la utilización del lenguaje por varios motivos. Por la importancia del lenguaje en el desarrollo del pensamiento y de los conceptos matemáticos en un contexto de resolución de problemas. Como indica Hernández (2000) “sin un conocimiento básico del lenguaje materno difícilmente podremos enseñar el lenguaje de las matemáticas, ni su utilización para resolver problemas

reales, ni desarrollar en nuestros alumnos y alumnas actitudes positivas” (p.2). Respecto a las funciones del lenguaje (Godino et al, 2004) indica que el lenguaje es esencial para:

- Comunicar las representaciones y soluciones de los problemas a los compañeros o el profesor.
- Reconocer las conexiones entre conceptos relacionados.
- Aplicar las matemáticas a problemas de la vida real mediante la modelización.
- Utilizar los nuevos recursos tecnológicos que se pueden usar en el trabajo matemático (p.40).

También hemos tenido muy en cuenta las indicaciones que hace la normativa educativa sobre la importancia de la competencia en comunicación lingüística en la enseñanza obligatoria. En el decreto que regula el desarrollo curricular de secundaria en Canarias (Decreto 83/2016) respecto a la asignatura de matemáticas podemos leer que:

Favorece el desarrollo de la expresión oral y escrita al expresar en un lenguaje apropiado al nivel en que se encuentra el alumnado, el proceso seguido en las investigaciones y sus conclusiones, reflexionando individual, grupal o colaborativamente sobre diferentes estrategias empleadas, el proceso seguido y la coherencia de las soluciones, aprendiendo de los errores cometidos e integrando los aprendizajes, compartiéndolos en contextos diversos. (p.18158)

Si queremos que nuestros alumnos desarrollen la competencia matemática trabajemos problemas para que aprendan el aspecto funcional de las matemáticas, y además, debemos de ser capaces de crear procedimientos creativos en nuestro proceso de enseñanza. Estos procedimientos deben permitirles construir conocimientos nuevos desde el interés generado por la intervención del profesor en su papel mediador. Para conseguir esta motivación hay varios factores que hay que tener en cuenta, pero es especialmente importante que identifiquemos los conocimientos previos de los alumnos, es decir los recursos de los que disponen, para posteriormente trazar puentes con los nuevos contenidos que pretendemos que aprendan. Ya que como indican Godino et al. (2004) “es necesario relacionar los contenidos de matemáticas con la experiencia de alumnos y alumnas, y

presentarlos en un contexto de resolución de problemas y de contraste de puntos de vista en esta resolución” (p.94). Por lo tanto entendemos que los problemas son una buena estrategia para introducir a los alumnos en unos contenidos que deben aprender, que les ayude a introducirse en un proceso de indagación y construcción de contenidos matemáticos nuevos.

Como hemos ido indicando, la resolución de problemas tiene un carácter social, por lo que queremos utilizar en nuestra propuesta estrategias de aprendizaje cooperativo como metodología en el aula, fomentando la interacción entre los alumnos y entre alumnos y el profesor. Hay autores que han identificado mejoras significativas en el aprendizaje de las matemáticas con el uso de esta metodología, como es el caso de Pons, González-Herrero y Serrano (2008) en un estudio con alumnos de 4º de ESO. En este sentido Godino et al. (2004) indican que “una instrucción matemática significativa debe atribuir un papel clave a la interacción social, a la cooperación, al discurso del profesor, a la comunicación, además de la interacción del sujeto con las situaciones - problema” (p.13).

Mejorar la competencia matemática de nuestros alumnos a través de la resolución de problemas escolares implica que dispongan de más recursos de los que tenían hasta ahora, recursos que les guíen en el proceso de resolver los problemas que se les proponen en clase. Problemas que aparecen en la mayoría de los libros de texto propuestos por las editoriales, que aunque rutinarios, y aunque entendamos que ésta no sea la solución, sí creemos que puede ser un camino a seguir, ya que trabajar estos problemas pueden proporcionar un puente significativo para conectar las matemáticas del aula con las matemáticas del mundo real (Monroe y Panchyshyn, 2005). Aunque también entendemos que hay diferencias entre el pensamiento necesario para resolver este tipo de problemas y los problemas cotidianos también creemos que existen similitudes en los procesos cognitivos para resolverlos (Jonassen, 2004).

También es una oportunidad para que los alumnos adquieran seguridad en los procesos de resolución, además de automatizar algunos aspectos de la resolución que favorecerá la transición a la resolución de problemas más complejos. Partimos de la realidad, y aun estando de acuerdo en que deberíamos trabajar con los alumnos problemas menos rutinarios, hay variables que nos llevan a trabajar en un proyecto más realista. Aunque para la evaluación de las competencias se puede entender que se trabajen tareas más complejas

en un contexto real, es importante asegurarse que los alumnos son capaces de resolver problemas de los llamados escolares. El tiempo es una de las variables que más afecta a la hora de llevar propuestas al aula y creemos que dedicar poco tiempo a algunos problemas más complejos puede ser insuficiente para que los alumnos se conviertan en buenos resolutores de problemas. Aunque estamos de acuerdo con Borasi (1986) cuando afirma que abordar este tipo de problemas entraña el peligro de que la experiencia de los alumnos se limitará a los casos en que el contexto y la formulación se dan explícitamente, se espera una solución única y se requiere la aplicación de un algoritmo conocido.

Desde un principio hemos considerado muy importante que esta investigación y los recursos propuestos sean utilizados por otros profesores. Y además, vemos que un trabajo que puede continuar en un futuro, como puede ser adaptar nuestra propuesta a otros niveles educativos de forma que se pueda realizar de una forma vertical a lo largo de la educación obligatoria.

Estructura del trabajo

Este trabajo de investigación está estructurado en dos partes bien diferenciadas. Una primera parte que ha consistido en una revisión bibliográfica que nos permitiera comprender los aspectos relacionados con la competencia matemática:

- El significado de la competencia matemática como un aspecto funcional de las matemáticas.
- El papel que juega la resolución de problemas dentro de la competencia matemática.
- La enseñanza de la resolución de problemas en los contextos educativos.
- La presencia de la competencia matemática y la resolución de problemas en el currículo escolar.

La segunda parte se ha dividido en las siguientes:

- Una medición y análisis de los procesos de resolución de problemas que llevan a cabo los alumnos. Este proceso se realizó en parte cuantitativo con la utilización de

cuestionarios de problemas, y en parte cualitativo, con la observación de los procesos que realizaban que se complementó con una encuesta realizada a los alumnos para recabar su opinión. A partir de este estudio se propuso un modelo de división de las fases de resolución de un problema, junto con unos guiones, en la línea de las sugerencias heurísticas, para afrontar las fases de resolución de problemas. Estos guiones se utilizaron en todos los momentos que se dedicaron a la resolución de problemas, en el trabajo individual, en pequeño grupo y en el grupo clase.

- La elaboración de una propuesta didáctica de enseñanza de contenidos matemáticos vía resolución de problemas.
- Un análisis del tratamiento que realizan de la resolución de problemas dos libros de texto del nivel académico en el que hemos desarrollado este trabajo.

Con este trabajo nos planteamos integrar dos aspectos de la resolución de problemas que las investigaciones en educación matemática reclaman. Por un lado, la enseñanza de la resolución de problemas como contenido del área de matemáticas, y por otro, la utilización de los problemas como estrategia de enseñanza de contenidos matemáticos. Por lo tanto buscamos un doble objetivo: que nuestros alumnos aprendan a resolver problemas y que aprendan nuevos contenidos resolviendo problemas (Vila y Callejo, 2004).

En todo momento hemos pretendido que nuestro trabajo sea práctico, lo más cercano a la realidad del aula, y que las propuestas que desarrollemos sean de interés para otros profesores de secundaria. Lógicamente, nuestra intención no es que se siga fielmente sino que sirva de reflexión, que sea un material de apoyo, o un punto de partida para nuevas experiencias. Teniendo en cuenta esta línea de trabajo, hemos optado por trabajar problemas que podrían aparecer en cualquier libro del nivel educativo al que va dirigido este trabajo. Aunque en una intención inicial queríamos optar por otro tipo de problemas decidimos trabajar problemas escolares que se engloban en lo que se denominan problemas de narración que se resuelven con procedimientos rutinarios, aunque como veremos más adelante pretendemos que los alumnos busquen, dentro de los que conocen, procedimientos alternativos para poder resolverlos y evitar la diferenciación que solemos hacer tanto los profesores como los libros de texto entre procedimientos aritméticos o

algebraicos. Hay estudios que han demostrado que la búsqueda de procedimientos alternativos en la enseñanza de la resolución de problemas ha conseguido mejoras en las habilidades de los alumnos a la hora de enfrentarse a los problemas (Lee, 2011).

En el Capítulo 1 presentamos el marco teórico del trabajo realizado, hablamos en primer lugar de las competencias básicas en general y de la competencia matemática en particular, centrándonos en la resolución de problemas y de la presencia de ésta en el sistema educativo español. Posteriormente hablamos de la resolución de problemas en contextos escolares; la utilización de los problemas como objeto de enseñanza y como estrategia de aprendizaje; los contenidos matemáticos que hemos utilizado en los enunciados de los problemas; el aprendizaje en pequeños grupos como estrategia de enseñanza y aprendizaje; algunas referencias sobre la evaluación, para terminar con un apartado sobre algunas ayudas para resolver un problema.

En el Capítulo 2 presentamos el marco metodológico, presentamos los objetivos formulados y el diseño de la investigación con sus diferentes fases. También hacemos algunas referencias a los problemas en los contextos escolares, centrándonos en la tipología de los problemas utilizados en el trabajo.

En el Capítulo 3 presentamos una propuesta de modelo de resolución de un problema a través de fases o etapas, como explicamos en este capítulo, surge de la revisión bibliográfica y de la experiencia con los alumnos de este nivel. Para cada una de estas etapas proponemos la versión definitiva de los guiones que hemos trabajado con los alumnos cuando resolvíamos problemas en el aula, es importante señalar que los guiones han ido evolucionando a medida que los alumnos han interactuado con ellos, ya que hemos ido solucionado sus dudas y recogido sus aportaciones.

En el Capítulo 4 realizamos una propuesta didáctica de aprendizaje de contenidos a través de la resolución de problemas. Los contenidos que hemos trabajado son los referentes a las sucesiones, en particular el desarrollo del término general de las progresiones aritméticas y geométricas. Elegimos estos contenidos ya que permiten una modelización de una situación cercana a la realidad y eran novedosos para los alumnos. Hemos utilizado dos situaciones que hemos resuelto con el grupo clase. Como ocurría con los guiones presentamos también la versión definitiva de la propuesta.

En el Capítulo 5 recogemos los resultados obtenidos con los distintos cuestionarios de problemas, tanto los resueltos de forma individual, como los resultados del trabajo grupal. Estos cuestionarios nos han permitido realizar un análisis del estado de la resolución de problemas en el nivel educativo estudiado y valorar la efectividad de las propuestas realizadas.

En el Capítulo 6 presentamos el análisis que realizamos sobre dos libros de texto del nivel educativo donde hemos desarrollado nuestro trabajo. En el análisis queríamos valorar el tratamiento que de la resolución de problemas hacían los manuales, especialmente si se reflejaba las propuestas del currículo.

En el Capítulo 7 presentamos los resultados que recogen la opinión de los alumnos sobre el trabajo realizado. Aunque durante todo el trabajo de investigación han sido muy útiles las aportaciones de los alumnos queríamos obtener unos datos más concretos que nos permitieran valorar el trabajo desde el punto de vista del alumnado.

En el Capítulo 8 evaluamos la consecución de los objetivos que nos propusimos en la investigación, presentamos las conclusiones obtenidas y realizamos unas propuestas para el trabajo en el futuro.

Primera Parte

Capítulo 1. Marco Teórico

En este capítulo hacemos una descripción del marco teórico que nos ha orientado en el desarrollo de nuestro trabajo. Hay que tener en cuenta que en ningún momento hemos pretendido realizar un trabajo de investigación en profundidad sobre la competencia matemática ni sobre la resolución de problemas como disciplina científica, ya que no era el objeto de este trabajo. Si se lee desde esa óptica se encontrarán muchas lagunas al tratarse de un campo en el que se ha trabajado ampliamente. Tampoco hemos pretendido realizar un trabajo sobre los aspectos psicológicos que pueden sustentar la resolución de problemas, aunque en algunos momentos hagamos alguna referencia a los aspectos cognitivos, ya que entendemos que pueden ayudarnos a entender el proceso de resolución de un problema en el aula, y por lo tanto pueden contribuir a nuestro objetivo. Respecto a los problemas, tampoco hemos pretendido realizar un trabajo que hable sobre clasificación de problemas o sobre métodos específicos de resolución, aunque hemos consultado numerosas investigaciones (Puig y Cerdán, 1990; Cerdán, 2008) y nos han ayudado en algunos aspectos de nuestro trabajo, creemos que se alejan de nuestras intenciones, ya que como hemos ido introduciendo nuestro objetivo era mejorar la competencia matemática a través de la resolución de problemas.

Muchas veces oímos hablar a profesores de matemáticas que dicen que determinados alumnos no están hechos para las matemáticas, y que por lo tanto su orientación académica debe dirigirse hacia caminos donde las matemáticas no jueguen un papel importante. La idea de competencia matemática veremos que va más allá de esta simplificación y se acerca a la reflexión sobre la necesidad de tener un manejo adecuado de las matemáticas en un mundo real y no tan académico. Es decir, hay que tener en cuenta que “no todos los niños tienen la misma capacidad para aprender matemáticas, pero sí todos tienen la misma necesidad de aprenderlas” (Fernández, 2010, p.22). Entendemos que este aspecto mencionado requiere una reflexión por parte del profesorado.

Los profesores de educación secundaria estamos acostumbrados a que cada año llegan a nuestras aulas de matemáticas alumnos con diferentes estilos de aprendizaje, alumnos con

diferentes maneras de procesar y/o percibir la información. En definitiva y lo más importante es que la forma de aprender matemáticas es distinta para cada uno de ellos (Gallego y Nevot, 2008). En este contexto al profesor se le pide que se adapte, ya no sólo a diferentes niveles, sino a diferentes estilos de aprendizaje que condicionan los estilos de enseñanza en el aula. Además, y no menos importante, es que su forma de enfrentarse a la asignatura está muy condicionada por los estilos de enseñanza de los profesores que se han encontrado durante su escolaridad.

Otro aspecto fundamental han sido los cambios curriculares en el sistema educativo, que junto con el aumento en el fracaso en el área de matemáticas nos han obligado como profesores a reflexionar sobre nuestra tarea educativa. Muchas veces esta reflexión ha sido guiada por la búsqueda de lo inmediato, adaptarnos cuanto antes a lo nuevo, buscar resultados e intentar, no sin una gran dificultad, abandonar todo lo que suene a “tradicional”.

El nivel en el que hemos realizado este trabajo, 3º ESO, creemos que permite reconducir algunas situaciones que se dan en el alumnado respecto a la asignatura de matemáticas. La madurez que va aportando la edad, la cercanía de la obtención de la titulación, la toma de decisiones sobre itinerarios académicos y/o profesionales suelen generar cambios de actitud ante los estudios.

A continuación, y teniendo en cuenta nuestra experiencia, presentamos algunos ejemplos de estas situaciones que nos podemos encontrar en este nivel:

- Alumnos que consideran que no sirven para la asignatura. De esta consideración participan muchas veces las familias influenciadas por su propia experiencia personal con la asignatura en algunos casos, y en otros casos por acostumbrarse a los malos resultados de sus hijos. En definitiva nos encontramos con alumnos desmotivados, más preocupados de lo que no saben que de lo que podrían aprender, por lo que no suelen participar ni de la clase ni de su aprendizaje.
- Alumnos que consideran que las matemáticas consisten en una memorización de procedimientos para poder realizar los ejercicios. Se sienten cómodos con la repetición de ejercicios iguales, apoyados por un modelo, y no llevan bien los

cambios a otras tareas que impliquen otro tipo de destrezas o un mayor razonamiento para llevarlas a cabo. Entre este grupo suelen encontrarse alumnos con buenos resultados académicos y hay que convencerles de que se puede y se debe trabajar la asignatura de otra manera.

- Alumnos que consideran que las matemáticas son difíciles y el profesor es el único que conoce la respuesta de antemano. Esta actitud puede venir influenciada por varios motivos: desde la consideración social de las matemáticas como una disciplina difícil y por lo tanto reservada a los más inteligentes, hasta nuestro estilo de enseñanza, en el que no se hace uso del error como fuente de aprendizaje, no se fomenta el análisis y la reflexión en clase, ni se utilizan estrategias de forma explícita. Son alumnos que suelen participar en aquellas actividades nuevas que no reconocen y que por lo tanto no necesitan conocer procedimientos que debían haber aprendido. Suelen intentar esforzarse por aprender pero desde una óptica poco motivadora, ya que desde que en la tarea aparece algún contenido que deben conocer de cursos anteriores tienden a desmotivarse.
- Afortunadamente, también encontramos alumnos motivados, alumnos dispuestos al aprendizaje, alumnos incitados al estudio por parte de su entorno familiar, alumnos competitivos, etc., que hacen nuestra labor más motivadora, más placentera, menos estresante y mucho más cómoda.

Hay un aspecto fundamental a tener en cuenta en las matemáticas escolares si tenemos como objetivo el desarrollo de la competencia matemática, es el referente de lo que podríamos denominar matemática realista (Sánchez y Fernández, 2003). Cuyos principios son:

- Contribuye al bagaje cultural de las personas.
- Intenta salvar el dualismo saber-utilizar.
- No debe ser separada de las demás ciencias. (p.17)

Es decir, el saber matemáticas se encuentra en la formación básica de cualquier ciudadano y por lo tanto se debe enseñar en la escuela; las matemáticas tienen un aspecto funcional y

se identifican como una herramienta para otros campos de conocimiento. Hay que entender que la enseñanza de las matemáticas no debe estar desconectada de un mundo real y cambiante, y especialmente separado de otras ciencias; los alumnos deben captar la utilidad de las matemáticas en su formación en la escuela. “Podría decirse que hay unas matemáticas necesarias para llegar a ser, en acto y no solo en potencia, ciudadano o ciudadana de una sociedad tan compleja y exigente como la actual” (Pérez, 2015, p.8).

1.1. Las competencias

En este apartado vamos a hablar sobre las competencias. Aspectos como su definición, origen, su importancia, etc. No pretende ser un análisis exhaustivo, ya que existen muchos trabajos en estos últimos años que se pueden consultar, pero sí queremos que permita al lector situarse y valorar el porqué de su importancia en este trabajo. Es decir, nuestra intención no es entrar a valorar qué competencias han de trabajarse en los centros para que los alumnos puedan incorporarse al mercado laboral o continuar con estudios superiores, sino reflexionar sobre las competencias como elemento en el panorama educativo actual. “Las competencias son un referente para la acción educativa y nos informan sobre lo que debemos ayudar al alumnado a construir, a adquirir y desarrollar “ (Coll, 2007, p.38).

El término competencia se ha estudiado desde diferentes campos: la filosofía, la lingüística, sociología, psicología, pedagogía, la empresa, etc., pero siempre entendiendo que “el saber que se adquiere en contextos académicos debe transferirse a situaciones de relación familiar, de amistad, de trabajo, al estudio, al ocio y al empleo” (Escamilla, 2008, p.11). Los alumnos van a adquirir una formación básica obligatoria en la escuela, y como básica y obligatoria debe prepararlos para ser ciudadanos de un mundo que cambia día a día, y como iremos viendo va más allá de la acumulación de conocimientos, incluso de aquellos más prácticos que pueden quedar totalmente obsoletos en el momento que dejan la escuela. Cualquier demanda de la sociedad, especialmente del sector empresarial, tarda bastante tiempo en incorporarse al sector educativo, y para cuando llega a asimilarse por parte de la práctica docente ya ha aparecido una nueva demanda.

En 1997 la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) puso en funcionamiento el Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA). Este programa representaba el compromiso de los gobiernos de los países que forman parte de

la OCDE de llevar a cabo un análisis de los sistemas educativos en un contexto internacional. Pretende conocer en qué medida los jóvenes que finalizan la escolaridad obligatoria están preparados para la sociedad del siglo XXI y sus desafíos, es un empeño de los países de la OCDE y un modo de evaluar la calidad de sus sistemas educativos (Rico, 2007). Es importante tener en cuenta que la capacidad de los alumnos para aplicar los conocimientos adquiridos, principalmente en la escuela, a su vida cotidiana es el enfoque de la evaluación PISA.

En el marco del Proyecto Definición y Selección de Competencias (DeSeCo) de la OCDE se afirma que una competencia “es más que conocimientos y destrezas. Involucra la habilidad de enfrentar demandas complejas, apoyándose en y movilizand recursos psicosociales (incluyendo destrezas y actitudes) en un contexto en particular” (OCDE, 2005, p.3). Vemos que va más allá de la posible simplificación del concepto de competencia, es decir, ser competente es la capacidad tener unos conocimientos almacenados y utilizarlos cuando son necesarios.

El Parlamento Europeo, en el marco de referencia europeo y en su recomendación del 18 de diciembre de 2006 sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente define las competencias clave “como una combinación de conocimientos, capacidades y actitudes adecuadas al contexto” (p.3). Además, identifica las competencias clave como aquéllas que cualquier ciudadano necesita para su realización, desarrollo personal, la inclusión social y el empleo. Entendemos que no debemos situarnos ante una competencia determinada que un alumno necesita adquirir, por el contrario, debemos situarnos ante un conjunto de competencias que el alumno debe adquirir, pensando no solamente en el uso que debe hacer de ellas sino en el aprendizaje permanente a lo largo de toda la vida. En esta recomendación se establecieron ocho competencias clave: comunicación en la lengua materna; comunicación en lenguas extranjeras; competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología; competencia digital; aprender a aprender; competencias sociales y cívicas; sentido de la iniciativa y espíritu de empresa, y conciencia y expresión culturales (Parlamento Europeo y Consejo de la Unión Europea, 2006).

Hasta aquí hemos hecho una breve referencia al origen de las competencias en un contexto internacional que nos permita comprender su importancia y el porqué de su inclusión en el sistema educativo. A continuación, vamos a presentar un conjunto de interpretaciones

sobre el concepto de competencia propuestas por diferentes autores y que nos ha ayudado a aclarar la terminología y orientar nuestro trabajo.

Tener competencia es generalmente equivalente a tener conocimiento práctico sobre algo, se usa habitualmente referido a destrezas manipulativas o procedimentales (Godino et al., 2004). Este mismo autor hace referencia a la diferencia entre competencia y comprensión, asociando esta última a los aspectos más conceptuales del conocimiento, mientras que la competencia la asocia a aquellos aspectos más prácticos, a un "saber hacer". Para Goñi (2009) la diferencia entre conocimiento y competencia lo relaciona con aspectos como la transferencia del conocimiento y el contexto donde se ubica la situación.

Perrenoud (citado en Valverde, 2013) entiende que la competencia es la facultad de movilizar un conjunto de recursos (saberes, capacidades, informaciones, etc.) para solucionar con eficacia una serie de situaciones.

Competencia como la “capacidad de una persona (conocimiento, destrezas o habilidades y actitudes o valores) para enfrentarse con garantías de éxito a una tarea o situación problemática en un contexto/situación determinado” (Fortea, 2009, p. 4).

Zakaryan (2011) identifica competencia “con la cualidad o capacidad que precisa una persona para enfrentarse con éxito ante situaciones-problema poniendo en juego un conjunto de recursos de manera integrada e interrelacionada” (p.32). Este mismo autor entiende la competencia como “grado o nivel de capacidad que se evalúa en el desempeño de una actividad o realización de una tarea por una persona” (p.38).

La competencia en el mundo educativo hace referencia a la solución de problemas del mundo real y se identifica con lo que hace falta aprender para darles respuesta (García y Fínez, 2012).

Respecto al aprendizaje de las competencias hay que entender que son expectativas a largo plazo de los que el alumno debe aprender, pero puede haber dificultades para los profesores conseguir que los alumnos las adquieran e incluso evaluar el grado de logro de las mismas, ya que se entiende que una persona es competente o no, según la tarea concreta a la que se enfrente. Por lo que “la evaluación del aprendizaje debe huir de aquellos instrumentos que simplemente exigen de los alumnos que reproduzcan de forma

mecánica lo aprendido” (Pellicer y Ortega, 2009, p.10). Por lo tanto, la evaluación de las competencias a veces se basa en observar cómo actúa el alumno ante un problema y la búsqueda de caminos que emprende para su solución, y no únicamente si encuentra el resultado.

Por lo que hemos visto hasta ahora, los alumnos para ser competentes deben tener conocimientos tanto conceptual como procedimental pero lo que se debe priorizar es el aspecto funcional del conocimiento y especialmente la capacidad de autoaprendizaje. Gestionar el conocimiento de forma que hay que saber cuándo utilizarlo a partir del contexto. Evaluar lo que se sabe y lo que falta por aprender y ser capaz de buscar la forma de adquirirlo son aspectos fundamentales para ser competentes en la resolución situaciones problemáticas.

Para nosotros, a efectos de nuestro trabajo, la competencia consiste en la comprensión de un problema determinado y su posterior resolución por distintos métodos. Esto implica la capacidad del alumno de movilizar un conjunto de recursos que posee y utilizarlos adecuadamente según el contexto del problema. Esta competencia se verá mejorada si dicho problema puede ser identificado posteriormente en un contexto real.

Una vez hecha una revisión del concepto o idea de lo que es la competencia vamos a ver referencias al desarrollo normativo del sistema educativo actual.

En el sistema educativo actual (LOMCE), indica que la competencia “supone una combinación de habilidades prácticas, conocimientos, motivación, valores éticos, actitudes, emociones, y otros componentes sociales y de comportamiento que se movilizan conjuntamente para lograr una acción eficaz” (p.170). Además, en la ley se proponen siete competencias clave:

- Comunicación lingüística (CL).
- Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT).
- Competencia digital (CD).
- Aprender a aprender (AA).

- Competencias sociales y cívicas (CSC).
- Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SIEE).
- Conciencia y expresiones culturales (CEC).

Como vemos las competencias indicadas por la LOMCE, a falta de la comunicación en lenguas extranjeras, se identifican claramente con las competencias indicadas por el Parlamento Europeo.

La orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato define las competencias clave de la siguiente manera:

se conceptualizan como un “saber hacer” que se aplica a una diversidad de contextos académicos, sociales y profesionales. Para que la transferencia a distintos contextos sea posible resulta indispensable una comprensión del conocimiento presente en las competencias y la vinculación de este con las habilidades prácticas o destrezas que las integran. (p.6986)

Esta misma orden aclara que los componentes que integran el conocimiento competencial son:

un conocimiento de base conceptual: conceptos, principios, teorías, datos y hechos (conocimiento declarativo-saber decir); un conocimiento relativo a las destrezas, referidas tanto a la acción física observable como a la acción mental (conocimiento procedimental-saber hacer); y un tercer componente que tiene una gran influencia social y cultural, y que implica un conjunto de actitudes y valores (saber ser). (p.6987)

Por lo tanto, el saber decir, el saber hacer y el saber ser son tres componentes que no se pueden considerar por separado, los tres tienen la misma influencia sobre el conocimiento competencial y son tres aspectos que el alumno debe desarrollar en un enfoque competencial de la enseñanza, y además, trabajar las tareas en el aula bajo estas perspectivas.

En el decreto 83/2016, de 4 de julio, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Canarias, sobre el aprendizaje por competencia encontramos que “favorece los propios procesos de aprendizaje y la motivación por aprender, capacitando al alumnado a transferir aquellos conocimientos adquiridos a las nuevas instancias que aparezcan en su vida” (p.18155). Como podemos ver se asocia el aprendizaje por competencias con la motivación por aprender del alumnado, este es un aspecto sobre el que se debe reflexionar a la hora de programar las tareas a desarrollar en el aula.

Después de realizar la revisión bibliográfica y apoyados por nuestra experiencia presentamos una síntesis de sugerencias generales para trabajar las competencias en el aula:

- Identificar los conocimientos previos de los alumnos, lo que saben y especialmente lo que saben hacer, ya que este es un aspecto muy importante cuando los alumnos se van a enfrentar a una nueva situación.
- El alumno debe asumir el protagonismo de su aprendizaje y el profesor debe adoptar un papel de mediador entre el alumno y aquello que debe aprender. Este es uno de los aspecto más difíciles, ya que implica tener alumnos con ganas de aprender, y no siempre es el alumnado que nos encontramos en el aula, y otras veces encontramos alumnos que tienen dificultades para asumir este rol.
- Aunque la tendencia de los alumnos es la de memorizar, hay que conseguir cambiar esa tendencia en el aula y realizar tareas que favorezcan todos aquellos procesos cognitivos que fundamentan el razonamiento matemático.
- Trabajar problemas con contextos variados en situaciones-problema que puedan ser de su interés. En la medida de lo posible es importante que los alumnos aprecien la aplicabilidad de lo estudiado.
- Utilizar recursos variados y elaborar materiales curriculares diversos cercanos a los intereses de los alumnos.

- Alternar el trabajo individual con el trabajo del grupo en clase y con el trabajo en grupos pequeños. Cada aula es distinta, con tipologías de alumnos distintas, y hay que analizar bien los tiempos que se deben asignar a las tareas y el tipo de agrupamiento a realizar. La experiencia nos lleva a reconocer que hay grupos de alumnos que no son capaces de aguantar tranquilos una clase magistral pero que responden muy bien cuando se les propone un trabajo en grupo, y especialmente si les supone algún reto.
- Potenciar la lectura comprensiva y la expresión oral y escrita, además de la búsqueda y tratamiento de la información como estrategias de aprendizaje.
- Utilizar estrategias de evaluación que vayan más allá de la calificación estricta de la materia, fomentar la autoevaluación y la coevaluación. Las rúbricas como mecanismos de evaluación son muy útiles.

1.2. Competencia Matemática

Una vez que hemos hablado de las competencias básicas queremos centrarnos ahora en la competencia matemática. Intentaremos aclarar el concepto, el papel que juega y el porqué de su inclusión en el sistema educativo.

Tal y como indica Rico (2007) “la competencia matemática se considera parte principal de la preparación educativa puesto que ideas y conceptos matemáticos son herramientas para actuar sobre la realidad” (p.50).

Como iremos comprobando, la competencia matemática “es un concepto que excede al mero conocimiento de la terminología y las operaciones matemáticas, e implica la capacidad de utilizar el razonamiento matemático en la solución de problemas de la vida cotidiana” (Hidalgo et al., 2013, p.89-90). En esta misma línea, Rico (2012) indica que “el concepto de competencia matemática muestra la riqueza cognitiva de esta disciplina, expresa los procesos o modos de actuación que tienen lugar por medio de los conocimientos matemáticos, no sólo por su dominio formal” (p.14).

En las recomendaciones del Parlamento Europeo y Consejo de la Unión Europea (2006) sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente define la competencia matemática como:

una habilidad para desarrollar y aplicar el razonamiento matemático con el fin de resolver diversos problemas en situaciones cotidianas. Basándose en un buen dominio del cálculo, el énfasis se sitúa en el proceso y la actividad, aunque también en los conocimientos. La competencia matemática entraña —en distintos grados— la capacidad y la voluntad de utilizar modos matemáticos de pensamiento (pensamiento lógico y espacial) y representación (fórmulas, modelos, construcciones, gráficos y diagramas). (p.6)

El informe PISA define la competencia matemática como la capacidad de “identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundados y utilizar e implicarse en las matemáticas de una manera que satisfaga sus necesidades vitales como un ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo”. (OCDE, 2006, p.13). Como vemos no basta con que el alumno conozca que las matemáticas aparecen en el mundo que nos rodea ya que la competencia implica identificar la presencia de las matemáticas, comprenderlas y aplicarlas en una situación determinada.

Posteriormente, en el marco de PISA 2012 (MECD, 2013), la noción de competencia matemática se concreta un poco más:

La capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos. Incluye el razonamiento matemático y la utilización de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a los individuos a reconocer el papel que las matemáticas desempeñan en el mundo y a emitir los juicios y las decisiones bien fundadas que los ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos necesitan. (p.9)

La definición de competencia matemática que aparece en el marco PISA 2012 (MECD, 2013) incluye la capacidad que debe adquirir el individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas, términos que “ofrecen una estructura útil y significativa para organizar los procesos matemáticos que describen lo que hacen los individuos para

relacionar el contexto de un problema con las matemáticas y, de ese modo, resolverlo” (p.12).

En el informe se valora la necesidad de que los alumnos en un futuro próximo serán ciudadanos que van a tener que enfrentarse a situaciones donde necesiten las herramientas matemáticas para descifrar informaciones varias, de ahí que se insista en el carácter funcional de las matemáticas, para PISA este carácter está constituido por unas tareas contextualizadas, unas herramientas conceptuales y el propio sujeto (Rico, 2007).

Para Solar, García, Rojas y Coronado (2014) “el carácter pragmático de la competencia permite asumir un aprendizaje situado que privilegia la acción para dar sentido a los conceptos. El sujeto que aprende matemáticas moviliza su competencia en el uso social” (p.37). La funcionalidad de las matemáticas se entienden dentro de un contexto social que va más allá de un aspecto académico formal, aunque se debe entender también la necesidad de una formación matemática amplia de los alumnos.

Godino (2002) plantea los siguientes supuestos sobre las matemáticas y la relación con la competencia matemática:

- La matemática es una actividad humana que implica la solución de problemas. En la búsqueda de respuestas o soluciones a estos problemas externos o internos emergen y evolucionan progresivamente las técnicas, reglas y sus respectivas justificaciones, las cuales son socialmente compartidas. La competencia matemática requiere familiaridad con los tipos de problemas, y los recursos disponibles para su solución.
- En la actividad matemática se utilizan distintos recursos lingüísticos y expresivos que desempeñan un papel comunicativo e instrumental. La competencia matemática requiere dominio y fluidez en el uso de los recursos lingüísticos y operatorios, esto es, competencia comunicativa.
- La matemática es un sistema de reglas (definiciones, axiomas, teoremas), que tienen una justificación fenomenológica y están lógicamente estructuradas. La competencia matemática requiere el dominio de los sistemas matemáticos

disponibles y capacidad para desarrollarlos ante las necesidades de resolver nuevos problemas (comprensión relacional).

Según Goñi (2009) la competencia matemática es un “uso eficiente y responsable del conocimiento para hacer frente a situaciones problemáticas relevantes” (p.36). Para Valverde (2013) expresa una forma especial de poseer el conocimiento matemático y de usarlo en la resolución de problemas que implican situaciones complejas procedentes de contextos diversos. Como vemos, ser competente en matemáticas implica resolver problemas en situaciones reales.

A modo de resumen indicamos una serie de puntos de convergencia que se pueden observar en el concepto de competencia propuestas por Solar et al. (2014):

- a) un componente cognitivo: contenidos, conocimientos, capacidades, destrezas;
- b) unas finalidades o propósitos: las competencias matemáticas para vivir/trabajar, comunicar/interactuar, comprender/desarrollar capacidades, usar/aplicar, intervenir/resolver problemas contextualizados;
- c) unos contextos en los que la competencia se moviliza: sociales, escolares (prácticas educativas), académico profesional (docencia e investigación). (p.61)

A partir de la aparición de las competencias se han producido numerosos intentos de realizar una subdivisión de las mismas, con la intención de facilitar su identificación en las tareas de enseñanza y aprendizaje que se podían proponer al alumnado, y por lo tanto facilitar su evaluación. En el proyecto KOM Project del Ministerio de Educación de Dinamarca (Niss, 2003) se propusieron dentro de la competencia matemática ocho subcompetencias:

- Pensar matemáticamente.
- Plantear y resolver problemas.
- Modelar matemáticamente.
- Razonar matemáticamente.

- Representar entidades matemáticas.
- Manipular símbolos y formalismos matemáticos.
- Comunicarse en, con y sobre las matemáticas.
- Utilizar materiales y herramientas.

Respecto a la resolución de problemas podemos decir que la competencia matemática se centra en ser capaces de reconocer un problema, saber cuál es su naturaleza, ser capaces de establecer una estrategia de resolución que se pueda llevar a cabo, encontrar la solución que mejor se adapta al problema original y, por último, comunicar dicha solución (Garrote y del Rincón, 2013, p.136).

Un aspecto muy importante en todo proceso de adquisición de aprendizajes es la evaluación del proceso, aunque las competencias exigen de los estudiantes su dominio sobre conocimientos y destrezas, deben existir capacidades que sean medibles en el proceso, por lo tanto deben existir evidencias de que se alcancen esas capacidades. Respecto al nivel de adquisición de la competencia matemática PISA indica que “el nivel de competencia matemática de una persona se aprecia en la manera en que emplea sus conocimientos y habilidades matemáticas para resolver problemas” (OCDE, 2006, p.83). A continuación presentamos los niveles de competencia que propone PISA (MECD, 2013):

- En el nivel 6 los alumnos saben formar conceptos, generalizar y utilizar información basada en investigaciones y modelos de situaciones de problemas complejos. Pueden relacionar diferentes fuentes de información y representaciones y traducirlas entre ellas de manera flexible. Los estudiantes de este nivel poseen un pensamiento y razonamiento matemático avanzado. Estos alumnos pueden aplicar su entendimiento y comprensión, así como su dominio de las operaciones y relaciones matemáticas simbólicas y formales y desarrollar nuevos enfoques y estrategias para abordar situaciones nuevas. Los alumnos pertenecientes a este nivel pueden formular y comunicar con exactitud sus acciones y reflexiones relativas a sus descubrimientos, interpretaciones, argumentos y su adecuación a las situaciones originales.

- En el nivel 5, los alumnos saben desarrollar modelos y trabajar con ellos en situaciones complejas, identificando los condicionantes y especificando los supuestos. Pueden seleccionar, comparar y evaluar estrategias adecuadas de solución de problemas para abordar problemas complejos relativos a estos modelos. Los alumnos pertenecientes a este nivel pueden trabajar estratégicamente utilizando habilidades de pensamiento y razonamiento bien desarrolladas, así como representaciones adecuadamente relacionadas, caracterizaciones simbólicas y formales, e intuiciones relativas a estas situaciones. Pueden reflexionar sobre sus acciones y formular y comunicar sus interpretaciones y razonamientos.
- En el nivel 4, los alumnos pueden trabajar con eficacia con modelos explícitos en situaciones complejas y concretas que pueden conllevar condicionantes o exigir la formulación de supuestos. Pueden seleccionar e integrar diferentes representaciones, incluidas las simbólicas, asociándolas directamente a situaciones del mundo real. Los alumnos de este nivel saben utilizar habilidades bien desarrolladas y razonar con flexibilidad y con cierta perspicacia en estos contextos. Pueden elaborar y comunicar explicaciones y argumentos basados en sus interpretaciones, argumentos y acciones.
- En el nivel 3, los alumnos saben ejecutar procedimientos descritos con claridad, incluyendo aquellos que requieren decisiones secuenciales. Pueden seleccionar y aplicar estrategias de solución de problemas sencillos. Los alumnos de este nivel saben interpretar y utilizar representaciones basadas en diferentes fuentes de información y razonar directamente a partir de ellas. Son también capaces de elaborar breves escritos exponiendo sus interpretaciones, resultados y razonamientos.
- En el nivel 2, los alumnos saben interpretar y reconocer situaciones en contextos que solo requieren una inferencia directa. Saben extraer información pertinente de una sola fuente y hacer uso de un único modelo representacional. Los alumnos de este nivel pueden utilizar algoritmos, fórmulas, procedimientos o convenciones elementales. Son capaces de efectuar razonamientos directos e interpretaciones literales de los resultados.

- En el nivel 1, los alumnos saben responder a preguntas relacionadas con contextos que les son conocidos, en los que está presente toda la información pertinente y las preguntas están claramente definidas. Son capaces de identificar la información y llevar a cabo procedimientos rutinarios siguiendo unas instrucciones directas en situaciones explícitas. Pueden realizar acciones obvias que se deducen inmediatamente de los estímulos presentados. (p.29-30)

A modo de conclusión podemos decir que existe una relación muy estrecha entre la competencia matemática y la capacidad de resolver problemas. Si nuestra intención con este trabajo es mejorar la competencia matemática de los alumnos entendíamos que debíamos buscar un elemento en el que si fuéramos capaces de incidir y trabajar desde diferentes aspectos. Como hemos podido comprobar creemos que ese elemento es la resolución de problemas cercanos a la vida cotidiana. Entendemos que un alumno que ha desarrollado habilidades para la resolución de problemas será un alumno competente en matemáticas, también entendemos que a mayor nivel de competencia matemática que haya adquirido un alumno mayor capacidad para resolver problemas de mayor complejidad y por lo tanto más reales tendrá.

1.2.1. La competencia matemática en el Sistema Educativo Español (LOMCE)

En este apartado queremos analizar la presencia de la competencia matemática en el actual sistema educativo en nuestro país. Para ello hemos revisado los aspectos normativos, la descripción que hace la ley en vigor, las referencias a la competencia que hace el decreto que desarrolla el currículo de secundaria y bachillerato del Ministerio de Educación y Ciencia, además de revisar la concreción que realiza el Gobierno de Canarias en su decreto de currículo.

El objetivo de esta revisión es comprender la concreción de los aspectos relacionados con la competencia matemática que propone la ley educativa.

En el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato propone que del conjunto de las competencias clave se deben potenciar en el trabajo de las asignaturas la

comunicación lingüística, la competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.

En el anexo I de la orden ECD/65/2015 de 21 de enero de 2015 se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. En dicho anexo se describen las competencias clave en el Sistema Educativo Español. Aunque en la ley se presenta como una de las siete competencias clave, en la descripción que se hace de la competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología aparece en primer lugar la descripción de los diferentes aspectos de la competencia matemática y en segundo lugar la descripción de las competencias básicas en ciencia y tecnología. Está claro que el aspecto instrumental de las matemáticas ayuda a integrar ambas competencias en una sola, y que la resolución de problemas contextualizados a otras ciencias, tanto en el caso de las ciencias básicas como en las tecnológicas, favorece el trabajo en el aula de esta competencia integrada.

En la descripción que hemos mencionado relaciona la competencia matemática con la capacidad que deben tener los alumnos para aplicar el razonamiento matemático y sus herramientas, con el objetivo de que sean capaces, en un contexto determinado, de describir, interpretar y predecir distintos fenómenos. Entendemos que los alumnos que vayan adquiriendo esta competencia irán desarrollando la capacidad de generar modelos matemáticos, es decir, la capacidad de encontrar patrones o regularidades en los fenómenos estudiados. Considerando ésta una buena oportunidad de que los alumnos capten la funcionalidad de las matemáticas y valoren su presencia en el mundo que nos rodea.

En el desarrollo de la competencia matemática también se asume la necesidad de adquirir unos conocimientos matemáticos tales como los números, las medidas y las estructuras y, ser capaces de realizar operaciones, producir representaciones, además de comprender el conjunto de aquellos términos matemáticos necesarios. Todo ello con el objeto de desarrollar los aspectos funcionales de las matemáticas que les permitan la transferencia a determinados contextos, ya sean personales, sociales, profesionales o científicos. Aunque no debemos olvidar que se considera fundamental el uso, tanto en las estrategias de enseñanza como en el aprendizaje, de los recursos tecnológicos.

Un aspecto que consideramos importante y que como veremos más adelante hemos tenido en cuenta en nuestro trabajo es la interpretación de los resultados y la adecuación de los mismos al contexto representado en el enunciado del problema. En la descripción indica que “forma parte de esta destreza la creación de descripciones y explicaciones matemáticas que llevan implícitas la interpretación de resultados matemáticos y la reflexión sobre su adecuación al contexto, al igual que la determinación de si las soluciones son adecuadas y tienen sentido en la situación en que se presentan” (Orden ECD/65/2015 de 21 de enero de 2015, p. 6993).

Respecto a las actitudes y valores que los alumnos deben adquirir en el trabajo en el aula, estas se basan en el rigor y la exactitud en el trabajo matemático. Se deben tener en cuenta a la hora de diseñar las estrategias de enseñanza y aprendizaje ya que son aspectos que hay que ser capaces de evaluar y conseguir que los alumnos valoren dentro de lo que consideramos la forma de hacer matemáticas. Por lo tanto, debemos conseguir que a la hora de trabajar en el aula se valore la búsqueda de soluciones aunque no sean correctas como forma de allanar el camino hacia la solución que buscamos.

Las cuatro áreas que la ley propone que hay que trabajar son las relacionadas con los números, el álgebra, la geometría y la estadística. A continuación reproducimos lo que aparece en la orden (Orden ECD/65/2015 de 21 de enero de 2015, p. 6994) respecto a la forma como se interrelacionan estas áreas:

- La cantidad: esta noción incorpora la cuantificación de los atributos de los objetos, las relaciones, las situaciones y las entidades del mundo, interpretando distintas representaciones de todas ellas y juzgando interpretaciones y argumentos. Participar en la cuantificación del mundo supone comprender las mediciones, los cálculos, las magnitudes, las unidades, los indicadores, el tamaño relativo y las tendencias y patrones numéricos.
- El espacio y la forma: incluyen una amplia gama de fenómenos que se encuentran en nuestro mundo visual y físico: patrones, propiedades de los objetos, posiciones, direcciones y representaciones de ellos; decodificación y codificación de información visual, así como navegación e interacción dinámica con formas reales, o con representaciones. La competencia matemática en este sentido incluye una

serie de actividades como la comprensión de la perspectiva, la elaboración y lectura de mapas, la transformación de las formas con y sin tecnología, la interpretación de vistas de escenas tridimensionales desde distintas perspectivas y la construcción de representaciones de formas.

- El cambio y las relaciones: el mundo despliega multitud de relaciones temporales y permanentes entre los objetos y las circunstancias, donde los cambios se producen dentro de sistemas de objetos interrelacionados. Tener más conocimientos sobre el cambio y las relaciones supone comprender los tipos fundamentales de cambio y cuándo tienen lugar, con el fin de utilizar modelos matemáticos adecuados para describirlo y predecirlo.
- La incertidumbre y los datos: son un fenómeno central del análisis matemático presente en distintos momentos del proceso de resolución de problemas en el que resulta clave la presentación e interpretación de datos. Esta categoría incluye el reconocimiento del lugar de la variación en los procesos, la posesión de un sentido de cuantificación de esa variación, la admisión de incertidumbre y error en las mediciones y los conocimientos sobre el azar. Asimismo, comprende la elaboración, interpretación y valoración de las conclusiones extraídas en situaciones donde la incertidumbre y los datos son fundamentales.

Debido a que nuestro trabajo se desarrolla en 3º ESO hemos revisado las aportaciones que hace el Decreto 83/2016, de 4 de julio, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Canarias. En los cursos de tercero y cuarto de educación secundaria obligatoria la ley propone dos asignaturas que deben elegir los alumnos atendiendo a sus necesidades de aprendizaje de las matemáticas en función de los estudios que quieran cursar posteriormente. Por un lado tenemos las matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, como se deduce de su nombre está dirigida a aquellos alumnos cuya intención es continuar con estudios de bachillerato, y por otro lado las matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas que la elijen los alumnos que piensan en estudiar formación profesional de grado medio. Aunque hay diferencias en los currículos propuestos para ambas asignaturas, la ley insiste en la necesidad de que independientemente de la opción elegida los alumnos tengan las mismas oportunidades de adquirir la competencia matemática.

En el decreto se indica que la contribución a la competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología de la asignatura de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas es la siguiente:

en cuanto que plantea investigaciones, estudios estadísticos y probabilísticos, representaciones gráficas de datos, medida, análisis y descripción de formas geométricas que encontramos en el entorno y la vida cotidianos; todo esto, integrado en situaciones de aprendizaje, que, partiendo de interrogantes motivadores para el alumnado, le hagan diseñar, de forma individual, grupal o colaborativa, un plan de trabajo para poder resolver el problema inicial, en donde reflejen el análisis de la información proporcionada, la búsqueda de información adicional, la clasificación y el análisis de los datos, las posibles estrategias de resolución y la coherencia de las soluciones (p.18156).

1.2.2. La resolución de problemas en el currículo

En este apartado queremos analizar la presencia de la resolución de problemas en el sistema educativo, centrándonos en la asignatura de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 3º ESO.

En la LOMCE, en su artículo 6 apartado 2, como uno de los elementos que integran el currículo encontramos: “las competencias, o capacidades para aplicar de forma integrada los contenidos propios de cada enseñanza y etapa educativa, con el fin de lograr la realización adecuada de actividades y la resolución eficaz de problemas complejos” (p.97868). Plantea las competencias como elemento curricular y como integrador de contenidos con el objetivo de que los alumnos sean capaces de resolver actividades pero principalmente resolver problemas.

Según el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas asocia la resolución de problemas junto con la realización de proyectos de investigación como los ejes fundamentales de este proceso. Además la competencia matemática implica a otras, como:

la comunicación lingüística, al leer de forma comprensiva los enunciados y comunicar los resultados obtenidos; el sentido de iniciativa y emprendimiento al establecer un plan de trabajo en revisión y modificación continua en la medida que se va resolviendo el problema; la competencia digital, al tratar de forma adecuada la información y, en su caso, servir de apoyo a la resolución del problema y comprobación de la solución; o la competencia social y cívica, al implicar una actitud abierta ante diferentes soluciones. (p.389)

Hasta aquí hemos incluido algunas referencias importantes que hace el sistema educativo a la resolución de problemas. A continuación identificamos en el currículo del nivel al que hemos dirigido nuestro trabajo las referencias a la resolución de problemas.

Como hemos comentado en el apartado anterior en 3º y 4º de ESO encontramos dos asignaturas del área de matemáticas, por un lado las matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas y por otro lado las matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas.

El currículo de ambas asignaturas se encuentra estructurado en los siguientes apartados:

- Introducción.
- Contribución a las competencias.
- Contribución a los objetivos de etapa.
- Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables.
- Orientaciones y estrategias didácticas.
- Bloques de aprendizaje.

Vamos a centrarnos en la asignatura de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas (Decreto 83/2016) ya que es la asignatura en la que hemos realizado nuestro trabajo.

En el primer párrafo de la introducción encontramos que la asignatura contribuye al desarrollo de ciertas capacidades en los alumnos, entre ellas la de “dotarle de flexibilidad

para tratar situaciones y buscar variantes a los problemas; tener paciencia y perseverancia en la búsqueda de soluciones” (p.18155). También se entiende que por “su carácter instrumental el conocimiento matemático se convierte, en este sentido, en una herramienta, por un lado, eficaz para que el alumnado se enfrente a problemas de la vida real y se desenvuelva en ella de forma activa y autónoma, y para que estructure y comprenda otras ramas científicas”(p.18155). Vemos como en el currículo ya se orienta la asignatura hacia la solución de problemas y a mejorar la actitud de los alumnos ante los mismos.

Respecto a los objetivos de la etapa, la asignatura contribuye a la consecución de los objetivos de la etapa de Educación Secundaria por diferentes motivos, en este caso destacamos la de “facilitar al alumnado las herramientas necesarias para realizar investigaciones y resolver problemas en contextos y situaciones reales y atractivos para el alumnado, elaborando productos, de carácter oral y escrito, sobre el proceso seguido” (p.18155). Otro aspecto que propone que se debe trabajar es la elaboración de informes tanto orales como por escrito, incorporando en el área de matemáticas el desarrollo de la competencia lingüística, tal y como propone la LOMCE entre sus recomendaciones respecto a las competencias clave.

Sobre la contribución de la asignatura a las competencias indica que respecto a las capacidades que desarrollan la actividad matemática podemos leer que:

es la habilidad de formular, plantear, interpretar y resolver problemas, ya que permite a las personas emplear los procesos cognitivos para abordar y resolver situaciones interdisciplinares en contextos reales, lo que resulta de máximo interés para el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico. (p.18156)

En referencia a los contenidos nos indica que los aspectos relacionados con la resolución de problemas deben trabajarse de forma transversal en todo el currículo “y no convertirse en una mera de realización de ejercicios” (p.18161). Hace una referencia explícita a trabajar algo más que ejercicios en clase, aunque en esta referencia a ejercicios puede estar refiriéndose también a ejercicios con contexto, entendemos que se refiere a introducir tareas que vayan más allá de los ejercicios de cálculo. Resume diciendo que “debe desarrollar en el alumnado una forma personal y matemática de enfrentarse a los problemas expresando de forma oral y escrita el proceso seguido y sus conclusiones”

(p.18161). Vuelve a utilizarse una referencia clara a la utilización del lenguaje, es decir, a la necesidad de lograr que los alumnos sean capaces de comunicarse en un contexto matemático.

En el apartado correspondiente a las orientaciones metodológicas y estrategias didácticas a seguir en esta asignatura podemos leer:

Los contenidos matemáticos deben aportar a nuestro alumnado herramientas eficaces para enfrentarse a problemas reales y dotar de significado los cálculos a realizar, por lo que deben ser en todo momento aprendizajes funcionales, significativos y orientados a la acción, realización de tareas o situaciones problema, aprendizaje basado en proyectos... Es decir, se debe buscar siempre una finalidad para todo aquello que se realiza en el aula; por eso, el para qué, el cómo y el por qué se realizan los cálculos deben ser tan importantes como la precisión y la corrección en hacerlos, pues de nada servirá tener las herramientas si no sabemos cómo usarlas y cuáles son más adecuadas según el contexto y la situación. (p.18162)

En este apartado, quizás uno de los más importantes y menos consultado por el profesorado, hace una referencia a hacer explícito en el proceso de enseñanza de las matemáticas la funcionalidad de la misma, es decir, potenciar el aprendizaje matemático en contexto, situar al alumno en una realidad que se puede comprender y por lo tanto, abordar matemáticamente.

En el apartado donde se desarrollan los bloques de aprendizaje de esta asignatura encontramos un primer bloque denominado: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. En este bloque propone un criterio de evaluación que dedica exclusivamente a la resolución de problemas:

Resolver problemas numéricos, geométricos, funcionales y estadístico-probabilísticos de la realidad cotidiana, desarrollando procesos y utilizando leyes de razonamiento matemático; asimismo, analizar y describir de forma oral o mediante informes, el proceso seguido, los resultados, las conclusiones, etc., a través del lenguaje matemático. Además, comprobar, analizar e interpretar las soluciones obtenidas, reflexionando sobre la validez de las mismas y su aplicación en diferentes contextos, valorar críticamente las

soluciones aportadas por las demás personas y los diferentes enfoques del mismo problema, trabajar en equipo, superar bloqueos e inseguridades y reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras. (p.18163)

Además, añade una explicación al criterio de evaluación para intentar clarificar las consideraciones a las que hace referencia para poder favorecer la integración del mismo en los procesos de enseñanza y aprendizaje:

Con este criterio se trata de comprobar si el alumnado, individualmente o en grupo, reconoce y resuelve diferentes situaciones problemáticas de la realidad, planteando procesos de investigación y siguiendo una secuencia consistente en la comprensión del enunciado, la discriminación de los datos y su relación con la pregunta, la realización de un esquema de la situación, la elaboración de un plan de resolución y su ejecución conforme a la estrategia más adecuada (estimación, ensayo-error, modelización, matematización, reconocimiento de patrones, regularidades y leyes matemáticas...), la realización de los cálculos necesarios y la obtención de una solución y comprobación de la validez de los resultados. Asimismo se trata de verificar si el alumnado profundiza en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc., y comprueba la validez de las soluciones obtenidas, evaluando la eficacia y las limitaciones de los modelos utilizados o contruidos. También se pretende evaluar si verbaliza y escribe los procesos mentales seguidos y los procedimientos empleados, si en una dinámica de interacción social comparte sus ideas y enjuicia de manera crítica las de las demás personas y los diferentes enfoques del problema para posteriormente elegir el más adecuado, y si es perseverante en la búsqueda de soluciones y confía en su propia capacidad para encontrarlas. (p.18163)

Asociados a este criterio presenta 22 estándares de aprendizaje evaluables, que la ley los define como “especificaciones de los criterios de evaluación que permiten definir los resultados de aprendizaje, y que concretan lo que el estudiante debe saber, comprender y saber hacer en cada asignatura; deben ser observables, medibles y evaluables y permitir graduar el rendimiento o logro alcanzado” (p.172), los estándares que propone son los siguientes:

1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada.
2. Analiza y comprende el enunciado de los problemas datos, relaciones entre los datos, contexto del problema.
3. Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema.
4. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia.
5. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas, reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas.
6. Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.
7. Utiliza las leyes matemáticas encontradas para realizar simulaciones y predicciones sobre los resultados esperables, valorando su eficacia e idoneidad.
8. Profundiza en los problemas una vez resueltos: revisando el proceso de resolución y los pasos e ideas importantes, analizando la coherencia de la solución o buscando otras formas de resolución.
9. Se plantea nuevos problemas, a partir de uno resuelto: variando los datos, proponiendo nuevas preguntas, resolviendo otros problemas parecidos, planteando casos particulares o más generales de interés, estableciendo conexiones entre el problema y la realidad.
10. Expone y defiende el proceso seguido además de las conclusiones obtenidas utilizando distintos lenguajes: algebraico, gráfico, geométrico, estadístico, probabilístico.
11. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés.

12. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático, identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios.
13. Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las matemáticas.
14. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad.
15. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia.
16. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia. Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados.
17. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada.
18. Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación.
19. Distingue entre problemas y ejercicios y adopta la actitud adecuada para cada caso.
20. Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantearse preguntas y buscar respuestas adecuadas, tanto en el estudio de los conceptos como en la resolución de problemas.
21. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización, valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad.

22. Reflexiona sobre los problemas resueltos y los procesos desarrollados, valorando la potencia y sencillez de las ideas claves, aprendiendo para situaciones futuras similares.

Al tratarse de concreciones del currículo y con un carácter evaluador deben quedar reflejados en las tareas que se proponen a los alumnos con este fin.

Respecto a los contenidos de este bloque de aprendizaje encontramos:

- Planificación del proceso de resolución de problemas: comprensión del enunciado, discriminación de los datos y su relación con la pregunta, elaboración de un esquema de la situación, diseño y ejecución de un plan de resolución con arreglo a la estrategia más adecuada, obtención y comprobación de los resultados, respuestas y generalización.
- Desarrollo de estrategias y procedimientos: ensayo-error, reformulación del problema, resolución de subproblemas, recuento exhaustivo, análisis inicial de casos particulares sencillos, búsqueda de regularidades y leyes, etc.
- Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, argumentación sobre la validez de una solución o su ausencia, etc., todo ello en dinámicas de interacción social con el grupo.
- Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales y estadísticos.
- Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.
- Confianza en las propias capacidades para el desarrollo de actitudes adecuadas y afrontamiento de las dificultades propias del trabajo científico.

- Comunicación del proceso realizado, de los resultados y las conclusiones con un lenguaje preciso y apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), mediante informes orales o escritos.

Como podemos ver en las propuestas de este bloque de aprendizaje, entre los contenidos y criterio de evaluación, se entiende que se debe programar el aprendizaje de la resolución de problemas. Aunque vemos que es una propuesta bastante amplia y que necesita de un análisis detallado de las tareas a realizar con los alumnos que permitan evaluar la adquisición de estos aprendizajes.

Un ejemplo del proceso que sugerimos seguir en este estudio se encuentra en el bloque que denomina números y álgebra y que en el criterio de evaluación 4 hace referencia a la resolución de problemas mediante el uso de las progresiones, planteamiento de ecuaciones y sistemas de ecuaciones “contrastando e interpretando las soluciones obtenidas, valorando otras formas de enfrentar el problema y describiendo el proceso seguido en su resolución de forma oral o escrita” (p.18168).

Asociado a este criterio en el desarrollo curricular presenta 3 estándares de aprendizaje evaluables que hacen alusión a la resolución de problemas:

42. Identifica progresiones aritméticas y geométricas, expresa su término general, calcula la suma de los “n” primeros términos, y las emplea para resolver problemas.

43. Valora e identifica la presencia recurrente de las sucesiones en la naturaleza y resuelve problemas asociados a las mismas.

Estos estándares reflejan parte del trabajo que hemos desarrollado en la propuesta de aprendizaje de contenidos a partir de un problema que presentamos posteriormente en el apartado correspondiente.

47. Formula algebraicamente una situación de la vida cotidiana mediante ecuaciones y sistemas de ecuaciones, las resuelve e interpreta críticamente el resultado obtenido.

1.3. La enseñanza de las matemáticas y la resolución de problemas

Una vez que hemos identificado la relación de la competencia matemática con la resolución de problemas, y que nuestro objetivo es mejorar la competencia matemática de los alumnos, a continuación en esta sección queremos consolidar la idea de la importancia de la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas.

Hemos de tener en cuenta que la concepción de la resolución de problemas que tenemos los profesores influye notablemente en la forma de cómo lo enseñamos, por lo que también creemos importante clarificar conceptos sobre la resolución de problemas. A la hora de resolver un problema podemos hablar de tres elementos implicados: la persona que resuelve el problema, sus capacidades, sus intereses y motivaciones; el problema en sí y por último, los aspectos no relacionados con los anteriores que llevan a la resolución del problema. En este apartado vamos a hablar principalmente de los problemas.

Aunque la enseñanza de las matemáticas en la escuela debe favorecer en los alumnos la adquisición de la competencia matemática entendemos que “un aspecto crucial en los programas de investigación en educación matemática, en las propuestas curriculares y en las prácticas de instrucción es el diseño o selección de problemas o actividades que promuevan el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes” (Santos, 2008, p.3). Desarrollar el pensamiento matemático según el decreto por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Canarias (Decreto 83/2016):

permitirá que el alumnado pueda ir realizando abstracciones, de forma progresiva, cada vez más complejas, modelizando situaciones reales, operando con expresiones simbólicas y elaborando hipótesis sobre situaciones que no puede experimentar, pero que tienen características similares a otras reales con las que puede sacar conclusiones. (p.18156)

Blanco y Cárdenas (2013), a partir de las aportaciones de diferentes investigadores, resaltan tres perspectivas sobre la resolución de problemas. La primera de estas perspectivas estaría asociada al papel que juega habitualmente en las aulas, es decir, como práctica posterior de la teoría explicada, con la intención principal de demostrar el grado de

dominio de la misma; una segunda perspectiva, es la relacionada con la enseñanza de estrategias para que los alumnos adquieran la capacidad de resolver problemas, y por último, la enseñanza de contenidos matemáticos vía resolución de problemas, es decir, comenzar con un problema cuyo desarrollo conduzca a los alumnos a la construcción de contenidos. Aunque hay profesores que en su trabajo en el aula significan más una perspectiva de la resolución de problemas frente a otras, numerosas investigaciones están a favor de que se introduzcan todos los enfoques en los procesos de enseñanza y aprendizaje en el aula (Gaulin, 2001; Contreras, 2009).

Hay autores que relacionan la resolución de problemas planteados en una variedad de situaciones con el aprendizaje significativo de las matemáticas (Godino et al., 2004; Zakaryan, 2011). Por ello se puede aceptar la idea de que un objetivo prioritario de la educación matemática debería ser que los alumnos aprendan matemáticas utilizando la resolución de problemas. Para conseguir este objetivo debe considerarse la resolución de problemas como un contenido a enseñar y debe adquirir un papel fundamental en nuestras clases de secundaria, este papel que debe ir mucho más allá de simplemente poner en práctica los últimos contenidos procedimentales explicados en el aula, tal y como indica también el currículo.

Que los alumnos resuelvan problemas interesantes para ellos es brindarles la oportunidad de realizar un trabajo matemático apoyado en la interacción, ya que los alumnos deben formular hipótesis y conjeturas, utilizar diferentes sistemas de representación y además en el proceso interviene la comunicación matemática (Godino et al., 2004). Nos parece importante remarcar la idea de que los problemas no sólo deben ser interesantes desde el punto de vista de los contenidos objeto de aprendizaje, sino que la situación planteada en el problema se mueva en un contexto que atraiga la atención del alumno, aunque evidentemente este aspecto no es nada fácil para el profesorado. Además, el papel de la interacción social en el aprendizaje se ve reforzada cuando los alumnos buscan soluciones a los problemas con sus compañeros, independientemente del nivel académico de los mismos.

Como ya hemos explicado anteriormente el objetivo principal de este trabajo es el contribuir al desarrollo de la competencia matemática de los alumnos a través de la resolución de problemas. “Aprender matemática resolviendo problemas y aprender a

56

resolver problemas haciendo matemática son dos enfoques que no se pueden desglosar por la fuerte interacción que tienen entre sí, y se recogen en la simple idea de hacer matemática” (Fernández, 2008, p.15).

Para mejorar los procesos de resolución de problemas matemáticos de los alumnos utilizaremos dos tipos de “problemas”. Problemas que pueden aparecer en cualquier libro de texto del nivel trabajado y que utilizaremos para hacer mediciones y trabajar las propuestas con los alumnos y problemas que utilizaremos para la construcción de contenidos y que serán problemas más en la línea de:

una situación, planteada con finalidad educativa, que propone una cuestión matemática cuyo método de solución no es inmediatamente accesible al alumno resolutor o grupo de alumnos que intenta resolverla, porque no dispone de un algoritmo que relacione los datos y la incógnita o de un proceso que identifique automáticamente los datos con la conclusión, y por lo tanto deberá buscar, investigar, establecer relaciones, implicar sus afectos, etc., para afrontar una situación nueva. (Vila y Callejo, 2004, p.31)

A continuación vamos a incluir algunas reflexiones sobre el concepto de problema y ejercicio que nos parecen interesantes y que han arrojado luz sobre nuestro trabajo. Al final daremos nuestra visión, teniendo en cuenta una serie de aspectos que nos han hecho concretar:

- El currículo oficial de matemáticas.
- La concreción del currículo oficial en el aula, es decir, por nuestra experiencia como profesores, tener claro qué se puede hacer realmente en un aula del nivel educativo al que nos dirigimos.
- El tratamiento que hacen los libros de texto.

Según Pozo et al. (1994) “uno sólo ve un problema si está dispuesto a asumir que ahí hay un problema, es decir, que hay una distancia entre lo que sabemos y lo que queremos saber y que esa distancia merece el esfuerzo de ser recorrida” (p.20).

Podemos entender que tenemos un problema cuando queremos alcanzar una meta y el camino directo está bloqueado, y la búsqueda de caminos alternativos es la búsqueda de la solución (Castro, 2002).

Para Ponte (2004) una tarea cerrada y accesible es un ejercicio, mientras que un problema, aunque también la considera una tarea cerrada, tiene una dificultad mayor para los alumnos. Este autor hace una distinción entre problema y ejercicio teniendo en cuenta la dificultad de la tarea para el alumno, y no el tipo de respuesta, abierta o cerrada.

Vila y Callejo (2004) entienden problema como:

Una situación que plantea unas cuestiones matemáticas cuyo método de solución no es inmediatamente accesible al sujeto que intenta responderla porque no dispone de un algoritmo que relacione los datos y la incógnita o los datos y la conclusión y debe, por tanto, buscar, investigar, relacionar, implicar sus afectos, etc., para hacer frente a una situación nueva. (p.73)

Núñez, Valdés y Solana (2001) entienden problema matemático como “toda situación vinculada al universo de la Matemática que, a través de un enunciado coherente, exprese la necesidad de la búsqueda de respuestas a interrogantes cognitivas, para la cual no se dispone, a priori, de un procedimiento predeterminado” (p.41).

Los problemas varían en los conocimientos necesarios para resolverlos, la forma en que aparecen y los procesos necesarios para resolverlos (Jonassen, 2004).

Fernández (2008) plantea la idea de que al resolver un problema se añade algo a lo que ya se sabe y además hay un protagonismo importante del sujeto que lo tiene que resolver, aunque no sepa cómo hacerlo.

Campistrous y Rizo (2013) definen problema como:

toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo. La vía para pasar de la situación o planteamiento inicial a la nueva situación exigida tiene que ser desconocida y la persona debe querer hacer la transformación. (p.3)

Ortega, Pacharromán y Sosa (2011) entienden problema como “planteamiento de una situación de respuesta desconocida, que no es inmediata, que el alumno tiene que resolver mediante métodos matemáticos y que, además, debe tener la voluntad de hacerlo” (p.144). Estos mismos autores proponen una serie de requisitos que debe cumplir un problema:

- Aceptación. El individuo o grupo, debe aceptar el problema, debe existir un compromiso formal, que puede ser debido a motivaciones tanto externas como internas.
- Bloqueo. Los intentos iniciales no dan fruto, las técnicas habituales de abordar el problema no funcionan.
- Exploración. El compromiso personal o del grupo fuerzan la exploración de nuevos métodos para atacar el problema. (p.102-103)

Un aspecto que genera bastante confusión entre el profesorado es la diferencia entre ejercicio y problema. A continuación presentamos aportaciones de diferentes autores sobre estas diferencias con la intención de aclarar un poco más la terminología.

Luque (2002) propone ciertas diferencias entre problema y ejercicio que hacen referencia a la pregunta que nos hacen, el camino para encontrar la respuesta, el acceso a los contenidos necesarios para resolverlos, el tiempo que hay que emplear y el nivel de dificultad de los mismos según quién los resuelve.

Lorenzo (2005) relaciona la diferencia entre ejercicio y problema con los rasgos cognitivos poseídos por la persona que busca responder a la pregunta. En este punto es importante hacer la siguiente consideración, y es que muchas veces lo que el profesor intenta que el alumno resuelva como un simple ejercicio se convierte en un problema para el alumno que intenta resolverlo.

Para Contreras (2009) “un ejercicio no está contextualizado, tiene una formulación explícita, única y cerrada, y para su resolución – por un proceso único y de carácter exacto - se prevé el uso de algoritmos previamente conocidos” (p.57).

Un problema se diferencia de un ejercicio en que el resolutor no tiene un procedimiento o algoritmo que ciertamente conduzca a una solución (Kantowski, citado en Borasi, 1986).

Valverde (2013) entiende que “en los ejercicios se puede decidir con rapidez si se saben resolver o no; se trata de aplicar un algoritmo, que se puede conocer o no, pero una vez localizado se aplica y se halla la respuesta” (p.79).

Para Luque (2002) “los ejercicios tienen como objetivo aplicar los conocimientos y conseguir agilidad en las estrategias de cálculo” (p.40). Nuestra experiencia nos ha permitido contrastar que el alumno se acerca a un ejercicio con la intención clara de repetir un procedimiento que ha aprendido en clase, la única preocupación es la de no equivocarse en los cálculos.

Para Díaz y Poblete (2001) un ejercicio es “una situación donde al alumno le viene rápidamente a su mente un modo de responder la pregunta formulada (...) porque resulta ser la práctica de una rutina en la cual ya ha sido iniciado”(p.36).

Para Vila y Callejo (2004) en las cuestiones prácticas se intenta que haya una conexión con la vida real introduciendo un enunciado, aunque hay claros indicios del procedimiento matemático para resolverla, sobretudo porque aparecen en una unidad didáctica determinada. Nuestro trabajo intenta facilitar a los alumnos estrategias para resolver estas cuestiones y abordarlas desde distintos enfoques procedimentales, teniendo en cuenta que intentamos no asociarlas a ninguna unidad didáctica concreta. Estos mismos autores enmarcan las actividades que se realizan en clase de matemáticas en un continuo teniendo en cuenta la demanda cognitiva y la necesidad de regular las emociones, desde ejercicios rutinario hasta actividades más abiertas de investigación.

Entendemos que en la resolución de problemas los alumnos deben movilizar unas destrezas que podríamos considerar más complejas, pero aunque los ejercicios se clasifiquen como rutinarios y de baja demanda cognitiva pueden necesitar de los alumnos unas habilidades de cálculo que habitualmente no poseen y que son una parte fundamental de la competencia matemática, y como sabemos contribuyen enormemente a las dificultades con el área.

Con lo expuesto hasta ahora creemos que hemos clarificado la diferencia entre ejercicios y problemas. Y ya estamos en condiciones de explicar lo que hemos hecho en nuestro trabajo.

1.3.1. Aportación al concepto de problema

En esta investigación hemos trabajado dos tipos de tareas distintas relacionadas con lo que hemos visto anteriormente. Por un lado unas situaciones problema que hemos utilizado para que los alumnos aprendan contenidos relacionados con las sucesiones. Son situaciones que representan un contexto cercano a la realidad, los procedimientos son desconocidos por los alumnos ya que el objetivo que buscamos con dicha situación es que sean capaces de construir dichos contenidos, y además nos interesa que se genere curiosidad por la solución a dicho problema. Y por otro lado utilizaremos unos problemas escolares, para que los alumnos practiquen las estrategias presentadas a través de una metodología de aprendizaje cooperativa. Queremos ampliar la concepción de problema escolar tal y como nosotros lo hemos entendido en este trabajo:

- Una situación que plantea cuestiones matemáticas que deben ser conocidas por los alumnos o accesibles con la ayuda del profesor.
- El contexto de la situación debe ser cercana y, en la medida de lo posible, interesante para los alumnos. Es decir, es importante que el enunciado del problema debe conseguir que el alumno se implique en su solución de forma efectiva.
- El enunciado debe ser coherente, con un vocabulario y una estructura gramatical del nivel de los alumnos.
- En la medida de lo posible la cuestión planteada debe poder resolverse con más de un procedimiento matemático.
- La búsqueda de las respuestas a la situación genera un conflicto cognitivo en el alumno al no conocer una respuesta inmediata. Es decir, no hemos considerado problema para nuestros intereses aquellos en los que se le pide al alumno que calcule algo que aparece explícito en la pregunta, y por lo tanto, debe utilizar una fórmula determinada.

Es importante tener en cuenta que no todos los problemas para trabajar en el ámbito escolar que aparecen identificados como problemas en los libros de texto se ajustan a los aspectos mencionados anteriormente.

Además, entendemos la resolución de problemas como el proceso que se realiza a la hora de enfrentarse a una situación a la que hay que encontrar la solución, por lo que estamos interesados en todo el proceso que sigue el alumno y no solamente en la respuesta. La respuesta encontrada puede ser incorrecta pero lo más cercana posible a la solución y queremos que el alumno reflexione sobre la respuesta encontrada y sobre el proceso que ha seguido.

1.3.2. Estrategias para enfrentarse a un problema

A continuación indicamos los aspectos relacionados con las estrategias a poner en juego a la hora de resolver los problemas que trabajamos en el aula. Este punto también ha sido objeto de revisión bibliográfica y hemos encontrado diferencias en la terminología empleada.

Cuando un alumno se encuentra ante el enunciado de un problema debe movilizar un conjunto de estrategias, consideradas éstas como los métodos o técnicas que les llevarán a la solución de dicho problema o a por lo menos encontrarse más cerca de dicha solución. La capacidad de aplicar diferentes estrategias en un mismo problema facilitará acercarse a una solución del mismo. Por lo tanto, entendemos que resolver un problema es pasar de una situación inicial a otra, en la que puede ser que hayamos encontrado respuesta al mismo o nos encontremos en otra situación que nos resulte más reconocible, y este cambio de situación se facilita a través de la aplicación de determinadas estrategias que deben aprender. Las estrategias les permitirán ser más competentes en los procesos de resolución de problemas y progresar en su competencia matemática que es el objetivo de nuestro trabajo.

En la línea de lo propuesto por García y Suhit (2006) creemos que hay que dar la oportunidad a los alumnos de descubrir su propio estilo a la hora de resolver problemas ya que por nuestra experiencia sabemos que hay alumnos que se encuentran cómodos ante un determinado tipo de problema y rechazan otros. Los profesores deben favorecer el análisis, la discusión y la crítica de los procesos que se emplean en la resolución de los problemas, con el objetivo de que sean capaces de entender su forma de razonar y favorecer una actitud positiva ante los problemas.

Blanco (1996) identifica las estrategias heurísticas con aquellas operaciones útiles para la solución de problemas y a “las preguntas, pautas o indicaciones dirigidas a centrar la atención del resolutor sobre ciertos aspectos del problema, suelen denominarse sugerencias heurísticas” (p.11). Para García (2002) las reglas o consejos que ayudan a los alumnos a tener éxito con la resolución de problemas ya que ayudan a comprenderlos mejor las identifica con estrategias heurísticas. Toboso (2004) las entiende como “procesos cognitivos conscientes que planifican, dirigen, controlan y evalúan los procedimientos que llevan a la solución del problema” (p.132).

Algarabel, Dasí, Gotor y Perea (1995) define heurístico:

como una estrategia de aplicabilidad más allá de un problema concreto, pero específica a un dominio de conocimiento, cuyos efectos, de cara a su solución, no están claramente definidos, aunque puede utilizarse junto con los recursos de conocimiento y capacidades para coadyuvar a la búsqueda de la solución. (p.144)

Según Toboso (2004) la estrategia “representa la técnica general para resolver el problema y, aunque no garantice la solución, constituye una guía fundamental” (p.144). Cañadas (2007) indica que si no se conocen las reglas para resolver un problema podemos recurrir a procedimientos de tanteo en la búsqueda de soluciones que guían el proceso de resolución. Muchas veces rechazamos el tanteo para resolver un problema como un método poco matemático, pero muchas veces los alumnos son incapaces de comprender un problema si no recurren al tanteo como primera aproximación.

Como hemos visto en esta revisión, cuando se habla de estrategia heurística, sugerencia heurística, técnica general, método, etc., se hace referencia a estrategias en la resolución de problemas. En nuestro trabajo cuando hablamos de estrategia lo hacemos en un sentido amplio. Debemos tener en cuenta que la utilización de determinadas estrategias para resolver problemas está condicionada a la experiencia previa del alumno con problemas similares. A la hora de elaborar nuestra propuesta de trabajo hemos tenido en cuenta desde estrategias generales hasta específicas de los contenidos propuestos.

A continuación presentamos una serie de estrategias que hemos intentado llevar al aula en los procedimientos de resolución empleados con el grupo clase, tomadas de Solaz-Portolés, Rodríguez, Gómez y Sanjosé (2010):

- Producción libre: se proponen múltiples ideas y posteriormente se analizan, escogiéndose las más adecuadas.
- Analogía: se recuerdan problemas resueltos anteriores, se buscan similitudes y se intentan transferir a nuestro problema.
- Análisis paso a paso: se busca una secuencia de pasos para llegar gradualmente hasta la solución del problema.
- Visualización: se trata de representar mentalmente el problema y, a continuación se llevan a cabo dibujos, esquemas o gráficos que facilitan la resolución del problema.
- Combinación: se combinan diferentes aspectos del problema y se intenta llegar a un resultado que permita sugerir una solución al problema. (p.142)

Según el decreto que desarrolla el currículo propone que se desarrolle en los alumnos estrategias y procedimientos para la resolución de problemas, citando el ensayo-error, reformulación del problema, resolución de subproblemas, recuento exhaustivo, análisis inicial de casos particulares sencillos, búsqueda de regularidades y leyes, etcétera. Respecto al ensayo y error Contreras (2009) propone tres opciones, ensayo y error fortuito, que es un proceso al azar, en contraposición a un ensayo y error sistemático, y por último, un proceso dirigido contrastando las respuestas para evaluar la cercanía a la respuesta buscada. La utilización del error como fuente de aprendizaje debe conducirnos a utilizar estrategias de resolución que los alumnos identifiquen como erróneas en el momento de verificar los resultados.

Indicamos algunas acciones como estrategia general que Mederos y Martínez (2005) proponen para trabajar en un aula donde se genere un ambiente de resolución de problemas:

- Insistir en que la obtención de la solución de un problema no debe considerarse como la etapa final del mismo. Una vez que se haya obtenido su solución, se debe

realizar un análisis de las ventajas, calidad o deficiencias de las estrategias o métodos utilizados en el proceso de resolución, ya que este tipo de análisis desempeña un papel fundamental en el desarrollo y aprendizaje de la matemática.

- aconsejar varias formas de resolución de un problema teniendo en cuenta los diferentes estilos de aprendizajes de los estudiantes, mediante la orientación de su análisis desde el punto de vista de diferentes contextos matemáticos, por ejemplo, geométrico, algebraico, aritmético, funcional, etc.
- Utilizar problemas adecuados que motiven y faciliten la formación y desarrollo de conceptos.
- Utilizar cadenas del tipo (problema planteado – problema resuelto – nuevos problemas planteados) que motiven y faciliten diferentes generalizaciones de un concepto teniendo en cuenta el desarrollo del tipo de pensamiento que corresponde a cada nivel de enseñanza.
- Ofrecer impulsos y adecuados niveles de ayuda para que los estudiantes sientan la necesidad, una vez solucionado el problema, de plantear nuevos problemas dirigidos, por ejemplo, a eliminar alguna restricción bajo la cual fue resuelto, a un contexto más general dentro de la matemática, o a resolver un problema de su vida relacionado con el problema resuelto.
- Motivar el estudio de un nuevo tema mediante el planteamiento de un conjunto de problemas que le permita a los estudiantes comprender la importancia de dicho tema, y que resolverán durante el desarrollo del mismo. Estos problemas pueden estar relacionados con el desarrollo histórico del tema, con aplicaciones, con situaciones del contexto de los estudiantes, etc. (p.54-55).

1.3.3. PISA y la resolución de problemas

En esta subsección hacemos referencia al papel que el informe PISA, como programa internacional de evaluación de los sistemas educativos, le ha dado a la resolución de problemas en el contexto educativo. No pretende ser un estudio sobre los informes PISA y por ello hablaremos sobre las referencias de los distintos informes sobre la competencia

matemática, y en concreto sobre la resolución de problemas, que han aportado ideas al desarrollo de nuestro trabajo.

En PISA se identifica la competencia matemática con la “capacidad de los alumnos para analizar, razonar y comunicar ideas de manera eficaz al plantear, formular, resolver e interpretar las soluciones a un problema matemático en una variedad de situaciones” (OCDE, 2006, p.14). Entendemos por lo tanto que un alumno estará desarrollando la competencia matemática en la medida que esté trabajando tareas que le permitan desarrollar las capacidades de analizar, razonar y comunicarse enfrentándose a procesos de resolución de problemas.

En el marco del estudio PISA, Rico (2007) asocia la competencia matemática con “la capacidad de un individuo para identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, hacer juicios fundados y usar e implicarse con las matemáticas en aquellos momentos que presenten necesidades para su vida individual como ciudadano” (p.49). Se identifican las matemáticas con su utilidad, con el papel que juegan en el mundo que nos rodea y con la posibilidad que tienen de utilizarse en caso de necesidad. Las matemáticas son necesarias para la vida futura de las personas y por lo tanto se deben enseñar en la escuela teniendo en cuenta también este papel.

La solución de problemas en un contexto variado implica tres aspectos importantes en la evaluación PISA; uno de ellos es el contenido, otro, los procesos matemáticos y por último, las situaciones planteadas en los problemas. Respecto al contenido matemático, éste se organiza en función de cuatro ideas clave: cantidad, espacio y forma, cambio y relaciones, e incertidumbre. La selección de estos contenidos tiene relación con los tipos de problemas que surgen de la interacción de los ciudadanos en su vida cotidiana. Respecto a los procesos matemáticos, vienen definidos por las competencias generales que deben desarrollar los alumnos en la escuela, e incluyen el empleo del lenguaje matemático a un nivel adecuado, la creación de modelos, y por lo tanto la habilidad para identificar patrones y regularidades y, por último, las habilidades relacionadas con la solución de problemas.

Respecto a las situaciones representadas en los problemas, en las pruebas PISA se utiliza un estímulo, que puede venir dado en forma de texto, tabla, gráfico, figuras, etc., y a este estímulo introductorio sigue cierto número de tareas asociadas para que el alumno

conteste. Ya que esta evaluación se centra en los problemas del mundo real de los ciudadanos es importante el uso de las matemáticas en contextos reales, como por ejemplo ir de compras, viajar, cocinar, la economía doméstica, valorar cuestiones políticas, etc. Tareas que pueden encontrarse en una situación del mundo real y que proporcionan un contexto auténtico. La evaluación PISA se basa en estas situaciones, pero como el mismo informe dice: “estos usos de las matemáticas se basan en las habilidades que se han aprendido y practicado mediante el tipo de problemas que suelen presentarse en los libros de texto y en las aulas” (OCDE, 2006, p.74). En la evaluación no se utiliza la misma tipología de problemas escolares que aparecen en los libros de texto y que solemos utilizar en el aula, pero sí se entiende que el aprendizaje de esos problemas es la base de la evaluación que se lleva a cabo en PISA. Lógicamente entendemos que se debe avanzar en el aprendizaje de resolver tareas más relacionadas con el mundo real donde los alumnos pueden transferir lo aprendido en el aula.

El marco PISA 2012 (MECD, 2013) organiza los procesos matemáticos y la actividad que realiza un alumno frente a un problema, en torno a los términos formular, emplear e interpretar que aparecen en la definición de competencia matemática. Las categorías son:

- Formulación matemática de las situaciones. Incluye actividades como: identificación de los aspectos matemáticos de un problema situado en un contexto del mundo real e identificación de las variables significativas; reconocimiento de la estructura matemática en los problemas o situaciones (incluidas las regularidades, las relaciones y los patrones); simplificación de una situación o problema para que sea susceptible de análisis matemático; identificación de las limitaciones y supuestos que están detrás de cualquier construcción de modelos y de las simplificaciones que se deducen del contexto; representación matemática de una situación utilizando las variables, símbolos, diagramas y modelos estándares adecuados; representación de un problema de forma diferente, incluida su organización según conceptos matemáticos y formulando los supuestos adecuados; comprensión y explicación de las relaciones entre el lenguaje específico del contexto de un problema y el lenguajes simbólico y formal necesario para representarlo matemáticamente; traducción de un problema a lenguaje matemático o a una representación; reconocimiento de aspectos de un problema que se

corresponden con problemas conocidos o conceptos, datos o procedimientos matemáticos; y utilización de la tecnología (como una hoja de cálculo o la función de lista de una calculadora gráfica) para representar una relación matemática inherente a un problema contextualizado.

- Empleo de conceptos, datos, procedimientos y razonamientos matemáticos. Incluye actividades como: el diseño e implementación de estrategias para encontrar soluciones matemáticas; la utilización de herramientas matemáticas, incluida la tecnología, que ayuden a encontrar soluciones exactas o aproximadas; la aplicación de datos, reglas, algoritmos y estructuras matemáticas en la búsqueda de soluciones; la manipulación de números, datos e información gráfica y estadística, expresiones algebraicas y ecuaciones, y representaciones geométricas; la realización de diagramas, gráficos y construcciones matemáticas y la extracción de información matemática de los mismos; la utilización y el cambio entre distintas representaciones en el proceso de búsqueda de soluciones; la realización de generalizaciones basadas en los resultados de aplicar procedimientos matemáticos para encontrar soluciones; y la reflexión sobre argumentos matemáticos y la explicación y justificación de los resultados matemáticos.
- Interpretación, aplicación y valoración de los resultados matemáticos. Incluye actividades como: la reinterpretación de un resultado matemático en el contexto del mundo real; la valoración de la razonabilidad de una solución matemática en el contexto de un problema del mundo real; la comprensión del modo en que el mundo real afecta a los resultados y cálculo de un procedimiento o modelo matemático para realizar juicios contextuales sobre la forma en que los resultados deben ajustarse o aplicarse; la explicación de por qué un resultado o una conclusión matemática tiene o no sentido, dado el contexto de un problema; la comprensión del alcance y de los límites de los conceptos y las soluciones matemáticas; y el análisis e identificación de los límites del modelo utilizado para resolver un problema.

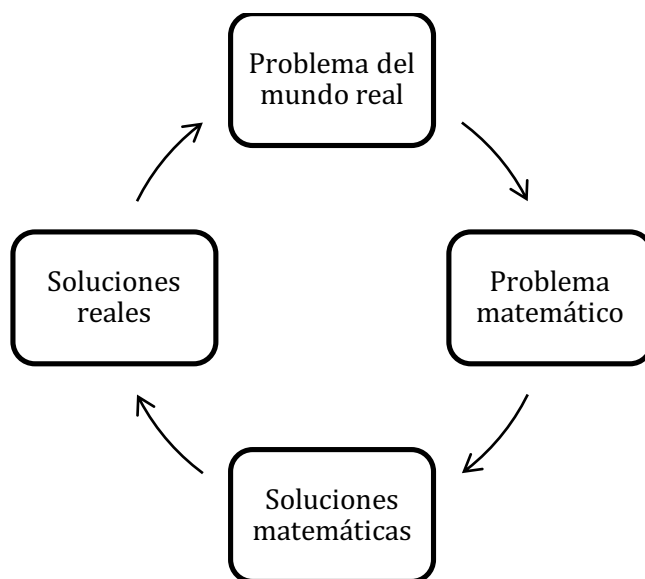
El marco PISA 2012 (MECD, 2013) identifica siete capacidades fundamentales relacionadas con los procesos anteriores y que por lo tanto los alumnos deben adquirir en la escuela: comunicación, matematización, representación, razonamiento y argumentación,

diseño de estrategias para resolver problemas, utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico, y por último, utilización de herramientas matemáticas. Estas capacidades que los futuros ciudadanos deben adquirir deben trabajarse en la escuela desarrollando estrategias didácticas que plantean tareas a los alumnos que lo permitan.

Respecto a la capacidad de comunicación, está claro que es imprescindible en la competencia matemática, ya que la resolución de problemas en sí mismos son procesos comunicativos, desde la lectura de los enunciados y de las cuestiones planteadas hasta la comunicación de los resultados, la argumentación de los procedimientos o de las estrategias, son oportunidades para que los alumnos se comuniquen y mejoren por lo tanto en su competencia lingüística.

Una de las capacidades propuesta en el marco de evaluación de PISA es la matematización (ver la Figura 1) que se fundamenta en cinco etapas. Esta estrategia comienza con un problema presente en la realidad. Posteriormente se reorganiza el problema a partir de la identificación de las matemáticas que son necesarias para resolverlo. A continuación, el problema se lleva hacia la abstracción matemática, convirtiendo el problema del mundo real a un problema matemático y, posteriormente se resuelve el problema. El último paso “supone responder a la pregunta, qué significado adquiere la solución estrictamente matemática al transponerla al mundo real” (OCDE, 2006, p.78). Matematizar para PISA debe ser uno de los objetivos principales de los sistemas educativos, y entiende que la resolución de problemas en la escuela no puede quedar reducida a resolver los ejercicios que aparecen en los libros de texto.

Figura 1: Matemización según PISA



Respecto a la representación como capacidad a desarrollar en la competencia matemática, en el informe PISA 2012 (MECD, 2013) encontramos que:

...entraña con mucha frecuencia representaciones de objetos y situaciones matemáticas. Esto puede suponer la selección, interpretación, traducción entre y utilización de distintas representaciones para reflejar una situación, interactuar con un problema o presentar el propio trabajo. Las representaciones a las que se hace referencia incluyen gráficos, tablas, diagramas, imágenes, ecuaciones, fórmulas y materiales concretos. (p.16)

La capacidad de razonamiento y argumentación “implica procesos de pensamiento arraigados de forma lógica que exploran y conectan los elementos del problema para realizar inferencias a partir de ellos, comprobar una justificación dada o proporcionar una justificación de los enunciados o soluciones a los problemas” (MECD, 2013, p.16).

El diseño de estrategias para resolver problemas como capacidad de la competencia matemática:

implica un conjunto de procesos de control fundamentales que guían al individuo para que reconozca, formule y resuelva problemas eficazmente. Esta destreza se caracteriza por la selección o diseño de un plan o estrategia cuyo fin es utilizar las matemáticas para resolver los problemas derivados de una tarea o contexto, además de guiar su

implementación. Esta capacidad puede ser requerida en cualquier etapa del proceso de resolución de problemas. (MECD, 2013, p.16)

La competencia matemática requiere la utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico:

implica la comprensión, interpretación, manipulación y utilización de expresiones simbólicas en un contexto matemático (incluidas las expresiones y operaciones aritméticas) regido por convenciones y reglas matemáticas. También supone la comprensión y utilización de constructos formales basados en definiciones, reglas y sistemas formales, así como el uso de algoritmos con estas entidades. Los símbolos, las reglas y los sistemas empleados varían en función de los conocimientos concretos de contenido matemático que se requieren en un ejercicio específico para formular, resolver o interpretar las matemáticas. (MECD, 2013, p.16)

La capacidad de utilización de herramientas matemáticas:

incluyen herramientas físicas, como los instrumentos de medición, además de calculadoras y herramientas informáticas que cada vez son más accesibles. El conocimiento y la habilidad para utilizar las distintas herramientas que pueden favorecer la actividad matemática, así como el conocimiento de sus limitaciones están implícitos en esta capacidad. (MECD, 2013, p.16)

1.3.4. Contextos

Los trabajos de investigación revisados hacen numerosas referencias a los contextos de los problemas. En este apartado hemos querido hablar sobre el contexto de un problema y realizar un análisis de la influencia que se le otorga en el proceso de resolución.

La enseñanza de las matemáticas en la escuela “tiene que situarse en el contexto apropiado para que sea relevante a los estudiantes” (Gómez, 1998, p.112). Respecto a la resolución de problemas Juidías y Rodríguez (2007) indican que “la adquisición y utilización de los conceptos y procedimientos matemáticos en la resolución de problemas están muy influidas por el contexto sociocultural donde las Matemáticas se enseñan y aprenden” (p.270).

Respecto al contexto de un problema, Borasi (1986) lo define como la situación en la que se inserta el problema y con la función principal de proporcionar información para encontrar la solución. Conejo y Rincón (2013) añaden la interpretación de la solución como función del contexto.

Si tenemos en cuenta que “en la sociedad actual es imprescindible manejar conceptos matemáticos relacionados con la vida diaria, en el ámbito del consumo, la economía privada y otras situaciones de la vida social” (Godino et al., 2004, p.95) las matemáticas que nuestros alumnos deben aprender deben permitir al alumno interactuar con estos contextos, y por lo tanto relacionarse con ellos.

Hay autores como D’Amore y Fandiño (2015) que han analizado los aspectos relacionados con la cotidianidad del alumno: “es necesario reconocer que el mundo “real” del estudiante no tiene en cuenta solo sus “vivencias” concretas, sino también las vivencias en las cuales él está inmerso, o a veces fantásticas (desde el punto de vista del adulto) pero aceptada como parte de su realidad” (p.3).

Vicente y Manchado (2016) señalan que “una situación será auténtica para un alumno cuando describa situaciones que se asemejan a su vida cotidiana, asumiendo que lo que es cotidiano en un contexto socio-cultural determinado no necesariamente lo es en otro” (p.368). Incluso dentro de un aula las vivencias de un alumno pueden no tener nada en común con las de otro, ya que estas vivencias dependen de su entorno socio-familiar.

En el caso de un problema rutinario, respecto a los contextos, podemos encontrar:

- Problema de contexto real: si se produce efectivamente en la realidad y compromete al alumno a actuar.
- Problema de contexto realista: si es susceptible de producirse realmente. Se trata de una simulación de la realidad o de una parte de la realidad.
- Problema de contexto fantasista: si es fruto de la imaginación y está sin fundamento en la realidad.

- Problema de contexto puramente matemático: si hace referencia exclusivamente a objetos matemáticos (números, relaciones y operaciones aritméticas, figuras geométricas, etc.) (Díaz y Poblete, 2001, p.37)

En la evaluación PISA (OCDE, 2006) se identifican cinco situaciones: personales, educativas, profesionales, públicas y científicas. Identifica el contexto de un problema con todos los elementos que aparecen en su formulación. Además, entiende la situación como “aquella parte del mundo del estudiante en la cual se sitúa la tarea” (Rico, 2007, p.57).

Goñi (2009) a partir de la propuesta de PISA propone los siguientes contextos:

- Personal – familiar. Es el contexto más íntimo y socialmente más cercano a cada persona.
- Social. Es lo que habitualmente entendemos por el lugar de desarrollo de la persona que abarca sus relaciones generales con las demás personas en los campos político, económico, deportivo, gastronómico, cultural, ocio, etc.
- Profesional. Es el ámbito en el que cada persona desarrolla su profesión; es decir el ámbito laboral.
- Escolar. Es el ámbito de las materias escolares que no son las Matemáticas. Lo entendemos como el contexto del resto de áreas del currículo en las que podemos aplicar conocimiento matemático.
- Académico. Consideramos contexto académico al ámbito de la propia Matemática y competencia académica en Matemáticas a la capacidad de aplicar conocimiento matemático en las Matemáticas.

En el marco de la evaluación PISA 2012 (MECD, 2013) “el contexto es aquel aspecto del mundo del individuo en el cual se encuadran situados los problemas” (p.23). En esta evaluación se reduce el contexto a cuatro categorías:

- Personal: los problemas clasificados en la categoría de contexto personal se centran en actividades del propio individuo, su familia y su grupo de iguales.

- Profesional: los problemas clasificados en la categoría de contexto profesional se centran en el mundo laboral.
- Social: los problemas clasificados en la categoría de contexto social se centran en la propia comunidad (ya sea local, nacional o global).
- Científico: los problemas clasificados en la categoría científico hacen referencia a la aplicación de las matemáticas al mundo natural y a cuestiones y temas relacionados con la ciencia y la tecnología. (p.23-25)

En la orden (OECD/65/2015) por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato en la descripción de la competencia matemática indica respecto a los contextos que “el uso de herramientas matemáticas implica una serie de destrezas que requieren la aplicación de los principios y procesos matemáticos en distintos contextos, ya sean personales, sociales, profesionales o científicos” (p.6993).

Como conclusión podemos decir que la contextualización de los contenidos en situaciones próximas al alumno es un elemento motivador para resolver los problemas. Por lo que, es importante trabajar los contenidos a través de problemas, y situar éstos en una variedad de contextos.

También hay que valorar que es difícil para el profesorado identificar los intereses de los alumnos, aquellos aspectos que pueden suscitar motivación en un grupo de alumnos no provocan el mismo efecto en otro grupo distinto, incluso entre individuos del grupo.

Otro aspecto que hay que señalar es que en muchos de los problemas que proponen los libros de texto el contexto donde se enmarca la operación matemática es irrelevante, es decir, no aporta nada al proceso de comprensión que debe realizar el alumno ya que no le permite imaginarse la situación planteada. Muchas veces encontramos en estos problemas representaciones visuales que sirven de estímulo, incluyendo información sobre el contexto.

1.3.5. Dificultades que presentan los alumnos en la resolución de problemas

A continuación recogemos las dificultades y/o errores que surgen cuando los alumnos se encuentran ante los problemas.

En los procesos de resolución de problemas es importante tener en cuenta “que es natural que los alumnos tengan dificultades y cometan errores en su proceso de aprendizaje y que se puede aprender de los propios errores” (Godino et al, 2004, p. 20). Este mismo autor entiende que “en un aprendizaje conductista, el error tiene que ser corregido, mientras que es constitutivo del conocimiento en un aprendizaje de tipo constructivista” (p.75). Lo habitual cuando los alumnos trabajan matemáticas es que ante un procedimiento incorrecto, suelen borrar todo lo que han hecho y vuelven a iniciarlo de nuevo, evidentemente la posibilidad de volver a cometer un error es grande.

Basándose en su experiencia Sánchez y Fernández (2003) entre las dificultades que manifiestan los alumnos destaca una aplicación incorrecta de los conocimientos, además de una selección de las estrategias para la resolución apoyadas en el azar debido a la necesidad que sienten los alumnos de obtener un resultado. Nosotros creemos que esta preocupación de los alumnos por llegar a un resultado viene en algunos casos provocada por la forma que los profesores tenemos en clase de abordar los problemas. Muchas veces el tiempo que le asignamos a la resolución de un problema es escaso, no tenemos paciencia para que los alumnos le dediquen el tiempo suficiente al análisis del problema y a la búsqueda de estrategias, para al final acabar resolviéndolo nosotros mismos. También el tiempo que les damos en las pruebas de evaluación es limitado.

Entre los errores más frecuentes que cometen los alumnos destacan:

- Pasar por alto las unidades o los elementos de la magnitud que se expresa en el enunciado, respecto a la que se expresa en la pregunta.
- Intuir lo que se les pregunta, sin reflexionar sobre el contenido real de la pregunta del problema.
- Aplicar operaciones mediante asociación lingüística.

- Operar con los datos numéricos en el mismo orden en el que aparecen en el enunciado, y utilizando todos los que aparecen.
- Buscar, constantemente, la operación o conjunto de operaciones en la resolución del problema, sin pararse a pensar si son o no necesarias.
- Buscar una solución por absurda que sea.
- Aplicar el último concepto aprendido o la última operación que se ha visto en clase
- Utilizar estrategias incorrectas cuando los datos numéricos se representan mediante números elevados, aunque comprendan la relación expresada con números inferiores (Fernández, 2010, p.56).

Nos parece interesante el trabajo de Socas, Hernández y Palarea (2014) realizado con estudiantes en formación para profesores donde encontraron que estos presentaban dificultades a la hora de enfrentarse a los problemas que estaban relacionadas con:

- Conocimientos lingüísticos, asociados a la falta de comprensión del texto.
 - Conocimientos semánticos, no saber el significado de las palabras.
 - Conocimientos de la estructura del problema o conocimiento esquemático, que implica la comprensión global del texto y el conocimiento de los distintos tipos de problema.
 - Conocimientos del lenguaje o de las representaciones que pueden utilizar para resolver el problema.
 - Conocimientos de los razonamientos, las estrategias generales, los heurísticos en los que se puede apoyar.
 - Conocimiento de las operaciones (operaciones, algoritmos y técnicas).
 - Conocimiento de las estructuras (definiciones, propiedades y estructuras).
 - Conocimientos de los procesos (sustitución formal, generalización y modelización).
- (p.153)

Estas dificultades de los futuros maestros implican, por un lado que no fueron capaces de desarrollar las habilidades en resolución de problemas en su etapa de formación como estudiantes, y por otro lado, la probabilidad de que sean capaces de enseñar a sus futuros alumnos es bastante baja.

Hemos realizado una clasificación de los alumnos que nos podemos encontrar habitualmente en una clase de matemáticas. Para realizar esta clasificación hemos tomado como base la división general que realiza Sánchez y Fernández (2003), a la que hemos incorporado algunas observaciones nuestras teniendo en cuenta la resolución de problemas. Creemos que esta clasificación puede ayudar, después de un trabajo previo de detección en el aula, a trabajar adaptándonos al contexto del alumnado y centrándonos en la actividad de resolución de problemas. Los autores anteriores hacen una división en cuatro grupos teniendo en cuenta el potencial intelectual y el rendimiento académico, y nosotros hemos añadido un quinto grupo:

- Alumnos considerados buenos resolutores de problemas. No tienen por qué encontrarse entre los alumnos de mayor rendimiento académico en matemáticas. Se encuentran cómodos en esta actividad ya que tienen una alta confianza en sus capacidades. La mayoría de las veces aplican estrategias de forma natural y no se rinden con facilidad ya que consideran esta tarea como un reto. Les gusta destacar en algo que a su compañeros les cuesta. Son alumnos que suelen plantearse si la estrategia seleccionada es la adecuada y son capaces de mantenerla o cambiar de dirección (Callejo y Zapatera, 2014). Suelen ser poco sistemáticos y poco rigurosos en los procedimientos matemáticos. No entienden la obligación, muchas veces impuesta por el profesor o el libro de texto, de adaptarse a un determinado procedimiento porque es el que “toca”. Este aspecto les produce frustración y si se repite en el tiempo puede acabar en una falta de interés por el área de matemáticas ya que entienden que lo que hacen no es matemáticas.
- Alumnos de potencial intelectual alto y rendimiento académico notable que mantienen una regularidad constante. Son alumnos que intentan resolver los problemas como resuelven actividades de cálculo aritmético o algebraico, quieren saber como se hacen los ejercicios desde un punto de vista algorítmico para memorizar los pasos. Quieren obtener buenos resultados a corto plazo y no

entienden las dificultades que encuentran. Aunque suelen desmotivarse con la actividad tienden a esforzarse para mejorar, ya que no quieren bajar sus resultados. Suelen aceptar con reticencias las sugerencias cuando no obtienen resultados por sí mismos ya que intentan utilizar las estrategias que les han servido en los ejercicios.

- Alumnos de inteligencia y rendimiento normal susceptibles de fluctuaciones, pero sin graves impedimentos para alcanzar los objetivos previstos. A diferencia de los anteriores tienen más confianza en sus posibilidades, la carga de ansiedad es menor, y aunque tengan dificultades suelen obtener mejores resultados que los anteriores. Suelen aceptar las sugerencias del profesor con más facilidad.
- Alumnos de inteligencia inferior a lo considerado normal y de escaso rendimiento. Con muchísimo trabajo y dedicación alcanzarían los mínimos exigidos. El esfuerzo necesario para integrarse dentro de la normalidad es de tal magnitud, que se aleja bastante de sus posibilidades reales. No basta con las clases de recuperación y de apoyo, sino con una constante motivación, fuera y dentro del colegio, que les facilita trabajar en una actitud diaria muy dura para ellos. Hay que forzarles a conseguir unos hábitos de dedicación, organización y trabajo que no poseen por falta de refuerzo. Respecto a la resolución de problemas en clase manifiestan interés pero tienen muchas dificultades debido a un dominio superficial de los conocimientos y procedimientos necesarios. Si se les convence y se les minimizan los aspectos matemáticos, trabajando la comprensión y el uso de la lógica pueden motivarse y mejorar bastante. Trabajar con ellos con problemas sencillos y en un grupo pequeño de alumnos suele dar buenos resultados.
- Alumnos de escasa inteligencia y nulo rendimiento. Sus posibilidades intelectuales son muy limitadas, pero jamás definitivas en el sentido de hacerles creer que no sirven absolutamente para nada. Son alumnos a quienes les cuesta adquirir las operaciones básicas, con escaso poder de razonamiento y, lo que es más grave, muy convencidos de su cada vez mayor distanciamiento con respecto a los demás. Respecto a la resolución de problemas creen que no pueden con esta tarea pero actuando como con el grupo anterior se pueden obtener algunos progresos.

Los alumnos que conocen bien los aspectos más procedimentales de las matemáticas, en los que obtienen buenos resultados, suelen utilizar aquellos procedimientos en los que han tenido éxito previamente de una forma reiterada, buscando resolver los problemas e incurrir en errores que generan numerosos bloqueos. Son alumnos que no han desarrollado la capacidad de averiguar qué funcionó mal en el proceso y por lo tanto no tienen capacidad de corregirlo, generando ansiedad y frustración. A los alumnos, especialmente a los de mayor nivel académico, les preocupa mucho equivocarse a la hora de resolver problemas ya que entienden que influye en la imagen que tienen ante el profesor y por lo tanto, que influirá de alguna manera en la calificación que van a obtener. Es importante recuperar a estos alumnos, ya que disfrutaban con la actividad matemática, y aunque estemos trabajando para desarrollar los aspectos funcionales de las matemáticas para formar futuros ciudadanos, también debemos formar futuros profesionales que necesiten las matemáticas en su campo profesional o incluso futuros matemáticos.

Canalizar las frustraciones que surgen en el proceso de resolución de problemas, o incluso antes de comenzar, ya que los alumnos reconocen los enunciados con los que han tenido dificultades en ocasiones anteriores y rechazan continuar. Es muy importante que entiendan los bloqueos que puedan surgir como parte fundamental del proceso.

1.4. La resolución de problemas como objeto de aprendizaje

En este apartado queremos introducir la enseñanza de la resolución de problemas en el aula como un bloque de contenido, tal y como hemos visto que se desarrolla en el currículo de la LOMCE y anteriormente en la LOE.

Para poder realizar esta labor creemos que es importante en un primer lugar clarificar qué etapas o fases se deben seguir durante el proceso de resolución de un problema, y para ello realizamos una revisión de propuestas de diferentes autores. Posteriormente veremos qué diferencia a los alumnos que tienen éxito en esta tarea de los que no.

Antes de iniciar cualquier acercamiento a la resolución de problemas en clase es muy importante que los profesores investiguen qué entienden los alumnos sobre qué es y en qué consiste resolver un problema, para posteriormente, en caso necesario, modificar estas creencias. Entendemos que un primer paso que se debe trabajar con los alumnos son los

aspectos motivacionales. En PISA 2012 se plantea como un objetivo de la enseñanza el que los alumnos aumenten sus probabilidades de utilizar con éxito las matemáticas mejorando para ello sus actitudes, creencias y emociones (MECD, 2013).

Pifarré y Sanuy (2001) proponen una serie de elementos que deberían estar presentes en cualquier propuesta de mejora de los procesos de resolución de problemas: la contextualización al entorno del alumno, hacer visibles las estrategias utilizadas a la hora de resolver los problemas, diseñar materiales didácticos y el trabajo en pequeños grupos. Además, “si deseamos que los estudiantes aprendan a hacer conjeturas, experimenten con aproximaciones alternativas para resolver problemas, y construir y responder a los argumentos de los demás, entonces la creación de un entorno que estimule este tipo de actividades es esencial” (Godino et al., 2004, p.81). Como veremos más adelante en nuestra propuesta global de trabajo pretendemos integrar todos estos aspectos.

Kilpatrick (citado en Vila y Callejo, 2004) indica diferentes modelos para que los alumnos aprendan a resolver problemas. El modelo que denomina *ósmosis* “se apoya en la idea de que aprender a resolver problemas es resolver muchos problemas y que, al hacerlo, se aprendan las técnicas, los métodos o las herramientas heurísticas que están implícitas en ellos” (Sánchez y Fernández, 2003, p.191). Otro modelo, desde un enfoque conductista, sería la enseñanza de resolución de problemas por *memorización* de procedimientos. El alumno aprende a resolver problemas identificando los procedimientos y memorizándolos, por lo tanto, resolverá los problemas que tiene memorizado el procedimiento. También se puede aprender a resolver problemas por *imitación* de las conductas de un experto cuando resuelve un problema. El aprendizaje por *cooperación* “consiste en la necesidad de observar cómo sus compañeros resuelven el problema, respetar, ajustar y canalizar las ideas que escuchan” (Sánchez y Fernández, 2003, p.191). Por último, un modelo apoyado en la *reflexión* del proceso seguido en la resolución del problema, argumentando y justificando los pasos dados identificando las buenas y malas decisiones tomadas. Entendemos que aprender a resolver problemas no debe pasar por la utilización de ningún modelo concreto de forma exclusiva ya que puede suponer que algunos alumnos aprendan y otros no, sino la integración de todos los modelos en los procesos de enseñanza y aprendizaje en el aula. Quizás este es uno de los aspectos que dificulta que los alumnos aprendan a resolver problemas, ya que los profesores habitualmente se identifican con uno

de los modelos descritos anteriormente y utilizan el mismo para resolver problemas en el aula.

Para Cobo y Molina (2014) respecto a la gestión de los procesos de resolución de problemas:

Cuando hablamos de la gestión de los procesos de resolución nos referimos a las preguntas (o mensajes) que nos hacemos (o en lo que pensamos) cuando estamos resolviendo un problema, que tienen por finalidad conseguir activar o reactivar el proceso de resolución o simplemente reflexionar sobre él. (p.50)

Estos mismos autores indican respecto a convertir la gestión en objeto de enseñanza y aprendizaje:

Cuando decimos que queremos convertir la gestión en objeto de enseñanza y aprendizaje en nuestras clases estamos pensando en que los estudiantes han de aprender, en cada momento del desarrollo de la actividad, a hacerse las mismas preguntas que un profesor experto las haría, y han de aprender a responderlas. (p.50)

Numerosos autores han propuesto fases o etapas que debe seguir una persona al enfrentarse a un problema. Muchas veces han sido propuestas generales y no específicas de las matemáticas, y en caso de ir dirigidas a problemas matemáticos, normalmente el nivel de aplicación no ha sido la educación secundaria obligatoria. En nuestro trabajo hemos hecho una revisión de numerosas investigaciones, pero aquí nos hemos centrado en aquéllas que nos ayudaban a desarrollar nuestra propuesta y que nos permitiera conseguir nuestro objetivo de desarrollar en los estudiantes la competencia matemática a través de la resolución de problemas.

Especialmente hay que citar a Polya (1989) por la relevancia de sus trabajos y lo que supuso en las investigaciones posteriores sobre resolución de problemas en matemáticas. Este autor propuso que a la hora de abordar la resolución de un problema había que recorrer un conjunto de etapas: a) comprender el problema; b) concebir un plan; c) ejecución del plan y d) visión retrospectiva. Cada una de estas fases iba acompañada de numerosas preguntas para la persona que resuelve el problema y que le facilite su resolución, ya que según este autor “si el alumno emplea la misma pregunta varias veces

con buen resultado, sin duda se fijará en ella y a ella recurrirá cuando se encuentre un caso similar” (p.26). Posteriormente veremos que hemos utilizado esta estrategia, presentando a los alumnos una guía para el proceso de resolución, guía que vayan interiorizando, que puedan reconocer su utilidad y recurran a ella cuando resuelvan un problema.

También son muy importantes los trabajos de Schoenfeld (1985) que basándose en el trabajo de Polya propone principios heurísticos de nivel universitario, para este autor las fases que se deben seguir son las siguientes: Análisis, exploración, ejecución y comprobación.

Bransford y Stein (1987), aunque desde el campo de la psicología, proponen un método que denominan IDEAL cuyas fases son las siguientes: Identificación de los problemas, definición y representación del problema, exploración de posibles estrategias, actuación y logros.

Puig y Cerdán (1988) realizan una propuesta para la resolución de problemas, en este caso aritmético-verbales, con las siguientes fases: Lectura, comprensión, traducción, cálculo, solución, revisión y comprobación.

Guzmán (1991) propone a los alumnos a familiarizarse con el problema, la búsqueda de estrategias, desarrollar la estrategia y por último la revisión del proceso. En cada una de estas fases intenta orientar al alumno para llevar a cabo el proceso.

Hernández y Socas (1994) proponen para la resolución de problemas aritmético-verbales en el caso de alumnos de primaria las siguientes fases:

1. Lectura del enunciado.
2. Comprensión.
3. Representación, ejecución y solución visual-geométrica.
4. Representación, ejecución y solución formal.
5. Soluciones.
6. Comprobación.

Según Callejo (1996) resolver un problema implica una preparación o familiarización con el problema; la incubación de las ideas; la inspiración o iluminación sobre el camino a seguir y por último la verificación del proceso.

En el informe PISA (Rico, 2007) se identifica el proceso de resolver problemas con lo que denomina matematización, aunque se refiere a lo que significa resolver problemas en un concepto más amplio que a enumerar una serie de etapas para enfrentarse a un problema. Este proceso se divide en tres fases:

La primera fase implica traducir problemas extraídos del mundo real al mundo matemático, proceso que denominan matematización horizontal. Hacer matemáticas horizontalmente incluye actividades como:

- Identificar matemáticas relevantes en un contexto general.
- Plantear interrogantes.
- Enunciar problemas.
- Representar el problema de un modo diferente.
- Comprender la relación entre lenguaje natural, lenguaje simbólico y formal.
- Encontrar regularidades, relaciones y patrones.
- Reconocer isomorfismos con problemas ya conocidos.
- Traducir el problema a un modelo matemático.
- Utilizar herramientas y recursos adecuados.

Una vez traducido el problema a una expresión matemática, el proceso puede continuar. Esta segunda fase es la matematización vertical, e incluye:

- Usar diferentes representaciones.
- Usar el lenguaje simbólico, formal y técnico y sus operaciones.
- Refinar y ajustar los modelos matemáticos; combinar e integrar modelos.

- Argumentar y generalizar.

La última fase en la resolución de un problema implica reflexionar sobre el proceso complejo de matematización y sus resultados. Los estudiantes deben interpretar los resultados con actitud crítica y validar el proceso completo.

Algunos aspectos de este proceso de validación y reflexión son:

- Extender la extensión y límites de los conceptos matemáticos.
- Reflexionar sobre los argumentos matemáticos y explicar y justificar los resultados.
- Comunicar el proceso y la solución.
- Criticar el modelo y sus límites. (p.51-52)

Luque (2002) propone tener en cuenta las etapas o pasos siguientes, comprender el problema, concebir un plan de resolución o estrategia, ejecución del plan concebido, reflexionar sobre la solución y por último, redactar la solución.

Vila y Callejo (2004) proponen tres fases o grupos de acciones:

- El abordaje o preparación. Consiste en comprender mejor el problema y a buscar varios enfoques o vías de resolución.
- Desarrollo de una estrategia de resolución que se ha determinado en la fase anterior.
- La verificación que consiste en comprobar, reflexionar y generalizar.

El modelo de RULES & T propuesto por Davis (2013):

- R: Read the problem in detail³.
- U: Underline key words and variables⁴.

³ lee el problema detalladamente

⁴ subraya palabras clave y variables

- L: List the variables⁵.
- E: Estimate a likely answer via a mental calculation⁶.
- S: Steps to show working and derive an answer⁷.
- T: Test the likely correctness of the answer by comparing to your estimate, and understanding of the problem⁸. (p.21)

Lozano y Hernández (2014), en un estudio dirigido a alumnos de cuarto de educación secundaria, dividen las fases en comprensión, planificación/ejecución y verificación. En cada fase presentan una serie de mensajes para proponer a los alumnos. A continuación reproducimos las sugerencias hechas por estos autores en las distintas fases, en concreto en la fase de comprensión del problema proponen:

- Trata de comprender bien las condiciones del problema.
- Identifica el objetivo del problema.
- Vuelve a leerlo lentamente.
- Intenta comprender todas las palabras del enunciado.
- Recuerda los conceptos matemáticos que hay en el enunciado.
- Organiza la información que tienes, etc. (p. 51).

En la fase de planificación/ejecución, los mensajes que proponen son:

- Piensa en un problema más sencillo.
- Experimenta.
- Piensa en alguna conjetura.

⁵ enumera las variables

⁶ calcula una respuesta probable a través de un cálculo mental

⁷ pasos para mostrar el trabajo y obtener una respuesta

⁸ comprueba la validez de la respuesta mediante la comparación con su estimación, y la comprensión del problema

- Inventa alguna representación simbólica.
- Busca problemas análogos.
- Trata de construir figuras.
- Busca casos más sencillos.
- Si ya has establecido un plan, ejecútalo.
- Si has establecido una conjetura, trata de buscar relaciones entre los elementos del problema, etc.

En la fase de verificación, proponen los mensajes siguientes:

- Comprueba los resultados, mira si son coherentes.
- Reflexiona sobre la posibilidad de revisar la solución que has obtenido. SI es necesario sigue un orden inverso a los pasos de la solución.
- Reflexiona sobre cómo surgieron las ideas que te llevan a la solución.
- Haz un repaso de los contenidos matemáticos que has utilizado.
- Reflexiona sobre estas preguntas:

¿Has propuesto varias estrategias a lo largo de la resolución?

¿Las has examinado todas?

¿Te parece que has desarrollado la más adecuada?

Sánchez y Vicente (2015) enumeran los pasos que tienen que recorrer los alumnos para resolver problemas:

- Leer el enunciado y extraer los datos relevantes.
- Comprender la situación descrita, primero de manera cualitativa, (personajes, intenciones y acciones), creando un modelo de la situación, y después de manera

matemática, proyectando la información cualitativa en un modelo matemático del problema, a través de la aplicación de sus conocimientos previos de carácter matemático;

- Deducir, a partir del modelo matemático, qué estrategias de resolución y operaciones matemáticas les permiten resolver el problema.
- Aplicar las estrategias de resolución y resolver las operaciones.
- Comprobar que el resultado obtenido “encaja” en el modelo matemático y de la situación del problema.
- Si el resultado “encaja” en los modelos situacional y matemático, reportar el resultado como la solución. (p.711)

Además de estas propuestas de etapas como estrategias a la hora de resolver los problemas, la investigación en este campo le ha dado mucha importancia a los aspectos metacognitivos que influyen en la resolución. Para Vila y Callejo (2004) la diferencia entre la conducta de un novato y la de un experto cuando resuelven problemas se encuentra en la manera de usar los conocimientos, la forma de dirigir los esfuerzos y la toma de decisiones a lo largo del proceso de resolución. Gallino, Campaner y Capuano (2013) indican que el proceso metacognitivo a la hora de resolver un problema implica ciertas habilidades:

- Predecir limitaciones de la capacidad propia.
- Ser consciente de su repertorio de rutinas heurísticas y del apropiado dominio de utilidad para identificar y caracterizar el problema.
- Planear y organizar rutinas adecuadas para la resolución de problemas.
- Monitorear y supervisar la efectividad de las rutinas utilizadas.
- Evaluar dinámicamente estas operaciones frente al éxito o fracaso, de manera de prever su duración. (p.24)

Presentamos una tabla (ver *Tabla 1*) que resume las aportaciones de diferentes autores. Como hemos podido comprobar el proceso de forma general es bastante similar en todas

las propuestas. Esta revisión nos ha permitido elaborar nuestra propia propuesta que presentaremos posteriormente.

Como conclusión podemos decir que una buena estrategia para enseñar a los alumnos a resolver problemas puede ser intentar que dividan el proceso de resolución en diferentes fases, y utilizar guiones que cubran las fases de resolución. Los guiones pueden incluir preguntas que sugieran al alumno los pasos que deben dar en lugar de decirles lo que deben hacer. Las preguntas deben adaptarse al grado de madurez de los alumnos y en la medida de lo posible potenciar los aspectos metacognitivos, incidiendo, por ejemplo, en los relacionados con el control que los alumnos ejercen sobre el proceso de resolución.

Tabla 1: Fases o etapas en la resolución de un problema según diferentes autores

Autores		Fases				
Polya	Comprender el problema	Concebir un plan	Ejecución del plan	Visión retrospectiva		
Schoenfeld	Análisis	Exploración	Ejecución	Comprobación		
Bransford y Stein	Identificación del problema	Definición y representación	Exploración	Actuación y logros		
Puig y Cerdán	Lectura	Comprensión	Traducción	Cálculo y solución	Revisión	Comprobación
Guzmán	Familiarizarse	Búsqueda de estrategias	Desarrollar la estrategia	Revisión		
Hernández y Socas	Lectura del enunciado	Comprensión	Representación y ejecución visual-geométrica	Representación y ejecución formal	Solución	Comprobación
Callejo	Familiarizarse	Incubación	Inspiración	Verificación		
Pisa	Matematización horizontal	Matematización vertical	Validación y reflexión			
Luque	Comprender el problema	Concebir un plan	Ejecución del plan	Reflexionar sobre la solución	Redactar la solución	
Vila y Callejo	Abordaje	Desarrollo	Revisión global			
Fernández	Querer	Comprender	Formular ideas	Investigar	Comunicar	Concluir
Lozano y Hernández	Comprensión	Planificación y ejecución	Verificación			
Sánchez y Vicente	Leer el enunciado y extraer los datos	Comprender la situación	Buscar estrategias	Aplicación de las estrategias	Comprender el resultado	Comunicar la solución

Fuente: Elaboración propia según la bibliografía consultada.

1.5. Aprender resolviendo problemas

Otro objetivo de nuestro trabajo es conseguir que los alumnos aprendan matemáticas a través de la resolución de problemas, es decir, utilizar los problemas como herramienta didáctica, otorgándoles la capacidad de estimular el aprendizaje y la capacidad de aprender a aprender de los alumnos. Como veremos más adelante lo que se aprende en un contexto de resolución de un problema se comprende y se retiene mejor.

Como señala Chamorro (2003) “el interés por la resolución de problemas se debe también, a la posibilidad que éstos ofrecen, para construir conocimientos matemáticos y modelizar situaciones, lo que ayuda a comprender y dominar el entorno que nos rodea” (p.1). En este apartado vamos a hablar sobre este aspecto de la resolución de problemas en el aula.

Para Mederos y Martínez (2005) “la enseñanza y el aprendizaje de la matemática por medio de la resolución de problemas están dirigidos a insistir en los procesos de pensamiento y de aprendizaje, tomando como campo de acción los contenidos matemáticos” (p. 53). Apoyando este enfoque Sánchez y Fernández (2003) señalan que “la resolución de problemas debería ser usada para introducir nuevos contenidos de matemáticas, ayudar a los estudiantes en la comprensión de conceptos y facilitar el aprendizaje de procesos, así como aplicar y revisar los procesos que los estudiantes hayan aprendido” (p.132).

Hay autores como Camacho y Santos (2004) que proponen que los estudiantes “construyan su propio conocimiento a partir de procesos que involucran la problematización de los contenidos en estudio”(p.45). Si las matemáticas intentan solucionar problemas del mundo real, que los alumnos se enfrenten a problemas situados en un contexto real les ayudará a aprender matemáticas, ya que entenderán las matemáticas como una ciencia que satisface necesidades del mundo real (Godino et al., 2004) aunque para ello utilicemos problemas a los que se ya se ha encontrado solución.

Camacho y Santos (2004) consideran que la resolución de problemas se pueden convertir en un proceso de reflexión constante de los alumnos “que le permita no solamente aplicar sus conocimientos previos, sino que también sea un medio para comprender y desarrollar nuevos conceptos y recursos matemáticos” (p.47).

Nuestra intención con esta metodología es que “el alumnado construya los conocimientos, modelos o procesos matemáticos necesarios para resolver el problema” (Vila y Callejo, 2004, p.157). El papel que juega el profesor, además de preparar las situaciones, guía, orienta y ayuda al alumno a organizar y manejar la información (Solaz-Portolés, Sanjosé y Gómez, 2013).

Como conclusión vemos que este enfoque de la resolución de problemas permite construir conocimientos matemáticos; trabajar los procesos de pensamiento e insistir en la reflexión como método de aprendizaje, además de modelizar situaciones de la realidad. Es decir, hacer matemáticas pasa por identificar elementos matemáticos en un determinado contexto representado en una situación lo más cercana posible a la realidad con el objeto de modelizar estas situaciones y que los alumnos asocien esta idea de hacer matemáticas con la aplicabilidad de las mismas.

1.6. Contenidos

Al elaborar nuestro trabajo hemos realizado una selección de contenidos para trabajar con los alumnos. Los criterios que hemos tenido en cuenta han sido:

- Contenidos con cierta relevancia en el currículo oficial.
- Contenidos fácilmente transferibles a situaciones reales.
- Los conocimientos previos de los alumnos.

Los contenidos seleccionados fueron:

- Números racionales.
- Álgebra.
- Sucesiones.

Trabajamos con estos contenidos con la idea de desarrollar el sentido numérico y el pensamiento algebraico en los alumnos, como veremos posteriormente en los problemas intentamos que apliquen diferentes procedimientos, con el objetivo de favorecer la transición de la aritmética al álgebra, ya que es un paso importante para seguir

profundizando en el estudio de las matemáticas. Aunque hay que entender que “el álgebra no es simplemente una generalización de la aritmética” (Kieran y Filloy, 1989, p.229). El álgebra puede considerarse como un lenguaje para la expresión y manipulación de generalidades (Socas, 2011). En el caso de su enseñanza el objetivo debería ser intentar introducir el álgebra en la ESO como un “instrumento de modelización” (Ruiz-Munzón, Bosch y Gascón, 2011).

Los números racionales están asociados a numerosas situaciones que aparecen en la vida cotidiana de los alumnos. Aunque para ellos las situaciones en las que aparecen son muy cercanas no suelen tener facilidad en su comprensión y en las operaciones implicadas. “Los niños comprenden progresivamente la noción de fracción, a partir de sus diferentes significados derivados de los diversos tipos de situaciones de uso, que no son todos igualmente sencillos de comprender para ellos” (Godino et al., 2004, p.230). Además “el razonamiento proporcional se considera como uno de los componentes importantes del pensamiento formal adquirido en la adolescencia” (Godino et al., 2004, p.279) y somos conscientes de la dificultad que manifiestan los alumnos para adquirirlo.

También trabajamos problemas donde aparecen sucesiones numéricas con la intención de que los alumnos vean lo general en lo particular, identifiquen el patrón y sean capaces de expresar en término algebraicos el comportamiento matemático que se representa en la situación planteada.

En la asignatura de matemáticas orientadas a la actividad académica (Decreto 83/2016) encontramos respecto a los contenidos que hemos trabajado los siguientes criterios de evaluación:

- Utilizar los números (enteros, decimales y fracciones), sus operaciones y propiedades para recoger, interpretar, transformar e intercambiar información cuantitativa y resolver problemas de la vida cotidiana. Aplicar la jerarquía de las operaciones, elegir la forma de cálculo más apropiada en cada caso (mental, escrita, mediante medios tecnológicos...), valorar críticamente las soluciones obtenidas, analizar su adecuación al contexto y expresarlas con la notación y la unidad de medida adecuada y según la precisión exigida (aproximaciones por exceso o

defecto, redondeo, truncamiento, notación científica...) calculando el error cometido cuando sea necesario.

- Utilizar el lenguaje algebraico para operar con expresiones algebraicas y obtener los patrones y leyes generales que rigen procesos numéricos recurrentes como las sucesiones numéricas, identificándolas en la naturaleza; todo ello con la finalidad de resolver problemas contextualizados mediante el uso de las progresiones y el planteamiento y resolución de ecuaciones y sistemas, contrastando e interpretando las soluciones obtenidas, valorando otras formas de enfrentar el problema y describiendo el proceso seguido en su resolución de forma oral o escrita.

1.7. Aprendizaje cooperativo

El aprendizaje cooperativo se basa en la interacción que tiene lugar entre los alumnos al trabajar en pequeños grupos. En el trabajo en grupos se produce intercambio de ideas entre los participantes y permite a los alumnos darse cuenta que pueden existir diferentes ideas útiles para resolver un problema y que el trabajo en grupo facilita llegar a un planteamiento efectivo para obtener la solución. Los alumnos tienen la oportunidad de poner en juego las estrategias propias y observar las que proponen sus compañeros. También es importante tener en cuenta que en el grupo existe un conocimiento individual de los componentes del mismo que se pone a disposición de todos.

Existen numerosas investigaciones que dan cuenta que el trabajo cooperativo tiene efectos positivos en el rendimiento académico de los alumnos. “La oportunidad que tienen los alumnos de ayudarse mutuamente en la resolución de una tarea, de negociar nuevos significados, de desarrollar nuevas estrategias y de construir nuevo conocimiento puede repercutir positivamente en su aprendizaje” (Pifarré y Sanuy, 2001,p.299).

Respecto a las competencias básicas, autores como García y Fínez (2012) proponen que “la adquisición de competencias básicas tiene que hacerse en pequeños grupos fomentando la creatividad de los alumnos” (p.8).

En la orden (Orden ECD/65/2015) respecto a la competencia aprender a aprender propone que

los profesores han de procurar que los estudiantes sean conscientes de lo que hacen para aprender y busquen alternativas. Muchas veces estas alternativas se ponen de manifiesto cuando se trata de averiguar qué es lo que hacen los demás en situaciones de trabajo cooperativo. (p.6997)

Concretamente en el área de matemáticas Godino et al., (2004) señala que “la instrucción matemática significativa atribuye un papel clave a la interacción social, a la cooperación, al discurso y a la comunicación, además de a la interacción del sujeto con las situaciones-problemas” (p.70). La enseñanza centrada en el profesor no favorece el desarrollo de competencias matemáticas avanzadas (Carrillo, Contreras y Zakaryan, 2013). Respecto a la resolución de problemas es necesario que estos no sean muy difíciles pero que si requieran de un trabajo cooperativo (Lester y Mau, 1993).

En el decreto (Decreto 83/2016) que desarrolla el currículo del área de matemáticas propone el trabajo en grupo como una de las orientaciones metodológicas para trabajar la asignatura ya que:

fomentará el intercambio de conocimientos y experiencias entre iguales, ampliando las posibles estrategias y provocando una visión más amplia de los problemas al debatirlos y cuestionar las soluciones, con la posibilidad de plantear nuevos interrogantes y de aprender de los errores. (p.18.162)

Este tipo de metodología en la resolución de problemas se puede interpretar desde una doble vertiente: por un lado, la resolución de problemas es una oportunidad de introducir la metodología en el área de matemáticas; por otro, este tipo de metodología favorece que los alumnos adquieran la habilidad de resolver problemas desde el trabajo grupal, debido principalmente al enriquecimiento para el proceso que supone interactuar con los compañeros.

1.8. La evaluación

La evaluación de los aprendizajes de los alumnos y alumnas en la resolución de problemas no se debe limitar ni a la valoración de los resultados ni a la valoración del punto de llegada de los estudiantes, sino que debe considerar también los procesos de búsqueda e investigación que se ponen en juego durante el desarrollo de la tarea y los

progresos realizados por cada alumno durante un período de instrucción más o menos largo (Callejo, 1996, p.61).

Carmona y Flores (2008) indican que la evaluación debería centrarse en ayudar a aprender, ya que la evaluación debería ir más allá de la actitud de juzgar lo que el alumno sabe o no sabe de aquello que hemos pretendido enseñarle. Por lo tanto, debemos entender la evaluación como un proceso al servicio del aprendizaje de los alumnos y que este aprendizaje debe ser continuo. Esta evaluación formativa debe estar presente en el día a día del aula en los momentos de reflexión de lo aprendido (Santos, 2011). Por lo tanto, la evaluación es una oportunidad más de aprendizaje para que los alumnos demuestren lo que saben y ellos mismos identifiquen lo que les falta por aprender.

Podemos definir la evaluación como “el proceso de recogida y análisis de información que permite conocer hasta qué punto se está produciendo un proceso de enseñanza y aprendizaje y qué problemas se están planteando en este proceso” (Godino et al., 2004, p.105). En la resolución de problemas es importante identificar qué conocimientos les faltan a los estudiantes para llegar a la solución y especialmente verificar la solución en el contexto del problema.

La orden (Orden ECD/65/2015) habla de la relación que existe entre la evaluación de competencias y la resolución de problemas que simulen contextos reales, y de esta forma se pretende que los alumnos movilicen sus conocimientos y destrezas, y nos parece importante que la ley añada, valores y actitudes.

Según Pellicer y Ortega (2009) los instrumentos de evaluación que se utilicen en un enfoque competencial del currículo “deben ayudar a aplicar el conocimiento a situaciones nuevas y a desafíos que provengan de diferentes materias o áreas del saber” (p.10).

En todo proceso de evaluación es importante comunicar a los alumnos de forma explícita lo que se evalúa y la manera en cómo se lleva a cabo dicho proceso de evaluación. Las rúbricas son elementos que pueden ayudar a desarrollar esta tarea al permitir identificar en qué momento del proceso se encuentra la persona que resuelve el problema y qué le falta para concluirlo. Según la Orden ECD/65/2015 por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación establece que “los niveles de

desempeño de las competencias se podrán medir a través de indicadores de logro, tales como rúbricas o escalas de evaluación” (p.6990).

En nuestro trabajo hemos utilizado las rúbricas para evaluar los procesos de resolución y hemos diseñado las categorías a evaluar realizando una selección de los estándares evaluables propuestos por el currículo. Aunque las rúbricas son muy útiles en la evaluación de competencias también están sometidas a problemas de fiabilidad según el corrector o incluso el mismo corrector en momentos distintos (Castro, 2011).

Respecto a la evaluación PISA “propone establecer qué conocimientos, capacidades y habilidades pueden activar los alumnos a los que se les presentan problemas, es decir, medir hasta qué punto son matemáticamente competentes para resolver los problemas con éxito” (Rico, 2007, p.53). Hay que tener en cuenta los procesos matemáticos que utilizan los alumnos en la resolución de problemas y por lo tanto las capacidades que deben movilizar, el contenido matemático y el contexto (MECD, 2013).

En la LOMCE en el artículo 20, apartado 2, podemos leer respecto a las características de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado de la Educación Secundaria Obligatoria que será continua, formativa e integradora (p.183). La función formativa viene dada por la doble función de orientar el aprendizaje y reorientar la enseñanza (Decreto 83/2016). La evaluación formativa según (Santos, 2011) “deja de circunscribirse a los momentos formales de evaluación, para pasar esencialmente a estar presente en el día a día de la clase, en el momento de las actividades de aprendizaje y de reflexión de ese aprendizaje” (p.34). El profesor debe buscar los momentos y los elementos que le permitan realizar esta tarea, como hemos visto anteriormente las rúbricas pueden jugar ese papel, que junto con la presencia e intervención del profesor en los grupos de trabajo puede favorecer la reorientación de los aprendizajes.

Como ya hemos dicho anteriormente, en la LOMCE encontramos como un elemento del currículo lo que denomina estándares de aprendizaje evaluables e indica que “los referentes para la comprobación del grado de adquisición de las competencias y el logro de los objetivos de la etapa en las evaluaciones continua y final de las materias (...) serán los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables” (p.193). La evaluación de

las competencias pasa por realizar un análisis de los estándares de aprendizaje propuestos por la ley e identificar las tareas que debemos proponer a los alumnos.

La evaluación es ante todo una práctica reflexiva que aunque habitualmente es realizada por el profesor, también pueden participar los alumnos evaluándose a sí mismos o a sus propios compañeros. En el currículo del área de matemáticas de tercero de educación secundaria (Decreto 83/2016), como una de las orientaciones metodológicas que propone para trabajar la asignatura, se indica que “se debe reflexionar sobre los procesos y exponerlos de forma oral o escrita para ayudar al alumnado a autoevaluarse e integrar los aprendizajes, fomentando la crítica constructiva y la coevaluación” (p.18162). Por lo tanto, en el proceso de resolución de problemas debemos intentar integrar los diferentes tipos de evaluación: la autoevaluación, la coevaluación y la heteroevaluación, pues cada uno juega un papel importante. Según la Orden (Orden ECD/65/2015) por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación señala que:

es necesario incorporar estrategias que permitan la participación del alumnado en la evaluación de sus logros, como la autoevaluación, la evaluación entre iguales o la coevaluación. Estos modelos de evaluación favorecen el aprendizaje desde la reflexión y valoración del alumnado sobre sus propias dificultades y fortalezas, sobre la participación de los compañeros en las actividades de tipo colaborativo y desde la colaboración con el profesorado en la regulación del proceso de enseñanza-aprendizaje. (p.6990)

Según Santos (2011) “el desarrollo de la capacidad de los alumnos para autoevaluarse es primordial en su aprendizaje matemático” (p.39). En concreto en la autoevaluación, el alumno debe ser capaz de comparar lo que ha hecho, de aquello que se esperaba que hiciera, y posteriormente ser capaz de eliminar la diferencia. La autoevaluación como "sistema de evaluación en que interviene activamente el alumno como agente principal. Supone la reflexión por parte del alumno sobre las experiencias propias de aprendizaje, buscando recordar y entender qué se ha aprendido y qué objetivos se han alcanzado" (Pellicer y Ortega, 2009, p. 14).

A la hora de corregir los problemas debemos tener en cuenta las respuestas de los alumnos, fomentando la utilización de los errores como fuente de aprendizaje. La mayoría de las

veces los alumnos están simplemente preocupados en obtener un resultado, no valorando el aprendizaje que realizan; en términos de evaluación se preocupan más de los productos que de los procesos, normalmente, porque los profesores hacemos lo mismo.

García (2002) propone los siguientes criterios generales para la evaluación de la resolución de problemas:

- Realiza un plan bien fundamentado para la resolución del problema.
- Ejecuta el plan siguiendo las pautas establecidas previamente. Explica con mayor o menor grado de razonamiento lo que hace. Se observará el grado de coherencia de su razonamiento escrito, en orden a la resolución del problema.
- Expresa por escrito justificando las operaciones realizadas. Tipo y grado de dificultad de los razonamientos matemáticos empleados.
- Realiza conjeturas y las somete a prueba. Grado de calidad de las conjeturas.
- Uso de estrategias heurísticas. Particulariza o recurre a plantear casos más sencillos, que una vez resueltos le otorgan pautas para resolver el problema original. Hace dibujos. Utiliza diagramas, tablas, representaciones gráficas para “representar el problema” como medio que facilita la resolución. Busca pautas y regularidades, experimenta, etc.
- Emplea notación simbólica adecuada como recurso de representación y comprensión del problema.
- Escribe variantes del problema cambiando datos, contexto, etc., de manera que a partir del problema original, obtiene “recursos” para una “familia” de problemas parecidos al original.
- Emplea más de una manera de resolver el problema. Esto es, una vez concluido el problema se plantea ¿hay otro modo de resolver el problema? y la lleva a cabo.
- Una vez concluido el problema, revisa la solución para ver si es razonable y concuerda con lo planteado en el enunciado. ¿Acompaña a la solución de alguna

explicación que exprese lo que ha hallado?¿Repasa tanto las operaciones como el proceso seguido?

- Generaliza la solución del problema. Calidad y grado de generalización de la solución. (p.8)

1.9. Ayudas para la resolución de problemas

En esta sección presentamos los aspectos relacionados con el papel del profesor ante la resolución de problemas. La hemos dividido en dos grandes bloques: por un lado, el relacionado con la actividad del profesor en la resolución de problemas ante el gran grupo, y, por otro lados, los aspectos generales que hayan favorecido su labor en el aula.

La función del profesor en el proceso de la resolución de un problema consiste en guiar al alumno en su ejecución, lo que se puede concretar en los aspectos que indicamos a continuación, teniendo presente que éstos serán más exitosos si se utilizan combinándolos entre si y no aplicando exclusivamente uno de ellos.

- Modelado. Consiste en la verbalización del proceso de resolución del problema. Durante este proceso es importante mostrar claramente al alumno las acciones cognitivas que lleva a cabo el profesor, especificando las variables que juegan un papel relevante en la selección de una determinada estrategia (Pifarré y Sanuy, 2001). Es decir, explicar de la forma más explícita posible todo aquello que pensamos y reflexionamos cuando intentamos resolver el problema. Utilizar planes erróneos y que los alumnos descubran el error son buenas alternativas.
- Autointerrogación. La clave de este método de instrucción consiste en dotar al alumno de una guía de preguntas que regule el proceso de aprendizaje externamente. Basándonos en este método hemos elaborado y utilizado los guiones que hemos presentado anteriormente. Para Pifarré y Sanuy (2001) la utilización de este método permite conseguir dos objetivos, “por un lado, favorecer la reflexión sobre las propias decisiones, el control y la regulación de las propias actuaciones; y por otro, conseguir que el alumno utilice los diferentes procedimientos de manera autónoma e independiente” (p. 299). El profesor debe hacer un uso evidente de los guiones en clase durante el proceso de resolución.

- Análisis y discusión del proceso de resolución. Éste es uno de los aspectos más enriquecedores del proceso. El alumno aprende de lo que ha hecho él mismo y de lo que han hecho otros. Se esfuerza para comunicar sus argumentos y que otros comprendan su mensaje y además, se esfuerza en comprender el mensaje de los otros. Esta fase la intentamos introducir tanto en el trabajo del aula con el grupo clase, pero fundamentalmente en el trabajo cooperativo en grupo más pequeño de alumnos.

A continuación indicamos varios aspectos que ayudarán a los alumnos a la hora de resolver problemas:

- Generar un ambiente adecuado en clase. El profesor tiene la responsabilidad de crear una comunidad de aprendizaje matemático en el aula que va más allá de la autoridad que se supone que debe ejercer (Schoenfeld, 2007). Es importante que el alumno disfrute con los retos que generan los problemas. En este nivel los alumnos dedican mucho tiempo a jugar con aparatos electrónicos y nosotros debemos intentar que ellos vean los problemas como un juego. Que no tengan miedo a equivocarse y que asuman los riesgos que conlleva buscar soluciones creativas. El compromiso de los alumnos con su aprendizaje es que valoren los progresos mucho más allá de los resultados. Hay que tener en cuenta que los alumnos están acostumbrados a aprender contenidos y no a pensar matemáticamente como fuente de aprendizaje (Fernández, 1995). La atención, el debate y la comunicación son aspectos a desarrollar.

Luque (2002) propone algunos consejos que nos pueden ayudar a mejorar este ambiente en clase:

- a) Confianza.- No hace falta saber mucho para resolver un problema. Basta pensar correctamente y actuar con convicción y tranquilidad, pero sin miedo.
- b) Constancia y paciencia.- No se puede abandonar ante la dificultad, porque cada problema requiere su tiempo. Pretender resolverlo a la primera es un grave error, que no ayuda al aprendizaje.

- c) Concentración.- Teniendo en cuenta que la resolución de problemas es una actividad mental compleja, requiere poner todos los sentidos en su realización.
- d) Enseñar éxito.- En un primer estadio pueden surgir sentimientos de fracaso y de subestima, pero cuando se nota el progreso se siente satisfacción. Es un proceso lento y, por tanto, los frutos tardan en llegar. El tiempo dedicado, aunque no se haya encontrado la solución, siempre es provechoso.
- e) Sacar partido.- Un problema es una fuente de aprendizaje y reflexión. Desarrolla el razonamiento lógico y la creatividad, y aumenta el nivel de abstracción. (p.42-43)
- “Controlar” las participaciones irreflexivas. Aunque debemos animar a los alumnos a participar y a comunicar sus ideas, es muy importante que las intervenciones sean reflexivas ya que este tipo de pensamiento es de gran utilidad en los procesos de resolución. Dar oportunidades a los alumnos de expresar sus ideas y argumentarlas, especialmente dando ejemplos, permite al profesor evaluar su progreso. También es importante favorecer la intervención de todos.
- Indagar sobre los conocimientos previos de los alumnos. Empezar con actividades sencillas que deben saber realizar.
- La intervención del profesor debe ser limitada cuando los alumnos trabajan en pequeños grupos.
- Controlar los mensajes que emitimos cuando estamos resolviendo problemas en clase, ya que el lenguaje no verbal puede transmitir muchas veces nuestras emociones de frustración ante la falta de comprensión por parte de los alumnos e incluso transmitir “enfado”.
- Gestionar el error, tanto de los alumnos como el nuestro propio, como fuente de aprendizaje. Es habitual que los alumnos cometan el mismo error en más de una ocasión ya que tienden a olvidar con facilidad los errores que cometen.
- Reescribir los problemas. Una ayuda que puede resultar útil es lo que algunos autores denominan reescritura, que consiste en introducir en los enunciados información que facilite la comprensión de su estructura matemática y situacional.

Aunque no todos los estudios de reescritura situacional lograron aumentar el éxito de los alumnos en la resolución de los mismos (Vicente y Manchado, 2016), a veces, pequeños cambios en los enunciados provocan mejoras considerables en la comprensión.

- Poner ejemplos que ilustren y ayuden a entender los problemas.
- Utilizar diferentes estrategias útiles y que los alumnos las aprendan y se acostumbren a utilizarlas.
- Intentar utilizar más de un planteamiento o procedimiento para resolver los problemas. Que los alumnos vean que puede haber alternativas a la hora de plantear y resolver un problema.
- Potenciar la utilización de un lenguaje matemático adecuado.
- Insistir en la realización de los procedimientos aplicados con el rigor propio de las matemáticas.
- Insistir en la comprobación de los resultados. Para ello es muy importante que nosotros mismos revisemos todos los procedimientos de forma detallada.
- Insistir en la verificación contextual de los resultados obtenidos. Plantear problemas con un más de una solución y que no todas sean soluciones adecuadas al problema.

Segunda Parte

Capítulo 2. Marco Metodológico

En este Capítulo se describe todo el proceso llevado a cabo en nuestra investigación. Se procede a la descripción de los objetivos que centran la investigación, presentando el tipo de investigación y diseños utilizados, las características de la muestra, instrumentos y procesos de recogida de datos y las distintas fases en las que se ha desarrollado el trabajo que presentamos.

2.1. Objetivos

Con la finalidad de dar respuesta al problema de investigación planteado y teniendo en cuenta que interpretamos que la resolución de problemas escolares puede ser el puente entre el currículo y la competencia matemática, pretendemos que el desarrollo de la investigación nos permita alcanzar el siguiente objetivo general:

Mejorar la competencia matemática de los alumnos de 3º de ESO a través de la resolución de problemas.

Para ello nos marcamos los siguientes objetivos específicos:

1. Conocer en una mayor profundidad los fenómenos de enseñanza y aprendizaje que tienen lugar alrededor de los procesos de resolución de problemas escolares.
2. Mejorar los procesos de resolución de problemas en los alumnos de tercero de educación secundaria obligatoria.
 - 2.1. Evaluar los procesos de resolución de problemas de los alumnos.
 - 2.2. Crear un ambiente de resolución de problemas en el aula.
 - 2.3. Proponer estrategias que faciliten a los alumnos los procesos de resolución de problemas.

- 2.4. Evaluar el uso que hacen de las estrategias.
3. Elaborar una propuesta didáctica para el aprendizaje de contenidos de tercero de educación secundaria obligatoria a través de la resolución de problemas.
4. Analizar el currículo oficial respecto a la resolución de problemas y su correspondencia en los libros de texto.
 - 4.1. Analizar la presencia de la resolución de problemas en el currículo oficial de la asignatura de matemáticas orientadas a la actividad académica de tercero de educación secundaria obligatoria.
 - 4.2. Analizar la presencia de la resolución de problemas en algunos libros de texto del nivel al que va dirigido esta investigación.

2.1.1. Organización de los objetivos de la investigación

En este apartado vamos a explicar en líneas generales los pasos que hemos seguido para alcanzar los objetivos que se han planteado para esta investigación.

1) Conocer en mayor profundidad los fenómenos de enseñanza y aprendizaje que tienen lugar alrededor de los procesos de resolución de problemas escolares.

Para alcanzar este primer objetivo hemos realizado una revisión teórica de los aspectos relacionados con las competencias en general y con la competencia matemática en particular, centrándonos en la contribución de los procesos de resolución de problemas en la adquisición y desarrollo de la competencia matemática. Es importante tener en cuenta que este estudio teórico se ha realizado desde nuestra óptica como docentes, valorando las aportaciones que los diferentes trabajos de investigación estudiados eran de utilidad para nuestro objetivo.

2) Mejorar los procesos de resolución de problemas en los alumnos de tercero de educación secundaria obligatoria.

Este objetivo se ha dividido en otros cuatro.

- Evaluar los procesos de resolución de problemas de los alumnos.

- Crear un ambiente de resolución de problemas en el aula.
- Proponer estrategias que faciliten a los alumnos los procesos de resolución de problemas.
- Evaluar el uso que hacen de las estrategias.

En primer lugar hemos realizado una medición de la capacidad de los alumnos para resolver problemas centrándonos en la etapa de comprensión de los problemas. En segundo lugar, queríamos crear un ambiente propicio en el aula para resolver problemas, trabajando especialmente la motivación de los alumnos a la hora de enfrentarse a los problemas e intentar cambiar las creencias. En tercer lugar hemos propuesto la enseñanza de estrategias, como por ejemplo, la utilización de guiones que faciliten a los alumnos recorrer las distintas fases o etapas ante un problema, las representaciones para favorecer la comprensión, comunicar los procedimientos realizados, la búsqueda de más de un procedimiento. Y por último, hemos hecho una evaluación de la aplicación de las estrategias propuestas, haciendo uso de una metodología de aprendizaje cooperativo y utilizando rúbricas diseñadas para este fin que hemos recogido como anexos.

En todo los procesos desarrollados para alcanzar este objetivo hemos utilizado como contenidos los número racionales y los procedimientos relacionados con el álgebra, que son objeto de enseñanza en este nivel según la propuesta del currículo.

3) Elaborar una propuesta didáctica para el aprendizaje de contenidos de tercero de educación secundaria obligatoria a través de la resolución de problemas.

Esta propuesta se ha elaborado con el objeto de que los alumnos aprendan contenidos matemáticos utilizando una situación problema en un contexto real. Se preparó una versión inicial que se puso en práctica con el grupo clase y se fue construyendo la versión definitiva a partir de la interacción con los alumnos.

Creemos que esta forma de acceder a los contenidos a través de la resolución de problemas es muy adecuada al nivel al que nos dirigimos. La intención ha sido experimentarlo en el aula, observar los resultados y especialmente la valoración que hacían los alumnos. Para la propuesta didáctica hemos utilizado los contenidos relacionados con las sucesiones, en concreto las progresiones aritméticas y geométricas, ya que son contenidos en los que se

inician en este curso y los veíamos como una oportunidad de que descubran la funcionalidad de las matemáticas.

4) Analizar el currículo oficial respecto a la resolución de problemas y su correspondencia en los libros de texto.

Para alcanzar este objetivo hemos hecho una revisión de la competencia matemática y de la presencia de la resolución de problemas en el desarrollo normativo del actual sistema educativo. Posteriormente hemos realizado una revisión del tratamiento que algunos libros de texto del nivel estudiado hacen de la resolución de problemas y si reflejan la propuesta del currículo.

2.2. Tipo de investigación y diseño utilizado

En este trabajo hemos seguido un modelo de investigación mixto ya que como señalan Castro y Godino (2011) “permite comprender las actividades educativas en el contexto en que tienen lugar” (p.100). Parte del trabajo ha seguido un modelo evaluativo, que como indica Ruthman (citado en Alvira, 1985) “es, ante todo, el proceso de aplicar procedimientos científicos para acumular evidencia válida y fiable sobre la manera y grado en que un conjunto de actividades específicas produce resultados o efectos concreto” (p.130). Es una investigación centrada en lo práctico, en el que ha habido un proceso de recogida de información sobre aquellas variables que entendíamos que afectaban al problema que queríamos resolver. Además, en el proceso se han realizado mediciones de diferentes variables sobre las que se ha realizado un tratamiento estadístico tanto descriptivo como inferencial. A partir de la interpretación de los resultados de cada fase de la investigación se han realizado diferentes intervenciones con el objeto de mejorar los resultados, Alvira (1985) identifica la intervención como “un conjunto de actividades más o menos complejas que se pretende produzcan un determinado impacto” (p.133). En nuestro caso han sido pequeñas intervenciones que nos han permitido ir desarrollando un modelo que facilite la resolución de los problemas, y por lo tanto, nos permita lograr el objetivo general de nuestra investigación.

La metodología empleada incluye un diseño cuasiexperimental sin grupo control ya que los grupos estaban formados de forma natural. Las mediciones ante y después de las

intervenciones se han realizado con pequeños cuestionarios de problemas seleccionados para este fin y con el objeto de valorar la intervención realizada.

Esta investigación se realizó en el mismo nivel durante tres cursos académicos, es decir no ha habido un seguimiento curso a curso. Los grupos de alumnos participaron en diferentes fases de la investigación, por lo que algunas mediciones de variables se realizaron con el mismo grupo de alumnos y otras mediciones en grupos distintos, y este aspecto hay que tenerlo en cuenta en las interpretaciones realizadas, ya que aunque se interpretan como una evolución de las variables estudiadas, al tratarse de grupos distintos habrá otras variables que se han podido escapar de nuestro control.

Ha sido muy importante en todo el proceso crear un ambiente de aprendizaje basado en la resolución de problemas, para Molina, Castro, Molina y Castro (2011) “el diseño de ambientes de aprendizaje sirve como contexto para la investigación y, a su vez, tanto los análisis continuados que se van realizando como el análisis retrospectivo de la misma informan sobre el diseño permitiendo su mejora” (p.76).

También la participación de los alumnos en la elaboración de la propuesta ha sido muy importante, ya que ha permitido ir dándole forma y mejorándola a lo largo de todo el proceso. Además, se ha recabado la opinión de los alumnos a través de una encuesta.

Respecto al análisis de los libros de texto el método que se ha utilizado es el de análisis de contenido, aunque no se ha estudiado ningún contenido específico, se ha tratado de describir y analizar los libros de texto en relación con el tratamiento que realizan la resolución de problemas.

Como conclusión podemos decir que hemos realizado una serie de estudios, durante tres cursos académicos, que se complementan y que nos han permitido elaborar una propuesta concreta de trabajo en el aula cuyo objetivo es mejorar la competencia matemática de los alumnos.

2.3. Contexto y participantes

El estudio se ha realizado en un centro privado-concertado en el que se cursa educación obligatoria, bachillerato y Ciclos Formativos. Este es un aspecto que consideramos

importante ya que hay continuidad de los alumnos en el centro durante toda su escolaridad. Por lo que a las propuestas se les puede dar continuidad y valorar a lo largo del tiempo.

Por su ubicación geográfica se encuentra en un entorno socioeconómico con una representación heterogénea de las diferentes clases sociales. La gran mayoría de los padres manifiestan interés y hacen un seguimiento de la evolución en los estudios de sus hijos e hijas. Igualmente gran parte del alumnado suele preocuparse por mejorar académicamente y continuar con sus estudios.

Este trabajo se desarrolló durante los cursos 2014-2015; 2015-2016 y 2016-2017, y participaron alumnos de 3º ESO con una edad comprendida entre 14 y 15 años.

2.3.1. Tipos de agrupamientos

Durante el trabajo se realizaron tres tipos de agrupamientos:

- Grupo-clase. Con este agrupamiento se estudió la resolución de problemas en el aula por parte del profesor, especialmente la enseñanza de estrategias y la presentación y utilización de los guiones, además del desarrollo de la propuesta de aprendizaje de contenidos matemáticos vía resolución de problemas.
- Trabajo individual. Los alumnos trabajaron de forma individual en problemas que se plantearon en clase utilizando los guiones propuestos para las distintas fases de la resolución de problemas.
- Grupo pequeño. Se realizaron agrupamientos de tres alumnos, en la mayoría de los casos. Los grupos fueron heterogéneos y se tuvo en cuenta que estuvieran formados por alumnos con distintas capacidades para la resolución de problemas.

2.4. Procedimiento

El trabajo se ha desarrollado con los diferentes grupos en los que el investigador-profesor imparte docencia. En concreto el número de horas a la semana asignadas son de cuatro. La asignación de horas a la investigación no fue fija, aunque se desarrolló principalmente en los dos primeros trimestres, durante los dos primeros cursos académicos, ya que se

intentaba hacer compatible con la impartición del currículo. En el curso académico 2016-2017 se asignó una hora a la semana a la resolución de problemas.

2.4.1. Fases de la investigación

Este trabajo se ha estructurado en las siguientes fases o etapas:

- Fase I: Análisis de la comprensión de los enunciados de los problemas.
- Fase II: Guion para la fase de comprensión.
- Fase III: Propuestas para la resolución de problemas.
- Fase IV: Propuesta de aprendizaje de contenidos vía resolución de problemas.
- Fase V: Trabajo con el cuadernillo.
- Fase VI: Las representaciones que utilizan.
- Fase VII: La elaboración de un plan.
- Fase VIII: La comunicación.
- Fase IX: Análisis de los libros de texto.

2.4.1.1. Fase I: Análisis de la comprensión de los enunciados de los problemas

La primera fase de la investigación consistió en intentar conocer el nivel de los alumnos a la hora de resolver problemas. Queríamos comprobar si los alumnos tenían dificultades con la comprensión de los enunciados y para ello nos centramos en este aspecto de la resolución. Es importante tener en cuenta que no teníamos ningún valor previo que nos sirviera de referencia para poder comparar los resultados obtenidos. Los resultados nos permitieron tener una idea del nivel de comprensión y poder valorar si estos resultados mejoraron con la intervención.

Esta primera fase se desarrolló durante el primer trimestre del curso 2014-2015, en dos momentos distintos, participando 72 y 67 alumnos respectivamente.

En primer lugar elaboramos un cuestionario con cinco problemas con el que queríamos comprobar la capacidad de los alumnos para comprender los enunciados, hay que tener en cuenta que en ningún momento se les pedía que llegaran a la solución del problema. Los contenidos necesarios que debían movilizar eran los significados y las operaciones relacionadas con los números racionales. Este tipo de problemas ya los han trabajado en cursos anteriores, por lo que son contenidos que deberían conocer. A comienzos de este curso los contenidos fueron repasados y problemas similares a los del cuestionario mencionado han sido resueltos a modo de ejemplo por el profesor. Se siguió lo que hemos llamado método tradicional, es decir, se han realizado al final de la unidad, verbalizándolos mientras se resolvían y aplicando las estrategias necesarias, aunque intentando no alejarnos de los procedimientos a los que los alumnos están acostumbrados de cursos anteriores. Además, también fueron propuestos varios problemas similares, los alumnos debían utilizar las mismas estrategias, como trabajo individual en casa y corregidos posteriormente en el aula por el profesor.

Preparamos dos versiones del mismo cuestionario; en la primera versión, a la que denominamos C1, las respuestas a los problemas implicaba una explicación por escrito por parte de los alumnos; en la segunda versión que denominamos C2, las respuestas a los problemas eran de opción múltiple con cuatro alternativas posibles. Por lo tanto, en el caso de C1, lo que pedimos a los alumnos como respuesta a los problemas es que fueran capaces de definir la naturaleza del problema e intentar explicar lo que se les pide. Y en el caso de C2, simplemente deben seleccionar una única respuesta entre las cuatro alternativas. Los motivos del porqué se realizaron dos versiones del mismo cuestionario fueron varios: en la versión C1 intuíamos que los alumnos podían tener dificultades al no ser la forma habitual con la que se enfrentan a los problemas en clase y en C2 el hecho de tener que seleccionar la respuesta adecuada entendíamos que les facilitaba la reflexión sobre lo que les pedíamos y podía servir de ayuda para llegar a la respuesta del problema. El objetivo final era comprobar si encontrábamos algunas diferencias entre los resultados entre ambos cuestionarios, respecto a la comprensión que manifiestan.

A la hora de valorar C1 tuvimos que analizar si la explicación que daba el alumno como respuesta al problema entendíamos que indicaba que lo había comprendido y que por lo tanto era susceptible de ser resuelto, independientemente de que fuera capaz de resolverlo

o no. En el caso C2 sólo hay una respuesta correcta de las cuatro posibles por lo que la corrección era más objetiva. En ambos cuestionarios cada problema se calificaba con un valor de uno, si la respuesta era correcta y con un cero en caso de ser incorrecta. La calificación del cuestionario era la suma total de la calificación obtenida en cada problema, y para valorar como apto el cuestionario consideramos una calificación de 3 puntos en el mismo, es decir, haber comprendido como mínimo tres problemas de los cinco que lo conformaban.

Un factor importante a tener en cuenta en el desarrollo de la investigación es que los cuestionarios no han sido anónimos, y los motivos los podemos resumir en:

- Tener una evaluación individual de este proceso que nos permitiera orientar a los alumnos.
- Comparar los resultados de los alumnos en cada cuestionario con sus calificaciones académicas en matemáticas.
- Comparar los resultados obtenidos por los alumnos entre ambos cuestionarios.
- Finalmente, creemos que el anonimato influye en la actitud de los alumnos a la hora de realizar las actividades propuestas.

Previamente a la entrega y realización del cuestionario dedicamos un tiempo a su explicación y recordamos a los alumnos la necesidad de comprender el problema, tal y como se ha insistido en clase cuando los hemos resuelto. Hacernos las preguntas que ya hemos utilizado, ¿qué se pregunta?, ¿qué es lo que se desconoce?, ¿cuáles son los datos y condiciones? Pero sin la necesidad de preocuparnos en buscar los procedimientos para intentar resolverlos, y que por lo tanto se concentraran en comprenderlos. Además, siguiendo las sugerencias de Fetrow (2009) realizamos una lectura en voz alta de los enunciados junto con una revisión del significado de las palabras que no entendían de cada uno de los problemas.

Con objeto de analizar la variable tiempo anotamos el tiempo que invirtió cada alumno en la realización del cuestionario, queríamos estudiar si los resultados que obtenían tenían alguna relación con el tiempo que le dedicaban.

2.4.1.2. Fase II: Guion para la fase de comprensión.

Los resultados obtenidos en la fase anterior nos condujeron a la segunda fase de nuestro trabajo, que consistió en introducir en el proceso de resolución de problemas un elemento de reflexión más concreto, en este caso un Guion que creíamos que podía favorecer la comprensión de los enunciados del problema.

Esta fase fue desarrollada durante el segundo trimestre del curso 2014-2015, participaron 64 alumnos y se realizó en dos momentos distintos. En un primer momento se presentó a los alumnos un Guion para llevar a cabo la fase de comprensión del problema. Este guion es una de las propuestas que hacemos en este trabajo y se puede ver en el apartado (Guion para la fase de comprensión).

En el momento de la presentación del guion en el aula insistimos en que lo siguieran con detalle, especialmente en aquellos aspectos que entendíamos que favorecían la comprensión del enunciado, como por ejemplo la representación del problema (Vicente, Orrantia y Verschaffel, 2008). Además, intentamos convencerles que aunque el problema les resultara fácil o conocido, y que por lo tanto creyeran que no lo necesitaran, no se saltaran los pasos que se proponían, ya que lo planteamos para otros problemas que podrían suponerles más esfuerzo, y que por lo tanto era muy importante empezar por problemas más sencillos. El objetivo principal es que la utilización del guion se convierta en un hábito que los alumnos vayan interiorizando.

Durante dos sesiones utilizamos el guion para analizar y poder comprender varios problemas del libro de texto que utilizan (Sánchez, 2014). Los contenidos trabajados corresponden a procedimientos relacionados con el lenguaje algebraico, en particular el planteamiento algebraico de ecuaciones de primer grado. Estos problemas se resolvieron siguiendo el guion con el grupo clase. Durante todo el proceso de comprensión se intentaron aprovechar las aportaciones de los alumnos y los debates generados en el grupo. Posteriormente, durante dos sesiones de clase, los alumnos resolvieron algunos problemas en pequeños grupos de 3 o 4 alumnos. Para este momento se les entregó una copia en papel del guion y el profesor se movió por los grupos para aclarar las dudas que surgieron del uso del guion. A partir de este trabajo en el aula se realizaron mejoras en el guion.

Después de este trabajo con el guion en clase, propusimos a los alumnos un nuevo cuestionario que llamamos C3. El objetivo de C3 era evaluar si la utilización del guion mejoraba el grado de comprensión de los enunciados de los problemas comparándolo con los resultados del trabajo desarrollado en la fase anterior. Este cuestionario lo realizaron durante una sesión de clase y contaron como ayuda con el guion que ya habíamos trabajado en clase y ya se habían acostumbrado a utilizarlo.

El cuestionario C3 está compuesto por cinco problemas, igual que en los cuestionarios anteriores, son problemas de los que se suelen proponer en clase y que son similares a los que vienen propuestos en los libros de texto del nivel. Los procedimientos que los alumnos deben utilizar para resolverlos están relacionados con las expresiones algebraicas. Son contenidos que los alumnos han trabajado en los dos cursos anteriores y suelen manifestar dificultades con la traducción al lenguaje algebraico de los enunciados de los problemas. En este aspecto es muy interesante la revisión realizada por Rodríguez-Domingo y Molina (2013) sobre las dificultades de los alumnos de educación secundaria en la traducción del sistema de representación verbal al simbólico. Nuestra experiencia como profesores en este nivel muestra que muchas veces esta dificultad suele estar provocada por buscar de una manera irreflexiva cuál es la incógnita, o como ellos dicen, a qué llamar “x”.

Como en los trabajos anteriores, un factor importante a tener en cuenta en el desarrollo de la investigación es que los cuestionarios no han sido anónimos y los motivos fueron los mismos que ya explicamos anteriormente.

Además, para poder tener en cuenta las mismas variables analizadas anteriormente hemos medido el tiempo que invirtió cada alumno en su realización siguiendo el procedimiento descrito anteriormente.

2.4.1.3. Fase III: Propuestas para la resolución de problemas.

Los resultados que íbamos obteniendo en las fases anteriores nos animaron a elaborar guiones en la misma línea del ya propuesto a los alumnos. Lo que hicimos en primer lugar fue decidir en cuántas fases les proponíamos a los alumnos el abordaje de la resolución de problemas. Para ello tuvimos en cuenta las propuestas de autores que han investigado sobre este aspecto, además de otros factores como nuestra experiencia como profesores del nivel, la madurez de los alumnos, las sugerencias del currículo oficial, la interacción y

propuestas de los alumnos sobre el material previo que se les presentaba, etc. Las propuestas que elaboramos se pueden leer en el capítulo 4.

Desde el comienzo del curso 2015-2016 se entregó a los alumnos los diferentes guiones preparados para aplicar en las diferentes fases de resolución de problemas, y en los momentos que se dedicaron a resolver problemas en clase se utilizaron los guiones, tanto por parte de los alumnos en su trabajo individual como en el trabajo con el grupo clase.

2.4.1.4. Fase IV: Propuesta de aprendizaje de contenidos vía resolución de problemas.

En nuestro objetivo de que hubiera una inmersión de los alumnos en la resolución de problemas como la forma de hacer matemáticas, condujo a la fase siguiente. Decidimos introducir los problemas como una vía para que los alumnos aprendieran, por descubrimiento y como si de un trabajo de investigación se tratara, ciertos contenidos, alejándonos del modo tradicional de exponerlos en clase.

Los contenidos que preparamos para aplicar este aspecto de la resolución de problemas fueron los referentes a las sucesiones, en concreto las expresiones del término general de las progresiones aritméticas y geométricas. Son contenidos que los alumnos suelen aprender de forma memorística sin comprender muy bien la importancia que tienen en un contexto real.

2.4.1.5. Fase V: Trabajo con el cuadernillo.

Esta fase se desarrolló en el tercer trimestre del curso 2015-2016 y después de que los dos trimestres anteriores los alumnos estuvieran trabajando con los guiones. El objetivo era estudiar el proceso que siguen los alumnos a la hora de enfrentarse a un conjunto de problemas que se les han propuesto en clase. Para resolver estos problemas han utilizado los guiones desarrollado por nosotros en la fase III. Además, nos parecía importante que este trabajo lo desarrollaran utilizando estrategias de aprendizaje cooperativo, por lo que se formaron grupos de carácter heterogéneo, en la mayoría de los casos de tres alumnos. Formar grupos heterogéneos era importante ya que era imprescindible la presencia de alumnos con distintas capacidades respecto a la resolución de problemas, y por lo tanto, se pudiera aprovechar al máximo el potencial del aprendizaje cooperativo. Al mismo tiempo

que trabajamos los procesos de razonamiento en los alumnos también debemos trabajar los aspectos relacionados con la comunicación. Esto se hace visible cuando los alumnos utilizan símbolos, gráficos, dibujos, utilizan expresiones oralmente y escrito y de las ideas o conclusiones, etc. El esfuerzo que realiza el alumno para expresar sus ideas y hacerse entender le ayuda a mejorarlas. Según Valverde (2013), esta capacidad implica que “los estudiantes deben ser capaces de proporcionar suficientes razones para que sus compañeros y el profesor puedan comprender por qué han hecho lo que han hecho en relación con la resolución de un ejercicio o problema matemático” (p.76).

Otro aspecto que queríamos valorar en el trabajo era qué planteamientos y/o procedimientos distintos para resolver los problemas utilizaban los alumnos; en concreto procedimientos de tipo aritmético o de tipo algebraico.

En la resolución del cuadernillo pretendíamos que los alumnos aplicasen las fases propuestas en este trabajo, que las diferencien; en concreto que la utilización de los guiones se convierta en un hábito. Entendemos que los alumnos no van a memorizarlos, pero sí, que a base de utilizarlos habitualmente lleguen a interiorizarlos como un modo de proceder ante un problema.

A continuación presentamos unas sugerencias para esta fase que hemos identificado como necesarias:

- Es muy importante crear en el aula un espacio donde los alumnos estén motivados y sientan ganas de trabajar los problemas que les propongamos.
- Que entiendan que es muy importante la actividad colectiva a partir de que la valoren como un beneficio de todos y para todos.
- El grupo debe trabajar junto y conseguir que todos los miembros sean capaces de resolver el problema propuesto. Evitar, en la medida de lo posible, el desequilibrio en la participación de los miembros del grupo. Hemos seguido la estrategia de ir sentándonos con los diferentes grupos e ir evaluando el trabajo individual de cada alumno dentro del trabajo de grupo. En el anexo VI podemos ver la rúbrica de evaluación que hemos utilizado y que a los alumnos ya se les había presentado.

Este mecanismo de evaluación nos ha servido para reorientar el trabajo en los grupos.

- Desarrollar en los alumnos estrategias comunicativas, por lo que deben ser capaces de debatir con sus compañeros, argumentar y emitir juicios. Hay que evitar las dosis excesivas de confrontación entre los miembros del grupo ya que pueden bloquear el trabajo y la reflexión.
- Es muy importante tener en cuenta que solicitaremos a los alumnos que resuelvan los problemas aplicando tres procedimientos distintos por lo que los profesores deben sentirse cómodos en los distintos modos de resolución. Como veremos más adelante hemos resuelto y explicado los problemas con los diferentes procedimientos.

La rúbrica de evaluación de los problemas

Para evaluar el proceso seguido por los alumnos en la resolución de los problemas hemos utilizado una rúbrica (ver anexo III) con siete categorías que se evaluaban con una escala de cero a tres, según los distintos descriptores.

El objetivo que teníamos al utilizar la rúbrica es que no queríamos centrarnos únicamente en la solución aportada al problema sino analizar el proceso que llevaban acabo.

A continuación presentamos las categorías utilizadas en la rúbrica y la escala de valoración de cada una de las categorías, de menor a mayor valor (0-1-2-3).

a) Identifica las fases propuesta en clase. Con esta categoría hemos pretendido comprobar si los alumnos emplean el modelo que les hemos propuesto, y para ello nos hemos fijado en los siguientes descriptores:

- No se observa identificación de las fases.
- Hay una cierta estructuración del problema en fases.
- El problema está estructurado pero no se identifican todas las fases.
- Las fases están claramente identificadas.

Es importante tener en cuenta que en ningún momento hemos pedido a los alumnos que al resolver los problemas aparezcan las fases de una forma explícita, sino que en la corrección de los problemas hemos intentado valorar la presencia de dichas fases por el trabajo que han realizado en los mismos. Esta categoría se ha evaluado independientemente de que el problema esté bien resuelto o no.

b) Ha comprendido el problema. Con esta categoría se desea valorar si los alumnos han comprendido el problema. No estamos valorando el hecho de que lo hayan conseguido resolver o no: lo que hemos intentado es identificar elementos en el proceso de resolución que han seguido y que nos permitan evaluar esta categoría. Para ello utilizamos los siguientes descriptores:

- No hay ninguna evidencia de que haya comprendido el problema.
- Hay alguna evidencia (identificación de los datos o la incógnita, etc.) pero no suficiente para continuar con su resolución.
- Hay bastantes evidencias de que ha comprendido el problema pero no sirven para continuar con su resolución.
- Ha comprendido el problema para poder continuar con su resolución.

c) Ha ejecutado algún plan. Con esta categoría pretendemos evaluar la capacidad de los alumnos para establecer un plan. Para ello hemos intentado identificar en el procedimiento seguido por los alumnos el plan que han llevado a cabo. Los descriptores que hemos utilizado son:

- No hay ninguna evidencia de que haya planificado la resolución.
- Existen ciertas evidencias de que ha ideado un plan.
- Se ve claramente que ha ideado un plan pero no conduce a resolver el problema.
- Además el plan ideado le conduce a la resolución del problema.

d) Aplica diferentes procedimientos. Con esta categoría intentamos evaluar la capacidad de los alumnos para resolver los problemas aplicando más de un procedimiento. Hay que

tener en cuenta que en los problemas se indicaban el número de procedimientos a realizar. Los descriptores que hemos utilizado son:

- No aplica ningún procedimiento.
- Aplica algún procedimiento pero que no resuelve el problema.
- Aplica algún procedimiento que conduce a resolver el problema.
- Aplica todos los procedimientos solicitados.

e) Resuelve el problema. Con esta categoría evaluamos la resolución del problema. Si observamos los descriptores podemos ver que llegar a la solución correcta otorga la máxima calificación, pero existen situaciones intermedias que también se valoran.

- No resuelve el problema correctamente.
- Plantea un procedimiento pero que no conduce a la resolución del problema.
- Plantea un procedimiento adecuado pero comete errores que no le permiten resolverlo.
- Resuelve el problema correctamente.

f) Comprueba el resultado. Con esta categoría debemos identificar si el alumno realiza alguna comprobación del resultado. Es decir, comprueba si el resultado satisface el planteamiento inicial.

- No realiza ninguna comprobación.
- Hay alguna evidencia de comprobación.
- Comprueba el resultado del procedimiento.
- Se identifica un apartado donde realiza la comprobación.

g) Verifica los resultados con el enunciado del problema. Esta categoría es muy importante en el proceso de resolución. Lo que queremos valorar es si los alumnos, una vez obtenida la solución, verifican la validez de la misma en el contexto del problema.

- No realiza ninguna verificación.
- Hay alguna evidencia de verificación.
- Verifica los resultados.
- Se identifica un apartado donde realiza la verificación.

Desarrollo de la propuesta.

A continuación presentamos las distintas fases en las que se ha desarrollado este trabajo con el cuadernillo:

- Formación de los grupos. Se forman grupos heterogéneos de tres alumnos. Los grupos hemos intentado formarlos teniendo en cuenta la clasificación del alumnado que hemos propuesto en el apartado 1.3.5, aunque en algunos casos no ha sido fácil y se han formado de cuatro alumnos para poder compensar el grupo. En la medida de lo posible, lo más importante ha sido incluir algún alumno con facilidad para abordar los problemas por procedimientos aritméticos.
- Explicar a los alumnos la metodología que deben seguir en el trabajo de grupo.
- En cada problema planteado encontrarán una indicación del número de procedimientos diferentes que se les propone para resolverlo. Por ejemplo NP2 o NP3.
- Todos los alumnos del grupo deben participar en la resolución de los problemas. Cada procedimiento de resolución será escrito por un alumno distinto y además será el responsable de exponerlo al grupo clase.
- El único material para trabajar en el grupo debe ser una calculadora por grupo, papel para trabajar en “sucio”, lápices, goma y bolígrafos.
- Explicar los criterios de evaluación del trabajo que deben realizar.
- En este momento se presenta a los alumnos la rúbrica (ver anexo III) que se va a utilizar. La que nos sirve para evaluar la resolución de los problemas, y la que nos

permitirá evaluar el trabajo de cada uno de ellos dentro del trabajo del grupo (ver anexo VI).

- El cuadernillo consta de 6 problemas y para realizar el trabajo disponen de 6 sesiones de clase. En cada sesión se hará entrega de una hoja en la que aparece un problema que deben resolver y entregar al profesor para su corrección.
- También se entregarán los guiones de las distintas fases. Después de algunas sesiones y de manera intencionada se debe dejar de entregar para observar si los alumnos lo demandan.
- Presentación al grupo clase del trabajo realizado por los grupos. Es importante que haya una valoración de las intervenciones por parte del profesor y especialmente que se fomente la participación. El profesor debe preguntar a todos los alumnos del grupo para comprobar que todos han participado en la elaboración de los problemas.

Los problemas del cuadernillo

A continuación presentamos los problemas resueltos con los distintos procedimientos que esperamos que utilicen los alumnos. En la fase de exposición de los grupos se explicarán de esta manera en caso de que los alumnos no los hayan conseguido resolver.

1) En una colecta se ha reunido una cantidad de dinero con la que se compraron algunas cosas. La mitad del dinero se gastó en ropa; los $\frac{2}{5}$ en productos de aseo, y aún han sobrado 14 euros. ¿Cuánto dinero consiguieron recolectar?

Soluciones:

Este problema, en sus diferentes versiones, se suele plantear en el aula para que los alumnos practiquen las operaciones con números racionales.

Comenzaremos con un planteamiento aritmético y podríamos escribir lo siguiente:

Ropa: $\frac{1}{2}$ del dinero

Productos de aseo: $\frac{2}{5}$ del dinero

Sobran: 14 euros

Podemos realizar la siguiente representación indicando lo que representa lo gastado en ropa, en productos de aseo y quedando una parte que representa los 14 euros que sobran.

Figura 2: Problema 1 del cuadernillo

R	A
R	A
R	A
R	A
R	S

R: dinero gastado en ropa

A: dinero gastado en aseo

S: dinero que sobra

A partir de la figura, los alumnos pueden ver que el dinero recaudado se dividió en 10 partes, hay que aprovechar para que entiendan que las 10 partes coinciden con el mínimo común múltiplo.

Ropa: $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ del dinero

Productos de aseo: $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$ del dinero

De las 10 partes, a la ropa le corresponden 5 y a los productos de aseo 4 partes, teniendo entonces ya 9 partes del total; queda por tanto una parte que corresponden a los 14 euros que han sobrado. Al considerar que el dinero está formado por 10 partes queda claro entonces que tenían $14 \times 10 = 140$ euros reunidos. Es bueno que todos estos razonamientos se hagan en voz alta sin escribir en la pizarra; los alumnos más aventajados van comprendiéndolos, y para los que tienen más dificultades debemos explicarlo nuevamente y escribir los razonamientos.

Esta forma de resolver el problema es difícil de entender para la mayoría de los alumnos por lo que requiere ir despacio en el proceso de análisis y comprensión. Pero es corriente encontrar alumnos que tienen bastante facilidad en aplicar este tipo de razonamiento.

Procedimiento algebraico:

Este problema también se suele plantear como práctica de procedimientos algebraicos y en concreto para resolverlo a partir del planteamiento de una ecuación de primer grado. Suelen comprenderlo fácilmente y no entraña mucha dificultad.

Comenzamos el ejercicio escribiendo lo siguiente:

$$\text{Ropa} + \text{productos de aseo} + 14 \text{ euros} = x$$

Si llamamos x al dinero que han reunido escribimos la relación entre los datos y el dinero reunido:

$$\text{Ropa: } \frac{1}{2}x$$

$$\text{Productos de aseo: } \frac{2}{5}x$$

Sobran: 14 euros

$$\frac{1}{2}x + \frac{2}{5}x + 14 = x$$

Cuya solución nos lleva a que $x = 140$ euros.

2) En un centro escolar, el número de alumnas de 3º de ESO excede en 20 al número de alumnos. Si entre todos hay 120 alumnos, ¿cuántas chicas y cuántos chicos hay en dicho curso?

Soluciones:

Procedimiento aritmético

Si hay 20 alumnas más que alumnos, a los 120 alumnos en total le quitamos 20 que seguro que son chicas, nos quedan 100, de los cuales 50 serán chicos y 50 chicas. Por lo tanto tenemos 50 chicos y 70 chicas. También podemos hacerles ver que si la mitad son chicas y la otra mitad chicos, habría 60 alumnos y 60 alumnas, pero como hay 20 alumnas más que alumnos, los dos números que cumplen esa condición y sumen 120 son, 50 alumnos y 70 alumnas.

Procedimientos algebraicos

El número de alumnas es igual al de alumnos más 20.

Si llamamos x al número de alumnos, entonces, el número de alumnas es igual a $x + 20$.

Por lo tanto, el número de alumnos más el número de alumnas es igual a 120. Plantearemos una ecuación de primer grado:

$$x + x + 20 = 120 \rightarrow 2x = 100 \rightarrow x = 50 \text{ Por lo que tenemos 50 chicos y 70 chicas.}$$

Otro procedimiento algebraico que podemos aplicar sería resolver el problema mediante un sistema de ecuaciones.

Si llamamos x al número de alumnos e y al número de alumnas tenemos: $x + y = 120$

Si el número de alumnas es igual al de alumnos más 20 tenemos: $y = x + 20$

Si resolvemos el sistema $\begin{cases} x + y = 120 \\ y = x + 20 \end{cases}$ obtenemos 50 chicos y 70 chicas.

3) El precio de un pantalón es el doble que el de una camiseta. Si entre los dos cuestan 54 euros, ¿cuál es el precio de cada uno de ellos?

Un procedimiento aritmético muy sencillo sería considerar que entre el pantalón y la camiseta tenemos tres partes para repartir el dinero que tenemos: $\frac{54}{3} = 18$, por lo que la camiseta cuesta 18 euros que es una de las partes y el pantalón 36 euros ya que son las dos partes que restan.

Procedimientos algebraicos:

El precio del pantalón más el precio de la camiseta es igual a 54 euros.

Como el pantalón tiene un precio doble que el de la camiseta podemos entender que el precio de la camiseta más el doble del precio de la camiseta (que equivale al pantalón) serían los 54 euros, por lo que si llamamos x al precio de la camiseta obtendríamos la siguiente ecuación de primer grado:

$x + 2x = 54 \rightarrow 3x = 54 \rightarrow x = \frac{54}{3} = 18$ que sería el precio de la camiseta y $2x = 36$ euros el precio del pantalón.

También es muy normal que los alumnos lo resuelvan utilizando un sistema de ecuaciones, llamando x al precio de la camiseta e y al precio del pantalón, conduce al sistema

$$\begin{cases} x + y = 54 \\ y = 2x \end{cases}$$
 que una vez resuelto nos da como resultados $x = 18$ e $y = 36$ que serían el

precio de la camiseta y del pantalón respectivamente.

4) En un corral hay pollos y conejos. Se cuentan las cabezas y son dieciséis; se cuentan las patas y son cincuenta y dos. ¿Cuántos pollos y conejos hay en el corral? (tomado de Cerdán, 2008)

Soluciones:

Se trata de un problema clásico que se suele plantear en clase, aunque con diferentes versiones, ya sea con motos y coches, recipientes, etc., para que los alumnos lo resuelvan empleando un sistema de ecuaciones.

Procedimiento aritmético:

Una forma de resolverlo desde un punto de vista aritmético consistiría en tener en cuenta que, las 16 cabezas implica que hay 16 animales entre pollos y conejos, que tienen al menos 2 patas, por lo que tendríamos 32 patas, el resto hasta las 52 patas serían 20 patas que corresponderían a los conejos. La conclusión es que estaríamos hablando de 10 conejos y 6 gallinas.

Procedimientos algebraicos:

Si llamamos x al número de gallinas e y al número de conejos, se plantea una ecuación con dos incógnitas $x + y = 16$ que hace referencia al número de cabezas y otra ecuación, también de dos incógnitas $2x + 4y = 52$ que hace referencia al número de patas.

$$\begin{cases} x + y = 16 \\ 2x + 4y = 52 \end{cases}$$

Si resolvemos el sistema obtenemos que el número de gallinas corresponde a 6 y el número de conejos es de 10.

Es un problema con el que los alumnos se sienten cómodos si han realizado algunos del mismo tipo suelen resolverlos sin mucha dificultad.

También podemos plantear su resolución mediante una ecuación de primer grado: si llamamos x al número de gallinas, $16 - x$ serán el número de conejos, por lo que la ecuación que hace referencia a las patas sería: $2x + 4(16 - x) = 52$ cuya resolución conduce al resultado que ya conocíamos.

Esta forma de resolver el problema, aunque sencilla desde el punto de vista del profesor, a los alumnos les resulta más difícil de entender y prefieren, ya que así lo entienden, que el método anterior es más sencillo.

5) Una educadora tiene 120 chocolates y 192 caramelos que va a repartir entre los alumnos de su clase sin que sobre ninguno. Si cada alumno recibe 3 caramelos más que chocolates, ¿cuántos son los alumnos? ¿cuántos chocolates y caramelos reciben cada alumno? (Tomado de Cerdán, 2008)

Procedimiento aritmético:

Empezaremos con el método que los alumnos deberían conocer, ya que han trabajado en primero de secundaria, pero por nuestra experiencia es el que menos dominan, ya que al no trabajarlo este curso y no aparecer inmediatamente después del procedimiento, probablemente menos utilicen.

Para ilustrar este problema podemos calcular los divisores de 120 y 192 para hacerles caer en la cuenta del número de alumnos que pueden ser.

En el caso de 120: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120.

En el caso de 192: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 64, 96, 192.

El máximo común divisor es 24 que coincide con el número de alumnos.

Otro procedimiento para resolver el ejercicio podría ser el siguiente:

Del enunciado sabemos que hay $192 - 120 = 72$ caramelos más que chocolates. Si cada alumno se llevara la misma cantidad de caramelos que de chocolates quedarían 72 caramelos sin repartir, si dividimos entre 3 ya que es el número que reciben los alumnos de caramelos más que de chocolates $\frac{72}{3} = 24$ nos dará el número de alumnos.

Un procedimiento algebraico sería:

Llamamos “x” al número de chocolates que recibe cada alumno, por lo que el número de caramelos que recibe cada uno sería $x + 3$

El número de alumnos, teniendo en cuenta los chocolates que se reparten, serían $\frac{120}{x}$; y

teniendo en cuenta el número de caramelos $\frac{192}{x + 3}$

Igualando ambas expresiones tendríamos: $\frac{120}{x} = \frac{192}{x + 3}$

Si resolvemos la ecuación obtenemos que $x = 5$ que serán el número de chocolates que recibe cada alumno, 8 el número de caramelos y 24 el número de alumnos que participan en el reparto.

6) Un libro se abre al azar. El producto de los números de las dos páginas observadas es 3.192. ¿En qué número de páginas se abrió el libro?

Procedimiento aritmético

Le pedimos a los alumnos que calculen divisores de 3192 cuyo producto sea 3192, y que cumplan la condición de que sean números consecutivos, y tras utilizar una estrategia de ensayo y error obtendrán que es: $56 \cdot 57 = 3192$

Procedimiento algebraico

Si llamamos x a la página de la izquierda donde se abrió el libro, la página de la derecha es $x+1$, por lo que planteamos la ecuación: $x(x+1) = 3192 \rightarrow x^2 + x - 3192 = 0$

Resolvemos la ecuación y obtenemos: $x = -57$ y $x = 56$, por el contexto del problema la solución es 56 y 57.

También es normal que los alumnos intenten resolver el problema a través de un sistema de ecuaciones, expresándolo de la siguiente manera: $\begin{cases} x \cdot y = 3192 \\ y = x + 1 \end{cases}$ aunque es un procedimiento que no han tratado en este nivel, puede ser un buen momento para introducirlo a partir de este problema.

La rúbrica de evaluación del trabajo en grupo

Para poder realizar una evaluación del trabajo en grupo de los alumnos preparamos una rúbrica (ver anexo VI) que nos permitiera realizar un registro individual de cada uno de ellos. En la rúbrica valoramos cinco categorías o dimensiones con sus respectivos descriptores. Las categorías fueron: Actitud, gestión del tiempo, gestión del grupo, trabajo con los compañeros y contribución al trabajo de grupo. Cada categoría se valoró de “0” a “3” y nos permitió ir reorientado el trabajo de los alumnos en los grupos durante las sesiones de trabajo.

2.4.1.6. Fase VI: Las representaciones que utilizan

En esta fase queríamos ver el tipo de representaciones esquemáticas o diagramas que realizaban los alumnos a la hora de resolver los problemas. Entendiendo las representaciones como “todas aquellas herramientas —signos o gráficos— que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con las cuales los sujetos particulares abordan e interactúan con el conocimiento matemático” (Rico, 2009, p.4). En

nuestro caso nos centramos en los dibujos o esquemas que utilizan, o la recogida de la información en tablas, ya que sirven al alumno de soporte y le ayudan a ver el problema con más claridad.

La evaluación del trabajo de la fase anterior nos permitió observar que los alumnos no solían realizar representaciones gráficas de los problemas, y en caso de usarlas, éstas en muchas ocasiones no ayudaban a comprender el problema o demostraban la comprensión del mismo. Comprobamos así que aunque en los problemas que resolvíamos los profesores utilizamos representaciones de diferentes tipos, y los alumnos las valoraban para comprender los problemas y poder establecer un plan, luego no las empleaban, y por lo tanto no estaban aprendiendo esta estrategia.

Durante el primer trimestre del curso 2016-2017 decidimos estudiar qué tipos de representaciones utilizaban los alumnos en los problemas. Este trabajo lo dividimos en las siguientes etapas:

- A) Análisis de las representaciones utilizadas.
- B) Resolver problemas en clase utilizando las estrategias más adecuadas.
- C) Valorar la efectividad de la etapa anterior.

A) Para el análisis de las representaciones que utilizan los alumnos les propusimos un cuestionario con los problemas que habíamos utilizado en este trabajo para valorar la comprensión de los enunciados en la fase I.

Utilizamos una rúbrica para evaluar los problemas del cuestionario. Queríamos valorar la calidad de la representación utilizada, es decir, si dicha representación ayuda al alumno a comprender el enunciado.

Los descriptores utilizados fueron:

- No realiza ninguna representación o es simplemente decorativa (0 puntos).
- Indica los datos que aparecen en el enunciado en la representación aunque comete errores (1 punto).

- Indica los datos correctamente en la representación (2 puntos).
- La representación que realiza demuestra la comprensión del problema (3 puntos).

Por lo tanto la calificación obtenida en cada problema oscila entre 0 y 3 puntos. Entendemos que 0 y 1 son valoraciones de las representaciones que no facilitan la comprensión del problema, en cambio, una valoración de dos puntos si indica que el alumno ha comprendido o puede comprender el problema.

B) Una vez realizado el análisis y en vista de los resultados, durante tres sesiones de clase resolvimos los problemas propuestos, centrándonos especialmente en la elaboración de representaciones gráficas como estrategia para facilitar la tarea de comprensión.

C) Una vez concluida la etapa anterior, propusimos a los alumnos un nuevo cuestionario con cuatro problemas. En este cuestionario pedimos que elaboren una representación, con el objeto de valorar la etapa anterior, y que elaboren un plan para resolver el problema, que valoramos en la fase siguiente. La evaluación del cuestionario se realizó utilizando la misma rúbrica que con el cuestionario anterior.

2.4.1.7. Fase VII: La elaboración de un plan

Otro aspecto que queríamos analizar en este estudio era si los alumnos eran capaces de elaborar un plan para resolver un problema. Entendíamos que junto con la comprensión era la fase más importante, ya que sin un plan la solución de cualquier problema es inabordable.

Posteriormente al estudio de las representaciones, y también durante el primer trimestre del curso 2016-2017, decidimos estudiar si los alumnos proponían algún plan para resolver los problemas.

Utilizamos una rúbrica para evaluar los problemas del cuestionario. Pretendíamos valorar si el plan que elaboraron permitiría resolver el problema. Los descriptores utilizados fueron:

- No propone ningún plan (0 puntos).
- Propone algún plan pero no le llevará a la solución del problema (1 punto).

- El plan propuesto es correcto pero incompleto (2 puntos).
- El plan propuesto es el adecuado para la resolución del problema (3 puntos).

Consideramos respuestas positivas las valoradas con 2 y 3 puntos.

2.4.1.8. Fase VIII: Valorar la explicación de los procedimientos

Posteriormente al trabajo sobre las representaciones y a la evaluación de la capacidad de los alumnos para proponer un plan por escrito, decidimos evaluar la capacidad de comprensión, la de resolución de los problemas y la de comunicar por escrito los procedimientos utilizados. Utilizamos para ello tres problemas que les propusimos al mismo grupo de alumnos que habían estado durante un trimestre trabajando con la propuesta desarrollada, y había participado en la dos fases anteriores.

2.4.1.9. Fase IX: Análisis de los libros de texto

Esta fase es una de las más importantes del trabajo, ya que después de estudiar los procesos de resolución de problemas a nivel teórico y práctico, nos quedaba analizar como se reflejaba en los libros de texto del nivel. Para realizar el estudio nos hicimos las siguientes preguntas: ¿se enseñan estrategias de resolución de problemas?, en caso afirmativo, ¿qué tipo de estrategias se enseñan?; ¿se enseñan contenidos vía resolución de problemas?; ¿en los problemas resueltos se muestran estrategias?; ¿qué lugar ocupan los problemas en las unidades?; ¿aparece algún tipo de estímulo en los problemas propuestos?, en caso afirmativo, ¿de qué tipo de estímulo se trata?

Además, hemos estudiado los siguientes indicadores: a) Porcentaje de problemas que aparecen en cada unidad respecto al total de las actividades propuestas (P/A); b) Porcentaje de problemas resueltos respecto a las actividades que aparecen resueltas en cada una de las unidades (PR/AR); c) Porcentaje de problemas resueltos respecto al total de problemas propuestos (PR/PP).

2.4.1.10. Fase X: Opinión de los alumnos sobre el trabajo realizado

Para finalizar esta investigación necesitábamos conocer la opinión de los alumnos sobre el trabajo que habíamos realizado en el aula. Durante el segundo trimestre del curso 2016-

2017 le propusimos una encuesta a los alumnos para conocer la valoración que hacían. Hay que tener en cuenta que con este grupo de alumnos se había trabajado la propuesta completa.

En la tabla siguiente (Tabla 2) presentamos los objetivos que nos propusimos en la investigación y su correspondencia con las distintas fases que hemos explicado anteriormente.

Tabla 2: Objetivos y fases de investigación

Objetivos	Fases de la investigación
Conocer en una mayor profundidad los fenómenos de enseñanza y aprendizaje que tienen lugar alrededor de los procesos de resolución de problemas escolares.	Fase de revisión bibliográfica
Mejorar los procesos de resolución de problemas en los alumnos de tercero de educación secundaria obligatoria.	- Fase I. - Fase II. - Fase V. - Fase VI. - Fase VII. - Fase VIII. - Fase X.
Elaborar una propuesta didáctica para el aprendizaje de contenidos de tercero de educación secundaria obligatoria a través de la resolución de problemas.	- Fase III.
Analizar el currículo oficial respecto a la resolución de problemas y su	- Fase IX.

correspondencia en los libros de texto.

En la tabla siguiente (Tabla 3) podemos ver las fases de la investigación, indicando el curso académico, el cuestionario utilizado, el objetivo del cuestionario y el tipo de respuesta.

Tabla 3: Resumen de las fases de la investigación

Curso	Cuestionario	Objetivo	Tipo de respuesta
2014-2015	C1	Valorar el nivel de comprensión.	El alumno tiene que explicar en que consiste el problema.
2014-2015	C2	Valorar el nivel de comprensión con la respuesta a la vista.	Test de respuesta múltiple.
2014-2015	C3	Valorar el nivel de comprensión. Guion fase de comprensión	Test de respuesta múltiple.
2015-2016	Cuadernillo	Valoración utilización de la propuesta. Fases y guiones.	Resolver los problemas.
2016-2017	C4	Valorar las representaciones.	Elaborar una representación.
2016-2017	C5	Valorar las representaciones después de la intervención.	Elaborar una representación.
2016-2017	C5	Valorar la elaboración de un plan.	Elaboración de un plan.
2016-2017	C6	Valorar comprensión, resolución y comunicación.	Resolver y comunicar el procedimiento.
2016-2017	Encuestas	Valorar la opinión de los alumnos sobre el trabajo.	Cuestionario tipo Likert.

2.5. Los problemas escolares

En este apartado intentamos aclarar la terminología sobre los problemas escolares que utilizamos. Los problemas de enunciado verbal promueven el pensamiento y animan a los estudiantes a utilizar su idioma y sus propias ideas cuando se enfrentan a su resolución (Urquhart, 2009). Los problemas que vamos a trabajar pertenecen a la familia de problemas aritméticos – algebraicos Cerdán (2008) la define como:

familia de problemas que acoge a problemas que en el ámbito escolar se resuelven mediante el recurso a varias operaciones aritméticas elementales, que se van combinando hasta obtener el resultado del problema, o bien mediante el planteamiento de ecuaciones, que posteriormente se resuelven hasta obtener el resultado. (p.27)

Respecto a los enunciados de un problema de la familia aritmético – algebraica Cerdán (2008) señala que:

es un texto, que presenta la descripción cuantitativa de una situación o un fenómeno por medio de varias cantidades interrelacionadas y que, en el momento en el que se consideran, asumen un cierto valor, valor que es: bien conocido o bien desconocido. El propósito del problema, expresado en el propio texto, es la determinación de una o varias de las cantidades desconocidas. (p.27)

Cuando seleccionemos problemas hay dos aspectos que son fundamentales:

- La coherencia de la situación narrada en el problema y las preguntas realizadas. Es muy común en la redacción de los enunciados de los problemas escolares el planteamiento de situaciones absurdas y con preguntas que no responden a los intereses de los alumnos (Vila y Callejo, 2004).
- La consistencia del problema.

Capítulo 3. Propuesta didáctica de contenidos vía problemas

En este capítulo presentamos una propuesta de enseñanza de contenidos a través de la solución de algunos problemas. Esta propuesta, como ya hemos explicado, está inmersa en una propuesta más general que busca potenciar el uso de los problemas en el aula. Al elaborarla hemos tenido en cuenta varios aspectos:

- El currículo del nivel al que va dirigida.
- Las sugerencias del marco teórico de PISA, las situaciones representadas y los procedimientos matemáticos (Rico, 2007), especialmente la capacidad de matematización (OCDE, 2006).
- Los alumnos a los que va destinado según su grado de madurez personal e intelectual (Sánchez y Fernández, 2003).

Al elaborar esta propuesta también hemos valorado que los profesores suelen utilizar los libros de texto como principal material didáctico, y en éstos, habitualmente, los problemas aparecen como práctica de los contenidos presentados, es decir, con el objetivo de demostrar que se ha aprendido un determinado contenido. Por lo tanto también somos conscientes de las dificultades que pueden tener los profesores, acostumbrados a un esquema de trabajo rutinario, a desarrollar propuestas que implican cambios muy sustanciales en esos esquemas adquiridos y repetidos. Por lo tanto, la propuesta debe poder ponerse en práctica con facilidad.

En esta propuesta, el conocimiento se aprende de una forma distinta, el alumno debe descubrirlo a partir de las matemáticas que existen en el contexto en el que se introduce. En este punto es muy importante el conocimiento que el profesor tiene del grupo y el conocimiento que el alumno tiene del contenido que se pretende enseñar a partir de la modelización. Por lo tanto, no se trata sólo de enseñar a resolver problemas, sino a identificar problemas de la realidad que pueden ser resueltos desde la investigación matemática. Tal y como señalan Berini, Bosh, Casadevall, Guevara y Sabaté (2010):

El hecho es que la gente aprende mejor cuando el producto se obtiene del proceso, por tanto parece claro que si las matemáticas se presentan como una necesidad para resolver una situación siempre le quedará a nuestro alumnado la idea de que las matemáticas sirven para dar respuestas a preguntas y en definitiva para resolver problemas. (p.23)

Utilizamos dos problemas con el objeto de que los alumnos, ayudados por el profesor, realicen tareas de generalización de expresiones algebraicas. La generalización como indican Ruano, Socas y Palarea (2015) es “uno de los procesos característicos del lenguaje algebraico, que está implícito, en general, en las matemáticas y en las diferentes ramas del saber” (p.19). Cada problema se ha planteado de tal manera que describía un tipo de comportamiento susceptible de generalizarse pero sin ser claramente explicitada la regla que exprese ese comportamiento regular (Ruano, Socas y Palarea, 2015). El profesor debe conseguir con su actuación que el alumno sea capaz de identificar, analizar, y describir lo que observa intentando que lo integre en su bagaje de conocimientos matemáticos.

A partir del planteamiento del problema se ha intentado seguir el siguiente procedimiento de forma general:

- Sistematización: mediante la construcción de tablas u otro tipo de representación.
- Reconocimiento de la regla o patrón a seguir.
- Explicitación de la regla en una expresión o fórmula matemática.
- Verificación de la expresión o fórmula con ejemplos. (Ruano et al., 2015)

Hemos adaptado y establecido este procedimiento en tres etapas para que el profesor que desee seguir este método pueda ir desarrollando. Durante todo el proceso, el papel del profesor debe ser el de motivación al alumnado y la ayuda a su reflexión sobre el proceso realizado. Es muy importante tener en cuenta que el objetivo es que el alumno vaya construyendo el conocimiento, y no conseguir llegar al conocimiento de cualquier forma. Además la intervención del profesor debe ir reduciéndose gradualmente a medida que los alumnos vayan aumentando su participación en el debate, y las aportaciones se alineen con el objetivo establecido.

1ª Etapa: Introducción.

Se comienza con la presentación de una situación cercana a la realidad, aunque no tiene que ser conocida por el alumno, que tenemos que resolver, para lo que es muy importante familiarizar a los alumnos con el contexto de la situación. Lo mostramos públicamente y les pedimos que lo copien en su cuaderno. Los alumnos deben identificar el problema como tal, y además, entender la necesidad de resolverlo. Dejamos un tiempo para que los alumnos de forma individual reflexionen sobre el problema. En este momento es importante que el profesor pueda proponer más ejemplos de situaciones reales que se asemejen al problema a resolver, ya que probablemente incrementará el interés del alumno por llegar a la solución.

Posteriormente debemos favorecer el diálogo y la reflexión en clase. Hay que recoger las aportaciones que sean relevantes, aunque hay que valorar todas para que no decaiga el interés, e ir orientando el debate hacia la construcción del conocimiento en cuestión.

Un aspecto muy importante a tener en cuenta es que los alumnos comprendan la necesidad de aprender los contenidos para poder resolver la situación.

2ª Etapa: Construcción del contenido.

La construcción del contenido se realiza expresando la situación del problema en términos matemáticos. Tenemos que buscar formulaciones que permitan aproximarnos a la solución del problema para lo que debemos conseguir identificar patrones, relaciones, regularidades o propiedades. Es importante utilizar patrones visuales, tales como dibujos, tablas, etc., y realizar aproximaciones mediante cálculos aritméticos que se conviertan en una ley algebraica.

3ª Etapa: Verificación del contenido construido.

Una vez encontrada la expresión algebraica, y por lo tanto la solución del problema, se interpreta en el contexto de la situación planteada en el enunciado.

3.1.1. Contenidos

Los contenidos que queríamos que los alumnos aprendieran utilizando esta metodología está relacionado con las sucesiones y, más concretamente, se refieren a las progresiones aritméticas y geométricas. A continuación presentamos los problemas que se les presentaron a los alumnos con orientaciones para desarrollarlos en el aula y llegar al contenido que se quería enseñar.

3.1.1.1. Progresiones Aritméticas

Para introducir el tema de las progresiones aritméticas y llegar a la generalización de la expresión del término general, utilizamos el siguiente problema tomado de De la Fuente (2015):

María compra tres regalos para repartir entre sus tres amigos Juan, Carmen y Margarita. Como no sabe qué regalo dar a cada uno, se le ocurre el siguiente procedimiento para asignarlos:

Pide a cada uno que diga un número entero de 8 dígitos.

1. Juan dice 13.074.797, Carmen 15.746.464 y, por último, Margarita dice 60.184.869.
2. María va contando los regalos como en la figura

Figura 3: Reparto de regalos

<u>R1</u>		<u>R2</u>		<u>R3</u>
1	→	2	→	3
4	→	5	→	6
7	→	8	→	9
10	→	...		

y cuando llega a los números que han dicho sus amigos, les asigna el regalo correspondiente.

Estudia la situación y averigua si María, con este procedimiento de reparto, puede asignar un regalo a cada uno de sus amigos.

Veamos como lo planteamos en clase:

Hay que hacer ver a los alumnos que ir contando hasta llegar al número que han dicho cada uno de los amigos y comprobar si han obtenido un regalo es un procedimiento poco efectivo. Por esta razón tenemos que buscar si las matemáticas nos aportan algún procedimiento mucho más eficiente.

Para el primer regalo (R1):

El primer número es 1, es decir si alguno de los amigos hubiese dicho el “1” habría obtenido ese regalo, pero como les pidió que dijeran un número de 8 dígitos hay que seguir contando. El segundo número contado siguiendo el procedimiento sería el 4, el siguiente el 7, después el 10 y así sucesivamente; es decir, los números siguen la sucesión: 1, 4, 7, 10, 13, 16..., por lo que podemos hacer caer en la cuenta a los alumnos que cada número se obtiene de sumarle 3 al anterior. Es importante realizar los cálculos que mostramos a continuación:

$$\begin{aligned}1 \\ 4 &= 1 + 3 \\ 7 &= 1 + 3 + 3 = 1 + 3 \cdot 2 \\ 10 &= 1 + 3 + 3 + 3 = 1 + 3 \cdot 3 \\ 13 &= 1 + 3 + 3 + 3 + 3 = 1 + 3 \cdot 4 \\ 16 &= 1 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 1 + 3 \cdot 5\end{aligned}$$

En este punto comenzamos a utilizar la notación de las sucesiones explicando a los alumnos lo que significa:

El primer término es: $a_1 = 1$

El segundo término: $a_2 = 1 + 3 \cdot 1 = 4$

El tercero: $a_3 = 4 + 3 = 1 + 3 \cdot 2 = 7$

El cuarto: $a_4 = 7 + 3 = 1 + 3 \cdot 3 = 10$

Los alumnos deben ir observando cada término e intentar deducir el patrón. De esta forma se darán cuenta de que en cada término aparece el “1”, que es el primero, y que aparece el producto del número anterior a la posición que ocupa por “3”. Una vez que hemos hecho que observen estas relaciones estamos en condiciones de llamar “n” a cualquier posición

de la sucesión y “d” al valor que sumamos al término anterior para averiguar el siguiente, y por último si llamamos a_n a cualquier término, obtenemos:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

A esta expresión le denominamos término general de una progresión aritmética. En este momento explicamos las características de las progresiones aritméticas. Una sucesión en la que cada término se obtiene sumando al anterior una cantidad constante se llama progresión aritmética. Por lo tanto, en una progresión aritmética se verifica que:

$$a_n = a_{n-1} + d$$

Para la sucesión de números de R1 consistiría en $a_n = 1 + (n-1) \cdot 3 = 1 + 3n - 3 = 3n - 2$; es decir, $a_n = 3n - 2$ es la expresión que nos permitió hallar todos los términos de la sucesión y así poder comprobar a quién le corresponde el regalo (R1). Con esta expresión podríamos averiguar cualquier número de la sucesión que representaría obtener el primer regalo, por ejemplo, el número que saldría en la posición 100:

$$a_{100} = 3 \cdot 100 - 2 = 300 - 2 = 298$$

y en la posición 1000:

$$a_{1000} = 3 \cdot 1000 - 2 = 3000 - 2 = 2998$$

Como se puede observar es un camino muy largo para conocer si con este procedimiento de reparto María puede asignar un regalo a cada uno de sus amigos, por lo que vamos a resolver el problema del reparto siguiendo otro procedimiento.

Intentaremos averiguar si Juan ha obtenido el primer regalo. Recordemos que dijo el número 13.074.797, y veamos si es uno de los números que puede salir en el sorteo comprobando si es un número que puede salir como un término de la serie:

$$13.074.797 = 3n - 2$$

$$13.074.797 + 2 = 3n$$

$$\frac{13.074.799}{3} = n$$

$$n = 4358266, \hat{3}$$

Juan no ha obtenido el regalo ya que el valor obtenido para “n” es imposible que salga con el procedimiento que ha seguido María al no tratarse de un número natural.

Ahora, siguiendo el mismo procedimiento, veamos si Carmen, que dijo el 15.746.464, ha obtenido regalo:

$$15746464 = 3n - 2$$

$$15746464 + 2 = 3n$$

$$15746466 = 3n$$

$$n = \frac{15746466}{3} = 5248822$$

Por lo tanto el primer regalo es para Carmen ya que si María sigue contando: 1, 4, 7, 10, 13, 16,...15.746.464 llegará al número que Carmen ha dicho y éste aparecerá en la posición 5.248.822.

Comprobemos qué ocurre con el número dicho por Margarita, el 60.184.869.

$$60184869 = 3n - 2$$

$$60184869 + 2 = 3n$$

$$60184.871 = 3n$$

$$n = 20061623, \hat{6}$$

Ya sabemos qué significa este resultado, Margarita tampoco hubiese obtenido el regalo en el supuesto de que Carmen no lo hubiese recibido por el sorteo.

Veamos qué ocurre con el segundo regalo. Observamos primero la sucesión, 2,5,8...cuyo primer término es 2 y cada término restante se obtiene del anterior sumándole 3.

Calculemos primero la expresión que nos permita calcular cada término utilizando el término general de las progresiones aritméticas que obtuvimos anteriormente: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$. En este caso $a_1 = 2$ y la diferencia $d = 3$ por lo que la expresión sería:

$$a_n = 2 + (n-1) \cdot 3 = 2 + 3n - 3 = 3n - 1$$

Veamos si este regalo le corresponde a Juan que dijo el número 13.074.797

$$13074797 = 3n - 1$$

$$13074797 + 1 = 3n$$

$$13074798 = 3n$$

$$n = \frac{13074798}{3} = 4358266$$

De esta forma comprobamos que el segundo regalo le corresponderá a Juan.

Igualmente procederemos con el tercer regalo: utilizaremos la fórmula $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ para hallar la expresión del término general. En este caso $a_1 = 3$ y la diferencia $d = 3$ por lo que la expresión sería

$$a_n = 3 + (n-1) \cdot 3 = 3 + 3n - 3 = 3n$$

Comprobemos si Margarita ha obtenido este regalo

$$60184869 = 3n$$

$$n = \frac{60184869}{3} = 20061623$$

Por lo que efectivamente Margarita obtiene este regalo.

Advertencia: es evidente que, con objeto de hacer el proceso más atractivo, se han escogido los tres números “aleatorios” de forma que fueran congruentes con 1, 2, y 0 módulo 3, respectivamente.

3.1.1.2. Progresiones Geométricas

En este apartado presentamos el proceso de generalización que proponemos seguir con los alumnos para llegar a la expresión algebraica del término general de una progresión geométrica. Hay que tener en cuenta que los alumnos ya tienen cierta experiencia en esta forma de trabajar después de haber realizado el proceso de generalización en el apartado anterior y con otros ejemplos parecidos que hayamos propuesto.

A continuación presentamos la situación que expusimos a los alumnos en clase para trabajar con todo el grupo:

Unos ingenieros forestales están estudiando replantar una zona del monte tras un incendio. En el invernadero tienen tres especies de árboles distintas con diferentes tasas de crecimiento, y que además se venden con una altura aproximada como se indica a continuación:

- Una especie A de 0,75 m que crece a razón de 1,2 cada año.
- Una especie B de 1,10 m que crece a razón de 1,1 cada año.
- Una especie C de 0,30 m que crece a razón de 1,3 cada año.

Al cabo de 8 años van a hacer mediciones de la altura media de los árboles que hayan replantado, ¿qué especie les conviene utilizar?

Un primer paso será asegurarnos que los alumnos comprenden que significa que crece a razón de...cada año.

A continuación calcularemos la altura de la especie A durante varios años con el fin de averiguar si existe un comportamiento parecido en años sucesivos.

Cuando se planta el árbol tiene una altura de 0,75 m, que será el primer término de la sucesión que representa el crecimiento de la especie A: $a_1 = 0,75$

Al finalizar el primer año, como el árbol crece a razón de 1,2 por año su altura será $0,75 \cdot 1,2 = 0,9$ m, que corresponde al segundo término de la sucesión: $a_2 = a_1 \cdot 1,2 = 0,9$

Al final del segundo año el árbol medirá: $0,9 \cdot 1,2 = 0,75 \cdot 1,2^2 = 1,08$, por lo que tenemos que el tercer término de la sucesión es: $a_3 = a_1 \cdot 1,2^2 = 1,08$. A continuación calculamos unos cuantos términos más:

Al tercer año: $1,08 \cdot 1,2 = 0,75 \cdot 1,2^3 = 1,296 \rightarrow a_4 = a_1 \cdot 1,2^3$

El cuarto año: $1,296 \cdot 1,2 = 0,75 \cdot 1,2^4 = 2,52 \rightarrow a_5 = a_1 \cdot 1,2^4$

Si al número que multiplica, que en este caso es 1,2, lo sustituimos por “r” y a la posición por “n”, obtenemos una expresión que nos permitirá calcular cada término de la progresión:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

En este momento explicamos a los alumnos las características más importantes de las progresiones geométricas y comparamos las diferencias con las progresiones aritméticas.

Una sucesión en la que cada término se obtiene multiplicando el anterior por una cantidad constante se llama progresión geométrica. Luego, en una progresión geométrica se verifica que $a_n = a_{n-1} \cdot r$

Utilizando la expresión que hemos logrado obtener anteriormente a partir del ejemplo, vamos a averiguar la altura que tendrá cada especie de árbol a los 8 años de haberlos plantado:

Tabla 4: Altura de las especies (P. Geométricas)

	A	B	C
Altura	$a_8 = 0,75 \cdot 1,2^{8-1} = 2,69$	$a_8 = 1,10 \cdot 1,1^{8-1} = 2,14$	$a_8 = 0,30 \cdot 1,3^{8-1} = 1,88$

Como se puede comprobar la especie con la que interesa repoblar es la especie A.

Capítulo 4. Modelo propuesto para la resolución de problemas.

En este capítulo queremos presentar la propuesta de modelo de resolución de problemas que preparamos para los alumnos para afrontar la resolución de problemas. Anteriormente ya hemos visto numerosos modelos, que aunque pueden ser útiles, tienden a tratar todos los problemas de la misma manera, ya que se busca que sean procedimientos generalizables. Normalmente estos modelos presentan dificultades para ser enseñados y aprendidos. Con esta propuesta hemos intentado concretar, teniendo en cuenta el tipo de problemas y a los alumnos a los que va dirigida.

Este modelo incluye una división del proceso en fases que hemos intentado que los alumnos identifiquen, y de una serie de preguntas a modo de guion que les proponemos seguir durante el proceso.

Esta propuesta surge de:

- La reflexión sobre modelos propuestos por autores que han trabajado la resolución de problemas en el ámbito escolar;
- El análisis de los diferentes marcos teóricos que han sustentado los estudios de PISA;
- La propuesta curricular que realiza la LOMCE;
- Nuestra experiencia en la docencia con los alumnos de este nivel;
- La interacción de los alumnos con el material y que sirvió para mejorarlo.

En todo el proceso de elaboración han participado los alumnos ya que se han reformulado aquellos aspectos de las preguntas que no entendían bien, y además, se han tenido en cuenta las aportaciones que han hecho.

Este modelo se utilizó en todos los momentos en los que se trabajaron problemas en el aula, tanto en actividades con el grupo clase como en grupo pequeño, incluyendo los problemas que el profesor resolvió a modo de ejemplo y en los que se hacía referencia constante al modelo.

4.1. Fases en la resolución de problemas

Es necesario enseñar a los estudiantes un enfoque organizado de resolución de problemas que les muestre explícitamente todos los pasos involucrados en el proceso de resolución para ayudarlos a abordar los nuevos problemas de una manera sistemática (Lorenzo, 2005).

En nuestro recorrido por numerosos trabajos de investigación hemos encontrado propuestas que se pueden considerar clásicas con fases o etapas para la resolución de problemas y también investigaciones más recientes. Suelen ser propuestas generales con poco nivel de concreción, y normalmente con observaciones que o bien están dirigidas a los profesores, o bien son difíciles de seguir por alumnos de secundaria.

Nuestra idea fundamental era elaborar un sistema práctico y fácil de seguir por parte de los alumnos. En primer lugar dividimos la resolución de problemas en cuatro fases o etapas e incluimos en cada una de ellas un guion con preguntas que les faciliten el camino a seguir. Estas fases son una adaptación de las propuestas de autores que hemos consultado y e indicado en el marco teórico. En algunos casos hemos unificado algunas fases teniendo en cuenta el nivel de los alumnos con los que hemos trabajado. Ha sido también muy importante el estudio del marco teórico de PISA, especialmente lo relacionado con los procesos matemáticos que propone el estudio:

- La formulación matemática de las situaciones.
- Empleo de conceptos, datos, procedimientos y razonamientos matemáticos.
- Interpretación, aplicación y valoración de los resultados matemáticos.

Otra fuente que hemos utilizado han sido los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje relacionados con la resolución de problemas de la asignatura de matemáticas orientadas a la actividad académica de 3º de ESO.

También prestamos mucha atención a la redacción de los guiones poniendo especial atención a la reacción de los alumnos cuando los utilizaban.

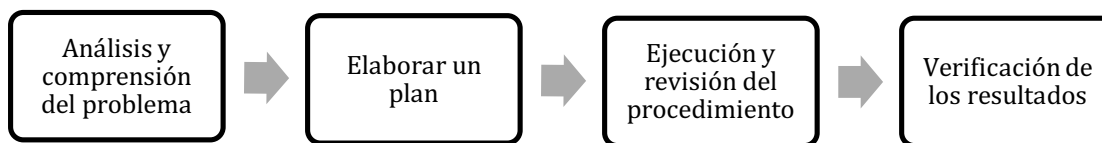
En los guiones hemos incluido preguntas en la línea de lo aportado por Lozano y Hernández (2014) que relacionan la gestión de los procesos de resolución de problemas con las preguntas que nos hacemos y con lo que pensamos cuando estamos resolviendo un problema y que esta gestión puede convertirse en objeto de enseñanza; es decir, que los alumnos aprendan a hacerse esas preguntas y especialmente que aprendan a contestarlas, es decir, identificar aquellos aspectos de la resolución de una forma más concreta. Además, entendemos que los alumnos deben reflexionar sobre todo el proceso, incluyendo las etapas que hay que recorrer, y que sean conscientes de la fase en que se encuentran y qué preguntas tienen que hacerse para pasar a la fase siguiente. En el trabajo con los guiones el profesor debe favorecer que el alumno reflexione sobre su aprendizaje, es decir, hacerles caer en la cuenta de cómo han llegado a ese razonamiento que están utilizando, y que ese razonamiento puede ser utilizado en otros problemas similares.

Pero es muy importante la dificultad, por otro lado comprensible, que tienen para dividir los procesos en etapas concretas y que el paso de una a otra es difuso. Por lo tanto no debemos olvidar que nuestro objetivo con este trabajo es que adquieran la competencia matemática a través de la resolución de problemas y que es importante que este trabajo lo hagan de una forma sistemática, pero sin que les suponga un elemento que les genere ansiedad, ya que el medio está al servicio del fin.

Las fases en las que hemos dividido el proceso de resolución de problemas son las siguientes:

1. Análisis y comprensión del problema.
2. Elaboración de un plan.
3. Ejecución y revisión del procedimiento.
4. Verificación de los resultados.

Figura 4: Propuesta de fases de resolución de un problema



Una cuestión fundamental que deben asumir los alumnos es que no se trata de un proceso lineal, y que la reflexión que llevan a cabo en cada una de las fases puede dar lugar a continuar a la fase siguiente o volver a la fase anterior. Por ejemplo, un plan que creíamos infalible puede que no nos conduzca a un procedimiento adecuado y que esta situación nos obligue a plantear otro plan, o incluso caer en la cuenta de que no hemos comprendido bien el problema. Este es un aspecto en el que es importante incidir en el trabajo en el aula ya que puede ser motivo de frustración en el alumnado.

A continuación desarrollamos cada una de las fases anteriores indicando posteriormente en cada una de ellas un guion para su elaboración.

4.1.1. Análisis y comprensión del problema

El enunciado de un problema “es un escrito matemático particular que tiene las características propias, podríamos incluso decir que es un género literario bien caracterizado que necesita para su comprensión la adquisición de ciertas claves y algunas dosis de entrenamiento” (Chamorro, 2003, p.2). Los alumnos deben aprender esas claves para poder leer los enunciados, por lo que los profesores debemos identificarlas y entrenarles en este proceso. Muchas veces encontramos en los libros de texto enunciados de problemas que necesitan algo más de explicaciones para que sean comprensibles. Enfrentarse al enunciado del problema es precisamente el primer escollo que tienen que superar en esta fase.

Respecto a la comprensión para Toboso (2004) “comprender el problema implica transformar la información recibida en una representación interna en la memoria del sujeto, e integrarla en un esquema cognitivo que permita darle significado” (p. 128). Una vez conseguido el modelo mental nos podemos centrar en la comprensión matemática del problema (Beltrán y Repetto, 2006).

Es por ello que los procesos de resolución de problemas implican movilizar ciertas estrategias por parte del individuo que le conducen a comprender el enunciado del problema y “poder generar a partir del texto verbal una representación interna abstracta en que se recogen las distintas proposiciones, sus relaciones semánticas, así como la situación cualitativa descrita en el enunciado” (Vicente et al., 2008, p.466). Chamorro (2003) añade las intenciones del autor del enunciado como un factor muy importante para comprender el enunciado de un problema. En algunas ocasiones, cuando planteamos algunos problemas en clase, puede ocurrir que el significado del que nosotros partimos no sea el mismo que asumen los alumnos al intentar resolverlos (Blanco y Blanco, 2009).

Hay que tener en cuenta que en esta fase los alumnos tienen dificultades respecto al conocimiento del vocabulario, la falta de familiaridad con la situación planteada, la relación entre los datos y la pregunta (Fernández, 2010), y si aparecen datos superfluos, especialmente si son números, les generan confusión al intentar averiguar dónde ubicarlos. Además, encontramos problemas de verbalización, fundamentalmente lexicales y gramaticales (Chamorro, 2003). Un enunciado que no esté acorde a la capacidad de comprensión de los alumnos generará problemas no esperados a la hora de resolverlo por parte del profesor más preocupado de los aspectos matemáticos que de los lingüísticos.

Según Davis (2013) comprender el lenguaje del problema y relacionarlo con las matemáticas requiere habilidades cognitivas determinadas. Este autor identifica estas habilidades con la alineación semántica con la estructura matemática y el razonamiento analógico, que una vez comprendido el lenguaje del problema, permite ir de lo concreto a lo abstracto.

Por lo tanto es muy importante que se le dedique el tiempo adecuado a esta fase y que no se permita pasar a los alumnos sin que le dediquen el tiempo necesario. Un aspecto muy importante cuando se trabaje esta fase en clase, es que posteriormente a la lectura individual se realice una lectura en voz alta que permita resolver las dudas o incluso reescribir el enunciado.

Nuestra intención al incluir esta fase es que el alumno divida el problema en elementos más básicos, además de identificar y estudiar aquellos aspectos relevantes que aparecen en el enunciado, como son la situación que se plantea, los datos, la relación entre los datos, el

objetivo del problema, establecer analogías entre problemas, transferir el problema a otro contexto, etc. Un análisis más detallado, que implica dedicarle el tiempo adecuado, del enunciado del problema favorecerá que reconozcan la estructura del mismo y por lo tanto pueden identificarlo con otros problemas parecidos que hayan resuelto previamente. Con frecuencia hay una cierta tendencia por parte de los alumnos a operar con los datos sin tener muy claro cómo éstos están relacionados entre si.

Como podemos ver, en esta fase juega un papel muy importante el lenguaje, tanto por el papel que juega en la comprensión de la información que aparece en el enunciado de la situación como en la expresión de los pensamientos que el alumno debe transmitir (Fernández, 2010). Es decir, los aspectos relacionados con la comunicación. Este mismo autor recalca la importancia que tienen aspectos como el rigor, la precisión y la claridad de la información y estos elementos hacen que el alumno no tenga que suponer ni interpretar nada.

Respecto a las dificultades que presentan los alumnos con el significado de las palabras y los contextos, señalamos una serie de estrategias propuestas por Monroe y Panchyshyn (2005):

- Enseñar el vocabulario básico de cada nuevo tema. Explicar el significado de cada palabra o concepto desconocido.
- Para permitir a los alumnos el tiempo necesario para explorar las matemáticas presentadas y llegar a soluciones alternativas, seleccionar bien sólo unos pocos problemas pero bien elegidos.
- Adaptar los problemas usando nombres de personas, lugares y actividades que les resulten familiares.
- Inventar problemas a partir de algún libro leído en clase, usando los personajes, las situaciones, etc.
- Usar suficientes palabras para proporcionar un contexto significativo, ya que se necesita un contexto suficiente para que los estudiantes puedan "ver" mentalmente el problema.

- Elaborar problemas que involucren a otras áreas.
- Utilizar experiencias reales de los estudiantes para elaborar problemas.
- Animarles, teniendo en cuenta sus intereses, a inventar sus propios problemas o reescribir los problemas de los libros de texto.

La representación visual de la situación reflejada en el enunciado es otro aspecto que proponemos a los alumnos en este momento de análisis, ya que “no es lo mismo una descripción textual de un fenómeno que la visualización del mismo” (Gallino et al., 2013, p.26). Buscamos que los alumnos adquieran el hábito de representar, que sean capaces de esquematizar la situación; evidentemente, cuanto más cercana sea la misma al alumno más facilidad tendrá para hacerlo. Para Valverde (2013) “la acción de representar significa hacer presente “algo” ya sea con palabras, figuras u otro tipo de elementos. Cuando ese algo es un objeto matemático es frecuente servirse de un gráfico, tabla o símbolo para mostrarlo”(p.79). Esta capacidad de traducir la información que aparece en el texto a una representación visual es un aspecto relevante en la comprensión de los enunciados de los problemas. Hemos comprobado que esta representación se ve facilitada si el alumno verbaliza la situación o es ayudado por el profesor en las primeras ocasiones. Muchas veces también ayuda a comprender el problema la reescritura de los enunciados a situaciones más cercanas o de más fácil comprensión por el alumno, pues suele suceder que los enunciados de las situaciones problema que se proponen sean imprecisos, abiertos (Vila y Callejo, 2004). Por tanto, si queremos que los problemas contribuyan a la mejora de la enseñanza de las matemáticas, y por lo tanto faciliten su aprendizaje, se deben proponer con enunciados que sean motivadores y que no se alejen mucho de las experiencias de los estudiantes (Ortega et al., 2011).

Como conclusión diremos que esta fase de análisis y comprensión permitirá al alumno interpretar el problema en el contexto en el que se encuadra, identificar la cuestión a averiguar, lo que favorecerá una visión de aquello que va a tener que hacer para poder resolverlo.

4.1.1.1. Guion para la fase de comprensión

A continuación presentamos la versión definitiva del guion para llevar a cabo la fase de análisis y comprensión del problema.

- Lee el enunciado despacio y asimila la idea general.
- Vuelve a leerlo y si hay alguna palabra que no entiendes busca su significado o pregúntala.
- Ya sabes cuál es el objetivo del problema. Escríbelo. Si no lo sabes, vuelve a leerlo, detente en la pregunta que te hacen, e intenta identificarlo.
- Has encontrado los datos. Sepáralos. Fíjate con atención por si hay algún dato que necesites pero que no aparezca directamente. Busca la forma de averiguarlo.
- Trata de encontrar la relación entre los datos suministrados y la cuestión planteada.
- Organiza la información que tienes, realiza una tabla si crees que te ayuda a verlo mejor, intenta hacer un esquema o un dibujo de la situación que representa el problema.
- Intenta imaginarte la situación.

Al final, pregúntate si has conseguido averiguar en qué consiste el problema: lo que necesitas saber del problema que te dará pie para establecer el plan que te permitirá resolverlo.

4.1.2. Elaboración de un plan

Para Polya (1989) “una vez comprendido el problema como un todo, cuando hemos captado su fin, su idea directriz, es el momento de entrar en detalles”(p.74).

En esta fase pretendemos que los alumnos intenten trazar un plan una vez que han sido capaces de comprender el problema. Lo que tenemos que valorar es que los alumnos tengan un plan independientemente que sea el adecuado para resolver el problema.

Respecto a la elaboración de un plan diremos que “tenemos un plan cuando sabemos, al menos a “grosso modo”, qué cálculos, qué razonamientos o construcciones habremos de efectuar para determinar la incógnita” (Polya, 1989, p.30). Con nuestra propuesta pretendemos ayudar a los alumnos a reflexionar sobre el paso al procedimiento o procedimientos que les van a llevar a resolver el problema. Tal y como indica Fernández (2008) “todo alumno que ha resuelto un problema ha concebido un plan, aunque éste no le haya llevado a la solución correcta” (p.35). Los profesores debemos conseguir que los alumnos elaboren sus propios planes y no simplemente a seguir los planes trazados por el profesor.

Hay que tener en cuenta que en esta fase los alumnos deben haber comprendido el problema, es decir, han superado la fase anterior, cosa que no suele ocurrir siempre, pues no es fácil. Una forma para intentar evitar que se queden bloqueados es incluir en el guion elementos de análisis que les ayuden a completar las fases. La experiencia nos ha permitido constatar que los alumnos se lanzan con la primera idea que les sugiere el enunciado y prueban los procedimientos con los que se encuentran más cómodos o les han dado resultado anteriormente.

4.1.2.1. Guion para la fase de elaboración de un plan

A continuación presentamos el guion que le propusimos a los alumnos en su versión definitiva.

- ¿Has ordenado toda la información de la que dispones?
- Piensa si este problema te recuerda a otro que has resuelto anteriormente. Intenta recordar cómo lo hiciste, qué procedimiento aplicaste y qué pasos seguiste para resolverlo. Comprueba si lo puedes aplicar a este problema.
- Intenta simular la situación que se plantea en el enunciado con algunos valores sencillos para ver si te da ideas.
- Te puede ayudar expresar los datos y la situación en lenguaje “pseudomatemático”. En caso necesario, identifica y asigna la incógnita.
- Traduce los datos a lenguaje matemático.

- Selecciona los procedimientos matemáticos. Si hubiera más de un procedimiento posible intenta plantear alternativas que te sirvan en caso de bloqueo.

Ahora es el momento de verbalizar el plan, recitarlo en voz baja o explicarlo a un compañero. Te puede ayudar utilizar frases del tipo:

- Lo que tengo que averiguar es...,
- Los datos puedo expresarlos de la siguiente forma...,
- El procedimiento que puedo utilizar es..., aunque también podría usar...,
- Lo primero que voy a hacer es...y después..., y a continuación...,

4.1.3. Ejecución y revisión del procedimiento

En esta fase el alumno debe realizar alguno de los procedimientos matemáticos que forman parte del plan. Identificar los posibles errores y si los hubiera, intentar corregirlos. En caso de bloqueo, hay que cambiar el procedimiento si es posible. Por último, si no funciona la revisión, ni el cambio de procedimiento, mejor sería revisar el plan iniciado volviendo a la fase anterior.

Según la definición de competencia matemática que encontramos en el marco de evaluación de PISA 2012 (MECD, 2013) “en el proceso de empleo de conceptos, datos, procedimientos y razonamientos matemáticos para resolver problemas, los sujetos ejecutan los procedimientos matemáticos necesarios para obtener resultados y encontrar una solución matemática” (p.14).

Respecto a la ejecución de un plan para resolver los problemas Polya (1989) propone que: “al ejecutar su plan de la solución, compruebe cada uno de los pasos. ¿Puede usted ver claramente que el paso es correcto? ¿Puede usted demostrarlo?” (p.19).

En este momento los alumnos se encuentran en una fase importante ya que supone llegar o no a una posible solución. Deben revisar los procedimientos con cuidado y confirmar que lo que han hecho es correcto. Pero esta fase suele provocar el abandono del problema si el alumno no obtiene el resultado esperado, mientras que lo que nosotros esperamos es que se replantee lo que ha hecho, cambie a otro procedimiento alternativo, o incluso vuelva a la

fase de análisis y comprensión del problema, ya que cabe la posibilidad de que no lo haya comprendido.

4.1.3.1. Guion para la fase de ejecución y revisión del procedimiento

Veamos el guion propuesto a los alumnos cuando resolvieron los problemas propuestos en nuestro trabajo.

- Aplica los procedimientos matemáticos previstos en el plan.
- Ten cuidado con las unidades en las que vienen expresados los datos y en qué unidades hay que expresar la cuestión planteada.
- Revisa los procedimientos que vayas realizando.
- Comprueba que el plan planteado al principio sigue siendo válido y si ves que no funciona, cambia de plan.
- Comprueba el procedimiento matemático. Revisa todas las operaciones desde el principio para asegurarte que están bien, o, si es posible, intenta partir del resultado final y volver al principio.

4.1.4. Verificación de los resultados

En esta fase deben aprender a comprobar que los resultados obtenidos tienen sentido con la situación planteada en el enunciado del problema. Es una fase en la que debe primar la reflexión sobre los resultados y si éste tiene sentido en el contexto del problema. Igual que en los apartados anteriores los alumnos suelen descuidar esta fase, ya que una vez que llegan a un resultado consideran que han terminado. La capacidad de interpretar que aparece en la definición de la competencia matemática según el marco de evaluación de PISA (MECD, 2013) “supone reflexionar sobre las soluciones o los resultados matemáticos e interpretarlos en el contexto de un problema” (p.9). Además es importante que esta reflexión la hagan también sobre el proceso realizado, buscando formas alternativas de resolver el problema.

En la terminología utilizada por Polya (1989) esta fase está relacionada con lo que él denomina visión retrospectiva, y propone una serie de preguntas:

- ¿Puedes verificar el resultado? ¿Puedes verificar el razonamiento?
- ¿Puedes obtener el resultado en forma diferente? ¿Puedes verlo de golpe? ¿Puedes emplear el resultado o el método en algún otro problema?

A esta fase los alumnos no le suelen dedicar el tiempo suficiente pues normalmente dan el problema por terminado en la fase anterior y tras ejecutar el plan que han ideado.

4.1.4.1. Guion para la fase de verificación

A continuación presentamos el guion que proporcionamos a los alumnos para trabajar en clase y utilizamos en todos los problemas que realizamos en clase.

- ¿Es “creíble” el resultado que has obtenido?
- ¿Tienen sentido los resultados leyendo de nuevo el enunciado?
- ¿Has comprobado los resultados con los datos indicados en el enunciado?
- ¿Crees que podrías realizar el problema de otra forma?

Capítulo 5. Resultados obtenidos con las distintas relaciones de problemas

En este capítulo desarrollaremos todos los resultados asociados a las fases de investigación explicadas anteriormente mediante los siguientes apartados:

- Análisis de la comprensión de los enunciados de los problemas.
- Trabajo con el cuadernillo.
- Análisis de las representaciones que utilizan.
- Elaboración de un plan.
- La comunicación.

Los datos han sido procesados utilizando el programa SPSSStatistics en su versión 22.

5.1. ¿Comprenden los alumnos los enunciados de los problemas?

A continuación presentamos los resultados de la primera fase de la investigación. Recordemos que el objetivo de esta fase era evaluar los procesos de resolución de problemas de los alumnos y para ello valoramos en primer lugar el nivel de comprensión que manifiestan al enfrentarse a los problemas que se les suelen proponer en clase.

5.1.1. Los cuestionarios

Recogemos aquí los cuestionarios que se le presentaron a los alumnos para que los realizaran.

5.1.1.1. Cuestionario C1

A continuación encontrarás cinco problemas y queremos saber qué comprendes al leerlos. Para ello te pedimos que expliques el significado de cada uno de ellos. Es decir, ¿qué te pide este problema? o ¿en qué consiste este problema? Es importante que tengas en cuenta

que no te pedimos que expliques cómo lo harías, ni cuál es la respuesta. Para ayudarte a entenderlo, te presentamos un ejemplo de cómo se realizan estos ejercicios.

Ejemplo: Marta tiene en su habitación una estantería en la que se pueden colocar 100 libros. La ha llenado con 18 libros de viajes, 44 libros de lectura y 26 libros escolares. También ha colocado una enciclopedia con muchos tomos. ¿Cuántos tomos tiene la enciclopedia?

Respuesta: *Este problema consiste en averiguar qué cantidad de libros ocupan la estantería y calcular los que se pueden colocar todavía, siendo éstos el número de tomos que tiene la enciclopedia.*

1. El responsable de un concesionario de coches anota el color de los mismos cuando los traen y los divide en tres clases en función del color. Esta información es muy importante para estacionarlos en tres zonas distintas de un aparcamiento. Ayer había aparcados 10 coches blancos, el mismo número de negros, cinco rojos y el mismo número de color amarillo. Los días quince de cada mes le hacen una entrega en función de tres gamas distintas, media, alta o baja. Hoy han traído 30 coches de color blanco, 10 de color negro y 20 de otros colores. ¿Qué fracción de coches de cada clase tenemos en estos momentos?
2. Un camionero transporta su mercancía desde una ciudad A hasta otra B separadas 3.500 km. Le han dado una semana para hacer el trabajo; el lunes sale de la ciudad A y conduce mañana y tarde, el martes sólo conduce durante la mañana, el miércoles sólo lo hace por la tarde, el jueves mañana y tarde, el viernes descansa, por último el sábado llega a la ciudad B. Suponiendo que hace el mismo número de kilómetros en cada etapa, ¿cuántos kilómetros recorre en cada una?
3. Un convoy está formado por una locomotora que arrastra tres vagones, V1, V2 y V3. La longitud de V1 es $\frac{1}{3}$ de la longitud de V2 y la longitud de V3 es $\frac{3}{4}$ de la longitud de V2. La locomotora tiene una longitud igual a $\frac{2}{3}$ la longitud de V2. Si la longitud del V2 es de 21 metros, ¿cuánto mide el convoy?

4. En una zona ha habido una fuerte tormenta de granizo y han sido dañadas 7 manzanas de las 15 que había en un árbol, y en otro árbol se han estropeado 4 de las nueve que tenía. ¿Qué árbol ha salido más perjudicado?

A la semana gasto $\frac{1}{5}$ de lo que me dan mis padres en transporte, $\frac{2}{3}$ en golosinas y el resto en el cine que cuesta 5 euros. ¿Cuál es la cantidad total que me dan mis padres?

5.1.1.2. Cuestionario C2

A continuación encontrarás cinco problemas y queremos saber qué comprendes al leerlos. Para ello te pedimos que selecciones una de las respuestas que mejor responde a las preguntas: ¿qué te pide este problema? o ¿en qué consiste este problema?

1. (El mismo enunciado que en C1).
 - a) Hallar el total de coches y relacionarlos con los tres tipos de gamas.
 - b) Hallar el total de coches y relacionarlos los tres tipos de colores.
 - c) Hallar el número de coches de cada color respecto al total de coches.
 - d) Hallar el número de coches de cada gama respecto al total de coches.
2. (El mismo enunciado que en C1).
 - a) Calcular la fracción resultante entre el total de kilómetros y los siete días de la semana.
 - b) Calcular el número de etapas en total..
 - c) Calcular el número total de kilómetros que hay que recorrer.
 - d) Calcular el número de kilómetros que le queda por recorrer.
3. (El mismo enunciado que en C1).
 1. Calcular cada una de las partes que forman el convoy en función de V1 y V3.
 2. Calcular cada una de las partes que forman el convoy en función de V1.

3. Calcular cada una de las cuatro partes que forman el convoy en función de V2.
4. Calcular cada una de las cinco partes que forman el convoy en función de V1.
4. (El mismo enunciado que en C1).
 - a) Calcular la fracción de manzanas estropeadas en cada árbol.
 - b) Comparar la fracción de manzanas estropeadas en cada árbol.
 - c) Calcular el total de manzanas estropeadas respecto al total de manzanas.
 - d) Comparar la fracción de manzanas no estropeadas en cada árbol.
5. (El mismo enunciado que en C1).
 - a) Calcular qué fracción del total me gasto en el cine.
 - b) Calcular lo que me gasto en total.
 - c) Calcular lo que me gasto en golosinas y en transporte.
 - d) Calcular lo que me gasto en golosinas, en transporte y sumarle los cinco euros.

5.1.2. Resultados de los cuestionarios

En esta sección vamos a presentar los resultados de los cuestionarios C1 y C2.

Respecto a la redacción de los enunciados de los problemas los alumnos no manifestaron dificultades en el lenguaje utilizado. En cambio, a la hora de responderlos, en el cuestionario C1 indicaron que no sabían muy bien cómo contestar, argumentando falta de experiencia en este tipo de actividades, mientras que en el C2 señalaban dificultades al encontrar la respuesta ya que algunas las interpretaban como muy parecidas.

Respecto al índice de dificultad (ID) de los problemas del cuestionario, se ha calculado con la expresión:

$$ID = \frac{A}{n}$$

siendo A el número de sujetos que aciertan el ítem y n el número de sujetos que lo intentan. La tabla siguiente (Tabla 5) nos permite interpretar los resultados del índice (Pérez, R., García, J.L., Gil, J.A. y Galán, A., 2009, p.173) según cinco categorías:

Tabla 5: Interpretación de los índices de dificultad

Dificultad	Rango
Muy fáciles	$ID > 0,75$
Fáciles	$0,55 < ID < 0,75$
Normales	$0,45 < ID < 0,54$
Difíciles	$0,25 < ID < 0,44$
Muy difíciles	$ID < 0,25$

A continuación, en la tabla (Tabla 6) presentamos el ID del cuestionario C1:

Tabla 6: Índice de dificultad del cuestionario C1

Problema nº	1	2	3	4	5
ID	0,28	0,27	0,42	0,31	0,13
Dificultad	Difícil	Difícil	Difícil	Difícil	Muy difícil

Tal y como se puede observar en la tabla, respecto a la dificultad de los problemas, contabilizamos que un 20% de los mismos son considerados muy difíciles y el resto son difíciles.

En la tabla (Tabla 7) presentamos el índice de dificultad del cuestionario C2 cuya única diferencia con C1 es la forma de responderlo, ya que en este caso debían seleccionar una respuesta de cuatro opciones posibles:

Tabla 7: Índice de dificultad del cuestionario C2

Problema nº	1	2	3	4	5
ID	0,27	0,25	0,61	0,54	0,13

Dificultad	Difícil	Difícil	Fácil	Normales	Muy difícil
------------	---------	---------	-------	----------	-------------

Respecto a la dificultad de los problemas en el cuestionario C2, un 20% de los problemas son fáciles, otro 20% son normales, un 40% son difíciles, mientras que otro 20% son muy difíciles. Como se puede comprobar no hay ningún problema que se pueda considerar muy fácil, pero este aspecto es preocupante ya que en el nivel en el que nos encontramos los alumnos han trabajado estos problemas en cursos anteriores y no deberían tener problemas con los mismos.

Como se puede observar, el problema 3, por las respuestas de los alumnos, ha pasado de ser difícil en el cuestionario C1 a fácil en el C2, de un ID de 0,42 a 0,61; en el caso del problema 4 ha pasado de difícil a normal, de un ID de 0,31 a 0,54. Entendemos que esta diferencia puede venir motivada por la ayuda que le supone a los alumnos el tener las posibles respuestas al problema y reflexionar sobre la correcta.

5.1.2.1. Resultados con el cuestionario C1

Este cuestionario ha sido realizado por 72 alumnos de los que se contabilizan 37 varones (51,4%) y 35 hembras (48,6%) que forman parte de dos clases de tercer curso de educación secundaria obligatoria.

Recordemos que cada problema se calificó con un cero en caso de que la respuesta fuera incorrecta y uno si la respuesta era correcta; es decir, si la explicación que daba el alumno como respuesta al problema entendíamos que indicaba que lo había comprendido y que por lo tanto era susceptible de ser resuelto, independientemente de que fuera capaz de resolverlo o no, lo valoramos con un uno y en caso contrario un cero. En este momento inicial no quisimos detenernos en otro tipo de valoraciones intermedias, que si realizamos posteriormente. La calificación final era la suma de los resultados de los cinco problemas, por lo que la calificación mínima será de cero y la máxima de cinco puntos. En la siguiente tabla (Tabla 8) podemos encontrar las calificaciones obtenidas por los alumnos con las frecuencias de cada una de ellas, así como los porcentajes acumulados de las respuestas:

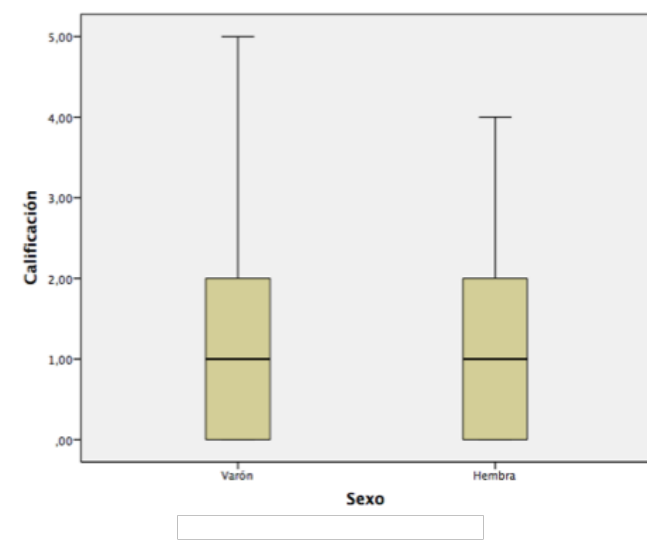
Tabla 8: Calificaciones del cuestionario C1

Calificación	Frecuencia	Porcentaje	
		Porcentaje	acumulado
0	24	33,3	33,3
1	20	27,8	61,1
2	12	16,7	77,8
3	9	12,5	90,3
4	6	8,3	98,6
5	1	1,4	100

En la tabla (Tabla 8) se observa que el número de alumnos en cada estadillo está en proporción inversa al número de respuestas correctas. Como resultados relevantes indiquemos que una tercera parte de los alumnos ha obtenido cero puntos y que sólo 16 alumnos (22,2%) han obtenido una calificación igual o superior a tres puntos, valor mínimo para considerar la prueba como superada. Podemos concluir que el 77,8% de los alumnos que han participado en la realización del cuestionario no lo han superado, resultado que consideramos muy bajos, aunque esperado por nuestra experiencia de años precedentes.

La calificación media obtenida en el cuestionario ha sido de 1,39 ($\pm 1,16$), el intervalo de confianza de la media con un nivel del 95% fue de (1'07,1'71). Si tenemos en cuenta el género de los alumnos, la calificación media en el caso de los varones ha sido de 1,38 ($\pm 1,34$), mientras que entre las chicas ha sido de 1,40 ($\pm 1,4$), lo que indica una gran dispersión de los datos. En el gráfico (Figura 5) podemos observar la distribución de los datos teniendo en cuenta el género de los alumnos. En ambos géneros podemos ver que la mitad del grupo se sitúa entre las puntuaciones 0 y 2. En ambos casos la mediana ha sido igual a 1.

Figura 5: Calificaciones respecto al sexo de los alumnos (C1)



Realizamos la prueba de U de Mann-Whitney para muestras independientes y no hemos encontrado una relación estadísticamente significativa ($p\text{-valor} = 0,981$) entre la calificación obtenida y el sexo del alumnado.

El tiempo medio que tardaron los alumnos en realizar la prueba fue de 17,4 minutos ($\pm 6,3$), con un mínimo de 7 minutos y un máximo de 44. El intervalo de confianza para la media del tiempo con un nivel del 95% fue de (15'91,18'86). En el caso de los varones el tiempo medio fue de 18,27 minutos (± 8) y en el caso de las hembras de 16,46 ($\pm 3,58$). El tiempo empleado en realizar la prueba no correlaciona positivamente con la calificación obtenida (coeficiente de correlación de Spearman $r = 0,048$ y $p\text{-valor} = 0,688$). El tiempo medio que invirtieron en realizar el cuestionario fue inferior al que nosotros habíamos programado previamente.

También queríamos valorar si el nivel de comprensión que manifiestan los alumnos a través de la calificación obtenida correlacionaba con la nota obtenida en el área de matemáticas. El coeficiente de correlación de Spearman es $r = 0,458$ e indica una correlación media y estadísticamente significativa. Inferior a lo que se podía prever a priori, pero que sí corrobora nuestras observaciones sobre la tarea de resolver problemas y los alumnos con mejores resultados en el área.

5.1.2.2. Resultados con el cuestionario C2

Este cuestionario ha sido realizado por 67 alumnos, de los 72 alumnos que realizaron C1. De ellos se contabilizan 32 alumnos, equivalentes al 47,8% del total y 35 alumnas, el 52,2%.

En la siguiente tabla (Tabla 9) podemos encontrar las calificaciones obtenidas por los alumnos con las frecuencias cada una de ellas y los porcentajes acumulados de las respuestas:

Tabla 9: Calificaciones del cuestionario C2

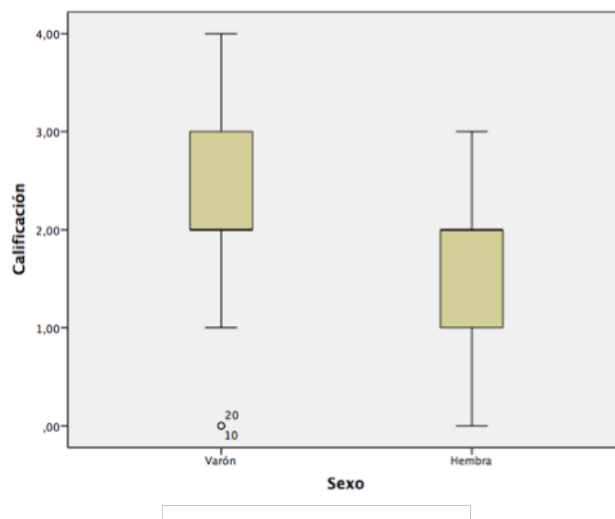
Calificación	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
0	6	9	9
1	18	26,9	35,8
2	28	41,8	77,6
3	13	19,4	97
4	2	3	100
5	0	0	100

Como se puede comprobar sólo 15 alumnos (22,4% del total) han obtenido una calificación igual o superior a tres puntos, como ya hemos dicho el valor de referencia para considerarse apto, por lo que nos encontramos con un 77,6% de los alumnos que no lo han superado.

La calificación media obtenida en el cuestionario ha sido de 1,81 ($\pm 0,12$), el intervalo de confianza de la media con un nivel del 95% fue de (1'57,2'04). Si tenemos en cuenta el género de los alumnos, la calificación media en el caso de los varones ha sido de 2,06 ($\pm 0,95$) mientras que las alumnas han obtenido una media de 1,57 ($\pm 0,92$). En ambos casos la mediana es igual a 2. Los resultados los podemos observar en la figura siguiente (Figura

6), en el caso de los varones podemos ver que la mitad del grupo se sitúa entre las puntuaciones 2 y 3, y en el caso de las hembras entre 1 y 2. Observamos que existe una diferencia en la calificación entre ambos géneros.

Figura 6: Calificaciones respecto al género de los alumnos (C2)



Para comprobar si esta diferencia observada es estadísticamente significativa hemos realizado la prueba de U de Mann-Whitney para muestras independientes y, en este cuestionario a diferencia de lo que ocurría en C1, sí hemos encontrado una relación estadísticamente significativa ($p\text{-valor} = 0,036$) entre la calificación obtenida y el género de los alumnos.

El tiempo medio que han tardado en realizar la prueba ha sido de 14,04 minutos ($\pm 4,46$), con un mínimo de 6 minutos y un máximo de 31. El intervalo de confianza para la media del tiempo con un nivel del 95% es de (12'96, 15'13). En el caso de los varones el tiempo medio fue de 14,56 minutos ($\pm 5,67$) y en el caso de las hembras de 13,57 ($\pm 2,96$). El tiempo empleado en realizar la prueba correlaciona muy bajo con la calificación obtenida y esta correlación no es estadísticamente significativa (coeficiente de correlación de Spearman $r = 0,125$ y $p\text{-valor} = 0,314$).

El coeficiente de correlación de Spearman entre la calificación en el cuestionario C2 y la obtenida en matemáticas es $r = 0,294$ que indica una correlación baja pero estadísticamente significativa ($p\text{-valor} = 0,016$).

5.1.2.3. Comparación de los dos cuestionarios

Respecto a las calificaciones obtenidas, comparando ambos cuestionarios, destacamos que, aunque la calificación valorada como apto (calificación igual o superior a 3 puntos) prácticamente se ha mantenido, la calificación de cero puntos ha bajado un 24,3% del cuestionario C1 al C2, y por otro lado, la calificación de dos puntos ha aumentado un 25,1%. Por lo tanto, observamos que los resultados obtenidos por los alumnos en C2 son sensiblemente mejores que los que obtuvieron en C1.

Los cuestionarios eran nominativos lo que nos ha permitido formar las parejas de datos, es decir la calificación obtenida por cada alumno en los dos cuestionarios. Hemos eliminado aquellos datos de los alumnos que no habían realizado alguno de los dos cuestionarios. De esta forma nos quedamos con 64 parejas de datos. Hemos realizado la prueba de Wilcoxon de los rangos con signo y podemos decir que de los 64 alumnos, 16 han obtenido una mayor calificación en C1 que en C2; 31 alumnos han obtenido mejor puntuación en C2 y 17 han obtenido la misma calificación.

Por último queríamos contrastar la existencia de una diferencia significativa entre los resultados de los dos cuestionarios. La prueba de Wilcoxon nos permitió confirmar que existe una diferencia estadísticamente significativa ($p - \text{valor} = 0,029$) entre los resultados de los dos cuestionarios.

Respecto al tiempo empleado en realizar los cuestionarios, en C2 el tiempo medio en completarlo ha sido inferior en aproximadamente 3 minutos, lo que interpretamos como una mayor confianza por parte de los alumnos, probablemente al tener más claro lo que debían responder y facilitarles el hecho de no tener que escribir la respuesta sino seleccionarla de las cuatro opciones planteadas.

De la corrección del C1 hemos detectado que los alumnos tienen serias dificultades para expresar sus ideas y creemos incluso que esta dificultad se puede traducir en algunas respuestas que hemos considerado incorrectas, al no entender muy bien lo que querían expresar.

Respecto a la correlación entre la calificación en el cuestionario C1 y la calificación académica ha sido de $r = 0,458$ y en el caso de C2 ha bajado hasta $r = 0,294$, aunque en

ambos casos la correlación es estadísticamente significativa. Los alumnos con mejor rendimiento académico no tienen por qué obtener mejores resultados en esta tarea.

Como conclusión, es significativo que el 48,3% de los alumnos mejoraron su nivel de comprensión del problema cuando no tenían que explicarlo sino seleccionar la respuesta. Existe una diferencia entre las calificaciones obtenidas por los alumnos en los dos cuestionarios, siendo mejor en el segundo cuestionario. Entendemos que esta mejora puede venir determinada por numerosos factores, entre ellos que el tener las respuestas introducía un elemento de reflexión en la búsqueda de la comprensión del problema.

Estos resultados nos animaron a continuar con la segunda fase de nuestro trabajo. Si tener las respuestas les había obligado a detenerse un poco más, a reflexionar sobre la viabilidad de las mismas, creíamos que podía ser oportuno introducir un elemento de reflexión más concreto, un guion que favoreciera la comprensión de los enunciados del problema.

5.1.3. Guion para la fase de comprensión.

En este apartado presentamos los resultados obtenidos en el cuestionario que hemos denominado C3. Recordar que este cuestionario lo han realizado los mismos grupos de alumno que realizaron los dos anteriores, C1 y C2.

Lo que se quería valorar en esta fase era saber si la utilización de un guion por parte de los alumnos mientras resolvían los problemas favorecía la comprensión de los enunciados de los mismos.

Recordar que los contenidos que los alumnos tenían que conocer eran los referentes a planteamientos de ecuaciones. En este caso también era un cuestionario de respuesta múltiple.

5.1.3.1. Cuestionario C3.

Presentamos el cuestionario tal y como lo recibieron los alumnos.

A continuación encontrarás un conjunto de problemas. Queremos saber qué comprendes al leerlos por lo que te pedimos que selecciones la respuesta que consideres más adecuada.

Con objeto de ayudarte a resolver la cuestión planteada te presentamos un ejemplo que te puede ayudar.

Ejemplo: Un padre tiene 46 años y su hija 8. ¿Dentro de cuántos años la edad del padre será exactamente el doble que la edad de su hija?

1. Hallar los años del padre cuando la hija tenga 2 años más.
2. Averiguar la diferencia de edad entre padre e hija dentro de 2 años.
3. Calcular la edad del padre para que sea el doble que la de su hija.
4. Hallar la edad que tendrán ambos dentro de 16 años

Este problema consiste en averiguar los años que tienen que pasar para que la edad del padre sea el doble que la edad de la hija. Por lo que contestaríamos la opción c).

1. La suma de tres números naturales consecutivos es igual al cuádruple del menor.
¿De qué números se trata?
 - a) Hallar tres números naturales consecutivos que sumados sean igual al menor más cuatro.
 - b) Calcular qué tres números naturales consecutivos sumados dan cuatro veces el menor.
 - c) Averiguar qué tres números naturales consecutivos sumen cuatro.
 - d) Averiguar el menor de tres números naturales que es igual al doble de los otros dos.
2. Ayer Paco cogió un libro de la biblioteca y leyó una quinta parte de sus páginas. Hoy ha leído 42 páginas más y sólo le faltan 3 páginas para llegar a la mitad del libro. ¿Cuántas páginas tiene el libro?
 - a) Calcular el número de páginas que tiene la mitad del libro.
 - b) Averiguar el número de páginas que lee cada día y sumarlo.
 - c) Calcular la diferencia entre las páginas que leyó los primeros dos días.

- d) Averiguar cuántas páginas lee cada día, tener en cuenta lo que le queda por leer, y además, que sólo lee la mitad del libro.
3. Una bodega exportó en enero la mitad de sus barriles, y a los dos meses, un tercio de los que le quedaban. ¿Cuántos barriles tenía al comienzo si ahora hay 40.000 barriles?
- a) Averiguar cuántos barriles exportó en total.
- b) Calcular un tercio de los barriles.
- c) Calcular la diferencia entre los que exportó y los 40.000 barriles.
- d) Calcular un tercio de los 40.000 barriles.
4. Luis quiere repartir 300 cromos entre tres amigos, de modo que Pedro reciba el doble que Teresa y ésta 40 cromos más que Álvaro. ¿Cuántos cromos recibirá cada amigo?
- a) Calcular el número de cromos que tiene en total y hallar la diferencia entre los que tiene Pedro y Teresa.
- b) Calcular el número de amigos entre los que hay que repartir.
- c) Averiguar el número de cromos que tiene Álvaro y Teresa.
- d) Averiguar cómo están relacionados los amigos respecto al número de cromos.
5. Un ciclista ha recorrido $\frac{2}{5}$ del trayecto y aún le falta por recorrer 1 km para llegar a la mitad del camino. ¿Qué longitud tiene el trayecto completo?
- a) Calcular los dos quintos de un kilómetro.
- b) Consiste en averiguar el trayecto que ha recorrido.
- c) Consiste en averiguar qué longitud tiene el doble del trayecto.
- d) Consiste en calcular el porcentaje recorrido respecto al porcentaje total.

5.1.3.2. Resultados con el cuestionario C3.

Respecto al índice de dificultad (ID) de los problemas del cuestionario C3 calculado con la expresión:

$$ID = \frac{A}{n}$$

siendo A el número de sujetos que aciertan el ítem y n el número de sujetos que lo intentan, se obtiene la siguiente tabla (Tabla 10):

Tabla 10: Índice de dificultad del cuestionario C3

Problema nº	1	2	3	4	5
ID	0,73	0,64	0,36	0,14	0,33
Dificultad	Fácil	Fácil	Difícil	Muy difícil	Difícil

Respecto a la dificultad de los problemas y por los resultados obtenidos, el 20% de los problemas son considerados muy difíciles, el 40% son difíciles y otro 40% son catalogados como fáciles. Los resultados son coherentes con lo que pretendíamos, además, acorde con las experiencias anteriores.

Este cuestionario ha sido realizado por 64 alumnos, de los que se contabilizaron 30 varones (46,9%) y 34 hembras (53,1%).

En la siguiente tabla (Tabla 11) podemos observar las calificaciones obtenidas por los alumnos con sus frecuencias y porcentajes.

Únicamente 2 alumnos (3,1%) han obtenido una calificación de cero puntos y por el contrario ningún alumno obtuvo la calificación máxima del cuestionario. Por otro lado, 25 alumnos (39,1%) han obtenido una calificación igual o superior a tres puntos, valor mínimo para considerar la prueba como superada.

Tabla 11: Calificaciones del cuestionario C3

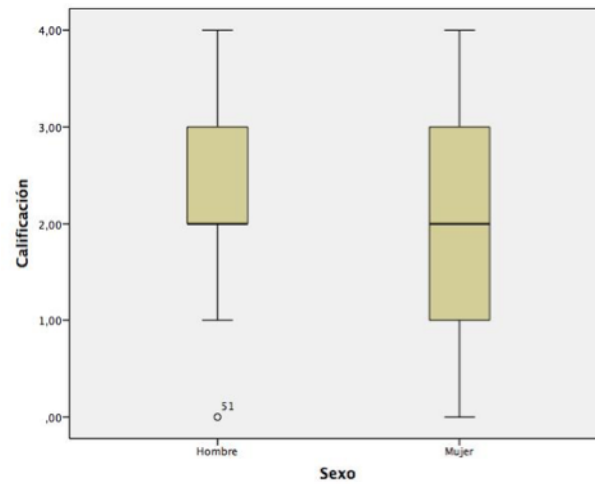
Calificación	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
0	2	3,1	3,1
1	13	20,3	23,5
2	24	37,5	60,9
3	20	31,3	92,2
4	5	7,8	100
5	0	0	100

La calificación media obtenida en el cuestionario ha sido de 2,20 ($\pm 0,12$), el intervalo de confianza de la media con un nivel del 95% fue de (1'96, 2'44). Si tenemos en cuenta el género de los alumnos la calificación media en el caso de los varones ha sido de 2,23 ($\pm 0,16$), mientras que entre las chicas ha sido de 2,18 ($\pm 0,18$). En ambos casos la mediana ha sido igual a 2. En el gráfico (Figura 7) podemos observar la distribución de los datos teniendo en cuenta el género de los alumnos: en el caso de los varones la mitad del grupo se sitúa entre las puntuaciones 2 y 3, mientras que en las hembras está entre 1 y 3.

Hemos realizado la prueba de U de Mann-Whitney para muestras independientes y no se ha encontrado una relación estadísticamente significativa ($p\text{-valor} = 0,672$) entre la calificación obtenida y el género del alumnado.

El tiempo medio empleado en realizar la prueba fue de 11,38 minutos ($\pm 0,492$), con un mínimo de 4 minutos y un máximo de 22. El intervalo de confianza para la media con un nivel del 95% fue de (10'39,12'36). En el caso de los varones el tiempo medio fue de 12,23 minutos ($\pm 0,78$) y en las hembras de 10,62 ($\pm 0,60$). El tiempo empleado en realizar la prueba correlaciona de forma muy baja con la calificación obtenida (coeficiente de Spearman, $r = 0,10$) además de no ser estadísticamente significativa dicha correlación ($p\text{-valor} = 0,43$).

Figura 7: Calificaciones respecto al género de los alumnos (C3)



Respecto a la relación entre la calificación en el cuestionario y la nota académica podemos decir que, no hemos encontrado correlación entre la calificación obtenida en el cuestionario y la calificación académica obtenida en el tercer trimestre (coeficiente de Spearman, $r = 0,05$).

5.1.4. Comparación de los resultados sobre la comprensión de los enunciados.

Uno de los objetivos planteados consistía en analizar si el guion propuesto a los alumnos para utilizar en la fase de comprensión añadía alguna mejora a dicha fase.

En los dos trabajos anteriores, con una calificación igual o superior a 3 se obtuvo un porcentaje del 22,2% en el cuestionario 1 y del 22,4% en el 2, mientras que ha sido del 39,1% en este tercer trabajo.

Teniendo en cuenta el género (Tabla 12) ha habido una mejora de la calificación media en ambos géneros, disminuyendo también la dispersión de los valores:

Tabla 12: Comparación de los resultados de los trabajo de comprensión

Género	C2	C3
Varones	2,06 ($\pm 0,95$)	2,23 ($\pm 0,16$)
Hembras	1,57 ($\pm 0,92$)	2,18 ($\pm 0,18$)

Hemos eliminado los datos de los alumnos que no habían realizado alguno de los cuestionarios, por lo que nos quedamos con 57 parejas de datos. Hemos realizado la prueba de Wilcoxon de los rangos con signo y podemos decir que de los 57 alumnos, 12 han obtenido una mayor calificación en C2 que en C3, 29 alumnos han obtenido mejor puntuación en C3 y 16 han obtenido la misma calificación en ambos cuestionarios.

Por último, queríamos contrastar la existencia de una diferencia significativa entre los resultados de los dos cuestionarios. La prueba de Wilcoxon nos permitió afirmar que existe una diferencia estadísticamente significativa ($p\text{-valor} = 0,012$) entre los resultados de los dos cuestionarios.

Como conclusión podemos decir que el 50,9% de los alumnos mejoraron su nivel de comprensión del problema y que esa mejoría era estadísticamente significativa. Creemos que esta mejoría se puede relacionar con la utilización del guion, aunque también entendemos que la mayor madurez de los alumnos o incluso los contenidos implicados en el cuestionario sean variables que debemos tener en cuenta.

5.2. Resultados del cuadernillo

En este apartado presentamos los resultados del cuadernillo de problemas que utilizamos con la intención de valorar diferentes aspectos de la resolución de problemas.

5.2.1. Cuadernillo de problemas

- 1) (NP2) En una colecta en un centro se ha reunido una cantidad de dinero con la que se compraron algunas cosas. La mitad se gastó en ropa; los $\frac{2}{5}$ en productos de aseo, y aún han sobrado 14 euros. ¿Cuánto dinero consiguieron recolectar?
- 2) (NP3) En un centro escolar, el número de alumnas de 3º de ESO excede en 20 al número de alumnos. Si entre todos hay 120 alumnos, ¿cuántas chicas y cuántos chicos hay en dicho curso?
- 3) (NP3) El precio de un pantalón es el doble que el de una camiseta. Si entre los dos cuestan 54 euros, ¿cuál es el precio de cada uno de ellos?

- 4) (NP3) En un corral hay pollos y conejos. Se cuentan las cabezas y son dieciséis; se cuentan las patas y son cincuenta y dos. ¿Cuántos pollos y conejos hay en el corral?
- 5) (NP2) Una educadora tiene 120 chocolates y 192 caramelos que va a repartir entre los alumnos de su clase. Si cada alumno recibe 3 caramelos más que chocolates. ¿Cuántos son los alumnos? ¿Cuántos chocolates y caramelos reciben cada alumno?
- 6) (NP3) Un libro se abre al azar por cualquier sitio. El producto (la multiplicación) de los números de las páginas observadas es 3.192. ¿En qué número de páginas se abrió el libro?

5.2.2. Resultados de las fases de resolución de problemas

Antes de comenzar con el análisis de los resultados determinamos el valor de la fiabilidad mediante la consistencia interna de la rúbrica que utilizamos para evaluar los problemas. El procedimiento utilizado fue el alfa (α) de Cronbach, obteniendo un valor de 0,898: este valor nos indica una alta consistencia de la rúbrica, y por lo tanto asegura la fiabilidad de nuestras medidas.

En esta fase se formaron 14 grupos, en la mayoría de los casos eran grupos de tres alumnos. En la formación de los grupos se intentó que los alumnos que los formaban tuvieran habilidades distintas respecto a la resolución de problemas debido a que se les pedía que utilizaran distintos procedimientos para resolverlos, y como ya hemos dicho hay alumnos con mucha facilidad para resolver problemas siguiendo procedimientos aritméticos y otros que tienen mucha dificultad.

A continuación presentamos los resultados del trabajo de cada uno de los grupos en los distintos problemas. Para obtener estos resultados hemos corregido cada uno de los problemas utilizando los descriptores de cada una de las categorías de la rúbrica de evaluación (ver anexo III).

5.2.2.1. Identifica las fases propuestas en clase

En la tabla siguiente (Tabla 13) mostramos los resultados del trabajo de cada uno de los grupos en esta categoría teniendo en cuenta la valoración que le hemos otorgado según los distintos descriptores.

Tabla 13: Resultados de identifica las fases propuestas

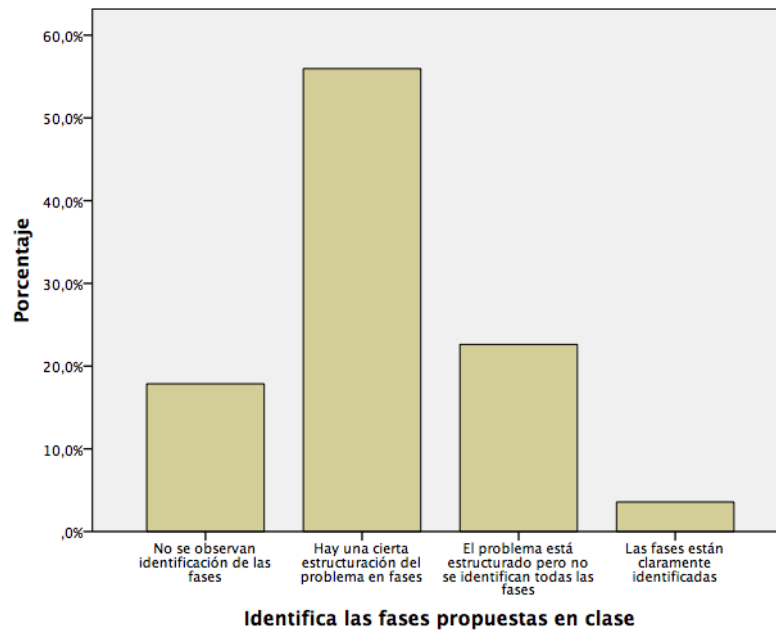
Identifica las fases propuestas				
Grupo	No se observa identificación de las fases	Hay una cierta estructuración del problema en fases	El problema está estructurado pero no se identifican todas las fases	Las fases están claramente identificadas
1	16,7%	16,7%	66,7%	0,0%
2	33,3%	66,7%	0,0%	0,0%
3	16,7%	83,3%	0,0%	0,0%
4	33,3%	66,7%	0,0%	0,0%
5	50,0%	33,3%	16,7%	0,0%
6	16,7%	50,0%	33,3%	0,0%
7	33,3%	33,3%	33,3%	0,0%
8	0,0%	66,7%	33,3%	0,0%
9	16,7%	33,3%	50,0%	0,0%
10	0,0%	16,7%	33,3%	50,0%
11	33,3%	66,7%	0,0%	0,0%
12	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%
13	0,0%	50,0%	50,0%	0,0%
14	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%
Total	17,9%	56,0%	22,6%	3,6%

Como se puede observar, todos los grupos han tenido dificultad para estructurar los problemas en todas las fases propuestas. Respecto a los grupos señalar que, por un lado, en el trabajo del grupo 5 nos encontramos que no hemos podido detectar la estructuración del problema en fases en la mitad de los problemas realizados, y por otro lado, el 10 es el

único grupo en el que hemos podido identificar todas las fases en un 50% de los problemas.

El siguiente gráfico (Figura 8), señala que en el 56% de los casos hay una cierta estructuración del problema en fases y en un 22,6% el problema está estructurado pero no se identifican todas las fases. Solamente en un 3,6% de los casos se identifican todas las fases nítidamente.

Figura 8: Identifica las fases propuesta en clase



Aunque podamos entender que los resultados en esta categoría no son muy buenos, ya que la máxima puntuación es muy baja, pensamos que esto no es así, ya que, aunque les hayamos insistido durante el trabajo en grupo-clase con los guiones, que es importante hacer explícito en la resolución del problema la identificación de todas las fases, también es verdad que no es imprescindible para resolver los problemas o incluso suelen trabajar con papel en “sucio”. Por esta razón, se puede considerar que estos resultados son muy aceptables.

5.2.2.2. Ha comprendido el problema

En la tabla siguiente (Tabla 14) mostramos los resultados del trabajo de los distintos grupos en esta categoría teniendo en cuenta la valoración que le hemos otorgado según los distintos descriptores.

Tabla 14: Resultados de ha comprendido el problema

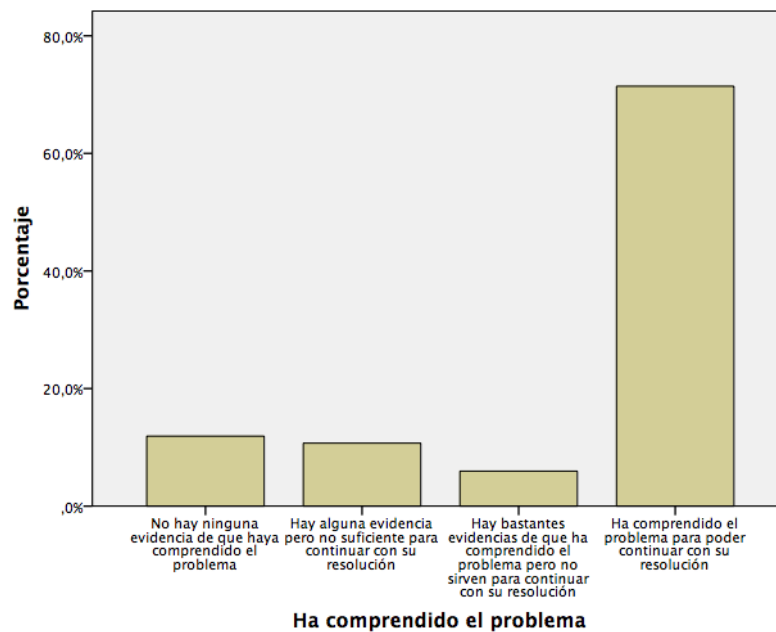
Grupo	Ha comprendido el problema			
	No hay ninguna evidencia de que haya comprendido el problema	Hay alguna evidencia pero no suficiente para continuar con su resolución	Hay bastantes evidencias de que ha comprendido el problema pero no sirven para continuar con su resolución	Ha comprendido el problema para poder continuar con su resolución
1	0,0%	16,7%	0,0%	83,3%
2	16,7%	0,0%	16,7%	66,7%
3	16,7%	50,0%	0,0%	33,3%
4	0,0%	33,3%	0,0%	66,7%
5	16,7%	16,7%	0,0%	66,7%
6	16,7%	16,7%	0,0%	66,7%
7	16,7%	0,0%	0,0%	83,3%
8	0,0%	16,7%	16,7%	66,7%
9	16,7%	0,0%	16,7%	66,7%
10	0,0%	0,0%	0,0%	100,0%
11	33,3%	0,0%	0,0%	66,7%
12	0,0%	0,0%	16,7%	83,3%
13	16,7%	0,0%	0,0%	83,3%
14	16,7%	0,0%	16,7%	66,7%
Total	11,9%	10,7%	6,0%	71,4%

En esta categoría el grupo 3 es el que ha obtenido peores resultados ya que sólo han comprendido 2 de los 6 problemas que tenían que resolver, el resto de los grupos han

comprendido un mínimo de 4 problemas. El grupo 10 ha sido el único grupo que ha comprendido la totalidad de los problemas.

En el gráfico siguiente (Figura 9) se puede comprobar que en el 71,4% de los casos los alumnos han comprendido el problema para poder continuar con su resolución. Creemos que son unos resultados bastante buenos y que entendemos que mejoran los resultados de los trabajos anteriores sobre comprensión del problema que hemos presentado anteriormente.

Figura 9: Ha comprendido el problema



5.2.2.3. Ha ejecutado algún plan

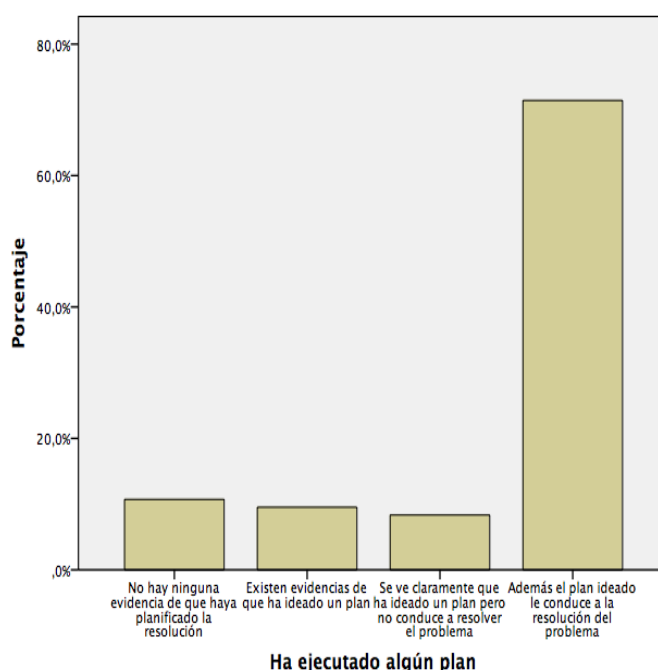
En la tabla siguiente (Tabla 15) mostramos los resultados del trabajo de los distintos grupos en esta categoría, nuestra intención era comprobar si encontrábamos evidencias de que los alumnos habían seguido algún plan concreto. Los alumnos resuelven un problema se han sido capaces de elaborar un plan y ejecutarlo, aunque en muchas ocasiones, luego tienen series dificultades para expresar, tanto oralmente como por escrito, lo que han hecho para resolverlo.

Tabla 15: Resultados de ha ejecutado algún plan

Grupo	Ha ejecutado algún plan			
	No hay ninguna evidencia de que haya planificado la resolución	Existen evidencias de que ha ideado un plan	Se ve claramente que ha ideado un plan pero no conduce a resolver el problema	Además el plan ideado le conduce a la resolución del problema
1	0,0%	16,7%	0,0%	83,3%
2	16,7%	16,7%	0,0%	66,7%
3	16,7%	16,7%	33,3%	33,3%
4	0,0%	16,7%	16,7%	66,7%
5	33,3%	0,0%	0,0%	66,7%
6	16,7%	0,0%	16,7%	66,7%
7	0,0%	16,7%	0,0%	83,3%
8	0,0%	0,0%	33,3%	66,7%
9	16,7%	16,7%	0,0%	66,7%
10	0,0%	0,0%	0,0%	100,0%
11	16,7%	16,7%	0,0%	66,7%
12	0,0%	16,7%	0,0%	83,3%
13	16,7%	0,0%	0,0%	83,3%
14	16,7%	0,0%	16,7%	66,7%
Total	10,7%	9,5%	8,3%	71,4%

El grupo 10 ha sido el único capaz de idear un plan que le ha llevado a la resolución de todos los problemas. El resto de los grupos, a excepción del grupo 3, han ideado un plan que les podría llevar a resolver los problemas, igual o por encima de cuatro problemas de los seis que debían resolver.

Figura 10: Ha ejecutado algún plan



Como se ve en el diagrama de barras anterior (Figura 10) un 71,4% de los alumnos han ideado un plan que conduce a la resolución del problema. Un resultado que nos parece bastante bueno pues ha habido grupos de alumnos que han sido capaces de escribir el plan ideado en el problema, aunque no se les pedía, y en otros grupos se ve claramente que han seguido un plan.

5.2.2.4. Aplica diferentes procedimientos

En nuestro trabajo estábamos muy interesados en conocer la capacidad de los alumnos para resolver los problemas aplicando más de un procedimiento. El objetivo era que buscaran como resolver los problemas con el número de procedimientos que les proponíamos, posteriormente en otro apartado indicaremos los resultados respecto al tipo de procedimientos empleados.

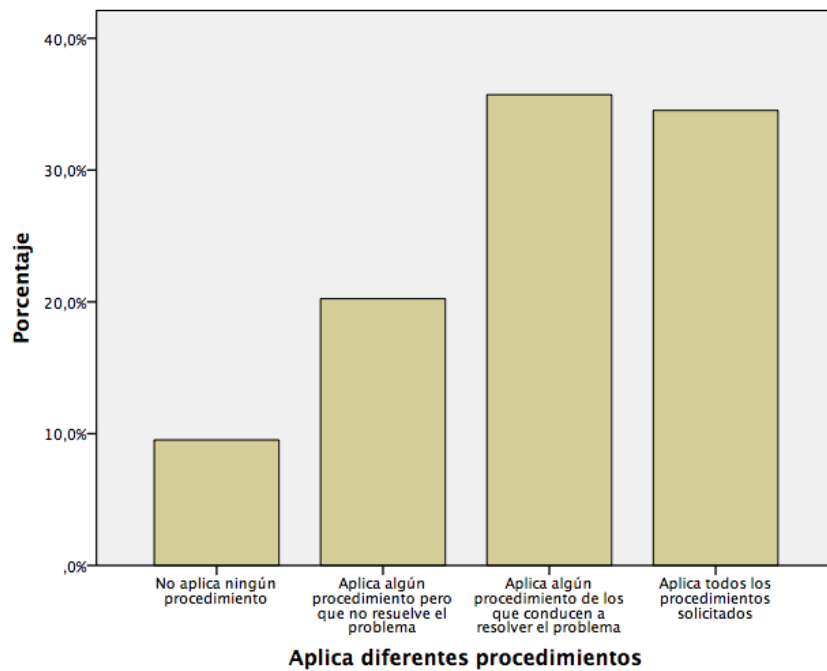
En la tabla siguiente mostramos los resultados obtenidos por los grupos con la valoración correspondiente en cada uno de los descriptores de esta categoría.

Tabla 16: Resultados de aplica diferentes procedimientos

Grupo	Aplica diferentes procedimientos			
	No aplica ningún procedimiento	Aplica algún procedimiento pero que no resuelve el problema	Aplica algún procedimiento de los que conducen a resolver el problema	Aplica todos los procedimientos solicitados
1	0,0%	16,7%	33,3%	50,0%
2	16,7%	16,7%	50,0%	16,7%
3	16,7%	50,0%	16,7%	16,7%
4	0,0%	33,3%	33,3%	33,3%
5	16,7%	16,7%	50,0%	16,7%
6	16,7%	16,7%	16,7%	50,0%
7	0,0%	16,7%	50,0%	33,3%
8	0,0%	33,3%	33,3%	33,3%
9	16,7%	16,7%	16,7%	50,0%
10	0,0%	16,7%	33,3%	50,0%
11	16,7%	16,7%	33,3%	33,3%
12	0,0%	16,7%	50,0%	33,3%
13	16,7%	0,0%	16,7%	66,7%
14	16,7%	16,7%	66,7%	0,0%
Total	9,5%	20,2%	35,7%	34,5%

Respecto a la aplicación de los procedimientos, tal y como se les pedía en los problemas, el grupo que ha obtenido mejores resultados en esta categoría ha sido el 13.

Figura 11: Aplica diferentes procedimientos



Como se puede observar en la figura (Figura 11) en el 35,7% aplica algún procedimiento de los que conducen a resolver el problema y un 34,5% aplica todos los procedimientos solicitados.

5.2.2.5. Resuelve el problema

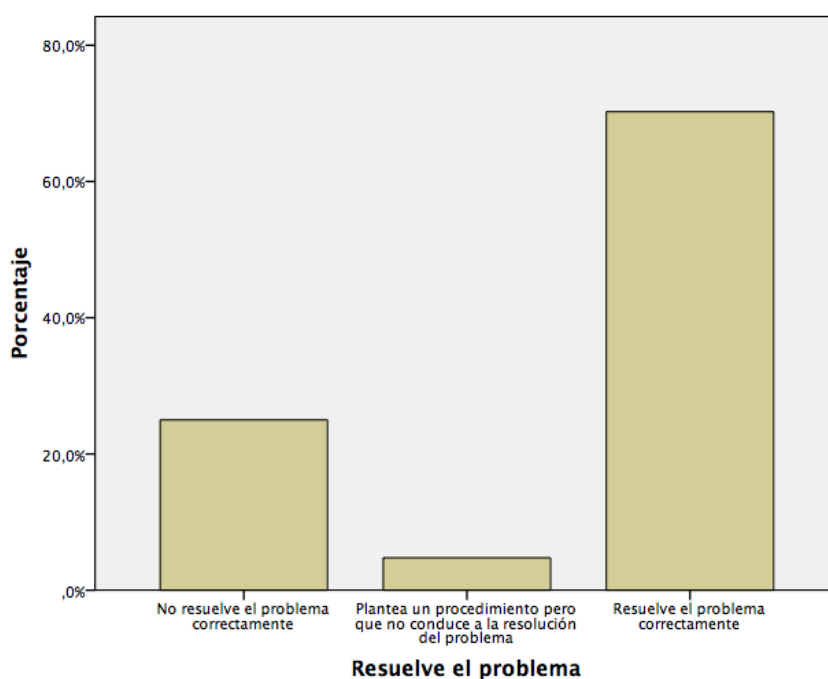
Esta categoría evalúa la capacidad de los alumnos para resolver los problemas y éste era el objetivo principal de nuestro trabajo. Como en los casos anteriores la categoría se dividió en cuatro descriptores. En el momento de corregir los problemas encontramos que una vez que los alumnos planteaban un procedimiento adecuado no cometían errores al resolverlo. Por lo tanto, en la tabla siguiente (Tabla 17) aparecen sólo los tres descriptores resultado de la corrección.

En el trabajo de los grupos vemos que ningún grupo tuvo el cien por cien de los problemas bien y que el grupo 3 tuvo los peores resultados. Además, el 70,2% de los casos ha llegado a la solución del problema. En la figura siguiente (Figura 12) podemos observar estos resultados.

Tabla 17: Resultados de resuelve el problema

Grupo	Resuelve el problema		
	No resuelve el problema correctamente	Plantea un procedimiento pero que no conduce a la resolución del problema	Resuelve el problema correctamente
1	16,7%	0,0%	83,3%
2	33,3%	0,0%	66,7%
3	33,3%	33,3%	33,3%
4	33,3%	0,0%	66,7%
5	33,3%	0,0%	66,7%
6	16,7%	16,7%	66,7%
7	16,7%	0,0%	83,3%
8	16,7%	16,7%	66,7%
9	33,3%	0,0%	66,7%
10	16,7%	0,0%	83,3%
11	33,3%	0,0%	66,7%
12	16,7%	0,0%	83,3%
13	16,7%	0,0%	83,3%
14	33,3%	0,0%	66,7%
Total	25,0%	4,8%	70,2%

Figura 12: Resuelve el problema



5.2.2.6. Comprueba el resultado

Éste es otro de los aspectos que insistimos mucho en los alumnos cuando realizan cualquier procedimiento matemático que aplicamos en clase. Y en los procesos de resolución de problemas es una de las fases fundamentales aunque los alumnos suelen descuidarla bastante.

Como vemos en la tabla siguiente (Tabla 18) de los 14 grupos, hay dos grupos, el número 10 y el 13 que comprueban los resultados de una forma clara, es decir, existe un apartado de la resolución que dedica a este fin.

Tabla 18: Resultados de comprueba el resultado

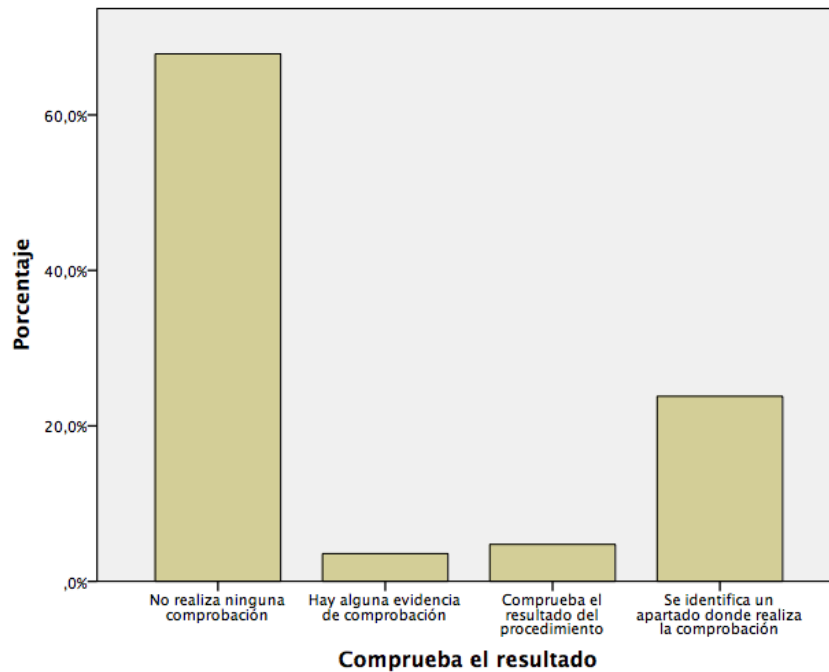
Comprueba el resultado				
Grupo	No realiza ninguna comprobación	Hay alguna evidencia de comprobación	Comprueba el resultado del procedimiento	Se identifica un apartado donde realiza la comprobación
1	66,7%	16,7%	0,0%	16,7%
2	83,3%	16,7%	0,0%	0,0%

LA COMPETENCIA MATEMÁTICA A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN EDUCACIÓN SECUNDARIA

3	83,3%	0,0%	0,0%	16,7%
4	66,7%	0,0%	16,7%	16,7%
5	100,0%	0,0%	0,0%	0,0%
6	66,7%	0,0%	16,7%	16,7%
7	83,3%	0,0%	0,0%	16,7%
8	66,7%	16,7%	0,0%	16,7%
9	50,0%	0,0%	0,0%	50,0%
10	16,7%	0,0%	0,0%	83,3%
11	83,3%	0,0%	0,0%	16,7%
12	83,3%	0,0%	0,0%	16,7%
13	33,3%	0,0%	16,7%	50,0%
14	66,7%	0,0%	16,7%	16,7%
Total	67,9%	3,6%	4,8%	23,8%

Como se puede ver en el gráfico siguiente (Figura 13) en el 67,9% de los casos los alumnos no realizan ninguna comprobación de los resultados. Son resultados que pueden causar sorpresa pero que ya se han puesto de manifiesto en otras investigaciones (Hidalgo et al., 2013), ya que a medida que los alumnos son mayores ignoran este aspecto.

Figura 13: Comprueba el resultado



5.2.2.7. Verifica los resultados con el enunciado del problema

Esta fase es de una gran importancia, pero como en la fase anterior los alumnos no le prestan la atención que deben, aunque los profesores les hagamos ver continuamente que soluciones que ellos dan por conformes pueden ser erróneas, aún siendo fácil detectar los errores cuando se contrastan esos resultados con el contexto del problema.

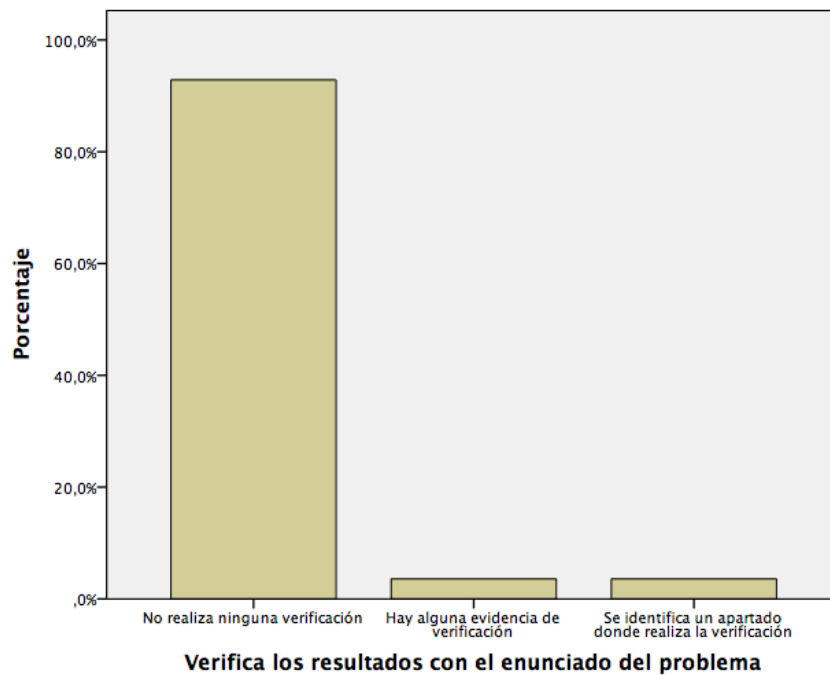
Lo que hemos dicho en el párrafo anterior se verifica totalmente con los resultados obtenidos en los grupos, pues como se puede comprobar en la tabla (Tabla 19) y en el diagrama de barras (Figura 14) que lo normal es que no se realice ninguna verificación después de resolver el problema. Únicamente tres grupos de los catorce llegan a indicar un apartado en el que realiza la verificación.

Una observación que hacen algunos alumnos es que realizan una lectura del enunciado sustituyendo los datos, y que esa es la verificación que suelen hacer. Podemos considerarlo un argumento válido ya que es un método que también suelen realizar los profesores. Pero debemos insistir en la necesidad de desarrollar un trabajo más sistemático y riguroso, pues en problemas escolares sencillos puede ser suficiente, pero en un trabajo de resolución de problemas menos rutinarios o más reales son fases que hay que hacer explícitas.

Tabla 19: Resultados de verifica los resultados

Verifica los resultados con el enunciado del problema			
Grupo	No realiza ninguna verificación	Hay alguna evidencia de verificación	Se identifica un apartado donde realiza la verificación
1	100,0%	0,0%	0,0%
2	100,0%	0,0%	0,0%
3	100,0%	0,0%	0,0%
4	100,0%	0,0%	0,0%
5	83,3%	16,7%	0,0%
6	83,3%	16,7%	0,0%
7	83,3%	0,0%	16,7%
8	83,3%	16,7%	0,0%
9	100,0%	0,0%	0,0%
10	83,3%	0,0%	16,7%
11	83,3%	0,0%	16,7%
12	100,0%	0,0%	0,0%
13	100,0%	0,0%	0,0%
14	100,0%	0,0%	0,0%
Total	92,9%	3,6%	3,6%

Figura 14: Verifica los resultados



5.2.3. Correlaciones entre las fases

En esta apartado estudiamos si existe correlación entre las fases de resolución de problemas y para ello hemos calculado los coeficientes de correlación de Spearmann que hemos encontrado entre las fases que les propusimos a los alumnos en los guiones para resolver los problemas. Además en el caso de encontrar correlación, estudiamos si ésta se considera estadísticamente significativa.

A un nivel de significación del 0,01, la correlación ha sido alta en los siguientes casos y sus distintas fases:

- a. Correlación entre la identificación de las fases y
 - i. Comprensión del problema. $r = 0,55$
 - ii. Ejecución de algún plan. $r = 0,55$
 - iii. Aplicación de otros procedimientos. $r = 0,54$
 - iv. Alcanzar la solución del problema. $r = 0,47$
 - v. Comprobación de los resultados. $r = 0,49$

- vi. Pero, como era de esperar, en el caso de la verificación de los problemas la correlación es baja ($r = 0,26$) para $\alpha = 0,01$ pero si es significativa si $\alpha = 0,05$ pues en tal caso es $p - valor = 0,017$

b. Correlación entre la comprensión del problema y

- i. Ejecución de un plan $r = 0,99$ y $p - valor = 0$
- ii. Aplicación de distintos procedimientos $r = 0,82$ con $p - valor = 0$
- iii. Resolución de problemas $r = 0,95$
- iv. Comprobación del resultado $r = 0,40$ (baja)
- v. Pero no hay apenas correlación en el caso de la verificación de los resultados, pues $r = 0,097$

c. Correlación entre la ejecución de un plan y

- i. Aplicación de diferentes procedimientos $r = 0,82$
- ii. Resolución de los problemas $r = 0,95$
- iii. Comprobación de los resultados $r = 0,40$ (baja)

No existe apenas correlación entre la ejecución de un plan y la verificación de los resultados.

d. Correlación entre la capacidad de aplicación de los diferentes procedimientos y

- i. Resolución de los problemas $r = 0,83$
- ii. Comprobación de los resultados $r = 0,29$ (baja)

Que el alumno identifique las distintas fases presenta una correlación media con el resto de las categorías estudiadas y entendemos que favorece la solución del problema, aunque no tanto la verificación del mismo con el contexto. Además, como hemos podido ver por los resultados presentados comprender el problema presenta una correlación alta o muy alta

con el resto, salvo con la comprobación y verificación. Tener un plan y ejecutarlo tiene una correlación alta o muy alta con la aplicación de diferentes procedimientos y resolver el problema.

5.2.4. Resultados de cada grupo en las categorías

En la siguiente tabla mostramos, en porcentaje, los resultados de cada grupo en cada una de las categorías evaluadas con la rúbrica. Cada uno de los valores indica el porcentaje de éxito, es decir, la puntuación obtenida respecto a la puntuación máxima que se podía haber obtenido en cada categoría.

Tabla 20: Resultados de cada grupo en las distintas categorías

Grupo	Identifica las fases propuestas en clase	Ha comprendido el problema	Ha ejecutado algún plan	Aplica diferentes procedimientos	Resuelve el problema	Comprueba el resultado	Verifica los resultados
1	42,86	76,19	76,19	66,67	71,43	19,05	,00
2	19,05	66,67	61,90	47,62	57,14	4,76	,00
3	23,81	42,86	52,38	38,10	38,10	14,29	,00
4	19,05	66,67	71,43	57,14	57,14	23,81	,00
5	19,05	61,90	57,14	47,62	57,14	,00	4,76
6	33,33	61,90	66,67	57,14	61,90	23,81	4,76
7	28,57	71,43	76,19	61,90	71,43	14,29	14,29
8	38,10	71,43	76,19	57,14	61,90	19,05	4,76
9	38,10	66,67	61,90	57,14	57,14	42,86	,00
10	66,67	85,71	85,71	66,67	71,43	71,43	14,29
11	19,05	57,14	61,90	52,38	57,14	14,29	14,29
12	28,57	80,95	76,19	61,90	71,43	14,29	,00
13	42,86	71,43	71,43	66,67	71,43	52,38	,00

14	28,57	66,67	66,67	42,86	57,14	23,81	,00
----	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-----

Estos resultados nos permiten analizar las dificultades que tiene cada uno de los grupos en las distintas fases que hemos propuesto para resolver los problemas. Identificar estas dificultades nos permite reorientar el aprendizaje de los alumnos, y lo más importante nos indica los aspectos que debemos trabajar en clase con mayor intensidad.

A continuación presentamos los totales de cada grupo en el conjunto de las categorías, indicando además el porcentaje de los puntos obtenidos respecto al máximo posible.

Tabla 21: Calificación total de cada grupo

Grupo	Total	%
1	74	58,73
2	35	27,78
3	29	23,02
4	48	38,10
5	38	30,16
6	52	41,27
7	56	44,44
8	59	46,83
9	64	50,79
10	97	76,98
11	58	46,03
12	73	57,94
13	79	62,70

14

60

47,62

Si consideramos unos resultados aceptables por encima del 50% vemos que los grupos 1, 9, 10, 12 y 13, es decir solamente 5 grupos de los 14 totales han obtenido unos resultados aceptables. El grupo 10 es el que ha obtenido mejores resultados (76,98%) y el grupo 3 (23,02%) los peores.

5.2.5. Resultados de los problemas

Para evaluar los problemas hemos utilizado la rúbrica que se puede ver en el anexo III y que hemos descrito en el apartado de metodología. Nos queda recordar aquí que se han evaluado 7 categorías con una escala de 0, 1, 2 y 3 puntos dependiendo del grado alcanzado en cada una de las categorías, por lo que la puntuación máxima de cada problema es de 21 puntos.

Tabla 22: Resultados de los estadísticos de los problemas

Problema	1	2	3	4	5	6
Coef. ID	0,79	0,86	1	0,93	0,36	0,29
Dificultad	Muy fácil	Muy fácil	Muy fácil	Muy fácil	Difícil	Difícil
Media	11,29	12,86	14	6,86	5,93	7,79
Desviación	4,05	4,38	1,88	7,37	7,84	5,16
I.C. media	(8'95; 13'62)	(10'33; 15'39)	(12'91; 15'09)	(2'60; 11'11)	(1'40; 10'45)	(4'81; 10'77)
Mediana	12	14	13	2,50	1	6
Mínimo	5	2	12	0	0	1
Máximo	17	18	17	15	20	17

Coef. ID es el índice de dificultad $ID = \frac{A}{n}$

Desviación es la desviación típica

I.C. media es el intervalo de confianza de la media

Mínimo (Máximo) es el valor mínimo (máximo) de cada problema

5.2.6. Procedimientos utilizados en los problemas

En los problemas propuestos a los alumnos se les solicitaba un número determinado de procedimientos para resolverlos. Estos procedimientos eran de tipo aritmético o de tipo algebraico. En caso de aplicar un procedimiento algebraico podían plantear una ecuación de primer grado y/o un sistema de ecuaciones.

En la tabla siguiente (Tabla 23) presentamos el tipo de procedimiento realizado por los alumnos en cada problema.

Tabla 23: Procedimientos realizados por los alumnos

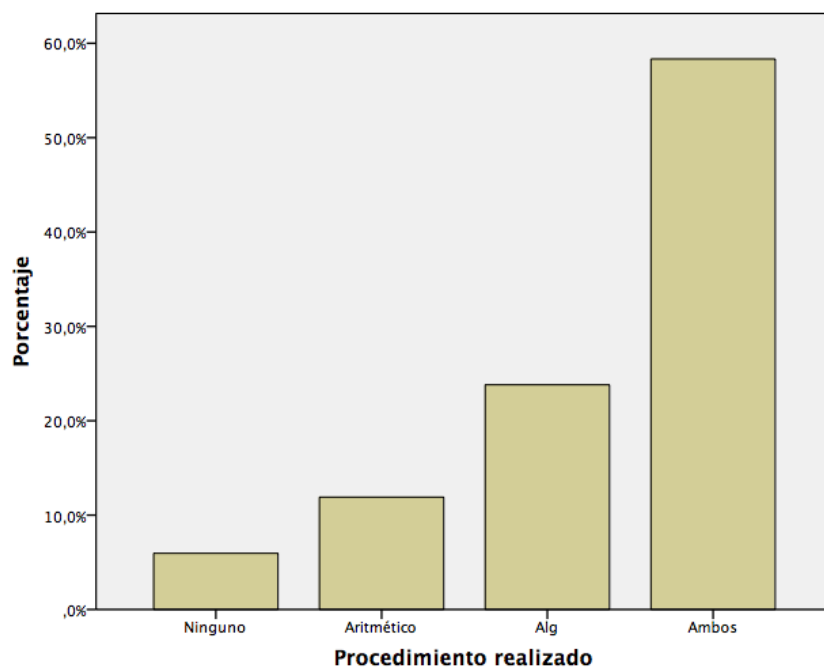
Problema	Procedimiento realizado			
	Ninguno	Aritmético	Algebraico	Ambos
1	0	0	4	10
	0,0%	0,0%	28,6%	71,4%
2	0	1	1	12
	0,0%	7,1%	7,1%	85,7%
3	0	0	2	12
	0,0%	0,0%	14,3%	85,7%
4	0	0	8	6
	0,0%	0,0%	57,1%	42,9%
5	5	5	2	2
	35,7%	35,7%	14,3%	14,3%
6	0	4	3	7
	0,0%	28,6%	21,4%	50,0%
Total	5	10	20	49
	6,0%	11,9%	23,8%	58,3%

NOTA: Aritmético o algebraico hace referencia al uso exclusivo de uno u otro.

En los problemas 1 (71,4%), 2 (85,7%) y 3 (85,7%) los alumnos realizaron en un mayor número los procedimientos solicitados, siendo el mínimo en el problema 5 (14,3%). Estos resultados nos permiten caracterizar los problemas según el tipo de procedimiento que los alumnos realizan con más facilidad.

Como se puede ver en la figura (Figura 15) la utilización de ambos procedimientos, es decir, aritmético y algebraico es la que se da en un mayor porcentaje (58,3%). En cambio, la utilización de únicamente un procedimiento aritmético ocurre en un 11,9%, y solo uno algebraico un 23,8%.

Figura 15: Procedimientos realizados



5.3. Las representaciones que utilizan

A continuación vamos a recoger los resultados que hemos encontrado en el cuestionario C4 en el cual le pedíamos a los alumnos que realizaran algún tipo de representación del enunciado del problema.

5.3.1. Cuestionario C4

A continuación encontrarás cinco problemas y queremos que intentes hacer alguna representación del problema que te facilite comprenderlo, puedes utilizar un esquema, un dibujo, una tabla, etc. Es importante que tengas en cuenta que no te pedimos que expliques

cómo lo harías, ni cuál es la respuesta. Para ayudarte a entenderlo te presentamos un ejemplo.

Ejemplo: Marta tiene en su habitación una estantería en la que se pueden colocar 100 libros. La ha llenado con 18 libros de viajes, 44 libros de lectura y 26 libros escolares. También ha colocado una enciclopedia con muchos tomos. ¿Cuántos tomos tiene la enciclopedia?

Respuesta: La representación podría ser algo parecido a la siguiente:



Esta representación te permite ver que queda un hueco en la estantería que puede ser ocupado por tomos de la biblioteca.

1. El responsable de un concesionario de coches anota el color de los mismos cuando los traen y los divide en tres clases distintas en función del color. Esta información es muy importante para estacionarlos en tres zonas distintas de un aparcamiento. Ayer había aparcados 10 coches blancos, el mismo número de negros, cinco rojos y el mismo número de color amarillo. Los días quince de cada mes le hacen una entrega en función de tres gamas distintas, gama media, alta o baja. Hoy han traído 30 coches de color blanco, 10 de color negro y 20 de otros colores. ¿Qué fracción de coches de cada clase tenemos?
2. Un camionero transporta su mercancía desde una ciudad A hasta otra B separadas 3.500 km. Le han dado una semana para hacer el trabajo; el lunes sale de la ciudad A y conduce mañana y tarde, el martes sólo conduce durante la mañana, el miércoles sólo lo hace por la tarde, el jueves mañana y tarde, el viernes descansa, por último el sábado llega a la ciudad B. Suponiendo que hace el mismo número de kilómetros en cada etapa, ¿cuántos kilómetros recorre en cada una?

3. Un convoy está formado por una locomotora que arrastra tres vagones, V1, V2 y V3. La longitud de V1 es $\frac{1}{3}$ de la longitud de V2 y la longitud de V3 es $\frac{3}{4}$ de la longitud de V2. La locomotora tiene una longitud igual a $\frac{2}{3}$ la longitud de V2. Si la longitud del V2 es de 21 metros. ¿Cuánto mide el convoy?
4. En una zona ha habido una fuerte tormenta de granizo y han sido dañadas 7 manzanas de las 15 que había en un árbol, y en otro árbol se han estropeado 4 de las nueve que tenía. ¿Qué árbol ha salido más perjudicado?
5. A la semana gasto $\frac{1}{5}$ de lo que me dan mis padres en transporte, $\frac{2}{3}$ en golosinas y el resto en el cine que cuesta 5 euros. ¿Cuál es la cantidad total que me dan mis padres?

5.3.2. Resultados del cuestionario C4

Este cuestionario ha sido realizado por 69 alumnos que forman parte de dos secciones.

Recordamos la rúbrica utilizada para evaluar los problemas del cuestionario. Pretendíamos valorar la calidad de la representación utilizada, es decir, si dicha representación permite favorecer la comprensión del enunciado. Los descriptores utilizados fueron:

- No realiza ninguna representación o la realizada es simplemente decorativa (0 puntos).
- Indica los datos que aparecen en el enunciado en la representación aunque comete errores, o faltan datos (1 punto).
- Indica los datos correctamente en la representación (2 puntos).
- La representación que realiza demuestra la comprensión del problema (3 puntos).

La tabla siguiente (Tabla 24) recoge los resultados de cada uno de los cinco problemas del cuestionario después de aplicar la rúbrica anterior.

Tabla 24: Resultados de los problemas del cuestionario C4

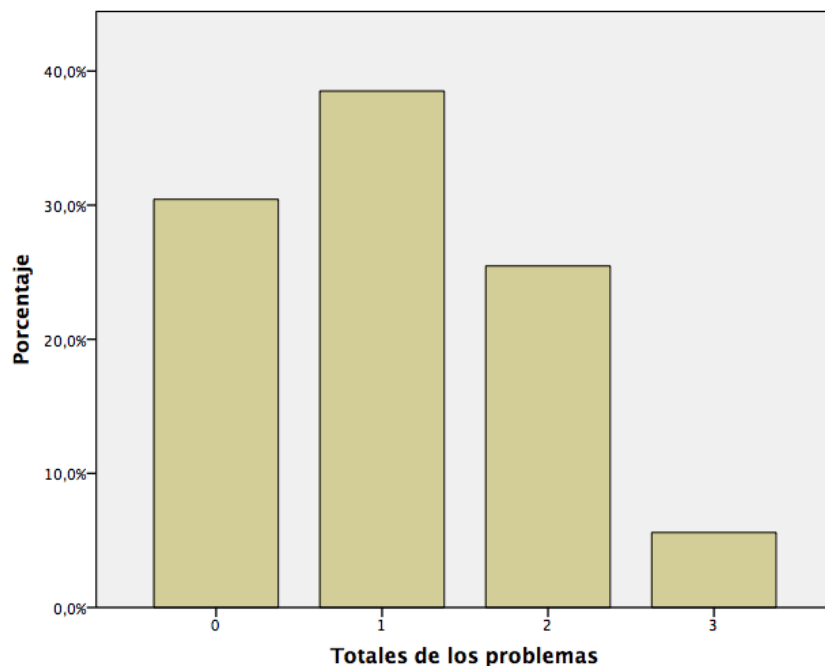
		Recuento	Porcentaje
Problema 1	0	26	37,7%
	1	26	37,7%
	2	12	17,4%
	3	5	7,2%
Problema 2	0	12	17,4%
	1	49	71,0%
	2	6	8,7%
	3	2	2,9%
Problema 3	0	19	27,5%
	1	32	46,4%
	2	17	24,6%
	3	1	1,4%
Problema 4	0	14	20,3%
	1	36	52,2%
	2	17	24,6%
	3	2	2,9%
Problema 5	0	33	47,8%
	1	25	36,2%
	2	11	15,9%

Si tenemos en cuenta que valoraciones de 2 y 3 son las que indican que el alumno ha comprendido o se encuentra en vía de comprender el problemas encontramos que, en el

problema 1 tenemos un 24,6% de los casos, en el problema 2 un 11,6%, el problema 3 un 26,1%, el problema 4 un 47,8% y por último, el problema 5 un 15,9%. Con estos datos podemos decir que en el problema donde han tenido más dificultad para realizar una representación adecuada ha sido el problema 2, seguido del 5, posteriormente el problema 1 y 3, hasta llegar al problema 4 donde han tenido una menor dificultad.

Por otro lado, tenemos que en el 30,1% de los casos los alumnos no realizan ninguna representación o la realizada es simplemente decorativa. Un 48,7% realiza una representación incompleta o incorrecta. Un 18,3% realiza una representación donde los datos aparecen de forma correcta. Un 2,9%, es decir, en 10 problemas aparece una representación adecuada con datos e incógnitas que demuestra que el alumno ha comprendido el problema. En el gráfico siguiente (Figura 16) podemos observar estos resultados.

Figura 16: Totales de los problemas cuestionario C4



Respecto a las representaciones que han utilizado los alumnos las podemos resumir en tres tipos distintos:

- Representación icónica, que son dibujos esquemáticos que representan la situación planteada en el contexto y donde indican los datos.

- Representación simbólica, que son esquemas simples sobre los que indican los datos.
- Recoger los datos en forma de tabla.

En la tabla siguiente (Tabla 25) mostramos los tres tipos de representaciones indicadas anteriormente en cada uno de los problemas, la frecuencia y el porcentaje de cada una de ellas.

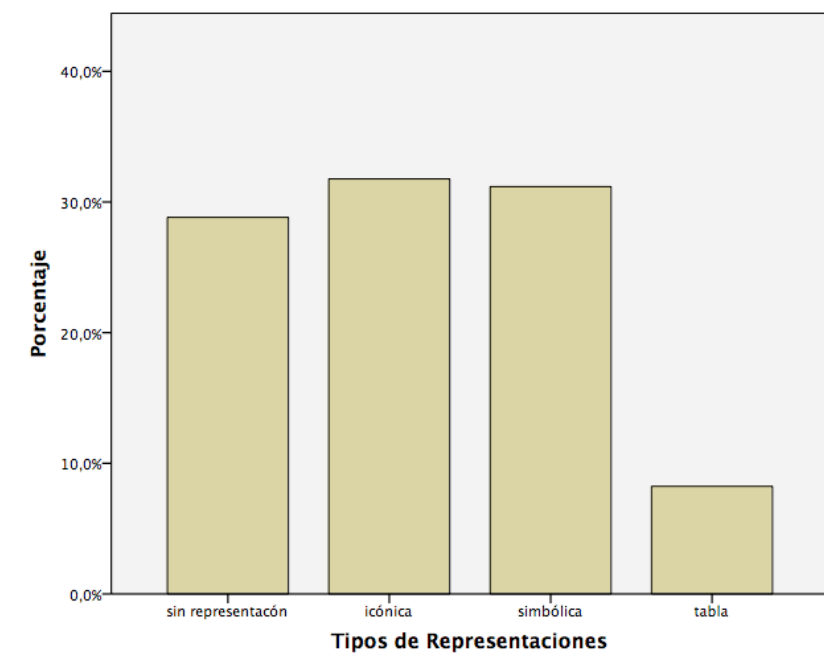
Tabla 25: Tipo de representación en cada problema del cuestionario C4

		Frecuencia	Porcentaje
P1	sin representación	26	37,7%
	icónica	16	23,2%
	simbólica	19	27,5%
	tabla	8	11,6%
P2	sin representación	12	17,4%
	icónica	9	13,0%
	simbólica	44	63,8%
	tabla	4	5,8%
P3	sin representación	19	27,5%
	icónica	25	36,2%
	simbólica	22	31,9%
	tabla	3	4,3%
P4	sin representación	14	20,3%
	icónica	46	66,7%
	simbólica	8	11,6%
	tabla	1	1,4%

P5	sin representación	33	47,8%
	icónica	14	20,3%
	simbólica	15	21,7%
	tabla	7	10,1%

En la siguiente figura (Figura 17) encontramos el tipo de representaciones que los alumnos han utilizado en el total de los problemas. Como podemos ver recoger los datos en una tabla es el tipo de representación menos utilizada con un 8,2%. En un 28,8% no realizan ninguna representación válida. Por último, las representaciones icónicas y simbólicas presentan un valor muy cercano, 31,8% y 31,2%, respectivamente.

Figura 17: Tipos de representaciones utilizadas por los alumnos



5.3.3. Cuestionario C5

A continuación encontrarás cuatro problemas y queremos que hagas alguna representación que te ayude a comprenderlo y que elabores un plan por escrito para resolverlo. Es importante que tengas en cuenta que no te pedimos que lo resuelvas.

1. Tenemos dos marcas, A y B, de zumo de manzana. En el envase de la marca A indica en su etiqueta que, de cada 16 partes de zumo, 10 partes son de manzana, y en el de la marca B, de 25 partes de zumo hay 16 partes de manzana. Sin realizar la división, ¿cuál tiene mayor contenido de fruta?
2. Tres amigos han comprado un número de la lotería que les costó 30 euros, y cada uno ha puesto una cantidad diferente de dinero. Ahora el número ha salido premiado con 120 euros y se lo deben repartir en función del dinero que pusieron para comprarlo. Un amigo se lleva $\frac{7}{15}$ del total, otro $\frac{5}{12}$ del total y el último, el resto del premio. ¿Cuánto dinero se ha llevado cada uno?, ¿cuánto dinero puso cada uno para comprar el número?
3. Antonio corrió los $\frac{7}{9}$ del trayecto de una prueba deportiva. Si aún le faltan 18 kilómetros, ¿cuántos kilómetros tiene la carrera?
4. Con los $\frac{2}{5}$ de los ingresos de un club deportivo se emplea en pagar alquileres, $\frac{1}{8}$ se emplea en renovar el material deportivo, $\frac{1}{12}$ en las cuotas de la federación, $\frac{1}{4}$ en mantenimiento del edificio y el resto se emplea en limpieza. ¿Qué fracción de los ingresos se emplea en limpieza?

5.3.4. Resultados cuestionario C5

Este cuestionario fue realizado por 66 alumnos que habían realizado el cuestionario C4 y con los que posteriormente habíamos trabajado diferentes tipos de representaciones.

Utilizamos la misma rúbrica que en C4 para evaluar los problemas de este cuestionario. Pretendíamos valorar la calidad de la representación utilizada, es decir, si dicha representación permite favorecer la comprensión del enunciado. Los descriptores utilizados fueron:

- No realiza ninguna representación o es simplemente decorativa (0 puntos).

- Indica los datos que aparecen en el enunciado en la representación aunque comete errores (1 punto).
- Indica los datos correctamente en la representación (2 puntos).
- La representación que realiza demuestra la comprensión del problema (3 puntos).

La tabla siguiente (Tabla 26) recoge los resultados de los cuatro problemas del cuestionario.

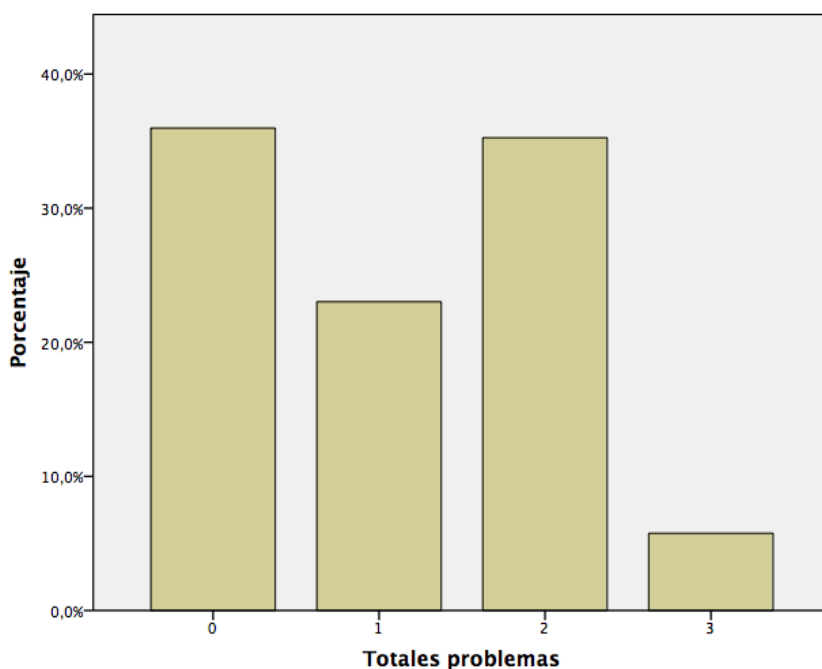
Tabla 26: Resultados cuestionario C5

		Frecuencia	Porcentaje
Problema 1	0	19	28,8%
	1	7	10,6%
	2	39	59,1%
	3	1	1,5%
Problema 2	0	33	50,0%
	1	15	22,7%
	2	14	21,2%
	3	4	6,1%
Problema 3	0	30	45,5%
	1	12	18,2%
	2	19	28,8%
	3	5	7,6%
Problema 4	0	38	57,6%
	1	11	16,7%
	2	17	25,8%

Consideramos que los valores de la rúbrica que corresponden a 2 y 3 puntos son resultados que entendemos que indican una representación adecuada que facilitará la comprensión del problemas. El problema 1 ha obtenido 60,6%, el problema 2 un 27,3%, el problema 3 un 36,4%, y por último, el problema 4 un 42,5%.

Como podemos ver en el gráfico siguiente (Figura 18), en un 35,97% de los casos, los alumnos no realizan ninguna representación o esta es simplemente decorativa, el 23,02% indica los datos que aparecen en el enunciado en la representación aunque comete errores, el 35,25% indica los datos correctamente en la representación y el 5,76% realiza una representación que demuestra la comprensión del problema.

Figura 18: Totales de los problemas cuestionario C5



Al igual que en el cuestionario anterior, las representaciones que han utilizado los alumnos son de los tres tipos siguientes:

- Representación icónica, que son dibujos esquemáticos que representan la situación planteada en el contexto y donde indican los datos.
- Representación simbólica, que son esquemas simples sobre los que indican los datos.

- Recoger los datos en forma de tabla.

La siguiente tabla (Tabla 27) muestra el tipo de representaciones que realizaron en el cuestionario.

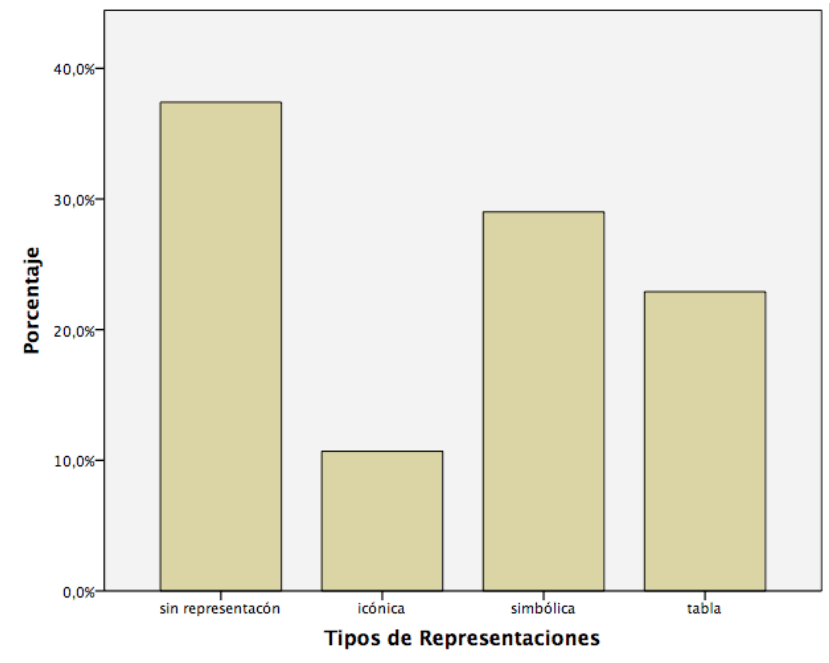
Tabla 27: Tipo de representaciones en cada problema del cuestionario C5

		Frecuencia	Porcentaje
P1	sin representación	18	27,3%
	icónica	9	13,6%
	simbólica	20	30,3%
	tabla	19	28,8%
P2	sin representación	32	48,5%
	icónica	5	7,6%
	simbólica	10	15,2%
	tabla	19	28,8%
P3	sin representación	31	47,0%
	icónica	2	3,0%
	simbólica	26	39,4%
	tabla	7	10,6%
P4	sin representación	38	57,6%
	icónica	1	1,5%
	simbólica	11	16,7%
	tabla	16	24,2%

En la siguiente figura (Figura 19) encontramos el tipo de representaciones que los alumnos han utilizado en el total de los problemas. Como podemos ver recoger, los datos en una

tabla es un 22,9%. En un 37,4% no realizan ninguna representación válida. Por último, las representaciones icónicas un 10,69% y las simbólicas un 29,01%.

Figura 19: Tipos de representaciones del cuestionario C5



5.3.5. Comparación entre ambos cuestionarios

En la tabla siguiente (Tabla 28) indicamos los porcentajes obtenidos en cada uno de los dos cuestionarios de cada una de las valoraciones de la rúbrica. Como dijimos anteriormente, la valoración de 2 y 3 puntos son las que consideramos positivas, y como podemos ver han subido bastante en el segundo cuestionario, después de trabajar con los alumnos las representaciones en clase.

Tabla 28: Comparación de los cuestionarios C4 y C5

	C4	C5
	(%)	(%)
0	30,1	35,97
1	48,7	23,02

2	18,3	35,25
3	2,9	5,76

En la tabla siguiente (Tabla 29) podemos ver como han variado el tipo de representaciones que los alumnos han utilizado de un cuestionario a otro.

Tabla 29: Tipos de representación entre C4 y C5

	C4	C5
	(%)	(%)
Sin representación	28,8	37,4
Icónica	31,8	10,69
Simbólica	31,2	29,01
Tabla	8,2	22,9

Como podemos ver la elaboración de tablas donde recoger los datos ha aumentado su utilización respecto al cuestionario anterior.

5.4. La elaboración de un plan

En el cuestionario C5 también quisimos evaluar la capacidad de los alumnos para elaborar un plan ya que es un aspecto que hemos resaltado bastante durante la resolución de problemas en clase.

Recordemos que utilizamos una rúbrica para evaluar los problemas del cuestionario. Pretendíamos valorar si el plan que elaboraron permitiría resolver el problema. Los descriptores utilizados fueron:

- No propone ningún plan (0 puntos).
- Propone algún plan pero no le llevará a la solución del problema (1 punto).

- El plan propuesto es correcto pero incompleto (2 puntos).
- El plan propuesto es el adecuado para la resolución del problema (3 puntos).

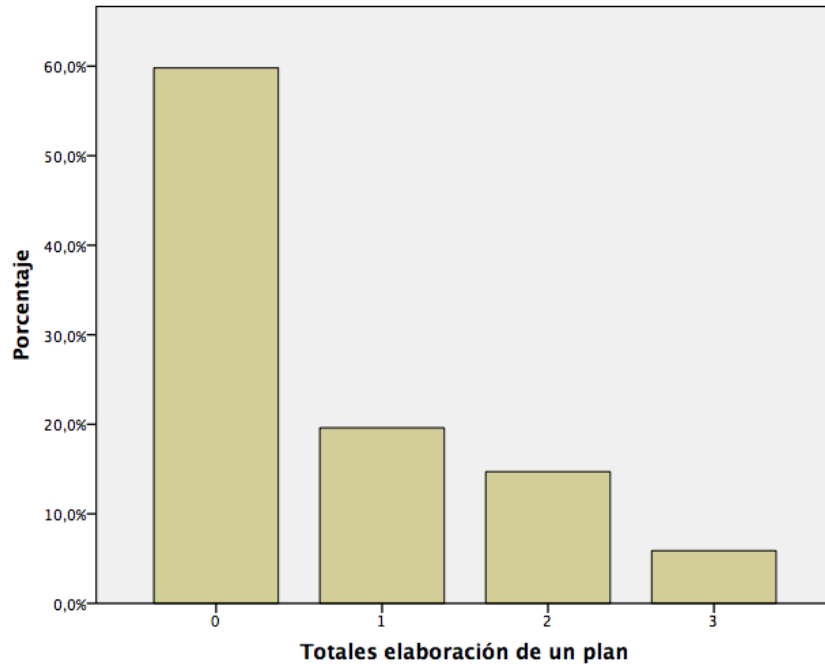
La tabla siguiente (Tabla 30) recoge los resultados de los cuatro problemas del cuestionario respecto a la elaboración de un plan.

Tabla 30: Resultados de los problemas sobre la elaboración de un plan.

		Recuento	Porcentaje
P1	0	54	81,8%
	1	6	9,1%
	2	4	6,1%
	3	2	3,0%
P2	0	47	71,2%
	1	9	13,6%
	2	8	12,1%
	3	2	3,0%
P3	0	51	77,3%
	1	12	18,2%
	2	2	3,0%
	3	1	1,5%
P4	0	50	75,8%
	1	4	6,1%
	2	6	9,1%
	3	6	9,1%

Como podemos observar en el gráfico siguiente (Figura 20), en un 76,5% de los casos no se propone ningún plan, un 11,7% se propone algún plan pero no le llevará a la solución del problema, un 7,6% el plan propuesto es correcto pero incompleto, y por último, sólo un 4,2% se propone un plan que es adecuado para la resolución del problema.

Figura 20: Totales de elaboración de un plan



5.5. Resultados sobre la comprensión

En este apartado hemos resumido los resultados que hemos obtenido respecto a la comprensión de los enunciados, principalmente queremos observar si ha habido una evolución.

En el caso de la primera valoración que hicimos con el cuestionario C1, en el 27,8% de los casos los alumnos comprendieron el problema. En el caso del cuestionario C2, aumenta a un 36,1%. En el cuestionario C3, en el que los alumnos utilizaron el guion, los resultados llegaron al 44,1%. En el caso del cuadernillo, aunque los resultados fueron en grupo de tres alumnos, en el 71,4% de los casos los alumnos han comprendido el problema para poder continuar con su resolución. Como vemos, el aumento entre los resultados de la comprensión de los enunciados entre los alumnos de la muestra del curso 2013-14 y los alumnos de la muestra del 2015-2016 son considerables, además, estas diferencias son estadísticamente significativas (prueba de U de Mann-Whitney para muestras

independientes, $p\text{-valor} = 0,0$). Hay que tener en cuenta que este último grupo de alumnos estuvieron durante los dos primeros trimestres del curso trabajando toda la propuesta desarrollada el curso anterior, la división en fases, usando los guiones durante la resolución de problemas en clase, la propuesta de contenidos través de problemas, además del ambiente de resolución de problemas que se intentó crear en el aula. En el segundo trimestre del curso 2016-2017 se le propusieron a 95 alumnos tres problemas y hemos encontrado que un 48,8% de los casos se ha comprendido el problema para poder continuar con su resolución.

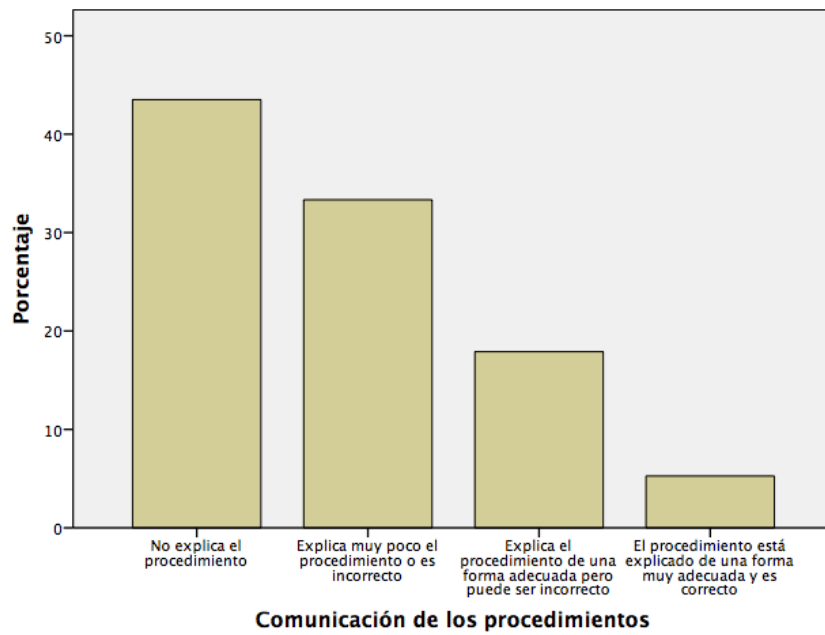
5.6. La comunicación de los procedimientos

Para analizar la explicación de los procedimientos que han realizado hemos utilizado la siguiente rúbrica:

- No explica el procedimiento (0 puntos).
- Explica muy poco el procedimiento o es incorrecto (1 punto).
- Explica el procedimiento de una forma adecuada pero puede ser incorrecto (2 puntos).
- El procedimiento está explicado de una forma muy adecuada y es correcto (3 puntos).

Los resultados son que en el 43,5% de los casos los alumnos no explican el procedimiento que han realizado, el 33,3% se explica muy poco el procedimiento o este es incorrecto, el 17,9% explica el procedimiento de una forma adecuada pero puede ser incorrecto, por último, el 5,3% explica el procedimiento de una forma muy adecuada y es correcto. Valoramos que los resultados entre 2 y 3 puntos como comunicaciones útiles, tenemos que en un 23,2% de los casos nos encontramos ante esta situación. Esta es una tarea pendiente que los alumnos deben aprender, y creemos que afecta bastante a la capacidad de los alumnos para resolver los problemas. En el siguiente gráfico (Figura 21) se pueden observar estos resultados.

Figura 21: Comunicación de los procedimientos



Capítulo 6. La resolución de problemas en libros de texto

En esta apartado hemos querido realizar una revisión de dos libros de texto escolares propuestos por dos editoriales para desarrollar el currículo en las aulas. Especialmente nos interesa comprobar el desarrollo de la resolución de problemas como objeto de aprendizaje que realizan los libros, tal y como hemos deducido que se interpreta su presencia en el currículo junto con la ejercitación de contenidos.

El motivo principal de este análisis es porque, en general, el libro de texto es el principal material didáctico que utilizan los profesores en el aula. Ceballos y Blanco (2008) indican que:

los contenidos curriculares se expresan en los textos o manuales escolares que se utilizan en las aulas de clase como un recurso muy importante (a veces el único) para la implementación del currículo. De esta manera, los libros de texto se constituyen en una herramienta de primer orden para el profesorado. (p.64)

Respecto a los libros de texto entendemos que teniendo en cuenta la madurez de los alumnos con los que trabajamos, la presencia de un libro es muy importante por diferentes motivos. Entre otros, el libro de texto debe ayudar al profesor a llevar el currículo establecido en la normativa al aula, permitir el autoaprendizaje, y servir de apoyo a las familias. No es necesario que sea de una editorial, ya que pueden ser materiales preparados por grupos de profesores o de elaboración propia, pero en todo caso, el material que sustituya al libro de texto de una editorial debe ser de tal calidad que cubra los aspectos necesarios del proceso de enseñanza y aprendizaje, y no simplemente un complemento en el aula.

Autores como Skovsmose (2000) relacionan la utilización de los libros de texto con la educación matemática tradicional especialmente centrada en la utilización de ejercicios como vía del aprendizaje de las matemáticas. Este aspecto es reconocido en los libros de texto tradicionales o bien en el uso que hacen del mismo los profesores en el aula. Pero en

la actualidad, al libro de texto se le exige algo más que una simple colección de ejercicios. Muchas editoriales han incluido un soporte digital o el apoyo de materiales vía web, no dudamos de su utilidad, pero respecto al libro físico o digital creemos que en muchos casos han sufrido algunos retoques que se nos antojan insuficientes.

Un aspecto muy importante respecto a los problemas contextualizados en los libros de texto es que “a pesar de su aparentemente estrecha relación con los acontecimientos de la vida diaria, los escenarios matemáticos resultantes son a menudo poco realistas. La situación no es más que un telón de fondo para las matemáticas” (Swetz, 2013, p.19). Y algunas veces, la redacción del enunciado centrada en la situación matemática empobrece el contexto y dificulta su comprensión por parte del alumno.

La planificación de la enseñanza por parte de los profesores implica un análisis de los libros de texto (Fernández, 2011), es decir, tener en cuenta qué es aquello que queremos enseñar y ver el papel que juega el libro de texto en nuestra propuesta didáctica, y sobre el papel asignado, comprobar que el libro lo puede asumir.

En nuestro país se han realizado varios estudios que demuestran que las propuestas de métodos de resolución de problemas que aparecen en los libros de texto más utilizados no desarrollan en los alumnos el razonamiento, principalmente porque los problemas propuestos son fáciles y se pueden resolver de manera superficial (Sánchez y Vicente, 2015), son problemas en los que los alumnos intentan memorizar los pasos dados ya que el mismo libro fomenta esta actividad en la resolución, enumerando los pasos que se deben dar.

Es importante tener en cuenta que como en todo el trabajo que hemos desarrollado analizamos lo que hemos considerado problema y no los ejercicios.

Como el análisis no es general, sino que lo hemos centrado en aspectos más específicos como son los relacionados con la resolución de problemas, nos hemos formulado las siguientes preguntas que entendemos que nos ayudan a centrar el análisis:

- ¿Se enseñan estrategias de resolución de problemas? En caso afirmativo, ¿qué tipo de estrategias se enseñan?

- ¿Se enseñan contenidos vía resolución de problemas?
- ¿En los problemas resueltos se muestran estrategias?
- ¿Qué lugar ocupan los problemas en las unidades?
- ¿Aparece algún tipo de estímulo en los problemas propuestos? En caso afirmativo, ¿de qué tipo de estímulo se trata? Queremos valorar si los estímulos que se utilizan en los problemas facilitan la comprensión del mismo, es decir, si son necesarios para su resolución, o si juegan un papel simplemente motivador.

Para realizar el análisis de las actividades hemos estudiado los siguientes indicadores:

- Porcentaje de problemas que aparecen en cada unidad respecto al total de las actividades propuestas (P/A), es decir, ejercicios y problemas. Queremos valorar la presencia de los problemas dentro del conjunto de las actividades que se proponen en las unidades.
- Porcentaje de problemas resueltos respecto a las actividades que aparecen resueltas en cada una de las unidades (PR/AR). Los problemas resueltos son una oportunidad de mostrar las estrategias a los alumnos.
- Porcentaje de problemas resueltos respecto al total de problemas propuestos (PR/PP).

En los contenidos propuestos en el decreto en el que se establece el currículo (Decreto 83/2016) encontramos, en el área de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, cinco bloques de aprendizaje:

- Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.
- Números y álgebra.
- Geometría.
- Funciones.
- Estadística y probabilidad.

Según el currículo, el bloque de procesos, métodos y actitudes debe desarrollarse de modo transversal y simultáneamente al resto de bloques, y entre otros contenidos, incluye la resolución de problemas. Por lo tanto, debemos analizar si en el desarrollo de los bloques encontramos este tipo de contenidos.

El análisis lo hemos realizado con los siguientes libros de texto de tercero de educación secundaria obligatoria propuestos para la LOMCE:

- Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de la editorial SM.
- Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de la editorial Santillana.

6.1. Resultados de los libros revisados

6.1.1. Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de la editorial SM

Los contenidos en este libro aparecen estructurados en cuatro bloques:

- Números y álgebra.
- Geometría.
- Funciones.
- Estadística y probabilidad.

En el bloque de números y álgebra encontramos cinco unidades, conjuntos numéricos; potencias y raíces; polinomios; división de polinomios; ecuaciones y sistemas; y proporcionalidad. En el bloque de geometría encontramos tres unidades, figuras planas; movimientos en el plano; y cuerpos geométricos. En el bloque de funciones, tres unidades, sucesiones; funciones; y funciones lineales y cuadráticas. En el bloque de estadística y probabilidad, dos unidades, una que corresponde a la estadística unidimensional y otra que trata la probabilidad.

La estructura de las unidades del libro son de la siguiente manera:

- Los contenidos aparecen desarrollados durante la unidad y se utilizan ejemplos resueltos después de cada apartado, la mayor parte de los ejemplos son ejercicios que muestran ejemplificación de procedimientos. Después de cada apartado de contenidos se proponen actividades para practicar los contenidos explicados.
- En la parte final de la unidad encontramos unas actividades, tanto ejercicios como problemas, que denominan "actividades clave", estas son actividades que vienen resueltas. Entendemos que hacen referencia a aquellas actividades que los alumnos deben haber aprendido a resolver en la unidad.
- Un apartado final de actividades para practicar los contenidos vistos en la unidad.
- Al final de la unidad aparece un apartado que denomina "ponte a prueba" en éste encontramos normalmente problemas, uno de ellos resuelto. En algunas unidades podemos encontrar algún problema menos rutinario.
- Por último, un apartado que denomina "autoevaluación" con una serie de actividades en las que normalmente aparece algún problema.

A continuación presentamos una tabla (Tabla 31) resumen de los apartados, actividades clave y autoevaluación, con las actividades que encontramos en cada unidad y cuáles de ellas consideramos problemas. Nos hemos centrado en estos dos apartados ya que entendemos que los autores proponen las actividades que el alumno debe aprender en cada unidad.

Tabla 31: Resumen libro ed. SM (Actividades clave y autoevaluación)

UUDD	Título	Actividades clave		Autoevaluación	
		Act.	Prob.	Act.	Prob.
1	Conjuntos numéricos	6	4	9	2
2	Potencias y raíces	12	1	8	0

3	Polinomios	5	3	9	2
4	División de polinomios	15	1	9	0
5	Ecuaciones y sistemas	5	3	9	3
7	Figuras planas	3	0	8	1
8	Movimientos en el plano	2	0	5	0
9	Cuerpos geométricos	3	3	9	1
10	Sucesiones	3	1	9	3
11	Funciones	3	0	5	1
12	Funciones lineales y cuadráticas	6	1	9	2
13	Estadística unidimensional	3	0	5	0
14	Probabilidad	6	5	6	1
Totales		67	22	100	16

Como podemos ver en la tabla el porcentaje de problemas que aparecen en el apartado de actividades clave es el 32,8% y baja al 16% en las propuestas de autoevaluación que aparecen en las distintas unidades.

Los ejemplos que utilizan para explicar los contenidos de cada uno de los apartados teóricos no se han contabilizado dentro de las actividades de cada unidad. Salvo en aquellos casos en los que aparecen problemas y hemos analizado la forma que tiene el autor de resolverlos.

En la siguiente tabla (Tabla 32) presentamos los resultados de los indicadores expresados en porcentajes.

Tabla 32: Resumen de los valores de los indicadores del libro de la Ed. SM

UUDD	Título	P/A	PR/AR	PR/PP
1	Conjuntos numéricos	40,9	41,2	13,0
2	Potencias y raíces	13,2	3,4	6,3
3	Polinomios	34,7	41,2	21,2
4	División de polinomios	5,5	7,7	42,9
5	Ecuaciones y sistemas	49,7	54,5	15,4
7	Figuras planas	11,8	15,4	16,7
8	Movimientos en el plano	6,4	9,1	20,0
9	Cuerpos geométricos	17,9	20,0	13,3
10	Sucesiones	34,0	37,5	9,4
11	Funciones	29,3	25,0	11,8
12	Funciones lineales	22,8	13,3	7,7

	y cuadráticas			
13	Estadística unidimensional	6,3	10,0	20,0
14	Probabilidad	34,1	66,7	26,7

P/A: porcentaje de problemas que aparecen en cada unidad respecto al total de las actividades propuestas.
PR/AR: porcentaje de problemas resueltos respecto a las actividades que aparecen resueltas en cada una de las unidades. PR/PP: Porcentaje de problemas resueltos respecto al total de problemas propuestos.

Como podemos ver en la tabla anterior la mayor presencia de problemas los encontramos en las unidades donde se trabajan las ecuaciones y sistemas; conjuntos numéricos; polinomios; sucesiones; y probabilidad. Tenemos un 24,8 % de problemas respecto al total de actividades que se plantean en las unidades. Un 24,2% de problemas resueltos respecto a las actividades que aparecen resueltas en cada una de las unidades. Y por último, un 15,5% de problemas resueltos respecto al total de problemas propuestos.

Un aspecto que queríamos analizar era el tipo de estímulos que se utilizaban en los problemas, especialmente si se trataban de estímulos que aportaban a la resolución del problema, o eran simplemente decorativos. En la siguiente tabla (Tabla 33) podemos ver los resultados que hemos encontrado.

Tabla 33: Estímulos en los problemas de la Ed. SM

UUDD	Título	Nº de estímulos	Decorativos
1	Conjuntos numéricos	25	10
2	Potencias y raíces	8	5
3	Polinomios	18	4
4	División de polinomios	6	2
5	Ecuaciones y sistemas	11	5

7	Figuras planas	13	0
8	Movimientos en el plano	3	0
9	Cuerpos geométricos	12	2
10	Sucesiones	13	4
11	Funciones	9	0
12	Funciones lineales y cuadráticas	12	2
13	Estadística unidimensional	4	1
14	Probabilidad	11	4

En total hemos encontrado 145 estímulos en los problemas de las unidades del libro, de los cuales 39 son simplemente decorativos, es decir, un 26,9% de los estímulos no son necesarios para la resolución del problema.

A continuación presentamos el análisis de las unidades a partir de las preguntas que formulamos anteriormente.

En la unidad 1, conjuntos numéricos, no se enseñan estrategias de resolución de problemas específicamente, en los problemas resueltos encontramos representaciones en forma de esquemas indicando los datos, además de tablas como herramienta para la recogida de datos. Los problemas aparecen resueltos, pero normalmente no se explican, es decir, no se justifican ni argumentan los procedimientos aplicados.

Tampoco se utilizan los problemas para enseñar contenidos, apareciendo únicamente como ejemplo en un apartado de los contenidos.

En los problemas aparecen estímulos de dos tipos, estímulos decorativos con la intención de motivar al alumno acercándole al contexto del problema, dibujos o fotografías; y estímulos no decorativos, dibujos en forma de viñetas que forman parte del enunciado al incluir datos o preguntas, o en algunos casos tablas con datos.

En la unidad 2, que denomina potencias y raíces, encontramos un problema de introducción para destacar la importancia de los contenidos que se tratan en la unidad.

En esta unidad no se enseñan estrategias para la resolución de problemas y al igual que en la unidad anterior, tampoco se utilizan los problemas como vía para enseñar contenidos.

En la unidad 3, que denomina polinomios, introduce las expresiones algebraicas y el valor numérico de una expresión algebraicas con el área de figuras geométricas, utiliza representaciones gráficas en un ejemplo de este apartado para que se pueda comprender mejor.

Como en la unidad anterior, en ésta no se enseñan estrategias de resolución de problemas y tampoco se utilizan los problemas para enseñar contenidos.

En la unidad 4, que denomina división y factorización de polinomios, es una unidad donde el alumno debe aprender principalmente contenidos procedimentales. No se utilizan problemas.

En la unidad 5, ecuaciones y sistemas, encontramos un apartado donde trabajan problemas, realizando una clasificación entre problemas aritméticos y problemas geométricos. En el primer caso resuelve el problema con una ecuación de primer grado y utiliza una serie apartados para dividir el procedimiento y son: datos; pregunta; elección de las incógnitas; planteamiento de la ecuación; resolución de la ecuación; solución del problema; y comprobación de la solución. El problema geométrico lo resuelve mediante una ecuación de segundo grado y los apartados que utiliza son: datos e incógnitas; planteamiento de la ecuación; resolución de la ecuación; solución; y comprobación. Como podemos comprobar, aunque resuelven los problemas utilizando una estrategia de dividir el problema en etapas, no utiliza la misma denominación en la resolución de ambos problemas. En otro apartado presentan dos problemas como ejemplos para resolver problemas mediante sistemas de ecuaciones, en concreto un problema de edades y otro problema de mezclas, en ambos utilizan una tabla para plantearlos. En ambos dividen el problema en: datos e incógnitas; planteamiento del sistema; solución; y comprobación.

Entre esta unidad y la siguiente aparece un apartado denominado “MATES+MAGIA” donde a partir de un estímulo en forma de texto introduce al alumno en algunos problemas

que van más allá de los problemas escolares y creemos que pueden ser estimulantes para los alumnos, pero que dudamos que la mayoría de los profesores utilicen en el aula.

En esta unidad se utilizan estrategias de resolución de problemas, como esquemas y tablas, división en etapas. Tampoco se utilizan los problemas para enseñar contenidos.

La unidad 6, que trata sobre la proporcionalidad, no la hemos incluido en el análisis por situarse fuera de la propuesta del currículo.

La unidad 7, figuras planas, hemos considerado los problemas contextualizados y no los problemas geométricos no contextualizados. No se utilizan estrategias ni se explican contenidos.

Unidad 9, cuerpos geométricos, en el apartado donde introduce la fórmula del área y el volumen de un cilindro encontramos un problema resuelto, en este problema calcula el área y el volumen de una lata de refresco. Igualmente ocurre con el área y volumen de la esfera que contextualiza al cálculo de una naranja. Se intenta manifestar los aspectos funcionales de las matemáticas pero tampoco se explican estrategias.

En esta unidad encontramos numerosas actividades donde el alumno debe identificar las partes de la misma y calcular áreas y volúmenes de los cuerpos geométricos que las conforman.

La unidad 10, sucesiones, comienza con el planteamiento de una situación contextualizada que sirve como introducción al tema. Además, también introduce el concepto de término general de una sucesión con una situación en un contexto real. Utiliza problemas como ejemplos de aplicación del término general de una progresión aritmética y geométrica, y como ejemplo de aplicación de la suma de los términos de una sucesión.

La unidad 11, funciones, comienza con una situación susceptible de ser interpretada matemáticamente. Esta introducción puede ser conocida por los alumnos y actuar como motivadora para el aprendizaje de los contenidos de la unidad.

En este tema utiliza numerosos ejemplos de situaciones reales que pueden ser interpretadas utilizando las funciones.

En la unidad 12, funciones lineales y cuadráticas, comienza con una descripción de una situación contextualizada que sitúa los contenidos en un entorno conocido para el alumno.

Después de describir los conceptos de funciones lineales y de proporcionalidad directa utiliza ejemplos de situaciones contextualizadas. Encontramos también un apartado donde indica posibles aplicaciones de las funciones lineales y cuadráticas con otras áreas, resolviendo diferentes situaciones.

Unidad 13, estadística unidimensional, en el análisis de esta unidad no hemos considerado problema aquellos en los que se les pide a los alumnos que realicen algún procedimiento estadístico como calcular un parámetro, realizar una tabla o interpretarla, representar o interpretar algún gráfico, sino aquellos en los que deben elegir un procedimiento estadístico que no se les pide explícitamente para responder a las cuestiones planteadas.

En la unidad 14, probabilidad, hemos seguido algunos criterios para seleccionar los problemas, principalmente nuestra experiencia, si el enunciado requiere de un esfuerzo de comprensión, el grado de contextualización, si no se pide el procedimiento directamente, es decir, por ejemplo si la actividad va más allá de simplemente contar los casos, o representar las posibilidades.

6.1.2. Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de la editorial Santillana

Este libro se encuentra dividido en 14 unidades, no aparece una estructuración en bloques de contenidos como en el libro de la editorial SM.

La estructura de las unidades del libro son de la siguiente manera:

- Comienza la unidad con una referencia a un contexto cotidiano e intenta relacionarlo con los contenidos que se desarrollan en la unidad.
- Durante el desarrollo de la unidad se explican los contenidos y utilizan ejemplos resueltos, la mayor parte de ellos son ejercicios que muestran ejemplificación de procedimientos. En estos apartados aparecen actividades para practicar los contenidos explicados.

- Actividades al final de la unidad para practicar los contenidos que se han desarrollado en la misma.
- En la parte final de la unidad encontramos un apartado que denomina “Debes saber hacer”.
- Propone algún problema en un apartado que denomina “En la vida cotidiana” bajo el epígrafe de “Competencia Matemática”.
- Un apartado que denomina “Formas de pensar. Razonamiento matemático”.
- Al final de una unidad propone algunos problemas de pruebas PISA.

En la tabla siguiente (Tabla 34) recogemos las actividades y problemas que el alumno debe saber hacer que se proponen en cada unidad en el apartado “Debes saber hacer”.

Tabla 34: Resumen de las actividades "Debes saber hacer" Ed. Santillana

UUDD	Título	Debes saber hacer	
		Act.	Prob.
1	Números racionales	6	1
2	Potencias y raíces	6	0
3	Progresiones	7	2
5	Polinomios	5	0
6	Ecuaciones de primer y segundo grado	5	2
7	Sistemas de ecuaciones	4	1
8	Lugares geométricos. Áreas y volúmenes	8	0
9	Movimientos y semejanzas	7	1
10	Cuerpos geométricos	9	0

11	Funciones	7	1
12	Funciones lineales y cuadráticas	4	1
13	Estadística	3	1
14	Probabilidad	4	0

Igual que con el texto anterior, los ejemplos que se utilizan para explicar los contenidos de cada uno de los apartados teóricos no se han contabilizado dentro de las actividades de cada unidad.

En la siguiente tabla (Tabla 35) presentamos los resultados de los indicadores, expresados en porcentaje, para valorar la presencia de los problemas en las unidades.

Tabla 35: Resumen de los valores de los indicadores del libro de la Ed. Santillana

UDD	Título	P/A	PR/AR	PR/PP
1	Números racionales	21,9	28,6	7,1
2	Potencias y raíces	10,4	0	0
3	Progresiones	26,03	0	0
5	Polinomios	4,55	0	0
6	Ecuaciones de primer y segundo grado	35,92	50	8,11
7	Sistemas de ecuaciones	30,84	33,33	3,03
8	Lugares geométricos. Áreas y volúmenes	6,21	0	0
9	Movimientos y semejanzas	20,49	50	8
10	Cuerpos geométricos	18,84	0	0
11	Funciones	7,69	0	0

12	Funciones lineales y cuadráticas	17,95	14,29	4,86
13	Estadística	17,71	40	11,76
14	Probabilidad	4	0	0

Tenemos un 17,39% de problemas respecto al total de actividades que se plantean en las unidades. Un 17,2% de problemas resueltos respecto a las actividades que aparecen resueltas en cada una de las unidades. Y por último, un 4,2% de problemas resueltos respecto al total de problemas propuestos.

Respecto al tipo de estímulos utilizados en los problemas que se utilizaban en los problemas podemos ver los resultados en la tabla (Tabla 36) siguiente.

Tabla 36: Estímulos en los problemas. Ed. Santillana

UUDD	Título	Nº de estímulos	Decorativos
1	Números racionales	4	4
2	Potencias y raíces	9	7
3	Progresiones	16	9
5	Polinomios	6	3
6	Ecuaciones de primer y segundo grado	8	5
7	Sistemas de ecuaciones	13	10
8	Lugares geométricos. Áreas y volúmenes	11	3
9	Movimientos y semejanzas	16	2
10	Cuerpos geométricos	12	3
11	Funciones	7	3
12	Funciones lineales y cuadráticas	10	5
13	Estadística	20	7

En total hemos encontrado 133 estímulos en los problemas de las unidades del libro, de los cuales 59 son simplemente decorativos, es decir, un 44,4% de los estímulos no son necesarios para la resolución del problema.

En la unidad 1, que denomina números racionales, no encontramos problemas resueltos durante el desarrollo de la unidad y la carga de problemas es muy baja, apareciendo únicamente como actividades finales. En el final de la unidad encontramos un problema de contexto real en un apartado que denomina “En la vida cotidiana”. Dos problemas en un apartado que denomina “Formas de pensar. Razonamiento matemático”. Y por último, una prueba de las liberadas por PISA. Aunque ninguno de estos problemas aparecen resueltos.

También encontramos que no se enseñan estrategias de resolución de problemas. En los problemas resueltos simplemente enumeran los pasos del procedimiento, pero no hay división en fases o etapas.

En esta unidad no se utiliza ningún problema como vía para enseñar contenidos.

Respecto a los estímulos que se utilizan en los problemas, encontramos fotografías o dibujos pero en todos los casos son elementos decorativos, es decir, no introducen ningún tipo de información sobre el problema.

En esta unidad los problemas aparecen al final de la unidad.

En la unidad 2, potencias y raíces, aparece un problema en el apartado que denomina “vida cotidiana”. Y también propone dos problemas liberados de PISA 2006. Ninguno de los problemas se encuentran resueltos.

En esta unidad no se enseñan estrategias de resolución y tampoco se enseñan contenidos a través de problemas.

En la unidad 3, progresiones, un problema propuesto en el apartado que denomina “vida cotidiana”. Ocho problemas no rutinarios en el apartado que denomina “Formas de pensar. Razonamiento matemático”. Y por último, dos pruebas de las propuestas por PISA.

En esta unidad no se enseñan estrategias de resolución y tampoco se enseñan contenidos a través de problemas.

En la unidad 5, polinomios, presenta un problema en el apartado “vida cotidiana”. Un problema en “Formas de pensar. Razonamiento matemático”. Dos problemas propuestos en PISA.

Como en las anteriores, en esta unidad no se enseñan estrategias de resolución y tampoco se enseñan contenidos a través de problemas.

En la unidad 6, ecuaciones de primer y segundo grado, encontramos un apartado donde explican la resolución de problemas mediante ecuaciones, y para ello resuelven dos problemas. En ambos utilizan una representación icónica como estrategia, además de utilizar una tabla en la que indican: “lo que sabemos” y “lo que no sabemos”.

En un apartado que denominan “Saber hacer” presentan un problema resuelto y señalan los pasos a seguir: 1º Identificamos la incógnita; 2º Planteamos la ecuación; 3º Resolvemos la ecuación; y por último, Comprobamos e interpretamos la solución. Tenemos un problema en el apartado “en la vida cotidiana” y otro problema de las pruebas PISA.

En la unidad 7, sistemas de ecuaciones, encontramos un apartado teórico donde explica la resolución de problemas mediante sistemas, en el ejemplo utiliza una tabla que divide entre “lo que sabemos” y “lo que no sabemos”. Además emplea una representación icónica con los datos. Además plantea un problema resuelto en el que indica los “Pasos a seguir” en problemas de este tipo: 1º Identificamos las incógnitas; 2º Planteamos el sistema; 3º Resolvemos el sistema; 4º Comprobamos e interpretamos la solución.

Un problema en el apartado “En la vida cotidiana” y cuatro problemas en “Formas de pensar. Razonamiento matemático”. Y dos problemas de los propuestos en PISA.

En la unidad 8, lugares geométricos. Áreas y volúmenes, tenemos un problema relacionado con la vida cotidiana. Y dos problemas de los propuestos en PISA.

En la unidad 9, movimientos y semejanzas, proponen un problema relacionado con la vida cotidiana. En el apartado “Formas de pensar. Razonamiento matemático” proponen un problema contextualizado. Proponen un problema de los propuestos en PISA.

En la unidad 10, cuerpos geométricos, propone un problema en el apartado que denomina “En la vida cotidiana”. Y dos problemas en el apartado “Formas de pensar. Razonamiento matemático”. Además, propone dos problemas PISA.

En la unidad 11, funciones, propone un problema en el apartado “En la vida cotidiana”. Y dos problemas de los propuestos en PISA.

En la unidad 12, funciones lineales y cuadráticas, introduce la aplicación a contextos reales de este tipo de funciones. Las actividades las hemos considerado problemas cuando no indican de que tipo de función se trata, es el alumno el que tiene que deducirlo a partir de los datos que plantea la situación y/o por la pregunta que plantean.

Proponen un problema en el apartado sobre la vida cotidiana y un problema de los propuestos por PISA.

En la unidad 13, estadística, propone un problema en el apartado sobre la vida cotidiana y dos problemas de los propuestos por PISA. Hemos seguido el mismo criterio que con el texto de SM para identificar los problemas, es decir, aquellos en los que deben elegir un procedimiento estadístico que no se les pide explícitamente para responder a las cuestiones planteadas

En la unidad 14, probabilidad, en la gran mayoría de las actividades, al preguntar cualquier cuestión el alumno no conoce la respuesta de antemano pero si sabe lo que tiene que realizar, ya que se le pide el cálculo de la probabilidad. Solamente hay algunas actividades en las que el alumno debe considerar calcular la probabilidad para contestar a la cuestión.

Como podemos ver en la tabla siguiente (Tabla 37) hay una diferencia entre las dos editoriales respecto a los indicadores estudiados.

Tabla 37: Comparación de los indicadores entre ambas editoriales

Editorial	P/A	PR/AR	PR/PP
S.M.	24,8	24,2	15,5
Santillana	17,4	17,2	4,2

P/A: porcentaje de problemas que aparecen en cada unidad respecto al total de las actividades propuestas.

PR/AR: porcentaje de problemas resueltos respecto a las actividades que aparecen resueltas en cada una de las unidades. PR/PP: Porcentaje de problemas resueltos respecto al total de problemas propuestos

Capítulo 7. Opinión de los alumnos sobre la propuesta

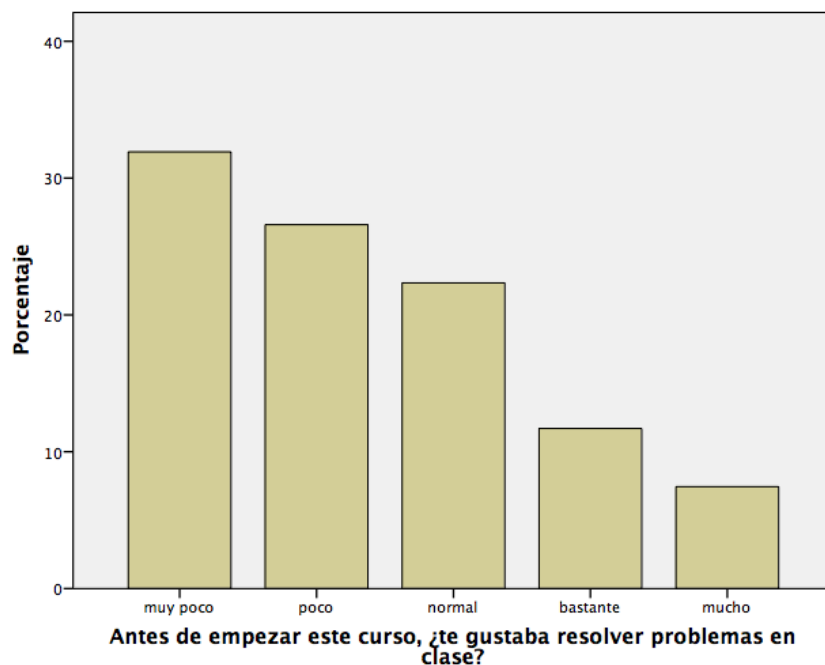
En este capítulo presentamos los resultados de la encuesta que se les propuso a los alumnos para valorar el trabajo realizado. Respondieron a la encuesta 94 alumnos, de los cuales tenemos 50 varones y 44 hembras.

Determinamos el valor de la fiabilidad mediante la consistencia interna del cuestionario, el procedimiento utilizado fue el alfa (α) de Cronbach, obteniendo un valor de 0,85: este valor nos indica una alta consistencia del cuestionario, y por lo tanto asegura la fiabilidad de nuestras medidas.

7.1. Resultados de las diferentes preguntas de la encuesta

En la primera pregunta (Figura 22) de la encuesta: **Antes de empezar este curso, ¿te gustaba resolver problemas en clase?**

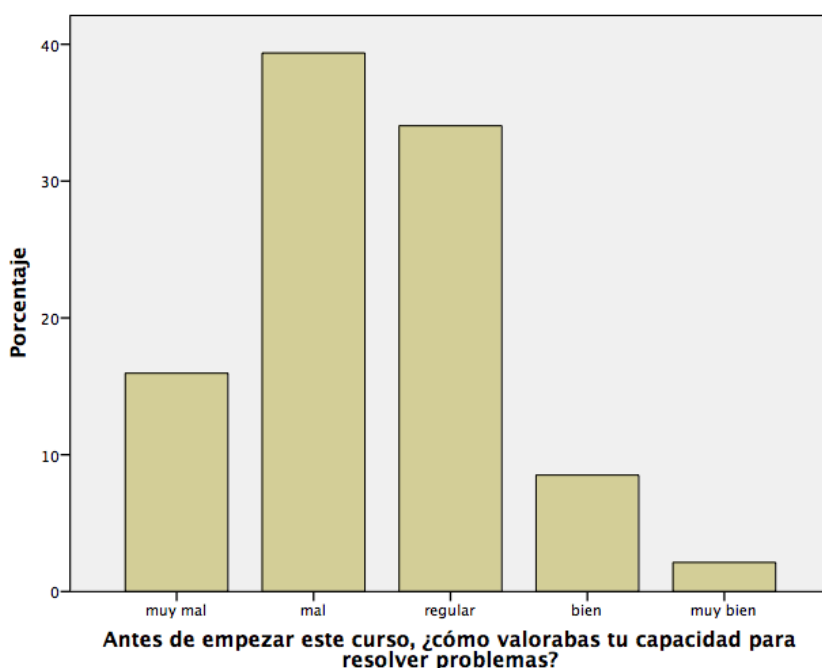
Figura 22: Primera pregunta de la encuesta



El 58,5% de los alumnos contestan que muy poco o poco, normal el 22,3%, y el resto 19,2% contestan que bastante o mucho. Como podemos ver no es una tarea que motive especialmente a los alumnos.

En la segunda pregunta (Figura 23) de la encuesta: **Antes de empezar este curso, ¿cómo valorabas tu capacidad para resolver problemas?**

Figura 23: Segunda pregunta de la encuesta

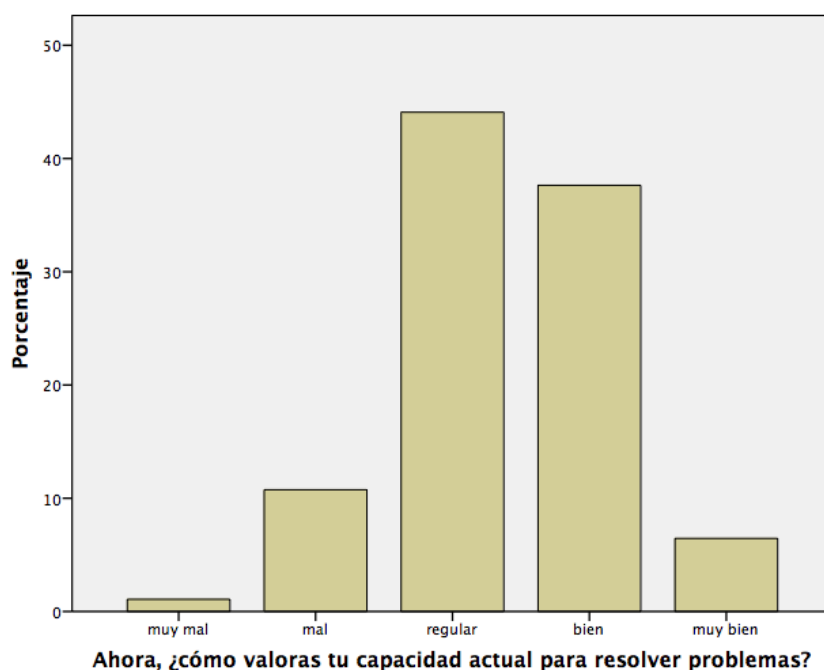


El 55,4% de los alumnos contestan que muy mal o mal, regular el 34%, y el resto 10,6% contestan que bien o muy bien. La valoración que hacen de su capacidad de resolver problemas es muy baja, aunque intuíamos estas respuestas no deja de sorprender la percepción que tienen una gran parte de los alumnos, que les lleva en muchas ocasiones a ni siquiera intentar resolver el problema.

En la tercera pregunta (Figura 24): **Ahora, ¿cómo valoras tu capacidad actual para resolver problemas?**

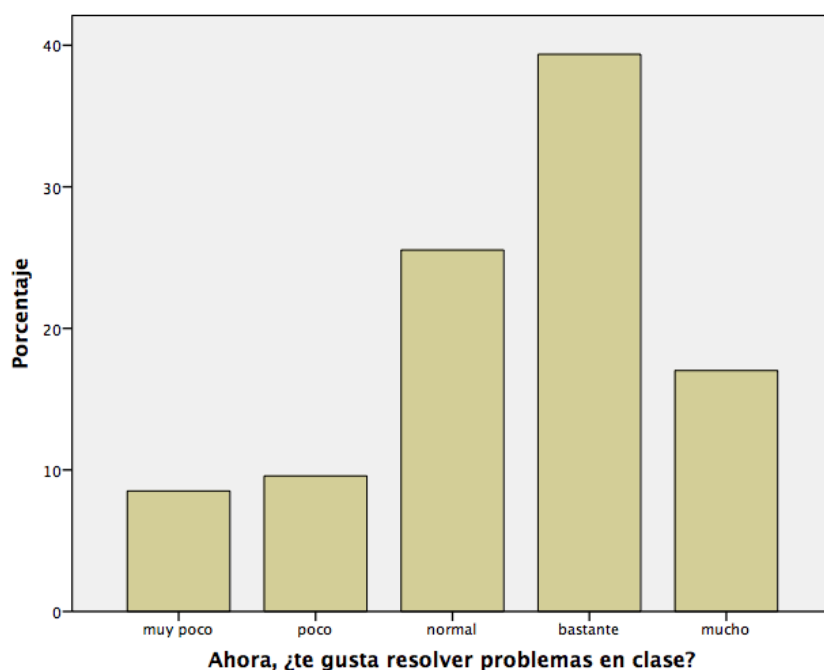
El 11,7% de los alumnos contestan que muy mal o mal, regular el 43,6%, y el resto 43,6% contestan que bien o muy bien. Vemos como esta valoración ha subido bastante con respecto a las respuestas de la pregunta anterior.

Figura 24: Tercera pregunta de la encuesta



En la cuarta pregunta (Figura 25): **Ahora, ¿te gusta resolver problemas en clase?**

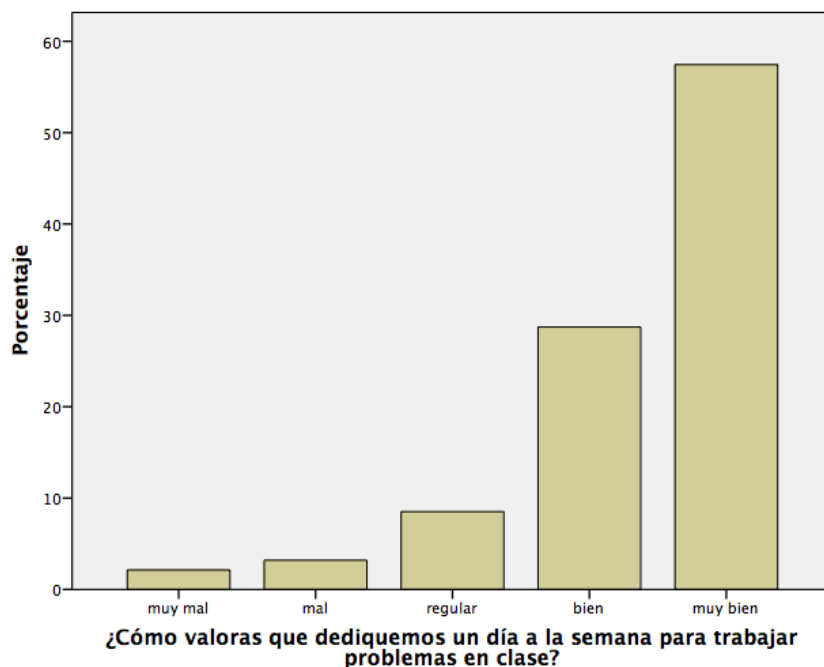
Figura 25: Cuarta pregunta de la encuesta



El 5,3% de los alumnos contestan que muy poco o poco, normal el 25,5%, y el resto 56,4% contestan que bastante o mucho. Esta respuesta es bastante mejor que la que se obtuvo en la primera pregunta, sobre su gusto por resolver problemas como actividad en el aula.

En la quinta pregunta (Figura 26): **¿Cómo valoras que dediquemos un día a la semana para trabajar problemas en clase?**

Figura 26: Quinta pregunta de la encuesta

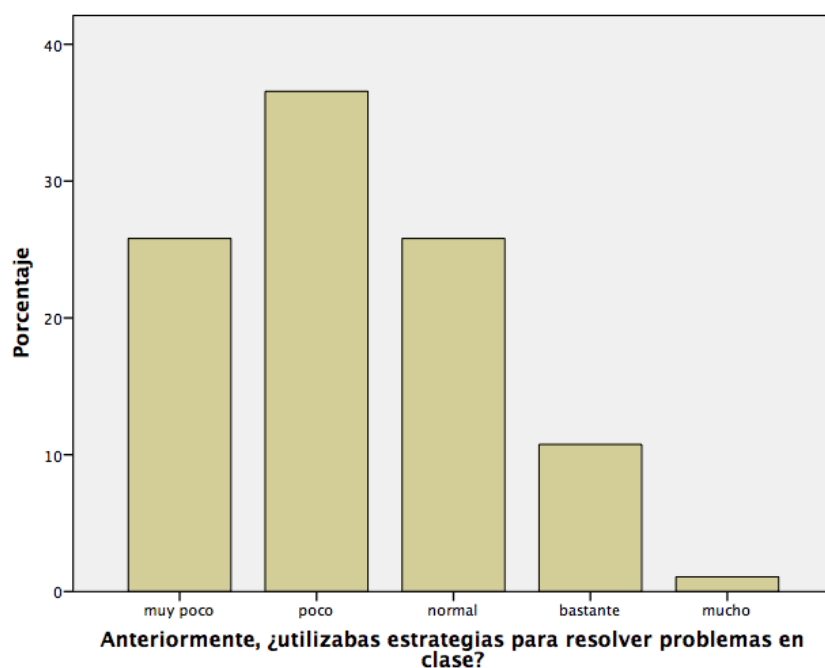


El 5,3% de los alumnos contestan que muy mal o mal, regular el 8,5%, y el resto 86,1% contestan que bien o muy bien.

En la sexta pregunta (Figura 27): **Anteriormente, ¿utilizabas estrategias para resolver problemas en clase?**

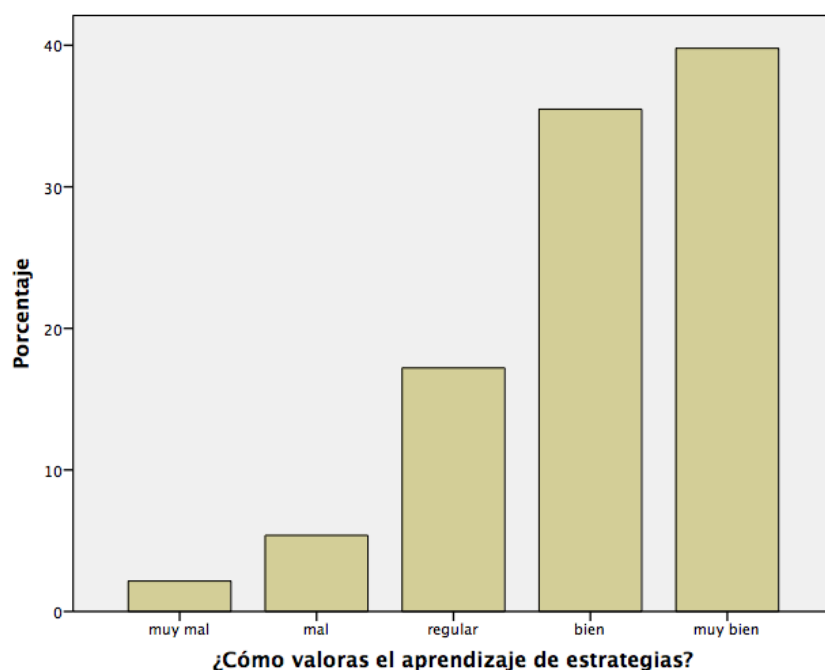
El 62,4% de los alumnos contestan que muy poco o poco, normal el 25,8%, y el resto 11,9% contestan que bastante o mucho. Vemos como un elevado porcentaje de alumnos no utilizaba estrategias para resolver problemas, están acostumbrados a que los profesores resuelvan problemas y las apliquen, pero ellos no suelen utilizarlas.

Figura 27: Sexta pregunta de la encuesta



En la séptima pregunta (Figura 28): **¿Cómo valoras el aprendizaje de estrategias?**

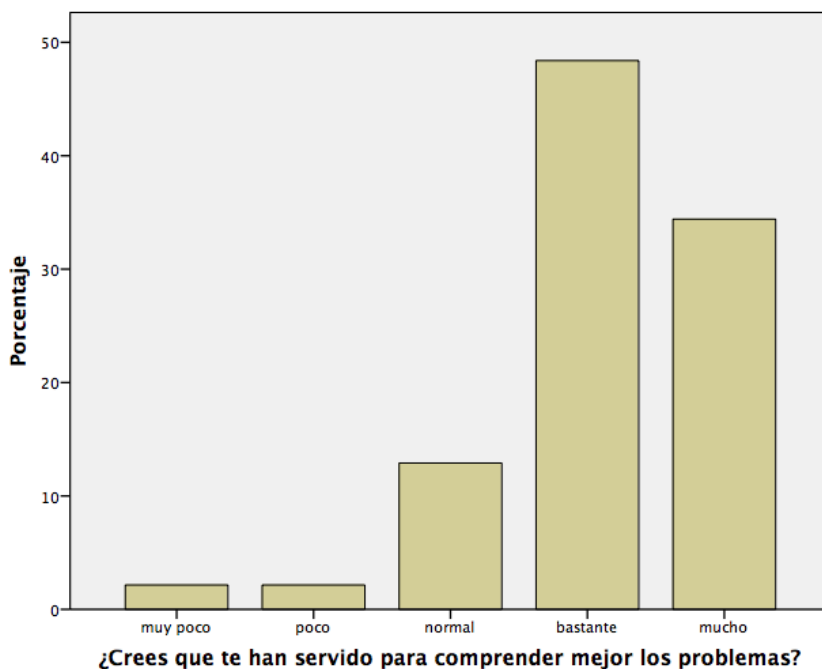
Figura 28: Séptima pregunta de la encuesta



El 7,6% de los alumnos contestan que muy mal o mal, regular el 17,2%, y el resto 75,3% contestan que bien o muy bien. Como vimos en la pregunta anterior, las estrategias eran una asignatura pendiente para los alumnos, ya que han valorado muy bien el aprendizaje de las mismas.

En la octava pregunta (Figura 29): **¿Crees que te han servido para comprender mejor los problemas?**

Figura 29: Octava pregunta de la encuesta

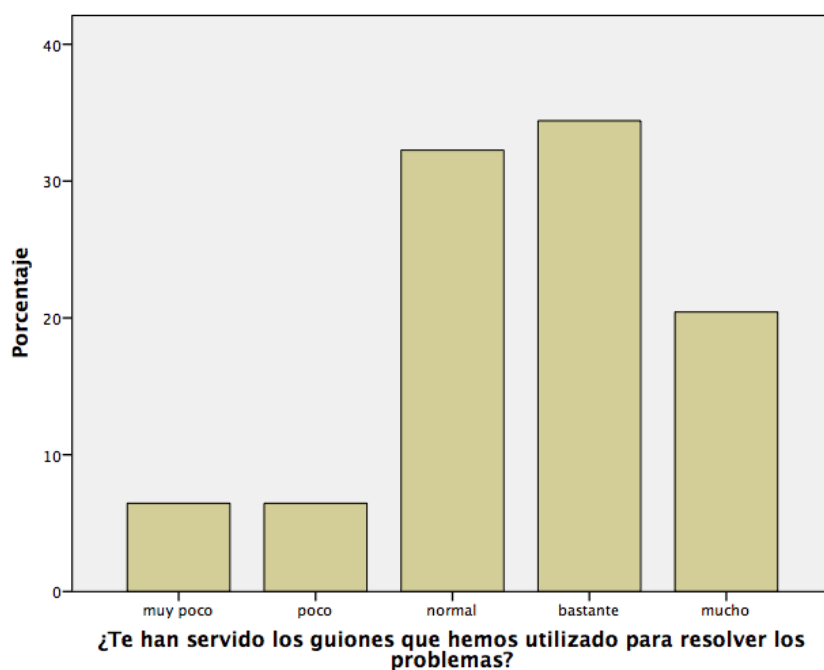


El 4,4% de los alumnos contestan que muy poco o poco, normal el 12,9%, y el resto 82,8% contestan que bastante o mucho. En consonancia con las preguntas anteriores, los alumnos no usaban estrategias, pero las valoran positivamente ya que entienden que les ayudan a comprender mejor los problemas.

En la novena pregunta (Figura 30): **¿Te han servido los guiones que hemos utilizado para resolver los problemas?**

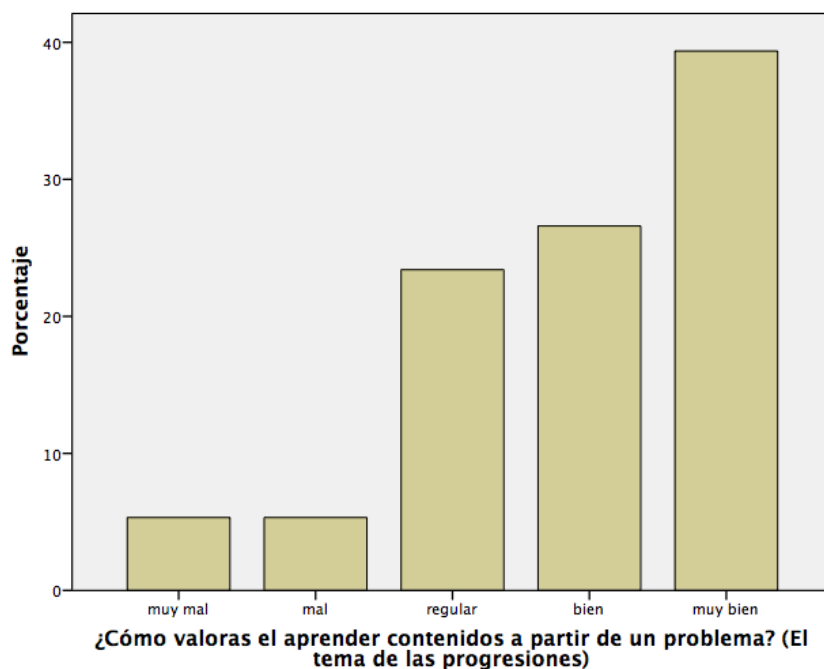
El 13% de los alumnos contestan que muy poco o poco, normal el 32,3%, y el resto 54,8% contestan que bastante o mucho. Vemos que los alumnos han valorado que los guiones les han sido útiles.

Figura 30: Novena pregunta de la encuesta



En la décima pregunta (Figura 31): **¿Cómo valoras el aprender contenidos a partir de un problema? (El tema de las progresiones)**

Figura 31: Décima pregunta de la encuesta

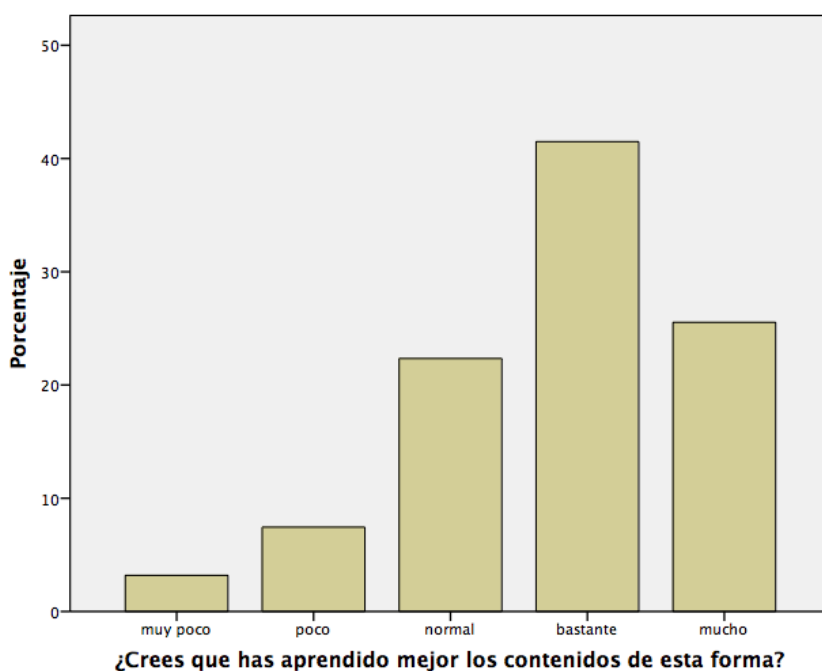


El 10,6% de los alumnos contestan que muy mal o mal, regular el 23,4%, y el resto 66% contestan que bien o muy bien.

En la undécima pregunta (Figura 32): **¿Crees que has aprendido mejor los contenidos de esta forma?**

El 10,6% de los alumnos contestan que muy poco o poco, normal el 22,3%, y el resto 67% contestan que bastante o mucho.

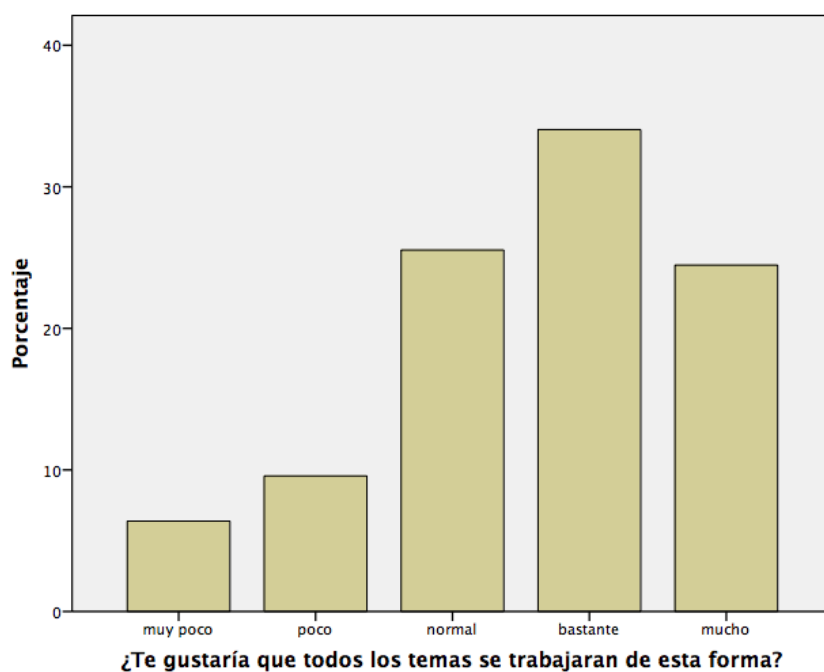
Figura 32: Undécima pregunta de la encuesta



En la duodécima pregunta (Figura 33): **¿Te gustaría que todos los temas se trabajaran de esta forma?**

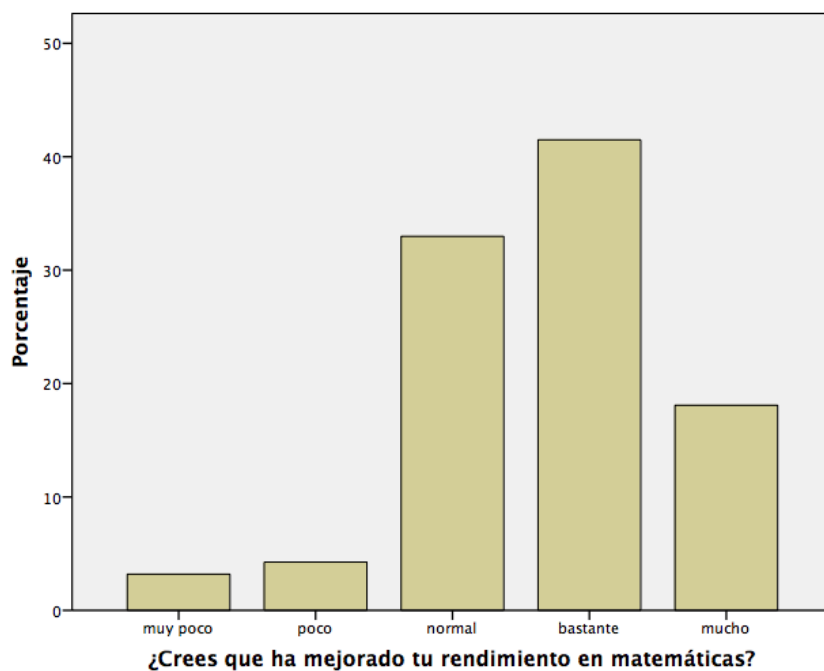
El 16% de los alumnos contestan que muy poco o poco, normal el 25,5%, y el resto 58,5% contestan que bastante o mucho.

Figura 33: Duodécima pregunta de la encuesta



En la decimotercera (Figura 34): **¿Crees que ha mejorado tu rendimiento en matemáticas?**

Figura 34: Decimotercera pregunta de la encuesta

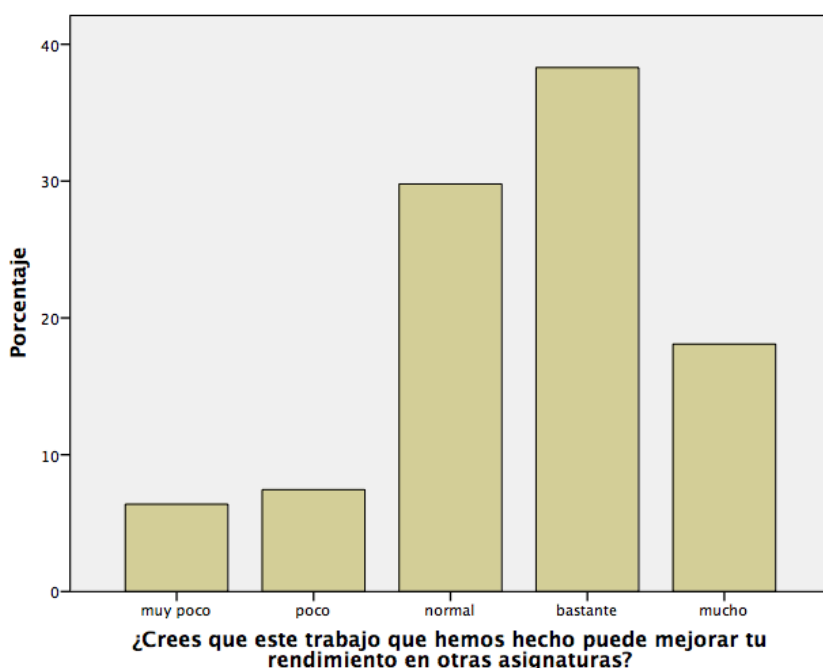


El 7,5% de los alumnos contestan que muy poco o poco, normal el 33%, y el resto 59,6% contestan que bastante o mucho.

En la decimocuarta pregunta (Figura 35): **¿Crees que este trabajo que hemos hecho puede mejorar tu rendimiento en otras asignaturas?**

El 13,8% de los alumnos contestan que muy poco o poco, normal el 29,8%, y el resto 56,4% contestan que bastante o mucho.

Figura 35: Decimocuarta pregunta de la encuesta



7.2. Comparativa de algunas preguntas

La siguiente tabla (Tabla 38) muestra la percepción de los alumnos sobre su capacidad para resolver problemas antes y después del trabajo realizado. Vemos que esta percepción ha mejorado mucho después de realizar el trabajo durante casi dos trimestres. Además, esta diferencia es estadísticamente significativa (Prueba de Wilcoxon de los rangos con signo, $p - valor = .00$)

Tabla 38: Valoración sobre la capacidad de resolución de problemas

	Pregunta 2	Pregunta 3
	(%)	(%)
Muy mal	16	1,1
Mal	39,4	10,6
Regular	34	43,6
Bien	8,5	37,2
Muy bien	2,1	6,4

La siguiente tabla (Tabla 39) muestra la evolución del gusto de los alumnos por resolver problemas antes y después del trabajo realizado. Vemos que esta percepción ha mejorado mucho después de realizar el trabajo durante casi dos trimestres. Además, esta diferencia es significativa (Prueba de Wilcoxon de los rangos con signo, $p - valor = .00$)

Tabla 39: Evolución del gusto por la resolución de problemas

	Pregunta 1	Pregunta 4
	(%)	(%)
Muy poco	31,9	8,5
Poco	26,6	9,6
Normal	22,3	25,5
Bastante	11,7	39,4
Mucho	7,4	17,0

7.3. Resultados según el género

De las 14 preguntas de la encuesta hemos encontrado diferencias significativas respecto al género de los alumnos en cuatro de ellas. La siguiente tabla (Tabla 40) muestra las preguntas y los resultados de la prueba realizada.

Tabla 40: Preguntas con diferencias por género

Pregunta	Prueba U de Mann-Whitney (p-valor)
Ahora, ¿cómo valoras tu capacidad actual para resolver problemas?	$p - valor = 0,021$
¿Cómo valoras el aprender contenidos a partir de un problema? (El tema de las progresiones)	$p - valor = 0,043$
¿Crees que has aprendido mejor los contenidos de esta forma?	$p - valor = 0,035$
¿Crees que ha mejorado tu rendimiento en matemáticas?	$p - valor = 0,013$

Capítulo 8. Conclusiones y propuestas

En este capítulo vamos a aportar las conclusiones de todo nuestro trabajo, aunque esta investigación se ha dividido en diferentes fases hemos intentado realizar una visión general teniendo en cuenta los resultados de todas las fases.

Además de las aportaciones de los alumnos, ha jugado un papel muy importante en este trabajo, la identificación, corrección y superación de los errores, como parte de los procesos de mejora en la resolución de problemas matemáticos.

Por lo que hemos podido constatar, los alumnos presentan las siguientes dificultades:

- En general bajo interés por la resolución de problemas.
- Bajo nivel de comprensión de los enunciados.
- Dedican muy poco tiempo al análisis del enunciado para comprender la situación que les plantea.
- No hacen una buena utilización de las representaciones visuales como ayuda a la hora de comprender el enunciado.
- Carecen del vocabulario y de las estructuras gramaticales utilizadas en la redacción de los enunciados.
- No escriben los datos ni los planteamientos en lenguaje habitual. Intentan escribir directamente los planteamientos matemáticos.
- Muy baja aplicación de estrategias.
- Falta de organización de los datos y/o representaciones de los mismos.
- Dificultades para establecer relaciones entre los datos.
- Dificultad para encontrar datos no explícitos.

- Dificultades a la hora de seleccionar más de un procedimiento matemático para resolverlo.
- Errores en el procedimiento y/o en la comprobación del mismo.
- No suelen verificar los resultados en el contexto del problema.

Entre las dificultades con las que nos hemos encontrado a la hora de desarrollar este trabajo en el aula destacamos las siguientes:

- Crear un ambiente de resolución de problemas en el aula.
- Captar, y especialmente mantener la atención de los alumnos durante todo el proceso.
- Que valoren la resolución como una tarea que va más allá de la realización de ejercicios.
- Motivarles y hacerles caer en la cuenta de la importancia del trabajo que estábamos realizando.
- La configuración de los grupos.
- La falta de optimización del trabajo en los grupos.
- El análisis de las estrategias que han seguido en la resolución de los problemas.
- Hacer compatible el trabajo de resolución de problemas con la impartición del currículo de la asignatura.

El objetivo de nuestro trabajo era elaborar una propuesta que lograra que los alumnos de 3º de ESO mejoraran su competencia matemática, para conseguirlo entendimos que el camino a seguir era a través de los problemas.

El estudio de la bibliografía nos permitió identificar la competencia matemática con la resolución de problemas en un contexto relacionado con la vida cotidiana del alumno. Por lo que mejorar la capacidad de resolver problemas tendrá una incidencia directa con la competencia matemática.

La decisión de trabajar problemas escolares que pueden aparecer en cualquier libro de texto del nivel podemos concluir ahora que fue acertada, nuestra experiencia y la evaluación preliminar de la capacidad de los alumnos para resolver este tipo de problemas, junto con la propuesta curricular, avalan esta decisión. Además, la dificultad añadida que tienen los problemas menos rutinarios, y que nos desaconsejaban su uso en una primera instancia sin tener una buena capacidad de resolución.

Respecto a los libros de texto, como el material principal que utilizan los profesores, vemos que la enseñanza de la resolución de problemas que hacen los libros de texto estudiados es abordada de una forma muy superficial y creemos que no está en concordancia con las directrices curriculares.

En el libro de la editorial SM en las actividades que proponen que los alumnos deben aprender tienen una presencia muy baja los problemas. El porcentaje de problemas que aparecen en el apartado de actividades clave es el 32,8% y baja al 16% en las propuestas de autoevaluación que aparecen en las distintas unidades. En el libro de Santillana, aún es más baja, la propuesta de problemas dentro del apartado de actividades que los alumnos deben saber hacer es de un 11,8%.

En ambos textos no utilizan los problemas para enseñar contenidos, aunque en el texto de SM si intenta hacer visible la funcionalidad de las matemáticas en diferentes unidades y contextos. Respecto a la enseñanza de estrategias podemos concluir que aunque las utilizan en algunos ejemplos resueltos no hacen un uso extensivo de las mismas, ni las convierten en objeto de enseñanza tal y como propone el currículo de la asignatura. Por lo que en concordancia con los resultados observados por otros autores Pino y Blanco (2008) no hemos encontrado la enseñanza de modelos o de estrategias heurísticas para la resolución de problemas.

A nuestro juicio, el libro de la editorial Santillana hace un uso excesivo de los estímulos decorativos (44,4%), que aunque podamos entender que buscan situar a los alumnos en un contexto determinado creemos que no logran este objetivo. Valoramos la inclusión de las actividades liberadas por las pruebas PISA, aunque creemos que podían ser más aprovechables si estuvieran resueltas y explicadas algunas de ellas.

Ambos manuales utilizan en los problemas de ecuaciones unos apartados similares para ayudar a los alumnos a resolverlos, se trata de un intento de generalizar un método para resolver este tipo de problemas que los alumnos deben aprender.

Como conclusión podemos decir que entendemos que hace falta un replanteamiento del tratamiento que hacen de la resolución de problemas en ambos textos. Hay que tener en cuenta que en el currículo de la asignatura de matemáticas orientadas a la actividad académica encontramos que un 41,5% de los estándares evaluables hacen referencia a la resolución de problemas, mientras que en los libros de texto tenemos un 24,8% y un 17,39 %, de problemas respecto al total de actividades que se plantean en las unidades, en la editorial SM y Santillana respectivamente. Valoramos como muy baja la presencia de los problemas teniendo en cuenta la representatividad que tiene en el currículo. Además, hay que destacar que el 26,8% de los estándares hacen referencia a la enseñanza de la resolución de problemas como objeto de aprendizaje y en los manuales estudiados no hemos encontrado reflejada esta importancia que le otorga el currículo.

Respecto a la creación de un ambiente positivo de resolución de problemas en el aula encontramos dificultades para incluir la propuesta conjuntamente con el desarrollo del currículo. No había una continuidad en el proceso, lo que generaba distracciones en los alumnos, y por lo tanto problemas de concentración. En el curso 2016-17 decidimos programar el trabajo para desarrollarlo durante un día concreto a la semana con la idea de que fuera un taller dentro de la asignatura. Nuestra conclusión es que ha funcionado muy bien y hemos logrado solucionar las dificultades que encontrábamos. Además de la actitud de los alumnos durante estas sesiones les preguntamos sobre esta cuestión en la encuesta y el 86,1% lo valoraron como bien o muy bien. También a partir de los resultados de la encuesta podemos concluir que el interés por resolver problemas antes y después del trabajo realizado ha aumentado de una manera significativa. Igualmente ocurre sobre la percepción que tienen los alumnos sobre su capacidad para resolver problemas.

La evaluación de los procesos de resolución de problemas la realizamos a través de una serie de cuestionarios como ya indicamos en las fases de la investigación.

Respecto a la comprensión de los enunciados, los resultados obtenidos en la calificación total en los cuestionarios C1 y C2 han sido inferiores a los esperados. A priori pensábamos

que el bajo rendimiento de los alumnos en la resolución de problemas escolares se concentraba principalmente en los aspectos matemáticos, pero los resultados de este trabajo reflejan que hay otros aspectos que quizás afecten más. Por ejemplo, hemos encontrado que la dificultad del cuestionario disminuye cuando los alumnos pueden reflexionar sobre la posible respuesta, concentrarse en encontrar la respuesta válida cuando tienen varias alternativas les ha facilitado el proceso (Falcón, S., Medina, P. y Plaza, A., 2017). La impulsividad en la búsqueda de la respuesta es un factor que afecta negativamente en el proceso de comprensión de los enunciados. El análisis del tiempo que los alumnos dedican a la fase de comprensión del problema nos indica que los alumnos no le dedican el tiempo necesario a leer y comprender los enunciados de los problemas y que abandonan con bastante facilidad, o bien dan por concluida la tarea. Además, en ambos cuestionarios tampoco hemos encontrado una relación significativa entre la calificación obtenida en la comprensión y el tiempo empleado en realizar el cuestionario.

Un aspecto importante y que queríamos contrastar es que los alumnos con un mayor rendimiento académico no obtienen los resultados que esperan en los procesos de resolución de problemas, pues también tienen dificultades en la fase de comprensión, siendo este aspecto una fuente de ansiedad para estos alumnos. Como hemos visto en los resultados no existe una correlación positiva entre la calificación obtenida en el área de matemáticas y la comprensión de los enunciados.

Con respecto a la relación entre la calificación obtenida en la fase de comprensión y el sexo de los alumnos hemos encontrado que esta relación no es significativa en el caso del cuestionario C1, pero si hemos encontrado una dependencia del género de los alumnos en los resultados en el caso de C2, en concreto, los alumnos varones han obtenido en su conjunto mejores resultados que las hembras.

Como conclusión podemos decir que el nivel de comprensión de los enunciados de los problemas por parte de los alumnos de tercero de educación secundaria es bastante inferior al que necesitan para poder realizar los problemas que se proponen en la mayoría de los libros de texto. Este es un factor muy importante, ya que hay trabajos con alumnos de secundaria que han demostrado que los alumnos tienen más dificultad para comprender, de forma global, los problemas no tan rutinarios que los rutinarios (Deulofeu y Mallart,

2012), y como hemos señalado en el marco teórico, este debe ser uno de los motivos principales del porqué del aprendizaje de la resolución de problemas en la escuela, que los alumnos como futuros ciudadanos sean capaces de enfrentarse a aquellos problemas que pueden encontrarse en su vida cotidiana.

Teniendo en cuenta que el uso de representaciones gráficas facilitan la comprensión de los problemas, hemos constatado que los alumnos las utilizan muy poco, aunque desde la educación primaria observan a los profesores usarlas como estrategia para resolver los problemas. Las representaciones que utilizan son bastante pobres y normalmente las utilizan para indicar simplemente los datos.

Cuando realizamos un análisis de las representaciones que los alumnos realizaban en los problemas, con el cuestionario C4, nos encontramos que en el 78,8% de los casos las representaciones que realizaban no ayudaban a la resolución del problema, por lo que encontramos que eran unos resultados muy bajos, y por lo tanto, las representaciones que sabían realizar no les facilitaba resolver el problema.

Las representaciones que utilizaban las podemos resumir en tres tipos distintos:

- Representación icónica, que son dibujos esquemáticos que representan la situación planteada en el contexto y donde indican los datos.
- Representación simbólica, que son esquemas simples sobre los que indican los datos.
- Recoger los datos en forma de tabla.

Una vez que analizamos el tipo de representaciones que los alumnos utilizaban dedicamos un tiempo en clase al entrenamiento en este tipo de estrategia, y evaluamos de nuevo con un cuestionario (C5), obteniendo que el tipo de representaciones que no ayudaban a la resolución del problema descendía hasta un 59%, aunque siguen siendo unos resultados muy altos entendemos que dedicar un tiempo a la enseñanza de estas estrategias beneficia al alumno. Preguntado a los alumnos sobre esta cuestión el 62,4% contestan que utilizan estrategias poco o muy poco, en cambio valoran el aprendizaje de estrategias como bien o muy bien en un 75,3% de los casos. Un 82,8% de los alumnos opinan que las estrategias

les han servido bastante o mucho para comprender mejor el problema.

Otra estrategia que decidimos fue proponer un modelo de resolución de problemas basado en fases, tal y como han propuesto numerosos investigadores y hemos presentado en el marco teórico. Este modelo iba acompañado de una serie de guiones para cada fase.

Los alumnos han aceptado con interés los guiones los han utilizado y valorado positivamente, en concreto, en la encuesta valoran la utilidad de los guiones el 54,8% de los alumnos. Además, han permitido la reflexión y el debate tal y como pretendíamos con su propuesta. También ha favorecido la comunicación de las ideas y la participación de alumnos que habitualmente no lo hacían.

La introducción de la propuesta de división del proceso de resolución de un problema en distintas fases, independientemente de los resultados obtenidos, creemos que ha ayudado a los alumnos. Pensamos que consigue hacer algo más tangible y menos abstracto el enfrentarse a un problema.

Además, la división del problema en fases nos permite centrarnos más en los procesos que en los resultados, pudiendo reorientar el aprendizaje de los alumnos en aquellos aspectos en los que necesitan mejorar.

Una primera valoración de la utilización de los guiones fue para la fase de comprensión, y lo valoramos con el cuestionario C3 y encontramos que el 50,9% de los alumnos mejoraron su nivel de comprensión del problema respecto a resultados anteriores, y que esa mejoría era estadísticamente significativa. Creemos que esta mejoría se puede relacionar con la utilización del guion, aunque también entendemos que la mayor madurez de los alumnos o incluso los contenidos implicados en el cuestionario sean variables que debemos tener en cuenta.

La valoración del uso que los alumnos hacían de la propuesta del modelo fue a través de un cuadernillo de problemas. Las conclusiones que hemos obtenidos han sido varias, el hecho de que los alumnos identifiquen las distintas fases favorece alcanzar la solución del problema. Además, como hemos podido ver por los resultados presentados los alumnos que han comprendido el problema también han ejecutado un plan, además de ser capaces de aplicar diferentes procedimientos y por último resolver el problema. Tener un plan y

ejecutarlo tiene una correlación alta o muy alta con la aplicación de diferentes procedimientos y resolver el problema. También hemos encontrado que los alumnos tienen dificultades para diferenciar entre la fase de comprobación del procedimiento y la fase de verificación de los resultados de los problemas en el contexto propuesto en el enunciado. Este aspecto ha supuesto que la identificación completa de todas las fases haya tenido un resultado muy bajo en la evaluación de los problemas.

El objetivo de enseñar a los alumnos la estrategia de buscar más de un procedimiento para resolver un problema entendemos que favorece que no asocien los problemas planteados en clase con un único procedimiento. La búsqueda de alternativas creemos que nos permitirá la transición hacia la resolución de problemas no rutinarios.

Respecto al trabajo en grupo los alumnos han respondido de forma satisfactoria, la intervención del profesor se fue reduciendo de forma considerable, hasta el punto de que los alumnos eran capaces de trabajar solos. También hemos observado que el hecho de incluir alumnos con habilidades distintas en la resolución de problemas ha sido acertada, los alumnos han hecho un esfuerzo para intentar que sus compañeros comprendieran como resolvían el problema.

Un resultado que obtuvo muy buenos resultados en el trabajo en grupo fue la elaboración de un plan, ya que un 71,4% de los alumnos idearon un plan que conducía a la resolución del problema. Al ser un resultado del trabajo de grupo lo comparamos con la medición de forma individual a otro grupo de alumnos con el cuestionario C5 y encontramos que en un 7,6% de los casos el plan propuesto es correcto pero incompleto, y por último, sólo un 4,2% se propone un plan que es adecuado para la resolución del problema. Como podemos ver son unos resultados inferiores por lo que creemos que el trabajo en grupo ha sido un factor importante que justifica su utilización. Otro ejemplo del posible efecto positivo del trabajo en grupo ha sido la valoración de la comprensión del problema, un 48,8% en el caso del trabajo individual y un 71,4% en el caso de trabajo en grupo, teniendo en cuenta que las muestras eran independientes. Igual ocurre con la solución del problema, un 70,2% en el caso del trabajo en grupo frente a 47,7% en el caso del trabajo individual.

Podemos concluir que esta metodología, tal y como han señalado Pifarré y Sanuy (2001) en sus trabajos con alumnos de secundaria, favorece el aprendizaje de la resolución de problemas.

Hemos evaluado la comunicación en varias ocasiones, en el cuestionario en el que le pedimos a los alumnos que expliquen en qué consiste un determinado problema, la comunicación a través de representaciones gráficas, la propuesta de un plan, los trabajos de problemas en grupo, y por último, la explicación de los procedimientos. Entendemos que en todos estos momentos hemos encontrado unos resultados bastante pobres. Creemos que esta dificultad que manifiestan los alumnos está interfiriendo notablemente en los procesos de resolución. Es un aspecto que se debe trabajar en el aula e incluir en la propuesta.

Respecto a la propuesta de contenidos vía problemas la valoramos como novedosa para los alumnos, les permite comprobar la funcionalidad de las matemáticas, pero es difícil de desarrollar por el profesor, ya que debe “ensayar” la puesta en escena. Además, los alumnos pueden tener dificultades para comprender la teoría de este modo al añadir la dificultad que ya tienen con los problemas. Teniendo en cuenta estos factores, nuestra mayor preocupación era suscitar el suficiente interés por parte de los alumnos.

Durante el desarrollo de la misma en el aula, y después de proponerla durante tres cursos seguidos a diferentes grupos de alumnos, observamos buenos resultados en el aula, los alumnos, de forma general, participan en el proceso y lo van comprendiendo. La única dificultad que encontramos es que les cuesta entender que es teoría que hemos desarrollado, que deben aprender y utilizar, ya que lo consideran como algo lúdico.

Preguntado a los alumnos como valoran la propuesta de contenidos a través de un problema el 66% contestaron que bien o muy bien, el 67% contestan que han aprendido mejor los contenidos de esta forma, y al 58,5% les gustaría que todos los temas se trabajaran de esta forma.

A modo de conclusión general creemos que la propuesta que hemos desarrollado genera una mejora en la competencia matemática de los alumnos de 3º de ESO a través de la resolución de problemas.

Por ejemplo, respecto a la comprensión de los enunciados, en el caso de la primera valoración que hicimos el 27,8% de los casos los alumnos comprendieron el problema, en la segunda valoración aumenta a un 36,1%, posteriormente, con el uso de los guiones, los resultados llegaron al 44,1% y un 48,8% medidos en dos muestras de cursos distintos en el caso del trabajo individual y un 71,4% en el caso de trabajo en grupo. Los profesores hemos observado una mejora en el alumnado, tanto en su actitud hacia los problemas como el interés que demuestran en la asignatura. Cuando le preguntamos a los alumnos un 59,6% opinan que han mejorado en la asignatura de matemáticas. Además, el 56,4% de los alumnos valoran que después del trabajo realizado durante casi dos trimestres pueden mejorar su rendimiento en otras asignaturas. Creemos que el trabajo desarrollado con la propuesta ha ayudado a los alumnos a captar la funcionalidad de las matemáticas y su utilidad para resolver problemas asociadas a otras áreas de conocimiento.

8.1. Propuestas

Creemos que vamos en el buen camino y que la propuesta es relativamente fácil de implementar en el aula. Pero también somos conscientes de que hay aspectos que se deben incluir. A continuación señalamos algunos:

- Valorar la utilización estrategias para entrenar a los alumnos en la comprensión lectora del enunciado.
- Desarrollar la propuesta en los dos primeros trimestres de cada curso e introducir en la propuesta problemas asociados a situaciones cotidianas durante el tercer trimestre.
- Durante la resolución de los problemas incluir apartados claramente identificables para cada una de las fases.
- Preparar un trabajo integrado entre diferentes asignaturas que resuelven problemas para introducirlos en la enseñanza de problemas en el área de matemáticas.
- Introducir algún tema más, además de las progresiones aritméticas y geométricas, para enseñar matemáticas a través de problemas

- Introducir la enseñanza de terminología matemática (o preparar un glosario de términos).
- Hemos visto en la encuesta que los alumnos valoran la utilización de los guiones, vemos interesante introducir alguna pregunta de respuesta abierta relacionada con el uso que le han dado a los guiones.
- Valorar introducir la reescritura o invención de problemas como tareas de los grupos promoviendo algún tipo de competición entre los grupos.
- Valorar introducir la competencia lingüística en la propuesta de una forma más sistemática.

Referencias Bibliográficas

- Alcaide, F., Hernández, J. Serrano, E., Moreno, M. y Pérez, A. (2015). Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. Madrid: SM.
- Algarabel, S., Dasí, D., Gotor, A. y Perea, M. (1995). Solución de problemas: una revisión de la importancia del uso de heurísticos y una evaluación de su utilización en matemáticas. *Revista española de pedagogía*, 54(203), 143-165.
- Alvira, F. (1985). La investigación evaluativa: Una perspectiva experimentalista. *Reis: Revista Española de Investigaciones Sociológicas*, (29), 129-141.
doi:10.2307/40183087
- Ayllón, M. F. y Castro, E. (2002). Invención de problemas por profesores de primaria en formación. *Actas de las Jornadas Investigación en el Aula De Matemáticas. Resolución De Problemas* (p.139-145). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada S.A.E.M. "THALES" Recuperado de <http://thales.cica.es/granada/?q=node/4>
- Beltrán, S. y Repetto, E. (2006). El entrenamiento en estrategias sobre la comprensión lectora del enunciado del problema aritmético: Un estudio empírico con estudiantes de educación primaria. *REOP*, 17(1), 33-48.
- Berini, M., Bosch, D., Casadevall, M., Guevara, I. y Sabaté, D. (2010). Las matemáticas no me han servido para nada... Pero dicen que las matemáticas son imprescindibles... *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 64, 15-24.
- Blanco, J. (1996). La resolución de problemas. Una revisión teórica. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 21, 11-20.
- Blanco, B. y Blanco, L. (2009). Contextos y estrategias en la resolución de problemas de primaria. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, (71), 75-85.
Recuperado de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/71/Volumen_71.pdf

- Blanco, L. y Cárdenas, J. (2013). La Resolución de Problemas como contenido en el Currículo de Matemáticas de Primaria y Secundaria. *Campo Abierto*, 32(1), 137-156.
- Borasi, R. (1986). On the nature of problems. *Educational studies in mathematics*, 17(2), 125-141.
- Bransford, J. D. y Stein, B. S. (1987). *Solución ideal de problemas: guía para mejor pensar, aprender y crear*. Barcelona: Labor
- Callejo, M. L. (1996). Evaluación de procesos y progresos del alumnado en la resolución de problemas. *UNO. Revista de Didáctica de la Matemática*, 8, 53-63.
- Callejo, M. L. y Zapatera, A. (2014). Flexibilidad en la resolución de problemas de identificación de patrones lineales en estudiantes de educación secundaria. *Bolema*, 28(48), 64-88.
- Camacho, M. y Santos Trigo, L. (2004). La relevancia de los problemas en el aprendizaje de las Matemáticas a través de la resolución de problemas. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 58, 45-60.
- Campaner, G., Capuano, V. y Gallino, M. (2013). *Enseñar y aprender con problemas*. Buenos Aires, Argentina: Jorge Sarmiento Editor - Universitas. Recuperado de <http://www.ebrary.com>
- Campistrous, L. y Rizo, C. (2013). *La resolución de problemas en la escuela*. En Morales, Y.; Ramírez, A. (Eds.), *Memorias I CEMACYC*. Santo Domingo, República Dominicana: CEMACYC. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/3741/>
- Cañadas, M. C. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas* (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, Granada.

- Carmona, M. T. P. y Flores, J. G. (2008). La evaluación orientada al aprendizaje en la Educación Superior: condiciones y estrategias para su aplicación en la docencia universitaria. *Revista española de pedagogía*, 66(241), 467-485.
- Carrillo, J., Contreras, L. C. y Zakaryan, D. (2013). Avance de un Modelo de Relaciones entre las Oportunidades de Aprendizaje y la Competencia Matemática. *Bolema*, 27(47), 779-804.
- Castro, E. (2002). La resolución de problemas desde la investigación en educación matemática. En Cardeñoso, J.M., Castro, E., Moreno, A.J., y Peñas, M. (Eds.), *Investigación en el Aula De Matemáticas. Resolución De Problemas* (pp. 219-226). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada S.A.E.M. "THALES" Recuperado de <http://thales.cica.es/granada/?q=node/4>
- Castro, E. (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. En Luengo, R.; Gómez, B.; Camacho, M.; Blanco, L. (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 113-140). Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Castro, M. (2011). ¿Qué sabemos de la medida de las competencias? Características y problemas psicométricos en la evaluación de competencias. *Bordón* 63(1), 109-123.
- Castro, W. F. y Godino, J. D. (2011). Métodos mixtos de investigación en las contribuciones a los simposios de la SEIEM (1997-2010). En Marín, M. et al (Eds), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 99-116). Ciudad Real: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Cerdán, F. (2008). *Estudios sobre la familia de problemas aritmético-algebraicos* (Tesis Doctoral). Universidad de Valencia, Valencia. Recuperado de <http://roderic.uv.es/handle/10550/15723>

- Chamorro, M. (2003). Las dificultades de lectura y comprensión de los problemas matemáticos escolares. *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, (33), 99-119.
- Coll, C. (2007). Las competencias en la educación escolar: algo más que una moda y mucho menos que un remedio. *Aula de Innovación Educativa*, 161, 34-39.
- Conejo, L. y Ortega, T. (2013). Clasificación de los problemas propuestos en aulas de Educación Secundaria Obligatoria. *Educación matemática*, 25(3), 129-158.
- Contreras, L. C. (2009). El papel de la resolución de problemas en el aula. *Revista Electrónica Iberoamericana de Educación en Ciencias y Tecnología*, 1(1), 37-96.
- Davis, J. (2013). Student understandings of numeracy problems: Semantic alignment and analogical reasoning. *The Australian Mathematics Teacher*, 69(2), 19-26.
- D'Amore, B. y Fandiño, M. I. (2015). Matemática de la cotidianidad. *Paradigma*, 2001(1), 59-72.
- Decreto 83/2016, de 4 de julio, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Canarias. Boletín Oficial de Canarias (BOC) Núm. 136, de 15 de julio de 2016, 136-2395.
- De Corte, E. (2015). Aprendizaje constructivo, autorregulado, situado y colaborativo: un acercamiento a la adquisición de la competencia adaptativa (matemática). *Páginas de Educación*, 8(2), 1-35.
- De la Fuente, C. (2015). En contexto: Progresiones aritméticas y modelización matemática. *UNO: Revista de Didáctica de la Matemática*, (70), 75-76.
- Delors, J. (1996). La educación encierra un tesoro. *Madrid: Santillana-UNESCO*.
- Deulofeu, J. y Mallart, A. (2012). Una estrategia para mejorar la comprensión de los enunciados de los problemas. *UNO. Revista de Didáctica de la Matemática*, 59, 83-92.

- Díaz, V. y Poblete, A. (2001). Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 45, 33-41.
- Escamilla, A. (2008). *Las competencias básicas. Claves y propuestas para su desarrollo en los centros*. Barcelona: Graó.
- Falcón, S., Medina, P. y Plaza, A. (2017). ¿Comprenden los alumnos los enunciados de los problemas? *Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas*, 103, 72-89.
- Faure, E. (1972). *Learning to be: The world of education today and tomorrow*. Unesco.
- Fernández-Bravo, J. A., Castillo, S. y Barbarán, J. J. (2010). La invención de problemas y el desarrollo de la Competencia Matemática. *eduPsykhé. Revista de Psicología y Educación*, 9(2), 221-234.
- Fernández, C. (2011). Análisis de temas en los libros de texto de matemáticas. *UNO. Revista de Didáctica de la Matemática*, 56, 77-85.
- Fernández, J. A. (2010). *La resolución de problemas matemáticos. Creatividad y razonamiento en la mente de los niños*. Madrid: Grupo Mayeútica-Educación.
- Fernández, J. A. (2008). *Técnicas creativas para la resolución de problemas matemáticos* (3ª ed.). Madrid: Wolters Kluwer.
- Fernández, J. (1995). Algunas contradicciones y dificultades de la resolución de problemas en el aula. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, (20), 53-60.
- Fernández-González, N. (2015). PISA como instrumento de legitimación de la reforma de la LOMCE. *Bordón*, 67(1), 165-178.
- Fetrow, J. (2009). *Word Problems*. ERIC Number: ED506237. Recuperado de <https://eric.ed.gov/?id=ED506237>
- Font, V. (1994). Motivación y dificultades de aprendizaje en matemáticas. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 17, 10-16.

- Forteza, M. (2009). Metodologías didácticas para la enseñanza/aprendizaje de competencias. Trabajo presentado en Curso CEFIRE: “*Competencias en el ámbito de las ciencias experimentales. Programar y trabajar por competencias*”. Castellón, España.
- Gago, J. (2011). Competencia matemática y resolución de problemas. *Revista Autodidacta*, 5, 106-110.
- Gallego, D. y Nevot, A. (2008). Los estilos de aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. *Revista complutense de educación*, 19(1), 95-112.
- Gallino, M., Campaner, G. y Capuano, V. (2013). *Enseñar y aprender con problemas*, Córdoba: Jorge Sarmiento Editor - Universitas.
- García, J. E. (2002). Resolución de problemas y desarrollo de capacidades. *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 8(29), 20-37.
- García, A. y Fínez, M. (2012). Competencias básicas: Un marco legislativo, teórico y aplicativo. *International Journal of Developmental and Educational Psychology: INFAD.Revista de Psicología*, 2(1), 59-68.
- García, M. y Suhit, G. (2006). Resolución de problemas...Un camino para aprender a aprender. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 19. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/5369/1/GarciaResolucionAlme2006.pdf>
- Gasco, J. (2013). La resolución de problemas en el currículo de matemáticas de Educación Secundaria. *Ikastorratza, e-Revista de didáctica*, 10, 4-8. Recuperado de <https://dialnet-unirioja-es.bibproxy.ulpgc.es/servlet/articulo?codigo=4476810>
- Gaulin, C. (2001). Tendencias actuales de la resolución de problemas. *Sigma: revista de matemáticas*, 19, 51-63. Recuperado de <http://www.sectormatematica.cl/articulos/Tendencia.pdf>
- Godino, J. D. (2002). Competencia y comprensión matemática: ¿qué son y cómo se consiguen? *UNO. Revista de Didáctica de la Matemática*, 8 (29), 9-19.

- Godino, J.D., Batanero, C. y Font, V. (2004). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En J. D. Godino (Dir). *Matemáticas para maestros* (pp.5-154). Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/8_matematicas_maestros.pdf
- Gómez, C. (1998). Números racionales y razonamiento proporcional: una propuesta curricular basada en los estándares del NCTM. *Revista EMA*, 3(2), 123-134.
- Goñi, J. (2009). El desarrollo de la competencia matemática en el currículo escolar de la Educación Básica. *Educatio Siglo XXI*, 27(1), 33-58.
- Guzmán, M. D. (1991). *Para pensar mejor*. Barcelona: Labor.
- Hernández, J. M. (2000). Los textos como contextos culturales matemáticos. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, 23, 71-84.
- Hernández, J. y Socas, M. (1994). Modelos de competencia para la resolución de problemas basados en los sistemas de representación en Matemáticas. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 16, 82-90.
- Hidalgo, S., Maroto, A., Ortega, T. y Palacios, A. (2013). Actitudes y estrategias en el aprendizaje de las Matemáticas. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, 63, 89-97.
- Jonassen, D. H. (2004). Learning to solve problems: An instructional design guide (Vol. 6). San Francisco: John Wiley y Sons.
- Juidías, J. y Rodríguez, I. (2007). Dificultades de aprendizaje e intervención psicopedagógica en la resolución de problemas matemáticos. *Revista de Educación*, 342, 257-286.
- Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, 7(3), 229-240.

- Kilpatrick, J., Gómez, P. y Rico, L. (1998). *Educación matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia*. Bogotá, Colombia: Una empresa docente. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/679/>
- Larios, V. (1998). Constructivismo en tres patadas. *Revista Gaceta COBAQ*, 15(132), 10-13.
- Lee, S. Y. (2011). The effect of alternative solutions on problem solving performance. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*. Recuperado de <https://pdfs.semanticscholar.org/dd59/83fb9a34efe34b8e9edb31ce0d206970973a.pdf>
- Lester, F. K. y Mau, S. T. (1993). Teaching mathematics via problem solving: A course for prospective elementary teachers. *For the learning of mathematics*, 13(2), 8-11.
- Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE). *Boletín Oficial del Estado*. Madrid, 4 de octubre de 1990, núm. 238, pp. 28927-28942.
- Ley Orgánica 10/2002, de 23 de diciembre de Calidad de la Educación (LOCE). *Boletín Oficial del Estado*. Madrid, 24 de diciembre de 2002, núm. 307, pp. 45188-45220.
- Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOE). *Boletín Oficial del Estado*. Madrid, 4 de mayo de 2006, núm. 106, pp. 17158-17207.
- Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (LOMCE). *Boletín Oficial del Estado*. Madrid, 10 de diciembre de 2013, núm. 295, pp. 97858-97921.
- Limón, M. y Carretero, M. (1995). Razonamiento y solución de problemas con contenido histórico, en Carretero, M.: *Construir y enseñar: la Historia y las Ciencias Sociales*. Madrid: Visor
- Lorenzo, M. (2005). The development, implementation, and evaluation of a problem solving heuristic. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 3, 33-58

- Lozano, P. y Hernández, M. A. (2014). ¿Pueden nuestros estudiantes construir conocimientos matemáticos? *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 85, 49-73.
- Luque, F. (2002). Experiencias sobre la resolución de problemas en el aula de Secundaria. *Actas de las Jornadas Investigación en el Aula De Matemáticas. Resolución De Problemas* (p.219-226). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada S.A.E.M. "THALES" Recuperado de <http://thales.cica.es/granada/?q=node/4>
- Marín, A. y Lupiáñez, J. L. (2005). Principios y estándares para la educación matemática: una visión de las matemáticas escolares. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 48, 105-110.
- Martínez, J. y Sánchez, C. (2013). *Resolución de problemas y método ABN*. Madrid, España: Wolters Kluwer.
- MECD. (2013). Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: Matemáticas, Lectura y Ciencias. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.
- Mederos, O. y Martínez, J. (2005). La resolución de problemas y la formación y desarrollo de conceptos. El concepto de media numérica. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 62, 53-63.
- Millas, J., Fraguas, A. y Forges, A. (2002). Un informe muy citado. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 40, 133-140.
- Molina, M., Castro, E., Molina, J.L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(1), 75-88.
- Monroe, E. y Panchyshyn, R. (2005). Helping children with words in word problems. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 10(4), 27.

- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1980). *An Agenda for Action: Recommendations for school mathematics of the 1980s*. Reston, VA: Author.
- Niss, M. A. (2003). *Mathematical competencies and the learning of mathematics*. Trabajo presentado en la III Mediterranean Conference on Mathematical Education- Athens. Recuperado de <https://equipsice-uab-cat.bibproxy.ulpgc.es/login/index.php>
- Núñez, R., Valdés, C. y Solana, M. (2001). El seminario de problemas: un espacio para la alfabetización en resolución de problemas. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 38, 39-46.
- OCDE (2005). *La Definición y Selección de Competencias Clave (DeSeCo). Resumen Ejecutivo*. Recuperado de <http://comclave.educarex.es/mod/resource/view.php?id=56>
- OCDE (2006). *Marco de la evaluación. Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura*. París: OCDE.
- OCDE (2015). PISA 2015. Resultados Clave. Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico. Recuperado de <https://www.oecd.org/pisa/pisa-2015-results-in-focus-ESP.pdf>
- Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. *Boletín Oficial del Estado*. Madrid, 29 de enero de 2015, núm. 25, pp. 6986-7003
- Ortega, T., Pecharromán, C. y Sosa, P. (2011). La importancia de los enunciados de problemas matemáticos. *Educatio Siglo XXI*, 29(2).
- Parlamento Europeo y Consejo de la Unión Europea (2006). Recomendación del Parlamento Europeo y del Consejo de 18 de diciembre del 2006 sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente. *Diario Oficial de la Unión Europea*. 394, 10-18. Recuperado de <http://eur-lex.europa.eu/legal-content/ES/TXT/?uri=celex%3A32006H0962>

- Pellicer, C. y Ortega, M. (2009). *La evaluación de las competencias básicas. Propuestas para evaluar el aprendizaje*. Madrid, España: PPC, Editorial y Distribuidora, S.A.
- Pérez, R. (2015). Resolución de problemas y modelización matemática para la clase. *UNO. Revista de Didáctica de la Matemática*, 69, 7-21.
- Pérez, R., García, J.L., Gil, J.A. y Galán, A. (2009). *Estadística aplicada a la educación*. Madrid: Pearson Educación.
- Pifarré, M. y Sanuy, J. (2001). La enseñanza de estrategias de resolución de problemas matemáticos en la ESO: Un ejemplo concreto. *Enseñanza de las ciencias*, 19(2), 297-308. Recuperado de <http://search.proquest.com.bibproxy.ulpgc.es/docview/619640108?accountid=14705>
- Pino, J. y Blanco, L. J. (2008). Análisis de los problemas de los libros de texto de Matemáticas para alumnos de 12 a 14 años de edad de España y de Chile en relación con los contenidos de proporcionalidad. *Publicaciones*, 38, 63-88.
- Polya, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas* (15a ed.). México: Trillas.
- Pons, R. M., González-Herrero, M. E. y Serrano, J. M. (2008). Aprendizaje cooperativo en matemáticas: Un estudio intracontenido. *Anales de psicología*, 24(2), 253-261.
- Ponte, J. P. (2004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. En J. Giménez, L. Santos, y J. P. Ponte (Eds.). *La actividad matemática en el aula* (pp. 25-34). Barcelona: Graó.
- Pozo, J. I., Pérez, M. y Domínguez, J. (1994). *La solución de problemas*. Madrid: Santillana.
- Pugalee, D. (2004). A comparison of verbal and written descriptions of students' problem solving processes. *Educational Studies in Mathematics*, 55, 27-47.

- Puig, L. (2008). Presencia y ausencia de la resolución de problemas en la investigación y el currículo. En *XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM XII)* (pp.93-112). Badajoz. España.
- Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.
- Puig, L. y Cerdán, F. (1990). Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales. En *Memorias del Segundo Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática* (pp. 35-48). Cuernavaca. México.
- Real Decreto 1007/1991, de 14 de Junio, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado*. Madrid, 26 de junio de 1991, núm. 152, pp. 21193-21195.
- Real Decreto 116/2004, de 23 de enero, por el que se desarrolla la ordenación y se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado*. Madrid, 10 de febrero de 2004, núm. 35, pp. 5712-5791.
- Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado*. Madrid, 5 de enero de 2007, núm. 5, pp. 677-773.
- Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado*. Madrid, 3 de enero de 2015, núm. 3, pp.169-546.
- Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA*, 1(2), 47-66 .
- Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, 4(1), 1-14.
- Rico, L. (2012). *Construcción de modelos matemáticos y resolución de problemas*. Madrid: Secretaría General Técnica. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.
- Rodríguez-Domingo, S. y Molina, M. (2013). De lo verbal a lo simbólico: un paso clave en el uso del álgebra como herramienta para la resolución de problemas y la modelización matemática. En Rico, L., et al. (eds.). *Investigación en didáctica de*

- la matemática: homenaje a Encarnación Castro*, pp.111-118. Granada: Comares.
Recuperado de <http://hdl.handle.net/10481/33497>
- Ruano, M., Socas, M. y Palarea, M. (2015). El proceso de generalización en alumnos de secundaria. *UNO. Revista De Didáctica De La Matemática*, 57, 32-42.
- Ruiz-Munzón, N., Bosch, M. y Gascón, J. (2011). Un modelo epistemológico de referencia del algebra como instrumento de modelización. *Un panorama de la TAD*, 10, 743-765.
- Sánchez, D. (Dir). (2014). *Matemáticas Enseñanzas Académicas. Serie Resuelve*. Madrid, España: Santillana.
- Sánchez, J. y Fernández, J. (2003). *La enseñanza de la matemática: fundamentos teóricos y bases psicopedagógicas*. Madrid: CCS.
- Sánchez, M. R. y Vicente, S. (2015). Modelos y procesos de resolución de problemas aritméticos verbales propuestos por los libros de texto de matemáticas españoles. *Cultura y Educación: Revista de teoría, investigación y práctica*, 27(4), 710-725.
- Santos, L. (2011). Evaluar para aprender matemáticas. *UNO. Revista De Didáctica De La Matemática*, 68, 18-29.
- Santos, L. (2008). *La resolución de problemas matemáticos: avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica*. En Luengo, R.; Gómez, B.; Camacho, M.; Blanco, L. (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 159-192). Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.
- Schoenfeld, A. (2007). Problem solving in the United States, 1970–2008: research and theory, practice and politics. *ZDM Mathematics Education*, 39, 537–551.
- Serrado, A. y Cardeñoso, J. M. (2002). La resolución de problemas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de educación secundaria obligatoria.

- Actas de las Jornadas Investigación en el Aula De Matemáticas. Resolución De Problemas* (p.219-226). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada S.A.E.M. “THALES” Recuperado de <http://thales.cica.es/granada/?q=node/4>
- Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación. *revista Ema*, 6(1), 3-26.
- Socas, M. (2011). La enseñanza del álgebra en la educación obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 77, 5-34.
- Socas, M., Hernández, J. y Palarea, M. M. (2014). *Dificultades en la resolución de problemas de matemáticas de estudiantes para profesor de educación primaria y secundaria*. En González, J.L.; Fernández-Plaza, J.A.; Castro-Rodríguez, E.; Sánchez, M. T.; Fernández, C.; Lupiáñez, J. L.; Puig, L. (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática - 2014* (pp. 145-154). Málaga: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).
- Solar, H., García, B., Rojas, F. y Coronado, A. (2014). Propuesta de un Modelo de Competencia Matemática como articulador entre el currículo, la formación de profesores y el aprendizaje de los estudiantes. *Educación matemática*, 26(2), 33-67.
- Solaz-Portolés, J. J., Rodríguez, C., Gómez, A. y Sanjosé, V. (2010). Conocimiento metacognitivo de las estrategias y habilidades mentales utilizadas para resolver problemas: un estudio con profesores de ciencias en formación. *Didáctica de las Ciencias Experimentales y Sociales*, 24, 139-152.
- Solaz-Portolés, J. J., Sanjosé, V. y Gómez, A. (2013). Aprendizaje basado en problemas en la Educación Superior: una metodología necesaria en la formación del profesorado. *Didáctica de las Ciencias Experimentales y Sociales*, 25, 177-186.
- Swetz, F. J. (2013). *Expediciones matemáticas: la aventura de los problemas matemáticos a través de la historia*. Madrid: La Esfera de los Libros.

- Tárraga, R. (2008). Relación entre rendimiento en solución de problemas y factores afectivo-motivacionales en alumnos con y sin dificultades del aprendizaje. *Apuntes de psicología*, 26(1), 143-148.
- Toboso, J. (2004). *Evaluación de habilidades cognitivas en la resolución de problemas matemáticos* (Tesis doctoral). Universidad de Valencia, Valencia. Recuperado de <http://www.tesisenxarxa.net/TDX-0519105-125833/>
- Urquhart, V. (2009). Using Writing in Mathematics to Deepen Student Learning. *Mid-continent Research for Education and Learning (McREL)*.
- Valverde, G. (2013). Competencias Matemáticas promovidas desde la razón y la proporcionalidad en la formación inicial de maestros de educación primaria (Tesis Doctoral). Universidad de Granada. Granada, España.
- Verschaffel, L., Van Dooren, W., Greer, B. y Mukhopadhyay, S. (2010). Reconceptualising word problems as exercises in mathematical modelling. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31(1), 9-29.
- Vicente, S. y Manchado, E. (2016). Resolución de problemas aritméticos verbales. ¿Se resuelven mejor si se presentan como problemas auténticos? *Infancia y Aprendizaje*, 39(2), 349-379.
- Vicente, S., Orrantia, J. y Verschaffel, L. (2008). Influencia del conocimiento matemático y situacional en la resolución de problemas aritméticos verbales: ayudas textuales y gráficas. *Infancia y Aprendizaje*, 31(4), 463-483.
- Vila, A. y Callejo, M. L. (2004). *Matemáticas para aprender a pensar*. Madrid: Narcea.
- Zakaryan, D. (2011). *Oportunidades de aprendizaje y competencias matemáticas de estudiantes de 15 años. Un estudio de casos* (Tesis Doctoral). Universidad de Huelva. España.

Anexos

Anexo I: Breve recorrido histórico del tratamiento de la resolución de problemas en el sistema educativo español

En 1990 se publica la Ley Orgánica General del Sistema Educativo (LOGSE) (Ley Orgánica 1/1990) en esta ley en su propuesta de los elementos que constituyen el currículo aparecen los objetivos, contenidos, métodos y criterios de evaluación.

A continuación presentamos la revisión que hemos realizado de los elementos que constituyen el currículo en el decreto de enseñanzas mínimas que desarrolla el currículo de la enseñanza secundaria en la LOGSE (Real Decreto 1007/1991).

Entre los doce objetivos propuestos que deben alcanzar los alumnos a lo largo de la Educación Secundaria en uno de ellos podemos leer que, los alumnos deben ser capaces de “elaborar estrategias de identificación y resolución de problemas en los diversos campos del conocimiento y la experiencia, mediante procedimientos intuitivos y de razonamiento lógico, contrastándolas y reflexionando sobre el proceso seguido” (p.21194). Proponen por lo tanto que la resolución de problemas es una capacidad que los alumnos deben desarrollar a lo largo de la educación secundaria y a la que deben contribuir todas las áreas que forman parte del currículo.

En el anexo del decreto de enseñanzas mínimas, en el desarrollo del currículo del área de matemáticas, en la introducción encontramos una relación explícita entre la enseñanza de las matemáticas y la resolución de problemas:

Es necesario relacionar los contenidos de aprendizaje de las matemáticas con la experiencia de alumnos y alumnas, así como presentarlos y enseñarlos en un contexto de resolución de problemas y de contraste de puntos de vista en esta resolución. En relación con ello, hay que presentar las matemáticas como un conocimiento que sirve para almacenar una información que de otro modo resultaría inasimilable, para proponer modelos que permiten comprender procesos complejos del mundo natural y social, y para resolver problemas de muy distinta naturaleza; y que todo ello es posible gracias a

la posibilidad de abstracción, simbolización y formalización propia de las matemáticas.(p.67)

Se valora la necesidad de enseñar los contenidos matemáticos en un contexto de resolución de problemas y por lo tanto ir más allá del aprendizaje memorístico de procedimientos y realización de ejercicios.

En la LOGSE se proponen lo que denomina objetivos generales del área, en el caso de matemáticas encontramos las siguientes referencias: “Utilizar las formas de pensamiento lógico para formular y comprobar conjeturas, realizar inferencias y deducciones, y organizar y relacionar informaciones diversas relativas a la vida cotidiana y a la resolución de problemas”. “Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos, y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados”. Y por último:

Actuar, en situaciones cotidianas y en la resolución de problemas, de acuerdo con modos propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones. (p.68)

Como conclusión podemos decir que en el desarrollo curricular se plantean diez objetivos generales para trabajar en el área de matemáticas y tres de ellos tienen una relación directa con la resolución de problemas.

Respecto a los contenidos, es importante resaltar el hecho de que en dicha ley los contenidos se presentaban diferenciados en tres tipos: conceptos, procedimientos y actitudes. En el bloque que denomina, “Números y operaciones”, aparece como procedimiento una referencia a la utilización del método de análisis-síntesis para resolver problemas numéricos. Además, en los contenidos actitudinales de este bloque encontramos “confianza en las propias capacidades para afrontar problemas y realizar cálculos y estimaciones” (p.68). En el bloque de “Representación y organización en el espacio” hace referencia a un contenido procedimental que propone la “reducción de problemas complejos a otros más sencillos para facilitar su comprensión y resolución” (p.69). Entre

los contenidos actitudinales tenemos como referencias la “perseverancia y flexibilidad en la búsqueda y mejora de soluciones a los problemas”, además de “interés y respeto por las estrategias y soluciones a problemas distintas de las propias” (p.69).

A continuación reproducimos los criterios de evaluación que hacen referencia explícita a la resolución de problemas:

- Utilizar los números enteros, decimales y fraccionarios y los porcentajes para intercambiar información y resolver problemas y situaciones de la vida cotidiana.
- Resolver problemas para los que se precise la utilización de las cuatro operaciones, las potencias y las raíces cuadradas, con números enteros, decimales y fraccionarios, eligiendo la forma de cálculo apropiada y valorando la adecuación del resultado al contexto.
- Utilizar convenientemente aproximaciones por defecto y por exceso de los números acotando el error, absoluto o relativo, en una situación de resolución de problemas, desde la toma de datos hasta la solución.
- Resolver problemas de la vida cotidiana por medio de la simbolización de las relaciones que puedan distinguirse en ellos y, en su caso, de la resolución de ecuaciones de primer grado.
- Identificar relaciones de proporcionalidad numérica y geométrica en situaciones diversas y utilizarlas para el cálculo de términos proporcionales y razones de semejanza en la resolución de problemas.
- Utilizar estrategias sencillas, tales como la reorganización de la información de partida, la búsqueda de ejemplos, contraejemplos y casos particulares o los métodos de “ensayo y error” sistemático, en contextos de resolución de problemas.

Los criterios de evaluación que hacen referencia a la resolución de problemas son seis de los trece que aparecen propuestos en dicha ley para la asignatura de matemáticas, hay que tener en cuenta que deben evaluarse a lo largo de los cuatro cursos de secundaria. Uno de

los criterios de evaluación más específico a la resolución de problemas hace referencia a la utilización de estrategias sencillas.

En diciembre de 2002 se publica la Ley Orgánica de Calidad de la Educación (LOCE) (Ley Orgánica 10/2002), para analizar la presencia de la resolución de problemas hemos revisado el decreto que desarrolla la ordenación y establece el currículo de la educación secundaria (Real Decreto 116/2004). En las capacidades que los alumnos deberán desarrollar a lo largo de esta etapa encontramos:

Concebir el conocimiento científico como un saber integrado que se estructura en distintas disciplinas, matemáticas y científicas, y conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia, para su resolución y para la toma de decisiones. (p.5713)

En el desarrollo del currículo de matemáticas podemos leer que “la resolución de problemas debe contemplarse como una práctica habitual integrada en todas y cada una de las facetas que conforman el proceso de enseñanza y aprendizaje” (p.5766).

En los objetivos encontramos “aplicar a situaciones de la vida diaria, con soltura y adecuadamente, las herramientas matemáticas adquiridas” y “resolver problemas matemáticos, utilizando diferentes estrategias, procedimientos y recursos, desde la intuición hasta los algoritmos” (p.5767). Encontramos dos objetivos relacionados con la resolución de problemas de los nueve que se plantean para trabajar en el área de matemáticas.

En el nivel de tercero de educación secundaria en el bloque de contenidos encontramos:

Resolución de problemas de la vida cotidiana por tanteo, por medio de ecuaciones y sistemas de ecuaciones de primer grado o por otros métodos numéricos y gráficos. Interpretación crítica de la solución.

Resolución de problemas relacionados con la vida real y en los que se propongan el cálculo de longitudes y áreas de las figuras planas y sus configuraciones geo- métricas elemental.

Estudio gráfico y algebraico de las funciones constantes, lineales y afines. Interpretación y lectura de gráficas en problemas relacionados con los de la vida cotidiana y el mundo de la información. (p.5769)

Como podemos ver no propone la resolución de problemas como objeto de aprendizaje sino como campo de aplicación de los contenidos previamente aprendidos.

En los criterios de evaluación encontramos que dos criterios de evaluación de los diecisiete propuestos hacen referencia a la resolución de problemas.

- Utilizar convenientemente las aproximaciones decimales, las unidades de medida usuales y las relaciones de proporcionalidad numérica para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana.
- Resolver problemas sencillos utilizando métodos numéricos, gráficos o algebraicos, cuando se basen en la utilización de fórmulas conocidas o en el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer grado o de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

En mayo de 2006 se publica la Ley Orgánica de Educación (LOE)(Ley Orgánica 2/2006). Según esta ley los elementos que constituyen el currículo son los objetivos, competencias básicas, contenidos, los métodos pedagógicos y criterios de evaluación. La gran novedad en esta ley con respecto a la anterior es la aparición de las competencias básicas.

En la LOE en los objetivos de la Educación Secundaria Obligatoria no encontramos ningún objetivo relacionado con la resolución de problemas, aunque si aparece sobre la identificación de los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.

A continuación presentamos la revisión que hemos realizado de los elementos que constituyen el currículo en el decreto de enseñanzas mínimas (Real Decreto 1631/2006) que desarrolla el currículo de la enseñanza secundaria en la LOE.

En la introducción del currículo del área de matemáticas encontramos que considera la resolución de problemas como un tema básico del currículo. Por este motivo introduce en

los cuatro cursos de secundaria un bloque de contenidos comunes “que constituye el eje transversal vertebrador de los conocimientos matemáticos que abarca” (p.750). Se entiende por lo tanto, que los contenidos propuestos en este bloque deben trabajarse en todos los contenidos propuestos en el currículo de matemáticas. Pero la experiencia es que muchos profesores no prestaban la atención necesaria a este bloque de contenidos, centrándose en el resto de los contenidos e intentando resolver problemas en cada bloque de contenidos. En este bloque se valora la resolución de problemas por su capacidad “de activar las capacidades básicas del individuo, como son leer comprensivamente, reflexionar, establecer un plan de trabajo, revisarlo, adaptarlo, generar hipótesis, verificar el ámbito de validez de la solución, etc., pues no en vano es el centro sobre el que gravita la actividad matemática en general” (p.750). Como vemos ya se relaciona la resolución de problemas con la actividad matemática y se le da un papel muy importante en el currículo de matemáticas, independientemente de que la presencia de la competencia matemática en la ley.

Entre los once objetivos de la enseñanza de las matemáticas en la etapa secundaria encontramos cuatro objetivos que hacen referencia directa a la resolución de problemas:

- Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
- Actuar ante los problemas que se plantean en la vida cotidiana de acuerdo con modos propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.
- Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.
- Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en la propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito y adquirir un nivel de

autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos y utilitarios de las matemáticas.

A diferencia de lo que ocurría en la LOGSE, en el desarrollo del currículo de la LOE encontramos una diferenciación de los contenidos por cursos, y además, tampoco aparece la diferenciación de los contenidos entre conceptos, procedimientos y actitudes. Debido a que nuestro trabajo se centra en tercero de secundaria hemos realizado la identificación de la resolución de problemas en este nivel.

En el bloque de contenidos, en el bloque I que denomina “Contenidos comunes” que es transversal a toda la etapa y se debe trabajar en todos los cursos. Encontramos, en este bloque, respecto a la resolución de problemas: “Planificación y utilización de estrategias en la resolución de problemas tales como el recuento exhaustivo, la inducción o la búsqueda de problemas afines, y comprobación del ajuste de la solución a la situación planteada” (p.755). Además, añade la necesidad la utilizar la terminología precisa en la expresión verbal de las relaciones y procedimientos utilizados. La confianza de los alumnos en su capacidad para enfrentarse a los problemas y tomar decisiones en función de los resultados obtenidos. Incluyendo una actitud de “perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones a los problemas y en la mejora de las encontradas” (p.756). En el bloque denominado “Números” plantea la “utilización de aproximaciones y redondeos en la resolución de problemas de la vida cotidiana con la precisión requerida por la situación planteada” (p.756). En el bloque de álgebra señala como contenido la “resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones, sistemas y otros métodos personales. Valoración de la precisión, simplicidad y utilidad del lenguaje algebraico para resolver diferentes situaciones de la vida cotidiana” (p.756). En el bloque de geometría “coordenadas geográficas y husos horarios. Interpretación de mapas y resolución de problemas asociados” (p.756).

En cuanto a la resolución de problemas en los criterios de evaluación encontramos:

- Utilizar los números racionales, sus operaciones y propiedades, para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria.

- Expresar mediante el lenguaje algebraico una propiedad o relación dada mediante un enunciado y observar regularidades en secuencias numéricas obtenidas de situaciones reales mediante la obtención de la ley de formación y la fórmula correspondiente, en casos sencillos.
- Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado o de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Planificar y utilizar estrategias y técnicas de resolución de problemas tales como el recuento exhaustivo, la inducción o la búsqueda de problemas afines y comprobar el ajuste de la solución a la situación planteada y expresar verbalmente con precisión, razonamientos, relaciones cuantitativas, e informaciones que incorporen elementos matemáticos, valorando la utilidad y simplicidad del lenguaje matemático para ello.

De los ocho criterios de evaluación propuestos encontramos cuatro relacionados con la resolución de problemas, pero hay que resaltar que existe un criterio de evaluación que no aparece asociado a ningún contenido explícito. A continuación presentamos la explicación que propone el currículo para este criterio, que creemos que justifica la necesidad de introducir la resolución de problemas como un contenido a enseñar.

Se trata de evaluar la capacidad para planificar el camino hacia la resolución de un problema e incorporar estrategias más complejas a su resolución. Se evalúa, así mismo, la perseverancia en la búsqueda de soluciones, la coherencia y ajuste de las mismas a la situación que ha de resolverse así como la confianza en la propia capacidad para lograrlo. También, se trata de valorar la precisión del lenguaje utilizado para expresar todo tipo de informaciones que contengan cantidades, medidas, relaciones, numéricas y espaciales, así como estrategias y razonamientos utilizados en la resolución de un problema. (p.757)

A continuación presentamos una tabla que recoge aspectos del currículo en las diferentes leyes educativas teniendo en cuenta la presencia de la resolución de problemas.

Tabla 41: Tratamiento de la RP en los últimos sistemas educativos

	LOGSE (1990)	LOCE (2002)	LOE (2006)	LOMCE (2014)
Objetivos de etapa	X	X		X
Objetivos del área de matemáticas	X	X	X	X
Contenidos	X	X	X	X
Contenidos RP			X	X
Criterios de Evaluación	X	X	X	X
Competencias			X	X
Estándares de Aprendizaje Evaluables				X

Contenidos: hace referencia a la resolución de problemas asociado a otros contenidos matemáticos.

Contenidos RP: contenidos propios de la resolución de problemas.

Fuente: Elaboración propia a partir del desarrollo normativo.

Como conclusión podemos decir que en la LOGSE se dio mucha importancia a la resolución de problemas, hasta el punto de ser uno de los doce objetivos que deben alcanzar los alumnos en la etapa secundaria. Probablemente los resultados no fueron los esperados cuando se diseñó la ley y el motivo pudo ser que no se concretaba en el trabajo a desarrollar en el aula por lo que los profesores no le prestaron la atención esperada. Hay una presencia importante de la resolución de problemas en los elementos curriculares de la LOGSE en el área de matemáticas, en concreto tres de los diez objetivos del área de matemáticas tienen relación con la resolución de problemas. Pero no se plantea como objeto de aprendizaje sino que aparece como práctica o ejercitación de los contenidos matemáticos. En la LOCE se reducen a dos los objetivos relacionados con la resolución de problemas de los nueve propuestos en total, y tampoco se plantea como objeto de aprendizaje sino como práctica de contenidos aprendidos. En la LOE no aparece una referencia a la resolución de problemas en los objetivos de la etapa

secundaria y en el caso de los objetivos del área de matemáticas hay cuatro objetivos de los once propuestos que hablan específicamente de aspectos sobre la resolución de problemas. Además, aparecen contenidos específicos de la resolución de problemas y contenidos donde proponen trabajar problemas con la que la resolución de problemas se convierten en objeto de aprendizaje. Aunque quizás el aspecto más importante es la aparición de la competencia matemática, con una gran influencia de la resolución de problemas, como una de las ocho competencias propuestas que debían trabajarse en todas las áreas, y no exclusivamente en el área de matemáticas. Una consideración importante es que las competencias debían ser evaluadas, y como los profesores suelen decir lo que no se evalúa no existe en el currículo.

En la LOMCE entendemos que se refuerza la resolución de problemas por diferentes motivos: aparece en los objetivos de la etapa, se insiste en la presencia de los problemas como objeto de enseñanza, se consolida el trabajo por competencias y se llegan a concretar mucho más los criterios de evaluación proponiendo los estándares de aprendizaje evaluables. A modo de ejemplo, en la asignatura de matemáticas orientadas a la actividad académica de 3º ESO, se proponen 22 estándares evaluables para la resolución de problemas como objeto de aprendizaje y otros 12 asociados a contenidos de los 82 estándares que se proponen para toda la asignatura, es decir, un 41,5% de los estándares hacen referencia a la resolución de problemas.

Anexo II: La contribución de la resolución de problemas a las competencias clave

En este apartado queremos realizar una reflexión sobre la contribución que entendemos que puede tener el trabajar problemas en el aula de matemáticas en el resto de las competencias clave propuestas en la ley.

Según la orden por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato (Orden ECD/65/2015) respecto a la competencia en comunicación lingüística “es el resultado de la acción comunicativa dentro de prácticas sociales determinadas, en las cuales el individuo actúa con otros interlocutores y a través de textos en múltiples modalidades, formatos y soportes” (p.6991). La lectura comprensiva de los enunciados es muy importante en los procesos de resolución de problemas, el análisis de la información, la argumentación y la comunicación oral y por escrito de los procesos seguidos, la formulación de preguntas, el debate generado en los grupos, la comunicación de los resultados, etc. Por todo esto es comprensible que si los alumnos trabajan problemas, especialmente en grupo pequeño donde tiene lugar una interacción entre los compañeros, mejorarán su competencia lingüística.

Respecto a las competencias en ciencia y tecnología la misma orden indica que “han de capacitar, básicamente, para identificar, plantear y resolver situaciones de la vida cotidiana –personal y social– análogamente a como se actúa frente a los retos y problemas propios de la actividades científicas y tecnológicas” (p.6994). Mejorar la capacidad de resolver problemas en el área de matemáticas favorecerá que los alumnos identifiquen y sean capaces de comprender mejor los problemas relacionados con la ciencia y la tecnología. Habituar a trabajar problemas mejorará la actitud de los alumnos ante ellos y entender la transferencia de conocimientos entre distintas áreas como una necesidad para el desarrollo científico y tecnológico.

Según la orden, respecto a la competencia digital, dice que “la persona ha de ser capaz de hacer un uso habitual de los recursos tecnológicos disponibles con el fin de resolver los problemas reales de un modo eficiente” (p.6996). Los alumnos deben ver la tecnología

como un recurso para resolver problemas. Existen numerosos recursos tecnológicos que pueden favorecer la representación visual de la situación propuesta en el enunciado del problema, el tratamiento de los datos, facilitar la revisión de los cálculos de los procedimientos o incluso realizar los mismos cálculos.

La competencia de aprender a aprender tiene un fuerte componente motivacional, en la orden que describe esta competencia, la motivación por aprender “depende de que se genere la curiosidad y la necesidad de aprender, de que el estudiante se sienta protagonista del proceso y del resultado de su aprendizaje y, finalmente, de que llegue a alcanzar las metas de aprendizaje propuestas” (p.6997). Por lo que creemos que este componente actitudinal se debe trabajar en los procesos de resolución de problemas que llevemos a cabo en el aula, precisamente en los procesos de construcción de contenidos, ir generando confianza en sus capacidades, además de introducir un cierto elemento de reto cuando los alumnos se enfrenten a los problemas. Además, en la orden se proponen tres estrategias que proporcionen reflexión cuando los alumnos resuelvan problemas:

un proceso reflexivo que permite pensar antes de actuar (planificación), analizar el curso y el ajuste del proceso (supervisión) y consolidar la aplicación de buenos planes o modificar los que resultan incorrectos (evaluación del resultado y del proceso). Estas tres estrategias deberían potenciarse en los procesos de aprendizaje y de resolución de problemas en los que participan los estudiantes. (p.6997)

La capacidad de enfrentarse a situaciones problemáticas cotidianas es una de las capacidades que deben desarrollar los futuros ciudadanos, por lo que convertir la resolución de problemas en objeto de aprendizaje junto con el trabajo en el aula en pequeño grupo fomentando el intercambio de ideas y el respeto a la participación y rol de cada uno contribuye a que los alumnos vayan desarrollando la competencia social y cívica.

A continuación vamos a intentar identificar si la resolución de problemas puede contribuir al desarrollo de la competencia de iniciativa y espíritu emprendedor. En la orden que la describe respecto a esta competencia encontramos que:

implica la capacidad de transformar las ideas en actos. Ello significa adquirir conciencia de la situación a intervenir o resolver, y saber elegir, planificar y gestionar los conocimientos, destrezas o habilidades y actitudes necesarios con criterio propio, con el fin de alcanzar el objetivo previsto. (p.6999)

Además en la descripción añade otras destrezas o habilidades requeridas para ir desarrollando esta competencia:

capacidad de análisis; capacidades de planificación, organización, gestión y toma de decisiones; capacidad de adaptación al cambio y resolución de problemas; comunicación, presentación, representación y negociación efectivas; habilidad para trabajar, tanto individualmente como dentro de un equipo; participación, capacidad de liderazgo y delegación; pensamiento crítico y sentido de la responsabilidad; autoconfianza, evaluación y autoevaluación, ya que es esencial determinar los puntos fuertes y débiles de uno mismo y de un proyecto, así como evaluar y asumir riesgos cuando esté justificado (manejo de la incertidumbre y asunción y gestión del riesgo). (p.7000)

Entendemos que la tarea de resolver problemas favorece la adquisición de la competencia ya que los alumnos deben comprender la situación que se les plantea, trazar un plan con criterio e identificar los conocimientos que deben aplicar. La metodología a seguir en el aula también contribuirá a desarrollar esta competencia clave.

La competencia conciencia y expresiones culturales según la LOMCE “implica conocer, comprender, apreciar y valorar con espíritu crítico, con una actitud abierta y respetuosa, las diferentes manifestaciones culturales y artísticas, utilizarlas como fuente de enriquecimiento y disfrute personal y considerarlas como parte de la riqueza y patrimonio de los pueblos” (p.7001). El decreto de enseñanzas mínimas indica que el área de matemáticas contribuye a esta competencia ya que:

desarrollan la iniciativa, la imaginación y la creatividad, ayudan al alumnado a describir el mundo que lo rodea y a valorar las expresiones culturales y patrimoniales de las distintas sociedades. El reconocimiento de las relaciones y formas geométricas, favorecen la comprensión de determinadas producciones artísticas, otras construcciones

humanas y de la propia naturaleza a través del análisis de los elementos que las componen, analizando sus proporciones, perspectiva, simetrías, patrones, etc. El análisis de los elementos de cuerpos geométricos y su descomposición, y la construcción de otros, combinándolos con instrumentos de dibujo o medios informáticos, fomentarán la creatividad y permitirán al alumnado describir con una terminología adecuada objetos y configuraciones geométricas. (p.18157)

Entendemos que trabajar problemas puede favorecer esta competencia ya que ayudará a interpretar los fenómenos artísticos y culturales a través de las habilidades o destrezas desarrolladas a partir de la utilización de las formas de razonamiento matemático. Además, de la posibilidad de identificar la presencia de las matemáticas en las manifestaciones artísticas.

Como conclusión podemos decir que con una metodología adecuada fomentar la utilización de los problemas en los procesos de enseñanza y aprendizaje en el área de matemáticas puede ejercer una influencia positiva en el desarrollo del resto de las competencias clave propuestas en la ley.

Anexo III: Rúbrica de evaluación de los problemas del cuadernillo

Categorías	0	1	2	3
Identifica las fases propuestas en clase	No se observan identificación de las fases	Hay una cierta estructuración del problema en fases	El problema está estructurado pero no se identifican todas las fases	Las fases están claramente identificadas
Ha comprendido el problema	No hay ninguna evidencia de que haya comprendido el problema	Hay alguna evidencia (identificación de los datos o la incógnita, etc.) pero no suficiente para continuar con su resolución	Hay bastantes evidencias de que ha comprendido el problema pero no sirven para continuar con su resolución	Ha comprendido el problema para poder continuar con su resolución
Ha ejecutado algún plan	No hay ninguna evidencia de que haya planificado la resolución	Existen ciertas evidencias de que ha ideado un plan	Se ve claramente que ha ideado un plan pero no conduce a resolver el problema	Además el plan ideado le conduce a la resolución del problema
Aplica diferentes procedimientos	No aplica ningún procedimiento	Aplica algún procedimiento pero que no resuelve el problema	Aplica algún procedimiento que conduce a resolver el problema	Aplica todos los procedimientos solicitados
Resuelve el problema	No resuelve el problema correctamente	Plantea un procedimiento pero que no conduce a la resolución del problema	Plantea un procedimiento adecuado pero cometa errores que no le permiten resolverlo	Resuelve el problema correctamente
Comprueba el resultado	No realiza ninguna comprobación	Hay alguna evidencia de comprobación	Comprueba el resultado del procedimiento	Se identifica un apartado donde realiza la comprobación
Verifica los resultados con el enunciado del problema	No realiza ninguna verificación	Hay alguna evidencia de verificación	Verifica los resultados	Se identifica un apartado donde realiza la verificación

Anexo IV: Rúbrica para la evaluación de las representaciones utilizadas

Categoría	0	1	2	3
Representación	No realiza ninguna representación o es simplemente decorativa	Indica los datos que aparecen en el enunciado en la representación aunque comete errores	Indica los datos correctamente en la representación	La representación que realiza demuestra la comprensión del problema

Anexo V: Rúbrica para evaluar la explicación de los procedimientos

Categoría	0	1	2	3
Explicación del procedimiento	No explica el procedimiento	Explica muy poco el procedimiento o es incorrecto	Explica el procedimiento de una forma adecuada pero puede ser incorrecto	El procedimiento está explicado de una forma muy adecuada y es correcto

Anexo VI: Rúbrica de evaluación del trabajo en grupo

Categorías	0	1	2	3
Actitud	Critica el trabajo de los compañeros. No tiene una actitud positiva de trabajo	Critica el trabajo de otros. Tiene una actitud positiva de trabajo	No critica el trabajo de otros. Tiene una actitud positiva	No critica el trabajo de otros. Tiene una actitud muy positiva
Gestión del tiempo	No realiza una gestión adecuada del tiempo	La gestión del tiempo es poco adecuada	La gestión del tiempo es adecuada	La gestión del tiempo es muy adecuada
Gestión del grupo	No participa de la gestión del grupo	Participa ocasionalmente de la gestión del grupo	Participa habitualmente de la gestión del grupo	Participa de la gestión del grupo de forma muy activa
Trabajo con los compañeros	No escucha, ni comparte ni apoya el esfuerzo de otros	A veces escucha, comparte y apoya el esfuerzo de otros	Usualmente escucha, comparte y apoya el esfuerzo de otros	Casi siempre escucha, comparte y apoya el esfuerzo de otros
Contribución al trabajo del grupo	No proporciona ideas ni participa activamente	A veces proporciona ideas y participa activamente	Proporciona ideas y participa activamente	Proporciona siempre ideas útiles cuando participa en el grupo

Anexo VII: Encuesta sobre la opinión de los alumnos

Con esta encuesta queremos que puedas valorar el trabajo sobre resolución de problemas que hemos estado realizando. Es anónima y contestarla te llevará poco tiempo, por lo que nos gustaría que respondieras con sinceridad.

Datos

SEXO: Hombre Mujer (redondea lo que corresponda)

EDAD: _____ años

FECHA: _____

Contesta a las siguientes preguntas marcando con una X en el lugar que corresponda

(1=muy mal/muy poco, 2=mal/poco, 3= regular/normal, 4= bien/bastante, 5= muy bien/mucho)

1. Antes de empezar este curso, ¿te gustaba resolver problemas en clase?	1	2	3	4	5
2. Antes de empezar este curso, ¿cómo valorabas tu capacidad para resolver problemas?	1	2	3	4	5
3. Ahora, ¿cómo valoras tu capacidad actual para resolver problemas?	1	2	3	4	5
4. Ahora, ¿te gusta resolver problemas en clase?	1	2	3	4	5
5. ¿Cómo valoras que dediquemos un día a la semana para trabajar problemas en clase?	1	2	3	4	5
6. Anteriormente, ¿utilizabas estrategias para resolver problemas en clase?	1	2	3	4	5
7. ¿Cómo valoras el aprendizaje de estrategias?	1	2	3	4	5
8. ¿Crees que te han servido para comprender mejor los problemas?	1	2	3	4	5
9. ¿Te han servido los guiones que hemos utilizado para resolver los problemas?	1	2	3	4	5
10. ¿Cómo valoras el aprender contenidos a partir de un problema? (El tema de las progresiones)	1	2	3	4	5
11. ¿Crees que has aprendido mejor los contenidos de esta forma?	1	2	3	4	5
12. ¿Te gustaría que todos los temas se trabajaran de esta forma?	1	2	3	4	5
13. ¿Crees que ha mejorado tu rendimiento en matemáticas?	1	2	3	4	5
14. ¿Crees que este trabajo que hemos hecho puede mejorar tu rendimiento en otras asignaturas?	1	2	3	4	5

Anexo VIII: Artículos publicados.

- Falcón, S., Medina, P. y Plaza, A. (2017). ¿Comprenden los alumnos los enunciados de los problemas? *Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas*, 103, 72-89.

Anexo IX: Artículos en revisión

- Facilitando a los alumnos la comprensión de los problemas. Revista NÚMEROS.
- Una introducción a la resolución de problemas: de la práctica a la teoría. Revista PNA.
- El papel del profesor y el del alumno ante la resolución de problemas matemáticos. Revista UNIÓN.
- Dificultades y soluciones para implementar la resolución de problemas de Matemáticas en el aula. Boletín de la Sociedad de Profesores Puig Adam.
- La importancia de la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas: legislación, informes, investigación y experiencias. Revista AIEM.
- La competencia matemática y la resolución de problemas. Revista EPSILON de la SAEM THALES.

