UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS ECONÓMICO APLICADO

TESIS DOCTORAL

INFERENCIA INDIRECTA BAJO RESTRICCIONES ESTOCÁSTICAS

JOSÉ ANTONIO HERNÁNDEZ SÁNCHEZ

Las Palmas de Gran Canaria, 2002

Título de la tesis:

INFERENCIA INDIRECTA BAJO RESTRICCIONES ESTOCÁSTICAS

Thesis title:

INDIRECT INFERENCE UNDER STOCHASTIC RESTRICTIONS

INDIRECT INFERENCE UNDER STOCHASTIC RESTRICTIONS

ABSTRACT

In this dissertation I have researched into three different fields of econometrics: the use of prior information modelled as stochastic restrictions, the methodology of indirect inference (I.I.) and the econometric estimation of the capital stock.

Related with the first issue, first I have found that under some technical assumptions on the variance of the stochastic restrictions (more natural in a finite sample context), the nonlinear least squares under stochastic restrictions (SR) estimator is asymptotically more efficient than the nonlinear least squares (NLS) estimator, as found when normal errors are assumed in finite samples. This result is stated in the opposite direction of the standard asymptotic theory result about the relevance of the prior information, and recovers the importance of prior information in nonlinear contexts. Second, I show that the suggested approximated distribution of the SR estimator is a better approximation to the true one than the one suggested when the stochastic restrictions are not taken into account, i.e., the NLS distribution.

In the second research field, I define a new estimation method that comes up when the stochastic restriction approach is extended to the I.I. methodology. In this context, I show the following results. First, I provide the definition and the distribution of the new estimator called Indirect Inference under Stochastic Restrictions (IISR). Second, I show that the IISR estimation is asymptotically more efficient than the I.I. estimation in which is based, and hence approximated terms for finite samples. Finally, I suggest a test for the validity of the stochastic restrictions used in the estimation.

The third research field is related with the econometric estimation of the physical capital stock of an economy. First, I suggest two methods to estimate a variable rate of depreciation, what is not an easy task in standard econometric packages. This method allows to estimate an endogenous rate of depreciation by NLS or ML together with the parameters of a production function. The effectiveness of the methods proposed is shown by mean of the empirical estimation of the rate of depreciation of the capital stock of several economies of the EU, which leads to depreciation rates around 5 %. Once the estimation problem of a variable rate of depreciation is solved, I develop new methods to estimate an endogenous and stochastic rate of depreciation. The estimation of the parameters need to be solved by mean of simulated based estimation methods, since stochastic parameters are considered. Finally the problem is solved when prior information on the rate of depreciation is feasible. Given the properties of the model, IISR method is suitable to solve the estimation problem, which is shown in several Monte Carlo exercises.

RESUMEN:

En esta tesis doctoral se han desarrollado tres líneas de investigación relacionadas con el uso de la información a priori modelizado mediante las restricciones estocásticas, la metodología de la Inferencia Indirecta (I.I.) y su implementación en la estimación del stock de capital. La primera línea, relacionada con la metodología de las restricciones estocásticas, ha dado lugar a los siguientes resultados en relación con la estimación de un modelo no lineal. En primer lugar, si la información a priori no pierde importancia a medida que aumenta el tamaño muestral, entonces el estimador de Mínimos Cuadrados no Lineales bajo Restricciones Estocásticas (SR) es más eficiente que el estimador de Mínimos Cuadrados no Lineales (NLS), tal como ocurre para muestras finitas suponiendo normalidad en el error. En segundo lugar, se demuestra que la distribución aproximada que se sugiere para el estimador SR es una mejor aproximación a la varianza verdadera del estimador que la del estimador que no tiene en cuenta las restricciones estocásticas, es decir, el estimador NLS.

La segunda línea de investigación extiende al contexto de la metodología I.I., el uso de restricciones estocásticas. En relación a esta línea se presentan los siguientes resultados. En primer lugar se define un estimador, el estimador de Inferencia Indirecta bajo Restricciones Estocásticas (IISR), que extiende la metodología de I.I., al contexto de las restricciones estocásticas.

Seguidamente se demuestra que el estimador IISR es más eficiente que el estimador I.I., asintóticamente y en términos aproximados para muestras finitas. Finalmente se sugieren los contrastes de validez de las restricciones estocásticas incorporadas en la estimación indirecta.

La tercera línea de investigación está relacionada con la estimación econométrica del stock de capital. Los resultados que se presentan son los siguientes. En primer lugar se proponen dos métodos para estimar una tasa de depreciación endógena del stock de capital mediante paquetes econométricos estándar. Estos métodos, en definitiva, permiten estimar por NLS o Máxima Verosimilitud, una tasa de depreciación variable junto con los parámetros de una función de producción. También se llevan a cabo distintas estimaciones del stock de capital de distintas economías de la Unión Europea. A continuación se presenta una familia de modelos macroeconómicos basados en la función de producción en los que el stock de capital está determinado por una tasa de depreciación que es endógena y estocástica y sobre la que se tiene información a priori. Los distintos modelos contenidos en esa familia se basan en un supuesto específico sobre la variabilidad de la tasa de depreciación. Dadas las propiedades de los modelos, el método IISR es el más adecuada para resolver el problema de estimación que se plantea. Por último se diseña un modelo en el que además de las propiedades mencionadas, se introducen parámetros estocásticos y restricciones estocásticas no lineales.

Sobre los mencionados modelos se ofrecen un número importante de simulaciones y estimaciones mediante el mencionado método, siendo los resultados suficientemente ilustrativos de adecuado funcionamiento de la metodología propuesta.

Índice General

Capítulo 1

Introducción

1.1 Resumen

Las aportaciones de esta tesis doctoral se desarrollan en tres ámbitos: los métodos de estimación basados en la simulación, la incorporación de restricciones estocásticas en los criterios de optimización y la medición del stock de capital. La contribución principal tiene una doble vertiente. Por un lado, una aportación metodológica que permite incorporar información a priori en forma de restricciones estocásticas en la metodología de Inferencia Indirecta (Gourieroux, Montfort y Renault (1993)). Por otro, la ilustración del funcionamiento de la metodología propuesta en la solución del problema de la medición del stock de capital a partir de la estimación econométrica de una tasa de depreciación endógena. Simultáneamente se aportan otras contribuciones colaterales. En primer lugar, la justificación de la ganancia de eficiencia asociadas a la inclusión de restricciones estocásticas en muestras finitas en el contexto de los métodos tradicionales de estimación. Este resultado motiva la investigación del uso de las restricciones estocásticas en el contexto particular de los métodos de estimación basados en la simulación. En segundo lugar, se desarrolla un análisis empírico de la estimación de una tasa de depreciación endógena de diversas economías europeas a partir de la estimación de una función de producción agregada, mediante la aplicación de métodos tradicionales de estimación como mínimos cuadrados no lineales y máxima verosimilitud.

El uso de la información a priori sobre los parámetros que se pretenden estimar es una cuestión inicialmente sugerida por Durbin (1953). La idea consiste en introducir en la estimación de los parámetros, junto con la información muestral, otro tipo de información sobre dichos parámetros procedente de estimaciones previas. La solución de Durbin es una forma de expresar en el marco del enfoque clásico de la estadística, el análisis bayesiano de la información a priori (véase Leamer (1978)). La idea de utilizar estimaciones procedentes de otras muestras la aplicó también Tobin para estimar la demanda de consumo: del análisis de la serie temporal se capta bien la variabilidad de los precios y de los datos de corte transversal se capta la variabilidad de la renta. De esta manera, se combinó la información procedente del análisis de series temporales

en la estimación de la ecuación de consumo en función de la renta y los precios. En muchos casos existe información disponible procedente de otros estudios empíricos o simplemente información que se considera razonable, como lo sería, por ejemplo, la determinación de un rango sobre el que con una probabilidad muy alta debería encontrarse un determinado parámetro.

Una técnica para introducir la información a priori en la estimación es modelizándola mediante restricciones estocásticas. El método de incorporar información a priori en forma de restricciones estocásticas en la estimación de un modelo lineal fue desarrollado por Theil y Goldberger (1961), basándose en el trabajo previo de Durbin. Posteriormente, Litterman (1986) desarrolló la metodología BVAR para realizar predicciones desde el enfoque bayesiano utilizando vectores autorregresivos. La idea de la metodología BVAR consiste en incorporar en la estimación VAR priors sobre los parámetros con una varianza que depende positivamente del orden del retardo de la variable que acompaña dicho parámetro. De esta manera, el peso de dicha información a priori sobre el parámetro decrece con el retardo. La idea que subyace a esta manera de introducir las distribuciones a priori es que los valores recientes de una variable, con mayor probabilidad, contienen información de interés sobre el futuro que los valores más alejados. El enfoque de las restricciones estocásticas como manera de modelizar la información a priori es consistente con la inferencia clásica, ya que la información a priori se considera como una observación más, resultante de un proceso estocástico cuyo varianza está predeterminado. El componente estructural de dicha variable contiene los parámetros a estimar. La varianza del término de error de la restricción estocástica en de...nitiva recoge el nivel de verosimilitud asociado a la información a priori de que se dispone. Así, por ejemplo, supongamos que sobre un determinado parámetro de interés, $\star\star$se dispone de información procedente de otras estimaciones. Esta información podría ser, por ejemplo, la estimación $\star = 0\star 4\star$ El enfoque de las restricciones estocásticas consiste en modelizar esta información a partir de una ecuación del tipo $\star = \star + \star$ siendo $\star$ un término de error con media cero y varianza predeterminada $\star^2_\star\star$ Una vez parametrizada la información a priori de esta manera, dicha ecuación se añade al conjunto de las ecuaciones de la información muestral. Dadas las propiedades del error de la restricción estocástica, se considera que la información a priori es una estimación insesgada del parámetro, pero al mismo tiempo, esta información está ponderada por la varianza del error. Si la información es buena entonces el valor debe ser cercano al del parámetro, por tanto, $\star_\star^2$ debe ser un valor bajo. Como se verá más adelante, el valor que se tome para la varianza del error de la restricción estocástica determinará el peso de la información $\star$ en la estimación. Al incorporar una nueva ecuación en el modelo y reescribirlo se puede aplicar Mínimos Cuadrados Generalizados. Debe tenerse en cuenta que la matriz de varianzas de la restricción estocástica es independiente y distinta de la del error del modelo de partida y por tanto, genera heteroscedasticidad. Este método, conocido como de estimación mixta por combinar información muestral e información a priori sobre el parámetro, es útil porque tiene asociada ganancias de e…ciencia, siendo además un método ‡exible y especialmente interesante en situaciones en las que el tamaño muestral es pequeño. El método estándar propuesto por Theil y Goldberger requiere linealidad en el modelo inicial, linealidad en las restricciones estocásticas, normalidad en el término de error y que la restricción estocástica introducida de lugar a un estimador insesgado del estimador sobre el que se tiene información a priori, si bien los resultados se pueden extender de manera inmediata a otros contextos más generales.

El principal interés de la estimación mixta es la ganancia de e…ciencia que proporciona bajo los supuestos mencionados. Sin embargo, si no se supone normalidad en el término de error y se analizan las propiedades asintóticas del estimador de Theil y Goldberger, entonces no se obtiene dicha ganancia de e…ciencia. De este resultado asintótico se obtiene como corolario que la aproximación para muestras …nitas de la varianza del estimador de Theil y Golberger es la misma que la del estimador OLS, por lo que no tiene sentido el uso de información a priori cuando no se supone normalidad en el término de error del modelo.

A pesar de que asintóticamente no se mantenga el resultado de ganancia en e…ciencia y de que, por tanto, la aproximación para muestras …nitas de la varianza del estimador sea la misma independientemente de que se use o no información a priori, resulta oportuno hacer algunas observaciones para el contexto de las muestras ...nitas. El primer objetivo de esta tesis doctoral consiste en recuperar la validez del uso de la información a priori cuando el tamaño de la muestra es pequeño sin suponer normalidad en el error. Si el tamaño muestral es pequeño, contexto en el cual los supuestos bajo los que opera la teoría asintótica tradicional pueden ser modi...cados por unos más naturales, entonces puede obtenerse un resultado que contradice al resultado antes mencionado y recuperarse el interés en la metodología de las restricciones estocásticas. Este primer objetivo se desarrolla en el Capítulo 3 donde se discute el papel de las restricciones estocásticas en la varianza de los estimadores en un contexto de muestras ...nitas. Al respecto se obtienen dos resultados. El primero establece que en muestras ...nitas y sin normalidad en el error, la incorporación de las restricciones estocásticas genera ganancias de e...ciencia. El segundo señala que si el tamaño muestral no es grande, y si la información a priori es buena, entonces la aproximación de muestras ...nitas de la varianza del estimador que tiene en cuenta las restricciones estocásticas es mejor que la que se obtiene de la teoría asintótica convencional. Este resultado se ilustra mediante un ejercicio de Monte Carlo diseñado a partir de un modelo no lineal en el cual se incorpora la información sobre los parámetros. Estos resultados constituyen el primer objetivo de la tesis y en de...nitiva pretenden llamar la atención sobre el interés del uso de la información a priori y su modelización mediante restricciones estocásticas en los distintos métodos de estimación.

El segundo objetivo de esta tesis doctoral se extiende al ámbito de los métodos de estimación basados en la simulación. En concreto se toma como método de partida la Inferencia Indirecta (I.I.), aunque las aportaciones que se sugieren se extienden de manera inmediata a otros métodos de estimación basados en la simulación como el Método de los Momentos Simulados (véase Mc Fadden (1989) y Pakes y Pollard (1989)) y otros como los sugeridos por Lee e Ingram (1991) y Smith (1993). Una propiedad de los estimadores basados en la simulación es su aplicabilidad en una amplia variedad de modelos, generalmente no lineales, lo que es especialmente útil en aquellos casos en los que los métodos tradicionales como el de Máxima Verosimilitud o los de Mínimos Cuadrados, no funcionan adecuadamente por di…cultades asociadas a la tratabilidad de las funciones criterio. Sin embargo, el coste asociado al uso de estos métodos de amplia versatilidad reside en la pérdida de e…ciencia de los estimadores basados en la simulación, en relación con el estimador tradicional en el cual se inspira. Así, por ejemplo, el estimador de Máxima Verosimilitud Simulada presenta una mayor varianza que el estimador convencional de Máxima Verosimilitud, y lo mismo ocurre al comparar el Método de lo Momentos Simulados en relación con el Método de los Momentos Generalizados (Hansen (1982)). De manera especí…ca, el segundo objetivo se concreta en la sugerencia de un nuevo estimador, inspirado en el estimador I.I., pero en el que se tiene en cuenta información a priori sobre los parámetros modelizada en forma de restricciones estocásticas. Se sugiere su distribución para muestras …nitas y se propone un contraste para la validez de las restricciones. Para defender estos resultados se desarrollan diversos ejercicios de simulación en los que se estima una familia de modelos de interés macroeconómico. La motivación de la metodología que se sugiere es la de disponer de las ventajas de la estimación bajo restricciones en el contexto de los métodos basados en la simulación, aplicados generalmente en modelos no lineales donde los métodos tradicionales fracasan. Concretamente, disponer de la ganancia de e…ciencia asociada al uso de restricciones estocásticas dado el mencionado coste de pérdida de e…ciencia asociada al uso de simulaciones.

El tercer objetivo de la tesis se de…ne en el contexto de estimación econométrica del stock de capital mediante la estimación de una función de producción agregada como sugieren Prucha y Nadiri (1996), y Prucha (1995), a partir de Máxima Verosimilitud o Mínimos Cuadrados no Lineales. La intención aquí es explorar y aportar distintas soluciones metodológicas a la solución del problema de estimación de una tasa de depreciación endógena mediante métodos tradicionales. En el contexto de la estimación econométrica del stock de capital se plantean varias di…cultades asociadas con las restricciones propias de la de…nición del stock de capital, como el hecho de que se trate de una variable no observable, o el hecho de que el número de argumentos de los que depende varíe período a período. En la primera parte del Capítulo 4 se cubre este objetivo al describirse dos métodos que hacen posible la aplicación de métodos econométricos tradicionales a la estimación de una tasa de depreciación endógena. Además, se exploran algunas vías de estimación que enriquecen los métodos básicos en las que se permite utilizar la información de la contabilidad nacional sobre la depreciación del capital y la información a priori sobre dicha tasa de depreciación. En relación con este objetivo se logran otros resultados de tipo empírico. En concreto se ilustra la validez de las metodologías propuestas mediante el análisis empírico basado en los datos macroeconómicos de las economías de Alemania, Francia, Reino Unido y España. Esta parte del trabajo presentada en la primera parte del Capítulo 4 puede considerarse como una introducción a las soluciones de problemas de estimación más complejos que se resolverán en la segunda parte del capítulo. Estas soluciones se describen en la última parte de la tesis mediante el método de Inferencia Indirecta bajo Restricciones Estocásticas (IISR), al considerar un modelo con parámetros variables en el que es necesario aplicar un método basado en la simulación.

En la última parte de la tesis se extiende el método propuesto IISR al uso de restricciones estocásticas no lineales. Se aplica la metodología desarrollada a la estimación de un modelo en el que los parámetros principales – incluida la tasa de depreciación endógena – son estocásticos. La metodología IISR se plantea como especialmente indicada para cubrir este objetivo dada la variabilidad de los parámetros y la complejidad de la función de verosimilitud. Con este ...n se llevan a cabo un número elevado de simulaciones en las que se replica y se estima el modelo con el ...n de constatar la regularidad del funcionamiento del método de estimación propuesto. Las restricciones estocásticas no lineales se imponen sobre la tasa de depreciación, si bien es posible extenderla a mas parámetros del modelo.

1.2 Conceptos previos

En esta sección se introducen algunos de los conceptos que se utilizarán en los capítulos siguientes en el desarrollo de los resultados que se presentan. Estos conceptos que se introducen son en la mayoría de los casos de…niciones y propiedades relacionadas con los resultados centrales de la tesis. Se trata de las ideas básicas de la metodología de las restricciones estocásticas, la Inferencia Indirecta y la estimación del stock de capital mediante la estimación de una función de producción.

1.2.1 Estimación lineal bajo restricciones estocásticas

Veamos el método de estimación mixta introducido por Theil y Goldberger a partir de un modelo lineal, con normalidad en el error del modelo y regresores no estocásticos. Se parte de un modelo cuya ecuación para un período $\star$ es

$$\star_\star = \star_\star^0 \star + \star_\star \tag{1.1}$$

siendo $\star$ el vector de parámetros de dimensión $\star$ y siendo $\star(\star) = \star_\star^2 \star_\star \star$ Este modelo cumple además todos los supuestos estándar del modelo lineal general. Por otra parte se tiene información a priori sobre los parámetros del modelo lo que da lugar a un conjunto $\star$ de restricciones estocásticas sobre $\star\star$ siendo $\star\star$ $\star\star$ Estas restricciones son lineales y pueden escribirse como

$$\star = \star\star + \star \tag{1.2}$$

siendo $\star$ » $\star$ $(0\star\star_\star^2 \star_\star)\star\star_\star^2$ predeterminada y $\star$ independiente de $\star$. El vector $\star$ de dimensión $\star$ contiene los valores concretos que contienen la información a priori que se tiene sobre $\star\star$ El modelo resultante contiene las ecuaciones (1.1) y (1.2) y matricialmente está dado por:

$$\begin{bmatrix} \star \\ \star \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \star \\ \star \end{bmatrix} \star + \begin{bmatrix} \star \\ \star \end{bmatrix}$$

Agrupando las variables se tiene,

$$\star^{+} = \star^{+} \star + \star^{+} \tag{1.3}$$

siendo la varianza del error

$$\star(\star^{+}) = \begin{bmatrix} \star^2_{\star}\star & 0 \\ 0 & \star^2_{\star}\star \end{bmatrix} = -$$

El estimador de Theil y Goldberger (TG) es el estimador de Mínimos Cuadrados Generalizados (MCG) aplicado al anterior modelo. Puesto que se trata de un modelo heteroscedástico, la transformación que da lugar a un modelo lineal general es la dada por la matriz $\star$ que cumple $\star\star^{0} = -^{i1}\star$El modelo resultante de premultiplicar la ecuación (1.3) por $\star$ es

$$\star^{1} = \star^{1}\star + \star^{1}$$

siendo ahora la varianza de $\star^1$ la matriz identidad de orden $\star + \star\star$El estimador TG es por tanto,

$$\hat{\star}_{\star\star} = (\star^{10}\star^{1})^{i1}\star^{10}\star^{1} \tag{1.4}$$

La matriz de varianzas y covarianzas de $\hat{\star}_{\star\star}$ es

$$\star(\hat{\star}_{\star\star}) = (\star^{10}\star^{1})^{i1} = \left(\frac{\star^{0}\star}{\star^2_{\star}} + \frac{\star^{0}\star}{\star^2_{\star}} \right)^{i1}$$

Si no se tienen en cuenta las restricciones estocásticas, entonces el modelo está compuesto únicamente por las ecuaciones (1.1) para todo $\star$. Puesto que se trata de un modelo lineal general, se estimaría por mínimos cuadrados ordinario (OLS), siendo la matriz de varianzas y covarianzas de este estimador $\hat{\star}_{\star\star\star}$ la dada por:

$$\star(\hat{\star}_{\star\star\star}) = \star^2_\star(\star'\star)^{-1} - \left(\frac{\star'\star}{\star^2_\star} + \frac{\star'\star}{\star^2_\star}\right)^{-1}$$

es decir, la diferencia $\star(\hat{\star}_{\star\star\star}) - \star(\hat{\star}_{\star\star})$ es una matriz de…nida positiva y por tanto, el estimador TG es más e…ciente que el estimador OLS. La anterior expresión permite llevar a cabo la comparación en términos de la varianza de la restricción estocástica: a medida que crece $\star^2_\star$ el estimador TG tiende al estimador OLS. Es interesante para los propósitos de los desarrollos posteriores destacar la intuición de esta propiedad: cuanto mayor es la varianza asociada a la información que se incorpora, menos importante es dicha información en la estimación ya que menor es la ganancia de e…ciencia del estimador TG frente al OLS y por tanto más parecido es el estimador TG al OLS. En el Capítulo 3 se desarrolla una discusión sobre la relevancia de la incorporación de las restricciones estocásticas en la estimación y los argumentos presentados giran en torno al papel de la varianza de la restricción en las propiedades asintóticas de los estimadores que se obtienen teniendo en cuenta o no las restricciones estocásticas (véase Lütkepohl (1993)). Dicha discusión se introduce a continuación para el caso lineal que nos ocupa y se analiza en detalle para el caso no lineal en el Capítulo 3.

Si no se supone normalidad en el error o los regresores son estocásticos, el análisis asintótico proporciona las propiedades del estimador TG y de allí se extraen las propiedades aproximadas para muestras …nitas. De la expresión (1.4) del estimador TG se obtiene

$$\sqrt{\star}(\hat{\star}_{\star\star} - \star) = \left(\frac{\star^{1\prime}\star^{1}}{\star}\right)^{-1} \frac{\star^{1\prime}\star}{\sqrt{\star}}$$

Considerando que se cumple algún teorema central del límite, al ser $\star^{1}$ y $\star$ independientes, se tiene

$$\frac{\star^{1}{}^{0}\star}{\star} \xrightarrow{\star} \star \; 0 \star\star \lim \left(\frac{\star^{1}{}^{0}\star^{1}}{\star} \right)$$

Si existe $\star \lim \left(\frac{\star^{1}{}^{0}\star^{1}}{\star} \right)$ $\star$aplicando los teoremas de Slutsky y Cramer, se obtiene,

$$\sqrt{\star}(\hat{\star}_{\star\star} - \star) \xrightarrow{\star} \star \left(0 \star\star \lim \left(\frac{1}{\star} \star^{1}{}^{0}\star^{1} \right)^{-1} \right)$$

Sustituyendo $\star^{1}$ por su expresión se obtiene la distribución asintótica del estimador TG:

$$\sqrt{\star}(\hat{\star}_{\star\star} - \star) \xrightarrow{\star} \star \left(0 \star\star \lim \left(\frac{1}{\star} \frac{\star^{0}\star}{\star^{2}_{\star}} + \frac{1}{\star} \frac{\star^{0}\star}{\star^{2}_{\star}} \right)^{-1} \right)$$

Si no se hace ningún supuesto sobre la varianza asociada a la restricción estocástica, puesto que

$$\star \lim \left(\frac{1}{\star} \frac{\star^{0}\star}{\star^{2}_{\star}} \right) = 0$$

entonces, $\star \lim \left(\frac{1}{\star}\frac{\star^{0}\star}{\star^{2}_{\star}} + \frac{1}{\star}\frac{\star^{0}\star}{\star^{2}_{\star}} \right)^{-1} = \star \lim \left(\frac{1}{\star}\frac{\star^{0}\star}{\star^{2}_{\star}} \right)^{-1}$ $\star$Es decir, la distribución asintótica y la aproximada del estimador TG coinciden con las del estimador OLS, y por tanto,

$$\hat{\star}_{\star\star} \approx \star \left(\star\star\star^{2}_{\star} \left[\star^{0}\star \right]^{-1} \right)$$

de donde se deduce que las restricciones estocásticas resultan irrelevantes asintóticamente y para muestras …nitas, en contradicción con el resultado que se obtiene al suponer normalidad en el error del modelo. La presencia de $\star$ en el denominador del sumando relativo a la restricción estocástica supone que la información a priori pierde peso a medida que aumenta el tamaño muestral, lo que equivale a considerar que la varianza de $\star$ aumenta con el tamaño muestral. Una restricción con una varianza muy alta implica que se le asigna poco peso a la información a priori, y esto es precisamente lo que ocurre asintóticamente. La intuición es que la información a priori no aumenta con el tamaño muestral, y por tanto, desaparece con la información muestral. A pesar del resultado que se obtiene, no resulta natural si el tamaño muestral es reducido, y no es de mucha utilidad práctica cuando el tamaño muestral es pequeño como señala Lütkepohl. Sería interesante, por tanto, investigar sobre las condiciones que permitieran mantener las ventajas de la inclusión de restricciones estocásticas relativas a la e…ciencia en la estimación, así como evaluar la proximidad de las distribuciones obtenidas bajo dichas condiciones respecto de las verdaderas distribuciones del estimador. Sobre estos aspectos discurre la discusión desarrollada en el Capítulo 3, aportándose una vía de solución al problema planteado y obteniéndose resultados positivos respecto de las cuestiones planteadas.

1.2.2 Estimación por simulación e Inferencia Indirecta

Los métodos de estimación basados en la simulación forman lo que podría llamarse la tercera generación de métodos econométricos. En la primera fase cronológica tendrían lugar los desarrollos aplicables a modelos lineales que tienen lugar antes de los años sesenta, métodos que conducían a una expresión analítica del estimador. Aquí podrían situarse los métodos de Mínimos Cuadrados Ordinarios, método de estimación de sistemas de ecuaciones simultáneas, con el asociado análisis de las variables instrumentales, entre otros. Posteriormente aparecerían los resultados basados en la introducción de algoritmos numéricos de optimización que surgen en los años setenta y ochenta. En esta etapa se construye la teoría de la inferencia basada en la optimización de un criterio no cuadrático, entre los que destacan los métodos de Máxima Verosimilitud. Por otra parte surgen métodos como el de Mínimos Cuadrados no Lineales y el Método Generalizado de los Momentos. Posteriormente aparecen los métodos basados en la simulación que surgen en la segunda mitad de los ochenta y en los noventa y que constituyen la tercera generación de métodos econométricos. En algunos modelos econométricos, generalmente no lineales, los métodos de estimación tradicionales conducen a funciones criterio que tienen una expresión analítica compleja. En estos casos resulta especialmente complicado obtener los estimadores tradicionales a partir de criterios como el de la función de verosimilitud o el cuadrado de los residuos.

La estimación por simulación surge como una herramienta que pretende solucionar este tipo de di…cultades operativas, y está fuertemente apoyada por el desarrollo de las herramientas informáticas de gran potencia que ha tenido lugar en la última década. Puede añadirse que los métodos basados en la simulación no solo son los más adecuados en los casos en los que los criterios tradicionales no permiten obtener los estimadores, sino que además, constituyen la única herramienta metodológica a usar en algunos casos en los que no se sabe como estimar determinados modelos. En el caso del método de Inferencia Indirecta (Gourieroux et al), sobre el cuál se de…ne el segundo objetivo de esta tesis, la idea es inferir el estimador de una comparación de determinados momentos factibles empíricamente y mediante la simulación. Estos momentos empíricos y simulados se obtienen de un modelo auxiliar, y mediante un criterio predeterminado, normalmente tradicional. El modelo auxiliar depende de unos parámetros distintos a los del modelo original pero que contienen información sobre aquellos. El principio de la estimación indirecta consiste en obtener el estimador de los parámetros del modelo verdadero a partir de la comparación de simulaciones realizadas sobre el modelo original y estimaciones del modelo auxiliar. Esta comparación se lleva a cabo a partir de un momento muestral: el estimador del momento auxiliar. De esta manera, el estimador del método de inferencia indirecta será aquel valor para el cual la simulación del modelo original da lugar a un estimador auxiliar lo más cercano posible al estimador auxiliar que se obtiene de los datos originales. El resultado fundamental que se obtiene en relación con la estimación indirecta, y que constituye el segundo objetivo de esta tesis doctoral, es el de extender a este método de estimación la posibilidad de incorporar información a priori mediante restricciones estocásticas, una vez que se prueba que éstas resultan relevantes asintóticamente y para muestras …nitas. Con este propósito se aporta la expresión analítica del criterio a optimizar, la distribución del estimador resultante y los contrastes de validación de las restricciones estocásticas.

1.2.3 Estimación econométrica del stock de capital físico

El objetivo siguiente de esta tesis es el de abordar el problema empírico de estimación de la tasa de depreciación del stock de capital econométricamente, con el …n de aportar una medición consistente de dicha variable, puesto que no es directamente observable. El stock de capital físico de una economía es una de las variables básicas para explicar la riqueza de un país, el crecimiento potencial de una economía o el comportamiento de otras variables como la productividad de los factores. Al mismo tiempo se trata de una variable cuya medición presenta algunos problemas que no tienen solución inmediata. Para medir el stock de capital de una economía es necesario medir la depreciación del capital, es decir, la pérdida de capacidad productiva de las inversiones llevadas a cabo en el pasado, y ésta no es una variable observable. Es necesario realizar supuestos sobre el modo en el que se produce la depreciación y posteriormente intentar medir dichos elementos para …nalmente proporcionar una medición del stock de capital. La manera de llevar a cabo este procedimiento, es decir, modelizar la depreciación y estimarla, ha sido una cuestión de amplio debate desde los años setenta, – los primeros trabajos al respecto se deben a Robert. E. Hall, Dale W. Jorgenson, Charles R. Hulten, entre otros – y han dado lugar a una serie de metodologías alternativas de medición, basadas en distintos enfoques y supuestos que al mismo tiempo imponían limitaciones al alcance de los estudios realizados. Hoy en día sigue siendo necesario encontrar una metodología robusta de medición del capital que de lugar a valores consistentes con la medición de otras variables con las que el capital está estrechamente ligado, como son la renta y la riqueza.

El problema de la estimación del stock de capital en esta tesis doctoral se aborda en dos frentes metodológicos: el primero es el de la estimación tradicional, por Máxima Verosimilitud o por Mínimos Cuadrados no Lineales y el segundo es el del método de Inferencia Indirecta bajo Restricciones Estocástica (IISR). La econometría se presenta como una herramienta capaz de proporcionar soluciones a los problemas asociados a la medición del stock de capital. Uno de los enfoques posibles para abordar la medición de la depreciación del capital es el de la estimación de la tasa de depreciación a partir de la estimación de una función de producción de la cuál el stock de capital es un argumento. En este contexto, una particularidad especialmente interesante es la de contemplar la posibilidad de que la tasa de depreciación sea endógena, lo que resulta signi...cativo si se tiene en cuenta el componente de la depreciación asociado a la obsolescencia. Los shocks tecnológicos y la obsolescencia asociada de los bienes de capital usado, como se plantea en modelo de ciclos reales, (véase por ejemplo Burnside y Eichenbaum (1994)) explican parte de la variabilidad de la tasa de depreciación, y por tanto, constituye un elemento interesante sobre el que arrojar luz desde la inferencia econométrica. En este panorama y en el marco de los modelos de estimación tradicionales, se presentan algunas sugerencias que permiten extender la metodología de la estimación del stock de capital a partir de una función de producción cuando la tasa de depreciación es endógena. De manera general, se podría describir la solución econométrica como se indica a continuación. Se parte de una función de producción que describe la tecnología agregada de la economía. Dicha tecnología relaciona el producto total ($\star$) con el empleo ($\star$) y el stock de capital ($\star$) como se indica a continuación

$$\star_{\star} = \star\,(\star_{\star}\star\star_{\star}\star\star)$$

siendo $\star$ el vector de parámetros de dicha función de producción. Esta función se podría estimar directamente si se dispusiera de los datos del stock de capital. Pero dicha variable, como se ha indicado, no es directamente observable porque depende de la depreciación. En concreto, a partir de la ecuación del inventario permanente, el stock de capital de un período $\star$ puede escribirse como

$$\star_{\star} = \star_{\star} + (1 \text{ ¡ } \star)\star_{\star \text{ ¡ } 1} \tag{1.5}$$

siendo $\star_{\star}$ la inversión y $\star$ la tasa de depreciación. Puesto que $\star$ es un parámetro desconocido, también $\star_{\star}$ es desconocido. Por esta razón no es posible estimar la función de producción directamente. Sin embargo, el análisis se reduce al de estimación con variables no observables. El desarrollo de esta idea es el siguiente. El stock de capital no es observable, pero puede obtenerse una serie de $\star_\star$ hipotética si se considera un determinado valor de la tasa de depreciación $\tilde{\star}$ teniendo en cuenta los datos de inversión a partir de la ecuación (1.5). En efecto, sustituyendo recursivamente $\star_{\star ¡ 1}$ en la ecuación original es fácil ver que

$$\star_\star = \sum_{\star=0}^{\star 1} (1 ¡ \star)^\star \star_{\star ¡ \star} + (1 ¡ \star)^\star \star_0$$

En de...nitiva, el stock de capital es función de la inversión corriente y retardada, del stock de capital inicial y de la tasa de depreciación, es decir, $\star_\star = \star(\star_1 \star\star_2 \star\star\star\star\star_\star\star\star_0 \star\star)$. El mecanismo de la estimación econométrica de la tasa de depreciación consiste en seleccionar el valor de $\star$ que de lugar a una serie del stock de capital estimada tal que, teniendo en cuenta los datos de empleo y la tecnología, reproduzca los datos de la producción total lo más cercanos posible a los datos verdaderos de la producción. Es decir, se trata de seleccionar el valor del parámetro $\star$ - simultáneamente con los de $\star$ – que den lugar al mejor ajuste econométrico de la ecuación

$$\star_\star = \star(\star_\star \star\star_1 \star\star_2 \star\star\star\star\star_\star\star\star_0 \star\star\star\star)$$

La aplicación de la metodología anterior, a pesar de su sencillez, no es inmediata, especialmente cuando se pretende estimar una tasa de depreciación endógena. Así, si se considera que $\star = \star(\star\star\star)\star$siendo $\star$ la variable explicativa de la tasa de depreciación, el vector de parámetros a estimar sería $\star\star$el implícito en la variabilidad de $\star\star$ Para solucionar el problema de la estimación econométrica de una tasa de depreciación endógena, en el Capítulo 3 se describen varios mecanismos que permiten implementar los métodos de Mínimos Cuadrados no Lineales o Máxima Verosimilitud al problema planteado. Los métodos y las soluciones metodológicas sugeridas para estimar el stock de capital se implementaron con los datos de las economías del Reino Unido, Alemania, Francia y España. Es oportuno señalar que, a pesar de la aplicación de los métodos sugeridos para los casos considerados, en algunas ocasiones se pusieron de mani…esto algunas di…cultades en el proceso de optimización relacionadas posiblemente con la complejidad de la función criterio quizás asociadas a la parametrización de la tasa de depreciación o a la autocorrelación detectada en el error del modelo. Como conclusión, por tanto, en el primer frente en el que se aborda el problema de la medición del stock de capital, se presentan algunas aportaciones metodológicas que permiten estimar una tasa de depreciación endógena mediante la aplicación inmediata de los métodos de estimación por Mínimos Cuadrados no Lineales y por Máxima Verosimilitud. También se obtienen algunos resultados empíricos en los que se utiliza información a priori sobre la tasa de depreciación e información de la contabilidad nacional sobre la amortización, como elementos accesorios en la solución del problema. Al mismo tiempo se pusieron de mani…esto algunas di…cultades metodológicas en la aplicación de la máxima verosimilitud, posiblemente asociados a la no linealidad de la función objetivo en el caso concreto que se plantea.

El segundo frente sobre el que se aborda la estimación del stock de capital está relacionado con el método aquí propuesto de IISR. A este respecto se presentan una serie de modelos que constituyen ejemplos plausibles de aplicación de dicho método al problema particular de la estimación del stock de capital de una economía sin abandonar el marco de la estimación a través de una función de producción. Se diseñan distintos ejemplos que resultan de interés desde el punto de vista de la teoría económica obtenidos a partir de distintos supuestos realizados sobre la variabilidad de la tasa de depreciación sobre la que se tiene información a priori. Así, por ejemplo, se plantean variables como la tasa de crecimiento de la inversión o perturbaciones exógenas que podrían recoger la posibilidad de shocks tecnológicos como variables explicativas de la tasa de depreciación. De dichos ejemplos se ofrecen un conjunto alto de simulaciones y estimaciones con el …n de ilustrar la regularidad de los resultados del método IISR aplicado a estos casos particulares. Además, se constata la ganancia de e…ciencia en la estimación IISR respecto de las estimaciones obtenidas al aplicar la Inferencia Indirecta básica. Finalmente se presentan los resultados de estimaciones por el método IISR llevadas a cabo sobre un modelo de parámetros estocásticos sobre los que existe información a priori que se incorpora en el modelo en forma de restricciones estocásticas no lineales.

Capítulo 2

Metodología

2.1 Introducción

En éste capítulo se presentan los métodos de estimación en los que se inspiran las aportaciones originales que se presentan en el siguiente capítulo, y que se utilizarán en algunas aplicaciones empíricas presentadas en los posteriores. En primer lugar se presentan los métodos de estimación de modelos no lineales tradicionales. A continuación se presentan de manera resumida los métodos de estimación basados en la simulación, que sirven de instrumento para resolver los problemas generados por la di…cultad en el tratamiento de las funciones criterio en algunos casos y que por tanto los métodos presentados en primer lugar no resuelven. Finalmente se describe la estimación sujeta a restricciones estocásticas, método éste en el que se modeliza de manera concreta el uso de información a priori sobre algunos parámetros. El funcionamiento de las restricciones estocásticas se introduce en la última parte de este capítulo a partir del un modelo no lineal. Con esto se completa el conjunto de elementos que motivan las aportaciones de los Capítulos 3 y 4.

En referencia al primer conjunto de estimadores, se repasan algunos de los métodos de estimación paramétricos no lineales como lo son el de Máxima Verosimilitud, Método de los Momentos Generalizados y Método de los Mínimos Cuadrados no Lineales. Posteriormente se describen los métodos basados en los anteriores y que utilizan la simulación, como son el Método de los Momentos Simulados, el método de Máxima Verosimilitud Simulada y el Método de Estimación Indirecta. Finalmente se describirá el Método de Estimación sujeta a Restricciones Estocásticas en el caso no lineal.

De esta manera se completa el conjunto de métodos que a lo largo de los capítulos siguientes se utilizarán, al ser aplicados directamente, o como punto de partida para de…nir una nueva familia de métodos de estimación basados en la simulación y que incorporan restricciones estocásticas sobre los parámetros del modelo. La nueva metodología que se sugiere, basada en el método de Inferencia Indirecta de Gourieroux et al y en el principio de las restricciones estocásticas, se denominará Inferencia Indirecta bajo a Restricciones Estocásticas y se describirá en el siguiente capítulo.

2.2 Estimación no lineal

En esta sección se describen los métodos de estimación de Máxima Verosimilitud (ML), de Mínimos Cuadrados no Lineales (NLS) y del Método Generalizado de los Momentos (GMM). Estos métodos se basan en la optimización de un criterio y servirán de referencia de los métodos que se presentan en la siguiente sección y que se basan en la simulación.

Se supone que las observaciones proceden de un modelo paramétrico en el que $\star_{\star}\star\star = 1\star\star\star\star$ es la variable endógena del modelo – de dimensión unitaria o mayor que uno – y $\star_{\star}\star\star = 1\star\star\star\star$ es el conjunto de variables exógenas del modelo.

Sea $\star_0(\star_1\star\star\star\star\star_{\star}\ \star\star_1\star\star\star\star\star_{\star}\ \star\star_0)$ la función de distribución condicional de $\star_1\star\star\star\star\star_{\star}$ dado $\star_1\star\star\star\star\star_{\star}$ y las condiciones iniciales $\star_0\star$ Si las observaciones son independientes, ésta función de distribución condicional puede descomponerse como

$$\prod_{\star=1} \star_0(\star_{\star}\star\star_1\star\star\star\star\star_{\star}\ \star\star_{\star\,¡\,1})$$

siendo $\star_{\star\,¡\,1} = (\star_0\star\star_1\star\star\star\star_{\star\,¡\,1})\star$ Se supone además que se cumple que las variables $\star$ son fuertemente exógenas, es decir, $\star_0(\star_{\star}\star\star_1\star\star\star\star\star_{\star}\ \star\star_{\star\,¡\,1}) = \star_0(\star_{\star}\star\star_1\star\star\star\star\star_{\star}\star\star_{\star\,¡\,1})$. Bajo esta condición se tiene que

$$\begin{aligned} \star_0(\star_1\star\star\star\star\star_{\star}\ \star\star_1\star\star\star\star\star_{\star}\ \star\star_0) &= \prod_{\star=1} \star_0(\star_{\star}\star\star_{\star}\star\star_{\star\,¡\,1}) \\ &= \prod_{\star=1} \star_0(\star_{\star}\star\star_{\star}) \end{aligned}$$

siendo $\star_{\star} = (\star_{\star}\star\star_{\star\,¡\,1})$ y $\star_{\star} = (\star_1\star\star\star\star\star_{\star\,¡\,1})\star$ Se supone que existe un vector de parámetros de dimensión $\star$ cuyo verdadero valor $\star_0$ es tal que $\star_0(\star_{\star}\star\star_{\star})$ está bien de...nido, es decir, existe un único $\star_0$ tal que $\star_0(\star_{\star}\star\star_{\star}) = \star(\star_{\star}\star\star_{\star};\star_0)$. Finalmente, se de...ne la función de verosimilitud como el producto de las funciones de densidad marginales de las observaciones, es decir,

$$\star(\star\star\star;\star_0) = \prod_{\star=1} \star(\star_\star\star\star_\star;\star_0)$$

<u>De…nición 1</u>. El estimador de $\star_0$ de Máxima Verosimilitud (ML), $\hat{\star}_{\star\,\star}$, se de…ne como el valor de $\star$ que maximiza el logaritmo de $\star(\star\star\star;\star)$ respecto de $\star\star$Es decir,

$$\hat{\star}_{\star\,\star} = \arg\max_{\star} \left(\sum_{\star=1} \log \star(\star_\star\star\star_\star;\star) \right) \qquad (2.1)$$

Llamando a la función a maximizar $\log(\star(\star))$ y se supone que ésta función es diferenciable, el estimador $\hat{\star}_{\star\,\star}$ se deduce del sistema de ecuaciones de primer orden:

$$\frac{\star[\log(\star(\hat{\star}_{\star\,\star}))]}{\star\star_\star} = 0\star \qquad \star = 1\star\star\star\star\star\star$$

Este sistema en general no es lineal y la solución se obtiene mediante algoritmos numéricos normalmente basados en el método de Gauss-Newton.

<u>De…nición 2</u>. El estimador de $\star_0$ de Mínimos Cuadrados no Lineales (NLS), $\hat{\star}_{\star\,\star\star\star}$ se de…ne como aquel valor de $\star$ que minimiza los residuos al cuadrado. Es decir,

$$\hat{\star}_{\star\,\star\star} = \arg\min_{\star} \sum_{\star=1} [\star_\star \text{ ¡ } \star(\star_\star\star\star_\star;\star)]^2$$

Con el …n de de…nir un nuevo estimador se introduce ahora el vector de momentos empíricos $\star$ $(\star_\star\star\star_\star)$ de dimensión $\star\star$siendo $\star$ ¸ $\star\star$que es una función de las variables observables. Debe apuntarse que el estimador que se de…ne a continuación es válido para series estacionarias, por lo que se hace este supuesto sobre los procesos que generan las observaciones (de otro modo los momentos no existen). La selección de los momentos será una cuestión relevante sobre la que se volverá mas adelante. Supongamos que a partir de esta función se puede construir la función

$$\star_{\star}[\star(\star_{\star}\star\star_{\star})\star\star_{\star}] = \star(\star_{\star};\star)$$

siendo $\star(\star_{\star};\star)$ un momento condicional bien de…nido. Dada esa igualdad, es posible determinar una condición teórica que se cumple para el verdadero valor de $\star$:

$$\star_{\star}[\star(\star_{\star}\star\star_{\star})\star\star_{\star} ¡ \star(\star_{\star};\star)] = 0$$

Para una muestra de datos de las variables $\star$ e $\star$ es posible calcular el lado izquierdo de la anterior expresión. La idea que da fundamento al estimador que se de…ne a continuación es la de identi…car el valor de $\star$ que mas acerque dicha expresión al cero, puesto que en ese caso el momento empírico y se valor esperado estarán lo más próximos posible.

<u>De…nición 3</u>. El estimador de $\star_0$ del Método Generalizado de los Momentos (GMM) (Hansen (1982), Hansen y Singleton (1982)) se de…ne como aquel valor $\hat{\star}_{\star\star\star}$ que cumple

$$\hat{\star}_{\star\star\star} = \arg\min_{\star} \left\{ \sum_{\star=1} [\star(\star_{\star}\star\star_{\star})\star\star_{\star} ¡ \star(\star_{\star};\star)] \right\}' - \left\{ \sum_{\star=1} [\star(\star_{\star}\star\star_{\star})\star\star_{\star} ¡ \star(\star_{\star};\star)] \right\}$$

siendo - una matriz semide…nida positiva de dimensión $\star\star$Esta matriz es la que transforma la distancia del espacio $\mathbb{R}^{\star}$ al espacio paramétrico. En el caso en el que $\star = \star$ no es necesario transformar las distancias y puede tomarse - $= \star\star$Más adelante se señalarán algunas posibilidades de estimar consistentemente - en la práctica.

Bajo los supuestos estándar – véase Hansen (1982) – se cumple que $\hat{\star}_{\star\star\star}$ es un estimador consistente del verdadero valor $\star_0$ y que es asintóticamente normal, siendo su distribución:

$$\sqrt{\star}(\hat{\star}_{\star\star\star} ¡ \star_0) ¡! \star(0\star\star^{\star}_{\star\star\star})$$

siendo $\star^{\star}_{\star\star\star} = \S_1^{¡1}\S_2\S_1^{¡1}$ y

$§_1 = ⋆\,^0 - ⋆\,⋆$

$§_2 = ⋆\,^0 - ⋆_0 f⋆\ (⋆⋆⋆)\ ¡\ ⋆\ (⋆⋆⋆_0)g - ⋆\,⋆$

$⋆\ = ⋆\ \overset{£}{} \frac{⋆⋆}{⋆⋆^0}(⋆⋆⋆_0)\overset{¤}{}\ ⋆$

La matriz $⋆^{⋆}_{⋆⋆\,⋆}$ depende de $-⋆$y por tanto es posible elegir la $-^{¤}$ óptima, es decir, aquella $-^{¤}$ que cumple $⋆_{⋆⋆}(-^{¤})$ ¿ $⋆_{⋆⋆}(-)$ 8 $-⋆$La matriz óptima es $-^{¤} = (⋆_0 f⋆\ (⋆⋆⋆)\ ¡\ ⋆\ (⋆⋆⋆_0)g)^{¡1}⋆$y en ese caso $§_1 = §_2$ y

$$⋆^{⋆}_{⋆⋆\,⋆} = §_1^{¡1} = [⋆\,^0 - ^{¤}⋆\,]^{¡1} \tag{2.2}$$

Al igual que en el caso general, la elección de la matriz $-^{¤}$plantea problemas ya que depende del vector de parámetros desconocidos y debe ser estimada de manera consistente. Se volverá sobre este punto al …nal del capítulo al repasar las propiedades del estimador del GMM.

2.2.1 Propiedades asintóticas de los estimadores no lineales

En este apartado se analizarán las propiedades de consistencia y la distribución asintótica de los estimadores ML, NLS y GMM suponiendo estacionariedad de las variables.

Consistencia. En general, si la función criterio dividida por $⋆$ converge a una función límite para un $⋆$ dado, y si ésta función tiene un máximo, entonces, el estimador que se obtiene de optimizar dicho criterio, converge a aquel máximo. Los anteriores estimadores tienen en común que se obtienen de buscar un máximo o un mínimo de una cierta función que en general puede escribirse como $ª_⋆(⋆)⋆$Así, en el caso del estimador ML, $ª_⋆(⋆) = \log(⋆(⋆))⋆$en el del estimador NLS, $ª_⋆(⋆) = \sum_{⋆=1} [⋆_⋆\ ¡\ ⋆\ (⋆_⋆⋆⋆_⋆;⋆)]^2⋆$ y en el caso del estimador GMM $ª_⋆(⋆) = (\sum (⋆\ \ ¡\ ⋆\ (⋆)))^0 -^{¤}(\sum (⋆\ \ ¡\ ⋆\ (⋆)))$. Las condiciones necesarias para garantizar consistencia en los estimadores antes de…nidos son:

i) Convergencia de $ª_⋆(⋆)⋆⋆$ para todo $⋆$: $\lim_{⋆\,!\,1} ª_⋆(⋆)⋆⋆ = ª_1(⋆)$

ii) Unicidad del valor de $⋆$ que maximiza $ª_1(⋆)$

iii) Identidad entre el valor $\star$ que maximiza $^{a}{}_{1}(\star)$ y el verdadero valor de $\star$

Si se cumplen las condiciones anteriores, se tiene que $\star\star\star\star(\hat{\star}) = \star$ para cualquiera de los estimadores de...nidos anteriormente.

<u>Normalidad Asintótica.</u> Puesto que los estimadores anteriores son consistentes, se puede calcular la expansión de las condiciones de primer orden en el verdadero valor del parámetro. De la aproximación lineal de la CPO en un entorno del verdadero valor $\star_0$ se obtiene

$$\frac{\star\, a_\star}{\star\star}(\star_0) + \frac{\star^2 a_\star}{\star\star\star\star^0}(\star_0)(\hat{\star}\ \mathrm{i}\ \star_0) \quad ' \quad 0$$

$$\mathrm{i}\ \left[\frac{\star^2 a_\star}{\star\star\star\star^0}(\star_0)\right]^{\mathrm{i}1} \frac{\star\, a_\star}{\star\star}(\star_0) \quad ' \quad (\hat{\star}\ \mathrm{i}\ \star_0)$$

Por otra parte si se cumple

$$\mathrm{i}\,\frac{1}{\star}\left[\frac{\star^2 a_\star}{\star\star\star\star^0}(\star_0)\right] \overset{\star}{!}\ \star(\star_0)$$

y

$$\frac{1}{\mathrm{p}\overline{\star}}\,\frac{\star\, a_\star}{\star\star}(\star_0) \overset{\star}{!}\ \star\ (0\star\star(\star_0))$$

siendo $\star(\star_0)$ y $\star(\star_0)$ tales que existen sus inversas, se obtiene

$$\mathrm{p}\overline{\star}(\hat{\star}\ \mathrm{i}\ \star_0) \quad ' \quad \mathrm{i}\star\left[\frac{\star^2 a_\star}{\star\star\star\star^0}(\star_0)\right]^{\mathrm{i}1} \frac{1}{\mathrm{p}\overline{\star}}\,\frac{\star\, a_\star}{\star\star}(\star_0)$$

$$\overset{\star}{\mathrm{i}!}\ \star^{\mathrm{i}1}(\star_0)\frac{1}{\mathrm{p}\overline{\star}}\,\frac{\star\, a_\star}{\star\star}(\star_0)$$

de donde se deduce que

$$\mathrm{p}\overline{\star}(\hat{\star}\ \mathrm{i}\ \star_0) \overset{\star}{!}\ \star\ (0\star\star^{\mathrm{i}1}\star\star^{\mathrm{i}1}) \tag{2.3}$$

Nuevamente, la matriz de varianzas y covarianzas asintótica del estimador depende del parámetro desconocido y debe estimarse consistentemente. Los factores de normalización $\star$ y $\sqrt{\star}$ son los válidos si se dan las condiciones de estacionariedad.

2.3 Estimación basada en la simulación

En algunos casos, la función de verosimilitud $\star(\star_{\star}\star\star_{\star};\star)$ o los momentos condicionales $\star\ (\star_{\star};\star)$ no tienen una forma funcional tratable o no tienen expresión explícita. Por tanto no es posible el uso de los algoritmos de optimización y el problema de la estimación requiere de nuevas herramientas para ser abordado. En este contexto, la simulación se presenta como un instrumento útil para superar los problemas anteriores permitiendo sortear la di...cultad asociada a la di...cultad en el tratamiento de las funciones criterio. La idea básica consiste en sustituir la función de verosimilitud, el vector de momentos o en algunos casos, el modelo, por otra función, momentos o modelo que sea lo su...cientemente simple y al mismo tiempo informativo sobre la relación entre las variables, con el ...n de que pueda ser simulado para unos valores de los parámetros y de las variables exógenas. En general se puede decir que la estimación basada en la simulación se basa en la comparación, para un rango de valores del parámetro de interés, de estadísticos muestrales y estadísticos simulados. Estos métodos se basan en la optimización de un criterio que resulta mas tratable que los asociados a la optimización por procedimientos tradicionales para determinados modelos de interés.

A continuación se describirá la técnica para llevar a cabo la simulación, así como algunas particularidades que deben tenerse en cuenta en la simulación de un modelo o un estadístico que forme parte del criterio del cuál se obtenga el estimador del parámetro de interés. Finalmente se describirán algunos de los métodos de estimación basados en la simulación que son contrapartida de los métodos ya vistos: Método de los Momentos Simulados (MSM), Método de Máxima Verosimilitud Simulada (SML), Mínimos Cuadrados no Lineales Simulados (SNLS) y el Método de Inferencia Indirecta (I.I.).

2.3.1 Técnica de simulación

La técnica de simulación que se utiliza en los métodos de estimación que se describen a continuación y también en los métodos nuevos que se sugieren, consiste en generar valores de las variables endógenas a partir de perturbaciones simuladas y de los valores observados de las variables exógenas, que permanecen ...jos en la simulación. Se dice en este caso que se trata de simulaciones condicionadas a los valores de las variables exógenas.

De manera precisa, una simulación en un conjunto de valores de las variables endógenas que veri...can que la función de distribución condicionada a las variables exógenas – que permanecen ...jas en el ejercicio de la simulación – es la misma que la función de distribución condicionada de las observaciones originales. Es decir, $\star(¢\star\star_1\star\star\star\star\star\star_\star\,\star\star_0;\star)\star$ la función de distribución de $\star_1\star\star\star\star\star\star_\star$ condicionada a $\star_1\star\star\star\star\star\star_\star\,\star\star_0$, coincide con la distribución de $\star_1^\star(\star)\star\star\star\star\star\star\star_\star^\star(\star)$ condicionada a $\star_1\star\star\star\star\star\star_\star\,\star\star_0$ siendo $\star_\star^\star(\star)\star\star = 1\star\star\star\star\star$ un conjunto de valores simulados de la variable endógena. Estas simulaciones pueden llevarse a cabo para distintos valores de $\star$, y además pueden construirse varias replicaciones independientes formadas por conjuntos de simulaciones para un mismo valor del parámetro. De manera más precisa, se pueden realizar un determinado conjunto de $\star$ simulaciones $(\star_\star^\star\star\star = 1\star\star\star\star\star)\ \star = 1\star\star\star\star\star$ tales que cada uno de los vectores – en el caso unidimensional – de $\star$ elementos sean independientes entre sí, todos ellos condicionados a $\star_1\star\star\star\star\star\star_\star\,\star\star_0\star$Este hecho permitirá que para $\star$ su...cientemente grande las distribuciones empíricas de $\star_\star^\star(\star)\star\star = 1\star\star\star\star\star$ proporcionen una buena aproximación a la distribución condicional original $\star(¢\star\star_1\star\star\star\star\star\star_\star\,\star\star_0;\star)$ desde la que resulta muy complicado realizar la inferencia directa del parámetro de interés.

La simulación de valores de la variable endógena requiere la generación, a partir de los generadores de números aleatorios que proporcionan los paquetes informáticos, de los términos de error acordes con la distribución del error original del modelo, que es conocida. Los errores que se pueden generar directamente a partir de estos paquetes se distribuyen como una variable $\star\ (0\star1)$ o bien como una variable $\star\ [0\star1]\star$ El uso de estos generadores de números aleatorios requiere una transformación del término de error con el …n de obtener la distribución deseada. Si el modelo contiene un término de error ⋆¤⋆ con distribución ⋆ (0⋆-) y - depende del parámetro desconocido ⋆ entonces ⋆¤⋆ puede escribirse como ⋆¤⋆ = ⋆ ⋆⋆ siendo ⋆⋆ » ⋆ (0⋆⋆) y ⋆ ⋆⁰ = -⋆ Pues bien, a partir de un vector simulado ⋆⋆⋆ » ⋆ (0⋆⋆) se construye el vector de perturbaciones simuladas dependiente de ⋆ y con las propiedades deseadas: ⋆¤⋆⋆ = ⋆ (⋆)⋆⋆⋆⋆Cuando se consideren distintos ⋆ – esto ocurrirá en el algoritmo de optimización como se verá mas adelante – será necesario mantener las mismas realizaciones ⋆⋆⋆ al generar los distintos ⋆¤⋆⋆ con el …n de obtener mejores propiedades de los estimadores basados en estas simulaciones. La razón es que éstas simulaciones del modelo original se incorporarán en una función criterio que se minimiza respecto del parámetro de interés y para minimizar esta función, normalmente se utilizará un algoritmo numérico que calcula el valor de la función objetivo para distintos valores ⋆1⋆⋆⋆⋆⋆⋆ del parámetro ⋆⋆Los valores ⋆⋆⋆ se simulan al principio del proceso y se mantienen …jos durante la ejecución del algoritmo. El objetivo es no introducir nuevos elementos estocásticos en cada iteración del algoritmo. En otro caso, en la práctica no sería posible obtener convergencia del algoritmo y en términos de las propiedades asintóticas de los estimadores, no se darían las deseables.

Una vez se tiene el término de perturbación del modelo simulado, los valores de las variables endógenas simuladas se obtienen como se indica a continuación. Supongamos que el modelo original (⋆) viene dado por un conjunto de ecuaciones que de manera compacta se puede representar como

⋆ : ⋆⋆ = ⋆(⋆⋆⋆⋆0⋆⋆⋆; ⋆)⋆ ⋆ = 1⋆⋆⋆⋆

siendo (⋆⋆) una variable ruido blanco de distribución conocida. Las simulaciones de la variable endógena se obtienen a partir de las ecuaciones que constituyen ⋆ para un valor dado del parámetro ⋆⋆de las condiciones iniciales ⋆0⋆de las observaciones de las variables exógenas (⋆⋆) y de simulaciones del error del modelo (⋆⋆)⋆ Por tanto, los valores simulados de las variables endógenas vienen dados por

$$\star_\star^\star(\star) = \star(\star_\star\star\star_0^\star\star\star_\star^\star;\star)\star \qquad \star = 1\star\star\star\star$$

Una vez determinada la técnica de la simulación del modelo original se pasa a describir los métodos mas interesantes basados en la simulación. La idea básica de los métodos de estimación basados en la simulación es la de identi…car el parámetro de interés $\star$ para el cual las propiedades de las observaciones de las variables endógenas $(\star_\star)$ son similares a las de las simulaciones de ésta variables para dicho valor $(\star_\star^\star(\star))\star$El criterio de calibración particular que se considere, a partir del cual se in…ere el estimador, es el elemento que caracteriza los distintos métodos de estimación basados en la simulación. Los distintos criterios consideran el uso de uno u otro estadístico – que se podrá calcular a partir de los datos empíricos y simulados –. Así, por ejemplo, en el caso de la estimación MSM dicho estadístico será un vector de momentos particular y en el caso de la estimación I.I., el estimador del vector de parámetros de un modelo auxiliar. Sin embargo, en ambos casos el principio es el mismo: minimizar una función que recoge la diferencia de un estadístico construido a partir de las observaciones de la variable endógena y las simulaciones de las mismas obtenidas a partir de un valor dado del parámetro $\star\star$ A continuación, en esta sección se describirán los métodos de estimación MSM, SNLS, SML y …nalmente, el método I.I.

2.3.2 Método de los Momentos Simulados

El Método de los Momentos Simulados de McFadden, (1989) y Pakes y Pollard (1989) se basa en la calibración del valor del estimador $\star$ utilizando para ello el criterio basado en la diferencia entre un vector de momentos muestrales obtenido de la variable endógena y dicho vector de momentos obtenido a partir de los datos simulados para un determinado valor de $\star\star$Esta calibración basada en el vector de momentos da lugar a estimadores con las propiedades deseables de consistencia y normalidad asintótica bajo los supuestos habituales. El método MSM se inspira en el método generalizado de los momentos y se aplica en casos en los que no es posible disponer de una expresión cerrada para el vector de momentos que se pretenden utilizar en el GMM. En efecto, la estimación GMM requiere la existencia de una forma cerrada de los momentos que utiliza. En algunos casos esta forma cerrada no existe y la función $\star$ se sustituye por una aproximación basada en simulaciones. Esa aproximación, que se denota $\star\star$ no se obtiene de la replicación del modelo original, sino de la imposición de propiedades de insesgadez en la construcción de $\star$. Lógicamente, la precisión del estimador MSM dependerá en la elección de $\star$. El estimador MSM se deriva de la calibración del momento empírico seleccionado y el momento basado en la simulación.

De…nición 4. Sea $\star(\star_\star\star\star_\star;\star)$ un estimador insesgado de $\star(\star_\star;\star)\star$siendo $\star_\star$ una perturbación aleatoria de distribución conocida. El estimador de $\star_0$ del Método de los Momentos Simulados (MSM)$\star\tilde{\star}_{\star\ \star\star}$ $\star$se de…ne como aquel valor que cumple

$$\tilde{\star}_{\star\ \star\star} = \arg\min_{\star} f\,{}^{a}{}_{\star}(\star)g$$

siendo

$$^{a}{}_{\star}(\star) = ½\sum_{\star=1}[\star\ (\star_\star\star\star_\star)\ ¡\ \frac{1}{\star}\sum_{\star=1}\star(\star_\star\star\star^\star_\star;\star)]^{¾_0}\ -\ ½\sum_{\star=1}[\star\ (\star_\star\star\star_\star)\ ¡\ \frac{1}{\star}\sum_{\star=1}\star(\star_\star\star\star^\star_\star;\star)]^{¾}$$

Este estimador depende del momento elegido $\star$ $\star$de la matriz -, de la elección de $\star$ y del número de simulaciones $\star\star$Cuando $\star\ !\ 1\star\frac{1}{\star}\sum_{\star=1}\star\ ¡^\star!\ \star(\star)\ =\ \star$ y el estimados $\tilde{\star}_{\star\ \star\star}$ coincide con $\tilde{\star}_{\star\star\ \star}$ $\star$Las simulaciones $\star^\star_\star$ se obtienen de la distribución condicional de $\star$ dado $\star$ en el caso en el que no existan retardos de la variable endógena entre los regresores, o bien, condicionada a $\star\star$en el caso en el que sí existan retardos entre los regresores.

Propiedades asintóticas del estimador MSM

Puede demostrarse que bajo las propiedades habituales, cuando $\star$ tiende a in…nito y $\star$ es …jo,

i) $\tilde{\star}_{\star\ \star\star}$ es un estimador consistente de $\star\star$y

ii) p— ⋆(ˆ⋆⋆ ⋆⋆ ¡ ⋆0) ¡⋆! ⋆ (0⋆⋆ (-))⋆siendo

$$\star(-) = §_1^{i1} §_2 §_1^{i1} + \frac{1}{\star} §_1^{i1} \star^{0} - \star_0[\star(\star)] - \star §_1^{i1}$$

$$= §_1^{i1} §_2 §_1^{i1} + \frac{1}{\star} §_1^{i1} \star^{0} - [\star(\star\ ¡\ \star)] - \star §_1^{i1}$$

y

$$§_2 = \star^{0} - [\star(\star\ ¡\ \star)] - \star\star$$

$$\star = \star\ £\frac{\star\star}{\star\star^0}(\star\star\star_0)¤\ \star$$

$$§_1 = \star^{0} - \star\star$$

Como se observa, la matriz de varianzas y covarianzas tiene dos componentes: el primero, que es la matriz de varianzas y covarianzas asintótica del estimador ˜⋆⋆ ⋆ y el segundo, que es la varianza adicional asociada a la presencia de las simulaciones. Esta matriz es semide…nida positiva y decrece con el número de simulaciones. En el límite, cuando ⋆ ¡ ! 1 ⋆dicho elemento desaparece y las propiedades asintóticas del estimador MSM coinciden con las del estimador GMM. Por tanto, en la práctica, la diferencia entre la matriz de varianzas y covarianzas del estimador MSM y la del estimador GMM es una matriz de…nida positiva, debido a la varianza del momento simulado ⋆ (⋆)⋆

La pérdida de e…ciencia del estimador MSM respecto del GMM es una propiedad común de los estimadores basados en la simulación respecto de aquellos métodos en los cuales se inspiran. Resulta deseable, por tanto, encontrar mecanismos de compensación del coste asociado a la simulación en términos de e…ciencia. Como se justi…cará a lo largo del siguiente capítulo, una de las ventajas asociadas al uso de las restricciones estocásticas en los métodos de estimación basados en la simulación es que se compensa en parte la pérdida de e…ciencia asociada a las simulaciones.

Tal y como ocurre en el procedimiento GMM, las propiedades asintóticas dependen de la matriz - y por tanto puede determinarse una -¤¤ que minimice la varianza asintótica del estimador MSM. En efecto, tomando $- ^{¤¤} = {}^{©} \star (\star \; ¡ \star) + \frac{1}{\star} \star (\star \; ¡ \star) {}^{a \, i \, 1} \star$la matriz de varianzas y covarianzas asintótica correspondiente queda

$$\star (- ^{¤¤}) = (\star ^{0} - ^{¤¤} \star) ^{i \, 1}$$

siendo $\star = \star_0 (\frac{\star\star}{\star\star})$ y nuevamente, dado que $- ^{¤¤}$ depende de la parámetros desconocidos tiene que ser estimada de manera consistente.

Por último, comparemos la matriz de varianzas y covarianzas óptima del estimador GMM con la del estimador MSM. La expresión (2.2) de la matriz de varianzas y covarianzas asintóticas del estimador $\sqrt{\star} (\hat{\star}_{\star \star} \; ¡ \star_0)$ se obtiene de la matriz óptima $- ^{¤} = (\star_0 [\star \; ¡ \star]) ^{i \, 1} \star$ Puesto que $- ^{¤¤} \; ¿ \; - ^{¤}$ se cumple que $\star (- ^{¤¤}) \; À \; \star^{\star}_{\star \star} (- ^{¤}) \star$ y por tanto se conserva la pérdida de e…ciencia asociada a las simulaciones. Es inmediato comprobar que $- ^{¤} = \lim_{\star \, ! \, 1} - ^{¤¤} \star$ es decir, ambas distribuciones coinciden cuando el número de simulaciones tiende a in…nito.

2.3.3 Mínimos Cuadrados Simulados y Máxima Verosimilitud Simulada

En la sección anterior se describió el método MSM que se inspira en la estimación GMM y que se aplica en aquellos casos en los que no existe una expresión explícita para los momentos empíricos, pero cuando éstos se pueden estimar de manera insesgada a partir de un estadístico que se considera un simulador de vector de momentos. En esta sección brevemente se repasan los métodos de Máxima Verosimilitud Simulada (SML) y de Mínimos Cuadrados Simulados (SLS), que a su vez se inspiran en los métodos de ML y de NLS. Estos métodos basados en la simulación se fundamentan en el principio común del que surgen todos los métodos de estimación: aproximar un estadístico normalmente complicado por una función obtenida de datos simulados que es un estimador insesgado de aquel estadístico. La principal característica de estos estimadores es que no son consistentes para un número de simulaciones …jo. La consistencia se puede obtener cuando $\star \; ¡ ! \; 1$ o bien mediante la introducción de una corrección que elimine el sesgo asintótico.

Sea ⋆(⋆⋆ ⋆⋆⋆ ; ⋆) la función de distribución conjunta de ⋆⋆ condicionada a ⋆⋆⋆El estimador de máxima verosimilitud se de…nió en (2.1) como $\hat{⋆}_{⋆\ ⋆}$ = arg max⋆ flog ⋆(⋆⋆ ⋆⋆⋆ ; ⋆)g⋆Si la función de distribución conjunta es muy complicada para que resulte operativo obtener la estimación de ⋆ a partir de su optimización, es posible resolver este problema mediante el uso de funciones que sean estimadores insesgados de ⋆(⋆⋆⋆⋆ ⋆; ⋆)⋆– siendo ⋆⋆ = (⋆⋆¡ 1⋆⋆⋆) – las funciones de distribución marginales. Puesto que log⋆(⋆⋆ ⋆⋆⋆ ; ⋆) = **P** $^{⋆}_{⋆=1}$ log ⋆(⋆⋆⋆⋆⋆; ⋆)⋆el principio de la estimación por máxima verosimilitud simulada consiste en utilizar en lugar de las distribuciones individuales, estimadores simulados de las mismas. En efecto, sea $\tilde{⋆}$(⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆; ⋆) una función que se puede simular y que es un estimador insesgado de ⋆(⋆⋆⋆⋆⋆; ⋆)⋆es decir,

$$⋆\ (\tilde{⋆}(⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆ ; ⋆)⋆⋆ ⋆⋆⋆⋆) = ⋆\ (⋆⋆⋆⋆ ⋆; ⋆)$$

y sean los elementos ⋆$^{⋆}_{⋆}$⋆perturbaciones simuladas del término de error ⋆⋆En ese caso, el estimador de máxima verosimilitud simulada $\hat{⋆}_{⋆⋆\ ⋆}$ se de…ne como

$$\hat{⋆}_{⋆⋆\ ⋆} = \arg\max_{⋆} \sum_{⋆=1} \log\left(\frac{1}{⋆}\sum_{⋆=1} \tilde{⋆}(⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆^{⋆}_{⋆}; ⋆)\right)$$

Cuando ⋆ es …jo el estimador $\hat{⋆}_{⋆⋆\ ⋆}$ no es consistente, y esto se deriva del hecho de que la función log $\tilde{⋆}$(¢) no es un simulador insesgado de log ⋆(¢)⋆Sin embargo, cuando ⋆ tiende a in…nito, el estimador $\hat{⋆}_{⋆⋆\ ⋆}$ sí es consistente.

Otro método de estimación basado en la simulación es el SLS basado en la simulación del momento de primer orden ⋆(⋆⋆⋆⋆; ⋆) siendo ⋆ el término del error de distribución conocida y cumpliéndose que ⋆ [⋆(⋆⋆⋆⋆; ⋆)] = ⋆ (⋆⋆; ⋆) = ⋆ (⋆⋆⋆⋆⋆)⋆El estimador SLS se de…ne como aquel valor $\hat{⋆}_{⋆⋆⋆}$ que cumple

$$\hat{⋆}_{⋆⋆⋆} = \arg\min_{⋆} \sum_{⋆=1} \left(⋆_{⋆}\ ¡\ \frac{1}{⋆}\sum_{⋆=1} ⋆(⋆⋆⋆⋆^{⋆}_{⋆}; ⋆)\right)^{2}$$

siendo ⋆$^{⋆}_{⋆}$ realizaciones independientes de ⋆⋆Las propiedades asintóticas son similares a las del estimador SML, por tanto, no es un estimador consistente si $\star$ es …nito. Sin embargo puede obtenerse consistencia si se llevan a cabo correcciones sobre el modelo – véase Gouriéroux y Monfort, (1991).

2.3.4 Inferencia Indirecta

El método de estimación Inferencia Indirecta (I.I.) – C. Gourieroux, A. Monfort, y E.C. Renault (1993) – surge como todos los métodos basados en la simulación, de las di…cultades asociadas a la inferencia directa del parámetro $\star$ desde la función de verosimilitud del modelo original. Sin embargo, a diferencia de los anteriores, utiliza un modelo auxiliar con el que resulta más fácil trabajar en la simulación y estimación de sus parámetros. El principio del modelo es el mismo que el de los anteriores métodos –calibrar el parámetro a partir de una distancia que depende de los datos reales y de los datos simulados – pero se basa en el estimador del parámetro del modelo auxiliar –más fáciles de obtener – y no en momentos o estadísticos que se obtengan directamente del modelo inicial. A continuación se describe en detalle la metodología del método I.I.

Sean ($\star$) el modelo original de interés que contiene a los parámetros $\star$ que se quieren estimar y ($\star$ *) un modelo auxiliar que contiene los parámetros $\star$ en el que se encuentran las variables de interés pero vinculadas en relaciones tratables desde el punto de vista de la optimización tradicional. Es necesario que la dimensión de $\star$ sea mayor o igual que la del parámetro $\star$ para que el problema que se plantea a continuación esté bien de…nido. Mediante el método I.I. se in…ere una estimación del parámetro $\star$ utilizando para ello estimaciones del parámetro $\star$, obtenidas a partir de los datos originales y de datos simulados para distintos valores de $\star\star$ La implementación de éste método requiere que se compute inicialmente a partir de un criterio auxiliar – posiblemente ML o NLS – y de los datos originales, el estimador $\hat{\star}_\star$ $\star$De manera mas precisa,

$$\hat{\star}_\star = \arg\max_{\star} {}^{a}{}_{\star} (\star_\star \star\star_\star ; \star) \tag{2.4}$$

siendo ª$_\star$ (⋆) el criterio elegido que de lugar a estimadores consistentes de ⋆[1]⋆ Por otra parte, se simulan las variables endógenas $\star^\star_\star(\star)$ utilizando para ello las ecuaciones del modelo original (⋆) y un valor ⋆ del parámetro. Para cada ⋆ se replican ⋆ veces tales simulaciones y entonces se estima el parámetro ⋆ del modelo auxiliar (⋆ ⋆) obteniendo la media de estos estimadores. Es decir, para cada ⋆ se calcula $\sum_{\star=1} \tilde{\star}_\star(\star)\star\star$ según se ha especi…cado en la primera parte de éste capítulo, manteniendo $(\star^\star_\star\star\star = 1\star\star\star\star)$ …jos para todos los ⋆ a lo largo de la iteraciones.

De…nición 5. El estimador de $\star_0$ del Método de Inferencia Indirecta (I.I.)⋆ $\tilde{\star}_{\star\star}$⋆es aquel valor que hace $\hat{\star}_\star$ y $\sum_{\star=1} \tilde{\star}_\star(\star)\star\star$ tan próximos como sea posible, es decir, es el valor que cumple

$$\tilde{\star}_{\star\star} = \arg\min_{\star} \left[\hat{\star}_\star \; ¡ \sum_{\star=1} \tilde{\star}_\star(\star)\star\star \right]' - \left[\hat{\star}_\star \; ¡ \sum_{\star=1} \tilde{\star}_\star(\star)\star\star \right]$$

siendo - la matriz de distancias, simétrica y de…nida positiva. La solución del problema de elección del valor de ⋆ que minimiza dicha distancia se lleva a cabo mediante un algoritmo numérico que en cada paso ⋆ reduce dicha distancia tomando un nuevo valor $\star^{\star+1}$, calculando la media de los estimadores auxiliares simulados bajo (⋆), recalculando la distancia y …nalmente convergiendo al valor $\tilde{\star}_{\star\star}$⋆ Si la dimensión de ⋆ coincide con la de ⋆, el estimador $\tilde{\star}_{\star\star}$ es independiente de - y por tanto podría elegirse la matriz identidad puesto que resulta más operativa.

El principio que guía el diseño de este mecanismo de estimación utiliza la simulación para reconstruir una función que vincula los parámetros de ambos modelos. Efectivamente esta función existe puesto que para un ⋆ a partir del cual se simule el modelo original se obtiene un estimador $\tilde{\star}$ de ⋆ que depende de aquel, lo que se denota como $\tilde{\star}(\star)$⋆ La media de estos valores en ⋆ simulaciones es un estimador insesgado del valor de aquella función vinculante asociado al valor de ⋆ utilizado en las simulaciones. Denotando ⋆(⋆) a esa función, técnicamente se tiene que

[1] El estimador de ⋆ obtenido directamente de la maximización de ª$_\star$ (⋆) con respecto a ⋆⋆ es menos e…ciente que el que se basa en la estimación indirecta – véase Gourieroux et al. (1993) –.

$\sum_{\star=1} \tilde{\star}_{\star}(\star)\star\star \; ¡ \; ! \; \star(\star)\star$ Por otra parte, los datos originales han sido generados por el verdadero parámetro $\star_0$ y puesto que existe esa función, entonces el estimador de $\star$ calculado de los datos originales, $\hat{\star}_{\star}$ también es función de aquel valor $\star_0\star$ En concreto, $\hat{\star}_{\star} \; ¡ \; ! \; \star(\star_0)\star$ Por tanto, considerar la distancia $\hat{\star}_{\star} \; ¡ \sum_{\star=1} \tilde{\star}_{\star}(\star)\star\star$ se corresponde en términos asintóticos con la distancia $\star(\star_0) \; ¡ \; \star(\star)$. La inferencia indirecta explota la anterior relación considerando la contrapartida empírica de $\star(\star_0)$ – es decir, $\hat{\star}_{\star}$ – y la de $\star(\star)$ – es decir, $\sum_{\star=1} \tilde{\star}_{\star}(\star)\star\star$ – generando el valor de $\star$ que la minimiza, como se recoge en (??). A partir del mecanismo descrito anteriormente en el cual se basa la inferencia indirecta se desprende que $\star$ debe ser un estimador consistente de $\star(\star)\star$ la función vinculante.

Una cuestión de importancia relacionada con la anterior función $\star(\star)$ es la de identi…car cuál es el modelo auxiliar, lo que en de…nitiva equivale a determinar cuál es el parámetro $\star$ subyacente que recoge la información sobre $\star$ del cuál se deduce su estimador –véase Gallant and Tauchen , (1996) –.

El método MSM puede interpretarse como un caso particular del método I.I. en el cuál $\hat{\star}_{\star} = \frac{1}{\star}\sum_{\star=1} \star\,(\star_{\star}\star\star_{\star})$ y $\tilde{\star}_{\star} = \frac{1}{\star}\sum_{\star=1} \star\,(\star^{\star}_{\star}(\star)\star\star_{\star})\star$De ésta manera,

$$
\begin{aligned}
\tilde{\star}_{\star\star} &= \arg\min_{\star} \left[\hat{\star}_{\star} \; ¡ \sum_{\star=1} \tilde{\star}_{\star}(\star)\star\star \right]^{0} \star \left[\hat{\star}_{\star} \; ¡ \sum_{\star=1} \tilde{\star}_{\star}(\star)\star\star \right] \\
&= \arg\min_{\star} \left\{ \left[\frac{1}{\star}\sum_{\star=1} \star\,(\star_{\star}\star\star_{\star}) \; ¡ \; \frac{1}{\star}\sum_{\star=1} \star\,(\star^{\star}_{\star}(\star)\star\star_{\star}) \right] \right\}^{0} \star \\
&\quad \star \left\{ \left[\frac{1}{\star}\sum_{\star=1} \star\,(\star_{\star}\star\star_{\star}) \; ¡ \; \frac{1}{\star}\sum_{\star=1} \star\,(\star^{\star}_{\star}(\star)\star\star_{\star}) \right] \right\}
\end{aligned}
$$

es un estimador MSM basado en el momento condicional $\star\,[\star\,(\star_{\star}\star\star_{\star})\star\star_{\star}^{1}]$ siendo el modelo auxiliar el mismo modelo original. El estimador del método MSM propuesto por Du¢e y Singleton (1993) se obtiene en el caso en el que se considera un modelo de series temporales sin variables exógenas y con el mismo modelo como auxiliar.

Propiedades asintóticas del estimador $\tilde{\star}_{\star\star}$

Sea el criterio que se utiliza en la estimación del modelo auxiliar $\star_\star(\star_\star \star\star_\star;\star)$ y $\star \lim_\star \star_\star(\star_\star\star\star_\star;\star) = \star_1(\star_\star\star\star_\star;\star)$. Anteriormente, de manera intuitiva se introdujo la función $\star(\star)$ como el valor límite de la media de los $\tilde{\star}_\star(\star)\star$ De manera más precisa se de…ne $\star(\star) = \arg\min_\star \star_1(\star_\star\star\star_\star;\star)\star$ Con el …n de determinar las propiedades asintóticas de $\tilde{\star}_{\star\star}$ es necesario de…nir las siguientes matrices:

$$\star_0 = \star \lim_\star \left[¡ \frac{\star^2\star_1}{\star\star\star\star^0} \right] \star$$

$$\star_0 = \lim_\star \star [\sqrt{\star}(\hat{\star}_\star \ ¡ \ \star_\star]\star$$

Bajo las propiedades que garantizan la regularidad asintótica del criterio auxiliar – y por tanto de $\hat{\star}_\star$ y $\tilde{\star}_\star$ – el estimador $\tilde{\star}_{\star\star}$ es un estimador consistente y asintóticamente normal cuando $\star$ es …nito y $\star$ tiende a in…nito, siendo

$$\sqrt{\star}(\tilde{\star}_{\star\star} \ ¡ \ \star_0) \ ¡^\star! \ \star\,(0\star\star \ (\star\star\text{-}))$$

siendo

$$\star \ (\star\star\text{-}) = \left(1 + \frac{1}{\star}\right)\left[\frac{\star\star^0}{\star\star}(\star_0)\text{-}\frac{\star\star}{\star\star^0}(\star_0)\right]^{¡1}\frac{\star\star^0}{\star\star}(\star_0)\text{-}\text{-}^{¤¡1}\text{-}\frac{\star\star}{\star\star^0}(\star_0)\left[\frac{\star\star^0}{\star\star}(\star_0)\text{-}\frac{\star\star}{\star\star^0}(\star_0)\right]^{¡1}\star$$

y $\text{-}^¤ = \star_0\star_0^{¡1}\star_0\star$

Es oportuno puntualizar dos cuestiones. La primera es que así como ocurre en el método MSM, la presencia de las simulaciones aumenta la varianza, y la pérdida de e…ciencia se reduce con el número de simulaciones. La otra cuestión es que la matriz de distancias, $\text{-}\star$puede elegirse de tal manera que de lugar a una varianza mínima para la familia de estimadores indirectos. En efecto, si $\text{-} = \text{-}^¤$ entonces

$$\star \ (\star\star\text{-}^¤) = \left(1 + \frac{1}{\star}\right)\left(\frac{\star\star^0}{\star\star}(\star_0)\text{-}^¤\frac{\star\star}{\star\star^0}(\star_0)\right)^{¡1}$$

y si ⋆ ¡ ! 1⋆la matriz de varianzas y covarianzas asintóticas queda

$$\star\ (\text{-}^{¤}) = \left[\frac{\star\star^{0}}{\star\star}(\star_0) \text{-}^{¤}\frac{\star\star}{\star\star^{0}}(\star_0)\right]^{¡1} \tag{2.5}$$

La expresión de la matriz de varianzas y covarianzas asintótica anterior contiene las primeras derivadas de la función ⋆(⋆) evaluada en el verdadero valor del parámetro. Es necesario sugerir una estimación de esta matriz sin que sea necesario determinar la expresión de la función ⋆(⋆) y sus derivadas. En efecto, la función ⋆(⋆) es el límite en probabilidad de la solución de la optimización auxiliar, es decir, de $\hat{\star}$⋆Por tanto, de (2.4), y tomando límite en probabilidad, se obtiene:

$$\begin{aligned} \star(\star) &= \arg\max_{\star} \star \lim ª_{\star}(\star_{\star}\star\star_{\star};\star) \\ &= \arg\max_{\star} ª_{1}(\star;\star) \end{aligned}$$

y por tanto, ⋆(⋆) satisface la condición de primer orden:

$$\frac{\star ª_{1}(\star;\star(\star))}{\star\star} = 0$$

Derivando esta expresión con respecto a ⋆ se tiene

$$\frac{\star^{2} ª_{1}}{\star\star\star\star^{0}} + \frac{\star^{2} ª_{1}}{\star\star\star\star^{0}}\frac{\star\star(\star)}{\star\star^{0}} = 0$$

lo que implica

$$\begin{aligned} \frac{\star\star(\star)}{\star\star^{0}} &= \left(¡\frac{\star^{2} ª_{1}}{\star\star\star\star^{0}}\right)^{¡1}\frac{\star^{2} ª_{1}}{\star\star\star\star^{0}} \\ &= \star_{0}^{¡1}\frac{\star^{2} ª_{1}}{\star\star\star\star^{0}} \end{aligned}$$

La matriz de varianzas y covarianzas asintótica (2.5) queda

$$\star\,(-^{¤}) = \left[\frac{\star^{2} a_{1}}{\star\star\star\star^{0}}\star_{0}^{i1}\frac{\star^{2} a_{1}}{\star\star\star\star^{0}}\right]^{i1}$$

Un estimador consistente de ésta matriz se puede obtener sustituyendo $^{a}{}_{0}$ por $^{a}{}_{\star}\star\star(\star_{0})$ por $\hat{\star}_{\star}$ y $\star_{0}$ por un estimador consistente de la varianza asintótica del estimador auxiliar.

2.4 Estimación sujeta a restricciones estocásticas

En esta sección se presenta una nueva familia de estimadores basados en la modelización de la información a priori mediante restricciones estocásticas. La idea original de la información a priori y su utilización en la estimación es original de Durbin (1953). Se trata de hacer uso de información sobre los parámetros procedente de otras estimaciones o de la evidencia empírica en el proceso mismo de la estimación de los parámetros. Una forma de modelizar la información a priori es mediante las restricciones estocásticas, descrita para un modelo lineal por Theil y Goldberger (1963), y posteriormente explotada abundantemente en el cálculo de predicciones de variables macroeconómicas mediante vectores autorregresivos bajo el enfoque bayesiano por Litterman (1986). La idea de la modelización de la información a priori mediante las restricciones estocásticas resulta razonable y de sencilla aplicación. Esta idea consiste en incluir, junto con las ecuaciones que relacionan las variables del modelo, ecuaciones adicionales que recojan la información a priori sobre los parámetros en forma de ecuaciones que asignan valores a los parámetros de manera aproximada, como si se tratara de observaciones de los parámetros resultantes de un hipotético proceso estocástico. Dicho proceso estocástico contiene por una parte su esperanza, que contiene los parámetros, y por otra, un componente aleatorio donde se recoge el nivel de incertidumbre que se tiene sobre la información a priori que se usa. De manera concreta, la incertidumbre que se tiene sobre la información a priori de los parámetros, se incorpora mediante la varianza de la perturbación de dicha ecuación. Se volverá sobre este aspecto más adelante, al de…nir el método de Mínimos Cuadrados no lineales bajo

Restricciones Estocásticas y a lo largo de varios ejemplos diseñados para ilustrar las propiedades de dicho estimador.

El estimador que se de…ne a continuación es el de un modelo no lineal en el que se dispone de información a priori y ésta se incorpora en forma de restricciones estocásticas. Para ello es conveniente repasar algunos conceptos relacionados con la modelización de las restricciones estocásticas y con la notación que se utilizará. Sea $\star$ una matriz $\star$x1$\star \star \star$ $\star$, en la que se recoge la información a priori que se posee del parámetro $\star\star$Se puede escribir dicha restricción de la forma $\star(\star) = \star + \star$ siendo $\star$ el vector de los valores concretos que se tiene a priori de los parámetros y $\star$ una variable aleatoria con distribución conocida $(0\star\star^2_\star)\star$La información a priori, por tanto, se incorpora en la estimación mediante la inclusión de restricciones estocásticas sobre los valores del parámetro del tipo $\star(\star)$ ¡ $\star$ » $(\star\star\star^2_\star)$. Consideremos el caso de un modelo lineal simple en el que se dispone de la información $\star = \bar{\star}$ sobre el parámetro $\star$ y en el que dicha información se incorpora en el modelo en forma de una restricciones estocásticas lineales. En este caso la ecuación de la restricción estocástica que parametriza la información a priori sería $\bar{\star} = \star + \star$ siendo $\star$ una variable aleatoria con una varianza predeterminada $\star^2_\star\star$El valor que se le asigne a la varianza debe recoger el nivel de incertidumbre asociado a la información a priori. De esta manera, si $\star$ » $\star$ $(0\star\star_\star)\star$al tomar el valor $\star_\star$ se está …jando de hecho un intervalo de valores entre los que se encontrarían los valores disponibles a priori con una determinada probabilidad. Un valor extremadamente bajo asignado a $\star_\star$ recoge un elevado grado de certidumbre sobre el valor a priori, y esto supondrá, como se demostrará detalladamente en el siguiente capítulo, una importante ganancia de e…ciencia en las estimaciones obtenidas. Por el contrario, un valor extremadamente alto asignado a $\star_\star$ recoge la idea de que se tiene una elevada incertidumbre sobre la información a priori que se incorpora. Este hecho determina que la ganancia de e…ciencia sea insigni…cante en la estimación que incorpora la restricción estocástica, y nula si la varianza es in…nita, caso en el que la incertidumbre es máxima o no se dispone de información a priori. Habitualmente se asignarán las distribuciones normal y uniforme al proceso $\star\star$como se recoge en los ejemplos de los siguientes capítulos.

A continuación se de…ne el estimador de Mínimos Cuadrados no Lineales bajo Restricciones Estocásticas (SR), $\tilde{\star}_{\star\star}\star$ y se analizan sus propiedades con el …n de discutir la validez de la inclusión de la información a priori tanto en contexto asintótico como en muestras …nitas. Con el …n de desarrollar en términos precisos la discusión de la validez de la inclusión de restricciones estocásticas en la estimación se utilizará una notación mas detallada y particular del problema. Se parte de un modelo no lineal

$$\star_\star = \star(\star_\star\star\star) + \star_\star$$

siendo $\star_\star$ » $\star\star\star(0\star\star^2_\star)\star$el error del modelo. Se quiere estimar el parámetro $\star$ teniendo en cuenta la restricción estocástica lineal $\star\star = \star + \star\star$siendo $\star$ » $\star\star\star(0\star\star^2_\star)$. En este caso, la restricción estocástica es de dimensión $\star = 1\star$ lo que signi…ca que solo se tiene información sobre un parámetro, y es además lineal[2]. Esta simpli…cación no implica pérdida alguna de generalidad, y su objetivo es obtener una lectura más clara del papel de las restricciones estocásticas en las propiedades del estimador resultante. Agrupando las ecuaciones anteriores se tiene el modelo completo

$$\begin{bmatrix} \star \\ \star \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \star(\star\star\star) \\ \star\star \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \star \\ \star \end{bmatrix}$$

De manera compacta se tiene,

$$\star^+ = \star^+(\star\star\star) + \star^+ \quad (2.6)$$

[2] En este caso se consideran restricciones estocásticas lineales, si bien en el Capítulo 4 se introducirán restricciones de tipo no lineal.

siendo la matriz de varianzas y covarianzas del error,

$$\star(\star^{+}) = \begin{bmatrix} \star^2_{\star}\star_{\star} & 0 \\ 0 & \star^2_{\star} \end{bmatrix} = -$$

Al tratarse de un modelo con errores heteroscedásticos, es necesario transformar las variables de (2.6) por la matriz $\star$ que cumple $\star\star^0 = -^{i1}\star$ El modelo resultante es

$$\star^{+} = \star^{1+}(\star\star\star) + \star$$

siendo $\star^{+} = \star\star^{+}\star\star^{1+}(\star) = \star\star^{+}(\star)\star\star = \star\star^{+}\star$ y por construcción, $\star(\star) = \star_{\star}+1\star$

Definición 6. El estimador de $\star_0$ de Mínimos Cuadrados no Lineales bajo Restricciones Estocásticas (SR) se define como aquel valor $\hat{\star}_{\star\star}$ que cumple

$$\tilde{\star}_{\star\star} = \arg\min_{\star}(\star^0\star)$$

siendo

$$\begin{aligned} \star^0\star &= (\star\star^{+})^0(\star\star^{+}) \\ &= [\star^0 \quad \star^0]\,-^{i1}\begin{bmatrix} \star \\ \star \end{bmatrix} \\ &= f\frac{\star^0\star}{\star^2_{\star}} + \frac{\star^2}{\star^2_{\star}}g \end{aligned}$$

Tal y como se observa en ésta expresión, el criterio del que se obtiene $\tilde{\star}_{\star\star}$ puede considerarse una extensión del criterio particular de minimización del error del modelo de partida, en el que además se tiene en cuenta la diferencia entre el valor de la información a priori y el valor del parámetro, ponderada por la varianza de la distribución que se asigne a la restricción estocástica. Análogamente, la solución del anterior problema de optimización es un caso general que contiene el resultado del método NLS, en concreto aquel en el que no se dispone de información a priori sobre el parámetro, lo que equivale a considerar información con varianza in…nita. A continuación se desarrollan en detalle las propiedades asintóticas del estimador SR, que serán especialmente importantes en la discusión que se llevará a cabo en el siguiente capítulo sobre la utilidad de la incorporación de las restricciones estocásticas en el criterio de optimización.

2.4.1 Propiedades asintóticas del estimador SR

Las propiedades asintóticas del estimador $\tilde{\star}_{\star\star}$ $\star$se deducen de la aproximación de Taylor de la condición de primer orden en el valor $\star^{¤}$ 2 ($\star_0 \star \tilde{\star}_{\star\star}$)$\star$

La aproximación de Taylor del error asociado al valor del estimador SR en un entorno del verdadero valor del parámetro $\star_0 \star$es

$$
\begin{aligned}
\star &= \star^{+} \; ¡ \; \star^{1+}(\star\star\tilde{\star}_{\star\star}) \; ¡ \; \left. \left(\frac{\star(\star^{1+}(\star\star\star))}{\star\star} \right) \right|_{\star=\star^{¤}} (\star_0 \; ¡ \; \tilde{\star}_{\star\star}) \\
&= \star \; ¡ \; \left(\frac{\star\star^{1+}(\star\star\star^{¤})}{\star\star} \right)^{0} (\star_0 \; ¡ \; \tilde{\star}_{\star\star}) \\
&= \star \; ¡ \; \star^{1¤}\star(\star_0 \; ¡ \; \tilde{\star}_{\star\star}) \qquad (2.7)
\end{aligned}
$$

Siendo $\star = \star \; ¡ \; \star(\star\star\tilde{\star}_{\star\star})$$\star$y $\star^{1¤} = (\frac{\star\star^{1+}(\star\star\star^{¤})}{\star\star})^{0}$$\star$ Debe tenerse en cuenta que la matriz $\star^{1}$ es la matriz de derivadas de $\star^{1+}(\star\star\star)$ respecto de $\star\star$Es decir,

$$
\begin{aligned}
\star^{1} &= \left[\frac{\star(\star\,\star^{+})}{\star\star} \right] = \left[\frac{\star\star\star}{\star\star} \quad \frac{\star\star(\star\,\star)}{\star\star} \right] \\
&= [\star\star_1 \quad \star\star]
\end{aligned}
$$

Premultiplicando (2.7) por $\tilde{\star}^{0}$ – que es $\frac{\star\star^{1+}(\star\star\star)}{\star\star}$ evaluada en $\tilde{\star}_{\star\star}$ $\star$se obtiene

$$
\tilde{\star}^{0}\star = \tilde{\star}^{0}\star \; ¡ \; \tilde{\star}^{0}\star^{1¤}(\star_0 \; ¡ \; \tilde{\star}_{\star\star})
$$

Por construcción, $\tilde{\star}'\star = 0$ y de multiplicar por $\sqrt{T}$ se obtiene

$$\sqrt{T}(\tilde{\star}_{\star\star} - \star_0) = \left(\frac{\tilde{\star}'\tilde{\star}}{\star}\right)^{-1} \frac{\tilde{\star}'\star}{\sqrt{\star}} \tag{2.8}$$

Suponiendo que

$$\frac{\tilde{\star}'\star}{\sqrt{\star}} \xrightarrow{\star} \star\left(0, \star\star \lim \frac{\tilde{\star}'\tilde{\star}}{\star}\right)$$

entonces, de la expresión (2.8) y aplicando el Teorema de Cramer, se obtiene la distribución asintótica de $\tilde{\star}_{\star\star}$:

$$\sqrt{T}(\tilde{\star}_{\star\star} - \star_0) \xrightarrow{\star} \star\left[0, \star\Sigma_1^{-1}\right]$$

siendo $\Sigma_1 = \star\lim\left(\frac{\tilde{\star}'\tilde{\star}}{\star}\right) = \star\lim\left(\frac{\star_1'\star_1}{\star}\frac{1}{\star_\star^2} + \frac{\star'\star}{\star}\frac{1}{\star_\star^2}\right)$

Resultado 0. Sin suponer normalidad del término de error del modelo y bajo los supuestos estándar de la teoría asintótica, la distribución asintótica del estimador SR es la misma que la del estimador NLS.

Prueba. Es inmediata a partir de la expresión de Σ_1, puesto que el segundo elemento de la varianza asintóticas del estimador SR desaparece cuando $\star \to \infty$. De esta manera, se obtiene $\Sigma_1 = \star\lim\left(\frac{\star_1'\star_1}{\star}\frac{1}{\star_\star^2}\right)^{-1}$ y por tanto,

$$\tilde{\star}_{\star\star} \approx \star\left(\star\star, \left(\frac{\star_1'\star_1}{\star_\star^2}\right)^{-1}\right) \tag{2.9}$$

La interpretación del Resultado 0 es que, aplicando la teoría asintótica convencional, las restricciones estocásticas no aportan información ni ganancias de eficiencia asintóticamente y, por tanto, tampoco en la distribución aproximada para muestras finitas cuando no se considera normalidad en el error del modelo. La intuición en la que se apoya este resultado es que la información a priori se pondera por un número cada vez menor a medida que crece el tamaño muestral, lo que es equivalente a considerar que la incertidumbre asociada a la información a priori crece con ⋆⋆Esta resultado, si bien es razonable cuando el tamaño de la muestra es elevado, no lo es cuando es pequeño. Es decir, si bien el resultado asintótico es indiscutible, el asociado al mismo relativo a las propiedades aproximadas del estimador cuando el tamaño de la muestra es …nito, no resulta razonable, especialmente en los casos en los que ⋆ es pequeño.

Como se discutirá en el siguiente capítulo, es posible justi…car la validez de la inclusión de restricciones estocásticas si se considera que la información no se agota a lo largo de la muestra, lo cuál resulta más natural en el caso de muestras de tamaño pequeño. Mediante un ejercicio de simulación se ilustrará este argumento en un modelo dinámico en el que se tiene información a priori de los parámetros.

Como conclusión, por tanto, en el marco del modelo lineal general, con errores normales y restricciones estocásticas lineales también con errores normales, la distribución que se señala en (2.9) es exacta, analizada primeramente por Theil y Goldberger (1961) y descrita detalladamente en el Capítulo 1. Esta distribución supone que existen ganancias de e…ciencia cuando se tienen en cuenta las restricciones estocásticas en la estimación. Si no se supone normalidad en los errores, entonces no se obtienen ganancias de e…ciencia mediante la incorporación de restricciones estocásticas y por tanto su uso resulta irrelevante, si bien este resultado no es práctico desde el punto de vista empírico como señala Lütkepohl. Por tanto, sería interesante investigar sobre condiciones que permitieran mantener ganancias de e…ciencia sin suponer normalidad en la estimación bajo restricciones estocásticas para justi…car su uso en muestras de tamaño pequeño. Sobre este objetivo descansa el desarrollo de la primera parte del siguiente capítulo.

Capítulo 3

Inferencia Indirecta y Restricciones Estocásticas

3.1. Introducción

3.2. La estimación SR

3.3. Ejercicio de Monte Carlo sobre el método SR

- 3.3.1 Propiedades del experimento de Monte Carlo
- 3.3.2 Sesgo de los estimadores de la varianza

3.4. Inferencia Indirecta bajo Restricciones Estocásticas

- 3.4.1. La estimación I.I.
- 3.4.2. La estimación IISR
- 3.4.3. Contraste de validez de las restricciones
- 3.4.4. Monte Carlo sobre la estimación IISR

3.5. Inferencia Indirecta y parámetros estocásticos

3.1 Introducción

En éste capítulo se presentan las aportaciones teóricas básicas de la tesis. En primer lugar se discute la aproximación …nita de la varianza del estimador de Mínimos Cuadrados no Lineales bajo Restricciones Estocásticas (SR) en un contexto más natural para muestras de tamaño pequeño. Esta discusión da lugar a que bajo un supuesto particular sobre la varianza de la restricción estocástica, cuando $\star$ es pequeño, se sugiera una varianza aproximada para el estimador SR en muestras …nitas que determina una ganancia de e…ciencia respecto del estimador que no tiene en cuenta las restricciones estocásticas. Este resultado contradice el resultado descrito en el tema anterior en el caso de un modelo lineal (Resultado 0) según el cuál la inclusión de restricciones estocásticas no genera ganancias de e…ciencia respecto de la estimación NLS en la aproximación de la varianza para muestras …nitas que se extrae de la teoría asintótica tradicional. Por tanto, en este marco, la inclusión de las restricciones estocásticas resulta irrelevante y no aporta ninguna ventaja tenerlas en cuenta en la estimación. Puesto que las propiedades de la distribución aproximada del estimador SR bajo las consideraciones generales del análisis asintótico son las mismas que la del estimador NLS, el interés de la metodología de las restricciones estocásticas se reduce al caso de los resultados exactos para $\star$ …nito que se obtienen cuando se supone normalidad en el término de error del modelo, como se planteó originalmente en Theil y Goldberger (1963). El supuesto sobre el que descansa el resultado mencionado está asociado al comportamiento de la varianza de la restricción estocástica que se incluye en la estimación y su interpretación es que la información sobre el parámetro no decrece con el tamaño muestral. Este supuesto permite desarrollar la discusión en términos teóricos y recuperar la utilidad de la inclusión de las restricciones estocásticas para aportar ganancias de e…ciencia mas allá del marco de las distribuciones exactas para muestras …nitas.

La segunda cuestión de interés que se aporta en este capítulo señala que la varianza aproximada del estimador SR para muestras …nitas es una mejor aproximación a la varianza verdadera del estimador SR que la varianza aproximada que no tiene en cuenta las restricciones estocásticas. Este segundo resultado se comprueba mediante un ejercicio de Monte Carlo realizado sobre la estimación de un modelo dinámico y constituye una evidencia a favor de sostener la validez del supuesto necesario para garantizar el primer resultado. En el experimento de Monte Carlo, el modelo se estima teniendo en cuenta las restricciones estocásticas y se compara la varianza resultante del estimador con las que surgen de los dos enfoques (el clásico de la teoría asintótica y el que aquí se propone como alternativa). El resultado es que es una mejor aproximación a la verdadera varianza del estimador SR, la varianza que se obtiene teniendo en cuenta las restricciones estocásticas que la que no las tiene en cuenta, y por tanto, se justi…ca la inclusión del supuesto que permite obtener una varianza distinta para el estimador SR y para el estimador NLS.

En tercer lugar, en este capítulo, una vez validada la inclusión de restricciones estocásticas en la estimación, se construye un nuevo estimador que combina el principio de la estimación por simulación con las restricciones estocásticas. Esta metodología, que se denomina, Inferencia Indirecta bajo Restricciones Estocásticas (IISR), refuerza y extiende el principal resultado – que señala el interés de rescatar la metodología de las restricciones estocásticas sin suponer normalidad en el error ni $\star$ …nito – en la medida en la que describe cómo las restricciones estocásticas pueden introducirse en la función criterio del método de Inferencia Indirecta. Adicionalmente, una vez descrito el estimador IISR, se estudian sus propiedades y se comprueba que es más e…ciente que el estimador en el que se inspira, es decir, el estimador I.I. Un argumento que podría justi…car adicionalmente el interés de la nueva metodología de IISR descansa en el hecho de que dicha estimación constituye un instrumento para compensar las pérdidas de e…ciencia de los métodos de estimación basados en la simulación respecto de los métodos en los cuales se inspiran (véase en el Capítulo 2, la comparación de las propiedades de los métodos GMM y MSM, por ejemplo) generada por la necesidad de llevar a cabo simulaciones para calcular las estimaciones.

En relación con la discusión que se plantea inicialmente sobre la aproximación para muestras

…nitas de la varianza de un estimador cualquiera en presencia de restricciones estocásticas, el resultado que se obtiene descansa en la introducción de un supuesto que puede considerarse como más natural en el contexto de muestras de tamaño reducido al que se pretende extender el resultado asintótico exacto. Por propia construcción, los resultados asintóticos son precisos y se basan en la teoría estadística y en las herramientas analíticas de la convergencia en probabilidad y en distribución. Cuando no se supone normalidad en el término de error del modelo, los resultados exactos del análisis asintótico son una herramienta de gran utilidad para deducir a partir de ellos las distribuciones aproximadas para muestras de tamaño …nito, que serán buenas aproximaciones a las distribuciones verdaderas y desconocidas si el tamaño de la muestra es su…cientemente grande. En muchos casos el tamaño muestral no es demasiado grande y algunos resultados que se desprenden de la aplicación del análisis asintótico convencional son discutibles puesto que las condiciones del análisis empírico di…eren sustancialmente de aquellas que se requieren para sostener teóricamente dichos resultados. En esos casos, la distribución aproximada que sugiere la teoría asintótica para muestras de tamaño …nito, derivada del análisis asintótico y por tanto basada en los resultados de convergencia que se encuentran cuando el tamaño muestral tiende a in…nito, podrían no ser las aproximaciones más adecuadas.

Alternativamente, podrían justi…carse otras distribuciones basadas fundamentalmente en el análisis asintótico pero también en algunos supuestos particulares más acordes con la limitación de un tamaño muestral reducido. Este es precisamente el caso que se plantea en relación a la distribución aproximada que surge del análisis asintótico convencional cuando el estimador considerado se obtiene bajo restricciones estocásticas. Como se desarrolla más adelante, en el contexto estándar de aplicación de la teoría asintótica, la inclusión de las restricciones estocásticas en la estimación resulta irrelevante, a pesar de que para muestras …nitas y suponiendo normalidad existe una ganancia de e…ciencia. Por tanto, desde la óptica del análisis asintótico no tiene sentido considerar dichas restricciones y se desprecia su uso puesto que no aporta ninguna ventaja en la estimación. La validez de este resultado que se obtiene de la teoría asintótica estará sujeta al tamaño de la muestra. Así, si fuera su…cientemente grande, entonces daría lugar a una buena aproximación a la verdadera distribución del estimador. La intuición en la que se apoya este resultado es que a medida que aumenta el tamaño muestral a partir de un tamaño su…cientemente alto, no aumente la cantidad de información asociada a la restricción estocástica. Este hecho efectivamente tiene sentido y puede resultar aceptable para justi…car que sea irrelevante la inclusión de información a priori si la muestra es su…cientemente grande. Sin embargo, si el tamaño muestral es pequeño, la información a priori sobre el parámetro sí es útil. Será necesario por tanto incluir este hecho formalmente en el análisis de tal manera que dé lugar a una distribución aproximada en la que no decrezca la ponderación de la información a priori con el tamaño muestral. Técnicamente, la manera de incorporar esta idea es considerando que la varianza asociada a la restricción estocástica – en la que se parametriza la información a priori – depende negativamente del tamaño muestral. Este supuesto es consistente con la idea de que la información a priori no se hace despreciable con el tamaño muestral, puesto que si la varianza depende negativamente de dicho tamaño muestral, efectivamente, cuando dicho tamaño aumenta, la información a priori está mas cercana al valor esperado de la misma que es precisamente el parámetro a estimar. Esta cuestión se cubrirá en detalle en la primera parte de éste capítulo.

Mediante los dos resultados mencionados se pretende justi…car el interés en el uso de la información a priori modelizándola a partir de restricciones estocásticas en el caso de un modelo no lineal. El primero de éstos resultados, en adelante Resultado 1, sostiene que para $\star$ …nito y sin suponer normalidad en el error, bajo un supuesto especí…co sobre la varianza de la restricción estocástica, el estimador que tiene en cuenta las restricciones estocásticas es más e…ciente que el que no las tiene en cuenta. Del segundo de los resultados, Resultado 2, se justi…ca mediante un experimento de Monte Carlo, que es una mejor aproximación de la varianza del estimador del parámetro con restricciones estocásticas, la varianza aproximada del estimador calculada teniendo en cuenta las restricciones estocásticas que la varianza calculada sin tener en cuenta dichas restricciones. Ambos resultados justi…can el uso de información a priori en la estimación puesto que por una parte aportan ganancias de e…ciencia y por otra es más cercana a la verdadera varianza del estimador.

Por tanto, las conclusiones que se extraen de la teoría asintótica convencional para describir las propiedades de la estimación que usa restricciones estocásticas no son las más acertadas para describir las propiedades de dichos estimadores. El Resultado 1 relativo a la ganancia de e…ciencia se comprueba teóricamente a partir del supuesto particular mencionado sobre el comportamiento de la varianza de la restricción. Además, se comprueba este resultado mediante un ejercicio Monte Carlo basado en la estimación de un modelo univariante sobre el que se considera la hipótesis de que no existe autocorrelación. Esta hipótesis de partida se considera como información a priori sobre los parámetros del modelo y puede surgir, por ejemplo, porque la teoría económica así lo sugiere para el modelo concreto que se considera. Dicha información a priori se introduce en la estimación mediante una ecuación estocástica, en la que un determinado valor observado del coe…ciente del error retardado se expresa como el parámetro a estimar mas un término de error con varianza determinada. El modelo se estima por el método SR, llevándose a cabo un número elevado de replicaciones con el …n de obtener empíricamente una buena aproximación de la varianza de los estimadores – la varianza verdadera –. Una vez llevadas a cabo las replicaciones y estimaciones del modelo un número elevado de veces utilizando la información a priori sobre el parámetro, es decir, por el método SR, se calcula la varianza del estimador. Finalmente, se compara la varianza obtenida con las aproximaciones que sugieren la teoría asintótica clásica y la alternativa que aquí se propone. Al medir la proximidad de ambas a la verdadera se obtiene que la aproximación que incorpora la información a priori es mejor que la aproximación …nita de la varianza que surge de la teoría asintótica. Además se observa que, como predice el resultado teórico, la varianza del estimador SR es menor que la del estimador NLS. Los resultados que se obtienen del Monte Carlo, por tanto, justi…can el uso de información a priori en la estimación, especialmente si la muestra es de tamaño pequeño, lo que resulta habitual en muchos trabajos empíricos.

La tercera cuestión que se aborda en este capítulo es la descripción del método de estimación que extiende el principio de las restricciones estocásticas al ámbito de la metodología I.I. Esta combinación de metodologías es aplicable a toda la familia de estimadores basados en la simulación y que fueron presentados en el capítulo anterior. En particular tal combinación se desarrolla tomando como referencia el método I.I., por ser éste el más general y que recoge a muchos de los anteriores como casos particulares. La inclusión de restricciones estocásticas en la inferencia indirecta además de extender el uso de la información a priori a las potentes técnicas de estimación e...caces ante la presencia de funciones criterio de difícil tratabilidad, es particularmente interesante por la ventaja que representa la información a priori en los métodos basados en la simulación. Tal y como se ilustró en el desarrollo del capítulo anterior, si bien los métodos basados en la simulación aportan soluciones prácticas en aquellos casos en los que resulta complicado extraer los estimadores de la optimización de la función de verosimilitud, el uso de dichos métodos normalmente trae consigo asociada la pérdida de e...ciencia si se le compara con el método en el cual se inspira. Así, por ejemplo el estimador GMM es más e...ciente que el estimador MSM, debido a las simulaciones. Puesto que la utilización de información a priori da lugar a estimadores con menor varianza, existen incentivos a combinar la información a priori con la estimación por simulación para compensar la pérdida de e...ciencias asociadas a la presencia de simulaciones y así ampliar las ventajas de su aplicación.

En la parte ...nal del capítulo se aborda la cuestión de la estimación de parámetros estocásticos en el contexto analítico de la metodología I.I Por tanto, y como una cuestión metodológicamente cercana, aunque conceptualmente bien diferenciada del tópico tratado en este capítulo, también se aborda la estimación de parámetros estocásticos mediante el método I.I. En el siguiente capítulo, al construir ejemplos para ilustrar la metodología sugerida, se describe y se estima un modelo en el que concurren la existencia de información a priori con variabilidad estocástica de algunos parámetros.

3.2 La estimación SR

En el Capítulo 2 se de…nió el estimador de Mínimos Cuadrados no Lineales bajo Restricciones Estocásticas (SR) y se establecieron sus propiedades asintóticas. Como resultado de dicho análisis se abrió un espacio para discutir la utilidad de incluir o no las restricciones estocásticas en la estimación a partir de la aproximación para muestras …nitas de la varianza del estimador. A continuación se desarrolla en detalle tal discusión a partir de un modelo no lineal indicándose las propiedades de los estimadores NLS y SR. En ambos casos, sin suponer normalidad en el término de error, se determinan sus propiedades asintóticas y …nalmente se deducen las distribuciones aproximadas para muestras …nitas en primer lugar, desde el análisis asintótico clásico y en segundo lugar bajo un supuesto particular, pero más razonable para muestras de tamaño …nito, sobre el comportamiento de la varianza asociada a la restricción estocástica.

De los resultados se obtienen tres conclusiones: la primera es que si no se hace ningún supuesto particular sobre la varianza de la restricción estocástica – situación ésta que como se verá, efectivamente es solo razonable si $\star$ es un número muy alto y que inspira el análisis asintótico estándar – entonces la aproximación …nita de la varianza del estimador NLS es la misma que del estimador SR –. Por lo tanto, en éste contexto, la inclusión de información a priori es irrelevante desde el punto de vista de la estimación y de las propiedades del estimador que se obtiene.

La segunda conclusión es que bajo un supuesto más natural con el tamaño muestral …nito – se denominará este supuesto como de no agotamiento de la información sobre el parámetro del cuál se tiene información a priori – la inclusión de restricciones estocásticas sí es relevante y da lugar a una distribución aproximada para muestras …nitas del estimador SR que es distinta que la del estimador NLS. En concreto, el estimador SR tiene menor varianza aproximada para muestras …nitas, sin suponer normalidad, que al estimador NLS. Es decir, tener en cuenta la información a priori en la estimación da lugar a un estimador que es más e…ciente que el estimador que no tiene en cuenta dicha información. Este resultado refuerza la idea de la conveniencia de utilizar dicha información cuando sea factible.

La tercera conclusión está asociada a la verosimilitud de la distribución alternativa que surge bajo el supuesto de no agotamiento de la información sobre el parámetro. En efecto, tal y como se comprueba mediante un ejercicio de Monte Carlo, para una muestra de tamaño pequeño, la varianza que se sugiere para el estimador en la que se tienen en cuenta las restricciones estocásticas es una mejor aproximación a la verdadera varianza del estimador que la varianza que se obtiene cuando no se tienen en cuenta las restricciones estocásticas. Este último resultado indica que el supuesto que se introduce de no agotamiento de la información sobre el parámetro podría ser un elemento conveniente para obtener una distribución aproximada más cercana a la verdadera que la que se sugeriría del análisis asintótico estándar – es decir, sin establecer ningún supuesto sobre el comportamiento de la varianza de la restricción.

Las tres conclusiones anteriores apuntan al objetivo de llamar la atención sobre el interés de incluir información a priori en la estimación mediante restricciones estocásticas, a pesar de que se podría considerar irrelevante por el hecho de que bajo el análisis asintótico habitual la distribución aproximada no aportar ganancias de e…ciencia respecto de las propiedades de la estimación que se aplica cuando no se usa dicha información. Además de aportar ganancias de e…ciencia en el método de estimación de partida, se comprueba que si el tamaño muestral es pequeño, al tener en cuenta las restricciones estocásticas, la varianza verdadera del estimador que se obtiene se aproxima mejor mediante la expresión que tiene en cuenta las restricciones estocásticas que mediante la expresión que no tiene en cuenta dichas restricciones.

A continuación se desarrolla la discusión anterior en términos formales para el caso de un modelo no lineal que se estima por los métodos NLS y SR. Se analizan sus propiedades asintóticas y se deducen las distribuciones aproximadas para muestras …nitas en general y bajo el supuesto particular de no agotamiento de la información a priori a lo largo de la muestra. Finalmente se comparan las aproximaciones de la varianza de ambas distribuciones y se presentan los resultados teóricos de este capítulo.

Se parte del modelo ($\star_1$) dado por la siguiente ecuación

$$\star_\star = \star(\star_\star \star\star) + \star_\star$$

El estimador NLS de $\star_0$ se de…ne como aquel valor que minimiza el criterio

$$^a{}_\star(\star) = \sum_{\star=1} [\star_\star \; ¡ \; \star(\star_\star;\star)]^2$$

Bajo las condiciones habituales de convergencia de $^a{}_\star(\star)\star\star$ para todo $\star$ y de identi…cación del parámetro $\star\star$ se obtiene de la ecuación (2.3), en la que se establecen las propiedades del estimador NLS, es decir,

$$\sqrt{\star}(\hat{\star}_{\star\,\star\star} \; ¡ \; \star_0) \; ¡^\star! \; \star(0\star\star^{¡1}\star\,\star^{¡1})$$

siendo $\star$ e $\star$ tales que

i) $¡\frac{1}{\star}\left[\frac{\star^2\,{}^a{}_\star}{\star\star\star\star^0}(\star_0)\right] \; ¡^\star! \; \star$ y existe $\star^{¡1}$ y

ii) $\frac{1}{\sqrt{\star}}\frac{\star\,{}^a{}_\star}{\star\star}(\star_0) \; ¡^\star! \; \star(0\star\star)$

Llamando $\star_1 = \frac{\star\star}{\star\star}$ – vector de tamaño $\star$x1 – se tiene

i) $\frac{1}{\star}\left[\frac{\star^2\,{}^a{}_\star}{\star\star\star\star^0}(\star_0)\right] = \frac{\star_1^0\star_1}{\star}$ y

ii) $\frac{1}{\sqrt{\star}}\frac{\star\,{}^a{}_\star}{\star\star}(\star_0) = \frac{\star_1^0\star}{\star}\star$

Por tanto, la distribución asintótica del estimador NLS para el modelo planteado viene dada por la expresión:

$$\sqrt{\star}(\hat{\star}_{\star\,\star\star} \; ¡ \; \star_0) \; ¡^\star! \; \star\left(0\star\star_\star^2\star\lim\left[\star_1^0\star_1\star\star\right]^{¡1}\right) \tag{3.1}$$

Es inmediato comprobar que la distribución aproximada para una muestra de tamaño ...nito que se obtiene de la anterior distribución asintótica es

$$\hat{\star}_{\star\star\star} \frac{1}{4} \star \left(\star_0 \star\star^2_\star \left[\star_1^0 \star_1 \right]^{-1} \right) \tag{3.2}$$

Supongamos a continuación que se dispone de información a priori sobre un conjunto de parámetros de ⋆ y que dicha información se parametriza en forma de restricciones estocásticas. Sea ⋆ el número de restricciones estocásticas sobre ⋆ que se introducen en el modelo, siendo ⋆⋆ ⋆⋆De esta forma, las restricciones estocásticas sobre los parámetros vendrán dadas por la expresión $\star = \star(\star) + \star\star$ siendo $\star \gg \star\ (0\star\star^2_\star\star_\star)$ y ⋆ independiente de ⋆. El modelo resultante se estima por SR, método este descrito en el capítulo anterior y que en de...nitiva consiste en estimar por mínimos cuadrados no lineales teniendo en cuenta la nueva ecuación asociada a la información a priori. Siguiendo la De...nición 4 del capítulo anterior, el nuevo modelo que se estima, está dado por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \star \\ \star \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \star(\star\star\star) \\ \star(\star) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \star \\ \star \end{bmatrix}$$

Agrupando las variables se tiene,

$$\star^+ = \star^+(\star\star\star) + \star^+$$

siendo la varianza del error

$$\star(\star^+) = \begin{bmatrix} \star^2_\star\star_\star & 0 \\ 0 & \star^2_\star\star_\star \end{bmatrix} = -$$

Puesto que se trata de un modelo heteroscedástico, es necesario transformarlo premultiplicándolo por la matriz ⋆ que cumple ⋆⋆ ^{0} = - ¡ ^{1}⋆El modelo resultante es

$$\star = \star^1(\star\star\star) + \star$$

siendo ahora la varianza de ⋆ la matriz identidad de orden ⋆ +⋆⋆Se introduce notación adicional con el …n de describir las propiedades asintóticas del estimador SR. Sea $\star^1 = \frac{\star\star^1}{\star\star}\star\star_1 = \frac{\star\star}{\star\star}$ y $\star = \frac{\star\star(\star)}{\star\star}$⋆Puesto que $\star^1 = \star\frac{\star\star^+}{\star\star} = [\star\star_1\star\star]^0$⋆es fácil comprobar que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\star}\star^{1 0}\star^1 &= (\frac{1}{\star}\star^{+0}\star^0\star\star^+) \\ &= \frac{1}{\star}\left([\star_1^0\star^0]\star^0\star\begin{bmatrix}\star_1 \\ \star\end{bmatrix}\right) \\ &= \left(\frac{\star_1^0\star_1}{\star}\frac{1}{\star_\star^2} + \frac{\star^0\star}{\star}\frac{1}{\star_\star^2}\right) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Para analizar las propiedades asintóticas del estimador SR se utiliza la expresión (2.3) para un modelo general no lineal, es decir, $\sqrt{\star}(\hat{\star} - \star_0) \overset{\dagger}{!} \star(0\star\star^{-1})$⋆En el caso que se estudia se tiene

$$\begin{aligned} \star &= \star\lim\left\{-\frac{1}{\star}\left.\frac{\star^2 a_\star}{\star\star\star\star^0}(\star_0)\right\}\right. \\ &= \star\lim\left\{\frac{1}{\star}\star^{1 0}\star^1\right\} \end{aligned}$$

Sustituyendo (3.3) en la anterior expresión, se obtiene

$$\star = \star\lim\left(\frac{1}{\star}\frac{\star_1^0\star_1}{\star_\star^2} + \frac{1}{\star}\frac{\star^0\star}{\star_\star^2}\right)$$

y por tanto,

$$\sqrt{\star}\,(\hat{\star}_{\star\star} - \star_0) \xrightarrow{\star} \star\left(0{,}\ \star\star \lim\left(\frac{1}{\star}\frac{\star_1'\star_1}{\star_\star^2} + \frac{1}{\star}\frac{\star'\star}{\star_\star^2}\right)^{-1}\right) \qquad (3.4)$$

Llegados a éste punto la discusión que se plantea consiste en la comparación de las distribuciones asintóticas de (3.1) y (3.4) y de las distribuciones aproximadas que a partir de ellas se pueden deducir en dos escenarios distintos, determinados por la presencia o no de un supuesto clave y razonable en un contexto de muestras finitas sobre la varianza de $\star$.

Si no se supone normalidad en el término de error del modelo y bajo los supuestos del análisis asintótico estándar, la distribución aproximada del estimador SR para muestras finitas es la misma que la del estimador NLS, como ya se indicó en el Resultado 0 para el caso en el que las restricciones estocásticas son lineales. La razón es que $\star_\star^2$ es constante, por lo que $\star\lim\left(\frac{1}{\star}\frac{\star'\star}{\star_\star^2}\right) = 0$ y por tanto $\star^{-1} = \star_\star^2 \star\lim\left[\frac{1}{\star}\star_1'\star_1\right]^{-1}$ $\star$En éste caso, la aproximación de la distribución que surge a partir de (3.4) para el estimador SR es

$$\hat{\star}_{\star\star} \approx \star\left(\star_0, \star_\star^2(\star_1'\star_1)^{-1}\right)$$

que coincide con la del estimador $\hat{\star}_{\star\star\star}$ de la expresión (3.2).

La idea que sostiene este resultado es la de que a medida que aumenta el tamaño muestral la información a priori pierde importancia. Por esta razón al aumentar $\star$ es como si dicha información se ponderara por una varianza cada vez mayor – véase que el elemento $\star'\star$ asociado a las restricciones estocásticas desaparece de la varianza cuando $\star$ tiende a infinito. El resultado que se obtiene es que la aproximación para muestras finitas de la varianza del estimador cuando se tienen en cuenta las restricciones estocásticas es la misma que cuando no se tienen en cuenta dichas restricciones. Por tanto, resulta irrelevante incluirlas.

Sin embargo, el anterior resultado no es satisfactorio cuando el tamaño muestral es reducido, a pesar de los anteriores resultados obtenidos en el contexto asintótico y el aproximado. Sería interesante investigar sobre alguna condición que permitiera recuperar el interés en el uso de la información a priori para muestras de tamaño …nito sin suponer normalidad en el término de error del modelo. Se trataría de diseñar un escenario en el que se mantuviera viva la información a pesar de que aumentara el tamaño muestral, lo cuál sería especialmente oportuno para ilustrar la utilidad de la información a priori cuando el tamaño muestral es pequeño. Con ésta intención surge el segundo escenario, de…nido por el siguiente supuesto.

Supuesto 1 (S1). La información a priori no se agota a lo largo de la muestra. Técnicamente, este supuesto consiste en considerar que la varianza de la perturbación asociada a la restricción estocástica es $\star^{¤2}_{\star} = \star^{2}_{\star}\star\star\star$La interpretación de este supuesto consiste en asignar menor varianza a la restricción estocástica a medida que aumenta el tamaño de la muestra. Esto se interpreta como que la información sobre el parámetro aumenta con el tamaño muestral, lo cual resulta razonable cuando el tamaño muestral es pequeño.

Resultado 1. Bajo S1, sin suponer normalidad en el término de error y bajo los supuestos del análisis asintótico estándar, el estimador SR es más e…ciente asintóticamente que el estimador NLS.

Prueba. Bajo S1, el elemento de la varianza del estimador asociado a la restricción estocástica es

$$\frac{\star`\star}{\star\star^{¤2}_{\star}} = \frac{\star`\star}{\star\star^{2}_{\star}\star\star} = \frac{\star`\star}{\star^{2}_{\star}}$$

Por otra parte, del análisis asintótico estándar, se tiene

$$\star\lim\left(\frac{1}{\star}\frac{\star_1^0\star_1}{\star^2_\star}+\frac{1}{\star}\frac{\star^0\star}{\star^{¤2}_\star}\right) = \star\lim\left(\frac{1}{\star}\frac{\star_1^0\star_1}{\star^2_\star}\right)+\frac{\star^0\star}{\star^2_\star}$$

Así, la distribución asintótica del estimador $\tilde{\star}_{\star\star}$ vendría dada por

$$\sqrt{\star}\,(\hat{\star}_{\star\star} - \star_0) \to \star\left(0, \star\,\lim\left(\frac{1}{\star}\frac{\star_1'\star_1}{\star_\star^2} + \frac{1}{\star}\frac{\star'\star}{\star_\star^{*2}}\right)^{-1}\right)$$

Como corolario del Resultado 1 se tiene que bajo el supuesto incorporado, las ganancias de eficiencia obtenidas asintóticamente se extienden al contexto de muestras finitas. En efecto, la distribución aproximada del estimador SR que se obtiene a partir de la anterior distribución asintótica es

$$\hat{\star}_{\star\star} \approx \star\left(\star_0, \left(\frac{\star_1'\star_1}{\star_\star^2} + \frac{\star'\star}{\star_\star^{*2}}\right)^{-1}\right)$$

que coincide con la distribución exacta del estimador lineal cuando se supone normalidad del error. (véase en el Capítulo 1 el resultado de Theil y Goldberger para el caso lineal, teniendo en cuenta que $\star_1$ sería la matriz de regresores $\star$).

Por otra parte, la distribución aproximada para muestras finitas del estimador NLS cuando no se supone normalidad del término de error, como ya se indicó en la expresión (3.2) es

$$\hat{\star}_{\star\,\star\star} \approx \star\left(\star_0, \star_\star^2\left[\star_1'\star_1\right]^{-1}\right)$$

De la comparación de las varianzas asociadas a las distribuciones aproximadas de los estimadores SR y NLS se tiene que

$$\left\{\left(\frac{\star_1'\star_1}{\star_\star^2} + \frac{\star'\star}{\star_\star^{*2}}\right)\right\}^{-1} - \left\{\frac{\star_1'\star_1}{\star_\star^2}\right\}^{-1}$$

es una matriz definida negativa. Por tanto, el estimador SR es más eficiente que el estimador NLS. Es inmediato comprobar que se obtiene el mismo resultado asintóticamente bajo S1, puesto que

$$\left\{ \star \lim \left(\frac{1}{\star} \frac{\star_1'\star_1}{\star_\star^2} \right) + \frac{\star'\star}{\star_\star^2} \right\}^{-1} - \left\{ \star \lim \frac{1}{\star} \frac{\star_1'\star_1}{\star_\star^2} \right\}^{-1}$$

también es definida negativa.

Como conclusión, puede establecerse que bajo los supuestos habituales del análisis asintótico estándar y sin ningún supuesto adicional sobre la varianza de la restricción estocástica, la inclusión de información a priori es irrelevante, puesto que la distribución aproximada que surge es la misma que la del estimador que no considera la existencia de dichas restricciones estocásticas (Resultado 0). Por tanto el estimador SR coincide con el estimador NLS e introducir restricciones estocásticas en la estimación no lineal resulta irrelevante – también para el caso lineal si no se supone normalidad en el término de error –. El anterior resultado descansa en el hecho de que la varianza de la restricción estocástica aumenta con el tamaño muestral y la información pierde importancia a mediada que la muestra crece. Este supuesto podría no ser lo suficientemente descriptivo del comportamiento del estadístico $\frac{\star'\star}{\star\star_\star^2}$ cuando la muestra es de tamaño pequeño. Por tanto, las distribuciones aproximadas que se deducen del análisis asintótico podrían no ser las más cercanas a la verdadera distribución de los estimadores. Al suponer que la información asociada a las restricciones estocásticas se incrementa con $\star\star$lo que resulta más razonable para un $\star$ pequeño, se puede obtener un resultado (Resultado 1) más satisfactorio desde el punto de vista del interés del uso de restricciones estocásticas. En efecto, se demuestra que bajo este supuesto (S1), la estimación sujeta a restricciones estocásticas trae consigo ganancias de eficiencia respecto de la estimación por mínimos cuadrados no lineales y se conservan las ventajas de esta metodología vistas en el caso lineal con normalidad en el término de error.

Resultaría interesante obtener alguna evidencia que permita validar el anterior resultado teórico. Este objetivo se aborda en la siguiente sección, en la que se pretende evaluar si efectivamente el comportamiento de la varianza verdadera del estimador SR se describe mejor mediante la varianza aproximada de $\tilde{\star}_{\star\star\star}$ como sería deseable, o mediante la varianza aproximada del estimador $\tilde{\star}_{\star\star\star\star}$

3.3 Ejercicio de Monte Carlo sobre el método SR

A continuación se desarrolla un ejercicio de Monte Carlo basado en un modelo no lineal cuyo objetivo evaluar la validez del supuesto S1, como condición del Resultado 1 de la sección anterior. De manera concreta, se desea comprobar el siguiente resultado.

Resultado 2. En una muestra de tamaño pequeño, la expresión de la varianza del estimador en la que se tiene en cuenta las restricciones estocásticas es una mejor aproximación a la varianza verdadera del estimador SR que la expresión en la que no se tienen en cuenta dichas restricciones. Es decir, la distribución aproximada que se obtiene del estimador SR bajo S1 es mejor que la que se obtiene sin tener en cuenta dicho supuesto.

La comprobación de este resultado se lleva a cabo mediante un ejercicio de Monte Carlo realizado sobre un modelo no lineal. La idea es estimar dicho modelo mediante el método SR y obtener una distribución del Monte Carlo de las estimaciones. De esta manera se obtendría una medida de la verdadera varianza del estimador SR. A continuación se comprobaría cuál de las varianzas aproximadas (la del estimador SR o la del estimador NLS) es una mejor aproximación a la varianza del Monte Carlo. Para sostener este resultado no se ha modelizado la varianza del término de error asociado a la restricción estocástica de ninguna manera particular en relación con $\star\star$ con el …n de obtener resultados objetivos sobre el comportamiento de la varianza del estimador.

El modelo que se considera viene dado por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \star_\star &= \star\star_\star + \star_\star \\ \star_\star &= \star\star_{\star\,¡1} + \star_\star \end{aligned}$$

siendo $\star = 0$ y por tanto, se trata de un modelo en el que no existe autocorrelación. Se supone que se dispone de esta información, por ejemplo, porque la aporta la teoría subyacente o bien otras estimaciones de modelos parecidos. Esta información a priori se incorporará en forma de restricciones estocásticas en la estimación SR, mientras en la estimación NLS se omitirá. De las anteriores expresiones se obtiene la siguiente expresión para el modelo considerado,

$$\star_\star = \star_1 \star_{\star ¡ 1} + \star_2 \star_\star + \star_3 \star_{\star ¡ 1} + \star_\star = \star^0_\star \star + \star_\star$$

siendo $\star_1 = \star$; $\star_2 = \star$ y por tanto $\star_3 =$ ¡ $\star\star\star$ Llamando $\star = (\star\star\star)^0$ a los parámetros del modelo original, entonces $\star = \star(\star)$ y puede escribirse

$$\star_\star = \star^0_\star \star(\star) + \star_\star \tag{3.5}$$

que es un modelo no lineal en $\star\star$

El estimador $\tilde{\star}_{\star\star}$ es el que se obtiene si en el modelo anterior se tiene en cuenta la restricción estocástica $\star^\star = \star\star\star + \star\star$ siendo $\star$ » $\star\ (0\star\star^2_\star)\star\star = (1\star 0\star 0)$ y $\star^\star$ una observación de $\star\star$ procedente, por ejemplo de otras estimaciones del modelo y en el caso del Monte Carlo, de simulaciones procedentes de una distribución con esperanza cero y varianza predeterminada. De la ecuación (3.5) y teniendo en cuenta la restricción estocástica, se tiene que el modelo completo a estimar es:

$$\begin{bmatrix} \star \\ \star^\star \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \star \\ \star \end{bmatrix} \star(\star) + \begin{bmatrix} \star \\ \star \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

En éste caso se trata una única restricción estocástica y de tipo lineal. El anterior modelo puede escribirse como

$$\star^+ = \star^+ \star(\star) + \star^+$$

siendo la varianza del error de este modelo

$$\star(\star^{+}) = \begin{bmatrix} \star^2_{\star}\star_{\star} & 0 \\ 0 & \star^2_{\star} \end{bmatrix} = -$$

Puesto que no se trata de un modelo con errores homoscedásticos, lo transformamos mediante la matriz $\star$ adecuada que veri…ca que $\star\star^{0} = -^{i1}$⋆El modelo transformado en el que las variables son las del anterior modelo multiplicadas por $\star$ es

$$\star^{¤} = \star^{¤}\star(\star) + \star^{¤} \tag{3.7}$$

siendo la $\star(\star^{¤}) = \star_{\star+1}$⋆El estimador $\tilde{\star}_{\star\star}$⋆se de…ne como

$$\tilde{\star}_{\star\star} = \arg\min_{\star}(\star^{¤0}\star^{¤}) \tag{3.8}$$

siendo

$$\begin{aligned} \star^{¤0}\star^{¤} &= (\star\star^{+})^{0}(\star\star^{+}) = [\star^{0}\quad \star^{0}]-^{i1}\begin{bmatrix} \star \\ \star \end{bmatrix} \\ &= f\frac{\star^{0}\star}{\star^2_{\star}} + \frac{\star^2}{\star^2_{\star}}g \end{aligned}$$

De los resultados establecidos en la sección anterior sobre las propiedades del estimador SR es fácil comprobar que para el caso particular del modelo que se considera en ésta sección, dado por la ecuación (3.6), la distribución aproximada que se sugiere, en la que se tienen en cuenta las restricciones estocásticas es

$$\tilde{\star}_{\star\star} \;¼\star\; \star\star \tilde{A}\cdot\mu\frac{\star\star}{\star\star}¶_0\mu \star\lim\frac{\star^{0}\star}{\star^2_{\star}} + \frac{\star^{0}\star}{\star^2_{\star}}¶\mu\frac{\star\star}{\star\star}¶_{,}{}^{i1}! \tag{3.9}$$

Nótese que la varianza de esta distribución contienen el elemento $\star^{0}\star\star\star^2_{\star}$ asociado a las restricciones estocásticas y que este resultado se obtiene bajo el supuesto de no agotamiento de la información – lo que en de…nitiva debe interpretarse como que la varianza de la restricción no es demasiado grande – Esta distribución se calculará más adelante y será una de las referencias a comparar con la distribución que surja de las replicaciones del Monte Carlo.

La estimación alternativa que se considera es la que no tiene en cuenta la información a priori y por tanto tampoco las restricciones estocásticas. De los resultados establecidos en la sección anterior sobre las propiedades del estimador NLS es fácil comprobar que para el caso del modelo que se considera en ésta sección, dado por la ecuación (3.5), la distribución aproximada que se sugiere, en la que no se tienen en cuenta las restricciones estocásticas es

$$\tilde{\star}_{\star\,\star\star} \approx \star \; \star\star \left(\left(\frac{\star\star(\star^{¤})}{\star\star} \right) \star \lim \frac{\star\,'\star}{\star^2_{\star}} \left(\frac{\star\star(\star^{¤})}{\star\star} \right)' \right)^{-1} \tag{3.10}$$

Al igual que para la primera alternativa, ésta distribución se calculará más adelante y será la segunda referencia a comparar con la distribución que surja de las replicaciones del Monte Carlo.

3.3.1 Propiedades del experimento de Monte Carlo

Con el …n de contrastar la validez de la hipótesis en la que se basa el resultado que se obtiene en la sección anterior se diseña un experimento de Monte Carlo cuyos resultados permiten responder favorablemente a la cuestión que se plantea y defender de manera más sólida el uso de la información a priori en los distintos métodos de estimación. En concreto, como se planteará formalmente en la siguiente sección del capítulo, en los métodos basados en la simulación.

En esta sección se describe el experimento de Monte Carlo llevado a cabo para determinar si es un mejor estimador de la varianza verdadera el estimador que tiene en cuenta las restricciones estocásticas, es decir, la que …gura en (3.9) o la que las ignora, es decir, la dada por (3.10).

En el desarrollo del experimento de Monte Carlo se han realizado $\star$ = 5000 replicaciones del modelo (3.7) y estimaciones del parámetro $\star$ tomando un tamaño muestral de $\star = 40\star$ y siguiendo los siguientes pasos:

1. Simulación de la variable exógena $\star$ que permanecerá constante a lo largo de cada una de las simulaciones y estimaciones del modelo. La variable $\star_\star$ sigue un proceso $\star_\star = 0\star 5\star_{\star ¡ 1} + \star_\star$ siendo $\star_\star$ » $\star(0\star 1)$ y $\star_0 = 0\star$

2. Simulación de las realizaciones de la variable $\star$ » $\star(0\star\star^2_\star)\star$ Se han generado tres muestras de $\star$ = 5000 observaciones cada una de ellas determinada por una $\star^2_\star$ distinta. El objetivo es utilizarlas alternativamente para comparar resultados en cada una de las $\star$ estimaciones del modelo. Las varianzas consideradas han sido $0\star 02\star 0\star 04$ y $0\star 06\star$ En los casos en los que las realizaciones daban lugar a valores mayores que uno en valor absoluto se han sustituido por los de otra realización proveniente de igual distribución. Denotaremos a cada una de las realizaciones de esta variable aleatoria como $\star^\star$; $\star = 1\star\star\star\star\star$.

3. Generación de los datos de la variable endógena $\star\star$

(i) En primer lugar se generan $\star$ vectores de tamaño $\star$ de la variable $\star$ a partir de una distribución i.i.d $\star(0\star 1)\star$ Se obtienen así los elementos $\star^\star_\star\star\star = 1\star\star\star\star$; $\star = 1\star\star\star\star$.

(ii) De los valores de $\star_\star$ obtenidos en el paso 1 y de los de $\star^\star_\star$ del paso 3(i) se obtiene $\star^\star_\star$ a partir de la ecuación $\star^\star_\star = \star\star_\star + \star^\star_\star$ siendo $\star = 1\star 5\star$ A partir de la relación entre $\star^2$ y la varianza del ruido y de la variable exógena, se justi…can los valores elegidos de los parámetros[1].

Es decir, en ésta etapa del experimento se generan $\star$ replicaciones del modelo verdadero en el que no existe autocorrelación. El verdadero parámetro es $\star_0 = (\star_0\star\star_0) = (0\star 1\star 5)\star$ El objetivo es estimar dicho modelo en la siguiente etapa incorporando la información a priori, que en este caso procede de los valores $\star^\star$ generados en el paso 2.

[1] En efecto, en el modelo considerado, es fácil comprobar que $\star^2 = \frac{\star^2\star^2_\star}{\star^2\star^2_\star + \star^2_\star}\star$Por otra parte, $\star^2_\star = \frac{1}{1 ¡ 0\star 5^2} = 1\star 33\star$ Por tanto, $\star^2$ ' $0\star 7$ que es un valor que surge en la práctica con frecuencia, lo que justi…ca los valores de los parámetros elegidos.

4. Estimación del parámetro ⋆⋆ A partir de las realizaciones obtenidas de $\star^{\star}_{\star}\star$ y de los datos disponibles de $\star_{\star}\star$ se estima el modelo $\star^{\star}_{\star} = \star^{\star 0}_{\star}\star(\star) + \star^{\star}_{\star}$ siendo $\star^{\star 0}_{\star} = (\star^{\star}_{\star\,¡\,1}\star\star_{\star}\star\star_{\star\,¡\,1})\star$ $\star(\star) = (\star\star\star\star\,¡\,\star\star)^{0}$ por el método SR. Se toma $\star^{\star}_{0} = \star_{0}\star$ Puesto que $\star = (\star\ \star)$ el modelo que se estima en cada una de las ⋆ replicaciones es

$$\star^{\star}_{\star} = \star_{1}\star^{\star}_{\star\,¡\,1} + \star_{2}\star_{\star}\ ¡\ \star_{1}\star_{2}\star_{\star\,¡\,1} + \star_{\star}$$

$$\star^{\star} = \star_{1} + \star$$

mediante la minimización de los residuos teniendo en cuenta las restricciones estocásticas y según se indica en la expresión (3.8).

Para completar el ejercicio se han llevado a cabo tres realizaciones del Monte Carlo cada uno de ellas determinada por una de las varianzas de ⋆ consideradas. Los resultados sobre la media y la varianza de las distribuciones obtenidas …guran en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1. Media, Varianza y Error Cuadrático Medio del Estimador SR (H = 5000)

	$\star^{2}_{\star}$					
	0⋆02		0⋆04		0⋆06	
	⋆	⋆	⋆	⋆	⋆	⋆
Media	1.499580	0.001056	1.4999353	-1.392e-05	1.500986	0.000873
Varianza	0.025580	0.011769	0.025772	0.016660	0.025591	0.018979
ECM	0.025580	0.011770	0.025772	0.016660	0.025592	0.018979

Se guardarán estos resultados como los verdaderos, con el …n de compararlos con la estimación de la varianza sugerida por el análisis asintótico convencional, lo que recoge la expresión (3.10) y con la que se sugiere tras la discusión llevada a cabo en la Sección 3.2, dada por la expresión (3.9).

3.3.2 Sesgo de los estimadores de la varianza

Para calcular el estimador de la varianza es necesario determinar el $\star \lim(\star^{0}\star\ \star\star)$ como función únicamente de los momentos $\star^{0}\star\star\star$ y $\star^{0}\star_{¡1}\star\star\star$ ya que $\star$ es la variable exógena que permanece …ja en el experimento. Es fácil ver que

$$\star \lim_{\star\,!\,1} (\star^{0}\star\ \star\star) = \star \begin{bmatrix} \star^{2}\star^{0}\star\star\star + \star^{2}_{\star} & \star\star^{0}\star_{¡1}\star\star & \star\star^{0}\star\star\star \\ & \star^{0}\star\star\star & \star^{0}\star_{¡1}\star\star \\ & & \star^{0}\star\star\star \end{bmatrix}$$

En la Tabla 3.2 se representan la estimación de la varianza aproximada $\star_1^{\c{}}(\tilde{\star}_{\star\star})$ que sugiere la teoría asintótica y que …gura en la expresión (3.10), y también, la estimación de la matriz de varianzas en la que se tienen en cuenta las restricciones estocásticas $\star_2(\grave{\star}_{\star\star})$, procedente de la expresión (3.9). Las expresiones de estas matrices de varianzas y covarianzas son

$$\star_1^{\c{}}(\tilde{\star}_{\star\star}) \quad ' \quad \left(\star^{0}\left(\frac{\star^{0}\star}{\star^{2}_{\star}}\right)\star\right)^{¡1}$$

$$\star_2(\grave{\star}_{\star\star}) \quad ' \quad \left(\star^{0}\left(\frac{\star^{0}\star}{\star^{2}_{\star}} + \frac{\star^{0}\star}{\star^{2}_{\star}}\right)\star\right)^{¡1}$$

y como se observa, $\star_2(\grave{\star}_{\star\star})$ depende de $\star^{2}_{\star}$. Recuérdese que el papel de las restricciones estocásticas en la estimación depende de la varianza que se le asigne a la distribución que recoge la información a priori.

Tabla 3.2. Matrices de Varianzas y Covarianzas de los Estimadores NLS y SR (H = 5000)

$\star_1^{\c{}}(\tilde{\star}_{\star\star\star})$		$\star_2(\grave{\star}_{\star\star})$					
I		II ($\star^2_\star$ = 0⋆02)		III $\star^2_\star$ = 0⋆04		IV $\star^2_\star$ = 0⋆06	
0.025000	-1.393e-19	0.011111	-6.191e-20	0.015384	-8.573e-20	0.017647	-9.834e-20
	0.025097		0.025097		0.025097		0.025097

La idea consiste en determinar cuál de las distribuciones aproximadas SR o NLS es la mejor, y por tanto cuál de las varianzas, se aproxima más a la verdadera, es decir, a la inferida del experimento del Monte Carlo. Para ellos se comparan los datos de la Tabla 3.2 (estimadores aproximados de las matrices de varianzas y covarianzas que se sugieren) con los de la Tabla 3.1 (verdadera matriz de varianzas y covarianzas). Los resultados de ésta comparación conducen a las siguiente conclusiones sobre la mejor estimación de la varianza de $\tilde{\star}_{\star\star}$:

i) La diferencia entre ambas estimaciones de la varianza depende inversamente de $\star_{\star}^{2}$. Este hecho indica que cuanto mas informativa es la restricción – es decir, cuanto menor es la varianza de la restricción estocástica que se incluye – peor es la estimación de la varianza que se obtiene cuando no se tiene en cuenta dicha restricción estocástica. Este es el resultado esperado teniendo en cuenta la expresión teórica de la varianza del estimador SR.

ii) La inclusión de las restricciones estocásticas en la estimación NLS supone una ganancia de e...ciencia en el estimador del parámetro $\star$ sobre el que se tiene información a priori. Este resultado se observa al comparar la aproximación de la varianza del estimador NLS (columnas I de la Tabla 3.2) con las restantes matrices de varianzas y covarianzas del estimador SR (columnas II, III y IV). De esta manera se obtiene una con...rmación mediante simulaciones del Resultado 2. Las cuanti...caciones de las ganancias de e...ciencia se encuentran entre el 32 % y el 56 % en función de la varianza preseleccionada para la información a priori, según puede medirse a partir de los datos de la Tabla 3.2.

iii) La aproximación de la varianza que se obtiene teniendo en cuenta las restricciones estocásticas se acerca más a la que resulta del experimento de Monte Carlo que la estimación de la varianza que no tiene en cuenta dichas restricciones. Es decir, la aproximación de la varianza que se obtiene incorporando las restricciones estocásticas es mejor que la aproximación de la varianza que no tiene en cuenta dichas restricciones, lo que permite comprobar el Resultado 2. Además este resultado, junto con (ii), dotan de cierta plausibilidad al supuesto (S1) utilizado para obtener dichos resultados

3.4 Inferencia Indirecta bajo Restricciones Estocásticas

Los métodos basados en la simulación descritos en el capítulo anterior como el Método de los Momentos Simulados, de Lee and Ingram (1991) y Du¢e and Singleton (1993), y el método de Inferencia Indirecta de Gourieroux et. al., (1993) y los casos particulares de Smith (1993) y Gallant and Tauchen (1994), proporcionan herramientas e…caces para solucionar los problemas de estimación en modelos no lineales asociados a la di…cultad en el tratamiento de las funciones de verosimilitud o de los momentos. Sin embargo, no aparece en la literatura una manera de hacer uso de información a priori en la implementación de éstos métodos. En esta sección se sugiere una manera de introducir la información a priori en la estimación por simulación, basada en la metodología de las restricciones estocásticas de Theil y Goldberger (1961), Shiller (1973) y Litterman (1986) y que por tanto constituye una aportación para la familia de estimadores basados en la simulación que los extiende al contexto de la estimación con restricciones estocásticas.

A continuación en esta sección se describe el estimador que se sugiere – Inferencia Indirecta bajo Restricciones Estocásticas (IISR) – y su distribución asintótica. Posteriormente se comparan sus propiedades con las del estimador en el cual se basa – Método de Inferencia Indirecta (II) – y se comprueba que la introducción de restricciones estocásticas trae consigo ganancias de e…ciencia. Finalmente se describen algunos de los casos de aplicabilidad del método propuesto y en el siguiente capítulo se desarrollan distintos ejemplos en los que se implementa el método IISR a la estimación de una tasa de depreciación endógena del stock de capital físico de una economía.

El análisis que se desarrolla a continuación se basa en el método Inferencia Indirecta (Gourieroux et. al., (1993)) ya que es el más general y proporciona un tratamiento sistemático de una amplia variedad de modelos no lineales que se pueden estimar por medio de la simulación. Si bien, el tratamiento de las restricciones estocásticas se podría utilizar en cualquiera de los métodos de estimación basados en la simulación.

3.4.1 La estimación I.I.

En ésta sección en primer lugar se repasa el método I.I. descrito inicialmente en el capítulo anterior. La aplicación de éste método requiere que se consideren dos modelos, el modelo original, que contiene los parámetros de interés $\star$ de dimensión $\star$ y el modelo auxiliar que contiene a las variables vinculadas en ecuaciones distintas a partir de otro parámetro $\star$ de dimensión $\star$ ¸ $\star\star$ Se supone que existe una relación entre ambos parámetros que se denota mediante $\star(\star)\star$Esta relación se puede estimar a partir de los datos muestrales y de los simulados a través de los estimadores $\tilde{\star}(\star)$ de $\star$ para un $\star$ dado si dichos estimadores son estimadores consistentes de aquella función. Sea ª$_\star(\star)$ el criterio que dará lugar en el modelo auxiliar a estimadores consistentes de la función vínculo introducida, $\star(\star)\star$Es decir, se de...ne el estimador $\hat{\star}$ como aquel valor

$$\hat{\star} = \arg\max_{\star} ª_\star(\star)$$

y por de...nición $\star(\star)$ es el límite en probabilidad de $\hat{\star}\star$Es decir, $\star(\star) = \star \lim[\arg\max_\star ª_\star(\star(\star))]\star$ La función ª$_\star(\star)$ es dos veces diferenciable, y se cumplen las siguiente propiedades:

$\star$) $\frac{1}{\sqrt{\star}} \frac{\star ª_\star(\star)}{\star\star}$ ¡*! $\star$ $(0\star\star)\star$

$\star\star$) $\frac{1}{\star} \frac{\star^2 ª_\star(\star)}{\star\star\star\star^0}$ ¡*! $\star$

siendo $\star$ y $\star$ matrices tales que existen sus inversas.

La función $\star(\star)$ es diferenciable respecto de $\star\star$ siendo $\star\star(\star)\star\star\star = \star_1$ una matriz $\star$x$\star$ de rango completo en un entorno del verdadero valor $\star_0\star$

Puede demostrarse que bajo condiciones estándar (véase Smith (1993), y Gourieroux et. al., (1993)), que

$$\sqrt{\star}(\hat{\star} ¡ \star_0) ¡^\star! \star (0\star©_1)$$

siendo ©$_1$ = ⋆ ¡ 1⋆⋆ ¡ 1⋆

En cuanto a la estimación de ⋆ cabe tener en cuenta que generalmente tendrá una forma desconocida, por lo que deberá ser estimada. Varias aproximaciones se sugieren como posibles para esta tarea. La primera de ellas se basa en que p1⋆ ⋆ª⋆(⋆)⋆⋆ puede considerarse como un vector de ⋆ momentos muestrales con esperanza cero y por tanto puede inferirse su varianza analíticamente. Otra posibilidad es extender el procedimiento semiparámetrico de Andrews y Monahan (1992). La idea sería regresar p1⋆ ⋆ª⋆(⋆)⋆⋆ a un vector Arma, y entonces estimar la matriz de varianzas y covarianzas de los residuos de manera no paramétrica (como por ejemplo en Newey and West (1987)). Otra posibilidad consistiría en estimar un VAR a partir de p1⋆ ⋆ª⋆(⋆)⋆⋆ lo su…cientemente largo de tal manera que los residuos resultantes se acerquen lo más posible a un ruido blanco (Den Haan, et. al. (1995)).

La estimación del parámetro ⋆ por el método I.I. se discute a continuación. Para ello es necesario considerar una matriz cuadrada y simétrica -$_1$⋆posiblemente dependiente de los datos pero independiente de ⋆⋆de orden ⋆, y de…nida positiva

Recordemos que el estimador de inferencia indirecta de ⋆⋆se de…ne como aquel valor ⋆̃⋆⋆ que cumple

$$\tilde{\star}_{\star\star} = \arg\min ©\ \star\ _1^0 -_1 \star\ _1\ ª \tag{3.11}$$

siendo ⋆ $_1$ = ⋆̂ ¡ P$_{\star=1}$ ⋆̃(⋆)⋆⋆. En cuanto a las propiedades asintóticas del estimador ⋆̃⋆⋆⋆tal y como se indicó en el capítulo anterior, bajo los supuestos habituales sobre ⋆̂ y ª⋆ (⋆) se tiene

$$\text{p—}\ \star\ (\tilde{\star}_{\star\star}\ ¡\ \star_0)\ ¡^{\star}!\ \star\ (0\star\star\ (-_1))$$

siendo

$$\star\ (-_1) = \text{i}\ 1 + \frac{1}{\star}\ ¢\ \text{h}\ \frac{\star\star^0}{\star\star}(\star_0) -_1 \frac{\star\star}{\star\star^0}(\star_0)\ \text{i}^{¡1}\ \frac{\star\star^0}{\star\star}(\star_0) -_1 ©_1^{¡1} -_1 \frac{\star\star}{\star\star^0}(\star_0)\ \text{h}\ \frac{\star\star^0}{\star\star}(\star_0) -_1 \frac{\star\star}{\star\star^0}(\star_0)\ \text{i}^{¡1}\ \star$$

Si además el número de simulaciones tiende a in…nito, y se elige la matriz óptima $-_1 = ©_1$, entonces la distribución aproximada de $\tilde{\star}_{\star\star}$ para un $\star$ su…cientemente grande es

$$\tilde{\star}_{\star\star} \text{¼} \star \left(\star\star\star^{\ i\,1}(\star\, {}^{0}_{1}©_1\star\,{}_1)^{\ i\,1}\right) \tag{3.12}$$

Puesto que $©_1 = \left(\frac{\star^{2\,a}\,1}{\star\star\star\star^0}\right)^{i\,1}\star_0\left(\frac{\star^2}{\star\star\star\star^0}\right)^{i\,1}\star$ y ${}^a{}_1$ es desconocida, en la práctica ${}^a{}_\star$ puede usarse en lugar de ${}^a{}_1$ y un estimador consistente de la varianza asintótica de $\hat{\star}$ en lugar de $\star_0\star$

3.4.2 La estimación IISR

A continuación se describe la modelización de la información a priori mediante las restricciones estocásticas en el marco de la Inferencia Indirecta. Seguidamente se discute el interés de su incorporación en la metodología I.I. desde el punto de vista de la e…ciencia. Se parte de la existencia de información a priori sobre los parámetros de interés $\star$. Esta información formalmente se puede hacer …gurar como un conjunto de $\star\star\ \star$ funciones de $\star\star\star(\star)$ diferenciables y tales que $\star\star\,\star\star\star = \star_2$ sea una matriz $\star x\star$ de rango completo en un entorno de $\star_0$. Las restricciones estocásticas sobre los parámetros vendrán dadas por las ecuaciones $\star(\star) = \star + \star\star$ siendo $\star$ el error cuya distribución $\star\ (0\star©_2^¤)$ es conocida e independiente de $\star$ el error del modelo original y $\star$ los valores concretos que contienen la información a priori disponible. Por otra parte, con el …n de justi…car la introducción de restricciones estocásticas en la estimación por inferencia indirecta se considera el siguiente supuesto sobe la varianza de las restricciones estocásticas, paralelo al supuesto S1.

<u>Supuesto 2</u>. (S2). La matriz de varianzas y covarianzas asociada a las restricciones estocásticas, $©_2^¤\star$ es tal que $©_2^¤ = ©_2\star\star$ siendo $©_2 = \star(1)$ – de orden uno en $\star$ –

La introducción de este supuesto sobre la varianza de $\star$ se justi…ca a partir del mismo argumento planteado en la Sección 3.3. y que está asociada a la idea de que en muestras pequeñas no resulta natural considerar que el peso de las restricciones estocásticas sea insigni…cante. Tal y como se ha demostrado en el contexto de la estimación NLS, si la información sobre el parámetro no se agota a lo largo de la muestra, entonces la aproximación de la varianza que tiene en cuenta las restricciones estocásticas es mejor que la que las ignora (véase el Resultado 2 de la Sección 3.3). En el caso que se considera, al suponer que ©$_2$ es de orden uno en ⋆⋆se pretende conseguir como resultado que la varianza de ⋆ se mantenga constante y no desaparezca al incrementarse el tamaño de la muestra. – véase que la existencia de restricciones estocásticas da lugar a un término en la aproximación de la varianza del estimador del tipo $\frac{(\star\star \star\star\star)^0(\star\star \star\star\star)}{\star}\frac{1}{©^{¤}_2}$⋆Al suponer que $©^{¤}_2$ = ©$_2$⋆⋆ el término en cuestión queda como una constante cuando ⋆ aumenta, dando lugar a que la existencia de restricciones estocásticas sea relevante en la estimación.

Con el …n de describir detalladamente el método de estimación de Inferencia Indirecta bajo Restricciones Estocásticas es necesario introducir nuevos elementos y nueva notación para los mismos. Sea $\star^0 = (\star^0_1 \star\star^0)\star\star = (\star_1 \star\star_2)^0 \star$ y -⋆© matrices diagonales por bloque con $-_1$, $-_2$ y $©_1 \star ©^{¤}_2$ respectivamente en la diagonal principal. La matriz $-_2$ óptima se determina de tal manera que dé lugar a la varianza mínima, como se indicará más adelante.

De…nición 7. El estimador de $\star_0$ del método de Inferencia Indirecta bajo Restricciones Estocásticas (IISR) se de…ne como aquel valor $\tilde{\star}_{\star\star\star\star}$ que cumple

$$\tilde{\star}_{\star\star\star\star} = \arg\min_{\star} \left\{ \star^0 - \star \right\} \tag{3.13}$$

siendo $\star^0 - \star = [\star^0_1 \star\star^0] \begin{bmatrix} -_1 & 0 \\ 0 & -_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \star_1 \\ \star \end{bmatrix} = f\star^0_1 -_1 \star_1 + \star^0 -_2 \star g$

Propiedades del estimador IISR. La distribución asintótica del estimador, bajo los supuestos que garantizan la consistencia y la normalidad asintótica del estimador IISR, viene dada por

$$\sqrt{\star}(\tilde{\star}_{\star\star\star\star} - \star_0) \overset{\star}{\to} \star(0\star\star (\star\star -))$$

siendo

$$\star\ (\star\star\text{-}) = \left[1+\tfrac{1}{\star}\right]\star^{0}_{1}\text{-}_{1}\star_{1}+\star^{0}_{2}\text{-}_{2}\star_{2}\Big]^{i\,1}\left[1+\tfrac{1}{\star}\right]\star^{0}_{1}\text{-}_{1}©_{1}\text{-}_{1}\star_{1}+\star^{0}_{2}\text{-}_{2}©_{2}\text{-}_{2}\star_{2}]$$
$$+\left[1+\tfrac{1}{\star}\right]\star^{0}_{1}\text{-}_{1}\star_{1}+\star^{0}_{2}\text{-}_{2}\star_{2}\Big]^{i\,1}$$

Si $\star$ tiende a in…nito y se elige el valor óptimo - = $©^{i\,1}$$\star$la distribución matriz de varianzas y covarianzas asintótica quedaría $\star$ = f$\star^{0}_{1}©^{i\,1}_{1}\star_{1}+\star^{0}_{2}©^{¤\,i\,1}_{2}\star_{2}g^{i\,1}$ = $(\star^{0}\text{-}\star)^{i\,1}$$\star$La distribución aproximada que se sugiere a partir de la anterior distribución asintótica es

$$\tilde{\star}_{\star\star\star\star}\ ¼\ (\star\star\star^{\ i\,1}(\star^{0}\text{-}\star)^{i\,1})) \tag{3.14}$$

Nuevamente se plantea la discusión de la validez de la inclusión de las restricciones estocásticas en la estimación del modelo. De los Resultados de la primera parte de este capítulo se tiene para el caso NLS que bajo el Supuesto 1, la aproximación de la varianza que se tiene para muestras …nitas es mejor que la que se desprende de la teoría asintótica convencional (Resultado 2). En el caso de la metodología I.I. nuevamente se replica la discusión planteada. Así, si el análisis se lleva a cabo desde la óptica de la teoría asintótica convencional, sin considerar ningún supuesto particular sobre el comportamiento de la varianza de las restricciones estocásticas, entonces, el término asociado a las restricciones desaparece y la aproximación de la varianza para muestras de tamaño …nito resulta ser la misma que la de un modelo que se estima sin restricciones estocásticas. Sin embargo, como se justi…có en la sección anterior de este capítulo para la estimación SR, esta aproximación no resulta ser tan adecuada como la que incluye el término asociado a la existencia de restricciones (Resultado 2). En el actual caso de la estimación mediante el método de Inferencia Indirecta las conclusiones son paralelas. En efecto, bajo S2, el elemento $\star^{0}_{2}©^{¤\,i\,1}_{2}\star_{2}$ asociado a las restricciones estocásticas es

$$\begin{aligned}\star^{\ i\,1}(\star^{0}_{2}©^{¤\,i\,1}_{2}\star_{2}) &= \star^{\ i\,1}\left(\frac{\star\star}{\star\star}\right)^{0}(©_{2}\star\star)^{i\,1}\left(\frac{\star\star}{\star\star}\right)\\ &= \left(\frac{\star\star}{\star\star}\right)^{0}©^{i\,1}_{2}\left(\frac{\star\star}{\star\star}\right)\end{aligned}$$

y por tanto no desaparece cuando $\star$ ¡! 1$\star$

Si se lleva a cabo el análisis asintótico clásico sin tener en cuenta S2, las restricciones ⋆ (⋆) desaparecen cuando ⋆ tiende a in…nito, si la varianza de ⋆ es independiente de ⋆⋆ En efecto, suponiendo que ⋆ (⋆) ¡ ⋆ = ⋆ » ⋆ (0⋆©$_2$) siendo ©$_2$ independiente de ⋆ entonces

$$\star^{\,i\,1}(\star\,{}_2^{0}©_2^{i\,1}\star\,{}_2)$$
$$= \quad \star^{\,i\,1}\left(\frac{\star\star}{\star\star}\right)^{0}(©_2)^{i\,1}\left(\frac{\star\star}{\star\star}\right) \underset{\star\,!\,1}{\overset{}{¡!}} 0$$

Como consecuencia de ello, la distribución asintótica obtenida es la misma teniendo o no en cuenta las restricciones estocásticas ya que en éste caso ⋆ ^{0} - ⋆ = ⋆ $_1^0$ -$_1$⋆ $_1$⋆La distribución asintótica vendría dada por (3.12) y la conclusión es que la varianza del estimador con restricciones estocásticas converge a la del estimador que no tiene en cuenta las restricciones estocásticas, es decir, el estimador I.I. – como indica Lütkepohl para un modelo lineal –. Como se ha concluido en la primera parte de éste capítulo ésta no parece ser una buena aproximación para un ⋆ …nito y una posible solución podría ser suponer que la información de las restricciones estocásticas aumenta con ⋆⋆o de manera más técnica, que la varianza de la restricción es ©$_2^¤$ = ©$_2$⋆⋆ y ©$_2$ = ⋆ (1)⋆ La justi…cación de éste supuesto puede adecuarse a varias situaciones prácticas en las que las restricciones proceden de estimaciones previas obtenidas de otros trabajos de investigación. En la práctica, la intuición subyacente a este supuesto es la simple idea de que la varianza ©$_2^¤$ no es demasiado alta para un determinado tamaño muestral. Si la varianza fuera alta, entonces el valor concreto que se toma para la combinación de parámetros tendría poca importancia, ya que dicho valor está ponderado inversamente por su propia varianza en la función criterio (véase ecuación (3.13)). Finalmente, se plantea el anterior resultado de manera formal en los siguientes términos.

Resultado 3. Bajo el S2, sin suponer normalidad en el término de error y bajo los supuestos del análisis asintótico estándar, la varianza aproximada del estimador IISR para muestras …nitas es menor que la varianza aproximada del estimador I.I para muestras …nitas.

Prueba. Es inmediato comprobar que bajo S2, la diferencia entre las respectivas varianzas aproximadas es

$$\star^{0}\text{-}\star \;¡\; \star_1^{0}\text{-}_1\star_1 = \star_1^{0}\text{-}_1\star_1 + \star_2^{0}\text{-}_2\star_2 \;¡\; \star_1^{0}\text{-}_1\star_1 = \star_2^{0}\text{-}_2\star_2$$

que es una matriz de…nida positiva, con lo que la distribución sugerida en (3.14) asigna una menor varianza a los estimadores que la que …gura en (3.12) y por tanto, la inclusión de restricciones estocásticas sobre los parámetros tiene asociada ganancias de e…ciencia en la Inferencia Indirecta.

Debe señalarse que este resultado se mantiene si la matriz que determina la varianza del estimador $\tilde{\star}_{\star\star\star\star}$ es $\text{-} = ©^{¡1}$ y no cualquier otra. Sin embargo, en la práctica, cabría esperar que se mantuviera si - fuera parecida a $©^{¡1}\star$

3.4.3 Contraste de validez de las restricciones

Finalmente, la validez de las restricciones o de un subconjunto de ellas puede ser contrastada a partir de la distribución aproximada de $\star(\tilde{\star})$ para un $\star$ …nito bajo la hipótesis nula de que se cumplen las restricciones estocásticas. Sea, por tanto, la hipótesis nula $\star_0 : \star(\star) \;¡\; \star = \star$ y a su vez, $\star \;»\; \star(0\star ©_2^{¤})\star$ De la aproximación de Taylor de primer grado de $\star(\star)$ evaluada en un estimador consistente $\tilde{\star}$ de $\star_0$ se tiene

$$\star(\star) \;'\; \star(\tilde{\star}) \;¡\; \left.\frac{\star\star(\star)}{\star\star}\right|_{\star=\tilde{\star}} (\tilde{\star} \;¡\; \star)$$

de donde se deduce,

$$\star(\tilde{\star}) = \star(\star) + \left.\frac{\star\star(\star)}{\star\star}\right|_{\star=\tilde{\star}} (\tilde{\star} \;¡\; \star) \qquad (3.15)$$

Por otra parte, puesto que $\tilde{\star}$ es consistente y asintóticamente normal, se tiene

$$\sqrt{\star}(\tilde{\star} \;¡\; \star_0) \;¡\!\stackrel{\star}{!}\; \star(0\star §)$$

siendo § la matriz de varianzas y covarianzas asintótica del estimador consistente. De aquí es inmediato obtener la distribución aproximada de $\tilde{\star}$

$$\tilde{\star}\ ¼\ \star\ (\star\star\star^{i\,1}\S)$$

De (3.15) y bajo $\star_0$ se tiene

$$\star\ (\tilde{\star})\ ¼\ \star\ (0\star\star^{i\,1}(\star_2^{0}\S\star_2 + ©_2))$$

Para la obtención de ésta última expresión sería necesario suponer que $\tilde{\star}$ y $\star$ son independientes, lo que no es restrictivo por construcción de las restricciones estocásticas.

3.4.4 Monte Carlo sobre la estimación IISR

Se ha desarrollado un experimento de Monte Carlo – los resultados …guran en el Apéndice A – en el cual se implementan los métodos IISR y I.I. sobre el modelo considerado en el experimento de Monte Carlo de la Sección 3.3, es decir, un modelo con posible autocorrelación. El objetivo de este ejercicio adicional que se presenta tiene un doble objetivo: por una parte, con…rmar las ganancias de e…ciencia asociadas a la inclusión de restricciones estocásticas en el contexto de aplicabilidad de los métodos basados en la simulación y por otra, comprobar en la práctica el funcionamiento de la nueva metodología propuesta. Como se verá, de hecho no es necesaria la estimación por I.I. en el modelo considerado puesto que la función criterio del modelo original es tratable, pudiendo obtenerse los estimadores de los parámetros de interés directamente. De hecho, es esto lo que se hizo en el Monte Carlo de la Sección 3.3 al estimar directamente mediante el uso del criterio NLS y SR el modelo original. Sin embargo, se implementa la metodología IISR con el …n de ilustrar su funcionamiento para una caso relativamente sencillo y situar la atención sobre la combinación de la estimación por simulación y el uso de restricciones estocásticas. Como puede comprobarse en el Apéndice A, los resultados constatan la regularidad del funcionamiento de la metodología IISR, al tiempo que se comprueba un importante ganancia de e…ciencia en relación con el método de partida.

3.5 Inferencia Indirecta y parámetros estocásticos

En esta sección se describe la utilización de la metodología de la Inferencia Indirecta en modelos de parámetros estocásticos. Tal metodología resulta oportuna cuando los parámetros tienen un componente estocástico puesto que la simulación permite reproducir la variabilidad de los mismos bajo distintos parámetros y con la ayuda de un modelo auxiliar inducir los componentes de la parte determinística y la parte estocástica de la variabilidad del parámetro. De especial interés resulta la aplicación de ésta metodología en algunos modelos económicos en los que resulta razonable tener en cuenta la variabilidad de algunos parámetros puesto que representan casos más relajados o generales de especi…cación del modelo. Esta supuesta so…sticación del modelo no resulta sin embargo costosa desde la óptica de la metodología de la inferencia indirecta puesto que supone simplemente incluir las ecuaciones de la variabilidad del parámetro. Por el contrario, resulta muy rentable puesto que permitirían contrastar especi…caciones mas ‡exibles de determinados modelos, como es el caso, por ejemplo, del intento de estimación de una tasa de depreciación variable y estocástica del stock de capital en un modelo con rendimientos – estocásticos – constantes a escala. En Capítulo 4 se estima éste modelo por el método IISR, es decir, teniendo en cuenta la existencia de información a priori sobre los parámetros.

Se considera el siguiente modelo no lineal con el …n de justi…car la adecuación de la estimación por métodos basados en la simulación:

$$\star = \star(\star\star\star) + \star$$

siendo $\star$ y $\star$ las variables exógenas y el error del modelo y $\star$ el parámetro del modelo, siendo $\star = \overset{1}{\star} + \star\star$ y $\overset{1}{\star} = \star\,(\star)\star\star$ » $\star\star\star(0\star\star_{\star})\star$El anterior modelo puede estimarse a partir de la siguiente aproximación lineal en un entorno de $\overset{1}{\star}$:

$$\star \ ' \ \star(\star\star\overset{1}{\star}) + \star + \frac{\star\star(\star\star\overset{1}{\star})}{\star\star}(\star \ ¡ \ \overset{1}{\star})$$

De la anterior ecuación se tiene que el modelo podría estimarse a partir de la ecuación:

$$\star = \star(\star\star\overset{1}{\star}) + \star$$

siendo $\star = \star + \frac{\star\star(\star\star\overset{1}{\star})}{\star\star}\star$ el término del error de la especi…cación del modelo que surge de escribirlo en función del parámetro esperado. Los parámetros de éste modelo serían $(\overset{1}{\star}\star\star_{\star})\star$ pudiéndose inferir de $\star_{\star}$ el parámetro $\star_{\star}$ y por tanto determinar la variabilidad de $\star\star$El último modelo podría estimarse mediante el método de I.I. valiéndose de un modelo auxiliar que podría ser la linealización del anterior. Sería oportuno utilizar esta metodología puesto que la simulación permitiría reproducir las distribuciones alternativas de $\star_{\star}$ en la fase de la simulación del modelo original para posteriormente estimar el modelo auxiliar y calibrar la distancia objetivo en función del valor de $\star_{\star}$ más cercano al verdadero. Además se puede incorporar información a priori sobre los parámetros y en ese caso la estimación se llevaría a cabo mediante el método IISR. En el ejemplo de estimación del modelo más completo que se presenta en el siguiente capítulo se explicará en detalle el procedimiento a seguir para utilizar la simulación como medio de inferir la fuente de variabilidad de un parámetro estocástico.

Capítulo 4

Estimación del stock de capital

4.1 Introducción

En este capítulo se aborda el problema de medición del stock de capital físico de una economía en dos entornos bien diferenciados: en el marco de los modelos tradicionales de estimación no lineal (Sección 4.3) y en el de la estimación por simulación (Secciones 4.4 y 4.5). Antes de abordar la solución de los problemas de interés relativos al stock de capital, se describen los principales problemas asociados a dicha medición (Sección 4.2), fundamentalmente vinculados a la medición de la depreciación del capital debida al uso y a la obsolescencia de los bienes de capital. Posteriormente se describen algunos de los enfoques que se han sugerido en la literatura para resolver dichos problemas. Entre los distintas metodologías que surgen, una de ellas se basa en la estimación de una función de producción. En este capítulo se describe dicha metodología, así como algunas de las di…cultades asociadas a la aplicabilidad de la misma, particularmente la relacionada con la necesidad de introducir la endogeneización de la tasa de depreciación, parámetro que recoge la depreciación total que ha tenido lugar sobre los bienes de inversión y por tanto, fundamental en la estimación del stock de capital. A continuación, en el marco de los modelos de estimación tradicionales, se presentan algunas sugerencias que permiten extender la metodología de la estimación del stock de capital a partir de una función de producción cuando la tasa de depreciación es endógena. En el último apartado de esta primera parte del capítulo que transcurre hasta la Sección 4.3, se aplican los métodos descritos y las soluciones metodológicas sugeridas para estimar el stock de capital. Estas aplicaciones se llevan a cabo a partir de los datos de algunas de las economías más relevantes de la Unión Europea, llegándose a resultados similares para el conjunto de países y en el caso de algunos países como España, claramente diferenciados de las mediciones de la tasa de depreciación normalmente admitidas y basadas en la contabilidad nacional. Los métodos econométricos de estimación aplicados son los de Mínimos Cuadrados no Lineales (NLS), Máxima Verosimilitud (ML), Mínimos Cuadrados no Lineales bajo Restricciones Estocásticas (SR) ya descritos en el Capítulo 2 y SURE.

En la segunda parte del capítulo (Secciones 4.4 y 4.5) se ofrecen distintos ejemplos de aplicación del método de Inferencia Indirecta bajo Restricciones Estocásticas – método IISR descrito en el Capítulo 3 – al problema particular de la estimación del stock de capital de una economía sin abandonar el marco de la estimación a través de una función de producción. Se diseñan distintos ejemplos que resultan de interés desde el punto de vista de la teoría económica obtenidos a partir de distintos supuestos realizados sobre la variabilidad de la tasa de depreciación sobre la que se tiene información a priori. Así, por ejemplo, se plantean variables como la tasa de crecimiento de la inversión, del producto, o perturbaciones exógenas que podrían recoger la posibilidad de shocks tecnológicos como variables explicativas de la tasa de depreciación. De dichos ejemplos se ofrecen un conjunto suficientemente alto de simulaciones y estimaciones con el fin de ilustrar la regularidad de los resultados del método IISR aplicado a estos casos particulares. Finalmente, se desarrolla un modelo en el que se incluye variabilidad estocástica, tanto en los parámetros de la función de producción – con el fin de permitir un cierto grado de flexibilidad en los rendimientos a escala de dicha función – como en la variabilidad de la tasa de depreciación. Esta última propiedad permite añadir un término estocástico en una ecuación de partida para la tasa de depreciación, en la que figura un elemento determinístico que podría ser el sugerido en la familia de ejemplos considerados en la primera parte del capítulo. También, dicho elemento estocástico podría ser la perturbación de un proceso autorregresivo que explicara el comportamiento de la tasa de depreciación.

La aplicación del método IISR al problema planteado en último lugar se puede motivar como una solución oportuna dada la naturaleza del problema que se plantea. Como se indicará posteriormente, una crítica importante a la estimación de la depreciación del capital apunta al carácter excesivamente restrictivo del patrón geométrico de depreciación, si bien este supuesto es el que más se utiliza, dadas las ventajas operativas que tiene. Estas críticas sugieren la investigación en nuevos contextos en los que sería deseable que los supuestos sobre la depreciación fueran menos restrictivos. De ahí, por tanto, la introducción del supuesto sobre la variabilidad estocástica de la tasa de depreciación, que define un contexto más flexible para describir las particularidades asociadas al uso y depreciación del capital, en muchos casos de naturaleza dispar e imprevisible y por tanto adecuadamente parametrizado mediante un componente estocástico. Al mismo tiempo, puede ser interesante incorporar la información que se tienen a priori sobre la tasa de depreciación, por ejemplo, la procedente de otras estimaciones o de la contabilidad nacional. La inclusión de los elementos anteriores, si bien constituye un marco de análisis más sólido, genera nuevas di…cultades asociadas a la complejidad de la estimación y a las no linealiedades de las funciones objetivo en las que se basan los métodos tradicionales. Por otra parte, el patrón estocástico de variabilidad de la tasa de depreciación demanda el uso de métodos de estimación basados en la simulación, más indicados para estos casos que los métodos tradicionales como el método NLS, por ejemplo. Las particularidades del problema que se plantea anteriormente conducen de manera natural a considerar un modelo basado en una función de producción con parámetros estocásticos (en concreto, la tasa de depreciación y las elasticidades de los factores de producción) sobre los que existe información a priori y que se estima por el método de IISR de…nido en el Capítulo 3.

4.2 Medición del stock de capital

El stock de capital físico de una economía es una de las variables básicas para explicar la riqueza de un país, el crecimiento potencial de una economía o el comportamiento de otras variables de interés como las productividades de trabajo y del capital, así como los aspectos más relevantes de la teoría del crecimiento. Por otra parte, el conocimiento del stock de capital de una economía y su participación en la renta total es necesario para determinar el reparto de las retribuciones de los factores. Si bien el stock de capital es una variable importante en muchos campos de interés de la economía, es al mismo tiempo una variable cuya medición presenta serias di…cultades. Para medir el stock de capital de una economía es necesario medir la depreciación del capital, es decir, la pérdida de capacidad productiva de las inversiones llevadas a cabo en el pasado, y ésta no es una variable observable. Es necesario realizar supuestos sobre el modo en el que se produce la depreciación y posteriormente intentar medir dichos elementos para ...nalmente proporcionar una medición del stock de capital. La manera de llevar a cabo este procedimiento, es decir, modelizar la depreciación y estimarla, ha sido una cuestión de amplio debate desde los años setenta, – los primeros trabajos al respecto se deben a Robert. E. Hall, Dale W. Jorgenson, Charles R. Hulten, entre otros – y han dado lugar a una serie de metodologías alternativas de medición, basadas en distintos enfoques y supuestos que al mismo tiempo imponían limitaciones al alcance de los estudios realizados. Hoy en día el debate sigue abierto y los datos que en las cuentas nacionales se publican sobre el stock de capital no resultan completamente satisfactorios. Sigue siendo necesario encontrar una metodología robusta de medición del capital que dé lugar a valores consistentes con la medición de otras variables con las que el capital está estrechamente ligado, como son la renta y la riqueza. Tal y como señala la OECD (1992), el problema de la medición del stock de capital es uno de los principales problemas actuales de la contabilidad nacional, debido a la metodología seguida para contabilizar la depreciación.

La información contable sobre la depreciación que proporcionan las empresas y que ...gura en la contabilidad nacional no recoge la información que se requiere sobre la depreciación desde el punto de vista económico. Desde este punto de vista resulta interesante medir la pérdida de valor o de capacidad productiva del capital para ...nalmente estimar la capacidad productiva del stock de capital restante o neto. Las técnicas contables de las empresas se basan en el cómputo de la depreciación lineal, basadas en una tasa ...ja anual que mide la pérdida de valor del activo. La medición contable de la depreciación no recoge, en general, la verdadera depreciación económica, a menos que ésta se haya producido según el patrón lineal de depreciación. Otra medición del valor del capital se basa en los precios sombra anuales de los bienes de capital usados por los que se alquilaría dicho capital. El producto de dichos precios por las cantidades invertidas sería la renta que generarían los bienes de capital. Estos precios sombra o de alquiler del capital no siempre son observables porque el capital muchas veces es usado por el propietario, por lo que habría que considerar el coste de uso del capital. Finalmente, la capacidad productiva de un conjunto de cantidades invertidas $[\star_{\star}\star\star_{\star ¡ 1}\star\star\star\star\star_{\star ¡ \star}]$ es otra medición del capital diferente de las anteriores y es la que interesa desde el punto de vista de la teoría del crecimiento. La cantidad de capital asociada a ese conjunto de bienes de capital se de…ne como la cantidad de nueva inversión necesaria para producir exactamente la misma cantidad de producto que aquel conjunto de bienes de inversión. Los bienes de capital de cada año anterior se consideran equivalentes a una fracción del capital nuevo, a pesar de que sus características hayan cambiado a lo largo de los años como resultado del progreso tecnológico. Dado este supuesto, la serie de inversiones históricas pueden agregarse para obtener la cantidad total del stock de capital como

$$\star_{\star} = \star_0 \star_{\star} + \star_1 \star_{\star ¡ 1} + \star\star\star + \star_{\star} \star_{\star ¡ \star} \tag{4.1}$$

Las ponderaciones de la inversión pasada, $\star_{\star}\star$ indican la capacidad productiva de los bienes de capital de $\star$ años de antigüedad como una fracción de la capacidad productiva de los bienes de capital nuevos. Los coe…cientes $\star_{\star}$ son por tanto, índices de e…ciencia relativa normalizados en la e…ciencia de los bienes nuevos ($\star_0 = 1)\star$ Una rama importante del estudio de la medición de la depreciación del capital aborda la cuestión desde el punto de vista económico – es la que interesa en el análisis llevado a cabo en el resto del capítulo – y se basa en la medición del capital dado por la ecuación (4.1). El problema consiste en la estimación de los coe…cientes desconocidos $\star_{\star}\star$ La otra rama importante del estudio de la medición del stock de capital se centra en el capital como elemento de la riqueza de la economía. En estos casos, la de…nición que consideran es la que se basa en los costes de uso o precio de alquiler del capital utilizado. En ninguno de los casos los datos disponibles, que son los de la depreciación contable que las empresas realizan, recogen la información que se precisa. En las mencionadas ramas de análisis se han desarrollado metodologías que han intentado aportar soluciones a los problemas que se plantean. Una posibilidad interesante es la de desarrollar una metodología que constituyera un único marco de análisis, en el que se compatibilizaran las consideraciones del análisis del crecimiento y de la riqueza. Un intento en esta línea, fundamentado en el análisis neoclásico, (véase Hulten (1990, 1995)) parte de la consideración de una función de producción agregada y de las condiciones de demanda óptima del capital y por tanto de la inversión retardada. Se obtiene que los índices de e…ciencia $\star_\star$ son los ratios del producto marginal de los bienes de capital de antigüedad $\star$ respecto de los bienes de capital nuevos. Finalmente se incluye una relación entre el producto marginal y el precio del bien: el precio de un bien de capital usado es el valor actual de las futuras rentas de su producto marginal. Por tanto, el precio de un bien de capital usado depende fundamentalmente de $\star_\star\star$es decir, del comportamiento de su e…ciencia relativa respecto del capital nuevo. Como resultado se obtiene que el precio de un bien de capital usado depende del precio de alquiler de un bien de capital nuevo. De esta manera, bajo el enfoque descrito, se vinculan el lado de la producción y el lado de los precios del problema de medición del stock de capital. Por otra parte, puesto que la depreciación es la pérdida de valor del capital usado, se obtiene la depreciación en función de la variación de la e…ciencia relativa de un período a otro. En otras palabras, cuando un bien se utiliza para la producción a lo largo de los años, la pérdida de capacidad productiva presente y futura genera disminuciones en el precio corriente del activo, lo que se de…ne como depreciación. Concluyendo, por tanto, en cualquiera de los casos, es necesario describir el comportamiento de los coe…cientes $\star_\star$ para obtener una medida del stock de capital.

Destacan en la literatura tres funciones para describir el comportamiento de $\star_\star\star$El patrón de e…ciencia constante (“one-hoss shay”) tiene la forma $\star_\star = 1\star$si $\star = 0\star\star\star\star\star$ ¡ 1 y $\star_\star = 0$ si $\star = \star + \star\star\star$ ¸ $0\star$Según este patrón, los bienes mantienen completa su e…ciencia hasta que dejan de ser útiles totalmente. En este caso la secuencia $\star_\star$ esta determinada únicamente por la vida útil $\star\star$y el problema es estimar dicho parámetro. Otro patrón es el de e…ciencia lineal según el cual la e…ciencia cae linealmente hasta el momento en que se retira el activo. En este caso, $\star_0 = 0$ y $\star_\star = 1$ ¡ $\star\star\star$ si $\star \cdot \star\star$En este caso la e…ciencia decrece a la tasa constante $1\star\star$ cada año. Como en el primer caso, $\star$ determina completamente el patrón de e…ciencia. Finalmente, según el patrón de decrecimiento geométrico de la e…ciencia la capacidad productiva del activo decrece a la tasa $\star = (\star_{\star ¡ 1}$ ¡ $\star_\star)\star\star_{\star ¡ 1}\star$ Esto da lugar a la secuencia de coe…cientes de e…ciencia $\star_0 = 1\star \star_\star = (1$ ¡ $\star)^\star\star\star$ ¸ $1\star$ Esta forma se parametriza mediante un único parámetro $\star\star$ Es necesario realizar algunas puntualizaciones oportunas una vez llegados a este punto. Los anteriores patrones de e…ciencia describen la dinámica de los coe…cientes de e…ciencia a lo largo del tiempo, lo que no debe confundirse con la senda de depreciación económica a lo largo del tiempo, si bien son conceptos que están relacionados. Por ejemplo, el patrón de e…ciencia constante implica una función cóncava de depreciación. Por otra parte, el patrón de pérdida lineal de e…ciencia no implica una depreciación lineal. Sólo la forma geométrica de la función de e…ciencia genera una depreciación geométrica.

Dada la importancia de las ponderaciones $\star_\star$ en la expresión del stock de capital, uno de las metodologías para medir el stock de capital a la que más atención se ha prestado, se basa en la medición de los coe…cientes $\star_\star\star$Según el enfoque neoclásico, los $\star_\star$ son los ratios de los productos marginales de las inversiones pasadas y por tanto no son observables directamente. Una solución viene de mano de la metodología basada en el precio de alquiler, precios de segunda mano, o costes de uso de los activos usados basado en la relación entre los precios de alquiler o costes de uso del capital usado y los coe…cientes $\star_\star\star$ A partir de dichos precios se podrían calcular las productividades del conjunto de bienes de capital antiguos y por tanto los coe…cientes $\star_\star\star$ Sin embargo, esta metodología se enfrenta al problema de inexistencia de mercados de bienes usados o de alquiler para todos los activos y para todos los períodos, ya que muchos activos son usados por sus propietarios. Las di…cultades de implementación de la metodología basada en el precio de los activos genera la necesidad de otros métodos de medición de la pérdida de e…ciencia del capital con el …n de estimar el valor del stock de capital.

Debe mencionarse que en la literatura …guran algunos intentos de medición del stock de capital basados en la metodología de los precios de los activos en los mercados de segunda mano. Es el caso de estudios de la depreciación de activos duraderos no residenciales levados a cabo por Hulten y Wiko¤ (1981), Wikkof (1989). Estos estudios intentan deducir a partir del comportamiento de los precios de los activos usados alguno de los patrones de e…ciencia descritos anteriormente. Los resultados que se obtienen no conducen a aceptar signi…cativamente ninguno de los patrones, siendo el patrón de e…ciencia geométrico el que menos inadecuado resulta. Otros autores (véase, por ejemplo Feldstein y Roschild (1974 y Jorgenson (1973)) critican el uso del patrón geométrico porque según este supuesto los activos nunca dejan de ser útiles en el proceso productivo. Además, los parámetros $\star$ y $\star$ en realidad dependen del grado de utilización del stock de capital, el coste de mantenimiento del capital entre otros argumentos y que por tanto en general deberían considerarse como variables. Estos autores sugieren la necesidad de diseñar métodos de medición de la depreciación que recojan estos aspectos y que al mismo tiempo se basen en patrones que no necesariamente sean los tradicionales (es decir, "one-hoss shay", lineal o geométrico). Otras fuentes de críticas proceden de la consideración de que los precios de los bienes de segunda mano no son buenos indicadores del valor productivo de los activos usados, porque puede tener lugar el fenómeno de la selección adversa o de los "lemmons" asociado a la asimetría en la información. Los bienes que se comercializan en el mercado de segunda mano no son representativos del resto de bienes de su misma antigüedad, porque solo los de peor calidad se negocian en dicho mercado.

Otra di…cultad asociada a la medición de la depreciación y por tanto a la medición del stock de capital es la impuesta por la presencia de un constante proceso de progreso tecnológico que genera obsolescencia en los activos ya incorporados en el proceso productivo. La incorporación de nuevos activos de capital con mejores características que los antiguos generan una disminución de los precios de los activos usados que no contienen dichas mejoras tecnológicas. Esta disminución del precio de los activos ya adquiridos como consecuencia de las mejoras tecnológicas introducidas en los nuevos activos es lo que se de…ne como obsolescencia. Este es por tanto otro factor que determina la disminución del precio de los activos usados y por tanto otro factor explicativo de la depreciación económica, además de la pérdida de e…ciencia del activo asociada al paso del tiempo. Sería interesante por tanto recoger en los modelos de comportamiento de los coe...cientes de e...ciencia la variabilidad impuesta por la presencia de la obsolescencia, para generar mejores mediciones del stock de capital.

Los argumentos que se han expuesto han marcado la mayor parte del debate en torno a la medición de la depreciación y del stock de capital en los años setenta y ochenta. Dale Jorgenson, uno de los investigadores que más ha contribuido a la literatura relacionada con la medición del stock de capital extiende la metodología de Hall (presentada en los párrafos anteriores como la visión neoclásica) e intenta estimar la tasa de depreciación a partir de modelos econométricos en los que relaciona el precio de los activos usados con su antigüedad, teniendo en cuenta la depreciación de uso y la depreciación generada por la obsolescencia. (véase Jorgenson (1991, 1995)). Los autores Ishaq Nadiri e Ingmar Prucha han contribuido de manera importante a producir avances en la medición del stock de capital al resolver tres problemas. El problema de permitir una tasa de depreciación endógena, el problema de la limitación de los datos de precios de activos usados y el problema de la medición de activos intangibles como la investigación y el desarrollo. Nadiri y Prucha implementaron su metodología (véase Nadiri y Prucha (1996) para el sector industrial de los Estados Unidos. Partiendo de una función de costes, dual a una función de producción, que relaciona el producto con la combinación de factores y simultáneamente proporciona los valores de los factores del siguiente período, se obtiene la depreciación como un resultado endógeno del proceso de minimización de costes. Estos autores no precisan los precios de los activos usados para obtener las funciones de depreciación endógenas, lo que sin duda amplía el alcance de la técnica de medición del stock de capital y además sirve de referencia de las mediciones obtenidas bajo dicho enfoque. Finalmente, las aportaciones de Prucha (1995) y Prucha et.al. (1996), basan la medición del stock de capital en la estimación econométrica de una función de producción.

4.3 Estimación del stock de capital y de una función de producción

En esta sección se pretende cubrir el primero de los dos objetivos de este capítulo, que es el de abordar la cuestión de la estimación econométrica del stock de capital desde la metodología de la estimación de la función de producción a partir de los métodos tradicionales de estimación de modelos no lineales, es decir, mediante NLS o ML. Estos métodos se aplican directamente en la estimación del modelo sobre los datos muestrales o bien combinando su metodología con la introducción de información a priori sobre los parámetros – en concreto será de interés tener en cuenta información a priori sobre la tasa de depreciación o bien la información que se tiene sobre la amortización del capital que ...gura en la contabilidad nacional. Sobre estos aspectos se describirán más adelante en detalle las metodologías a desarrollar para llevar a cabo la estimación del stock de capital.

El segundo objetivo que se pretende cubrir en este capítulo se abordará en la Sección 4.4, donde también utilizando el enfoque de estimación del stock de capital vía función de producción, se introduce información a priori y se estima el modelo por inferencia indirecta mediante el método descrito en el Capítulo 3 como IISR. En este marco se diseña un último ejemplo en el que se introduce variabilidad estocástica en algunos parámetros del modelo como la tasa de depreciación y las elasticidades de los factores. De esta manera, en la última parte del capítulo se trata con un modelo más completo que el descrito en la primera parte del capítulo, al considerar que la tasa de depreciación endógena, además de contar con un término determinístico presenta un elemento estocástico, lo que la convierte en un parámetro estocástico. La presencia de parámetros estocástico y la complejidad que genera en la expresión del stock de capital la presencia de variables explicativas hace adecuado implementar un método de estimación basado en la simulación. Puesto que, además, las variables vinculadas a la parte determinística de la tasa de depreciación son observables, existe información a priori sobre este parámetro que se puede tener en cuenta en la estimación. Por consiguiente la génesis del problema conduce a la aplicación del método de estimación indirecta con restricciones estocásticas de…nido en la última parte del Capítulo 3, por lo que en de…nitiva los ejemplos que se ofrecen constituyen una motivación natural y razonable de gran interés económico como lo es la medición del stock de capital para la aplicación del método descrito.

El enfoque de la medición del stock de capital a partir de la estimación de una función de producción consiste en la estimación econométrica de los parámetros de la función de producción simultáneamente con la estimación de la tasa de depreciación del stock de capital. El argumento principal de esta metodología reside en que si bien el stock de capital es una variable que aparece como argumento en muchas funciones, lo es de manera fundamental en el caso de la función de producción, que depende únicamente del capital y del trabajo. La ecuación de la función de producción es una de las relaciones fundamentales de los modelos, existiendo un gran consenso apoyado en investigaciones empíricas sobre sus especi…caciones más aceptadas (generalmente CES o Cobb-Douglas) y sobre sus parámetros, que generalmente re‡ejan la existencia de rendimientos constantes a escala. Es además una ecuación estructural y se espera que su especi…cación sea estable a lo largo de varios períodos, lo que implica que la medición obtenida del stock de capital sea también robusta, en contraposición con lo que podría ocurrir de estimarse a partir de otras ecuaciones de comportamiento, bien de un sector o de un grupo de agentes. De esta manera, en línea con los trabajos de Nadiri y Prucha (1996), Prucha (1995) y Dadkhah y Zahedi (1990) entre otros, se ha tomado como marco para la estimación del stock de capital la estimación de una función de producción. Una ventaja adicional de este enfoque la representa el hecho de que la serie de stock de capital que se obtiene es consistente con las observaciones de los niveles de producción, empleo y formación bruta de capital a través de una relación estable de largo plazo. Por último, puesto que se obtiene una estimación econométrica de la tasa de depreciación, la hipótesis de si la tasa de depreciación es constante o si depende de una cierta variable, de amplio debate en la literatura, puede contrastarse formalmente a partir del contraste de hipótesis adecuado.

En de…nitiva, por tanto, en esta sección se aborda la estimación econométrica del stock de capital basada en el enfoque de la estimación de una función de producción. En primer lugar se describe el problema y posteriormente se plantean algunas soluciones para el caso de una tasa de depreciación endógena y determinística. Adicionalmente se sugieren varias extensiones de la metodología anterior en la que se incorpora en la estimación la información contable sobre la depreciación del capital así como información a priori sobre la tasa de depreciación. Finalmente se ofrecen resultados de simulación y empíricos que ilustran la regularidad del funcionamiento de las soluciones sugeridas. En cuanto a los resultados empíricos, se han llevado a cabo estimaciones de la tasa de depreciación y del stock de capital de las economías de España, Francia, Reino Unido y Alemania. Los resultados que se encuentran son similares para los distintos países y al menos en el caso de España, signi…cativamente diferente de los valores que tradicionalmente se toman como válidos para este parámetro a partir de la contabilidad nacional o de otros estudios como en Corrales y Taguas (1989) donde se toma el 10 %.

4.3.1 Estimación de una tasa de depreciación constante

A continuación se describe un método de estimación de una tasa de depreciación constante basado en la estimación de una función de producción. La idea de la estimación del stock de capital basada en la estimación de una función de producción es la siguiente: El stock de capital es una variable que entra en la función de producción, pero no es observable, puesto que depende de la tasa de depreciación. Sin embargo, sí se dispone de observaciones de la inversión, el empleo y la producción total. Si la tasa de depreciación fuera observable, entonces a partir de la inversión se podría construir el stock de capital ($\star$) según la ecuación del inventario permanente. Una vez que se dispone de $\star$ teniendo en cuenta las otras variables implicadas, los parámetros de la función de producción podrían estimarse en principio sin ninguna di…cultad. Puesto que la tasa de depreciación no es observable, tampoco lo es el stock de capital y la función de producción no puede estimarse directamente. A pesar de esta di…cultad, el problema puede llevarse al contexto de estimación con variables no observables cuyo funcionamiento se presenta inmediatamente. Dada una tasa de depreciación $\tilde{\star}$ existe una serie de $\star_{\star}(\tilde{\star})$ asociada, que es la que genera la ecuación del inventario permanente. La solución que plantea este enfoque consiste en elegir el valor de $\star$ que genera una serie de stock de capital que a su vez consigue explicar lo mejor posible la producción observada – junto con las observaciones del trabajo –. Es decir, en términos econométricos, se elige el valor de $\star$ que da lugar al mejor ajuste de la función de producción. En el proceso de inferencia del valor de $\star\star$ simultáneamente se juega con los otros parámetros de la función de producción, de tal manera que al mismo tiempo se resuelve la estimación de la función de producción y del stock de capital.

A continuación, se presenta de manera técnica la metodología de estimación del stock de capital a partir de la estimación econométrica de una función de producción, así como algunas di…cultades operativas asociadas a las mismas y las soluciones que aquí se sugieren. Se parte de una función de producción dada por

$$\star_{\star} = \star\,(\star_{\star}\star\star\ _{\star}\star\star) \tag{4.2}$$

siendo $\star_{\star}\star\,\star_{\star}$ y $\star\,_{\star}$ respectivamente la producción, el trabajo y el stock de capital al …nal del período $\star\star$ y $\star$ un conjunto de parámetros desconocidos de dicha función. El stock de capital se acumula de acuerdo a la ecuación del inventario permanente:

$$\star\,_{\star} = \star_{\star} + \star\star\,_{\star ¡ 1} \tag{4.3}$$

donde $\star_{\star}$ denota la inversión bruta del período $\star\star$ y $\star = 1$ ¡ $\star$ siendo $\star$ la tasa de depreciación. Puesto que éste último es un parámetro desconocido, $\star\,_{\star}$ también lo es. Realizando sustituciones recursivas de $\star\,_{\star ¡ 1}$ en $\star\,_{\star}$ se puede obtener $\star\,_{\star}$ en función únicamente de la inversión retardada y de $\star_0\star$ como se indica a continuación:

$$\begin{aligned} \star_\star &= \sum_{\star=1} \star^{\star i\,\star}\star_\star + \star^\star\star_0 \\ &= \star_\star(\star_1\star\star\star\star\star\star_\star\star\star\ _0\star\star) \end{aligned} \tag{4.4}$$

De esta manera, al sustituir $\star_\star$ en la función de producción (4.2) se obtendría

$$\star_\star = \star_\star(\star_\star\star\star_1\star\star\star\star\star\star_\star\star\star\ _0\star\star\star\star) \tag{4.5}$$

El valor del stock de capital inicial $\star_0\star\star$ y $\star$ son todos los parámetros desconocidos y la función de producción se podría estimar mediante NLS –véase que se trata de un modelo no lineal –. En la práctica, sin embargo, surgen algunas di…cultades operativas que complican la aplicación directa de los métodos de estimación mencionados. En primer lugar surge una di…cultad asociada a la aplicación de los paquetes econométricos estándar para estimar (4.5) relacionada con el hecho de que el número de elementos que aparecen en $\star_\star$ depende de $\star$. En efecto, como se observa en la expresión (4.4), el número de elementos de $\star_\star$ es $\star + 1$ y por tanto al sustituir dicha expresión en la función de producción, también el número de argumentos de ésta depende de $\star\star$ Los paquetes econométricos estándar no permiten esta particularidad, es decir, el hecho de que en la especi…cación de la función a estimar, el número de argumentos de la misma cambie con el índice del período. Esta di…cultad sin embargo puede superarse fácilmente al reescribir $\star_\star$ como se indica a continuación. Para un $\star$ dado se de…ne las variables $\star_\star^1\star\star\star\star\star\star_\star^\star$ como sigue

$$\star_\star^\star = \begin{cases} \star_\star & \star \cdot \star \\ 0 & \star\star\ \star \end{cases} \tag{4.6}$$

Al utilizar estas variables en la expresión de $\star_\star$ se llega a

$$\star_\star = \sum_{\star=1}^{\star} \star^{\star i \star} \star_\star^\star + \star^\star \star_0 = \star\,(\star_\star^1 \star\star\star\star\star_\star^\star \star\star\ {}_0 \star) \tag{4.7}$$

siendo ahora el número de elementos de $\star_\star$ el mismo en cada período e igual a $\star\ +1\star$ Para ilustrar la transformación realizada, el vector $\star\ = (\star_1 \star\star\star\star\ \star_\star)^0$ queda ahora como

$$\begin{bmatrix} \star_1 \\ \star_2 \\ \star_3 \\ \star \\ \star \\ \star \\ \star_\star \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \star_1 & \star_0 & 0 & \star\ \star\ \star & 0 & 0 \\ \star_2 & \star_1 & \star_0 & \star\ \star\ \star & 0 & 0 \\ \star_3 & \star_2 & \star_1 & & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & & \star & \star \\ \star & \star & \star & & \star & \star \\ \star & \star & \star & & \star & \star \\ \star_\star & \star_{\star\,¡1} & \star_{\star\,¡2} & \star\ \star\ \star & \star_1 & \star_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \star \\ \star^2 \\ \star \\ \star \\ \star^{\star\,¡1} \\ \star^\star \end{bmatrix}$$

que como se observa está solo en función del vector de inversión, de $\star_0$ y del parámetro $\star\star$Por último, la sustitución de (4.7) en (4.2) conduce a

$$\star_\star = \star\ (\star_\star \star\star_1^1 \star\star\star\star\star_\star^\star \star\star\ {}_0 \star\star\star\star)$$

ecuación que en principio podría estimarse por NLS o ML.

Otra di...cultad asociada a la estimación econométrica del stock de capital tiene que ver con $\star_0\star$ Si bien el stock de capital inicial podría estimarse en principio al considerarlo como un parámetro, en la práctica en muchos casos se obtenían resultados sujetos a gran variabilidad. Estos resultados se deben a que dicho parámetro, de hecho no está identi...cado (véase I. Mauleón y José A. Hernández (2001)). En la práctica este problema se superó tomando un valor para $\star_0$ próximo al valor de la contabilidad nacional para el año en cuestión, elegido de tal manera que diera lugar a los mejores ajustes de la función a estimar$\star$En la Sección 4.3.3 de este capítulo, donde se presentan los resultados empíricos obtenidos, se indica el valor que se tomó para $\star_0$ en cada caso.

Por la estructura de la matriz de $\star$ que tiene $\star + 1$ columnas y $\star$ …las podría pensarse que este hecho da lugar a la existencia de multicolinealidad. Sin embargo no es así, puesto que el número de parámetros es …jo y de hecho solamente uno en este caso vinculado al stock de capital y por tanto el modelo está identi…cado. Para el caso lineal, véase Greene et.al.(1991).

4.3.2 Estimación de una tasa de depreciación endógena

El problema de la estimación del stock de capital vía estimación de una función de producción se complica en cierta medida si supone que la tasa de depreciación es endógena, puesto que la variabilidad de la tasa de depreciación conduce a una expresión compleja del stock de capital y su solución numérica podría ser inaccesible en algunos casos. Sin embargo, tal y como sugiere la teoría y las críticas a las especi…caciones más sencillas de patrones de depreciación del stock de capital, parece razonable considerar que la tasa de depreciación es variable y que puede depender de la presencia de shocks tecnológicos, de cambios en los precios relativos de los factores, del nivel de producción - véase Prucha and Nadiri, (1996), del coste de mantenimiento del capital o de su tasa de utilización en el proceso productivo – véase Burnside and Eichenbaum, (1994). En modelos dinámicos de demanda de factores, la demanda óptima de capital depende del tipo de interés y del precio relativo de los factores y el ajuste entre el nivel del stock de capital y el nivel de capital óptimo se lleva a cabo mediante ajustes en la tasa de depreciación. Por tanto este tipo de modelos también proporcionan un marco que motiva la necesidad de disponer de métodos de estimación del stock de capital cuando éste está determinado por una tasa de depreciación endógena.

Las anteriores motivaciones son su…cientes para considerar oportuno desarrollar una metodología que permita estimar los parámetros de la variabilidad de la tasa de depreciación y por tanto estimar el stock de capital en estos casos, sin abandonar el enfoque basado en la estimación simultánea de una función de producción. Esta posibilidad permite la ganancia de un cierto grado de ‡exibilidad en cuanto a los supuestos que se hacen tradicionalmente sobre el patrón de la depreciación. Así, la variabilidad de la tasa de depreciación se aleja del marco restrictivo de patrón de la depreciación geométrica, puesto que en dicho patrón, la tasa de depreciación era constante. Finalmente, los métodos propuestos también pueden detectar un cambio estructural en la tasa de depreciación, lo que nos llevaría a considerar una variable “dummy” como determinante de su variabilidad, lo que podría ser útil en casos en los que no se disponga de observaciones de las variables explicativas de la tasa de depreciación.

En esta sección del capítulo se intenta cubrir la demanda de operatividad del método descrito en la primera sección para el caso en el que la tasa de depreciación es endógena. Para esto se presentan dos soluciones alternativas que sirven para implementar los métodos de estimación tradicionales en paquetes econométricos estándar sin abandonar el enfoque basado en la estimación de una función de producción. Se supone que la tasa de depreciación depende de una variable $\star$ que puede ser de dimensión mayor o igual que uno. En principio supondremos que la dimensión de $\star$ es uno y que la relación con $\star$ es lineal, aunque la validez de los métodos que se describen a continuación no depende de estos supuestos – posteriormente se indicará el desarrollo de estas soluciones para el caso multivariante. La variable explicativa $\star$ viene indicada por la teoría, y puede ser por ejemplo alguna de las indicadas anteriormente como se recoge en la literatura. Nuevamente, se parte de una función de producción

$$\star_\star = \tilde{\star}(\star_\star\star\star\ {}_\star\star\star)$$

en la que el stock de capital $\star_\star$ depende ahora de una tasa de depreciación variable que depende de $\star$. Por tanto, suponiendo una relación lineal entre $\star$ y $\star$ se tiene $\star_\star = \star_0 + \star_1\star_\star\star$ Llamando $\star_0 = 1$ ¡ $\star_0\star$ y $\star_1 =$ ¡ $\star_1\star$ se tiene $\star_\star = 1$ ¡ $\star_\star = \star_0 + \star_1\star_\star\star$ Si se sustituye recursivamente $\star\ {}_{\star\text{¡}\star}$

para todo $\star = 1\star\star\star\star\star$ ¡ 1 en (4.3), entonces,

$$\star_{\star} = \star_{\star} + \star_{\star}\star_{\star\text{¡}1} + \star\star\star + \star_{\star\star}\star_{\star\text{¡}1}\star\star\star_{2}\star_{1}\star_{0} \tag{4.8}$$

Por otra parte, sea ahora $\star_{\star\star\star}$ el coe…ciente de la inversión del período $\star$ ¡ $\star$ para todo $0 \cdot \star \cdot \star$¡ 1 y $\star_{\star\star\star}$ el coe…ciente de $\star_{0}\star$ Entonces,

$$\star_{\star\star\star} = \begin{cases} \prod_{\star=0}^{\star 1} \star_{\star\text{¡}\star} & 1 \cdot \star \cdot \star \\ 1 & \star = 0 \end{cases} \tag{4.9}$$

con lo cual (4.8) puede escribirse como

$$\begin{aligned} \star_{\star} &= \sum_{\star=0}^{\star 1} \star_{\star\star\star}\star_{\star\text{¡}\star} + \star_{\star\star\star}\star_{0} \\ &= \tilde{\star}_{\star}(\star_{\star}\star\star\star\star\star\star_{\star}\star\star_{0}\star\star\star_{\star}) \end{aligned} \tag{4.10}$$

En esta expresión del stock de capital, nuevamente aparece la di…cultad mencionada en la sección anterior que tiene que ver con el hecho de que el número de argumentos de $\star_{\star}$ varía período a período. Es por tanto necesario reescribir esta expresión con el …n de que el número de argumentos que aparecen en ella sea constante a lo largo del tiempo. En la siguiente sección se sugieren dos soluciones a este problema, lo que permite la estimación de una tasa de depreciación variable (a partir de la estimación de $\star_0$ y $\star_1$) junto con el resto de parámetros de la función de producción (recogidos en $\star$) mediante el uso de paquetes econométricos estándar. Una vez que se describan las soluciones mencionadas, será fácil contrastar la hipótesis de constancia de la tasa de depreciación mediante el contraste de la hipótesis nula $\star_{0:}\star_1 = 0$, lo que puede llevarse a cabo mediante los procedimientos habituales.

Nótese en la expresión (4.10) que cuando $\star_{\star} = \star$ para todo $\star\star$ entonces $\star_{\star\star\star} = \star^{\star}$ y $\tilde{\star}_{\star}(\star) = \star_{\star}(\star)\star$ que es el caso descrito en la Sección 4.3.1.

Las soluciones

El interés de considerar una tasa de depreciación endógena y al mismo tiempo disponer de una metodología de fácil aplicación en paquetes estándar es la motivación de dos soluciones que se describen a continuación. La primera solución (Método 1) consiste en reescribir la ecuación original del stock de capital teniendo en cuenta las variables $\star_\star^\star$ en lugar de $\star_\star\star$ respetando la expresión de sus coe…cientes $\star_{\star\star\star}\star$ Es decir, partiendo de la expresión original del stock de capital

$$\star_\star = \sum_{\star=1} \star_{\star\star\star} - \star\star_\star + \star_{\star\star\star}\star_0$$

y ahora usando $\star_\star^\star$ como se ha de…nido en (4.6), la expresión de $\star_\star$ queda

$$\star_\star = \sum_{\star=1} \star_{\star\star\star} - \star\star_\star^\star + \star_{\star\star\star}\star_0 \qquad (4.11)$$

con lo que se tiene el mismo número de elementos de inversión retardada para cada período. El siguiente paso es sustituir (4.11) en la función de producción para estimar $\star\star\star_0$ y $\star_1$.

La segunda solución (Método 2) surge con el …n de encontrar una expresión más simple para el stock de capital y por tanto para la función criterio, dada la complejidad impuesta por la no linealidad añadida que genera la variabilidad de la tasa de depreciación en la expresión del stock de capital. Si el número de variables explicativas de la tasa de depreciación es mayor que uno podrían encontrarse di…cultades en la optimización. Nótese que el número de factores en el coe…ciente de la inversión de $\star$ retardos, es decir, de $\star_{\star\star\star}$ es $\star$ y además se trata de un elemento diferente para cada $\star\star$ Este hecho junto con la alta no linealidad que genera en la función objetivo podría hacer el problema de optimización de difícil solución. Por estas razones sería interesante en principio investigar sobre una expresión alternativa de $\star_\star$ en la que las ponderaciones de la inversión retardada tuvieran una forma mas simple y que al mismo tiempo no tuviera asociada una pérdida en términos de e…ciencia y sesgo. Como resultado de esa búsqueda surge la otra solución, que también persigue reescribir la expresión de $\star_\star$ dejándole el mismo número de coe-

...cientes para cada período, pero basada en unos coe...cientes $\tilde{\star}_{\star\star\star}$ aproximados a los verdaderos $\star_{\star\star\star}$. Con el ...n de comprobar sus propiedades y veri...car tanto la regularidad de sus resultados como los costes de la sustitución de la verdadera expresión de $\star$ por otra aproximada se diseñó e implementó un experimento de Monte Carlo cuyos resultados se presentan en la Sección 4.3.2.3. La solución viene dada por la sustitución del coe...ciente dado por (4.9) por su aproximación lineal en el punto $\star = 0$ en la ecuación del stock de capital. De esta manera se espera simpli...car las no linealidades asociadas a los productos cruzados de los coe...cientes $\star_0$ y $\star_1\star$ Tal y como se prueba en el Apéndice B, la aproximación lineal de $\star_{\star\star\star}$ conduce a

$$\star_{\star\star\star} \simeq \star_0^{\star} + \star_0^{\star - 1} \star_1 \sum_{\star=0}^{\star-1} \star_{\star - \star} = \tilde{\star}_{\star\star\star}$$

y volviendo a la expresión (4.11) se tiene

$$\begin{aligned} \star_{\star} = {} & \star_{\star} + (\star_0 + \star_1 \star_{\star}) \star_{\star - 1} + \star_0 (\star_0 + \star_1 (\star_{\star} + \star_{\star - 1})) \star_{\star - 2} + \star\star\star \\ & \star\star\star + \star_0^{\star - 2} (\star_0 + \star_1 \sum_{\star=0}^{\star-2} \star_{\star - \star}) \star_1 + \star_0^{\star - 1} (\star_0 + \star_1 \sum_{\star=0}^{\star-1} \star_{\star - \star}) \star_0 \end{aligned}$$

Tomando ahora $\star = \star - \star\star$ se puede reescribir la anterior ecuación del stock de capital como

$$\star_{\star} = \sum_{\star=1} \tilde{\star}_{\star\star\star - \star} \star_{\star} + \tilde{\star}_{\star\star\star} \star_0$$

Nuevamente, llevando a cabo la transformación para mantener constante en número de argumentos de $\star_{\star}\star$utilizando $\star_{\star}^{\star}$ tal y como se de...nió en (4.6), se tiene

$$\begin{aligned} \star_{\star} & = \sum_{\star=1} \tilde{\star}_{\star\star\star - \star} \star_{\star}^{\star} + \tilde{\star}_{\star\star\star} \star_0 \\ & = \tilde{\star}(\tilde{\star}_{\star\star\star} \star\star\star\star \tilde{\star}_{\star\star\star - \star} \star\star_{\star}^{1} \star\star\star\star\star_{\star}^{\star} \star\star_0) \end{aligned}$$

pudiendo ser $\tilde{\star}_{\star\star\star - \star}$ y $\star_{\star - \star}$ valores arbitrarios si $\star\star\ \star$ pues en este caso $\star_{\star}^{\star}$ es cero. Finalmente, la anterior expresión resultante del stock de capital se sustituye en la expresión de la función de producción con el …n de estimar conjuntamente los parámetros del modelo, es decir, $\star\star\star_0$ y $\star_1$ por medio de NLS, por ejemplo.

El caso multivariante

Si la variable $\star$ tiene dimensión mayor que uno, es fácil ver que las soluciones anteriores son de aplicación inmediata y pueden estimarse todos los parámetros que explican la tasa de depreciación junto con los parámetros de la función de producción, si bien es de esperar que se den di…cultades de convergencia dada la complicación que un mayor número de variables introduce en la expresión del stock de capital. Si la tasa de depreciación viene dada por dos variables explicativas, se tiene $\star_\star = \star_0 + \star_1\star_{1\star} + \star_2\star_{2\star}\star$ En este caso, llamando $\star_0 = 1$ ¡ $\star_0\star\star_1 =$ ¡ $\star_1$ y $\star_2 =$ ¡ $\star_2\star$ las ponderaciones de la inversión retardada $\star_{\star ¡ \star}$ en el stock de capital del período $\star$ viene dado por el producto $\star_\star\star_{\star ¡ 1}\star\star\star_{\star ¡ \star+1}\star$ siendo $\star_{\star ¡ \star} = 1$ ¡ $\star_{\star ¡ \star} = \star_0 + \star_1\star_{1\star\star ¡ \star} + \star_2\star_{2\star\star ¡ \star}\star$ Como puede verse, con dos variables la expresión de los coe…cientes de la inversión retardada se complica en gran medida, por lo que podría ser en este caso más e…caz utilizar el Método2 basada en la aproximación lineal de dichos coe…cientes.

Para extender la solución 2 se calcula la aproximación lineal de los coe…cientes de la inversión retardada, que vienen dados por

$$\star_{\star\star\star} = \prod_{\star=0}^{\star 1} \star_{\star ¡ \star} = \prod_{\star=0}^{\star 1} (\star_0 + \star_1\star_{1\star\star ¡ \star} + \star_2\star_{2\star\star ¡ \star})$$

para $\star = 1\star\star\star\star\star$ y $\star_{\star\star 0} = 1$ en un entorno de $\star = 0\star$ Esto conduce, – véase la parte …nal del Apéndice B – a la expresión

$$\star_{\star\star\star} \simeq \star_0^{\star ¡ 1}(\star_0 + \star_1 \sum_{\star=0}^{\star 1} \star_{1\star\star ¡ \star} + \star_2 \sum_{\star=0}^{\star 1} \star_{2\star\star ¡ \star}) = \tilde{\star}_{\star\star\star}$$

Sustituyendo $\star_{\star\star\star}$ por $\tilde{\star}_{\star\star\star}$ en la ecuación de $\star_\star$ y al mismo tiempo llamando $\star = \star$ ¡ $\star\star$ se tiene $\star_\star = \sum_{\star=\star}^{\star} \tilde{\star}_{\star\star\star ¡ \star}\star_\star + \tilde{\star}_{\star\star\star}\star_0$. Una vez llegados a este punto se aplica nuevamente la transformación de las variables dummies indicada en la expresión (4.6) con el objetivo de tener el mismo número de variables en $\star_\star$ para todo $\star$. Finalmente esta ecuación se sustituye en la función de producción y se estiman los parámetros de interés.

Simulaciones

A continuación se describe el ejercicio de simulación que se lleva a cabo y cuyos resultados se ofrecen en la Tabla 4.1 diseñado con el …n de comprobar la capacidad de los métodos descritos de reproducir resultados aceptables ante el problema de estimación de la tasa de depreciación endógena a través de una función de producción. Básicamente el ejercicio consiste en simular unos datos de producción generados a partir de datos de empleo y de stock de capital y posteriormente, solo teniendo en cuenta los datos de producción, empleo e inversión, estimar, por medio de los métodos descritos en la sección anterior, los parámetros de la función de producción y los parámetros de la tasa de depreciación. El objetivo es el de evaluar la bondad de las soluciones propuestas como instrumentos de estimación de una tasa de depreciación endógena. Con el …n de entender su…cientemente la mecánica seguida para llevar a cabo las simulaciones a continuación se describen en detalle los pasos llevados a cabo.

i) Se simula unas series de trabajo $\star_\star$ e inversión $\star_\star$ de tamaño $\star = 30$ que permanecerán …jas a lo largo de todo el ejercicio. La serie $\star_\star$ se construye a partir de un retardo y una tendencia y la serie $\star_\star$ también sigue un proceso autorregresivo con una tendencia, con parámetros distintos de los de la serie de empleo.

ii) Se considera una variable $\star$ que servirá como variable explicativa de la tasa de depreciación. El proceso de $\star$ es una tendencia. Por otra parte se toma $\star_0 = 0\star05$ y $\star_1 = 0\star002$ y a partir de la ecuación $\star_\star = \star_0 + \star_1\star_\star$ se generan los valores de la tasa de depreciación creciente que ‡uctúa entre $0\star05$ y $0\star11\star$

iii) A partir de los valores de $\star_\star$ y de los valores de $\star_\star$ generados en i), se construyen los valores de $\star_\star$ según la ecuación $\star_\star = \star_\star + (1 ¡ \star_\star)\star_{\star ¡ 1}\star$ tomando $\star_0 = 2225000$.

iv) Se simulan un total de $\star = 1000$ vectores de tamaño $\star$ de la variable $\star_\star$ cuya distribución es ⋆⋆⋆ ⋆ (0⋆⋆⋆)⋆siendo $\star_\star$ = 0⋆01⋆

v) Los valores de la producción que se consideran como observables proceden de una función de producción tipo Cobb- Douglas que presenta rendimientos constantes a escala. En el experimento se observarán un total de ⋆ = 1000 vectores de las variables observables (es decir, producción, empleo e inversión). Cada una de estas 1000 replicaciones del experimento procede de las variables exógenas que permanecen …jas y de los vectores de perturbaciones $\star^\star$ generados en iv).

vi) Tomando las perturbaciones simuladas $\star^\star_\star$⋆los valores de $\star_\star$ y de $\star_\star$⋆se generan los valores de la producción a partir de la ecuación

$$\star^\star_\star = \star + \star\star_\star + (1 \text{ ¡ } \star)\star_\star + \star^\star_\star$$

que se corresponde con la expresión en logaritmos de una función de producción $\star_\star = \star\star\,{}^\star_\star\star^{1\text{ ¡ }\star}_\star\star^{\star_\star}\star$ es decir de una función de producción tipo Cobb- Douglas, siendo ⋆ = 0⋆4 y ⋆ = ¡ 10⋆La justi…cación de los valores asignados a la elasticidad del capital y a la varianza de $\star_\star$ está relacionada con el valor del $\star^2$ asociado al modelo[1]. Nótese que en cada simulación del modelo la perturbación se incluye solamente en el término de error de la función de producción, lo que signi…ca que el trabajo y el capital permanecen constantes a lo largo de todas las simulaciones y estimaciones del modelo.

Una vez que se han generado todas las replicaciones del modelo, el siguiente paso consiste en estimar los parámetros de la función de producción (es decir, ⋆ y ⋆) junto con los parámetros que determinan la tasa de depreciación (es decir, $\star_0$ y $\star_1$) siguiendo los métodos sugeridos en la anterior sección – es decir, las soluciones que se diseñaron con el …n de superar la di…cultades operativas con las que habría que afrontar para estimar los parámetros de interés a partir del método NLS utilizando un programa econométrico estándar –. Para llevar a cabo la estimación en cada una de las replicaciones del modelo sólo se toman como observables la producción, el

[1] Véase nota 1 en la Sección 3.1 del Capítulo 3.

empleo y la inversión, dado que el stock de capital no es observable por ser desconocida la tasa de depreciación, como se ha indicado previamente. En la Tabla 4.1 se presentan los resultados de estas estimaciones, …gurando las medias de las estimaciones obtenidas en cada una de las replicaciones, la desviación estándar y el error cuadrático medio.

Tabla 4.1 Media, Desviación Típica y Error Cuadrático Medio
de los Parámetros de una Función de Producción (H = 1000)

$\star_0 = (\star\star\star\ \star\star_0 \star\star_1) = (\text{¡}\ 10\star0\star4\star0\star05\star0\star02)$

	Método 1	Método 2
$\overset{1}{\star}$	-10.034	-9.899
$\star\star\star$	(-0,046)	(-0,028)
$\star\star$	0.003	0.011
$\overset{1}{\star}$	0.401	0.423
$\star\star\star$	(0,009)	(0,005)
$\star\star$	0.00008	0.0006
$\overset{1}{\star}_0$	0.0456	0.074
$\star\star\star$	(0,007)	(0,004)
$\star\star$	0.00007	0.0006
$\overset{1}{\star}_1$	0.0019	0.001
$\star\star\star$	(1,3547e-4)	(1,060e-4)
$\star\star$	2.15359e-08	1.611e-07

Las estimaciones obtenidas de las simulaciones del modelo conducen en primer lugar a sostener que los resultados ofrecen una regularidad su…ciente, siendo la calidad de las estimaciones aceptable, especialmente la del método 1 – véase que es simplemente la estimación por mínimos cuadrados no lineales. Esto se comprueba por la cercanía de las estimaciones a los valores de los parámetros. El método 2, si bien funciona regularmente genera un mayor sesgo en término medio, menor varianza y mayor error cuadrático medio con todos los parámetros. Véase que el sesgo – tomando la media de las estimaciones como estimaciones – de $\star_0$ que se obtiene parece captar la variabilidad no detectada por las estimaciones de $\star_1\star$ puesto que en media este estimador resulta menor que el valor del verdadero parámetro, $0\star002\star$Finalmente, estas soluciones permiten comprobar la e…cacia de los métodos propuestos, aunque se detecta un sesgo en los resultados del método 2, que cabe esperar puesto que este método se basa en una expresión aproximada del stock de capital y no en su expresión verdadera. En cualquier caso este método aproximado podría ser de utilidad en los casos en los que resultara difícil de conseguir la convergencia de los algoritmos de optimización debida por ejemplo a la complejidad asociada a la expresión de la tasa de depreciación endógena.

4.3.3 Análisis empírico

En esta sección, en primer lugar se presenta el marco metodológico que se implementa posteriormente y a continuación se presentan los resultados empíricos obtenidos. La metodología básica que se utilizará es la presentada anteriormente basada en la estimación del stock de capital a partir de la estimación de la función de producción. Además se consideran tres extensiones de la misma. Por una parte, la consideración de la posibilidad de que la tasa de depreciación sea endógena, por otra parte, la utilización de la información disponible de la amortización del capital que figura en la contabilidad nacional y finalmente la incorporación de información a priori sobre los parámetros a partir de la inclusión de restricciones estocásticas en la estimación del modelo. Esta última cuestión se trató formalmente para el caso de la estimación por mínimos cuadrados no lineales y para el caso de la estimación indirecta (método SR, Capítulo 2 y método IISR, Capítulo 3) y resulta oportuna incorporarla en los métodos de estimación del stock de capital, puesto que mejora la varianza de los estimadores y porque además se trata de información plausible sobre la tasa de depreciación del stock de capital. Así, por ejemplo, el hecho de que se espere que este parámetro se encuentre con gran probabilidad entre el 4 y el 12 por ciento aproximadamente puede introducirse en el modelo en forma de restricción estocástica, como ya se ha indicado en el capítulo anterior y proporcionar estimaciones con buenas propiedades estadísticas.

Marco metodológico

El marco metodológico en el que se desarrollarán las estimaciones que se presentan a continuación contiene cuatro elementos fundamentales, cada uno de los cuales da lugar a un modelo particular a estimar. Los elementos que componen cada uno de estos modelos son los siguientes:

1) Método básico. En este caso la estimación se lleva a cabo sobre un modelo compuesto por la función de producción y la ecuación del inventario permanente del stock de capital en su versión básica, es decir, determinada por una tasa de depreciación constante. Como se justi...cará mas adelante, la función considerada es del tipo Cobb- Douglas con rendimientos constantes a escala. Por tanto, las ecuaciones que aporta este primer modelo son:

$$
\begin{aligned}
\star_\star &= \star\star\,{}^{\star}_{\star}\star^{1\,\text{¡}\,\star}_{\star}\,\star^{\star\star} \\
\star_\star &= \star_\star + (1\ \text{¡}\ \star)\star_{\star\text{¡}1}
\end{aligned}
\quad (4.12)
$$

Este modelo se estimaría por NLS o por ML, puesto que se trata de un modelo no lineal, tal y como se ha justi...cado previamente.

2) Método extendido. La existencia de información en la contabilidad nacional sobre la amortización del capital que ha tenido lugar en un período determinado hace posible que se tenga en cuenta otra ecuación que puede combinarse con (4.12) para aportar más información sobre los parámetros en la estimación que se quiere llevar a cabo. Según el método del inventario permanente, la amortización del capital del período $\star\star\star_\star$ es una proporción del stock de capital del período anterior. En concreto, $\star_\star = \star\star_{\star\text{¡}1}\star$ por lo que la ecuación del stock de capital podría escribirse como

$$
\star_\star\ \text{¡}\ \star_{\star\text{¡}1} = \star_\star\ \text{¡}\ \star_\star \quad (4.13)
$$

Por otra parte, de la definición de $\star_{\star}$

$$\star_{\star} - \star_{\star-1} = \star(\star_{\star-1} - \star_{\star-2})$$

y al sustituir la ecuación (4.13) en la ecuación anterior se tiene

$$\star_{\star} - \star_{\star-1} = \star(\star_{\star-1} - \star_{\star-1}) \tag{4.14}$$

Es importante tener en cuenta que este modelo considera que $\star_{\star}$ la amortización del capital, es el dato que figura en la contabilidad nacional sobre esta variable, y por tanto, es observable. Puesto que $\star$ e $\star$ son observables, la anterior ecuación puede estimarse si se le añade un término de error. En definitiva, la segunda posibilidad de análisis empírico viene dada por el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \star_{\star} &= \star\star^{\star}_{\star}\star^{1-\star}_{\star}\star^{\star_{\star}} \\ \star_{\star} &= \star_{\star} + (1 - \star)\star_{\star-1} \\ \Delta\star_{\star} &= \star(\star_{\star-1} - \star_{\star-1}) + \star_{\star} \end{aligned} \tag{4.15}$$

y la sugerencia es que se estime por el método SURE puesto que la presencia de parámetros comunes en las ecuaciones explicaría la relación entre sus términos de error.

3) Información a priori. La tercera posibilidad que se considera es la de incorporar información a priori sobre los parámetros en forma de restricciones estocásticas, siguiendo la metodología sugerida por Theil - Goldberger (1961) y ya revisada para el caso de la estimación NLS en el capítulo anterior. Ahora se trataría de introducir información a priori que se tenga sobre la tasa de depreciación en forma de ecuación estocástica que se contempla junto con las otras ecuaciones estructurales del modelo. En concreto, si se parte de un valor a priori conocido para la tasa de depreciación – que podría ser por ejemplo $\tilde{\star} = 0{\star}08$ – entonces se podría parametrizar

esta información en forma de restricción estocástica considerando que dicho valor procede de una distribución cuya esperanza es el parámetro ⋆⋆a estimar. Adicionalmente es necesario imponer un supuesto sobre la distribución – parece razonable imponer una distribución normal o uniforme – y un valor para la varianza con el …n de que dicha distribución reproduzca valores que a priori se consideraría razonables a la luz de la teoría o de otras investigaciones. En de…nitiva, la información a priori en forma de restricciones estocásticas para la tasa de depreciación suponiendo normalidad daría lugar a considerar el valor que se dispone a priori para el parámetro como el resultado de la distribución siguiente

$$\tilde{\star} \text{ » } \star \ (\star\star\star_{\star})$$

siendo $\star_{\star}$ la desviación estándar de $\star$ conocida a priori. Así, por ejemplo si se quiere tener en cuenta en la estimación del modelo que en el 95 por ciento de los casos, la tasa de depreciación se encontraría entre el 4 y el 12 por ciento, entonces podría tomarse $\tilde{\star}$ = 0⋆08 y $\star_{\star}$ = 0⋆02 y el modelo incluiría la ecuación 0⋆08 = ⋆ + ⋆⋆siendo ⋆ » ⋆ (0⋆0⋆02)⋆

Teniendo en cuenta los dos modelos de…nidos anteriormente en 1) y 2), la incorporación de las restricciones estocásticas sobre los parámetros puede hacerse partiendo del Método básico o bien partiendo del modelo extendido, en función de qué ecuaciones se tengan en cuenta. Así, si el modelo incluye además de la restricción estocástica, el sistema (4.12) se tendría el Método básico con información a priori y se estimaría por el método SR descrito en el Capítulo 2 (véase De…nición 4) y si el modelo incluye el sistema (4.15) se tendría el Método extendido con información a priori y se estimaría por SURE.

4) Tasa de depreciación endógena. Un contexto adicional ya presentado en secciones anteriores resulta de considerar la tasa de depreciación como un elemento endógeno que depende de una o

varias variables. En este caso, por tanto, el stock de capital estaría determinado por la ecuación

$$\star_\star = \star_\star + (1 \text{ ¡ } \star_\star)\star_{\star \text{¡} 1}$$

$$\star_\star = \star_0 + \star_1 \star_\star$$

donde $\star_\star$ es la tasa de depreciación endógena para la cual se propone la especi…cación (no es necesario que sea lineal ni unidimensional) y $\star_\star$ la variable explicativa de la tasa de depreciación, proporcionada por la teoría. En las estimaciones llevadas a cabo se han considerado varias posibilidades para $\star$: la tasa de crecimiento de la inversión, la del producto y una variable dummy para explicar un cambio discreto en $\star$. La idea económica es recoger el impacto en la producción de la intensidad del uso del capital o la obsolescencia como resultado de la inversión que contiene mejoras tecnológicas. En los resultados empíricos que se presentan más adelante se ha detectado signi…catividad de algunas variables proxis de las anteriores para explicar la tasa de depreciación, como la tasa de crecimiento de la inversión o del producto. Si bien el propósito de este trabajo no es el de aportar una teoría sobre la depreciación, sino el de proveer de los instrumentos econométricos para detectar dicho fenómeno, cabe también ofrecer una interpretación económica al signo del coe…ciente $\star_1$ obtenido. Este cuarto elemento de la metodología llevada a cabo en el análisis empírico se debe combinar con el primero, recogido en el sistema (4.12), pudiéndose combinar con los otros, la información contable existente sobre $\star$ y la información a priori existente sobre $\star\star$En el primer caso, a la estimación del modelo en el que la tasa de depreciación es endógena se denomina Método general y se estima por NLS o ML, aplicando alguna de las soluciones descritas en la Sección 4.3.2. Si se tiene en cuenta la información a priori, se denomina Método general con información a priori y se estima por SR o bien por ML teniendo en cuenta una ecuación mas para la restricción sobre el parámetro. Si se tiene en cuenta la ecuación (4.14) se tiene el Método general extendido, y se estimaría por SURE.

En caso de que se combinen la estimación de una tasa de depreciación variable sobre la que existe información a priori es necesario tener en cuenta un elemento adicional con el …n de hacer consistente ambos elementos. Esta información se parametriza suponiendo que $\tilde{\bar{\star}}$ » $\star$ $(\bar{\star}\star\star_{\star})$, siendo $\tilde{\bar{\star}}$ el valor observado a priori de la tasa de depreciación y $\overset{1}{\star}$ la esperanza de esta distribución. Con el …n de hacer esta especi…cación compatible con la dependencia de $\star$ de la variable $\star_{\star}$, tomando esperanza de $\star$ se obtiene:

$$\bar{\star} = \star_0 + \star_1 \overset{1}{\star}$$

En efecto, si $\star_{\star} = \star_0 + \star_1 \star_{\star}\star$ tomando esperanza se tiene que $\overset{1}{\star} = \star_0 + \star_1\star\ (\star)\star$ Considerando el estimador de $\star\ (\star)\star$ se tiene en su lugar $\overset{1}{\star} = \star_0 + \star_1 \overset{1}{\star}\star$ Puesto que la ecuación de la restricción estocástica en la que se modeliza la información a priori es $\tilde{\bar{\star}} = \bar{\star} + \star\star$ la manera de hacer compatible la restricción estocástica y la estructura de la variabilidad de la tasa de depreciación es incorporar la ecuación

$$\tilde{\bar{\star}} = \star_0 + \star_1 \overset{1}{\star} + \star \tag{4.16}$$

siendo $\overset{1}{\star}$ la media observada de $\star$ y $\tilde{\bar{\star}}$ el dato a priori que se tiene de la tasa de depreciación. Por consiguiente, la anterior ecuación es la restricción estocástica a incorporar en la estimación del modelo.

En las estimaciones que se han llevado a cabo los cuatro elementos antes indicados se han combinado de una u otra manera para cada una de las economías consideradas en función de la necesidad de introducir nuevos elementos cuando los datos y las estimaciones asociadas así lo requerían. En todos los casos se ha estimado en primer lugar según el Método básico, formado por el sistema de ecuaciones (4.12) en el que se estima una tasa de depreciación constante. En segundo lugar, también para todos los países excepto para España (no se disponía de los datos requeridos para todo el período muestral) se ha estimado el modelo de partida al que se le añade la ecuación (4.15) sobre la amortización del capital. Posteriormente se ha intentado estimar una tasa de depreciación endógena y en todos los casos los resultados han sido fructíferos, si bien no siempre la variable explicativa ha sido la misma. Finalmente, a las anteriores estimaciones hay que añadir una última, la de mayor complejidad, en la que a la estimación de la tasa de depreciación variable se le añadía o bien información a priori sobre dicho parámetro o bien información contable. En de...nitiva, como se indica en las tablas que se presentan a continuación, se presentan para cada país considerado cuatro estimaciones – las más signi...cativas – en las que se desarrollan los elementos que de...nen el marco metodológico.

A continuación se pasa a presentar los resultados obtenidos al aplicar la metodología descrita anteriormente de estimación del stock de capital a partir de la estimación de una función de producción. Es decir, teniendo en cuenta conjunta o alternativamente la existencia de información contable sobre la amortización del capital, la existencia de información a priori sobre la tasa de depreciación y la endogeneización de la tasa de depreciación. Para llevar a cabo la estimación de los parámetros teniendo en cuenta las particularidades anotadas de la expresión del stock de capital – en particular el hecho de que el número de variables explicativas dependa del período que se considere – se aplican las soluciones sugeridas en la Sección 4.3.2.1 –. Como resultado de ello se obtienen resultados satisfactorios en la aplicación de la metodología en la estimación de la tasa de depreciación conjuntamente con los parámetros de una función de producción para España, Francia, Reino Unido y Alemania. Los resultados encontrados arrojan en algunos casos signi...cativas diferencias respecto de los valores de la tasa de depreciación que normalmente se consideran en los trabajos empíricos asociados a los datos de la contabilidad nacional. En términos generales las tasas resultantes estimadas se encuentran entre el 4% y el 6%, mientras que los valores que resultan más familiares se encuentran en torno al 10%. En todos los casos se ha estimado una función de producción tipo Cobb- Douglas en la que se ha supuesto la existencia de rendimientos constantes a escala. Las estimaciones resultantes se han sometido a un conjunto de contrastes de validación del modelo estimado.

Las estimaciones se han llevado a cabo por NLS, ML y SURE. En la mayoría de los casos ha sido necesario considerar el término de error del modelo como un proceso AR(1), si bien, en algunos casos a medida que se consideraba una estructura más compleja del modelo se encontraba un nivel de correlación del error de menor importancia. Estas particularidades se recogen en detalle en las tablas correspondientes sobre las estimaciones de cada país. Por otra parte, el problema de la no identi…cación del stock de capital inicial se ha solucionado tomando un valor concreto para $\star_0$. Este valor se ha tomado de un rango de valores próximos al que …gura en las fuentes estadísticas para el año 1969, eligiéndose el asociado al mejor ajuste econométrico.

En la Tabla 4.2 se presentan algunos elementos descriptivos de las estimaciones llevadas a cabo para los distintos países, en relación con el período muestral, la valoración monetaria de las variables y el valor del stock de capital inicial tomado en las estimaciones. En relación con la variable Inversión, los datos que se han tomado para realizar la estimación comprenden solamente los relativos a la inversión no residencial, puesto que esta última presenta por su naturaleza escasa relación con la capacidad productiva acumulada en el stock de capital. Por otra parte, en la variable empleo, se ha omitido el del sector primario, por su escasa importancia en el empleo total y en la producción agregada. Para todos los países excepto España, los datos de producción, empleo (no agrícola) e inversión (no residencial) han sido extraídos de los "OCDE Economic Surveys" que este organismo publica para los países miembros. En el caso de España, los datos han sido extraídos de la base de datos Tempus, elaborada por el INE y accesible por internet. La razón es que esta base de datos contaba con observaciones mas actuales que las de los informes de la OECD.

Tabla 4.2. Información General sobre las Estimaciones
de la Función de Producción para cada país

	España	Francia	Reino Unido	Alemania
Período muestral	1970 - 1997	1970 - 1992	1970- 1994	1970 - 1995
Valoración de las variables	Mill. de Pts.	Ff billions	Mill. de Libras	Dm billions.
Año base	1986	1980	1985	1980
Valor $\star_0$	$1.3x10^7$	$255x10^4$	401.1	$2x10^6$
Fuente datos	Tempus. INE	OCDE Economic Surveys		

Los resultados de las estimaciones para cada uno de los países se recogen en las Tablas 4.3, 4.4, 4.5 y 4.6. Las estimaciones de las funciones de producción de los distintos países considerados se han sometido a los contrastes de hipótesis habituales obteniéndose como resultado que no se rechazaban dichas hipótesis nula, por lo que se aceptan como válidas. Los contrastes que se han llevado a cabo son: a) forma funcional, b) especi…cación dinámica, c) cointegración, d) estabilidad, e) heteroscedasticidad, y f) variables omitidas. En general los resultados son aceptables para las estimaciones elegidas. A continuación se presenta en detalle los resultados obtenidos y su interpretación para cada uno de los países.

España

Las metodologías descritas al principio de esta sección se han aplicado con éxito para los datos de la economía española durante en período de 1970 a 1997. Se ha ajustado una función de producción tipo Cobb-Douglas, puesto que los datos no permitían una especi…cación más compleja. Los rendimientos a escala se han considerado constantes, por argumentos teóricos y porque los resultados que se encontraban en otro caso eran menos coherentes. La especi…cación estimada en primer lugar, en logaritmos es

⋆⋆ = ⋆ + ⋆⋆⋆ 1⋆ + ⋆⋆⋆⋆ + (1 ¡ ⋆)⋆⋆⋆ + ⋆⋆

siendo ⋆⋆ el PIB, ⋆, la constante, ⋆ 1⋆, una variable dummy (⋆ 1⋆ = 0⋆⋆ · 1983⋆⋆ 1⋆ = 1⋆⋆ ⋆ 1983; el período de corte se ha seleccionado como aquel que dio lugar al mejor ajuste entre todos los posibles) ⋆⋆, el empleo, ⋆⋆, el stock de capital y ⋆⋆, el término de error aleatorio. En el modelo ajustado se determinó que el error seguía un proceso AR(1) en algunas de las especi…caciones, lo que podría entenderse como el resultado de shocks en la productividad. Por tanto, el término de error ⋆⋆ sigue el proceso ⋆⋆ = ⋆⋆⋆¡1 + ⋆⋆ siendo ⋆⋆ » ⋆ (0⋆⋆⋆)⋆ La estimación de este modelo en el que la tasa de depreciación del stock de capital es constante …gura en la columna I. Por otra parte se consideró también una tasa de depreciación variable, probándose como variables explicativas una variable dummy y alternativamente la tasa de crecimiento del PIB. Por tanto, el stock de capital y la tasa de depreciación serían ahora

$$⋆_⋆ = (1 ¡ ⋆_⋆)⋆_⋆ + ⋆_⋆$$

siendo $⋆_⋆ = ⋆_0 + ⋆_1 ⋆⋆_⋆ ⋆$ donde $⋆_⋆ = ⋆_{2⋆} ⋆$ en la columna II ($⋆_{2⋆} = 0 ⋆⋆ \cdot 1989 ⋆⋆_{2⋆} = 1 ⋆⋆ ⋆$ 1989; el período de corte se ha elegido como aquel asociado al mejor ajuste entre todos los posibles) y $⋆_⋆ = ¢⋆_⋆ ⋆$ en las columnas III y IV.

En la columna IV se introduce información a priori sobre la tasa de depreciación. Los principales resultados empíricos obtenidos se presentan en la Tabla 4.3 (se han omitido otras estimaciones menos signi…cativas). Todos los modelos se han estimado por máxima verosimilitud, suponiendo que los errores seguían una distribución normal.

Tabla 4.3. Estimaciones de España

	I	II	III	IV
$\star$	5.6	5.56	5.33	5.15
	(20.7)	(20.3)	(18.4)	(23.1)
$\star$	.03	.045	.032	.033
	(2.56)	(4.42)	(3.26)	(3.58)
$\star$	.71	.71	.68	.65
	(19.8)	(19.2)	(17.4)	(21.9)
$\star_0$	.0374	.0384	.0597	.0734
	(1.64)	(1.52)	(2.66)	(4.83)
$\star_1$		.0077	-.178	-.201
	()	(3.95)	(1.96)	(2.28)
$\star$	.51		.39	.4
	(2.89)	(n.s)	(2.1)	(2.2)
$\star$	.0102	.00938	.00973	.0098
$\hat{\star}$	3.74%	4.03%	5.48%	6.79%

En cuanto a la interpretación de los resultados obtenidos, cabe señalar en primer lugar que en los cuatro modelos estimados la tasa de depreciación media (que ...gura en la última columna de la tabla) se encuentra entre el 3.74 % (Columna I) y el 6.79 %. (columna IV). El valor obtenido en la primera estimación resulta demasiado bajo, por lo que se consideran especi...caciones más complejas del modelo. Así la segunda columna en la que se estima una tasa de depreciación variable dependiente de la variable dummy $\star_{2\star}$ da lugar a una tasa de depreciación media del 4.61 %. Este valor resulta más admisible a priori que el obtenido en la primera columna. Sin embargo, la presencia de una variable dummy aunque requerida por los datos, debe ser explicada económicamente. Por esta razón se consideró en la columna III la tasa de crecimiento de la producción como la variable explicativa de la tasa de depreciación, lo que generó una tasa de depreciación media del 5.48 %, mayor que las obtenidas previamente. El signo negativo del coe…ciente del ratio de crecimiento de la producción es negativo, lo que signi…ca que ante la disminución de la tasa de crecimiento del PIB, la tasa de depreciación aumenta (y viceversa). Esto puede ilustrar el hecho de que cuando la producción y la demanda decrecen algunos de los bienes de capital usados se desechan. Así, la inversión juega el papel de mecanismo de ahorro de costes, además de ser el medio de incrementar la capacidad de producción. En la segunda submuestra la tasa de crecimiento del PIB disminuye, por lo que la tasa de depreciación resultante aumenta respecto de la primera submuestra. Esta dinámica es consistente con la que se ilustra en la columna II puesto que la dummy explica un aumento en la tasa de depreciación para la segunda submuestra. En la columna IV se presentan los resultados obtenidos cuando se combina información muestral con información a priori sobre la depreciación. Tomando como valor a priori para la tasa de depreciación el 8% con un error estándar del 2%, la estimación que se obtiene en promedio para el total de la muestra del 6.79%.

Francia

Siguiendo la misma estructura que en el caso anterior, en primer lugar se presentan las particularidades de los distintos modelos estimados. Los resultados de las estimaciones …guran en la Tabla 4.4, habiéndose omitido otras estimaciones menos signi…cativas. Finalmente se comentan las estimaciones y los contrastes realizados. Se ha ajustado una función de producción tipo Cobb-Douglas. Tanto las pruebas realizadas con especi…caciones más complejas como los contrastes de validación frente a una especi…cación del tipo CES permiten justi…car esta elección. Se presentan un total de cuatro estimaciones. La columna I contiene los resultados de aplicar el Método básico. Tomando logaritmos de la función de producción Cobb-Douglas, la especi…cación que dio lugar al mejor ajuste es

$$\star_\star = \star + \star\star_\star + (1 \text{ ¡ } \star)\star_\star + \star_\star$$

siendo ⋆⋆ el PIB en logaritmos, ⋆, la constante, ⋆⋆, es el empleo, ⋆⋆, el stock de capital y ⋆⋆, el error aleatorio, que admitía la presencia de autocorrelación generada por un proceso AR(1). Por tanto se incluyó en la estimación la ecuación ⋆⋆ = ⋆⋆⋆¡1 + ⋆⋆⋆siendo ⋆⋆ » ⋆⋆⋆(0⋆⋆⋆)⋆El modelo se estimó por NLS a partir de la transformación Cochranne-Orcutt. En la columna II …gura la estimación del Método extendido (ecuaciones (4.15)). Se ha considerado un único ⋆ en ambas ecuaciones. El modelo no restringido, con un parámetro distinto de la tasa de depreciación en cada ecuación no dio lugar a resultados razonables para la casi totalidad de los parámetros, si bien, la tasa de depreciación asociada a la ecuación (4.14) tomaba precisamente el valor que …gura en la Tabla 4.4, es decir, de 10.5 %. En la columna III …gura la estimación del Método general con información a priori, estimándose una tasa de depreciación que depende de la tasa de crecimiento de la inversión bruta. La información a priori que se ha introducido es el valor ⋆ = 0⋆07 y la desviación de la restricción estocástica asociada se tomó de 0⋆04⋆Finalmente en la columna IV nuevamente se presente una estimación en la que se considera la variabilidad de la tasa de depreciación, siendo en este caso la variable explicativa ⋆ 2⋆⋆⋆ 2⋆ = 0 si ⋆ · 1975; ⋆ 2⋆ = 1 si ⋆ ¸ 1976⋆El año de corte de la muestra se identi…có como el que dio lugar al mejor ajuste entre todos los considerados.

Tabla 4.4 Estimaciones de Francia

	I	II	III	IV
$\star$	-6.467	-5.492	-4.717	-5.004
	(-9.908)	(-4.9049	(-4.556)	(-4.993)
$\star$	0.854	0.720	0.546	0.592
	(6.171)	(3.305)	(3.019)	(2.805)
$\star_0$	0.064	0.105	0.428	0.104
	(80.17)	(134.21)	(3.927)	(23.601)
$\star_1$			-0.349	-0.038
			(2.471)	(1.777)
$\star$	0.461	0.871	0.919	0.668
	(2.165)	(24.062)	(34.803)	(7.437)
$\frac{1}{\star}$	0.064	0.105	0.068	0.074

Las conclusiones que se extraen de los resultado se presentan a continuación. De la estimación de la columna I resulta una tasa de depreciación del 6.4%. Puesto que este valor tiene que ser mayor que cero, se debe llevar a cabo un contraste de signi…catividad unilateral del que resulta que esta estimación es signi…cativa al nivel del 95% (este resultado también se encuentra en el resto de estimaciones), siendo necesaria la introducción de un término de error autorregresivo de primer orden. En la columna II …gura la estimación del modelo en el que junto a las ecuaciones de la función de producción y del stock de capital …gura la ecuación (4.14). El resultado fundamental es que la tasa de depreciación estimada llega a ser del 10.5 %, signi…cativamente mayor que la que …gura en la columna I. La estimación conjunta de las ecuaciones se lleva a cabo introduciendo la restricción de igualdad del parámetro de la depreciación en ambas ecuaciones en las que aparece, e indudablemente el valor resultante se debe a la presencia de la ecuación que contiene la información contable. Constata este hecho el resultado que se obtiene en la estimación del modelo sin incluir la restricción de igualdad de la tasa de depreciación en ambas ecuaciones. En ese caso, la tasa estimada correspondiente a la ecuación (4.14) es exactamente la misma que la que se obtiene en el modelo restringido. Esta estimación por otra parte da lugar a valores inadecuados para el resto de parámetros, por lo que no se presenta. Cabe comentar que la correlación decae sensiblemente, lo que se re‡eja en la signi…catividad del estadístico asociado a $\star$ y en comportamiento de los residuos resultantes, mas próximos al ruido blanco que en el caso anterior. En la columna III ($\star$ variable dependiente de la tasa de crecimiento de la inversión e información a priori ($\tilde{\star} = 0\star08$ y $\star_\star = 0\star04$)), se obtiene una tasa media de depreciación del 6.8 % que depende negativamente de la inversión, mientras por otro lado los valores de la elasticidad de los factores resultan más razonables a la luz de los resultados de otros trabajos empíricos. Los relación negativa entre inversión y tasa de depreciación indica que ante aumentos de la tasa de crecimiento de la inversión, la tasa de depreciación disminuye. En el período analizado, el comportamiento de la inversión es ligeramente decreciente, y la tasa de depreciación resultante es creciente, oscilando entre el 4.4% de 1971 y el 9.4% de 1992. La interpretación económica podría estar asociada a que en los períodos en los que la inversión cae por la pérdida de actividad económica, las empresas simultáneamente deciden acelerar el proceso de amortización de sus activos, para sustituirlos en los periodos siguientes por activos nuevos. Una vez que los activos se adquieren (en dichos períodos aumenta la inversión) el capital nuevo se deprecia a una tasa menor. El valor medio de la tasa de depreciación a lo largo del período estudiado (6.8%), es coherente con los resultados encontrados en las columnas I,II y IV. En la columna IV la tasa de depreciación depende de una variable dummy siendo la tasa de depreciación media del 7.4%, y el valor de la elasticidad de los factores próximo a los de la columna III. Según se re‡eja, la tasa de depreciación pasa del 10.4 % en el primer subperíodo de la muestra al 6.6 % a partir de 1976. Estos resultados no son consistentes con los de la columna III puesto que en la segunda submuestra la inversión crece a una tasa media menor, y por tanto la tasa de depreciación debería aumentar en la segunda submuestra. Sin embargo, la escasa signi…catividad del parámetro $\star_1$ justi…ca esta contradicción.

Reino Unido

En cuanto a las particularidades del modelo estimado, al igual que en los casos anteriores, se ha estimado una función de producción tipo Cobb-Douglas con rendimientos constantes a escala habiéndose requerido la consideración de autocorrelación AR(1) en el término de error del modelo. Las estimaciones obtenidas con especi…caciones más complejas no dieron lugar a valores razonables para los parámetros. Por otra parte se acepta esta especi…cación como caso particular de una función CES. Dada las propiedades de la autocorrelación detectada se estimó el modelo a partir de su transformación de Cochranne-Orcutt mediante NLS o mediante el método SURE, en función del caso considerado. En la especi…cación del modelo resultó signi…cativa la inclusión de una variable dummy para el intercepto en la mayoría de las especi…caciones y las metodologías consideradas. Además de la estimación simple de una función de producción junto con el parámetro constante de la tasa de depreciación, se estimó el modelo incluyendo información a priori, en forma de restricciones estocásticas y en otros casos teniendo en cuenta la información contable sobre la amortización del capital. También se estimó el modelo considerando una tasa de depreciación endógena dependiente del ratio de crecimiento de la inversión bruta. En este último caso desaparece la autocorrelación del error así como la signi…catividad de la variable dummy en la constante del modelo. Los resultados se presentan en la Tabla 4.5.

Tomando logaritmos de la función de producción Cobb-Douglas, la especi…cación que dio lugar al mejor ajuste es

$$\star_\star = \star + \star\star_{1\star} + \star\star\star_\star + (1 \text{ ¡ } \star)\star_\star + \star_\star$$

siendo $\star_{1\star} = 0$ si $\star \cdot 1982$ y $\star_{1\star} = 1$ si $\star$ ¸ 1983; $\star_\star$ el PIB en logaritmos; $\star$, la constante; $\star_\star$, el empleo y $\star_\star$, el stock de capital. Distintos contrastes llevados a cabo sobre los residuos condujeron a considerar la presencia de autocorrelación de primer orden, de tal manera que se considera que $\star_\star$ sigue el proceso $\star_\star = \star\star_{\star\text{¡}1} + \star_\star$ siendo $\star_\star$ ruido blanco. Los parámetros que se han estimado son por tanto $\star\star\star\star\star\star\star$ y $\star\star$ En la columna I …gura la estimación del Método básico, en el que se estima una $\star$ constante. La estimación de la columna II …gura la estimación del Método básico con información a priori, que es el modelo formado por las ecuaciones (4.12) y (4.16) habiéndose tomado $\tilde{\star} = 0{\star}08$ y $\star_{\star} = 0{\star}04$. En la columna III …gura la estimación del Método extendido modelo que combina la función de producción con la ecuación que relaciona la amortización del capital con la inversión neta a través de la tasa de depreciación. En la columna IV se ha estimado siguiendo el Método general, es decir, considerando una tasa de depreciación endógena y siendo la variable explicativa la tasa de crecimiento de la inversión. Como en los casos de España y Francia, se ha aplicado el denominado Método 1 de…nido en la Sección 4.3.

Tabla 4.5 Estimaciones del Reino Unido

	I	II	III	IV
$\star_1$	-2.30465	-1.8391	4.4459	-1.0040
	(-2.3512)	(-3.2764)	(10.6546)	(-2.6379)
$\star_2$	0.1268	0.1455	0.0499	-
	(2.5269)	(3.6899)	(2.1517)	-
$\star$	0.5160	0.4151	0.5505	0.1928
	(2.1951)	(2.8755)	(4.9948)	(2.1051)
$\star$	0.6503	0.6678	0.6772	-
	(4.8124)	(6.3059)	(4.5040)	-
$\star_0$	0.0432	0.0767	0.0381	0.4894
	(25.0675)	(152.916)	(76.4569)	(7.9972)
$\star_1$				-0.4138
				(6.0561)
$\frac{1}{\star}$	0.0432	0.0767	0.038	0.0540

A continuación se comentan los resultados de las estimaciones que …guran en la Tabla 4.5. La tasa de depreciación estimada que …gura en la columna I es del 4.3%. Otras especi…caciones más complejas dan lugar en general a valores mayores para este parámetro. Así., en la columna

II (método básico con información a priori) se tiene como resultado una tasa de depreciación del 7.3% habiéndose introducido la información a priori del 8% con una desviación estándar de 0.04. En la columna III (Método extendido) se estima el sistema de ecuaciones (4.15) y los resultados arrojan una tasa del 3.8%, sin duda determinada por la información contable sobre la amortización del capital. Finalmente, en la columna IV se estima una tasa de depreciación variable que depende de la tasa de crecimiento de la inversión. El coe…ciente $\star_1$ al igual que en los casos restantes es negativo, señalando que las empresas ante el aumento de la inversión que incorpora nueva tecnología, aminoran a corto plazo su tasa de depreciación. La tasa media es en este caso del 5.4 %. Cabe mencionar que en este último caso la especi…cación del modelo que dio lugar al mejor ajuste no presenta autocorrelación en el término de error ni resultaba signi…cativa la variable dummy que afectaba al término constante. Estos hechos pueden estar explicados por la mejor medición del stock de capital asociada a la estimación de la tasa de depreciación variable. En conclusión, se podría concluir que la tasa media de depreciación del Reino Unido, a la luz de los resultados de la metodologías propuestas, se encuentra en una banda del 4.5 %al 6.5 %, lo que la sitúa en valores cercanos a los encontrados para los países analizados.

Alemania

En primer lugar se presentan las particularidades de los distintos modelos estimados y de las metodologías asociadas a los mismos para estimar los parámetros de interés. A continuación se presentan los resultados de dichas estimaciones en la Tabla 4.6 y …nalmente se comentan dichos resultados. Las estimaciones que se presentan son sólo una selección de algunas de las más representativas, de un conjunto de estimaciones en las que se ha combinado de una u otra forma las distintas posibilidades planteadas en la Sección 4.3.3.1 Como en el resto de los casos se presentan las estimaciones del llamado Método básico (columna I), del Método éxtendido (columna II) – por tanto, en las columnas I y II se ha estimado el modelo considerando que la tasa de depreciación es constante – del Método general (columna III) y del Método general con información a priori (columna IV) – por tanto en las columnas III y IV se ha estimado el modelo considerando una tasa de depreciación endógena dependiente de la tasa de crecimiento de la inversión –

Al igual que en los casos del resto de países se ha ajustado una función de producción tipo Cobb-Douglas (otras especi…caciones más complejas no dieron lugar a estimaciones razonables y además, se acepta esta especi…cación como caso particular de una función CES. Los métodos de estimación utilizados son como es habitual, NLS y en el caso del método extendido, el método SURE. Tomando logaritmos de la función de producción Cobb-Douglas, se presentan a continuación las especi…caciones que dieron lugar a los mejores ajustes según la metodología considerada.

Columna	Especi…cación de la función de producción
Col. I	$\star_\star = \star + \star\star\star_\star + (1 ¡ \star)\star\star_\star + \star$
Col. II	$\star_\star = \star + \star\star\ _{1\star} + \star\star\star_\star + (1 ¡ \star)\star\star_\star + \star$
Cols. III y IV	$\star_\star = \star + \star\star\star_\star + (1 ¡ \star)\star\star_\star + \star;\qquad \star_\star = \star\star_{\star ¡ 1} + \star_\star$

siendo $\star_\star$ el PIB en logaritmos, $\star$, la constante, $\star_\star$, es el empleo, $\star_\star$, el stock de capital y $\star_\star$, el error aleatorio (en algunos casos con estructura AR(1) y $\star\ _{1\star} = 0$ si $\star\ \cdot$ 1989; $\star\ _{1\star} = 1$ si $\star$ ¸ 1990. Los resultados se presentan en la Tabla 4.6.

Tabla 4.6 Estimaciones de Alemania

	I	II	III	IV
$\star$	-5.470	-5.714	-5.636	-5.560
	(-9.419)	(-14.573)	(-10.197)	-11.499
$\star$		0.030		
		(3.065)		
$\star$	0.53758	0.601	0.864	0.773
	(4.019)	(6.615)	(8.402)	12.788
$\star$			0.171	0.134
			82.021	1.896
$\star_0$	0.045	0.062	0.326	0.313
	(51.804)	(91.123)	(19.922)	21.730
$\star_1$			-0.234	-0.227
			(-7.582)	-7.599
$\frac{1}{\star}$	0.045	0.062	0.087	0.080

Las conclusiones que se extraen de los resultado se presentan a continuación. En la columna I se presentan los primeros resultados en los que la tasa de depreciación constante estimada es del 4.5%. Cabe señalar que este resultado sobre la tasa de depreciación llega hasta el 6 % al considerar valores del stock de capital menores al elegido, manteniéndose las estimaciones del resto de parámetros muy parecidas. Se ha elegido la estimación presentada por ser esta la asociada a un mayor valor de la función de verosimilitud, y por el mejor comportamiento de los residuos. En esta estimación el término de error parecía estar correlacionado temporalmente, pero al intentar modelizarlo con una especi…cación del tipo AR(1), los resultados obtenidos no eran satisfactorios. Por esta razón otras metodologías parecían justi…cadas, con el objeto de obtener estimaciones más robustas. En la columna II, se presentan los resultados de aplicar el Método extendido que añade al método básico la relación entre la amortización del capital y la inversión neta, estimándose el modelo por SURE. Como resultado se obtiene que la tasa de depreciación estimada es ahora del 5.2 % y el resto de parámetros permanece prácticamente en los mismos valores. Por otra parte, mejoran otras propiedades de la estimación como el valor de la función de verosimilitud, pero sigue apareciendo un cierto grado de autocorrelación en el error. En las columnas III y IV la tasa de depreciación depende de la tasa de crecimiento de la inversión privada. En ambos casos la relación que se encuentra es negativa, como en el resto de los países analizados, fluctuando la tasa de depreciación estimada entre el 7.1 % y el 12.5 %. La tasa de depreciación media se encuentra en el 8.7 %. En la columna IV se lleva a cabo la estimación del mismo modelo, pero teniendo en cuenta la combinación de información a priori sobre la tasa de depreciación. Los resultados son muy parecidos a los de la columna III, siendo la tasa media de depreciación del 8 %. En general, la estimación de la columna IV tiene mejores propiedades. Los valores a priori tenidos en cuenta son $\bar{\delta} = 0.08$ y $\sigma_{\delta} = 0.04$. En estos dos últimos casos, resulta significativa la estimación del modelo transformado para su estimación Cochranne-Orcutt, y el residuo obtenido no posee autocorrelación significativa, por lo que la estimación de la columna IV resulta ser la de mejores propiedades y la asociada a los valores mas aceptables en general para los parámetros.

En las siguientes secciones se contempla la solución del problema de estimación del stock de capital aplicando el método de Estimación Indirecta bajo Restricciones Estocásticas (IISR) definido en el Capítulo 3. En primer lugar, en la Sección 4.4, se llevan a cabo un conjunto de simulaciones en las que se estima una familia de modelos en los que el stock de capital está determinado por una tasa de depreciación endógena (estocástica y no estocástica). En la Sección 4.5 se da un paso adicional al describir un modelo en el que además de las propiedades introducidas en los primeros modelos se añade una perturbación estocástica a la elasticidad de los factores de la función de producción, a la tasa de depreciación y se incorporan restricciones estocásticas no lineales sobre dichos parámetros. El propósito de dicho ejercicio consiste en aplicar la metodología definida y valorar las posibilidades de su funcionamiento.

4.4 Estimación del stock de capital mediante IISR

En la sección anterior se presentaron una serie de resultados empíricos en los que se implementaban determinadas metodologías que permitían la combinación de información muestral, contable e información a priori sobre los parámetros. Estas metodologías se aplicaron a modelos especí…cos y en de…nitiva se basaban en la implementación de los métodos de estimación tradicionales, como mínimos cuadrados no lineales (NLS), máxima verosimilitud (ML) o SURE. Los resultados obtenidos al respecto fueron aceptables y por consiguiente, al menos en principio, los métodos de estimación tradicionales constituyen herramientas e…caces para resolver los problemas relacionados con la estimación del stock de capital a partir de la estimación de una función de producción. Este es el punto de partida de lo que se presenta a continuación, que básicamente consiste en la solución del mismo problema pero en este caso mediante métodos econométricos basados en la simulación. Es necesario, antes de seguir adelante, justi…car la aplicación de los métodos basados en la simulación a este problema en principio resuelto por los métodos tradicionales de estimación. Varias razones se presentan para argumentar este paso. En primer lugar, en el análisis empírico presentado en las Sección 4.3 la estimación por ML no siempre resultó factible. Aunque es equivalente a la estimación NLS en muchos casos se presentaron problemas de convergencia en los algoritmos de minimización. Estos problemas podrían estar relacionados con los valores iniciales de los parámetros y con la complejidad de la función de verosimilitud en el modelo que consideraba la existencia de autocorrelación en el error y al mismo tiempo una tasa de depreciación endógena. Otra razón es la necesidad de considerar estructuras teóricas más ‡exibles en la tasa de depreciación que permitan explicar mejor el stock de capital y obtener mejores ajustes en la función de producción, por ejemplo, considerar una tasa de depreciación multivariante, bien una dependencia no lineal con sus variables explicativas o introducir un elemento estocástico en la ecuación de la tasa de depreciación. Este caso requeriría que las restricciones estocásticas sobre este parámetros recogieran dichas propiedades, lo que sin duda añadiría mayor nivel de complejidad en el uso de los métodos tradicionales de estimación. Finalmente, la consideración de variabilidad estocástica en los parámetros del modelo requiere métodos de estimación basados en la simulación. Por tanto, como conclusión, puede decirse que si bien se pueden implementar las metodologías sugeridas basadas en los métodos tradicionales de estimación para medir el stock de capital a partir de una función de producción, estos métodos no siempre funcionan adecuadamente o no constituyen las herramientas adecuadas. Por otra parte, es patente la necesidad de diseñar modelos más so…sticados en los que se consideren formas más ‡exibles del patrón de depreciación en los que sería especialmente útil combinar la información a priori sobre los parámetros con la información muestral. Las cuestiones apuntadas hacen razonable proponer el uso del método IISR para estimar el stock de capital en los escenarios considerados. El objetivo de ésta y la siguiente sección es ilustrar el funcionamiento de esta metodología en el marco de algunos modelos de interés macroeconométrico.

A continuación se describen los ejercicios de simulación en los que se estima junto con los parámetros de una función de producción, la tasa de depreciación y por tanto el stock de capital mediante el método IISR. La idea de los ejercicios que se diseñaron y cuyos resultados se presentan es ilustrar mediante una familia de modelos la implementación del método IISR en la estimación del stock de capital cuando la tasa de depreciación es variable y se dispone de información a priori sobre la misma. Los distintos modelos que pasan a describirse contienen mayores niveles de complejidad sucesivamente a medida que se incorporan elementos adicionales en el modelo de partida, bien por la estructura de la tasa de depreciación, que pasa de considerarse constante a estocástica, por el carácter de los parámetros de la función de producción, que también pasan a considerarse variables, y por el carácter de las restricciones estocásticas, que se suponen lineales inicialmente y pasan a considerarse no lineales posteriormente.

En las siguientes secciones 4.1 y 4.2 se describen dos modelos en los que la producción depende solo del stock de capital – en la siguiente sección se modi…ca este supuesto, si bien se puede justi…car interpretando las variables producción y capital en unidades per-capita, como es habitual en modelos de crecimiento. El contenido de dichas secciones es desarrollar un modelo basado en una función de producción en el cuál el stock de capital está determinado por una tasa de depreciación endógena, inicialmente considerada no estocástica (Sección 4.4.1) y posteriormente considerada estocástica (Sección 4.4.2). Estos modelos se consideran marcos plausibles en los que implementar el método de estimación IISR. El objetivo es, por tanto, valorar el funcionamiento del método diseñado en el Capítulo 3 como instrumento para resolver el problema econométrico que se plantea, que es el de la estimación del stock de capital en algunos casos en los que la estimación por máxima verosimilitud resulta complicada.

4.4.1 Modelo 1: Una tasa de depreciación no estocástica

El primero de los modelos, al que se denota M1, viene dado por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \star_\star &= \star\,\star_\star^\star\,\star^{\star_\star} && (4.17)\\ \star_\star &= \star_\star + (1 \text{ ¡ } \star_\star)\star_{\star \text{¡} 1} \end{aligned}$$

siendo $\star_\star$ » $\star$ $(0{\star}\star_\star^2)$ y $0 \star \star \star 1\star$Por otra parte, la tasa de depreciación es endógena y está dada por la ecuación

$$\star_\star = \star_0 + \star_1\star_\star \tag{4.18}$$

siendo $\star_\star = (\star_\star \text{ ¡ } \star_{\star \text{¡} 1}){\star}\star_{\star \text{¡} 1}$, la tasa de variación de la inversión. La idea económica que sostiene este supuesto se fundamenta en que el progreso tecnológico se incorpora en el proceso productivo mediante las decisiones de inversión llevadas a cabo por las empresas. Dicho progreso tecnológico explica la mayor productividad de los nuevos bienes de capital en relación a los antiguos, lo que equivale a que en éstos se genere una depreciación por obsolescencia. La dinámica de la depreciación del capital generada por el progreso tecnológico, es decir, aquella parte de la depreciación asociada a la obsolescencia, se puede considerar dependiente de la tasa de crecimiento de la inversión en bienes de capital nuevos. El anterior argumento económico conduce a que la relación entre la tasa de depreciación y la tasa de crecimiento de la inversión es positiva y por tanto $\star_1 \star 0$[2]$\star$ La otra parte de la depreciación, relacionada por la pérdida de capacidad del capital asociada al desgaste de los bienes de capital como consecuencia de su uso en el proceso productivo, estaría recogida en el término $\star_0 \star$ Por otra parte, se tiene información a priori sobre $\star\star$ dada por el valor $\tilde{\bar{\star}}\star$ Es necesario hacer consistente el valor que se tiene a priori sobre $\star$ y la restricción estocástica asociada con la forma funcional de $\star$ dada por (4.18). Una forma de hacerlo es tomando esperanzas de (4.18) con lo que se tiene

$$\overset{1}{\star} = \star_0 + \star_1 \overset{1}{\star}$$

siendo $\overset{1}{\star} = \star(\star_\star)$ y $\overset{1}{\star} = \star(\star_\star)\star$ Puesto que el dato que se tiene a priori sobre la tasa de depreciación es un estimador insesgado del parámetro, debe cumplirse que $\tilde{\bar{\star}}$ y $\overset{1}{\star}$ sean valores estadísticamente cercanos. Llamando $\mathfrak{b}$ a la media muestral de $\star$ y teniendo en cuenta la expresión (4.18), la restricción estocástica asociada a la información a priori $\tilde{\bar{\star}}$ puede escribirse como

$$\tilde{\bar{\star}} = \star_0 + \star_1 \mathfrak{b} + \star \tag{4.19}$$

siendo $\star$ » $\star(0\star\star_\star)$, independiente de $\star$ y $\star_\star$ se determinada a priori y debe ser consistente con las creencias que se tengan sobre el parámetro. Los parámetros del modelo se agrupan en el vector $\star = (\star\star\star_0\star\star_1)\star$ En de…nitiva, se tiene que el modelo M1 está dado por las ecuaciones (4.17), (4.18) y (4.19). Se trata de un modelo no lineal con información a priori y se puede en principio estimar por NLS o ML bajo restricciones estocásticas (método SR del Capítulo 2). Si bien este modelo ha sido estimado en la Sección 4.3.3 a partir de datos de distintos países, ahora se ha estimado por el método IISR, con el …n de dar un primer paso en la solución de este tipo

[2] En el análisis empírico llevado a cabo se obtuvo $\hat{\star}_1 \star 0\star$ Una posible explicación es que en períodos de recesión en los que cae la inversión, las empresas deciden disminuir su capacidad productiva retirando el capital instalado.

de problemas. Los datos sobre los que se ha aplicado la estimación IISR han sido generados como pasa a describirse a continuación.

Se han generado series de tamaño $\star$ = 50 de las variables inversión, tasa de depreciación, stock de capital y producción. De estas variables, solo la producción y la inversión son observables y por tanto son las únicas que se utilizarán para llevar a cabo la estimación, puesto que la tasa de depreciación y por tanto el stock de capital son desconocidos.

i) Inversión. Se ha generado una serie de inversión de tamaño 200 de la que se han tomado los últimos 50 elementos. El proceso que ha generado la inversión es

$$\begin{aligned} \star_\star &= 100 + 0{\star}9\star_{\star\,¡\,1} + 50 ¤ \log(\star) + \star_\star \\ \star_\star &» \star\star\star\ \star\ (0\star 100) \end{aligned}$$

El valor inicial es $\star_0$ = 1600$\star$Se ha tomado este valor para $\star_0$ para garantizar que la serie tomara siempre valores positivos.

ii) Tasa de depreciación. Se ha generado siguiendo el proceso indicado en la ecuación (4.18) y tomando $\star_0 = 0\star 07$ y $\star_1 = 0\star 02\star$Estos valores de los parámetros se han elegido de tal manera que dieran lugar a una tasa de depreciación cuyos valores oscilan entre 0.04 y 0.12 aproximadamente.

iii) Stock de capital. Se genera a partir de la ecuación del inventario permanente

$$\star_\star = \star_\star + (1\ ¡\ \star_\star)\star_{\star\,¡\,1}$$

tomándose como $\star_0 = 52000\star\star_\star$ y $\star_\star$ generados en i) y ii) respectivamente. Se ha tomado este valor para $\star_0$ simplemente para generar una serie de $\star_\star$ acorde con los valores de $\star_\star\star$ y que tuviera el comportamiento esperado para esta variable. Además, se ha considerado la condición de estado estacionario de $\star_\star$ de un modelo de crecimiento $\star_{\star\,¡\,1} = \star_\star\star\star\star$ teniendo en cuenta el valor correspondiente $\star_1$ y el valor medio de $\star_\star\star$

iv) Producción. Se genera a partir de la ecuación de la función de producción:

$$\log \star_\star \;=\; \star \log(\star\,_\star) + \star_\star$$

$$\star_\star \;\gg\; \star\star\star\ \star\ (0\star\star_\star)$$

siendo $\star = 0\star4$ y $\star_\star = 0\star001$. El valor que se ha tomado para $\star_\star$ determina, dados los valores de los parámetros $\star$ y de la varianza de log($\star$), un coe...ciente de determinación de 0.7, siguiendo la relación apuntada en el capítulo anterior que vincula $\star^2$ y la varianza del error de la ecuación de la variable endógena (véase la nota a pie de página de la Sección 3.3.1 del Capítulo 3).

De lo indicado hasta aquí el resultado es que se dispone de las variables $(\star_\star\star\star_\star)\star$ las únicas que son observables, generadas por el vector de parámetros $\star = (\star\,\star\star_0\star\star_1) = (0\star4\star0\star07\star0\star02)$. Los resultados obtenidos al aplicar la metodología IISR sobre el modelo descrito y los datos obtenidos del proceso indicado ...guran en la Tabla 4.7 y a primera vista resultan satisfactorios[3].

[3] El modelo auxiliar que se ha utilizado, necesario para el desarrollo de la metodología de la inferencia indirecta, es uno de los modelos auxiliares utilizados en la sección 4.2, (Modelo auxiliar Caso II), y su especi...cación se indica en dicha sección al analizar la segunda familia de modelos M2 en la que se considera una tasa de depreciación endógena y estocástica.

Tabla 4.7. Media y Desviación Típica de los Estimadores

II y IISR del Modelo M1. (H = 1000)

$\star_0 = (\star\star\star_0\star\star_1) = (0\star4\star0\star07\star0\star02)$

	Método II	Método IISR
$\star$	0.4025	0.3998
	(0.0142)	(0.0006)
$\star_0$	0.0741	0.0697
	(0.0186)	(0.0007)
$\star_1$	0.0285	0.0264
	(0.0645)	(0.0602)

De los resultados que se observan se obtienen dos conclusiones inmediatas. La primera es que dadas las propiedades de las estimaciones, la media y la desviación típica de un total de 1000 simulaciones y estimaciones, se ilustra de manera clara el funcionamiento de dicha metodología aplicada a la estimación del stock de capital. La segunda conclusión es que se observa una clara ganancia de e...ciencia respecto de los resultados obtenidos al realizar la estimación por el método II, es decir, sin tener en cuenta la información a priori sobre la tasa de depreciación. Este resultado con...rma lo que predice la teoría su...cientemente discutido a lo largo del Capítulo 3 al describir y motivar el estimador IISR. En relación con la información a priori cabe señalar que el valor que se introdujo en la restricción estocástica que representa la ecuación (4.19) es $\tilde{\star} = 0\star07$ mientras que la desviación típica asociada es $\star_\star = 0\star02\star$

4.4.2 Modelo 2: Una tasa de depreciación estocástica

A continuación se describe una familia de modelos (M2) que parten del modelo M1, pero en los que la tasa de depreciación contiene un término de error además de las variables explicativas. Se consideran varios escenarios, en función del patrón estocástico de la depreciación, habiéndose llevado a cabo una serie de replicaciones y estimaciones del modelo para cada uno de los mismos.

Como se ha indicado en el caso de M1, la existencia de un patrón para la tasa de depreciación y la existencia de información a priori requiere una ecuación adicional para hacer consistentes ambos aspectos en la estimación. Se trata de la ecuación equivalente a la ecuación (4.19) del modelo M1.

i) Caso I. La tasa de depreciación contiene un elemento determinístico y otro estocástico, de distribución normal. Es decir,

$$\star_\star = \star_0 + \star_1 \star_\star + \star_\star \tag{4.20}$$

siendo $\star_\star = (\star_\star$ ¡ $\star_{\star ¡ 1})\star\star_{\star ¡ 1}$ y $\star$ » $\star$ $(0\star\star_\star^2)\star$Por tanto,

$$\star \text{ » } \star\, (\star_0 + \star_1 \star\star \sqrt{\star_1^2 \star_\star^2 + \star_\star^2})$$

En este caso la ecuación adicional que se incluye en la estimación sobre la información a priori es la misma que en el caso del modelo M1, es decir, la ecuación (4.19).

i) Caso II. La tasa de depreciación viene dada solo por el término del error, cuya distribución se supone uniforme, (también podría ser normal). Es decir, en este caso, $\star_0 = \star_1 = 0$ y $\star$ » $\star[\star_\star;\star_\star]\star$Por tanto,

$$\star = \star \text{ » } \star[\star_\star;\star_\star] \tag{4.21}$$

En este caso los parámetros a estimar relacionados con la tasa de depreciación son la media y la varianza de la variable uniforme, lo que equivale a estimar los límites $\star_\star$ y $\star_\star$ del intervalo. En cuanto a la información a priori y su compatibilidad con la anterior ecuación, es necesario tener en cuenta que al suponer que dicha información es valiosa debería consistir en un valor $\bar{\star}$

que pertenezca al verdadero intervalo en el que ‡uctúa ⋆⋆En general podría modelizarse como

$$\tilde{\star} = \star \text{ » } \star\,[\tilde{\star}_\star ; \tilde{\star}_\star\,] \tag{4.22}$$

siendo $\tilde{\star}_\star$ y $\tilde{\star}_\star$ valores próximos a $\star_\star$ y $\star_\star$ puesto que éstos, son en realidad desconocidos⋆

iii) Caso III. La tasa de depreciación sigue un proceso autorregresivo, por tanto viene dada por la expresión:

$$\star_\star = \star_0 + \star_1 \star_{\star \text{¡} 1} + \star_\star \tag{4.23}$$

siendo $\star$ » $\star$ $(0\star\star^2_\star)\star j\star_1 j$ $\star$ $1\star$– con el …n de evitar duplicidad en la notación se denomina a los parámetros de $\star_\star$ como $\star_0$ y $\star_1$ en lugar de $\star_0$ y $\star_1$ –. Nuevamente es necesario hacer compatible la anterior ecuación con la información a priori $\tilde{\star}$. Se trata de que el valor a priori conocido $\tilde{\star}$ sea aproximadamente el valor esperado de la distribución de ⋆⋆Al ser un proceso estacionario, $\star\,(\star) = \frac{1}{\star} = \star_0 \star (1$ ¡ $\star_1)$ y la información a priori puede parametrizarse como una restricción estocástica de la manera

$$\tilde{\star} = \frac{\star_0}{1 \text{ ¡ } \star_1} + \star \tag{4.24}$$

En de…nitiva, se ha de…nido una familiar de modelos en los que la tasa de depreciación es estocástica existiendo información a priori sobre la misma. Esta familia contiene tres versiones del modelo M2 en función del proceso que se considere para explicar la tasa de depreciación. Puesto que la tasa de depreciación es estocástica es necesario estimar por simulación. Teniendo en cuenta todas las propiedades de los modelos, el método de estimación a utilizar es el de IISR. Los tres modelos contienen la ecuación (4.17) y además las ecuaciones (4.20) y (4.19) en el Caso I; las ecuaciones (4.21) y (4.22) en el Caso II y las ecuaciones (4.23) y (4.24) en el Caso III. Las características del método de estimación implementado se describen a continuación.

Simulación de los datos

Se pasa a describir a continuación el proceso de generación de los datos a partir de los cuales se lleva a cabo la estimación. Se han generado series de tamaño $\star = 50$ de las variables inversión, tasa de depreciación, stock de capital y producción.

i) Inversión. Generada de idéntica manera que en el M1

ii) Tasa de depreciación. Se han considerado tres casos en cada uno de los cuales la tasa de depreciación está determinada por un proceso especí…co como se indica en la Tabla 4.8 Los valores elegidos para los parámetros determinan una tasa de depreciación que ‡uctúa entre el 4 y el 12 por ciento en la mayoría de las ocasiones y en todos los Casos.

Tabla 4.8. Propiedades del Proceso $\star_\star$ a usar en las Simulaciones del Modelo M2

Caso I	Caso II	Caso III
$\star_\star = \star_0 + \star_1((\star_\star ¡ \star_{\star¡1})\star\star_{\star¡1}) + \star_\star$	$\star = \star » \star[\star_\star ; \star_\star]$	$\star_\star = \star_0 + \star_1\star_{\star¡1} + \star_\star$
$\star_0 = 0\star06$; $\star_0 = 0\star2$	$\star_\star = 0\star035$; $\star_\star = 0\star12$	$\star_0 = 0\star037$; $\star_1 = 0\star5$
$\star_\star = 0\star004$	$\star(\star) = 0\star075$; $\star_\star = 0\star082$	$\star_\star = 0\star002$

iii) Stock de capital. Se ha generado de idéntica manera que en M1, pero teniendo en cuenta los $\star_\star$ generados en ii).

iv) Producción. Se ha generado de idéntica manera que en M1, por tanto, teniendo en cuenta el proceso

$$\log \star_\star = \star \log(\star_\star) + \star_\star$$

$$\star_\star » \star\star\star \star (0\star\star_\star)$$

siendo $\star$ = 0$\star$4 y $\star_\star$ = 0$\star$001. El valor que se ha tomado para $\star_\star$ determina, dados los valores de los parámetros $\star$ y de la varianza de log($\star$), un coe...ciente de determinación de 0.7.

De lo indicado hasta aquí el resultado es que se dispone de las variables ($\star_\star \star\star_\star$)$\star$las únicas que son observables, generadas por el vector de parámetros $\star$ = ($\star \star\star_0 \star\star_1 \star\star_\star$)$\star$siendo $\star$ = 0$\star$4 y el resto de valores los indicados en la Tabla 4.8.

La estimación indirecta bajo restricciones estocásticas

A continuación se pasan a describir los aspectos relevantes de la estimación indirecta llevada a cabo sobre el modelo M2 partiendo de los datos originales – simulados – de la subsección anterior. Como se ha indicado, la estimación indirecta se lleva a cabo haciendo uso de información a priori existente sobre la tasa de depreciación y ésta se incorpora en el modelo en forma de restricciones estocásticas. Puesto que la e...cacia del uso de la información a priori depende de la calidad de la misma, naturalmente se supondrá que en todos los casos la información a priori disponible es consistente con el proceso original que ha generado los verdaderos y desconocidos valores de $\star$ en el período muestral.

La implementación del método IISR requiere la especi...cación de un modelo auxiliar y un criterio de estimación asociado al mismo (véase los Capítulos 2 y 3 la de...niciones de los métodos II e IISR). A este respecto, se proponen los siguientes modelos auxiliares, elegidos en función de la calidad de las estimaciones resultantes y de su adecuación al funcionamiento del criterio principal en la implementación del método IISR.

Modelo Auxiliar Caso I $\quad ¢\star\star_\star = \star_1 ¢\star\star_{\star ¡ 1} + \star_2 ¢\star\star_{\star ¡ 2} + \star_3 \star\star_{\star ¡ 3} + \star_4 \star\star\star_\star + \star_\star$

Modelo Auxiliar Caso II $\quad \star\star_\star = \star_0 + \star_1 \star\star\star_\star + \star_2(\star\star\star_\star \ ¡ \ \star\star\star_{\star ¡ 1}) + \star_\star$

Modelo Auxiliar Caso III $\quad \star\star_\star = \star_1 + \star_2 \star\star_{\star ¡ 1} + \star_3 \star\star_{\star ¡ 2} + \star_4 \star\star\star_\star + \star_\star$

Se trata de modelos razonables desde el punto de vista económico en los que la producción aparece explicada por variables observables corrientes y retardadas. El número de retardos se ha elegido después de realizar un elevado número de estimaciones y seleccionar aquellos retardos estadísticamente signi…cativos y que al mismo tiempo dieran lugar a especi…caciones que no generaran multicolinealidad. Este método se puede considerar como una sugerencia para determinar el modelo auxiliar a partir de una relación básica sobre las variables de interés en este tipo de modelos ya que no existe un criterio a priori para determinar el modelo auxiliar y la calidad de las estimaciones resultantes es sensible al mismo. El criterio asociado al modelo auxiliar es la estimación por mínimos cuadrados ordinarios (OLS) del vector $\star$ en el modelo auxiliar que se elija de los anteriores. Se considerará uno u otro en función del supuesto considerado para $\star$ debido a que la convergencia no se obtuvo en todos los Casos con el mismo modelo auxiliar. Véase que en cualquiera de los Casos el número de parámetros del modelo auxiliar es al menos el del modelo original.

El estimador de $\star$ del método IISR es el valor $\tilde{\star}_{\star\star\star\star}$ que cumple

$$\tilde{\star}_{\star\star\star\star} = \arg\min \{\star_{\star}\}$$

siendo, para el caso concreto que se considera

$$\star_{\star} = \left[\hat{\star} - \sum \hat{\star}_{\star}(\star)\star\star\right]' (\star^{0}\star\star\star^{2}_{\star}) \left[\hat{\star} - \sum \hat{\star}_{\star}(\star)\star\star\right] + \frac{(\tilde{\star} - \star(\tilde{\star}))^{2}}{\star^{2}_{\star}} \qquad (4.25)$$

y $\hat{\star}$ el estimador OLS del modelo auxiliar estimado a partir de los datos originales, $\hat{\star}_{\star}$ el estimador OLS obtenido con los datos simulados en cada una de las $\star$ estimaciones del modelo auxiliar, $\tilde{\star}$ el valor asociado a la información a priori sobre la tasa de depreciación y $\star(\tilde{\star})$ la esperanza de la restricción estocástica asociada a la información a priori. Esta tendrá una especi…cación determinada en cada uno de los casos considerados, como se indica en la Tabla 4.8, al igual que el valor tomado para $\star_{\star}$. La matriz de distancia es en general la inversa de la matriz de varianzas y covarianzas de $\hat{\star}\star$es decir, $(\star\,{}^{0}\star\,\star\star^{2}_{\star})\star$En general $\star^{2}_{\star}$ será desconocido, pero en este caso se ha supuesto que dicho parámetro es conocido para simpli…car el problema, si bien, estimar dicho parámetro a partir de los otros no supone mayores complicaciones, a partir de los residuos del modelo.

A continuación se indican los aspectos relevantes de la estimación IISR. Es necesaria una descripción detallada de algunos aspectos centrales del método de la estimación indirecta aplicada al problema planteado. Estos se concretan en los siguientes puntos:

i) A priori se generan las perturbaciones f$\star^{\star}_{\star}$g y f$\star^{\star}_{\star}$g $\star$ = 1$\star\star\star\star\star$ y $\star$ = 1$\star\star\star\star\star$ (siendo $\star$ = 100 y $\star$ = 50 y $\star$ el índice de cada simulación) a utilizar en la simulación de la producción y de la tasa de depreciación respectivamente. El error $\star^{\star}_{\star}$ se genera con la varianza verdadera, como si este parámetro fuera conocido. Podría considerarse desconocido y su estimación llevarse a cabo a partir de los residuos del modelo. Puesto que el interés reside en comprobar el funcionamiento del método en la estimación de parámetros estocásticos, se consideró la varianza de $\star$ conocida. Por el contrario, la varianza de $\star$ se supone que es desconocida, por lo que el error simulado es simplemente una variable $\star^{0\star}$ » $\star$ (0$\star$1) a partir de la cual se simula $\star^{\star}_{\star}$ para un $\star$ dado (en concreto para un valor de $\star_{\star}$) según la ecuación $\star^{\star}_{\star} = \star_{\star}\star\star^{0\star}\star$

ii) Se simula el modelo original para un $\star$ dado. La simulación de la producción requiere la del stock de capital y esta a su vez la de la tasa de depreciación, que es una parámetro estocástico. Por tanto, la producción simulada vendrá dada por la ecuación

$$\log \star^{\star}_{\star} = \star \log(\star^{\star}_{\star}) + \star^{\star}_{\star}$$

siendo $\star^{\star}_{\star}$ » $\star\star\star\star\star$ (0$\star$0$\star$001) (recuérdese que se supone $\star_{\star}$ conocido) y a su vez $\star^{\star}_{\star}$ es el stock de capital simulado, está determinado por la ecuación

$$\star^{\star}_{\star} = \star_{\star} + (1 \; ¡ \; \star^{\star}_{\star})\star^{\star}_{\star ¡ 1}$$

La simulación del stock de capital que tiene lugar durante la simulación del modelo original se lleva a cabo a partir de una simulación $\star_\star^\star$ de la tasa de depreciación – en función de la especi...cación que se haya supuesto en cada uno de los casos –. La tasa de depreciación simulada se genera a partir de $\star_\star^\star$ y de la expresión original conocida. Así, por ejemplo, en el Caso I, la expresión de $\star_\star^\star$ es

$$\star_\star^\star = \star_0 + \star_1\star_\star + \star_\star^\star$$

y $\star_\star^\star$ se genera a partir de procesos estocásticos especí...cos indicados en la Tabla 4.8, pero suponiendo que $\star_\star$ es desconocida. Para el Caso II, por ejemplo, vemos cómo simular una variable uniforme en un intervalo de interés $[\star;\star]$ partiendo de una variable $\star^\star$ » $\star\ [0;1]\star$ La expresión a tener en cuenta para dar lugar a una tasa de depreciación en la simulación será

$$\star_\star^\star = \star + (\star\ \text{¡}\ \star)\star_\star^\star$$

Dadas las propiedades de la distribución uniforme, los extremos del intervalo determinan las propiedades de la distribución, es decir, su esperanza y su varianza, que son los parámetros a estimar. Así, $\star\,(\star) = (\star_0 + \star_1)\star 2$ y $\star\,(\star) = (\star_1\ \text{¡}\ \star_0)^2\star 12\star$Por tanto, al estimar el intervalo se estiman las propiedades de la tasa de depreciación estocástica. La simulación se lleva a cabo en este caso como sigue: dado un $\star = (\star\star\star_0\star\star_1)$ a partir del cual se simula el modelo original, se tiene un intervalo para la distribución uniforme de $\star$ como se ha indicado anteriormente$\star$A partir de esa realización de una distribución uniforme y de los datos originales de la inversión se genera el stock de capital y la producción simulados, a utilizar en la estimación indirecta.

Debe recordarse que los vectores de perturbaciones simulados se utilizarán en la simulación del modelo original y permanecen constantes para cada $\star$ del algoritmo de minimización del criterio de la estimación indirecta. (véase el Capítulo 2 sobre la importancia de esta particularidad).

iii) Se calcula $\hat{\star}$ a partir de los datos originales y del modelo auxiliar elegido.

iv) Se realizan para cada $\star$ un total de $\star = 100$ simulaciones del modelo original según se indica en ii) a partir de las perturbaciones simuladas en i) y se estima, para cada una de esas replicaciones, el modelo auxiliar por OLS calculándose $\hat{\star}^{\star}(\star)$. Posteriormente se calcula la media de dichos estimadores, es decir, $\sum \hat{\star}^{\star}(\star)\star\star$ para un $\star$ dado.

v) Se minimiza el criterio $\star_{\star}$ indicado en (4.25) respecto de $\star\star$ obteniéndose el estimador $\tilde{\star}_{\star\star\star\star}\star$

Resultados de las simulaciones

El ejercicio llevado a cabo ha consistido en realizar 1000 replicaciones y estimaciones del modelo original por el método IISR como se ha indicado en el apartado anterior. En la Tabla 4.9 se presentan la media y la desviación típica de las estimaciones obtenidas para cada uno de los parámetros en el Monte Carlo. En la última …la de la tabla …guran los valores de los parámetros verdaderos en cada uno de los Casos, con el …n de valorar las propiedades de los resultados del ejercicio realizado.

Tabla 4.9. Media y Desviación Típica de los Estimadores IISR del Modelo M2

H = (1000)

	Caso I	Caso II	Caso III
	$\star_\star = \star_0 + \star_1 \star_\star + \star_\star$	$\star = \star \gg \star [\star_\star ; \star_\star]$	$\star_\star = \star_0 + \star_1 \star_{\star i 1} + \star_\star$
$\star_0$	(0.4,0.06,0.01,0.004)	(0.4,0.03,0.12)	(0.4, 0.06, 0.2, 0.02)
$\star$	0.400	0.403	0.3998
	(0.002)	(0.012)	(0.0038)
$\star_0$	0.060	0.038	0.0413
	0.003	(0.016)	(0.0335)
$\star_1$	0.009	0.118	0.4499
	(5.4x10 ^{i4})	(0.046)	(0.4465)
$\star^2_\star$	0.004	-	0.0266
	(8.7x10 ^{i5})	-	(0.0408)

En el Caso II la tasa de depreciación se distribuye como una variable uniforme en el intervalo $[\star_\star \star\star_\star]$ y se supone que se tiene información a priori sobre los dos parámetros que caracterizan esta distribución. Dada la relación unívoca existente entre los límites del intervalo y la media y la varianza de la distribución uniforme, la existencia de información sobre los límites del intervalo y no sobre su esperanza, implica que, de hecho, se tiene información sobre la varianza de la distribución. Este supuesto no es demasiado exigente, puesto que en de…nitiva supone tener una cierta idea sobre un rango de valores sobre los que con una probabilidad muy alta varía la tasa de depreciación. Supongamos que la información a priori que se tiene sobre los límites del intervalo consiste en los valores $\bar{\star}_\star$ y $\bar{\star}_\star$ y que dicha información se modeliza en forma de restricciones estocásticas como se pasa a indicar a continuación:

$$\tilde{\star}_\star = \star_\star + \star_1$$

$$\bar{\star}_\star = \star_\star + \star_2$$

siendo $\star_1$ y $\star_2$ dos variables independientes de distribución $\star\ (0\star\star_\star)\star$ El valor de $\star_\star$ por construcción está asociado al grado de incertidumbre que se tiene en relación con la información a priori. Por esta razón no es demasiado restrictivo suponer que la varianza de $\star_1$ sea igual a la de $\star_2\star$ ya que en de…nitiva se trata de la incertidumbre sobre los límites de un mismo intervalo. En la práctica los valores que se han tenido en cuenta son $\tilde{\star}_\star = 0\star 04$ y $\tilde{\star}_\star = 0\star 13\star$ mientras que se ha tomado como valor de la desviación típica el valor $\star_\star = 0\star 002\star$ El término asociado a la restricción estocástica en la función objetivo de la que se obtiene el estimador $\tilde{\star}_{\star\star\star\star}$, es decir, el término $(\star\ ¡\ \star)^0 ©_2^{¡1}(\star\ ¡\ \star)$ (véase el Capítulo 3, la de…nición del estimador IISR) es

$$(\star\ ¡\ \star)^0 ©_2^{¡1}(\star\ ¡\ \star) = \frac{(\tilde{\star}_\star\ ¡\ \star_\star)^2 + (\tilde{\star}_\star\ ¡\ \star_\star)^2}{\star_\star^2}$$

puesto que en este caso,

$$\star\ (\star) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \star \\ \star_0 \\ \star_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \star_0 \\ \star_1 \end{bmatrix} \star$$

$$©_2 = \begin{bmatrix} \star_\star^2 & 0 \\ 0 & \star_\star^2 \end{bmatrix}$$

y por otro lado, $\star^0 = (\tilde{\star}_\star \star \tilde{\star}_\star)\star$ Los resultados que para este caso se han encontrado son satisfactorios, como se ilustra en la segunda columna de la Tabla 4.9. De las tres versiones del modelo M2, la del Caso III, en la que la tasa de depreciación sigue un proceso AR(1) es la que arroja los peores resultados en las simulaciones, especialmente en relación al sesgo del estimador de $\star_1$ y su varianza, tal y como puede observarse en la tercera columna de la Tabla 4.9.

Las conclusiones que se sacan del ejercicio llevado a cabo es que el método de estimación indirecta bajo restricciones estocásticas funciona adecuadamente en general aplicado al problema de estimación del stock de capital cuando éste está determinado por una tasa de depreciación estocástica. Los casos que se han diseñado se sugieren como escenarios razonables para modelizar el proceso de una tasa de depreciación estocástica, y el método IISR como una herramienta adecuada. Finalmente, resulta interesante abordar algunas extensiones de los modelos planteados mediante la introducción de parámetros estocásticos y restricciones estocásticas no lineales en el modelo. Con la introducción de las restricciones estocásticas no lineales se puede introducir más información disponible sobre la tasa de depreciación que mediante las restricciones estocásticas lineales.

4.5 Estimación IISR con restricciones no lineales y parámetros estocásticos

En la mayoría de los modelos económicos, también en los descritos en la sección anterior, la teoría proporciona información a priori sobre los parámetros, como por ejemplo, la relacionada con el signo de determinados coe…cientes. Otra fuente de información más ajustada sobre los parámetros es la que procede de los resultados empíricos realizados de dicho modelo, bien calculada a partir de los datos de otras economías o de distintos períodos muestrales. En el caso de la tasa de depreciación, por ejemplo, la teoría indica que se trata de un parámetro positivo – puesto que el capital se deprecia como consecuencia del proceso productivo – y los resultados empíricos indican, al menos en la mayoría de las economías desarrolladas, que los valores podrían encontrarse entre el 4 y el 12 por ciento con una probabilidad muy alta. La cuestión que se aborda a continuación es la de incorporar este tipo de información, relacionada con el signo y un rango de valores razonables para el parámetro, modelizándola en forma de restricciones estocásticas, lo que conduce a las restricciones estocásticas no lineales. En esta sección se desarrolla un ejercicio de estimación por el método de estimación indirecta bajo restricciones estocásticas de un modelo basado en una función de producción, en la ecuación del stock de capital y en una ecuación de comportamiento de la tasa de depreciación. Las particularidades de este modelo son, por una parte, que tanto las elasticidades de los factores como la tasa de depreciación son parámetros estocásticos, lo que hace necesaria la estimación por simulación y por otra parte, la introducción de información a priori sobre el parámetro, tanto un valor concreto como información relativa al signo y a un rango razonable para el parámetro. Esta información se incorpora en el modelo en forma de restricciones estocásticas no lineales. El método de estimación, al igual que en la sección anterior es IISR. A continuación se pasa a describir en detalle el modelo, algunos aspectos relativos a la estimación y los resultados de los ejercicios de simulación realizados con el …n de contrastar la operatividad del método sugerido aplicada sobre el modelo que se describe.

4.5.1 El modelo verdadero

El modelo verdadero, al que se denomina M3, contiene una función de producción que depende del stock de capital y del trabajo siendo la tecnología del tipo Cobb-Douglas. Los parámetros relativos a las elasticidades de los factores son aleatorios si bien, en términos esperados, se tienen rendimientos constantes a escala. Es decir, se incorpora una restricción de suma de elasticidades unitaria que incluye un término de error, lo que supone relajar la hipótesis de los rendimientos a escala. La función de producción en logaritmos es

$$\star_{\star} = \star + \star_{\star}\star_{\star} + \star_{\star}\star_{\star} + \star_{\star} \qquad (4.26)$$

siendo $\star_{\star}$ » $\star\star\star(0\star\star_{\star})\star\star$ el término constante y $\star_{\star}\star\star_{\star}$ son las elasticidades aleatorias de los factores, que cumplen

$$\star_{\star} + \star_{\star} = 1 + \star_{\star}^{\star\star}$$

siendo $\star_{\star}^{\star\star}$ » $\star$ $(0\star\star_{\star\star})$ el término de error que recoge la diferencia entre los parámetros y la suma de sus valores esperados. Se cumplen además las siguientes propiedades que caracterizan las elasticidades de los factores:

$$\star_\star = \bar{\star} + \star_\star^\star$$
$$\star_\star = \bar{\star} + \star_\star^\star$$
$$1 = \bar{\star} + \bar{\star}$$

Con el …n de reducir el número de parámetros relativos a la varianza del término de error de las elasticidades se supone que

$$\star_\star^{\star\star} = \star_\star^\star + \star_\star^\star$$
$$\star_\star^\star \star\star_\star^\star \quad » \quad \star\,(0\star\star_\star)$$
$$\star_\star = \star_\star = (1\star 2)\star_{\star\star}$$

Es decir, se introducen una relación entre las varianzas de las elasticidades de los factores con el …n de que sólo exista un parámetro a estimar en relación con las mismas, por ejemplo, $\star_{\star}\star$Por otra parte, la tasa de depreciación es endógena y depende de una variable, $\star_\star\star$según la expresión

$$\star_\star = \star_0 + \star_1\star_\star + \star_\star$$

Tomando esperanzas de la anterior expresión y utilizando en adelante los valores estimados de $\star\,(\star)$ y $\star\,(\star_\star)\star$ las medias muestrales, $\bar{\star}$ y $\bar{\star}$ respectivamente, siguiendo la notación introducida se obtiene,

$$\bar{\star} = \star_0 + \star_1\bar{\star}$$

La información a priori viene de la contabilidad nacional o de otras estimaciones y está dada por el valor $\bar{\star}\star$Puesto que la información a priori se considera que es valiosa, ésta debe ser un estimador insesgado del parámetro variable, en este caso, la tasa de depreciación. Por tanto, la información a priori se introduce como se indica en la siguiente ecuación:

$$\tilde{\star} = \star_0 + \star_1\bar{\star} + \star$$

La varianza del término de error asociado a la restricción estocástica se elige de tal manera que determina el peso de la información introducida. Se elige el valor $\star_\star = 0\star 02\star$ lo que teniendo en cuenta la información a priori $(\tilde{\star} = 0\star 08)\star$ supone que con un 95 por ciento de probabilidad, se cree que la tasa de depreciación se encuentra entre el 4 el 12 por ciento. Posteriormente se introducirán las relaciones no lineales en las restricciones estocásticas, en la última parte de esta sección.

Operando a partir de la expresión (4.26) es fácil comprobar que

$$\star_\star = \star + \star\star_\star + (1 \;¡\; \star)\star_\star + \star_\star^+$$

siendo

$$\star_\star^+ = \star_\star + \star_\star^\star\star_\star + \star_\star^\star\star_\star \tag{4.27}$$

el error del modelo reescrito a partir de parámetros constantes, con

$$\begin{aligned} \star(\star_\star^+) &= 0 \\ \star(\star_\star^+) &= \star_\star^2(\star_\star^2 + \star_\star^2) + \star_\star^2 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Se observa que la varianza del error no es constante y que por tanto el modelo presenta heteroscedasticidad. El vector de parámetros del modelo viene dado por $\star = (\star\star\star\star\star_0\star\star_1\star\star_\star\star\star_\star)\star$ Cabe mencionar que no se estima $\star_\star$ pero es posible hacerlo a partir de los residuos que se generen en la estimación de $\star\star$ En efecto, teniendo en cuenta la estructura de $\star(\star_\star^+)$ indicada en (4.28) se puede obtener un estimador de $\star_\star$ regresando los residuos al cuadrado sobre una constante y sobre la suma de las variables explicativas al cuadrado. El estimador de la constante obtenido en dicha regresión es un estimador consistente de $\star_\star\star$Con el ...n de simpli...car la solución del problema se ha considerado que $\star_\star$ es conocida si bien no hacer este supuesto constituye un problema abordable de fácil solución.

El modelo debe estimarse por simulación debido a la existencia de un término de error asociado a la tasa de depreciación. Puesto que se quiere usar la información a priori sobre la tasa de depreciación, el método que se propone es IISR. Para implementar este método es necesario de...nir un modelo auxiliar y determinar un criterio de estimación de los parámetros del mismo. Las características del modelo original hacen necesario que el modelo auxiliar tenga un nivel de complejidad su...ciente para recoger en la mayor medida posible la información contenida en los datos generados por el modelo verdadero.

4.5.2 El modelo auxiliar

A continuación se pasa a describir el modelo auxiliar. Un principio que se ha tenido en cuenta para diseñar este modelo es el de hacerlo lo más parecido posible al modelo verdadero. Además, lógicamente se ha diseñado de tal manera que se pudiera estimar a partir de un criterio tradicional como NLS o ML. Debe tenerse en cuenta que el modelo verdadero ahora considerado presenta heteroscedasticidad, lo que supone considerar como necesario un criterio auxiliar que permita obtener información sobre esta característica del modelo verdadero. Esto implica que es necesario de...nir un nuevo modelo auxiliar diferente del utilizado en los casos M1 y M2, donde se utilizó uno basado en la relación entre el producto total y la inversión retardada. En el caso de aquellos modelos verdaderos M1 y M2 no existía el problema de la heteroscedasticidad, por lo que los modelos auxiliares utilizados resultaron su...cientemente informativos. En el caso del modelo que se describe con parámetros estocásticos, el modelo verdadero exige un modelo auxiliar más complejo, donde se obtenga información sobre la heteroscedasticidad existente en el modelo verdadero. Por esta razón se ha considerado oportuno sugerir un modelo basado en una función de producción que depende de una variable $\star_\star^{¤}$ próxima al stock de capital $\star_\star$ como se justi…ca detalladamente a continuación. En concreto, se de…ne $\star^{¤}_{\star}$ como

$$\star^{¤}_{\star} = \star_{\star} + (1 \text{ ¡ } \star^{¤}_{\star})\star^{¤}_{\star\text{¡}1} \qquad (4.29)$$

siendo

$$\star^{¤}_{\star} = \star_0 + \star_1\star_{\star}$$

Es decir, la tasa de depreciación de la medida alternativa del stock de capital que se propone no contiene el elemento término de error $\star_{\star}$ que contiene la tasa de depreciación verdadera. La diferencia $\star_{\star} \text{ ¡ } \star^{¤}_{\star}$ se puede considerar como un error cuyas propiedades se estudian a continuación. Llamando $\star^{\star}_{\star} = \star_{\star} \text{ ¡ } \star^{¤}_{\star}\star$ es fácil comprobar que

$$\star^{\star}_{\star} = (1 \text{ ¡ } \star^{¤}_{\star})\star^{\star}_{\star\text{¡}1} \text{ ¡ } \star_{\star}\star_{\star\text{¡}1} \qquad (4.30)$$

Puesto que se considerará más adelante una función de producción basada en $\log(\star^{¤}_{\star})$ en lugar de $\log(\star_{\star})$ se calcula la aproximación lineal $\log(\star_{\star})$ en $\star^{¤}_{\star}$:

$$\log(\star_{\star}) \text{ ' } \log(\star^{¤}_{\star}) + \star^{\star}_{\star}\star\star_{\star}$$

Denotando con minúsculas las variables en logaritmos, se tiene que $\star_{\star} = \star^{¤}_{\star} + \star^{\star}_{\star}\star\star_{\star}$. Volviendo a la función de producción original, y considerando la expresión del stock de capital dada en (4.29) en lugar de la expresión original, se tiene

$$\star_{\star} = \star + \star\star^{¤}_{\star} + (1 \text{ ¡ } \star)\star_{\star} + \star^{+}_{\star} + \star\star^{\star}_{\star}\star\star_{\star}$$

La anterior expresión indica que si se estima la función de producción en la que los factores son $\star^{¤}$ y $\star\star$ – lo que de…ne el modelo auxiliar que se propone – entonces, el término de error de esa función de producción vendría dado por $\star^{0}_{\star} = \star^{+}_{\star} + \star\star^{\star}_{\star}\star\star_{\star}\star$ Las propiedades de este término de error serán las que se obtengan al tener en cuenta las de los elementos que lo de…nen, es decir, las ecuaciones (4.27) y (4.30). Veamos algunas de estas propiedades y el resultado de dicho análisis, es decir, el término de error que se propone para el modelo auxiliar, en función del cual se elegirá el criterio de estimación sugerido para la estimación del modelo auxiliar.

El valor esperado del error es cero, puesto que $\star(\star_\star^+) = \star(\star_\star^\star) = 0\star$ Por otra parte, el error presentará heteroscedasticidad debido a que las varianzas de $\star_\star^+$ y de $\star_\star^\star$ dependen de $\star\star$ Teniendo en cuenta que $\star(\star_\star^\star) = \star_\star^2\star\,{}^2_{\star¡1}\star(1 ¡ (1 ¡ \star_\star^¤)^2)$ se obtiene

$$\star(\star\star_\star^\star\,\star\star\,\star) \;' \;\frac{\star^2\star_\star^2}{(1 ¡ (1 ¡ \star_\star^¤)^2)} \tag{4.31}$$

y teniendo en cuenta (4.28), es fácil comprobar que

$$\star(\star_\star^0) = \star_\star^2 + \star_\star^2(\star_\star^2 + \star_\star^2) + \frac{\star^2\star_\star^2}{(1 ¡ (1 ¡ \star_\star^¤)^2)}$$

Finalmente, se considera también la existencia de autocorrelación de primer orden en el término de error $\star_\star^0$ originada por el término $\star_\star^\star$ (véase la ecuación (4.30). Puede comprobarse que

$$\star\star\star(\star_\star^\star\,\star\star_{\star¡1}^\star) = \frac{(1 ¡ \star_\star^¤)\star_\star^2\star\,{}^2_{\star¡2}}{(1 ¡ (1 ¡ \star_{\star¡1}^¤)^2)}$$

que depende de $\star$ y por tanto $\star_\star^\star$ no sería estacionario. Sin embargo, puede resolverse el problema teniendo en cuenta que la correlación que interesa es la del término $\star_\star^\star\,\star\star\,\star\star$ En este caso,

$$\star\star\star(\star_\star^\star\,\star\star\,\star\star\star_{\star¡1}^\star\star\star\,\star_{¡1}) = (1 ¡ \star_\star^¤)\star\,(\star_{\star¡1}^\star)\star\star\,\star\star\,\star_{¡1}\star$$

Puesto que $\star\,\star\star\,\star_{¡1} = (1 ¡ \star_\star^¤)\star\,{}^2_{\star¡1}\star$

$$\begin{aligned}\star\star\star(\star_\star^\star\,\star\star\,\star\star\star_{\star¡1}^\star\star\star\,\star_{¡1}) &= \frac{(1 ¡ \star_\star^¤)\star_\star^2\star\,{}^2_{\star¡2}}{(1 ¡ (1 ¡ \star_{\star¡1}^¤)^2)(1 ¡ \star_\star^¤)\star\,{}^2_{\star¡1}} \\ &' \frac{\star_\star^2}{(1 ¡ (1 ¡ \star_{\star¡1}^¤)^2)}\end{aligned}$$

y si se supone que $\star_\star\star\star$ ¡ ! $\star$ y que $\star^2_\star\star\star$ ¡ ! $\star(\star_\star)$ para todo $\star\star$ se obtendría

$$\star\star\star(\star^\star_\star \star\star \star\star\star^\star_{\star¡1}\star\star \star_{¡1}) \text{ ¡ ! } \frac{\star^2_\star}{\star_0\star(\star_\star)}$$

siendo $\star_0$ una constante positiva. Esto conduce a que el término de error en el modelo auxiliar presente correlación de primer orden y de ahí que se sugiera su modelización como un proceso AR(1) estacionario. Como conclusión, por tanto, teniendo en cuenta las propiedades deducidas anteriormente, el modelo auxiliar vendrá de…nido por las ecuaciones

$$\star_\star = \star_0 + \star_1\star^{¤}_\star + (1 \text{ ¡ } \star_1)\star_\star + \star_\star \quad (4.32)$$

$$\star^{¤}_\star = \star_\star + (1 \text{ ¡ } \star^{¤}_\star)\star^{¤}_{\star¡1} \quad (4.33)$$

$$\star^{¤}_\star = \star_0 + \star_1\star_\star \quad (4.34)$$

Teniendo en cuenta (4.31) y la de…nición de $\star^{¤}_\star$ se sugiere para el error del modelo auxiliar, $\star_\star$ la expresión

$$\star_\star = \star\star_{\star¡1} + \star_\star$$

y por otra parte, la heteroscedasticidad apunta a una expresión del tipo

$$\star(\star_\star) = \star_0 + \star_1(\star^2_\star + \star^2_\star) + \star_2\frac{1}{\star^2_\star} \quad (4.35)$$

El vector de parámetros del modelo auxiliar es $\star^0 = (\star_0\star\star_1\star\star_0\star\star_1\star\star\star\star_0\star\star_1\star\star_2)$ y el criterio indirecto puede ser de tipo NLS en una primera fase, y se pueden seguir varios procedimientos iterativos para ir obteniendo valores iniciales para el algoritmo de estimación del modelo …nal completo. Se estimaría en este caso el modelo compuesto por las ecuaciones (4.32), (4.33), y (4.34) por el método NLS (véase, por ejemplo, las estimaciones llevadas a cabo en la primera parte de este Capítulo 4 mediante las metodologías sugeridas en las secciones 4.1 y 4.2, así como los resultados empíricos obtenidos a partir de los datos de las economías europeas). En este caso los parámetros son $(\star_0 \star\star_1 \star\star_0 \star\star_1)\star$ De esta manera se dispondría de estimaciones de los errores $\star_\star$ y a partir de ellos se puede estimar la ecuación (4.35) aplicando OLS a la expresión

$$\hat{\star}^2_\star = \star_0 + \star_1(\star^2_\star + \star^2_\star) + \star_2 \frac{1}{\star^2_\star} + \star_\star \tag{4.36}$$

donde $\star_\star$ es el error de la ecuación, de media cero. En una segunda fase se puede abordar el problema de la heteroscedasticidad modi...cando el criterio de estimación indirecta, por ejemplo, teniendo en cuenta el estimador Newey-West de $\star\,(\hat{\star})$ obtenido a partir de las estimaciones de los residuos NLS de la primera fase.

Habiéndose presentado el modelo de interés y los elementos relevantes de la estimación indirecta queda apuntar que el estimador que se propone, $\tilde{\star}_{\star\star\star\star}$ sería aquel valor que cumple

$$\tilde{\star}_{\star\star\star\star} = \star\,\star\star\star\;\star\star_\star\star\,(\star)$$

siendo

$$\star = \left(\hat{\star} \text{ i } \frac{\mathbf{P}\,\tilde{\star}^\star(\star)}{\star}\right)^0 - \left(\hat{\star} \text{ i } \frac{\mathbf{P}\,\tilde{\star}^\star(\star)}{\star}\right) + \frac{(\tilde{\star} \text{ i } \star_0 \text{ i } \star_1\star)^2}{\star^2_\star}$$

siendo $- = [\star \lim \star\,(\hat{\star})]^{\text{i}\,1}\star$ matriz esta que se propone estimar mediante la metodología de Newey-West, por ejemplo.

4.5.3 Restricciones estocásticas no lineales

En este apartado se describe de qué manera se podrían introducir en el modelo restricciones estocásticas no lineales para modelizar la existencia de un mayor conjunto de información sobre el parámetro que la recogida por un simple valor disponible. Especialmente interesantes son las dos propiedades relativas al signo y al rango de valores plausibles de la tasa de depreciación. Esta información puede incorporarse en forma de restricciones estocástica en el modelo como se indica a continuación. La primera cuestión, relativa al signo de los valores a estimar se puede resolver utilizando la función logarítmica. De esta manera, siendo $\tilde{\star}$ el valor de la información a priori, la ecuación siguiente recogería el signo positivo en los valores estimados de la tasa de depreciación:

$$\log(\tilde{\star}) = \log(\star_0 + \star_1 \star) + \star$$

siendo $\star$ el error de la restricción estocástica de varianza predeterminada. La segunda cuestión es la relativa a recoger en la restricción estocástica el rango de variación de los valores estimados de la tasa de depreciación. Así, por ejemplo, si se desea que los valores estimados ‡uctúen en el intervalo [0.04;0.12], una manera de incorporar esta información sería teniendo en cuenta la siguiente ecuación:

$$\log(\tilde{\star}) = \log\left(\frac{\star_0 + \star_1 \star \text{ ¡ } 0\star 04}{0\star 12 \text{ ¡ } \star_0 \text{ ¡ } \star_1 \star}\right) + \star$$

De esta manera, incorporar las restricciones estocásticas no lineales en el criterio de estimación indirecta conduciría a tener en cuenta en la función criterio $\star_\star(\star)$ el siguiente elemento relativo a la información a priori

$$\frac{\left[\log(\tilde{\star}) \text{ ¡ } \log\left(\frac{\star_0 + \star_1 \star \text{ ¡ } 0\star 04}{0\star 12 \text{ ¡ } \star_0 \text{ ¡ } \star_1 \star}\right)\right]^2}{\star_\star^2}$$

con lo que los estimadores de los parámetros de la tasa de variación darán lugar a valores en el rango y con el signo deseado.

4.5.4 Resultados de las simulaciones

Con el …n de ilustrar el funcionamiento del método propuesto IISR en la estimación del modelo M3 planteado se han llevado a cabo $\star = 250$ replicaciones y estimaciones del mismo. En la Tabla 4.10 se presenta un resumen de los resultados obtenidos …gurando la media y la desviación típica de las estimaciones obtenidas en dichas replicaciones del modelo.

Tabla 4.10. Media y Desviación Típica de las Estimaciones IISR del Modelo M3

(H = 200)

$\star_0 = (2\star 0\star 4\star 0\star 07\star 0\star 5\star 0\star 02\star 0\star 005)$

	$\star$	$\overset{1}{\star}$	$\star_0$	$\star_1$	$\star_\star$	$\star_{\star\star}$
Media	2.5265	0.4589	0.0693	0.0696	0.0205	0.0063
Desviación Típica	(1.6902)	(0.2901)	(0.0821)	(0.0054)	(0.0209)	(0.0046)

Los resultados permiten ilustrar la e...cacia y la regularidad del funcionamiento del método propuesto para solucionar el problema de estimación de un modelo que requieren el uso de simulaciones cuando se dispone de información a priori útil sobre algunos de los parámetros. En la Tabla 4.10 ...gura la estimación del modelo auxiliar en dos fases explotando la propiedad de la estimación indirecta según la cual, si la dimensión del vector de parámetros del modelo original y del modelo auxiliar es la misma, entonces la estimación indirecta es independiente de la matriz distancia y por tanto se puede utilizar la matriz identidad en lugar de la matriz de distancia - $\star$Puesto que la dimensión de $\star\star$el vector de parámetros de interés, es 6, se buscaba un modelo auxiliar en el que la dimensión de su parámetro $\star$ fuera también 6. Era necesario, sin embargo que algún elemento de dicho vector recogiera información sobre la heteroscedasticidad presente en el modelo original. Por esta razón se ha respetado la estimación auxiliar en dos fases, obteniéndose en la primera fase estimaciones de los residuos y en la segunda estimaciones de los parámetros de la ecuación (4.36) que capturaran la heteroscedasticidad del modelo original, que se observa en la ecuación (4.27). Combinando los parámetros de la primera fase con el coe...ciente de la heteroscedasticidad que se obtiene de llevar a cabo la estimación de $\star_1$ de la ecuación ((4.36), …nalmente se ha considerado el vector de parámetros del modelo auxiliar a $\star^{1} = (\star_{0}\star\star_{1}\star\star 0\star\star 1\star\star\star\star_{1})\star$

Otra posibilidad que realmente constituiría el caso más general permitiendo que la dimensión del vector de parámetros del modelo auxiliar pueda ser mayor que la del modelo original se basaría en la estimación no paramétrica de la matriz de varianzas y covarianzas del estimador auxiliar. Para esto sería también necesario llevar a cabo la estimación indirecta en dos etapas, al igual que la descrita anteriormente. A partir de los residuos obtenidos de la estimación de la primera etapa se calcularía la matriz de varianzas de Newey-West del estimador auxiliar y esta se utilizaría como matriz de distancia en la minimización del criterio del cual se obtiene el estimador IISR.

Capítulo 5

Conclusiones y extensiones

5.1 Conclusiones

En esta tesis doctoral se han desarrollado tres líneas de investigación relacionadas con el uso de la información a priori modelizado mediante las restricciones estocásticas, su adaptación a la metodología de la inferencia indirecta y su implementación en la estimación del stock de capital. La primera línea, relacionada con la metodología de las restricciones estocásticas ha dado lugar a los siguientes resultados:

¢ Si se supone que la información a priori no pierde importancia a medida que aumenta la información muestral, entonces las distribuciones asintóticas del estimador bajo restricciones estocásticas y sin tener en cuenta las restricciones estocásticas son distintas. También para muestras …nitas sin suponer normalidad en el término de error del modelo.

¢ La estimación (mediante mínimos cuadrados no lineales) bajo restricciones estocásticas genera, asintóticamente y para muestras …nitas sin suponer normalidad en el error, ganancias de e…ciencia respecto de la estimación (por mínimos cuadrados no lineales) que no tiene en cuenta las restricciones estocásticas.

¢ La distribución aproximada que se sugiere para el estimador de mínimos cuadrados no lineales bajo restricciones estocásticas es mejor que la del estimador que no tiene en cuenta las restricciones estocásticas.

Los anteriores resultados permiten justi…car la importancia de rescatar el uso de información a priori – modelizada mediante restricciones estocásticas – en los distintos procesos de estimación, especialmente cuando el tamaño muestral es pequeño. Así mismo, aportan validez al supuesto relacionado con la importancia del valor de la información a medida que aumenta la información muestral y abren un espacio para retomar la discusión sobre el interés de las restricciones estocásticas en la estadística clásica.

La segunda línea de investigación está relacionada con la extensión al contexto de la metodología de la inferencia indirecta del uso de información a priori mediante restricciones estocásticas. En relación a esta línea se presentan los siguiente resultados.

¢ Se de…ne un estimador, el estimador de inferencia indirecta bajo restricciones estocásticas, que extiende la metodología de la inferencia indirecta al contexto de las restricciones estocásticas.

¢ Bajo el supuesto de ausencia de pérdida de valor de la información a priori a medida que aumenta el tamaño muestral, se demuestra que el estimador de inferencia indirecta bajo restricciones estocásticas es más e…ciente que el estimador de inferencia indirecta, en un contexto asintótico y para muestras …nitas sin normalidad del término de error.

¢ Se sugieren los contrastes de validez de las restricciones estocásticas incorporadas en la estimación indirecta.

Los anteriores resultados permiten disponer de una metodología que comparte las ventajas de ambos métodos de estimación: por una parte la gran versatilidad de los métodos de estimación por simulación y por otra, las ganancias de e…ciencia asociadas al uso de información a priori. La unión de ambas metodologías es especialmente interesante teniendo en cuenta la pérdida de e…ciencia de los estimadores basados en la simulación, en relación a los métodos de estimación tradicionales.

La tercera línea de investigación está relacionada con la estimación econométrica del stock de capital. Los resultados que se presentan son los siguientes:

¢ Se proponen dos métodos para estimar una tasa de depreciación endógena del stock de capital mediante paquetes econométricos estándar. Estos métodos, en de…nitiva, permiten estimar por mínimos cuadrados no lineales o máxima verosimilitud, una tasa de depreciación variable conjuntamente con los parámetros de una función de producción. Junto a estas metodologías se presentan además algunas extensiones que permiten incorporar la información contenida en la contabilidad nacional sobre la amortización del capital e información a priori en forma de restricciones estocásticas.

¢ Se llevan a cabo distintas estimaciones, para algunas de las economías mas importantes de la Unión Europea, de una tasa de depreciación endógena del stock de capital mediante los métodos mencionados anteriormente. Los resultados arrojan una tasa de depreciación media en torno al 5 por ciento, dato éste que para la economía española es signi…cativamente distinto del que normalmente se considera en los trabajos empíricos y del asociado a los datos de la contabilidad nacional.

¢ Se presenta una familia de modelos macroeconómicos basados en la función de producción en los que el stock de capital está determinado por una tasa de depreciación que es endógena y estocástica y sobre la que se tiene información a priori. Los distintos modelos contenidos en esa familia se basan en un supuesto especí…co sobre la variabilidad de la tasa de depreciación. Dada la di…cultad en el tratamiento en la función de verosimilitud que genera la especi…cación del modelo y la presencia de restricciones estocásticas, el método de inferencia indirecta bajo restricciones estocásticas se presenta como una metodología adecuada para resolver el problema de estimación que se plantea. Por último se diseña un modelo en el que además de las propiedades mencionadas, se introducen parámetros estocásticos y restricciones estocásticas no lineales. Sobre los mencionados modelos se ofrecen un número importante de simulaciones y estimaciones mediante el mencionado método, siendo los resultados su…cientemente ilustrativos del adecuado funcionamiento de la metodología propuesta.

5.2 Extensiones

A continuación se describen algunas extensiones que podrían resultar de interés y que surgen a partir de las líneas de investigación abiertas en esta tesis doctoral y descritas en la sección anterior.

En relación con la inferencia indirecta bajo restricciones estocásticas, algunas de las extensiones que se considera oportuno mencionar son las siguientes:

¢ Extender los resultados mencionados a contextos no estacionarios, tanto la extensión de la metodología de las restricciones estocásticas a la inferencia indirecta como la justi…cación del uso de las restricciones estocásticas en general.

¢ Considerar restricciones estocásticas en las que el término de error no se distribuya como una normal e investigar en la posibilidad de obtener los resultados obtenidos en este nuevo contexto.

En relación con la estimación del stock de capital mediante la estimación econométrica de la tasa de depreciación, algunas de las extensiones que se considera oportuno mencionar son las siguientes:

¢ Extender los métodos propuestos de estimación de una tasa de depreciación endógena al caso multivariante y teniendo en cuenta especi...caciones no lineales para la tasa de depreciación.

¢ Llevar a cabo la implementación de estos métodos en modelos macroeconómicos de crecimiento y por tanto teniendo en cuenta nuevas relaciones entre las variables.

¢ Medir la cointegración de las series de stock de capital obtenidas para un conjunto de economías sobre las que se pretenda investigar la convergencia real.

¢ Implementar el método IISR aplicado al modelo de parámetros estocásticos y restricciones estocásticas no lineales descrito en el Capítulo 4, con datos reales.

Apéndice A

Monte Carlo sobre la estimación IISR

En ésta sección se describe un experimento de Monte Carlo sobre la estimación de un modelo mediante el método de IISR. En éste ejercicio se presentan un total de $\star = 5000$ simulaciones y estimaciones del modelo de la Sección 3.3, es decir, un modelo lineal simple con posible autocorrelación sobre el que existe información a priori. La información a priori se extrae de valores simulados de una variable normal con esperanza cero y varianza predeterminada. Para llevar a cabo la estimación se considera un modelo auxiliar que se estima por OLS en cada una de las simulaciones de la estimación indirecta. De hecho no es necesaria la implementación de un método basado en la simulación, puesto que la motivación para el uso de los mismos radica en la imposibilidad de utilizar directamente un criterio sobre el modelo original para obtener a partir del mismo los estimadores de los parámetros de interés. Es inmediato justi...car que mediante OLS es posible estimar éste modelo y de hecho es esto precisamente lo que se llevó a cabo en el Monte Carlo de la Sección 3.3. El objetivo de presentar éste ejercicio es el de recoger los resultados para un número su...cientemente alto de estimaciones, observar en un caso práctico como se implementaría el método y comprobar la regularidad de los resultados. En de...nitiva, ilustrar la factibilidad del método propuesto y la regularidad de los resultados a los que da lugar.

El modelo ($\star$) que se considera – el mismo que en el ejercicio de la Sección 3.3 – viene dado por

$$
\begin{aligned}
\star_\star &= \star\star_\star + \star_\star \\
\star_\star &= \star\star_{\star ¡ 1} + \star_\star
\end{aligned}
$$

siendo $\star_\star$ ¡ $\star\star\star\star\star$ » $\star$ $(0\star\star^2_\star)\star$ El vector de parámetros verdaderos es $\star_0 = (\star_0 \star\star_0) = (0\star 1\star 5)$, es decir se trata de un modelo sin autocorrelación. Supongamos que se quiere incorporar en la estimación la existencia de indicios a favor de que no existe autocorrelación en los errores. El modelo auxiliar ($\star$ *) es el modelo original reescrito como

$$
\begin{aligned}
\star_\star &= \star\star_{\star ¡ 1} + \star\star_\star ¡ \star\star\star_{\star ¡ 1} + \star_\star \\
&= \star^0_\star\star + \star_\star
\end{aligned}
$$

Teniendo en cuenta que $\star^0 = (\star\star\star)$ puede escribirse $\star = \star(\star)$ siendo en este caso una función conocida, lo que hace innecesarias las simulaciones para estimar dicha función. El número de parámetros del modelo auxiliar es $\star = 3\star$

Para estimar el parámetro de interés $\star$ bajo restricciones estocásticas se toma el criterio OLS como el criterio del modelo auxiliar, lo que implica que

$$
\begin{aligned}
a_\star &= \textstyle\sum \hat{\star}^2_\star\star \\
\frac{\star a_\star}{\star\star} &= ¡ 2\star^0\hat{\star}\star \\
\frac{\star^2 a_\star}{\star\star\star\star^0} &= 2\star^0\star\star
\end{aligned}
\tag{A.1}
$$

siendo $\star$ la matriz $\star x \star$ de observaciones del vector $\star_\star\star$ Siguiendo la notación introducida en la

Sección 3.4, que establecía que

$$\frac{1}{\star}\,\frac{\star^{a}_{\star}}{\star\star^{0}}\ \text{¡}^{\star}!\ \star\,(0\star\star)\ \text{y}$$
$$\frac{1}{\star}\,\frac{\star^{2\,a}_{\star}}{\star\star\star\star^{0}}\ \text{¡}^{\star}!\ \star$$

se tiene de las ecuaciones (A.1) que ⋆ = 4⋆$^2_\star$⋆⋆⋆ (⋆ ^{0}⋆ ⋆⋆)), y que ⋆ = 2⋆lim(⋆ ^{0}⋆ ⋆⋆)⋆Por tanto,

$$\text{p—}\ \star(\hat{\star}\ \text{¡}\ \star_0)\ \text{¡}^{\star}!\ \star\,(0\star©_1)$$

siendo $©_1$ = ⋆ ¡ ^{1}⋆⋆ ¡ ^{1} = ⋆$^2_\star$⋆⋆⋆ (⋆ ^{0}⋆ ⋆⋆) ¡ ^{1}.

Se quiere estimar ⋆ con la ayuda de la información a priori que se tiene sobre el parámetro de la autocorrelación. Se considera una distribución ⋆* » ⋆ (0⋆⋆$^2_\star$) y se de…ne la restricción estocástica sobre ⋆ como ⋆* = ⋆ + ⋆ siendo ⋆ » ⋆⋆⋆ ¡ ⋆ (0⋆⋆$^2_\star$). Es decir, en la estimación se incorporará una realización de la variable aleatoria ⋆*⋆tal que dicha realización puede expresarse como la suma del parámetro a estimar, ⋆⋆más un error de varianza determinada a priori ⋆. El modelo original completo a estimar es por tanto

$$\star_\star \;=\; \star\star_\star + \star_\star$$
$$\star^\star \;=\; \star + \star$$

Por tanto, en este caso, el número de restricciones estocásticas es ⋆ = 1, y las derivadas ⋆ $_1$⋆⋆ $_2$ son

$$\star\star\star\star = \star_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \text{¡}\star & \text{¡}\star \end{bmatrix};\qquad \star\star\ \star\star\star = \star_2 = (1\star 0)$$

La matriz $\star_2^{¤}$ en este caso es un escalar igual a $\star_\star^2$ y $\star_2 = \star\star_\star^2\star$De ésta manera, $\star_2^{¤} = \star_2\star\star$ = $\star_\star^2$ El estimador de $\star$ de Inferencia indirecta bajo restricciones estocásticas, $\tilde{\star}_{\star\star\star}$ es el valor minimiza el criterio

$$\star(\star\ {}^0\star\ {}^{i\,1}\star\ ) = f(\hat{\star}\ ¡\ \star(\star))^0(\star\ {}^0\star\ )(\hat{\star}\ ¡\ \star(\star))\star\star_\star^2 + (\star^\star\ ¡\ \star_1)^2\star\star_\star^2 g$$

De la teoría asintótica habitual es fácil comprobar que la distribución de $\tilde{\star}_{\star\star\star\star}$ viene dada por

$$\text{p—}\ \star(\tilde{\star}_{\star\star\star\star}\ ¡\ \star_0)\ ¡^\star!\ \star\ (0\star\star\ {}^{i\,1}(\star\ {}^0© {}^{i\,1}\star\ )\ {}^{i\,1})$$

donde, en el caso que se considera, se cumple

$$\star\ {}^0© {}^{i\,1}\star\ = \frac{1}{\star_\star^2}\star\ {}^0_1\ \text{µ}\ \star\lim\frac{\star\ {}^0\star}{\star}\ \text{¶}\ \star_1 + \frac{1}{\star_\star^2}\frac{\star\ {}^0_2\star_2}{\star}$$

Esto implica que la distribución aproximada que se sugiere para el estimador $\tilde{\star}_{\star\star\star}$ sería

$$\tilde{\star}_{\star\star\star\star}\ ¼\ \star\ \ \text{Ã}\ \star\star\ \frac{1}{\star_\star^2}\star\ {}^0_1(\star\lim\star\ {}^0\star\ )\star_1 + \frac{\star\ {}^0_2\star_2}{\star_\star^2}\ {}^{.\ ¸\,i\,1}\ !$$

Si no se tienen en cuenta las restricciones estocásticas – lo que tendría lugar si no fuera hecho ningún supuesto sobre el comportamiento particular de $\star_2^{¤}$ – entonces la información que proporcionan las restricciones estocásticas sería irrelevante y la distribución aproximada de $\tilde{\star}_{\star\star\star}$ serían las del estimador $\tilde{\star}_{\star\star}$ de Inferencia Indirecta, es decir,

$$\tilde{\star}_{\star\star}\ ¼\ \star\ \ \text{µ}\ \star\star(\frac{1}{\star_\star^2}\star\ {}^0_1(\star\lim(\star\ {}^0\star\ ))\star_1)\ {}^{i\,1}\ \text{¶}$$

A continuación se describen brevemente las propiedades del experimento de Monte Carlo en el que se estiman por el método de Inferencia Indirecta bajo Restricciones Estocásticas (IISR) el parámetro $\star^0 = (\star\star\star)$.

Se construye una muestra de tamaño ⋆ = 40 de la variable exógena $\star_\star$ a partir del proceso $\star_\star = 0\star5\star_{\star¡1} + \star_\star$ siendo $\star_\star$ » ⋆⋆⋆⋆⋆⋆ (0⋆1)⋆ Esta variable permanecerá …ja a lo largo de las ⋆ = 5000 replicaciones y estimaciones del modelo que se hagan. Por otra parte se genera una muestra de ⋆ = 5000 observaciones del parámetro ⋆ procedentes de una distribución ⋆ $(0\star\star^2_\star)$ siendo $\star^2_\star = 0\star02\star$ A cada valor se le denota $\star^\star\star\star = 1\star\star\star$ y cada uno de éstos valores se utilizará como la información a priori puntual sobre el parámetro que se vincula a la muestral en cada una de las estimaciones del Monte Carlo. En la generación de los datos originales se computa $\star^\star_\star = 1\star5\star_\star + \star^\star_\star$ siendo $\star^\star_\star$ ¡ ⋆⋆⋆⋆ ⋆ (0⋆1)⋆ El valor de $\star^2_\star$ se ha …jado con el …n de hacer el correspondiente valor de $\star^2$ de la anterior regresión aproximadamente igual a 0⋆65⋆ Como resultado de este fase del proceso se tienen ⋆ vectores de ⋆ observaciones de la variable endógena ⋆ generados por el verdadero parámetro $\star^0 = (\star_0\star\star_0) = (0\star1\star5)$ y un vector de la variable ⋆⋆

En la siguiente etapa se inicia la estimación indirecta en cada iteración del experimento, para lo cuál en primer lugar se calcula $\hat{\star}$ a partir de los datos originales. A continuación se llevan a cabo, para un ⋆ dado, ⋆ = 1000 simulaciones del modelo original y sus respectivas estimaciones OLS, calculándose el estadístico $\sum \tilde{\star}_\star(\star)\star\star$. Finalmente y con la ayuda de la información a priori, mediante la implementación de un algoritmo de minimización se obtiene el valor de ⋆ que minimiza la distancia entre $\hat{\star}$ y $\sum \tilde{\star}_\star(\star)\star\star\star$ Es decir, se minimiza la función

$$f(\hat{\star} ¡ \sum \tilde{\star}_\star(\star)\star\star)^0(\star\ {}^0\star\ )(\hat{\star} ¡ \sum \tilde{\star}_\star(\star)\star\star))\star\star^2_\star + (\star^\star ¡ \star_1)^2\star\star^2_\star g$$

Los resultados del Monte Carlo …guran en la Tabla A.1, en la que además se han incluido los resultados del Monte Carlo de la Sección 3.3 del método SR. Se observa la esperada pérdida de e…ciencia generada por la presencia de simulaciones, si bien, el método aportaría mejoras respecto del método I.I. en el que se inspira.

Tabla A.1. Media y Varianza de los Estimadores SR e IISR
(H = 5000)
$\star_\star^2 = 0\star02;\ \star_0 = (0\star1\star5)$

	Método IISR		Método SR	
$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$
$\bar{\hat{\star}}_\star$	0.0035	1.4886	0.0010	1.499580
$\hat{\star}^2_{\star_\star}$	0.0201	0.0336	0.0117	0.025580

Si bien, considerando estrictamente el contexto de la estimación indirecta, en el modelo planteado no es necesario implementar dicha metodología, se ha llevado a cabo el experimento de Monte Carlo con el …n de recoger el funcionamiento de la metodología propuesta en un modelo sencillo. Al llevarse a cabo la estimación un número alto de veces se puede medir la regularidad de los resultados y comparar las propiedades de la distribución obtenida con la de otros métodos. Es su…ciente para ilustrar la funcionalidad del método y al mismo tiempo para medir la proximidad de los resultados a los que se obtienen cuando se estima el mismo modelo por el método SR. Si bien los resultados re‡ejan peores propiedades del estimador – especialmente mayor varianza – resultan coherentes con la teoría, dada la pérdida de e…ciencia debida a la presencia de simulaciones.

Apéndice B

Aproximación lineal de C⋆⋆⋆

Dada una función $\star = \star(\star_1 \star\star\star\star_\star) = \star(\star)$ la aproximación lineal de primer orden en el valor $\star = \star^0$ es

$$\star = \star(\star^0) + \star^0(\star)|_{\star=\star^0}(\star - \star^0)$$

En el caso que se considera, cuando la tasa de depreciación $\star_\star$ es endógena y está dada por la ecuación $\star_\star = \star_0 + \star_1 \star_\star \star$se tiene $\star_\star = 1 - \star_\star = \star_0 + \star_1 \star_{\star - \star}$ siendo $\star_0 = 1 - \star_0$ y $\star_1 = -\star_1 \star$Por tanto, el coe…ciente la inversión retardada $\star_{\star-\star}$ es

$$\star_{\star\star\star}(\star_\star \star\star\star\star\star\star_{\star-\star+1}) = \prod_{\star=0}^{\star-1} \star_{\star-\star} = \prod_{\star=0}^{\star-1} (\star_0 + \star_1 \star_{\star-\star})$$

Para calcular la aproximación lineal de la anterior expresión en torno al valor $\star = 0\star$por una parte, teniendo en cuenta que $\star_{\star\star\star}(0) = \star_0^\star$ y que

$$\frac{\star\star_{\star\star\star}}{\star\star_{\star-\star}}|_{\star=\star^0} = \star_1 \prod_{\substack{\star=0 \\ \star\neq\star}}^{\star-1} (\star_0 + \star_1 \star_{\star-\star})|_{\star=\star^0} = \star_1 \star_0^{\star-1}$$

entonces,

$$\frac{\star\star_{\star\star\star}}{\star\star} = (\star_1\star_0^{\star\,\mathrm{i}\,1}\star_{\star\star\star\star}\star_1\star_0^{\star\,\mathrm{i}\,1})^0$$

y

$$\star_{\star\star\star} \;'\; \star_0^{\star} + \star_1\star_0^{\star\,\mathrm{i}\,1}\sum_{\star=0}^{\star 1}\star_{\star\,\mathrm{i}\,\star} = \star_0^{\star\,\mathrm{i}\,1}(\star_0 + \star_1\sum_{\star=0}^{\star 1}\star_{\star\,\mathrm{i}\,\star})$$

La parte omitida de la función en la aproximación lineal es $\star_1^{\star}\prod_{\star=0}^{\star 1}\star_{\star\,\mathrm{i}\,\star} + \star_0\star_1^{\star\,\mathrm{i}\,1}(\sum_{\star\star\star=0}^{\star 1}\star_{\star\,\mathrm{i}\,\star}\star_{\star\,\mathrm{i}\,\star})\star$ Si la correlación de la serie no es muy alta o si $\star_1$ toma valores pequeños, entonces resulta insigni…cante y la aproximación válida.

Cuando $\star_\star$ depende de dos variables, $\star_{1\star}$ y $\star_{2\star}$, el coe…ciente de $\star_{\star\star\star}$ es

$$\begin{aligned}\star_{\star\star\star} &= \prod_{\star=0}^{\star 1}(\star_0 + \star_1\star_{1\star\star\,\mathrm{i}\,\star} + \star_2\star_{2\star\star\,\mathrm{i}\,\star}) \\ &= \prod_{\star=0}^{\star 1}(\star_0 + \star^0_{\star\,\mathrm{i}\,\star}\star)\end{aligned}$$

siendo $\star_\star = (\star_{1\star\star}\star_{2\star\star})^0$ y $\star = (\star_1\star\star_2)^0\star$Siguiendo los mismos pasos que en el caso unidimensional es fácil comprobar que la aproximación lineal de $\star_{\star\star\star}$ es ahora:

$$\star_{\star\star\star} \;'\; \star_0^{\star\,\mathrm{i}\,1}(\star_0 + \star_1\sum_{\star=0}^{\star 1}\star_{1\star\star\,\mathrm{i}\,\star} + \star_2\sum_{\star=0}^{\star 1}\star_{2\star\star\,\mathrm{i}\,\star})$$

que es la expresión que aparece en la Sección 4.3.2 para el coe…ciente de la inversión retardada utilizada en el Método 2 de estimación de una tasa de depreciación variable.

Bibliografía

[1] Amemiya T. (1985) Advanced Econometrics. Harvard University Press. Cambridge.

[2] Andrews, D. and Monahan, J. (1992) "An Improved Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Matrix Estimator", Econometrica, 60, 953-966.

[3] Burnside, C. and Eichenbaum, M. (1994). "Factor Hoarding and the Propagation of Business Cycles Shocks", NBER Working Paper 4675.

[4] Calzorali, G., Di Iorio F. and Fiorentini G. (1998) "Control Variates for Variance Reduction in Indirect Inference: Interest Rate Models in Continuous Time", Econometrics Journal, 1, C100-C112.

[5] Canova, F. (1994) "Statistical Inference in Calibrated Models", Journal of Applied Econometrics, vol. 9 suplement, 123-145.

[6] Contabilidad Nacional Trimestral de España (CNTE). 1970-1992. INE.

[7] Corrales, A., y Taguas, D. (1989) Series Macroeconómicas para el Período 1954-1988: Un Intento de Homogeneización. Ministerio de Economía y Hacienda. Madrid.

[8] Denia, A. Gallego, A.M. Mauleón, I. (1996) "Una Estimación Econométrica del Stock de Capital de la Economía Española", IVIE, WP-EC, 96-02

[9] Dadkhah, K and Zahedi, F. (1990) "Estimating a Cross Country Comparison of the Capital Stock", Empirical Economics, 25, 383-408.

[10] Davidson, R. and Mackinnon, J. (1993) Estimation and Inference in Econometrics. Oxford University Press. New York.

[11] Denton, F. (2000) "Mixed Estimation when the Model and/or Stochastic Restrictions are Nonlinear" QSEP Research Report N*345

[12] Den Haan, W. and Levin, A. (1995) "Inferences from Parametric and Non-parametric Covariance Matriz Estimation Procedures", International Finance Discusion Papers, N*504, Board of Governors of the Federal Reserve System, Washington, D.C.

[13] Den Haan, W., and A. Marcet (1994), "Accuracy in Simulation", Review of Economic Studies, 61, 3-17.

[14] Doan, T., Litterman, R. and Sims, C. (1984) "Forecasting and Conditional Projection using Realistic Prior Distributions" Econometric Reviews, 3, 1-144.

[15] Doms, M. (1996) "Estimating Capital E¢ciency Schedules within Production Functions" Economic Inquiry, 34, 78-92.

[16] Du¢e, D. and Singleton, K. (1993) "Simulated Moments Estimation of Markov Models of Asset Prices". Econometrica, 61, 929-1052.

[17] Durbin, J. (1953) "A Note on Regression when there is Extraneous Information about one of the Coe¢cients", Journal of the American Statistical Association, 48, 799-808.

[18] Epstein, and LG. Denny, M. (1980). "Endogenous Capital Utilization in a Short-Run Production Model: Theory and Empirical Application", Journal of Econometrics, 12, 189-207.

[19] Gallant, R. and Tauchen, G. (1996) "Which Moments to Match?" Econometric Theory, 12, 657-81.

[20] Gourieroux, C, Monfort, A. (1991) "Simulated Based Econometrics in Models with Heterogenety", Annales d'Economie et de Statistique, 20/l, 69-107.

[21] ____ ____ (1993a) "Simulated Based Inference: A Survey with Special Reference to Panel Data Models", Journal of Econometrics, 59, 5-33.

[22] ____ ____ (1993b) "Pseudo Likelihood Methods", in Handbook of Statistics, G.S. Maddala, Rao, C.R., and Vinod H. (eds).) North-Holland, Amsterdam.

[23] ____ ____ (1996) Simulated Based Econometric Methods, Oxford University Press, Oxford.

[24] ____(1995) "Testing, Encompasing, and Simulating Dynamic Econometric Models", Econometric Theory, 11, 195-228.

[25] ____ ____ and Trognon, A. (1984a) "Pseudo-Maximum Likelihood Methods: Theory", Econometrica, 52, 681-700.

[26] ____ ____ ____ (1984b) "Pseudo-Maximum Likelihood Methods: Applications to Poisson Models", Econometrica, 52, 701-720.

[27] ____ ____ Renault, A.and Trognon, A (1987) "Simulated Residuals", Journal of Econometrics, 34, 201-252.

[28] ____ ____ ____ (1993) "Indirect Inference", Journal of Applied Econometrics, vol 8, S85-S118.

[29] Greene, W. (1997) Econometric Analysis. Prentice Hall.

[30] Greene, W. and Seaks, T. (1991) "The Restricted Least Squares Estimator: A Pedagogical Note", Review of Economics and Statistics, 73, 563-567.

[31] Gregory, A. and Smith, G. (1991) "Calibration as Testing Inference in Simulated Macroeconomic Models", Journal of Business and Economic Statistics, 9, 297-303.

[32] Hamilton, J. (1994) Time Series Analysis, Princeton University Press. Princeton

[33] Hansen, L. (1982) "Large Sample Properties of Generalized Method of Moments", Econometrica, 50, 1029-1054.

[34] Hulten, C.R. (1991) "The Measurement of Capital", in Fifty Years of Economic Measurement. Berndt-Triplett (Ed.). Chicago.

[35] ____ and Wykoff (1981) "The Measurement of Economic Depreciation", in Depreciation, Inflation, and the Taxation of Income from Capital. Washington: The Urban Institute Press, 83-120.

[36] ____ and ____ (1996) "Issues in the Measurement of Economic Depreciation", Economic Inquiry, 34, 10-23.

[37] Jorgenson. D.W. (1963) "Capital Theory and Investment Behaviour", American Economic Review, 53, 247-259.

[38] ____ (1991) "Productivity and Economic Growth", in, Fifty Years of Economic Measurement. Berndt-Triplett (Ed.). Chicago.

[39] ____ (1996) "Empirical Studies in Depreciation", Economic Inquiry, 34, 24-42.

[40] Kennedy, P. (1991) "An Extension of Mixed Estimation, with an Application to Forecasting New Product Growth", Empirical Economics, 16, 401-415.

[41] Leamer, E. (1972) "A Class of Informative Priors and Distributed Lag Analysis", Econometrica, 40, 1059-1081.

[42] Leamer, E. (1978) Specification Searches, Wiley & Sons. New York.

[43] Lee, L. (1990) "On the Efficiency of Methods of Simulated Moments and Maximum Simulated Likelihood Estimation of Discrete Response Models", Discussion Paper 260, University of Minnesota.

[44] ____ (1995) "Asymptotic Bias in Simulated Maximum Likelihod of Discrete Chice Models", Econometric Theory, 11, 937-983.

[45] Lee, B. and Ingram, B. (1991) "Simulation Estimation of Time Series Models", Journal of Econometrics, 47, 197-207.

[46] Litterman, R (1986a) "A Statistical Approach to Economic Forecasting", Journal of Business and Economics Statistics, 4, 1-5.

[47] ____ (1986b) "Forecasting with Bayesian Vector Autoregression", Journal of Business and Economics Statistics, 4, 25-38.

[48] Litterman, R. and Weiss, L. (1985) "Money, Real Interest Rates, and Output: A Reinterpretation of PostWar U.S. Data", Econometrica, 53 129-156.

[49] Lütkepohl, H (1993) Introduction to Multiple Time Series Analysis. Second Edition. Springer Verlag, Berlin.

[50] Mauleón, I. y Hernández, J.A (2000) "Estimating the Capital Stock". mimeo

[51] ____ ____ (1998) "On the Econometric Estimation of a Variable Rate of Depreciation". mimeo

[52] Mauleón, I. y Risueño, M (1997) "Una Estimación Conjunta de la Función de Producción y la Tasa de Depreciación del Capital". Fundación Empresa Pública, WP 9709.

[53] McFadden, D. (1989) "A Method of Simulated Moments for Estimation of Discrete Response Models without Numerical Integration", Econometrica, 57, 995-1026.

[54] Nadiri, M.I. and Prucha, I.R. (1993) "Estimation of the Depreciation Rate of Physical and R&D Capital in the US Total Manufacturing Sector. National Bureau of Economic Research, WP 4591.

[55] Newey, W. and West, K (1987) "A Simple, Positive Semi De...nite Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix", Econometrica, 41, 775-778.

[56] OECD (1992) Methods Used by OECD Countries to Measure the Stocks of Fixed Capital.

[57] Pakes, A. and Pollard, D. (1989) "Simulaton and the Asymptotics of Optimization Estimators", Econometrica, 57, 1027-1057.

[58] Perron, P. (1989) "The Great Crash, the Oil Price Shock, and the Unit Root Hypothesis". Econometrica, 57, 1361-1401.

[59] Prucha, I.R. (1995) "On the Econometric Estimation of a Constant Rate of Depreciation". Empirical Economics, 20, 299-302.

[60] ____ and Nadiri, M.I. (1996) "Endogenous Capital Utilization and Productivity Measurement in Dynamic Factor Demand Models. Theory and Application to the U.S. Electrical Machinery Industry". Journal of Econometrics, 71, 343-379.

[61] Robinson, P. (1987) "Asymptotically E¢cient Estimation in the Presence of Heteroskedasticity of Unknown Form", Econometrica, 55, 875-891.

[62] Schmidt, P. (1976) Econometrics, Marcel Dekker, New York.

[63] Shiller, R (1973) "A Distributed Lag Estimator Derived from Smothness Priors", Econometrica, 41, 775-778.

[64] Sims, C. (1980) "Macroeconomics and Reality", Econometrica, 48, 1-48.

[65] Smith, A. (1993) "Estimating Nonlinear Time Series Models using Simulated Vector Autoregression", Journal of Applied Econometrics, 8, 63-85.

[66] Theil, H. (1963) "On the Use of Incomplete Prior Information in Regression Analysis", Journal of the American Statistical Association, 58, 401-414.

[67] Theil, H. and Goldberger, A. S. (1961) "On Pure and Mixed Statistical Estimation in Economics", International Economic Review, 2, 65-78.

[68] Triplett, J. (1992) "Measuring the Capital Stock: A Review of Data Needs for Productivity, Production Analysis and NIPA", Boureau of Economic Analysis, mimeo.

[69] ____ (1996) “Depreciation in Production Analysis and in Income and Wealth Accounts: Resolution of an Old Debate”, Economic Inquire, 34, 93-115.

[70] White, H. (1980) “A Heteroskedasticity Consistent Covariance Matrix Estimator and a Direct Test for Heteroskedasticity”, Econometrica, 48, 817-838.

[71] White, H. (1982) “Maximum Likelihood Estimation of Misspeci...ed Models”, Econometrica, 50, 1-28.