UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA
Facultad de Economía, Empresa y Turismo

GRADO EN ECONOMÍA

PROCEDIMIENTOS COMPUTACIONALES EN LA GESTIÓN ÓPTIMA DE RECURSOS NATURALES

Trabajo Fin de Título presentado por
José Lorenzo Trujillo Pérez

54092369A

Fdo: José Lorenzo Trujillo Pérez

Bajo la tutela de Julián Andrada Félix

Las Palmas de Gran Canaria, a 6 de junio de 2016

El Trabajo Fin de Título "Procedimientos computacionales en la gestión óptima de recursos naturales" del estudiante José Lorenzo Trujillo Pérez perteneciente al Grado en Economía que ha sido dirigido bajo la tutela académica de Julián Andrada Félix, cuenta con el visto bueno para su defensa.

Fdo.: Julián Andrada Félix

Índice

1. Introducción y objetivos **3**

2. Teoría del control óptimo **6**

2.1. El principio del máximo de Pontryagin **14**

2.2. Control óptimo con varias variables **15**

2.3 Variables acotadas **16**

3. Ejemplos en la aplicación de la Teoría del Control Óptimo **17**

3.1. Tiempo Óptimo de tala de una plantación forestal **17**

3.2. Modelo de la explotación de las pesquerías **22**

3.3. Modelo de la explotación de los recursos no renovables **23**

4. Programación dinámica **27**

4.1. Programación dinámica determinista **31**

4.2. Programación dinámica probabilística **31**

4.3. Ejemplo en la aplicación de la Programación dinámica **32**

5. Otros modelos de gestión de los recursos naturales **37**

5.1. Modelo de Faustmann en gestión forestal **37**

5.2. Modelo de explotación de un recurso no renovable: la regla de Hotelling **38**

5.3. Modelo de explotación de pesquerías **39**

6. Conclusiones **41**

7. Bibliografía **44**

Índice de Figuras

Figura 1: Patrón óptimo de la gestión de una plantación forestal **21**
Figura 2: Problema de ruta aplicando programación dinámica **28**
Figura 3: Esquema temporal del problema de extracción de la mina **33**

Índice de Cuadros

Cuadro 1: Beneficios obtenidos según el nivel de extraccion y la cantidad de stock **32**
Cuadro 2: Valor de la variable de estado en cada período **33**
Cuadro 3: Valores para el período 4 **34**
Cuadro 4: Valores óptimos según x(3) **34**
Cuadro 5: Valores para el período 3 **35**
Cuadro 6: Valores óptimos según x(2) **35**
Cuadro 7: Valores para el período 2 **35**
Cuadro 8: Valores óptimos según x(1) **36**
Cuadro 9: Valores para el período 1 **36**

1. Introducción y objetivos

Antes de comenzar cualquier análisis, conviene aclarar primero a qué nos estamos refiriendo con los recursos naturales y porqué son tan importantes para el desarrollo económico de un país. Mencionando una definición más convencional nos referimos a los recursos naturales *como aquellos atributos de la tierra, vivos o inanimados, que explota el ser humano como fuente de alimentos, materias primas y energía* (Reed, 1994a). Se podrían identificar tres cualidades fundamentales de funciones económicas que cumplen los recursos naturales: como insumos para el proceso productivo, como "almacén" de residuos por su generación tanto en el consumo como en el proceso productivo, y como servicio recreativo o soporte general para la vida. Y es aquí donde podría definirse la economía de los recursos naturales, como aquella área que se encarga de cómo asignar eficientemente a la sociedad los recursos naturales a lo largo del tiempo. Pues constantemente, nos encontramos ante situaciones en las que hay que decidir de qué manera usar un recurso natural, por ejemplo: un bosque, ¿se debería explotar para obtener madera, o sin embargo, preservándolo como un espacio natural protegido favoreciendo las actividades recreativas?, o ¿cómo distribuir en el tiempo la extracción de petróleo de un pozo cuyas reservas son finitas?

Dentro de los recursos naturales, se puede realizar una clasificación basada en la temporalidad, es decir, en la capacidad que tiene el recurso de regenerarse una vez haya sido utilizado. Entonces distinguimos entre: recursos renovables, que son aquellos recursos que tienen la capacidad de regenerarse una vez se haya utilizado, en algunos casos habiendo pasado un tiempo tal que le permita regenerarse; y recursos no renovables, son aquellos recursos que no tienen la capacidad de regenerarse y por tanto su uso continuado puede provocar su desaparición. Ahora bien, aquí cabe señalar que un recurso renovable puede convertirse en no renovable, es decir, que la mala extracción o uso puede inducir a su agotamiento. Esto sucede cuando el tiempo de extracción es inferior al tiempo que tarda el recurso en regenerarse, es decir, la capacidad de extracción es superior a la capacidad de regeneración del recurso. Por ejemplo, en una pesquería, si la captura de peces es continuada y un nivel superior a la tasa de regeneración biológica de la especie, conllevará al agotamiento del género.

Pero, ¿cuándo realmente se le da importancia al estudio de los recursos naturales? Realizando un breve repaso por la historia, a principios del siglo XX, el estudio de los recursos era casi exclusivamente trabajo de biólogos y no había originado inquietud alguna entre los economistas para el estudio de su aprovechamiento debido a la abundancia relativa de los

mismos. Así pues, fue durante los años 70 cuándo se le dio real importancia su estudio, provocada con la crisis del petróleo producida durante esa época. La restricción de la exportación de petróleo impuesta por la Organización de Países Árabes Exportadores de Petróleo hacia países de Occidente en una época de gran dependencia del crudo del mundo industrializado, condujo a una drástica subida de precios y consecuentemente a una disminución de la actividad económica. Fue entonces cuando se produjo un punto de inflexión en algunos países occidentales, donde se comenzó a plantear políticas de mayor conciencia energética. Si bien, antes de eso existieron grandes autores que construyeron pilares fundamentales que ayudaron a cimentar la disciplina de la economía de los recursos naturales. Cabe mencionar a algunos autores como Thomas Robert Malthus, con la denominada ley de crecimiento Malthusiano, quién estimó un ritmo de crecimiento poblacional alarmante, pudiendo originar consecuencias catastróficas debido a que la cantidad de recursos existente en el mundo era muy inferior a tal crecimiento, como para satisfacer la demanda de necesidades. Otro autor influyente fue Arthur Cecil Pigou con su obra "*The Economics of Welfare"* publicada en 1919, que introdujo la idea de externalidad negativa y la introducción de un impuesto como forma de corregir dicha externalidad y de esta manera conseguir alcanzar el óptimo social o externalidad óptima, es lo que se conoce actualmente como impuesto *pigouviano*. Sobre estas mismas líneas y continuando con un orden cronológico, aparece Harold Hotelling, con su obra "*The Economics of Exhaustible Resourses"* (1931), donde detalla la denominada regla de Hotelling, en la que se indica la manera óptima de extracción de un recurso no renovable, siendo la misma la situación de equilibrio en el que la tasa de variación del precio del recurso coincida con el tipo de interés. Un enfoque alternativo al de Pigou, lo planteó Ronald Coase en su artículo *"The problem of Social Cost"*, publicado en el *Journal of Law and Economics* en 1960. Su idea se basa en demostrar que no es necesario ningún tipo de intervención, por contra al planteamiento de Pigou, para alcanzar la externalidad óptima, sino que basta que exista una correcta definición de los derechos de propiedad (esto es, en el sentido amplio, el derecho del uso del recurso en cuestión) en donde exista una negociación entre el agente que provoca la externalidad negativa, y el agente que la sufre, para llegar de esta forma al óptimo social.

Así pues, la problemática fundamental a la que se enfrenta en economía para la gestión de los recursos naturales se refiere a la toma de decisiones presentes de asignación de tales recursos que afectan a acontecimientos futuros, haciendo posible que sean disponibles ciertas

oportunidades. Todo ello, ante un mundo infinitamente competitivo de agentes en los cuales cada uno vela por sus intereses propios.

Siguiendo a Fernández y García (2001) en el libro "*Métodos matemáticos en economía dinámica"*, uno de los métodos analíticos parar solucionar problemas de planificación es resolviendo problemas de Optimización Dinámica. El objetivo es optimizar una función objetivo a través de variables instrumentos que pueden tomar valores dentro de un rango de valores, permitiendo que dichas variables cambien en el tiempo.

Para solventar los problemas de optimización dinámica existen tres aproximaciones: Cálculo de Variaciones, Teoría del Control Óptimo y la Programación Dinámica. Siendo los dos métodos principales y de nuestro interés la Teoría del Control Óptimo y la Programación Dinámica dado que nos centraremos en su estudio.

En la Teoría del Control Óptimo nos situaremos principalmente en la formulación del problema de optimización definiendo las dos variables principales que componen cada problema: las variables de control y las variables de estado; así como la obtención de las condiciones necesarias y suficientes para la solución óptima del problema a partir de la función Hamiltoniana. Además se expone el método de resolución del mismo por medio del Principio del Máximo de Pontryagin. Por otro lado, se explica el tratamiento de los problemas de control en los que existen más de una variable de control o de estado, o ambas a la vez. A su vez, se redacta los casos particulares de acotación de los dos tipos de variables.

Posteriormente, a modo ilustrativo se expone como ejemplos de aplicación práctica de la Teoría de Control Óptimo, los casos de tala de una plantación forestal, modelo de explotación de una pesquería y modelo de explotación de un recurso no renovable.

Luego, se procede a exponer el tercer método de aplicación para la resolución de los problemas de optimización dinámica, la Programación Dinámica basada en el principio de optimalidad de Bellman. Para ilustrar tal caso, se expone un problema de optimización resuelto por el método.

Finalmente se exponen otros conocidos modelos empleados en la Teoría de Gestión de Recursos Naturales. En concreto, se detalla el modelo de Faustmann para la gestión de forestal, la regla de Hotelling en busca del óptimo de extracción de un recurso no renovable, y los trabajos realizados por Gordon (1954) y Scott (1955) para explicar el rendimiento económico óptimo de una pesquería.

El objetivo del trabajo se centra en realizar una revisión bibliográfica de métodos de tratamiento de los problemas de gestión de recursos naturales, fundamentalmente en aquellos problemas en los que se emplea la optimización dinámica, incidiendo en dos métodos de resolución: la Teoría de Control Óptimo y la Programación Dinámica.

2. Teoría del Control Óptimo

El principio máximo de la Teoría de Control Óptimo fue desarrollado por L.S. Pontryagin y su grupo de trabajo a finales de 1950. Aparece como consecuencia de una generalización del Cálculo de Variaciones, amplificando el rango de estudio de éste, aplicable a todos los problemas de Cálculo de Variaciones en la resolución de problemas de Optimización Dinámica.

Siguiendo la obra *"Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management"* de Kamien y Schwartz (1991), existen dos tipos de variables en los problemas de control óptimo: las variables de control y las variables de estado. Así pues, se define una función de control que ejerza un predominio constante sobre las variables que especifican el estado del problema, obteniendo de esta forma la trayectoria óptima. Luego, la solución al problema consiste en optimizar dicha función de control.

Para explicar el planteamiento del problema, comenzamos por exponer el problema de control más simple que se compone de una función de control continua a trozos $u(t)$, tal que se representa de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \max \int_{t_o}^{t_1} f(t,x(t),u(t))dt \\ s.a.: \quad & x'(t) = g(t,x(t),u(t)) \\ & x(t_o) = x_o \rightarrow fijo \\ & x(t_1) \rightarrow libre \end{aligned} \tag{2.1}$$

Donde $u(t)$ es la variable de control que debe ser una función de tiempo continua por partes. Por otro lado, la variable de estado viene representada por $x(t)$, que va cambiando su trayectoria a lo largo del tiempo, determinado su movimiento por la ecuación diferencial $x'(t) = g(t,x(t),u(t))$. Se puede apreciar que la variable de estado está en función de la variable de control. Por tanto, la variable de control $u(t)$ influye en la función objetivo de dos formas: directamente a través de su propio valor; e indirectamente, a través de su impacto

sobre el valor de la variable de estado $x(t)$. Las funciones *f* y *g* se consideran funciones continuas diferenciables.

Cabe señalar que un problema de control óptimo puede estar compuesto por varias variables de control y de estado, no teniendo que coincidir la cantidad de ambas, es decir, el número de variables de control puede ser mayor o menor que el número de variables de estado.

Para deducir las condiciones necesarias para que la solución maximice el problema de control óptimo, el procedimiento es similar al de resolución de problemas de programación no lineal mediante la formación de la función de Lagrange y la obtención de los multiplicadores. Así pues, vamos a tener un multiplicador de Lagrange $\mathtt{a}(t)$ para cada restricción del problema siendo su interpretación cómo la valoración marginal de la variable de estado asociado a cada instante de *t* (recordar que en programación lineal, el multiplicador se interpreta como la valoración marginal de la restricción asociada) (Dorfman, 1969). Y luego, a partir del Lagrangiano se crea una nueva función, denominada función *Hamiltoniana* que nos permite obtener las condiciones necesarias de optimización.

A modo explicativo, se expone el planteamiento de Lagrange del problema de control óptimo y la obtención de las condiciones necesarias a partir de dos formas: de forma analítica desarrollando el ejemplo expuesto, y de forma más trivial a partir de la función Hamiltoniana. (ver Kamien y Schwartz, 1991).

El planteamiento de Lagrange para el problema de control óptimo expuesto anteriormente, queda de la siguiente forma:

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t,x(t),u(t))dt = \int_{t_0}^{t_1} [\, f(t,x(t),u(t)) + \mathtt{a}(t)g(t,x(t),u(t)) - \mathtt{a}(t)x'(t)]dt \qquad (2.2)$$

Integrando el segundo término $-\mathtt{a}(t)x'(t)$:

$$-\int_{t_0}^{t_1} \mathtt{a}(t)x'(t)dt = -\mathtt{a}(t_1)x(t_1) + \mathtt{a}(t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} x(t)\mathtt{a}'(t)dt \qquad (2.3)$$

Ahora lo sustituimos en la primera expresión quedando:

(2.4)

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t,x(t)u(t))dt = \int_{t_0}^{t_1} [\, f(t,x(t),u(t)) + \mathtt{a}(t)g(t,x(t),u(t)) + x(t)\mathtt{a}'(t)]dt - \mathtt{a}(t_1)x(t_1) + \mathtt{a}(t_0)x(t_0)$$

Aquí se puede determinar que el problema de control óptimo radica principalmente en buscar la función de control $u(t)$, ya que la elección de la misma junto con las condiciones de $x(t_0) = x_0$ y $x(t_1)$ *libre* , determinan la senda de la variable de estado correspondiente $x(t)$. Y por lo tanto, también determina el valor de la última expresión.

Para obtener las condiciones necesarias de optimización, primero se alcanzan a partir del desarrollo analítico del siguiente problema:

$$\begin{aligned} &\max \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))dt \\ s.a.:\ &x'(t) = u(t) \\ &x(t_0) = x_0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Para tal caso, se supone un parámetro de comparación de controles $u^*(t) + ah(t)$ donde $u^*(t)$ es la solución de control óptimo al problema de maximización, $h(t)$ es una función fija y a es un parámetro. Luego la función $y(t,a)$ expresa la variable de estado que ha sido generada por las condiciones iniciales ($x'(t) = g(t, x(t), u(t))$ y $x(t_0) = x_0;\ x(t_1) \to libre$) con la variable de control $u^*(t) + ah(t)$ dentro del intervalo $t_0 \le t \le t_1$. Por tanto, se tiene:

$$y(t_0, a) = x_0 \tag{2.6}$$

Se puede apreciar que cuando $a = 0$, se alcanza el óptimo de la variable de estado *x**:

$$y(t,0) = x^*(t) \tag{2.7}$$

A modo resumen, con las soluciones óptimas de *u**, *x** y *h* siendo fijas, el valor de la ecuación diferencial $x'(t) = g(t, x(t), u(t))$ valorada a lo largo de la función de control $u^*(t) + ah(t)$ y la función $y(t,a)$ que denota la variable de estado y depende del valor de *a*, podemos escribir:

$$J(a) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, y(t,a), u^*(t) + ah(t))dt \tag{2.8}$$

Ahora sustituyendo estos valores ($u(t) = u^*(t)$; $x(t) = y(t,a)$) en la ecuación (4) obtenida por Lagrange anteriormente tenemos:

$$\begin{aligned} J(a) = &\int_{t_0}^{t_1} [\, f(t, y(t,a), u^*(t) + ah(t)) + \mathtt{a}(t) g(t, y(t,a), u^*(t) + ah(t)) + y(t,a)\mathtt{a}'(t)]dt - \\ &- \mathtt{a}(t_1) y(t_1, a) + \mathtt{a}(t_0) y(t_0, a) \end{aligned} \tag{2.9}$$

Entonces siendo u^* la variable de control maximizada, se determina que la función *J(a)* adopta su máximo cuando $a = 0$. Diferenciando la función con respecto a y evaluando en dicho punto, se obtiene:

$$J'(0) = \int_{t_0}^{t_1} [(f_x + {}^{a}g_x + {}^{a}')y_a + (f_u + {}^{a}g_u)h]dt - {}^{a}(t_1)y_a(t_1,0) \tag{2.10}$$

Donde f_x y g_x son las derivadas parciales de las funciones f y g con respecto a su segundo argumento, y f_u y g_u son las derivadas parciales de las mismas con respecto a su tercer argumento. Por su parte, y_a es la derivada parcial de y con respecto a su segundo argumento. Se puede apreciar que el último término no se deriva ya que es independiente de a dado que para todo valor de a la expresión $y_a(t_0, a) = x_0$, como se recoge anteriormente.

En esta fase es complicado especificar la función $y_a(t_0, a) = 0$ que determina la modificación de la senda de la variable de estado provocado por la variable de control. Para evitar esta situación, se hace a partir de ${}^{a}(t)$ la cuál satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} &{}^{a}'(t) = -[f_x(t, x^*, u^*) + {}^{a}(t)g_x(t, x^*, u^*)] \\ &con \\ &{}^{a}(t_1) = 0 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Entonces, con λ dado, la ecuación (2.10) se cumple siempre y cuando:

$$\int_{t_0}^{t_1} [f_u(t, x^*, u^*) + {}^{a}g_u(t, x^*, u^*)]hdt = 0 \tag{2.12}$$

Esto es para una función $h(t)$ arbitraria, que debe cumplir:

$$h(t) = f_u(t, x^*, u^*) + {}^{a}(t)g_u(t, x^*, u^*) \tag{2.13}$$

Tal que:

$$\int_{t_0}^{t_1} [f_u(t, x^*(t), u^*(t)) + {}^{a}(t)g_u(t, x^*(t), u^*(t))]^2 dt = 0 \tag{2.14}$$

Y ello implica la condición necesaria:

$$f_u(t, x^*(t), u^*(t)) + {}^{a}(t)g_u(t, x^*(t), u^*(t)) = 0 \qquad t_0 \le t \le t_1 \tag{2.15}$$

Resumiendo lo expuesto, se pueden obtener las condiciones necesarias. Siempre que se cumpla que las funciones u^* y v^* son soluciones óptimas que maximizan la ecuación

$\max \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))dt$ sujeto a las restricciones $x'(t) = g(t, x(t), u(t))$, $x(t_0) = x_0 \rightarrow fijo$ y $x(t_1) \rightarrow libre$ entonces se cumple que existe una función continua diferenciable $\alpha(t)$ tal que *u**, *x** y λ simultáneamente cumplen:

La ecuación de estado:

$$\begin{aligned} x'(t) &= g(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{2.16}$$

La ecuación del multiplicador:

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= -[f_x(t, x(t), u(t)) + \alpha(t) g_x(t, x(t), u(t))] \\ \alpha(t_1) &= 0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Dónde $\alpha(t_1) = 0$ se considera la condición de transversalidad que se implanta cuando $x(t_1)$ no se le asigna un valor fijo.

Y la condición de optimalidad:

$$f_u(t, x(t), u(t)) + \alpha(t) g_u(t, x(t), u(t)) = 0 \tag{2.18}$$

Cómo se ha expresado con anterioridad, la otra forma para obtener las condiciones necesarias de forma más simple, es a partir de la función Hamiltoniana. Así pues, del problema expuesto inicialmente, obtenemos el Hamiltoniano asociando un multiplicador de Lagrange a cada restricción, quedando de la siguiente forma:

$$H(t, x(t), u(t), \alpha(t)) = f(t, x, u) + \alpha g(t, x, u) \tag{2.19}$$

Para obtener las condiciones necesarias, se realiza a partir de las derivadas parciales de la función Hamiltoniana con respecto a la variable de control, la variable de estado y el multiplicador de Lagrange λ:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \tag{2.20}$$

$$-\frac{\partial H}{\partial x} = \alpha' \tag{2.21}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha} = x' \tag{2.22}$$

Se puede comprobar que cada condición obtenida genera la misma condición obtenida anteriormente de forma analítica. Así pues:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial H}{\partial u} = f_u + {}^{a}g_u = 0 \tag{2.23}$$

$$-\frac{\partial H}{\partial x} = {}^{a}{}' \quad \rightarrow \quad {}^{a}{}'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -(f_x + {}^{a}g_x) \tag{2.24}$$

$$\frac{\partial H}{\partial {}^{a}} = x' \quad \rightarrow \quad x' = \frac{\partial H}{\partial {}^{a}} = g \tag{2.25}$$

Además, cabe reflejar las condiciones necesarias que debe cumplir la variable de control u^* para maximizar o minimizar el problema si se trata de un problema de máximo o de mínimo respectivamente. Las condiciones necesarias son (ver Fernández y García, 2001):

- Para un problema de máximo:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(t, x^*, u^*, {}^{a}*) \leq 0 \tag{2.26}$$

$$H(t, x^*, u^*, {}^{a}*) \geq H(t, x, u, {}^{a}) \tag{2.27}$$

Siendo esta última condición, la que determina que el punto maximiza la función respecto a *u*.

- Para un problema de mínimo:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(t, x^*, u^*, {}^{a}*) \geq 0 \tag{2.28}$$

$$H(t, x^*, u^*, {}^{a}*) \leq H(t, x, u, {}^{a}) \tag{2.29}$$

Siendo esta última condición, la que determina que el punto minimiza la función respecto a *u*.

A modo ilustrativo, se muestra el siguiente ejemplo numérico sobre la obtención de la variable de control y la variable de estado y las condiciones necesarias mediante la función Hamiltoniana (Kamien y Schwartz, 1991).

Partiendo del problema de optimización inicial compuesto por la variable de control y una variable de estado:

$$\begin{aligned} &\max \int_0^1 (x + u)dt \\ s.a.: \ &x' = 1 - u^2 \\ &x(0) = 1 \end{aligned} \tag{2.30}$$

La función Hamiltoniana queda:

$$H(t,x,u,\mathtt{a}) = x + u + \mathtt{a}(1-u^2) \tag{2.31}$$

Ahora ya podemos obtener las condiciones necesarias:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 1 - 2\cdot \mathtt{a} u = 0 \tag{2.32}$$

$$\mathtt{a}' = -\frac{\partial H}{\partial x} = -H_x = -1 \qquad \mathtt{a}'(1) = 0 \tag{2.33}$$

$$x' = \frac{\partial H}{\partial \mathtt{a}} = 1 \tag{2.34}$$

Luego comprobamos la condición de máximo:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial^2 u} = -2\mathtt{a} \le 0 \tag{2.35}$$

Se cumple la condición de máximo del problema.

Ahora se procede a obtener las variables de control y de estado. Para ello, primero integramos la condición $\mathtt{a}' = -\frac{\partial H}{\partial x} = 1$ y empleando la condición de transversalidad $\mathtt{a}(t_1) = 0$ obtenemos el valor de λ:

$$\mathtt{a} = 1 - t \tag{2.36}$$

Luego a partir de la primera condición, podemos despejar *u* y dejarlo en función de λ:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 1 - 2\cdot \mathtt{a} u = 0 \rightarrow u = \frac{1}{2\mathtt{a}} \tag{2.37}$$

Sustituyendo por el valor de λ:

$$u = \frac{1}{2\cdot(1-t)} \tag{2.38}$$

Ahora podemos sustituir el valor de *u* en la restricción del problema. De este modo obtenemos *x'*:

$$x' = 1 - u^2 \rightarrow x' = 1 - \frac{1}{2\cdot(1-t)} \tag{2.39}$$

Integrando y usando la condición de transversalidad $x(0) = 1$ obtenemos *x*:

$$x(t) = t - \frac{1}{4(1-t)} + \frac{5}{4} \tag{2.40}$$

En resumen, tenemos:

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{2\cdot(1-t)} \\ x(t) &= t - \frac{1}{4\cdot(1-t)} + \frac{5}{4} \\ \mathtt{a}(t) &= 1-t \end{aligned} \tag{2.41}$$

Ahora, a partir de la obtención de las condiciones necesarias, se procede a estudiar que además de ser necesarias, son también suficientes en un problema de óptimo. La teoría es similar a las condiciones de Kuhn-Tucker aplicadas en problemas no lineales. Así pues, para este caso se considera condiciones necesarias y suficientes cuando la función objetivo cóncava o convexa es para ser maximizada o minimizada sobre una región convexa cerrada. Ahora bien, para problemas de control óptimo, las condiciones necesarias son suficientes si la integral de la función $F(t,x,x')$ es cóncava o convexa en *x, x'*. Veamos esto expresado de forma analítica. (Kamien y Schwartz, 1991)

Supongamos que se tiene dos funciones cóncavas diferenciables de *u* y *x*, tales que:

$$\begin{aligned} &\max \int_{t_0}^{t_1} f(t,x,u)dt \\ s.a:\ &x' = g(t,x,u) \quad \textit{para todo } t_0 \le t \le t_1 \\ &x(t_0) = x_0 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Ahora se supone que las soluciones al problema de control óptimo *x**, *u** y λ cumplen las condiciones necesarias:

$$\begin{aligned} &f_u(t,x,u) + \mathtt{a}\, g_u(t,x,u) = 0 \\ &\mathtt{a}' = -f_x(t,x,u) - \mathtt{a}\, g_x(t,x,u) \\ &\mathtt{a}_1(t_1) = 0 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Y además, que *x* y λ son funciones continuas. Entonces, para tal caso, si las funciones f y g son funciones conjuntamente cóncavas de *x* y *u* y se mantiene la condición de $\mathtt{a}(t) \ge 0$, entonces las condiciones necesarias expuestas anteriormente son también suficientes.

2.1 El Principio del Máximo de Pontryagin

Siguiendo a Cerdá (2001) en su libro "*Optimización dinámica*", el Principio del máximo de Pontryagin es el método que nos permite obtener las condiciones necesarias que tiene que obedecer el control óptimo de los problemas de Teoría de Control. Así pues, es el procedimiento de resolución explicado y expuesto anteriormente en el que se aplica la función Hamiltoniana determinando la solución óptima que instaura las condiciones necesarias de optimalidad. Sin embargo, Kamien y Schwartz (1991), señalan que el principio tiene una diferencia con respecto al uso convencional que se ha dado hasta ahora para resolver los problemas. Para reflejar tal diferencia, se procede a exponer el principio.

Se parte del problema de optimización con el objetivo de encontrar un vector de control y un vector de estado que se defina en el intervalo temporal $[t_0, t_1]$:

$$
\begin{aligned}
& \max \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))dt \\
s.a.: \ & x_i'(t) = g_i(t, x(t), u(t)) \\
& \textit{condiciones iniciales} \\
& x_i(t_0) = x_{i0} \quad i = 1,...,n \quad (x_{i0} \ \textit{fijo}) \\
& \textit{condiciones finales} \\
& x_i(t_1) = x_{i1} \quad i = 1,..., p \\
& x_i(t_1) \geq x_{it} \quad i = p+1,..., q \quad (x_{i1}, i = 1,..., q \quad \textit{fijos}) \\
& x_i(t_1) \ \textit{libre} \quad i = q+1,..., n \\
& \textit{restricción de la variable de control} \\
& u(t) \in U \ \textit{conjunto dado en } R^m
\end{aligned}
\tag{2.1.1}
$$

Entonces el teorema de Pontryagin anuncia lo siguiente (ver Kamien y Schwartz, 1991; y Tu, 1991): *"Para que x*(t), u*(t) sea óptimo para el problema expuesto anteriormente, es necesario que exista una constante λ_0 y una función continua $\alpha(t) = (\alpha_1(t),..., \alpha_n(t))$ donde para todo $t_0 \leq t \leq t_1$ tenemos $(\alpha_0, \alpha(t)) \neq (0,0)$ tal que para cada $t_0 \leq t \leq t_1$*

$$H(t, x^*(t), u, \alpha(t)) \leq H(t, x^*(t), u^*(t), \alpha(t)) \tag{2.1.2}$$

Donde la función Hamiltoniana H es definida por:

$$H(t, x, u, \alpha) = \alpha_0 f(t, x, u) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i(t, x, u) \tag{2.1.3}$$

Excepto los puntos de discontinuidad de u(t),*

$$\alpha_i'(t) = \frac{-\partial H(t, x^*(t), u^*(t), \alpha(t))}{\partial x_i} \quad i = 1,...,n \tag{2.1.4}$$

Además

$$\alpha_0 = 1 \quad ó \quad \alpha_0 = 0 \tag{2.1.5}$$

Y por último, las condiciones de transversalidad son satisfechas:

$$\begin{aligned} &\alpha_i(t_1) \text{ no hay condiciones} \quad i = 1,..., p \\ &\alpha_i(t_1) \geq 0 \qquad (= 0 \text{ si } x_i^*(t_1) > x_{i1}) \quad i = p+1,...,q \\ &\alpha_i(t_1) = 0 \qquad i = q+1,...,n \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Ahora bien, de este planteamiento con respecto al planteamiento que se ha desarrollado en el apartado anterior, existen dos diferencias: una diferencia de precisión técnica, y otra de tipo estilística. (Kamien y Schwartz, 1991).

La diferencia existente de precisión técnica se basa en la especificación de la variable λ. Hasta ahora siempre se ha tenido la condición de transversalidad $\alpha_0 = 1$ como condición para que el problema de control tenga solución. Sin embargo, se puede apreciar que, el teorema recoge que hay problemas en los que la solución óptima requiere que $\alpha_0 = 0$.

Con respecto a la diferencia estilística, se alude a la especificación de la región de la variable de control $u(t)$, que en tal caso se precisa que el vector u se encuentra en algún conjunto U.

2.2 Control óptimo con varias variables

La dinámica del sistema del problema de control óptimo se puede presentar con más de una variable de estado o variables de control. En tal caso, el planteamiento de resolución es similar a lo expuesto hasta ahora.

De forma ilustrativa, se expone el siguiente problema en el que se aplica el principio del máximo de Pontryagin (Fernández y García, 2001):

$$\begin{aligned} &\max \int_{t_1}^{t_2} F(x, y, u, t)dt \\ s.a.: \quad &\dot{x} = f(x, y, u, t) \\ &\dot{y} = g(x, y, u, t) \\ &x(0) = x_0 \\ &y(0) = y_0 \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Como se puede apreciar, el problema está compuesto por dos variables de estado *x* e *y*. Entonces, siguiendo con el procedimiento habitual, obtenemos la función Hamiltoniana:

$$H = F(x,y,u,t) + \alpha_1 f(x,y,u,t) + \alpha_2 g(x,y,u,t) \tag{2.2.2}$$

Luego las condiciones necesarias son:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial \alpha_1} \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial \alpha_2} \\ \frac{\partial H}{\partial u} &= 0 \\ \dot{\alpha}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x} \qquad \dot{\alpha}_2 = -\frac{\partial H}{\partial y} \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Y la condición de máximo:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \leq 0 \tag{2.2.4}$$

Luego se redacta que si las variables de estado $x(t_2)$ e $y(t_2)$ son libres, se obtienen dos condiciones de transversalidad $\alpha_1(t_2) = 0$ y $\alpha_2(t_2) = 0$ que permiten especificar las constantes de integración.

2.3 Variables acotadas

Hasta ahora, para explicar la resolución de los problemas de control óptimo se ha especificado que tanto las variables de control como las variables de estado siguen una trayectoria dentro del intervalo temporal [t_0, t_1]. Ahora bien, esta designación no ocurre en todos los problemas. Se pueden dar los casos en que las variables de control o de estado, o ambas al mismo tiempo, se encuentren acotadas y sólo se muevan en un intervalo temporal específico.

Para visualizar de forma práctica lo expuesto, se muestran algunos ejemplos recogidos de distintas fuentes.

El planteamiento del problema de acotación de la variable de control se muestra de la siguiente forma (Kamien y Schwartz, 1991):

$$\begin{aligned} &\max \int_{t_0}^{t_1} f(t,x,u)dt \\ s.a.:\ &x' = g(t,x,u), \quad x(t_0) = x_0 \\ &a \le u \le b \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Para el caso, donde la variable de control y de estado están acotadas (Fernández y García, 2001):

$$\begin{aligned} &\max \int_0^T \frac{1}{2} u^2(t)dt \\ s.a.:\ &\dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ &\dot{x}_2(t) = u(t) \\ &x_1(0) = 0 \\ &x_2(0) = 0 \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

También existen casos donde el horizonte temporal en el problema de control óptimo es infinito, como en el siguiente planteamiento (Tu, 1991):

$$\begin{aligned} &\max \int_{t_0}^{\infty} f(t,x(t),u(t))dt \\ s.a.:\ &\dot{x}(t) = g(t,x(t),u(t) \\ &x(t_0) = x_0 \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

En función del problema y el objetivo que se quiera conseguir (maximizar o minimizar), está claro que la extensión del intervalo temporal es un componente determinante en el resultado obtenido en el problema de control óptimo. Así pues, se puede predecir que aquellos problemas con una amplitud de intervalo temporal corto se obtendrán resultados con rendimientos altos a corto plazo y crecimientos lentos a largo plazo; y al contrario, aquellos problemas en los que se tiene un intervalo temporal infinito se presentan cuando no hay limitaciones de clase temporal.

3. Ejemplos de aplicación de la Teoría del Control Óptimo

3.1 Tiempo óptimo de tala de una plantación forestal

La principal problemática para la gestión de un bosque consiste en el tiempo óptimo de tala de cada especie, con el fin de evitar su desaparición por sobreexplotación. En este apartado se detalla el modelo de explotación de un bosque planteándolo como un problema de Control Óptimo y aplicando el principio del máximo de Pontryagin que nos permite obtener las condiciones necesarias que proporcionarán la solución óptima (Reed, 1994b).

En el ejemplo se exponen dos situaciones, en la que se quiere obtener el patrón óptimo de tala de una plantación forestal. Un primer escenario en que se procede acometer talas selectivas; y luego una segunda situación en la que se vaticina una tala total de la población.

Se detalla que la cantidad de madera de una plantación forestal en un momento determinado *t* viene representado por $x(t)$. El crecimiento de dicha variable viene determinado por la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = a(t)F(x) \\ &x(0) = 0 \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Donde $a(t)$ es una función que muestra la pauta de crecimiento de los árboles, siendo ésta decreciente positiva, dado que a medida que envejecen los árboles el crecimiento disminuye. Luego $F(x)$ muestra el volumen de densidad de la plantación, siendo una función cóncava positiva de *x*, ya que el incremento del volumen depende de la densidad de la especie.

En el primer caso se permite acometer talas selectivas en un período comprendido en el intervalo [0, *T*], esto es, la etapa anterior de someter la población forestal a la tala total. Para este caso, el crecimiento de la plantación ($x(t)$) viene dado por:

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = a(t)F(x) - h(t) \\ &x(0) = x_0 \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Donde $h(t)$ es el ritmo de la tala que representa unidades de volumen de la población por unidad de tiempo. El ingreso neto viene representado por $p(t) \cdot h(t)$ siendo $p(h)$ el valor unitario de la tala descontando el coste propio de la tala.

En el segundo escenario se irrumpe con una tala total de la población el momento *T*. El ingreso neto en este caso viene representado por $q(T) \cdot x(T)$, definiéndose $q(t)$ como el valor unitario de la madera talada siendo descontado el coste de la propia tala.

Cabe señalar que la tala total se considera más económica que la tala selectiva, por tanto, $p(t) < q(t)$.

Aplicando la Teoría del Control Óptimo, el objetivo fundamental del problema es determinar la pauta temporal de las talas que se producen con la finalidad de maximizar el valor actual de

los ingresos, tanto de la tala selectiva como de la tala total, es decir, se trata de buscar la variable de control $h(t)$ que maximice:

$$\begin{aligned} & \max \int_0^T e^{-¢t} p(t)h(t)dt + e^{-¢T} q(T)x(T) \\ s.a.: & \frac{dx}{dt} = a(t)F(x) - h(t) \\ & 0 \le h(t) \le h_{\max} \\ & 0 \le t \le T \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

Donde $h_{\max}$ es el máximo ritmo en que se puede ejecutar la tala selectiva.

Para resolverlo aplicamos el Principio del máximo de Pontryagin. Siguiendo con el procedimiento anteriormente expuesto, definimos la función Hamiltoniana:

$$H = e^{-¢t} p(t)h(t) + ª[a(t)F(x) - h(t)] \tag{3.1.4}$$

Veamos las condiciones para que la función $h(t)$ sea óptima:

$$\begin{aligned} & \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial x} = ª(t)a(t)F'(x) \\ & \dot{ª} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -ª(t)a(t)F'(x) \\ & ª(T) = e^{-¢T} q(T) \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

Siendo la última condición la de transversalidad.

Es necesario, obviamente, que el ritmo óptimo de tala $h^*(t)$ maximice la función Hamiltoniana en cada instante del tiempo *t*, es decir, durante todo el intervalo [0, *T*].

Luego, la función Hamiltoniana se puede formular en función de $±(t)$, resultando de la siguiente manera:

$$H = ±(t)h(t) + ª(t)a(t)F(x) \tag{3.1.6}$$

Denominándose $±(t)$ función de conmutación y definiéndose de la siguiente forma:

$$±(t) = [e^{-¢t} p(t) - ª(t)] \tag{3.1.7}$$

Por tanto se deduce que la variable de control $h(t)$ se expresa en función del valor de $±(t)$ con el fin de maximizar *H*. Así pues, si $±(t) > 0$ interesa que *h* tome un valor tan grande

como sea posible, es decir, $h = h_{\max}$. Por el contrario, si $\pm(t) < 0$ el valor de *h* debe ser 0 para maximizar *H*. A este tipo de control se le denomina “bang-bang”.

En el caso de que $\pm(t) = 0$ en algún intervalo de tiempo, cualquier valor de *h* es válido para maximizar la función Hamiltoniana, aunque para esta situación solo se establece un único valor de *h*. Es por ello que a esta posibilidad se denomina estrategia de control singular. Así pues, para deducir dicha estrategia, es decir, el valor de $h(t)$ cuando $\pm(t) = 0$, partimos de las siguientes condiciones:

$$\pm(t) = 0 \tag{3.1.8}$$

$$\frac{d\pm}{dt} = 0 \tag{3.1.9}$$

A partir de la condición (3.1.8), se resuelve:

$$\begin{aligned} &\pm(t) = [e^{-¢t} p(t) - ª(t)] \\ &\textit{siendo} \quad \pm(t) = 0 \\ &ª(t) = e^{-¢t} p(t) \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

Luego a partir de la condición (3.1.9), resolvemos derivando y obtenemos:

$$\begin{aligned} &\pm(t) = [e^{-¢t} p(t) - ª(t)] \\ &\frac{d\pm}{dt} = 0 \\ &\pm'(t) = [e^{-¢t} \cdot \ln e \cdot (-¢)] \cdot p(t) + e^{-¢t} \cdot p'(t) - ª'(t) = e^{-¢t} \cdot [-¢ \cdot p(t) + p'(t)] - ª'(t) \\ &\pm'(t) = e^{-¢t} \cdot [-¢ \cdot p(t) + p'(t)] - ª'(t) \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

Ahora sustituyendo en esta expresión el valor de $ª'(t)$ expuesto en (3.1.5):

$$e^{-¢t} \cdot [-¢p(t) + p'(t)] + ª(t)a(t)F'(x) \tag{3.1.12}$$

Y sustituyendo el valor de $ª(t)$ que obtenemos de la expresión (3.1.10):

$$e^{-¢t} \cdot [-¢p(t) + p'(t)] + e^{-¢t} \cdot p(t) \cdot a(t) \cdot F'(x) \tag{3.1.13}$$

Para finalizar, despejando $a(t) \cdot F'(x)$ y simplificando, se obtiene para el control singular:

$$a(t)F'(x) = \frac{-[p'(t) - ¢p(t)] \cdot e^{-¢t}}{e^{-¢t} p(t)}$$

$$a(t)F'(x) = \frac{-p'(t)}{p(t)} + \frac{¢p(t)}{p(t)}$$

$$a(t)F'(x) = ¢ - \frac{p'(t)}{p(t)} \tag{3.1.14}$$

Según se detalla, la solución de esta expresión nos muestra la trayectoria o senda singular $x_s(t)$, que para seguir en ella, requiere que:

$$\begin{aligned} & x'(t) = a(t)F(x) - h(t) = x_s^{'}(t) \\ & o\ bien \\ & h(t) = a(t)F(x) - x_s^{'}(t) \end{aligned} \tag{3.1.15}$$

A modo ilustrativo, veamos los dos escenarios propuestos inicialmente (tala selectiva y tala total) y el tipo de estrategia de control óptimo que ocurre en cada uno de ellos.

De inicio no se contempla realizar ningún tipo de tala porque hay poco volumen de madera y existe un gran potencial de crecimiento. En este caso ocurre $x_0 < x_s(0)$ y la función de conmutación será $\pm(t) < 0$, donde $h = 0$ para maximizar la función Hamiltoniana. Luego en el momento t_1, es cuando el volumen de la explotación alcanza la trayectoria singular, y comienza en ese mismo instante la tala selectiva, donde la función de conmutación será $\pm(t) > 0$ y $h > 0$. El proceso de optimización continúa con la tala selectiva a lo largo de la senda singular hasta el momento t_2. A partir de ese momento, no se realiza ninguna tala hasta el momento T, donde se ejecuta la tala total de la población.

Gráficamente veamos lo expuesto hasta ahora:

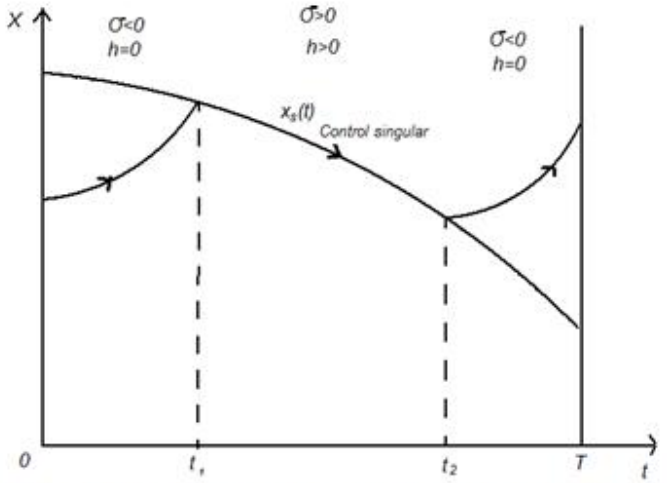

Figura 1: Patrón óptimo de la gestión de una plantación forestal

Se comprueba que el patrón óptimo de la tala selectiva consta de tres partes: una primera en la que no se produce tala alguna, una segunda en la se produce una tala que sigue la senda

singular, y una última parte en la que no se produce tala alguna justo antes de que se produzca la tala total.

La demostración analítica de la última parte, en la que no se produce tala selectiva, se obtiene a partir de la condición de transversalidad:

$$\mu(T) = e^{-\delta T} q(T) \tag{3.1.16}$$

Sustituyendo en la expresión de la función de conmutación (3.1.7), se obtiene la función de conmutación en el momento *T*.

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= [e^{-\delta t} p(t) - \mu(t)] \\ \varphi(t) &= [e^{-\delta t} p(t) - e^{-\delta t} q(T)] \\ \varphi(T) &= e^{-\delta T} [p(T) - q(T)] \end{aligned} \tag{3.1.17}$$

Por tanto, se argumenta que el control óptimo en *T* es $h^* = 0$, dado la continuidad de p, q y λ para el intervalo anterior a *T*.

3.2 Modelo de explotación de las pesquerías

Este estudio se enfoca en determinar las pautas óptimas de explotación del recurso, con la finalidad de evitar una sobreexplotación del mismo que pueda causar una desaparición de la especie. De forma ilustrativa, se expone un caso (Fernández y García, 2001) en el que se considera un mercado perfectamente competitivo formado por numerosas empresas ofertantes y demandantes, por lo que no pueden ejercer control sobre el precio del pescado (*p).* El volumen de la especie viene dado por la variable $x(t)$, y el crecimiento neto de la población considerando que no se producen capturas viene dado por la ecuación diferencial:

$$\dot{x} = F(x) \tag{3.2.1}$$

Donde la función *F(x)* muestra el crecimiento de la especie. En caso de que se produzcan capturas de la misma la ecuación diferencial se modifica de tal forma que:

$$\dot{x} = F(x) - h(t) \tag{3.2.2}$$

Siendo *h(t)* la cantidad de capturas que se realizan el instante *t.* A partir de lo expuesto, se puede identificar a la variable *x(t)* como la variable de estado, y la variable *h(t)* como la variable de control. Esto se explica porque $\dot{x}(t)$ refleja el cambio de la población de especies provocado por condiciones medioambientales o la propia actividad humana. Siendo esta

última condición, la que se puede controlar a partir de la variable *h(t)*. De esta forma, dicha variable podrá tomar valores dentro del intervalo [0, h_{max}]. En su extremo inferior, se considera la ausencia de capturas, y por el contrario, h_{max} representa el máximo de capturas factible que se puede realizar, debido a una situación de restricción institucional en la que sólo se permita capturar un número determinado de especies o a una limitación dado las condiciones físicas o logísticas para la captura del pescado.

En el ejemplo, a su vez, se recoge que cada empresa se enfrenta a un único coste (c_0), siendo éste el coste de licencia de pesca para acceder al caladero durante el intervalo $(0,T)$, que se paga antes de comenzar la actividad pesquera. El objetivo de cada empresa es el de maximizar la suma de los beneficios obtenidos por la explotación pesquera en cada período, enfrentándose a la decisión de no agotar el caladero de pesca. Por tanto el problema resuelve de forma óptima cuál es la tasa óptima de extracción de pescado en cada instante ($h(t)$).Tal cuestión se resuelve a partir del problema de control:

$$\begin{aligned} & \max_{\{h\}} \int_0^T e^{-rt} p(t)h(t)dt \\ s.a.: \ & \dot{x} = F(x(t)) - h(t) \\ & 0 \le h(t) \le h_{\max} \\ & x(0) = x_0 \\ & x(T) = x_T \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Ahora para obtener el nivel de capturas óptimo $h^*(t)$, planteamos el Hamiltoniano:

$$H = e^{-rt} p(t)h(t) + \mu[F(x(t)) - h(t)] \tag{3.2.4}$$

Luego las condiciones para que el punto sea óptimo:

$$\begin{aligned} & \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial x} = \mu(t)F'(x(t)) \\ & \dot{\mu} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\mu(t)F'(x(t)) \\ & \mu(T) = e^{-rT} p(T) \quad \textit{condición de transversalidad} \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

3.3 Modelo de explotación de los recursos no renovables

Los recursos no renovables presentan una gran importancia en las decisiones de ritmo temporal de su explotación debido al carácter de disponibilidad limitada de los mismos,

tratando de que se optimice la rentabilidad de su consumo dentro de un intervalo temporal estimado.

Para mostrar la problemática expuesta anteriormente de forma analítica se expone la situación (Fernández y García, 2001) en la que se considera una sociedad que dispone de una cantidad $\bar{S}$ de recurso no renovable, que puede emplear durante un tiempo fijo *T*. Luego se considera $q(t)$ la tasa de consumo del recurso en cada instante de tiempo, siendo, $q(t)\cdot\Delta t$ la cantidad de recurso utilizada en el instante de tiempo Δt. Si se quiere determinar la cantidad de recurso consumido entre dos intervalos de tiempo *a* y *b*: $\int_a^b q(t)dt$. Entonces, el planteamiento del problema parte de una función de utilidad de la que se quiere determinar el aprovechamiento óptimo del recurso especificando las pautas temporales de extracción permitiendo el consumo sin pausa de cada generación. Así pues:

$$\begin{aligned} &\max \int_0^T U(q)e^{-¢t}dt \\ &s.a.: \int_0^T q(t)dt = \bar{S} \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Donde se ha considerado el intervalo temporal $[0,T]$. La variable de control viene determinada por $q(t)$. Luego $U(q)$ representa la función de utilidad, siendo la misma creciente ($U'(q)>0$) y cóncava ($U''(q)<0$).

Ahora se puede apreciar que es un problema de variaciones. Para transformarlo en un problema de control óptimo, es necesario definir y añadir la variable de estado. Se considera ésta variable como la cantidad de recurso que queda por consumir en cada instante de tiempo:

$$x(t) = \bar{S} - \int_0^t q(²)d² \tag{3.3.2}$$

De donde se comprueba que $x(0)=\bar{S}$ y $x(T)=0$. Por consiguiente, también se comprueba que:

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(s - \int_0^t q(²)d² \right) = -q(t) \tag{3.3.3}$$

Entonces, el problema de control óptimo se representa de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &\max \int_0^T U(q)e^{-¢t}dt \\ s.a.:\ &\dot{x}(t) = -q(t) \\ &x(0) = \bar{S} \\ &x(T) = 0 \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

Ahora se sigue con el procedimiento habitual. Se realiza la función Hamiltoniana:

$$H = U(q)e^{-¢t} - ª(t)q(t) \tag{3.3.5}$$

Luego se extrae las condiciones de óptimo:

$$\begin{aligned} &\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial q} = U'(q)e^{-¢t} - ª \\ &\dot{ª} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad esto\ \text{deter}\text{min}a\ \ ª = \bar{ª}\ (\text{cons}\text{tan}te) \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Luego:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial q} = U'(q)e^{-¢t} - ª = 0 \rightarrow ª = U'(q)e^{-¢t} \tag{3.3.7}$$

Por tanto:

$$e^{-¢t} = \bar{ª} \rightarrow U'(q) = \bar{ª}e^{¢t} \tag{3.3.8}$$

Ahora bien, según el valor que tenga δ obtendremos un resultado u otro con diferente interpretación del consumo del recurso. Para un primer caso, se supone que $¢ > 0$, luego $U'(q)$ la función de utilidad marginal aumenta con el paso del tiempo a una tasa exponencial. Se comprueba que $\lim_{q \to 0} U'(q) = +\infty$, teniendo en cuenta la ley de rendimientos marginales decrecientes de la función de utilidad $U''(q) < 0 < U'(q)$. Esto explica que la tasa de consumo óptimo del recurso, $q^*(t)$, debe ser decreciente en el tiempo, esto es, que las generaciones actuales consuman más recurso que las futuras, para que se produzcan de esta forma los crecimientos exponenciales en la utilidad.

Por el contrario, si $¢ = 0$, entonces $U'(q) = \bar{ª}$, esto quiere decir, que la utilidad marginal es constante, por lo que se considera que todas las generaciones consumen la misma cantidad de recurso $q(t)$.

A modo ilustrativo, se expone el siguiente ejemplo de resolución matemática del planteamiento expuesto anteriormente (Fernández y García, 2001). Se supone que la función de utilidad es igual a:

$$U(q) = \sqrt{q} \tag{3.3.9}$$

Se obtiene la función de utilidad marginal:

$$U'(q) = \frac{1}{2\sqrt{q}} \tag{3.3.10}$$

Luego partiendo de la condición expuesta anteriormente y empleando el valor de la utilidad marginal, se tiene:

$$U'(q) = \bar{a} e^{¢t} \tag{3.3.11}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{q}} = \bar{a} e^{¢t} \tag{3.3.12}$$

Se despeja *q*:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{q}} &= 2\bar{a} e^{¢t} \\ q &= \frac{1}{4\bar{a}^2 e^{2¢t}} \end{aligned} \tag{3.3.13}$$

Ahora, a partir de la condición $\dot{x} = -q$, tenemos el valor de $\dot{x}$:

$$\dot{x} = -\frac{1}{4\bar{a}} \cdot e^{-2¢t} \tag{3.3.14}$$

Integrando, obtenemos el valor de la variable de estado:

$$x = -\frac{1}{4\bar{a}} \int e^{-2¢t} dt = \frac{1}{8\bar{a}¢} e^{-2¢t} + k \tag{3.3.15}$$

Luego, aplicando $x(T) = 0$, se obtiene el valor de la constante *k:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\bar{a}¢} e^{-2¢T} + k &= 0 \\ k &= -\frac{1}{8\bar{a}¢} e^{-2¢T} \end{aligned} \tag{3.3.16}$$

Agrupando, la solución será:

$$x^*(t) = \frac{1}{8\bar{a}¢}e^{-2¢t} - \frac{1}{8\bar{a}¢}e^{-2¢T}$$
$$q^*(t) = \frac{1}{4\bar{a}e^{2¢t}} \tag{3.3.17}$$

A partir de la condición $x^*(0) = \bar{S}$, podemos obtener el valor de $\bar{a}$:

$$\bar{a} = \frac{-e^{-2¢T}}{8¢\bar{S}} \tag{3.3.18}$$

4. Programación Dinámica

La Programación Dinámica es la tercera alternativa empleada para resolver los problemas de optimización dinámica. Dicha técnica, fue desarrollada por Richard Bellman, con el Principio de optimalidad de Bellman en 1957, fundamental para resolver los problemas de Programación Dinámica, que dice lo siguiente: "*una política óptima tiene la propiedad de que cualquiera que sea el estado inicial y las decisiones iniciales, las restantes decisiones deben constituir una política óptima con respecto al estado resultante de la primera decisión*". Esto es, los problemas de optimización en los que se aplica este método, son separados por etapas en subproblemas obteniéndose para cada etapa una solución óptima que se requiere que se asocie al valor óptimo del problema. Así pues, la trayectoria total del problema sólo será óptima si las soluciones de los subproblemas adyacentes a cada etapa constituyen también al mismo tiempo una solución óptima. Esta es la principal diferencia con respecto a la Teoría de Control en donde el estudio se centraba de forma globalizada en determinar la variable de control $u^*(t)$.

El planteamiento de un problema de programación dinámica de forma generalizada para el caso discreto, tiene la siguiente forma (ver Escot, Olmedo y Pozo, 2002):

$$V[t] = \sum_{0}^{T-1} F[x(t), u(t)] + G(x(t))$$
$$s.a \quad x(0) = A \qquad (A \text{ es dado})$$
$$x(T) = Z \qquad (T, Z \text{ son dados}) \tag{4.1}$$
$$x(t+1) = f[x(t), u(t)]$$
$$u(t) \in U \quad para \;\; 0 \le t \le T$$

donde $x(t)$ y $u(t)$ representan la variable de estado y de control respectivamente, siendo t $(t = 0,1,...,T)$ la variable que indica cada período. Luego A y Z representan la etapa inicial y final respectivamente. La función $F[x(t),u(t)]$ representa la ecuación de movimiento en tiempo discreto. Por su parte, la variable de estado del sistema se desarrolla siguiendo una ecuación recursiva, es decir, que puede repetirse indefinidamente:

$$x(t+1) = f[x(t),u(t)] \quad (t = t_0, t_0+1,..., t_1-1) \tag{4.2}$$

La solución a tal problema consiste en determinar el valor óptimo de la variable de control $u^*(t)$ que maximice o minimice el valor de la función $V(t)$ en cada etapa. El problema se transforma en *n* problemas de optimización, siendo *n* el número de etapas o períodos en la que está dividido el problema en cuestión. El procedimiento para resolver tales problemas es partir del método de inducción hacia atrás, en el que se pretende determinar el valor óptimo de la variable de control en el último período, se dice de este modo que el problema se soluciona de forma retrospectiva, empezando por el final. Entonces, en cada interacción tendremos:

$$\begin{aligned} &V(x,t)^* = \underset{u\in U}{Max\ ó\ Min}\,[F(x,u) + V(f(x,u),t+1)] \\ &con \quad V(x(T),T)^* = G(x(T)) \end{aligned} \tag{4.3}$$

A modo ilustrativo se expone el siguiente ejemplo de aplicación práctica de Programación Dinámica. Se considera el siguiente problema de buscar la ruta óptima para llegar del punto 1 a 8 de la manera más rápida posible. Entre cada punto viene reflejada la distancia existente entre cada uno de ellos. De forma esquemática:

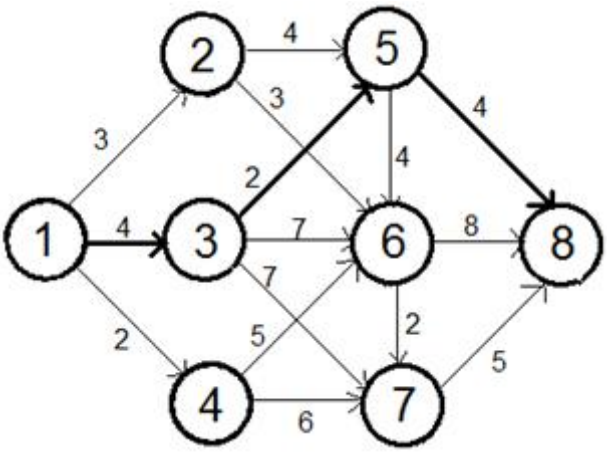

Figura 2: Problema de ruta aplicando programación dinámica

Se considera d_{ij} la distancia existente entre las dos etapas i y j. Ahora, aplicando el principio de optimalidad de Bellman, consiste en buscar el camino óptimo V_i entre cada punto y el punto siguiente para conseguir llegar al punto final especificado en 8. Así pues:

$$V_i = \min\{d_{i,6}\} = \min\{d_{ik} + d_{k6}\} = \min\{d_{ik} + \min\{d_{k6}\}\} = \min\{d_{ik} + V_k\}$$

Donde $k = 2,3,4,5,6,7$ son los consecutivos estados intermedios.

Como ya se ha mencionado, el problema se resuelve comenzando por la última etapa. Así pues, es lógico deducir que en la última etapa la distancia existente es:

$$V_8 = 0$$

Ahora, para el punto 7, el camino óptimo viene reflejado por:

$$V_7 = \min\{d_{78} + V_8\} = \min\{5 + 0\} = 5$$

Se determina, que si la ruta comenzara en el punto 7, su ruta óptima sería ir directamente a 8, como es obvio. Ahora veamos que sucede con desde el punto 6, en el cual existen dos posibilidades de recorrido: ir al punto 7 previamente para finalizar en 8, o ir directamente a 8:

$$V_6 = \min\{d_{67} + V_7, d_{68} + V_8\} = \min\{2 + 5, 8 + 0\} = \min\{7,8\} = 7$$

Se comprueba que, empezando el camino en 6, la ruta óptima pasa por ir al punto 7 antes que a 8 directamente. El mismo procedimiento es empleado en el resto de puntos.

Para el punto 5:

$$V_5 = \min\{d_{56} + V_6, d_{58} + V_8\} = \min\{4 + 7, 4 + 0\} = \min\{11,4\} = 4$$

Si se comenzara el punto 5, la ruta óptima pasa por que el siguiente punto sea el 8 directamente.

Para el punto 4:

$$V_4 = \min\{d_{46} + V_6, d_{47} + V_7\} = \min\{5 + 7, 6 + 5\} = \min\{12,11\} = 11$$

Se puede apreciar que las etapas posteriores al punto 4 son la 6 y la 7. Se ha comprobado que su camino óptimo pasa por seguir hasta el punto 7.

Para el punto 3:

$$V_3 = \min\{d_{35} + V_5, d_{36} + V_6, d_{37} + V_7\} = \min\{2+4, 7+7, 7+5\} = \min\{6,14,12\} = 6$$

Teniendo tres posibilidades de recorrido, su ruta óptima pasa por seguir hasta el punto 5.

Para el punto 2:

$$V_2 = \min\{d_{25} + V_5, d_{26} + V_6\} = \min\{4+4,\ 3+7\} = \min\{8,10\} = 8$$

Si se comenzara desde este punto, su trayecto óptimo pasa por seguir hasta 5.

Para el punto 1:

$$V_1 = \min\{d_{12} + V_2, d_{13} + V_3, d_{14} + V_4\} = \min\{3+8, 4+6, 2+11\} = \min\{11,10,13\} = 10$$

Vemos que comenzando desde este punto, la ruta óptima tendrías que pasar por el punto 3.

Ahora agrupando los resultados obtenidos y comenzando por el punto 1, podemos determinar que la ruta óptima del problema pasa por los puntos: 1, 3, 5 y 8. Es el camino que viene representado en la figura 2 en trazo más grueso.

Las principales características de los problemas de programación dinámica, algunas mencionadas al comienzo del apartado, son los siguientes (ver Hillier y Lieberman, 2002):

- El problema se divide en etapas o períodos que precisan una solución óptima para cada una de ellas. Así pues, se debe escoger una sucesión de decisiones interrelacionadas en donde cada decisión pertenece a una etapa del problema. Veamos para el problema anterior, se puede deducir que existen tres etapas de decisión.
- En cada etapa puede existir una cierta cifra de estados. Esto es, las distintas situaciones posibles donde se puede localizar el procedimiento en cada etapa. En el ejemplo, en la etapa 2 se encuentran los estados 2,3 y 4 donde el sistema se podría encontrar.
- El objetivo de la decisión o política óptima aplicada en cada etapa consiste en transformar el estado actual en un estado asociado en la siguiente etapa. En el ejemplo, partiendo del punto 1, tomando la decisión óptima de realizar el camino más corto, nos desplazamos hasta el punto o estado 3 en la siguiente etapa.
- El procedimiento de resolución permite obtener una solución óptima para el problema completo, partiendo de las distintas soluciones óptimas en cada etapa. En nuestro ejemplo, la solución óptima al problema viene dado por la ruta 1, 3, 5 y 8.

- Las decisiones óptimas son independientes en cada etapa, es decir, la decisión óptima que se tome en la etapa actual, sólo depende del estado actual y no de cómo se ha llegado hasta esa situación.
- El procedimiento de resolución del problema es mediante el método de inducción hacia atrás, comenzando a resolver el problema, por tanto, por la última etapa, hasta llegar a la etapa inicial. Es por ello que se tiene una relación recursiva que determina la solución óptima para la etapa *n*, a partir de la política óptima de la etapa *n+1*.

Ahora, según cómo se determine el siguiente estado partiendo del estado actual, la programación dinámica se clasifica en: programación dinámica determinística y programación dinámica probabilística. (Hillier y Lieberman, 2002)

4.1 Programación Dinámica determinística

Para este caso, el estado de la siguiente etapa se establece íntegramente por la decisión óptima que se tome en la etapa actual. De forma analítica, se supone que el sistema se encuentra en un estado x_t en la etapa t. Ahora, cuando se toma la decisión u_t en dicho estado, el sistema se mueve al estado x_{t+1} en la etapa $t+1$. Luego el objetivo es determinar la decisión óptima u_t^* que optimice la función objetivo con respecto al estado x_t, resultando $f_t^*(x_t) = f_t(x_t, u_t^*)$. A partir de aquí se sigue con el método de resolución de inducción hacia atrás.

Los problemas de programación dinámica determinística, a su vez, se pueden clasificar según: el propósito de optimización de la función objetivo, pudiendo ser de maximización o minimización; o la forma del conjunto de estados existentes en las distintas etapas, pudiendo estar caracterizados por una variable continua o una variable de estado discreta.

4.2 Programación Dinámica probabilística

En la programación dinámica probabilística el estado en la siguiente etapa se determina por el estado actual y la política de decisión tomada en dicho estado, y además, a diferencia de la situación anterior, por una distribución de probabilidad. Dicha distribución de probabilidad si queda establecida por el estado y la política de decisión que se ha determinado previamente en la etapa actual. Entonces para este caso, siendo X el número de estados posibles dentro de la etapa $t+1$, el sistema cambia al estado i ($i = 1, 2, 3, ...S$) con probabilidad p_i dados el estado x_t y la política de decisión u_t en la etapa $t+1$. En esta situación se puede representar con un

árbol de decisión en el que se refleja todas las decisiones y estados posibles para cada etapa. Ahora para este caso la función objetivo queda:

$$f_n(x_n, u_n) = \sum_{i=1}^{S} p_i[C_i + f_{t+1}^*(i)]$$
$$con \quad f_{t+1}^*(i) = \max_{u_{t+1}} o \min f_{t+1}(i, u_{t+1}) \tag{4.2.1}$$

Donde $f_n(x_n, u_n)$ representa la suma esperada máxima o mínima (dependiendo de la forma de la función objetivo) de la etapa *t* hacia adelante, dado que en la etapa actual *t*, el estado y la política de decisión ya están definidos, siendo x_t y u_t respectivamente. Luego C_i representa la contribución de la etapa *t* a la función objetivo. La maximización o minimización se realiza sobre todos los valores factibles de u_{t+1}.

4.3 Ejemplo de aplicación de la Programación Dinámica

En este apartado, se expone el ejemplo de gestión de una mina (Cerdá, 2001). Se supone que se posee una mina cuyo stock consta de 80 unidades de mineral. Para la extracción de dicho mineral se dispone de cuatro períodos de tiempo, dado que una vez transcurrido ese tiempo la valoración del mineral que queda en la mina es cero. El problema para la empresa o autoridad encargada de la gestión de la mina, consiste en determinar la cantidad de mineral que extrae en cada período, sujeto a la restricción de que en cada período solo puede extraer 0, 10 o 20 unidades del mineral, debiendo ser dicha cantidad igual o inferior a la cantidad de stock de mineral que existe en el momento de la extracción.

El beneficio obtenido en cada período depende de la cantidad de mineral que se extrae (*u*) en un período, siendo ésta nuestra variable de control, y del stock resultante (*x*) en dicho período, siendo ésta nuestra variable de estado. Por tanto, la función de beneficio viene representada por $®[x(t), u(t)]$. Así pues, para cada nivel de extracción y cantidad de stock, se muestran en el siguiente cuadro los beneficios que se obtienen:

	x	0	10	20	30	40	50	60	70	80
u	0	-5	-5	-5	-5	-10	-10	-10	-15	-15
	10		-35	-25	-20	0	5	15	20	25
	20			-35	-25	-15	-10	10	30	40

Cuadro 1: Beneficios obtenidos según el nivel de extracción y la cantidad de stock

Esquemáticamente, el proceso temporal del problema es el siguiente (figura 3):

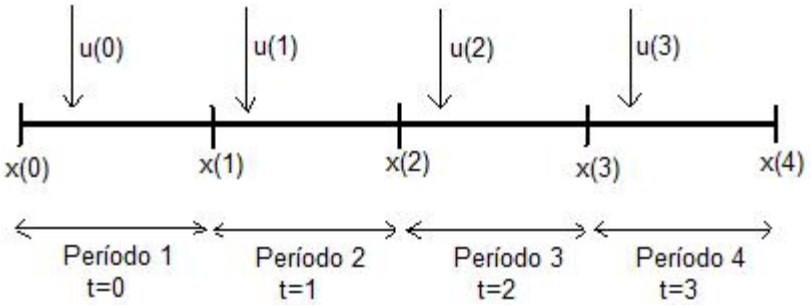

Figura 3: Esquema temporal del problema de extracción de la mina.

Se debe señalar que $x(t)$ es la cantidad de stock existente en el instante $t+1$, y $u(t)$ es la cantidad de mineral que se extrae durante el período $t+1$.

El planteamiento del problema es el siguiente:

$$\max_{\{u(t)\}_{t=0}^{3}} J = \sum_{t=0}^{3} ®[x(t), u(t)]$$

$$s.a.: \quad x(t+1) = x(t) - u(t)$$

$$x(0) = 80,$$

$$u(t) \in \{0, 10, 20\}, \ para\ t = 0,1,2,3,$$

$$u(t) \leq x(t), \quad para\ t = 0,1,2,3$$

Ahora, teniendo en cuenta las restricciones, se pueden obtener los valores que puede tomar la variable de estado en cada período. Dichos valores se recogen en el siguiente cuadro:

Variable de estado en cada período	Valores que puede tomar
x(0)	80
x(1)	80,70,60
x(2)	80,70,60,50,40
x(3)	80,70,60,50,40,30,20
x(4)	80,70,60,50,40,30,20,10,0

Cuadro 2: Valor de la variable de estado en cada período

Ahora, por el método de inducción hacia atrás, se procede a calcular la cantidad de extracción y el stock resultante para cada período. Por tanto, comenzando por el final del período cuatro, sabemos que la mina contendrá $x(4)$ unidades de mineral, que no aporta ningún beneficio dado que carece de valoración a partir de este período, por lo que:

$$J_4^*\{x(4)\} = 0$$

Ahora para el período cuatro, se sabe el conjunto de valores en los que se puede encontrar la variable de estado para el período 3, recogidos en el cuadro 2. Luego la ecuación de Bellman para el período será:

$$J_3^*\{x(3)\} = \max_{u(3)\in\{0,10,20\}} \{®[x(3),u(3)] + J_4^*\{x(3)-u(3)\}\}$$

En el cuadro 3, se recogen los diferentes resultados de la ecuación anterior para cada valor de $x(3)$, en función de la cantidad de mineral que se extrae $u(3)$:

x(3)	u(3)	π[x(3),u(3)]
80	0	-15
	10	25
	20	40 MÁXIMO
70	0	-15
	10	20
	20	30 MÁXIMO
60	0	-10
	10	15 MÁXIMO
	20	10
50	0	-10
	10	5 MÁXIMO
	20	-10
40	0	-10
	10	0 MÁXIMO
	20	-15
30	0	-5 MÁXIMO
	10	-20
	20	-25
20	0	-5 MÁXIMO
	10	-25
	20	-35

Cuadro 3: Valores para el período 4

Ahora, a modo resumen en el cuadro 4 se recoge la cantidad de extracción óptima $u^*(3)$ según la cantidad de mineral existente que maximiza la función objetivo de beneficio $J_3^*\{x(3)\}$:

x(3)	u*(3)	$J_3^*\{x(3)\}$
80	20	40
70	20	30
60	10	15
50	10	5
40	10	0
30	0	-5
20	0	-5

Cuadro 4: Valores óptimos según x(3)

Se realiza el mismo procedimiento para el tercer período. Con $x(2)$ dado, la ecuación de Bellman de este período es:

$$J_2^*\{x(2)\} = \max_{u(2)\in\{0,10,20\}} \{®[x(2),u(2)] + J_3^*\{x(2)-u(2)\}\}$$

Ahora para cada posible valor de $x(2)$ y de $u(2)$, se muestran en el siguiente cuadro los resultados de la ecuación:

x(2)	u(2)	π[x(2),u(2)]+J_3^*{x(2)-u(2)}
80	0	-15+40= 25
	10	25+30= 55 MÁX
	20	40+15= 55 MÁX
70	0	-15+30= 15
	10	20+15= 35 MÁX
	20	30+5= 35 MÁX
60	0	-10+15= 5
	10	15+5= 20 MÁX
	20	10+0= 10
50	0	-10+5= -5
	10	5+0= 5 MÁX
	20	-10+(-5)= -15
40	0	-10+0= -10
	10	0+(-5)= -5 MÁX
	20	-15+(-5)= -20

Cuadro 5: Valores para el período 3

Los valores óptimos de $u^*(2)$ que maximizan la función de beneficio $J_2^*\{x(2)\}$, se recogen en el siguiente cuadro:

x(2)	u*(2)	J_2^*{x(2)}
80	10 o 20	55
70	10 o 20	35
60	10	20
50	10	5
40	10	-5

Cuadro 6: Valores óptimos según x(2)

Se continúa con el segundo período. Con $x(1)$ dado, se presenta la ecuación de Bellman como:

$$J_1^*\{x(1)\} = \max_{u(1)\in\{0,10,20\}} \{®[x(1),u(1)] + J_2^*\{x(1)-u(1)\}\}$$

Los resultados de la ecuación para los distintos valores que puede tomar $x(1)$ y $u(1)$, se muestran en la siguiente cuadro:

x(1)	u(1)	π[x(1),u(1)]+J_2^*{x(1)-u(1)}
80	0	-15+55= 40
	10	25+35= 60 MÁX
	20	40+20= 60 MÁX
70	0	-15+35= 20
	10	20+20= 40 MÁX
	20	30+5= 35 MÁX
60	0	-10+20= 10
	10	15+5= 20 MÁX
	20	10+(-5)= 5

Cuadro 7: Valores para el período 2

Ahora, se agrupan en el cuadro 8 los valores óptimos de $u^*(1)$ que maximizan $J_1^*\{x(1)\}$:

x(1)	u*(1)	$J_1^*\{x(1)\}$
80	10 o 20	60
70	10	40
60	10	20

Cuadro 8: Valores óptimos según x(1)

Finalmente, para el primer período, se considera $x(0) = 80$ dado. Luego, la ecuación de Bellman para dicho período es:

$$J_0^*\{80\} = \max_{u(0)\in\{0,10,20\}} \{®[80, u(0)] + J_1^*\{80 - u(0)\}\}$$

Los diferentes resultados de la ecuación para los distintos valores de $x(0)$ y $u(0)$ se recogen en la cuadro 9:

x(1)	u(1)	$\pi[x(1),u(1)]+J_2^*\{x(1)-u(1)\}$
80	0	-15+60= 45
	10	25+40= 65 MÁX
	20	40+20= 60

Cuadro 9: Valores para el período 1

En este caso, se extrae que el valor óptimo de la variable de extracción es 10, siendo el beneficio de 65 en el primer período:

$$u^*(0) = 10 \quad \text{y} \quad J_0^*\{80\} = 65$$

Ahora, comenzando por este resultado inicial, se realiza el recorrido por la senda óptima de extracción en cada período, obteniendo a su vez el stock resultante una vez descontado el mineral extraído. Así pues:

$$x^*(0) = 80 \qquad u^*(0) = 10$$

Se deduce que $x^*(1) = 70$.

Entonces, a partir del cuadro 8, se extrae que:

$$u^*(1) = 10 \text{, y por tanto } x^*(2) = 60$$

Ahora, del cuadro 6, sabemos que:

$$u^*(2) = 10 \text{, luego, } x^*(3) = 50$$

Finalmente, del cuadro 4, se llega a:

$$u^*(3) = 10\text{, y consiguiente } x^*(4) = 40$$

El beneficio óptimo del problema es:

$$J^* = J_0^*\{80\} = 65$$

En resumen, la empresa o autoridad competente de la gestión de la mina debe extraer, como valor óptimo de decisión, 10 unidades de mineral en cada uno de los 4 períodos, y obteniéndose por tal operación un beneficio total de 65. El stock resultante que queda sin extraer de la mina al final de los 4 períodos es de 40 unidades de mineral.

5. Otros modelos de gestión de recursos naturales

5.1 Modelo de Faustmann en gestión forestal

El modelo de gestión forestal de Faustmann (ver Reed, 1994c; y Romero, 1997) es muy empleado en la literatura económica de gestión de recursos naturales. Dicho modelo es empleado para determinar la edad de madurez financiera de una plantación, es decir, la edad óptima en la que se debe talar un cultivo desde el punto de vista financiero o económico. Así pues, la ecuación de Faustmann se expresa como:

$$V'(T) = \frac{¢[V(T) - C]}{1 - e^{-¢T}} \tag{5.1.1}$$

De donde se obtiene la denominada "edad de Faustmann" o edad de madurez financiera (T_f). Siendo δ la tasa de descuento, es decir, representación del coste de oportunidad del capital. Luego la diferencia $V(T) - C$ representa el valor esperado del terreno, cuando el *VP* se calcula para T_f, siendo C los costes de plantación. A tenor de la expresión, se deduce que la plantación forestal para conseguir madera es económicamente viable si, estableciendo la edad de tala en T_f, el importe actual de los beneficios son superiores a los costes de plantación C.

Para obtener una interpretación económica de la expresión de Faustmann, el matemático Colin Clark (1990) propuso una nueva versión de la fórmula:

$$V'(T_f) = ¢V(T_f) + ¢[\frac{e^{-¢T_f}[V(T_f) - C]}{1 - e^{-¢T_f}} - C] \tag{5.1.2}$$

Se interpreta como: interesa cortar una masa forestal cuando el valor marginal de no realizar la tala, es exactamente igual al coste marginal de no realizar dicha tala, es decir, lo que se

gana por posponer el corte es igual a lo que se pierde por posponerlo. Donde el primer término refleja el aumento marginal del valor que se produciría si el terreno no se tala entre el período *T* y *T+1*. El segundo término refleja los rendimientos que se obtendrían de los ingresos derivados de la tala en T_f. Y el último término indica el valor esperado del terreno multiplicado por la tasa de descuento, es decir, refleja los posibles rendimientos obtenidos si se vendiera el terreno una vez realizada la tala.

5.2 Modelo de explotación de un recurso no renovable: la regla de Hotelling

Desarrollado por el matemático Harold Hotelling en 1931, la regla de Hotelling es el principio básico para el estudio de explotación de los recursos no renovables de forma económicamente rentable.

Haciendo una reflexión sobre por qué hay intereses en que un recurso no renovable no sea explotado de forma continuada hasta su agotamiento, es precisamente debido a la revalorización del propio de recurso. Esto es, si un recurso que no se extrae no produjera ningún rendimiento, no habría interés alguno en conservarlo y llevaría inmediatamente a su extinción por agotamiento.

Así pues, la regla de Hotelling (Hotelling, 1931; Ruth y Hannon, 1997; y Romero, 1997) afirma que la extracción de un recurso no renovable que posee interés económico, debe hacerse cuando la tasa de variación de su precio $\frac{P'(t)}{P(t)}$ sea igual al tipo de interés que predomina en el mercado *i*. Es decir:

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = i \tag{5.2.1}$$

Desde un punto de vista económico, en caso de que no se cumpla tal condición, se determina no proceder a ejecutar la explotación del recurso. Este es el único principio capaz de explicar que una compañía tenga en todos los períodos de tiempo una producción positiva usando un recurso no renovable, y sin embargo, no se produzca la extinción del mismo. Para ello, es necesario que el nivel de explotación del recurso sea inferior al stock de reservas, y ello se cumple gracias a que los beneficios del recurso crecen a un ritmo superior que el tipo de interés, generando de este modo un atractivo general entre los propietarios en conservarlo mientras se pueda conseguir una ganancia extraordinaria de los mismos. Si por el contrario, los beneficios crecen a un tipo de interés inferior nadie desearía almacenar el recurso.

El ritmo de extracción que busca el propietario de un recurso no renovable, se obtiene resolviendo el siguiente problema de maximización (Gómez, 1994):

$$\begin{aligned} & \max \int_0^{\infty} P_t Q_t \, dt \\ s.a.: \; & S_0 = \int_0^{\infty} Q_t \, dt \; ; \\ & \frac{P'(t)}{P(t)} = i \; ; \\ & P_t, Q_t \geq 0 \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

Donde S_0 refleja el nivel actual de las reservas del recurso y Q_t es la cantidad extraía del mismo en el período t.

Ahora bien, el ritmo de extracción junto con el precio del recurso, están vinculados a la demanda del mismo. Es trivial pensar que según se vaya incrementando el precio, la extracción del recurso se reduce. Sin embargo, el precio no puede aumentar indefinidamente ya que existirá un precio tan alto en que la demanda se haga cero. En este caso, es fundamental la aparición de otros recursos sustitutivos o avances tecnológicos, que provocan que se limite el consumo del recurso en cuestión.

5.3 Modelo de explotación de las pesquerías

Partiendo de los trabajos realizados por Gordon (1954) y Scott (1955) se establece el modelo que determina el equilibrio económico de una pesquería partiendo de un equilibrio biológico.

Así pues, primero se procede a exponer como se llega a un equilibrio biológico, para posteriormente conseguir un equilibrio económico, que como veremos no tiene porqué coincidir.

Siendo *x* la biomasa pesquera manifestada en peso, *t* el tiempo y *F(x)* la función que representa el crecimiento natural de la biomasa, la tasa de variación de la población en ausencia de capturas viene dado por la expresión:

$$\frac{dx}{dt} = F(x) \tag{5.3.1}$$

La función *F(x)* es positiva siempre que se encuentre en el intervalo $[0, K]$, siendo *K* el nivel de equilibrio natural al que la especie tenderá en ausencia de capturas. Por su parte el crecimiento es nulo si se encuentra en los extremos de dicho intervalo ($F(0) = F(K) = 0$).

Ahora suponiendo el caso de existencia de capturas, la cantidad de especies *x* disminuye con respecto al equilibrio natural *K*. Para este caso, la tasa de variación de la población se expresa como:

$$\frac{dx}{dt} = F(x) - H(x,E) \tag{5.3.2}$$

Donde $y = H(x,E)$ representa las capturas ejecutadas en un período de tiempo, y *E* refleja el esfuerzo pesquero empleado en el ejercicio de pesca. Con objeto de supervivencia de la especie, el nivel óptimo de capturas es aquel que coincide con el crecimiento vegetativo de la población de especies, esto es $\frac{dx}{dt} = 0$. Cuando la captura de especies supera el crecimiento de la población, la especie tiende a su agotamiento, es decir, $\frac{dx}{dt} < 0$. En este contexto, existe un máximo de capturas, denominado máximo rendimiento sustentable y_m, que representa el tope máximo de especies que se pueden cazar para que sea posible mantener el equilibrio biológico.

Ahora bien, el equilibro económico de la especie pude ocurrir que no coincida con el máximo rendimiento sustentable, dado que al añadir el coste que supone la captura del pescado, es posible que el nivel óptimo económicamente de capturas sea diferente.

Para obtener el equilibrio económico, se parte de la condición de que la tasa de variación de la población es cero, luego:

$$\frac{dx}{dt} = 0 \rightarrow F(x) = H(x,E) \tag{5.3.3}$$

De aquí, se expresa la biomasa pesquera *x* en función del esfuerzo pesquero *E*:

$$x = G(E) \tag{5.3.4}$$

Y se sustituye en la función que representa las capturas ejecutadas en un período de tiempo:

$$Y = H[G(E),E] \tag{5.3.5}$$

De este modo, queda el nivel de capturas realizadas en función del esfuerzo pesquero $Y(E)$. La función de costes de las capturas viene expresada como:

$$C = aE \tag{5.3.6}$$

Donde *a* es el coste de una unidad de esfuerzo. El equilibrio económico o donde se alcanza el máximo beneficio se obtiene a partir de la expresión:

$$B = pY(E) - aE \tag{5.3.7}$$

Derivando con respecto a *E*, e igualando a cero:

$$\frac{dB}{dE} = pY'(E) - a = 0 \tag{5.3.8}$$

Luego el equilibrio económico tendrá lugar cuando:

$$pY'(E) = a \tag{5.3.9}$$

Esto es, cuando el ingreso marginal $pY'(E)$ sea igual que el coste marginal de pescar *a*. Sólo en el caso de que *a* fuera igual a cero, el equilibrio económico y biológico coincidirían.

Ahora bien, este desarrollo ha sido bajo el supuesto de que sólo actúa un único agente en la explotación del recurso. Si por el contrario, hubiera libre acceso al mismo, los beneficios desaparecerían al mismo tiempo en el que aumentaría los esfuerzos pesqueros *E*. Este nuevo equilibrio de la pesquería no regulada sería (Romero, 1997):

$$B = pY(E) - aE = 0 \tag{5.3.10}$$

$$pY(E) = aE \tag{5.3.11}$$

Este modelo de explotación llevaría a ineficiencias económicas por sobreexplotación del recurso y desaparición del los beneficios.

6. Conclusiones

Dada la problemática existente en la gestión de los recursos naturales, en este trabajo se ha realizado un breve recorrido sobre algunos de los principales métodos de explotación óptima de los recursos. Incidiendo en el desarrollo del trabajo fundamentalmente en dos métodos de resolución: la Teoría de Control Óptimo y la Programación Dinámica; tratando para estos casos los modelos de explotación de gestión de los recursos como un problema de planificación en el tiempo, es decir, problemas de optimización dinámica.

En la Teoría de Control Óptimo se ha explicado la formulación del problema con los dos tipos de variables que la componen. Así mismo, se ha desarrollado las condiciones necesarias de

dos formas: analíticamente y a partir de la función Hamiltoniana. Sobre estas líneas se ha expuesto el Principio del Máximo de Pontryagin como método para obtener tales condiciones.

Luego se ha expuesto el ejemplo de Reed (1994b) consistente en el modelo de explotación de una plantación forestal aplicando la teoría de control óptimo. El objetivo del problema es determinar la pauta temporal de la tala que maximice el valor de los ingresos. La solución se divide en tres fases: una primera fase en la que no se produce tala alguna, una segunda fase en la que se produce una tala selectiva, y una tercera fase en la que de nuevo no se acomete tala alguna previamente a la tala total final en un período dado.

Posteriormente se detalla el ejemplo de aplicación de Teoría de Control Óptimo en una pesquería. Se exponen los supuestos del problema, se plantea el mismo de forma analítica, y se obtienen las condiciones necesarias.

Y sobre este mismo apartado, se aplica la Teoría de Control Óptimo sobre un recurso no renovable, exponiéndose el problema y obteniéndose las condiciones necesarias. A modo ilustrativo, se expone un ejemplo matemático dándole un valor a la función objetivo.

A continuación, se detalla la Programación Dinámica, basado en el principio de optimalidad de Bellman. Es una técnica muy útil para obtener una progresión de decisiones óptimas interrelacionadas. Requiere para ello una relación recursiva de la variable de estado. Se expone un ejemplo sencillo a modo ilustrativo para presentar el método y se presentan las principales características del mismo y la clasificación existente dependiendo de cómo se determine el siguiente estado: determinística o probabilística. El principal problema al que se enfrenta el investigador en este método es su dificultad de aplicación, es decir, de percatarse de cuándo y cómo se puede solventar un problema a partir de esta forma.

A modo de ejemplo, se expone el problema de explotación de una mina. En este caso se debe determinar la extracción óptima del recurso sujeto a unas restricciones. A partir de la aplicación del método de programación dinámica, se obtiene la decisión óptima de extracción para cada etapa y el beneficio total obtenido por la extracción.

Finalmente, se ha expuesto otros modelos empleados en la literatura económica de gestión de recursos naturales.

El modelo de Faustmann, se expone la expresión denominada “edad de Faustmann”, que pretende estimar la edad óptima de tala una plantación. En contra posición a la Teoría de Control Óptimo, en que la edad de tala completa se supone conocida en el período *T*.

Posteriormente se ha expuesto la regla de Hotelling, principio básico para el estudio de explotación de los recursos no renovables. Se concluye que un recurso no renovable se debe extraer, desde un punto de vista económico, cuando la tasa de variación de su precio sea igual al tipo de interés del mercado. Así mismo se plantea el problema de optimización para un propietario de un recurso no renovable que quiera determinar su ritmo de extracción. Sobre estas líneas, juega un papel fundamental los avances tecnológicos existentes y los recursos sustitutivos del recurso escaso, dado que pierde interés económico si se puede prescindir de él en la producción.

Como último punto, se expone los trabajos realizados por Gordon (1954) y Scott (1955), en el que se presenta el equilibrio óptimo de una pesquería dado el caso de que sólo existe un agente que opera en ella. En este modelo, defiende que la existencia de libre acceso al recurso, conlleva a la ineficiencia económica por la pérdida de los beneficios y por sobreexplotación del recurso debido al aumento de los esfuerzos pesqueros. La problemática de este modelo, es que se realiza un análisis estático de la pesquería, bajo el supuesto de que el tiempo no afecta en las decisiones de explotación del recurso. Es obvio deducir que la pesquería es un proceso dinámico, y por ello, la aplicación de la Teoría de Control Óptimo en este ejemplo es más realista trabajando con la introducción de la variable de tiempo en el modelo.

La implementación práctica de este trabajo puede ser el realizar un estudio empírico, en el que se modelice un problema de optimización dinámica a partir de unos datos recogidos, y que permita obtener su solución óptima mediante uno de los métodos expuestos en este trabajo, mediante un software de programación. Algunos de los entornos de programación empleados para la resolución computacional de tales problemas son el Matlab, el Mathematica, el Maple o el Gams.

7. Bibliografía

Cerdá Tena, E. (2001). Optimización Dinámica, Pearson Educación S.A., Madrid.

Dorfman, R. (1969). An economic interpretation of optimal control theory. *The American Economic Review*.817-831.

Escot Mangas, L., Olmedo Fernández, E., Pozo García, E.M.D. (2002). Optimización dinámica. Universidad Complutense de Madrid.

Fernández Rodríguez, F. y García Artiles, Mª D. (2001). Métodos matemáticos en economía dinámica. Volumen 2.

Gómez, C. M.. (1994). Desarrollo sostenible y gestión eficiente de los recursos naturales. En Azqueta, D. y Ferreiro, A. (editores). *Análisis económico y gestión de recursos naturales*. Alianza Editorial, Madrid.

Gordon, H. S. (1954). The Economic Theory of a Common-Property Resource: The Fishery. *Journal of Politicial Economy*. Vol.62, 124-142.

Hiller, F. S. y Lieberman, J.G. (2002). Investigación de operaciones. 7ª edición, Macgraw-Hill, México.

Kamien, M. I. y Schwartz, N. L. (1991). Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management. 2ª ed. Amsterdarn.

Reed, William, J. (1994a). Una introducción a la economía de los recursos naturales y su modelización. En Azqueta, D. y Ferreiro, A. (editores). *Análisis económico y gestión de recursos naturales*. Alianza Editorial, Madrid.

Reed, William, J. (1994b). Teoría del Control Óptimo. En Azqueta, D. y Ferreiro, A. (editores). *Análisis económico y gestión de recursos naturales*. Alianza Editorial, Madrid.

Reed, William, J. (1994c). Modelos de gestión forestal. En Azqueta, D. y Ferreiro, A. (editores). *Análisis económico y gestión de recursos naturales*. Alianza Editorial, Madrid.

Romero, C. (1997). Economía de los recursos ambientales y naturales. 2ª ed. Alianza editorial, Madrid.

Ruth, M. y Hannon, B. (1997). Modelling Dynamic Economic System. Springer, New York.

Scott, A. D. (1955). The Fishery: The Objetives of Sole Ownership. *Journal of Political Economy*, Vol. 63, 116-124.

Surís Regueiro, J. C. y Varela Lafuente, M. M. (1995). Introducción a la economía de los recursos naturales. Civitas. Madrid.

Tu, P. N. (1991). Introductory Optimization Dynamics: optimal control with economics and management science applications. 2ª ed. Springer-Verlag.

Villalba Vilá, D. y Jerez Méndez, M. (1990). Sistemas de optimización para la planificación y toma de decisiones. Ediciones Pirámide. Madrid