EL TRABAJO DE LOS DÍAS*

José Miguel Pacheco Castelao
Departamento de Matemáticas
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

El título de esta intervención imita intencionadamente el de una de las más conocidas obras del poeta griego Hesiodo (Siglo VIII A.C.), cuyo nombre es "Los trabajos y los días". En tiempos de cambio en los modelos educativos de nuestro país, creo importante recordar que la cultura clásica es un patrimonio que no debe perderse y merece un lugar en los proyectos de futuras enseñanzas. El poema de Hesiodo a que hago referencia es una bella descripción de la vida diaria en la antigua Grecia, con especial interés en las labores del campo.

Leído por un matemático, son interesantísimas las referencias al paso de los astros que marcan los días para las diferentes labores. Ello nos muestra que muchos saberes matemáticos eran conocidos y aplicados por la sociedad civil en cuestiones de la vida cotidiana, sugiriendo que existía desde tiempo atrás y de modo más o menos oficial, algún organismo –muy posiblemente de carácter religioso– dedicado a la observación y utilización de esas informaciones a efectos prácticos. La lectura de Hesiodo, por tanto, nos indica que el concepto de un calendario solar era conocido y aplicado en la cultura griega, aunque coexistía en la práctica y en especial para transacciones comerciales, con un calendario lunar, tal como muestra el comediógrafo Aristófanes (Siglo V A.C.) en su divertidísima obra "Las nubes", donde además de una cruda sátira contra los filósofos socráticos podemos enterarnos pormenorizadamente de las costumbres de los prestamistas o banqueros y de cómo esas transacciones se regían por este último tipo de calendario. Evidentemente, el desarrollo de un calendario no es sino una más de las muchas cuestiones matemáticas desarrolladas entre Grecia y el Próximo Oriente y por tanto, el terreno estaba culturalmente preparado en la Antigüedad para que, unos doscientos años después del entretenido Aristófanes, Euclides (Siglo III A.C.) compilara los "Elementos" in-

* Conferencia pronunciada en Abril de 1997 en la inauguración de las Jornadas anuales de la Sociedad «Isaac Newton», en Las Palmas de Gran Canaria. El texto que se presenta está corregido y ampliado con referencias más exactas, que no afectan esencialmente al original.

troduciendo en ellos y con ellos las bases de una cultura matemática que aún mantiene su actualidad.

Ya se habrá intuido que el objetivo de esta exposición es indagar, por supuesto de manera sencilla y que podría desarrollarse sin duda alguna en niveles elementales de la enseñanza, sobre el calendario solar, pero antes intentaré reflexionar un momento acerca del origen de las Matemáticas. No me refiero aquí a las Matemáticas antiguas o clásicas que nos han legado los griegos, sino a estadios muy anteriores a ellas, relacionados muy directamente con actividades cotidianas.

Las manifestaciones culturales más antiguas pueden datarse, y para eso está la Arqueología, en la época neolítica, cuando se desarrolla la conciencia social en los primeros grupos humanos, lo que ocurre hace alrededor de veinte mil años y viene a coincidir con el hecho de que algunos grupos nómadas deciden establecerse tras descubrir los rudimentos de la Agricultura y la Ganadería. Este conjunto de técnicas o saberes condujo pronto a plantear problemas cargados de sentido matemático: ¿Cuántas reses tenemos? ¿Qué cueva es bastante grande para guarecerlas? ¿Cuánto hay que sembrar para obtener suficientes resultados? ¿Qué cantidad de terreno se necesita para obtener una cosecha adecuada? ¿Cuándo hay que sembrar y recoger?

Preguntas como la última que se ha formulado muestran que la explotación de la Naturaleza tiene un papel capital en el desarrollo de la medida del tiempo, que es –como ya señalé antes– otra de las actividades matemáticas más antiguas y se halla relacionada, desde luego, con la observación de fenómenos repetitivos en la Naturaleza: Los más evidentes, en las zonas templadas donde se originaron las primeras civilizaciones –aparte de la sucesión trivial de días y noches– son los ciclos de las estaciones (que determinan cosas tales como las cosechas y las crecidas anuales del Nilo) y las fases de la Luna. Una observación más atenta llevaría a reconocer la variación periódica de la duración del día y a establecer su correlación con las estaciones y ciertos fenómenos vitales en la actividad explotadora. Por poner un ejemplo, se sabe que el estro de las ovejas depende de la duración del día, y lo mismo puede decirse de los ciclos reproductivos de muchas plantas, con exactitud del orden de segundos. Estos ciclos no se pueden calibrar bien con un calendario basado en la Luna, pues la duración del día no guarda relación con la fase lunar, así que para acomodar las épocas de siembra, cosecha y otras labores agropecuarias se buscó basar el calendario en el ciclo solar, más largo pero no menos claro. De manera curiosa, un calendario solar se establece mejor por la noche, y ello llevó a la observación de los astros: Las noches largas o cortas se corresponden con la aparición de algunas constelaciones o estrellas en posiciones concretas de la bóveda celeste, que pueden ser contrastadas con algún tipo de observatorio delimitado por montañas, piedras u otros accidentes naturales o artificiales. Todavía se conservan antiquísimos observatorios como el de Stonehenge en Gran Bretaña, construido entre los años 2400 y 1700 A.C., muchos siglos antes de que Hesiodo escribiera su famoso poema.

En cualquier caso, en fecha muy antigua ya se sabía que el año tenía una duración de 365 1/4 días. He aquí una pregunta interesante para el aula: Parece fácil contar los 365 días, pero ¿y el cuarto de día? En una época sin relojes es necesaria una finura de observación poco corriente para establecer esa fracción. La solución al problema es, sin duda, la más obvia: Si se podía calcular un año comprobando que cada 365 días el Sol salía tras tal piedra o árbol, el observador avezado podría reconocer que al cabo de cuatro años ya se producía un error, pues el Sol salía por el sitio correspondiente un día más tarde de lo esperado. Así se justifica ese cuarto de día, aunque es de suponer que con instrumentos de observación tan poco desarrollados no se pudiera obtener más exactitud en esa medida. De paso, conviene recordar aquí que se llama "año trópico" al tiempo invertido por el Sol entre dos pasos consecutivos por un mismo punto, la tradición utiliza el punto de Aries o equinoccio de Primavera.

Al irse creando una cultura ciudadana ya ajena a las labores del campo, se transfiere el control del tiempo a un calendario o tabla de carácter convencional para ser utilizada en las diferentes actividades. Tal calendario, que podemos denominar civil, consta de un número entero de días, por lo que con relación al paso de los astros se comete un error cuyo efecto se describe a continuación. Dado que la tabla debería ser concordante con los usos de la Agricultura, ello equivale a decir que por lo menos alguna efeméride importante, tal como el equinoccio de Primavera, debería ocurrir siempre en la misma fecha. Pero al utilizarse como año una unidad de medida más corta que el año trópico, la fecha del equinoccio se va retrasando, por lo que al cabo de unos cuantos años el desfase llega ser perceptible, y la fecha prevista para el equinoccio según el calendario civil vendría a caer en pleno verano. Es de suponer que esto no resultaría de ninguna utilidad para los agricultores.

Alrededor del año 45 A.C., siendo Julio César Emperador de Roma -y por consiguiente de casi todo el mundo conocido- el desastre del calendario era tan evidente que se hicieron estudios para arreglar la cuestión. El astrónomo griego Sosígenes se encargó del problema y el Emperador decretó que ese año duraría 484 días y que a partir de él se empezaran a contar años de 365 días, pero introduciendo uno de 366 días cada cuatro, con lo que la duración media del año quedaba en los antes citados 365 1/4 días. Los años que se añadían se denominaron "bisiestos" pues el día añadido era un segundo 6 (bis-sextile) de Marzo. En aquella época el año nuevo se celebraba en Marzo, y de eso queda todavía el recuerdo en los nombres de los últimos meses del año (Octubre = mes octavo, Noviembre = mes noveno y Diciembre = mes décimo). El primero de año se celebró durante siglos el 25 de Marzo en Europa, incluso hasta mediados del Siglo XVIII en los países protestantes.

Con la reforma Juliana pareció haberse arreglado la cuestión, pero el paso de los años y de los siglos llevó a reconocer que se había utilizado un año civil demasiado largo, por lo que la fecha del equinoccio de Primavera retrocedía hacia el invierno (por supuesto que estamos hablando del hemisferio norte de la Tierra). Con los instrumentos de medida más perfeccionados, hacia el Siglo XVI ya se había afinado la medida de la duración del año trópico, según se ve en la tabla siguiente:

Tablas Alfonsíes[1], 1272-1500	365d 5h 49' 15" 58"'
Ulugh Beg[2], ca. 1430	365d 5h 49' 15"
De Revolutionibus (Copérnico), 1543	365d 5h 49' 16" 28"'
Tablas Pruténicas[3] (Reinhold), 1551	365d 5h 49' 15" 45"'

Todas las mediciones son menores de 365 1/4 días y difieren entre sí menos de segundo y medio, lo que da una idea tanto del desarrollo de los mecanismos de observación como del dominio del cálculo trigonométrico en esas épocas. Los casi once minutos de diferencia con el año civil medio de 365 1/4 días se traducían en un día de retraso con respecto al ciclo de las estaciones cada 131 años, por lo que los días de retraso se iban acumulando. El matemático inglés Johannes de Sacrobosco[4] afirmaba ya en 1232 que existía un error de diez días (no era tanto aún). Finalmente, el dominico Egnatio Danti demostró en 1574 que los días de retraso eran once en esa fecha.

Naturalmente el poder fáctico más importante de aquel tiempo, la Iglesia Católica, no podía permanecer callado ante este hecho, entre otras causas porque la Pascua, la más importante de las festividades católicas, se determina según la tradición bíblica para que tenga lugar tras la primera luna llena después del equinoccio de Primavera, y éste había sido fijado en el 21 de Marzo por el Concilio de Nicea en fecha tan remota como el año 325. Por eso, ya a mediados del Siglo XV se iniciaron estudios para corregir esta anomalía: Incluso Copérnico fue invitado a trabajar en ello en 1514 por el Papa León X. Sin embargo, la Reforma luterana –que a partir de 1530 dividió a los cristianos en protestantes y católicos– era un quebradero de cabeza más importante para los Papas de mediados del Siglo XVI que el asunto del calendario, y el estudio del problema se pospuso hasta el Papado de Gregorio VIII, quien nombró una comisión, presidida por el matemático y jesuita alemán Cristóbal Clavius para encontrar una solución a un conjunto de problemas relacionados con el calendario:

1. Acomodar el calendario al ciclo de las estaciones.

2. Fijar el día primero del año.

3. Modificar el método de inserción de los años bisiestos.

4. Determinar la fecha de la Pascua.

La reforma del calendario se llamó Gregoriana por razones evidentes y fue publicada en una bula papal en 1582 con el título *Inter gravissimas*, que viene a significar "De capital importancia".

El punto primero se arregló ordenando que el día siguiente al 4 de Octubre de 1582 fuera el 15 de Octubre del mismo año, con lo que se ajustaron los diez días de retraso que se llevaban acumulados en esa fecha. Para convencer al Papa hubo

1. Las Tablas Alfonsíes se denominaron así por haber sido ordenada su compilación por el Rey de Castilla Alfonso X el Sabio en 1272. Fueron corregidas y ampliadas durante años, siendo muy conocida la contribución de Nicolás de Cusa en la primera mitad del Siglo XV.

2. Beg fue un astrónomo persa del Siglo XV, que construyó un observatorio en Samarkanda.

3. Erasmus Reinhold, astrónomo alemán de la primera mitad del siglo XVI. Sus *Tabulæ prutenicæ cœelestium motuum*, o Tablas Pruténicas, son una corrección de los cálculos de Copérnico.

4. Fue muy conocido por su tratado «De Sphæra» (la celeste, se entiende), usando durante siglos en las Universidades europeas. En su autobiografía Torres Villarroel lo cita como texto en Salamanca a mediados del Siglo XVIII.

que construir una habitación especial en el Vaticano para observar el tránsito del Sol por el meridiano el día del equinoccio, que tuvo lugar el 11 de Marzo de 1582, tal como predecían los astrónomos, en vez del 21 de Marzo como obligaba el Concilio de Nicea.

El primero de año se fijó en el 1 de Enero y se determinó que habría que suprimir algunos bisiestos para que la fecha del equinoccio quedase lo más fija posible. La regla elegida fue eliminar tres bisiestos cada 400 años, siendo los eliminados los años finiseculares cuyo número no es divisible por 400. Por eso el año 2000 es bisiesto, como también lo fué el 1600, pero no lo fueron los 1700, 1800 y 1900. De este modo el calendario Gregoriano se organiza en ciclos de 400 años con 97 bisiestos por ciclo con lo que el año Gregoriano consta, en promedio, de 365 97/400 = 365,2425 días, ligeramente menor que el año Juliano de 365 1/4 = 365,25 días.

El cuarto problema, que era el más interesante para el Papa –determinar la fecha de la Pascua– se resolvió inventando un algoritmo, donde aparecen cosas tales como la Epacta y los Números de Oro, que puede consultarse en viejos manuales escolares, pero no lo explicaré aquí. En esencia se trata de coordinar el ciclo de 19 años de repetición de las fases lunares con el ciclo de años bisiestos, ya sea Juliano o Gregoriano. Este trabajo ya fue emprendido en la Antigüedad por el astrónomo Metón en el Siglo V A.C. Por ponerlo en un lenguaje que nos toca de cerca, la fecha de los Carnavales se calcula con ese algoritmo.

La reforma Gregoriana fue adoptada lentamente (ver tabla al final) y no siempre de buen grado. En la ciudad alemana de Frankfurt se produjeron motines contra el Papa y sus matemáticos[5], acusándolos de robar once días a la vida de los amotinados. Las protestas obligaron a Clavius a escribir y publicar en 1595 un texto titulado *Novi calendarii romani apologia* para solucionar el asunto. Sin embargo, desde el punto de vista científico no se habían acabado los problemas...

A finales del Siglo XIX se sabía ya que el año Gregoriano es "demasiado largo", habiéndose medido la duración, redondeada a cuatro cifras decimales[6], del año trópico en 365,2422 días, esto es, unos ¡24 segundos! más corto que el año Gregoriano. Tal cosa indica que al cabo de unos 4000 años el equinoccio de Primavera retrocede un día. Esta cuestión, que no afecta especialmente a nuestras vidas, puede inducirnos a proponer una reforma del calendario por nuestra cuenta. Veremos que una vez conocidos los datos de los astrónomos sobre la duración del año trópico, una reforma consistente en ubicar los bisiestos no es más que un elegante ejercicio[7] sobre números racionales.

Comenzaremos con una observación. El quebrado que acompaña a la parte entera 365 en el número mixto que representa la duración de los distintos tipos de años se puede leer de la siguiente manera:

5. Esto muestra que la profesión de matemático puede no ser demasiado tranquila.

6. Hoy sabemos que la duración del año trópico fluctúa, variando la sexta cifra decimal en plazos que no superan los 100 años.

7. Consúltese el interesante artículo: Rickey V F (1985) Mathematics of the Gregorian Calendar, *Math. Intell.*, 7(1), 53-56.

Año	fracción de día	interpretación
Juliano	1/4	un bisiesto cada 4 años
Gregoriano	97/400	97 bisiestos cada 400 años
Trópico	2422/10000	2422 bisiestos cada 10000 años

Nuestro problema se reduce a encontrar un quebrado con un denominador razonablemente pequeño y que se halle más próximo a 2422/10000 que 97/400, lo que nos dará una regla de bisiestos más ajustada al año trópico. Para ello partimos del propio 2422/10000, creando a partir de él una familia de quebrados aproximantes, mediante el siguiente cálculo, que se llama "desarrollo de un número racional en forma de fracción continua":

$$365\frac{2422}{10000} = 365 + \frac{2422}{10000} = 365 + \cfrac{1}{\cfrac{10000}{2422}} =$$

$$365 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1288}{10000}} = 365 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\cfrac{10000}{1288}}} =$$

$$= 365 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{7640}{10000}}} =$$

$$= 365 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \dots}}} =$$

$$= 365 + [4;\ 7;\ 1;\ 3;\ 4;\ 1;\ 1;\ 1;\ 2]$$

donde los números entre corchetes representan los sucesivos cocientes. Este desarrollo se termina al cabo de un número finito de pasos, en este caso 9, pues no es otra cosa que el algoritmo de Euclides. Si se va calculando "por pisos" la parte no entera obtendremos una serie de fracciones –llamadas reducidas– que se van aproximando a la dada, alternativamente por defecto y por exceso, siendo la última que se obtiene la fracción original:

$$\frac{1}{4};\ \frac{7}{29};\ \frac{8}{33};\ \frac{31}{128};\ \frac{132}{545};\ \frac{163}{673};\ \frac{295}{1218};\ \frac{458}{1891};\ \frac{1211}{5000}=\frac{2422}{10000}$$

y que se ordenan de mayor a menor de la siguiente manera:

$$\frac{1}{4}>\frac{8}{33}>\frac{132}{545}>\frac{295}{1218}>\frac{1211}{5000}>\frac{2422}{10000}>\frac{458}{1891}>\frac{163}{673}>\frac{31}{128}>\frac{7}{29}$$

Podemos considerar, por ejemplo, las aproximaciones por exceso. La primera de ellas es 1/4, que corresponde a usar un año de 365 1/4 días, esto es, el año Juliano. Usar la segunda sería equivalente a utilizar un año de 365 8/33 días, o lo que es lo mismo, a implantar una regla de poner 8 bisiestos cada 33 años. Una observación importante es que 365 8/33 = 365,2424, y recordando las duraciones del año trópico y del año Gregoriano tendremos:

Año trópico =365,2422 días < 365,2424 días < 365,2425 días = Año Gregoriano

luego una regla de implantar 8 años bisiestos cada 33 años ¡es mejor aproximación al año trópico que la regla Gregoriana! Lo mismo puede decirse de las demás aproximaciones por exceso, pero al ser números tan "poco agradables" no parecen dar lugar a reglas de alguna utilidad práctica. Las aproximaciones por defecto pueden ser incluso mejores: Por ejemplo, 31/128 conduce a un año civil de 365,242185 días, muy próximo al valor aceptado para el año trópico de 365,24219879 días[8], del cual sacamos el redondeo 365,2422. Para completar la cuestión les diré que la propuesta 8/33 fue hecha más de 500 años antes de la reforma Gregoriana por el matemático y poeta árabe Omar Khayyam[9], en 1079, así que juzguen Uds. mismos en qué partes del mundo estaban más avanzadas las Matemáticas en la alta Edad Media. Ahora nos haremos una pregunta que es casi obligada: ¿De dónde salió la propuesta Gregoriana de 97/400? Evidentemente no se obtuvo de un cálculo como el anterior, pero sí a partir de otros métodos no menos ingeniosos.

Para contestar a nuestra pregunta necesitamos contar en base 60, esto es, usar fracciones sexagesimales de día para representar la duración del año. Recordemos la tabla de duraciones del año trópico:

Tablas Alfonsíes, 1272-1500	365d 5h 49' 15'' 58'''
Ulugh Beg, ca. 1430	365d 5h 49' 15''
De Revolutionibus (Copérnico), 1543	365d 5h 49' 16'' 28'''
Tablas Pruténicas (Reinhold), 1551	365d 5h 49' 15'' 45'''

8. Este valor corresponde a mediciones hechas por Newcomb a finales del Siglo XIX. Ya se ha dicho antes que sólo las cinco primeras cifras decimales son fiables.

9. Este matemático calculó la duración del año trópico con cinco decimales exactos, lo que es asombroso para su época (ver la nota anterior). El calendario que propuso iba a inaugurar la «era Jalali», pero no se aplicó en la práctica.

y traduzcamos la fracción de día a base 60, de modo que si redondeamos a las dos primeras "cifras sexagesimales" nos quedará:

$$\text{duración del año trópico} \approx 365\text{d } 14;\, 33 = 365\text{d} + \frac{14}{60} + \frac{33}{60^2} = 365\,\frac{97}{400}$$

lo cual explica el origen de tan curiosa fracción. No olviden Uds. que no siempre es la base diez la más útil.

El calendario Gregoriano se usa habitualmente sin mayores dificultades en la vida cotidiana. Sin embargo, a efectos científicos no es todavía lo bastante preciso, y por eso a partir del día 1 de Enero de 1972 el tiempo está dado por los relojes atómicos. A veces se oye por la radio o la televisión que hay que adelantar o atrasar un segundo los relojes para acomodar el tiempo atómico al tiempo astronómico: Esa sería una especie de versión moderna de "segundos bisiestos".

Otras culturas no basadas en la tradición grecolatina también desarrollaron calendarios solares; tal vez el más conocido sea el de los Mayas en el antiguo México, aunque la cultura china también está bien provista de estudiosos del calendario: En fecha tan antigua como 123 D.C. el astrónomo Zhang Heng ya propuso un calendario adaptado a las estaciones, y en 1074, contemporáneo de Omar Khayyam, Shen Kua efectuó otra propuesta de calendario... Por tanto, desde aquí les invito a rebuscar en enciclopedias, viejos textos, antiguas leyendas e Internet el rastro de las investigaciones sobre el calendario.

Ya para terminar, veamos una tabla cronológica con el resumen de las principales fechas del desarrollo de los calendarios:

hace 20.000 años	Agricultura
hace 4.000 años	Medidas de la duración del año
Siglo VII A.C.	Hesiodo
Siglo V A.C.	Aristófanes, Metón
Siglo III A.C.	Euclides
año 45 A.C.	Reforma Juliana
año 325	Concilio de Nicea
año 1079	Omar Khayyam
año 1582	Reforma Gregoriana Adopción por España y Francia
año 1752	Adopción por Inglaterra[10]
año 1918	Adopción por Rusia
año 1927	Adopción por Turquía
año 1972	Relojes atómicos

10. También hubo motines en Inglaterra con este motivo.

En ella se puede ver cómo el poder de los Papas, aunque grande, no lo era tanto como para obligar al mundo a adoptar la reforma Gregoriana de manera inmediata: Y es que los avances de la ciencia dependen mucho de la sensibilidad de los gobernantes para que sean reconocidos.

Y con esto, acabamos nuestro breve repaso al trabajo de los días volviendo al principio para recordar de nuevo a Hesiodo, quien define el verano con estas hermosas palabras:

Comienza la siega cuando nazcan las Pléyades engendradas por Atlas, y la siembra cuando se pongan...