UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA

DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA APLICADA

TESIS DOCTORAL

TÉCNICAS ESTADÍSTICAS BAYESIANAS EN AUDITORÍA. UN ANÁLISIS DE ROBUSTEZ

FRANCISCO JOSÉ VÁZQUEZ POLO

Las Palmas de Gran Canaria,Mayo de 1992

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

22-1991/92

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA

UNIDAD DE TERCER CICLO Y POSTGRADO

Reunido el día de la fecha, el Tribunal nombrado por el Excmo. Sr. Rector Magfco. de esta Universidad, el aspirante expuso esta TESIS DOCTORAL.

Terminada la lectura y contestadas por el Doctorando las objeciones formuladas por los señores jueces del Tribunal, éste calificó dicho trabajo con la nota de [illegible]

Las Palmas de G. C., a 6 de julio de 1992

El Presidente: Dr. D. José Miguel Casas Sánchez,

El Secretario: Dr. D. Pedro Saavedra Santana,

La Vocal: Dra. Dña. Beatriz González López-Valcárcel,

El Vocal: Dr. D. Rafael Herrerías Pleguezuelo,

El Vocal: Dr. D. Joaquín Aranda Gallego,

El Doctorando: D. Francisco José Vázquez Polo

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA
NEGOCIADO UNIDAD DE TERCER CICLO Y POSTGRADO

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
LAS PALMAS DE G. CANARIA
N.º Documento 340.475
N.º Copia 340.481

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA
BIBLIOTECA GENERAL

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE G.C.
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales.
Departamento de Economía Aplicada.

Técnicas Estadísticas Bayesianas en Auditoría. Un Análisis de Robustez.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Memoria presentada para optar al grado
de doctor por Fco. José Vázquez Polo.
Las Palmas de G.C., mayo de 1.992

El Director,

El Doctorando,

Fdo.:Dr. D. Agustín Hernández Bastida.

Técnicas Estadísticas Bayesianas en Auditoría.
Un Análisis de Robustez.

- Tesis Doctoral -
1.992

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Indice

Prólogo. iii

1 Técnicas Estadísticas en Auditoría Contable 1
1.1 Introducción. 1
1.2 Motivación e Ilustraciones sobre el uso de Métodos Bayesianos en Auditoría Contable. 7
1.3 Elementos básicos del Análisis Bayesiano en A.C. 18
1.3.1 Función de utilidad. 18
1.3.2 Distribución a priori. 19
1.4 Metodología de Muestreo de Unidades Monetarias. 23
1.5 Planificación del Tamaño Muestral con Análisis Bayesiano. Modelos de Menzefricke. 27
1.6 Modelos Bayesianos para la Obtención de Cotas Superiores para el Error Total. 36
1.6.1 Modelo de Cox y Snell. 37
1.6.2 Modelo de Godfrey y Neter. 40
1.6.3 Modelo de Felix y Grimlund. 44
1.7 Necesidad del estudio de la Robustez en el escenario de la Auditoría Contable. 45

2 Algunos Aspectos del Análisis Bayesiano Robusto. 51
2.1 Introducción. 51
2.2 Clases Contaminadas. 59
2.2.1 Unimodalidad. 60
2.2.2 Contaminaciones Parcialmente Conocidas. 63
2.3 Clases dadas por Cuantiles. 65
2.4 Principio de Máxima Verosimilitud Tipo II. 68
2.4.1 Contaminaciones Simétricas Unimodales. 70
2.4.2 Contaminaciones Unimodales. 71

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

3 Modelo Gamma-Gamma inversa de Cox y Snell. 73
3.1 Introducción. 73
3.2 Motivación del Modelo de Contaminaciones Unimodales. . . 75
3.3 Planteamiento y Resolución del modelo. 79
3.3.1 Rango para la media a posteriori de ψ. 85
3.3.2 Rango para la probabilidad a posteriori de un conjunto de credibilidad al $100 \cdot (1-\alpha)\%$ para ψ. . . . 88
3.4 Ilustraciones numéricas. 90

4 Modelo Beta-Uniforme de Godfrey y Neter. 101
4.1 Introducción. 101
4.2 Motivación y Planteamiento del modelo. 103
4.3 Resolución del modelo. 108
4.4 Ilustraciones numéricas. 114

5 Modelo de Cuantiles Conocidos. 127
5.1 Introducción. 127
5.2 Resolución del modelo. 130
5.3 Incorporación de Unimodalidad. 136
5.4 Ilustraciones numéricas. 139

6 Modelo Normal-Beta de Felix y Grimlund. 147
6.1 Introducción. 147
6.2 Planteamiento y Motivación del modelo. 149
6.3 Resolución del modelo. 153
6.3.1 Determinación de las densidades a priori. 153
6.3.2 Determinación de las densidades a posteriori. 159

7 Epílogo. Líneas abiertas. 167

Apéndice 1. Determinación de la distribución del producto Gamma - Gamma inversa. 173

Apéndice 2. Descripción de los programas diseñados. 175

Bibliografía 177

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Prólogo

Desde hace ya unos cuarenta años (con trabajos pioneros de *Hodges y Lehmann (1.952), Blum y Rosemblatt (1.967), Kudo (1.967), ...*) se inicia una postura dentro del análisis bayesiano consistente en diseñar proced imientos capaces de procesar informaciones a priori más flexibles que las exigidas en un análisis bayesiano estricto. Esta postura ha tenido y sigue teniendo hoy día un desarrollo sobresaliente. Desde estas ideas, el prob lema general que abordamos es un análisis de sensibilidad bayesiano en el marco de una investigación de auditoría. En este escenario de la auditoría, si se examinan los distintos modelos bayesianos propuestos a lo largo de los últimos veinte o veinticinco años, se observa una constante pregunta sobre si las hipótesis de información a priori capturarán adecuadamente la percepción del auditor sobre el sistema o contabilidad que está auditando.

Incluso, al menos durante unos quince años, hubo una intensa investigación, que dió lugar a gran número de trabajos, buscando procedimientos adecuados para esa captura de la percepción del auditor que antes mencionábamos. Esta investigación pretendía, a grandes rasgos, la identificación de algunos (y si fuese posible uno sólo) métodos de especificación de distribuciones a priori particularmente bien adaptados al mundo de la auditoría. Más concretamente, la elaboración de una secuencia de preguntas formuladas de manera familiar al auditor y que posibilitase la especificación de una distribución a priori. Teniendo presente que el auditor con entrenamiento estadístico debía considerar que la distribución elegida constituía una buena especificación de sus creencias a priori.

El objeto de esta memoria es abordar el problema de la modelización de la opinión del auditor con una metodología general que permita incorporar al problema formas poco elaboradas de información a priori. Ello facilita, y en parte evita, esa búsqueda obsesiva de la " *verdadera* " distribución a priori pero exige un análisis riguroso y sistemático de las posibles consecuencias debidas a la mayor flexibilidad en las " *entradas* " del sistema.

Con el objetivo general ya descrito la memoria se estructura en seis capítulos, un capítulo a modo de epílogo y dos apéndices :

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

El Capítulo 1 esencialmente motiva la utilización de métodos bayesianos en auditoría contable (A.C., en adelante) y la necesidad de un estudio de robustez bayesiana. Además se discuten, en el contexto que nos ocupa, elementos básicos con atención especial a la distribución a priori. Se de scriben también algunos de los modelos propuestos en la literatura para la determinación de una cota superior para el error que son utilizados en esta memoria.

El Capítulo 2 recoge aquellos aspectos del análisis bayesiano robusto que serán de utilidad en lo que sigue. Tiene un desarrollo conciso incorporando sólo aquellos resultados que serán imprescindibles.

Los Capítulos 3, 4, 5 y 6 tienen una estructura similar y corresponden a lo siguiente :

En el Capítulo 1, epígrafe 1.6, se exponen los modelos de *Cox* y *Snell* , *Godfrey* y *Neter* y *Felix* y *Grimlund* para la cota del error total.

En el Capítulo 2 se exponen los modelos de clases contaminadas - unimodalidad, contaminaciones parcialmente conocidas (ver 2.2.1 y 2.2.2), clases dadas por cuantiles (ver 2.3) y la metodología de Máxima Verosimilitud Tipo II (ver 2.4).

De aquí :

	Cox y Snell	Godfrey y Neter	Felix y Grimlund
Cont. unimod.	CAP.3		
Cont. por cuant.		CAP.4	
Dist. parc. conoc.	CAP.5	CAP.5	
ML-II			CAP.6

Para los Capítulos 3 y 4 la ubicación en una determinada fila dentro de la columna que les corresponde viene motivada en los epígrafes 3.2 y 4.2 , respectivamente, aunque serían verosímiles otras consideraciones.

Para el Capítulo 5 su localización en dos columnas se debe a la verosimil itud considerada y a la no consideración de formas funcionales para la dis-

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

tribución a priori.

El Capítulo 6 considera una metodología aplicable en cualquier ámbito pero particularmente bien adaptada a la posición que ocupa.

A lo largo de estos capítulos ha habido un interés primordial en la posibilidad de cálculo de los resultados propuestos con una infraestructura informática modesta. Esto se ha conseguido claramente en los Capítulos 3, 4 y 5, como queda de manifiesto en las distintas ilustraciones numéricas (ver 3.4, 4.4, 5.4 y Apéndice 2).

En el Epílogo se plantean algunas líneas abiertas susceptibles de futuras investigaciones en el convecimiento de que el desarrollo general de la memoria motiva el interés de las mismas.

Los Apéndices recogen dos aspectos complementarios que pensamos pueden ser de interés :

El Apéndice 1 desarrolla una cuestión técnica que se utiliza en el Capítulo 3.

El Apéndice 2 incorpora la descripción de la programación que ha sido necesaria para las distintas ilustraciones numéricas que se presentan.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Agradecimientos.

A nadie escapa que el trabajo que aquí se presenta no supone el esfuerzo de una única persona.

Desde luego, sin la dedicación continua, el apoyo constante y (desde mi punto de vista) la perfecta dirección del Dr. D. Agustín Hernández Bastida no hubiese sido posible la realización de este trabajo. Por ello me siento en deuda con él y deseo expresarle mi más sincero agradecimiento.

Pero también, ha sido una gran ayuda contar con mis compañeros del Departamento de Economía Aplicada de la Universidad de Las Palmas de G.C. (sus sustituciones en mis estancias en la Universidad de Granada, etc ...no deben ser olvidadas). A todos ellos debo agradecer su apoyo incondicional.

Por último, estoy agradecido al Departamento de Estadística e I.O. de la Universidad de Granada por aceptar mi estancia en dicha Universidad.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Capítulo 1

Técnicas Estadísticas en Auditoría Contable.

1.1 Introducción.

Aunque hoy en día el concepto de *auditoría* (verificación, inspección, ...) es ampliamente utilizado para cualquier proceso en el que se realice alguna verificación o inspección de determinado material, en su acepción restringida se denomina *auditoría* a la actividad de revisión y verificación de las cuentas anuales (balance y cuentas de pérdidas y ganancias, principalmente), para asegurarse de que las mismas constituyen una imagen fiel del patrimonio y del resultado de las operaciones de la entidad auditada, de conformidad con la normativa legal existente y los principios de contabilidad generalmente admitidos.

Esta coletilla final de *principios de contabilidad generalmente aceptados*, suele aparecer en todos los informes (principalmente tres : cortos, largos y especiales) que los auditores emiten. Bajo esta amplia denominación se contemplan los criterios inspirados en las leyes mercantiles y en las normas prácticas de contabilidad aceptadas en el ámbito económico financiero. Principalmente, en España, son cuatro : Principio del precio de adquisición (todos los bienes figurarán por su precio de adquisición salvo auténtica reducción efectiva de su valor, en cuyo caso de adoptará el que resulte de dicha reducción), Principio de continuidad (adoptado un criterio de valoración, éste debe mantenerse en los próximos ejercicios), Principio de devengo (relativo a la fecha de devengo que debe aparecer en la imputación contable del ejercicio económico) y el Principio de gestión continuada (debe con-

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

siderarse la gestión de la empresa prácticamente indefinida).

Dependiendo de quién realice las auditorías, éstas pueden clasificarse, principalmente, en tres : *auditoría externa, interna y gubernamental.* Se entiende por *auditoría externa* aquella que es realizada por profesionales independientes (es decir, sin dependencia jerárquica ni salarial de la entidad auditada), es decir, las realizadas por profesionales legalmente autorizados para ello, que ofrecen sus servicios en el mercado y trabajan normalmente para una gran diversidad de empresas-clientes.

Por otra parte, la *auditoría interna* es realizada por personal que depende de la empresa. Su misión fundamental es verificar el grado de cumplimiento de las diferentes políticas y los procedimientos contables y administrativos establecidos. Por último, una *auditoría gubernamental* es la realizada por oficinas gubernamentales, organismos o instituciones públicas.

Principalmente, nos ocuparemos del proceso de auditoría externa. Sin embargo, y como es lógico pensar, su relación con la interna es grande. Y mucho depende su desarrollo de la opinión que el auditor independiente tenga sobre el control interno de la empresa que audita.

Así pues, el objetivo o la función principal de una auditoría realizada por auditores independientes es determinar si el establecimiento financiero del cliente está conforme con los principios contables generalmente aceptados. El Manual de Auditoría del Instituto de Censores Jurados de Cuentas de España establece los siguientes principios básicos de la auditoría :

- Función del auditor.
- Estudio y consideraciones sobre la entidad.
- Evidencia.
- Principios de Contabilidad generalmente aceptados.

Todos estos puntos han sido comentados anteriormente. Respecto a la evidencia, debe considerarse ésta como una parte fundamental de los procedimientos de auditoría, en sus dos vertientes : documental y real, de las transacciones que está examinando. La evidencia documental puede estar constituida por la documentación producida internamente por la empresa (facturas, documentos de expedición, informes de recepción, ...) y / o documentos emitidos por terceras empresas (extractos de Bancos, facturas de proveedores, contratos, ...).

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Así pues, ese trabajo de búsqueda, acumulación y producción de información le permitirá (al auditor o auditores) pronunciarse sobre el estado financiero objeto de análisis. Toda esta información es depurada y reflejada en los conocidos *papeles de trabajo*. Cuyas principales funciones son :

- Permiten registrar y custodiar de forma ordenada la información acumulada.
- Ayudan al auditor a realizar su trabajo de una forma metódica o sistemática.
- Permiten que el trabajo realizado pueda ser revisado por un tercero.
- Facilitan la redacción de informes.
- Son los únicos justificantes que los auditores podrán presentar para probar la seriedad de su trabajo.

La seriedad con que se apliquen los procedimientos y sistemas de control interno influirán directamente en la seguridad que sobre la evidencia interna se formará en el auditor. El control interno se hace tanto más necesario cuanto más grande, compleja y descentralizada sea la empresa y sus principales finalidades son (*Suárez (1.991)*) :

- Asegurar la veracidad de la información elaborada en el interior de la organización, que sirve de soporte a la toma de decisiones que dan contenido a la política de la empresa.
- Asegurar que la política empresarial diseñada por la alta dirección es ejecutada correctamente por los diferentes departamentos y en los diferentes niveles jerárquicos de la organización.

Situado el entorno de trabajo del auditor, parece evidente que éste necesitará de ciertas técnicas que le permitan reducir los costes monetarios y de tiempo que necesitará para su trabajo [1] . Estamos hablando pues, de las *técnicas estadísticas* de muestreo e inferencia aplicadas a la Auditoría Contable.

Como todo muestreo de una población éste va dirigido a la estimación de un valor (parámetro) de la población, ya sea expresado en términos relativos o absolutos.

[1] Desde luego resultaría muy difícil, por el tiempo que requeriría o el coste que ello supondría, analizar uno por uno todos los documentos y todas las transacciones de la empresa con incidencia contable.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Lo representativa que resulte una muestra será tanto mayor cuanto menor sea el error cometido en el proceso de estimación (una de las principales ventajas de la utilización de las técnicas estadísticas es que permite conocer con exactitud este error). Es claro, que la precisión sobre la población será mayor cuanto mayor sea el tamaño de la muestra pero esto conlleva un mayor coste. Es por tanto, un problema de equilibrio entre el coste y la precisión que se desee en cada caso.

La selección de la muestra debe de ser hecha sólamente después de que el auditor establezca unos objetivos específicos, principalmente, sobre la cantidad total de unidades monetarias con error o sobre la tasa de error.

Excelentes trabajos sobre metodología estadística en Auditoría Contable son *Arens* y *Loebbecke (1.981)* , *Roberts (1.978)* y *Hill, Roth* y *Arkin (1.979)*, entre otros.

Principalmente los métodos de muestreo más utilizados en la práctica de la auditoría son : muestreo mediante tablas de números aleatorios (informatizadas o no), muestreo sistemático, muestreo estratificado y muestreo por unidades monetarias.

El muestreo mediante números aleatorios requiere la numeración de todos los items y la selección (mediante alguna pauta) de una cantidad determinada de números aleatorios que indicarán los correspondientes items a inspeccionar. Este método es el más elemental y asigna igual probabilidad de ser elegido a cada item poblacional.

Para el *muestreo sistemático* el auditor calcula un intervalo en el que se tomará el primer elemento y a partir de ahí se toma el resto de forma sistemática. Por ejemplo, supongamos que una población de facturas de ventas tiene un rango de variación que oscila de la factura 652 a la 3151. Se desea un tamaño muestral de 125 items, así pues la longitud del intervalo es : $\frac{3151-652}{125} = 20$. Los intervalos resultantes serán : $652-671$; $672-691$;... ;$3132-3151$. El auditor selecciona ahora un número aleatorio entre 0 y 19 para determinar el punto de comienzo. Si el número aleatorio obtenido fué 6, el primer elemento de la muestra es la factura con el número $652+6=658$, la segunda será $658+20$, y así hasta la última.

A pesar de que el método es tremendamente fácil, su principal desventaja consiste en el sesgo que puede introducir. A veces este sesgo puede ser reducido utilizando varios puntos iniciales desde donde se seleccionan los

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

demás elementos muestrales.

Frecuentemente el balance a examinar por un auditor es una agregación de contabilidades. En esta situación es útil usar un muestreo estratificado donde cada contabilidad constituye un estrato (*Roberts (1.986)*). Es decir, el auditor encuentra que ciertos segmentos de la población difieren de otros con respecto a una característica de interés. Por ejemplo, el auditor espera normalmente errores mayores en cuentas con balances grandes que en aquellas con pequeños balances. Si existe un rango amplio de valores, resultaría inapropiado seleccionar aleatoriamente una muestra de la población sin tener en cuenta del tamaño relativo de los items. Con el fin de aumentar la representatividad de la muestra y conseguir estimaciones más precisas conviene agrupar los elementos de la población en *estratos* y seleccionar de manera separada elementos de cada estrato. En esto consiste el *muestreo estratificado.*

El auditor debe, por tanto, indicar el número de estratos a considerar. En su diseño debe tener en cuenta que cada elemento sólo puede pertenecer a un estrato y que todos los elementos deben pertenecer a algún estrato.

Por último, el *muestreo de unidades monetarias* (conocido como D.U.S. - Dollar Unit Sampling - o M.U.S. - Monetary Unit Sampling-) debe de ser utilizado cuando el auditor quiere seleccionar una muestra en la que cada item tenga una probabilidad de ser elegido directamente proporcional a su valor, por eso a veces, es conocido como muestreo con probabilidades proporcionales al tamaño. Así, un item de valor $ 2000 tendrá 20 veces más posibilidades de aparecer en una muestra que uno de $ 100.

Este método de selección muestral ha sido ampliamente estudiado en la literatura que sobre técnicas estadísticas de muestreo en Auditoría Contable se han desarrollado en los últimos quince años y es usado conjuntamente con otras técnicas estadísticas. Numerosísimos son los autores que lo han tratado : *Anderson* y *Teitlebaum (1.973)*, *Dworin* y *Grimlund (1.984)*, *Garstka (1.977)* , *Garstka* y *Ohlson (1.975)*, *Kaplan (1.975)* , *Leslie*, *Teitlebaum* y *Anderson (1.980)*, *McCray (1.982)*, *Menzefricke (1.983)*, *Neter*, *Leitch* y *Fienberg (1.978)*, *Smieliauskas (1.986)*, *Teitlebaum (1.973)*, *Vanacek (1.978)*, ...

Para nosotros será de especial interés esta metodología ya que la gran mayoría de los trabajos que utilizaremos posteriormente la utilizan. Es por esto que dediquemos una sección (la 1.4) para un estudio algo más detallado. Si bien, no es el objetivo del trabajo un estudio de los métodos de

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

muestreo; sino que será la metodología adoptada y por ello nos detenemos algo más en ella.

Con respecto a la metodología estadística utilizada para evaluar los resultados (en esta memoria nos referiremos exclusivamente a la metodología bayesiana) se han publicado una gran cantidad de trabajos considerando distintos procedimientos de naturaleza no bayesiana. No es objeto de esta monografía la descripción de estos procedimientos, descripcion que resultaría necesariamente muy incompleta. Mencionaremos únicamente a título de breve orientación algunos de ellos :

Stringer (1.963) desarrolla una cota para errores de sobrevaloración que fué pionera en el sentido de argumentar sobre los peligros de utilizar estimadores usuales en muestreo cuando no se encuentran errores en la muestra.

Fienberg, Neter y Leitch (1.977), Neter, Leitch y Fienberg (1.978) consideran la cota multinomial para errores de sobrevaloración, subvaloración o ambos. Esta cota es modificada parcialmente en *Leitch, Neter, Plante y Sinha (1.982).*

Dworin y Grimlund (1.984, 1.986) construyen la cota de los momentos y la comparan con la cota multinomial.

Frosts y Tamura (1.982, 1.986) examinan para los estimadores de razón y diferencia la fiabilidad de la estimación por intervalos.

Matsumura y Tsui (1.982) modifican la aproximación de *Ijiri y Leitch (1.980)* en la línea de utilizar estimadores tipo Stein.

.....

El capítulo se estructura de la siguiente manera :

El epígrafe 1.2 considera los trabajos pioneros dentro de la literatura contable sobre utilización del análisis bayesiano en auditoría.

La función de utilidad y, en especial, la distribución a priori; elementos básicos de la decisión bayesiana se consideran en el epígrafe 1.3 .

El problema de la determinación del tamaño muestral con una estructura de Teoría de la Decisión se aborda en el epígrafe 1.5 .

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

En el epígrafe 1.6 se plantean algunos de los principales modelos bayesianos que se han desarrollado en el marco de la auditoría contable (A.C., en adelante) y que serán utilizados en esta memoria.

1.2 Motivación e Ilustraciones sobre el uso de Métodos Bayesianos en Auditoría Contable.

El uso del análisis estadístico, en general, y del muestreo estadístico, en particular, ha sido el objeto de muchos trabajos que han alejado cualquier duda sobre el hecho de que es una técnica de A.C. efectiva. No obstante dado que el tamaño muestral varía con la seguridad que el auditor desea obtener de la muestra, el auditor que usa muestreo estadístico pronto descubre que se requieren tamaños muestrales muy grandes para alcanzar intervalos de confianza aceptables así como niveles de fiabilidad altos. La situación se hace especialmente frustrante cuando el auditor tiene grandes esperanzas de que no existe en el sistema o contabilidad que está revisando un error serio o significativo. En esta situación es difícil para el auditor racionalizar los beneficios de extraer una muestra. De hecho, el auditor puede pensar que realiza un muestreo más para satisfacer criterios estadísticos que para la evaluación de la A.C.

La cuestión es que el análisis estadístico aplicado a problemas de A.C. requiere un tipo subjetivo de evaluación. Usualmente, en A.C., la muestra no es la única fuente de información del auditor. De hecho, algunas veces, la muestra pretende probar o desaprobar opiniones desarrolladas a partir de otras fuentes de información. Estas otras fuentes de información deben tener influencia sobre el análisis estadístico.

Ya en 1.968 *Kraft* presentó una ilustración en la que el auditor podía combinar objetivamente su confianza subjetiva con la confianza de la encuesta para obtener una afirmación global sobre el sistema o contabilidad que está auditando.

Veamos un ejemplo de métodos bayesianos en una situación donde el auditor desea examinar un inventario. Basándose en auditorías anteriores y en la revisión de los sistemas de control interno de la compañía, el auditor tiene un alto grado de confianza en el sistema. El auditor no espera que ocurran errores que tengan un efecto significativo sobre el valor en dólares

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

del inventario. Además, espera que cualquier error que ocurra no exceda al 2% del total. El auditor proyecta tomar una muestra de 100 documentos. Pretende contrastar los items muestreados para admitir los métodos de control interno de la compañía y evaluar cualquier error que ocurra para ver su posible repercusión en dólares. El auditor descubre en la muestra un sólo error. Usando la metodología bayesiana ha de proceder de la siguiente manera para determinar su confianza global sobre la precisión del sistema.

Para comenzar debe cuantificar su confianza inicial o a priori sobre el sistema. Para cuantificar sus creencias a priori, un auditor, probablemente se encuentre más cómodo aproximando el problema desde el punto de vista de la verosimilitud acumulada, es decir, se creerá mucho más capaz de expresar la verosimilitud de que la tasa de error no sea mayor que el 2% (o el 5%), que de expresar la verosimilitud de que la tasa de error sea exactamente el 2% (o el 5%). En este ejemplo el auditor usa el siguiente razonamiento:

Se posee mucha confianza en que la tasa actual de error no es mayor que el 2%. Por lo tanto, 2% será el punto a partir del cual se establecerán todas las probabilidades. En un primer paso, el auditor asigna una probabilidad acumulada del 95% a la tasa de error del 2%. El próximo paso es distribuir las probabilidades por debajo y por encima del 2%. Las probabilidades acumuladas determinadas por el auditor son las siguientes :

Tabla 1.1: Probabilidades acumuladas.

Tasas posibles de error en sistema	Probabilidad acumulada original subjetiva	Probabilidad subjetiva original
0.001	0.60	0.60
0.01	0.90	0.30
0.02	0.95	0.05
0.03	0.98	0.03
0.04	0.99	0.01
0.05	1.00	0.01
		1.00

Se han restringido a seis las posibles tasas de error en el sistema, admitiendo que esta es una buena aproximación de la realidad. Es evidentemente muy difícil, si no imposible, para el auditor distinguir entre, por ejemplo, tasas de error del 2.4% o del 2.5%. Por lo tanto, la elección de tasas de error

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Tabla 1.2: Probabilidades condicionadas.

Tamaño muestral	Tasas de error posibles	Tamaño muestral x Tasa de error	Probabilidad de un error
100	0.001	0.1	0.09
100	0.01	1	0.36
100	0.02	2	0.27
100	0.03	3	0.14
100	0.04	4	0.07
100	0.05	5	0.03

se ha realizado usando la capacidad del auditor para efectuar distinciones significativas entre las probabilidades de ocurrencia de las sucesivas tasas de error.

El próximo paso es calcular las probabilidades condicionadas que resultan de la muestra. Es decir, deseamos saber ¿ cuál es la probabilidad de extraer una muestra de 100 items que contiene un error si la tasa actual de error en el sistema es el 2% ? . Los resultados se dan en la Tabla 1.2.

Observemos que la tercera columna se utiliza para aproximar una $Bin(n, p)$ por una $P(n \cdot p)$. De donde los valores de la última columna son obtenidos directamente de las tablas de una Poisson con esas medias. El siguiente paso consiste en combinar estas dos medidas de probabilidad en una afirmación de la confianza del auditor en el sistema. La Tabla 1.3 nos muestra este comentario.

Observemos que los elementos de la cuarta columna no son más que los productos de los elementos de la segunda y tercera columna. Los elementos de la quinta columna han sido obtenidos realizando el cociente de cada elemento de la cuarta con la suma de las probabilidades conjuntas (0.1835). La interpretación es la siguiente :

Una vez realizada la revisión el auditor tiene una seguridad del 89.6% de que la tasa actual de error es menor o igual que el 1%.

La tabla que aparece a continuación muestra las probabilidades a posteriori para los casos de haber encontrado 0, 1 ó 2 errores en la muestra de tamaño 100 (los cálculos son análogos a los anteriores).

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Tabla 1.3: Probabilidades a posteriori.

Tasas posibles de error	Prob.subjetiva original	Verosimilitud	Probab. conjunta	Prob. a posteriori	Acumulada
0.001	0.60	0.090	0.0540	0.294	0.294
0.01	0.30	0.368	0.1104	0.602	0.896
0.02	0.05	0.271	0.0136	0.074	0.970
0.03	0.03	0.149	0.0045	0.024	0.994
0.04	0.01	0.074	0.0007	0.004	0.998
0.05	0.01	0.033	0.0003	0.002	1.000
	1.00		0.1835	1.000	

Tabla 1.4: Probabilidades a posteriori para varios errores.

Tasas posibles de error	Prob. subjetiva original acumulada	Prob.finales $m = 0$	Prob.finales $m = 1$	Prob.finales $m = 2$
0.001	0.60	0.820	0.294	0.034
0.01	0.90	0.987	0.896	0.720
0.02	0.95	0.997	0.970	0.888
0.03	0.98	1.000	0.994	0.971
0.04	0.99	1.000	0.998	0.990
0.05	1.00	1.000	1.000	1.000

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

La influencia del dato observado en la muestra queda de manifiesto en las distintas distribuciones a posteriori. Efectuemos ahora la siguiente consideración que excluye la metodología bayesiana.

Consideremos la seguridad sobre la tasa del 2% que tenía el auditor y suponemos que en una muestra de tamaño 100 ha descubierto un error. Si buscamos en una tabla Poisson acumulada, con parámetro 2(= 100 x 0.02) , se obtiene que la probabilidad de a lo sumo un error es 0.406. Esto significa que si la tasa de error de un 2% es cierta, solamente, el 40.6% de las veces la muestra contendrá a lo sumo un error. Más frecuentemente, el 59.4% de la muestra contendrá dos o más errores. Por tanto, el auditor puede tener una confianza del 59.4% de que la hipótesis de que la tasa de error es del 2% es falsa. Es decir, puede tener una seguridad del 59% de que

la tasa de error es menor que el 2%. No obstante, si el auditor tenía gran seguridad de que la tasa de error era menor del 2%, parecería lógico que una muestra de tamaño 100 con un solo error debería dar una seguridad mayor del 59%. En la práctica, el auditor instintivamente creerá en más de un 59%. Observemos, a modo de comparación, que para alcanzar una confianza del 97%, el auditor tendría que observar una muestra de tamaño casi 300 (con solo un error).

En definitiva, en este ejemplo, se observa la sensible disminución del tamaño muestral obtenida por la aplicación de la metodología bayesiana (en este caso).

Respecto, a la posibilidad de una confianza a priori excesiva, obsérvese en la tabla los pronunciados decrecimientos en las probabilidades a posteriori cuando aumenta el número de errores en la muestra.

Aplicación de la Teoría de la Decisión Bayesiana a una inspección de atributos.

Muchas de las cuestiones que se presentan en el uso y validez del muestreo clásico en AC se han discutido y, en alguna medida, resuelto en la literatura profesional contable. Con el desarrollo de la escuela bayesiana aparecen nuevas cuestiones. La escuela clásica argüye que el análisis estadístico debe enfocarse sólamente sobre la evidencia objetiva de la muestra mientras que el análisis bayesiano se inclina por una "estructura de decisión completa". Haciendo uso de juicios subjetivos que el auditor puede dar sobre las probabilidades de los diversos sucesos que examina, los métodos bayesianos permiten al decisor modificar sus probabilidades a priori a probabilidades a posteriori de una manera sistemática e incluir consecuencias económicas de las decisiones en relación a las probabilidades consideradas.

El auditor considera las consecuencias económicas de su proyecto de auditoría, puesto que ha de considerar las implicaciones económicas de, al menos, las siguientes variables :

1. Coste de investigación.

2. Coste de revisión o reprocesamiento de datos defectuosos o de documentación.

3. Coste de pérdida de su cliente debido a errores de acción u omisión.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

4. Coste de posibles pleitos legales del auditor planteados por el cliente o por tercera personas.

Mientras que la economía de la investigación es una de las presiones que llevan al auditor a usar métodos estadísticos, el auditor (de acuerdo a la metodología clásica) no incorpora sistemáticamente consecuencias económicas en sus métodos de decisión clásicos.

Otros problemas no resueltos de la metodología clásica incluyen a la elección arbitraria de un "nivel de probabilidad crítico" [2] y la falta de atención a los errores de Tipo II [3]

La aproximación bayesiana puede incorporar sistemáticamente las consecuencias económicas de la toma de decisiones a lo largo del análisis del auditor de una manera que se refleja en su proceso de toma de decisiones actual. El criterio para la toma de decisiones exige al auditor establecer una distribución de probabilidad y una tabla de pagos y buscar una minimización de sus costes esperados.

El auditor toma decisiones basándose en información que puede provenir, en parte, de una muestra bajo condiciones de incertidumbre. Tres factores convergen para formar la decisión final :

1. La distribución de probabilidad original (a priori) del auditor.

2. Las consecuencias económicas de las diversas acciones del auditor.

3. La información añadida obtenida de la muestra del auditor.

Muchas de la metodologías usuales no incorporan los tres factores anteriores.

Consideremos como ilustración un aplicación de la aproximación bayesiana a la toma de decisiones en AC. El modelo que se considera (extraído de *Sorensen (1.969)*) está adecuado para el muestreo de atributos (aunque el razonamiento puede extenderse a variables). En este modelo usamos la distribución binomial y para ello suponemos :

1. La variable aleatoria es dicotómica (verdadero o falso, correcto o incorrecto, éxito o fracaso, ...)

[2] Específicamente, el nivel de un error de Tipo I, la probabilidad de rechazar una hipótesis siendo cierta.

[3] Probabilidad de aceptar una hipótesis siendo falsa.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Tabla 1.5: Distrib. de la fracción de defectuosos

Fracción de defectuosos (p)	Número de lotes con p defectuosos	Porcentaje de ocurrencia
0.01	2	10%
0.05	5	25%
0.10	10	50%
0.20	3	15%
	20	100%

2. Cada realización (extracción) es independiente (y para esta ilustración suponemos reemplazamiento).
3. El parámetro del proceso o probabilidad del suceso (valor de p) permanece constante en cada realización.

El ejemplo que se considera está muy simplificado. Supongamos que un auditor examinó un grupo de envíos para controlar una cierta característica (atributo) que puede estar presente o ausente.

Los envíos están agrupados en lotes de 1.000 . El auditor debe decidir si el número de errores y las consecuencias económicas son bajas como para "aceptar el lote sin más" o si el debe "rechazar el lote como inaceptable e inspeccionarlo completamente".

Las siguiente frecuencias históricas, (basadas en auditorías previas, contrastes intermedios, etc.) se usan, por el auditor, como distribución sobre la fracción de defectuosos. Aparecen en la Tabla 1.5 .

El auditor debe estimar las consecuencias de dos alternativas : " inspeccionar el 100% " o "aceptar el lote sin más". El criterio de elección es el de coste esperado más bajo. Para calcular este coste esperado, dispone de la siguiente información :

- El coste de inspección de 1000 envíos exige 450$ de incremento de coste, es decir, 450/1000 = 0.45$ por inspección.
- Coste de errores de revisión o reprocesamiento.
- Coste (o pérdida económica) debida a errores que permanezcan sin corregir. En este punto es difícil la estimación de costes; porque si los errores no se detectan no se pueden incluir en costes de revisión.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Tabla 1.6: Pagos para las dos acciones.

Fracción de def.	Probab.	Costes		Pérdidas	
(p)	$P_r(p)$	"Insp. 100%"	"Aceptar"	(1)	(2)
0.01	0.10	450	40	410	0
0.05	0.25	450	200	250	0
0.10	0.50	450	400	50	0
0.20	0.15	450	800	0	350

- Posibles pérdidas económicas del auditor debidas a pleitos iniciados por un cliente o por terceras personas. Este coste también es difícil de estimar, pero influye en los esfuerzos muestrales del auditor.

Para simplificar esta ilustración, supongamos que cada error que se detecte y corrija supone 4$ en tiempo y material. [4]

En este ejemplo, solo consideramos *costes de inspección* (450$) y *costes de reprocesamiento* (4$ por error detectado). Omitimos otros costes. Se supone que el sistema de control interno funciona perfectamente y por tanto se produce una corrección de todos los errores.

La Tabla 1.6 muestra los pagos para las acciones *inspeccionar al* 100% o *aceptarlo sin más*, para un tamaño del lote de 1000.
NOTA : Las columnas consignadas con (1) y (2), corresponden a las diferencias entre la tercera y cuarta columna. Así en (1) aparece la pérdida que se produce cuando inspeccionar es una acción errónea, en (2) cuando la acción de aceptar es la errónea.

Sobre la base de seleccionar la alternativa de coste esperado mínimo, calculamos :

- Pérdida esperada de inspeccionar el 100% : $410 \cdot 0.10 + 250 \cdot 0.25 + 50 \cdot 0.50 = 128.5$$
- Pérdida esperada de aceptar el lote : $350 \cdot 0.15 = 52.5$$

[4] Aunque muchos de los aspectos económicos pueden ser muy intuitivos, es mejor estimarlos (aún con poca precisión) que ignorarlos completamente o permitir que influyan en la toma de decisiones de forma no especificada. En especial si la alternativa "aceptarlo sin más" plantea consecuencias con grandes costes.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Tabla 1.7: Prob. a posteriori (muestra de 20 items, con 2 defectuosos).

Fracción de def.	Prob. a priori (p)	Prob. condicionada $P\{r = 2 \mid n = 20; p\}$	Probab. conjunta	Probab. a post.
0.01	0.10	0.016	0.0016	0.007
0.05	0.25	0.189	0.04725	0.218
0.10	0.50	0.285	0.1425	0.657
0.20	0.15	0.137	0.0255	0.118
	1.00		0.21685	1

La *mejor* elección es *aceptar sin más*, que produce una diferencia neta de $128.5 - 52.5 = 76\$$.

La pérdida esperada de la mejor alternativa puede conducir al auditor a investigar caminos para obtener información adicional; con la restricción de que el auditor no pagará mas de 52.5$ para mejorar su conocimiento de las probabilidades sobre las fracciones de defectuosos en el lote sometido a examen.

Una posibilidad es tomar una muestra aleatoria de los envios en el lote e inspeccionar la muestra. Con la información proporcionada, el auditor puede hacer inferencias sobre la fracción de defectuosos en el lote completo. Consideremos que, por ejemplo, se toma una muestra de tamaño 20 y que observa 2 defectuosos. Ahora el auditor revisa su distribución de probabilidad original.

Obsérvese que los valores de la tercera columna son obtenidas de una tabla de una distribución binomial : $Bin(20; p)$ con $p = 0.01, 0.05, 0.1, 0.2$.

Rehacemos las tabla de pagos anteriormente construida utilizando estas probabilidades a posteriori. La Tabla 1.8 refleja los resultados obtenidos.

La acción óptima sigue siendo *aceptar sin más* si bien debe decirse que la diferencia neta : 48.92$ ha sido rebajada sensiblemente.

La Tabla 1.9 muestra las acciones óptimas cuando aparecen más errores en la muestra así como la pérdida de la acción óptima.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Tabla 1.8: Pagos a posteriori para las dos acciones.

Fracción de def. (p)	Probab. post. $P_r(p)$	Costes		Pérdidas	
		"Insp. 100%"	"Aceptar"	(1)	(2)
0.01	0.007	450	40	410	0
0.05	0.218	450	200	250	0
0.10	0.657	450	400	50	0
0.20	0.118	450	800	0	350
valores	esperados	450	401.08	90.22	41.30

Tabla 1.9: Posibles resultados (muestra de tamaño 20).

Resultado muestral (número errores)	Acción a posteriori	Coste Esperado a posteriori	Pérdida Esperada a posteriori
0	aceptar	200.83	2.60
1	aceptar	316.22	11.90
2	aceptar	401.08	41.30
3	inspeccionar	450	60.63
4	inspeccionar	450	37.96
5	inspeccionar	450	21.62
6 *ó más*	inspeccionar	450	7.88

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Claramente, las situaciones de 0 defectuosos ó de 6 ó mas dan respuestas claras; los otros resultados pueden dar lugar a indecisión y demandar una muestra mayor.

Por ejemplo, si se observan 2 defectuosos (41.3$) o 3 (60.63$) en una muestra de tamaño 20, el auditor puede desear tomar una muestra adicional puesto que la pérdida esperada a posteriori es relativamente grande.

Un comentario sobre el tamaño muestral. Es claro que el tamaño muestral se ha de basar en el valor económico de la información contenida en la muestra. El auditor compara el coste esperado antes de la muestra con la estimación del coste esperado después de la muestra. La muestra con la mayor reducción en el coste esperado determina el tamaño muestral óptimo

Tabla 1.10: Costes esperados a posteriori (muestra de tamaño 20). Antes de muestrear.

Resultado muestral (número defect.)	Probabilidades $Bin(20;p)$	Coste Esperado a posteriori	Valor esperado del plan	Acción óptima
0	0.234	200.83	46.99	aceptar
1	0.254	316.22	80.32	aceptar
2	0.216	401.08	86.63	aceptar
3	0.140	450	63	insp.
4	0.080	450	36	insp.
5	0.042	450	18.90	insp.
6 *ó más*	0.034	450	15.30	insp.
valor esperado			347.14	

: a esta diferencia es usual denominarla *Valor Esperado de la Información Muestral* (VEIM).

Puesto que el coste esperado antes de muestrear de la acción *"aceptar sin más"* era de 374$ (ver Tabla 1.6) y el coste esperado (usando una muestra de tamaño 20) es de 347.14$ (ver Tabla 1.10) existe un VEIM de 26.8$. Esta es la reducción del coste que puede esperarse usando una muestra de tamaño 20. Si el coste de muestreo es menor que 26.86$, se debe tomar la muestra. En este caso, el coste de muestrear es $0.45 \cdot 20 = 9$$, menor que 26.86$.

Observemos que el VEIM se obtiene **antes** de tomar la muestra y **antes** de tomar una decisión, es un valor esperado. La ilustración anterior examina sólo el tamaño muestral 20, se pueden considerar otros tamaños muestrales. Puesto que el valor esperado de la pérdida ocasionada por la acción *"aceptar"* era 52.5$ y la inspección de cada item costaba 0.45$; es presumible que no más de $116(= \frac{52.50}{0.45})$ items se examinen, y por lo tanto el rango de tamaños muestrales es : $0 - 116$. Para ahorrar tiempo se podrían hacer ensayos con cuatro o cinco tamaños muestrales, por ejemplo; calcular el mayor VEIM (i.e., menor coste muestral) y elegir el tamaño muestral óptimo.

Por último, mencionaremos dentro de estos trabajos pioneros de la literatura contable, el de *Tracy (1.969)*. En este artículo se considera el ejemplo

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

propuesto por *Cyert y Davidson* (" *Statistical Sampling for Accounting Information", Prentice-Hall, 1.962, pág. 206-211*) sobre un control de nóminas. Se argumenta en el trabajo de *Tracy* que aspectos como los siguientes :

- no hay evidencia de descontento entre los empleados,
- existe un buen plan de control interno para las nóminas,
- se dispone de un excelente programa de ordenador para las nóminas con varios controles,
- existe una política empresarial de " *cero defectos* " en un área en la que los empleados son tan sensibles,

llevan al auditor a tener fuertes creencias sobre la magnitud de la tasa de error.

En lo que sigue, consideraremos una metodología bayesiana como la desarrollada de forma simplificada en estos ejemplos. Ello supone, entre otras cosas, que se considera que el auditor considera procedimientos normativos de toma de decisiones. No se consideran procedimientos *heurísticos* (ver por ejemplo, *Joyce* y *Biddle (1.981)*).

1.3 Elementos básicos del Análisis Bayesiano en A.C.

En este epígrafe se realiza un breve repaso a los elementos fundamentales de un problema de decisión estadística bayesiana en el marco de la auditoría contable.

El repaso será sucinto ya que el objetivo central de la memoria se refiere fundamentalmente a la inferencia bayesiana, no se va a considerar por tanto la incorporación de una función de pérdida aunque sí nos interesa el apartado dedicado a la distribución a priori.

1.3.1 Función de Utilidad.

Dos trabajos básicos destacamos en este tema, el de *Lewis (1.980)* y el de *Ashton (1.982)*.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

La idea de los trabajos, que consisten en investigaciones empíricas sobre distintos grupos de auditores, es constatar la verosimilitud de la consideración de una función de utilidad.

En el primero de ellos se analiza el tema del *consenso*. Suponiendo que las decisiones de Auditoría se pueden analizar dentro de una estructura de utilidad esperada, lo que no es irreal dado que el tipo de decisiones que toman los auditores se ajustan muy bien a esta estructura. La idea en este trabajo es que los auditores deben de tener utilidades homogéneas para los resultados o consecuencias de sus decisiones. Los resultados del estudio de *Lewis* llevan a que el nivel de homogeneidad es alto y que tiende a ser más alto en situaciones de gran volumen. Además esa relación es más importante entre miembros de la misma firma.

El segundo de los trabajos mencionados se centra en un experimento en el que se presenta una de las violaciones de la Teoría de la Utilidad, conocida como la *paradoja de Allais* (ver *DeGroot (1.970)*) y que no vamos a tratar aquí. La conclusión del trabajo es que la tasa de violación entre los auditores es sensiblemente más baja que en cualquier otra situación general descrita en la literatura.

1.3.2 Distribución a priori.

Sobre este tema se han escrito una gran cantidad de artículos, planteando todos ellos el problema en muy diversos ambientes. Aquí vamos a efectuar un breve repaso de algunos de los trabajos más significativos desarrollados en el ambiente de la A.C.

La función de probabilidad a priori se supone que captura una percepción del decisor individual sobre algún parámetro incierto. **Esto ocurre cuando el asesor entrenado cree que la distribución que resulta es un buen resumen de sus creencias.** Es decir, una especificación satisfactoria de la función de probabilidad a priori será la que resulta cuando el auditor, después de un entrenamiento, cree que la distribución resultante es un buen resumen de su evidencia cualitativa. Por tanto **un buen método de especificación será aquel en el que un asesor entrenado tiene confianza** .

Como fácilmente se deduce, *la habilidad para especificar probabilidades a prior es, en gran parte, una destreza adquirida.*

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Winkler (1.967) ha estudiado medios de especificar distribuciones a priori. Su estudio evalúa cuatro técnicas de especificarlas para el caso del proceso de Bernouilli. *Winkler* describe la experimentación de sus cuatro métodos en la Universidad de Chicago.

Corless (1.972) publicó un experimento en el cual se pedía a los auditores que expresaran sus distribuciones de probabilidad a priori. En este experimento a los sujetos se les pedía que especificaran su distribución a priori sobre un caso hipotético usando dos métodos. Primeramente, usan el *método de especificar cuartiles* sobre su distribución a priori de la tasa de error en procedimientos de control interno. Este método es un método CDF (especificación de puntos de la función de distribución) en la clasificación de *Winkler*. El autor entonces ajustó una distribución beta a los resultados. Los sujetos también generan una distribución a priori discreta usando el *método del intervalo fijo* que es comparable a la aproximación PDF (especificación de puntos de la función de densidad) de *Winkler*.

Los primeros resultados de este estudio son :

- Los sujetos (auditores en ejercicio) están dispuestos a responder.
- Existe una considerable diversidad entre sus distribuciones a priori, y
- los métodos de especificación proporcionan distribuciones a priori que tienden a tener grandes diferencias en la localización de sus cuartiles.

El primer resultado es agradable, los resultados segundo y tercero son debidos, probablemente, a la falta de entrenamiento de los sujetos. Una posible causa para el tercer resultado es que los sujetos no entendieran la relación entre densidad y función de distribución. También es posible que algunas de las diferencias proviniesen del proceso de ajuste que usó el autor.

La determinación de una distribución de probabilidad subjetiva que refleje adecuadamente las creencias del decisor depende fuertemente de los métodos desarrollados en la literatura sicológica (ver *Chesley (1.975)*, y *Slovic et al (1.977)*). Se han propuesto diferentes técnicas de especificación que pueden dar diferentes distribuciones y la literatura no dá respuesta a la pregunta de qué técnica es la mejor. Además, se han realizado estudios empíricos para comparar técnicas que no han identificado una jerarquía de los métodos o una aproximación para seleccionar una técnica en una situación de decisión dada.

En el caso de los estudios de especificación de probabilidades, usando a los auditores, los resultados son inconcluyente. Hemos descrito antes y de

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

manera muy somera el trabajo de *Corless (1.972)*, en donde se encuentra una notable diversidad entre distribuciones a priori especificadas por cada uno de los dos métodos. *Felix (1.976)* comparó las técnicas de la muestra a priori equivalente y la de la función de distribución y encontró diferencias más pequeñas que *Corless*. *Crosby (1.980)* examinó los efectos de usar diferentes técnicas de especificación sobre alguna de las decisiones siguientes en auditoría, tal como el tamaño muestral en muestreo de atributos. Encontrando diferencias en los tamaños muestrales si la distribución a priori especificada se usa en un modelo bayesiano.

Obsérvese que el trabajo de *Crosby (1.980)* puede interpretarse como un primer intento en examinar robustez. En el sentido de que más que preocuparnos por las diferencias entre las distribuciones especificadas vamos a preocuparnos por las consecuencias de usar diferentes distribuciones.

Crosby (1.981), compara dos técnicas de especificación de distribuciones a priori. Las dos técnicas son la CDF (especificar puntos de la función de distribución) y la EPS (muestra a priori equivalente). Algunos de los resultados del experimento son :

- La comparación estadística de las distribuciones de probabilidad que resultan de las dos técnicas muestran algunas inconsistencias. Además los auditores no prefieren un método a otro en términos de la claridad de comprensión.
- Como siempre, una técnica no puede juzgarse mejor que la otra porque no existen *verdaderos* valores frente a los que comparar.

De todo lo anterior se pueden extraer algunas ideas muy generales que con nuestro propósito actual serán suficientes :

- Existen diversas técnicas de especificación de distribuciones a priori que puedan dar lugar a distintas distribuciones.
- Algunas de esas técnicas están particularmente bien adaptadas al ambiente de la Auditoría.
- Un entrenamiento adecuado de los auditores parece disminuir las diferencias entre las distribuciones obtenidas por distintas técnicas.

Un trabajo que es interesante en el contexto que nos ocupa y que trata la especificación de distribuciones de probabilidad por individuos o por equipos es el de *Solomon (1.982)*.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Los trabajos que hemos mencionado consisten esencialmente en diseñar un estudio empírico en donde una serie de auditores en ejercicio (con más o menos entrenamiento estadístico) especifican una distribución de probabilidad. Realizada esa especificación se comparan las distribuciones obtenidas por distintos métodos, comparando sus cuantiles, su dispersión, algún intervalo de credibilidad, etc *Crosby (1.980)* es parcialmente una excepción puesto que examina las consecuencias en el tamaño de la muestra cuando las distintas especificaciones se implantan en un modelo bayesiano. Como ya se ha comentado todos estos estudios eran en parte inconcluyentes porque no existe una *verdadera* distribución con la que comparar.

Existen otro tipo de trabajos que considerando el problema de la especificación de distribuciones a priori efectúan un planteamiento distinto, tal vez más simplificado pero posiblemente permitiendo conclusiones más concretas. La idea consiste en :

- Enunciar dos *cualidades o aspectos* de una distribución de probabilidad que se denominan *extremado y calibración* (*"extremeness"* y *"calibration"*).
- Situarse en un modelo de probabilidad concreto, por ejemplo distribuciones normales, donde las cualidades enunciadas se corresponden con parámetros de la distribución.
- Estudiar las consecuencias en el problema de decisión de las variaciones en los parámetros.

Frecuentemente, el planteamiento anterior permite un desarrollo analítico del cual se pueden extraer diversas conclusiones. A continuación, enumeraremos algunos trabajos que se sitúan en esa línea dentro del ambiente de Auditoría Contable.

No obstante y antes de pasar a esa enumeración observemos que el problema planteado no es otra cosa que un análisis de sensibilidad o de robustez frente a la distribución a priori en un modelo bayesiano. En la actualidad una notable cantidad de trabajos se han desarrollado para este tema; como se decía antes aquí se enumerarán exclusivamente trabajos en A.C. Algunos de estos trabajos son : *Solomon (1.982)*, *Tomassini et al (1.982)*, *Libby (1.981)*, *Beck*, *Solomon* y *Tomassini (1.985)*, etc ...

Otro punto de vista, entre este tipo de trabajo, consiste en enumerar un conjunto de cualidades y considerando distintas metodologías de especificación, intentar una jerarquización entre los distintos procedimientos

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

de especificación. En esta línea se sitúa el trabajo de *Abdolmohammadi (1.987)*. Este autor considera los mismos cuatro procedimientos descritos por *Winkler* y tres cualidades que denomina *"aceptabilidad"* , *"precisión"* y *"concordancia"*.

1.4 Metodología de Muestreo de Unidades Monetarias.

El muestreo de unidades monetarias (D.U.S.) fué introducido en la Sección 1.1 como un método de muestreo en el cual la probabilidad de seleccionar cualquier item es proporcional a su valor (frecuentemente la unidad monetaria - u.m. - es el dólar).

En el D.U.S. la unidad muestral es la unidad monetaria (u.m.). Una vez que se ha seleccionado un dólar en la muestra, se identifica la unidad de auditoría a la cual pertenece el dólar y se audita. Entonces el error que se encuentre en esa unidad de auditoría se promedia entre todos y cada uno de los dólares que están en la unidad y el dólar muestreado recibe esta cantidad de error promedio o prorrateado.

Por ejemplo, consideremos una ilustración sencilla donde la población está compuesta de cinco apuntes (aparecen marcados con $\star$ los apuntes seleccionados) :

Tabla 1.11: Selección muestral mediante D.U.S.

Apuntes (u.m.)	Valor del libro	Rango acumulado	Números aleatorios
$\star$ A	100$	1 – 100	39
B	50$	101 – 150	
C	20$	151 – 170	
$\star$ D	200$	171 – 370	241
$\star$ E	130$	371 – 500	486
	500		

El procedimiento de muestreo es el siguiente :

- El auditor determina los rangos acumulados de cantidades del libro para todas las unidades de auditoría.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Tabla 1.12: Población de apuntes contables.

Apunte	Valor del libro	Cantidad de error	Número de centavos en cada dólar que tiene error
1	100000	10000	10
2	200000	0	0
3	50000	12500	25
4	100000	5000	5
5	50000	12500	25
6	25000	25000	100
7	75000	7500	10
8	150000	15000	10
9	125000	0	0
10	125000	12500	10
	$X = 1000000$		

- El total acumulado del libro X, es el número total de unidades de dólar en la población. En este ejemplo, $X = 500$.
- Supongamos que se desea extraer una muestra de 3 unidades de dólar, entonces el auditor selecciona tres números aleatorios de 1 a X. Supongamos que los números obtenidos son : 39, 241 y 486.
- Las unidades de auditoría A, D y E son las seleccionadas para auditar. El auditor examina la unidad de auditoría entera a la cual pertenece el dólar muestreado.
- Entonces, el auditor, promedia el error total para la unidad de auditoría entre cada uno de los dólares en la unidad.

El error máximo en un dólar puede considerarse de 100 centavos, y por tanto, hay 101 posibles errores en un dólar muestral. Consideremos otra ilustración, como la que aparece en la Tabla 1.12, con una muestra de 10 apuntes.

Si en la auditoría del primer apunte se descubre un error de sobrevaloración de 10000$, entonces la unidad de dólar muestreada que pertene a esta unidad de auditoría tiene un error de sobrevaloración de $\frac{10000}{100000} = 0.1$, o lo que es lo mismo, de 10 centavos.

El auditor considera ahora que posee una población de 1000000 de u.m. Del millón de u.m., 325000$ (32.5%) no tienen error, 100000$ (10%)

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

presentan errores de 5 centavos, y así con los demás.

Es posible que dos o más dólares pertenezcan a la misma unidad de auditoría. Cuando ocurre esto, cada dólar muestreado se trata como una unidad muestral con su cantidad de error propio. Algunas veces, existe una posible elección en la definición de unidad de auditoría a la cual pertenece un dólar muestreado. Por ejemplo, si un dólar muestreado pertenece a un comprobante que contiene dos envios, ¿ debe de considerarse la unidad de auditoría el comprobante entero o debe de ser el envio al cual pertenece el dólar muestreado ? Puesto que puede existir un error en uno de los envios y no en el otro, usualmente no será razonable propagar un dólar con error en un envio a los dos.

En general, la unidad de auditoría debe ser la unidad más pequeña a la cual pertenece el dólar y para la cual es razonable, desde un punto de vista de la auditoría, promediar el error.

La metodología D.U.S. es atractiva para el auditor principalmente por cuatro razones :

- La posibilidad de seleccionar items de valores grandes crece automáticamente. Aunque el método de muestreo estratificado también puede ser utilizado con este fin el D.U.S. resulta mucho más sencillo.
- Reducción del coste de muestreo.
- Facíl aplicación : puede ser aplicado a un muestreo simple de atributos o a uno combinado de atributos y variables.
- D.U.S. proporciona siempre conclusiones estadísticas sobre una cantidad de dólares.

La metodología D.U.S. puede contemplarse como un último paso en la estratificación de la cantidad del libro. No es posible mayor estratificación, por la cantidad del libro, con unidades de dólar, puesto que todas las unidades de muestreo son exactamente del mismo tamaño en términos del valor del libro. Consecuentemente, incorpora las ventajas de eficiencia propias de la estratificación por el valor del libro sin exigir estratificación.

Una vez observada la cantidad de error en u.m. el auditor agrupa dicha información en una Tabla de probabilidades (Tabla 1.13) para la población de dólares .

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Tabla 1.13: Población de dólares.

Cantidad de Error en Unidad Monetaria	Probabilidad
0	0.325
5	0.100
10	0.450
25	0.100
100	0.025
	1.000

El auditor está interesado en obtener una estimación de una cota superior para el error total de sobrevaloración en la población. Cuando se utiliza una metodología clásica, se consideran que sólo pueden aparecer errores con los valores aparecidos en la muestra y se desarrolla un modelo multinomial (*Neter, Leitch* y *Feinberg (1.978)*) que permite calcular estas cotas utilizando técnicas numéricas para resolver el programa de programación no lineal que aparece.

Cuando el auditor adopta una metodología bayesiana la cantidad de error en u.m. tiene una densidad continua en todo el intervalo $[0, 1]$ y no queda restringida a unos cuantos valores. El auditor también estará interesado en calcular cotas superiores pero ahora éstas tienen interpretaciones totalmente diferentes.

Una de las principales desventajas del D.U.S. es que las cotas para el error total cuando aparecen errores en la muestra pueden ser demasiado altas para servir al auditor, por ello suele decirse que es una metodología *conservadora*. Por esta razón la metodología D.U.S. es bastante usada cuando se esperan 0 ó pocos errores.

También suele utilizarse cuando se puede esperar un número alto de errores, el auditor desea utilizar un muestreo estratificado y los datos del cliente no pueden ser leidos automáticamente (mediante ordenador).

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

1.5 Planificación del Tamaño Muestral con Análisis Bayesiano. Modelos de Menzefricke.

Hemos visto que los auditores frecuentemente usan métodos estadísticos para decidir cuando aceptar o rechazar una contabilidad. Generalmente, las aproximaciones no tienen en cuenta el coste de cometer un error beta (aceptar una contabilidad siendo errónea), sino que meramente eligen tamaños muestrales que son consistentes con algún nivel tolerable para la probabilidad de cometer tal error. Esto se dá también en el modelo propuesto por *Boockholdt* y *Finley (1.980)* en el cual un auditor elige un tamaño muestral óptimo para contrastar la hipótesis H_1 de que **la contabilidad no es errónea**, frente a la hipótesis H_2 de que **la contabilidad es errónea.** En ese modelo, el tamaño muestral óptimo se selecciona de tal forma que minimize el coste total esperado, desagregado en :

1. el coste de muestreo, y
2. el coste de rechazar H_1 equivocadamente (considerar que la contabilidad es errónea cuando no lo es).

Boockholdt y *Finley* creen que no es necesario añadir una tercera componente al coste, para capturar el coste de rechazar H_2 equivocadamente. Ellos también suponen que la población de items contables se distribuye con una distribución normal.

Menzefricke (1.983) extiende el modelo de *Boockholdt* y *Finley*,

1. **usando una metodología DUS en el modelo**
2. **mostrando alguna de las implicaciones de no incorporar explícitamente el coste de aceptar equivocadamente una contabilidad.**

La más significativa de las dos extensiones es la segunda.

Existe una evidencia considerable de que la hipótesis de normalidad no se mantiene en muchas situaciones y que los resultados basados en hipótesis de normalidad no son robustos para los tipos de poblaciones que se encuentran habitualmente en auditoría (por ejemplo, ver *Neter* y *Loebbecke (1.975)*, *Johnson*, *Leitch* y *Neter (1.981)*) .

La extensión que se desarrolla a un modelo completo de teoría de la decisión incorpora el coste de muestreo, el coste de concluir equivocadamente

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

que una contabilidad es errónea y el coste de concluir equivocadamente que no es errónea.

Con vistas a usar la metodología DUS en el modelo de *Boockholdt* y *Finley*, se hacen tres hipótesis simplificadoras.

1. Cada error es un error de sobrevaloración del 100%.
2. La proporción de dólares con error es pequeña.
3. Cuando la contabilidad no es errónea, la proporción de dólares con error es ϕ_1, y cuando es errónea la proporción de dólares con error es ϕ_2.

La primera hipótesis, es una hipótesis típica en DUS (ver por ejemplo, *Kaplan (1.975)*) que en la práctica se dá en unos casos y en otros no. La segunda hipótesis no se dá con frecuencia en la práctica, pero simplifica considerablemente los cálculos porque permite utilizar la distribución de *Poisson*. La tercera hipótesis puede parecer innecesariamente restrictiva; no obstante, es equivalente en DUS a otras hipótesis planteadas en otros contextos.

En definitiva, **el problema de decisión del auditor es la elección entre las hipótesis** :

$$H_1 : \phi = \phi_1 \;\; y \;\; H_2 : \phi = \phi_2$$

donde ϕ es la proporción de dólares de la población que son erróneos, y es desconocida.

Si se extraen n unidades de la población, entonces m el número de errores sigue una distribución hipergeométrica que puede aproximarse por una distribución de Poisson con parámetro $n \cdot \phi$; esta aproximación es buena cuando se verifican aproximadamente las dos primeras hipótesis.

El auditor usa el siguiente método de decisión :

$$aceptar\ H_1\ si\ m \leq K$$

$$aceptar\ H_2\ si\ m > K$$

donde K es un punto frontera elegido convenientemente. Obsérvese que en el método de decisión no intervienen el tamaño de los errores ya que hemos supuesto que todos los errores son de sobrevaloración del 100% por tanto

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

tienen el mismo tamaño.

Los riesgos incluidos en el problema de decisión del auditor son :

α : *probabilidad de rechazar el balance dado que* $\phi = \phi_1$

β : *probabilidad de aceptar el balance cuando* $\phi = \phi_2$

Si denominamos :

a : *coste de cometer un riesgo* α

v : *coste de extraer y auditar un dólar*

El problema que se plantea es el siguiente : **Encontrar n y K que minimizen :**

$$L(n,k) = a \cdot \left\{ 1 - \sum_{m=0}^{K} P_0(m \mid n \cdot \phi_1) \right\} + v \cdot n \qquad (1.1)$$

sujeto a :

$$\sum_{m=0}^{K} P_0(m \mid n \cdot \phi_2) \leq \beta \qquad (1.2)$$

siendo $P_0(\cdot \mid \lambda)$ la probabilidad de una distribución de Poisson de parámetro λ.

El primer sumando de (1.1) muestra el coste de un error tipo α y el segundo corresponde al coste de extarer y auditar n unidades de dólar. La restricción acota por β la probabilidad de aceptar la contabilidad siendo incorrecta (es decir, un error tipo β). Obsérvese que respecto al error β, sólo se mantiene de unos niveles que se pueden considerar tolerables pero que no se incorpora el coste de cometer tal error.

La expresión entre llaves en (1.1) es la probabilidad de rechazar una contabilidad que no tiene error y por tanto es igual a α. La cantidad β está predeterminada. Por tanto, $L(n,K)$ es el coste esperado de seleccionar una muestra cuando la contabilidad no tiene error, es decir, cuando H_1 es cierta. No se plantea la estimación de la cantidad de dólares en la contabilidad que son erróneos. *Menzefricke (1.983)* desarrolla un algoritmo para el problema de minimización.

Varios autores (por ejemplo, *Kinney (1.975a, 1.975b)*) han sugerido la utilización de una aproximación de teoría de la decisión con el objetivo

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

de minimizar el coste total esperado de muestreo y de tomar decisiones erróneas. En vez de ello, la aproximación típica ignora explícitamente el coste de errores beta.

Menzefricke (1.983) usa una aproximación de teoría de la decisión para inferir costes de errores beta (aceptar una contabilidad siendo errónea) usando el modelo anterior, veámosla.

Se continua usando el conjunto de tres hipótesis, en particular la tercera, y por lo tanto ϕ solamente toma dos valores ϕ_1 y ϕ_2. Este modelo simplificado puede ser una aproximación adecuada al modelo completo (suponer una distribución a priori continua para ϕ) con el objeto de planificar tamaños muestrales.

La pérdida total esperada a minimizar es :

$$T(n;K) = a{\cdot}p{\cdot}\left\{1 - \sum_{m=0}^{K} P_0(m \mid n \cdot \phi_1)\right\} + b{\cdot}(1-p){\cdot}\left\{\sum_{m=0}^{K} P_0(m \mid n \cdot \phi_2)\right\} + v{\cdot}n \tag{1.3}$$

donde a, K, n, ϕ_1, ϕ_2, v son los mismos de antes, y, p es la probabilidad a priori de que una contabilidad no sea errónea, es decir,

$$p = Prob\{H_1\} = Prob\{\phi = \phi_1\}$$

b es el coste de aceptar una contabilidad que sea errónea.

Habitualmente, la probabilidad a priori es muy alta (por ejemplo, $p \geq 0.5$), puesto que pocas contabilidades son erróneas. Como antes, $v = 1$, sin pérdida de generalidad.

Es fácil mostrar que $T(n;\cdot)$ tiene un único mínimo. Como función de n, $T(n;K)$ se minimiza considerando n continuo. En definitiva, con pasos intermedios que omitimos se tiene,

$$\frac{\partial T(n;K)}{\partial n} = \frac{p \cdot a \cdot \phi_1 (n\phi_1)^K}{K! \cdot e^{n\phi_1}} - \frac{(1-p) \cdot b \cdot \phi_2 (n\phi_2)^K}{K! \cdot e^{n\phi_2}} + 1 \tag{1.4}$$

Ahora usando esta expresión podemos determinar el valor implicado para b, suponiendo la aproximación antes utilizada. Es decir : para ϕ_1, ϕ_2, β y $\frac{a}{v}$ dados, determinamos los valores óptimos de n y K, entonces para un p dado, determinamos el valor de b tal que los mismos valores de n y K son óptimos cuando se usa la segunda aproximación. Este valor se encuentra fácilmente, igualando la expresión anterior a cero y resolviendo en b.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Menzefricke (1.984) examina el problema de la selección del tamaño muestral óptimo en un problema de Auditoría en base a cierta información a priori obtenida del estudio de los sistemas de control interno y de los años anteriores. El trabajo utiliza metodología DUS en una aproximación al problema con una estructura de Teoría de la Decisión.

Introducimos alguna terminología.

Un auditor está interesado en el valor total de todos los items (o registros) que están en la contabilidad de interés. Cada item contable tiene asociado un valor de libro y un valor auditado (que es el valor que el auditor le asignaría después de una cuidadosa investigación). El *fallo de un item* se define como el *error relativo*, es decir,

$$fallo = \frac{valor\ de\ libro\ del\ item\ -\ valor\ auditado\ del\ item}{valor\ de\ libro\ del\ item}$$

El trabajo de *Menzefricke* se refiere fundamentalmente al importante caso en que todos los fallos son positivos o negativos.

Como ya hemos visto antes, en DUS la contabilidad de interés se considera como una población de dólares. **El fallo de una unidad de dólar se define como igual al fallo del item al cual pertenece esa unidad de dólar. Por tanto la suma de todos los fallos de dólar es igual a la diferencia entre valor de libro y valor auditado.**

Suponemos que el auditor toma una muestra aleatoria de dólares para determinar si el valor contable total de libro es erróneo. La contabilidad es errónea si la diferencia entre el valor de libro y el valor auditado excede a un porcentaje dado del valor de libro, por ejemplo el 5%. La decisión del auditor es aceptar o rechazar el valor de libro, sujeto a un error puesto que sólo examina una muestra de dólares. El auditor puede cometer un error beta (aceptar una contabilidad que es errónea) o un error alfa (rechazar una contabilidad que no es errónea). Generalmente suponemos que el error beta es el más serio. Se considera que el coste de cometer uno cualquiera de los errores es mucho más alto que el coste de extraer y auditar un dólar.

No ha sido muy tratado en la literatura la selección del tamaño muestral óptimo con DUS mediante una aproximación de Teoría de la Decisión. Puede ser que una de las razones para esto sea que no es fácil la elección de una función de pérdida apropiada.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

En el trabajo de *Menzefricke* se consideran dos tipos de función de pérdida y esas son los que examinaremos aquí.

Planteamiento del problema de Teoría de la Decisión.-

Sea Z, $-\infty < Z \leq 1$ el fallo por dólar y sea $\phi = Prob\{Z \neq 0\}$, es decir ϕ es la probabilidad de que un dólar tenga error. La densidad de los fallos por dólar, dado que el fallo no es cero, la notamos por $f(z \mid \mu)$, donde μ es el valor de la esperanza.

Observemos que μ es una media condicionada (habitualmente desconocida), por tanto la media no condicionada del fallo por dólar ψ es igual a $n \cdot \mu$, que describe la parte o fracción del valor contable de libro en que dicho valor difiere del valor auditado.

El auditor puede aceptar la contabilidad (acción a_1) o rechazarla (acción a_2). La pérdida debida a un error beta, $L(a_1, \psi)$ y la pérdida debida a un error alfa $L(a_2, \psi)$ las unimos en una pérdida diferencial notada,

$$L(\psi) = L(a_1, \psi) - L(a_2, \psi)$$

Si esta pérdida diferencial es negativa para un valor particular de ψ, entonces se prefiere a_1, en otro caso se prefiere a_2.

Consideraremos la idea general de que es más grave aceptar una contabilidad que es errónea que rechazar una contabilidad no errónea.

Las dos funciones de pérdida que se consideran en el trabajo citado son :

$$L_1(\psi) = \begin{cases} C_{21} & si\ \psi \leq \psi_{C_1} \\ -C_1 & si\ \psi_{C_1} < \psi \leq \psi_{C_2} \\ C_{22} & si\ \psi_{C_2} < \psi \end{cases}$$

donde ψ_{C_1} y ψ_{C_2} son valores frontera pequeños (por ejemplo, $\psi_{C_2} = 0.05$). Esperamos que :

- C_{22} (la pérdida de aceptar una contabilidad que está sobrevalorada) sea mucho mayor que C_1 (la pérdida de rechazar una contabilidad que no es errónea).
- C_{21} está en medio.

La pérdida C_1 será habitualmente más grande que C_0, el coste de auditar un dólar. En lo que sigue sólo se necesitarán costes relativos,

$$\frac{C_{22}}{C_1}, \frac{C_{21}}{C_1}\ y\ \frac{C_1}{C_0}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

que serán habitualmente mucho mayores que uno.

Puesto que puede ser deseable que $L(\psi)$ varie más suavemente en ψ, se considera una segunda pérdida diferencial de forma cuadrática :

$$L_2(\psi) = -C_3 + C_4 \cdot \psi^2$$

donde C_3 y C_4 son valores adecuados. Esta función de pérdida es atractiva si ψ se restringe a ser positiva o negativa; en otro caso la función de pérdida cuadrática pierde algo de su atractivo debido a su simetría.

Antes de muestrear, el auditor tiene información a priori sobre ψ, $g_0(\psi)$, que será la densidad a priori (o distribución a priori) del auditor.

Sin muestreo la pérdida diferencial esperada de aceptar la contabilidad es :

$$\int L(\psi) \cdot g_0(\psi) \cdot d\psi$$

y la de rechazar la contabilidad es cero, por tanto la pérdida esperada mínima sin muestreo es :

$$EL(n=0) = \min \left\{ \int L(\psi) \cdot g_0(\psi) \cdot d\psi \ ; \ 0 \right\}$$

Supongamos que una muestra aleatoria simple de tamaño n, dá los siguientes fallos por dólar $Z^{(n)} = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$. Entonces las inferencias a posteriori sobre ψ dependerán no solamente del tamaño muestral n sino también de los valores de $Z^{(n)}$. Esta dependencia la indicamos notando la función de densidad a posteriori de ψ, como, $g_1(\psi \mid Z^{(n)})$.

Con vistas a determinar el tamaño muestral óptimo, hemos de calcular la **pérdida esperada** cuando se toma una muestra de tamaño n, $EL(n)$. Si $Z^{(n)}$ es conocido :

$$EL(z^{(n)}; n) = \min \left\{ \int L(\psi) \cdot g_1(\psi \mid z^{(n)}) \cdot d\psi \ ; \ 0 \right\} + c_0 \cdot n$$

Pero $z^{(n)}$ no es conocido antes de muestrear y esta incertidumbre debe de expresarse como una distribución predictiva $p(z^{(n)})$, integrando la pérdida diferencial esperada óptima para muestras de tamaño n queda :

$$EL(n) = \int \min \left\{ \int L(\psi) \cdot g_1(\psi \mid z^{(n)}) \cdot d\psi \ ; \ 0 \right\} \cdot p(z^{(n)}) \cdot dz^{(n)} + c_0 \cdot n$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

y el problema se soluciona encontrando el $n^\star$ tal que :

$$EL(n^\star) = \min_{n=0,1,\ldots} EL(n)$$

Cuando se usa la función de pérdida $L_1(\psi)$, $\int L_1(\psi) \cdot g_1(\psi \mid z^{(n)}) \cdot d\psi$ se puede simplificar y la contabilidad se aceptará si,

$$(C_1 + C_{21}) \cdot G(\psi_{C_1} \mid z^{(n)}) - (C_1 + C_{22}) \cdot G(\psi_{C_2} \mid z^{(n)}) + C_{22} < 0$$

A continuación enunciamos simplemente, tres casos particulares desarrollados por *Menzefricke* (ver op. cit. para más detalles) en donde se fijan la densidad de fallos por dólar, ψ.

Un Modelo Conservador para la Distribución de los Fallos.

La información a priori sobre ϕ, probabilidad de que un dólar tenga error, es una $Beta(n_0 p_0, n_0)$.

Respecto a la densidad $f(z \mid \mu)$, se supone que $\mu = m_0 > 0$, donde m_0 es conocido a priori. Por tanto, $\psi = m_0 \cdot \psi$, y la densidad a priori de $\frac{\psi}{m_0}$ es una *Beta*.

En *Menzefricke (1.983)* se consideraba un modelo más restrictivo donde a priori ϕ solamente podía tomar dos valores.

Modelo Exponencial para la Distribución de Fallos.

Es el modelo de *Cox* y *Snell (1.979)* que suponen que ϕ, la probabilidad de que un dólar tenga error, es relativamente pequeña, por tanto el número de dólares con error encontrados en una muestra de tamaño n puede describirse adecuadamente con una Poisson.

Dado que un dólar tiene error, se supone que su fallo tiene una distribución exponencial con media μ.

La densidad a priori para ϕ se considera una $Gamma(p_0, n_0)$.
La densidad a priori para μ es una $Gamma - invertida(m_0, r_0)$. *Cox* y *Snell* suponen que ϕ y μ son independientes.

Modelo Normal para la Distribución de Fallos.

Los modelos anteriores suponen que todos los fallos no nulos son positivos. Esta hipótesis es apropiada en muchas situaciones y si solamente

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

existe un pequeño número de fallos negativos no es crítica. Ahora enunciamos un modelo que explícitamente considera fallos positivos y negativos. Suponemos que fundamentalmente interesan los errores de sobrevaloración considerando para ello que el fallo medio es positivo. Además en contraste con el modelo anterior la proporción de dólares con error ϕ no necesariamente ha de ser pequeña.

El número de dólares con fallo no nulo se considera *Binomial* con parámetros n y ϕ.

La información del modelo es :

1. La densidad de fallos no nulos es $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
2. La distribución a priori de ϕ es una $Beta(n_0 p_0, n_0)$.
3. La distribución a priori para μ dado σ^2 es $\mathcal{N}(m_0, \frac{\sigma^2}{r_0}$.
4. La distribución a priori para $\frac{1}{\sigma^2}$ es una $Gamma(\frac{v_0 \upsilon_0}{2}, \frac{v_0}{2})$

Para el caso del modelo conservador de *Menzefricke* antes mencionado, en *Hernández y Vázquez (1.991)* se dió un primer paso en el análisis de sensibilidad o robustez, considerando clases contaminadas de distribuciones a priori (Ver Capítulo 2).

Finalmente indicar que en el reso de esta memoria no se vuelve a considerar el problema del tamaño muestral, la parte de metodología estadística en que nos centraremos será la determinación de una cota superior para el error total.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

1.6 Modelos Bayesianos para la Obtención de Cotas Superiores para el Error Total.

Supongamos N artículos con valores registrados $x_1, x_2, \ldots, x_N$ (todos positivos) y sujetos a errores $y_1, y_2, \ldots, y_N$. Consideremos las fracciones de error asociadas a cada item :

$$z_i = \frac{y_i}{x_i}\ ^5 \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

Suponemos que $0 \leq z_i \leq 1$, $\forall i = 1, 2, \ldots, N$. Definimos las variables

$$d_i = \begin{cases} 1, & \text{si } z_i \neq 0 \\ 0, & \text{si } z_i = 0. \end{cases}$$

Tenemos asociadas las siguientes cantidades : $T_x = \sum_{i=1}^{N} x_i$, que será el valor registrado total de la población. $T_y = \sum_{i=1}^{N} y_i$, que será el valor del error total en la población. $T_d = \sum_{i=1}^{N} d_i$, que será el número total de artículos defectuosos o con error, y $T_{xd} = \sum_{i=1}^{N} x_i d_i$, que será el valor registrado total de artículos con error. Desearemos estimar T_y.

Supongamos que la probabilidad,ϕ,de que un artículo sea defectuoso es pequeña [6].

$$\phi = Prob\,\{un\ articulo\ defectuoso\} \tag{1.5}$$

Dado que un artículo es defectuoso, llamaremos $g(z;\mu)$ a la densidad de la fracción de error, donde el parámetro desconocido μ es la media de dicha densidad.

Consideremos una muestra de tamaño n, de la cual observamos $M = m$ errores. La distribución de M es binomial : $Bin(n, \phi)$. Ahora bien, dado que ϕ es pequeño, puede aproximarse M bastante bien por una Poisson : $P(n\phi)$, por tanto la verosimilitud asociada será :

$$l_1(\phi) = Prob[M = m] = \frac{exp(-n\phi)(n\phi)^m}{m!} \tag{1.6}$$

[5] Suponemos que los z_i se observan sin error, es decir, que el proceso de control es perfecto.

[6] Esto debe reflejarse en una distribución a priori concentrada a la izquierda en el intervalo (0,1).

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

y tenemos $z_1, z_2, \ldots, z_m \sim_{\text{ind.}} g(z;\mu)$

La media no condicionada de fallo por unidad monetaria, será $\psi = \phi\mu$. A partir de ahora, nuestro interés se centrará en estudiar ψ.

1.6.1 Modelo de Cox y Snell.

El modelo desarrollado por Cox y Snell (1.979) considera las siguientes hipótesis : $g(z;\mu)$ es exponencial de parámetro μ (en notación, exp(μ)) :

$$g(z;\mu) = \frac{1}{\mu} \cdot exp(-\frac{z}{\mu}); \quad z > 0.$$

Luego, $E[Z] = \mu$ y $Var[Z] = \mu^2$.

Observemos que hemos considerado que $0 \leq z \leq 1$ y sin embargo aquí hacemos $z > 0$. Godfrey y Neter, consideran el modelo con $z \sim$ exponencial truncada en $(0,1)$.

El estadístico minimal suficiente asociado será $(m, \overline{z})$ con $\overline{z} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} z_i$.
Consideremos que ϕ y μ son independientes. Sobre estos dos parámetros, el auditor posee información a priori. En el modelo de Cox y Snell esta información a priori viene dada por :
(1) ϕ se distribuye según una distribución $Gamma(\frac{a}{\phi_0}, a)$, por tanto la función de densidad viene dada por :

$$g_1(\phi) = \frac{(\frac{a}{\phi_0})^a}{\Gamma(a)} \cdot \phi^{a-1} exp(-\frac{a}{\phi_0}\phi) \quad , \phi \geq 0. \tag{1.7}$$

con a y ϕ_0 conocidos . Luego,

$$E[\phi] = \frac{a}{\frac{a}{\phi_0}} = \phi_0$$

$$E[\phi^2] = \frac{a(a+1)}{\frac{a^2}{\phi_0^2}} = \phi_0^2 \cdot \frac{a(a+1)}{a^2}.$$

$$Var[\phi] = \frac{\phi_0^2}{a} \quad ^7$$

[7] ϕ_0 es la media y a es un parámetro que nos permite controlar la varianza.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Debemos tener en cuenta que la distribución a priori tomada aquí no es del todo *realista*, en el sentido de que puede tomar valores mayores que 1.En la práctica a y ϕ_0 deben seleccionarse de tal forma que la densidad de ϕ esté muy concentrada en valores pequeños.

(2) μ se distribuye según una distribución $Gamma - inversa(\mu_0(b-1), b)$ con μ_0 y b conocidos.

$$g_2(\mu) = \frac{(\mu_0(b-1))^b}{\Gamma(b)} \cdot \mu^{-(b+1)} exp(-\frac{\mu_0(b-1)}{\mu}) \quad , \mu \geq 0. \tag{1.8}$$

De donde,

$$E[\mu] = \mu_0$$

$$E[\mu^2] = \mu_0^2 \cdot \frac{b-1}{b-2}$$

$$Var[\mu] = \frac{\mu_0^2}{b-2}$$

Los comentarios anteriores también se aplican a este caso.

En definitiva la modelización de *Cox y Snell* exige el conocimiento de los parámetros a, ϕ_0, b y μ_0. Además obsérvese que las distribuciones a priori consideradas pertenecen a familias conjugadas de las verosimilitudes, es evidente la importante simplificación que esto supone.

De la hipótesis de independencia hecha antes, obtenemos que la función de densidad conjunta de (ϕ,μ) será :

$$\begin{aligned} g(\phi, \mu) &= g_1(\phi) g_2(\mu) \propto \\ &\propto \phi^{a-1} exp(-\frac{a}{\phi_0}\phi) \cdot \mu^{-(b+1)} exp(-\frac{\mu_0(b-1)}{\mu}) \\ &\propto \frac{\phi^{a-1}}{\mu^{b+1}} \cdot exp(-\frac{a}{\phi_0}\phi) \cdot exp(-\frac{\mu_0(b-1)}{\mu}) \end{aligned} \tag{1.9}$$

siendo la constante de proporcionalidad $(\frac{a}{\phi_0})^a \cdot \frac{(\mu_0(b-1))^b}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ y donde el rango de variación de ϕ y μ : $\phi \geq 0$, $\mu > 0$.

Las distribuciones finales de los parámetros de interés son ahora relativamente fáciles de calcular ya que trabajamos con distribuciones conjugadas :

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

La distribución final de ϕ será :

$$g_1(\phi|\, m) \propto l_1(m) \cdot g_1(\phi) \propto \phi^{m+a-1} exp(-\frac{a+n\phi_0}{\phi_0}\phi) \quad ,\phi \geq 0.$$

de donde deducimos que la distribución final de ϕ dado m es $Gamma(\frac{a}{\phi_0} + n, m+a)$. En otras palabras, debido a la consideración de familias conjugadas, el paso de la distribución inicial a la final, o lo que es igual, la modificación de las creencias a priori del auditor debida a la observación muestral significa la siguiente transformación de parámetros : $(\frac{a}{\phi_0}, a) \rightsquigarrow (\frac{a}{\phi_0} + n, a+m)$

La distribución final de μ será :

$$g_2(\mu|\, \overline{z}) \propto l_2(\overline{z}) \cdot g_2(\mu) \propto \mu^{-(b+m-1)} exp(-\frac{(m\overline{z}+(b-1)\mu_0)}{\mu}) \quad ,\mu > 0.$$

Se puede obtener (ver Apéndice 1), que la distribución final de ψ es :

$$\psi = \frac{m+a}{m+b} \cdot \frac{m\overline{z}+(b-1)\mu_0}{n+a/\phi_0} \cdot \mathcal{F}(2(m+a), 2(m+b)) \tag{1.10}$$

Sien $\mathcal{F}$ una distribución de Snedecor con los grados de libertad que se indican. De donde, observados m y $\overline{z}$, podemos dar una cota superior bayesiana de ψ al $100 \cdot (1-\alpha)\%$.

$Prob[\psi \leq f] = 1-\alpha \Longleftrightarrow Prob[\psi \cdot \frac{m+b}{m+a} \cdot \frac{n+a/\phi_0}{m\overline{z}+(b-1)\mu_0} \leq f \cdot \frac{m+b}{m+a} \cdot \frac{n+a/\phi_0}{m\overline{z}+(b-1)\mu_0}] = 1-\alpha$
$\Longleftrightarrow Prob[\mathcal{F}(2(m+a), 2(m+b)) \leq f \cdot \frac{m+b}{m+a} \cdot \frac{n+a/\phi_0}{m\overline{z}+(b-1)\mu_0}] = 1-\alpha$

y por ello, $f \cdot \frac{m+b}{m+a} \cdot \frac{n+a/\phi_0}{m\overline{z}+(b-1)\mu_0}$ es el cuantil $(1-\alpha)$ de una distribución $\mathcal{F}(2(m+a), 2(m+b))$, luego ,

$$f \cdot \frac{m+b}{m+a} \cdot \frac{n+a/\phi_0}{m\overline{z}+(b-1)\mu_0} = F_{1-\alpha}(2(m+a), 2(m+b))$$

y por tanto :

$$f = \frac{m+a}{m+b} \cdot \frac{m\overline{z}+(b-1)\mu_0}{n+a/\phi_0} \cdot F_{1-\alpha}(2(m+a), 2(m+b)) \tag{1.11}$$

es la cota superior bayesiana al $100 \cdot (1-\alpha)\%$.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

1.6.2 Modelo de Godfrey y Neter.

El modelo de Cox y Snell presenta serias dificultades desde el momento en que considera posible valores mayores que 1 para ϕ. El modelo denominado GU, desarrollado por Godfrey y Neter (1.984), considera una serie de modificaciones al modelo anterior. Considera una distribución a priori para ϕ Gamma truncada en $(0,1)$ y para μ uniforme sobre $(0,1)$.

Considera las mismas distribuciones en el muestreo que anteriormente, salvo que la distribución del fallo, z, se considera *exponencial truncada* en $(0,1)$, i.e. :

$$g(z;\mu) = \frac{exp(-z/\mu)}{[\mu(1-exp(-1/\mu))]}, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

De donde,

$$l_2(\overline{z}) = \frac{exp(-m\overline{z}/\mu)}{[\mu(1-exp(-1/\mu))]^m}, \quad 0 < \overline{z} < 1.$$

Así pues, la información a priori del auditor salva el problema de interpretación que tenía el anterior al considerar distribuciones a priori sobre el intervalo $(0,1)$:
(1) ϕ se distribuye según una distribución $Gamma - truncada(\frac{a}{\phi_0}, a)$:

$$g_1(\phi) = \left\{ \int_0^1 \phi^{a-1} \cdot exp(-\frac{a}{\phi_0}\phi) d\phi \right\}^{-1} \cdot \phi^{a-1} \cdot exp(-\frac{a}{\phi_0}\phi) \ ,0 \leq \phi \leq 1. \tag{1.12}$$

con a y ϕ_0 conocidos. (2) μ se distribuye según una $Uniforme(0,1)$

$$g_2(\mu) = 1 \ ,0 \leq \mu \leq 1. \tag{1.13}$$

Esta suposicíon implica que cualquier valor de μ es igualmente verosímil.

La distribución a priori para $\psi = \phi \cdot \mu$ será :

$$g(\psi) = \int_0^1 g(\phi, \frac{\psi}{\phi}) \cdot \frac{1}{\phi} d\phi$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

$$= \int_0^1 g_1(\phi) g_2(\frac{\psi}{\phi}) \cdot \frac{1}{\phi} d\phi$$

$$= \left\{ \int_0^1 \phi^{a-1} \cdot exp(-\frac{a}{\phi_0}\phi) d\phi \right\}^{-1} \int_\psi^1 \phi^{a-2} \cdot exp(-\frac{a}{\phi_0}\phi) d\phi \quad (1.14)$$

y donde la variable ψ variará entre 0 y 1 : $0 \leq \psi \leq 1$.

La distribución final de ϕ será :

$$g_1(\phi | \, m) \propto l_1(m) \cdot g_1(\phi) \propto \frac{exp(-n\phi)(n\phi)^m}{m!} \cdot \phi^{a-1} \cdot exp(-\frac{a}{\phi_0}\phi)$$
$$\propto \quad \phi^{m+a-1} \cdot exp(-(n + a/\phi_0)\phi) \;\; , 0 \leq \phi \leq 1.$$

de donde deducimos que la distribución final de ϕ dado m es $Gamma - truncada(n + a/\phi_0, a + m)$. Puede observarse que la condición de familia conjugada sigue manteniéndose.

La distribución final de μ será :

$$g_2(\mu | \, \overline{z}) \propto l_2(\overline{z}) \cdot g_2(\mu) = \frac{exp(-m\overline{z}/\mu)}{[\mu(1 - exp(-1/\mu))]^m}, \quad 0 < \mu < 1.$$

La condición de familia conjugada no se mantiene en este caso.

La distribución final de ψ dados m y $\overline{z}$ es :

$$g(\psi | \, m, \overline{z}) = \int_0^1 g(\phi, \frac{\psi}{\phi}) \cdot \frac{1}{\phi} d\phi$$

$$= \int_0^1 g_1(\phi | \, m) g_2(\frac{\psi}{\phi} | \, \overline{z}) \cdot \frac{1}{\phi} d\phi =$$

$$= \left\{ \int_0^1 \phi^{m+a-1} \cdot exp(-(n + a/\phi_0)\phi) d\phi \right\}^{-1} \left\{ \int_0^1 \frac{exp(-m\overline{z}/\mu)}{[\mu(1 - exp(-1/\mu))]^m} d\mu \right\}^{-1} \cdot$$

$$\cdot \int_\psi^1 \phi^{a+2(m-1)} \cdot \frac{exp(-(a/\phi_0 + n + m\overline{z}/\psi)\phi)}{[\psi(1 - exp(-\phi/\psi))]^m} d\phi \quad (1.15)$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

con $0 \leq \psi \leq 1$.

Observados m y $\overline{z}$, podemos dar una cota superior bayesiana de ψ al $100 \cdot (1-\alpha)\%$. Es obvio, que esta cota se obtendrá de forma numérica.

El modelo BU.

El modelo denominado BU, desarrollado por Godfrey y Neter, considera una serie de modificaciones al modelo anterior haciendo de este nuevo, un modelo más realista. Respecto al muestreo se hacen los siguientes supuestos :

El número total de errores en una muestra de tamaño n se distribuye según una $Binomial(n, \phi)$, i.e.:

$$l_1(\phi \mid m) = P[M = m] = \binom{n}{m} \phi^m (1-\phi)^{n-m} \quad , m = 0, 1, \ldots, n$$

En cuanto a la distribución $g(z;\mu)$, se considera exponencial truncada, por tanto :

$$l_2(\mu \mid \overline{z}) = \frac{exp(-m\overline{z}/\mu)}{[\mu(1-exp(-1/\mu))]^m}, \quad 0 < \overline{z} < 1.$$

Además la información a priori del auditor salva el problema de interpretación que tenía el anterior al considerar distribuciones a priori sobre el intervalo $(0,1)$:

(1) ϕ se distribuye según una distribución $Beta(\phi_0 c, (1-\phi_0)c)$:

$$g_1(\phi) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(\phi_0 c)\Gamma((1-\phi_0)c} \cdot \phi^{\phi_0 c - 1} \cdot (1-\phi)^{(1-\phi_0)c-1} \quad , 0 \leq \phi \leq 1. \quad (1.16)$$

con c y ϕ_0 conocidos. Luego,

$$E[\phi] = \frac{\phi_0 c}{c} = \phi_0$$

$$E[\phi^2] = \frac{(\phi_0 c)(\phi_0 c + 1)}{c(c+1)} = \frac{\phi_0^2 c + \phi_0}{c+1}.$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

$$Var[\phi] = \frac{\phi_0 c(1-\phi_0)c}{c^2(c+1)} = \frac{\phi_0(1-\phi_0)}{c+1} \quad ^8$$

Aquí se vuelve a dar la condición de familia conjugada.

(2) μ se distribuye según una distribución $Uniforme(0,1)$

$$g_2(\mu) = 1 \ \ ,0 \leq \mu \leq 1. \tag{1.17}$$

De nuevo se presenta el caso de familia conjugada.

La distribución a priori para $\psi = \phi \cdot \mu$ será :

$$\begin{aligned} g(\psi) &= \int_0^1 f(\phi, \frac{\psi}{\phi}) \cdot \frac{1}{\phi} d\phi \\ &= \int_0^1 g_1(\phi) g_2(\frac{\psi}{\phi}) \cdot \frac{1}{\phi} d\phi \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(\phi_0 c)\Gamma((1-\phi_0)c)} \cdot \int_\psi^1 \phi^{\phi_0 c - 2} \cdot (1-\phi)^{(1-\phi_0)c-1} d\phi \end{aligned} \tag{1.18}$$

y donde la variable ψ variará entre 0 y 1 : $0 \leq \psi \leq 1$.

Las distribuciones finales de los parámetros de interés pueden obtenerse rápidamente al tener de nuevo distribuciones conjugadas :

La distribución final de ϕ será :

$$g_1(\phi| m) \propto l_1(\phi \mid m) \cdot g_1(\phi) \propto \phi^{\phi_0 c + m - 1} \cdot (1-\phi)^{(1-\phi_0)c+n-m-1} \ \ ,0 \leq \phi \leq 1.$$

de donde deducimos que la distribución final de ϕ dado m es $Beta(\phi_0 c + m, (1-\phi_0)c + n - m)$.

La distribución final de μ será :

$$g_2(\mu| \overline{z}) \propto l_2(\mu \mid \overline{z}) \cdot g_2(\mu) = \frac{exp(-m\overline{z}/\mu)}{[\mu(1-exp(-1/\mu))]^m}, \quad 0 < \mu < 1.$$

[8] ϕ_0 es la media y c es un parámetro que nos permite controlar la varianza.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

La distribución final de ψ dados m y $\overline{z}$ es :

$$
\begin{aligned}
g(\psi|\, m,\overline{z}) &= \int_0^1 g(\phi,\frac{\psi}{\phi})\cdot\frac{1}{\phi}d\phi \\
&= \int_0^1 g_1(\phi)g_2(\frac{\psi}{\phi})\cdot\frac{1}{\phi}d\phi = \\
&= \frac{\Gamma(c+n)}{\Gamma(\phi_0 c+m)\Gamma((1-\phi_0)c+n-m)}\cdot\left\{\int_0^1 \frac{exp(-m\overline{z}/\mu)}{[\mu(1-exp(-1/\mu))]^m}d\mu\right\}^{-1}\cdot \\
&\quad\cdot\int_\psi^1 \phi^{\phi_0 c+2(m-1)}\cdot(1-\phi)^{(1-\phi_0)c+n-m-1}\frac{exp(-m\overline{z}\phi/\psi)}{[\psi(1-exp(-\phi/\psi))]^m}d\phi \qquad (1.19)
\end{aligned}
$$

con $0 \leq \psi \leq 1$.

Observados m y $\overline{z}$, podemos dar una cota superior bayesiana de ψ al $100\cdot(1-\alpha)\%$. Es obvio, que esta cota se obtendrá de forma numérica.

1.6.3 Modelo de Felix y Grimlund.

El modelo denominado *Beta-Normal* (BN, en adelante) desarrollado por *Felix y Grimnlud (1.977)* y *Grimlund (1.982)* consiste en lo siguiente :

La densidad de z es Normal con media μ y varianza σ^2.

La verosimilitud para el número de errores es *Binomial.*

La distribución a priori para μ dado σ^2 es $\mathcal{N}(m_0,\frac{\sigma^2}{r_0})$.

Para $\frac{1}{\sigma^2}$ se considera una distribución $Gamma(\frac{v_0}{2},\frac{v_0 v_0}{2})$.

La distribución a priori para ϕ es $Beta(n_0 p_0, n_0(1-p_0))$.

De todo lo anterior se deduce que :

La distribución a posteriori para μ dado $\frac{1}{\sigma^2}$ es $\mathcal{N}(\frac{m_0 r_0+m\overline{z}}{r_0+m},\frac{\sigma^2}{r_0+m})$.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

La distribución a posteriori para $\frac{1}{\sigma^2}$ es $Gamma(\frac{v_1}{2}, \frac{v_1 v_1}{2})$, **siendo** $v_1 = \delta(r_0) + v_0 + m - 1$,

$$\delta(r_0) = \begin{cases} 1 & , \quad si\ r_0 > 0 \\ 0 & , \quad si\ r_0 = 0 \end{cases}$$

y donde, $v_1 v_1 = \frac{r_0 m}{r_1}(m_0 - \overline{z})^2 + m \cdot r + v_0 v_0$

La distribución a posteriori para ϕ es $Beta(n_0 p_0 + m, n_0 + n)$

Por tanto, la distribución a posteriori para μ, $\frac{1}{\sigma^2}$ **y** ϕ es :

$$g_1(\mu, \frac{1}{\sigma^2}, \phi) = g_1(\mu \mid \frac{1}{\sigma^2}) \cdot g_1(\frac{1}{\sigma^2}) \cdot g_1(\phi)$$

Haciendo algunas aproximacione *Felix* y *Grimlund* obtienen la siguiente distribución a posteriori para ψ :

$$g_1(\psi) = \int_0^1 f_1(\psi \mid \phi) \cdot g_1(\phi) \cdot d\phi$$

donde $f_1(\psi \mid \phi)$ es una normal y $g_1(\phi)$ es la densidad beta anterior.

Felix (1.979) en una comunicación personal a *Menzefricke* y *Smieliauskas* sugiere otra aproximación basada en una distribución beta extendida.

Menzefricke y *Smieliauskas (1.984)* sugieren otra aproximación utilizando una distribución de Student.

1.7 Necesidad del Estudio de la Robustez en el escenario de la A.C.

En el segundo epígrafe de la Sección 1.3 hemos visto como el auditor puede encontrar dificultades para poder expresar un determinada densidad a priori (continua o discreta) sobre los parámetros de interés en auditoría. Esta impresión se ve luego corroborada en todos los modelos desarrollados en la Sección 1.6 en los que una vez formulados y calculadas las medidas de interés (cotas superiores para errores de sobrevaloración, etc ...) se

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

presentan diferentes ilustraciones numéricas en las que se hacen variar sensiblemente los parámetros a priori que el auditor debe asignar.

Mucho más concreto, a ningún auditor que utilice una metodología bayesiana escapa que su asignación de densidad a priori para la tasa de error, por ejemplo, no puede ser dada de manera exacta y que a lo sumo (y después de un proceso bastante laborioso) podrá obtener una buena representación de sus creencias a priori.

Inmediatamente, el auditor puede (y debe) plantearse las siguientes cuestiones : ¿ qué ocurrirá con las cantidades calculadas para la (verdadera) densidad a priori [9] ?, ¿ tomaré una decisión correcta si utilizo mis creencias a priori ?, ¿ habrá una diferencia significativa si se toma otra densidad *próxima* ?

Una vía natural para este estudio es la siguiente. Parece claro que el auditor no conoce una única densidad a priori sino que tiene unas creencias a priori que bien pueden definir una clase de todas las densidades a priori compatibles con esas creencias.

Sobre esa clase el auditor debe calcular las cantidades de interés para cada uno de los elementos y luego comprobar si hay mucha diferencia entre esas cantidades (dicha diferencia puede ser medida por el extremo inferior y el superior de las cantidades sobre la clase : medida que suele denominarse *rango de variación*). Cuando la diferencia es grande el auditor deberá tomar muchas precauciones en sus decisiones finales puesto que densidades muy *parecidas* no producen cantidades próximas. Suele decirse que en el modelo se ha detectado una falta de *robustez*. Cuando la diferencia sea pequeña el auditor tiene cierta seguridad de que sus decisiones no serán sustancialmente peores con un elemento u otro de la clase. Se dice entonces, que el modelo es *robusto*.

La consideración de diferentes clases de densidades a priori sobre cada uno de los parámetros es la principal y más importante de las aportaciones del presente trabajo, ya que presenta una metodología sistemática del estudio de la robustez en los modelos de A.C. En los capítulos posteriores (del 2 al 6) se desarrollan las técnicas bayesianas para el análisis de la sensibilidad de los principales modelos en A.C.

[9] Densidad que debe de ser muy parecida a la asignada. La idea de proximidad entre densidades será introducida en el Capítulo 2 en un sentido preciso.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Tabla 1.14: Cuantiles a priori en *Kraft (1.968)*

i	Intervalos T_i	Prob. a priori p_i
1	0 – 0.001	0.60
2	0.001 – 0.01	0.30
3	0.01 – 0.02	0.05
4	0.02 – 0.03	0.03
5	0.03 – 0.04	0.01
6	0.04 – 1.00	0.01
		1.00

Para ilustrar las ideas anteriores, volvamos al ejemplo de *Kraft (1.968)* para estudiar cómo podemos incorporar esas consideraciones. En la Tabla 1.1 (pág. 8) veíamos como el auditor consideraba sólo cinco valores para la tasa de error del sistema auditado (ϕ), ya que tenía serias dificultades para determinar la distribución a priori sobre valores exactos de ϕ. Es evidente que el parámetro ϕ podrá variar en todo el intervalo $[0,1]$, esto implica que deben considerarse densidades a priori definidas en dicho intervalo.

Podemos por tanto considerar las probabilidades acumuladas y suponer que en realidad el auditor asigna las probabilidades de cada subintervalo definido por las tasas puntuales de error dadas. La Tabla 1.14 recoge esta información.

Esto hace que el espacio paramétrico haya sido dividido en una partición :

$$[0,1] = T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_k \quad (k = 6)$$

con conocimiento a priori : $p_i = Prob\{\phi \in T_i\} \quad (i = 1, \ldots, k)$

Si en el ejemplo original se desarrollaba un análisis bayesiano para la **única** distribución de probabilidad a priori que definen las $p_i's$. Ahora (y sin imponer ninguna restricción de forma como simetría, unimodalidad, ...) tenemos toda una clase de posibles densidades a priori : todas las densidades que posean esas probabilidades en esos intervalos (es decir, todas las densidades con esos cuantiles). Digamos :

$$\Gamma = \{ \ g \ / p_i = \int_{T_i} g(\phi) \cdot d\phi \ : \ i = 1, \ldots, k \ \}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

o equivalentemente,

$$\Gamma = \{ \, g(\phi) = \sum_{i=1}^{k} p_i \cdot q_i(\phi) \ : \ q_i(\phi) \ densidad \ sobre \ T_i \ (i = 1, \ldots, k) \, \}$$

Obtenida una muestra de tamaño n en la que aparecen m errores, el auditor está interesado en calcular las probabilidades a posteriori de cada intervalo T_i $(i = 1, \ldots, k)$:

$$p_i(m) = Prob\{\phi \in T_i \mid m\} = \int_{T_i} g(\phi \mid m) \cdot d\phi$$

donde $g(\phi \mid m) \propto l(m \mid \phi) \cdot g(\phi)$ es la densidad a posteriori, siendo $l(m \mid \phi)$ la verosimilitud de m dado ϕ (en este caso la verosimilitud es *Binomial* de parámetros : n y ϕ); ya que ello le debe dar una idea del comportamiento de sus asignaciones de cuantiles a priori frente a la observación muestral.

El auditor puede medir la variación de estas probabilidades con :

$$u_i(m) = \sup_{g \in \Gamma} p_i(m) \ \ (i = 1, \ldots, k)$$

$$l_i(m) = \inf_{g \in \Gamma} p_i(m) \ \ (i = 1, \ldots, k)$$

En cada intervalo T_i $(i = 1, \ldots, k)$ y para una observación muestral determinada, el auditor observa :

$$(l_i(m) \ , \ u_i(m))$$

y decide sobre la robustez de ese cuantil.

La metodología y desarrollo de los resultados técnicos que permiten resolver estas cuestiones están desarrolladas inicialmente en el Capítulo 2, Sección 2.3 , y posteriormente adaptadas al contexto de la A.C. en la totalidad del Capítulo 5. Incluimos aquí los resultados que se obtienen en el ejemplo de *Kraft (1.968)* para diferentes situaciones muestrales. La Tabla 1.15 contiene esta información.

En su asignación inicial el auditor consideraba una densidad muy concentrada a la izquierda, en concreto una masa de 0.95 para una tasa menor del 2%, (Prob $\{\phi \leq 0.02\} = 0.95$) y el resto 0.05 lo repartía en $(0.02, 1]$.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Si observamos el caso $m = 0$, podemos deducir lo siguiente :

La densidad a priori se comporta muy satisfactoriamente cuando $m = 0$, ya que en el mayor de los casos la probabilidad que se concentra en $(0.02, 1]$ (observados 0 errores en la muestra) es $0.033 + 0.004 + 0.001 = 0.038$, o sea, el 0.05 baja hasta 0.038. Además en el resto parece que las densidades tienen un comportamiento muy parecido al inicial.

Cuando el número de errores es anormalmente alto con respecto a las creencias a priori (por ejemplo, $m = 5$), la asignación empieza a mostrar una fuerte sensibilidad, la falta de robustez se hace patente. Observemos como T_1 pierde toda su probabilidad (y se le asignaba 0.60) y T_4 y T_5 que tenían 0.1 pasan a tener mínimos de : $l_4(5) = 0.1495$ y $l_5(5) = 0.0463$. Además las longitudes de todos los intervalos son altas, lo cual muestra que la asignación inicial en *Kraft (1.968)* es muy sensible a la observación muestral obtenida (la robustèz es una propiedad que suele depender del resultado muestral). Comentarios en la misma línea pueden hacerse cuando $m = 10$.

Todas estas cuestiones son tratadas con muchísima más profundidad en el resto de la monografía aunque, es posible, que la idea de fondo haya quedado bastante clara.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Tabla 1.15: Rangos en el ejemplo de *Kraft (1.968)*.

Resultado muestral (m)	i	Inferior $l_i(m)$	Superior $u_i(m)$	Longitud
$m = 0$	1	0	0.836	0.836
	2	0.15	0.97	0.82
	3	0.007	0.14	0.133
	4	0.001	0.033	0.032
	5	0.0002	0.004	0.0038
	6	0	0.001	0.001
$m = 1$	1	0	0.5961	0.5961
	2	0.2463	0.9200	0.6737
	3	0.0251	0.3641	0.3390
	4	0.0232	0.2004	0.1772
	5	0.0036	0.0391	0.0355
	6	0	0.0187	0.0187
$m = 5$	1	0	0.000	–
	2	0.0000	0.3580	0.3580
	3	0.0200	0.5555	0.5355
	4	0.1495	0.8591	0.7096
	5	0.0463	0.5989	0.5526
	6	0	0.5057	0.5057
$m = 10$	1	0	0.000	–
	2	0.0000	0.0179	0.0179
	3	0.0000	0.5555	0.5555
	4	0.0006	0.9855	0.9849
	5	0.0042	0.9993	0.9951
	6	0	0.9755	0.9755

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Capítulo 2

Algunos Aspectos del Análisis Bayesiano Robusto.

2.1 Introducción.

A la vista del Capítulo 1 parece claro que la adopción de un análisis bayesiano en Auditoría Contable es una de las aproximaciones más fructíferas que en este área se están considerando, aunque no la única, claro está. Hemos visto que, como en todo análisis bayesiano, esto lleva a que el auditor deba presuponer diferentes informaciones a priori (dependiendo del modelo adoptado : modelo Gamma - Gamma inversa, modelo Beta - Uniforme, modelo Normal - Beta, etc ...) para los parámetros de interés; en nuestro caso sobre dos parámetros que definen un tercero como producto de los dos anteriores.

Ahora bien, adoptando la hipótesis de *Berger (1.982)* (pág. 3) :

Assumption 2 :"Prior distributions can never quantified or elicited exactly (i.e. without error), especially in a finite amount of time"

es claro, que en la práctica el auditor, como cualquier otro investigador, le resultará imposible especificar correctamente una distribución a priori (usualmente utilizaremos densidades, por ello a partir de ahora haremos referencia a estas densidades y si alguna vez se habla de distribuciones

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

estaremos refiriéndonos realmente a densidades) sobre cualquiera de los parámetros que contenga el problema tratado.

Quizás sea esta la explicación principal de por qué en la gran mayoría de los trabajos citados en el Capítulo 1 (*Cox* y *Snell (1.979)*, *Godfrey* y *Neter (1.984)*, *Felix* y *Grimlund (1.977)*, ...) una vez obtenidos sus resultados se realizan diferentes ilustraciones numéricas en las que se hacen variar sensiblemente tanto las cantidades asignadas a priori como el resultado muestral (con esto se observa también la dependencia del dato observado que posee el modelo en cuestión). Se percibe por tanto una desconfianza del auditor sobre la asignación, que él propone, de sus creencias a priori. Esto está claramente en concordancia con la citada hipótesis de *Berger (1.982)*.

Las consecuencias de la no disponibilidad de ese conocimiento preciso han sido tratadas por primera vez por *Hodges* y *Lehman (1.952)* , *Blum* y *Rosembaltt (1.967)* y *Kudo (1.967)* , ...Estos trabajos iniciaron una vía que con posterioridad se ha desarrollado y ampliado muy considerablemente. Una excelente monografía sobre este tema es *Berger (1.987)* .

En este capítulo se exponen las principales herramientas para el posterior desarrollo del objetivo principal de este trabajo : el estudio de la robustez (o sensibilidad) de un análisis bayesiano en Auditoría Contable debido a una mala especificación de una densidad a priori.

Usualmente una de las maneras de estudiar la robustez consiste en plantear las diferentes creencias a priori (expresadas en diferentes densidades a priori) y estudiar sus diferencias respecto a ciertas medidas de interés. Así lo muestra el siguiente ejemplo :

Ejemplo 2.1.1 *(Berger (1.985), págs. 195-196)*
Supongamos que se observa que $X \sim \mathcal{N}(\theta, 1)$, *y que se posee una creencia a priori de que* θ *tiene mediana en 0 y cuartiles en* ± 1, *por ello se duda entre que* $\theta \sim \mathcal{C}(0,1)$ (g_C) *ó* $\theta \sim \mathcal{N}(0, 2.19)$ (g_N). *Deseamos saber qué densidad debe utilizarse.*

Para ello, podemos realizar un estudio de ciertas cantidades, de interés, a posteriori. Pongamos en este caso la media a posteriori para cada densidad a priori observado un dato x. La Tabla 2.1 proporciona los valores de la media a posteriori de cada densidad ($\delta^C(x)$ *ó* $\delta^N(x)$).

Así pues, valores pequeños de x no proporcionan medias sustancial-

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Tabla 2.1: Medias a posteriori.

x	0	1	2	4.5	10
$\delta^C(x)$	0	0.52	1.27	4.09	9.80
$\delta^N(x)$	0	0.69	1.37	3.09	6.87

mente diferentes (en cierto sentido, deberían considerarse igual de buenos, análisis con una u otra densidad), lo que indica un grado de robustez. Sin embargo, valores de x moderados o grandes, implican diferencias entre las medias a posteriori, lo que se interpreta como una falta de robustez. Es importante hacer notar la dependencia de la robustez al dato observado. A este tipo de robustez se le suele conocer como *robustez a posteriori.*

Del hecho de que la densidad a posteriori de un parámetro θ observado x, para una densidad a priori g es :

$$g(\theta \mid x) \propto l(x) \cdot g(\theta)$$

donde $l(x)$ es la verosimilitud asociada a x, queda clara la dependencia al dato x que tiene la densidad a posteriori, $g(\theta \mid x)$. Así pues, si la verosimilitud está concentrada en una cola de la densidad a priori producirá situaciones particularmente especiales, ya que las colas de las densidades a priori son las zonas en las que se tienen más problemas para su asignación (*Winkler (1.968)*) y por tanto diferentes elecciones pueden influir determinantemente en las conclusiones finales.

La vía presentada en el ejemplo anterior para el estudio de la robustez puede, sin duda, ser mejorada. Otra forma de estudiar la sensibilidad de un modelo, desde un punto de vista de la Teoría de la Decisión Bayesiana, puede ser el estudio del concepto de *estabilidad* introducido por *Kadane* y *Chuang (1.978).* En dicho trabajo, se presenta el problema de la sensibilidad como una propiedad de *"continuidad"* de la estructura del problema de decisión, considerando perturbaciones del modelo en términos de sucesiones. Esta manera de estudiar la sensibilidad de un modelo no será considerada en este trabajo.

Una manera atractiva de presentar un análisis de sensibilidad bayesiano y que ha sido objeto de fuerte desarrollo en la última década, es la presentada por *Berger (1.985)* . Esta será la vía que utilizaremos posteriormente para discutir la sensibilidad de los modelos utilizados en la Auditoría Con-

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

table.

Su aproximación consiste en asignar una clase Γ de densidades a priori *plausibles* y realizar un análisis bayesiano estándar sobre cada uno de los elementos de la clase. El análisis será *robusto* cuando la conclusión o decisión sea aproximadamente la misma para cada elemento de la clase.

Así pues, lo que se propone es incorporar la imprecisión del auditor sobre sus creencias a priori mediante la consideración de clases de densidades a priori que sean coherentes con sus creencias.

Principalmente, se han desarrollado dos maneras de asignar la clase Γ de densidades a priori.

1. Considerar una situación *realista* en la que sólo se está dispuesto a admitir conocidas las probabilidades a priori (p_i) sobre una partición del espacio paramétrico Θ ($\{C_i\}_{i=1}^n$: $C_i \cap C_j = \emptyset$ *si* $i \neq j$ *y* $\bigcup_{i=1}^n I_i = \Theta$, i.e. se admiten sólo creencias a priori sobre algunos cuantiles). Así pues, la clase Γ queda definida por :

   $$\Gamma = \{ \ g \ dens. \ a \ priori \ / \ p_i = \int_{C_i} g(\theta) \cdot d\theta \ , \ i = 1, 2, \ldots, n \ \}$$

   o sea, la clase de todas las densidades a priori con unos determinados cuantiles. Esta clase ha sido considerada en *Berger* y *O'Hagan (1.987)*, *O'Hagan* y *Berger (1.988)* y *Berline* y *Goel (1.990)*. Trabajos pioneros son *Huber (1.973)* , *Leamer (1.982)* y *Polasek (1.985)* .

   Estaremos interesados en ver qué ocurre con ciertas medidas de interés (probabilidades a posteriori de los cuantiles u otros conjuntos, ...) y estudiar su rango de variación.

   La clase anterior suele ser muy amplia si el número de cuantiles es pequeño, y por eso, a veces, suele imponérsele otras condiciones a priori como la unimodalidad.

2. A pesar de que resulta imposible cuantificar exactamente la información a priori en términos de una única densidad a priori, lo que sí puede aceptarse es que después de un proceso de asignación por el cual se determine una densidad a priori dada (digamos g_0) cualquier densidad cercana a g_0 es también plausible desde el punto de vista de

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

que será una representación razonable de las creencias. Este modelo de aproximación es conocido como de *clases de contaminaciones.* La clase propuesta será :

$$\Gamma = \{ \ g \equiv (1-\varepsilon) \cdot g_0 + \varepsilon \cdot q \ ; \ q \in D \ \}$$

donde g_0 es la densidad a priori, completamente especificada, sobre la que se tiene bastante seguridad, $\varepsilon \in [0,1]$ es un valor fijado con anterioridad y que refleja esa seguridad que posee el auditor (en este caso) sobre g_0 y $q \in D$ es una densidad que perturba a g_0 y que se denomina ***contaminación*** .

Una idea de los elementos de una clase como ésta nos la puede dar la Figura 2.1 . En ella se considera una clase del tipo anterior en la que g_0 es $\mathcal{N}(0,1)$, una inseguridad del 10% (i.e. $\varepsilon = 0.1$) y se supone D la clase de todas las densidades a priori que tienen la misma media que g_0. En particular, se representa g_0 (en trazo continuo) y $g \equiv (1-\varepsilon) \cdot g_0 + \varepsilon \cdot q$ (en discontinuo) siendo $q \sim \mathcal{N}(0, 0.5)$ y también $q \sim \mathcal{N}(0, 1.25)$

Las diferentes clases de contaminaciones D que se consideren dependerán del tipo de problema que se aborde y de la amplitud que se desee dar a la clase de contaminaciones.

Observemos que la imprecisión de la clase Γ (medida por ε) puede interpretarse como la no presencia de una propiedad matemática de unicidad. Admitiremos que esta es la única fuente de imprecisión, aunque - como en *Walley (1.991)* - esto no ocurre en casos en los que existe una escasa información a priori (del Capítulo 1 podemos ver que en el contexto de la Auditoría Contable esto no suele ocurrir ya que la disposición de información a priori es abundante. Caso aparte es la asignación de un forma funcional determinada a dichas creencias a priori).

Para el estudio de la robustez sobre esta clase, una vía natural consiste en estudiar la variación de ciertas cantidades, $\rho(x,g)$, a posteriori sobre el rango $g \in \Gamma$:

$$\underline{\rho}(x) = \inf_{g \in \Gamma} \rho(x,g) \ , \ \overline{\rho}(x) = \sup_{g \in \Gamma} \rho(x,g)$$

Las cantidades que suelen considerarse usualmente son : la media a posteriori, la varianza a posteriori y probabilidades a posteriori de un

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

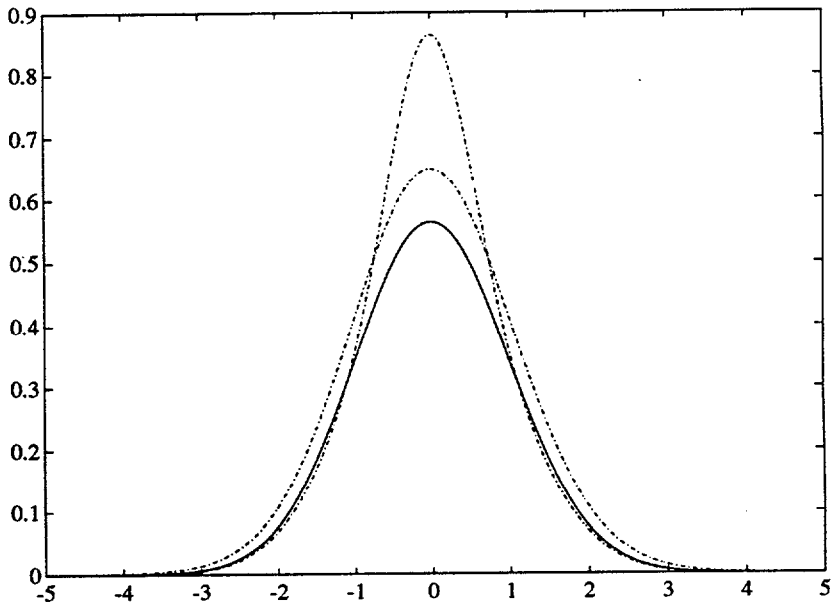

Figura 2.1

conjunto (conjuntos creíbles o tests de hipótesis).

Si el rango $(\underline{\rho}, \overline{\rho})$ es pequeño, entonces (siempre que Γ sea lo suficientemente grande) podemos asegurar robustez en la asignación de g_0. Si el rango es grande, no tenemos robustez respecto a Γ, pero los resultados deben comunicarnos las indicaciones por las que no se tenía robustez, sugiriendo futuros refinamientos. Posiblemente la clase Γ contenga densidades que no representen fielmente el problema tratado.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Sobre la elección de la clase de contaminaciones recae también un papel importante. Una de las primeras elecciones, introducida por *Huber (1.973)*, consiste en considerar :

$$D = \{ \textit{ todas las densidades a priori } \}$$

Esta clase que es especialmente buena desde el punto de vista del cálculo del rango; presenta serias dificultades desde el punto de vista interpretativo, ya que contiene densidades que pueden ser difícilmente razonables (puede contener una mixtura de una continua con una degenerada en un valor).

Las clases de contaminaciones para las situaciones que nos ocuparán a la hora de analizar los modelos de Auditoría Contable son mucho más realistas. Principalmente consideraremos los siguientes casos.

Existirán situaciones en las que se desee y se tenga la propiedad de unimodalidad de g_0, en tal caso podrá considerarse :

$$D = \{ \textit{ dens. a priori unimodales con la misma moda que } g_0 \}$$

en la línea de los trabajos de *Berger* y *Berliner (1.986)* , y principalmente en la de *Sivaganesan* y *Berger (1.989)* .

Para los casos en los que g_0 también sea simétrica y se desee mantener esta propiedad en todos los elementos de la clase puede seleccionarse

$$D = \{ \textit{ dens. a priori simétricas y unimodales con la misma moda que } g_0 \}$$

En otras situaciones puede admitirse contaminar con todas aquellas densidades que tengan unos determinados cuantiles. La clase D será pues :

$$D = \{ \textit{ dens. a priori con los mismos cuantiles que } g_0 \}$$

conectando así con los trabajos de *Cano, Hernández* y *Moreno (1.989)* y *Moreno* y *Cano (1.991)*.

Un último comentario. Dada la enorme dificultad de cálculo que existe en algunos casos para encontrar el rango de las medidas de interés sobre determinadas clases Γ, una posible salida técnica a este problema consiste en desarrollar unos procedimientos con familias conjugadas de densidades

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

a priori.

Este puede ser el caso de familias de densidades a priori *conjugadas*, es decir, densidades a priori pertenecientes a una clase tales que la densidades a posteriori obtenidas de la observación muestral caen dentro de la misma clase. Este tipo de densidades ha sido utilizada en casi todos los modelos estudiados en el Capítulo 1. La utilización de familias conjugadas para desarrollar un análisis bayesiano fue una de las consideraciones iniciales para superar el problema de la sensibilidad; sin embargo, se debe de ser especialmente cuidadoso con esta consideración siempre que pensemos que densidades próximas a nuestras creencias no pertenezcan a la familia que se proponga. El cálculo de familias conjugadas puede intuirse a partir de la distribución de muestreo que se tenga en cada caso.
Más concretamente. Consideremos, por ejemplo, el modelo Beta-Uniforme (BU) de la Sección 1.6.2 . La información muestral para el parámetro ϕ venía dada por una distribución binomial :

$$l(m \mid \phi) \equiv l(\phi) = \binom{n}{m} \cdot \phi^m \cdot (1-\phi)^{n-m}$$

la asignación de una densidad a priori para ϕ del tipo *Beta* :

$$g(\phi) \propto \phi^{\alpha-1} \cdot (1-\phi)^{\beta-1} \ , \ \phi \in (0,1)$$

hace que la densidad a posteriori sea de nuevo *Beta*, con sus parámetros modificados según la observación muestral obtenida.

El cálculo de familias conjugadas puede verse con bastante profundidad en el Capítulo 9 de *DeGroot (1.970)*.

Otra de las formas consideradas para resolver el problema anterior consiste en la selección de una determinada densidad dentro de una clase Γ usando un determinado criterio de elección. Los más usados son el de Máxima Entropía (muy relacionado con la Teoría Estadística de la Información) y el de Máxima Verosimilitud tipo II (en notación, ML-II - Maximun Likelihood type II -).

La estructura de este capítulo es la siguiente : en la Sección 2.2 se estudian los rangos comentados anteriormente sobre cada una de las clases de contaminaciones que serán consideradas en las situaciones presentadas en los modelos más utilizados en la Auditoría Contable. Principalmente, clases caracterizadas por unimodalidad simplemente o conjuntamente con simetría; e incluso contaminaciones parcialmente conocidas (i.e. se admiten todas las densidades que tienen unos cuantiles determinados). En

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

la Sección 2.3 se plantea la situación presentada dentro del primer caso de clases Γ comentado anteriormente. La clase Γ no es una clase contaminada sino que está formada por todas las densidades a priori con los mismos cuantiles, fijos. Por último, en la Sección 2.4 se presentan los resultados principales para la selección de densidades a priori utilizando la filosofía del criterio ML-II (que posee un carácter muy intuitivo) dentro de clases de contaminaciones simétricas y unimodales por un lado y tan sólo unimodales, por otro.

2.2 Clases Contaminadas.

Planteada la necesidad de la utilización de una metodología de análisis de robustez bayesiana en cualquier proceso que incorpore información a priori y deducida una vía natural para el estudio de dicha sensibilidad que consiste en el cálculo de los rangos de variación de distintas medidas de interés, resta encontrar las expresiones analíticas o numéricas de estas medidas.

Supongamos pues que, dado un parámetro de interés $\theta \in \Theta$, se decide considerar una clase de densidades a priori del tipo :

$$\Gamma = \{ \, g(\theta) = (1-\varepsilon) \cdot g_0(\theta) + \varepsilon \cdot q(\theta) \ : \ q \in D \, \} \tag{2.1}$$

y hemos dicho ya que nuestro interés se centrará en estudiar el rango de variación de ciertas medidas, $\rho(x, g)$:

$$\rho(x, g) = \int_{\Theta} h(\theta) \cdot g(\theta \mid x) \cdot d\theta$$

sobre la clase Γ. Principalmente consideraremos la media y varianza a posteriori y muy especialmente, probabilidades a posteriori de un conjunto.

Esto puede hacerse mediante diferentes funciones h :

1. $h_1(\theta) = \theta$ (para la media a posteriori).
2. $h_1(\theta) = \theta^2$ (para la varianza a posteriori).
3. $h_C(\theta) = I_C(\theta)$, siendo I_C la función indicadora sobre el conjunto C (para las probabilidades a posteriori).

Para estas funciones, se estudia el comportamiento de :

$$(\inf_{g \in \Gamma} \rho(x, g) \ , \ \sup_{g \in \Gamma} \rho(x, g) \ ) \tag{2.2}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Es obvio, que estas cantidades dependerán de la clase de contaminaciones D que se considere.

En los subapartados que a continuación desarrollaremos se presentan los resultados que permiten este cálculo para cada una de las clase D que se utilizan en las distintas modificaciones que, en este trabajo, se proponen a los modelos usuales de la Auditoría Contable y que permiten un análisis de sensibilidad de ellos.

2.2.1 Unimodalidad.

Supongamos que en el proceso de asignación de una densidad a priori sobre la que se tenga una fuerte creencia se estima que es unimodal, con moda : θ_0, y que esta es una propiedad que debe tener cualquier otra densidad a priori plausible.

Se considera ahora la clase Γ dada en (2.1) en la que la clase de contaminaciones D está formada por densidades a priori que son unimodales, con la misma moda que g_0.

Para el cálculo del rango de variación dado en (2.2) es fundamental el siguiente teorema. Principalmente, la demostración de este resultado (que puede verse en *Sivaganesan* y *Berger (1.989)*) consiste en ver que estos extremos se alcanzan sobre una subclase de Γ, esta subclase es :

$$\Gamma_1 = \{ (1-\varepsilon)\cdot g_0(\theta)+\varepsilon\cdot q(\theta) \ : \ q \sim Unif(\theta_0, \theta_0+t) \text{ ó } Unif(\theta_0-t, \theta_0) \text{ para algún } t \}$$

con este hecho el problema queda simplificado notablemente. Se ha pasado de un problema de optimización sobre una clase de densidades a uno de extremos en una variable (t).

Teorema 2.2.1.1 *(Sivaganesan y Berger (1.989)) En las condiciones anteriores :*

$$\inf_{\Gamma} \rho(x,g) = \inf_{\Gamma_1} \rho(x,g) = \inf_{t} \frac{A_0 + H^h(t)}{A + H_0(t)}$$

$$\sup_{\Gamma} \rho(x,g) = \sup_{\Gamma_1} \rho(x,g) = \sup_{t} \frac{A_0 + H^h(t)}{A + H_0(t)}$$

donde las cantidades anteriores son :

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

$$A = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \cdot p(x \mid g_0)$$

$$p(x \mid g_0) = \int_\Theta l(x \mid \theta) \cdot g_0(\theta) \cdot d\theta \text{ , } \textit{es la predictiva de } x \textit{ dada } g_0$$

$$A_0 = A \cdot \rho(x, g_0) = A \cdot \int_\Theta h(\theta) \cdot g_0(\theta \mid x) \cdot d\theta$$

$$H^h(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} \cdot \int_{\theta_0}^{\theta_0+t} h(\theta) \cdot l(x \mid \theta) \cdot d\theta & , \quad t \neq 0 \\ l(x \mid \theta_0) \cdot h(\theta_0) & , \quad t = 0 \end{cases}$$

$$H_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} \cdot \int_{\theta_0}^{\theta_0+t} l(x \mid \theta) \cdot d\theta & , \quad t \neq 0 \\ l(x \mid \theta_0) & , \quad t = 0 \end{cases}$$

siendo $l(x \mid \theta)$ la verosimilitud del dato observado x para un valor θ del parámetro.

Para cada función h de las anteriores (media a posteriori, varianza a posteriori, probabilidades a posteriori de un conjunto) se obtienen, sustituyendo en $H^h(t)$, los diferentes rangos.

Es decir la función a optimizar es :

$$\xi(t) \equiv \xi(t;\varepsilon) = \frac{A_0 + H^h(t)}{A + H_0(t)}$$

El cálculo de los valores de t no es sencillo en la práctica y hay que recurrir a métodos numéricos para ello. Esto nos ocurrirá posteriormente en los Capítulos 3 y 4.

Obtenidos los valores de t, las densidades donde se alcanzan los extremos son contaminaciones con uniformes : $Unif(\theta_0, \theta_0 + t)$ ó $Unif(\theta_0 - t, \theta_0)$.

Así por ejemplo, y como veremos en el Capítulo 3, para el caso : $g_0 \sim Gamma(\frac{a}{\phi_0}, a)$ (con $\phi_0 = 0.1$, $a = 3$) :

$$g_0(\theta) = \frac{(a/\phi_0)^a}{\Gamma(a)} \cdot \theta^{a-1} \cdot exp(-\frac{a}{\phi_0} \cdot \theta) \text{ , } \theta \geq 0$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

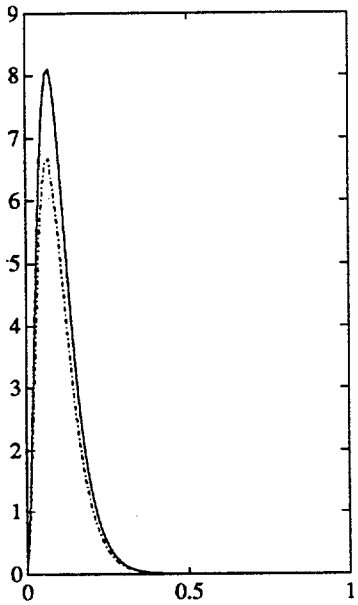

Figura 2.2 (inf.)

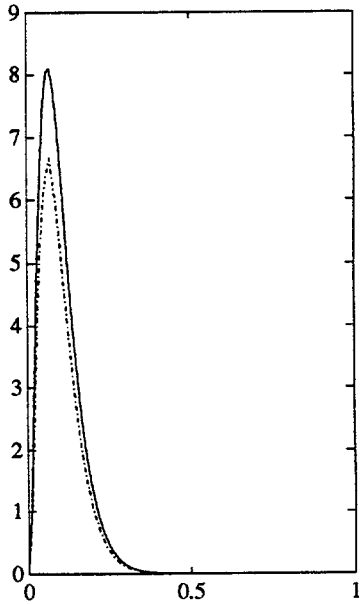

Figura 2.3 (sup.)

(la moda de esta densidad es $\theta_0 = \phi_0 \cdot \frac{a-1}{a}$); con una contaminación de 20% (i.e. $\varepsilon = 0.2$), con verosimilitud :

$$l(x \mid \theta) \sim Poisson(n \cdot \theta) \text{ siendo } n \text{ el tamaño muestral}$$

y considerando el caso de probabilidad a posteriori de un conjunto creíble al 95% ($h_C(\theta) = I_C(\theta)$) para una observación $x = 0$ se obtienen los valores de t para el inferior y superior, de 0.0375 y 0.001, respectivamente. Las Figuras 2.2 y 2.3 muestran estos casos.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

2.2.2 Contaminaciones Parcialmente Conocidas.

Otra de las clases que consideraremos en los capítulos siguientes es la que tratamos aquí. Supongamos especificada una densidad g_0 y que de las contaminaciones lo único que conocemos es que deben tener unos cuantiles fijos (esta clase fue inicialmente considerada en *Cano, Hernández* y *Moreno (1.989)* y posteriormente en *Moreno* y *Cano (1.991)* y puede considerarse una subclase de $D = \{$*todas las densidades* $\}$) es decir, la información a priori sobre las ε -contaminaciones puede considerarse muy débil si el número de cuantiles es pequeño.

En definitiva, la situación presentada ahora es la siguiente :

$$\Gamma = \{ \, g = (1-\varepsilon) \cdot g_0 + \varepsilon \cdot q \; ; \; q \in D \, \}$$

con $D = \{$ *dens. a priori con cuantiles fijos* $\}$

Si llamamos a estos cuantiles C_i $(i = 1, \ldots, k)$, tenemos :

$$q(C_i) = \int_{C_i} q(\theta) \cdot d\theta \; \geq 0 \; , \; i = 1, \ldots, k$$

$$\sum_{i=1}^{k} q(C_i) = 1$$

Sobre clases de este tipo la idea principal para la resolución de los rangos de variación consiste en que las cantidades a optimizar son de la forma :

$$\rho(g) = \frac{\int f(\theta) \cdot g(\theta) \cdot d\theta}{\int h(\theta) \cdot g(\theta) \cdot d\theta}$$

(con f y h q-integrables y $h(\theta) > 0$) y con la partición que para el espacio paramétrico suponen los cuantiles, se pasa a calcular los superiores (e inferiores) sobre cada C_i ($i = 1, \ldots, k$)

Además como cada elemento de la clase es de la forma : $g \equiv (1-\varepsilon) \cdot g_0 + \varepsilon \cdot q$, tenemos que tanto el superior como el inferior se alcanzan sobre la clase D, es decir, se calcularán el superior e inferior de $\rho(q)$ con $q \in D$.

Teorema 2.2.2.1 *(Moreno y Cano (1.991)) En las condiciones anteriores, tenemos :*

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

$$\sup_{q\in \mathrm{D}} \rho(q) = \sup_{(\theta_1,\ldots,\theta_k)\in\prod_{i=1}^k C_i} \sum_{i=1}^k q(C_i)\cdot f(\theta_i) \;/\; \sum_{i=1}^k q(C_i)\cdot h(\theta_i)$$

$$\inf_{q\in \mathrm{D}} \rho(q) = \inf_{(\theta_1,\ldots,\theta_k)\in\prod_{i=1}^k C_i} \sum_{i=1}^k q(C_i)\cdot f(\theta_i) \;/\; \sum_{i=1}^k q(C_i)\cdot h(\theta_i)$$

En particular haciendo $h(\theta) = l(x \mid \theta)$ y $f(\theta) = \theta \cdot l(x \mid \theta)$ podemos obtener la variación de la media a posteriori.

Para la probabilidad a posteriori de un conjunto A la solución es mucho más explícita.

Teorema 2.2.2.2

$$\inf_{g\in\Gamma} Prob^g(A \mid x) = \{\ (1-\varepsilon)p(x \mid g_0)\cdot\beta_0 + \varepsilon\cdot\sum_{i\in I}\inf_{\theta\in C_i} l(x \mid \theta)\cdot q(C_i)\ \}\cdot$$

$$\cdot\{\ (1-\varepsilon)\cdot p(x \mid g_0) + \varepsilon\cdot\sum_{k1}\sup_{\theta\in A^c\cap C_k} l(x \mid \theta)\cdot q(C_k) + \varepsilon\cdot\sum_{i\in I}\inf_{\theta\in C_i} l(x \mid \theta)\cdot q(C_i)\ \}^{-1}$$

$$\sup_{g\in\Gamma} Prob^g(A \mid x) = \{\ (1-\varepsilon)p(x \mid g_0)\cdot\beta_0 + \varepsilon\cdot\sum_{i\in J}\sup_{\theta\in A\cap C_i} l(x \mid \theta)\cdot q(C_i)\ \}\cdot$$

$$\cdot\{\ (1-\varepsilon)\cdot p(x \mid g_0) + \varepsilon\cdot\sum_{i\in K}\inf_{\theta\in C_i} l(x \mid \theta)\cdot q(C_i) + \varepsilon\cdot\sum_{i\in J}\inf_{\theta\in A\cap C_i} l(x \mid \theta)\cdot q(C_i)\ \}^{-1}$$

donde I, J, K son subconjuntos de índices de $\{1, 2, \ldots, k\}$ definidos por :

$$i \in I \Longleftrightarrow C_i \subset A$$

$$i \in J \Longleftrightarrow A \cap C_i \neq \emptyset$$

$$i \in K \Longleftrightarrow A \cap C_i = \emptyset$$

$p(x \mid g_0)$ es la predictiva de x para g_0 y $\beta_0 = Prob^{g_0}(A \mid x)$ es la probabilidad a posteriori de A para la densidad g_0

Observemos que este resultado es crucial para su aplicabilidad a un caso práctico. En la práctica, A será un conjunto de credibilidad al $(1-\alpha)\cdot 100\%$ (y será un intervalo de la recta real) y los conjuntos C_i ($i = 1, \ldots k$) serán también intervalos; lo cual simplifica bastante los casos para la definición

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

de los subíndices I, J y K. Así pues, los superiores e inferiores se calculan sobre determinados intervalos. Las cantidades $q(C_i)$ son conocidas. Si con suerte, la función de verosimilitud alcanza un sólo máximo (en el estimador de máxima verosimilitud, E.M.V.), entonces la función será creciente a la izquierda y decreciente a la derecha de él. Esto hará que el cálculo de los inferiores y superiores se simplifique a los extremos de los intervalos, salvo para aquel intervalo que contenga al E.M.V.

2.3 Clases dadas por cuantiles.

Otra de las formas de contemplar clases de densidades a priori en vez de una densidad determinada, consiste en situaciones aún más pobres de información que la presentada en la Sección 2.2.2 , en el sentido de que se supone que sólo se conocen determinados cuantiles a priori del parámetro θ. Es decir, se permiten todas las densidades que tengan estos cuantiles ($\{C_i\}_{i=1}^k$ [10]).

Si llamamos $p_i = Prob\{C_i\}$ $(i = 1, \ldots, k)$: $\sum_{i=1}^k p_i = 1$, obtenemos que la clase de densidades a priori será :

$$\Gamma = \{g(\theta) = \sum_{i=1}^{k} p_i \cdot q_i(\theta) \ : \ q_i \textit{ dens. a priori con soporte en } C_i \ \}$$

Clases de este tipo han sido consideradas en *Berger* y *O'Hagan (1.987)* y *Berliner* y *Goel (1.990)*.

Si notamos por $l(x \mid \theta)$ a la verosimilitud del dato observado x dado θ es claro entonces que nuestro interés se centra en estudiar los rangos de variación de las cantidades :

$$p_i(x) = Prob\{\theta \in C_i \mid x\} \ \ (i = 1, \ldots, k)$$

o sea,

$$l_i(x) = \inf_{g \in \Gamma} p_i(x)$$

$$u_i(x) = \sup_{g \in \Gamma} p_i(x)$$

Para cualquier densidad a priori $g \in \Gamma$, su distribución predictiva para x será :

[10] los C_i's serán intervalos de la forma $(a_{i-1}, a_i]$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

$$p(x \mid g) = \int_{\Theta} \sum_{i=1}^{k} p_i \cdot l(x \mid \theta) \cdot q_i(\theta) \cdot d\theta = \sum_{i=1}^{k} p_i \cdot p(x \mid q_i)$$

de donde, la densidad a posteriori vale :

$$g(\theta \mid x) = \sum_{i=1}^{k} p_i(x) \cdot q_i(\theta \mid x) \tag{2.3}$$

con

$$p_i(x) = \frac{p_i \cdot p(x \mid q_i)}{\sum_{j=1}^{k} p_j \cdot p(x \mid q_j)} \quad (i = 1, \ldots, k)$$

Para cada $i = 1, \ldots, k$

$$p_i(x) = \{\frac{p_i \cdot p(x \mid q_i) + \sum_{j \neq i} p_j \cdot p(x \mid q_j)}{p_i \cdot p(x \mid q_i)}\}^{-1} = \{1 + \frac{\sum_{j \neq i} p_j \cdot p(x \mid q_j)}{p_i \cdot p(x \mid q_i)}\}^{-1} \tag{2.4}$$

El siguiente teorema nos resuelve el problema planteado. Presentamos la demostración porque en el trabajo original existe una pequeña errata que puede confundir al lector.

Teorema 2.3.1 *(Berliner y Goel (1.990)) En las condiciones anteriores, para cada $i = 1, \ldots, k$:*

$$l_i(x) = \frac{p_i \cdot \underline{f}_i(x)}{p_i \cdot [\underline{f}_i(x) - \overline{f}_i(x)] + U}$$

$$u_i(x) = \frac{p_i \cdot \overline{f}_i(x)}{p_i \cdot [\overline{f}_i(x) - \underline{f}_i(x)] + L}$$

donde $U = \sum_{j=1}^{k} p_j \cdot \overline{f}_j(x)$, $L = \sum_{j=1}^{k} p_j \cdot \underline{f}_j(x)$, $\overline{f}_i(x) = \sup_{\theta \in C_i} l(x \mid \theta)$ *y* $\underline{f}_i(x) = \inf_{\theta \in C_i} l(x \mid \theta)$.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Demostración.-

Para cada $i = 1, \ldots, k$ tenemos que $l(x \mid \theta)$ (como función de θ) está acotada sobre el intervalo acotado $C_i = (a_{i-1}, a_i]$, luego :

$$\underline{f}_i(x) = \inf_{\theta \in C_i} l(x \mid \theta) \leq l(x \mid \theta) \leq \sup_{\theta \in C_i} l(x \mid \theta) = \overline{f}_i(x)$$

luego,

$$\underline{f}_i(x) \leq p(x \mid q_i) = \int_{C_i} l(x \mid \theta) \cdot q_i(\theta) \cdot d\theta \leq \overline{f}_i(x)$$

En consecuencia, el inferior de $p_i(x)$ se alcanza cuando el cociente $\dfrac{\sum_{j \neq i} p_j \cdot p(x \mid q_j)}{p_i \cdot p(x \mid q_i)}$ sea máximo, lo cual se consigue cuando simultáneamente $\sum_{j \neq i} p_j \cdot p(x \mid q_j)$ sea máximo y $p_i \cdot p(x \mid q_i)$ sea mínimo. Esto ocurre en $U - p_i \cdot \overline{f}_i(x)$ y $p_i \cdot \underline{f}_i(x)$, respectivamente. Por tanto,

$$l_i(x) = \inf_{g \in \Gamma} p_i(x) = \{1 + \frac{U - p_i \cdot \overline{f}_i(x)}{p_i \cdot \underline{f}_i(x)}\}^{-1}$$

de donde se deduce que :

$$l_i(x) = \frac{p_i \cdot \underline{f}_i(x)}{p_i \cdot [\underline{f}_i(x) - \overline{f}_i(x)] + U}.$$

Del mismo modo para el superior, se tiene que se alcanzará cuando : $\sum_{j \neq i} p_j \cdot p(x \mid q_j)$ y $p_i \cdot p(x \mid q_i)$ sean mínimo y máximo, respectivamente. Esto ocurre en $L - p_i \cdot \underline{f}_i(x)$ y $p_i \cdot \overline{f}_i(x)$. Por tanto,

$$u_i(x) = \sup_{g \in \Gamma} p_i(x) = \{1 + \frac{L - p_i \cdot \underline{f}_i(x)}{p_i \cdot \overline{f}_i(x)}\}^{-1}$$

y de aquí,

$$u_i(x) = \frac{p_i \cdot \overline{f}_i(x)}{p_i \cdot [\overline{f}_i(x) - \underline{f}_i(x)] + L}. \quad \square$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

En algunas situaciones la clase Γ suele ser demasiado amplia. Si, por ejemplo, se desea incorporar la unimodalidad a los elemento de Γ (*Berger* y *O'Hagan (1.987)*) puede realizarse un estudio similar aunque mucho más complicado. Esta consideración es tomada posteriormente en la Sección 5.3.

2.4 Principio de Máxima Verosimilitud Tipo II.

Como vimos al final de la Sección 2.1 en ciertas situaciones el investigador puede estar interesado en seleccionar una determinada densidad dentro de la que clase que él propone. Uno de los criterios de selección de densidades a priori dentro de clases suele ser el conocido como criterio de ***máxima verosimilitud tipo-II*** . La filosofía de selección de densidades a priori de este criterio es la siguiente :

Dada una clase de densidades a priori para un parámetro desconocido ($\Theta \subseteq R$), Γ y obtenida una observación muestral de una variable aleatoria con verosimilitud $l(x \mid \theta)$. La distribución predictiva de cualquier $g \in \Gamma$:

$$p(x \mid g) = \int_{\Theta} l(x \mid \theta) \cdot g(\theta) \cdot d\theta$$

refleja la plausibilidad de l y g a través del dato x. Si consideramos la verosimilitud completamente conocida (como es el caso que nos ocupa), entonces $p(x \mid g)$ indicará la plausibilidad de g.

Esto automáticamente define un *ordenamiento* en la clase Γ, ya que observado x, si $p(x \mid g_1) > p(x \mid g_2)$ es porque el dato está dando más verosimilitud a g_1 que g_2 (g_1 , $g_2 \in \Gamma$).

En realidad, estamos considerando a $p(x \mid g)$ como una función de verosimilitud de g. Parece natural, elegir aquella $g \in \Gamma$ que maximice dicha verosimilitud.

Definición 2.4.1

Sea Γ una clase de densidades a priori. Sea $\hat{g}$ tal que (observado el dato x) :

$$p(x \mid \hat{g}) = \sup_{g \in \Gamma} p(x \mid g)$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

entonces diremos que $\hat{g}$ es una densidad a priori ML-II.

Es obvio que la determinación de la densidad a priori ML-II depende de la clase Γ. Así, cuando la clase tiene una forma funcional dada dependiente de un hiperparámetro, el problema se resuelve maximizando una función del hiperparámetro.

En clase de contaminaciones (próximas a una densidad a priori g_0) :

$$\Gamma = \{ \ g \ : \ g(\theta) = (1-\varepsilon) \cdot g_0(\theta) + \varepsilon \cdot q(\theta) \ ; \ q \in D \ \}$$

tenemos que, dada $g \in \Gamma$:

$$p(x \mid g) = \int_\Theta l(x \mid \theta) \cdot [(1-\varepsilon) \cdot g_0(\theta) + \varepsilon \cdot q(\theta)] \cdot d\theta = (1-\varepsilon) \cdot p(x \mid g_0) + \varepsilon \cdot p(x \mid q)$$

de donde, sobre una clase así, basta con determinar $\hat{q} \in D$:

$$p(x \mid \hat{q}) = \sup_{q \in D} p(x \mid q)$$

y la densidad a priori ML-II será :

$$\hat{g} = (1-\varepsilon) \cdot g_0 + \varepsilon \cdot \hat{q}$$

Así, por ejemplo, cuando $D = \{$ *todas las densidades* $\}$ es claro que :

$$p(x \mid q) = \int_\Theta l(x \mid \theta) \cdot q(\theta) \cdot d\theta \leq l(x \mid \hat{\theta}) \cdot \int_\Theta q(\theta) \cdot d\theta = l(x \mid \hat{\theta})$$

donde $\hat{\theta}$ es el estimador de máxima verosimilitud de θ (siempre que exista).

La densidad q óptima es por tanto la degenerada en $\hat{\theta}$, en notación, $\hat{q} =< \hat{\theta} >$. Luego, $\hat{g} = (1-\varepsilon) \cdot g_0 + \varepsilon \cdot < \hat{\theta} >$.

Cuando g_0 es continua, resulta que $\hat{g}$ es una mixtura. Esta situación, parece poco razonable para el problema que intentamos abordar.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Clases más razonables son las que vamos a tratar aquí : clase de contaminaciones simétricas unimodales - con la misma moda que g_0 - (*Berger* y *Berliner* (1.986)) y contaminaciones unimodales - con la misma moda que g_0 - (*Sivaganesan* y *Berger* (1.989)).

Observemos, por último, que una vez determinada la densidad ML-II a priori, la densidad a posteriori de $\hat{g}$ será :

$$\hat{g}(\theta \mid x) = \hat{\lambda}(x) \cdot \hat{g}_0(\theta \mid x) + (1 - \hat{\lambda}(x)) \cdot \hat{q}(\theta \mid x)$$

siendo $\hat{\lambda}(x) = \dfrac{(1-\varepsilon) \cdot p(x \mid g_0)}{(1-\varepsilon) \cdot p(x \mid g_0) + \varepsilon \cdot p(x \mid \hat{q})}$.

Los resultados que se dan a continuación nos determinan la forma de la densidad a priori ML-II en cada una de las clases que se utilizan posteriormente en el Capítulo 6 y que se ajustan a los anteriores comentarios.

2.4.1 Contaminaciones simétricas unimodales.

Consideremos la clase de densidades a priori :

$$\Gamma = \{ \, g \equiv (1-\varepsilon) \cdot g_0 + \varepsilon \cdot q \; ; \; q \in D \} \tag{2.5}$$

donde g_0 es una densidad a priori especificada que se supone simétrica y unimodal con moda θ_0; $\varepsilon \in [0,1]$ muestra el grado de creencia que se tiene sobre g_0 y D es la clase formada por todas aquellas densidades a priori que son simétricas y unimodales, con la misma moda que g_0 .

Sobre una clase como Γ el problema de determinar la densidad a priori ML-II queda resuelto teniendo en cuenta que el análisis puede ser reducido a la clase de contaminaciones del tipo (ver *Berger* y *Berliner (1.986)*) :

$$D' = \{ \, Unif(\theta_0 - a, \theta_0 + a), \; a \geq 0 \, \}$$

Teorema 2.4.1.1 (*Berger y Berliner (1.986)*)

Si Γ *es la clase dada en* (2.5), *la densidad a priori ML-II es :*

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

$$\hat{g} = (1-\varepsilon)\cdot g_0 + \varepsilon \cdot \hat{q}$$

donde $\hat{q} \sim Unif(\theta_0 - \hat{a}, \theta_0 + \hat{a})$ *, con* $\hat{a}$ *el valor que maximiza la cantidad :*

$$p(x \mid q) \equiv p(x \mid a) = \begin{cases} \frac{1}{2a}\int_{\theta_0-a}^{\theta_0+a} l(x \mid \theta)\cdot d\theta & , \quad a > 0 \\ l(x \mid \theta_0) & , \quad a = 0 \end{cases}$$

2.4.2 Contaminaciones unimodales.

La clase que consideraremos ahora no impone la condición de simetría anterior.

$$\Gamma = \{\, g \equiv (1-\varepsilon)\cdot g_0 + \varepsilon \cdot q \;;\; q \in D\} \tag{2.6}$$

donde g_0 es una densidad a priori que se supone unimodal, con moda θ_0; y D es la clase formada por todas aquellas densidades a priori que son unimodales, con la misma moda que g_0 [11].

El cálculo de la densidad a priori ML-II sobre esta clase se resuelve con el siguiente resultado :

Lema 2.4.2.1 (*Sivaganesan y Berger (1.989)*)

Para cualquier densidad a priori $q \in$ D *y cualquier función* g *tal que :* $\int \mid g(\theta) \mid \cdot l(x \mid \theta)\cdot q(\theta)\cdot d\theta < \infty$, *se tiene :*

$$\int \mid g(\theta) \mid \cdot l(x \mid \theta)\cdot q(\theta)\cdot d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} H^g(z)\cdot dF(z)$$

siendo F *una función de distribución y*

$$H^g(z) = \begin{cases} \frac{1}{z}\int_{\theta_0}^{\theta_0+z} g(\theta)\cdot l(x \mid \theta)\cdot d\theta & , \quad z \neq 0 \\ g(\theta_0)\cdot l(x \mid \theta_0) & , \quad z = 0 \end{cases}$$

[11] Desde luego, esta clase de contaminaciones es más amplia que la considerada anteriormente en la que se le imponía la condición de simetría

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Cuando $g \equiv 1$, la función H^g se nota H_0.

Con este resultado podemos proceder al cálculo de la densidad ML-II en la clase dada en (2.6). En este caso, para $g \in \Gamma$:

$$p(x \mid g) = (1-\varepsilon) \cdot p(x \mid g_0) + \varepsilon \cdot p(x \mid q)$$

es claro, que hay que maximizar $p(x \mid q)$ con $q \in D$:

$$p(x \mid q) = \int l(x \mid \theta) \cdot q(\theta) \cdot d\theta = \int H_0(z) \cdot dF(z)$$

siendo,

$$H_0(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} \int_{\theta_0}^{\theta_0+z} l(x \mid \theta) \cdot d\theta & , \quad z \neq 0 \\ l(x \mid \theta_0) & , \quad z = 0 \end{cases}$$

debemos pues calcular $\hat{z}$ tal que : $H_0(\hat{z}) = \max_z H_0(z)$.

De donde, la función predictiva se maximiza en aquella distribución F dada por

$$F(z) = \begin{cases} 0 & , \quad z < \hat{z} \\ 1 & , \quad z \geq \hat{z} \end{cases}$$

es decir, la distribución concentrada en $\hat{z}$.

Y por tanto, análogamente al caso de unimodalidad y simetría, la densidad a priori ML-II resulta :

$$\hat{g} = (1-\varepsilon) \cdot g_0 + \varepsilon \cdot \hat{q}$$

donde $\hat{q} \sim Unif(\theta_0, \theta_0 + \hat{z})$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Capítulo 3

Modelo Gamma-Gamma Inversa de Cox y Snell.

3.1 Introducción.

En la Sección 1.6.1 dedicada al trabajo pionero de *Cox* y *Snell (1.979)* hemos visto como la adopción de familias conjugadas para la información a priori sobre los parámetros de interés puede ser atractiva (aunque no demasiado *realista*), desde el punto de vista analítico, como una primera aproximación a la determinación de cotas superiores bayesianas para el parámetro de interés, ψ, media (no condicionada) de fallo por unidad monetaria.

En definitiva, se planteaba la modelización de la información a priori del auditor de la siguiente manera :

(1) ϕ se distribuye según una distribución $Gamma(\frac{a}{\phi_0}, a)$, con a y ϕ_0 conocidos.

(2) μ se distribuye según una distribución $Gamma - inversa(\mu_0(b - 1), b)$ con μ_0 y b conocidos.

Es el modelo conocido como Gamma-Gamma inversa o GG (ver Sección 1.6.1)

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

La información muestral era proporcionada por el número de errores observados en una muestra de tamaño n, M y la fracción media de error, $\overline{z} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{m} z_i$ ($\overline{z} = 0$, cuando $m = 0$), cuyas verosimilitudes asociadas eran :

$$l_1(\phi) = \frac{exp(-n\phi)(n\phi)^m}{m!}, \quad 0 < \phi < 1$$

$$l_2(\mu) = \frac{exp(-m \cdot \overline{z}/\mu)}{\mu^m}, \quad \mu > 0$$

lo que permite obtener las distribuciones a posteriori de los parámetros, siendo ambas de las mismas clases que las a priori (son conjugadas) y también, y esto es lo importante, se obtiene que la distribución a posteriori de ψ es proporcional a una *F-Snedecor*, lo que es utilizado para el cálculo de la cota superior bayesiana a posteriori al $100 \cdot (1 - \alpha)\%$.

Especificando por tanto valores para los parámetros ϕ_0,μ_0, a y b; y dados los valores muestrales de m y $\overline{z}$, se puede obtener fácilmente (basta una tabla estándar de la distribución F) el percentil $100 \cdot (1 - \alpha)$.

Modificaciones más realistas son los modelos dados por *Godfrey* y *Neter (1.982, 1.984)* , tratados en la Sección 1.6.2 .

En este capítulo desarrollaremos una metodología sistemática para el estudio de la robustez de una modificación del modelo de *Cox* y *Snell.* El modelo GU (Gamma-Uniforme) estudiado por *Godfrey* y *Neter* se muestra como más realista, puesto que impone que el parámetro μ sólo tome valores comprendidos entre 0 y 1.

Una situación particular (e incluso, puede decirse que *degenerada* , en el sentido de que μ toma un único valor μ_0 con probabilidad 1) es la que se considera en este apartado. Aunque en principio puede parecer restrictiva esta hipótesis de trabajo veremos como no es así y como este hecho permite al auditor una gran flexibilidad en el estudio de la sensibilidad de su modelo de información a priori.

El capítulo se estructura de la siguiente forma. En la Sección 3.2 se motiva la modificación introducida utilizando para ello diferentes situaciones prácticas así como ilustraciones gráficas. En la Sección 3.3 se plantea y resuelven *analíticamente* las principales medidas para un estudio de robustez como el que se plantea. Por último en la Sección 3.4 se presentan

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

algunas ilustraciones numéricas realizadas, así como comparaciones con las obtenidas por *Cox* y *Snell.*

3.2 Motivación del modelo de contaminaciones unimodales.

Observemos la representación gráfica de las distribuciones a priori en un modelo GG para un caso de alta tasa de error ($\phi_0 = 0.25$ $a = 25$ $\mu_0 = 0.5$ $b = 5$, tomados de *Cox* y *Snell (1.979)*). En la figura 3.1 se representa la información a priori para $\phi \sim Gamma(\frac{a}{\phi_0}, a)$ y en la figura 3.2 la información a priori para $\mu \sim Gamma - inversa(\mu_0(b-1), b)$

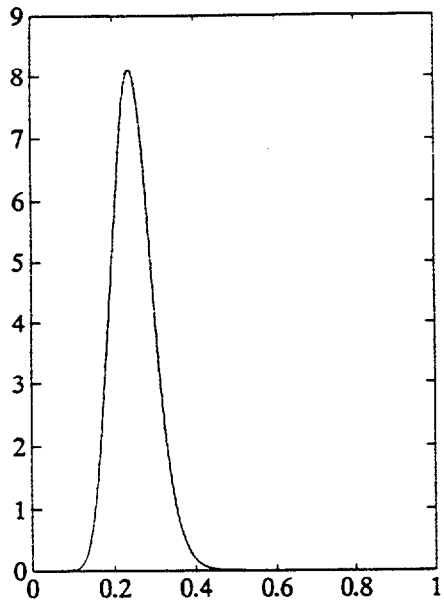

Figura 3.1

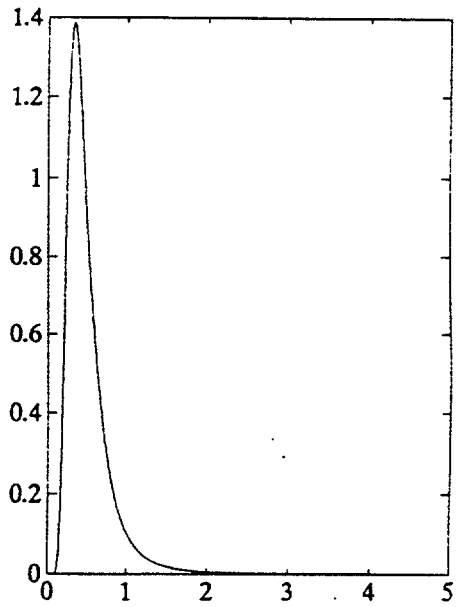

Figura 3.2

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Varios comentarios deben ser hechos en un principio. En primer lugar las dos distribuciones están bastante concentradas a la izquierda, es claro que un auditor debe esperar que la tasa de error sea baja. Por otra parte, la unimodalidad se presenta como una propiedad importante para estas distribuciones. Es decir, el auditor no encuentra demasiados problemas para asignar distribuciones a priori unimodales (datos históricos, etc ... pueden dar idea al auditor para asignar el valor más frecuente para ϕ y μ). Además, y esto sí que es importante, μ está muy concentrada en torno a $\mu_0 = 0.5$ (en casos de tasa de error más baja la concentración es aún mayor). A pesar de que el modelo considera valores de μ mayores que 1, parámetros μ_0 y b adecuados hacen que la distribución esté muy concentrada en torno a μ_0 (estos mismos comentarios pueden hacerse para el resto de los modelos presentados por *Cox* y *Snell*).

Dos ideas fundamentales deben de ser extraídas de aquí. Primero, la unimodalidad de ϕ parece mostrarse como una propiedad generalmente aceptada. Por otra parte, la idea de que la distribución de μ está muy concentrada en torno a μ_0 parece pues que debe ser considerada; tanto que, como veremos posteriormente, nosotros consideraremos situaciones en las que se asigna probabilidad 1 a un valor dado, μ_0. Esto puede verse en el siguiente comentario.

Con una asignación de densidades a priori como la dada anteriormente la densidad a priori para ψ (que, como se dedujo en la Sección 1.6.1, es proporcional a la densidad de una v.a. F de Snedecor) es bastante parecida a un distribución Gamma, como puede verse en la figura 3.3 . En la figura de la izquierda se representa la densidad teórica y a la derecha se representa una densidad Gamma con la misma media y con la varianza debidamente ajustada.

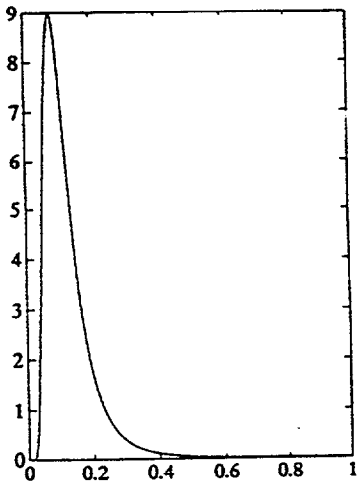

Figura 3.3

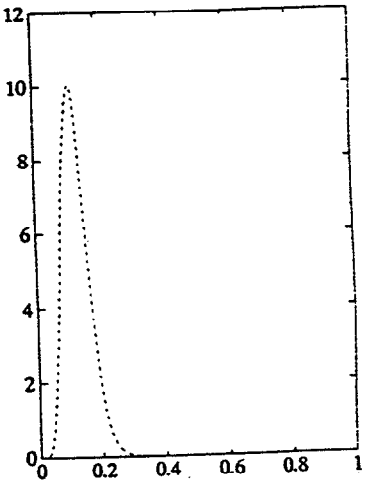

Figura 3.3

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Es decir, aunque no sea precisamente una densidad Gamma; sí que se podría pensar en que la densidad pertenece a una clase de densidades que contemple a la densidad Gamma como la más apropiada y permita desviaciones respecto a ésta (en cierto sentido, podría considerarse la densidad teórica como una *próxima* a la Gamma). Y eso sí, una clase en la que la unimodalidad de ψ quede de manifiesto.

Pero ahondemos aún más. En situaciones más realistas como pueden ser los modelos de *Godfrey* y *Neter (1.982,1.984)* (modelos GU y BU), los comentarios anteriores son mucho más precisos y determinantes.

Fijémonos en un modelo GU (Gamma-Uniforme), es decir, un modelo en el que la información a priori del auditor es :

1. $\phi \sim Gamma(\frac{a}{\phi_0}, a)$, con a y ϕ_0 conocidos.
2. $\mu \sim Unif(0,1)$.

(un estudio detallado de este modelo puede verse en la Sección 1.6.2)

En principio, podemos pensar que esta situación sí que se aleja de la consideración anterior ya que μ es uniforme y así se distribuye a lo largo del intervalo $(0,1)$. Sin embargo basta con observar las siguientes gráficas para ver que con esta información a priori (figuras 3.4 y 3.5) y ver que la densidad a priori para el parámetro ψ es prácticamente la densidad de ϕ y tan sólo algunas veces difieren sensiblemente.

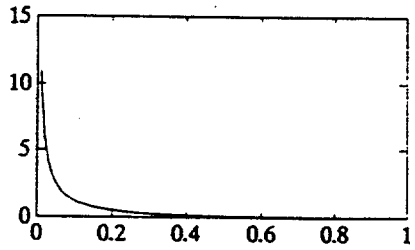

Figura 3.4

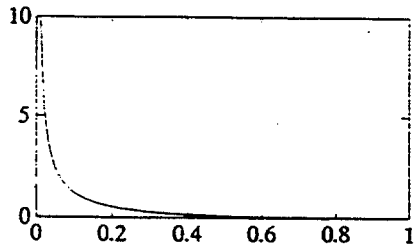

Figura 3.5

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Diferentes ilustraciones numéricas han sido desarrolladas contemplando una gran variedad de casos en los que se pone de manifiesto el comentario anterior. Considerando $\mu \sim Unif(0,1)$, todos los casos considerados están reflejados en la siguiente tabla.

Inf. a priori sobre ϕ	ϕ_0	a
	0.005	2
	0.055	2
	0.105	2
	0.155	2
	0.205	2
	0.255	2
	0.305	2

Las mayores diferencias entre ϕ y ψ aparecen para tasas de error grandes. Lo que planteamos por tanto, es que podemos contemplar ψ como *proporcional* a ϕ (lo que equivale a hacer, μ fijo), y plantear un estudio riguroso de posibles desviaciones respecto a esta situación; y no un estudio en el que se asignan distribuciones a los dos parámetros y a continuación (dada la *desconfianza* del auditor sobre su modelo) plantear diferentes situaciones numéricas para ver si las decisiones finales son sustancialmente diferentes.

En definitiva lo que planteamos a continuación es considerar que el auditor está dispuesto a admitir que μ toma un valor fijo conocido μ_0 ($\mu = \mu_0$), que como acabamos de ver no es tan restrictivo ya que tanto en un caso como en otro la distribución a priori de ψ no se vé demasiado afectada, y a continuación no utilizar una única densidad a priori para ϕ sino toda una clase que refleje de manera más precisa toda la incertidumbre que sobre ϕ posee el auditor.

Una consideración de este tipo implica, entre otras cosas, que en una experimentación bastará con observar el número de errores en la muestra, es decir, observar una variable aleatoria cuya distribución dependa únicamente del parámetro ϕ. No se tendría en cuenta, en principio, la magnitud de los

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

errores; aunque luego en un proceso de decisión de si la contabilidad es o no errónea sí que se tendría en cuenta una vez calculadas las cotas bayesiana. Esta simplificación ya ha sido considerada en algunos trabajos, *Menzefricke (1.983,1.984)* .

El problema que subyace aquí es que para el auditor (como para cualquier investigador que adopte una metodología bayesiana) resulta imposible cuantificar *exactamente* la información a priori en términos de una única distribución, ya que el tiempo y otras restricciones introducen un grado de arbitrariedad en el proceso de asignación o *"elicitación"* . Así, después de un proceso de asignación por el cual se toma una cierta distribución a priori, es también plausible que cualquier distribución a priori que esté *"cerca"* de la ya asignada sea un representación razonable de nuestras creencias. Este hecho no es contemplado en un desarrollo bayesiano estricto como son los modelos GG, GU, entre otros. Su análisis de sensibilidad consiste en plantear diferentes escenarios numéricos y estudiar cómo se comporta aproximadamente la cota superior bayesiana al $100 \cdot (1-\alpha)\%$. El modelo de aproximación será el denominado de clases de contaminaciones.

Un estudio más riguroso de la robustez del modelo puede ser abordado (usaremos para ello los resultados del Capítulo 2) y podríamos decir que hasta debe ser imprescindible ya que con ello podremos obtener una idea de cuanto de sensible es nuestro modelo y hasta que punto un auditor puede aceptar o rechazar una contabilidad. Nos disponemos pues, a estudiar el comportamiento del modelo de GU (con $\mu = \mu_0$) frente a perturbaciones en la distribución a priori sobre ϕ.

3.3 Planteamiento y resolución del modelo

Se plantea la utilización de una metodología de análisis de robustez bayesiana al modelo de Cox y Snell (en concreto, al modelo GU), considerando la idea de aceptar un grado de incertidumbre sobre la distribución a priori especificada, y admitiendo la posibilidad de que esa distribución está *contaminada* por otras distribuciones.

Más preciso, la idea es considerar que la distribución a priori de ϕ está dentro de una clase de distribuciones a priori :

$$\Gamma = \{(1-\varepsilon) \cdot g_0 + \varepsilon \cdot q : q \in D\} \tag{3.1}$$

donde $\varepsilon \in [0,1]$ expresa el grado de incertidumbre (contaminación) y D es una clase de distribuciones a priori que vendrá especificada de una forma u

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

otra dependiendo del tipo de problema que se aborde.

Como quedó patente anteriormente, la unimodalidad es una propiedad que debe tenerse en estas situaciones (dada su relativa facilidad para asignar. Debemos aclarar que en un proceso de asignación; y supuesto que el auditor considere una buena aproximación para $\phi \sim Gamma(\frac{a}{\phi_0}, a)$, el auditor debe dar valores para a y ϕ_0 que estén de acuerdo con sus creencias sobre el valor modal).Así pues, será apropiado tomar D como la clase de distribuciones a priori unimodales y con la misma moda que g_0.

Supongamos pues que el auditor admite que con cierta seguridad la distribución a priori de ϕ es $Gamma(\frac{a}{\phi_0}, a)$, i.e.:

$$g_0(\phi) = \frac{(\frac{a}{\phi_0})^a}{\Gamma(a)} \cdot \phi^{a-1} exp(-\frac{a}{\phi_0}\phi) \quad ,\phi \geq 0. \tag{3.2}$$

con a y ϕ_0 conocidos . La moda de esta distribución es única y se alcanza en $\phi_{mo} = \phi_0 \cdot \dfrac{a-1}{a}$.

Para esta distribución a priori sobre ϕ y considerando (así lo haremos a lo largo de este capítulo) que $\mu = \mu_0$ (conocido y fijo), entonces la densidad a priori de $\psi = \mu_0 \cdot \phi$ será :

$$f_0(\psi) = \frac{1}{\mu_0} \cdot g_0(\frac{1}{\mu_0} \cdot \psi) = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{(\frac{a}{\phi_0})^a}{\Gamma(a)} \cdot (\frac{\psi}{\mu_0})^{a-1} \cdot exp(-\frac{a}{\phi_0\mu_0}\psi).$$

por lo que :

$$f_0(\psi) = \frac{(a/\phi_0\mu_0)^a}{\Gamma(a)} \cdot \psi^{a-1} \cdot exp(-\frac{a}{\phi_0\mu_0}\psi) \tag{3.3}$$

es decir, ψ *es* $Gamma(\frac{a}{\phi_0\mu_0}, a)$, de donde :

$$E[\psi] = \phi_0 \cdot \mu_0$$

$$E[\psi^2] = (\phi_0\mu_0)^2 \cdot \frac{a(a+1)}{a^2}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

$$Var[\psi] = \frac{(\phi_0\mu_0)^2}{a}$$

Pudiendo obtenerse la cota superior bayesiana al $100 \cdot (1-\alpha)\%$. Usualmente $\alpha = 0.05$, luego estaremos interesados en $Prob[\psi \leq UB(0.95)] = 0.95$, y por tanto $UB(0.95)$ es el cuantil 95 de una $Gamma\ (\frac{a}{\phi_0\mu_0}, a)$.

Además como ψ *es* $Gamma(\frac{a}{\phi_0\mu_0}, a)$, y la distribución en el muestreo de M puede aproximarse bastante bien por $P(n \cdot \phi) \equiv P(n \cdot \frac{\psi}{\mu_0})$, obtenemos que la distribución final o a posteriori de ψ dado m es $Gamma(\frac{a}{\phi_0\mu_0} + \frac{n}{\mu_0}, m + a)$, cuya media a posteriori es $\mu_0 \cdot \frac{m+a}{a/\phi_0+n}$, y de donde podemos deducir el cuantil a posteriori $1-\alpha$: $UB(1-\alpha; m)$.

Si suponemos ahora la existencia de incertidumbre en la distribución a priori de ϕ (y consecuentemente sobre la de ψ), entonces

$$g(\phi) \in \Gamma = \{(1-\varepsilon) \cdot g_0(\phi) + \varepsilon \cdot q(\phi) : q \in D\}$$

donde $\varepsilon \in [0,1]$ es fijado por el auditor, g_0 es la densidad a priori especificada por el auditor y sobre la que tiene certeza (tanta, como indique ε. En la práctica suele utilizarse con otra finalidad ya que se va viendo hasta que valor de certeza puede el investigador esperar robustez en su modelo. Este enfoque es ciertamente interesante.) y D es la clase de contaminaciones. Clase que como ya que hemos dicho anteriormente, en este caso es :

D = { *distrib. a priori unimodales con la misma moda que* g_0 }

Para centrarnos un poco en esta clase, observemos que una suposición de este tipo nos lleva a considerar que la verdadera distribución de ϕ varía en esta clase, y que por tanto, puede adoptar formas como las que se muestran en las figuras 3.6 y 3.7 .

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Aparece, en trazo continuo, una distribución a priori Gamma con $\phi_0 = 0.1$ y $a = 3$; con un grado de contaminación del 20%, en discontinuo aparecen distribuciones de la clase Γ correspondientes a contaminaciones con $Unif(\phi_{mo}, \phi_{mo} + 0.2)$ (figura 3.6) y $Unif(\phi_{mo} - 0.2, \phi_{mo})$ (figura 3.7): [12]

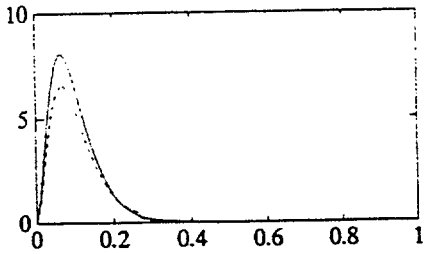

Figura 3.6

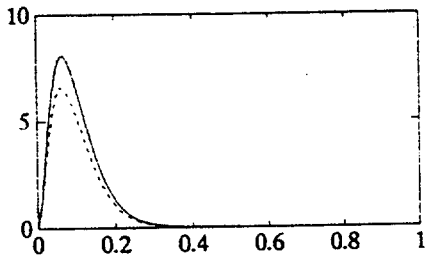

Figura 3.7

En la Sección 2.1 vimos que para el estudio de la robustez una vía natural consiste en estudiar la variación de una cantidad $\rho(x, g)$ a posteriori sobre el rango Γ, siendo x el dato observado. Las cantidades que usualmente se consideran son : la media y varianza a posteriori, la prob abilidad a posteriori de un conjunto (conjuntos creibles , tests). Si el rango es pequeño, entonces podemos asegurar robustez respecto al proceso de elicitación (siempre que Γ sea lo suficientemente grande como para que contemple la posible incertidumbre del auditor). Si el rango es grande, no tenemos robustez respecto a Γ, pero los resultados deben comunicarnos las razones por las que no había robustez, utilizandose esto posteriormente para futuras asignaciones o refinamientos.

Si por ejemplo consideramos la variación de la probabilidad a posteriori de un conjunto creible al $100 \cdot (1 - \alpha)\%$ para ψ :

$$\left(\inf_{\Gamma} Prob^{\star}[\psi \leq UB(1-\alpha; m)] \ , \ \sup_{\Gamma} Prob^{\star}[\psi \leq UB(1-\alpha; m)] \right)$$

[12] Como se ha visto en el Capítulo 2, el estudio de la sensibilidad de ciertas medidas sobre clases como D queda simplificado al estudio en clases de distribuciones uniformes.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

(Usaremos la notación $Prob^{\star}[\cdot]$ para hacer referencia a probabilidades a posteriori.)

La probabilidad a posteriori está determinada por un valor muestral fijo (en este caso, el número de errores en la muestra); es claro que para cada resultado muestral se obtendrá un intervalo o rango de variación (dependiendo de la longitud de este intervalo podremos considerar si el modelo es robusto o no) y por tanto para unos resultados muestrales habrá robustez y para otros no; y todo ello para determinados valores de ε (niveles de contaminación). Este es otro punto atractivo de esta aproximación, podemos estudiar (simulando varios valores de ε) hasta qué punto podemos admitir incertidumbre en la opinión del auditor, o lo que es lo mismo cuál es el grado de contaminación que hace que el modelo no sea robusto.

Además como,

$$\inf_{\Gamma} Prob^{\star}[\psi \leq UB(1-\alpha;m)] = \inf_{\Gamma} Prob^{\star}[\phi \leq \frac{UB(1-\alpha;m)}{\mu_0}]$$

$$\sup_{\Gamma} Prob^{\star}[\psi \leq UB(1-\alpha;m)] = \sup_{\Gamma} Prob^{\star}[\phi \leq \frac{UB(1-\alpha;m)}{\mu_0}]$$

tenemos que el rango de interés será:

$$(\inf_{\Gamma} Prob^{\star}[\phi \leq \frac{UB(1-\alpha;m)}{\mu_0}] \ , \ \sup_{\Gamma} Prob^{\star}[\phi \leq \frac{UB(1-\alpha;m)}{\mu_0}] \ )$$

Conectamos con los resultados de la Sección 2.2.1 ya que hemos planteado una clase de contaminaciones unimodales. Seguimos la línea de los trabajos de *Berger* y *Berliner (1.986)* , *Berger* y *O'Hagan (1.987)* , *O'Hagan* y *Berger (1.988)* , adaptándolos a la situación particular que nos ocupa. Para nuestro caso será particularmente útil una adaptación del trabajo sobre contaminaciones unimodales expuesto por *Sivaganesan* y *Berger (1.989)*.

Se trata pues de estudiar el rango de variación de la media a posteriori y la probabilidad a posteriori de un conjunto de credibilidad. Es decir, si llamamos $\rho(x,g)$ a la medida de interés de la queremos estudiar su rango de variación a lo largo de una clase Γ determinada :

$$\rho(x,g) = \int_0^{\infty} h(\phi) \cdot g(\phi \mid x) \cdot d\phi$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

donde las funciones usadas serán : $h_0(\phi) \equiv 1$, $h_1(\phi) = \phi$, $h_C(\phi) = I_C(\phi)$.
lo que debemos estudiar es el comportamiento de :

$$(\inf_{\Gamma} \rho(x,g) \quad , \quad \sup_{\Gamma} \rho(x,g) \quad)$$

La solución teórica para estos problemas la tenemos en la Sección 2.2.1 . Como ya vimos la idea consiste en ver que estos extremos se alcanzan sobre una subclase relativamente sencilla de Γ con lo que nuestro problema pasará por resolver un problema de extremos en una variable.

Así pues, para una clase de densidades a priori como la dada en (3.1) nuestro problema se transformaba en calcular las siguientes cantidades :

$$\inf_{\Gamma} \rho(x,g) = \inf_{t} \frac{A_0 + H^h(t)}{A + H_0(t)}.$$

$$\sup_{\Gamma} \rho(x,g) = \sup_{t} \frac{A_0 + H^h(t)}{A + H_0(t)}.$$

donde :

$A = \dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \cdot p(x|g_0)$

$p(x|g_0) = \displaystyle\int l(x|\phi) \cdot g_0(\phi) \cdot d\phi$, es decir la predictiva de x dada g_0.

$A_0 = A \cdot \rho(x, g_0)$,

$$H^h(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} \cdot \int_{\phi_{mo}}^{\phi_{mo}+t} h(\phi) \cdot l(x|\phi) d\phi & \text{, si } t \neq 0 \text{ ,} \\ l(x|\phi_{mo}) \cdot h(\phi_{mo}) & \text{, si } t = 0 \text{ .} \end{cases}$$

$$H_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} \cdot \int_{\phi_{mo}}^{\phi_{mo}+t} l(x|\phi) d\phi & \text{, si } t \neq 0, \\ l(x|\phi_{mo}) & \text{, si } t = 0 \text{ .} \end{cases}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

siendo $l(x \mid \phi)$ la verosimilitud del dato observado x para un valor ϕ del parámetro.

3.3.1 Rango para la media a posteriori de ψ.

Antes de comenzar debemos hacer la siguiente aclaración. De la relación $\psi = \mu_0 \cdot \phi$ obtenemos que $E[\psi] = \mu_0 \cdot E[\phi]$ y por tanto, el rango de variación de la media de ψ pasa por calcular el de ϕ y aplicar la homotecia de razón μ_0 a este intervalo.

Estudiamos ahora el rango de variación para la media a posteriori en el modelo contaminado, propuesto en este apartado. En este caso la función $h(\phi) = h_1(\phi) = \phi$.

Tenemos :

$$g_0(\phi) = \frac{(\frac{a}{\phi_0})^a}{\Gamma(a)} \cdot \phi^{a-1} exp(-\frac{a}{\phi_0}\phi) \quad , \phi \geq 0.$$

El dato observado es el número de errores en la muestra de tamaño n, digamos m. Y la verosimilitud asociada :

$$l_1(\phi) \equiv l_1(m|\phi) = exp(-n \cdot \phi)\frac{(n\phi)^m}{m!}.$$

La distribución predictiva será :

$$\begin{aligned}
p(m|g_0) &= \int_0^\infty l_1(m|\phi) \cdot g_0(\phi) \cdot d\phi = \int_0^\infty exp(-n \cdot \phi)\frac{(n\phi)^m}{m!} \cdot \frac{(\frac{a}{\phi_0})^a}{\Gamma(a)} \cdot \phi^{a-1} exp(-\frac{a}{\phi_0}\phi) d\phi \\
&= \frac{n^m}{m!} \cdot \frac{(a/\phi_0)^a}{\Gamma(a)} \cdot \int_0^\infty \phi^{m+a-1} \cdot exp(-(\frac{a}{\phi_0} + n)\phi) d\phi \\
&= \frac{n^m}{m!} \cdot \frac{(a/\phi_0)^a}{\Gamma(a)} \cdot \frac{\Gamma(a+m)}{(\frac{a}{\phi_0} + n)^{m+a}} \\
&= \frac{1}{a+m} \cdot \beta(a, m+1) \cdot (1 - \frac{\frac{a}{\phi_0}}{n + \frac{a}{\phi_0}})^m \cdot (1 - \frac{n}{n + \frac{a}{\phi_0}})^a \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

siendo $\beta(a, m+1) = \dfrac{\Gamma(a+m+1)}{\Gamma(a) \cdot \Gamma(m+1)}$, luego ,

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

$$A = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{a+m} \cdot \beta(a, m+1) \cdot (1 - \frac{\frac{a}{\phi_0}}{n + \frac{a}{\phi_0}})^m \cdot (1 - \frac{n}{n + \frac{a}{\phi_0}})^a \quad (3.5)$$

$$A_0 = A \cdot \rho(m, g_0) = A \cdot \frac{a+m}{n + \frac{a}{\phi_0}} \quad (3.6)$$

Además ,

$$\begin{aligned} H_0(t) &= \frac{1}{t} \cdot \int_{\phi_{mo}}^{\phi_{mo}+t} l_1(m|\phi) \cdot d\phi = \frac{1}{t} \cdot \int_{\phi_{mo}}^{\phi_{mo}+t} exp(-n \cdot \phi) \frac{(n\phi)^m}{m!} \cdot d\phi \\ &= \frac{n^m}{m!} \cdot \frac{1}{t} \cdot \int_{\phi_{mo}}^{\phi_{mo}+t} \phi^m \cdot exp(-n \cdot \phi) d\phi \\ &= \frac{n^m}{m!} \cdot \frac{1}{t} \cdot \frac{\Gamma(m+1)}{n^{m+1}} \cdot \int_{\phi_{mo}}^{\phi_{mo}+t} \frac{n^{m+1}}{\Gamma(m+1)} \cdot \phi^{m+1-1} \cdot exp(-n \cdot \phi) \cdot d\phi \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{t} \cdot [G_{n,m+1}(\phi_{mo}+t) - G_{n,m+1}(\phi_{mo})] \quad (3.7) \end{aligned}$$

donde $G_{p,q}$ es la función de distribución de una v.a. $Gamma(p,q)$. Notaremos por $g_{p,q}$ a su densidad.

$$\begin{aligned} H_1(t) &= \frac{1}{t} \cdot \int_{\phi_{mo}}^{\phi_{mo}+t} h_1(\phi) \cdot l_1(m|\phi) \cdot d\phi = \frac{1}{t} \cdot \int_{\phi_{mo}}^{\phi_{mo}+t} \phi \cdot exp(-n \cdot \phi) \frac{(n\phi)^m}{m!} \cdot d\phi \\ &= \frac{n^m}{m!} \cdot \frac{1}{t} \cdot \int_{\phi_{mo}}^{\phi_{mo}+t} \phi^{m+1} \cdot exp(-n \cdot \phi) d\phi \\ &= \frac{n^m}{m!} \cdot \frac{1}{t} \cdot \frac{\Gamma(m+2)}{n^{m+2}} \cdot [G_{n,m+2}(\phi_{mo}+t) - G_{n,m+2}(\phi_{mo})] \\ &= \frac{m+1}{n^2} \cdot \frac{1}{t} \cdot [G_{n,m+2}(\phi_{mo}+t) - G_{n,m+2}(\phi_{mo})] \quad (3.8) \end{aligned}$$

Definiremos

$$\nu_{p,q}(t) = G_{p,q}(\phi_{mo}+t) - G_{p,q}(\phi_{mo})$$

$$\vartheta_{p,q}(t) = g_{p,q}(\phi_{mo}+t)$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Además de la propia definición de $\vartheta_{p,q}(t)$ tenemos :

$$\begin{aligned}
\vartheta_{p,q+1}(t) &= \frac{p^{q+1}}{\Gamma(q+1)} \cdot (\phi_{mo}+t)^q \cdot exp(-p(\phi_{mo}+t)) \\
&= \frac{p}{q} \cdot (\phi_{mo}+t) \cdot \frac{p^q}{\Gamma(q)} \cdot (\phi_{mo}+t)^{q-1} \cdot exp(-p(\phi_{mo}+t)) \\
&= \frac{p}{q} \cdot (\phi_{mo}+t) \cdot \vartheta_{p,q}(t) \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

La expresión a maximizar (minimizar) es :

$$\xi(t) = \frac{A_0 + H_1(t)}{A + H_0(t)} = \frac{A_0 + \frac{m+1}{n^2} \cdot \frac{1}{t} \cdot \nu_{n,m+2}(t)}{A + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{t} \cdot \nu_{n,m+1}(t)}$$

diferenciando esta expresión, obtenemos que $\xi'(t) = 0$ si y sólamente si :

$$\begin{aligned}
&[\vartheta_{n,m+1}(t) \cdot t - \nu_{n,m+1}(t)] \cdot [A_0 + \frac{m+1}{n^2} \cdot \frac{1}{t} \cdot \nu_{n,m+2}(t)] = \\
&= \frac{m+1}{n} \cdot [A + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{t} \cdot \nu_{n,m+1}(t)] \cdot [\vartheta_{n,m+2}(t) \cdot t - \nu_{n,m+2}(t)]
\end{aligned}$$

simplificando esta expresión :

$$\begin{aligned}
&A_0 \cdot t \cdot \vartheta_{n,m+1}(t) - A_0 \cdot \nu_{n,m+1}(t) + \frac{m+1}{n^2} \cdot \vartheta_{n,m+1}(t) \cdot \nu_{n,m+2}(t) = \\
&= \frac{m+1}{n} \cdot \{A \cdot t \cdot \vartheta_{n,m+2}(t) - A \cdot \nu_{n,m+2}(t) + \frac{1}{n} \cdot \nu_{n,m+1}(t) \cdot \vartheta_{n,m+2}(t)\}
\end{aligned}$$

o equivalentemente,

$$\begin{aligned}
&A_0 \cdot t \cdot \vartheta_{n,m+1}(t) - A_0 \cdot \nu_{n,m+1}(t) + \frac{m+1}{n^2} \cdot \vartheta_{n,m+1}(t) \cdot \nu_{n,m+2}(t) = \\
&= \frac{m+1}{n} \cdot \{A \cdot t \cdot \frac{n}{m+1} \cdot (\phi_{mo}+t) \cdot \vartheta_{n,m+1}(t) - A \cdot \nu_{n,m+2}(t)
\end{aligned}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

$$+\frac{1}{n}\cdot\nu_{n,m+1}(t)\cdot\frac{n}{m+1}\cdot(\phi_{mo}+t)\cdot\vartheta_{n,m+1}(t)\}$$

esto es,

$$A_0\cdot t\cdot\vartheta_{n,m+1}(t)-A_0\cdot\nu_{n,m+1}(t)+\frac{m+1}{n^2}\cdot\vartheta_{n,m+1}(t)\cdot\nu_{n,m+2}(t)=$$
$$A\cdot t\cdot(\phi_{mo}+t)\cdot\vartheta_{n,m+1}(t)-\frac{m+1}{n}\cdot A\cdot\nu_{n,m+2}(t)$$
$$+\frac{1}{n}\cdot(\phi_{mo}+t)\cdot\nu_{n,m+1}(t)\cdot\vartheta_{n,m+1}(t)\}$$

En definitiva, la expresión que debemos resolver es :

$$t\cdot\vartheta_{n,m+1}(t)\cdot\{A-A_0(\phi_{mo}+t)\}+\vartheta_{n,m+1}(t)\cdot\{\frac{m+1}{n^2}\cdot\nu_{n,m+2}(t)-\frac{1}{n}\cdot$$
$$(\phi_{mo}+t)\cdot\nu_{n,m+1}(t)\}=A\cdot\nu_{n,m+1}(t)-\frac{m+1}{n}\cdot A_0\cdot\nu_{n,m+2}(t)\qquad(3.10)$$

Esta ecuación debe resolverse numéricamente. Técnicas del análisis numérico aconsejan que usualmente comenzando con un valor inicial a la derecha de la media a posteriori, en este caso $\frac{m+a}{\frac{a}{\phi_0}+n}$, se obtiene el superior y comenzando a la izquierda el inferior.

3.3.2 Rango para la probabilidad a posteriori de un conjunto de credibilidad al $100\cdot(1-\alpha)\%$ para ψ .

Ahora la función $h(\phi)=h_C(\phi)=I_C(\phi)$, es decir, la función indicadora sobre $C=[\psi\leq UB(1-\alpha;m)]=[\phi\leq\frac{UB(1-\alpha;m)}{\mu_0}]$.

Las cantidades calculadas anteriormente son análogas, salvo :

$$A_0=A\cdot\rho(m,g_0)=A\cdot Prob^{\star}[\phi\leq\frac{UB(1-\alpha;m)}{\mu_0}]=A\cdot\delta$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

y la función $H_C(t)$:

$$H_C(t) = \frac{1}{t} \cdot \int_{\phi_{mo}}^{\phi_{mo}+t} I_C(\phi) \cdot exp(-n\phi) \cdot \frac{(n\phi)^m}{m!} \cdot d\phi$$

Debemos hacer la siguiente discusión de casos :

1. Si $\phi_{m0} \geq \dfrac{UB(1-\alpha;m)}{\mu_0}$, entonces $H_C(t) = 0$, y por tanto, $\xi(t) = \dfrac{A_0}{A + H_0(t)}$, cuya primera derivada se anula donde se anula la primera derivada de $H_0(t)$, luego para este caso la solución se alcanza en :

$$\vartheta_{n,m+1}(t) \cdot t - \nu_{n,m+1}(t) = 0 \tag{3.11}$$

2. Si $\phi_{m0} < \dfrac{UB(1-\alpha;m)}{\mu_0}$, debemos considerar ahora dos nuevos casos :

   (a) Si $t \leq \dfrac{UB(1-\alpha;m)}{\mu_0} - \phi_{mo}$, entonces :

$$\begin{aligned} H_C(t) &= \frac{1}{t} \cdot \int_{\phi_{mo}}^{\phi_{mo}+t} exp(-n\phi) \cdot \frac{(n\phi)^m}{m!} \cdot d\phi = H_0(t) \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{t} \cdot [G_{n,m+1}(\phi_{mo}+t) - G_{n,m+1}(\phi_{mo})] \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{t} \cdot \nu_{n,m+1}(t) \end{aligned} \tag{3.12}$$

   de donde de nuevo el valor óptimo de $\xi(t)$ se obtiene en :

$$\vartheta_{n,m+1}(t) \cdot t - \nu_{n,m+1}(t) = 0 \tag{3.13}$$

   (b) Si $t > \dfrac{UB(1-\alpha;m)}{\mu_0} - \phi_{mo}$, entonces :

$$\begin{aligned} H_C(t) &= \frac{1}{t} \cdot \int_{\phi_{mo}}^{\phi_{mo}+t} I_C(\phi) \cdot exp(-n\phi) \cdot \frac{(n\phi)^m}{m!} d\phi = \\ &= \frac{1}{t} \cdot \int_{\phi_{mo}}^{\frac{UB(1-\alpha;m)}{\mu_0}} exp(-n\phi) \cdot \frac{(n\phi)^m}{m!} d\phi = \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{t} \cdot [G_{n,m+1}(\frac{UB(1-\alpha;m)}{\mu_0}) - G_{n,m+1}(\phi_{mo})] \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{t} \cdot \nu_{n,m+1}(\frac{UB(1-\alpha;m)}{\mu_0} - \phi_{mo}) \end{aligned} \tag{3.14}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

ahora el valor óptimo de $\xi(t)$ se obtiene en :

$$\nu_{n,m+1}(\frac{UB(1-\alpha;m)}{\mu_0} - \phi_{mo}) \cdot [A + \frac{1}{n} \cdot \vartheta_{n,m+1}(t)] =$$
$$= A \cdot \delta \cdot [\nu_{n,m+1}(t) - \vartheta_{n,m+1}(t) \cdot t] \qquad (3.15)$$

3.4 Ilustraciones numéricas.

Nos centramos ahora en el estudio de la variabilidad de las probabilidades a posteriori de las cotas superiores bayesianas al $100 \cdot (1-\alpha)\%$, desarrollado en la Sección 3.3.2 . En la práctica de las técnicas estadísticas en Auditoría Contable suele ser más interesante el cálculo de cotas superiores para ψ, que el estudio de la media a posteriori; de ahí que seleccionemos ahora esta cuestión. En cualquier caso el estudio de la sensibilidad de la media a posteriori puede ser deducido directamente de la Sección 3.3.1 .

Abordamos pues este epígrafe desde dos vertientes. En primer lugar calculamos las cotas superiores $UB(1-\alpha;m)$ para el modelo adoptado a lo largo de este capítulo y planteamos un estudio de robustez sobre las probabilidades a posteriori de estos conjuntos de credibilidad al $100 \cdot (1-\alpha)\%$, es lo que podríamos denominar un estudio de los *rangos del nivel de credibilidad* .

En segundo lugar, se hace el mismo estudio anterior pero ahora la cota $UB(1-\alpha;m)$ es sustituida por la obtenida por *Godfrey* y *Neter (1.984)* en el esquema GU, esto nos permitirá deducir varios comentarios sobre la robustez de estos modelos. Observemos que en este caso el valor de $UB(1-\alpha;m)$ utilizado es el deducido en el modelo GU y no se corresponde con la cota superior bayesiana a posteriori al $100 \cdot (1-\alpha)\%$ (aunque usemos la misma notación. Utilizamos esta cota pero mantenemos nuestro modelo en el que $\psi = \mu_0 \cdot \phi$, y por tanto las probabilidades a posteriori no serán 0.95, sino que habrá que calcularlas en cada caso).

Comenzamos con la primera parte. Desarrollamos ahora los rangos del nivel de credibilidad para nuestro modelo. El escenario de partida para las distintas ilustraciones numéricas realizadas lo constituye el ya mencionado trabajo de *Cox* y *Snell*, en el que se considera un tamaño muestral $n = 100$, ϕ_0 toma dos valores : $\phi_0 = 0.05$ (denominada *tasa de error a priori baja*) y $\phi_0 = 0.25$ (denominada *tasa de error a priori alta*).

Para la información a priori sobr μ dicho trabajo considera diferentes

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

valores del parámetro b y un único valor de $\mu_0 = 0.5$. Así pues, haremos que μ tome un único valor, $\mu_0 = 0.5$.

En todos los casos se consideran cotas superiores al 95%, es decir, $\alpha = 0.05$. El valor de a en todas las ilustraciones es 1.25. Por último, el número de errores en la muestra considerado puede ser $m = 0, 1, 10$. Esto permitirá estudiar la dependencia de la variabilidad a los diferentes resultados muestrales.

En definitiva, para el desarrollo de las ilustraciones numéricas se ha intentado usar toda la información en común que se tienen con las ilustraciones ya realizadas y adaptar las restantes a nuestra situación.

Como primera dificultad, se nos presenta el cálculo de las cotas bayesianas superiores al 95% para nuestro modelo. Para ello se ha desarrollado un programa con el lenguaje de programación que posee el paquete MATLAB y posteriormente depurado con el programa MATHEMATICA. Los valores obtenidos se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 3.1: Valores para $UB(1-\alpha; m)$.

Resultado muestral	Inf. a priori	
	Tasa de error baja ($\phi_0 = 0.05$)	Tasa de error alta ($\phi_0 = 0.25$)
m = 0	0.01385	0.0165
m = 1	0.0206	0.0245
m = 10	0.0691	0.08225

Observemos que estas cotas son más *conservadoras* que las deducidas para los modelos GG y GU (ver Sección 1.6.1 y 1.6.2), en el sentido de que son mayores y por tanto aceptarían más contabilidades que las anteriores (esto es evidente ya que estamos considerando μ fijo).

Una vez obtenidos estos valores podemos pasar a calcular los rangos asociados a cada uno de los seis valores calculados. En la siguiente fase, por tanto, se calculan los rangos sobre la clase de contaminaciones unimodales. De la sección anterior, sabemos que la función a optimizar es :

$$\xi(t;\varepsilon) = \frac{A_0 + H_C(t)}{A + H_0(t)}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Hemos añadido la dependencia del grado de contaminación para estudiar la robustez refiriéndola también a la incertidumbre que sobre la densidad a priori asignada para ϕ tenga el auditor. Para estos cálculos también han sido diseñados programas con el paquete MATLAB.

Para el caso de tasa de error a priori baja, se calculan los rangos para grados de contaminación $\varepsilon = 0.05, \ldots, 0.35$ con saltos de 0.05. Se incluyen también los valores donde se alcanza el inferior (t_0) y el superior (t_1). Los resultados obtenidos se tienen en la siguiente tabla.

Tabla 3.2: Rangos para el nivel de credibilidad. Caso : Tasa de error a priori baja ($\phi_0 = 0.05$)

Resultado muestral m	Grado contaminación ε	inf	sup	t_0	t_1
0	0.05	0.9459	0.9556	0.0365	0.001
	0.10	0.9422	0.9609	0.0365	-
	0.15	0.9383	0.9655	0.0370	-
	0.20	0.9344	0.9695	0.0375	-
	0.25	0.9303	0.9730	0.0380	-
	0.30	0.9261	0.9762	0.0385	-
	0.35	0.9217	0.9791	0.0390	-
1	0.05	0.9471	0.9559	0.0595	0.001
	0.10	0.9446	0.9613	0.0600	-
	0.15	0.9421	0.9660	0.0610	-
	0.20	0.9396	0.9701	0.0615	-
	0.25	0.9370	0.9737	0.0620	-
	0.30	0.9344	0.9768	0.0625	-
	0.35	0.9318	0.9796	0.0635	-
10	0.05	0.9367	0.9532	0.1880	0.1280
	0.10	0.9265	0.9581	0.1895	-
	0.15	0.9170	0.9624	0.1915	-
	0.20	0.9081	0.9663	0.1930	-
	0.25	0.8999	0.9699	0.1945	-
	0.30	0.8921	0.9732	0.1965	-
	0.35	0.8847	0.9761	0.1985	-

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Para el caso $\phi_0 = 0.05$ que nos ocupa, la moda de la densidad a priori se alcanza en $\phi_{mo} = 0.01$ (es decir, el auditor cree que un error del 1% suele ser el más *frecuente*).

Antes de interpretar los resultados anteriores, observemos que por ejemplo, para el caso $m = 10$, $\varepsilon = 0.2$, las densidades donde se alcanzan el inferior y superior son, $0.8 \cdot g_0(\phi) + 0.2 \cdot q_1(\phi)$ y $0.8 \cdot g_0(\phi) + 0.2 \cdot q_2(\phi)$ (siendo $q_1 \sim Unif(0.01, 0.2030)$ y $q_2 \sim Unif(0.01, 0.2280)$), respectivamente. Gráficamente, puede verse en las figuras 3.8 y 3.9 .

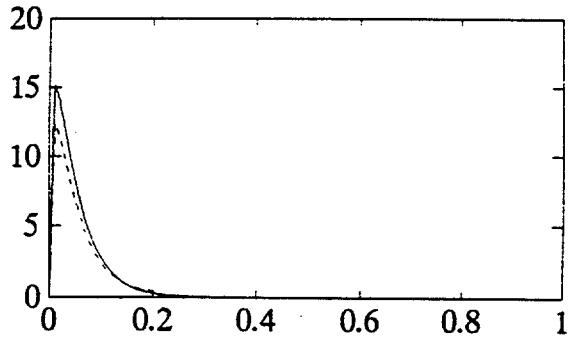

Figura 3.8

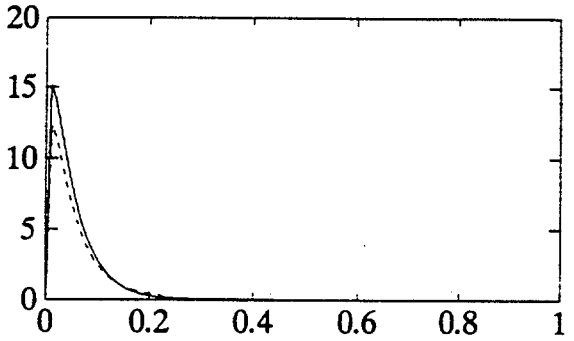

Figura 3.9

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Algunas representaciones de la función $\xi(t;\varepsilon)$ pueden verse en las figuras 3.10 y 3.11 , para distintos valores de ε y m. Para cada valor de ε y de m, se tienen las gráficas aunque aquí se ha optado por representar sólo un par de ellas. La figura 3.10 corresponde al caso $\varepsilon = 0.05$, $m = 0$ y la figura 3.11 al caso $\varepsilon = 0.10$, $m = 10$.

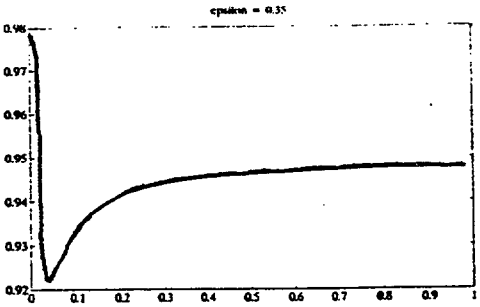

Figura 3.10

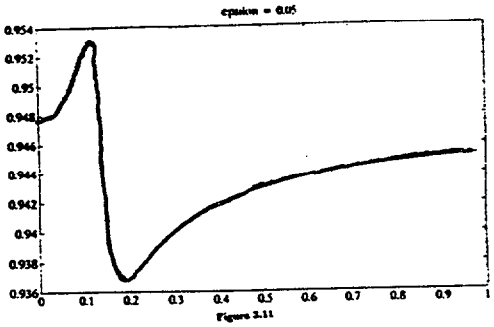

Figura 3.11

A la vista de los resultados podemos decir que los rangos para el nivel de credibilidad en el modelo utilizado se muestran bastante robustos. Robustez que depende sensiblemente del grado de creencia que sobre la densidad a priori tenga el auditor. Una fuerte creencia en su modelo a priori (ε pequeño , $\varepsilon = 0.05, 0.1$) proporciona una robustez grande. Valores más grandes de ε (de 0.15 a 0.25) hacen los rangos mayores. Por último, cuanto más inseguro sobre su asignación a priori se muestre el auditor ($\varepsilon = 0.30, 0.35$) más inestable será el modelo y por tanto con mayor precaución deberá tomar sus decisiones finales el auditor.

Otra de las características que se ponen de manifiesto en estas ilustraciones numéricas es la dependencia que del resultado muestral tiene la estabilidad del modelo. Para una tasa de error baja ($\phi_0 = 0.05$) el auditor debe esperar pocos errores en la muestra, luego para estos casos la robustez del modelo dependerá principalmente del grado de confianza sobre sus creencias a priori (es decir, de ε). Para un resultado *anormalmente alto* de acuerdo con las creencias a priori del auditor el modelo debe reflejar este hecho con cierta inestabilidad; y así es como ocurre. Observemos que para $m = 10$, contaminaciones a partir del 15% presentan rangos grandes y a medida que crece ε mayores son los rangos. Finalmente, en todos los

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

casos se aprecia un grado de robustez notable.

Para el caso de tasa de error a priori alta, $\phi_0 = 0.25$, de nuevo se calculan los rangos para distintos grados de contaminación ($\varepsilon = 0.05, \ldots, 0.35$). Los resultados obtenidos son los reflejados en la tabla 3.3 .

Tabla 3.3: Rangos para el nivel de credibilidad. Caso : Tasa de error a priori alta ($\phi_0 = 0.25$)

Resultado muestral m	Grado contaminación ε	inf	sup	t_0	t_1
0	0.05	0.9420	0.9499	0.01	0.99
	0.10	0.9333	0.9497	-	-
	0.15	0.9238	0.9496	-	-
	0.20	0.9133	0.9494	-	-
	0.25	0.9017	0.9492	-	-
	0.30	0.8887	0.9490	-	-
	0.35	0.8743	0.9487	-	-
1	0.05	0.8926	0.9492	0.001	0.95
	0.10	0.8364	0.9483	-	-
	0.15	0.7814	0.9473	-	-
	0.20	0.7276	0.9462	-	-
	0.25	0.6749	0.9449	-	-
	0.30	0.6234	0.9435	-	-
	0.35	0.5729	0.9419	-	-
10	0.05	0.9509	0.9576	0.95	0.07
	0.10	0.9518	0.9636	-	-
	0.15	0.9528	0.9687	-	-
	0.20	0.9539	0.9729	-	-
	0.25	0.9551	0.9765	-	-
	0.30	0.9563	0.9796	-	-
	0.35	0.9577	0.9822	-	-

Los comentarios para este caso son análogos a los anteriores. Sin embargo, el razonamiento es ligeramente distinto ahora.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Como la tasa de error es alta, la aparición de un número de errores *anormalmente bajo* de acuerdo con las creencias a priori del auditor debe *alterar* el modelo como de hecho ocurre. Para el caso $m = 1$, la falta de robustez del modelo es clara, aún con grados de contaminación bajos. Observemos también que para este caso la cota superior ni siquiera alcanza el valor 0.95 con el que se tomó inicialmente. Esto constituye una muestra más de la inestabilidad de la situación. Para un número de errores alto ya sí que se comporta de manera robusta.

Podemos decir por tanto que la suposición de que μ tome un valor fijo, $\mu = \mu_0$ (y en consecuencia, $\psi = \mu_0 \cdot \phi$), permite desarrollar un análisis de robustez bayesiana. Un auditor con una creencia a priori sobre la tasa de error baja debe esperar situaciones más o menos robustas (estables) dependiendo del grado de seguridad que se tenga sobre ϕ (medido por ε) siempre que el número de errores en la muestra no sea anormalmente alto. Cuando el número de errores sea alto el auditor debe tener una precaución mayor ya que la robustez del modelo queda totalmente alterada, incluso con creencias fuertes sobre el modelo (valores de ε pequeños) dan rangos grandes para el nivel de credibilidad.

Por el contrario un auditor con un creencia a priori sobre la tasa de error alta está contemplando un modelo poco robusto e inestable (ya que el número de errores en la muestra, en la práctica, suele ser pequeño).

Estudiamos ahora el comportamiento de las cotas obtenidas con el mod elo GU. En consecuencia, los valores de $UB(0.95; m)$ anteriores serán sustituidos por los obtenidos en *Godfrey* y *Neter (1.982, 1.984)* .

En la siguiente tabla se tienen los valores, en GU, para estas cotas con un tamaño muestral $n = 100$, como viene siendo habitual.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Sabemos que en el modelo GU la información muestral viene dada por m y $\overline{z}$ (recordemos que $\overline{z}$ no es utilizado, en principio, cuando $\psi = \mu_0 \cdot \phi$). En las ilustraciones numéricas realizadas por *Godfrey* y *Neter* se presentan las cotas superiores al 95% para varios valores de $\overline{z}$ ($0.01, 0.5$ y 1.00) cuando $m \geq 1$. A estos casos corresponden los tres valores dados para $m = 1$ y $m = 10$, en la tabla.

Resultado muestral m	Tasa de error a priori baja	Tasa de error a priori alta
0	0.0064	0.1305
1	0.0071	0.1149
	0.0113	0.1407
	0.0121	0.1490
10	0.0400	0.1733
	0.0477	0.1959
	0.0503	0.2061

Obervemos que ahora lo que hacemos es asumir el modelo asignado en este capítulo pero ahora vemos la variabilidad de las cotas deducidas en GU. Desde luego estas probabilidades no son ahora 0.95 (serán más bajas, ya que nuestro modelo es más conservador) y debemos calcularlas. Usando el programa MATHEMATICA han sido calculadas dichas probabilidades.

Los rangos para las probabilidades a posteriori anteriores se dan en las tablas 3.4 y 3.5 .

Para el caso de tasa de error a priori alta las cotas GU proporcionan en nuestro modelo probabilidades cercanas a la unidad. Por esta razón no se ha estudiado la variabilidad en este caso.

Los comentarios realizados anteriormente son aplicables también a este caso. Algunas diferencias merecen ser comentadas :

1. Puesto que estamos en un caso de tasa de error baja ($\phi_0 = 0.05$) cuando $m = 0$, la robustez del modelo dependerá en gran parte del grado de contaminación. Sin embargo, si comparamos las tablas para este caso, podemos ver como las cotas superiores obtenidas en el modelo GU son más inestables en este modelo que las obtenidas. Es decir, el modelo GU puede resultar menos robusto, aún incluso cuando los datos están de acuerdo con las creencias a priori.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

2. Cuando aparecen errores en la muestra ($m = 1, 10$) podemos ver también como $\overline{z}$ puede controlar la robustez del modelo. Esencialmente los tres casos presentan el mismo tipo de sensibilidad, en el caso $m = 1$.

3. De nuevo, una observación muestral bastante discordante con las creencias a priori, hacen el modelo bastante inestable incluso para grados de contaminación pequeños. El tamaño del error medio ($\overline{z}$) controla sensiblemente la robustez. Así cuando $\overline{z}$ es pequeño aún siendo m *anormalmente grande* el modelo puede ser considerado robusto para valores de ε pequeños. No ocurre así para valores grandes de $\overline{z}$.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Tabla 3.4: Rangos para la Prob. a posteriori. Caso : Tasa de error a priori baja ($\phi_0 = 0.05$)

Resultado muestral m	Grado contaminación ε	inf	sup	t_0	t_1
0	0.05	0.6986	0.7198	0.0125	0.99
	0.10	0.6772	0.7192	-	-
	0.15	0.6561	0.7186	0.0130	-
	0.20	0.6352	0.7179	0.0135	-
	0.25	0.6145	0.7171	-	-
	0.30	0.5940	0.7161	0.0140	-
	0.35	0.5735	0.7151	0.0145	-
1	0.05	0.4115	0.4244	0.0265	0.99
($\overline{z} = 0.01$)	0.10	0.3987	0.4238	0.0275	-
	0.15	0.3864	0.4234	0.0280	-
	0.20	0.3747	0.4223	0.0285	-
	0.25	0.3634	0.4214	0.0295	-
	0.30	0.3525	0.4204	0.0300	-
	0.35	0.3419	0.4192	0.0310	-
1	0.05	0.7088	0.7190	0.0400	0.02
($\overline{z} = 0.50$)	0.10	0.7004	0.7206	0.0405	-
	0.15	0.6921	0.7220	0.0410	-
	0.20	0.6839	0.7234	0.0415	-
	0.25	0.6758	0.7247	-	-
	0.30	0.6678	0.7259	0.0425	-
	0.35	0.6597	0.7270	0.0440	-
1	0.05	0.7459	0.7579	0.0420	0.02
($\overline{z} = 1.00$)	0.10	0.7383	0.7619	0.0425	-
	0.15	0.7308	0.7657	0.0430	-
	0.20	0.7234	0.7692	0.0435	-
	0.25	0.7160	0.7725	0.0445	-
	0.30	0.7086	0.7756	0.0450	-
	0.35	0.7012	0.7784	0.0460	-

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Tabla 3.5: Rangos para la Prob. a posteriori. Caso : Tasa de error a priori baja ($\phi_0 = 0.05$) (Continuación)

Resultado muestral m	Grado contaminación ε	inf	sup	t_0	t_1
10	0.05	0.3852	0.4021	0.1535	0.02
($\overline{z} = 0.01$)	0.10	0.3832	0.4188	0.1540	-
	0.15	0.3810	0.4375	-	-
	0.20	0.3785	0.4585	-	-
	0.25	0.3758	0.4824	0.1545	-
	0.30	0.3729	0.5096	-	-
	0.35	0.3695	0.5410	0.1550	-
10	0.05	0.6142	0.6458	0.1600	0.02
($\overline{z} = 0.50$)	0.10	0.6117	0.6785	0.1605	-
	0.15	0.6089	0.7150	-	-
	0.20	0.6059	0.7560	-	-
	0.25	0.6026	0.8026	0.1610	-
	0.30	0.5990	0.8557	-	-
	0.35	0.5949	0.9171	0.1615	-
10	0.05	0.6821	0.7204	0.1645	0.02
($\overline{z} = 1.00$)	0.10	0.6798	0.7605	0.1650	-
	0.15	0.6773	0.8054	-	-
	0.20	0.6745	0.8559	-	-
	0.25	0.6715	0.9132	0.1655	-
	0.30	0.6681	0.9786	-	-
	0.35	0.6643	0.999	0.1660	-

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Capítulo 4

Modelo Beta-Uniforme de Godfrey y Neter.

4.1 Introducción.

Dentro de las modificaciones del modelo GG (Gamma-Gamma inversa) introducido por *Cox* y *Snell (1.979)* los modelos propuestos por *Godfrey* y *Neter (1.982, 1.984)* - los denominados BU, GU, BU100 y GU100, ver Sección 1.6.2 - han sido aceptados ampliamente en la literatura que sobre técnicas bayesianas en Auditoría Contable se ha escrito y escribe actualmente; ya que son más cercanas a la realidad de la A.C, si bien puede argumentarse que con una precisa asignación de los parámetros a priori en un modelo GG podemos estar dentro de un modelo bastante realista.

Como hemos visto en toda la Sección 1.6 y a lo largo del Capítulo 3, el problema principal (o uno de ellos) con el que se encuentra un auditor es la inseguridad que posee sobre su asignación de parámetros a priori e incluso sobre la densidad a priori entera ya que puede estar dispuesto a admitir otra densidad a priori próxima a sus creencias iniciales. Una solución a este problema ha sido desarrollada en el Capítulo 3 al admitir toda una clase de densidades a priori y estudiar el comportamiento de las medidas de interés sobre dicha clase. La situación que se plantea en este capítulo difiere de la anterior aunque su filosofía es esencialmente la misma.

Considerando, por tanto, el modelo BU (*Godfrey* y *Neter (1.984)*) como una buena aproximación al problema de la asignación de densidades a priori para los parámetros ϕ y μ, es decir :

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

- La densidad a priori de ϕ es $Beta(\phi_0 c, (1-\phi_0)c)$:

$$g_0(\phi) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(\phi_0 c)\cdot\Gamma((1-\phi_0)c)} \cdot \phi^{\phi_0 c - 1} \cdot (1-\phi)^{(1-\phi_0)c-1} \quad , \ \phi \in [0,1] \tag{4.1}$$

- La densidad a priori de μ es $Unif(0,1)$:

$$g_1(\mu) = 1 \quad , \ \mu \in [0,1] \tag{4.2}$$

abordamos este capítulo.

Recordemos que la información muestral (ver Sección 1.6.2) viene dada por :

$$l_1(\phi) = \binom{n}{m} \phi^m \cdot (1-\phi)^{n-m} \ , \ \phi \in [0,1] \tag{4.3}$$

$$l_2(\mu) = \frac{exp(-m\cdot\overline{z}/\mu)}{[\mu\cdot(1-exp(-1/\mu))]^m} \quad , \ \mu \in [0,1] \tag{4.4}$$

siendo, como anteriormente, m el número de errores observados en una muestra de tamaño n y $\overline{z}$ la fracción media de error.

Con esta información, en el modelo BU (al igual que en el GU) tanto la densidad a priori como a posteriori de $\psi = \mu \cdot \phi$ no resulta tan sencilla de calcular como en el modelo GG y deben obtenerse numéricamente. Es decir, el hecho de considerar una aproximación más realista hace perder la propiedad de *conjugación* que se tiene en GG y en consecuencia la utilización de técnicas numéricas de integración se hace imprescindible.

El planteamiento que hacemos en este capítulo es el mismo que el hecho en el Capítulo 3, es decir, estudiar la robustez de una modificación del modelo BU de una manera metodológica. De nuevo será preciso para ello, considerar un valor fijo para μ y una clase para la densidad a priori de ϕ. Sin embargo, por diferentes razones, la clase de contaminaciones la constituirán todas aquellas densidades que tengan unos cuantiles conocidos, es lo que se conoce como *clase de contaminaciones parcialmente conocidas* , cuyo planteamiento teórico ha sido tratado en la Sección 2.2.2 .

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

En la Sección 4.2 se motiva y plantea el modelo de contaminaciones parcialmente conocidas para una modificación del modelo BU, aquí considerada. En la Sección 4.3 se resuelve el modelo utilizando los resultados previos de la Sección 2.2.3 . Una vez resuelto, en la Sección 4.4 , se presentarán una serie de ilustraciones numéricas que abarcan todos los escenarios planteados en los modelos originales, lo cual permite la comparación entre ellos, así como con los resultados del Capítulo 3.

4.2 Motivación y planteamiento del modelo.

Puesto que nuestra idea es plantear un análisis bayesiano robusto para un modelo BU modificado, del mismo modo que en el Capítulo 3, nos encontramos pues con los mismos pasos a dar hasta poder situarnos en un escenario como el contemplado en la Sección 2.2.3 .

De nuevo el uso de una clase de contaminaciones reflejará la incertidumbre que sobre una determinada densidad a priori de ϕ posea el auditor. Así pues, en primer lugar, debemos ver cómo el hecho de considerar al parámetro μ fijo no supone una hipótesis restrictiva; es más, el uso de clases de densidades de priori puede contemplar situaciones derivadas de la suposición anterior.

Una vez justificado este hecho, la siguiente cuestión a resolver es determinar la clase de contaminaciones adecuadas a la situación que nos ocupa. Pero vayamos por partes.

Una revisión a los trabajos de *Cox* y *Snell (1.979)* , *Godfrey* y *Neter (1.984)* , *Felix* y *Grimlund (1.977)* , pueden convencernos de que la asignación de una distribución a priori Beta para el parámetro ϕ, es muy utilizada por los auditores que usan estas técnicas; y con una asignación adecuada de sus parámetros el auditor puede reflejar correctamente sus creencias a priori.

En las distintas ilustraciones numéricas planteadas en *Godfrey* y *Neter (1.984)* , para el modelo BU se consideran los siguientes valores para los parámetros a priori :

$$\phi_0 = 0.05, 0.1, 0.25$$

$$c = 2, 3, 4$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Utilizando estos parámetros a priori en (4.1) y suponiendo que la densidad a priori de μ es $Unif(0,1)$ se deduce la densidad a priori para ψ (ver Sección 1.6.2). Observemos algunas representaciones gráficas de ellas .

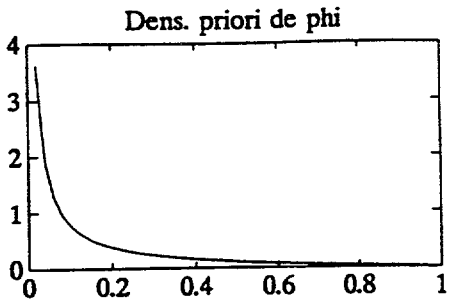

Figura 4.1

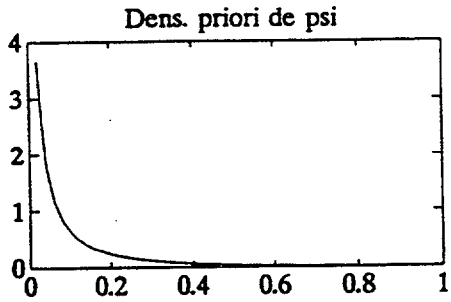

Figura 4.2

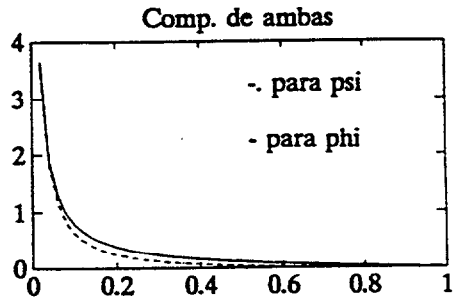

Figura 4.3

En las figuras 4.1, 4.2 y 4.3 se representan : la densidad a priori de ϕ, la densidad a priori de ψ y se comparan, respectivamente, para $\phi_0 = 0.05$ y $c = 2$. En continuo se representa la densidad de ϕ y en discontinuo la de ψ.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

En las figuras 4.4, 4.5 y 4.6 se representan : la densidad a priori de ϕ, la densidad a priori de ψ y se comparan, respectivamente, para $\phi_0 = 0.1$ y $c = 3$. Por último, en las figuras 4.7, 4.8 y 4.9 se representan : la densidad a priori de ϕ, la densidad a priori de ψ y se comparan, respectivamente, para $\phi_0 = 0.25$ y $c = 3$.

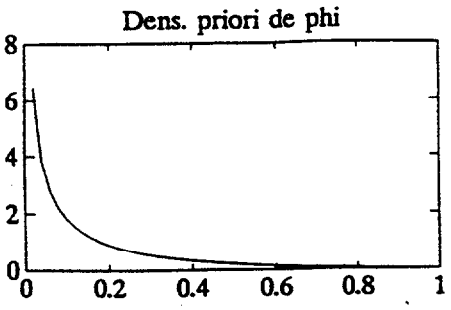

Figura 4.4

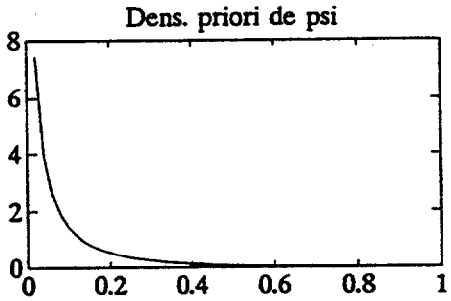

Figura 4.5

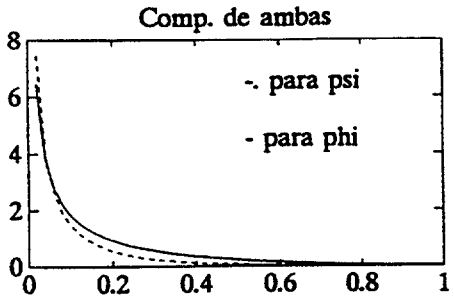

Figura 4.6

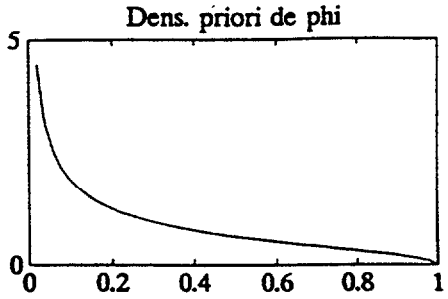

Figura 4.7

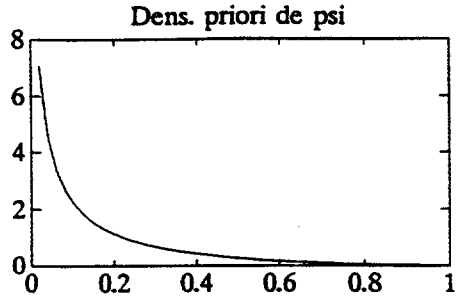

Figura 4.8

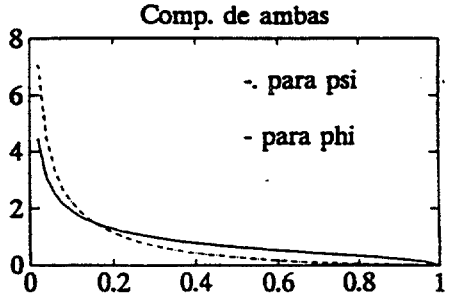

Figura 4.9

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Para cada uno de los nueve casos citados, las representaciones son análogas.

De ellas podemos observar como con una asignación a priori como la del modelo BU la densidad de ψ a pesar de no tener una expresión explícita (es necesario el uso de algoritmos numéricos para su cálculo) es *sustancialmente* una densidad Beta con forma muy parecida a la de ϕ. Esto puede parecer claro si tenemos en cuenta que una especificación del tipo $\mu \sim Unif(0,1)$ puede considerarse como un caso de información a priori pobre (se asigna igual peso a todos los valores de μ), lo que es conocido como un caso de *información a priori no informativa* (un excelente planteamiento sobre densidades a priori no informativas, así como recopilación de trabajos sobre el tema, es el Capítulo 3 de *Berger (1.985)*).

De hecho, las mayores diferencias entre ϕ y ψ aparecen para valores muy altos de ϕ_0 y c, lo cual no parece que represente muy adecuadamente la realidad. Un auditor que crea que el error medio, ϕ_0, de una contabilidad sea del 25% , no parece que deba estar muy dispuesto a auditar dicha población. Se trata pues más de casos artificiales utilizados para ver el comportamiento del modelo que casos reales.

Puede por tanto considerarse una densidad para ψ proporcional a la de ϕ y a continuación considerar la clase de todas las densidades próximas a ella en algún sentido. Parece pues que la idea de hacer $\mu = \mu_0$ puede resultar acertada.

En definitiva, nuestro primer problema pueder ser resuelto ya que $\mu = \mu_0$ puede ser considerado. Al igual que en el Capítulo 3, obtenemos :

$$\psi = \mu_0 \cdot \phi$$

y el siguiente paso consiste en proporcionar a ϕ (y en consecuencia también a ψ) una clase de densidades a priori que sea una representación lo más fiel posible de la realidad.

La clase será del tipo :

$$\Gamma = \{(1-\varepsilon) \cdot g_0(\phi) + \varepsilon \cdot q \; ; \; q \in D\}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Si volvemos a observar las figuras anteriores deducimos rápidamente que ahora la propiedad de unimodalidad no es sostenible y en consecuencia la clase D dada en el Capítulo 3 no es adecuada. Veamos cómo encontrar una clase adecuada para esta situación.

Tal y como queda de manifiesto en *Corless (1.972), Schaefer y Borcheoding (1.973)* y principalmente *Crosby (1.981)* , entre otros, en el proceso de asignación de distribuciones a priori resulta imprescindible (desde el punto de vista de la eficiencia y consistencia) un entrenamiento estadístico de los auditores ya que ello puede contribuir a una buena asignación. Lamentablemente este hecho no es generalizado hoy en día. En este nuevo planteamiento este inconveniente puede ser superado con tan sólo la asignación de unos cuantiles de la distribución.

En los anteriores trabajos se hacen investigaciones sobre asignación de distribuciones a priori a través de ciertas medidas que resulten intuitivas para el auditor, como son los cuantiles. Conectando pues con la metodología de asignación P.D.F. (" Points Density Function ", introducida por *Winkler (1.967)* e incluso la C.D.F., " Cumulative Distribution Function " , en la que se especifica la función de distribución a través de preguntas directas sobre cuantiles para posteriormente dibujarla) en la que se especifican puntos de la densidad, el auditor puede estar dispuesto a asegurar que los cuantiles de la densidad a priori que el propone son, desde luego, una perfecta representación de la realidad.

Es decir, el auditor parece estar más dispuesto a admitir la asignación de los cuantiles a priori que el que la densidad a priori para ϕ sea *exactamente* Beta. Por tanto, se nos plantean densidades a priori con formas parecidas a las Beta y eso sí, con unos cuantiles determinados (en la práctica, y así lo consideraremos nosotros, tomaremos cuartiles). A este tipo de situaciones es a lo que en la Sección 2.2.3 hemos denominado *contaminaciones parcialmente conocidas* .

Intentando sistematizar el proceso que proponemos, podríamos decir que los pasos a dar ahora serán :

Paso 1 : Adopción por parte del auditor de un modelo en el que se refleje su interés en un modelo flexible que permita recoger imprecisiones en su información a priori (modelo de contaminaciones).

Paso 2 : Asignación de cuantiles (tres cuartiles, por ejemplo) para la

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

distribución a priori de ϕ :

$$q_i \in (0,1) \ \ tal\ que: \ \ \frac{i}{n} = \int_0^{q_i} g_0(\phi) \cdot d\phi \ \ (i = 1, \ldots, n)$$

aún cuando un auditor no posea demasiado entrenamiento estadístico, la asignación de valores que indiquen un porcentaje del error pueden ser dados con cierta facilidad y entendimiento (por ejemplo, si consid eramos cuartiles, cantidades para el 25, 50 y 75 % no suelen presentar demasiada dificultad).

Paso 3 : Considerar μ fijo, $\mu = \mu_0$. Una vez establecidos los cuantiles de ϕ, calcular una densidad a priori beta [13] para ϕ, $g_0(\phi)$, con estos cuantiles.

Es decir, calcular ϕ_0, c tales que :

$$g_0(\phi) \propto \phi^{\phi_0 c - 1}(1-\phi)^{(1-\phi_0)c-1}$$
$$\int_0^{q_i} g_0(\phi) d\phi = \frac{i}{n} \ \ ,(i = 1, \ldots, n)$$

Paso 4 : Considerar la clase de distribuciones a priori para ϕ (equivalentemente, para $\psi = \mu_0 \cdot \phi$)

$$\Gamma = \{g : g = (1-\varepsilon) \cdot g_0 + \varepsilon \cdot q; q \in D\}$$

donde $D = \{dens.a\ priori\ con\ los\ mismos\ cuantiles\ que\ g_0\}$.

Paso 5 : Calcular el rango de las medidas de interés : medias a posteriori, probabilidades de conjuntos creibles, etc ...

4.3 Resolución del modelo.

Principalmente nos centraremos en el estudio de la robustez de probabilidades a posteriori de conjuntos creibles para ψ. Lo cual, de la misma manera que hicimos anteriormente, pasa por estudiar el rango de variación para ϕ del suceso derivado de la relación $\psi = \mu_0 \cdot \phi$.

El estudio que desarrollaremos está centrado en el conocimiento de los cuartiles. Debe señalarse que la metodología es válida para cuantiles de cualquier orden (*Cano, Hernández* y *Moreno (1.989)*). Estamos pues en

[13] esta solución no es inmediata.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

las condiciones para aplicar los resultados de la Sección 2.2.2 .

Consideraremos pues, que la información a priori sobre ϕ es *"imprecisa"* y por ello tomaremos una clase de distribuciones a priori del tipo :

$$\Gamma = \{(1-\varepsilon)\cdot g_0 + \varepsilon \cdot q \; ; q \in D\} \tag{4.5}$$

donde g_0 es una beta con los parámetros fijados según los pasos 2 y 3 anteriores, $\varepsilon \in [0,1]$ es fijado por el auditor en función de la confianza que le merece g_0 y D es la clase de contaminaciones; en este caso :

$$D = \{ \textit{ distrib. a priori con los mismos cuartiles que } g_0 \}$$

Denominaremos q_i $(i = 1,2,3)$ a estos cuartiles conocidos y tomaremos $q_0 = 0$ y $q_4 = 1$. Designaremos por C_i a los intervalos :

$$C_1 = (0, q_1]$$
$$C_i = (q_{i-1}, q_i] \quad (i = 2,3)$$
$$C_4 = (q_3, 1)$$

tenemos por tanto :

$$\forall\, q \in D : \int_{C_i} q(\phi)\cdot d\phi = \int_{C_i} g_0(\phi)\cdot d\phi = \frac{1}{4} \quad (i = 1,\ldots,4)$$

con lo cual la clase D pasa a reescribirse por :

$$D = \{ \; q \; : \; \int_{C_i} q(\phi)\cdot d\phi = \frac{1}{4} \quad i = 1,\ldots,4 \; \}$$

Al ser la clase Beta conjugada bajo un proceso de muestreo Binomial, la distribución a posteriori de ϕ, para g_0, es $Beta(\phi_0 c + m, (1-\phi_0)c + n - m)$ (siendo m el número de errores aparecidos en una muestra de tamaño n, cuya verosimilitud será $Binomial(n, \phi)$) entonces la distribución a posteriori de ψ dado m (para g_0) será :

$$f_0(\psi|\, m) = K \cdot \psi^{\phi_0 c + m - 1} \cdot (\mu_0 - \psi)^{(1-\phi_0)c + n - m - 1} \tag{4.6}$$

siendo la constante K :

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

$$K = \frac{\Gamma(n+c)}{\Gamma(\phi_0 c + m) \cdot \Gamma((1-\phi_0)c + n - m)} \cdot \frac{1}{\mu_0^{n+c-1}}$$

de donde deduciremos la cota superior bayesiana al $100 \cdot (1-\alpha)\%$, como el cuantil $1-\alpha$, en la práctica $\alpha = 0.05, 0.01$) :

$$Prob^{\star}[\psi \leq UB(1-\alpha; m)] = 1 - \alpha$$

y de nuevo,

$$1 - \alpha = Prob^{\star}[\psi \leq UB(1-\alpha; m)] = Prob^{\star}[\phi \leq \frac{UB(1-\alpha; m)}{\mu_0}]$$

de donde el rango de variación que estudiaremos será :

$$\inf_{g \in \Gamma} Prob^{\star}[\phi \leq \frac{UB(1-\alpha; m)}{\mu_0}]$$

$$\sup_{g \in \Gamma} Prob^{\star}[\phi \leq \frac{UB(1-\alpha; m)}{\mu_0}]$$

En consecuencia estamos interesados en estudiar la variación de las prob abilidades a posteriori sobre la clase Γ del conjunto $A = (0, \frac{UB(1-\alpha;m)}{\mu_0}]$:

$$Prob^{g}[A|\ m] = \frac{\int_A l(m \mid \phi) g(\phi) d\phi}{p(m \mid g)}$$

donde $l(\cdot \mid \phi)$ es la verosimilitud y $p(\cdot \mid g)$ es la predictiva. En definitiva, hay que estudiar rangos de cantidades de la forma :

$$\rho(g) = \frac{\int l_1(\phi) g(\phi) d\phi}{\int l_2(\phi) g(\phi) d\phi}$$

con $g \in \Gamma$. Es claro que para encontrar el supremo o el ínfimo de estas cantidades sobre la clase Γ es suficiente encontrarlos sobre la clase D.

El resultado central que da solución a este problema nos asegura que :

$$\sup_{g \in D} \rho(g) = \sup_{(\phi_1, \ldots, \phi_4) \in C_1 x \ldots x C_4} \frac{\sum_{i=1}^{4} l_1(\phi_i)}{\sum_{i=1}^{4} l_2(\phi_i)}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

$$\inf_{g\in D} \rho(g) = \inf_{(\phi_1,\ldots,\phi_4)\in C_1 x \ldots x C_4} \frac{\sum_{i=1}^{4} l_1(\phi_i)}{\sum_{i=1}^{4} l_2(\phi_i)}$$

(la demostración de estos resultados puede encontrarse en *Moreno* y *Cano (1.991)* donde $C_i (i = 1, \ldots, 4)$ son los intervalos definidos por los cuartiles $q_i (i = 1, \ldots, 4)$. y l_1, l_2 son los inferiores y superiores de la verosimilitud sobre ciertos dominios, ver Sección 2.2.2)

Puede determinarse entonces que los rangos de probabilidades a posteriori del conjunto en cuestión son :

$$\inf_{g\in\Gamma} Prob^{\star}[\phi \leq \frac{UB(1-\alpha;m)}{\mu_0}] =$$

$$\{ (1-\varepsilon)\cdot p(m \mid g_0)\cdot \beta_0 + \frac{\varepsilon}{4}\cdot \sum_{i\in I} \inf_{\phi\in C_i} l_1(\phi) \}\cdot$$

$$\{ (1-\varepsilon)\cdot p(m \mid g_0) + \frac{\varepsilon}{4}\sum_{k\geq 1} \sup_{\phi\in A^c\cap C_k} l_1(\phi) + \frac{\varepsilon}{4}\cdot \sum_{i\in I} \inf_{\phi\in C_i} l_1(\phi) \}^{-1}$$

donde,

$$\beta_0 = Prob^{g_0}[\phi \leq \frac{UB(1-\alpha;m)}{\mu_0}] = 1-\alpha$$

$l_1(\phi)$ es la verosimilitud :

$$l_1(\phi) = \binom{n}{m}\cdot \phi^m \cdot (1-\phi)^{n-m}$$

que como función de $\phi \in (0,1)$ es creciente en $(0, \frac{m}{n}]$ y decreciente en $(\frac{m}{n}, 1)$, alcanzando su máximo en el estimador de máxima verosimilitud, E.M.V. : $\hat{\phi} = \frac{m}{n}$.

$p(m \mid g_0)$ es la predictiva :

$$p(m \mid g_0) = \int_0^1 l_1(\phi)\cdot g_0(\phi)\cdot d\phi$$

$$= \int_0^1 \binom{n}{m}\cdot \phi^m \cdot (1-\phi)^{n-m} \cdot \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(\phi_0 c)\cdot \Gamma((1-\phi_0)c)} \cdot \phi^{\phi_0 c-1}\cdot (1-\phi)^{(1-\phi_0)c-1}\cdot d\phi =$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

$$= \binom{n}{m} \cdot \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(\phi_0 c) \cdot \Gamma((1-\phi_0)c)} \cdot \int_0^1 \phi^{\phi_0 c+m-1} \cdot (1-\phi)^{(1-\phi_0)c+n-m-1} \cdot d\phi =$$

$$= \binom{n}{m} \cdot \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(\phi_0 c) \cdot \Gamma((1-\phi_0)c)} \cdot \frac{\Gamma(\phi_0 c+m) \cdot \Gamma((1-\phi_0)c+n-m)}{\Gamma(n+c)} \qquad (4.7$$

(o sea, una distribución beta-binomial, *Aitchison* y *Dunsmore (1.975)*)

A^c es el intervalo abierto $(\frac{UB(1-\alpha;m)}{\mu_0}, 1)$

y donde el conjunto de índices $I \subseteq \{1,2,3,4\}$ viene definido por :

$$i \in I \iff C_i \subset (0, \frac{UB(1-\alpha;m)}{\mu_0})$$

Sustituyendo en la anterior expresión tenemos :

$$\inf_{g \in \Gamma} Prob^{\star}[\phi \leq \frac{UB(1-\alpha;m)}{\mu_0}] =$$

$$\{ (1-\varepsilon) \cdot (1-\alpha) \cdot \frac{\Gamma(c) \cdot \Gamma(\phi_0 c+m) \cdot \Gamma((1-\phi_0)c+n-m)}{\Gamma(\phi_0 c) \cdot \Gamma((1-\phi_0)c) \cdot \Gamma(n+c)} +$$

$$\frac{\varepsilon}{4} \cdot \sum_{i \in I} \inf_{\phi \in C_i} \phi^m \cdot (1-\phi)^{n-m} \}.$$

$$\{ (1-\varepsilon) \cdot \frac{\Gamma(c) \cdot \Gamma(\phi_0 c+m) \cdot \Gamma((1-\phi_0)c+n-m)}{\Gamma(\phi_0 c) \cdot \Gamma((1-\phi_0)c) \cdot \Gamma(n+c)} + \frac{\varepsilon}{4} \cdot \sum_{k \geq 1} \sup_{\phi \in A^c \cap C_k} \phi^m \cdot (1-\phi)^{n-m} +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{4} \cdot \sum_{i \in I} \inf_{\phi \in C_i} \phi^m \cdot (1-\phi)^{n-m} \}^{-1}$$

observemos que la función sobre la que se calculan los inferiores y superiores es $\phi^m \cdot (1-\phi)^{n-m}$. Función también creciente en $(0, \frac{m}{n}]$ y decreciente en $(\frac{m}{n}, 1)$ y por tanto estos inferiores y superiores se alcanzarán en los extremos de los intervalos derivados de la definición del conjunto de índices. Es decir, habrá que estudiar cuál es la posición de los conjuntos C_i respecto al intervalo $(0, \frac{m}{n}]$. En el *"peor"* de los casos habrá que evaluar la función en tres puntos.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Análogamente para el superior se obtiene :

$$\sup_{g\in\Gamma} Prob^{\star}[\phi \leq \frac{UB(1-\alpha;m)}{\mu_0}] =$$

$$= \{ (1-\varepsilon)\cdot p(m \mid g_0)\cdot \beta_0 + \frac{\varepsilon}{4}\cdot \sum_{i\in J} \sup_{\phi\in A\cap C_i} f(m \mid \phi) \}\cdot$$

$$\{ (1-\varepsilon)\cdot p(m \mid g_0) + \frac{\varepsilon}{4}\sum_{i\in K} \inf_{\phi\in C_i} f(m \mid \phi) + \frac{\varepsilon}{4}\cdot \sum_{i\in J} \inf_{\phi\in A\cap C_i} f(m \mid \phi) \}^{-1} =$$

$$= \{ (1-\varepsilon)\cdot(1-\alpha)\cdot \frac{\Gamma(c)\cdot\Gamma(\phi_0 c+m)\cdot\Gamma((1-\phi_0)c+n-m)}{\Gamma(\phi_0 c)\cdot\Gamma((1-\phi_0)c)\cdot\Gamma(n+c)}$$

$$+\frac{\varepsilon}{4}\cdot \sum_{i\in J} \inf_{\phi\in A\cap C_i} \phi^m\cdot(1-\phi)^{n-m} \}\cdot$$

$$\{ (1-\varepsilon)\cdot \frac{\Gamma(c)\cdot\Gamma(\phi_0 c+m)\cdot\Gamma((1-\phi_0)c+n-m)}{\Gamma(\phi_0 c)\cdot\Gamma((1-\phi_0)c)\cdot\Gamma(n+c)}$$

$$+\frac{\varepsilon}{4}\cdot \sum_{i\in K} \sup_{\phi\in C_i} \phi^m\cdot(1-\phi)^{n-m} + \frac{\varepsilon}{4}\cdot \sum_{i\in J} \inf_{\phi\in A\cap C_i} \phi^m\cdot(1-\phi)^{n-m} \}^{-1}$$

donde los conjuntos de índices $J, K \subseteq \{1,2,3,4\}$ vienen dados por :

$$i\in J \iff (0, \frac{UB(1-\alpha;m)}{\mu_0}] \cap C_i \neq \emptyset$$

$$i\in K \iff (0, \frac{UB(1-\alpha;m)}{\mu_0}] \cap C_i = \emptyset$$

la misma observación sobre los extremos de la función $\phi^m\cdot(1-\phi)^{n-m}$ puede hacerse aquí.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

4.4 Ilustraciones numéricas.

Usando las cotas superiores bayesianas a posteriori : $UB(1-\alpha;m)$, calculadas mediante el programa MATHEMATICA y desarrollando un programa con MATLAB que calcula los cuartiles de diferentes distribuciones $Beta(\phi_0 c,(1-\phi_0)c)$, se calculan los rangos estudiados teóricamente en este capítulo. De nuevo, situándonos en un escenario lo más parecido al que se plantean en los trabajos originales los valores para los parámetros ahora considerados son :

- Tamaño muestral, $n = 100$.
- $\alpha = 0.05$.
- Para el valor medio de ϕ, ϕ_0, se consideran los siguientes valores para ϕ_0 : 0.05 (Tasa de error a priori baja), 0.1 (Tasa de error a priori normal), 0.25 (Tasa de error a priori alta).
- Para el parámetro de control de la varianza, $c = 2,3,4$.
- Para el número de errores en la muestra, m : $m = 0,1,10$.

Es decir, describimos el comportamiento de robustez para 27 situaciones. Este estudio es algo más amplio que el desarrollado en los trabajos originales.

En primer lugar obtenemos los cuartiles en cada una de las situaciones anteriores. En la Tabla 4.1 se recogen estos cuartiles. A continuación se calculan las cotas bayesianas a posteriori al 95% , $UB(0.95;m)$. En la Tabla 4.2 están calculados. Notemos que estas cotas son para ϕ, luego para las cotas para ψ basta multiplicarlas por μ_0.

Obsérvese que un aumento del parámetro c implica una disminución del valor de los cuantiles, en definitiva, un menor dispersión de la densidad a priori.

A continuación se muestran todos los resultados obtenidos, recogidos en varias tablas, análogas a las dadas en el Capítulo 3. En la última columna se incluyen los rangos, es decir, el superior menos el inferior.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Tabla 4.1: Descripción de los cuartiles utilizados.

Control de la Varianza (c)	Tasa de error a priori		
	Baja ($\phi_0 = 0.05$)	Media ($\phi_0 = 0.1$)	Alta ($\phi_0 = 0.25$)
c = 2	$q_0 = 0$ $q_1 = 0.003$ $q_2 = 0.03$ $q_3 = 0.272$ $q_4 = 1$	$q_0 = 0$ $q_1 = 0.005$ $q_2 = 0.047$ $q_3 = 0.248$ $q_4 = 1$	$q_0 = 0$ $q_1 = 0.043$ $q_2 = 0.171$ $q_3 = 0.416$ $q_4 = 1$
c = 3	$q_0 = 0$ $q_1 = 0.003$ $q_2 = 0.026$ $q_3 = 0.175$ $q_4 = 1$	$q_0 = 0$ $q_1 = 0.007$ $q_2 = 0.048$ $q_3 = 0.187$ $q_4 = 1$	$q_0 = 0$ $q_1 = 0.07$ $q_2 = 0.193$ $q_3 = 0.385$ $q_4 = 1$
c = 4	$q_0 = 0$ $q_1 = 0.004$ $q_2 = 0.025$ $q_3 = 0.132$ $q_4 = 1$	$q_0 = 0$ $q_1 = 0.01$ $q_2 = 0.052$ $q_3 = 0.164$ $q_4 = 1$	$q_0 = 0$ $q_1 = 0.09$ $q_2 = 0.21$ $q_3 = 0.37$ $q_4 = 1$

Tabla 4.2: Cotas superiores $UB(1-\alpha; m)$ $(n = 100, \alpha = 0.05)$

Control de la Varianza (c)	Tasa de error a priori		
	Baja ($\phi_0 = 0.05$)	Media ($\phi_0 = 0.10$)	Alta ($\phi_0 = 0.25$)
c = 2	m = 0 : 0.0118 m = 1 : 0.031075 m = 10 : 0.151535	m = 0 : 0.01868 m = 1 : 0.032879 m = 10 : 0.15272	m = 0 : 0.019838 m = 1 : 0.038042 m = 10 : 0.156269
c = 3	m = 0 : 0.0216 m = 1 : 0.0316 m = 10 : 0.1507	m = 0 : 0.01744 m = 1 : 0.034295 m = 10 : 0.152447	m = 0 : 0.024235 m = 1 : 0.04174 m = 10 : 0.15771
c = 4	m = 0 : 0.0184 m = 1 : 0.03225 m = 10 : 0.14987	m = 0 : 0.018039 m = 1 : 0.035657 m = 10 : 0.15218	m = 0 : 0.028677 m = 1 : 0.04523 m = 10 : 0.15912

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Tabla 4.3: Rangos para el nivel de credibilidad. Caso : Tasa de error a priori baja ($\phi_0 = 0.05$) y $c = 2$.

Resultado muestral m	Grado contaminación ε	inf	sup	Longitud
m = 0	0.05	0.949	0.95	0.001
	0.10	0.949	0.95	-
	0.15	0.949	0.95	-
	0.20	0.949	0.95	-
	0.25	0.949	0.95	-
	0.30	0.949	0.95	-
	0.35	0.949	0.95	-
m = 1	0.05	0.9002	0.9264	0.0262
	0.10	0.8507	0.9030	0.0523
	0.15	0.8014	0.8797	0.0783
	0.20	0.7524	0.8565	0.1041
	0.25	0.7036	0.8333	0.1297
	0.30	0.6551	0.8104	0.1553
	0.35	0.6068	0.7875	0.1807
m = 10	0.05	0.8879	0.9499	0.0620
	0.10	0.8278	0.9499	0.1221
	0.15	0.7695	0.9499	0.1803
	0.20	0.7131	0.9498	0.2367
	0.25	0.6584	0.9498	0.2914
	0.30	0.6053	0.9498	0.3445
	0.35	0.5538	0.9497	0.3959

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Tabla 4.4: Rangos para el nivel de credibilidad. Caso : Tasa de error a priori baja ($\phi_0 = 0.05$) y $c = 3$.

Resultado muestral m	Grado contaminación ε	inf	sup	Longitud
m = 0	0.05	0.9460	0.9485	0.0025
	0.10	0.9417	0.9469	0.0052
	0.15	0.9369	0.9451	0.0082
	0.20	0.9316	0.9430	0.0114
	0.25	0.9256	0.9407	0.0151
	0.30	0.9189	0.9381	0.0192
	0.35	0.9113	0.9351	0.0238
m = 1	0.05	0.9327	0.9514	0.0187
	0.10	0.9153	0.9528	0.0375
	0.15	0.8979	0.9544	0.0565
	0.20	0.8803	0.9560	0.0757
	0.25	0.8626	0.9577	0.0951
	0.30	0.8448	0.9595	0.1147
	0.35	0.8269	0.9613	0.1344
m = 10	0.05	0.8875	0.9342	0.0467
	0.10	0.8271	0.9172	0.0901
	0.15	0.7687	0.8990	0.1303
	0.20	0.7121	0.8794	0.1673
	0.25	0.6572	0.8582	0.2010
	0.30	0.6040	0.8353	0.2313
	0.35	0.5524	0.8103	0.2579

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Tabla 4.5: Rangos para el nivel de credibilidad. Caso : Tasa de error a priori baja ($\phi_0 = 0.05$) y $c = 4$.

Resultado muestral m	Grado contaminación ε	inf	sup	Longitud
m = 0	0.05	0.9442	0.9480	0.0038
	0.10	0.9379	0.9460	0.0081
	0.15	0.9309	0.9435	0.0126
	0.20	0.9231	0.9408	0.0177
	0.25	0.9145	0.9378	0.0233
	0.30	0.9049	0.9344	0.0295
	0.35	0.8941	0.9305	0.0364
m = 1	0.05	0.9360	0.9513	0.0153
	0.10	0.9217	0.9527	0.0300
	0.15	0.9073	0.9541	0.0468
	0.20	0.8925	0.9556	0.0631
	0.25	0.8775	0.9573	0.0798
	0.30	0.8623	0.9590	0.0967
	0.35	0.8468	0.9608	0.1140
m = 10	0.05	0.9088	0.9500	0.0412
	0.10	0.8672	0.9500	0.0828
	0.15	0.8249	0.9500	0.1251
	0.20	0.7820	0.9500	0.1680
	0.25	0.7386	0.9500	0.2114
	0.30	0.6945	0.9500	0.2545
	0.35	0.6498	0.9500	0.3002

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Tabla 4.6: Rangos para el nivel de credibilidad. Caso : Tasa de error a priori media ($\phi_0 = 0.1$) y $c = 2$.

Resultado muestral m	Grado contaminación ε	inf	sup	Longitud
m = 0	0.05	0.9453	0.9497	0.0044
	0.10	0.9402	0.9495	0.0093
	0.15	0.9346	0.9492	0.0146
	0.20	0.9283	0.9489	0.0206
	0.25	0.9212	0.9485	0.0273
	0.30	0.9134	0.9481	0.0347
	0.35	0.9044	0.9477	0.0433
m = 1	0.05	0.9272	0.9447	0.0175
	0.10	0.9031	0.9390	0.0359
	0.15	0.8776	0.9328	0.0552
	0.20	0.8506	0.9260	0.0754
	0.25	0.8219	0.9186	0.0967
	0.30	0.7914	0.9104	0.1190
	0.35	0.7589	0.9013	0.1424
m = 10	0.05	0.9143	0.9499	0.0356
	0.10	0.8775	0.9497	0.0722
	0.15	0.8400	0.9496	0.1096
	0.20	0.8012	0.9495	0.1483
	0.25	0.7615	0.9494	0.1879
	0.30	0.7206	0.9492	0.2286
	0.35	0.6786	0.9490	0.2704

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Tabla 4.7: Rangos para el nivel de credibilidad. Caso : Tasa de error a priori media ($\phi_0 = 0.1$) y $c = 3$.

Resultado muestral m	Grado contaminación ε	inf	sup	Longitud
m = 0	0.05	0.9431	0.9497	0.0066
	0.10	0.9356	0.9494	0.0138
	0.15	0.9273	0.9491	0.0218
	0.20	0.9182	0.9487	0.0305
	0.25	0.9080	0.9483	0.0403
	0.30	0.8967	0.9478	0.0511
	0.35	0.8840	0.9473	0.0633
m = 1	0.05	0.9315	0.9457	0.0142
	0.10	0.9119	0.9410	0.0291
	0.15	0.8908	0.9358	0.0450
	0.20	0.8683	0.9302	0.0619
	0.25	0.8441	0.9241	0.0800
	0.30	0.8180	0.9171	0.0991
	0.35	0.7899	0.9094	0.1195
m = 10	0.05	0.9178	0.9452	0.0274
	0.10	0.8846	0.9400	0.0554
	0.15	0.8502	0.9343	0.0841
	0.20	0.8146	0.9281	0.1135
	0.25	0.7776	0.9213	0.1437
	0.30	0.7393	0.9140	0.1747
	0.35	0.6995	0.9055	0.2057

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Tabla 4.8: Rangos para el nivel de credibilidad. Caso : Tasa de error a priori media ($\phi_0 = 0.1$) y $c = 4$.

Resultado muestral m	Grado contaminación ε	inf	sup	Longitud
m = 0	0.05	0.9418	0.9498	0.0080
	0.10	0.9330	0.9495	0.0165
	0.15	0.9231	0.9492	0.0261
	0.20	0.9124	0.9489	0.0365
	0.25	0.9005	0.9486	0.0481
	0.30	0.8873	0.9482	0.0609
	0.35	0.8726	0.9477	0.0751
m = 1	0.05	0.9346	0.9470	0.0124
	0.10	0.9181	0.9437	0.0256
	0.15	0.9004	0.9401	0.0397
	0.20	0.8812	0.9361	0.0549
	0.25	0.8604	0.9317	0.0713
	0.30	0.8379	0.9268	0.0899
	0.35	0.8133	0.9212	0.1079
m = 10	0.05	0.9142	0.9373	0.0231
	0.10	0.8774	0.9240	0.0466
	0.15	0.8397	0.9101	0.0804
	0.20	0.8009	0.8954	0.0945
	0.25	0.7612	0.8799	0.1187
	0.30	0.7203	0.8635	0.1432
	0.35	0.6782	0.8462	0.1680

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Tabla 4.9: Rangos para el nivel de credibilidad. Caso : Tasa de error a priori alta ($\phi_0 = 0.25$) y $c = 2$.

Resultado muestral m	Grado contaminación ε	inf	sup	Longitud
m = 0	0.05	0.9339	0.9486	0.0147
	0.10	0.9166	0.9471	0.0305
	0.15	0.8980	0.9454	0.0474
	0.20	0.8780	0.9435	0.0655
	0.25	0.8564	0.9414	0.0850
	0.30	0.8329	0.9390	0.1061
	0.35	0.8074	0.9362	0.1288
m = 1	0.05	0.9203	0.9378	0.0175
	0.10	0.8894	0.9247	0.0353
	0.15	0.8572	0.9104	0.0532
	0.20	0.8237	0.8949	0.0712
	0.25	0.7888	0.8779	0.0891
	0.30	0.7523	0.8592	0.1069
	0.35	0.7142	0.8387	0.1245
m = 10	0.05	0.9168	0.9389	0.0221
	0.10	0.8826	0.9271	0.0445
	0.15	0.8473	0.9144	0.0671
	0.20	0.8107	0.9007	0.0900
	0.25	0.7730	0.8859	0.1229
	0.30	0.7339	0.8698	0.1359
	0.35	0.6935	0.8523	0.1588

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Tabla 4.10: Rangos para el nivel de credibilidad. Caso : Tasa de error a priori alta ($\phi_0 = 0.25$) y $c = 3$.

Resultado muestral m	Grado contaminación ε	inf	sup	Longitud
m = 0	0.05	0.9307	0.9498	0.0192
	0.10	0.9101	0.9497	0.0396
	0.15	0.8882	0.9495	0.0613
	0.20	0.8647	0.9492	0.0845
	0.25	0.8396	0.9490	0.1094
	0.30	0.8126	0.9487	0.1361
	0.35	0.7836	0.9484	0.1648
m = 1	0.05	0.9300	0.9484	0.0184
	0.10	0.9087	0.9466	0.0379
	0.15	0.8861	0.9446	0.0585
	0.20	0.8619	0.9424	0.0805
	0.25	0.8361	0.9400	0.1039
	0.30	0.8084	0.9370	0.1286
	0.35	0.7786	0.9337	0.1551
m = 10	0.05	0.9292	0.9472	0.0180
	0.10	0.9071	0.9442	0.0371
	0.15	0.8836	0.9409	0.0573
	0.20	0.8585	0.9372	0.0787
	0.25	0.8319	0.9331	0.1018
	0.30	0.8033	0.9285	0.1252
	0.35	0.7727	0.9233	0.1506

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Podemos ver que las cotas bayesianas posteriores $UB(0.95;m)$ ahora obtenidas son bastante parecidas a las obtenidas por *Godfrey* y *Neter* , esto es lógico ya que como vimos en la Sección 4.2 nuestra consideración no difiere en demasía de la de tomar $\mu \sim Unif(0,1)$, como se hace en el modelo BU original. En todo caso, nuestras cotas son algo más grandes.

El hecho de poseer las ilustraciones para varios valores de c es importante. Recordemos que $Var[\phi] = \dfrac{\phi_0(1-\phi_0)}{c+1}$, esto nos permite estudiar cada caso de tasa de error a priori según su dispersión, medida por c.

Es de esperar que a mayor valor de c (menor dispersión de ϕ, i.e. ϕ está más concentrada) el modelo se comporta de una manera más estable. Como aquí ocurre.

Observemos los casos de tasa de error a priori baja, $\phi_0 = 0.05$, recogidos en las Tablas 4.3, 4.4 y 4.5 . El comentario anterior sobre los distintos valores de c queda patente. Podemos decir que para un número de er rores bajos ($m = 0,1$) el modelo resulta *extraordinariamente* robusto; un auditor puede estar dispuesto a admitir un grado de inseguridad sobre su densidad a priori Beta de hasta el 20% (para $c = 2$), llegando incluso al 30%, para un caso de dispersión pequeña ($c = 4$). Vemos por tanto como una información muestral de acuerdo con la información a priori hacen al modelo tremendamente robusto.

Sin embargo, para un número de errores en la muestra *anormalmente* grande el modelo empieza a reflejar estas discrepancias rápidamente. El auditor debería tomar con precauciones sus conclusiones ya que la falta de robustez es manifiesta (podría indicarnos que hemos realizado un mala asignación de la información a priori).

Las Tablas 4.6, 4.7 y 4.8 corresponden al caso de tasa de error a priori media, $\phi_0 = 0.10$, con diferentes valores de c. De nuevo el comentario sobre la dispersión es también aplicable a esta situación. Observemos que, ahora, para el auditor un número de errores $m = 0,1$ podría incluso ser *anormalmente* pequeño. A pesar de ello, de nuevo el modelo es *extraordinariamente* robusto y tan sólo en la situación $m = 10$, empieza a perderse la robustez. Incluso cuando $m = 10$, sí el auditor es capaz de afinar en la dispersión ($c = 4$) el modelo vuelve a mostrar cierta estabilidad.

Las Tablas 4.9, 4.10 y 4.11 recogen el caso de tasa de error a priori alta. De nuevo la implicación de la información muestral sobre el modelo

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

es manifiesta. Una muestra con un número de errores pequeños no sería esperable por el auditor y ello influye directamente haciendo que el modelo pierda cierta robustez. De todas maneras, la robustez parece una propiedad evidente también para este caso.

En resumen, podemos afirmar que la modificación del modelo BU que proponemos es realmente atractiva desde el punto de vista de la robustez bayesiana, propiedad que como hemos visto posee. Si además vemos este modelo como paso previo para posteriormente no considerar una clase de densidades a priori sino seleccionar el modelo BU también podemos afirmar que el auditor puede mostrar cierta seguridad sobre su modelo ya que en cierto sentido pequeñas diferencias respecto a una densidad a priori verdadera (desconocida) no proporciona decisiones sustancialmente diferentes.

Finalmente, no es extraño que si el número de errores es anormalmente alto (de acuerdo con las creencias a priori) falte robustez. Ello indica un *"conflicto o confrontación"* entre la modelización y los datos que posiblemente deba ser resuelta planteando una nueva modelización.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Tabla 4.11: Rangos para el nivel de credibilidad. Caso : Tasa de error a priori alta ($\phi_0 = 0.25$) y $c = 4$.

Resultado muestral m	Grado contaminación ε	inf	sup	Longitud
m = 0	0.05	0.9271	0.9500	0.0329
	0.10	0.9030	0.9499	0.0469
	0.15	0.8775	0.9499	0.0613
	0.20	0.8504	0.9498	0.0994
	0.25	0.8217	0.9498	0.1281
	0.30	0.7912	0.9498	0.1586
	0.35	0.7587	0.9497	0.1910
m = 1	0.05	0.9300	0.9497	0.0197
	0.10	0.9085	0.9494	0.0409
	0.15	0.8857	0.9490	0.0533
	0.20	0.8614	0.9486	0.0862
	0.25	0.8355	0.9481	0.1026
	0.30	0.8077	0.9476	0.1399
	0.35	0.7778	0.9470	0.1692
m = 10	0.05	0.9331	0.9489	0.0158
	0.10	0.9150	0.9477	0.0327
	0.15	0.8957	0.9463	0.0506
	0.20	0.8749	0.9450	0.0701
	0.25	0.8524	0.9431	0.0907
	0.30	0.8281	0.9419	0.1138
	0.35	0.8017	0.9390	0.1373

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Capítulo 5

Modelo de cuantiles conocidos.

5.1 Introducción.

En todos los modelos, aceptados entre la totalidad de los auditores que utilizan las técnicas bayesianas para sus trabajos, desarrollados en el Capítulo 1 (modelos GG, GU, BU, GU100, BU100 y BN), podemos observar que el procedimiento de trabajo contempla de forma automática los siguientes pasos :

1. Elección de una distribución a priori, que refleje adecuadamente las creencias del auditor.
2. Combinar las creencias a priori con la verosimilitud muestral para obtener las información a posteriori, vía teorema de Bayes.
3. Obtención de cotas superiores a un nivel prefijado.
4. Variaciones en la asignación de parámetros a priori para intentar deducir el comportamiento del modelo frente a perturbaciones de dichos parámetros.

Los esfuerzos en los modelos modificados realizados anteriormente en los Capítulos 3 y 4; y como se verá, también en éste, actúan sobre los pasos 1 y 4 y tratan una aproximación *más realista* que consistiría en la construcción de una clase de distribuciones a priori consistente con la información a priori (*"parcial"*) disponible y en este sentido los modelos de contaminaciones tratados se muestran favorables. Además esto permite un

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

análisis bayesiano robusto, en el que queda de manifiesto la incertidumbre del auditor sobre una densidad a priori determinada que represente lo mejor posible la realidad de la población auditada.

Cuando en la Sección 1.3.2 hemos estudiado los diferentes métodos de condensar toda la información a priori en una densidad a priori (EPS, HFS, CDF y PDF, *Winkler (1.968)*); recogidos en los trabajos de *Schaefer* y *Borcheoding (1.973)* , *Corless (1.972)* , *Felix (1.976)* , *Crosby (1.980)* , *Solomon (1.982)* , entre otros; se ha visto como un auditor, con cierto entrenamiento estadístico, no tiene demasiados problemas para asignar los cuantiles (en la práctica, cuartiles) a priori de los parámetros de interés. Además esta técnica se muestra favorable, desde ciertos criterios deseables para los auditores (propiedades de *calibración* y propiedad de *extremado* , *Dawid (1.982)*, *Lichtenstein, Fischchoff* y *Phillips (1.982)*, *Murphy* y *Winkler (1.982)* , *Libby (1.981)*).

Estos mismos comentarios fueron utilizados en la Sección 4.2 para plantear un clase de contaminaciones con cuantiles conocidos.

Nos centramos, por tanto, en situaciones en las que el auditor sólo dispone de una información a priori parcial sobre ϕ (por ejemplo, conoce únicamente algunos cuantiles. Ver los trabajos pioneros de *Kraft (1.968)* y *Sorensen (1.969)*) y por tanto, sobre ψ.

Es decir, nos planteamos ahora situaciones del tipo : *modelos "cercanos a la ignorancia"* más que modelos de *"proximidad"* en los que el auditor tiene incertidumbre sobre una distribución a priori fija (*Pericchi* y *Walley (1.991)*).

En los Capítulos 3 y 4, hemos visto que podemos hacer que μ tome un valor fijo, μ_0, sin adoptar por ello una situación demasiado particular. Además de no ser una hipótesis restrictiva, su gran aplicabilidad puede conducir al auditor a utilizar dichos modelos (incluso como paso previo para poder estudiar la sensibilidad de sus creencias y posteriormente fijar determinadas densidades a priori).

Así pues, bajo el supuesto ya utilizado anteriormente, de que $\mu = \mu_0$ estamos planteando que la única información a priori sobre ϕ que posee el auditor es del tipo :

$$p_i = Prob\{\phi \in T_i\} \qquad (i = 1, \ldots, k) \tag{5.1}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

donde :

$$\begin{aligned} T_1 &= (a_0, a_1] = (0, a_1] \\ T_k &= (a_{k-1}, a_k) = (a_{k-1}, 1) \\ T_i &= (a_{i-1}, a_i] \quad (i = 2, \ldots, k-1) \end{aligned}$$

con $\bigcup_{i=1}^{k} T_i = (0,1)$. En la práctica, los T_i serán los intervalos definidos por cuartiles o deciles, etc ...

De la relación entre ϕ y ψ tenemos :

$$\begin{aligned} p_i &= Prob\{a_{i-1} < \phi \leq a_i\} = Prob\{a_{i-1} < \tfrac{\psi}{\mu_0} \leq a_i\} = \\ & Prob\{\mu_0 \cdot a_{i-1} < \psi \leq \mu_0 \cdot a_i\} = Prob\{b_{i-1} < \psi \leq b_i\} \end{aligned} \tag{5.2}$$

con $b_i = \mu_0 \cdot a_i \quad (i = 0, \ldots, k)$ de donde el auditor también posee información a priori sobre ψ.

Observemos que la ecuación (5.1) induce automáticamente una clase de densidades a priori compatible con las creencias del auditor :

$$\Gamma = \{\ g(\phi) = \sum_{i=1}^{k} p_i \cdot q_i(\phi) : q_i \textit{ dens.a priori con soporte en } T_i\ \} \tag{5.3}$$

A diferencia con las clases consideradas anteriormente, Capítulos 3 y 4, en las que el auditor proponía una densidad a priori determinada sobre la que posee cierta confianza (medida por ε) y a continuación considerar todas las densidades cercanas a ella; ahora el auditor sólo está dispuesto a aceptar ciertas cantidades a priori, cuantiles, y no es capaz de *dibujar* sus creencias a priori.

Observamos m errores en una muestra de tamaño n, cuya verosimilitud asociada es :

$$l_1(\phi) = \binom{n}{m} \cdot \phi^m \cdot (1-\phi)^{n-m} \approx \frac{exp(-n \cdot \phi) \cdot (n\phi)^m}{m!} \quad 0 < \phi < 1 \tag{5.4}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

La aproximación por una Poisson se considerará ahora, por motivos analíticos que posteriormente veremos.

Nuestro interés ahora se centra en estudiar los rangos de probabilidades a posteriori (para cada $i = 1, \ldots, k$) del tipo :

$$p_i(m) = Prob\{b_{i-1} < \psi \leq b_i \mid m\} = Prob\{a_{i-1} < \phi \leq a_i \mid m\} \tag{5.5}$$

o sea,

$$l_i(m) = \inf_{g \in \Gamma} p_i(m) \qquad u_i(m) = \sup_{g \in \Gamma} p_i(m) \tag{5.6}$$

Es decir, deseamos estudiar cómo varían de las probabilidades a posteriori los cuantiles sobre la clase Γ. Obsérvese que ahora la información puede considerarse escasa, pero puede resultar suficiente para estudiar el comportamiento de las creencias del auditor. En la práctica, es de esperar que estos rangos que calcularemos sean mucho más grandes que los calculados anteriormente. De todas formas, la robustez del modelo puede ser medida tal y como se hizo en los capítulos precedentes.

5.2 Resolución del modelo.

Como hemos visto en la sección anterior, la situación que se plantea ahora consiste en un planteamiento en el que el auditor sólo es capaz de tener información a priori sobre ciertos cuantiles de la densidad a priori de ϕ, lo cual define automáticamente la clase de todas las densidades a priori que tienen esos mismos cuantiles. Esta clase esta formada, por tanto, por todas las densidades a priori que concuerdan con la información a priori del auditor. Es por tanto, una clase suficientemente amplia, tal vez en exceso, todo dependerá del número de cuantiles que se considere.

Obsérvese que no se presupone ninguna forma funcional determinada, tenemos una clase no paramétrica de distribuciones a priori.

En esta situación el auditor también desea saber cómo varían sus creencias sobre dicha clase, una vez obtenida la información muestral. Es claro

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

que variaciones no demasiado grandes indicarán robustez de dicha asignación.

Estamos en condiciones de aplicar los resultados desarrollados en la Sección 2.3, en la que estudiábamos los rangos de probabilidades finales o a posteriori sobre clases de distribuciones a priori dadas por cuantiles.

Para cualquier distribución a priori $g \in \Gamma$, su distribución predictiva será :

$$p(m \mid g) = \int_0^1 \sum_{i=1}^{k} p_i \cdot l_1(\phi) \cdot q_i(\phi) \cdot d\phi =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} p_i \cdot \int_{T_i} l_1(\phi) \cdot q_i(\phi) \cdot d\phi = \sum_{i=1}^{k} p_i \cdot p(m \mid q_i)$$

de donde,

$$g(\phi \mid m) = \sum_{i=1}^{k} p_i(m) \cdot q_i(\phi \mid m) \tag{5.7}$$

con

$$p_i(m) = \frac{p_i \cdot p(m \mid q_i)}{\sum_{j=1}^{k} p_j \cdot p(m \mid q_j)} \quad (i = 1, \ldots, k)$$

Para cada $i = 1, \ldots, k$

$$p_i(m) = \{ \frac{p_i \cdot p(m \mid q_i) + \sum_{j \neq i} p_j \cdot p(m \mid q_j)}{p_i \cdot p(m \mid q_i)} \}^{-1} =$$

$$= \{ 1 + \frac{\sum_{j \neq i} p_j \cdot p(m \mid q_j)}{p_i \cdot p(m \mid q_i)} \}^{-1} \tag{5.8}$$

Del Teorema de *Berliner* y *Goel (1.990)* (ver Sección 2.3) sabemos que las cotas inferiores y superiores tienen las siguientes expresiones :

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Para cada $i = 1, \ldots, k$:

$$l_i(m) = \frac{p_i \cdot \underline{f}_i(m)}{p_i \cdot [\underline{f}_i(m) - \overline{f}_i(m)] + U}$$

$$u_i(m) = \frac{p_i \cdot \overline{f}_i(m)}{p_i \cdot [\overline{f}_i(m) - \underline{f}_i(m)] + L}$$

donde :

$$U = \sum_{j=1}^{k} p_j \cdot \overline{f}_j(m),$$

$$L = \sum_{j=1}^{k} p_j \cdot \underline{f}_j(m),$$

$$\overline{f}_i(m) = \sup_{\phi \in T_i} l_1(\phi),$$

$$\underline{f}_i(m) = \inf_{\phi \in T_i} l_1(\phi).$$

Para el caso que nos ocupa, $l_1(\phi)$ es creciente en $(0, \frac{m}{n}]$ y decreciente en $(\frac{m}{n}, 1)$.

Sea $h \in \{1, \ldots, k\}$ tal que : $a_{h-1} < \frac{m}{n} \leq a_h$.

Planteamos la siguiente discusión de casos :

1. $\underline{i < h}$:

$$\underline{f}_i(m) = \inf_{a_{i-1} < \phi \leq a_i} l_1(\phi) = \frac{exp(-n \cdot a_{i-1}) \cdot (na_{i-1})^m}{m!}$$

$$\overline{f}_i(m) = \sup_{a_{i-1} < \phi \leq a_i} l_1(\phi) = \frac{exp(-n \cdot a_i) \cdot (na_i)^m}{m!}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

2. $\underline{i = h}$:

$$\underline{f}_h(m) = \inf_{a_{h-1}<\phi\leq a_h} l_1(\phi) =$$

$$= Min\{\frac{exp(-n \cdot a_{h-1}) \cdot (na_{h-1})^m}{m!}, \frac{exp(-n \cdot a_h) \cdot (na_h)^m}{m!}\}$$

$$\overline{f}_h(m) = \sup_{a_{h-1}<\phi\leq a_h} l_1(\phi) = \frac{exp(-m) \cdot (m)^m}{m!}$$

3. $\underline{i > h}$:

$$\underline{f}_i(m) = \inf_{a_{i-1}<\phi\leq a_i} l_1(\phi) = \frac{exp(-n \cdot a_i) \cdot (na_i)^m}{m!}$$

$$\overline{f}_i(m) = \sup_{a_{i-1}<\phi\leq a_i} l_1(\phi) = \frac{exp(-n \cdot a_{i-1}) \cdot (na_{i-1})^m}{m!}$$

Así pues,

$$U = \sum_{i=1}^{k} p_i \cdot \overline{f}_i(m) = \sum_{i=1}^{h-1} p_i \cdot \overline{f}_i(m) + p_h \cdot \overline{f}_h(m) + \sum_{i=h+1}^{k} p_i \cdot \overline{f}_i(m) =$$

$$= \sum_{i=1}^{h-1} p_i \cdot \frac{exp(-n \cdot a_i) \cdot (na_i)^m}{m!} + p_h \cdot \frac{exp(-m)m^m}{m!} +$$

$$+ \sum_{i=h+1}^{k} p_i \cdot \frac{exp(-n \cdot a_{i-1}) \cdot (na_{i-1})^m}{m!}$$

$$L = \sum_{i=1}^{k} p_i \cdot \underline{f}_i(m) = \sum_{i=1}^{h-1} p_i \cdot \underline{f}_i(m) + p_h \cdot \underline{f}_h(m) + \sum_{i=h+1}^{k} p_i \cdot \underline{f}_i(m) =$$

$$= \sum_{i=1}^{h-1} p_i \cdot \frac{exp(-n \cdot a_{i-1}) \cdot (na_{i-1})^m}{m!} + p_h \cdot Min\{\frac{exp(-n \cdot a_{h-1}) \cdot (na_{h-1})^m}{m!},$$

$$\frac{exp(-n \cdot a_h) \cdot (na_h)^m}{m!}\} + \sum_{i=h+1}^{k} p_i \cdot \frac{exp(-n \cdot a_i) \cdot (na_i)^m}{m!}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

En definitiva :

1. $\underline{i < h}$:

$$l_i(m) = exp(-n \cdot a_{i-1}) \cdot (na_{i-1})^m \cdot \{ [exp(-n \cdot a_{i-1}) \cdot (na_{i-1})^m -$$

$$-exp(-n \cdot a_i) \cdot (na_i)^m] + \frac{1}{p_i} \cdot \{ \sum_{j=1}^{h-1} p_j \cdot exp(-na_j) \cdot (na_j)^m + p_h \cdot exp(-m) m^m +$$

$$+ \sum_{j=h+1}^{k} p_j \cdot exp(-na_{j-1}) \cdot (na_{j-1})^m \} \}^{-1}$$

$$u_i(m) = exp(-n \cdot a_i) \cdot (na_i)^m \cdot \{ [exp(-n \cdot a_i) \cdot (na_i)^m - exp(-n \cdot a_{i-1}) \cdot (na_{i-1})^m] +$$

$$+ \frac{1}{p_i} \cdot \{ \sum_{j=1}^{h-1} p_j \cdot exp(-na_{j-1}) \cdot (na_{j-1})^m + p_h \cdot B + \sum_{j=h+1}^{k} p_j \cdot exp(-na_j) \cdot (na_j)^m \} \}^{-1}$$

donde

$$B = Min\{exp(-n \cdot a_{h-1}) \cdot (na_{h-1})^m, exp(-n \cdot a_h) \cdot (na_h)^m\}$$

2. $\underline{i = h}$:

$$l_h(m) = B \cdot \{ [B - exp(-m) \cdot m^m] + \frac{1}{p_h} \cdot \{ \sum_{j=1}^{h-1} p_j \cdot exp(-na_j) \cdot (na_j)^m +$$

$$+ p_h \cdot exp(-m) m^m + \sum_{j=h+1}^{k} p_j \cdot exp(-na_{j-1}) \cdot (na_{j-1})^m \} \}^{-1}$$

$$u_h(m) = exp(-m) \cdot m^m \cdot \{ [exp(-m) \cdot m^m - B] + \frac{1}{p_h} \cdot \{ \sum_{j=1}^{h-1} p_j \cdot exp(-na_{j-1}) \cdot$$

$$\cdot (na_{j-1})^m + p_h \cdot B + \sum_{j=h+1}^{k} p_j \cdot exp(-na_j) \cdot (na_j)^m \} \}^{-1}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

3. $\underline{i > h}$:

$$l_i(m) = exp(-n \cdot a_i) \cdot (na_i)^m \cdot \{ \, [\, exp(-n \cdot a_i) \cdot (na_i)^m - exp(-n \cdot a_{i-1}) \cdot (na_{i-1})^m]$$

$$+ \frac{1}{p_i} \cdot \{ \sum_{j=1}^{h-1} p_j \cdot exp(-na_j) \cdot (na_j)^m + p_h \cdot exp(-m) m^m +$$

$$+ \sum_{j=h+1}^{k} p_j \cdot exp(-na_{j-1}) \cdot (na_{j-1})^m \, \} \, \}^{-1}$$

$$u_i(m) = exp(-n \cdot a_{i-1}) \cdot (na_{i-1})^m \{ \, [\, exp(-n \cdot a_{i-1}) \cdot (na_{i-1})^m - exp(-n \cdot a_i) \cdot (na_i)^m \,]$$

$$+ \frac{1}{p_i} \cdot \{ \sum_{j=1}^{h-1} p_j \cdot exp(-na_{j-1}) \cdot (na_{j-1})^m + p_h \cdot B + \sum_{j=h+1}^{k} p_j \cdot exp(-na_j) \cdot (na_j)^m \, \} \, \}^{-1}$$

de donde deduciremos los rangos a posteriori de cada cuantil en la clase Γ en función del número de errores observados, m.

Debemos decir que estos rangos no usan la información de que las $p_i(m)$ deben sumar la unidad. Una clase a posteriori apropiada será :

$$\Gamma(m) = \{ \, v = (v_1, \ldots v_k)' / l_i(m) \leq v_i \leq u_i(m) \; (i = 1, \ldots, k) \; ; \sum_{i=1}^{k} v_i = 1 \, \}$$

En *Berliner* y *Goel (1.990)* puede verse que $\Gamma(m)$ es no vacío y convexo. Deducido inmediatamente de la cadena de desigualdades :

$$\frac{L}{U} \leq \sum_{i=1}^{k} l_i(m) \leq 1 \leq \sum_{i=1}^{k} u_i(m) \leq \frac{U}{L} \qquad (5.9)$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

5.3 Incorporación de unimodalidad.

Una de las características principales de los modelos GG, GU, GU100 e incluso BU y BU100 (para determinados valores de los parámetros a priori) era el hecho de que el auditor podía tener información sobre la unimodalidad del parámetro ϕ (ver Secciones 1.6.1, 1.6.2, 1.6.3 y 3.2, para un desarrollo detallado). Hemos visto pues que usualmente, en ambientes de análisis bayesiano en Auditorías, las distribuciones a priori usadas para ϕ suelen ser unimodales. Además un auditor *entrenado* no encuentra demasiada dificultad en asignar un valor para dicho valor modal (datos históricos, etc ...pueden ayudar al auditor en este proceso).

En esta situación el espacio paramétrico es el intervalo $(0,1)$ y el auditor conoce las probabilidades a priori de algunos subconjuntos notables de $(0,1)$.

Supongamos que además de disponer de los cuantiles dados anteriormente, el auditor tiene información suficiente para pensar que la densidad inicial o a priori de ϕ debe ser unimodal; es decir, el auditor está en disposición de asignar un valor para la moda de ϕ, digamos ϕ_{mo}.

Observemos que esta nueva incorporación de información hace variar la clase Γ dada en (5.1), ya que ahora debemos restringirla a la clase de todas las densidades a priori unimodales con cuantiles dados y cuya moda vale ϕ_{mo} .

Llamemos $c = g(\phi_{mo})$ [14] , $\forall g \in \Gamma$.

Sea $g \in \Gamma$ y sea $s \in \{2, \ldots, k-1\}$ [15] tal que :

$$\phi_{mo} \in (a_{s-1}, a_s] = T_s$$

luego entonces : $q_s(\phi) \leq q_s(\phi_{mo}), \ \forall \phi \in T_s$

[14] Conocer $g(\phi_{mo})$ resulta difícil para el investigador, sin embargo una solución factible podría ser considerar el valor para densidades como gammas, betas, etc ... ampliamente usadas en la literatura ya citada en anteriores apartados, o bien, determinados valores extremos que el auditor considere.

[15] Desde luego una situación $\phi_{mo} \in (a_{k-1}, 1)$ no es habitual; pues nos estaría informando de una situación en la que ϕ es relativamente grande. De todas formas el análisis sería análogo si consideramos $s \in \{1, \ldots, k\}$.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

pero también :

$$p_i \cdot q_i(\phi) \leq p_s \cdot q_s(\phi_{mo}) = g(\phi_{mo}) = c, \ \forall i \in \{1, \ldots k\}, \ \forall \phi \in (0,1)$$

La siguiente cadena de desigualdades nos será útil para la determinación del superior e inferior, más adelante.

$\forall i \in \{1, \ldots, k\}$:

$$\underline{f}_i(m) \leq p(m \mid q_i) = \int_{T_i} l_1(\phi) \cdot q_i(\phi) \cdot d\phi \leq$$

$$\leq \overline{f}_i(m) \cdot \int_{T_i} q_i(\phi) \cdot d\phi = \frac{\overline{f}_i(m)}{p_i} \cdot \int_{T_i} p_i \cdot q_i(\phi) \cdot d\phi$$

$$\leq \frac{c}{p_i} \cdot \overline{f}_i(m) \cdot (a_i - a_{i-1})$$

es decir

$$\underline{f}_i(m) \leq p(m \mid q_i) \leq \frac{c}{p_i} \cdot \overline{f}_i(m) \cdot (a_i - a_{i-1}) \tag{5.10}$$

Teorema 1 *Para la clase Γ dada en (5.1) y bajo la condición de unimodalidad anterior, para cada $i = 1, \ldots, k$, tenemos :*

$$l_i(m) = \frac{p_i \cdot \underline{f}_i(m)}{p_i \cdot [\underline{f}_i(m) - \overline{f}_i(m)] + U}$$

$$u_i(m) = \frac{c \cdot \overline{f}_i(m) \cdot (a_i - a_{i-1})}{c \cdot \overline{f}_i(m)(a_i - a_{i-1}) + L - p_i \cdot \underline{f}_i(m)}$$

donde $\overline{f}_i(m)$, $\underline{f}_i(m)$, U y L son las mismas cantidades que las dadas en la sección anterior.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Demostración.-

Basta tener en cuenta que , como en la sección anterior,

$$p_i(m) = \{ 1 + \frac{\sum_{j \neq i} p_j \cdot p(m \mid q_j)}{p_i \cdot p(m \mid q_i)} \}^{-1} \quad (i = 1, \ldots, k) \tag{5.11}$$

y que ahora (de (5.10)) :

$$\underline{f}_i(m) \leq p(m \mid q_i) \leq \frac{c}{p_i} \cdot \overline{f}_i(m) \cdot (a_i - a_{i-1})$$

La obtención del inferior es análoga a la del Teorema de *Berliner* y *Goel (1.990)* (ver Sección 2.3). Para el superior ahora tenemos que $p_i(m)$ es máximo cuando $\sum_{j \neq i} p_j \cdot p(m \mid q_j)$ y $p_i \cdot p(m \mid q_i)$ se hagan simultáneamente, mínimo y máximo, respectivamente. Esto ocurre en : $L - p_i \cdot \underline{f}_i(m)$ y $c \cdot \overline{f}_i(m) \cdot (a_i - a_{i-1})$ (obtenidas de la desigualdad (5.10)), luego :

$$u_i(m) = \{ 1 + \frac{L - p_i \cdot \underline{f}_i(m)}{p_i \cdot c \cdot \overline{f}_i(m) \cdot (a_i - a_{i-1})} \}^{-1}$$

y de aquí,

$$u_i(m) = \frac{c \cdot \overline{f}_i(m) \cdot (a_i - a_{i-1})}{c \cdot \overline{f}_i(m) \cdot (a_i - a_{i-1}) + L - p_i \cdot \underline{f}_i(m)]}. \qquad \square$$

Es decir, la cota inferior no es modificada y por tanto la inclusión de la unimodalidad afecta directamente al superior. Tampoco estos rangos definen totalmente una clase de densidades a posteriori. Una clase apropiada será :

$$\Gamma(m) = \{ w = (w_1, \ldots w_k)' / l_i(m) \leq w_i \leq u_i(m) \ (i = 1, \ldots, k) \ ; \sum_{i=1}^{k} w_i = 1 \}$$

Además cuando p_i se aproxima a $c \cdot (a_i - a_{i-1})$ las cantidades del Teorema 1 y del Teorema de *Berliner* y *Goel (1.990)* se aproximan. En definitiva, el refinamiento introducido por la unimodalidad se hace tanto *peor* cuanto más proporcionales a las longitudes de los intervalos sean las probabilidades p_i $(i = 1, \ldots, k)$.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

5.4 Ilustraciones numéricas.

A continuación presentamos diferentes situaciones prácticas en las que pueden aplicarse los resultados anteriores. De hecho, como hemos visto en la Sección 1.9 , consideraremos situaciones similares a las de los trabajos de *Kraft (1.968)* y *Sorensen (1.969)* , pero al mismo tiempo se intenta comparar con los resultados obtenidos en las ilustraciones numéricas de los Capítulos 3 y 4.

Así pues, una experimentación como la que se muestra a continuación puede ser conveniente antes de adoptar un posible modelo de contaminaciones ya que puede dar una idea de la robustez de las creencias a priori (la clase Γ suele ser demasiado amplia para la información a priori que posee el auditor).

Con esta filosofía contemplaremos las ilustraciones numéricas realizadas en esta sección; si bien (como es obvio) en una situación particular en la que sólo se posea información a priori sobre cuantiles, los resultados anteriores deben ser utilizados directamente.

Estudiaremos un caso en el que tres auditores (A, B, C) que se disponen a inspeccionar una población contable poseen cierta información a priori sobre al parámetro ϕ. El auditor A tiene ciertas dudas sobre la aceptación de un modelo BU; sin embargo, sí que está dispuesto a admitir los cuartiles de densidades Betas (para ello utilizaremos los cuartiles dados en la Tabla 4.1). Observemos que el auditor A lo único que está considerando es que uno de los elementos de la clase Γ dada en (5.1) es una densidad Beta determinada, de ahí obtiene los cuartiles, y a continuación considera todas las posibles densidades con esos cuartiles.

Por analogía con los capítulos precedentes, de nuevo desarrollamos los casos de tasa de error a priori baja ($\phi_0 = 0.05$), media ($\phi_0 = 0.10$) y alta ($\phi_0 = 0.25$), con diferentes valores para la dispersión ($c = 2, 3, 4$). Las situaciones muestrales que planteamos son $m = 0, 1, 5, 10$. Sin embargo, para que no aparezca una acumulación grandiosa de tablas tan sólo trataremos, en este apartado, un caso de tasa de error a priori baja ($\phi_0 = 0.05$) y cierta dispersión ($c = 3$).

En definitiva, el auditor A conoce los cuartiles de la densidad de ϕ y desea conocer como variarán sus probabilidades a posteriori de acuerdo con la clase considerada y con el dato muestral observado.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

La Tabla 5.1 representa un caso de tasa de error a priori baja y cierta dispersión [16]. Los rangos obtenidos se muestran en la Tabla 5.2 .

Tabla 5.1: Información a priori del auditor A.

T_i	p_i
$0 - 0.0031$	0.25
$0.0031 - 0.0266$	0.25
$0.0266 - 0.1756$	0.25
$0.1756 - 1$	0.25

Para el auditor A, observemos como la clase es bastante sensible al resultado muestral. Cuando no existen errores en la muestra ($m = 0$), podemos deducir inmediatamente que los dos últimos cuartiles no contienen ninguna masa de probabilidad, es decir la densidad se hace muy concentrada a la izquierda; se concentra toda a la izquierda del segundo cuartil (0.0266). Este hecho concuerda con los resultados obtenidos en las Tablas 4.2 y 4.3 del Capítulo 4. Allí veíamos como la cota (para $m = 0$) $UB(0.95; 0) = 0.0216$ era bastante robusta variando su probabilidad entre 0.949 y 0.95, ahora vemos que prácticamente toda la densidad se concentra a la izquierda de 0.0266.

Sin embargo, según va aumentando el número de errores en la muestra, las probabilidades van cambiando de acuerdo con dicha información muestral. Así por ejemplo, cuando $m = 1$ tan sólo el cuarto cuartil es el que pierde masa de probabilidad, y en el resto de los cuartiles se aprecia cierta inestabilidad. Comparando con la Tabla 4.3, también queda claro este hecho. Allí la cota superior era $UB(0.95; 1) = 0.0316$ esto se refleja incluyendo masa de probabilidad en el tercer cuartil que la contiene. Análogos comentarios pueden hacerse en el resto de los casos.

También podemos apreciar como cuando el número de errores es *anormalmente* alto las probabilidades cambian totalmente y las densidades a posteriori se desplazan más hacia valores grandes de tasa de error (obsérvense, los casos $m = 5$ y $m = 10$).

[16] Como ya se ha comentado, para esta ilustración numérica, estos cuartiles han sido obtenidos de una densidad a priori Beta, con tasa de error a priori baja ($\phi_0 = 0.05$) y cierta dispersión ($c = 3$).

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Tabla 5.2: Rangos para el auditor A.

Resultado muestral (m)	i	$\inf_{g\in\Gamma} p_i(m)$	$\sup_{g\in\Gamma} p_i(m)$	Longitud
m = 0	1	0.5000	1.0000	0.5000
	2	0.0000	0.5000	0.5000
	3	0.0000	0.0000	-
	4	0.0000	0.0000	-
m = 1	1	0.0000	0.5499	0.5499
	2	0.3104	0.9999	0.6895
	3	0.0000	0.5000	0.5000
	4	0.0000	0.0000	-
m = 5	1	0.0000	0.0481	0.0481
	2	0.0001	0.9958	0.9957
	3	0.0042	0.9999	0.9957
	4	0.0000	0.4870	0.4870
m =10	1	0.0000	0.0000	-
	2	0.0000	0.5000	0.5000
	3	0.0181	0.9999	0.9818
	4	0.0000	0.9815	0.9815

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Tabla 5.3: Información a priori de los auditores B y C.

T_i	p_i
$0 - 0.0288$	0.25
$0.0288 - 0.0445$	0.25
$0.0445 - 0.0653$	0.25
$0.0653 - 1$	0.25

En casos como los reflejados en la Tabla 5.2, más que poner el énfasis en la *"sensibilidad"* , se debe de hablar de una información a priori muy pobre, en definitiva, de una clase Γ excesivamente grande. De hecho, las clases de contaminaciones pretenden paliar este defecto de clases excesivamente grandes. Si en este ejemplo aumentase notablemente el número de los cuantiles los resultados mejorarían de forma extraordinaria.

Por otra parte, los auditores B y C, no están de acuerdo con los cuartiles anteriores y creen que la distribución está más concentrada a la izquierda que la anterior. Asignan los cuartiles que se muestran en la Tabla 5.3 [17] .

Además el tercer auditor está dispuesto a aceptar (de datos históricos, etc ...) unimodalidad en la densidad de la tasa de error y que el valor más frecuente de ϕ es $\phi_{mo} = 0.0333(\approx 3\%)$. [18] Los rangos obtenidos para el auditor B se muestran en Tabla 5.4 y para C, que incorpora unimodalidad, en la Tabla 5.5 .

La clase contemplada por los auditores B y C considera densidades a priori más concentradas a la izquierda que la del auditor A, lo cual influye directamente en los rangos. También se considera un caso de tasa de error a priori baja y cierta dispersión.

Para el auditor B, y a diferencia con A, en el caso $m = 0$ tan sólo el cuarto cuartil es el que queda fuera. Aunque sí puede decirse que en el primer cuartil se concentra al menos el 50% de la probabilidad. Según la información muestral está más en desacuerdo con la información a priori el modelo refleja esa discordancia mostrando inestabilidad.

[17] Obtenidos de una densidad Gamma con tasa de error a priori baja ($\phi_0 = 0.05$) y cierta dispersión ($a = 3$). Ver Apéndice 2.

[18] El valor de $c = g(\phi_{mo})$ es aproximado por su valor en un elemento de la clase. Para este caso $c = 16.250234$.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Tabla 5.4: Rangos para el auditor B.

Resultado muestral (m)	i	$\inf_{g\in\Gamma} p_i(m)$	$\sup_{g\in\Gamma} p_i(m)$	Longitud
m = 0	1	0.4480	0.9871	0.5391
	2	0.0113	0.4936	0.4823
	3	0.0014	0.1461	0.1447
	4	0.0000	0.0206	0.0206
m = 1	1	0.0000	0.8606	0.8606
	2	0.1079	0.9538	0.8457
	3	0.0144	0.5000	0.4856
	4	0.0000	0.1168	0.1168
m = 5	1	0.0000	0.2878	0.2878
	2	0.1862	0.5544	0.3682
	3	0.2550	0.6545	0.3996
	4	0.0000	0.3734	0.3734
m =10	1	0.0000	0.0546	0.0546
	2	0.0032	0.5000	0.4968
	3	0.0679	0.9905	0.9226
	4	0.0000	0.9226	0.9226

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Tabla 5.5: Rangos para el auditor C.

Resultado muestral (m)	i	$\inf_{g\in\Gamma} p_i(m)$	$\sup_{g\in\Gamma} p_i(m)$	Longitud
m = 0	1	0.4480	0.9931	0.5451
	2	0.0113	0.4998	0.4885
	3	0.0014	0.1876	0.1862
	4	0.0000	0.5602	0.5602
m = 1	1	0.0000	0.7427	0.7427
	2	0.1079	0.4705	0.3626
	3	0.0144	0.2508	0.2363
	4	0.0000	0.6670	0.6670
m = 5	1	0.0000	0.1589	0.1589
	2	0.1862	0.2418	0.0555
	3	0.2550	0.4141	0.1591
	4	0.0000	0.9002	0.9002
m =10	1	0.0000	0.0263	0.0263
	2	0.0032	0.2040	0.2008
	3	0.0679	0.9751	0.9071
	4	0.0000	0.9945	0.9945

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Relacionando estos resultados con los obtenidos en el Capítulo 3 (Tablas 3.2 y 3.3) se observa, para el caso $m = 0$, que sobre la cota $UB(0.95;0) = 0.01385$ las probabilidades varían para diferentes grados de contaminación, pero siempre por encima de 0.92; esto también puede verse en las Tablas 5.4 y 5.5 para el primer cuartil que contiene a $UB(0.95;0)$. Del mismo modo pueden compararse las demás, obteniéndose también la concordancia entre los modelos.

Comparando los resultados entre los auditores B y C debemos decir que en cualquier caso, entre el auditor B y el C, la información sobre unimodal idad crea un refinamiento sobre los rangos. De hecho, podemos ver que en intervalos próximos al intervalo que contienen a la moda ($\phi_{mo} = 0.033$) los rangos se ven modificados sensiblemente. Intervalos alejados contienen el resto de probabilidad que *"sobraba"* de los anteriores. También podemos decir que la unimodalidad incorpora bastante robustez al modelo, cosa que concuerda perfectamente con los resultados obtenidos en el Capítulo 3.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Capítulo 6

Modelo Normal-Beta de Felix y Grimlund.

6.1 Introducción.

La situación que vamos a plantear y a solucionar en este capítulo puede, en cierto sentido, alejarse del objetivo primordial de la memoria en la que se desarrollan son técnicas bayesianas para el estudio de la robustez de los modelos más utilizados en la Auditoría Contable. Sin embargo, creemos que es necesario hacer mención a los métodos para la selección de densidades a priori (adecuándolos a la A.C.) dentro de clases plausibles. Abordamos pues, este capítulo con la idea de que se ponga de manifiesto que aunque el auditor estudie, como paso previo, la robustez de un determinado modelo; puede estar interesado en una determinada densidad y por ello necesita de criterios para su selección (más que como un estudio analítico de cálculo de dichas densidades).

En capítulos anteriores hemos visto que podemos adoptar un análisis bayesiano en Auditoría Contable mucho más flexible que el que se exige en un planteamiento bayesiano *estricto* (distribución a priori junto con información muestral proporcionan una distribución final coherente con las observaciones muestrales). Al mismo tiempo, esto nos permitía estudiar lo sensible que eran los modelos ya propuestos en la literatura.

Parece claro, que resulta mucho más *realista* adoptar una posible clase de densidades a priori concordantes con las información a priori que posee el auditor (o auditores), y más aún cuando el auditor puede reflejar el

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

grado de incertidumbre que posee sobre una densidad inicial que considere bastante próxima a la verdadera (y desconocida) densidad a priori.

Un compromiso entre estas dos aproximaciones que suele usarse con bastante frecuencia consiste en la elección de una determinada densidad a priori dentro de la clase propuesta. Existen varios criterios para la selección de densidades a priori : el criterio ML-II (ver Sección 2.4.), el criterio de los momentos, el criterio de mínima distancia, el criterio de máxima entropía, ...(un estudio detallado de todos ellos puede verse en *Berger (1.985)*).

Lo que planteamos ahora es lo siguiente :

Supongamos que un auditor ha estudiado la sensibilidad de un mod elo dado en una determinada situación práctica; y concluye con que su modelo es robusto (las metodologías desarrolladas en los Capítulos 3, 4 y 5, le llevarían a esta conclusión). En tal caso, y puesto que densidades próximas a la verdadera (y desconocida) densidad a priori no producen conclusiones sustancialmente diferentes, el auditor podría estar interesado en utilizar una determinada densidad a priori (en cierto sentido, se vuelve a una metodología bayesiana estricta) dentro de la clase asignada para el estudio de la robustez. [19]

Si recordamos las situaciones de los capítulos precedentes veíamos como en primer lugar debíamos reducir el problema de estudiar dos parámetros al de uno. Esto se conseguía haciendo constante la media de la fracción de error ($\mu = \mu_0$) y viendo que esto no es una restricción excesiva. Usando palabras de *Albert Einstein* : *" the model should be as simple as possible, but no simpler "* .

Otra forma de salvar este escollo y, al mismo tiempo, admitir clases de densidades a priori para los parámetros que contemplen grados de incertidumbre sobre ellas, es la que se utiliza ahora.

Planteado el problema que nos interesa desde el escenario de la A.C., y una vez que se llega a un problema de muy notable dificultad (la obtención de la densidad - a priori y a posteriori - de $\psi = \phi \cdot \mu$), se utiliza un metodología estadística (el criterio ML-II) que proporciona una salida al problema técnico planteado y además el método tiene una fuerte signifi-

[19] Esto no quiere decir que el desarrollo deba hacerse sólo cuando se determine la robustez del modelo, sino que puede parecer que la situación es más intuitiva.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

cación intuitiva y una justificación relativamente fácil.

El modelo que se va a abordar aquí es el tratado en *Felix* y *Grimlund (1.977)* en el que podemos incorporar situaciones en las que los parámetros tienen propiedades usuales de la A.C. (unimodalidad, simetría, etc ...). Es evidente que el mismo planteamiento puede hacerse con cualquier otro modelo, por ejemplo, el de *Cox* y *Snell (1.979)* - ver Capítulo 3 - .

6.2 Planteamiento y motivación del modelo.

Tal y como se ha comentado al final del apartado anterior, en el ambiente de Auditorías que nos ocupa, las clases de contaminaciones sobre las que habrá que determinar la densidades ML-II deben de reflejar algunas características importantes de los parámetros, ϕ y μ , que se estudian.

Un hecho constatado y admitido, es la unimodalidad de ϕ, si bien una situación de simetría puede no tenerse. Además, para el parámetro μ puede utilizarse una clase de contaminaciones unimodales y simétricas. La condición de simetría supone el uso de valores negativos para μ, lo cual reflejaría errores de subvaloración en la población contable. Este contexto no ha sido tratado aún y permite introducir una aproximación que se basa en la simetría del parámetro μ. (en *Kaplan (1.973a,b)* , se introduce un modelo normal).

El uso de una densidad a priori del tipo normal puede ser una elección atrayente; puesto que la densidad normal se usa a menudo en métodos de estimación en auditorías y además permite una fácil asimilación por parte del auditor, aparte de claras ventajas analíticas.

Aunque una aproximación que se base en la simetría puede ser poco realista, ya que usualmente el auditor espera que la gran mayoría de los errores sean nulos (*Kaplan (1.973a,b)*); en *Felix* y *Gimlund (1.977)* se introduce esta nueva vía que permite considerar errores de subvaloración (desde luego, se puede esperar que un error positivo será más probable que su equivalente en error negativo en un proceso de asignación. En un caso práctico esto se reflejará con una asignación de la media y la varianza a priori que aporte cierta probabilidad a valores negativos, pero no demasiado grande).

Utilizando los resultados técnicos estudiados en la Sección 2.4 , nos centraremos en la elección de densidades del tipo ML-II sobre clases de con-

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

taminaciones asignadas a los parámetros ϕ y μ. Usaremos contaminaciones sobre una variante del modelo propuesto por *Felix y Grimlund (1.977)* , en el que se considera simetría y unimodalidad para la densidad a priori de μ y unimodalidad para la de ϕ .

En el citado trabajo de *Felix y Grimlund (1.977)* se introduce una densidad a priori para μ simétrica y unimodal, en concreto, se asigna una distribución normal con media conocida y con precisión desconocida, a la que se supone normal-gamma (densidad conjugada). Para el parámetro ϕ, como es habitual, se le asigna una densidad beta. La adopción de clases de contaminaciones sobre estos parámetros es considerada en este apartado. Calcularemos las densidades ML-II cuando asumimos en cada parámetro una información a priori contaminada.

Las clases consideradas son :

1. La densidad a priori de μ, pertenece a la clase :

$$\Gamma_\star = \{(1-\varepsilon_1)\cdot g_1 + \varepsilon_1 \cdot q \ ; \ q \in D_\star\}$$

donde g_1 es normal : $\mathcal{N}(m_0, \sigma_0^2)$ (m_0 y σ_0^2 conocidos) [20] y

$D_\star = \{$ *dens. simétricas unimodales con la misma moda* m_0, *que* g_1 $\}$

2. La densidad a priori de ϕ, pertenece a la clase :

$$\Gamma^\star = \{(1-\varepsilon_2)\cdot g_2 + \varepsilon_2 \cdot h \ ; \ h \in D^\star\}$$

donde g_2 es $Beta(\phi_0 c, (1-\phi_0)c)$ (ϕ_0 y c conocidos) [21] y

$D^\star = \{$ *dens. unimodales con la misma moda que* g_2 $\}$

[20] En el modelo original dado por *Felix y Grimlund* se supone desconocido σ^2, asignándosele una distribución gamma-normal. Como también se recoge en este trabajo puede considerarse perfectamente que σ^2 es conocido. En la práctica el valor de σ_0^2 es usado para controlar la concentración alrededor de m_0 .

[21] En la práctica, habrá que tomar valores de c y ϕ_0 de tal forma que g_2 sea unimodal.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

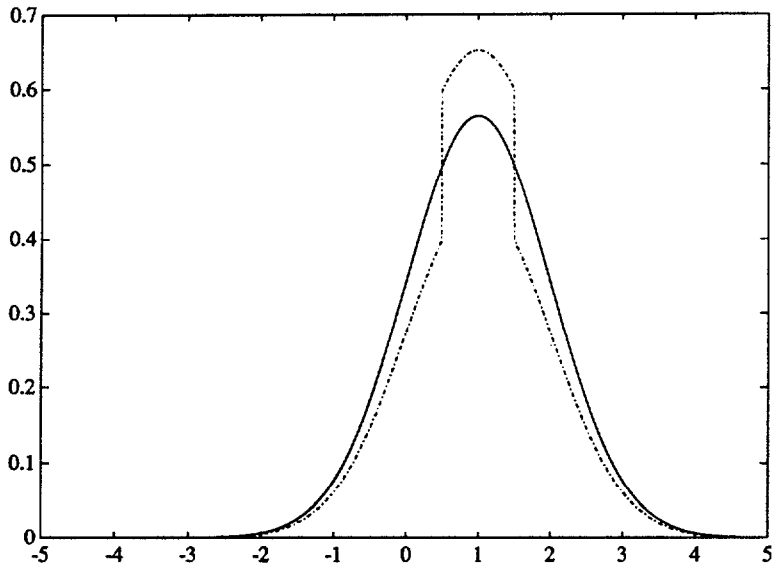

Figura 6.1

Conviene tener presente cuál es la forma de densidades que pertenecen a clases como $\Gamma_\star$ y $\Gamma^\star$. Las figuras 6.1 y 6.2 nos muestran algunas de estas densidades. En la figura 6.1 se muestran elementos de $\Gamma_\star$ (obsérvese que $g_1 \in \Gamma_\star$, basta hacer $q \equiv g_1$) para una contaminación del 20%, esto es : $\varepsilon = 0.20$, y con $m_0 = 1.5$ y $\sigma_0^2 = 1$.

Análogamente, en la figura 6.2 (siguiente página) se muestran elementos de la clase $\Gamma^\star$.

Es obvio que $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$. Esto permite situaciones en las que el auditor tiene más seguridad sobre la densidad de un parámetro que sobre la de otro.

Como es habitual, sobre una muestra de tamaño n, suponemos que encontramos m unidades monetarias erróneas. Para cada unidad con error, z_i es la cantidad de error observada ($i = 1, \ldots, m$) y $\overline{z} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{m} z_i$, es la media muestral de los errores.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

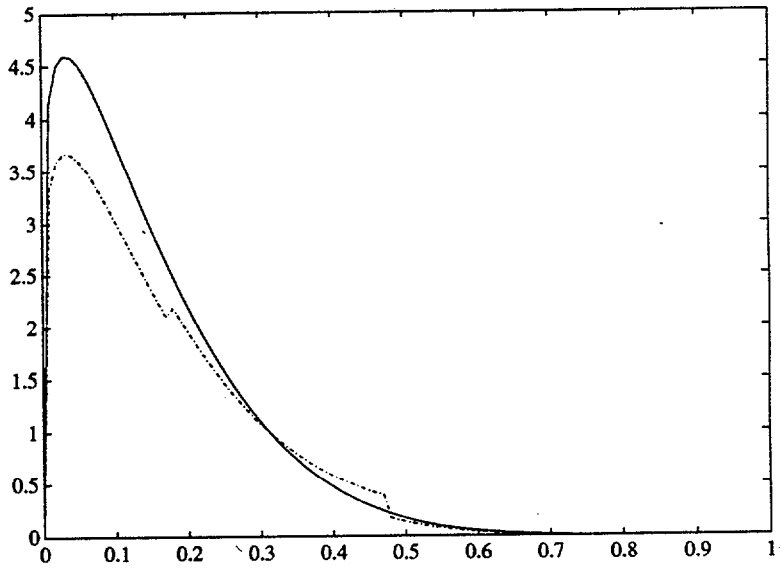

Figura 6.2

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Con la observación muestral $(m, \overline{z})$, calcularemos las densidades a priori ML-II sobre cada clase, $\Gamma_\star$ y $\Gamma^\star$. A continuación, se calcula la densidad a priori de $\psi = \phi \cdot \mu$.

Las verosimilitudes valen :

1. $l_1(\phi \mid m; \overline{z}) = \binom{n}{m} \cdot \phi^m \cdot (1-\phi)^{n-m}$; $\phi \in (0,1)$.

2. $l_2(\mu \mid m; \overline{z}) = \dfrac{exp(-m \cdot \overline{z}/\mu)}{[\mu \cdot (1 - exp(-1/\mu))]^m}$; $\mu \in R$.

A veces utilizaremos la notación $l_1(\phi)$ y $l_2(\mu)$ para hacer referencia a las anteriores verosimilitudes.

6.3 Resolución del modelo.

Resolveremos la situación planteada ahora utilizando los resultados que sobre densidades ML-II se han obtenido en la Sección 2.4. Así pues, sobre las clases ya utilizadas para el estudio de la robustez, se determinan las densidades que se hacen más plausibles a una dada a través del dato observado.

En un primer apartado se calcularán las densidades a priori de los parámetros, ϕ y μ, sobre las clases $\Gamma_\star$ y $\Gamma^\star$ y a continuación se calcula la del producto, es decir, la de ψ.

En último lugar, se calculan las densidades a posteriori de los parámetros. Esto permitirá, al menos teóricamente, calcular las cotas bayesianas a posteriori a un determinado nivel de confianza.

En consecuencia lo que se está haciendo es calcular aquellas densidades a priori que son más plausibles de acuerdo a los datos observados. Con ellas se construyen las densidades a posteriori y se realiza un análisis bayesiano usual.

6.3.1 Determinación de las densidades a priori.

Observemos que las clases de contaminaciones propuestas se corresponden con las utilizadas en la Sección 2.4 . Calcularemos pues, las densidades a priori ML-II sobre cada clase. Con estas densidades puede obtenerse la densidad a priori del producto. La resolución analítica no es inmediata y necesita realizar una serie de discusiones. También puede resultar útil algunas aproximaciones (puede resultar útil una aproximación normal de una beta, cuando la suma de los parámetros de la densidad sea grande - usualmente en las densidades a posteriori, para tamaños muestrales grandes-).

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

La densidad ML-II para μ.

Puesto que g_1 es simétrica y unimodal, con moda m_0 y $D_\star$ es la clase de densidades simétricas unimodales con la misma moda que g_1. Sabemos que la densidad a priori ML-II del parámetro μ será del tipo :

$$\hat{g}_1(\mu) = (1-\varepsilon_1)\cdot g_1(\mu) + \varepsilon_1 \cdot \hat{q}(\mu)$$

donde $\hat{q} \sim Unif(m_0 - \hat{a}, m_0 + \hat{a})$, siendo $\hat{a}$ el valor que maximiza la distribución predictiva :

$$p(\overline{z} \mid q) \equiv p(\overline{z} \mid a) = \begin{cases} \frac{1}{2a}\int_{m_0-a}^{m_0+a} l_2(\mu)\cdot d\mu & , \quad a > 0 \\ l_2(m_0) & , \quad a = 0 \end{cases}$$

Así pues,

$$\hat{g}_1(\mu) = (1-\varepsilon_1)\cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_0}\cdot exp\{-\frac{1}{2}(\frac{\mu - m_0}{\sigma_0})^2\} + \varepsilon_1 \cdot \frac{1}{2\hat{a}}\cdot I_{(m_0-\hat{a}, m_0+\hat{a})}(\mu)$$

siendo $I_{(a,b)}$ la función indicadora sobre el intervalo (a,b) y $\hat{a}$ es el valor que maximiza la expresión :

$$p(\overline{z} \mid q) \equiv p(\overline{z} \mid a) = \begin{cases} \frac{1}{2a}\int_{m_0-a}^{m_0+a} \frac{exp(-m\cdot\overline{z}/\mu)}{[\mu\cdot(1-exp(-1/\mu))]^m}\cdot d\mu & , \quad a > 0 \\ \frac{exp(-m\cdot\overline{z}/m_0)}{[m_0\cdot(1-exp(-1/m_0))]^m} & , \quad a = 0 \end{cases}$$

En lo que sigue (por facilidad en los cálculos), la verosimilitud $l_2(\mu \mid m; \overline{z})$ la consideraremos no truncada, es decir :

$$l_2(\mu) = \frac{exp(-m\cdot\overline{z}/\mu)}{\mu^m} \quad \mu \in (-\infty, +\infty)$$

Esta consideración ya había sido tratada en *Cox* y *Snell (1.979)*, entre otros.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

La densidad ML-II para ϕ.

La densidad a priori ML-II sobre $\Gamma^\star$ se calcula utilizando los resultados de la Sección 2.4 puesto que la densidad g_2 es unimodal y la clase $D^\star$ es la de la densidades unimodales con la misma moda que g_2 ($\phi_{mo} = \phi_0 \cdot \frac{c-1}{c}$).

En consecuencia, la densidad a priori ML-II es :

$$\tilde{g}_2(\phi) = (1-\varepsilon_2)\cdot g_2(\phi) + \varepsilon_2 \cdot \tilde{h}(\phi)$$

donde $\tilde{h} \sim Unif(\phi_{mo}, \phi_{mo} + \tilde{a})$, siendo $\tilde{a}$ el valor que maximiza la distribución predictiva :

$$p(m \mid h) \equiv p(m \mid a) = \begin{cases} \frac{1}{a}\int_{\phi_{mo}}^{\phi_{mo}+a} l_1(\phi)\cdot d\phi & , \quad a > 0 \\ l_1(\phi_{mo}) & , \quad a = 0 \end{cases}$$

Así pues, para cada $\phi \in (0,1)$:

$$\tilde{g}_2(\phi) = (1-\varepsilon_2)\cdot\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(\phi_0 c)\Gamma((1-\phi_0)c)}\cdot\phi^{\phi_0 c-1}\cdot(1-\phi)^{(1-\phi_0)c-1}+\varepsilon_2\cdot\frac{1}{\tilde{a}}\cdot I_{(\phi_{mo},\phi_{mo}+\tilde{a})}(\phi)$$

siendo $I_{(a,b)}$ la función indicadora sobre el intervalo (a,b) y $\tilde{a}$ es el valor que maximiza la expresión :

$$p(m \mid h) \equiv p(m \mid a) = \begin{cases} \frac{1}{a}\int_{\phi_{mo}}^{\phi_{mo}+a} \binom{n}{m}\cdot\phi^m\cdot(1-\phi)^{n-m}\cdot d\phi & , \quad a > 0 \\ \binom{n}{m}\cdot(\phi_{mo})^m(1-\phi_{mo})^{n-m} & , \quad a = 0 \end{cases}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

La densidad a priori para ψ.

Puesto que el parámetro $\psi = \phi \cdot \mu$ resulta que la densidad a priori de ψ puede ser deducida de la ML-II de μ y la de ϕ :

$$\hat{f}(\psi) = \int g(\mu, \frac{\psi}{\mu}) \cdot \frac{1}{\mu} \cdot d\mu = \int \hat{g}_1(\mu) \cdot \tilde{g}_2(\frac{\psi}{\mu}) \cdot \frac{1}{\mu} \cdot d\mu$$

sustituyendo los valores obtenidos anteriormente podemos escribirla :

$$\hat{f}(\psi) = (1-\varepsilon_1)\cdot(1-\varepsilon_2)\cdot I_1(\psi)+(1-\varepsilon_1)\cdot\varepsilon_2\cdot I_2(\psi)+\varepsilon_1\cdot(1-\varepsilon_2)\cdot I_3(\psi)+\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2\cdot I_4(\psi)$$

siendo,

$$I_1(\psi) = \int g_1(\mu) \cdot g_2(\frac{\psi}{\mu}) \cdot \frac{1}{\mu} \cdot d\mu$$

$$I_2(\psi) = \int g_1(\mu) \cdot \tilde{h}(\frac{\psi}{\mu}) \cdot \frac{1}{\mu} \cdot d\mu$$

$$I_3(\psi) = \int \hat{q}(\mu) \cdot g_2(\frac{\psi}{\mu}) \cdot \frac{1}{\mu} \cdot d\mu$$

$$I_4(\psi) = \int \hat{q}(\mu) \cdot \tilde{h}(\frac{\psi}{\mu}) \cdot \frac{1}{\mu} \cdot d\mu$$

En problemas en los que un parámetro tiene densidad beta ($Beta(a,b)$) , es útil una aproximación normal ($0 < t < 1$) :

$$\int_0^t \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)} \cdot p^{a-1} \cdot (1-p)^{b-1} \cdot dp = \sum_{i=a}^{a+b-1} \binom{a+b-1}{i} \cdot t^i \cdot (1-t)^{a+b-1-i}.$$

cuando $a+b$ es *grande* es posible aproximar esta suma (*Larson (1.990)*) por :

$$1 - \Phi(\frac{a - 1/2 - (a+b-1)\cdot t}{\sqrt{(a+b-1)\cdot t\cdot(1-t)}})$$

donde Φ es la función de distribución de una densidad normal standard : $\mathcal{N}(0,1)$.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

A continuación realizamos el cálculo de cada una de las cantidades I_j $(j = 1, \ldots, 4)$.

$$I_1(\psi) = k \cdot \int e^{-\frac{1}{2}(\frac{\mu - m_0}{\sigma_0})^2} \cdot (\frac{\psi}{\mu})^{\phi_0 c - 1} \cdot (1 - \frac{\psi}{\mu})^{(1-\phi_0)c-1} \cdot \frac{1}{\mu} d\mu$$

siendo $k = \dfrac{\Gamma(c)}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_0 \cdot \Gamma(\phi_0 c) \cdot \Gamma((1-\phi_0)c)}$.
La expresión puede simplificarse en :

$$I_1(\psi) = \frac{\Gamma(c) \cdot \psi^{\phi_0 c - 1}}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_0 \cdot \Gamma(\phi_0 c) \cdot \Gamma((1-\phi_0)c)} \cdot \int e^{-\frac{1}{2}(\frac{\mu - m_0}{\sigma_0})^2} \cdot \mu^{1-c} \cdot (\mu - \psi)^{(1-\phi_0)c-1} \cdot d\mu$$

desarrollando el integrando como suma [22] obtenemos :

$$I_1(\psi) = \frac{\Gamma(c) \cdot \psi^{\phi_0 c - 1}}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_0 \cdot \Gamma(\phi_0 c) \cdot \Gamma((1-\phi_0)c)} \cdot \sum_{k=0}^{(1-\phi_0)c-1} (-1)^{(1-\phi_0)c-1-k} \cdot \binom{(1-\phi_0)c-1}{k} \cdot$$
$$\cdot \psi^{(1-\phi_0)c-1-k} \cdot \int e^{-\frac{1}{2}(\frac{\mu - m_0}{\sigma_0})^2} \cdot \mu^{k+1-c} \cdot d\mu$$

Para $I_2(\psi)$ e $I_4(\psi)$ tenemos :

$$I_2(\psi) = \frac{1}{\tilde{a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_0} \cdot \int_{\frac{\psi}{\phi_{m_0} + \tilde{a}}}^{\frac{\psi}{\phi_{m_0}}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{\mu - m_0}{\sigma_0})^2} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot d\mu$$

$$I_4(\psi) = \frac{1}{2 \cdot \hat{a} \cdot \tilde{a}} \cdot \int_{t_1(\psi)}^{t_2(\psi)} \frac{1}{\mu} \cdot d\mu$$

siendo $t_1(\psi) = \max(m_0 - \hat{a}, \frac{\psi}{\phi_{m_0} + \tilde{a}})$ y $t_2(\psi) = \min(m_0 + \hat{a}, \frac{\psi}{\phi_{m_0}})$.

Por último, $I_3(\psi)$ vale :

1. Caso $\psi \leq m_0 - \hat{a}$:

$$I_3(\psi) = \frac{\Gamma(c) \cdot \psi^{\phi_0 c - 1}}{2 \cdot \hat{a} \cdot \Gamma(\phi_0 c) \cdot \Gamma((1-\phi_0)c)} \cdot \sum_{k=0}^{(1-\phi_0)c-1} (-1)^{(1-\phi_0)c-1-k} \cdot$$
$$\binom{(1-\phi_0)c-1}{k} \cdot \psi^{(1-\phi_0)c-1-k} \int_{m_0 - \hat{a}}^{m_0 + \hat{a}} \mu^{k+1-c} \cdot d\mu$$

[22] Habrá que tomar c y ϕ_0 tales que : $(1-\phi_0)c$ sea entero mayor o igual que 1. Incluso podría aproximarse por su parte entera.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

2. Caso $m_0 - \hat{a} < \psi < m_0 + \hat{a}$:

$$I_3(\psi) = \frac{\Gamma(c) \cdot \psi^{\phi_0 c - 1}}{2 \cdot \hat{a} \cdot \Gamma(\phi_0 c) \cdot \Gamma((1-\phi_0)c)} \cdot \sum_{k=0}^{(1-\phi_0)c-1} (-1)^{(1-\phi_0)c-1-k} \cdot$$

$$\cdot \binom{(1-\phi_0)c-1}{k} \cdot \psi^{(1-\phi_0)c-1-k} \int_{\psi}^{m_0+\hat{a}} \mu^{k+1-c} \cdot d\mu$$

3. Caso $\psi \geq m_0 + \hat{a}$:

$$I_3(\psi) = 0$$

La integral $I_3(\psi)$ puede ser aproximada cuando $\phi_0 c + (1-\phi_0)c = c$ sea relativamente grande utilizando el comentario anterior.

1. Caso $\psi \leq m_0 - \hat{a}$:

$$I_3(\psi) \approx \frac{c-1}{2 \cdot \hat{a} \cdot (\phi_0 c - 1)} \cdot \{ \Phi(\frac{\phi_0 c - 3/2 - (c-2) \cdot \frac{\psi}{m_0+\hat{a}}}{\sqrt{(c-2) \cdot \frac{\psi}{m_0+\hat{a}} \cdot (1 - \frac{\psi}{m_0+\hat{a}})}}) -$$

$$-\Phi(\frac{\phi_0 c - 3/2 - (c-2) \cdot \frac{\psi}{m_0-\hat{a}}}{\sqrt{(c-2) \cdot \frac{\psi}{m_0-\hat{a}} \cdot (1 - \frac{\psi}{m_0-\hat{a}})}}) \}$$

2. Caso $m_0 - \hat{a} < \psi < m_0 + \hat{a}$:

$$I_3(\psi) \approx 1 - \frac{\Gamma(\phi_0 c - 1) \cdot \Gamma((1-\phi_0)c)}{\Gamma(c-1)} \cdot \{ 1 -$$

$$\Phi(\frac{\phi_0 c - 3/2 - (c-2) \cdot \frac{\psi}{m_0+\hat{a}}}{\sqrt{(c-2) \cdot \frac{\psi}{m_0+\hat{a}} \cdot (1 - \frac{\psi}{m_0+\hat{a}})}}) \}$$

Este tipo de aproximaciones (o cualquier otra) es mejor cuando utilizamos densidades a posteriori ya que suele utilizarse un tamaño muestral relativamente grande.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

6.3.2 Determinación de las densidades a posteriori.

Una vez obtenidas las densidades a priori de los parámetros de interés, en este apartado nos ocuparemos del cálculo de las densidades a posteriori. Esto permitirá obtener las cotas superiores bayesianas a posteriori, lo cual resuelve el problema de decisión de aceptar o rechazar una contabilidad. A diferencia con trabajos anteriores el uso de la información muestral dada por m y $\overline{z}$ es usada para obtener la densidad a posteriori de ψ.

La densidad a posteriori de μ.

Con la densidad a priori ML-II para μ obtenida en la Sección 6.3.1 y con la información muestral dada por $l_2(\mu \mid m;\overline{z})$ podemos deducir la densidad a posteriori de μ :

$$\hat{g}_1(\mu \mid m;\overline{z}) = \hat{\lambda}(m;\overline{z}) \cdot g_1(\mu \mid m;\overline{z}) + (1 - \hat{\lambda}(m;\overline{z})) \cdot \hat{q}(\mu \mid m;\overline{z})$$

donde :

$$g_1(\mu \mid m;\overline{z}) \propto l_2(\mu) \cdot g_1(\mu) \propto \mu^{-m} \cdot exp\{-(\frac{m \cdot \overline{z}}{\mu} + \frac{1}{2}(\frac{\mu - m_0}{\sigma_0})^2)\} \; ; \; \mu \in R$$

$$\hat{q}(\mu \mid m;\overline{z}) \propto l_2(\mu) \cdot \hat{q}(\mu) \propto \mu^{-m} exp(-m \cdot \overline{z}/\mu) \cdot I_{(m_0-\hat{a},m_0+\hat{a})}(\mu)$$

$$\hat{\lambda}(m;\overline{z}) = \frac{(1-\varepsilon_1) \cdot p(\overline{z} \mid g_1)}{(1-\varepsilon_1) \cdot p(\overline{z} \mid g_1) + \varepsilon_1 \cdot l_2(\overline{z} \mid \hat{\mu})}$$

$\hat{\mu}$ es el E.M.V. de μ, o sea, $\hat{\mu} = \overline{z}$ y $p(\overline{z} \mid g_1)$ es la distribución predictiva :

$$p(\overline{z} \mid g_1) = \int l_2(\mu) \cdot g_1(\mu) \cdot d\mu = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_0} \mu^{-m} \cdot exp\{-(\frac{m \cdot \overline{z}}{\mu} + \frac{1}{2}(\frac{\mu - m_0}{\sigma_0})^2)\} \cdot d\mu$$

$$l_2(\hat{\mu}) = (\overline{z} \cdot e)^{-m}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

La densidad a posteriori de ϕ.

Ahora la información muestral nos la proporciona $l_1(m)$ que junto con la densidad a priori ML-II de ϕ nos facilita el cálculo de su densidad a posteriori, dado m, como combinación convexa de densidades a posteriori :

$$\tilde{g}_2(\phi \mid m) = \tilde{\lambda}(m) \cdot g_2(\phi \mid m) + (1 - \tilde{\lambda}(m)) \cdot \tilde{h}(\phi \mid m)$$

donde :

$$g_2(\phi \mid m) \propto l_1(\phi \mid m) \cdot g_2(\phi) \propto \phi^{\phi_0 c + m - 1} \cdot (1-\phi)^{(1-\phi_0)c + n - m - 1}$$

es decir, g_2 es *Beta* $(\phi_0 c + m, (1-\phi_0)c + n - m)$

$$\tilde{h}(\phi \mid m) \propto l_1(\phi \mid m) \cdot \tilde{h}(\phi) \propto \phi^m \cdot (1-\phi)^{n-m} \cdot I_{(\phi_{mo}, \phi_{mo} + \tilde{a})}(\phi)$$

es decir, $\tilde{h}$ es *Beta-truncada* $(m+1, n-m+1)$ sobre el intervalo $(\phi_{mo}, \phi_{mo} + \tilde{a})$

NOTA : En la práctica, estas densidades betas que aparecen tendrán el primer parámetro pequeño (valores entre 1 y 3, a lo sumo) y el segundo bastante grande (usualmente se considera $n = 100$). Esto permite una aproximación como la obtenida en la sección anterior.

$$\tilde{\lambda}(m) = \frac{(1-\varepsilon_2) \cdot p(m \mid g_2)}{(1-\varepsilon_2) \cdot p(m \mid g_2) + \varepsilon_2 \cdot l_1(\hat{\phi})}$$

$\hat{\phi}$ es el E.M.V. de ϕ, o sea, $\hat{\phi} = \frac{m}{n}$.

$$p(m \mid g_2) = \int l_1(\phi) \cdot g_2(\phi) \cdot d\phi =$$

$$= \binom{n}{m} \cdot \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(\phi_0 c) \cdot \Gamma((1-\phi_0)c)} \cdot \frac{\Gamma(\phi_0 c + m) \cdot \Gamma((1-\phi_0)c + n - m)}{\Gamma(c+n)}$$

$$l_1(\hat{\phi}) = \binom{n}{m} \cdot (\frac{n}{m})^m \cdot (1 - \frac{n}{m})^{n-m}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

La densidad a posteriori de ψ.

Al igual que anteriormente podemos obtener la densidad, en este caso a posteriori, del parámetro $\psi = \phi \cdot \mu$. Calculada ésta podremos obtener, numéricamente, las cotas bayesianas superiores a posteriori para diversos casos. Así pues,

$$\hat{f}(\psi \mid m, \overline{z}) = \int \tilde{g}_2(\phi \mid m) \cdot \hat{g}_1(\frac{\psi}{\phi} \mid m; \overline{z}) \cdot \frac{1}{\phi} \cdot d\phi$$

De los apartados anteriores, tenemos que : .

$$\hat{f}(\psi \mid m, \overline{z}) = \hat{\lambda}(m; \overline{z}) \cdot \tilde{\lambda}(m) \cdot J_1(\psi \mid m, \overline{z}) + \hat{\lambda}(m; \overline{z}) \cdot (1 - \tilde{\lambda}(m)) \cdot J_2(\psi \mid m, \overline{z}) +$$

$$(1 - \hat{\lambda}(m; \overline{z})) \cdot \tilde{\lambda}(m) \cdot J_3(\psi \mid m, \overline{z}) + (1 - \hat{\lambda}(m; \overline{z})) \cdot (1 - \tilde{\lambda}(m)) \cdot J_4(\psi \mid m, \overline{z})$$

siendo,

$$J_1(\psi \mid m, \overline{z}) = \int g_2(\phi \mid m) \cdot g_1(\frac{\psi}{\phi} \mid m; \overline{z}) \cdot \frac{1}{\phi} \cdot d\phi$$

$$J_2(\psi \mid m, \overline{z}) = \int \tilde{h}(\phi \mid m) \cdot g_1(\frac{\psi}{\phi} \mid m; \overline{z}) \cdot \frac{1}{\phi} \cdot d\phi$$

$$J_3(\psi \mid m, \overline{z}) = \int g_2(\phi \mid m) \cdot \hat{q}(\frac{\psi}{\phi} \mid m; \overline{z}) \cdot \frac{1}{\phi} \cdot d\phi$$

$$J_4(\psi \mid m, \overline{z}) = \int \tilde{h}(\phi \mid m) \cdot \hat{q}(\frac{\psi}{\phi} \mid m; \overline{z}) \cdot \frac{1}{\phi} \cdot d\phi$$

Calcularemos ahora estas cuatro cantidades :

$$J_1(\psi \mid m, \overline{z}) \propto \int_0^1 \phi^{\phi_0 c + m - 2} \cdot (1 - \phi)^{(1-\phi_0)c + n - m - 1} \cdot (\frac{\psi}{\phi})^{-m} \cdot$$

$$\cdot exp\{-(\frac{m \cdot \overline{z} \cdot \phi}{\psi} + \frac{1}{2} \cdot (\frac{\psi - \phi m_0}{\phi \sigma_0})^2)\} \cdot d\phi$$

luego,

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

$$J_1(\psi \mid m,\overline{z}) \propto \psi^{-m} \cdot \int_0^1 \phi^{\phi_0 c+2m-2} \cdot (1-\phi)^{(1-\phi_0)c+n-m-1} \cdot$$

$$\cdot exp\{-(\frac{m \cdot \overline{z} \cdot \phi}{\psi} + \frac{1}{2} \cdot (\frac{\psi - \phi m_0}{\phi \sigma_0})^2)\} \cdot d\phi$$

En el modelo considerado : $\mid \psi \mid < 1$ y por tanto podemos considerar la siguiente aproximación de la función exponencial :

$$exp\{-(\frac{m \cdot \overline{z} \cdot \phi}{\psi} + \frac{1}{2} \cdot (\frac{\psi - \phi m_0}{\phi \sigma_0})^2)\} \approx 1 - \frac{m \cdot \overline{z} \cdot \phi}{\psi} - \frac{1}{2} \cdot (\frac{\psi - \phi m_0}{\phi \sigma_0})^2$$

podemos aproximar $J_1(\psi \mid m,\overline{z})$ por :

$$J_1(\psi \mid m,\overline{z}) \approx \psi^{-m} \cdot \{ (1-\frac{m_0^2}{2\sigma_0^2}) \cdot \int_0^1 \phi^{\phi_0 c+2m-2} \cdot (1-\phi)^{(1-\phi_0)c+n-m-1} \cdot d\phi -$$

$$m \cdot \overline{z} \cdot \psi^{-1} \cdot \int_0^1 \phi^{\phi_0 c+2m-1} \cdot (1-\phi)^{(1-\phi_0)c+n-m-1} \cdot d\phi -$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\psi^2}{\sigma_0^2} \cdot \int_0^1 \phi^{\phi_0 c+2m-4} \cdot (1-\phi)^{(1-\phi_0)c+n-m-1} \cdot d\phi +$$

$$\frac{\psi \cdot m_0}{\sigma_0^2} \int_0^1 \phi^{\phi_0 c+2m-3} \cdot (1-\phi)^{(1-\phi_0)c+n-m-1} \cdot d\phi \}$$

de donde,

$$J_1(\psi \mid m,\overline{z}) \approx \psi^{-m} \cdot \{ (1-\frac{m_0^2}{2\sigma_0^2}) \cdot \frac{\Gamma(\phi_0 c+2m-1) \cdot \Gamma((1-\phi_0)c+n-m)}{\Gamma(n+m+c-1)} -$$

$$m \cdot \overline{z} \cdot \psi^{-1} \cdot \frac{\Gamma(\phi_0 c+2m) \cdot \Gamma((1-\phi_0)c+n-m)}{\Gamma(n+m+c)} -$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\psi^2}{\sigma_0^2} \cdot \frac{\Gamma(\phi_0 c+2m-3) \cdot \Gamma((1-\phi_0)c+n-m)}{\Gamma(n+m+c-3)} -$$

$$\frac{\psi \cdot m_0}{\sigma_0^2} \cdot \frac{\Gamma(\phi_0 c+2m-2) \cdot \Gamma((1-\phi_0)c+n-m)}{\Gamma(n+m+c-2)} \}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

de igual manera,

$$J_2(\psi \mid m, \overline{z}) \propto \psi^{-m} \cdot \int_{\phi_{mo}}^{\min(\phi_{mo}+\tilde{a},1)} \phi^{2m-1} \cdot (1-\phi)^{n-m} \cdot$$

$$\cdot exp\{-(\frac{m \cdot \overline{z} \cdot \phi}{\psi} + \frac{1}{2} \cdot (\frac{\psi - \phi m_0}{\phi \sigma_0})^2)\} \cdot d\phi$$

de donde ,

$$J_2(\psi \mid m, \overline{z}) \approx \psi^{-m} \cdot \{ (1 - \frac{m_0^2}{2\sigma_0^2}) \cdot \int_{\phi_{mo}}^{\min(\phi_{mo}+\tilde{a},1)} \phi^{2m-1} \cdot (1-\phi)^{n-m} \cdot d\phi -$$

$$m \cdot \overline{z} \cdot \psi^{-1} \cdot \int_{\phi_{mo}}^{\min(\phi_{mo}+\tilde{a},1)} \phi^{2m} \cdot (1-\phi)^{n-m} \cdot d\phi -$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\psi^2}{\sigma_0^2} \cdot \int_{\phi_{mo}}^{\min(\phi_{mo}+\tilde{a},1)} \phi^{2m-3} \cdot (1-\phi)^{n-m} \cdot d\phi +$$

$$\frac{\psi \cdot m_0}{\sigma_0^2} \int_{\phi_{mo}}^{\min(\phi_{mo}+\tilde{a},1)} \phi^{2m-2} \cdot (1-\phi)^{n-m} \cdot d\phi \}$$

Para $J_3(\psi \mid m, \overline{z})$:

$$J_3(\psi \mid m, \overline{z}) \propto \int_{\max(m_0-\hat{a},0)}^{\min(m_0+\hat{a},1)} \phi^{\phi_0 c+m-2} \cdot (1-\phi)^{(1-\phi_0)c+n-m-1} \cdot (\frac{\psi}{\phi})^{-m} \cdot exp(-m \cdot \overline{z} \cdot \phi/\psi) \cdot d\phi$$

luego,

$$J_3(\psi \mid m, \overline{z}) \propto \psi^{-m} \cdot \int_{\max(m_0-\hat{a},0)}^{\min(m_0+\hat{a},1)} \phi^{\phi_0 c+2m-2} \cdot (1-\phi)^{(1-\phi_0)c+n-m-1} \cdot exp(-m \cdot \overline{z} \cdot \phi/\psi) \cdot d\phi$$

Aproximando la exponencial anterior (en expresión cuadrática) por :

$$exp(-m \cdot \overline{z} \cdot \phi/\psi) \approx 1 - \frac{m \cdot \overline{z} \cdot \phi}{\psi} + \frac{1}{2} \cdot \frac{m^2 \cdot \overline{z}^2 \cdot \phi^2}{\psi^2}$$

podemos aproximar $J_3(\psi \mid m, \overline{z})$ por :

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

$$J_3(\psi \mid m, \overline{z}) \approx \psi^{-m} \cdot \{ \int_{\max(m_0-\hat{a},0)}^{\min(m_0+\hat{a},1)} \phi^{\phi_0 c+2m-2} \cdot (1-\phi)^{(1-\phi_0)c+n-m-1} \cdot d\phi -$$

$$m \cdot \overline{z} \cdot \psi^{-1} \cdot \int_{\max(m_0-\hat{a},0)}^{\min(m_0+\hat{a},1)} \phi^{\phi_0 c+2m-1} \cdot (1-\phi)^{(1-\phi_0)c+n-m-1} \cdot d\phi -$$

$$\frac{1}{2} \cdot m^2 \cdot \overline{z}^2 \cdot \psi^{-2} \cdot \int_{\max(m_0-\hat{a},0)}^{\min(m_0+\hat{a},1)} \phi^{\phi_0 c+2m} \cdot (1-\phi)^{(1-\phi_0)c+n-m-1} \cdot d\phi \}$$

Análogamente procedemos para $J_4(\psi \mid m, \overline{z})$:

$$J_4(\psi \mid m, \overline{z}) \approx \psi^{-m} \cdot \{ \int_{\max(\frac{\psi}{m_0+\tilde{a}}, \phi_{mo})}^{\min(\frac{\psi}{m_0-\tilde{a}}, \phi_{mo}+\tilde{a})} \phi^{2m-1} \cdot (1-\phi)^{n-m} \cdot d\phi -$$

$$m \cdot \overline{z} \cdot \psi^{-1} \cdot \int_{\max(\frac{\psi}{m_0+\tilde{a}}, \phi_{mo})}^{\min(\frac{\psi}{m_0-\tilde{a}}, \phi_{mo}+\tilde{a})} \phi^{2m} \cdot (1-\phi)^{n-m} \cdot d\phi -$$

$$\frac{1}{2} \cdot m^2 \cdot \overline{z}^2 \cdot \psi^{-2} \cdot \int_{\max(\frac{\psi}{m_0+\tilde{a}}, \phi_{mo})}^{\min(\frac{\psi}{m_0-\tilde{a}}, \phi_{mo}+\tilde{a})} \phi^{2m+1} \cdot (1-\phi)^{n-m} \cdot d\phi \}$$

Aunque ahora hemos elegido otra aproximación, en este caso también podríamos haber utilizado una aproximación por la distribución normal como la utilizada para las densidades a priori. En definitiva, es posible calcular de un modo aproximado una densidad a priori y a posteriori para ψ como producto de dos densidades obtenidas siguiendo criterios máxima verosimilitud sobre una clase de densidades coherentes con las creencias del auditor sobre la población estudiada.

Concluimos con la idea de que es posible también desde el punto de vista de la robustez, la utilización de ciertas técnicas para la determinación de densidades más plausibles que otras (en definitiva, se trata de definir un *orden* de preferencia sobre la clase Γ de densidades). Como ya se ha comentado, existen otros criterios (utilizados cada uno en determinados contextos

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

) para dicha selección. En particular, el criterio de *Mínima Discriminación de Información* (MDI) introducido por *Brockett, Charnes* y *Paick (1.984)* permite desarrollar métodos muy flexibles para la construcción de densidades a priori unimodales, que son bastante utilizadas en el contexto que nos ocupa.

En este trabajo los autores muestran cómo desarrollar un método para incorporar la información subjetiva a la construcción de una densidad a priori unimodal para un análisis bayesiano siguiente. El método es totalmente no paramétrico y utiliza únicamente la información suministrada y no otra. Una de sus principales ventajas es que resulta relativamente fácil de programar en ordenador. Desde luego, un estudio profundo y minucioso de esta metodología se debe realizar; aunque como ya hemos dicho no constituye materia fundamental del presente trabajo.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Capítulo 7

Epílogo.

A lo largo de la memoria, en cada uno de los casos estudiados se han ido poniendo de manifiesto las conclusiones sobre comportamiento del modelo en lo que respecta a su sensibilidad o robustez.

Más que ahondar en todos y cada uno de los comentarios parciales realizados a lo largo del trabajo deseamos destacar como conclusión global, la *metodología* aquí presentada :

La necesidad de abordar el problema de la modelización de la opinión a priori del auditor desde el punto de vista que la metodología estadística actual permite. En definitiva, descuidar los intentos de forzar al auditor a la elección de una distribución a priori única para ser capaces de procesar modelizaciones de su opinión profesional más flexibles y amplias y por tanto más próximas a sus consideraciones cualitativas.

A continuación exponemos una serie de puntos que entendemos deben ser objeto de futuras investigaciones.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

7.1 Sobre la independencia de los parámetros ϕ y μ.

Un problema continuo a lo largo de toda la memoria ha sido que el parámetro de interés se obtenía como una función de otros dos parámetros, $\psi = \phi \cdot \mu$. Se disponía de información a priori sobre los parámetros ϕ y μ, pero queríamos obtener conclusiones sobre ψ, en definitiva aspectos de la distribución a posteriori de ψ. En la literatura contable es frecuente suponer en este punto la independencia de ϕ y μ, así se ha hecho constar a lo largo de la memoria y bajo esa hipótesis se ha trabajado en la misma. No obstante lo anterior, en el marco que nos ocupa es discutible y a veces difícilmente sostenible la hipótesis de independencia por lo que es importante plantearse la posible omisión de la misma.

El problema es que tenemos un espacio paramétrico bidimensional (μ, ϕ), en donde nos interesa $\psi = \phi \cdot \mu$; especificar la distribución a priori para ψ es extremadamente difícil aunque es posible especificar informaciones a priori sobre μ y sobre ϕ, en definitiva, marginales.

La cuestión de obtener conclusiones sobre la esperanza a priori de una función de ϕ y μ, cuando se dispone de sus distribuciones marginales, se conoce como problema de *Monge-Kantorovich* y ha recibido una gran atención (ver *Rachev (1.985)*). Por desgracia, pocos de esos trabajos son útiles para conclusiones sobre las esperanzas a posteriori, la dificultad viene de que las esperanzas a posteriori son funciones no lineales de la distribución a priori. *Lavine, Wasserman y Wolpert (1.991)* se plantean el problema y esbozan una primera solución considerando una serie de problemas lineales como en *Lavine (1.988, 1.991)*.

A la vista de lo anterior creemos muy interesante la consideración de esas metodologías que vayan permitiendo remover la hipótesis de independencia que ha sido una constante en los problemas que nos ocupan a lo largo de los últimos quince o veinte años.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

7.2 Sobre la consideración de un valor fijo para μ.

Una prolongación interesante de parte de la memoria sería la siguiente :

En varias partes de este trabajo se ha considerado que el parámetro μ tomaba un valor fijo μ_0 (ver por ejemplo, Cap. 3) y para ese valor fijo se efectuaba el desarrollo completo. La consideración de un conjunto de valores $\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\}$ que constituyese una discretización de la vari able aleatoria μ puede considerarse una buena aproximación de la variable aleatoria continua μ.

Observemos que el desarrollo completo del modelo considerado para cada caso y para cada uno de los μ_i $(i = 1, \ldots, n)$ no supone ningún prob lema adicional y la consideración global de las consecuencias para cada uno de los μ_i, da una idea, entendemos que de bastante calidad, sobre el comportamiento general del modelo.

En definitiva planteamos :

- Adecuada discretización de la variable μ para cada caso.
- Obtención de conclusiones para cada uno de los valores aislados de μ.
- Consideración globalizada de las conclusiones del apartado anterior.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

7.3 Sobre la selección de una distribución a priori singular en una clase plausible de distribuciones a priori.

En el Capítulo 6 de la memoria se plantea el problema de seleccionar una distribución a priori singular dentro de una clase previamente establecida. El camino seguido en la argumentación consistió en fijar una clase de distribuciones a priori que era plausible en el sentido de recoger aquellos aspectos de las creencias a priori del auditor que se consideraban fundamentales y permitir un margen de separación utilizando un determinado grado de contaminación. Establecida esa clase se efectuaba la elección de una distribución a priori singular, esa elección se hacía estableciendo una ordenación entre las distribuciones de la clase. La ordenación venía dada a través de la asociación a cada distribución de una *"verosimilitud dados los datos observados "*, lo que se conoce habitualmente como principio ML-II. En el desarrollo concreto de los modelos se daban los siguientes pasos :

- Obtención de la distribución a priori tipo ML-II, y
- cálculo de las distribuciones a priori y a posteriori del parámetro ψ.

Al menos los siguientes aspectos prolongan el estudio realizado y pensamos que precisan una investigación más profunda :

1. Desarrollo de procedimientos analíticos que permitan la obtención explícita de distribuciones ML-II para otras clases de contaminación.
2. Desarrollo del cálculo numérico y de la automatización que permitan la aplicabilidad directa de los resultados obtenidos en Cap. 6 y de los posibles resultados del apartado anterior.
3. Utilización de otros criterios para la selección de la distribución a priori singular dentro de una clase preestablecida. Otros criterios se han desarrollado en la literatura, por ejemplo : Máxima Entropía, Mínima Discriminación de Información (MDI), etc ... Creemos que merece una atención especial el criterio MDI aplicado a la construcción de densidades a priori unimodales, en la línea del trabajo de *Brockett, Charnes y Paick (1.984)*. En este trabajo se desarrolla un método no paramétrico que utiliza únicamente la información suministrada. Una posible ventaja de este método es un cálculo analítico relativamente sencillo, una gran flexibilidad para admitir diferentes especificaciones del auditor y una mayor facilidad de programación que el método ML-II.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

7.4 Sobre la Información a Priori dada por Cuantiles.

En el Capítulo 5 se estudió una metodología de análisis bayesiano que permite procesar una información a priori dada por algunos cuantiles de la desconocida distribución a priori. Además, se ha incorporado la propiedad de unimodalidad (cualidad importante y bastante usual en el marco que nos ocupa) obteniéndose una mejoría apreciable en las conclusiones finales. No obstante creemos que la metodología utilizada precisa de una investigación más profunda en el sentido de refinar el cálculo analítico que subyace al objeto de mejorar las conclusiones. Especialmente parece necesario utilizar la normalización de la probabilidad a posteriori. Pensamos que esta utilización mejorará las conclusiones en un caso tan interesante como éste.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

7.5 Sobre la consideración de un Modelo Multinomial - Estudio de Robustez.

A lo largo de muchos de los trabajos publicados en la literatura contable, cuando en una investigación de auditoría se utiliza muestreo DUS, subyace la consideración de una verosimilitud multinomial. Surge entonces de manera natural la adopción de una información a priori modelizada por una distribución de *Dirichlet* (ver por ejemplo *Tsui, Matsumura y Tsui (1.985)*).

Un intento anterior de modelización bayesiana o cuasi bayesiana, como la denomina el autor, en un esquema multinomial puede verse en *McCray (1.984)* .

Entendemos que un planteamiento tan natural al problema merece una atención especial, y por tanto, una investigación más profunda, utilizando las metodologías que se han considerado a lo largo de este trabajo.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Apéndice 1

Distribución del producto Gamma - Gamma inversa

Vamos a calcular la distribución del producto de una *(Gamma)* con una *(Gamma-inversa)* para posteriormente aplicarlo al cálculo de distribución de ψ. Suponemos independencia en las variables.

Sea X una variable aleatoria con distribución $Gamma(\alpha_0, \beta_0)$, i.e. :

$$g_0(x) = \frac{\alpha_0^{\beta_0}}{\Gamma(\beta_0)} \cdot x^{\beta_0 - 1} \cdot exp(-\alpha_0 x), \quad x > 0.$$

con α_0 y β_0 positivos.

Sea Y una variable aleatoria con distribución $Gamma - inversa(\alpha_1, \beta_1)$, i.e. :

$$g_1(y) = \frac{\alpha_1^{\beta_1}}{\Gamma(\beta_1)} \cdot y^{-(\beta_0+1)} \cdot exp(-\frac{\alpha_1}{y}), \quad y > 0.$$

con α_1 y β_1 positivos.

Se trata de encontrar la distribución de $V = X \cdot Y$. Como en *Rohatgi, pag. 141* tenemos :

$$\begin{aligned}
g(v) &= \int_0^\infty g(x, \frac{v}{x}) \cdot \frac{1}{x} dx \\
&= \int_0^\infty g_0(x) \cdot g_1(\frac{v}{x}) \cdot \frac{1}{x} dx \\
&= \frac{\alpha_0^{\beta_0} \alpha_1^{\beta_1}}{\Gamma(\beta_0)\Gamma(\beta_1)} \cdot \int_0^\infty x^{\beta_0 - 2} \cdot (\frac{x}{v})^{\beta_1 + 1} \cdot exp(-(\alpha_0 + \alpha_1/v)x) dx \\
&= \frac{\alpha_0^{\beta_0} \alpha_1^{\beta_1}}{\Gamma(\beta_0)\Gamma(\beta_1)} \cdot \frac{1}{v^{\beta_1+1}} \cdot \int_0^\infty x^{\beta_0 + \beta_1 - 1} \cdot exp(-(\alpha_0 + \alpha_1/v)x) dx
\end{aligned}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Calculemos pues el valor de la integral, $\int_0^\infty x^{\beta_0+\beta_1-1}\cdot exp(-(\alpha_0+\alpha_1/v)x)dx$.

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty x^{\beta_0+\beta_1-1}\cdot exp(-(\alpha_0+\alpha_1/v)x)dx \\
&= \int_0^\infty \frac{(\alpha_0+\alpha_1/v)^{\beta_0+\beta_1}}{(\alpha_0+\alpha_1/v)^{\beta_0+\beta_1}}\cdot\frac{\Gamma(\beta_0+\beta_1)}{\Gamma(\beta_0+\beta_1)}\cdot x^{\beta_0+\beta_1-1}\cdot exp(-(\alpha_0+\alpha_1/v)x)dx \\
&= \frac{\Gamma(\beta_0+\beta_1)}{(\alpha_0+\alpha_1/v)^{\beta_0+\beta_1}}\cdot\underbrace{\int_0^\infty \frac{(\alpha_0+\alpha_1/v)^{\beta_0+\beta_1}}{\Gamma(\beta_0+\beta_1)}\cdot x^{\beta_0+\beta_1-1}\cdot exp(-(\alpha_0+\alpha_1/v)x)dx}_{vale1} \\
&= \frac{\Gamma(\beta_0+\beta_1)}{(\alpha_0+\alpha_1/v)^{\beta_0+\beta 1}}.
\end{aligned}$$

de donde deducimos que :

$$g(v) = \frac{\Gamma(\beta_0+\beta_1)}{\Gamma(\beta_0)+\Gamma(\beta_1)}\cdot\alpha_0^{\beta_0}\cdot\alpha_1^{\beta_1}\cdot\frac{v^{\beta_0-1}}{(\alpha_1+\alpha_0 v)^{\beta_0+\beta_1}}, \quad v\geq 0.$$

Haciendo $V^\star = \frac{\beta_1}{\beta_0}\cdot\frac{\alpha_0}{\alpha_1}\cdot V$, como $v = \frac{\alpha_1}{\alpha_0}\cdot\frac{\beta_0}{\beta_1}\cdot v^\star$, tenemos que : $\frac{dv}{dv^\star} = \frac{\alpha_1}{\alpha_0}\cdot\frac{\beta_0}{\beta_1}$ y por tanto, por la fórmula del cambio de variable :

$$g_\star(v^\star) = \frac{\alpha_1}{\alpha_0}\cdot\frac{\beta_0}{\beta_1}\cdot g(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\cdot\frac{\beta_0}{\beta_1}\cdot v^\star) = \frac{\Gamma(\beta_0+\beta_1)}{\Gamma(\beta_0)\Gamma(\beta_1)}\cdot\frac{\beta_0}{\beta_1}\cdot(\frac{\beta_0}{\beta_1}\cdot v^\star)^{\beta_0-1}\cdot(1+\frac{\beta_0}{\beta_1}\cdot v^\star)^{-(\beta_0+\beta_1)}$$

que corresponde a la densidad de una variable aleatoria con distribución $\mathcal{F}(2\beta_0, 2\beta_1)$

En consecuencia, concluimos que :

$$V^\star = \frac{\beta_1}{\beta_0}\cdot\frac{\alpha_0}{\alpha_1}\cdot V \quad\sim\quad \mathcal{F}(2\beta_0, 2\beta_1)$$

□

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Apéndice 2

Descripción de los programas diseñados.

Para la obtención numérica de cada una de las ilustraciones que se han expuesto a lo largo de la memoria ha sido necesario diseñar algunas rutinas de programación, específicas para tal fin.

Es bien conocido que el cálculo de distribuciones a posteriori no es tarea fácil con frecuencia, además cuando se consideran clases de posibles distribuciones a priori su cálculo es aún más complicado (como ha quedado de manifiesto).

Para tal efecto, si se utiliza el paquete MATLAB, que incorpora un lenguaje de programación, con un equipo informático estándar (386, con coprocesador matemático) es posible obtener resultados óptimos en tiempo y calidad de la solución.

Principalmente, para cada una de las ilustraciones numéricas de los Capítulos 3, 4 y 5 se escribieron programas.

RANGOS.M : Este programa calcula los rangos de las probabilidades a posteriori de las cotas superiores bayesianas para el modelo de contaminación prop uesto en la memoria como alternativa al modelo de *Cox* y *Snell*. Está desarrol lado de manera que previamente deben calcularse $UB(1-\alpha;m)$ (son valores de entrada en este programa). Para ello el programa necesita de otros : Cox.m (calcula las cotas), Hc.m (calcula la función $H_C(t)$) , H0.m (calcula la función $H_0(t)$).

BU.M : Este programa calcula y representa la distribución a priori de ψ en un modelo BU. Representa la densidad a priori de ϕ (Beta) y compara ambas.

GU.M : Este programa calcula y representa la distribución a priori de ψ en un modelo GU. Representa la densidad a priori de ϕ (Gamma) y compara ambas.

BUPOST.M : Este programa calcula y representa la distribución a posteriori de ψ en un modelo BU. Representa la densidad a posteriori de ϕ (Beta) y compara ambas.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

BERGOEL.M : Utilizado en el Capítulo 5. Calcula la magnitud de los rangos de las probabilidades a posteriori de los cuartiles con o sin unimodalidad cuando el número de errores en la muestra es distinto de cero. Para el caso de cero errores en la muestra se diseñó el programa BERGMOD.M .

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Bibliografía

[1] M.J.ABDOLMOHAMMADI (1.987).*Bayesian Inference in Auditing: Evidence on the Most Appropiate Assessment Techniques.* Accounting and Business Research, 17, 291-300.

[2] J.AITCHISON y I.R.DUNSMORE (1.975). *Statistical Prediction Analysis.* Cambridge University Press.

[3] R.ANDERSON y A.D.TEITLEBAUM (1.973). *Dollar-Unit Sampling.* Canadian Chartered Accountant, 102-4;30-39.

[4] A.A.ARENS y J.K.LOEBBECKE (1.981). *Applications of Statistical Sampling to Auditing.* Ed. Prentice-Hall, Inc.

[5] A.H.ASHTON (1.982). *The Descriptive Validity of Normative Decision Theory in Auditing Contexts.* Journal of Accounting Research, 20-2; Pt.I; 415-428.

[6] P.J.BECK, I.SOLOMON y L.A.TOMASSINI (1.985). *Subjective Prior Probability Distributions and Audit Risk* . Journal of Accounting Research, 23-1; 37-56.

[7] J.O.BERGER (1.982).*The Robustness Bayesian Viewpoint.* Technical Report # 82-09. Dpt. of Statistic. Purdue University.

[8] J.O.BERGER (1.985).*Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis.* New York. Springer-Verlag.

[9] J.O.BERGER (1.987).*Robust Bayesian Analysis Sensitivity of the prior.* Technical Report # 87-10. Dpt. of Statistic. Purdue University.

[10] J.O.BERGER y L.M.BERLINER (1.986). *Robust Bayes and Empirical Bayes Analysis with ε - contaminated Priors.* The Annals of Statistics, Vol. 12. # 2 , 461-486.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

[11] J.O.BERGER y A.O'HAGAN (1.987). *Robust Bayesian Analysis with Specified Prior Quantiles.* Technical Report # 86-59. Dept. of Statistic. Purdue University.

[12] L.M.BERLINER y P.K.GOEL (1.990). *Incorporating Partial Prior Information : Ranges of Posterior Probabilities.* Bayesian and Likelihood Methods in Statistics and Econometrics. Elsevier Science Publishers B.V. North-Holland, 307-406.

[13] J.R.BLUM y J.ROSEMBALTT (1.967). *On partial a priori information in statistical inference.* Annals of Math. Stat. 38; 1671-1678.

[14] J.L.BOOCKHOLDT y D.R.FINLEY (1.980). *A Minimum-Cost Audit Sampling Methodology under Conditions of Predetermined Beta Risk.* Decision Sciences, 11; 701-713.

[15] P.BROCKETT, A.CHARNES y K.PAICK (1.984). *A Method for Constructing a Unimodal Inferential or Prior Distribution.* Research Report CCS 473. University of Texas at Austin.

[16] J.A.CANO, A.HERNANDEZ y E.MORENO (1.989) *Robust Bayesian Analysis with ε - Contaminations Partially Known.* Technical Report. Dept. de Estadística e I.O. Universidad de Granada. Unpublished Manuscript.

[17] G.R.CHESLEY (1.975). *Elicitation of Subjective Probabilities: A review.* The Accounting Review (April); 325-337.

[18] J.C.CORLESS (1.972). *Assessing Prior Distributions for Applying Bayesian Statistics in Auditing.* The Accounting Review (July); 556-566.

[19] D.R.COX y E.J.SNELL (1.979).*On Sampling and the Estimation of Rare Errors.* Biometrika; 66-1; 125-132.

[20] M.A.CROSBY (1.980). *Implications of Prior Probability Elicitation on Auditor Sample Size Decisions.* Journal of Accounting Research; 18-2, 585-593.

[21] M.A.CROSBY (1981).*Bayesian Statistics in Auditing: A Comparison of Probability Elicitation Techniques.* The Accounting Review; LVI-1, 355-365.

[22] A.P.DAWID (1.982). *The Well-Calibrated Bayesian (with comments).* Journal of the American Statistical Association, 77, #379; 605-613.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

[23] M.H.DeGROOT (1.970). *Optimal Statistical Decisions.* McGraw-Hill, Inc.

[24] L.DWORIN y R.A.GRIMLUND (1.984). *Dollar Unit Sampling for Accounts Receivable and Inventory.* The Accounting Review; LIX-2; 218-241.

[25] L.DWORIN y R.A.GRIMLUND (1.986).*Dollar-Unit Sampling: A comparison of the quasi-bayesian and moment bounds.* The Accounting Review; LXI-1, 36-57.

[26] H.J.EIHORN (1.974).*Expert Judgment: Some Necessary Conditions and an Example.* Journal of Applied Psychology; 59; 562-571.

[27] W.L.FELIX (Jr) (1.976).*Evidence on Alternative Means of Assessing Prior Probability Distributions for Audit Decision Making.* The Accounting Review; LI-4;800-807.

[28] W.L.FELIX (Jr) y R.GRIMLUND (1.977).*A Sampling Model for Audit Tests of Composite Accounts.* Journal of Accounting Research (Spring); 23-40.

[29] S.E.FIENBERG, J.NETER y R.A.LEITCH (1.977). Estimating the Total Ovestament Error in Accounting Populations. J.A.S.A. # 72, 358; 295-302.

[30] T.A.FROST y H.TAMURA (1.982). *Jackknifed Ratio Estimation in Statistical Auditing.* Journal of Accountin Research, Spring, 103-120.

[31] T.A.FROST y H.TAMURA (1.986). *Accuracy of Auxiliary Information Interval Estimation in Statistical Auditing.* Journal of Accountin Research, Vol. 24, # 1; 57-75.

[32] S.J.GARSTKA (1.977). *Models for Computing Upper Error Limits in Dollar-Unit Sampling.* Journal of Accounting Research (Autumn); 179-192.

[33] S.J.GARSTKA y P.A.OHLSON (1.975).*Sampling with Probability Proportional to Size from Accounting Populations.* Unpublished Manuscript.

[34] J.GODFREY y J.NETER (1.982).*Bayesian Bounds for Monetary-Unit-Sampling in Accounting and Auditing.* Unpublished Audit Research Working Paper Series, Report 83-001 (Center for Audit Research, Univ. of Georgia).

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

[35] J.GODFREY y J.NETER (1.984).*Bayesian bounds for monetary unit sampling in accounting and auditing.* Journal of Accounting Research; 22-2; 497-525.

[36] R.A.GRIMLUND (1982).*An Integration of Internal Control System and Account Balance Evidence.* Journal of Accounting Research (Autumn); 316-342.

[37] A.HERNANDEZ y F.J.VAZQUEZ (1.991). *Tamaño Muestral en una Auditoría Contable. Contaminaciones en la Opinión del Auditor.* Actas de V Reunión ASEPELT-España. Gran Canaria.

[38] H.P.HILL, J.L.ROTH y H.ARKIN (1.979). *Samplin in Auditing. A Simplified Guide and Statistical Tables.* Krieger Publishing Company. Huntington, New York.

[39] HODGES y LEHMAN (1.952). *The Use of Previous Experience in reaching statistical decisions.* Annals of Math. Stat. 23; 396-407.

[40] P.J.HUBER (1.973). *The Use of Choquet Capacities in Statistics.* Bulletin of the International Statistical Institute, 45; 181-191

[41] Y.IJIRI y R.W.LEITCH (1.980). *Stein's Paradox and Audit Sampling.* Journal of Accounting Research. Spring; 91-108.

[42] J.R.JOHNSON , R.A.LEITCH y J.NETER (1.981).*Characteristics of Errors in Accounts Receivable and Inventory Audits.* The Accounting Review; 56; 270-293.

[43] E.J.JOYCE y G.C.BIDDLE (1.981). *Anchoring and adjustment in probabilistic inference in auditing.* Journal of Accounting Research, 19-1;120-145.

[44] J.B.KADANE y D.T.CHUANG (1.978). *Stable Decision Problems.* The Annals of Statistics,6; 1095-1110. Reimpreso en : *Robutnes of Bayesian Analysis (1.984).* Elsevier Science Publishers B.V.; 145-163.

[45] R.S.KAPLAN (1.973a). *Statistical Sampling in Auditing with Auxiliary Information Estimators.* Journal of Accounting Research; 11-2; 238-258.

[46] R.S.KAPLAN (1.973b). *A Stochastic Model for Auditing.* Journal of Accounting Research (Spring); 38-46.

[47] R.S.KAPLAN (1.975). *Sample Size Computations for Dollar-Unit Sampling.* Journal of Accounting Research, 13 (Supplement), 126-133.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

[48] W.R.KINNEY (1.975a). *A Decision-Theory Approach to the Sampling Problem in Auditing.* Journal of Accounting Research; 13; 117-132.

[49] W.R.KINNEY (1.975b). *Decision Theory Aspects of Internal Control System Design Compliance and Substantive Tests.* Journal of Accounting Research, 13,(Supplement); 14-37.

[50] W.H.KRAFT (1.968). *Statistical sampling for auditors: A new look.* The Journal of Accountancy, Agosto; 49-56.

[51] H.KUDO (1.967). *On Partial Information and the Property of Parametric Sufficiency.* Proc. Fith. Berkely Symp. Math. Stat. Prob.1; 251-265.

[52] H.J.LARSON (1.990). *Introducción a la Teoría de Probabilidades e Inferencia Estadística.* Ed. Limusa; 365-390.

[53] M.LAVINE (1.988). *Prior Influence in Bayesian Statistics.* Discussion Paper 88-06, Duke University. Institute of Statistics and Decision Sciences.

[54] M.LAVINE (1.991). *Sensitivity in Bayesian Statistics : The Prior and the Likelihood.* J.A.S.A., 86, 396-399.

[55] M.LAVINE, L.WASSERMAN y R.L.WOLPERT (1.991). *Bayesian Inference With Specified Prior Marginals.* J.A.S.A., 86, # 416, 964-971.

[56] E.E.LEAMER (1.982). *Sets of Posterior Means with Bounded Variance Prior.* Econometrica,50. 725-773.

[57] R.A.LEITCH, J.NETER, R.PLANTE y P.SINHA (1.982). *Modified Multinomial Bounds for Larger Numbers of Errors in Audits.* The Accounting Review, LVII-2 (April); 384-400.

[58] D.A.LESLIE, A.D.TEITLEBAUM y R.J.ANDERSON (1.980).*Dollar Unit Sampling: A Practical Guide for Auditors.* Copp Clark Pitman.

[59] B.L.LEWIS (1.980).*Expert Judgment in Auditing: An Expected Utility Approach.* Journal of Accounting Research; 18-2; 594-602.

[60] R.LIBBY (1.981).*Accounting and Human Information Processing: Theory and Applications.* Englewood Cliffs, N.J. Prentice Hall.

[61] S.LICHTENSTEIN, B.FISCHHOFF y L.D.PHILLIPS (1.982). *Calibration of Probabilities: The Start of the Art to 1980.* Judgment Under Uncertainty: Heuristics and Biases, edited by D.Kahneman, P.Slovic and A.Tversky. Cambridge. Cambridge University Press.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

[62] E.M.MATSUMURA y K.W.TSUI (1.982). *Stein-Type Poisson Estimators in Audit Sampling.* Journal of Accounting Research. Vol. 20, # 1; 162-170.

[63] J.H.McCRAY (1.982). *A Bayesian Model for Evaluating Dollar Unit Samples.* Working Paper.

[64] J.H.McCRAY (1.984). *A quasi-bayesian audit risk model for dollar unit sampling.* The Accounting Review; LIX-1; 35-51.

[65] U.MENZEFRICKE (1.983). *On Sampling Plan Selection with Dollar-Unit Sampling.* Journal of Accounting Research; 21-1;(Spring), 96-105.

[66] U.MENZEFRICKE (1.984). *Using Decision Theory for Planning Audit Sample Size with Dollar Unit Sampling.* Journal of Accounting Research; 22-2 (Autumn), 570-587.

[67] U.MENZEFRICKE y W.SMIELIAUSKAS (1.984). *A Simulation Study of the Performance of Parametric Dollar Unit Sampling Statistical Procedures.* Journal of Accounting Research, 22-2, 588-604.

[68] E.MORENO y J.A.CANO (1.991). *Robust Bayesian Analysis wiht ε - contaminations Partially known.* Journal of the Royal Statistical Society. Series B. Vol. 53. # 1 , 143-155.

[69] A.H.MURPHY y R.L.WINKLER (1.977). *Reliability of Subjective Probability Forecasts of Precipitation and Temperature.* Journal of the Royal Statistical Society, C, vol. 26; 41-47.

[70] J.NETER y J.LOEBBECKE (1975). *Behavior of Major Statistical Estimators in Sampling Accounting Populations.* Auditing Research Monograph,2, New York, AICPA.

[71] J.NETER, R.A.LEITCH y S.E.FIENBERG (1.978). *Dollar Unit Sampling: Multinomial Bounds for Total Overstatement and Understatement Errors.* The Accounting Review; LIII-1;77-93.

[72] A.O'HAGAN y J.O.BERGER (1.988). *Ranges of Posterior Probabilities for Quasiunimodal Priors with Specified Quantiles.* Journal of the American Statistical Association. Vol. 83, # 402 , 503-508.

[73] L.R.PERICCHI y P.WALLEY (1.991). *Robust Bayesian Credible Intervals and Prior Ignorances.* International Statistical Review, 58, 1, 1-23.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

[74] W.POLASEK (1.985). *Sensitivity Analysis for General and Hierarchical Linear Regression Models.* Bayesian Inference and Decision Techniques with Applications. Eds. P.K.Goel and A.Zellner. Amsterdam. North-Holland.

[75] S.T.RACHEV (1.985). *The Monge-Kantorovich Mass Transference Problem and Its Stochastic Applications.* Theory and Probability and Its Applications, 29, 647-671.

[76] H.RAIFFA y R.SCHLAIFER (1.961). *Applied Statistical Decision Theory.* Cambridge, Mass., MIT Press.

[77] D.M.ROBERTS (1.978). *Statistical Auditing.* AICPA.

[78] V.K.ROHATGI (1.976). *An Introduction Probability Theory and Mathematical Statistics.* John Wiley & Sons, Inc.

[79] R.E.SCHAEFER y K.BORCHEODING (1.973). *The Assesement of Subjective Probability Distributions: A Training Experiments.* Acta Psychologica, 117-129.

[80] S.SIVAGANESAN y J.O.BERGER (1.989). *Ranges of Posterior Measures for Priors with Unimodal Contaminations.* The Annals of Statistics. Vol. 17, # 2 , 868-889.

[81] P.SLOVIC, B.FISCHHOFF y S.LICHTENSTEIN (1.977). *Behavioral Decision Theory.* Annual Review of Psychology, 1-39.

[82] W.SMIELIAUSKAS (1.986). *A Note on a Comparison of Bayesian with Non-Bayesian Dollar-Unit Sampling Bounds for Overstatement Errors of Accounting Populations.* The Accounting Review; LXI-1; 118-128.

[83] I.SOLOMON (1.982). *Probability Assesment by Individual Auditors and Audit Teams: An Empirical Investigation.* Journal of Accounting Research; 20-2, Pt.II (Autumn); 689-710.

[84] J.E.SORENSEN (1.969). *Bayesian Analysis in Auditing.* The Accounting Review, Julio, 555-561.

[85] T.D.STANLEY (1.989). *Galton, Stein and Empirical Bayes: Artifacts and Connections.* Statistica;XLIX-4; 499-511.

[86] K.W.STRINGER (1.963). *Practical Aspects of Statistical Sampling in Auditing.* Proceedings of the Business and Economic Statistics Section, 405-411.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

[87] A.S.SUAREZ SUAREZ (1.991). *La Moderna Auditoría. Un análisis conceptual y metodológico.* Ed. McGraw-Hill.

[88] A.D.TEITLEBAUM (1.973). *Dollar-unit Sampling in Auditing.* Unpublished paper presented at Annual Meeting of American Statistical Association, New York City (December).

[89] L.A.TOMASSINI et al. (1.982). *Calibration of Auditors' Probabilistic Judgments: Some Empirical Evidence.* Organizational Behavior and Human Performance (December), 391-406.

[90] J.A.TRACY (1.969). *Bayesian statistical methods in auditing.* The Accounting Review; January; 90-98.

[91] K.W.TSUI, E.M.MATSUMURA y K.L.TSUI (1.985). *Multinomial-Dirichlet Bounds for Dollar-Unit Sampling in Auditing.* The Accounting Review. Vol. LX-1, 76-96.

[92] M.T.VANACEK (1.978). *Bayesian Dollar Unit Sampling in Auditing.* Unpublished doctoral dissertation (Univ. of Texas at Austin).

[93] P.WALLEY (1.991). *Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities.* Chapman and Hall.

[94] R.L.WINKLER (1.967). *The Assessment of Prior Distribution in Bayesian Analysis.* The Journal of the American Statistical Association; 775-800.

[95] R.L.WINKLER (1.968). *The Consensus of Subjective Probability Distributions.* Management Sciences; 15; B61-B75.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004