

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CANARIAS



TESIS DOCTORAL

**EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO EN
PROBLEMAS ELASTODINÁMICOS CON SIMETRÍA DE
REVOLUCIÓN**

JOSÉ MARÍA EMPERADOR ALZOLA

Las Palmas de Gran Canaria, 1988

T E S I S

EL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO EN

PROBLEMAS ELASTODINAMICOS CON

SIMETRIA DE REVOLUCION

por

JOSE MARIA EMPERADOR ALZOLA

Ingeniero Industrial
por la E.T.S.I.I. de la U.P.C.

presentada

en

la Universidad Politecnica de Canarias
para la obtención del título de
Doctor Ingeniero Industrial

A mi familia y en especial
a mi hija, Itziar

Deseo expresar mi más sincero agradecimiento al profesor José Domínguez Abascal, por su constante ayuda y consejo a lo largo del desarrollo de este trabajo, sin los que difícilmente hubiera podido realizarse.

También deseo agradecer al profesor Ramón Abascal García los consejos y desinteresada ayuda en la discusión y elaboración de algunos de los algoritmos utilizados en éste trabajo.

Asimismo, agradecer a mis compañeros del departamento de Construcción de la E.T.S.I.I. de Las Palmas y a los miembros del departamento de Mecánica de la E.T.S.I.I. de Sevilla el aliento y apoyo brindados en todo momento.

Finalmente, agradecer a la Universidad Politécnica de Canarias y a la Escuela Superior de Ingenieros Industriales de Las Palmas las facilidades prestadas para la realización de esta Tesis.

INDICE

I N D I C E

Capitulo I : INTRODUCCION

1-1.1	El problema de la interacción suelo-estructura. Suelos Estratificados	I-1
1.1-2	Antecedentes Históricos del Problema	I-5
1.1-2-1	Vibraciones Verticales	I-5
1.1-2-2	Vibraciones Horizontales y de Cabeceo en Régimen Permanente	I-12
1.1-2-2-1	Modelo de Veletsos	I-12
1.1-2-3	Vibraciones de Torsión	I-17
1.2	Revisión Bibliográfica	I-18
1.3	Objetivo de la Tesis	I-25

Capitulo II : EL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO EN
SOLIDOS DE REVOLUCION

2.1	Introducción	II-1
2.2	El M.E.C. en Elastostática	II-1
2.2-1	Ecuaciones Fundamentales de la Elasticidad	II-1
2.2-1-1	Equilibrio de Tensiones	II-1
2.2-1-2	Relación Desplazamientos y Deformaciones ..	II-2
2.2-1-3	Ley de Comportamiento	II-2
2.2-1-4	Ecuación de Navier	II-3
2.2-2	Identidad Integral. Identidad de Somigliana	II-4

2.3	El M.E.C. en Elastodinámica	II-5
2.3-1	Ecuaciones Fundamentales de la Elastodinámica	II-5
2.3-2	Teorema de Reciprocidad en Elastodinámica.....	II-6
2.4	Soluciones Fundamentales. Estática y Dinámica	II-10
2.4-1	Solución Tridimensional en coordenadas Cartesianas	II-10
2.5	Solución Fundamental Axilsimétrica	II-14
2.5-1	Solución Fundamental Tridimensional Estática, en coordenadas cilíndricas	II-16
2.5-2	Solución Fundamental Tridimensional Dinámica, en coordenadas cilíndricas	II-21
2.6	Discretización de la Ecuación Integral en el Contorno	II-23
Capitulo III : IMPLEMENTACION NUMERICA DEL M.E.C. CON SIMETRIA DE REVOLUCION		
3.1	Introducción	III-1
3.2	Características Geométricas y Funciones de forma de los Elementos de Contorno Axilsimétricos	III-1
3.3	Cálculo de los Coeficientes de Influencia	III-4
3.3-1	Integración sobre Elementos sin Singularidades	III-4

INDICE

3.3-2	Integración sobre Elementos con Singularidades	III-6
3.3-2-1	Solución Fundamental Estática	III-6
3.3-2-1.1	Elementos Corona Circular	III-7
a)	Coefficientes de Influencia de las Tensiones	III-8
b)	Coefficientes de Influencia de los Movimientos	III-11
3.3-2-1.2	Elementos Banda Troncocónica	III-15
a)	Coefficientes de Influencia de las Tensiones	III-17
b)	Coefficientes de Influencia de los Movimientos	III-23
3.4	Integración de la Solución Fundamental Dinámica	III-30
3.5	Condiciones de Contorno, Axilsimétricas y no Axilsimétricas	III-33
3.6	Implementación de Subregiones	III-36
 Capitulo IV : CALCULO DE IMPEDANCIAS DINAMICAS DE CIMENTACIONES RIGIDAS POR EL M.E.C.		
4.1	Introducción	IV-1
4.2	Cimentaciones Rígidias. Solicitaciones	IV-1
4.2-1	Solicitaciones Axilsimétricas	IV-4
4.2-2	Solicitaciones Antimétricas	IV-5
4.3	Medios Histeréticos	IV-6

4.4	Calculo de las Impedancias de Cimentaciones Rígidas con Simetría de Revolución	IV-12
4.4-1	Impedancia Vertical y de Torsión	IV-13
4.4-1-1	Impedancia Vertical	IV-14
4.4-1.2	Impedancia de Torsión	IV-15
4.4-2	Impedancias Horizontal y Cabeceo	IV-15
4.4-2-1	Impedancias Horizontales	IV-16
4.4-2-2	Impedancias de Cabeceo	IV-17
4.4-3	Normalización de las Impedancias Dinámicas	IV-18
4.4-3-1	Modelo de Veletsos. Parámetros de Veletsos	IV-19
4.4-3-2	Normalización de Cimentaciones Embebidas	IV-20
Capitulo V : CIMENTACIONES AXILSIMETRICAS SOBRE SEMIESPACIO		
5.1	Introducción	V-1
5.2	Cimentaciones Superficiales sobre Semiespacio	V-2
5.2-1	Semiespacio Elástico	V-2
5.2-2	Semiespacio Viscoelástico Homogéneo	V-4
5.3	Cimentaciones Embebidas en el Semiespacio Viscoelástico Homogéneo	V-10
5.3-1	Cimentaciones Cilíndricas Rígidas	V-10
5.3-2	Cimentaciones Semiesféricas	V-17
Capitulo VI : CIMENTACIONES AXILSIMETRICAS EN MEDIOS ESTRATIFICADOS		
6.1	Introducción	VI-1

INDICE

6.2	Modelo Bicapa	VI-1
6.2-1	Cimentaciones Superficiales	VI-2
6.2-1-1	Suelo perfectamente elástico	VI-2
6.2-1-2	Estrato y Semiespacio viscoelásticos	VI-10
6.2-2	Cimentaciones embebidas en medios viscoelásticos	VI-22
6.2-2-1	Cimentaciones Cilíndricas	VI-22
6.2-2-2	Cimentaciones Semiesféricas	VI-32
6.3	Medios Estratificados Multicapa	VI-41
6.3-1	Cimentaciones Superficiales	VI-41
6.3-2	Cimentaciones Embebidas	VI-49
6.4	Rigideces Estáticas	VI-54

Capitulo VII : CONCLUSIONES Y DESARROLLO FUTURO

7.1	Resumen	VII-1
7.1	Conclusiones	VII-2
7.3	Desarrollo futuro	VII-6

REFERENCIAS

CAPITULO I

INTRODUCCION

1.1- INTRODUCCION

1.1-1.- EL PROBLEMA DE LA INTERACCION SUELO-ESTRUCTURA. SUELOS ESTRATIFICADOS

Desde una óptica muy general, puede decirse que la ingeniería tiene planteados un número de problemas muy diversos para los que no se conoce una solución exacta de forma explícita. Con la aparición y generalización del uso de los computadores digitales, surgen una serie de técnicas numéricas que proporcionan soluciones aproximadas, con una precisión y costo razonable. En esta tesis el problema que vamos a tratar es uno de estos para los que no se dispone de una solución de forma explícita y por tanto se aborda su resolución de forma numérica. El problema, en general, se refiere a obtener la solución en tensiones y movimientos de una estructura sometida a sollicitaciones dinámicas y en particular a los efectos que la interacción entre el suelo y estructura tienen sobre la respuesta de esta última.

Es claro que un gran número de las estructuras que se diseñan tienen una clara vinculación con el terreno sobre el que se mueven, o asientan; como ejemplo se pueden citar : maquinarias, vehiculos, edificaciones, obras civiles etc...

Debido a la penuria de métodos de resolución adecuados, hasta no hace mucho tiempo, pese a que era de todos conocida la interdependencia entre estas estructuras y el suelo, solía realizarse el análisis dinámico de la estructura desvinculada del mismo; esta hipótesis, aunque inexacta, suele ser suficiente para aquellas estructuras de no elevada importancia o responsabilidad.

En ciertas estructuras; bien por su importancia en sí mismas, p. ejem. puentes de grandes luces, edificios en altura o por sus repercusiones tanto ecológicas como de índole de seguridad, caso de centrales nucleares, resulta evidente que hemos de realizar el estudio conjunto de ambas

partes; estructura y terreno.

La realidad actual es que el número de estructuras a las que hay que aplicar un análisis dinámico conjunto crece constantemente y esta necesidad ha inducido numerosas investigaciones en este sentido. Los métodos desarrollados son fundamentalmente dos : el Método Directo y el Método de los Tres Pasos o de Subestructuración.

En el Método Directo el análisis se realiza conjuntamente entre ambos elementos estructurales, el terreno y la superestructura, aplicándoles alguno de los métodos numéricos de resolución ya mencionados, usualmente el método de los elementos finitos. La estructura y el suelo se discretizan, empleando para ello los tipos de elementos adecuados, en especial aquellos elementos utilizados para modelizar el terreno, ya que éstos han de tener en cuenta la parte del mismo que no ha sido discretizada.

La solución al problema puede ser hallada en dos dominios diferentes. En el dominio del tiempo, aquel en el que todas las variables dependen de la variable tiempo, mediante una tecnica de resolución de *Integracion Paso a Paso*. En el dominio de la frecuencia, aquel en el que todas las variables son de tipo armónico o bien pueden ser descompuestas en una suma de ellos, a través de la obtención de la función de transferencia del sistema para cada frecuencia obtenida al resolver el sistema de ecuaciones resultante de aplicar la transformada de Fourier o de Laplace a las ecuaciones de campo en el dominio del tiempo.

La solución en este último dominio se regenera al realizar el producto, de la función de transferencia del sistema, ya conocida, y la función transformada de la excitación y aplicarle a éste la antitransformada correspondiente.

El método de integración paso a paso permite tener en cuenta las posibles no linealidades del conjunto analizado, teniendo como principal inconveniente su fuerte dependencia del intervalo de tiempo escogido para cada uno de los pasos, debido a que este debe ser pequeño para obtener una solución correcta, se penaliza el tiempo de ejecución y por tanto su costo final.

El análisis en el dominio de la frecuencia, pese a su mayor sencillez, tiene dos inconvenientes fundamentales : el primero es que ya no permite tener en cuenta las no linealidades existentes y el segundo es que para obtener una respuesta temporal equivalente, a la del análisis en el tiempo, es necesario obtener una gama muy amplia de frecuencias, con lo que el costo de este procedimiento se vuelve a elevar.

El Método de los tres Pasos o de la Subestructuración se consideran separadamente la super estructura y el terreno , su denominación proviene de que han de resolverse tres problemas, o pasos, sucesivamente.

1.- Determinación de los desplazamientos de la cimentación, rígida y sin masa, debidos a los movimientos producidos en la superficie libre por un tren de ondas elásticas, incidentes a través del suelo.

2.- Cálculo de las impedancias dinámicas de la cimentación, mediante la aplicación de los movimientos de sólido rígido adecuados y de la evaluación de los esfuerzos producidos.

3.- Determinación de la respuesta de la superestructura ,suponiéndola soportada no ya por el terreno sino sobre los resortes y amortiguadores equivalentes, obtenidos en el segundo paso, sometida a los movimientos determinados en el primero.

Los inconvenientes de este método se centran en la dificultad de modelizar ~~el comportamiento~~ no lineal del terreno, así como no tener en cuenta la influencia de la

estructura sustentada en las propiedades del mismo; al no estar ésta incluida en los modelos utilizados en los pasos primero y segundo.

Algunas de las ventajas que presenta este método son:

- a.- Los modelos utilizados son muy simples.
- b.- Permite efectuar análisis de sensibilidad a los diferentes parametros, basados en diferentes hipótesis a lo largo de los tres pasos, lo que nos da, una mayor y mejor información, acerca de los distintos factores que intervienen en el problema global.

Hasta hace relativamente pocos años, el método numérico más utilizado con ambos enfoques de resolución del problema es el de los Elementos Finitos, que suponen un semiespacio elástico, o un medio estratificado horizontalmente, yaciendo sobre una base infinitamente rígida. En cualquiera de ellos, habra de obtenerse el movimiento de la base rígida compatible con el movimiento conocido en la superficie; utilizando para ello varios procedimientos.

Los principales inconvenientes de los modelos desarrollados basandose en los elementos finitos son dos:

- 1.- La estratigrafia real del suelo puede no ser rectos ni paralelos, entre si y la base, como por ejemplo, valles de aluvión, etc...
- 2.- La base sobre la que se asienta la estratigrafia del terreno considerado no ha de ser siempre rígida.

Ambas limitaciones vienen impuestas, la primera por la *matriz consistente de contorno*, elemento, especialmente desarrollado para este tipo de problemas, que cierra la zona de terreno discretizada. La segunda por la imposibilidad

inherente al método de modelar medios seminfinitos o infinitos.

Por ello se han desarrollado otras técnicas numéricas tales como : El Método de los Elementos de Contorno , tanto directo como indirecto, utilizando diversas soluciones fundamentales; acoplamiento Elementos Finitos y de Contorno; Matrices de Transferencia o diversos tipos de Ecuaciones Integrales.

1.1-2. ANTECEDENTES HISTORICOS DEL PROBELMA.

1-1-2-1 VIBRACIONES VERTICALES

La *Deustche Forschungsgesellschaft für Bodenmechanik*, en los años treinta, pretendia desarrollar un vibrador que permitiese la determinación de las características dinamicas del suelo. El soporte teórico fué encomendado a Reissner, que publico los resultados de su análisis en 1936.

El vibrador era del tipo de masas excentricas, montadas en un marco rígido. Por tanto el modelo empleado por Reissner consistía en una masa rígida que, sin separarse del terreno, inducia en el un desplazamiento alternativo, constante en la zona de contacto. La forma de ésta, por simplicidad de los cálculos, la adoptó circular.

Respecto al suelo, el modelo utilizado fue el semiespacio elástico, homogéneo é isótropo, como generalización de los modelos usados, para problemas estáticos, en Mecánica de Suelos.

Con estos planteamientos el problema de calcular las presiones en la interfase se puede resolver, si se resuelve el problema planteado en la Fig 1.1.

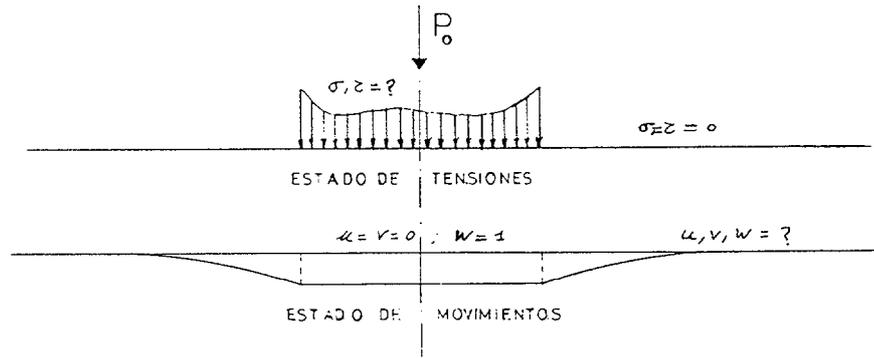


Fig.-1.1

Tal y como se observa; es un problema mixto, que lleva a un sistema de ecuaciones integrales; insoluble para Reissner ya que éste no disponía de un método de resolución apropiado para el mismo.

Por este motivo hubo de simplificar la situación y supuso conocida la distribución de presiones en la zona de contacto, lo que implica el incumplimiento de las condiciones de compatibilidad de deformación con la hipótesis de movimientos de sólido rígido. En definitiva el problema de Reissner consiste en la determinación de la respuesta de un semiespacio sometido a unas tensiones.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \frac{P_0 e^{i\omega t}}{\pi r_0^2} \\ \tau_{xz} = \tau_{yz} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ en una zona de radio } r_0 \quad [1.1]$$

La solución se obtiene mediante las funciones de Green para el semiespacio (halladas por Lamb en 1904), y que para el movimiento del punto en el eje de simetria, se presenta en la forma:

$$w = \frac{P_0 e^{i\omega t}}{\mu r_0} (f_1 + i f_2) \quad [1.2]$$

- donde : P_0 : Resultante de las tensiones verticales de contacto
- μ : Modulo de deformacion transversal del terreno
- r_0 : radio de la interfase
- f_1 y f_2 : Funciones de Reissner $f_1, f_2 \propto (\mu, \nu, \omega)$

A través de la expresión [1.2] se puede calcular la respuesta del sistema vibrador-suelo. Si la masa del vibrador es m y admitimos la hipótesis de movimiento de sólido rígido, el equilibrio dinámico exige :

$$m \ddot{w} + P_0 e^{i\omega t} = Q_0 e^{i\omega t} \quad [1.3]$$

$$\ddot{w} = -\omega^2 w$$

Introduciendo esta expresión en la 1.3

$$\left[-m\omega^2 + \frac{\mu r_0}{f_1 + i f_2} \right] w = Q_0 e^{i\omega t} \quad [1.4]$$

$$\text{Suponiendo que los movimientos } w = A e^{i\omega t} \quad [1.5]$$

$$A = \frac{Q_0 (f_1 + i f_2)}{(-m\omega^2 f_1 + \mu r_0) - i m f_2 \omega^2} \quad [2.6]$$

Los resultados teóricos no coincidieron con los ensayos realizados debido a varias razones :

- a) La hipótesis de distribución de σ_z .
- b) La hipótesis de que $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$
- c) la hipótesis de que las tensiones en la interfase no dependían de la frecuencia ω

Ademas, Shekhter (1948), demostró la existencia de errores de signo en las expresiones de las funciones de Reissner y Richardt (1970), que en los ensayos realizados, se utilizaron aceleraciones que producían el despegue del vibrador del suelo, con lo que la hipótesis de partida quedaba totalmente alterada.

Esta idea de Reissner quedó olvidada hasta 1953, resurgiendo con la aparición de los artículos de Quinlan y Sung, en el LVI *Annual Meeting of American Society for Testing Materials*, que modifican la hipótesis a), resolviendo varios casos con diferentes hipótesis de distribución de tensiones en la interfase. La más interesante de las utilizadas fue la dada por la expresión :

$$\sigma_z = \frac{P_0 e^{i\omega t}}{2 \pi r_0 \sqrt{r_0^2 - r^2}} \quad [1.7]$$

Distribución de tensiones del caso estático.

Tras varias mejoras introducidas por Bycroft (1956), Richardt, presentó en 1962 las gráficas de la Fig 1-2, en función de parámetros adimensionales, entre ellos la frecuencia adimensional $a_0 = \omega r_0 / c_s$ [1.8], donde $c_s = \sqrt{\mu / \rho}$ es la celeridad de las ondas elasticas S, o de distorsión del medio elástico considerado.

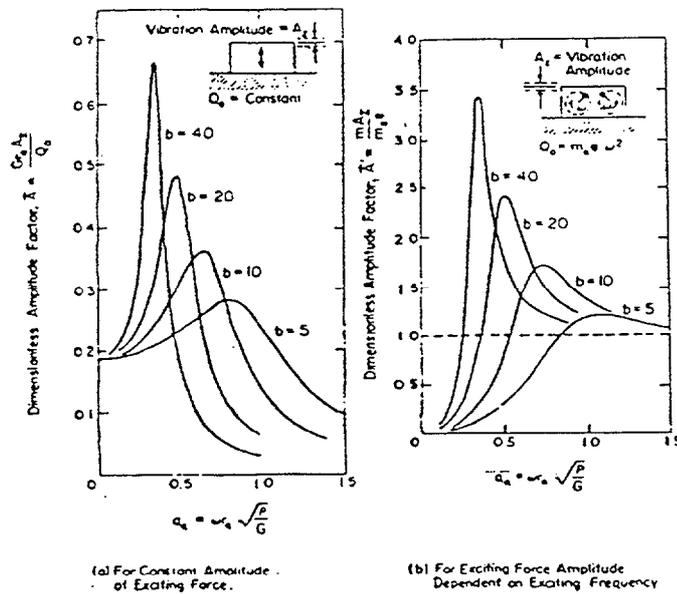


Fig .-1.2

La semejanza de éstas gráficas con las correspondientes a un sistema amortiguado de un solo grado de libertad, indujeron a Hsieh (1962) a proponer el siguiente esquema :

Derivando la ecuación [1.2] :

$$\dot{w} = i \omega w \quad [1.9]$$

pero

$$P_0 e^{i\omega t} = \frac{\mu r_0 w (f_1 - i f_2)}{f_1^2 + f_2^2} = \mu r_0 \left(\frac{f_1 w}{f_1^2 + f_2^2} - \frac{i f_2 w}{f_1^2 f_2^2} \right) \quad [1.10]$$

$$P_0 e^{i\omega t} = \left[\mu r_0 \frac{f_1}{f_1^2 + f_2^2} \right] w - \left[\frac{\mu r_0}{\omega} \frac{f_2}{f_1^2 + f_2^2} \right] \dot{w} \quad [1.11]$$

que sustituida en [1.3] conduce a :

$$m \ddot{w} + \left[\mu r_0 \frac{f_1}{f_1^2 + f_2^2} \right] w - \left[\frac{\mu r_0}{\omega} \frac{f_2}{f_1^2 + f_2^2} \right] \dot{w} = Q_0 e^{i\omega t} \quad [1.12]$$

que es análoga a :

$$m \ddot{w} + k w + c \dot{w} = F e^{i\omega t} \quad [1.13]$$

lo que nos lleva a

$$\left. \begin{aligned} K_{eq} &= \mu r_0 \frac{f_1}{f_1^2 + f_2^2} \\ C_{eq} &= \frac{\mu r_0}{\omega} \frac{f_2}{f_1^2 + f_2^2} \end{aligned} \right\} \quad [1.14]$$

que clarifican la interpretación de [1.2]

la respuesta en movimientos w , tiene dos partes; una gobernada por f_1 en fase con la carga y otra por f_2 desfasada 90° .

La ecuación [1.14] pone de manifiesto que esta segunda corresponde al amortiguamiento; el cual solo puede corresponder a la pérdida de energía por radiación en el terreno.

En f_1 se recogen las contribuciones en fase, tanto las debidas a las reacciones elásticas como a las de las fuerzas de inercia; K_{eq} recoge pues ambas y ello explica el hecho de que aparezcan valores negativos de ésta a muy altas frecuencias como consecuencia del predominio de las últimas frente a las puramente elásticas. Además tanto f_1 como f_2 dependen de la frecuencia adimensional y del coeficiente de Poisson del terreno ν .

El comportamiento a frecuencias muy bajas proximas a cero han de tender a la solución estática, dada por *Timoschenko*, cuya expresión es :

$$w_{st} = \frac{P_0 (1-\nu)}{4 \mu r_0} \quad [1.15] \text{ al comparala co [1.2]}$$

$$w_{st} = \frac{P_0}{\mu r_0} [f_1]_0 \rightarrow [f_1]_0 = \frac{1-\nu}{4} \quad [1.16]$$

que coincide para los diferentes valores de ν obtenidos por *Bycroft*

$$\frac{w}{w_{st}} = e^{i\omega t} \frac{4}{(1-\nu)} (f_1 + i f_2) \quad [1.17]$$

Lysmer (1966) a la vista de ésta expresión indicó que bastaba con representar las expresiones siguientes graficamente :

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \frac{4}{1-\nu} f_1 \\ F_2 &= \frac{4}{1-\nu} f_2 \end{aligned} \right\} \quad [1.18]$$

ya que son ellas las que controlan la respuesta y de forma congruente definir un indice modificado de masa que será :

$$B = \frac{4}{1-\nu} b = \frac{1-\nu}{4} \frac{m}{\rho r_0} \quad [1.19]$$

Además *Lysmer*, recalculó los valores obtenidos por *Bycroft* utilizando una discretización anular de la placa y resolviendo un sistema de $N \times N$ grados de libertad.

Otro paso dado por *Lysmer* fue simplificar la situacion, buscando eliminar la variación de los parametros $k_{\theta q}$ y $c_{\theta q}$ de la frecuencia de excitación; para ello .

la expresión [1.2] se formula como :

$$P_0 = K (k + i a_0 c) w_0 \quad [1.20]$$

donde :

$$K = \frac{4 \mu r_0}{(1 - \nu)} \quad [1.21]$$

y las relaciones entre f_1, f_2 y k, c se hallan facilmente

Lo que se pretende es reducir el problema del disco rígido, sin masa y soldado al semiespacio; al sistema de un grado de libertad equivalente.

$$M_{eq} \ddot{w} + C_{eq} \dot{w} + K_{eq} w = P_0 e^{i\omega t} \quad [1.22]$$

siendo :

$$w = w_0 e^{i\omega t} \quad [1.23]$$

$$w_0 \left[(-m_{eq} \omega^2 + k_{eq}) + i \omega c_{eq} \right] = P_0 \quad [1.24]$$

por tanto igualando [1.24] y [1.20]

$$\left. \begin{aligned} -\omega^2 m_{eq} + k_{eq} &= k K \\ \omega c_{eq} &= a_0 K c \end{aligned} \right\} \quad [1.25]$$

El modelo de Hsieh implica elegir :

$$\left. \begin{aligned} M_{eq} &= 0 \\ K_{eq} &= k K \\ C_{eq} &= \frac{a_0}{\omega} K c \end{aligned} \right\} \quad [1.26]$$

Richardt y Lysmer escogen los siguientes valores :

$$\left. \begin{aligned} K_{eq} &= K \\ C_{eq} &= \frac{K}{\omega^2} (1 - k) \end{aligned} \right\} \quad [1.27]$$

Valores a añadir a la cimentación cuando se realiza el estudio conjunto.

Lysmer, posteriormente, eligió un modelo incompatible

$$\left. \begin{aligned} K_{\theta q} &= K \\ C_{\theta q} &= \frac{3.4 r_0^2}{(1 - \nu)} \sqrt{\rho \mu} \\ M_{\theta q} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad [1.28]$$

a fin de ajustarse lo más posible a las curvas exactas, Fig (1.4)

1.1-2-2- VIBRACIONES HORIZONTALES Y DE CABECEO EN REGIMEN PERMANENTE.

1.1-2-2-1.- MODELO DE VELETSOS

Las ideas utilizadas en el apartado anterior, condujeron a toda una serie de investigadores al análisis de la respuesta de la cimentación circular frente a sollicitaciones mas generales : momentos flectores y torsos, fuerzas horizontales oscilantes.

El estado de la cuestión, hasta el año 1969, puede encontrarse en la obra de Ritchart, Hall y Woods.

Al estudiar el caso de momento flector y fuerza horizontal, que corresponden a los movimientos de cabeceo (*rocking*) y balanceo (*swaying*) respectivamente, se observa que ambos están acoplados y el estado tensional que aparece; provoca grandes discrepancias con las simplificaciones deseadas.

En particular es casi imposible hallar valores independientes de la frecuencia adimensional. Todo ello condujo a un replanteamiento del problema y la aparición de los resultados de *Veletsos et al.*; que constituye la base admitida de los estudios actuales.

Las hipótesis de partida de Veletsos y Wei (1971), en su artículo , para estudiar el comportamiento horizontal eran :

- 1) Durante la actuación de la carga horizontal la componente normal de la tensión de contacto es nula.
- 2) Durante la actuación del momento flector, la componente tangencial de la tensión de contacto es nula

Es decir imponián condiciones *relajadas* de contacto y en repuesta a cada tipo de sollicitacion el disco rígido gira y se traslada en ambos casos.

Resumiendolo graficamente en la fig (1.3)

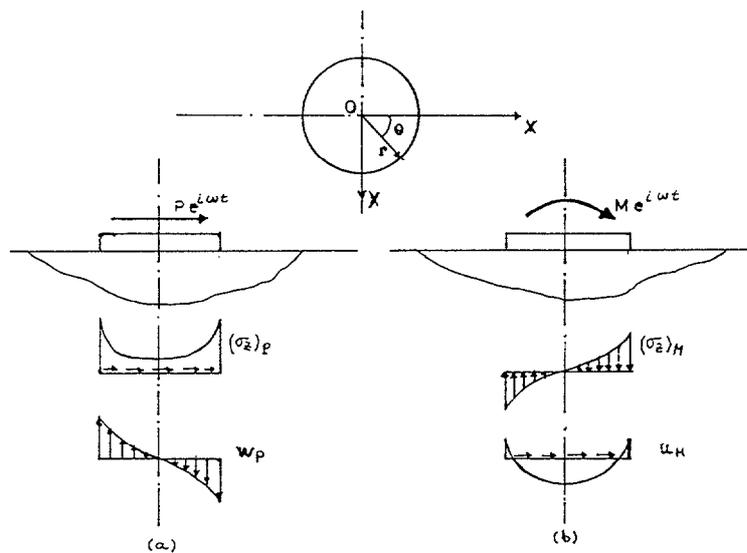


Fig .- 1.3

Con objeto de mantener las relaciones de reciprocidad entre las tensiones y movimientos de acoplamiento, utilizaron el siguiente procedimiento :

Si llamamos ϕ_D^* y u_M^* al giro y desplazamiento provocados por P y M rewspectivamente, la condición de reciprocidad sera :

$$P \cdot u_M^* = M_D \cdot \phi_D^* \quad [1.29]$$

Segun el teorema de *Maxwell-Betti* :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^r \sigma_x^P u_M r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^r \sigma_z^M w_P r dr d\theta \quad [1.30]$$

y teniendo en cuenta que :

$$\left. \begin{aligned} P &= \int_0^{2\pi} \int_0^r \sigma_x^P r dr d\theta \\ M &= \int_0^{2\pi} \int_0^r \sigma_z^M r dr d\theta \end{aligned} \right\} \quad [1.31]$$

podemos establecer :

$$u_M^* = \frac{\int_A \sigma_x^P u_M dA}{\int_A \sigma_x^P dA} \quad y \quad \phi_M^* = \frac{\int_A \sigma_z^M \left(\frac{w_P}{r} \right) r dA}{\int_A \sigma_z^M r dA} \quad [1.32]$$

Formulandolo como matriz de flexibilidad y de forma matricial podemos poner :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \\ \phi_{r_0} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} (f_{11} + i g_{11}) & (f_{12} + i g_{12}) \\ (f_{21} + i g_{21}) & (f_{22} + i g_{22}) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} u_{st} \\ \phi_{st} r_0 \end{array} \right\} \quad [1.34]$$

donde :

$$\left. \begin{aligned} u_{st} &= \frac{2 - \nu}{8 \mu r_0} P \\ \phi_{st} &= \frac{3 (1 - \nu)}{8 \mu r_0^3} M \end{aligned} \right\} \quad [1.35]$$

aplicando el teorema de reciprocidad obtenemos que :

$$(f_{12} + i g_{12}) = \frac{(2 - \nu)}{3 (1 - \nu)} (f_{21} + i g_{21}) \quad [1.36]$$

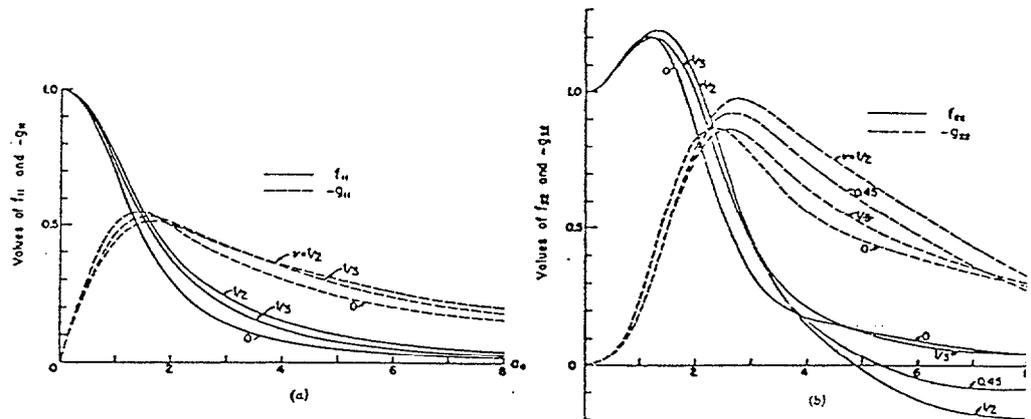


Fig.-1.4

Realizando la formulación como matriz de rigidez queda :

$$\begin{Bmatrix} P \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_x (k_{11} + i a_0 c_{11}) & K_x r_0 (k_{12} + i a_0 c_{12}) \\ K_x r_0 (k_{21} + i a_0 c_{21}) & K_\phi (k_{22} + i a_0 c_{22}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \phi \end{Bmatrix} \quad [1.37]$$

donde :

$$\left. \begin{aligned} K_x &= \frac{P}{u_{st}} = \frac{8 \mu r_0}{(2 - \nu)} \\ K_\phi &= \frac{M}{\phi_{st}} = \frac{8 \mu r_0^3}{3 (1 - \nu)} \end{aligned} \right\} \quad [1.38]$$

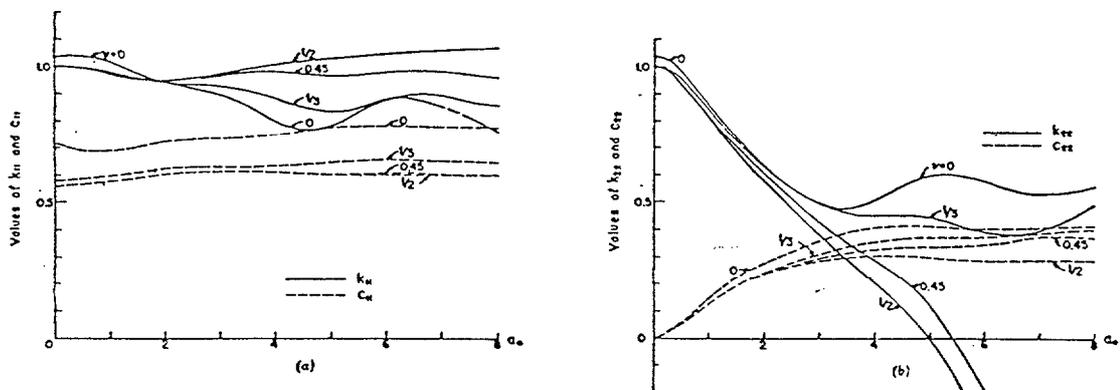


Fig.- 1.5

Es importante observar la fuerte dependencia que los valores de k_{22} presentan con respecto al valor del

coeficiente de Poisson (ν) a partir del valor $a_0=2$, llegando a alcanzar valores negativos para frecuencias $a_0 > 4.5$ y $\nu=1/2$. Tal y como se indicó esto se debe al predominio de las fuerzas de inercia sobre las puramente elásticas., para altas frecuencias de excitación. Para evitar la aparición de estos valores negativos es por lo que algunos autores recomiendan el uso de una masa equivalente distinta de cero.

Asimismo se observa que los valores de $k_{11} > k_{22}$, para el mismo rango de frecuencias, que nos indica la mayor rigidez del terreno frente a movimientos horizontales y a su vez que las fuerzas de inercia desarrolladas son mayores para los movimientos de cabeceo de la cimentación.

Respecto a los amortiguamientos cabe observar que en ambos casos se mantienen pequeños y crecientes desde frecuencias bajas; valores entorno a 0.5 y 0.6.

Finalmente se observa que los términos de acoplamiento se mantienen bajos, lo que permite despreciarlos a efectos practicos en la mayoría de los casos.

Despreciandolos obtenemos la matriz de rigidez del terreno como :

$$\begin{Bmatrix} P \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_x(k_{11} + i a_0 c_{11}) & 0 \\ 0 & K_\phi(k_{22} + i a_0 c_{22}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \phi \end{Bmatrix} \quad [1.39]$$

con :

$$\left. \begin{aligned} k_{11} &= \frac{f_{11}}{f_{11}^2 + g_{11}^2} , & k_{22} &= \frac{f_{22}}{f_{22}^2 + g_{22}^2} \\ c_{11} &= \frac{-1}{a_0} \frac{g_{11}}{f_{11}^2 + g_{11}^2} , & c_{22} &= \frac{-1}{a_0} \frac{g_{22}}{f_{22}^2 + g_{22}^2} \end{aligned} \right\} \quad [1.40]$$

Dada la efectividad de la simplificación efectuada, Veletsos y Verbic (1972) han establecido las expresiones de las flexibilidad y rigidez del terreno para cargas armónicas del tipo :

$$\left. \begin{aligned} P_x (t) &= P_x e^{i\omega t} \\ P_z (t) &= P_z e^{i\omega t} \\ M_y (t) &= M_y e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} [1.41]$$

Las expresiones de la flexibilidad y rigidez, en forma matricial, quedan :

FLEXIBILIDAD

RIGIDEZ

$$\left\{ \begin{matrix} u \\ \theta \\ \phi \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} H_x & 0 & 0 \\ 0 & H_\theta & 0 \\ 0 & 0 & H_z \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} P_x \\ M_y \\ P_z \end{matrix} \right\} ; \left\{ \begin{matrix} P_x \\ M_y \\ P_z \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} Q_x & 0 & 0 \\ 0 & Q_\theta & 0 \\ 0 & 0 & Q_z \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} u \\ \theta \\ \phi \end{matrix} \right\} \quad [1.42]$$

donde :

$$\left. \begin{aligned} H_j &= \frac{1}{K_j} (f_j + i g_j) \\ Q_j &= K_j (k_j + i a_0 c_j) \end{aligned} \right\} \quad j=x,\theta,z \quad [1.43]$$

siendo :

$$K_x = \frac{8 \mu r_0}{(2 - \nu)} ; K_\theta = \frac{8 \mu r_0^3}{3 (1 - \nu)} ; K_z = \frac{4 \mu r_0}{(1 - \nu)} \quad [1.44]$$

1.1-2-3. VIBRACIONES DE TORSION

Las vibraciones de torsión se encuentran totalmente desacopladas de las anteriores.

Los primeros resultados corresponden a los estudios de Reissner y Sagoci (1944) que partieron, al igual que en el caso de vibraciones verticales, de una distribución de

tensiones tangenciales del tipo :

$$\tau_{\theta} = \frac{3 M_t r_o}{4 \pi r_o^2 \sqrt{r - r_o^2}} \quad [1.45]$$

que se hacen infinitas para $r = r_o$. Esta ley corresponde al caso estático y con ello podemos definir la constante elástica :

$$K_{\varphi} = \frac{16}{3} \mu r_o^3 \quad [1.46]$$

asi como los indices de masa y amortiguamiento. Para representar unos resultados congruentes con los anteriores se puede definir el factor de amortiguamiento como :

$$C_{\varphi} = \frac{16}{3} \sqrt{\mu \rho r_o^4} \quad [1.47]$$

y de esta manera expresar :

$$M_t = K_{\varphi} (k_{\varphi} + i a_o c_{\varphi}) \quad [1.48]$$

Los valores de k_{φ} y c_{φ} han sido obtenidos por Luco y Westmann (1971).

Es importante hacer notar la independencia de estos valores del coeficiente de Poisson, asi como la ausencia de disipación para ondas distintas de las de distorsión, SH y SV.

1.2- REVISION BIBLIOGRAFICA

De acuerdo con lo expuesto en los antecedentes del problema; el planteamiento del mismo es de mediados los años 30.

La revisión podria hacerse en base a diversos criterios. Se ha realizado de forma tal que, se reflejen los diferentes aspectos y medios de resolución utilizados; respetando en lo posible el orden cronológico. Esta exposición permite observar la coexistencia de distintos

métodos, así como el abandono de ciertos planteamientos.

A grandes rasgos la clasificación se podría realizar tal y como sigue :

- a) Métodos que suponen una distribución de tensiones en la interfase.
- b) Métodos que utilizan soluciones explícitas, analíticas, o semianalíticas.
- c) Métodos numéricos, que proorcionan soluciones *aproximadas*; M.E.F., M. E. C.

Métodos que implican distribuciones de tensiones en la interfase.

Dentro de este grupo se encuentran los ya citados Reissner (1936), Reissner y Sagoci (1944) que estudian las vibraciones verticales y de torsión de discos rígidos situados sobre el semiespacio elástico respectivamente.

Schekter (1948), Richardt (1953), Bycroft (1954), Hisieh (1962) y Lysmer (1966) estudian cimentaciones superficiales sobre el semiespacio, sometidos a diferentes tipos de vibraciones; para los que suponían una función de distribución de las tensiones en la zona de contacto, aún cuando ésta implicaba no cumplir las condiciones cinemáticas impuestas al problema mixto planteado. También es de destacar que desde este momento se inicia la idea de la *discretización*, del dominio en estudio, como método de resolución del problema (Lysmer).

Collins (1962) y Paul (1967), presentaron soluciones asintóticas para el disco rígido yaciendo sobre un estrato, que a su vez descansa sobre una base rígida; válido para bajas frecuencias.

Métodos que usan soluciones analíticas, semianalíticas o explícitas

Los investigadores que emplearon esta técnica de resolución del problema de interacción suelo-estructura, empiezan a disponer de herramientas adecuadas para abordar los complicados y tediosos cálculos matemáticos a que conduce el tratamiento del mismo.

El artículo clave, del que se desarrolla la base de los trabajos actuales, es el de Veletsos y Wei (1971) y su generalización en otro artículo posterior; en los que se obtiene los resortes y amortiguadores equivalentes de cimentaciones circulares rígidas sobre semiespacio elástico, sometido a vibraciones armónicas de traslación, cabeceo y movimiento vertical, utilizando el principio de reciprocidad.

Kobori, Minai y Suzuka (1968); Kobori y Suzuka (1970) así como Luco y Westman (1972) utilizaron esta misma técnica para distintas sollicitaciones. Veletsos y Verbic (1973), incorporaron el amortiguamiento del material modelándolo como un sólido viscoelástico.

Luco (1976) formula el problema de un disco sobre un terreno estratificado, incluyendo el amortiguamiento del material; reduciéndolo a la resolución de un sistema de ecuaciones integrales. Wong y Luco (1976) formulan un método analítico para cimentaciones rígidas de forma cualesquiera, sometidas a todo tipo de excitaciones.

Las soluciones explícitas para cimentaciones embebidas en condiciones antiplanas fueron tratadas por : Luco (1979), Then y Umek (1973); Wong y Trifunac (1974); Luco, Wong y Trifunac (1975). En deformación plana por Thau y Umek (1976), Wong (1979) y Dravinsky (1980).

Luco (1976) obtuvo la respuesta de cimentaciones

semiesfericas, ante ondas SH incidiendo oblicuamente; Apsel y Luco (1976) el caso de cimentaciones semielipsoidales y Luco (1976) el de cimentaciones cilíndricas rígidas. Kitamura y Saturai (1979-1982) y Adeli, Mejazi, Keer, Nemat y Nasser (1981) completan los trabajos previos desarrollados por Wong y Luco.

Las cimentaciones embebidas en el terreno han sido objeto de varios estudios en los que se analizan los diferentes factores que influyen en su comportamiento; Baranov (1967) estudió los efectos de del embebimiento, tanto en modelos de semiespacio elástico como en medios estratificados horizontalmente sobre un semiespacio homogéneo. Este trabajo fue ampliado por Beredugo y Novak, Novak y Beredugo (1972) quienes desarrollaron soluciones en forma de desarrollo en serie para excitaciones vertical y horizontal-cabeceo acopladas.

Métodos Numéricos de discretización del dominio

Tal y como se ha expuesto al inicio de la introducción, es a mediados de los años 60 cuando surgen unas poderosas herramientas para la resolución de aquellos problemas cuya formulación conduce a sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. El primero de estos métodos en desarrollarse es el de todos conocido Método de los Elementos Finitos; para posteriormente y a la vista de ciertas limitaciones, caso del problema planteado, surge otro planteamiento numérico no menos conocido denominado Método de los Elementos de Contorno o de las Ecuaciones Integrales.

Utilizando el M. E. F. encontramos diversos autores. Lysmer y Kuhlemeyer (1969) aplicaron este procedimiento al problema de interacción suelo-estructura desarrollando elementos especiales, *Contornos Absorbentes*, que situados en ~~los límites~~ de la discretización del terreno efectuada; permiten tener en cuenta la influencia de la zona del mismo

no incluida en el modelo é impedir las reflexiones de las ondas en los contornos ficticios; realizaron estudios de cimentaciones sobre el semiespacio elástico obteniendo la influencia del grado de embebimiento de la misma en el terreno.

Waas (1972) asimismo abordó la resolución del problema en un medio estratificado horizontalmente desarrollando matrices de rigidez dinámica. Kausel (1974) extiende las técnicas de Waas para dominios con simetria de revolución y sómetidos a excitaciones no axilsimétricas, estudiando la influencia del tamaño de la malla, para el caso estático, el grado de enterramiento y dando formulas parcticas aproximadas. Ettouney (1976) compara resultados con diversos tipos de condiciones de contorno. Elsabee y Morray (1977) presentan formulas aproximadas que completan los resultados de Kausel. Gonzalez (1977) estudia las rigideces de cimentaciones cuadradas; asimilandolas a las circulares inscrita y circunscrita equivalentes comparando el grado de embebimiento.

Jacub (1977) compara modelos bi y tridimensionales. Day (1977) obtiene a su vez rigideces dinámicas de cimentaciones cilíndricas rígidas sobre el semiespacio elástico. Verdanega (1978) investiga sobre cimentaciones rígidas superficiales.

Kausel y Ushijima (1979) estudian y amplian los trabajos previos, del primero, sobre cimentaciones superficiales y cilíndricas embebidas yacentes en un estrato de espesor constante sobre una base rígida; teniendo en cuenta la influencia del grado de embebimiento y el espesor del estrato é incorporando la influencia del amortiguamiento; dando además expresiones aproximadas que modifican las dadas anteriormente para excitaciones vertical y de torsión. Day y Frazier (1979) amplian los estudios del ~~primero~~ extendiéndolos ~~a~~ ~~medios~~ ~~estratificados~~ y cimentaciones cilíndricas embebidas.

El problema de la interacción Suelo-Estructura, ha sido afrontado por otros métodos o bien desarrollando elementos especiales que se alejan mucho de los convencionales; obteniéndose soluciones que son semiexplícitas en algún sentido. Entre éstos cabe citar a Gazettas y Roesset (1976-79) que integran la ecuación de onda usando la transformada de Fourier y parametrizando la influencia de la rigidez relativa de la roca que forma la base. Dasgupta y Rao (1976-79) usarón E F , pero considerando distintas condiciones de contacto. Kaussel y Roesset (1977) presentan un nuevo elemento finito para medios estratificados. Tassoulas (1981) revisa los tipos de elementos finitos utilizados, las condiciones de contorno; analizando los problemas numéricos planteados y utilizando el nuevo hiperelemento desarrollado por los anteriores, que tan solo precisa discretización horizontal.

Bettses y Zenkiewicz (1977) y Chow y Smith desarrollan un elemento finito *infinito* para medios infinitos o seminfinitos. Nelson e Isemberg (1976); Day y Frazier (1979); Dasgupta (1980-81); Murakami, Shioya, Yamada y Luco (1981) presentan técnicas híbridas para su resolución.

El Método de los Elementos de Contorno, tanto en su formulación directa como indirecta, se ha comenzado a usar recientemente; tal y como se ha indicado. Su utilidad se basa fundamentalmente en su capacidad de modelar medios infinitos; obviando así este inconveniente inherente a los E. F.

Este procedimiento ha sido utilizado en ambos dominios; la frecuencia y el tiempo. En este último bien a través de utilizar una transformada, Fourier o Laplace, a la solución obtenida en el dominio de la frecuencia o de su formulación directa , mediante una integración paso a paso.

— ~~En el dominio del tiempo y mediante las técnicas de~~ transformación encontramos los siguientes autores : Banaugh

y Goldsmith (1963); Niwa, Kobayashi y Fukui (1976) y Kobayashi y Nishimura (1982) mediante transformada de Fourier. La transformada de Laplace la utilizaron Cruse y Rizzo (1968); Manolis y Beskos (1981,1983).

Estudios en el dominio del tiempo a través de su formulación directa fueron realizados por Cole, Kolosoff y Minster (1978); Niwa, Fukui, Kato y Fujiki (1978).

Estudios comparativos entre los tres procedimientos se realizaron en (1982) por Manolis. Analizando cimentaciones en el dominio del tiempo encontramos recientemente a Beskos y Karabalis (1984) que estudian cimentaciones superficiales y embebidas en el semiespacio elástico homogéneo e isotrópico; sometidas a trenes de ondas incidiendo oblicuamente. Spyarakos y Beskos (1986) analizan la respuesta de cimentaciones, del tipo de las anteriores, en deformación plana y sometidas a cualquier tipo de excitación.

En el dominio de la frecuencia el M. E. C., también ha sido muy fecundo en trabajos publicados, Dominguez (1978 a y b) estudia en este campo rigideces dinámicas y difracción de ondas para cimentaciones rectangulares tridimensionales embebidas en el semiespacio. Alarcón, Dominguez y del Caño (1980) tratan problemas bidimensionales de cimentaciones embebidas; calculando las rigideces dinámicas.

Dominguez y Alarcón (1981) estudian funciones de forma singulares para el estudio de cimentaciones rígidas. Dominguez (1981) y Dominguez y Abascal (1982) estudian el método de las imágenes aplicado al cálculo de rigideces de cimentaciones cuadradas. Abascal (1984) obtiene las rigideces dinámicas de cimentaciones cuadradas tridimensionales embebidas y extiende los estudios bidimensionales de rigideces y difracción de ondas a medios estratificados con geometría cualquiera.

Apsel (1979) presenta funciones de Green para el semiespacio estratificado, en función de transformadas integrales en el dominio de la frecuencia y trata cimentaciones embebidas, en el semiespacio y medios estratificados, con simetría de revolución.

Benito (1985) estudió cimentaciones flexibles utilizando una técnica híbrida de M.E.C. y M.E.F. para discretizar el terreno y la cimentación, respectivamente.

Cano (1985) presentó las rigideces de cimentaciones circulares superficiales rígidas sobre el semiespacio y medios estratificados, incorporando el amortiguamiento del material.

Rizzo, Shippy y Rezayat (1985), estudian las impedancias dinámicas de cimentaciones semiesféricas en medios homogéneos.

Luco y Wong (1986) presentan a sus resultados sobre el mismo tipo de cimentaciones que los anteriores; aplicando las técnicas desarrolladas por Apsel para cimentaciones cilíndricas.

1.3 OBJETIVOS

De acuerdo con la exposición realizada en los apartados precedentes, los esfuerzos que se han realizado en los últimos años se centran fundamentalmente, en los problemas de interacción suelo-estructura, en acercar los modelos lo mas posible a la realidad. En primer lugar es necesario disponer de un método de cálculo que permita modelar adecuadamente regiones seminfinitas homogéneas o estratificadas.

En segundo lugar, es asimismo necesaria una correcta simulación de las propiedades del terreno que presenta una compleja naturaleza.

Se adopta, no obstante, para su estudio dinámico un modelo de suelo de tipo Boussinesq, es decir como un sólido elástico, homogéneo é isótropo, cuyo modulo de Young permanece constante con la profundidad. Posteriormente se introduce el amortiguamiento del material a través de un modelo de Kelvin-Voigt, viscoelástico de tipo histerético.

En último lugar es preciso que el método de cálculo propuesto contemple la naturaleza tridimensional del problema que se pretende resolver. Además se hace necesario realizar una serie de estudios paramétricos comparativos que permitan comprender mejor la naturaleza del problema y sopesar adecuadamente la influencia de aquellos factores que intervienen en el mismo.

En este trabajo de tesis se pretende contribuir a un mejor conocimiento del problema de interacción suelo-estructura para cimentaciones con simetría de revolución, centrandose en la obtención de las impedancias dinámicas de las mismas; es decir resolver el paso b del Método de la Subestructuración, como una aplicación del Método de los Elementos de Contorno a la resolución de problemas dinámicos en sólidos de revolución.

Para llevar a cabo la tarea propuesta se hace necesario, en primer lugar, desarrollar un nuevo elemento de contorno que ha de ser capaz de modelar dominios con simetría de revolución, y sección meridiana cualesquiera y además contemplar condiciones de contorno con y sin dicha simetría. Este elemento, así formulado, permitirá intrínsecamente contemplar el comportamiento tridimensional, sin penalizar excesivamente los recursos necesarios para la obtención de resultados coherentes con la bibliografía mencionada en el apartado correspondiente.

En primer lugar se pretende obtener la impedancia dinámica de cimentaciones axilsimétricas, superficiales y embebidas en el terreno, considerado como un medio homogéneo

elástico o viscoelástico, sometidas a movimientos de sólido rígido vertical ,de torsión, horizontal y de cabeceo. En este tipo de problemas se intentara mostrar la influencia de factores tales como el grado de embebimiento de la cimentación y el amortiguamiento del material.

En segundo lugar, se pretende obtener en medios estratificados, las impedancias dinámicas para los mismos tipos de cimentación , analizando fundamentalmente la influencia de los parámetros de rigidez relativa del semiespacio soporte de la estratigrafía y la potencia relativa del estrato, especialmente en modelos bicapa.

Ademas este modelo permitirá analizar la respuesta de cimentaciones cuando el suelo presenta unas frecuencias propias de resonancia como ocurre en el caso estratificado.

CAPITULO II

EL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO EN SOLIDOS DE REVOLUCION

2.1.- INTRODUCCION

En este capitulo se describe, brevemente, el planteamiento del Método de los Elementos de Contorno, tanto en Elastostática como en problemas Elastodinámicos en régimen estacionario, en el dominio de la frecuencia ; para sólidos con simetria de revolución.

Para ello, primero se describe el planteamiento estático obteniendo la identidad integral y a continuación obtener ésta para el caso dinámico a partir de un estado de Stokes reducido.

En el resto de los apartados se obtendrán las soluciones fundamentales, necesarias en la formulación propuesta para problemas axilsimétricos, a partir de la solución tridimensional correspondiente a ambos casos.

2.2.- EL M.E.C. EN ELASTOSTATICA

2.2-1.- ECUACIONES FUNDAMENTALES DE LA ELASTICIDAD

Las ecuaciones básicas que rigen el comportamiento de los medios continuos, elásticos, isótropos y homogéneos son las conocidas leyes de equilibrio de tensiones, comportamiento del material y las ecuaciones de compatibilidad.

2.2-1-1.- Equilibrio de tensiones

$$\sigma_{i,j,j} + X_i = \hat{\rho} \ddot{u}_i \quad [2.1] \quad \text{y} \quad T_i^{\nu} = \sigma_{i,j} n_j \quad [2.2]$$

donde:

X_i = Fuerza de volumen segun i

$\sigma_{i,j}$ = Tensor de tensiones

$\hat{\rho} \ddot{u}_i$ = Fuerzas de inercia, nulas para el caso estático

T_i^ν = Componente del vector tensión asociado a un punto
 n_j = Vector normal asociado al punto

1.2-1-2.- Relación desplazamientos-deformaciones

Dado un vector de desplazamientos asociado a un punto P, $\bar{u}(p)$ y un campo de deformaciones compatible ϵ_{ij} la relación que liga ambos es:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} [u_{i,j} + u_{j,i}] \quad [2.3]$$

2.2-1-3.- Ley de comportamiento. Ley de Hooke

Esta ley establece la relación que existe entre tensiones y deformaciones; en general está dada por:

$$\sigma_i = C_{ij} \epsilon_j \quad [2.4]$$

siendo C_{ij} una matriz de 9x9 constantes elásticas

Estas constantes quedan reducidas a dos, λ y μ para materiales homogéneos é isótropos. La ley de comportamiento en función de las constantes de Lamé queda:

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad [2.5]$$

donde:

λ = Constante de Lamé

μ = Módulo de rigidez transversal

δ_{ij} = Delta de Kroneker

ϵ_{ij} = Tensor de deformaciones

o como la Ley de Hooke generalizada:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad [2.6]$$

siendo:

- ν = Coeficiente de Poisson
- σ_{ij} = Tensor de tensiones
- ϵ_{ij} = Tensor de deformaciones
- E = Módulo de Young o de elasticidad longitudinal

2.2-1-4.- ECUACION DE NAVIER

Introduciendo la ecuación [2.3] en la [2.5] tendremos:

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu [u_{i,j} + u_{j,i}] \quad [2.7]$$

sustituyendola en la ecuación [2.1], de equilibrio de tensiones obtenemos:

$$\left[\lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu [u_{i,j} + u_{j,i}] \right]_{,j} + X_i = \hat{\rho} \ddot{u}_i \quad [2.8]$$

$$\lambda u_{k,kj} \delta_{ij} + \mu [u_{i,jj} + u_{j,ij}] + X_i = \hat{\rho} \ddot{u}_i \quad [2.9]$$

aplicando las propiedades de la delta de Kronecker δ_{ij} podemos establecer la ecuación de equilibrio en términos de movimientos como:

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ij} + X_i = \hat{\rho} \ddot{u}_i \quad [2.10]$$

que para el caso estático queda reducida a:

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ij} + X_i = 0 \quad [2.11]$$

y en notación vectorial como:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \underline{u} + \frac{1}{1-2\nu} \nabla \wedge \nabla \cdot \underline{u} + \underline{X} &= \frac{\hat{\rho}}{\mu} \ddot{\underline{u}} \quad \text{⟨Dinamico⟩} \\ \nabla^2 \underline{u} + \frac{1}{1-2\nu} \nabla \wedge \nabla \cdot \underline{u} + \underline{X} &= 0 \quad \text{⟨Estático⟩} \end{aligned} \right\} [2.12]$$

2.2-2.- IDENTIDAD INTEGRAL. IDENTIDAD DE SOMIGLIANA

Si aplicamos el segundo teorema de reciprocidad de *Maxwell-Betti* entre dos estados elásticos; uno real definido por $(\underline{T}^\nu, \underline{X}, \underline{u})$ y otro virtual dado por $(\underline{T}^{\nu*}, \underline{X}^*, \underline{u}^*)$, obtenemos la conocida expresión:

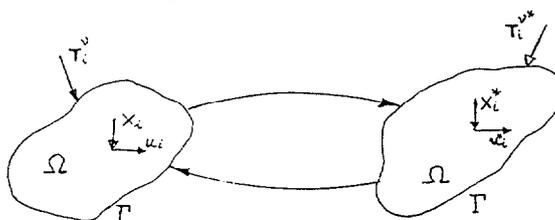


Fig.(2.1)

$$\int_{\Gamma} T_i^\nu u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} X_i u_i^* d\Omega = \int_{\Gamma} T_i^{\nu*} u_i d\Gamma + \int_{\Omega} X_i^* u_i d\Omega \quad [2.13]$$

si escogemos como estado virtual el proporcionado por

$$X_i = \delta(\underline{x}-\underline{p}) e_i \quad \text{siendo: } e_i = \text{componente del vector de direccion segun } i$$

$$\delta(\underline{x}-\underline{p}) = \text{Función Delta de Dirac}$$

Debido a las propiedades de la función delta de Dirac nos queda:

$$\int_{\Gamma} T_i^\nu u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} X_i u_i^* d\Omega = \int_{\Gamma} T_i^{\nu*} u_i d\Gamma + u_i \quad [2.14]$$

$$u_j(\underline{p}) = \int_{\Gamma} T_i^\nu(\underline{Q}) U_i^*(\underline{p}, \underline{Q}) d\Gamma - \int_{\Gamma} T_i^{\nu*}(\underline{p}, \underline{Q}) u_i(\underline{Q}) d\Gamma + \int_{\Omega} X_i(\underline{Q}) u_i^*(\underline{Q}) d\Omega \quad [15.2]$$

que es la denominada identidad integral de Somigliana; base del método de los elementos de contorno. La integral de volumen o es conocida o es nula en caso de no existir las fuerzas de volumen.

Cuando el punto \underline{p} tiende al punto \underline{Q} es decir: éste se

situa en el contorno la identidad queda:

$$u_j(\underline{p}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma-\varepsilon} T_i^\nu(\underline{q}) U_i^*(\underline{p}, \underline{q}) d\Gamma + \int_{\varepsilon} T_i^\nu(\underline{q}) U_i^*(\underline{p}, \underline{q}) d\Gamma - \int_{\Gamma-\varepsilon} T_i^{*\nu}(\underline{p}, \underline{q}) u_i(\underline{q}) d\Gamma - \int_{\varepsilon} T_i^{*\nu}(\underline{p}, \underline{q}) u_i(\underline{q}) d\Gamma \right] \quad [2.16]$$

el limite de la segunda integral del segundo miembro es nula siendo el correspondiente a la cuarta :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon} T_i^{*\nu}(\underline{p}, \underline{q}) u_i(\underline{q}) d\Gamma = C_{ij} u_i(\underline{p}) \quad [2.17]$$

dependiendo el valor de C_{ij} de la geometria del contorno en el punto Q de colocación. Cuando la superficie es suave, adopta el valor de $C_{ij} = -1/2$.

en general se puede escribir [2.16] como:

$$C_{ij} u_j(\underline{p}) + \int_{\Gamma} T_{ij}^{*\nu}(\underline{p}, \underline{q}) u_i(\underline{q}) d\Gamma = \int_{\Gamma} T_i^\nu(\underline{q}) U_{ij}^*(\underline{p}, \underline{q}) d\Gamma \quad [2.18]$$

donde $U_{ij}^*(\underline{p}, \underline{q})$, $T_{ij}^{*\nu}(\underline{p}, \underline{q})$ son los desplazamientos y tensiones, respectivamente del punto Q en la dirección i ; cuando la carga esta aplicada segun j en P.

2.3.- EL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO EN ELASTODINAMICA

2.3-1.- ECUACIONES FUNDAMENTALES

Analogamente al caso estático partimos de la ecuación de Navier [2.11]. Si en esta expresión tenemos en cuenta que la celeridad de las ondas S y P son respectivamente:

$$c_a = \sqrt{\mu/\hat{\rho}} \quad , \quad c_p = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\hat{\rho}}} \quad \text{y} \quad \frac{c_p}{c_s} = \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{(1-2\nu)}} \quad [2.19]$$

podemos expresar la ecuación de Navier como:

$$(c_p^2 - c_s^2) u_{i,i,j} + c_s^2 u_{j,ii} + f_j = \ddot{u}_j \quad [2.20]$$

donde las f_j son las fuerzas de volumen por unidad de masa.

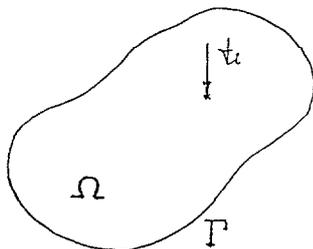
Las tensiones T_i^{ν} , se obtienen de la ecuación [2.9] que puesta en función de c_s y c_p queda:

$$\sigma_{ij} = \hat{\rho} \left[(c_p^2 - 2c_s^2) \delta_{ij} u_{k,k} + c_s^2 (u_{i,j} + u_{j,i}) \right] \quad [2.21]$$

y definimos T_i^{ν} de la misma forma que en el caso estático.

2.3-2 TEOREMA DE RECIPROCIDAD EN ELASTODINAMICA

Wheeler y Stenberg (1968) formularon la relación, equivalente al Teorema de la Reciprocidad de *Maxwell-Betti* en la estática, entre dos estados elastodinámicos S y S^* ; definidos sobre un dominio Ω de contorno Γ .



$$\left. \begin{aligned} S(\underline{f}, \hat{\rho}, c_s, c_p, \Omega) &= [\underline{u}, \underline{\sigma}] \\ S^*(\underline{f}^*, \hat{\rho}, c_s, c_p, \Omega) &= [\underline{u}^*, \underline{\sigma}^*] \end{aligned} \right\} \quad [2.22]$$

donde \underline{u} y $\underline{\sigma}$ son los campos de movimientos y tensiones compatibles con las fuerzas de volumen \underline{f} y a su vez \underline{u}^* y $\underline{\sigma}^*$ los correspondientes a las fuerzas \underline{f}^* ; siendo $\hat{\rho}$, c_s , c_p la densidad, celeridad de las ondas S y P de ambos estados.

La formulación análoga a la expresión [2.13] es:

$$\int_{\Gamma} \underline{t} * \underline{u}^* d\Gamma + \int_{\Omega} \underline{f} * \underline{u}^* d\Omega = \int_{\Gamma} \underline{t}^* * \underline{u} d\Gamma + \int_{\Omega} \underline{f}^* * \underline{u} d\Omega \quad [2.23]$$

donde \underline{t} y \underline{t}^* son las tracciones que aparecen en ambos estados S y S*

Si se considera el caso en que las fuerzas másicas, los movimientos o tracciones prescritos en el contorno son funciones armónicas en el tiempo, con frecuencia angular ω ; las fuerzas másicas se pueden expresar como:

$$\underline{f}(\underline{x}, t) = \underline{f}(\underline{x}; \omega) e^{i\omega t} \quad [2.24]$$

y el campo de movimientos asociados a ellas, se puede poner:

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \underline{u}^T(\underline{x}, t) + \underline{u}(\underline{x}; \omega) e^{i\omega t} \quad [2.25]$$

Siendo $\underline{u}^T(\underline{x}, t)$ la parte transitoria de la solución, la cual se supone que desaparece transcurrido un cierto período de tiempo.

Si se formula el problema para un instante de tiempo en el que tan solo exista la parte permanente, los campos de movimientos y tensiones se pueden expresar; supuestas las propiedades del medio independientes del tiempo como:

$$\left. \begin{aligned} \underline{u}(\underline{x}, t) &= \underline{u}(\underline{x}; \omega) e^{i\omega t} \\ \underline{\sigma}(\underline{x}, t) &= \underline{\sigma}(\underline{x}; \omega) e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} \quad [2.26]$$

los cuales sustituidos en la ecuación de Navier queda:

$$(c_P^2 - c_S^2) \underline{u}_{i,j,i}(\underline{x}; \omega) + c_S^2 \underline{u}_{j,i,i}(\underline{x}; \omega) + \omega^2 \underline{u}(\underline{x}; \omega) + \underline{f}(\underline{x}; \omega) = 0 \quad [2.27]$$

haciendo la misma sustitución en la [2.21]

$$\sigma_{ij} = \hat{p} \left[(c_P^2 - 2c_S^2) \delta_{ij} \underline{u}_{k,k}(\underline{x}; \omega) + c_S^2 [\underline{u}_{i,j}(\underline{x}; \omega) + \underline{u}_{j,i}(\underline{x}; \omega)] \right] \quad [2.28]$$

Las dos ecuaciones anteriores [2.27] y [2.28] son independientes de la variable tiempo y permiten definir un nuevo estado elastodinámico reducido $S_\omega[\underline{u}, \underline{\sigma}]$ con un campo de movimientos $\underline{u}(\underline{x}; \omega)$ y de tensiones $\underline{\sigma}(\underline{x}; \omega)$ correspondientes a las fuerzas de volumen $\underline{f}(\underline{x}; \omega)$ y con las mismas propiedades del material que las definidas en el estado elastodinámico S.

La integral sobre todas las frecuencias posibles

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{u}(\underline{x}; \omega) e^{i\omega t} d\omega \quad [2.29]$$

es solución de la ecuación de campo para una fuerza excitadora dada por:

$$\underline{f}(\underline{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{f}(\underline{x}; \omega) e^{i\omega t} d\omega \quad [2.30]$$

con condiciones de contorno del mismo tipo. Así $2\pi \underline{f}(\underline{x}; \omega)$ es la transformada de Fourier de las fuerzas máscas y $2\pi \underline{u}(\underline{x}; \omega)$ es es solución de la transformada de Fourier de las ecuaciones de campo de la Elastodinámica. Por tanto dado, un espectro de frecuencias de la fuerza excitadora será posible obtener una solución general a través de la integral [2.29].

Consideremos dos estados de Stokes reducidos S_ω y S_ω^* tales que:

$$\left. \begin{aligned} S_\omega(\underline{f}, \hat{\rho}, c_s, c_p; \omega, \Omega) &= [\underline{u}, \underline{\sigma}] \\ S_\omega^*(\underline{f}^*, \hat{\rho}^*, c_s^*, c_p^*; \omega, \Omega) &= [\underline{u}^*, \underline{\sigma}^*] \end{aligned} \right\} [2.31]$$

y sean \underline{t} y \underline{t}^* los vectores tensión asociados al contorno Γ del dominio Ω en estudio. El teorema de reciprocidad se expresa en el dominio de la frecuencia como:

$$\int_{\Gamma} \underline{t} \cdot \underline{u}^* d\Gamma + \hat{\rho} \int_{\Omega} \underline{f} \cdot \underline{u}^* d\Omega = \int_{\Gamma} \underline{t}^* \cdot \underline{u} d\Gamma + \hat{\rho} \int_{\Omega} \underline{f}^* \cdot \underline{u} d\Omega \quad [2.32]$$

donde los productos de convolución * de [2.23] se han reducido a productos escalars de los vectores.

Si tal como se hizo para el caso estático definimos el estado de Stokes reducido S_{ω}^* como el debido a una fuerza másica excitadora unidad aplicada en un punto P del dominio Ω , en dirección j tal que:

$$f_j^*(t) = \delta(P) e^{i\omega t} e_j \quad [2.33]$$

los campos de movimientos y tensiones seran del tipo:

$$\left. \begin{aligned} \underline{u}^*(\underline{x}, t) &= \underline{u}^*(\underline{x}; \omega) e^{i\omega t} \\ \underline{\sigma}^*(\underline{x}, t) &= \underline{\sigma}^*(\underline{x}; \omega) e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} \quad [2.34]$$

Utilizando este estado de Stokes reducido, estado virtual, en la expresión [2.25] y teniendo en cuenta las propiedades de la función delta de Dirac; se puede escribir:

$$\underline{u} = \int_{\Gamma} \underline{t} \cdot \underline{u}^* d\Gamma - \int_{\Gamma} \underline{t}^* \cdot \underline{u} d\Gamma + \hat{\rho} \int_{\Omega} \underline{f} \cdot \underline{u}^* d\Omega \quad [2.35]$$

que es la representación integral del campo de desplazamientos del estado elastodinámico reducido S_{ω} definido en [2.31].

Si el dominio Ω en el que se han definido el estado S_{ω} no esta acotado, las variables de campo \underline{u} y $\underline{\sigma}$ han de cumplir ciertas condiciones en el infinito, de acuerdo con algunas consideraciones físicas. Asi, si se considera que todas las fuentes de excitación estan en el interior del dominio Ω ; se puede decir que no existe propagación de ondas desde el infinito hasta el interior del mismo. O lo que es lo mismo, que tanto \underline{u} como $\underline{\sigma}$ han de cumplir las condiciones de radiación y regularidad; que en el dominio de la

frecuencia para el campo de movimientos se expresan como:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{radiacion} & \text{regularidad} \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r \left[\frac{\partial \underline{u}^P}{\partial r} - \frac{i\omega}{C_P} \underline{u}^P \right] = 0 ; & \lim_{r \rightarrow \infty} \underline{u}^P = 0 \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r \left[\frac{\partial \underline{u}^S}{\partial r} - \frac{i\omega}{C_P} \underline{u}^S \right] = 0 ; & \lim_{r \rightarrow \infty} \underline{u}^S = 0 \end{array} \right\} [2.36]$$

donde \underline{u}^P y \underline{u}^S son las componentes irrotacional y equivoluminal del campo de movimientos \underline{u}

$$\underline{u}(\underline{x}; \omega) = \underline{u}^P(\underline{x}; \omega) + \underline{u}^S(\underline{x}; \omega) \quad [2.37]$$

que tambien se pueden expresar como:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r(\underline{t}^P - i\omega \hat{\rho}_{C_P} \underline{u}^P) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r(\underline{t}^S - i\omega \hat{\rho}_{C_P} \underline{u}^S) = 0 \quad [2.38]$$

Esto implica que:

$$\int_{\Gamma_\infty^-} \underline{t} \cdot \underline{u}^* d\Gamma - \int_{\Gamma_\infty^+} \underline{t}^* \cdot \underline{u} d\Gamma = 0 \quad [2.39]$$

siendo Γ_∞ el contorno infinito.

2.4.- SOLUCIONES FUNDAMENTALES . ESTATICA Y DINAMICA

2.4-1.- SOLUCION TRIDIMENSIONAL

En la formulación integral de las ecuaciones de campo , desarrollada previamente, la clave está en elegir adecuadamente los movimientos y tensiones asociados al estado virtual. Tal y como se ha señalado, estos son obtenidos al resolver el problema elástico planteado para una carga unidad aplicada en un punto del dominio o lo que es lo mismo para una función $\underline{f}(\underline{x})$ que sea una función δ de Dirac.

En general, tanto para el caso estático como para el dinámico, la solución de la ecuación de Navier se puede obtener descomponiendo el vector \underline{u} en dos partes, una irrotacional y otra rotacional, a través de la descomposición de Helmholtz mediante dos potenciales, uno A_P irrotacional y A_S equivoluminal; es decir:

$$\underline{u} = \nabla(\nabla \cdot \underline{A}_P) - \nabla \wedge \nabla \wedge \underline{A}_S \quad [2.40]$$

y haciendo que $\underline{f} = \nabla^2 \underline{V} \underline{e}$, siendo V un potencial escalar tendremos que la ecuación [2.12] se verá satisfecha si:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \underline{A}_P - k_P^2 \underline{A}_P &= \frac{-V}{c_P^2} \\ \nabla^2 \underline{A}_S - k_S^2 \underline{A}_S &= \frac{-V}{c_S^2} \end{aligned} \quad \text{donde:} \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{A}_P = A_P \underline{e} \quad ; \quad k_P = \frac{i\omega}{c_P} \\ \underline{A}_S = A_S \underline{e} \quad ; \quad k_S = \frac{i\omega}{c_S} \end{array} \right. \quad [2.41]$$

Escogiendo de manera conveniente el potencial escalar V obtendremos diferentes soluciones que a partir de este momento denominaremos *Soluciones Fundamentales*.

Este planteamiento es válido incluso en el caso estático, aun cuando los potenciales A_P y A_S han de ser funciones dependientes del tiempo según Dominguez y Abascal.

De acuerdo con lo anterior, para el caso tridimensional estático tendremos:

$$\nabla^2 \underline{V} \underline{e} = \frac{1}{4\pi\hat{\rho}} \frac{1}{c^2} \frac{1}{r} \quad [2.42]$$

que tiene como solución particular

$$A_C = \frac{-1}{8\pi\hat{\rho} c^2} \quad [2.43]$$

y como solución de la homogénea:

$$A_g = D_1 \frac{1}{r} + D_2 \quad \text{y por tanto sustituyendo en [2.41]}$$

$$\left. \begin{aligned} A_S &= \frac{-1}{8\pi\hat{\rho} c_S^2} r + D_{1S} \frac{1}{r} + D_{2S} \\ A_P &= \frac{-1}{8\pi\hat{\rho} c_P^2} r + D_{1P} \frac{1}{r} + D_{2P} \end{aligned} \right\} [2.44]$$

Sustituyendo estas ecuaciones en [2.40]; se obtiene el campo de desplazamientos de la solución fundamental tridimensional y de ellos por derivación el campo de tensiones asociado; que adoptan la forma:

$$U_{ji} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} \left[(3-4\nu)\delta_{ji} + r_{,i} \cdot r_{,j} \right] \quad [2.45]$$

$$T_{ji} = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)} \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial r}{\partial \eta} \left[(1-2\nu)\delta_{ji} + 3r_{,i} \cdot r_{,j} \right] + (1-2\nu)(\eta_j r_{,i} - \eta_i r_{,j}) \right] \quad [2.46]$$

Esta solución corresponde a una carga puntual en el espacio y fué obtenida por Lord Kelvin. Formas alternativas de obtener esta solución a la expuesta son:

- a) Aplicar los potenciales Φ y Ψ de Neuber-Papkovich
- b) Aplicar un vector \underline{G} de Galerkin

Para obtener la solución tridimensional dinámica, aplicaremos una técnica análoga a la ya expuesta:

$$\delta(r) = \frac{-1}{4\pi} \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) \longrightarrow v = \frac{-1}{4\pi r} \quad [2.47]$$

de forma que:

$$\nabla^2 A - kA^2 = \frac{1}{4\pi\hat{\rho} c^2} \frac{1}{r} \quad [2.48]$$

cuya solución particular es:

$$A_C = \frac{-1}{4\pi\hat{\rho}_C^2 k^2} \frac{1}{r} = \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \frac{1}{r} \quad [2.49]$$

y la general de la homogénea por:

$$A_g = C_1 \frac{e^{kr}}{r} + C_2 \frac{e^{-kr}}{r} \quad \text{que sustituidas en [2.41] queda:}$$

$$\left. \begin{aligned} A_S &= \frac{1}{4\pi\hat{\rho}\omega^2} \frac{1}{r} + C_{1S} \frac{e^{k_S r}}{r} + C_{2S} \frac{e^{-k_S r}}{r} \\ A_P &= \frac{1}{4\pi\hat{\rho}\omega^2} \frac{1}{r} + C_{1P} \frac{e^{k_P r}}{r} + C_{2P} \frac{e^{-k_P r}}{r} \end{aligned} \right\} [2.50]$$

Introduciendo ambos potenciales en la ecuación e imponiendo las condiciones de equilibrio en una esfera de rodeé la carga obtenemos:

$$C_{1P} = C_{1S} = 0 \quad \text{y} \quad C_{2P} = C_{2S} = \frac{1}{4\pi\hat{\rho}\omega^2} \quad [2.51]$$

y tendremos las expresiones de la solución fundamental:

$$U_{ji} = \frac{1}{4\pi\hat{\rho}\omega^2} \left[\psi \delta_{ij} - \chi(r_i, r_j) \right] \quad [2.52]$$

donde:

$$\psi = \frac{e^{-k_S r}}{r} + \left[\frac{1}{k_S^2 r^2} + \frac{1}{k_S r} \right] \frac{e^{-k_S r}}{r} - \left[\frac{C_P}{C_S} \right]^2 \left[\frac{1}{k_P^2 r^2} + \frac{1}{k_P r} \right] \frac{e^{-k_P r}}{r} \quad [2.53]$$

$$\chi = \left[\frac{3}{k_S^2 r^2} + \frac{3}{k_S r} + 1 \right] \frac{e^{-k_S r}}{r} - \left[\frac{C_P}{C_S} \right]^2 \left[\frac{3}{k_P^2 r^2} + \frac{3}{k_P r} + 1 \right] \frac{e^{-k_P r}}{r} \quad [2.54]$$

Las componentes del vector tensión $t_i = T_{ji} e_j$ asociado a un punto de una superficie de normal η estan dados por:

$$T_{ji} = \frac{1}{4\pi} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r} \chi \right) (\delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial \eta} + r_{,i} \eta_j) - \frac{2\chi}{r} (\eta_i r_{,j} - 2r_{,i} \eta_j \frac{\partial r}{\partial \eta}) - 2 \frac{\partial \chi}{\partial r} r_{,i} r_{,j} \frac{\partial r}{\partial \eta} + \left[\frac{c_p}{c_s} \right]^2 - 2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial \chi}{\partial r} - \frac{2\chi}{r} \right) r_{,i} \eta_j \right] \quad [2.55]$$

2.5.- SOLUCION FUNDAMENTAL AXILSIMETRICA

El tratamiento general utilizado es válido para la obtención de la solución fundamental para sólidos con simetría de revolución; tanto para la Elastostática como para la Elastodinámica.

La solución fundamental axilsimétrica del caso estático fue obtenida por Kermanidis (1975), a base de integrar los campos de desplazamientos y tensiones de la solución fundamental tridimensional, una vez transformada a coordenadas cilíndricas, a lo largo de la coordenada circunferencial θ ; para obtener una solución fundamental correspondiente a una carga distribuida anular segun las tres direcciones ρ, θ, z tal y como se muestra en la Fig. 2.2.

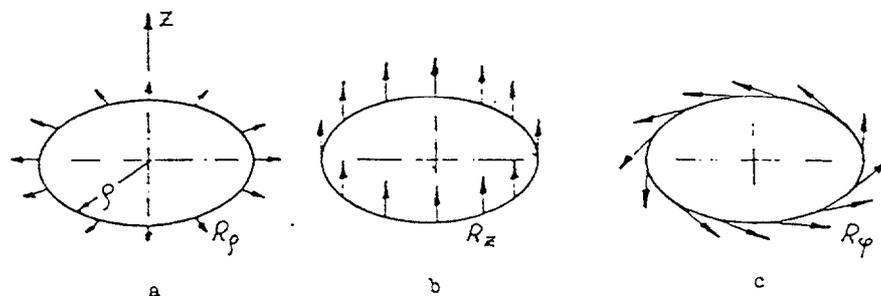


fig 2.2

Cruse, Snow y Wilson (1977) obtuvieron la misma

solución fundamental para cargas axial y radial, (a) y (b) de la Fig [2.2], usando la representación de Galerkin

$$\underline{u} = 2(1-\nu) \nabla^2 \underline{G} - \nabla \nabla \underline{G} \quad [2.56]$$

y una transformada integral

Ambos trabajos limitan la solución fundamental estática al caso de sollicitaciones y condiciones de contorno axilsimétricas.

Rizzo y Shippy (1979) y Shippy, Rizzo y Gupta (1980) obtienen la solución fundamental axilsimétrica para problemas de potencial y elastostática, a partir de la integración directa de la solución fundamental tridimensional, en coordenadas cilíndricas, extendiendola a problemas con condiciones de contorno no axilsimétricas; mediante un desarrollo en serie de Fourier de las mismas. Esta formulación adolece del defecto de que una vez llevada a la Identidad de Somigliana y realizar la integración a lo largo de la coordenada circunferencial en primer lugar, nos conduce a integrales elípticas de primera y segunda especie.

Yoshikawa y Tanaka (1981), obtuvieron la formulación para problemas de potencial partiendo de la solución tridimensional, pero para evitar los problemas encontrados por los anteriores autores, relizaron la integración en primer lugar según la coordenada curvilínea $-S-$ que define la línea generatriz de la superficie de revolución y en segundo lugar la integración según la coordenada circunferencial $-\theta-$.

El planteamiento seguido en la tesis es análogo al citado en último lugar pero extendiendolo a problemas elásticos, tanto estáticos como dinámicos estacionarios. Para ello en los apartados siguientes se expondrá detalladamente la obtención de estas soluciones.

2.5-1.- SOLUCION TRIDIMENSIONAL ESTATICA EN COORDENADAS CILINDRICAS

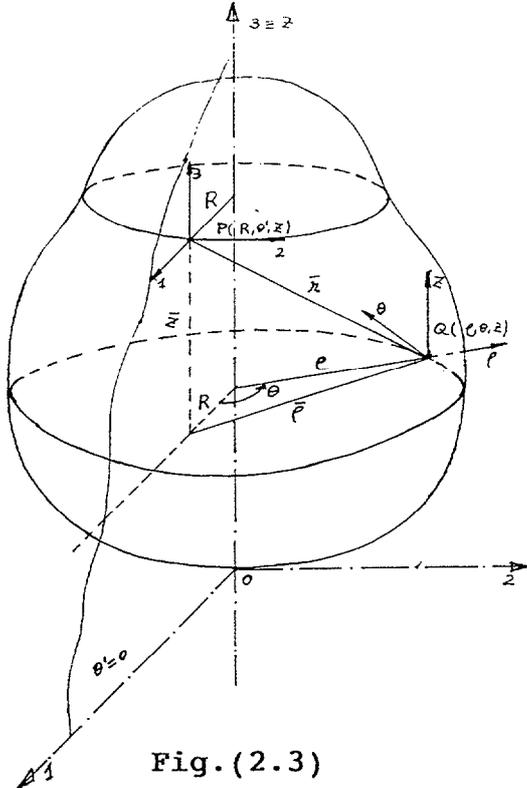


Fig.(2.3)

Sea un dominio Ω , de superficie exterior Γ ; con simetría de revolución, obtenida girando alrededor del eje Z la línea S , definida sobre Γ .

Si definimos como r a la distancia entre dos puntos P y Q ; en coordenadas cilíndricas queda:

$$r = \sqrt{\bar{\rho}^2 + \bar{z}^2} \quad \left. \begin{aligned} \bar{\rho}^2 &= (R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos\theta) \\ \bar{z} &= (Z - z) \end{aligned} \right\} [2.57]$$

siendo: $P(R, \theta, Z)$ y $Q(\rho, \theta, z)$ los puntos de colocación y de observación respectivamente; queda:

$$r = \sqrt{\rho^2 - 2R\rho\cos\theta + R^2 + (Z - z)^2} \quad [2.58]$$

la solución tridimensional estática están dadas por [2.45] y [2.46]

Vamos a transformar estas expresiones a coordenadas cilíndricas; para ello hemos de obtener previamente las expresiones de las derivadas direccionales, con respecto a las direcciones 1, 2, 3 que corresponden a X, Y, Z .

Una vez conocida la distancia r en coordenadas cilíndricas; tendremos que:

$$\begin{aligned}
 r_{,1} &= \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \\
 r_{,2} &= \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \\
 r_{,3} &= \frac{\partial r}{\partial z}
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

teniendo en cuenta que:

$$\left. \begin{aligned}
 \rho^2 &= x^2 + y^2 ; \quad \rho_{,x} = \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\rho} = \cos \theta, \quad \theta_{,x} = \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-y}{\rho^2} = \frac{-\operatorname{sen} \theta}{\rho} \\
 \theta &= \operatorname{arctag} \frac{y}{x} \quad \rho_{,y} = \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y}{\rho} = \operatorname{sen} \theta, \quad \theta_{,y} = \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{\rho^2} = \frac{\cos \theta}{\rho}
 \end{aligned} \right\} \tag{2.60}$$

y que:

$$\frac{\partial r}{\partial \rho} = \frac{\rho - R \cos \theta}{r} ; \quad \frac{\partial r}{\partial \theta} = \frac{R \rho \operatorname{sen} \theta}{r} ; \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{-\bar{z}}{r} \tag{2.61}$$

é introduciendo estas expresiones en [2.59], obtenemos:

$$\left. \begin{aligned}
 r_{,1} = r_{,x} &= \frac{\rho - R \cos \theta}{r} \cos \theta - \frac{R \rho \operatorname{sen} \theta}{r} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\rho} = \frac{\rho \cos \theta - R}{r} \\
 r_{,3} = r_{,z} &= \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{-\bar{z}}{r} \\
 r_{,2} = r_{,y} &= \frac{\rho - R \cos \theta}{r} \operatorname{sen} \theta + \frac{R \rho \operatorname{sen} \theta}{r} \frac{\cos \theta}{\rho} = \frac{\rho \operatorname{sen} \theta}{r}
 \end{aligned} \right\} \tag{2.61}$$

con lo que los productos:

$$\left. \begin{aligned}
 r_{,1} \times r_{,1} &= \left[\frac{\rho \cos \theta - R}{r} \right]^2 ; \quad r_{,2} \times r_{,1} = \left[\frac{\rho \cos \theta - R}{r} \right] \left[\frac{\rho \operatorname{sen} \theta}{r} \right] = r_{,1} \times r_{,2} \\
 r_{,2} \times r_{,2} &= \left[\frac{\rho \operatorname{sen} \theta}{r} \right]^2 ; \quad r_{,2} \times r_{,3} = \left[\frac{\rho \operatorname{sen} \theta}{r} \right] \left[\frac{-\bar{z}}{r} \right] = r_{,3} \times r_{,2} \\
 r_{,3} \times r_{,3} &= \left[\frac{-\bar{z}}{r} \right]^2 ; \quad r_{,1} \times r_{,3} = \left[\frac{-\bar{z}}{r} \right] \left[\frac{\rho \cos \theta - R}{r} \right] = r_{,3} \times r_{,1}
 \end{aligned} \right\} \tag{2.62}$$

Las movimientos en la dirección i , debidos a una carga unidad actuando en dirección j estan dados por:

$$u_i = U_{ji} \cdot e_j \quad [2.63]$$

los movimientos según $i(\rho, \theta, z)$, en función de la carga en dirección j (1,2,3) se pueden poner como:

$$u_{i(\rho, \theta, z)} = \left[L^T \cdot U_{ji} \right]_{(\rho, \theta, z)} e_{j(1,2,3)} \quad [2.64]$$

donde la matriz de rotación es:

$$L^T = \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{siendo: } c = \cos\theta, \quad s = \text{sen}\theta \quad [2.65]$$

por tanto:

$$u_{i(\rho, \theta, z)} = U_{ji}^c(\rho, \theta, z) e_{j(1,2,3)} \quad [2.66]$$

$$U_{ji}^c = L^T \cdot U_{ji}_{(1,2,3)} = \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{21} & U_{31} \\ U_{12} & U_{22} & U_{32} \\ U_{13} & U_{23} & U_{33} \end{bmatrix} \quad [2.67]$$

es decir realizando el producto matricial indicado:

$$\begin{bmatrix} U_{1\rho} & U_{2\rho} & U_{3\rho} \\ U_{1\theta} & U_{2\theta} & U_{3\theta} \\ U_{1z} & U_{2z} & U_{3z} \end{bmatrix}^c = \begin{bmatrix} (U_{11}c + U_{12}s) & (U_{21}c + U_{22}s) & (U_{31}c + U_{32}s) \\ (-U_{11}s + U_{12}c) & (-U_{21}s + U_{22}c) & (-U_{31}s + U_{32}c) \\ U_{13} & U_{23} & U_{33} \end{bmatrix}^c \quad [2.68]$$

introduciendo los valores antes obtenidos de r y sus derivadas direccionales en función de las coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) y realizando los productos indicados en la expresión anterior para cada uno de los términos del ~~tensor de movimientos~~ y agrupando términos se obtienen las ecuaciones siguientes:

$$\left. \begin{aligned}
 U_{1\rho}^c &= \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} \left[(3-4\nu) c + r_{,1} \cdot r_{, \rho} \right] \\
 U_{1\theta}^c &= \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} \left[-(3-4\nu) s + r_{,1} \cdot r_{, \tau} \right] \\
 U_{1z}^c &= \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} \left[r_{,1} \cdot r_{, z} \right]
 \end{aligned} \right\} \\
 \left. \begin{aligned}
 U_{2\rho}^c &= \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} \left[(3-4\nu) s + r_{,2} \cdot r_{, \rho} \right] \\
 U_{2\theta}^c &= \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} \left[(3-4\nu) c + r_{,2} \cdot r_{, \tau} \right] \\
 U_{2z}^c &= \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} \left[r_{,2} \cdot r_{, z} \right]
 \end{aligned} \right\} \quad [2.69] \\
 \left. \begin{aligned}
 U_{3\rho}^c &= \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} \left[r_{,3} \cdot r_{, \rho} \right] \\
 U_{3\theta}^c &= \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} \left[r_{,3} \cdot r_{, \tau} \right] \\
 U_{3z}^c &= \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} \left[(3-4\nu) + r_{,3} \cdot r_{, z} \right]
 \end{aligned} \right\}$$

donde:

$$r_{, \rho} = \frac{\partial r}{\partial \rho} = \frac{\rho - R \cos\theta}{r} ; r_{, \tau} = \frac{R \operatorname{sen}\theta}{r} = \frac{\partial r}{\rho \partial \theta} ; r_{,3} = r_{, z} = \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{-z}{r}$$

Para hallar la expresión en coordenadas cilíndricas del tensor de tensiones de la solución fundamental; el desarrollo es análogo al anterior, pero teniendo en cuenta que:

$\bar{\eta}(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ que en cilíndricas es: $\bar{\eta}(\eta_\rho, \eta_\theta, \eta_z)$

$$\left. \begin{aligned}
 \text{por simetria } \eta_\theta &= 0 \quad \text{y} \quad \eta_1 = \eta_\rho \cos\theta \\
 & \quad \eta_2 = \eta_\rho \operatorname{sen}\theta \\
 & \quad \eta_3 = \eta_z
 \end{aligned} \right\} \quad [2.70]$$

la derivada direccional de la distancia r con respecto a la normal η será:

$$\frac{\partial r}{\partial \eta} = r_{, \rho} \eta_\rho + r_{, \theta} \eta_\theta + r_{, z} \eta_z = r_{, \rho} \eta_\rho + r_{, z} \eta_z \quad [2.71]$$

Teniendo en cuenta las expresiones de, las componentes del vector normal a la superficie y las derivadas direccionales, podemos realizar un proceso similar al anterior para obtener las expresiones en coordenadas cilíndricas del tensor de tensiones.

$$t_i = U_{ji} \cdot e_j \quad [2.72]$$

las tensiones según $i(\rho, \theta, z)$, en función de la carga en dirección j (1,2,3) se pueden poner como:

$$t_{i(\rho, \theta, z)} = \left[L^T \cdot T_{ji} \right] (\rho, \theta, z) e_{j(1,2,3)} \quad [2.73]$$

$$t_{i(\rho, \theta, z)} = T_{ji}^c(\rho, \theta, z) e_{j(1,2,3)} \quad [2.74]$$

introduciendo el valor de L^T y realizando el producto:

$$T_{ji}^c = L^T \cdot T_{ji} = \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix} \quad [2.75]$$

es decir realizando el producto matricial:

$$\begin{bmatrix} T_{1\rho} & T_{2\rho} & T_{3\rho} \\ T_{1\theta} & T_{2\theta} & T_{3\theta} \\ T_{1z} & T_{2z} & T_{3z} \end{bmatrix}^c = \begin{bmatrix} (T_{11}c + T_{12}s) & (T_{21}c + T_{22}s) & (T_{31}c + T_{32}s) \\ (-T_{11}s + T_{12}c) & (-T_{21}s + T_{22}c) & (-T_{31}s + T_{32}c) \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix}^c \quad [2.76]$$

llevando a cabo un proceso similar al caso del tensor de movimientos se obtienen las expresiones del tensor de tensiones T_{ji}^c :

$$T_{1\rho}^c = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)} \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial r}{\partial \eta} \left[(1-2\nu)c + 3r_{,1} \cdot r_{, \rho} \right] + (1-2\nu)\eta_{\rho r, \tau} s \right]$$

$$T_{1\theta}^c = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)} \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial r}{\partial \eta} \left[-(1-2\nu)s + 3r_{,1} \cdot r_{, \tau} \right] + (1-2\nu)\eta_{\rho r, \tau} c \right]$$

$$\begin{aligned}
 T_{1z}^c &= \frac{-1}{8\pi(1-\nu)} \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial r}{\partial \eta} \left[3r_{,1} \cdot r_{,z} \right] + (1-2\nu)(\eta_\rho c r_{,z} - \eta_z r_{,1}) \right] \\
 T_{2\rho}^c &= \frac{-1}{8\pi(1-\nu)} \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial r}{\partial \eta} \left[(1-2\nu)s + 3r_{,z} \cdot r_{,\rho} \right] - (1-2\nu)\eta_\rho r_{,\tau} c \right] \\
 T_{2\theta}^c &= \frac{-1}{8\pi(1-\nu)} \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial r}{\partial \eta} \left[(1-2\nu)c + 3r_{,z} \cdot r_{,\tau} \right] + (1-2\nu)\eta_\rho r_{,\tau} s \right] \\
 T_{2z}^c &= \frac{-1}{8\pi(1-\nu)} \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial r}{\partial \eta} \left[3r_{,z} \cdot r_{,z} \right] + (1-2\nu)(\eta_\rho s r_{,z} - \eta_z r_{,z}) \right] \\
 T_{3\rho}^c &= \frac{-1}{8\pi(1-\nu)} \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial r}{\partial \eta} \left[3r_{,3} \cdot r_{,\rho} \right] - (1-2\nu)(\eta_\rho r_{,z} - \eta_z r_{,\rho}) \right] \\
 T_{3\theta}^c &= \frac{-1}{8\pi(1-\nu)} \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial r}{\partial \eta} \left[3r_{,3} \cdot r_{,\tau} \right] + (1-2\nu)\eta_z r_{,\tau} \right] \\
 T_{3z}^c &= \frac{-1}{8\pi(1-\nu)} \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial r}{\partial \eta} \left[(1-2\nu) + 3r_{,3} \cdot r_{,z} \right] \right]
 \end{aligned} \tag{2.77}$$

Como se puede observar, los tensores, tanto de movimientos como el de tensiones, a diferencia de los correspondientes a la solución tridimensional en coordenadas cartesianas; no son simétricos y representan la respuesta del sistema virtual en dirección i (ρ, θ, z) cuando se aplica una fuerza de volumen (\underline{f}) según j ($1, 2, 3$).

2.5-2.- SOLUCION TRIDIMENSIONAL DINAMICA EN COORDENADAS CILINDRICAS

La solución fundamental en el caso dinámico se obtiene aplicando idéntico proceso que para el caso estático; utilizando la misma notación y significado para las variables asociadas a las derivadas direccionales, normal a la superficie Γ , así como para la distancia y su derivada con respecto a la normal $\bar{\eta}$. Los tensores de movimientos y tensiones de la solución fundamental tridimensional en coordenadas cartesianas están dados por las ecuaciones [2.52] y [2.55]. Aplicando la misma matriz

de rotación L^T utilizada en el caso estático y realizando las transformaciones adecuadas se obtiene las expresiones de la solución fundamental en coordenadas cilíndricas que son:

$$\left. \begin{aligned} U_{1\rho}^c &= \frac{1}{4\pi\hat{\rho}\omega^2} \left[\psi_c - \chi(r, 1, r, \rho) \right] \\ U_{1\theta}^c &= \frac{1}{4\pi\hat{\rho}\omega^2} \left[-\psi_s - \chi(r, 1, r, \tau) \right] \\ U_{1z}^c &= \frac{1}{4\pi\hat{\rho}\omega^2} \left[-\chi(r, 2, r, z) \right] \end{aligned} \right\}$$

[2.78]

$$\left. \begin{aligned} U_{2\rho}^c &= \frac{1}{4\pi\hat{\rho}\omega^2} \left[\psi_c - \chi(r, 2, r, \rho) \right] \\ U_{2\theta}^c &= \frac{1}{4\pi\hat{\rho}\omega^2} \left[-\psi_s - \chi(r, 2, r, \tau) \right] \\ U_{2z}^c &= \frac{1}{4\pi\hat{\rho}\omega^2} \left[-\chi(r, 2, r, z) \right] \end{aligned} \right\}$$

donde las expresiones de ψ y χ estan dadas en [2.53] y [2.54]

$$\left. \begin{aligned} U_{3\rho}^c &= \frac{1}{4\pi\hat{\rho}\omega^2} \left[\psi_c - \chi(r, 3, r, \rho) \right] \\ U_{3\theta}^c &= \frac{1}{4\pi\hat{\rho}\omega^2} \left[-\psi_s - \chi(r, 3, r, \tau) \right] \\ U_{3z}^c &= \frac{1}{4\pi\hat{\rho}\omega^2} \left[-\chi(r, 3, r, z) \right] \end{aligned} \right\}$$

De forma similar el tensor T_{ji}^c en función de las variables ya utilizadas y llamando:

$$T_1 = \left[\frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\chi}{r} \right] ; T_2 = \left[\frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial \chi}{\partial r} - \frac{2\chi}{r} \right] \text{ y } cc_1 = \left[\frac{c_p^2}{c_s^2} - 2 \right] \quad [2.79]$$

Agrupando términos una vez sustituidas las variables en coordenadas cilíndricas y reordenando el tensor; obtendremos las expresiones correspondientes a las tensiones en el caso dinámico y que tiene como expresión las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned}
 T_{1\rho}^c &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial r}{\partial \eta} \left[T_1 c + \left(\frac{4\lambda}{r} - \frac{2\partial\lambda}{\partial r} \right) r_{,1} \cdot r_{, \rho} \right] + \eta_\rho \left[T_1 c r_{, \rho} + \left(c c_1 T_2 - \frac{2\lambda}{r} \right) r_{, 1} \right] \right\} \\
 T_{1\theta}^c &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial r}{\partial \eta} \left[-T_1 s + \left(\frac{4\lambda}{r} - \frac{2\partial\lambda}{\partial r} \right) r_{,1} \cdot r_{, \tau} \right] + \eta_\rho T_1 c r_{, \tau} \right\} \\
 T_{1z}^c &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial r}{\partial \eta} \left[\left(\frac{4\lambda}{r} - \frac{2\partial\lambda}{\partial r} \right) r_{,1} \cdot r_{, z} \right] + \eta_\rho T_1 c r_{, z} + \eta_z \left(c c_1 T_2 - \frac{2\lambda}{r} \right) r_{, 1} \right\} \\
 T_{2\rho}^c &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial r}{\partial \eta} \left[T_1 s + \left(\frac{4\lambda}{r} - \frac{2\partial\lambda}{\partial r} \right) r_{,2} \cdot r_{, \rho} \right] + \eta_\rho \left[T_1 c r_{, \rho} + \left(c c_1 T_2 - \frac{2\lambda}{r} \right) r_{, 2} \right] \right\} \\
 T_{2\theta}^c &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial r}{\partial \eta} \left[T_1 c + \left(\frac{4\lambda}{r} - \frac{2\partial\lambda}{\partial r} \right) r_{,2} \cdot r_{, \tau} \right] + \eta_\rho T_1 c r_{, \tau} \right\} \quad [2.80] \\
 T_{2z}^c &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial r}{\partial \eta} \left[\left(\frac{4\lambda}{r} - \frac{2\partial\lambda}{\partial r} \right) r_{,2} \cdot r_{, z} \right] + \eta_\rho T_1 s r_{, z} + \eta_z \left(c c_1 T_2 - \frac{2\lambda}{r} \right) r_{, 2} \right\} \\
 T_{3\rho}^c &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial r}{\partial \eta} \left[\left(\frac{4\lambda}{r} - \frac{2\partial\lambda}{\partial r} \right) r_{,3} \cdot r_{, \rho} \right] + \eta_z T_1 r_{, \rho} + \eta_\rho \left(c c_1 T_2 - \frac{2\lambda}{r} \right) r_{, z} \right\} \\
 T_{3\theta}^c &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial r}{\partial \eta} \left[\left(\frac{4\lambda}{r} - \frac{2\partial\lambda}{\partial r} \right) r_{,3} \cdot r_{, \tau} \right] + \eta_z T_1 r_{, \tau} \right\} \\
 T_{3z}^c &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial r}{\partial \eta} \left[T_1 + \left(\frac{4\lambda}{r} - \frac{2\partial\lambda}{\partial r} \right) r_{,3} \cdot r_{, z} \right] + \eta_z \left[T_1 + \left(c c_1 T_2 - \frac{2\lambda}{r} \right) r_{, z} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Tal y como ya sucedió en el problema estático la solución fundamental no conserva la simetría de la que proviene.

2.6.- DISCRETIZACION DE LA ECUACION INTEGRAL

Sea el dominio Ω , con superficie Γ , que ya se ha utilizado anteriormente Fig .2.3.

Una vez escogido el estado virtual, solución fundamental obtenida previamente en el apartado 2.5 y cuando los puntos P y Q están situados sobre la superficie Γ ; la

ecuación integral adopta la forma expresada en [2.18]

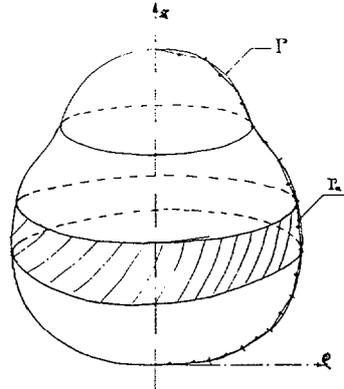


Fig .-(2.4)

De acuerdo con la simetría del problema; si sustituimos la línea S , generatriz de la superficie de revolución Γ , por un conjunto discreto de tramos, a los que llamaremos elementos y en ellos definimos unas funciones de interpolación que nos aproximen la geometría, los movimientos y las tensiones en función de los valores que éstos tomen en ciertos puntos, sobre ellos definidos que se denominaran nodos. Estas funciones también llamadas de pequeño soporte nos permiten discretizar la ecuación integral [2.18]; convirtiéndola en un sistema lineal de N ecuaciones algebraicas.

$$u_i^c = \sum_{i=1}^{N_n} \psi_N u_i^{Nc} \quad ; \quad t_i^c = \sum_{i=1}^{N_n} \psi_N t_i^{Nc} \quad \text{y} \quad x_i^c = \sum_{i=1}^{N_n} \psi_N x_i^{Nc} \quad [2.81]$$

sustituyendo estas funciones en la expresión [2.18] queda:

$$C_{ji} u_j^c(P) + \sum_{o=1}^M \int_{\Gamma_o} T_{ji}^c(P, \varrho) u_i^c(\varrho) d\Gamma_o = \sum_{o=1}^M \int_{\Gamma_o} t_i^c(\varrho) U_{ji}^c(P, \varrho) d\Gamma_o \quad [2.82]$$

o lo que es lo mismo:

$$C_{ji} u_j^c(P) + \sum_{o=1}^M \sum_{n=1}^N \int_{\Gamma_o} T_{ji}^c(P, g) \psi_n u_i^{Nc}(g) d\Gamma_o = \sum_{o=1}^M \sum_{n=1}^N \int_{\Gamma_o} U_{ji}^c(P, g) \psi_n t_i^{Nc}(g) d\Gamma_o \quad [2.83]$$

En caso que la aproximación utilizada sea :

condiciones de contorno. El segundo miembro de la expresión [2.89] puede escribirse:

$$\hat{\underline{F}}^c = \hat{\underline{G}} * \hat{\underline{t}}^c \text{ y obtenemos la forma clásica de un sistema}$$

lineal de 3M x 3M ecuaciones algebraicas, representado por:

$$\hat{\underline{F}}^c = \hat{\underline{K}} * \hat{\underline{u}}^c \quad [2.90]$$

que una vez resuelto, por cualquiera de los métodos usuales; obtenemos en el vector $\hat{\underline{u}}^c$ las incógnitas, movimientos y tensiones.

Los términos H_{ji} y G_{ji} se hacen singulares cuando la distancia r entre los puntos P y Q tiende a cero y por tanto se tendrá que evaluar de forma muy especial estos términos.

La integración de los coeficientes de influencia se hará en general de forma numérica excepto cuando se esté en el caso anterior. La evaluación de estas integrales se realizará en el capítulo siguiente.

CAPITULO III

**IMPLEMENTACION NUMERICA DEL M.E.C. CON
SIMETRIA DE REVOLUCION**

3.1 INTRODUCCION

En este capitulo se escoge el tipo de elemento de contorno, tanto su geometría como las funciones de interpolación necesarias para definir la variación de las variables de campo, y realizar los desarrollos que permitan la implementación del Método de los Elementos de Contorno en sólidos de revolución.

Una vez escogido el tipo de elemento se evaluarán los coeficientes de influencia mediante integraciones segun las dos coordenadas, una circunferencial θ y la otra curvilínea sobre la línea meridiana S , que genera el contorno Γ del dominio en estudio; se realizaran semianalíticamente o numericamente en función de que el elemento sobre el que se evalúa la misma contenga o no las singularidades del tipo $(1/r$ y $1/r^2)$.

En un tercer apartado se introducirán las consideraciones necesarias para modelar condiciones de contorno no axilsimétricas, así como también se abordará la implementación de subregiones, necesarias normalmente por el hecho de utilizar en el modelo materiales de características diferentes.

3.2 CARACTERISTICAS GEOMETRICAS Y FUNCIONES DE FORMA DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO AXILSIMETRICOS

De acuerdo con lo establecido en el capitulo II, apartado 2.5 la expresión de la identidad de Somigliana, o su equivalente en dinámica, están dadas por [2.23] y [2.35].

Escogiendo elementos *constant*es, es decir aquellos donde la variación de las variables de campo \underline{u} y \underline{t} son constantes en todo el elemento y están asociadas al valor que adquieren en un único nodo. Estos elementos, han de ser

capaces de representar la geometría del problema que tiene simetría de revolución.

Sea un dominio Ω , con una superficie de contorno Γ generada por la línea S al girar en torno al eje Z .

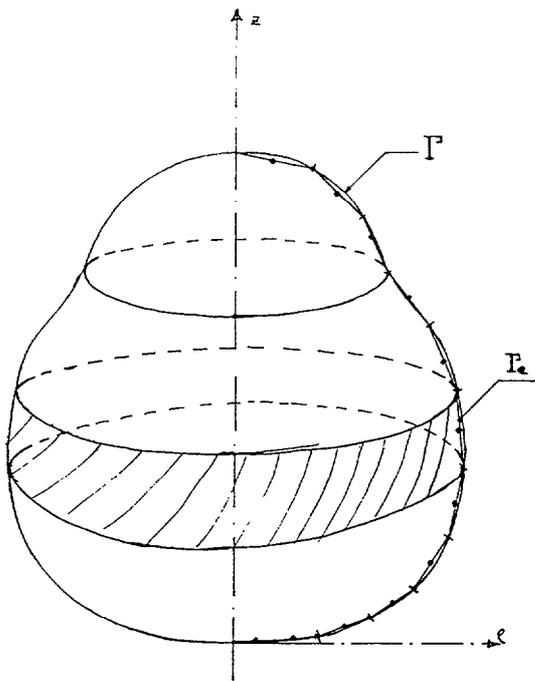


Fig.-3.1

Podemos definir dos coordenadas, una circunferencial θ y otra curvilínea l sobre la línea S . La discretización se realizara tan solo sobre esta curva S ; a base de segmentos rectilíneos de extremos i, j , denominando nodo al punto central del mismo, al cual estara asociado el valor de las variables de campo del elemento fig(3.1).

Aislando uno de estos elementos así definidos, con los que hemos aproximado la geometría del dominio y el comportamiento de las variables de campo; este tendrá un aspecto tal y como el que se muestra en la figura (3.2).

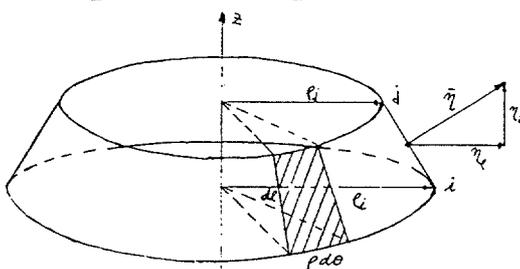


Fig.-3.2

<u>Extremo</u>	<u>Coordenada</u>
i	(P_i, z_i)
j	(P_j, z_j)

Sobre este elemento de contorno podemos definir un vector normal η , cuya dirección positiva sera aquella que recorriendo el elemento del extremo i al extremo j , siendo $(j>i)$, deje el interior del dominio a su izquierda; sus componentes son η_ρ y η_z .

El jacobiano de la transformación del elemento

diferencial de superficie, para un elemento genérico y en coordenadas cilíndricas Fig.-3.3, esta dado por la expresión:

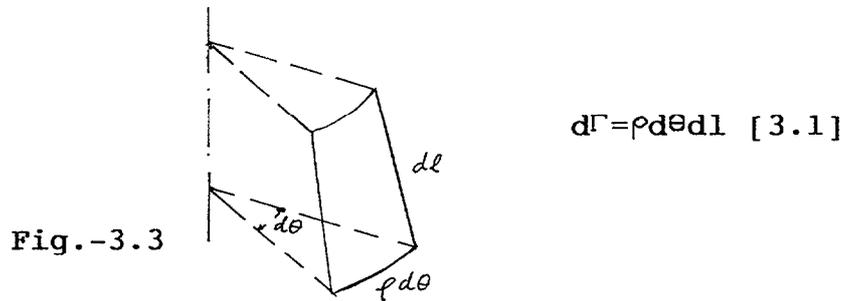


Fig.-3.3

Para el tipo de elementos constantes escogido, la identidad integral de Somigliana ya discretizada y sobre el contorno esta dada por la expresión:

$$C_{ji}^c u_j^c + \sum_{e=1}^M \left[\int_0^{2\pi} \int_0^l T_{ji}^c \rho d\theta dl \right] u_i^c = \sum_{e=1}^M \left[\int_0^{2\pi} \int_0^l U_{ji}^c \rho d\theta dl \right] t_i^c \quad [3.2]$$

o lo que es lo mismo:

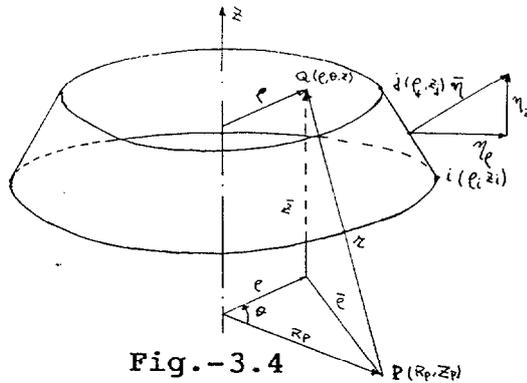
$$C_{ji}^c u_j^c + \sum_{e=1}^M H_{ji}^c u_i^c = \sum_{e=1}^M G_{ji}^c t_i^c \quad [3.3]$$

Para evaluar los coeficientes de influencia, H_{ji} y G_{ji} han de realizarse las integraciones correspondientes a cada elemento, distinguiendo dos casos. Primero y más sencillo, cuando en el elemento de contorno sobre el que se integra no se hacen singulares las funciones del integrando; se hará de forma totalmente numérica en ambas coordenadas θ y l , mediante una doble cuadratura de Gauss-Legendre.

En el segundo de los casos cuando las funciones se hacen singulares, ésta se hallará en el punto central del elemento de contorno *-nodo-*, realizaremos la integración de forma analítica sobre la coordenada l y calculando los valores de esta en cada extremo i, j del elemento; evaluando a continuación las integrales de línea numéricamente según la coordenada θ .

3.3.- CALCULO DE LOS COEFICIENTES DE INFLUENCIA

3.3-1.- INTEGRACION SOBRE ELEMENTOS SIN SINGULARIDADES



Para un elemento genérico k , de extremos i, j ; se realizará la integración a través de una doble cuadratura de Gauss-Legendre, cuya expresión general esta dada por:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \omega_i(\xi) \cdot \omega_j(\eta) \cdot f(\xi, \eta) \quad [3.5]$$

Las integrales que se han de realizar son del tipo:

$$\int_{\Gamma_k} \Phi(\rho, \theta, z) d\Gamma_k = \int_0^{2\pi} \int_0^l \Phi(\rho, \theta, z) \rho d\theta dl \quad [3.6]$$

donde: $\Phi(\rho, \theta, z) = U_{ji}^C$ o $\Phi(\rho, \theta, z) = T_{ji}^C$ dependiendo de que coeficientes de influencia estemos integrando.

Haciendo los cambios siguientes:

$$\theta = \frac{\pi}{4}(1+\eta)^2 \rightarrow \forall \theta=0, \eta=-1 \text{ y } \forall \theta=\pi, \eta=+1 \quad [3.7]$$

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \left(\frac{\rho_j - \rho_i}{2} \right) \xi + \left(\frac{\rho_j + \rho_i}{2} \right) \\ z &= \left(\frac{z_j - z_i}{2} \right) \xi + \left(\frac{z_j + z_i}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad [3.8]$$

la integral [3.5] queda de la forma :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^l \Phi(\rho, \theta, z) \rho d\theta dl = 2 \int_0^{\pi} \int_0^l \Phi(\rho, \theta, z) \rho d\theta dl \quad [3.9]$$

Y

$$\int_0^\pi \int_0^l \Phi(\rho, \theta, z) \rho d\theta dl = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \Phi(\rho(\xi), \theta(\eta), z(\xi)) |J| d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \omega_i(\xi) \omega_j(\eta) |J| \Phi(\xi, \eta) \quad [3.10]$$

siendo $|J|$ el Jacobiano de la transformación de coordenadas que tiene la expresión:

$$|J| = \left[\frac{\pi}{2} (1+\eta) L_k / 2 \right] = \frac{\pi}{4} (1+\eta) L_k \quad [3.11]$$

La transformación de la coordenada circunferencial θ se realiza de esta manera a fin de concentrar los puntos de Gauss en las proximidades de la singularidad, que es donde la función subintegral adquiere los valores más significativos. Esta transformación, fué utilizada por primera vez por Alarcón et al (1985), e implica que la mitad los puntos utilizados se concentraran en $\pi/4$.

Al observar las expresiones, obtenidas en el capitulo anterior, de la solución fundamental se vé que tanto la distancia entre el punto de colocación P y el de observación Q, asi como sus derivadas direccionales, son funciones de ρ , θ , z y por tanto quedan de la forma que se indica a continuación:

$$\left. \begin{aligned} r &= \left[(\rho(\xi))^2 - 2R_p \rho(\xi) \cos(\eta) + R_p^2 + (Z_p - z)^2 \right]^{1/2} \quad (a) \\ r_{,1} &= \frac{\rho(\xi) \cos(\eta) - R_p}{r(\xi, \eta)}, \quad r_{,2} = \frac{\rho(\xi) \operatorname{sen}(\eta)}{r(\xi, \eta)}, \quad r_{,3} = r_{,z} = \frac{-(Z_p - z)}{r(\xi, \eta)} \\ r_{,\rho} &= \frac{\rho(\xi) - R_p \cos(\eta)}{r(\xi, \eta)}, \quad r_{,\tau} = \frac{R_p \operatorname{sen}(\eta)}{r(\xi, \eta)} \quad (b) \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} &= r_{,\rho} \eta_{,\rho} + r_{,z} \eta_{,z} \quad (c) \end{aligned} \right\} [3.12]$$

Sustituyendo estas expresiones en las obtenidas para

la solución fundamental, en coordenadas cilíndricas, tanto la estática como la dinámica se obtienen las expresiones finales que han de ser programadas:

En este apartado hemos de hacer mención al número de puntos de Gauss, m y n , que han de utilizarse para asegurar una correcta convergencia de la solución. Después de realizarse varios estudios comparativos, se ha obtenido que el número de puntos adecuado para aquellos elementos situados a distancias menores o iguales a seis veces la longitud, L_k , del elemento sobre el que se integra es de $n=10$ para la coordenada ξ y de $m=20$ para la η . Cuando la distancia es mayor que la mencionada anteriormente es suficiente utilizar para $n=4$ y $m=10$.

3.3-2 INTEGRACION SOBRE ELEMENTOS CON SINGULARIDADES

3.3-2-1. SOLUCION FUNDAMENTAL ESTATICA

De acuerdo con lo hasta ahora expuesto, las expresiones de los tensores de movimientos y tensiones, se hacen singulares cuando la distancia entre los puntos de colocación y de observación tiende a cero y este hecho tan solo ocurre cuando estamos integrando, para elementos constantes, sobre el propio elemento.

Esta dificultad se puede resolver realizando una integración analítica en una dirección, de forma que tan solo deberemos realizar la integración numérica de las integrales de línea a que ha quedado reducida la integral de superficie inicial.

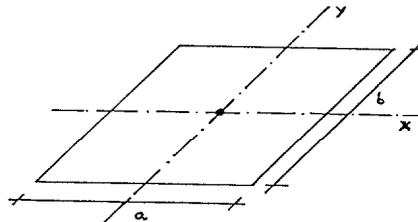


Fig.- 3.5

Esquemáticamente para un elemento como el de la

Fig.-3.5 tendremos:

$$\int_{\Gamma} f(x,y) dx dy = \int_{-b/2}^{+b/2} \left[\int_{y-a/2}^{y+a/2} f(x,y) dx \right] dy = \sum_I^n w_i f \left[(I(a/2) - I(-a/2), \xi) \right] \quad [3.13]$$

Generalizando este procedimiento a los elementos axilsimétricos del apartado anterior; se puede realizar la integración analítica con respecto a la coordenada curvilínea l y la numérica según la coordenada θ .

Cuando la coordenada $-l-$ coincide con la variación radial del elemento, y esto solo se verifica en elementos con la misma coordenada z ; es decir elementos normales al eje de simetría Z , se simplifican las expresiones y por ello se han generado dos tipos de elementos de contorno; a los que se denominaran *Elemento Corona*, el ya descrito y *Elemento Banda* al elemento genérico que no admita esta simplificación.

3.3-2-1.1 ELEMENTOS CORONA CIRCULAR

Sea un elemento k del tipo corona circular, con extremos i, j de coordenadas (ρ_i, z) y (ρ_j, z_j) , respectivamente; como el de la figura (3.6).

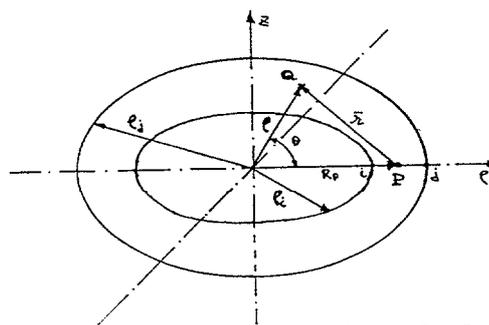


Fig.-3.6

Sean R y Z , las coordenadas del punto P de colocación. Para este elemento se verifica que las coordenadas z de todos sus puntos tiene el mismo valor; es decir:

$z_i = z_j = Z$ [3.14] y por tanto [3.12a]

queda:

$$r = \left[(\rho^2 - 2R \rho \cos\theta + R^2) \right]^{1/2} \quad [3.15]$$

y asu vez las derivadas direccionales, [3.12b] adoptan las expresiones siguientes:

$$\left. \begin{aligned} r_{,1} &= \frac{\rho \cos\theta - R}{r} , \quad r_{,2} = \frac{\rho \operatorname{sen}\theta}{r} , \quad r_{,3} = r_{,z} = 0 \\ r_{,\rho} &= \frac{\rho - R \cos\theta}{r} , \quad r_{,r} = \frac{R \operatorname{sen}\theta}{r} \end{aligned} \right\} \quad [3.16]$$

y teniendo en cuenta las expresiones de las componentes del vector normal \bar{n} , en coordenadas cilíndricas

$$n_{\rho} = \frac{-(z_i - z_i)}{L_k} = 0 , \quad n_z = \frac{-(\rho_i - \rho_i)}{L_k} \neq 0 \quad [3.17]$$

y llevandolo a la expresión de la derivada con respecto a la normal tendremos:

$$\frac{\partial r}{\partial n} = r_{,\rho} n_{\rho} + r_{,z} n_z = 0 \quad [3.18]$$

Tal y como se ha dicho la coordenada curvilinea 1 coincide con la coordenada ρ y por tanto el elemento diferencial de superficie queda: $d\Gamma = \rho d\theta d\rho$.

Los tensores de movimientos y tensiones en , coordenadas cilíndricas, están dados por las expresiones [2.69] y [2.77]. En los subapartados siguientes se abordará el calculo de de los términos de los coeficientes de influencia G_{ji} y H_{ji} .

a) COEFICIENTE DE INFLUENCIA DE LAS TENSIONES

Si llamamos A, a la constante que depende tan solo de las características del material y que es comun a todas las expresiones del tensor de movimientos de la solución

fundamental; se tiene:

$$A = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \quad [3.19] \quad \text{y llamando} \quad \begin{cases} \cos \theta = c \\ \sin \theta = s \end{cases}$$

Vamos a obtener la expresión de alguno de los componentes de la matriz, de 3x3 términos, G_{ji} . Como se ha mencionado anteriormente vamos a hallar explícitamente los valores de la integral en los extremos del elemento y después integrar mediante una cuadratura de Gauss las integrales de línea a que conduce el primer paso.

Coeficiente $G_{1\rho}$

$$G_{1\rho} = A \left[\int_0^{2\pi} \left[\int_{\rho_i}^{\rho_j} (3-4\nu)c\rho \frac{d\rho}{r} \right] d\theta + \int_0^{2\pi} \left[\int_{\rho_i}^{\rho_j} \frac{(\rho c - R)(\rho - Rc)}{r^3} \rho d\rho \right] d\theta \right] \quad [3.20]$$

desarrollando el integrando de la segunda integral queda:

$$G_{1\rho} = A \left\{ \int_0^{2\pi} (3-4\nu)c \left[\int_{\rho_i}^{\rho_j} \rho \frac{d\rho}{r} \right] d\theta + \int_0^{2\pi} \left[c \left[\int_{\rho_i}^{\rho_j} \rho^3 \frac{d\rho}{r^3} \right] - (R(1+c^2)) \left[\int_{\rho_i}^{\rho_j} \rho^2 \frac{d\rho}{r^3} \right] + R^2 c \left[\int_{\rho_i}^{\rho_j} \rho \frac{d\rho}{r^3} \right] \right] d\theta \right\} \quad [3.21]$$

Introduciendo la notación $I_n C$, para designar estas integrales explícitas en función de ρ y r ; tendremos que la expresión anterior se convierte en:

$$G_{1\rho} = A \int_0^{2\pi} \left[(3-4\nu)c [I1C] + [I2C]c - (R(1+c^2)) [I3C] + R^2 c [I4C] \right] d\theta \quad [3.22]$$

que se evalúa numericamente.

Coeficiente $G_{2\theta}$

Análogamente la expresión del término $G_{2\theta}$ queda como:

$$G_{2\theta} = A \left[\int_0^{2\pi} \left[\int_{\rho_i}^{\rho_j} (3-4\nu) c \rho \frac{d\rho}{r} \right] d\theta + \int_0^{2\pi} \left[\int_{\rho_i}^{\rho_j} \frac{R \rho s^2}{r^3} d\rho \right] d\theta \right] \quad [3.23]$$

que una vez desarrollada y puesta en función de las integrales básicas tendremos:

$$G_{2\theta} = A \int_0^{2\pi} \left[(3-4\nu) c [I1C] + R s^2 [I3C] \right] d\theta \quad [3.24]$$

Coefficiente G_{3z}

Este coeficiente se obtiene de forma semejante a los anteriores, pero es más sencillo debido a que el término que contiene las derivadas con respecto a z y 3 se anula y por tanto:

$$G_{3z} = A \left[\int_0^{2\pi} \left[\int_{\rho_i}^{\rho_j} (3-4\nu) \rho \frac{d\rho}{r} \right] d\theta + \int_0^{2\pi} \left[\int_{\rho_i}^{\rho_j} \frac{-z^2 \rho d\rho}{r^3} \right] d\theta \right] \quad [3.25]$$

la segunda integral es nula y sustituyendo por las integrales básicas queda:

$$G_{3z} = A \int_0^{2\pi} \left[(3-4\nu) [I1C] \right] d\theta \quad [3.26]$$

Coefficiente $G_{1\theta}$

De acuerdo con los términos ya obtenidos podemos poner:

$$G_{1\theta} = A \left[\int_0^{2\pi} \left[\int_{\rho_i}^{\rho_j} -(3-4\nu) s \rho \frac{d\rho}{r} \right] d\theta + \int_0^{2\pi} \left[\int_{\rho_i}^{\rho_j} \frac{(\rho c - R) R s}{r^3} \rho d\rho \right] d\theta \right] \quad [3.27]$$

que desarrollada y puesta en función de las integrales básicas queda:

$$G_{1\theta} = A \int_0^{2\pi} \left[-(3-4\nu)s[I1C] + Rsc[I3C] - R^2s[I4C] \right] d\theta \quad [3.28]$$

Coefficiente $G_{2\rho}$

Haciendo las mismas sustituciones que en los casos anteriores se obtiene:

$$G_{2\rho} = A \left[\int_0^{2\pi} \left[\int_{\rho_i}^{\rho_j} (3-4\nu)s\rho \frac{d\rho}{r} \right] d\theta + \int_0^{2\pi} \left[\int_{\rho_i}^{\rho_j} \frac{(\rho c - R)\rho s}{r^3} \rho d\rho \right] d\theta \right] \quad [3.29]$$

y de nuevo realizando un desarrollo análogo al de otros coeficiente queda:

$$G_{2\rho} = A \int_0^{2\pi} \left[(3-4\nu)s[I1C] + sc[I2C] - Rs[I3C] \right] d\theta \quad [3.30]$$

Los coeficientes restantes; es decir: $G_{3\rho}$, G_{1z} , $G_{3\theta}$ y G_{2z} son siempre idénticamente nulos ya que tan solo intervienen las derivadas $r_{,3}$ y $r_{,z}$; que son siempre nulas en este tipo de elementos corona.

b) COEFICIENTES DE INFLUENCIA DE LOS MOVIMIENTOS

Por un procedimiento semejante al utilizado para las matrices G_{ji} ; se obtienen los términos de los coeficientes de influencia H_{ji} . Llamando X a la constante dependiente de las propiedades del medio y poniéndola en función de la que aparecía en el tensor de movimientos, se tiene:

$$X = -2\mu A \quad [3.31]$$

Al observar las expresiones del tensor T_{ji}^c , se aprecia que para los elementos sobre los que estamos realizando la evaluación de los coeficientes, dado que tanto

la derivada de la distancia con respecto a la normal a la superficie como la componente radial de ésta son nulas; los términos de la diagonal principal de la matriz H_{ji} son nulos, quedando por tanto como coeficientes distintos de cero los correspondientes a los índices $i \neq j$. De acuerdo con esto queda: $H_{1\rho} = H_{2\theta} = H_{3z} = C_{ii}$ y además por idénticas razones $H_{2\rho}$ también lo son. A continuación se hallarán las expresiones de los coeficientes no nulos en función de las integrales básicas.

Coficiente H_{1z}

Partiendo de la expresión general [3.77] é introduciendo las consideraciones anteriores tendremos:

$$H_{1z} = X \int_0^{2\pi} \int_{\rho_i}^{\rho_j} -(1-2\nu)\eta_z \frac{r_{,1}}{r^3} \rho d\rho d\theta \quad [3.32]$$

sustituyendo la derivada direccinal por su expresión, queda:

$$H_{1z} = X \int_0^{2\pi} \int_{\rho_i}^{\rho_j} -(1-2\nu)\eta_z \frac{(\rho c - R)}{r^3} \rho d\rho d\theta \quad [3.33]$$

desarrollando y sustituyendo por las integrales básicas tendremos:

$$H_{1z} = X \int_0^{2\pi} -(1-2\nu)\eta_z \left[[I3C]c - R[I4C] \right] d\theta \quad [3.34]$$

Coficiente $H_{3\rho}$

Analogamente al término anterior tendremos:

$$H_{3\rho} = X \int_0^{2\pi} \int_{\rho_i}^{\rho_j} (1-2\nu)\eta_z \frac{r_{, \rho}}{r^3} \rho d\rho d\theta \quad [3.35]$$

sustituyendo la derivada direccional por su expresión, queda:

$$H_{3\rho} = X \int_0^{2\pi} \int_{\rho_i}^{\rho_j} (1-2\nu)\eta_z \frac{(\rho-Rc)}{r^3} \rho d\rho d\theta \quad [3.36]$$

que puesta en función de las integrales básicas se obtiene:

$$H_{3\rho} = X \int_0^{2\pi} (1-2\nu)\eta_z \left[[I3C] - Rc[I4C] \right] d\theta \quad [3.37]$$

Coefficiente H_{2z}

El término H_{2z} una vez simplificado queda de la forma siguiente:

$$H_{2z} = X \int_0^{2\pi} \int_{\rho_i}^{\rho_j} -(1-2\nu)\eta_z \frac{r_z}{r^3} \rho d\rho d\theta \quad [3.38]$$

que una vez sustituida la derivada y desarrollado queda:

$$H_{2z} = X \int_0^{2\pi} \int_{\rho_i}^{\rho_j} -(1-2\nu)\eta_z \frac{\rho s}{r^3} \rho d\rho d\theta \quad [3.39]$$

que en función de las integrales básicas aparece como:

$$H_{2z} = X \int_0^{2\pi} -(1-2\nu)\eta_z s [I3C] d\theta \quad [3.40]$$

Coefficiente $H_{3\theta}$

El tratamiento dado a éste término es totalmente análogo a los anteriores y escribiendolo en función de las integrales básicas queda directamente:

$$H_{3\theta} = X \int_0^{2\pi} (1-2\nu)\eta_z R s [I4C] d\theta \quad [3.41]$$

Las integrales básicas que hemos denominado InC,

$\forall n=1,2,3,4$; se evalúan explícitamente determinando las primitivas correspondientes a cada una de ellas y sustituyendo los límites de integración (ρ_i, ρ_j). Una vez hecho esto, habrá que verificar que se ha obviado la singularidad tal y como se pretendía.

Las expresiones de estas integrales se obtienen de la forma siguiente:

$$\text{teniendo en cuenta que: } \mathfrak{R}^{1/2} = r = \left[\rho^2 - 2R \rho \cos \theta + R^2 \right]^{1/2} \quad [3.42]$$

y llamando $\mathfrak{R} = c\rho^2 + b\rho + a$ é identificando coeficientes obtenemos:

$$\left. \begin{array}{l} c=1 \\ b=-2R \cos \theta \\ a=R^2 \end{array} \right\} [3.43] \quad \text{y que el discriminante de } \mathfrak{R} \text{ es:}$$

$$\Delta = 4ac - b^2 = 4R^2 - (-2R \cos \theta)^2 = 4R^2 (1 - \cos^2 \theta) = 4R^2 \sin^2 \theta \quad [3.44]$$

con estas definiciones en Gradshtein y Ryzhik, encontramos las expresiones de las funciones primitivas de las integrales básicas; que en función de $\rho, \Delta, a, b, c, \mathfrak{R}$ quedan:

$$\begin{aligned} I1C = \int_{\rho_i}^{\rho_j} \frac{\rho d\rho}{\mathfrak{R}^{1/2}} &= \left[\frac{\sqrt{\mathfrak{R}}}{c} \right]_{\rho_i}^{\rho_j} - \frac{b}{2c} \int_{\rho_i}^{\rho_j} \frac{d\rho}{\mathfrak{R}^{1/2}} = \left[\sqrt{\rho^2 - 2R \rho \cos \theta + R^2} \right]_{\rho_i}^{\rho_j} + \\ &+ R \cos \theta \int_{\rho_i}^{\rho_j} \frac{d\rho}{\mathfrak{R}^{1/2}} \quad [3.45] \end{aligned}$$

A su vez, esta integral tiene su primitiva que para valores de c positivos tiene como expresión:

$$L = \int_{\rho_i}^{\rho_j} \frac{d\rho}{\mathfrak{R}^{1/2}} = \left[\frac{1}{\sqrt{c}} \ln (2\sqrt{c} \sqrt{\mathfrak{R}} + 2c\rho + b) \right]_{\rho_i}^{\rho_j} \quad [3.46]$$

sustituyendo c, \mathfrak{R} y b por sus expresiones tendremos:

$$L = \left[\ln \left(2\sqrt{\rho^2 - 2R \rho \cos\theta + R^2} + 2\rho - 2R\cos\theta \right) \right]_{\rho_i}^{\rho_j} \quad [3.47]$$

que sustituyendola en la [3.46] y poniendo ésta en función de sus límites superior e inferior, que corresponden a los extremos del elemento; queda:

$$I1C = \left[\sqrt{\rho_j^2 - 2R \rho_j \cos\theta + R^2} - \sqrt{\rho_i^2 - 2R \rho_i \cos\theta + R^2} \right] + R\cos\theta \left\{ \ln \left[2\sqrt{\rho_j^2 - 2R \rho_j \cos\theta + R^2} + 2\rho_j - 2R\cos\theta \right] - \ln \left[2\sqrt{\rho_i^2 - 2R \rho_i \cos\theta + R^2} + 2\rho_i - 2R\cos\theta \right] \right\} \quad [3.48]$$

Siendo esta expresión [3.48], la que se ha de programar para realizar la posterior integración numérica.

El resto de las integrales básicas se efectúan de manera totalmente similar a esta y sus expresiones finales son las siguientes:

teniendo en cuenta las expresiones [3.42],[3.43] y [3.44]

$$I2C = \int_{\rho_i}^{\rho_j} \frac{\rho^3 d\rho}{\mathcal{R}^{3/2}} = 3Rc \, L + \left[\frac{\Delta \rho_j^2 - 2R^3 c (10 - 12c^2) \rho_j + R^4 (8 - 12c^2)}{\Delta \sqrt{\rho_j^2 - 2R \rho_j c + R^2}} \right] - \left[\frac{\Delta \rho_i^2 - 2R^3 c (10 - 12c^2) \rho_i + R^4 (8 - 12c^2)}{\Delta \sqrt{\rho_i^2 - 2R \rho_i c + R^2}} \right] \quad [3.49]$$

$$I3C = \int_{\rho_i}^{\rho_j} \frac{\rho^2 d\rho}{\mathcal{R}^{3/2}} = L + \left[\frac{(\Delta - 4R^2 c^2) \rho_i + 4R^3 c}{\Delta \sqrt{\rho_i^2 - 2R \rho_i c + R^2}} - \frac{(\Delta - 4R^2 c^2) \rho_j + 4R^3 c}{\Delta \sqrt{\rho_j^2 - 2R \rho_j c + R^2}} \right] \quad [3.50]$$

$$I4C = \int_{\rho_i}^{\rho_j} \frac{\rho}{R^{3/2}} d\rho = \frac{4R}{\Delta} \left[\frac{(R - c\rho_i)}{\sqrt{\rho_i^2 - 2R\rho_i c + R^2}} - \frac{(R - c\rho_j)}{\sqrt{\rho_j^2 - 2R\rho_j c + R^2}} \right] \quad [3.51]$$

3.3-2-1-2 ELEMENTOS BANDA TRONCOCONICA

Para este tipo de elementos de contorno, cuya geometría y notación es idéntica a la definida para los elementos sobre los que se ha realizado la integración no singular. Asimismo las expresiones de la distancia r y las derivadas direccionales es la dada por las expresiones [3.12]; se tiene:

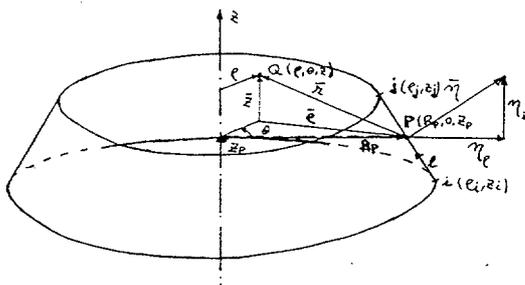


Fig.-3.7

La distancia r puesta en función de la variable t y θ

$$r = \left[(\rho(\xi)^2 - 2R_p \rho(\xi) \cos(\eta) + R_p^2 + (z_p - z)^2) \right]^{1/2}$$

$$r = \varphi(\rho, \theta, z) = \bar{\varphi}(t, \theta) \quad [3.52]$$

poniendo:

$$\begin{aligned} \rho &= f(z) = \hat{f}(t) \\ z &= \psi(t) \end{aligned} \quad [3.53]$$

El Jacobiano de la transformación de coordenadas queda:

$$d\Gamma_k = \rho d\theta dz = \rho(t) L_k dt d\theta \quad [3.54]$$

de acuerdo con el cambio de coordenadas realizado se pueden poner las coeficientes de influencia como:

$$\left. \begin{aligned} G_{ji} &= \int_{\Gamma_k} U_{ji}^c d\Gamma_k = \int_0^{2\pi} \int_0^l U_{ji}^c \rho d\theta dl = L_k \int_0^{2\pi} \int_0^1 U_{ji}^c(t, \theta) \rho(t) d\theta dt \\ H_{ji} &= \int_{\Gamma_k} T_{ji}^c d\Gamma_k = \int_0^{2\pi} \int_0^l T_{ji}^c \rho d\theta dl = L_k \int_0^{2\pi} \int_0^1 T_{ji}^c(t, \theta) \rho(t) d\theta dt \end{aligned} \right\} [3.55]$$

Realizando el cambio indicado de forma esquemática en [3.52] y [3.53]; de la manera siguiente:

$$\left. \begin{aligned} z &= \Delta z_k t + z_i \\ \rho &= az + b = a(\Delta z_k t + z_i) + b = a\Delta z_k t + az_i + b = pt + q \end{aligned} \right\} [3.56]$$

siendo:

$$\Delta z_k = z_j - z_i \quad \text{y} \quad \Delta \rho_k = \rho_j - \rho_i$$

obtenemos los valores de a y b como sigue:

$$a = \frac{\Delta \rho_k}{\Delta z_k} = \frac{\rho_j - \rho_i}{z_j - z_i} \quad \text{y} \quad b = \frac{z_j \rho_i - z_i \rho_j}{z_j - z_i} \quad [3.57]$$

Sustituyendo estas expresiones en [3.53] se obtiene la distancia r en función de t y θ como:

$$r = (A1t^2 + B1t + C1)^{1/2} \equiv \bar{\Phi}(t, \theta) \quad [3.58]$$

donde:

$$\left. \begin{aligned} A1 &= L_k^2 \\ B1 &= 2\Delta z_k \left[(a^2 + 1)z_i + ab - R a c - Z \right] \\ C1 &= \left[(a^2 + 1)z_i^2 + 2z_i(ab - Z) + (b^2 + R^2 + Z^2) - 2Rc(az_i + b) \right] \end{aligned} \right\} [3.59]$$

a) COEFICIENTES DE INFLUENCIA DE LAS TENSIONES

Introduciendo las expresiones de r, ρ , z en los diferentes términos del tensor de movimientos obtenido en el capítulo anterior. Utilizando la misma nomenclatura que en apartados anteriores para la constante dependiente del

material A y teniendo en cuenta el Jacobiano de la transformación de coordenadas l a t; podemos realizar detalladamente las integraciones correspondientes a cada término de los coeficientes de influencia.

Coefficiente $G_{1\rho}$

$$G_{1\rho} = L_k A \left\{ \int_0^{2\pi} (3-4\nu) c \left[\int_0^1 \frac{\rho(t) dt}{\mathfrak{R}^{1/2}} \right] d\theta + \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r_{,1} r_{, \rho}(t)}{r} dt d\theta \right\} \quad [3.60]$$

Sustituyendo los valores de las derivadas direccionales de r puestos en función de t y desarrollando las expresiones correspondientes queda:

$$G_{1\rho} = L_k A \left\{ \int_0^{2\pi} (3-4\nu) c \left[\int_0^1 \frac{(pt+q)}{\mathfrak{R}^{1/2}} dt \right] d\theta + \int_0^{2\pi} c \left[\int_0^1 \frac{(pt+q)^3}{\mathfrak{R}^{3/2}} dt \right] d\theta - \int_0^{2\pi} R(1+c^2) \left[\int_0^1 \frac{(pt+q)^2}{\mathfrak{R}^{3/2}} dt \right] d\theta + \int_0^{2\pi} R^2 c \left[\int_0^1 \frac{(pt+q)}{\mathfrak{R}^{3/2}} dt \right] d\theta \right\} \quad [3.61]$$

llamando a las integrales explícitas en t por la expresión Inn, donde n es un numero, y teniendo en cuenta que $r = \mathfrak{R}^{1/2}$ y su expresión esta dada en [3.58]; tendremos :

$$G_{1\rho} = L_k A \int_0^{2\pi} \left[(3-4\nu) c [I1] + c [I2] - R(1+c^2) [I3] + R^2 c [I4] \right] d\theta \quad [3.62]$$

Coefficiente $G_{2\theta}$

De forma totalmente análoga al anteriorse hallará la expresión de éste.

$$G_{1\rho} = L_k A \left\{ \int_0^{2\pi} (3-4\nu) c \left[\int_0^1 \frac{\rho(t) dt}{\mathfrak{R}^{1/2}} \right] d\theta + \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r_{,2} r_{, \tau}(t)}{r} dt d\theta \right\} \quad [3.63]$$

desarrollando y poniendo todo en función de las integrales básicas tendremos:

$$G_{1\rho} = L_k A \int_0^{2\pi} \left[(3-4\nu) c[I1] + R s^2 [I3] \right] d\theta \quad [3.64]$$

Coeficiente G_{3z}

En este coeficiente, así como en aquellos que contengan derivadas de r con respecto a la dirección z , aparece la expresión:

$$-\bar{z} = \Delta z_k t + (z - Z) \quad [3.65], \text{ que expresa la relación entre la coordenada } \bar{z} \text{ y la variable } t \text{ de integración.}$$

de acuerdo con esto se tendrá:

$$G_{3z} = L_k A \left\{ \int_0^{2\pi} (3-4\nu) \left[\int_0^1 \frac{\rho(t) dt}{R^{1/2}} \right] d\theta + \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r_{,3} r_{,z} \rho(t)}{r} dt d\theta \right\} \quad [3.66]$$

sustituyendo [3.65] en [3.66], y desarrollando en función de las integrales básicas; surge una nueva.

$$G_{3z} = L_k A \int_0^{2\pi} \left[(3-4\nu) [I1] + [I7] \right] d\theta \quad [3.67]$$

Coeficiente G_{1z}

Al igual que en los términos ya obtenidos, partiendo de la expresión del tensor puesta en función de t queda:

$$G_{1z} = L_k A \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r_{,1} r_{,z} \rho(t)}{r} dt d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{(\rho c - R)(-\bar{z}) \rho}{r^3} dt d\theta \quad [3.68]$$

que desarrollado es:

$$G_{1z} = L_k A \left\{ \int_0^{2\pi} \left[c \int_0^1 \frac{(pt+q)^2 (-\bar{z})}{\Re^{3/2}} dt \right] d\theta - \int_0^{2\pi} \left[R \int_0^1 \frac{(pt+q)(-\bar{z})}{\Re^{3/2}} dt \right] d\theta \right\} \quad [3.69]$$

y poniendolo en función de las integrales básicas, surgen dos nuevos tipos que completan las que intervienen; queda:

$$G_{1z} = L_k A \int_0^{2\pi} [c[I5] - R[I6]] d\theta \quad [3.70]$$

El resto de los términos del coeficiente de influencia G_{ji} puestos en función de las 7 integrales básicas ya obtenidas; quedan de la forma siguiente:

Coeficiente $G_{1\theta}$

$$G_{1\theta} = L_k A \int_0^{2\pi} [-(3-4\nu)s[I1] + Rsc[I3] - R^2s[I4]] d\theta \quad [3.71]$$

Coeficiente $G_{2\rho}$

$$G_{2\rho} = L_k A \int_0^{2\pi} [(3-4\nu)s[I1] + s[I2] - Rcs[I3]] d\theta \quad [3.72]$$

Coeficiente G_{2z}

$$G_{2z} = L_k A \int_0^{2\pi} s[I5] d\theta \quad [3.73]$$

Coeficiente $G_{3\rho}$

$$G_{3\rho} = L_k A \int_0^{2\pi} [I5 - Rc[I6]] d\theta \quad [3.74]$$

Coefficiente $G_{3\theta}$

$$G_{3\theta} = L_k A \int_0^{2\pi} \text{Rs}[I6] d\theta \quad [3.75]$$

Las integrales desde I1, hasta I7, contienen productos de potencias de $\rho(t) = pt + q$ y de $(-z)$. Si se desarrollan se obtienen las expresiones de estas integrales en función de otras más sencillas; de las que obtendremos sus primitivas. Realizando el desarrollo tendremos:

$$I1 = p[I12] + q[I11] \quad (a)$$

$$I2 = p^3 [IA] + 3p^2 q [IB] + 3pq^2 [IC] + q^3 [ID] \quad (b)$$

$$I3 = p^2 [IB] + 2pq [IC] + q^2 [ID] \quad (c)$$

$$I4 = p [IC] + q [ID] \quad (d)$$

$$I5 = p^2 \Delta z_k [IA] + [2pq \Delta z_k + p^2 (z_{\bar{t}} - Z)] [IB] + [q^2 \Delta z_k + 2pq (z_{\bar{t}} - Z)] [IC] + q^2 (z_{\bar{t}} - Z) [ID] \quad (e)$$

$$I6 = p \Delta z_k [IB] + [p (z_{\bar{t}} - Z) + q \Delta z_k] [IC] + q (z_{\bar{t}} - Z) [ID] \quad (f)$$

$$I7 = p \Delta z_k^2 [IA] + [2p \Delta z_k (z_{\bar{t}} - Z) + q \Delta z_k^2] [IB] + [p (z_{\bar{t}} - Z)^2 + 2q \Delta z_k (z_{\bar{t}} - Z)] [IC] + q (z_{\bar{t}} - Z)^2 [ID] \quad (g) \quad [3.76]$$

Resumiendo las integrales básicas, I1 a I7, son:

$$I1 = \int_0^1 \frac{(pt+q)}{\mathcal{R}^{1/2}} dt \quad a)$$

$$I5 = \int_0^1 \frac{(pt+q)^2 \left[\Delta z_k t + (z_{\bar{t}} - Z) \right]}{\mathcal{R}^{3/2}} dt \quad d)$$

$$I2 = \int_0^1 \frac{(pt+q)^3}{\mathcal{R}^{3/2}} dt \quad b)$$

$$I6 = \int_0^1 \frac{(pt+q) \left[\Delta z_k t + (z_{\bar{t}} - Z) \right]}{\mathcal{R}^{3/2}} dt \quad e)$$

$$I3 = \int_0^1 \frac{(pt+q)^2}{\mathfrak{R}^{3/2}} dt \quad c) \quad I7 = \int_0^1 \frac{(pt+q) \left[\Delta z_k t + (z_i - z) \right]^2}{\mathfrak{R}^{3/2}} dt \quad f)$$

$$I4 = \int_0^1 \frac{(pt+q)}{\mathfrak{R}^{3/2}} dt \quad d) \quad [3.77]$$

Llamando:

$$\mathfrak{R}(t) = L_k^2 t^2 + B1t + C1$$

$$\Delta = 4C1L_k^2 - B1^2 \quad [3.78]$$

$$RC1 = \mathfrak{R}(1)^{1/2} = (L_k^2 + B1 + C1)^{1/2}$$

$$RC2 = \mathfrak{R}(0)^{1/2} = C1^{1/2}$$

se podra poner las integrales elementales I11, I12, IA, ..., ID en función de estos valores al sustituir los limites de integración en sus primitivas; cuyas expresiones son:

$$I11 = \int_0^1 \frac{dt}{\mathfrak{R}^{1/2}} = \left[\frac{1}{L_k} \ln [2L_k \mathfrak{R}^{1/2} + 2L_k^2 + B1] \right]_0^1$$

$$I11 = \frac{1}{L_k} \left[\ln [2L_k RC1 + 2L_k^2 + B1] - \ln [2L_k RC2 + B1] \right] \quad [3.79]$$

$$I12 = \int_0^1 \frac{t dt}{\mathfrak{R}^{1/2}} = \left[\frac{\mathfrak{R}^{1/2}}{L_k^2} \right]_0^1 - \frac{B1}{L_k^2} [I11] = \frac{1}{L_k^2} [RC1 - RC2] - \frac{B1}{2L_k^2} [I11] \quad [3.80]$$

$$IA = \int_0^1 \frac{t^3 dt}{\mathfrak{R}^{3/2}} = \frac{1}{L_k^4} \left\{ \left[\frac{L_k \Delta + B1 (10C1L_k^2 - 3B1^2) + C1 (8C1L_k^2 - 3B1^2)}{\Delta RC1} \right] - \left[\frac{C1 (8C1L_k^2 - 3B1^2)}{\Delta RC2} \right] - \frac{3B1}{2} [I11] \right\} \quad [3.81]$$

$$IB = \int_0^1 \frac{t^2 dt}{\mathfrak{R}^{3/2}} = \frac{1}{L_k^2} \left\{ \left[\frac{2C1B1}{\Delta RC2} - \frac{(\Delta - B1^2) - 2C1B1}{\Delta RC1} \right] + I11 \right\} \quad [3.82]$$

$$IC = \int_0^1 \frac{t}{\mathcal{R}^{3/2}} dt = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{4C1}{RC2} - \left[\frac{4C1+2B1}{RC1} \right] \right] \quad [3.83]$$

$$ID = \int_0^1 \frac{dt}{\mathcal{R}^{3/2}} = \frac{2}{\Delta} \left[\frac{(2L_k^2+B1)}{RC1} - \frac{B1}{RC2} \right] \quad [3.84]$$

Estas integrales elementales una vez calculadas, se introducen en las integrales básicas y estas a su vez en las expresiones de los términos de los coeficientes de influencia de las tensiones; para una vez obtenidos realizar la integración numérica de los mismos mediante el cambio de variable reflejado en [3.7], que como ya se indicó concentra los puntos de Gauss en las inmediaciones de la singularidad aumentando de esta manera la precisión de la integración.

b) COEFICIENTES DE INFLUENCIA DE LOS MOVIMIENTOS

El proceso de integración de los coeficientes de influencia de los movimientos, teniendo como función subintegral al tensor de tensiones de la solución fundamental, es totalmente análogo al seguido en el apartado anterior, incrementándose el grado del radical del denominador debido a la introducción del valor de la derivada de la distancia con respecto a la normal en función de la variable t. Esto nos conduce a tener que utilizar formulas de recurrencia para evaluar las integrales elementales a que conduce el procedimiento utilizado.

Los diferentes términos del coeficiente de influencia se obtienen de [3.55] y llamando $D=-2\mu A$, a la constante que engloba las características del medio considerado, podremos encontrar las expresiones de estos términos.

Coefficiente $H_{1\rho}$

Este coeficiente se obtiene partiendo de la expresión [2.77], hallada en el capítulo anterior, y que queda:

$$H_{1\rho} = DL_k \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{\rho}{r^2} \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} \left[(1-2\nu)c + 3r_{,1} r_{, \rho} \right] + (1-2\nu)\eta_{\rho} r_{, \tau} s \right] dt d\theta \quad [3.85]$$

sustituyendo en [3.85], las expresiones de r , sus derivadas direccionales, la derivada con respecto a la normal en función de t y desarrollando la expresión; se obtiene una expresión análoga a las obtenidas en la integración de los términos de G_{ji} , desarrollados en el apartado anterior, que a continuación se va a explicitar:

$$\begin{aligned} H_{1\rho} = DL_k \left\{ (1-2\nu) \left[\eta_{\rho} \left[\int_0^{2\pi} c \int_0^1 \frac{\rho^2 dt}{\mathcal{R}^{3/2}} d\theta - \int_0^{2\pi} Rc^2 \int_0^1 \frac{\rho dt}{\mathcal{R}^{3/2}} d\theta \right] + \eta_z \int_0^{2\pi} c \int_0^1 \frac{\rho(-\bar{z})}{\mathcal{R}^{3/2}} dt d\theta \right] + \right. \\ \left. + 3 \left[\eta_{\rho} \left[\int_0^{2\pi} c \int_0^1 \frac{\rho^4 dt}{\mathcal{R}^{5/2}} d\theta - \int_0^{2\pi} R(1+2c^2) \int_0^1 \frac{\rho^3 dt}{\mathcal{R}^{5/2}} d\theta + \int_0^{2\pi} R^2(2c+c^3) \int_0^1 \frac{\rho^2 dt}{\mathcal{R}^{5/2}} d\theta - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \int_0^{2\pi} R^3 c^2 \int_0^1 \frac{\rho dt}{\mathcal{R}^{5/2}} d\theta \right] + \eta_z \left[\int_0^{2\pi} c \int_0^1 \frac{\rho^3(-\bar{z})}{\mathcal{R}^{5/2}} dt d\theta - \int_0^{2\pi} R(1+c^2) \int_0^1 \frac{\rho^2(-\bar{z})}{\mathcal{R}^{5/2}} dt d\theta + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^{2\pi} R^2 c \int_0^1 \frac{\rho(-\bar{z})}{\mathcal{R}^{5/2}} dt d\theta \right] + (1-2\nu)\eta_{\rho} \int_0^{2\pi} Rs^2 \int_0^1 \frac{\rho dt}{\mathcal{R}^{3/2}} d\theta \right\} \quad [3.86] \end{aligned}$$

Introduciendo la notación I_{nn} , al igual que lo realizado anteriormente se tiene:

$$\begin{aligned} H_{1\rho} = DL_k \int_0^{2\pi} \left\{ (1-2\nu) \left[\eta_{\rho} \left[c[I13] - Rc^2[I14] \right] + \eta_z c[I16] \right] + 3 \left[\eta_{\rho} \left[c[I113] - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - R(1+2c^2)[I114] + R^2(2c+c^3)[I115] - R^3 c^2[I116] \right] + \eta_z \left[c[I18] - R(1+c^2)[I19] + \right. \right. \\ \left. \left. + R^2 c[I110] \right] \right] + (1-2\nu)\eta_{\rho} Rs^2[I14] \left. \right\} d\theta \quad [3.87] \end{aligned}$$

Coeficiente $H_{2\theta}$

Realizando un desarrollo paralelo de este término partiendo de su expresión en [2.77]; se tiene:

$$H_{2\theta} = DL_k \int_0^{2\pi} \left\{ (1-2\nu) \left[\eta_\rho \left[c[I3] - Rc^2[I4] \right] + \eta_z c[I6] \right] + 3 \left[\eta_\rho \left[Rs^2[I14] - R^2 s^2 c[I15] \right] + \eta_z Rs^2[I9] \right] + (1-2\nu) \eta_\rho Rs^2[I4] \right\} d\theta \quad [3.88]$$

teniendo por tanto una expresión similar a la del término $H_{1\rho}$, anteriormente hallado.

Coefficiente H_{3z}

Partiendo de la expresión dada por [2.77] y realizando el mismo proceso descrito tendremos su formulación en función de las integrales básicas como:

$$H_{3z} = DL_k \int_0^{2\pi} \left\{ (1-2\nu) \left[\eta_\rho \left[[I3] + Rc[I4] \right] + \eta_z [I6] \right] + 3 \left[\eta_\rho \left[[I111] - R c[I112] \right] + \eta_z [I17] \right] \right\} d\theta \quad [3.89]$$

Coefficiente $H_{1\theta}$

Desarrollando la expresión de este término en función de las Inn quedará:

$$H_{1\theta} = DL_k \int_0^{2\pi} \left\{ -(1-2\nu) \left[\eta_\rho \left[s[I3] - Rcs[I4] \right] + \eta_z s[I6] \right] + 3 \left[\eta_\rho \left[Rsc[I14] - R^2 s(1+c^2)[I15] + R^3 sc[I16] \right] + \eta_z \left[Rcs[I9] - R^2 s[I10] \right] \right] + (1-2\nu) \eta_\rho Rsc[I4] \right\} d\theta \quad [3.90]$$

Coefficiente H_{1z}

Este término desarrollado queda:

$$H_{1z} = DL_k \int_0^{2\pi} \left\{ 3 \left[\eta_\rho \left[c[I8] - R(1+c^2)[I9] + Rc^2[I10] \right] + \eta_z \left[c[I111] - R[I112] \right] \right] + (1-2\nu) \left[\eta_\rho c[I6] - \eta_z (c[I3] - R[I4]) \right] \right\} d\theta \quad [3.91]$$

Coeficiente $H_{2\rho}$

Poniendolo en función de las integrales básicas se tiene:

$$H_{2\rho} = DL_k \int_0^{2\pi} \left\{ (1-2\nu) \left[\eta_\rho \left[s[I3] - Rcs[I4] \right] + \eta_z s[I6] \right] + 3 \left[\eta_\rho \left[s[I13] - 2Rsc[I14] + R^2 c^2 s[I15] \right] + \eta_z \left[s[I8] - Rs[I9] \right] \right] - (1-2\nu) \eta_\rho Rsc[I4] \right\} d\theta \quad [3.92]$$

Coeficiente H_{2z}

Siguiendo el mismo proceso que en los anteriores tendremos:

$$H_{2z} = DL_k \int_0^{2\pi} \left\{ 3 \left[\eta_\rho \left[s[I8] - Rcs[I9] \right] + \eta_z s[I111] \right] + (1-2\nu) \left[\eta_\rho s[I6] - \eta_z s[I3] \right] \right\} d\theta \quad [3.93]$$

Coeficiente $H_{3\rho}$

$$H_{3\rho} = DL_k \int_0^{2\pi} \left\{ 3 \left[\eta_\rho \left[[I8] - 2Rc[I9] + R^2 c^2 [I10] \right] + \eta_z \left[[I111] - Rc[I112] \right] \right] + (1-2\nu) \left[\eta_z ([I3] - Rc[I4]) - \eta_\rho [I6] \right] \right\} d\theta \quad [3.94]$$

Coeficiente $H_{3\theta}$

Por último este coeficiente se obtiene realizando los mismos desarrollos que en los anteriores y por tanto resulta la expresión siguiente:

$$H_{3\theta} = DL_k \int_0^{2\pi} \left\{ 3 \left[\eta_\rho \left[Rs[I9] - R^2 sc[I10] \right] + \eta_z Rs[I112] \right] + (1-2\nu) \eta_z Rs[I4] \right\} d\theta \quad [3.95]$$

Desarrollando las integrales básicas, desde la I8 hasta la I17, y expresandolas en función de las integrales elementales con respecto a la variable t, tendremos las expresiones siguientes:

$$I8 = \int_0^1 \frac{(pt+q)^3 (-\bar{z})}{\Re^{5/2}} dt = p^3 \Delta z_k [IE] + [3p^2 q \Delta z_k + p^3 (z_i - Z)] [IF] + [3pq^2 \Delta z_k + 3p^2 q (z_i - Z)] [IG] + [q^3 \Delta z_k + 3pq^2 (z_i - Z)] [IH] + q^3 (z_i - Z) [II] \quad [3.96]$$

$$I9 = \int_0^1 \frac{(pt+q)^2 (-\bar{z})}{\Re^{5/2}} dt = p^2 \Delta z_k [IF] + [2pq \Delta z_k + p^2 (z_i - Z)] [IG] + [q^2 \Delta z_k + 2pq (z_i - Z)] [IH] + q^2 (z_i - Z) [II] \quad [3.97]$$

$$I10 = \int_0^1 \frac{(pt+q) (-\bar{z})}{\Re^{5/2}} dt = p \Delta z_k [IG] + [q \Delta z_k + p (z_i - Z)] [IH] + q (z_i - Z) [II] \quad [3.98]$$

$$I11 = \int_0^1 \frac{(pt+q)^2 (-\bar{z})^2}{\Re^{5/2}} dt = p^2 \Delta z_k^2 [IE] + 2[pq \Delta z_k^2 + p^2 \Delta z_k (z_i - Z)] [IF] + [p^2 (z_i - Z)^2 + 4pq \Delta z_k (z_i - Z) + q^2 \Delta z_k^2] [IG] + [2q (z_i - Z) (p (z_i - Z) + q \Delta z_k)] [IH] + q^2 (z_i - Z)^2 [II] \quad [3.99]$$

$$I112 = \int_0^1 \frac{(pt+q) (-\bar{z})^2}{\Re^{5/2}} dt = p \Delta z_k^2 [IF] + [2p \Delta z_k (z_i - Z) + q \Delta z_k^2] [IG] + [p (z_i - Z)^2 + 2q \Delta z_k (z_i - Z)] [IH] + q (z_i - Z)^2 [II] \quad [3.100]$$

$$I13 = \int_0^1 \frac{(pt+q)^4 dt}{\mathfrak{R}^{5/2}} = p^4 [IE] + 4p^3 q [IF] + 6p^2 q^2 [IG] + 4pq^3 [IH] + q^4 [II] \quad [3.101]$$

$$I14 = \int_0^1 \frac{(pt+q)^3 dt}{\mathfrak{R}^{5/2}} = p^3 [IF] + 3p^2 q [IG] + 3pq^2 [IH] + q^3 [II] \quad [3.102]$$

$$I15 = \int_0^1 \frac{(pt+q)^2 dt}{\mathfrak{R}^{5/2}} = p^2 [IG] + 2pq [IH] + q^2 [II] \quad [3.103]$$

$$I16 = \int_0^1 \frac{(pt+q) dt}{\mathfrak{R}^{5/2}} = p [IH] + q [II] \quad [3.104]$$

$$I17 = \int_0^1 \frac{(pt+q)(-\bar{z})^3 dt}{\mathfrak{R}^{5/2}} = p\Delta z_k^3 [IE] + [3p\Delta z_k^2 + q\Delta z_k^3] [IF] + 3[p\Delta z_k (z_{\bar{t}}Z)^2 + q\Delta z^2 (z_{\bar{t}}Z)] [IG] + [p(z_{\bar{t}}Z)^3 + 3q\Delta z (z_{\bar{t}}Z)^2] [IH] + q(z_{\bar{t}}Z)^3 [II] \quad [3.105]$$

Las integrales elementales IE,IF,IG,IH,II son de tipo similar a las obtenidas previamente, en el apartado anterior; es decir todas responden al tipo:

$$I\alpha = \int_0^1 \frac{t^\beta dt}{\mathfrak{R}^{\gamma/2}} ; \text{ donde } \begin{cases} \beta=0,1,2,3,4 \\ \gamma=5 \end{cases} \quad [3.106]$$

Las funciones primitivas de este tipo de integrales irracionales, se encuentran en Graetzstein, a través de formulas de recurrencia; cuyas expresiones son:

$$\int \frac{t^m dt}{\mathfrak{R}^{(2n+1)/2}} = \frac{t^{m-1}}{(m-2n)C\mathfrak{R}^{(2n-1)/2}} - \frac{(2m-2n-1)B}{2(m-2n)C} \int \frac{t^{m-1} dt}{\mathfrak{R}^{(2n+1)/2}} - \frac{(m-1)A}{(m-2n)C} \int \frac{t^{m-2} dt}{\mathfrak{R}^{(2n+1)/2}} \quad [3.107]$$

Esta expresión [3.107]; es valida para todos los valores de m ,no multiplos pares de n . Para valores de m multiplos de 2n se ha de utilizar la expresión siguiente:

$$\int \frac{t^{2n} dt}{\mathfrak{R}^{(2n+1)/2}} = \frac{-t^{2n-1}}{(2n-1)C \mathfrak{R}^{(2n-1)/2}} - \frac{B}{2C} \int \frac{t^{2n-1} dt}{\mathfrak{R}^{(2n+1)/2}} + \frac{1}{C} \int \frac{t^{2n-2} dt}{\mathfrak{R}^{(2n-1)/2}} \quad [3.108]$$

Sustituyendo en [108.3] el valor $n=2$, é integrando entre los límites $t=0$ y $t=1$ obtenemos el valor de:

$$IE = \int_0^1 \frac{t^4 dt}{\mathfrak{R}^{5/2}} = \left[\frac{-t^3}{3C \mathfrak{R}^{3/2}} \right]_0^1 - \frac{B}{2C} \int_0^1 \frac{t^3 dt}{\mathfrak{R}^{5/2}} + \frac{1}{C} \int_0^1 \frac{t^2 dt}{\mathfrak{R}^{3/2}} \quad [3.109]$$

operando é identificando integrales queda:

$$IE = \left[\frac{-1}{3L_k^2 RC1^3} \right] - \frac{B1}{2L_k^2} [IF] + \frac{1}{L_k^2} [IB] \quad [3.110]$$

Para aquellos valores de m distintos de $2m$ utilizaremos la expresión [3.107]; obteniendo las identidades siguientes:

∀ $n=2$ y $m=3$

$$IF = \int_0^1 \frac{t^3 dt}{\mathfrak{R}^{5/2}} = \left[\frac{-1}{L_k^2 RC1^3} \right] + \frac{B1}{2L_k^2} [IG] + \frac{2C1}{L_k^2} [IH] \quad [3.111]$$

∀ $n=2$ y $m=2$

$$IG = \int_0^1 \frac{t^2 dt}{\mathfrak{R}^{5/2}} = \left[\frac{-1}{2L_k^2 RC1^3} \right] - \frac{B1}{4L_k^2} [IH] + \frac{C1}{2L_k^2} [II] \quad [3.112]$$

∀ $n=2$ y $m=1$

$$IH = \int_0^1 \frac{t dt}{\mathfrak{R}^{5/2}} = \left[\frac{-1}{3L_k^2 RC1^3} + \frac{1}{3L_k^2 RC2^3} \right] - \frac{B1}{2L_k^2} [II] \quad [3.113]$$

∀ $n=2$ y $m=0$

$$II = \int_0^1 \frac{dt}{\mathfrak{R}^{5/2}} = \left[\frac{2}{3\Delta} \left(\frac{2L_k^2 + B1}{RC1^3} - \frac{B1}{RC2^3} \right) \right] + \frac{8L_k^2}{3\Delta} [ID] \quad [3.114]$$

En estas expresiones los valores de $a, b, c;$
 $A_1, B_1, C_1, RC_1, RC_2$ y $\Delta;$ estan dadas por [3.78]

El proceso de integración general de los tensores es como sigue:

- a) Se realiza la integración numérica de IA, hasta II
 - b) Se introducen los valores calculados en I1, ..., I17
- Estos valores así calculados se introducen en las expresiones de los tensores en función de las integrales básicas.

3.4 INTEGRACION SOLUCION FUNDAMENTAL DINAMICA

La integración de la solución fundamental dinámica, en coordenadas cilindricas, cuando el punto de colocación pertenece al mismo elemento de contorno que los de integración; no es factible realizarla analiticamente, tal y como se ha obtenido en el caso estático, debido a que no es posible hallar una función primitiva al integrando a la cual aplicar los limites de integración. Las funciones a que conduce la integración explícita se expresa en función de integrales sobre una línea infinita de funciones de Hankel. Este hecho lleva a que la integración en este caso, dinámico estacionario, se realice numéricamente sobre la parte no singular de la solución fundamental y explícitamente en la parte estática; que es la que contiene la singularidad Dominguez y Alarcón. Así pues, la técnica a utilizar es la siguiente:

$$I = \int_{\Gamma_e} \begin{bmatrix} U_{ji}^c \\ T_{ji}^c \end{bmatrix} d\Gamma_e = \int_{\Gamma_e} \begin{bmatrix} U_{ji}^c - U_{ji}^c \\ T_{ji}^c - T_{ji}^c \end{bmatrix} d\Gamma_e + \int_{\Gamma_e} \begin{bmatrix} U_{ji}^c \\ T_{ji}^c \end{bmatrix} d\Gamma_e \quad [3.115]$$

La primera de las integrales en las que se ha subdivido el integrando es la parte no singular que se evalua numericamente con el procedimiento indicado en el apartado 3.3-1.

La segunda integral es precisamente la ya realizada para el caso estático, en el apartado 3.3-2.

Llamndo:

$$\left. \begin{aligned} \hat{T}_{ji}^c &= T_{ji}^c - T_{ji}^c \\ \hat{U}_{ji}^c &= U_{ji}^c - U_{ji}^c \end{aligned} \right\} [3.116]$$

a los tensores diferencia, solución dinámica menos la solución estática, en coordenadas cilíndricas.

Introduciendo las expresiones dadas por; [2.80],[2.79] para el tensor de movimientos y [2.77],[2.81] para el de tensiones, respectivamente. Restando miembro a miembro cada una de estas expresiones se tiene:

Tensor de Movimientos

$$\left. \begin{aligned} \hat{U}_{1\rho}^c &= \frac{1}{4\pi\mu} [Pc - Plr, \rho, r, \rho] \\ \hat{U}_{1\theta}^c &= \frac{1}{4\pi\mu} [-Ps - Plr, \rho, r, \tau] \\ \hat{U}_{1z}^c &= \frac{1}{4\pi\mu} [-Plr, \rho, r, z] \end{aligned} \right\} (a)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{U}_{2\rho}^c &= \frac{1}{4\pi\mu} [Pc - Plr, \rho, r, \rho] \\ \hat{U}_{2\theta}^c &= \frac{1}{4\pi\mu} [-Ps - Plr, \rho, r, \tau] \\ \hat{U}_{2z}^c &= \frac{1}{4\pi\mu} [-Plr, \rho, r, z] \end{aligned} \right\} (b) \quad [3.117]$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{U}_{3\rho}^c &= \frac{1}{4\pi\mu} [-Plr, \rho, r, \rho] \\ \hat{U}_{3\theta}^c &= \frac{1}{4\pi\mu} [-Plr, \rho, r, \tau] \\ \hat{U}_{3z}^c &= \frac{1}{4\pi\mu} [P - Plr, \rho, r, z] \end{aligned} \right\} (c)$$

donde:

$$P=\psi - \frac{(3-4\nu)}{4(1-\nu)r} \quad \text{Y} \quad P1=\chi + \frac{1}{4(1-\nu)r} \quad [3.118]$$

Tensor de Tensiones

El tensor diferencia de tensiones se puede expresar más facilmente llamando:

$$T1 = \left(\frac{d\psi}{dr} - \frac{\chi}{r} \right) \quad ; \quad T3 = \left(T1 + \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \frac{1}{r^2} \right)$$

$$T2 = \left(\frac{d\psi}{dr} - \frac{d\chi}{dr} - \frac{2\chi}{r} \right) \quad ; \quad T4 = \left(\frac{4\chi}{r} - \frac{2d\chi}{rdr} - \frac{3}{2(1-\nu)} \frac{1}{r^2} \right) \quad [3.119]$$

$$cc1 = \left[\left(\frac{c_P}{c_S} \right)^2 - 2 \right] \quad ; \quad T5 = \left(cc1T2 - \frac{2\chi}{r} - \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \frac{1}{r^2} \right)$$

$$T6 = \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \frac{1}{r^2} \quad ; \quad T7 = \left(cc1T2 - \frac{2\chi}{r} \right)$$

De acuerdo con las expresiones [3.119] se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \hat{T}_{1\rho}^c &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial r}{\partial \eta} [T3c + T4r, 1r, \rho] + \eta_\rho [T1cr, \rho + T7r, 1 + T6sr, r] \right\} \\ \hat{T}_{1\theta}^c &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial r}{\partial \eta} [-T3s + T4r, 1r, r] + \eta_\rho [T3cr, r] \right\} \\ \hat{T}_{1z}^c &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial r}{\partial \eta} [T4r, 1r, z] + \eta_\rho T3cr, z + \eta_z T5r, 1 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{T}_{2\rho}^c &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial r}{\partial \eta} [T3s + T4r, 2r, \rho] + \eta_\rho [T1sr, \rho - T6cr, r + T6r, 2] \right\} \\ \hat{T}_{2\theta}^c &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial r}{\partial \eta} [T3c + T4r, 2r, r] + \eta_\rho [T3sr, r] \right\} \\ \hat{T}_{2z}^c &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial r}{\partial \eta} [T4r, 2r, z] + \eta_\rho T3sr, z + \eta_z T5r, 2 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

la tercera columna del tensor será

$$\left. \begin{aligned}
 \hat{T}_{3\rho}^c &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial r}{\partial \eta} [T4r, \rho] + \eta_\rho [T7-T6c]r, z + \eta_z T3r, \rho \right\} \\
 \hat{T}_{3\theta}^c &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial r}{\partial \eta} [T4r, \theta] + \eta_z T3r, \theta \right\} \\
 \hat{T}_{3z}^c &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial r}{\partial \eta} [T3+T4r, z] + \eta_z (T1+T7)r, z \right\}
 \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

[3.120]

Tal y como se ha dicho anteriormente, éstos nucleos diferencia, se integran numericamente y posteriormente se les suma la solución estática ya obtenida.

3.5.- CONDICIONES DE CONTORNO AXILSIMETRICAS Y NO AXILSIMETRICAS

En los apartados anteriores, se han obtenido las expresiones de todos los términos de los coeficientes de influencia G_{ji} , H_{ji} ; para las soluciones fundamentales estática y dinámica. Dependiendo de las condiciones de contorno, algunos términos son nulos debido a la no paridad de las funciones subintegrales con respecto a la coordenada circunferencial θ .

Cuando las condiciones de contorno son axilsimétricas implícitamente colocamos el punto P en el meridiano $\theta=0$ y por tanto se verifica que todos los términos que vayan multiplicados por funciones $\text{sen}\theta$, son nulos.

El aspecto de los tensores será el siguiente:

$$\begin{bmatrix} U_{1\rho} & 0 & U_{3\rho} \\ 0 & U_{2\theta} & 0 \\ U_{1z} & 0 & U_{3z} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} T_{1\rho} & 0 & T_{3\rho} \\ 0 & T_{2\theta} & 0 \\ T_{1z} & 0 & T_{3z} \end{bmatrix} \quad [3.121]$$

Esté hecho nos indica que cuando las condiciones de contorno son axilsimétricas; el problema de torsión (u_θ, t_θ),

esta desacoplado del de condiciones en ρ y z .

Cuando las condiciones de contorno no son axilsimétricas, aunque si la geometría del problema, se puede descomponer estas mediante una serie de Fourier a lo largo de la coordenada circunferencial, en la forma propuesta por Wilson (1985). Cada término de la serie da lugar a valores de las incógnitas en el mismo modo de los prescritos debido a las propiedades de ortogonalidad de éste desarrollo en serie.

Cuando la variación de las condiciones de contorno no es muy rapida segun θ , unos pocos modos son suficientes para obtener una precisión correcta. El desarrollo en serie es de la forma:

$$\left. \begin{aligned} u_i &= \sum_1^{\infty} (u_{ni}^s \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \text{sen } n\theta \end{Bmatrix} + u_{ni}^a \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \text{sen } n\theta \end{Bmatrix}) \\ t_i &= \sum_1^{\infty} (t_{ni}^s \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \text{sen } n\theta \end{Bmatrix} + t_{ni}^a \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \text{sen } n\theta \end{Bmatrix}) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} [3.122] \\ \forall i=\rho, \theta, z \end{array}$$

En particular tendrá:

para las condiciones de contorno en movimientos

$$\begin{aligned} u_\rho &= \sum_1^{\infty} (u_{n\rho}^s \cos n\theta + u_{n\rho}^a \text{sen } n\theta) = \sum_1^{\infty} \bar{u}_\rho \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \text{sen } n\theta \end{Bmatrix} \\ u_\theta &= \sum_1^{\infty} (-u_{n\theta}^s \text{sen } n\theta + u_{n\theta}^a \cos n\theta) = \sum_1^{\infty} \bar{u}_\theta \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \text{sen } n\theta \end{Bmatrix} \\ u_z &= \sum_1^{\infty} (u_{nz}^s \cos n\theta + u_{nz}^a \text{sen } n\theta) = \sum_1^{\infty} \bar{u}_z \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \text{sen } n\theta \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad [3.123a]$$

Para las condiciones en tensiones analogamente se tiene:

$$\begin{aligned}
 t_\rho &= \sum_1^{\infty} (t_{n\rho}^s \cos n\theta + t_{n\rho}^a \sin n\theta) = \sum_1^{\infty} \bar{t}_{ni} \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{Bmatrix} \\
 t_\theta &= \sum_1^{\infty} (-t_{n\theta}^s \sin n\theta + t_{n\theta}^a \cos n\theta) = \sum_1^{\infty} \bar{t}_\theta \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{Bmatrix} \quad [3.123b] \\
 t_z &= \sum_1^{\infty} (t_{nz}^s \cos n\theta + t_{nz}^a \sin n\theta) = \sum_1^{\infty} \bar{t}_z \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

Introduciendo esta notación en la identidad integral queda de la forma siguiente:

$$C_{ji} u_i^c \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{Bmatrix} + \sum_{e=1}^M \left[\int_{\Gamma_e} T_{ji}^c \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{Bmatrix} d\Gamma_e \right] u_i^c = \sum_{e=1}^M \left[\int_{\Gamma_e} U_{ji}^c \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{Bmatrix} d\Gamma_e \right] t_i^c \quad [3.124]$$

De hecho lo único que nos indica [3.124] es que para resolver el problema hemos de solucionar tantos problemas como modos intervengan; obteniendo los coeficientes de influencia al integrar las expresiones ya determinadas ponderadas por funciones $\text{senn}\theta = \text{sn}$ y $\text{cosn}\theta = \text{cn}$. Por tanto los tensores quedan:

<u>Movimientos</u>	<u>Tensiones</u>
$ \begin{bmatrix} U_{1\rho} \text{cn} & U_{2\rho} \text{sn} & U_{3\rho} \text{cn} \\ \hline -U_{1\theta} \text{sn} & U_{2\theta} \text{cn} & -U_{3\theta} \text{sn} \\ \hline U_{1z} \text{cn} & U_{2z} \text{sn} & U_{3z} \text{cn} \end{bmatrix} $ <p>(a)</p>	$ \begin{bmatrix} T_{1\rho} \text{cn} & T_{2\rho} \text{sn} & T_{3\rho} \text{cn} \\ \hline -T_{1\theta} \text{sn} & T_{2\theta} \text{cn} & -T_{3\theta} \text{sn} \\ \hline T_{1z} \text{cn} & T_{2z} \text{sn} & T_{3z} \text{cn} \end{bmatrix} $ <p>(b)</p>

[3.125]

Los terminos del desarrollo en serie de Fourier que multiplican a $\text{senn}\theta$, no pueden obtenerse colocando el punto P en $\theta = 0$ ya que en este punto precisamente la función seno se anula y la ecuación [3.125], se convierte en un conjunto

de términos nulos. Esto se evita con un cambio de posición del punto de colocación para aquellas amplitudes que correspondan a los modos de tipo seno. El cambio ha de ser del tipo:

$$\theta' = \left(\theta - \frac{\pi}{2n} \right) \quad [3.126]$$

3.6.- IMPLEMENTACION DE SUBREGIONES

En aquellos problemas en los que el medio a modelar no es homogéneo, es decir esta compuesto por materiales de diferentes características mecánicas Para realizar un estudio correcto del mismo, ha de encontrarse un método que permita tener en cuenta esta particularidad.

El Método de los Elementos de Contorno permite facilmente tener en cuenta la falta de homogeneidad mencionada sin mas que plantear las ecuaciones en el contorno de cada una de las subregiones, dentro de las que se dan las condiciones de homogeneidad requerida por el planteamiento inicialmente hecho del M. E. C. La frontera, *interfase*, entre cada subregión y la adyacente han de cumplir las condiciones de equilibrio de tensiones y compatibilidad de movimientos. Por tanto ha de cumplirse en cada interfase que:

$$u_{kl} = u_{lk} \quad \text{Y} \quad t_{kl} = -t_{lk} \quad [3.127]$$

donde k y l son dos subregiones adyacentes

Para un caso general como el de la figura (3.8) formado por n regiones de características mecánicas diferentes; podemos plantear n sistemas de ecuaciones del tipo:

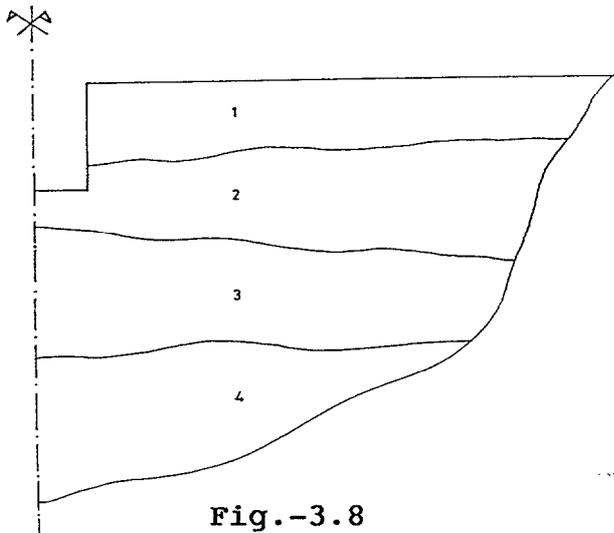


Fig.-3.8

$$H u = G t \quad [3.128]$$

Una ordenación adecuada de las incógnitas permite la optimización de la matriz de coeficientes de influencia que adoptará una cierta estructura en *banda*.

Para el caso de la figura se pueden plantear cuatro sistemas del tipo [3.128]; es decir:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & | & H_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & | & G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_{11} \\ t_{12} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} H_{21} & | & H_{22} & | & H_{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{21} \\ u_{22} \\ u_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{21} & | & G_{22} & | & G_{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_{21} \\ t_{22} \\ t_{23} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} H_{32} & | & H_{33} & | & H_{34} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{32} \\ u_{33} \\ u_{34} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{31} & | & G_{33} & | & G_{34} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_{32} \\ t_{33} \\ t_{34} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$H_{43} \{u_{43}\} = G_{43} \{t_{43}\} \quad (4)$$

[3.129]

teniendo en cuenta [3.127], se puede escribir el sistema global como:

$$\begin{matrix} & n_{11} & n_{12} & n_{12} & n_{22} & n_{23} & n_{23} & n_{33} & n_{34} & n_{34} \\ n_{11}+n_{12} & \begin{bmatrix} H_{11} & -G_{12} & H_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & & & & & & & & \\ n_{21}+n_{22}+n_{23} & \begin{bmatrix} 0 & G_{21} & H_{21} & H_{22} & -G_{23} & H_{23} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & & & & & & & & \\ n_{32}+n_{33}+n_{34} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & G_{32} & H_{32} & H_{33} & -G_{34} & H_{34} \end{bmatrix} & & & & & & & & \\ n_{43} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{43} & H_{43} \end{bmatrix} & & & & & & & & \end{matrix} \begin{Bmatrix} u_{11} \\ t_{11} \\ u_{12} \\ t_{12} \\ u_{22} \\ t_{23} \\ u_{23} \\ t_{33} \\ u_{34} \\ t_{34} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

[3.130]

Donde el número de ecuaciones, es el siguiente:
 $n_{11} + 2n_{12} + n_{22} + 2n_{23} + n_{33} + 2n_{34}$; donde los n_{kl} , son el número de ecuaciones de cada interfase.

Tal y como se observa al aumentar el número de subregiones se incrementa el número de elementos y por tanto el número de ecuaciones del sistema conjunto. Esto implica que la memoria del computador que se necesita es grande y como ésta, en general, es limitada; se recurre a resolver el sistema [3.130] en memoria auxiliar.

Crotty (1982), implementó un algoritmo para la resolución de estos tipos de sistemas, a través de un método que subdivide la matriz global en bloques fila y columna, que pueden ser a su vez divididos en subbloques columna, a fin de adaptarse a la memoria principal disponible; mediante una técnica de pivotamiento de Gauss, dentro de cada subbloque.

Este algoritmo ha sido utilizado con éxito para la resolución de problemas de Elementos de Contorno, bi y tridimensionales, por Abascal, R y por Cano en E.C. con geometría de revolución y superficie normal al eje Z; sin problemas de estabilidad en la solución obtenida.

CAPITULO IV

CALCULO DE IMPEDANCIAS DINAMICAS DE
CIMENTACIONES RIGIDAS POR EL M.E.C.

4.1.- INTRODUCCION

En el Capitulo se desarrolla el estudio de la respuesta dinámica de cimentaciones rígidas con simetría de revolución. Para ello, en el apartado segundo se determinan las sollicitaciones a que van a estar sometidas las cimentaciones.

En el apartado tercero se estudia la incorporación de la energía disipada por el medio, a través del amortiguamiento del material, distinta de la perdida por radiación; mediante la modelización del terreno como un sólido viscoelástico de Kelvin-Voigt, tambien denominado *medio histeretico*.

En el cuarto y último, se estudia la obtención de las impedancias dinámicas de cimentaciones, correspondientes a las sollicitaciones ya obtenidas en el segundo apartado de éste capitulo, por medio del Método de los Elementos de Contorno.

4.2.- CIMENTACIONES RIGIDAS. SOLICITACIONES

La hipótesis de rigidez de la cimentación implica que el movimiento de cualquier punto de la misma, puede ser hallado en función del movimiento de un punto de referencia a través de una matriz de transformación, que solo depende de la geometría de la cimentación. De acuerdo con esto, tan solo será necesario dar un movimiento armonico de sólido rígido a la misma, para calcular la respuesta de la cimentación con respecto a la frecuencia de excitación.

El problema que se pretende resolver es pues; hallar la respuesta dinámica de una cimentación rígida axilsimétrica, situada bien sobre un semiespacio homogéneo, isótropo o un medio estratificado, pudiendo ser

en ámbos casos el medio considerado elástico o viscoelástico; sometida a los movimientos de sólido rígido de desplazamiento en la dirección de los tres ejes coordenados, así como los correspondientes giros en torno a los mismos ejes. En definitiva se trata de resolver el mismo problema planteado en el primer Capitulo de la Tesis, con condiciones de contorno *no relajadas*, es decir; la cimentación se considera soldada al terreno y además se verifica la hipótesis de pequeñas deformaciones.

En la figura 4.1, se muestra un caso general del problema planteado, indicándose en la misma las diferentes condiciones de contorno necesarias para resolver el cálculo de las impedancias dinámicas, a aplicar sobre cada una de las superficies que contiene el problema.

Condiciones de contorno:

en S_1 $\underline{t}=0$

en S_2 $\underline{u} \neq 0$; movimientos de sólido rígido prescritos

en S_3, S_4 $\begin{cases} \underline{u} \neq 0 \\ \underline{t} \neq 0 \end{cases}$ [4.1a]

siendo la excitación armónica del tipo:

$$\begin{aligned} F_z(t) &= F_{0z} e^{i\omega t} \\ M_x(t) &= M_{0x} e^{i\omega t} \end{aligned} \quad [4.1b]$$

$$F_x(t) = F_{0x} e^{i\omega t}$$

$$M_z(t) = M_{0z} e^{i\omega t}$$

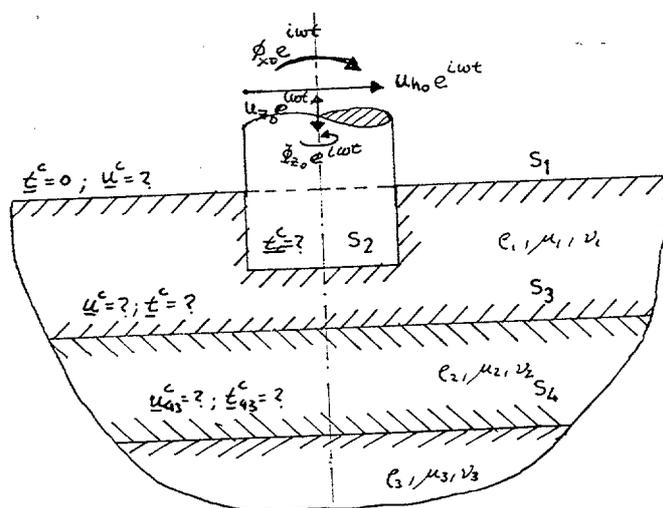


Fig.-4.1

De tal forma que la relación entre las fuerzas generalizadas F y los movimientos de sólido rígido de la cimentación puede expresarse en forma matricial por la

expresión:

$$\underline{F}(t) = Q(t) \cdot \underline{u}(t) \quad [4.2]$$

donde:

$\underline{F}(t) \equiv$ Vector de Esfuerzos Generalizados.

$Q(t) \equiv$ Matriz de Impedancia.

$\underline{u}(t) \equiv$ Vector de movimientos de Sólido Rígido de la Cimentación.

En problemas tridimensionales, como el que se pretende resolver a través del M.E.C., la matriz de impedancias dinámicas es de 6x6, es decir 36 elementos.

Utilizando la transformada de Fourier, para pasar del dominio del tiempo al de la frecuencia y quedandonos con la parte estacionaria de la misma; siempre podemos expresar la ecuación [4.2], en éste último dominio como:

$$\underline{F}(\omega) = Q(\omega) \cdot \underline{u}(\omega) \quad [4.3]$$

De acuerdo con lo expresado en el Capitulo tres de la Tesis, se podrá descomponer el problema general en la suma de los distintos armónicos de un desarrollo en serie de Fourier, de los movimientos a prescribir y por tanto obtener las tensiones y movimientos incógnitas de cada uno de esos armónicos.

Para resolver el problema con el Método de los Elementos de Contorno, se recurre a discretizar las diferentes superficies de revolución S_i por medio de elementos y sobre ellos imponer las condiciones de contorno dadas por [4.1a].

Haciendo:

$$\underline{u}(\omega) = \sum_1^n \underline{u}_a^n(\omega) \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \text{senn}\theta \end{Bmatrix} \quad \text{y} \quad \underline{t}(\omega) = \sum_1^n \underline{t}_a^n(\omega) \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \text{senn}\theta \end{Bmatrix} \quad [4.4]$$

Suponiendo que la variación a lo largo de la

coordenada circunferencial, de los movimientos y tracciones, es suave; podemos tomar tan solo los dos primeros términos del desarrollo en serie, es decir: $n=0$ y $n=1$, obteniendo así las sollicitaciones correspondientes al modo axilsimétrico y al modo antimétrico.

4.2-1 SOLICITACION AXILSIMETRICA

Esta sollicitación corresponde al término del desarrollo correspondiente a $n=0$, si desarrollamos la serie dada por [4.4] tendremos:

$u_\rho = \sum_0^n u'_{n\rho}{}^a \cos n\theta + u'_{n\rho}{}^s \text{senn}\theta$ $u_\theta = \sum_0^n -u'_{n\theta}{}^s \text{senn}\theta + u'_{n\theta}{}^a \cos n\theta$ $u_z = \sum_0^n u'_{nz}{}^a \cos n\theta + u'_{nz}{}^s \text{senn}\theta$ <p style="text-align: center;">(a)</p>	<p style="font-size: 2em;"> </p>	$t_\rho = \sum_0^n t'_{n\rho}{}^a \cos n\theta + t'_{n\rho}{}^s \text{senn}\theta$ $t_\theta = \sum_0^n -t'_{n\theta}{}^s \cos n\theta + t'_{n\theta}{}^a \text{senn}\theta$ $t_z = \sum_0^n t'_{nz}{}^a \cos n\theta + t'_{nz}{}^s \text{senn}\theta$ <p style="text-align: center;">(b)</p>
---	----------------------------------	---

Que para $n=0$ quedan como:

$$u_\rho = u_\rho{}^a; u_\theta = u_\theta{}^s; u_z = u_z{}^a \text{ y } t_\rho = t_\rho{}^a; t_\theta = t_\theta{}^s; t_z = t_z{}^a \quad [4.6]$$

Las expresiones [4.6], corresponden, a los movimientos y tracciones de los problemas de desplazamiento vertical y giro en torno al eje Z; que se pueden observar particularizados para cimentaciones superficiales en la figura (4,2). Estos dos problemas estan desacoplados entre sí.

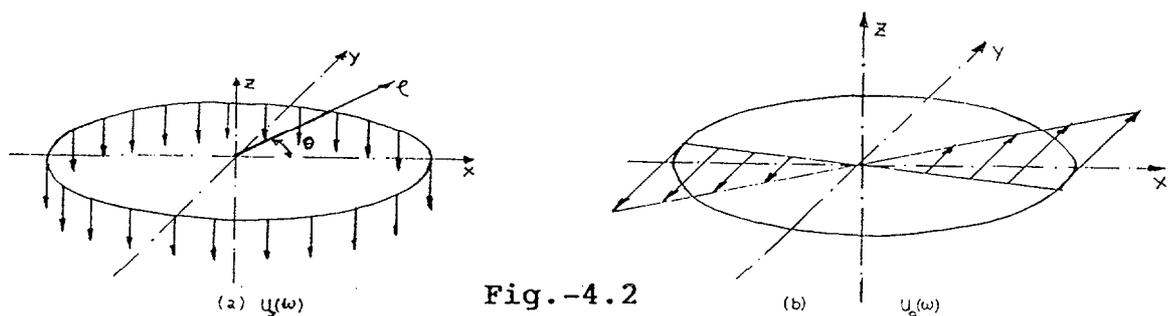


Fig.-4.2

4.2-2 SOLICITACION ANTIMETRICA

Si se particulariza las expresiones [4.5], para $n=1$, se obtienen las sollicitaciones correspondientes a problemas antimétricos, que para las cimentaciones rígidas corresponden a los problemas de cabeceo, *rocking* y desplazamiento horizontal, *swaying*. De acuerdo con lo dicho en el primer Capitulo; estos dos movimientos están acoplados.

Una vez particularizadas las ecuaciones [4.5], adoptan las expresiones siguientes:

$$u_{\rho} = u_{\rho}^{\prime s} \cos\theta + u_{\rho}^{\prime a} \text{senn}\theta$$

$$u_{\theta} = -u_{\theta}^{\prime s} \text{senn}\theta + u_{\theta}^{\prime a} \cos\theta$$

$$u_z = u_z^{\prime s} \cos\theta + u_z^{\prime a} \text{senn}\theta$$

(a)

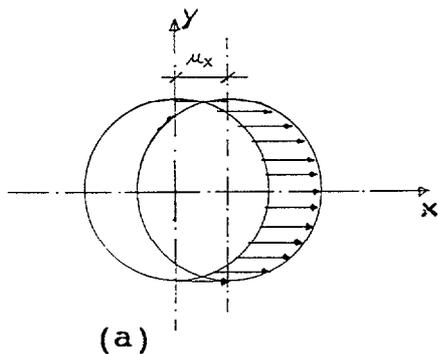
$$t_{\rho} = t_{\rho}^{\prime s} \cos\theta + t_{\rho}^{\prime a} \text{senn}\theta$$

$$t_{\theta} = -t_{\theta}^{\prime s} \text{senn}\theta + t_{\theta}^{\prime a} \cos\theta \quad [4.7]$$

$$t_z = t_z^{\prime s} \cos\theta + t_z^{\prime a} \text{senn}\theta$$

(b)

En caso de movimientos horizontal y cabeceo, figuras (4.3a) y (4.3b), la sollicitación queda:



(a)

$$u_{\rho} = u_{\rho}^{\prime s} \cos\theta$$

$$u_{\theta} = -u_{\theta}^{\prime s} \text{senn}\theta$$

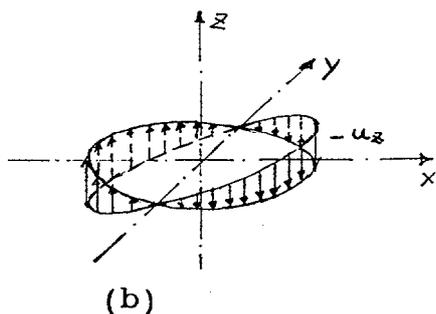
$$u_z = u_z^{\prime s} \cos\theta$$

$$t_{\rho} = t_{\rho}^{\prime s} \cos\theta$$

$$t_{\theta} = -t_{\theta}^{\prime s} \text{senn}\theta$$

$$t_z = t_z^{\prime s} \cos\theta$$

[4.8]



(b)

Fig.-4.3

La matriz de impedancias global de la cimentación tiene la forma:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{HH} & 0 & 0 & 0 & Q_{HR} & 0 \\ 0 & Q_{HH} & 0 & -Q_{HR} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{VV} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Q_{RH} & 0 & Q_{RR} & 0 & 0 \\ Q_{RH} & 0 & 0 & 0 & Q_{RR} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{TT} \end{bmatrix} \quad [4.9]$$

La matriz de transformación de los movimientos de cualquier punto de la cimentación a partir del punte de referencia tiene la expresión:

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & (z_r - z_i) & (x_r - x_i) \\ 0 & 1 & 0 & (z_i - z_r) & 0 & (y_i - y_r) \\ 0 & 0 & 1 & (y_r - y_i) & (x_r - x_i) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{rx} \\ u_{ry} \\ u_{rz} \\ \phi_{rx} \\ \phi_{ry} \\ \phi_{rz} \end{bmatrix} \quad [10.4]$$

4.3.- MEDIOS HISTERETICOS.

El desarrollo seguido en el Capitulo primero, en casi su totalidad, la unica pérdida de energía considerada ha sido la de radiación hacia el infinito.

Dado que en la mayoría de los materiales reales existe una pérdida de energía, debida al rozamiento interno, fuerzas de cohesión etc..., que incluimos en el llamado amortiguamiento del material.

Para que el modelo se aproxime lo maximo posible a la realidad, se tendrá que incorporar éste amortiguamiento al mismo. Este planteamiento es valido tanto para semiespacios como para medios estratificados.

Una forma sencilla de incorporar el amortiguamiento

al modelo es considerar que aquel es de tipo viscoso y proporcional a la velocidad de desplazamiento. A este tipo de medios se les denomina *médios histeréticos*.

Es decir; se sustituye el modelo elástico, en el que E es la rigidez del resorte equivalente, por un modelo constituido por un resorte, de rigidez igual al del caso elástico, más un amortiguador en paralelo. A éste último, figura (4.4), se le llama viscoelástico o también de Kelvin-Voigt.

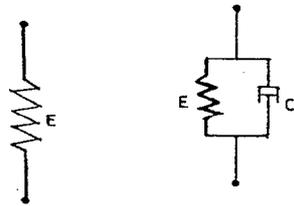


Fig.-4.4

de forma sencilla:

$$\sigma = \sigma_k + \sigma_d = E\epsilon + \eta \dot{\epsilon} \quad [4.11]$$

Generalizando ésta expresión se tiene:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \lambda \theta \delta_{ij} + 2G \epsilon_{ij} \\ G &= \frac{E}{2(1+\nu)} \\ \lambda &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{2\nu G}{(1-2\nu)} \end{aligned} \quad [4.12]$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= (\lambda \theta \delta_{ij} + 2G \epsilon_{ij}) + \\ &\quad + (\lambda' \dot{\theta} \delta_{ij} + 2G' \dot{\epsilon}_{ij}) \\ \lambda, G &\text{ igual que caso elástico} \\ \lambda', G' &\text{ constantes que dependen} \\ &\text{ del material} \end{aligned} \quad [4.13]$$

Para ondas SH propagándose en dirección x, cuando no existen fuerzas de volumen; la ecuación de onda queda:

$$G \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G' \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad [4.14]$$

La existencia de una onda plana requiere:

$$u = Ae^{ik(ct-x)} ; \omega = kc \quad [4.15]$$

derivando é introduciendolas en [4.14]; obtenemos:

$$\left. \begin{aligned} u'' &= -k^2 u \\ \dot{u}' &= ikcu'' = -ik^3 cu = -i\omega k^2 u \\ \ddot{u} &= -k^2 c^2 u = -\omega^2 u \end{aligned} \right\} [4.16]$$

sustituyendo las ecuaciones [4.16] en [4.14] se obtiene:

$$Gk^2 + iG'\omega k^2 = \rho\omega^2 \quad [4.17]$$

$$G\left(\frac{\omega^2}{c^2}\right) + i(G'\omega)\left(\frac{\omega^2}{c^2}\right) = \rho\omega^2 ; c^2 = \frac{G+i(G'\omega)}{\rho} \quad [4.18]$$

como:

$$\left. \begin{aligned} c \in \mathbb{C} \\ \omega \in \mathbb{R} \end{aligned} \right\} \Rightarrow k \in \mathbb{C} \Rightarrow k = K + i\alpha \quad [4.19]$$

con lo que [4.15] se puede poner como:

$$u = \left[Ae^{i(\omega t - Kx)} \right] e^{i\alpha x} \quad [4.20]$$

es decir, una onda armonica [4.15] modulada por una exponencial de factor α . Introduciendo la expresión [4.18] de k en [4.17] y operando:

$$\left. \begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{\rho G \omega^2}{2[G^2 + (G'\omega)^2]} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\omega G'}{G}\right)^2} - 1 \right] \\ K^2 &= \frac{\rho G \omega^2}{2[G^2 + (G'\omega)^2]} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\omega G'}{G}\right)^2} + 1 \right] \end{aligned} \right\} [4.21]$$

Para tener en cuenta el decrecimiento con la distancia tomaremos el valor negativo de α ; por lo que:

$$u = \left[A e^{i(\omega t - Kx)} \right] e^{-i\alpha} \quad [4.22]$$

α es el denominado coeficiente de atenuación, utilizado en sismología para representar el amortiguamiento del material.

Lo anterior, referido a ondas S, se puede generalizar de tal forma que intervengan las constantes λ, G, λ' y G' de la ecuación de comportamiento de Kelvin-Voigt.

Quimby, propuso en 1925, utilizar la simplificación:

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{G}{G'} \implies \nu = \nu' \quad [4.23]$$

con la consiguiente reducción del modelo a la adición de un sólo parametro G' determinable por experimentación.

Analizando el efecto de las ondas SH sobre una probeta, con momento de inercia J y masa despreciable; las ecuaciones del movimiento son:

$$J\ddot{\theta} + \frac{GI_P}{L} \theta = 0 \quad [4.24]$$

donde: $I_P = \frac{1}{2} \pi R^4$ y siendo: $R \equiv$ Radio de la probeta
 $L \equiv$ Longitud de la "

Para un material viscoelástico la ecuación queda:

$$J\ddot{\theta} + \frac{I_P}{L} (G\theta + G'\dot{\theta}) = 0 ; \quad \ddot{\theta} + \frac{G'I_P}{JL} \dot{\theta} + \frac{GI_P}{JL} \theta = 0 \quad [4.25]$$

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 &= \frac{GI_P}{JL} \\ 2\xi\omega &= \frac{G'I_P}{JL} \end{aligned} \right\} \implies 2\xi = \frac{\omega G'}{G} \quad [4.26]$$

donde ξ es el índice de amortiguamiento, relacionado directamente con G' .

Se puede introducir ahora, las medidas habituales de los sistemas de un solo grado de libertad; como son:

el decremento logaritmico

$$\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \approx 2\pi\xi ; \xi \rightarrow 0 \Rightarrow \delta = \pi \frac{\omega G'}{G} \quad [4.27]$$

y el coeficiente de atenuación α cuando $\xi \rightarrow 0$ queda:

$$\alpha^2 \approx \frac{\omega^2}{2c_s^2} 2\xi^2 \Rightarrow \alpha \approx \frac{\omega}{c_s} \xi \quad [4.28]$$

o bien teniendo en cuenta [4.27]

$$\alpha \approx \frac{\omega}{2\pi c_s} \delta = \frac{\delta}{\lambda} \quad [4.29]$$

donde λ , es la longitud de onda de la excitación

Konopoff, propuso como ley de comportamiento más realista para suelos y rocas admitir que:

$$\left. \begin{array}{l} \omega G' = G^* \\ \omega \lambda' = \lambda^* \end{array} \right\} \quad [4.30]$$

El sólido así modelado se denomina medio histerético y todos los resultados anteriores son válidos sin más que sustituir:

$$G' \longrightarrow \frac{G^*}{\omega} \quad \text{y} \quad \lambda' \longrightarrow \frac{\lambda^*}{\omega} \quad [4.31]$$

en especial.

$$\alpha^2 = \frac{\rho G \omega^2}{2[G^2 + G^{*2}]} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{G^*}{G}\right)^2} - 1 \right] \quad [4.32]$$

Y

$$2\xi = \frac{\omega G'}{G} = \frac{G^*}{G} \quad [4.33]$$

Si los movimientos excitación son de tipo armónico,

la ecuación [4.30] equivale a la definición de un módulo de rigidez transversal $G^C \ll C$; tal que:

$$G^C = G + iG^* = G(1 + 2\xi i) \quad [4.34]$$

Hasta aquí, se ha tratado de un medio constituido por un semiespacio. Cuando el medio que se está analizando es un medio estratificado y en particular un estrato que yace sobre una base rígida, figura (4.5).

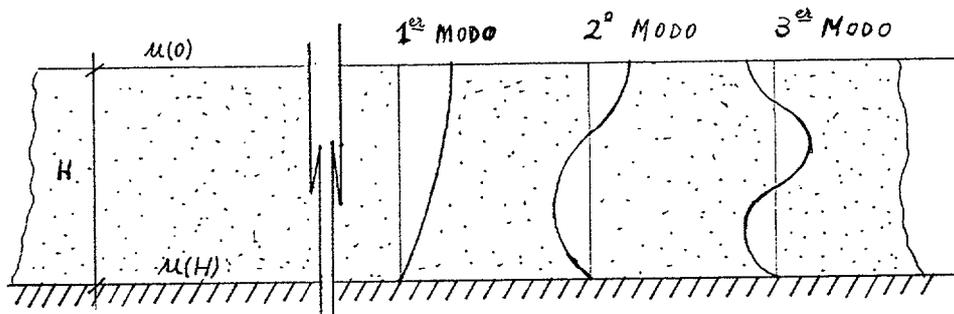


Fig.-4.5

La posibilidad de vibraciones libres el estrato, en caso de material perfectamente elástico viene dada por:

$$u(H) = U(0) \cos \frac{\omega H}{C_S} \quad [4.35]$$

Si $\forall u(H) = 0 \Rightarrow u(0) \neq 0 \Rightarrow \cos \frac{\omega H}{C_S} = 0$ y a su vez esto

conduce a que:

$$\frac{\omega H}{C_S} = (2n-1) \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots \quad [4.36]$$

y se obtienen modos de vibración del tipo de los de la Fig (4.5).
El período de vibración esta dado por:

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4H}{(2n-1)c_s} ; \quad \forall n=1,2,3,\dots \quad [4.37]$$

En caso en que el medio sea hysterético, el planteamiento es similar y se tiene:

$$\cos\left[\frac{\omega X}{c_s}\right] = \frac{1}{2} \left[e^{i\frac{\omega X}{c_s}} + e^{-i\frac{\omega X}{c_s}} \right] \quad [4.38]$$

al ser $\xi = \frac{G^*}{2G}$ y como $\xi \leq 1$; $\frac{G^*}{G} < 2 \Rightarrow \frac{G'}{G} < \frac{2}{\omega}$

y llevandolo a la ecuación [4.37]; se obtiene:

$$G' < \frac{2G}{\omega} = \frac{4GH}{(2n-1)\pi c_s} = \frac{4H}{(2n-1)\pi} \frac{G}{c_s} = \frac{4H}{(2n-1)\pi} (\rho G)^{1/2} \quad [4.39]$$

4.4.- CALCULO DE IMPEDANCIAS DE CIMENTACIONES RIGIDAS CON SIMETRIA DE REVOLUCION

Para calcular las impedancias dinámicas de cimentaciones mediante el Método de los Elementos de Contorno; ha de resolverse, para cada frecuencia, tantos sistemas lineales de ecuaciones algebraicas como movimientos de sólido rígido se hayan prescrito.

Una vez obtenidas las tensiones incógnita en los elementos en que se discretizó la interfase cimentación-terreno, superficie de contacto; se hallan los esfuerzos resultantes con respecto al punto de referencia escogido, usualmente el centro de gravedad de la cimentación y en caso de estar embebida en el terreno en el fondo de la misma, que una vez divididos por el movimiento prescrito, nos proporciona el valor de la impedancia correspondiente deseada.

De una forma general, utilizando la matriz α , de transformación de movimientos de sólido rígido de la

cimentación dada por [4.10], se puede escribir:

$$\underline{F}_r = \sum_{k=1}^{N_z} \int_{\Gamma_k} \underline{\alpha}_k^T \underline{t}_k d\Gamma_k \quad \text{Y} \quad Q_r = \frac{F_r}{u_r} \quad [4.40]$$

Las impedancias dinámicas Q_r , se hallan en la practica; a través de expresiones que se desarrollan, para cada uno de los movimientos prescritos, en los subpartados siguientes. De acuerdo con lo dicho, en el apartado 4.2 anterior, los desplazamientos y giros en torno a Z están desacoplados, condiciones de contorno axilsimétrica y estando sin embargo acoplados los desplazamientos horizontales y giros alrededor de los ejes X,Y. Por tanto se pueden obtener las impedancias correspondientes resolviendo dos problemas; uno vertical-torsión y el segundo de desplazamiento horizontal-cabeceo.

4.4-1 IMPEDANCIA VERTICAL Q_{ZZ} Y DE TORSION Q_{TT}

Este caso corresponde a condiciones de contorno axilsimétricas, por tanto $n=0$ y se tiene que:

$$t_z = t'_z \quad \text{Y} \quad t_\theta = t'_\theta$$

y por esto, la expresión [4.40], se puede desdoblar en:

$$F_z = \sum_{k=1}^{N_z} \int_{\Gamma_k} t_{zk} d\Gamma_k \quad \text{(a)} \quad \text{Y} \quad M_z = \sum_{k=1}^{N_z} \int_{\Gamma_k} t_{\theta k} \rho_k d\Gamma_k \quad \text{(b)} \quad [4.41]$$

Si se utiliza la misma geometría, notación y cambio de coordenadas, similar al del apartado 3.3-2-1.2, para los elementos denominados banda, poniendo ρ en función de z según la figura (4.7) tiene:

$$\rho = az + b \quad [4.42a]$$

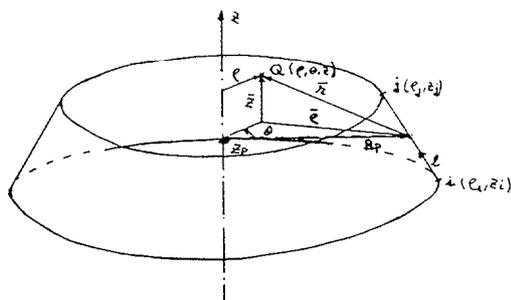


Fig.-4.7

donde:

$$\left. \begin{aligned}
 a &= \frac{\rho_j - \rho_i}{z_j - z_i} \\
 b &= \frac{\rho_j z_i - \rho_i z_j}{z_j - z_i}
 \end{aligned} \right\} [4.42b]$$

Y

$$d\Gamma_k = \rho d\theta dl = \frac{L_k}{\Delta z_k} \rho(z) d\theta dz \quad [4.42c]$$

4.4-1-1 IMPEDANCIA VERTICAL

De acuerdo con la expresión [4.1.4a] y las [4.42a.b.c]; se tiene:

$$F_z = \sum_{k=1}^{N_z} \int_{\Gamma_k} t_{zk} d\Gamma_k = \sum_{k=1}^{N_z} t'_{zk} \int_0^{2\pi} \int_{z_i}^{z_j} \frac{L_k \rho(z) dz d\theta}{\Delta z_k} \quad [4.43]$$

$$F_z = \sum_{k=1}^{N_z} t'_{zk} L_k \int_0^{2\pi} \int_{z_i}^{z_j} \frac{(az+b) dz d\theta}{\Delta z_k} = \sum_{k=1}^{N_z} 2\pi t'_{zk} L_k \int_{z_i}^{z_j} \frac{(az+b) dz}{\Delta z_k} \quad [4.44]$$

operando se obtiene:

$$F_z = \sum_{k=1}^{N_z} 2\pi t'_{zk} L_k \rho_m \quad [4.45] \quad \text{que se introduce en [4.40b]}$$

Esta expresión no será válida para los elementos tipo corona circular y por tanto emplearemos la siguiente:

$$F_z = \sum_{k=1}^{N_z} \pi t'_{zk} (\rho_j^2 - \rho_i^2) \quad [4.46] \quad Y \quad Q_{zz} = \frac{F_z}{u_z}$$

4.4.1.2 IMPEDANCIA DE TORSION

Partiendo de la ecuación [4.41b] y de los cambios expresados en [4.42a,b,c]; se tendrá:

$$M_z = \sum_{k=1}^{N_z} \int_{\Gamma_k} t_{\theta k} \rho_k d\Gamma_k = \sum_{k=1}^{N_z} t'_{\theta k} \int_0^{2\pi} \int_{z_i}^{z_j} \frac{L_k \rho^2(z) d\theta dz}{\Delta z_k} \quad [4.47]$$

$$M_z = \sum_{k=1}^{N_z} 2\pi t'_{\theta k} L_k \int_{z_i}^{z_j} \frac{(az+b)^2 dz}{\Delta z_k}$$

desarrollando la expresión subintegral é integrando queda:

$$M_z = \sum_{k=1}^{N_z} 2\pi t'_{\theta k} \frac{L_k}{\Delta z_k} \left[\frac{a^2}{3} (z_j^3 - z_i^3) + ab(z_j^2 - z_i^2) + b^2(z_j - z_i) \right] \quad [4.48]$$

esta expresión [4.48] no es válida para los elementos corona circular y por tanto para éstos se utilizara:

$$M_z = \sum_{k=1}^{N_z} \frac{2\pi}{3} t'_{\theta k} (\rho_j^3 - \rho_i^3) \quad [4.49] \quad \text{siendo: } Q_{TT} = \frac{M_z}{\Phi_z}$$

que llevadas a [4.40b] nos proporciona Q_{TT}

4.4.2.1 IMPEDANCIAS HORIZONTAL Y DE CABECEO

De acuerdo con lo expresado por las ecuaciones [4.8] se tiene que para unas condiciones de contorno, en movimientos, antimétrica se obtienen unas tracciones incógnita tambien antimétricas y que vienen expresadas por:

$$\begin{array}{l} t_{\rho} = t'_{\rho} \cos \theta \\ t_{\theta} = -t'_{\theta} \sin \theta \\ t_z = t'_z \cos \theta \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \forall i = H \text{ o } R \\ \\ t_x^i = t_{\rho}^i \cos \theta - t_{\theta}^i \sin \theta = t_{\rho}^i \cos^2 \theta + t_{\theta}^i \sin^2 \theta \\ t_z^i = t'_z \cos \theta \end{array} \right. \quad [4.50]$$

Como consecuencia del movimiento prescrito,

desplazamiento o giro respectivamente, aparacen las impedancias de acoplamiento o cruzadas, es decir unos esfuerzos que se pueden expresar por:

$$\left. \begin{aligned}
 F_x^i &= \sum_{k=1}^{N_z} \int_{\Gamma_k} t_{xk}^i d\Gamma_k & (a) \\
 M_y^i &= \sum_{k=1}^{N_z} \left[\int_{\Gamma_k} t_{xk}^i h_k d\Gamma_k + \int_{\Gamma_k} t_{zk}^i \rho_k \cos\theta d\Gamma_k \right] & (b)
 \end{aligned} \right\} [4.51]$$

4.4-2-1 IMPEDANCIAS HORIZONTALES

Teniendo en cuenta las expresiones [4.50] y las [4.42a,b,c], la [4.51a] se puede poner como:

$$F_x^H = \sum_{k=1}^{N_z} \int_0^{2\pi} \int_{z_i}^z \frac{L_k}{\Delta z_k} \left[t_{\rho}^{\prime H} \cos^2 n\theta + t_{\theta}^{\prime H} \operatorname{sen}^2 n\theta \right] \rho(z) d\theta dz \quad [4.52]$$

desarrollando é integrando [4.52] se obtiene:

$$F_x^H = \sum_{k=1}^{N_z} \pi L_k \rho_{mk} \left[t_{\rho}^{\prime H} + t_{\theta}^{\prime H} \right] \quad [4.53] \quad \text{Y} \quad Q_{HH} = \frac{F_x^H}{u_x}$$

La impedancia de acoplamiento horizontal-cabeceo se obtiene de [4.51b] al sustituir [4.50]

$$\begin{aligned}
 M_y^H &= \sum_{k=1}^{N_z} \int_0^{2\pi} \int_{z_i}^z \frac{L_k}{\Delta z_k} \left[t_{\rho}^{\prime H} \cos^2 n\theta + t_{\theta}^{\prime H} \operatorname{sen}^2 n\theta \right] h_k \rho(z) d\theta dz + \\
 &+ \sum_{k=1}^{N_z} \int_0^{2\pi} \int_{z_i}^z \frac{L_k}{\Delta z_k} t_{zk}^{\prime H} \cos^2 n\theta \rho^2(z) d\theta dz \quad [4.54]
 \end{aligned}$$

Quedando ésta al introducir los valores de las

integrales de $\rho(z)$ y $\rho^2(z)$; queda:

$$M_y^H = \sum_{k=1}^{N_z} \pi \left[L_k \rho_{mk} [t_{\rho}^H + t_{\theta}^H] h_k + t_{zk}^H \frac{l_k}{\Delta z_k} \left[\frac{a^2}{3} (z_j^3 - z_i^3) + ab(z_j^2 - z_i^2) + b^2(z_j - z_i) \right] \right] \quad [4.55]$$

con lo que $Q_{HR} = \frac{M_y^H}{u_x}$

4.4-2-1 IMPEDANCIAS DE CABECEO

La impedancia del movimiento de cabeceo de la cimentación se obtiene de las expresiones [4.51], sin mas que cambiar el superíndice H por el R. La impedancia de acoplamiento esta debida a las fuerzas horizontales que actuan sobre la superficie de contacto al prescribir un giro alrededor del eje Y. De acuerdo con ésto; se tiene:

$$\left. \begin{aligned} F_x^R &= \sum_{k=1}^{N_z} \int_{\Gamma_k} t_{xk}^R d\Gamma_k \quad (a) \\ M_y^R &= \sum_{k=1}^{N_z} \left[\int_{\Gamma_k} t_{xk}^R h_k d\Gamma_k + \int_{\Gamma_k} t_{zk}^R \rho_k \cos\theta d\Gamma_k \right] \quad (b) \end{aligned} \right\} \quad [4.56]$$

Llevando a cabo un proceso totalmente similar al del caso anterior se obtiene la expresiones siguientes:

$$M_y^R = \sum_{k=1}^{N_z} \pi \left[L_k \rho_{mk} [t_{\rho}^R + t_{\theta}^R] h_k + t_{zk}^R \frac{l_k}{\Delta z_k} \left[\frac{a^2}{3} (z_j^3 - z_i^3) + ab(z_j^2 - z_i^2) + b^2(z_j - z_i) \right] \right] \quad [4.57]$$

con lo que $Q_{RR} = \frac{M_y^R}{\Phi_y}$ y

$$F_x^R = \sum_{k=1}^{N_z} \pi L_k \rho_{mk} [t_{\rho}^R + t_{\theta}^R] \quad [4.58] \quad \text{siendo: } Q_{RH} = \frac{F_x^R}{\Phi_y}$$

4.4-3 NORMALIZACION DE IMPEDANCIAS DINAMICAS

Una vez se han obtenido los distintos valores de las impedancias, correspondientes a cada uno de los movimientos prescritos, se normalizan éstas a fin de adimensionalizarlas y con ello facilitar el análisis y la utilización práctica de las mismas. Del mismo modo, ésta normalización permite realizar comparaciones entre los diversos métodos utilizados para resolver el problema planteado y de los que se ha hecho una breve exposición en el capítulo de introducción.

De acuerdo con lo expresado en los antecedentes históricos, las impedancias dinámicas se suelen expresar como:

$$Q_{ij} = k_{o_{qt}}(\omega) + i\omega c_{o_{qt}}(\omega) \quad [4.59]$$

y llamando

$$K_{ij} = k_{o_{qt}}(\omega) \quad \text{y} \quad C_{ij} = \omega c_{o_{qt}}(\omega) \quad [4.60]$$

De las múltiples maneras posibles de normalizar éstos resultados se suelen encontrar, en la literatura existente sobre el tema, fundamentalmente dos. La primera de ellas se refiere a cimentaciones superficiales y en relación con el modelo de Veletsos et al, ya que de éstas se conoce la rigidez estática. La segunda, utilizada para cimentaciones con un cierto grado de embebimiento en el terreno se normaliza con respecto al módulo de rigidez transversal del medio considerado y de la longitud característica de la cimentación, en las de simetría de revolución el radio de la misma.

Resumiendo lo dicho las impedancias normalizadas se pueden expresar como:

para el modelo de Veletsos

$$Q_{ij} = K_{o_{ij}} (k_{ij}^V + i a_o c_{ij}^V) \quad [4.61]$$

donde: $K_{o_{ij}}$ es la rigidez estática correspondiente al movimiento prescrito que se estudia.

En el caso general de cimentación embebida se tiene:

$$Q_{ij} = K_{ij} + i a_o C_{ij} \quad [4.62]$$

4.4-3-1 MODELO DE VELETSOS. PARAMETROS DE VELETSOS

Tal y como se observa en las expresiones [4.60] y [4.61], la impedancia Q_{ij} es la misma y por tanto igualandolas se puede escribir:

suprimiendo los subindices i, j y teniendo en cuenta que se se realiza para cualesquiera de ellos.

$$k_{e_q} + i \omega c_{e_q} = K_o (k^v + i a_o c^v) = K + i C \quad [4.63]$$

identificando parte real y parte imaginaria de [4.62] , se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} K = K_o k^v \\ C = K_o a_o c^v \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} k^v = \frac{K}{K_o} \\ c^v = \frac{C}{a_o K_o} \end{array} \right\} \quad [4.64]$$

o bien

$$k^v = \frac{k_{e_q}}{K_o} \quad \text{Y} \quad c^v = \frac{\omega c_{e_q}}{a_o K_o} \quad [4.65]$$

y teniendo en cuenta que $a_o = \frac{\omega R}{c_s}$ queda:

$$c^v = \frac{c_s c_{e_q}}{K_o R}$$

siendo:

$R \equiv$ Radio de la cimentación

$c_s \equiv$ celeridad de las ondas S; $c_a = \left[\hat{\rho}_1 / \mu_1 \right]^{1/2}$

$\hat{\rho}_1 \equiv$ densidad del estrato con respecto al que se normaliza, usualmente el primero.

$\mu_1 \equiv$ Modulo de Rigidez transversal del estrato de normalización

y K_0 ; la rigidez estática correspondiente, que para los distintos movimientos de sólido rígido prescritos y en cimentaciones axilsimétricas superficiales adopta las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned}
 K_{O_{zz}} &= \frac{4\mu R}{1-\nu} && ; \text{ rigidez Vertical cimentación superficial} \\
 K_{O_{TT}} &= \frac{16}{3} \mu R^3 && ; \text{ rigidez de Torsión cimentación superficial} \\
 &&& [4.66] \\
 K_{O_{HH}} &= \frac{8\mu R}{2-\nu} && ; \text{ rigidez Horizontal cimentación superficial} \\
 K_{O_{RR}} &= \frac{8\mu R^3}{3(1-\nu)} && ; \text{ rigidez de Cabeceo cimentación superficial}
 \end{aligned}$$

A los coeficientes k^v y c^v , se les denomina parametros de Veletsos.

4.4-3-2 NORMALIZACION DE CIMENTACIONES EMBEBIDAS

En el caso de que la cimentación en estudio tenga un cierto grado de enterramiento, la solución estática *exacta* no es conocida y por tanto el modelo anterior sería ficticio y por ello se ha introducido otro factor de normalización de acuerdo con lo dicho en el apartado 4.4-3 , que ha sido utilizado por multiples autores. Por tanto se puede escribir:

$$Q_{ij} = (k_{ij} + i a_0 c_{ij}) \varphi(\mu_1, a) \quad [4.67]$$

teniendo en cuenta la expresión [4.59] , igualandola con [4.67] é identificando partes reales é imaginarias se obtiene:

$$k_{ij} = \frac{K_{ij}}{\varphi_{ij}} \quad \text{Y} \quad c_{ij} = \frac{C_{ij}}{a_0 \varphi_{ij}} \quad [4.68]$$

donde la función φ_{ij} , adopta los valores siguientes para las distintas impedancias.

Vertical y Horizontal $\varphi_{VV} = \varphi_{HH} = \mu_1 a$

$$\begin{aligned}
 \text{Torsión y Cabeceo} & \dots\dots\dots \varphi_{TT} = \varphi_{RR} = \mu_1 a^3 & [4.69] \\
 \text{Acoplamiento Horizontal-Cabeceo} & \varphi_{HR} = \varphi_{RH} = \mu_1 a^2
 \end{aligned}$$

donde, como para los parametros de Veletso:

$a \equiv$ Radio de la cimentación

$\mu_1 \equiv$ Modulo de Rigidez transversal del estrato de normalización

con lo que:

$$\begin{aligned}
 Q_{VV} &= \mu_1 a (k_{VV} + i a_0 c_{VV}) & (a) \\
 Q_{TT} &= \mu_1 a^3 (k_{TT} + i a_0 c_{TT}) & (b) \\
 Q_{HH} &= \mu_1 a (k_{HH} + i a_0 c_{HH}) & (c) \quad [4.70] \\
 Q_{RR} &= \mu_1 a^3 (k_{RR} + i a_0 c_{RR}) & (d) \\
 Q_{HR} &= \mu_1 a^2 (k_{HR} + i a_0 c_{HR}) & (e)
 \end{aligned}$$

Estas normalizaciones se utilizarán para representar graficamente los resultados que se presentan en los capitulos correspondientes de la Tesis.

CAPITULO V

**CIMENTACIONES AXILSIMETRICAS SOBRE
SEMIESPACIO**

5.1 INTRODUCCION

Los conceptos teóricos expuestos en los capítulos precedentes se han implementado en un código Fortran de ordenador, con el que se han obtenido un conjunto de resultados, que se exponen en éste y posterior capítulo, que permiten validar el método empleado, Método de los Elementos de Contorno, aplicado a problemas elastodinámicos con simetría de revolución en el ámbito de la interacción suelo-estructura, así como la realización de estudios paramétricos que muestren la influencia de los diferentes factores que influyen en la respuesta dinámica de las cimentaciones rígidas axilsimétricas.

En este capítulo se realiza el estudio de las impedancias dinámicas de las cimentaciones anteriormente citadas; sometidas a los movimientos unitarios de desplazamiento vertical y horizontal y los giros en torno a los mismos ejes.

En el segundo apartado del capítulo se muestra el comportamiento de las cimentaciones circulares superficiales, yaciendo sobre un semiespacio homogéneo é isotrópico considerado, primero como perfectamente elástico é incorporando a continuación el amortiguamiento de tipo histerético; realizándose comparaciones con diversos autores.

En el último apartado del capítulo, se muestran y comparan los resultados obtenidos, para cimentaciones embebidas, cilíndricas y semiesféricas, en el semiespacio viscoelástico sometidas a las mismas sollicitaciones que las superficiales. En este apartado se tendrá en cuenta el efecto del embebimiento en la respuesta dinámica del terreno.

En este capítulo se utilizarán para la presentación

de los resultados los factores de normalización expuestos en el capítulo cuarto.

5.2 CIMENTACIONES SUPERFICIALES SOBRE EL SEMIESPACIO

En este apartado se presentan los resultados obtenidos de las impedancias dinámicas de cimentaciones superficiales rígidas soldadas al semiespacio, con simetría de revolución, frente a las frecuencias adimensionales de excitación a_0 .

En el primer subapartado se tratará de reproducir los resultados de Veletsos y Wei para los movimientos vertical, horizontal y de cabeceo y los de torsión de Luco y Westmann, considerando un semiespacio perfectamente elástico.

En el segundo subapartado se realiza la comparación con los resultados de Veletsos y Verbic al incorporar el amortiguamiento del material, considerado de tipo histerético, al modelo de suelo utilizado.

5.2-1 SEMIESPACIO ELASTICO

La solución de referencia para este problema serán los resultados de Veletsos y Wei, para las impedancias, vertical, horizontal y cabeceo, y de Luco y Westmann para la de torsión; correspondientes a un disco rígido soldado al semiespacio elástico homogéneo é isótropo.

Para obtener los resultados que se muestran en las figuras 5.2 hasta la 5.5, correspondientes al grupo de líneas con amortiguamiento nulo, se ha utilizado una discretización, figura 5.1, de la interfase cimiento-suelo de tan solo ocho elementos de contorno axilsimétricos; de tamaño variable, decreciente a medida que se aproximan al borde exterior de la misma, a fin de adaptarse mejor al previsible pico de tensiones que se produce en este punto.

En las figuras 5.2 hasta la 5.3 se muestran los parámetros de Veletsos correspondientes a los movimientos vertical, torsión, horizontal y cabeceo, frente a la frecuencia adimensional $a_0 = \frac{\omega r}{c_s}$, en un rango que va desde cero hasta ocho para un terreno de densidad y modulo de rigidez transversal iguales a la unidad y coeficiente de Poisson $\nu=1/3$. En ellas se presentan en línea continua los resultados obtenidos y la solución *exacta* en línea discontinua; así mismo se muestran con un * aquellos valores de los coeficientes obtenidos por Cano y Gomez-Lera, para este mismo problema y con el M.E.C.

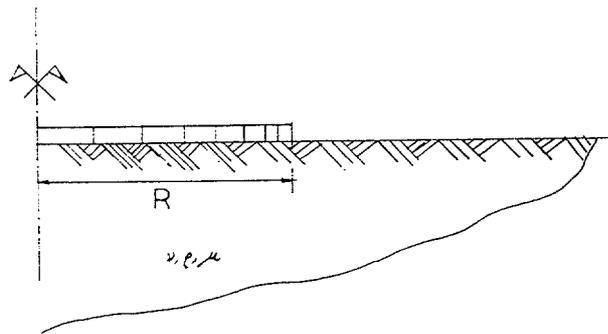


Fig.-5.1

Discretización cimentación rígida superficial

Las discrepancias que se observan entre los resultados dados por el Método de los Elementos de Contorno y la solución de Veletsos son pequeñas y pueden imputarse al hecho que ésta última utiliza condiciones de contorno *relajadas*, mientras que la primera realmente suelda la cimentación al terreno.

Las pequeñas diferencias que se pueden observar entre ambas soluciones que usan el M.E.C. pueden deberse a dos aspectos. El primero al diferente número de puntos tomados para realizar la cuadratura de Gauss y el segundo a la forma de obtener la solución fundamental en coordenadas cilíndricas.

De acuerdo con la figura 5.1, tan solo ha sido necesario discretizar la interfase suelo-cimiento para obtener una buena aproximación al comportamiento dinámico de la cimentación, con lo que se obtiene una economía importante en el tiempo de preparación de datos y de ejecución del programa.

5.2-2 SEMIESPACIO VISCOELASTICO HOMOGENEO

Para incorporar el amortiguamiento del material se recurre, de acuerdo con el apartado 4.3, a introducir en la formulación un modulo de rigidez transversal del tipo:

$$\mu^c = \mu(1 + 2\xi^2 i) \quad [5.1]$$

donde $\xi \equiv$ Factor de amortiguamiento viscoso

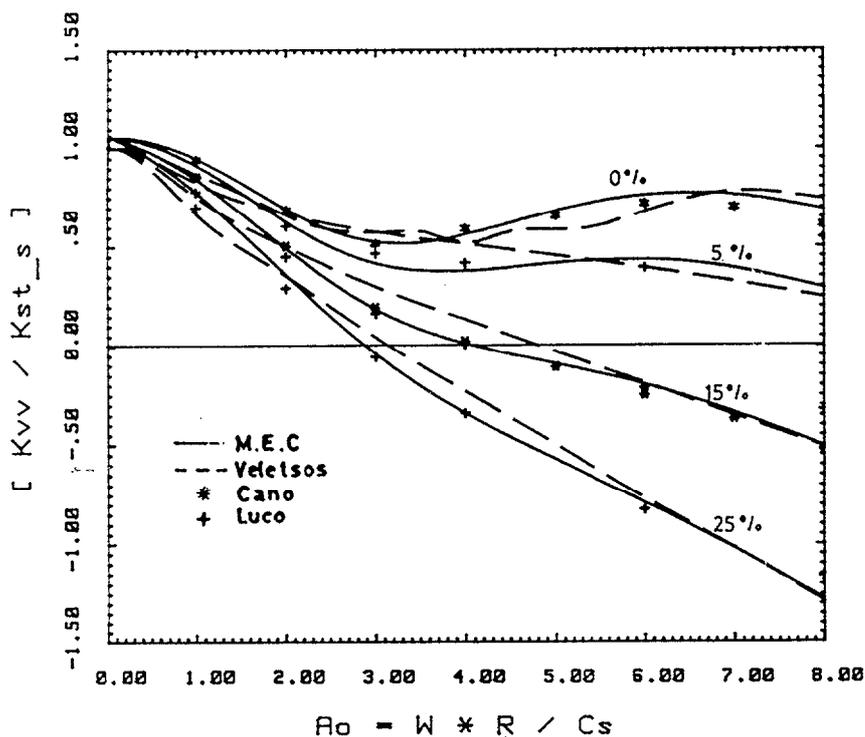
En las figuras anteriormente citadas se presentan los resultados obtenidos con el programa desarrollado en linea continua, frente a los obtenidos por Veletsos y Verbic, en linea discontinua, asi como aquellos otros obtenidos por Cano y Gomez-Lera (*) y los correspondientes de Luco (+). Para factores de amortiguamiento viscoso de un 5%, 15%, 25% y un terreno con las mismas propiedades que en el caso elástico.

La discretización utilizada es identica al caso del semiespacio elástico y se representa en la figura 5.1.

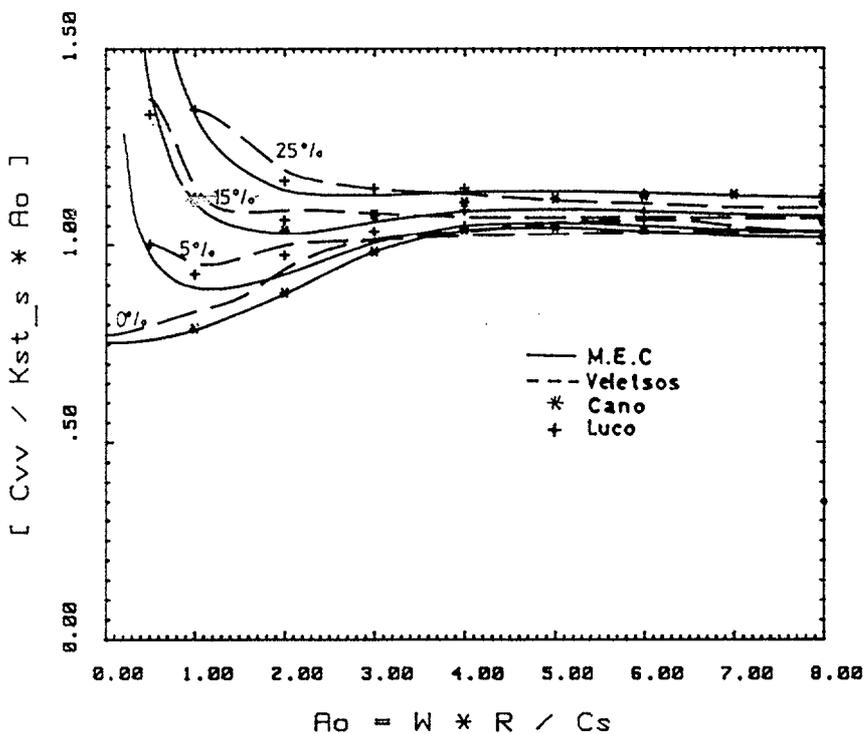
Los resultados de Luco y Veletsos han sido tomados de sus articulos y los de Cano de su Tesis Doctoral. Tal y como se puede observar los resultados que se presentan concuerdan con los del resto de autores en gran medida, debiendose las ligeras discrepancias existentes a las mismas razones esgrimidas para el caso anterior.

El efecto de incrementar la perdida de energia mediante la incorporación del amortiguamiento viscoso conduce, tal y como era de esperar, a un incremento en los

valores del coeficiente de amortiguamiento a bajas frecuencias tendiendo hacia un valor constante, a medida que se incrementa ésta última, siempre superior al del caso puramente elástico. En cuanto al parametro de rigidez se observa una disminución del mismo conforme se incrementa el valor del amortiguamiento; llegando, para los parámetros de rigidez vertical, horizontal y cabeceo, a alcanzar valores negativos de los mismos para frecuencias medias y altas.

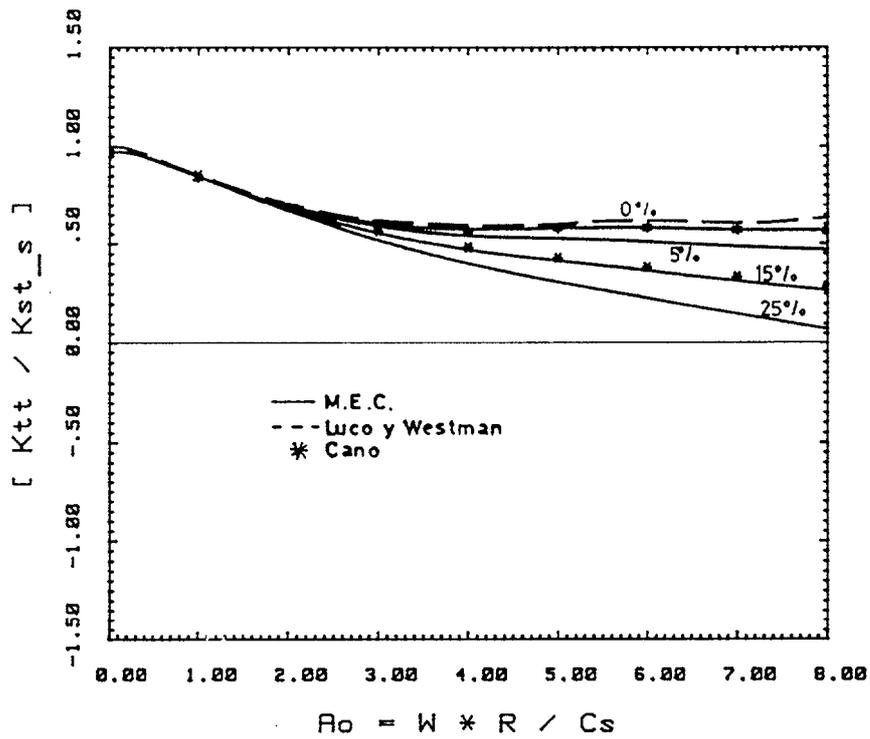


(a)

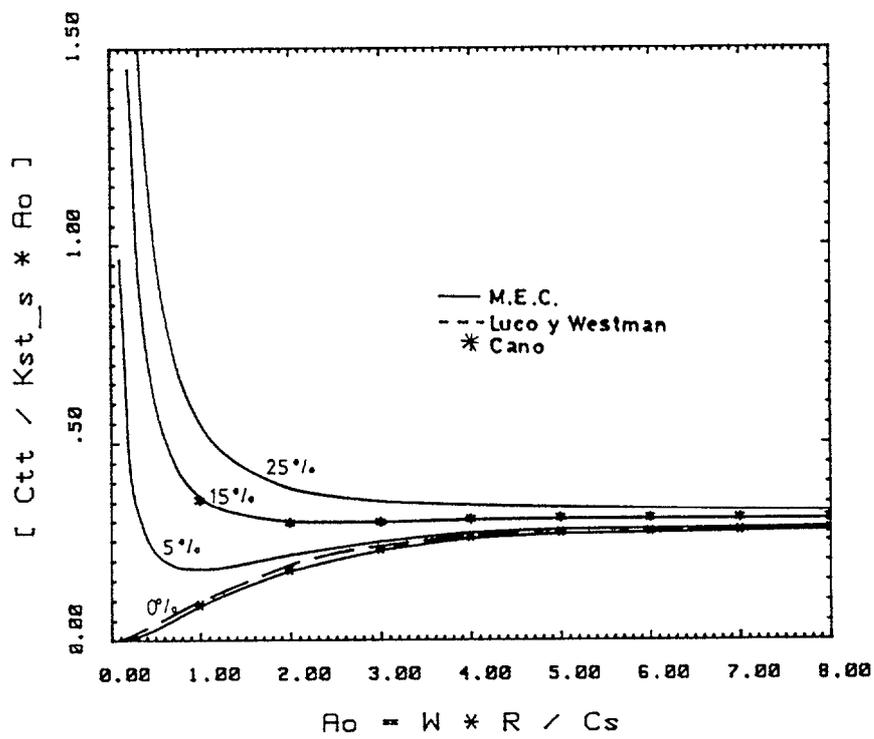


(b)

Figura 5.2 a y b Parámetros de Veletsos, movimiento vertical, semiespacio elástico y viscoelástico.



(a)



(b)

Figura 5.3 a y b Parámetros de Veletsos, movimiento de torsión, semiespacio elástico y viscoelástico.

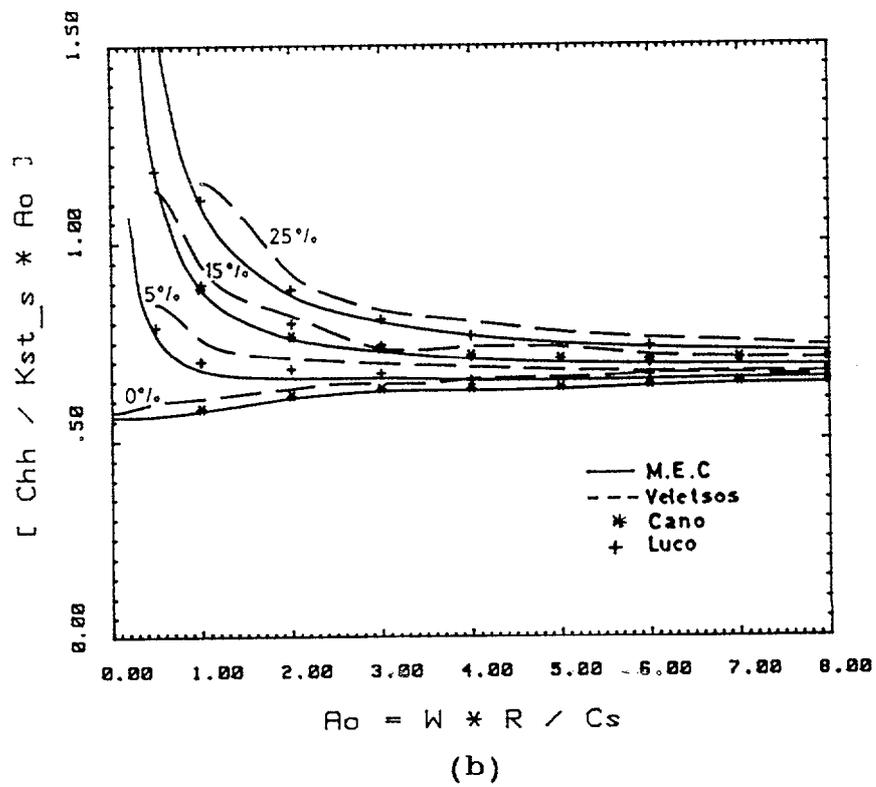
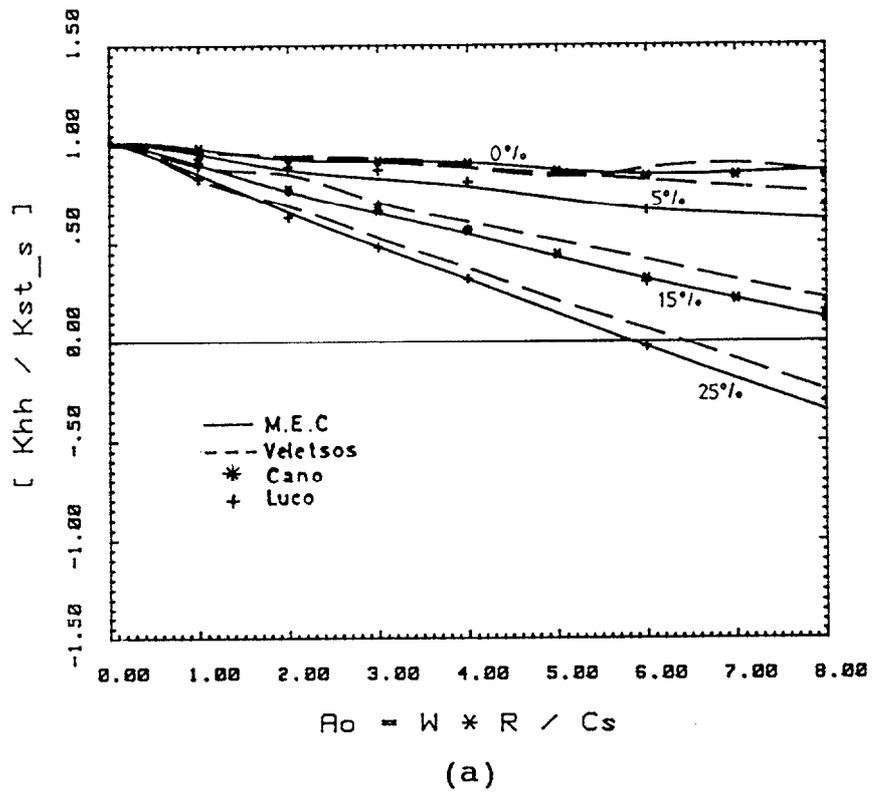
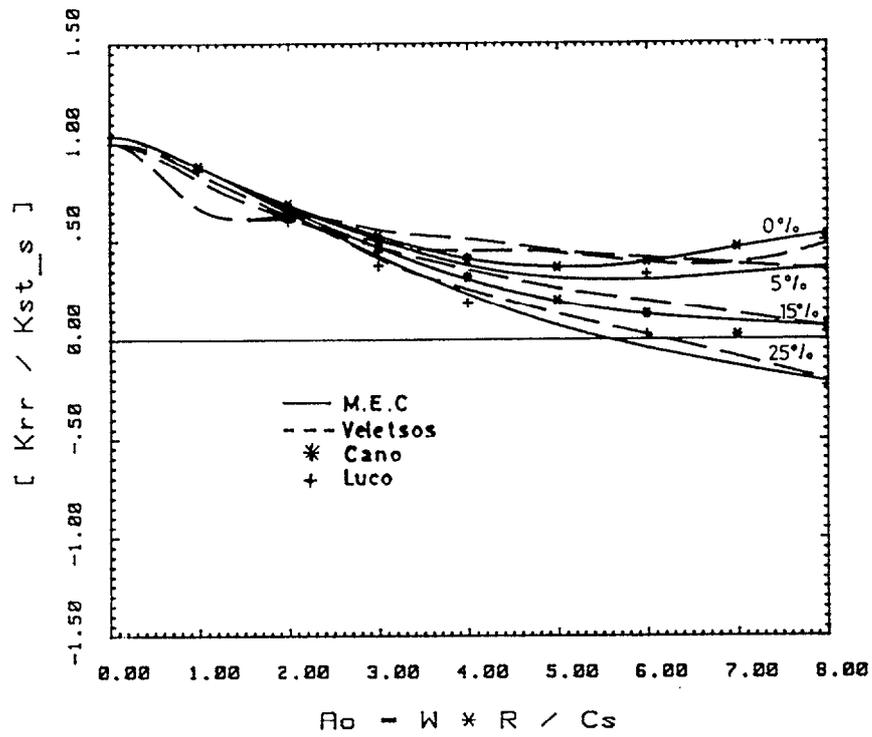
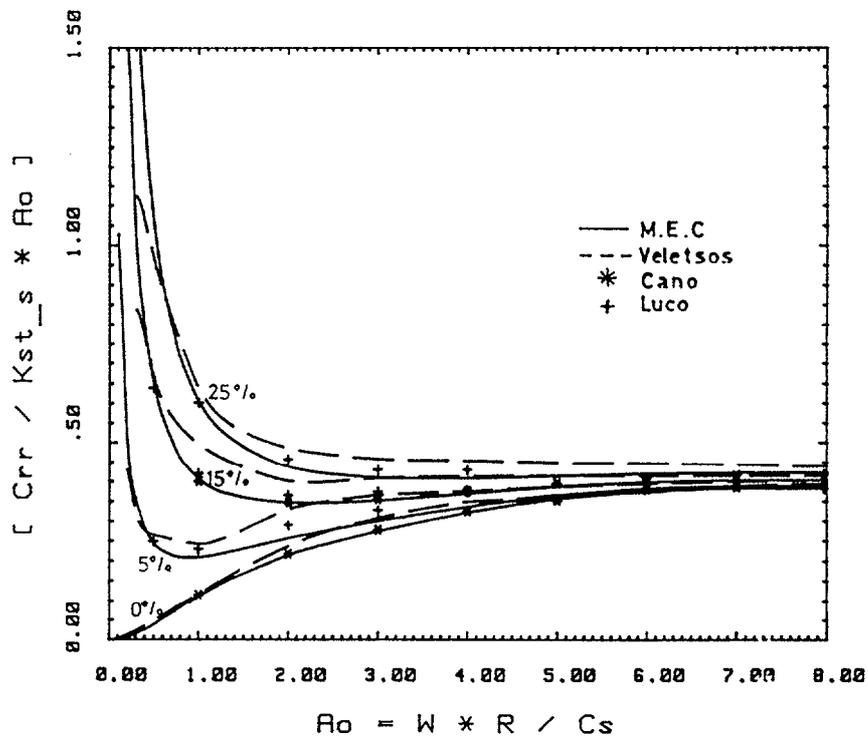


Figura 5.4 a y b Parámetros de Veletsos, movimiento horizontal, semiespacio elástico y viscoelástico.



(a)



(b)

Figura 5.5 a y b Parámetros de Veletsos, movimiento de cabeceo, semiespacio elástico y viscoelástico.

5.3 CIMENTACIONES EMBEBIDAS EN EL SEMIESPACIO VISCOELASTICO HOMOGENEO

En la mayoría de los casos las cimentaciones, bien de maquinaria o edificación, rara vez son estrictamente superficiales; usualmente tienen un cierto grado de embebimiento y por ello es conveniente que los modelos a emplear permitan estudiar este caso.

En el primer subapartado se presenta el estudio de la influencia del grado de embebimiento de las cimentaciones cilíndricas rígidas en un semiespacio viscoelástico homogéneo.

En el siguiente subapartado se presenta el estudio de cimentaciones de sección cualesquiera embebidas en el mismo semiespacio que el caso anterior y particularmente a cimentaciones semiesféricas, que por las características inherentes a su geometría tienen un grado de embebimiento igual a la unidad.

5.3-1 CIMENTACIONES CILINDRICAS RIGIDAS

Para representar adecuadamente estas cimentaciones es necesario realizar discretizaciones como las que aparecen en la figura 5.6; es decir, se ha de discretizar la superficie libre del terreno hasta una distancia A e imponer condiciones de contorno de tracciones nulas y la interfase cimiento-terreno; en la que se impondrán las condiciones de contorno cinemáticas similares a las utilizadas en el caso de cimentaciones superficiales.

La longitud de los elementos es variable en función de la zona que se discretice y de la longitud de onda de la excitación que se considere.

Para los elementos de la superficie libre basta, en general, como tamaño máximo de los mismos la cuarta parte de

la longitud de onda mas pequeña de la gama de frecuencias en estudio. Para los elementos de la interfase de contacto es conveniente, de acuerdo con Dominguez, Abascal y otros autores, reducir esta longitud a un sexto de la mencionada longitud de onda.

En cuanto a la cantidad de terreno libre a discretizar, de acuerdo con los autores mencionados en el parrafo anterior, se ha de tomar como minimo el valor maximo de siete veces el embebimiento y de cinco veces el radio de la cimentación.

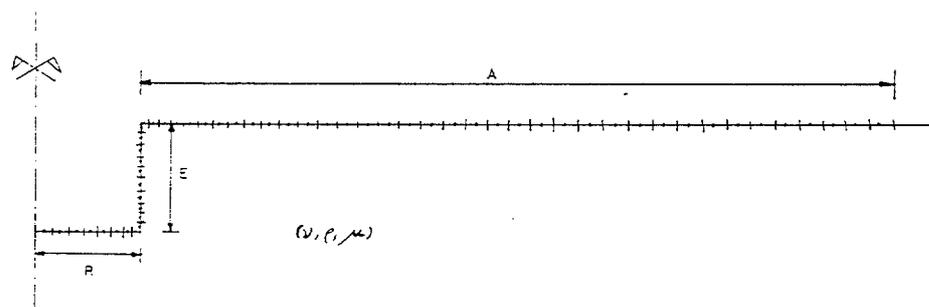


Figura.-5.6

Discretización cimentación rígida embebida

En las figuras 5.7 hasta 5.10 se muestran, en línea continua, los resultados obtenidos para una cimentación rígida cilíndrica con un grado de embebimiento de 0.25, 0.5, 1.0 y 2.0, en un semiespacio de densidad y módulo de rigidez transversal igual a la unidad, coeficiente de Poisson de un cuarto y factor de amortiguamiento viscoso del 1% y 1.5% para las ondas S y P respectivamente; frente a la frecuencia adimensional a_0 en un rango que va desde cero, caso estático, hasta seis.

Se compara con los resultados obtenidos por Apsel, en

línea discontinua, mediante un método de ecuaciones integrales indirecto utilizando una solución fundamental para el semiespacio; en un medio de las mismas características antes citadas con la salvedad respecto a los amortiguamientos utilizados que son de 1% y 0.5% respectivamente. También se incluyen los resultados obtenidos por Day, línea de punto y guion, mediante Elementos Finitos con la particularidad que éstos no incorporan el amortiguamiento viscoso.

De acuerdo con las figuras que muestran la parte real e imaginaria de las diversas impedancias, normalizadas de acuerdo con las expresiones [4.70], se observa que la coincidencia entre ambos autores y los resultados obtenidos mediante el Método de los Elementos de Contorno es alta, especialmente en el rango de bajas y medias frecuencias; apareciendo algunas discrepancias con el Apsel, a alta frecuencia y grandes grados de embebimiento.

El efecto del embebimiento de la cimentación en el terreno, para cualquier impedancia y frecuencia, es el de aumentar los valores de forma casi lineal con el grado de embebimiento y especialmente en la parte imaginaria de la misma; es decir el coeficiente de amortiguamiento.

Como se observa, a igualdad de las cimentaciones superficiales, tanto la parte real como la imaginaria dependen de la frecuencia adimensional y esto ha de ser tenido en cuenta al incorporar los resultados al análisis de la interacción Suelo-Estructura.

En cuanto al número de elementos de contorno necesarios para modelizar este tipo de cimentaciones es variable en función del grado de embebimiento desde 46 elementos para $E/R=0.25$, hasta 113 para $E/R=2.0$.

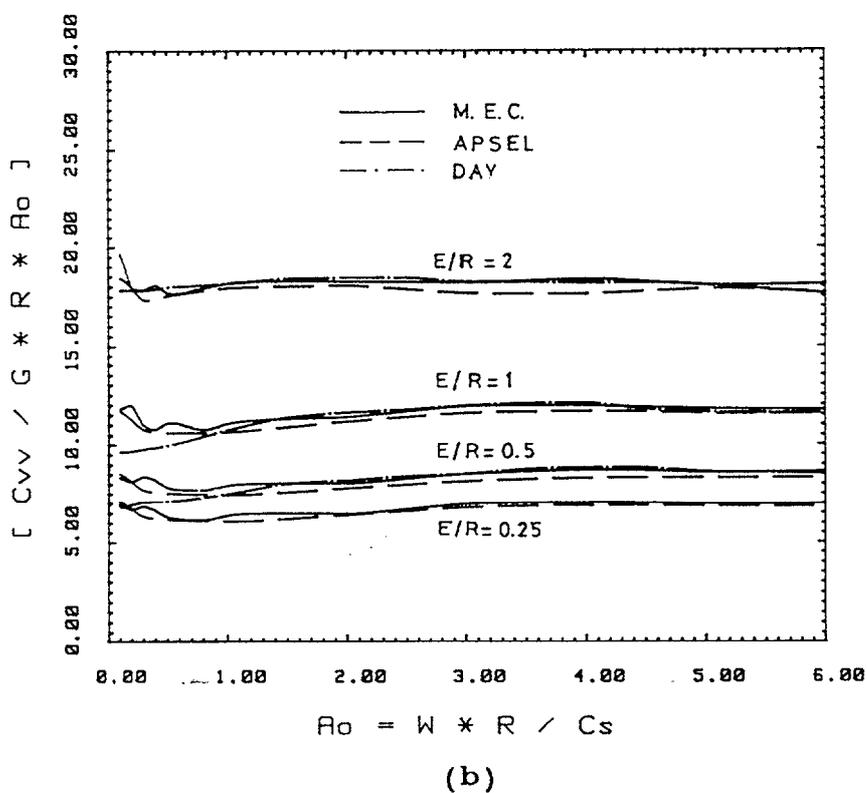
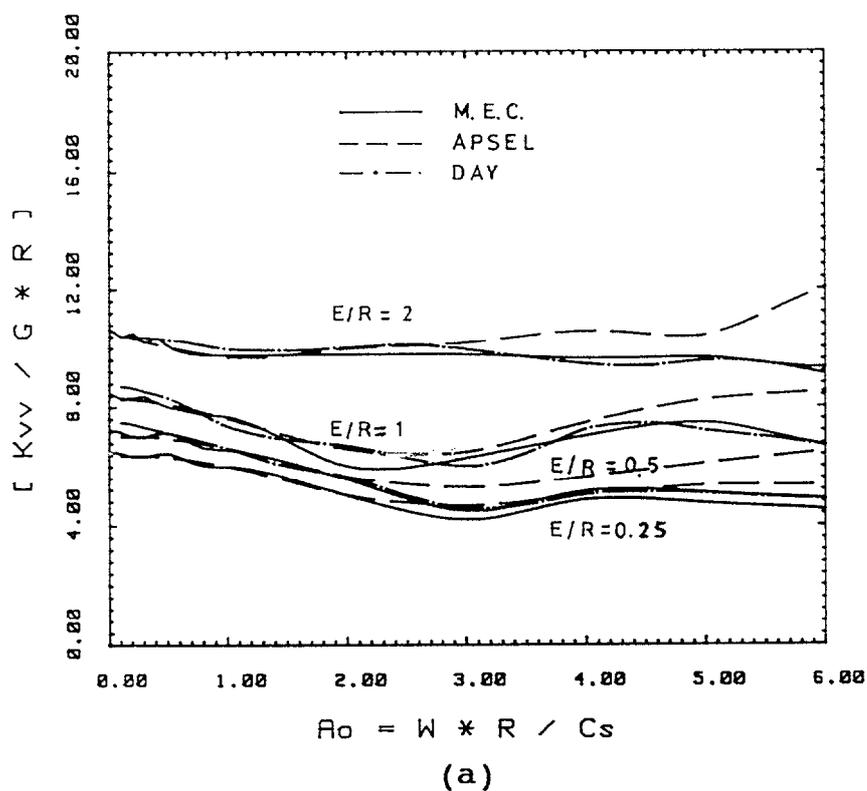


Figura 5.7 a y b Impedancia vertical normalizada, cimentaciones cilíndricas embebidas en el semiespacio viscoelástico.

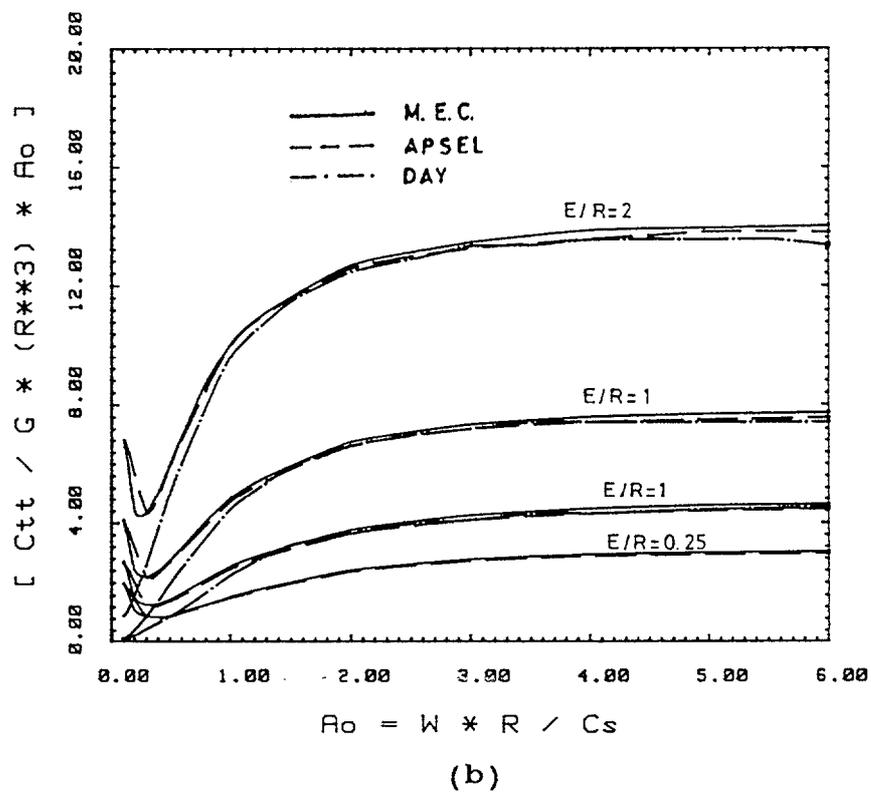
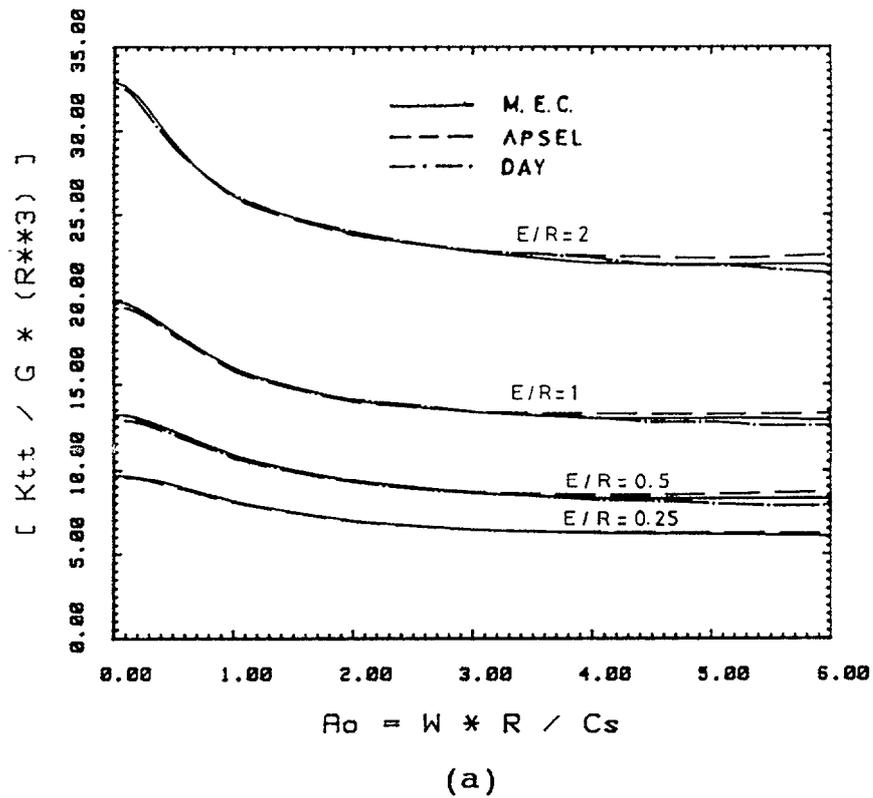


Figura 5.8 a y b Impedancia de torsión normalizada, cimentaciones cilíndricas embebidas en el semiespacio viscoelástico.

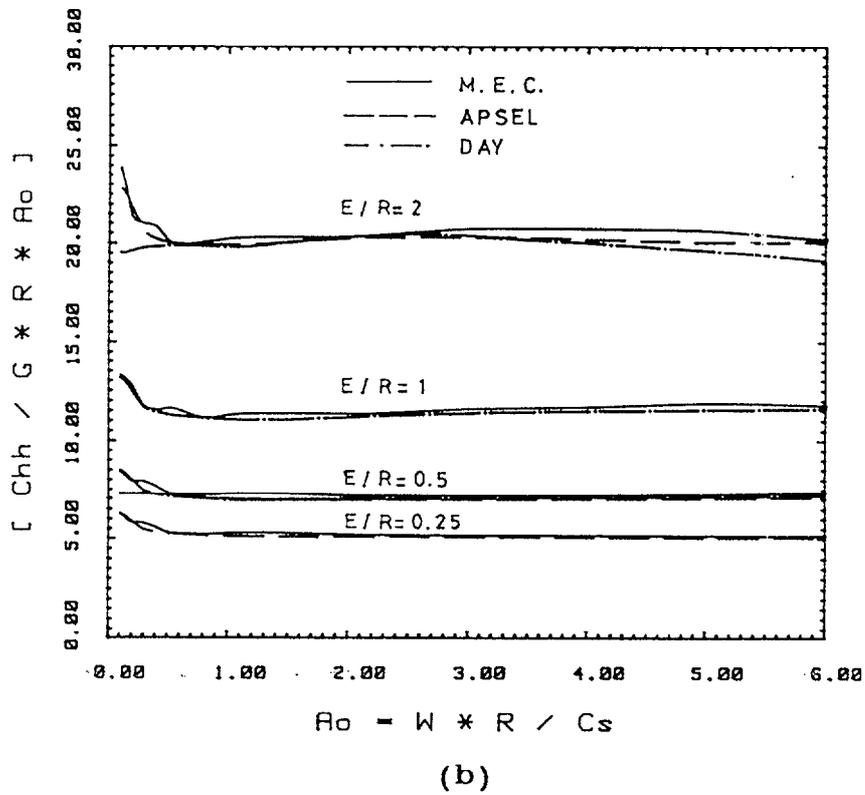
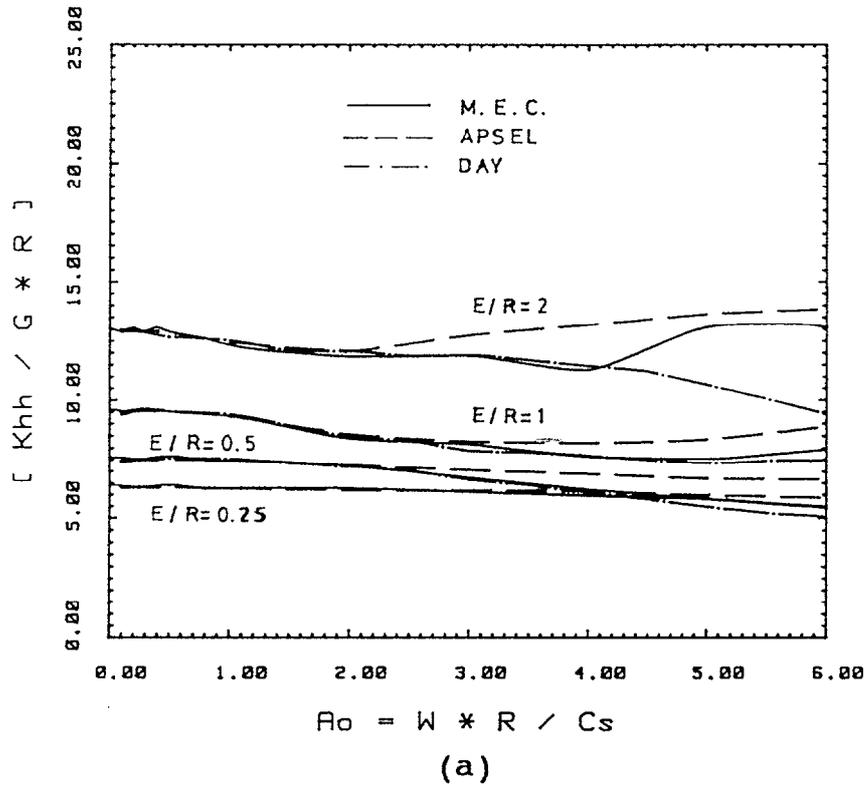


Figura 5.9 a y b Impedancia horizontal normalizada, cimentaciones cilíndricas embebidas en el semiespacio viscoelástico.

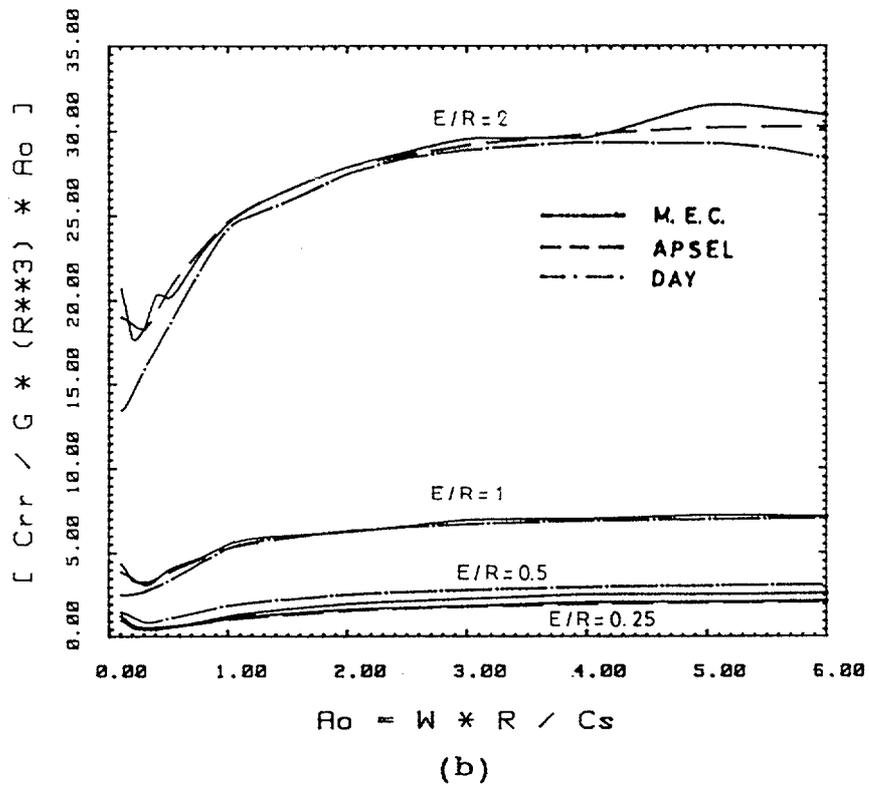
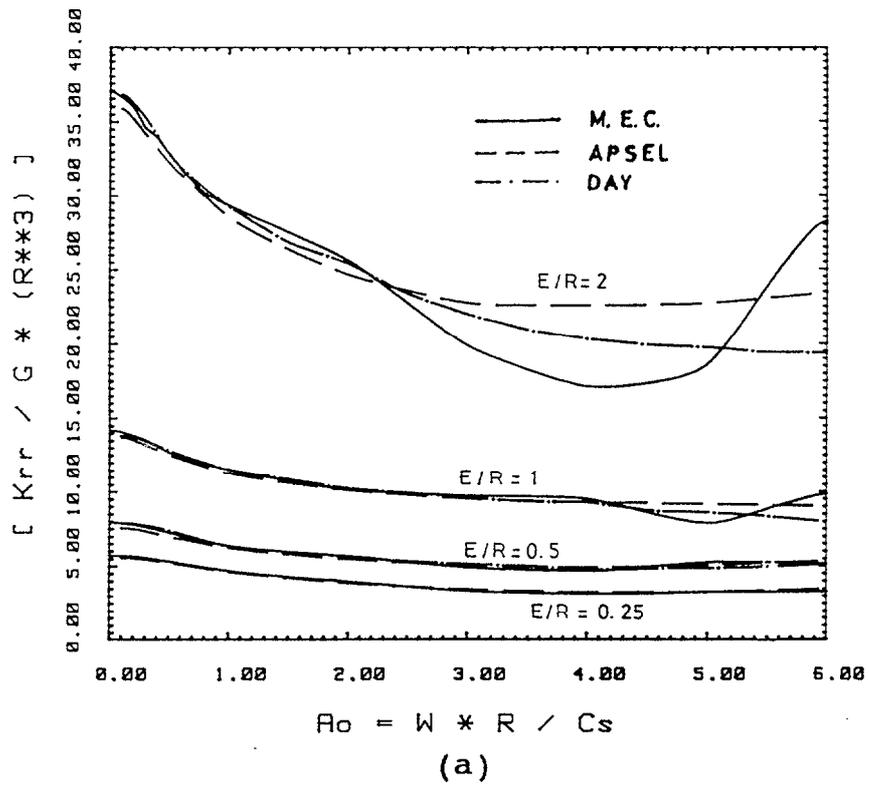


Figura 5.10 a y b Impedancia de cabeceo normalizada, cimentaciones cilíndricas embebidas en el semiespacio viscoelástico.

5.3-2 CIMENTACIONES SEMIESFERICAS

Cuando la geometría de la cimentación en estudio es diferente a un cilindro circular recto, es decir cuando el contorno Γ no es exclusivamente normal a los ejes Z y ρ , se puede utilizar el método propuesto ya que el elemento de contorno axilsimétrico utilizado puede tener cualquier orientación, siempre y cuando se conserve la geometría de revolución implícita en la formulación. Para mostrar la potencia del Método de los Elementos de Contorno se presentan las impedancias dinámicas de cimentaciones semiesféricas embebidas en un semiespacio viscoelástico homogéneo, cuyas características son de una densidad y módulo de rigidez transversal unidad y un valor del coeficiente de Poisson $\nu=1/4$ é introduciendo un factor de amortiguamiento viscoso de un 5% para ambas ondas S y P.

En la figura 5.11, se muestra la discretización utilizada. Los resultados se presentan, en línea continua en las figuras 5.12, hasta 5.16; correspondientes a las impedancias dinámicas de los movimientos de sólido rígido de desplazamiento vertical y horizontal y giros de torsión y cabeceo, así como en la última de esta serie de figuras los valores correspondientes al acoplamiento horizontal-cabeceo; frente a la frecuencia adimensional a_0 y normalizadas de acuerdo con [4.70]. El número de elementos de contorno utilizado es de 62, diez de ellos en la interfase cimiento-terreno.

De la observación de las curvas, se infiere que el comportamiento de este tipo de cimentaciones es similar al de las correspondientes al disco rígido soldado al semiespacio, fig 5.2 a. 5.5, pero con valores de los coeficientes incrementados; tal y como era de esperar a la luz de lo acontecido con las impedancias de las cimentaciones cilíndricas embebidas, tratadas en el apartado anterior.

Además se ha incluido, con línea discontinua en las figuras 5.12 a 5.16, los resultados presentados por Luco y Wong, de la misma cimentación en un semiespacio de idénticas características elásticas pero con unos factores de amortiguamiento viscoso del 1% y 0.5% para las ondas S y P respectivamente. Estos resultados corresponden a la misma representación integral utilizada por Apsel para cimentaciones cilíndricas embebidas.

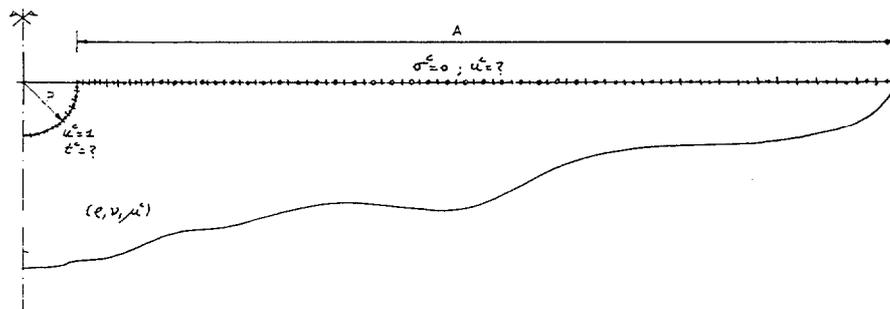


Figura.-5.11

Discretización cimentación rígida semiesférica

A efecto de realizar una comparación más adecuada, ya que los amortiguamientos utilizados en ambos ejemplos no coinciden, en las mismas figuras se han representado, línea de punto y guión, una linealización de las impedancias respecto del índice de amortiguamiento, a partir de las de Luco y Wong, en las que se observa que la parte real alcanza valores inferiores a los que presenta el M.E.C. para todas las frecuencias. El efecto de la linealización sobre la parte imaginaria de la impedancia es el de incrementar su valor situandolo practicamente sobre los valores proporcionados por el M.E.C.. La hipótesis de considerar la influencia del amortiguamiento de tipo lineal, para índices bajos del mismo, es correcta respecto del coeficiente de amortiguamiento y no tanto para la rigidez equivalente.

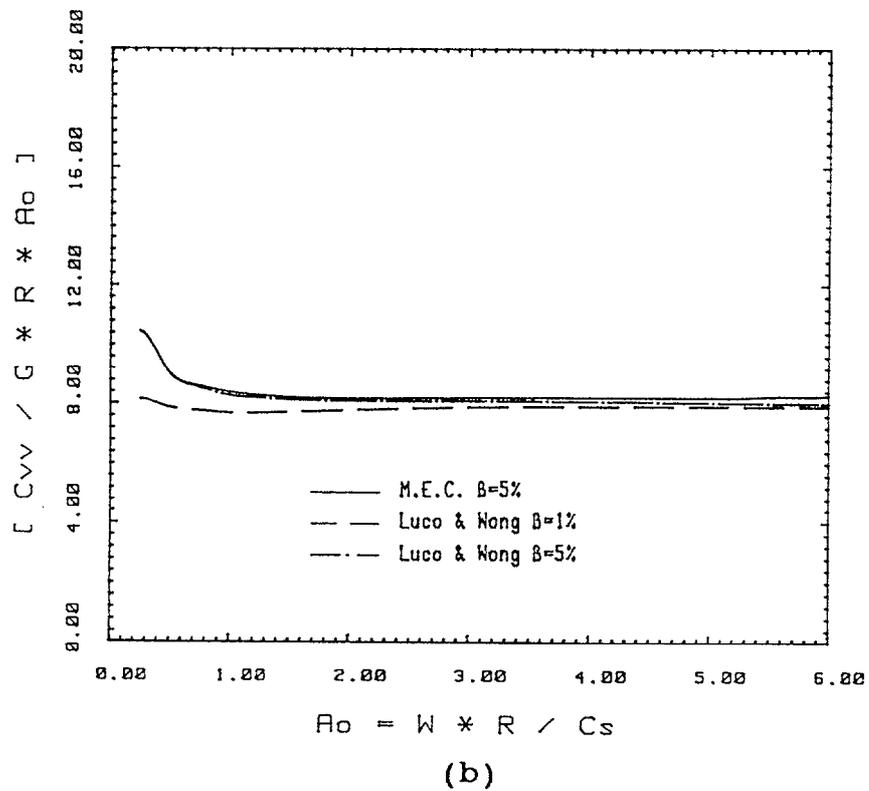
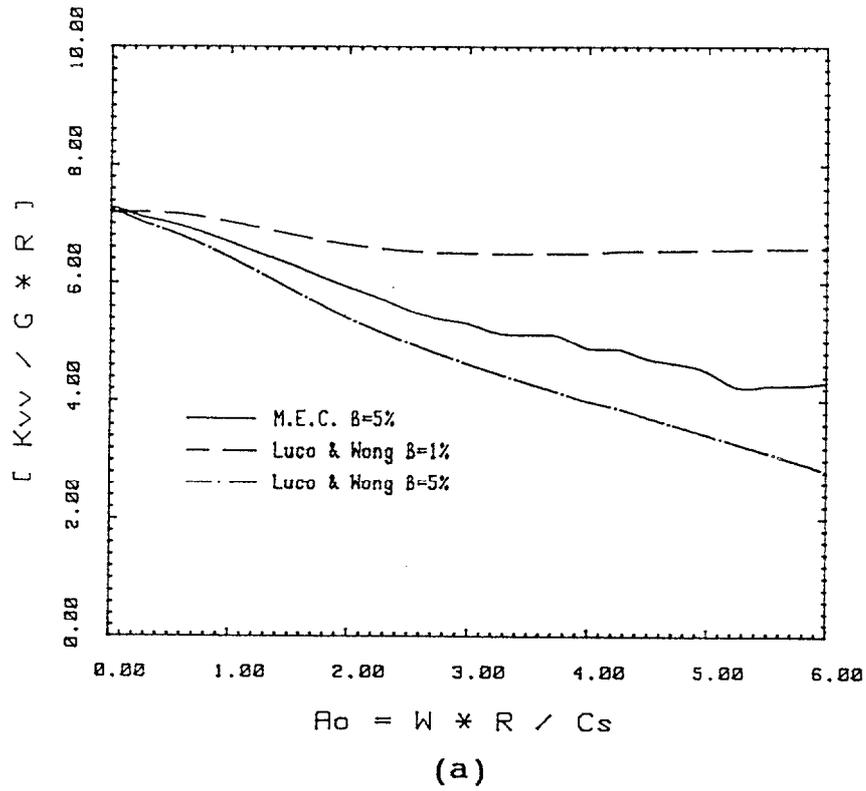


Figura 5.12 a y b Impedancia vertical normalizada, cimentaciones semiesféricas, semiespacio viscoelástico

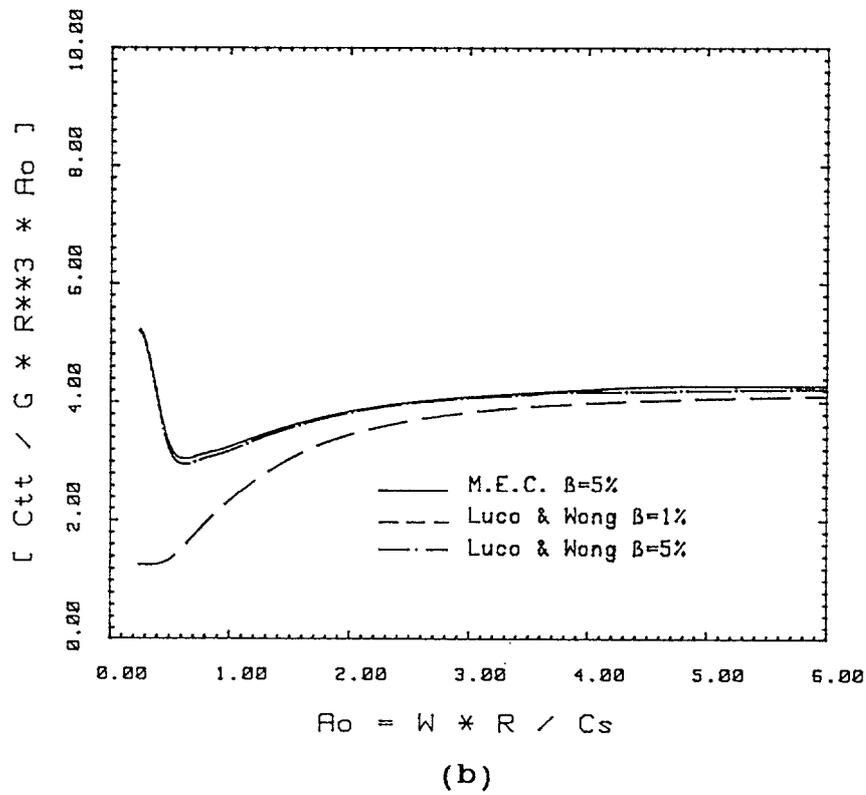
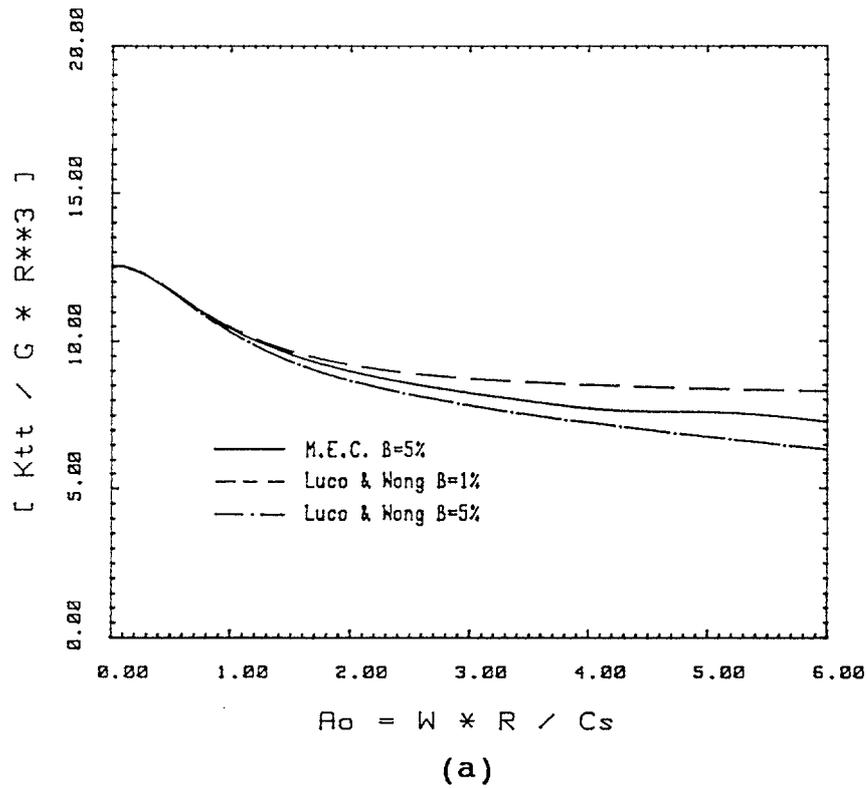


Figura 5.13 a y b Impedancia de torsión normalizada, cimentaciones semiesféricas, semiespacio viscoelástico

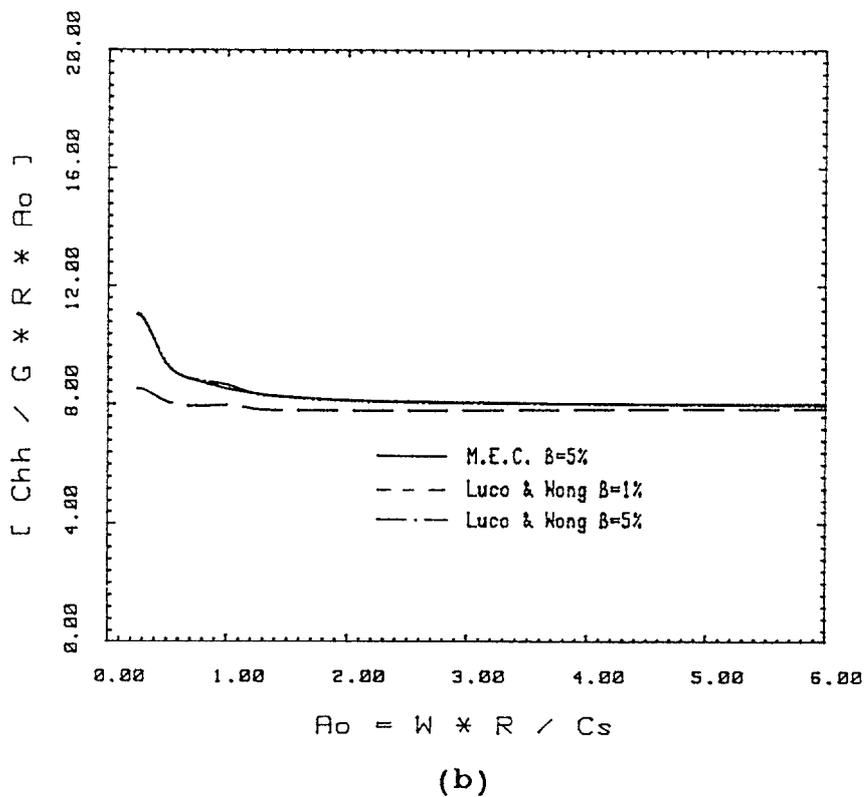
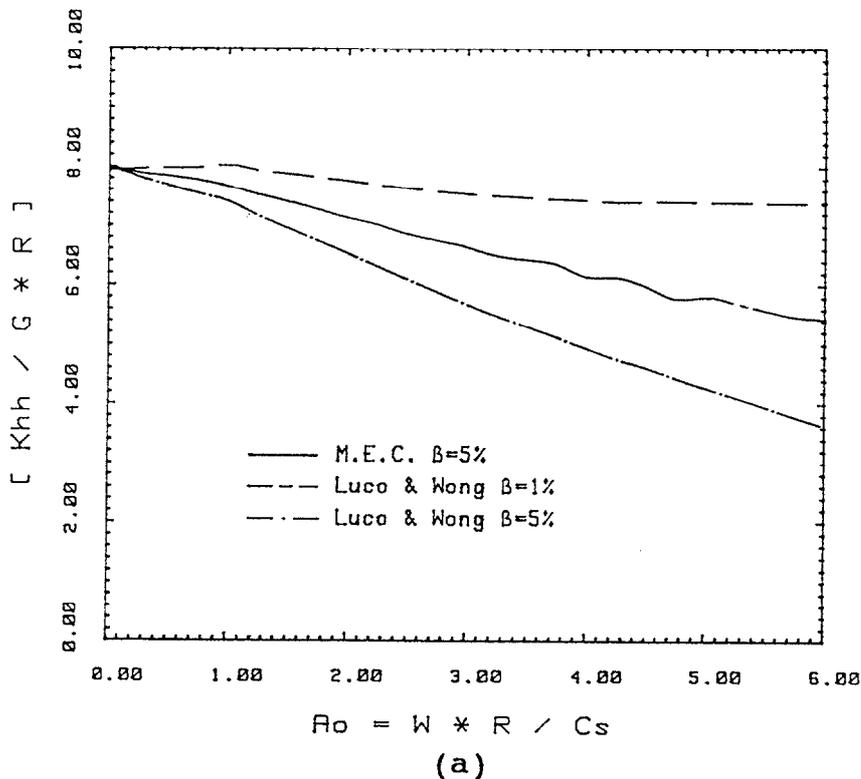
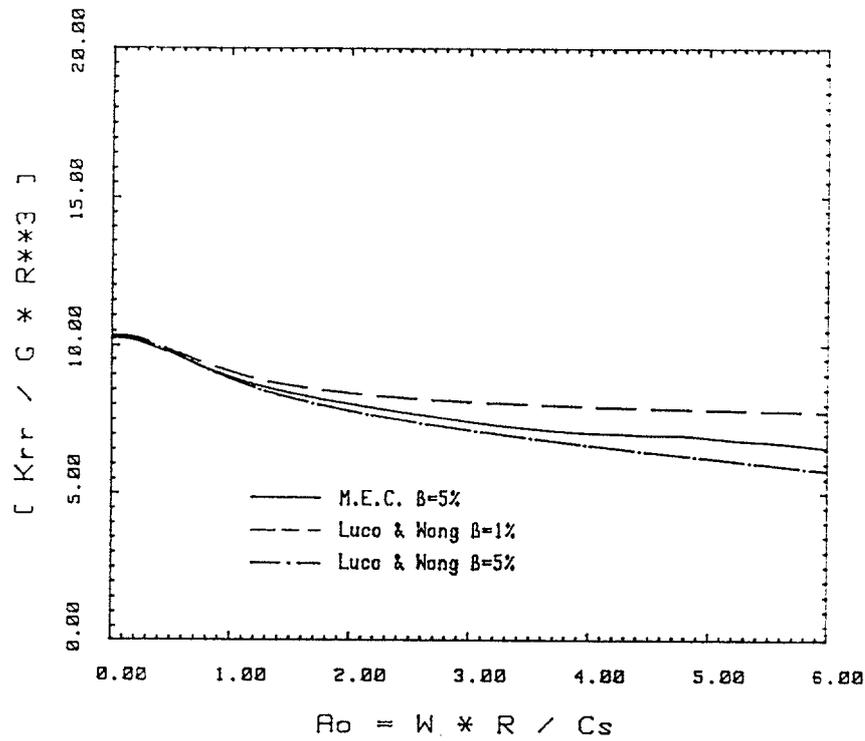
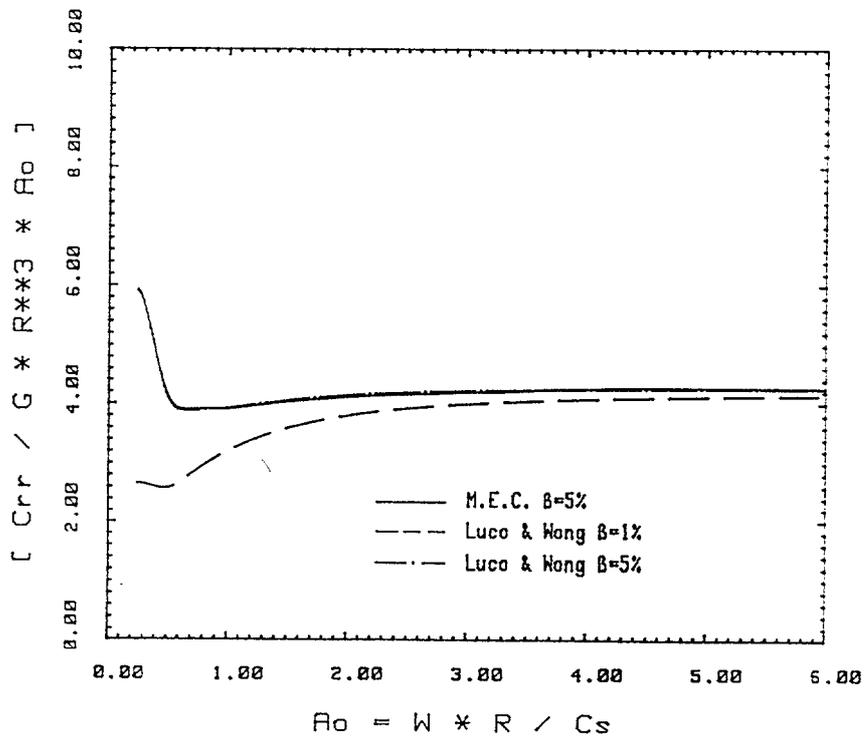


Figura 5.14 a y b Impedancia horizontal normalizada, cimentaciones semiesféricas, semiespacio viscoelástico



(a)



(b)

Figura 5.15 a y b Impedancia de cabeceo normalizada, cimentaciones semiesféricas, semiespacio viscoelástico

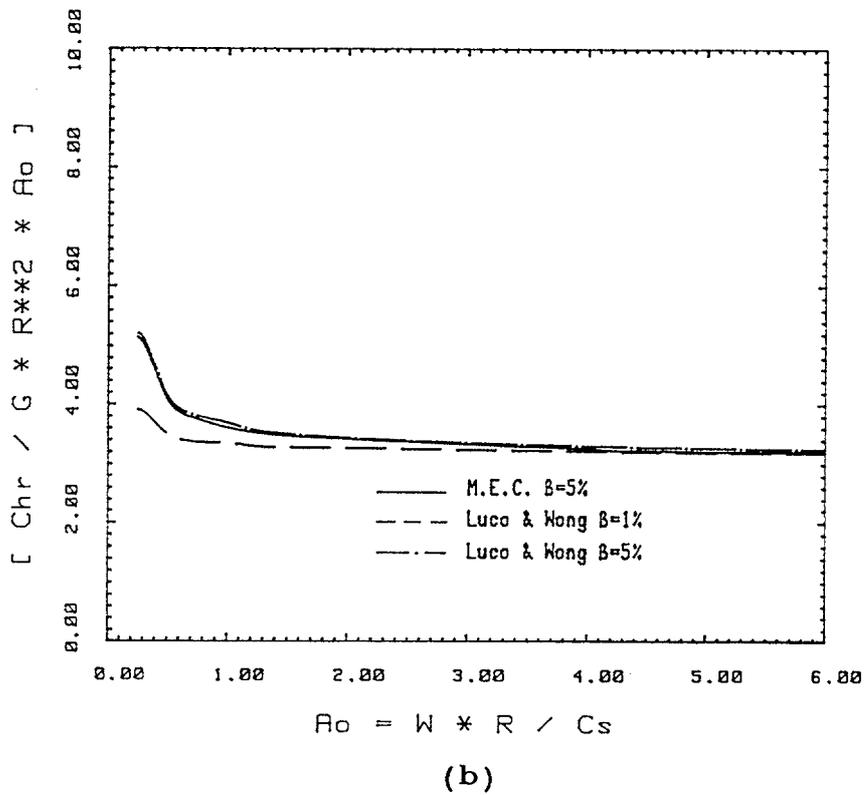
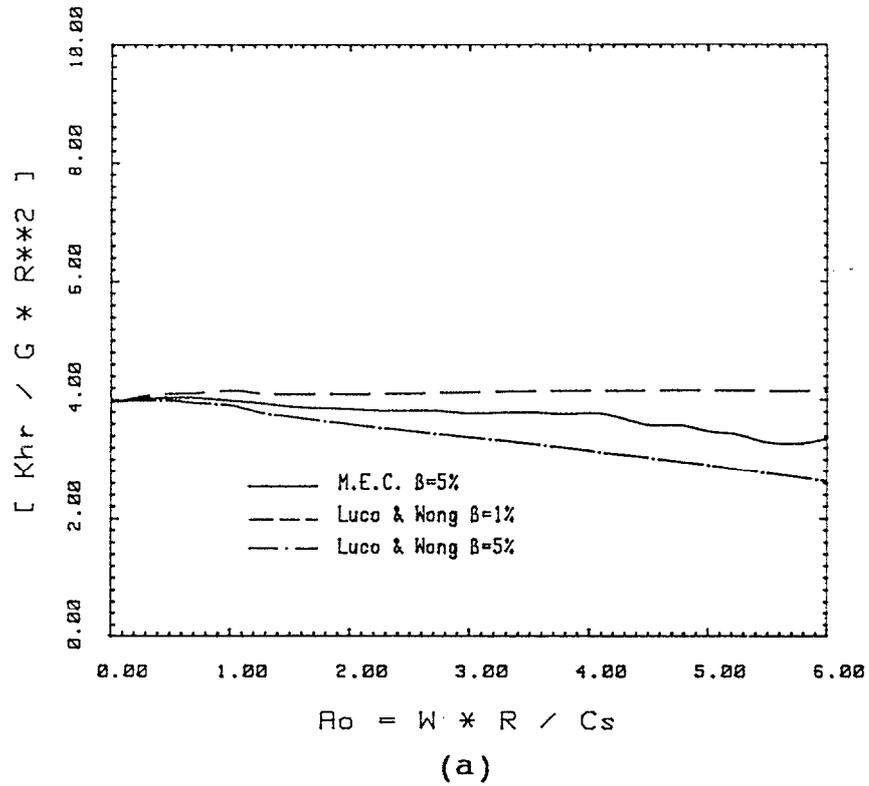


Figura 5.16 a y b Impedancia de acoplamiento horizontal-cabeceo normalizada, cimentaciones semiesféricas; semiespacio viscoelástico

CAPITULO VI

CIMENTACIONES AXILSIMETRICAS EN MEDIOS
ESTRATIFICADOS

6.1 INTRODUCCION

Frecuentemente el terreno en estudio no corresponde al modelo de suelo utilizado, semiespacio homogéneo e isótropo, bien por su morfología intrínseca o por intentar aproximarse a un modelo de suelo de módulo de rigidez variable con la profundidad, modelos de Winkler o Frölich. Por ello es conveniente el poder modelar el terreno como un sólido estratificado, considerando cada estrato como una subregión en las que las características del terreno se definen como constantes es decir cada uno de ellas es un medio homogéneo e isótropo.

En el primer apartado se presenta el estudio de un modelo simple, un estrato de potencia H sustentado por un semiespacio, mediante el que se puede poner de manifiesto la influencia de los diferentes parámetros que intervienen en el mismo como son : potencia relativa del estrato H/R y la rigidez relativa de la base Rcs ; sobre los distintos tipos de cimentaciones consideradas en el capítulo anterior.

En el segundo apartado del capítulo se muestran los resultados obtenidos para un estratigrafía mas compleja del terreno en los casos de cimentaciones superficiales y cilíndricas embebidas.

En ambos apartados se realiza una comparación con los resultados obtenidos por otros autores, con diversos métodos para los mismos ejemplos, a fin de validar el método propuesto de cara a una aplicación práctica del mismo.

6.2 MODELO BICAPA

El objetivo de estudiar este modelo relativamente simple es el que debido a su sencillez el número de parámetros que intervienen es bajo y por tanto permite

realizar un estudio paramétrico del mismo. Además éste modelo muestra el comportamiento de la cimentación cuando aparecen frecuencias de resonancia de estrato que están dadas, para el caso puramente elástico, por la expresión [4.36].

Se considera una geometría del tipo de la figura.-4.1 reducida a un estrato de potencia constante H sobre un semiespacio de rigidez variable.

6.2-1 CIMENTACIONES SUPERFICIALES

Para este tipo de cimentaciones se utilizan discretizaciones como la que se muestra en la figura 6.1 con ocho elementos de contorno en la interfase suelo-cimiento, siete elementos en la superficie libre y ocho elementos en la interfase entre estratos; utilizándose dos modelos de terreno, uno puramente elástico y el otro viscoelástico al incorporar el amortiguamiento del material.

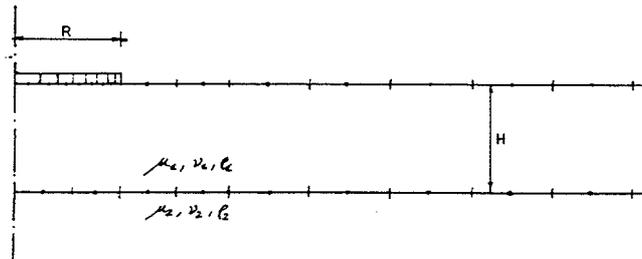


Figura.-6.1 Discretización Cimentación Superficial

6.2-1-1 SUELO PERFECTAMENTE ELASTICO

Con el modelo de suelo perfectamente elástico se presentan resultados correspondientes a dos ejemplos; en el

primero de ellos el semiespacio soporte es casi una base rígida, $Rcs=100$ y en el segundo el valor de este parámetro es de $Rcs=2.5$.

Las características del estrato son : una densidad de 1700 Kg/m^3 ; un módulo de rigidez transversal de 680000 N/m^2 y un coeficiente de Poisson $\nu=0.3$.

En las figuras 6.2 y 6.3 se muestran las partes real e imaginaria de las impedancias vertical y de torsión de la cimentación para diferentes valores del espesor relativo del estrato, $H/R=0.5, 1, 2, 3, 4, 7.5$ adimensionalizadas con respecto a la rigidez estática correspondiente, tabla 6.II, frente a la frecuencia adimensional a_0 del primer estrato.

De acuerdo con la expresión [4.36], la primera frecuencia de resonancia del estrato adimensionalizada esta dada por las siguientes expresiones para las ondas S y P

$$a_{0S} = \frac{\pi R}{2H} \quad \text{Y} \quad a_{0P} = \frac{\pi R}{2H} \frac{C_P}{C_S} \quad [1.6]$$

que para los distintos valores del espesor relativo H/R adoptan los valores dados en la tabla 6.I

Tabla.-6.I
Primera frecuencia propia de estrato

H/R	Ondas S	Ondas P
0.5	3.1416	5.8774
1.0	1.5708	2.9387
2.0	0.7859	1.4694
3.0	0.5236	0.9796
4.0	0.3927	0.7346
7.5	0.2894	0.3918

Para ambas impedancias se puede observar una fuerte oscilación a medida que aumenta la frecuencia y que aquella se suaviza y se desplaza hacia frecuencias más altas al incrementarse el valor del espesor relativo del estrato.

En las gráficas de la impedancia vertical y para su parte real, rigidez equivalente, se observa que para los valores bajos del parámetro H/R los picos de resonancia son pocos y están claramente asociados a las primeras frecuencias propias del estrato y en su parte imaginaria toman valores prácticamente nulos para las frecuencias inferiores a la de resonancia en el caso de $H/R=1$ y valor nulo en todo el rango de frecuencias para el valor 0.5' indicando la poca absorción de energía por parte del semiespacio soporte, que es prácticamente una base rígida.

Cuando la potencia del estrato se incrementa, el número de picos y valles es mayor y se extiende hacia frecuencias inferiores, para la rigidez equivalente, estando estos asociados en su mayor parte a los diferentes armónicos de las frecuencias naturales del estrato para ambas ondas, aunque como se observa en la figura aparecen picos que no están claramente asociados a ninguna de estas ondas, pudiéndose imputar este hecho a la existencia de ondas diferentes a las citadas o a combinaciones de las primeras.

En cuanto a la parte imaginaria de esta impedancia y para los valores intermedios del parámetro, las gráficas muestran como se incrementa la energía disipada por el modelo y desde frecuencias cada vez inferiores a medida que éste aumenta

Para la impedancia de torsión, el comportamiento cualitativo, tanto para la parte real como imaginaria, es similar a la anterior presentando ésta picos de gran magnitud para los valores dos primeros valores de H/R , suavizándose rápidamente a medida que se incrementa el valor del parámetro, asociados fundamentalmente a las ondas

S excepto para los valores de $H/R=0.5$ y 1.0 para los que los picos situados a las frecuencias $a_0=5.0$ y 6.0 que aparentemente estan asociados a ondas P.

Los resultados que se presentan, pese a no haber sido comparados con los de otros autores representan adecuadamente el comportamiento que se esperaba del modelo, teniendo en cuenta la rigidez de la base, que produce grandes amplitudes en los picos de resonancia y el nulo amortiguamiento utilizado lo que implica que toda la energía se extrae del modelo por radiación.

El segundo ejemplo ha sido tomado de la Tesis Doctoral de J.Cano, el cual procede de la de Chapel. Tal y como se dijo anteriormente el valor de la rigidez relativa de la base con respecto al estrato es de 2.5 y los resultados obtenidos se presentan con linea continua en las figuras 6.3a y b las partes real e imaginaria de las impedancias vertical para valores del espesor relativo del estrato de 0.5 y 1.0 ; como factor de normalización se ha utilizado la rigidez estática de la cimentación correspondiente al semiespacio. En las mismas figuras se muestran los resultados de Luco, en linea discontinua; los de Chapel (+) y los de Cano (*) a fin de comparar los obtenidos por estos autores.

Las figuras muestran, a igualdad de las del ejemplo anterior la fuerte dependencia de la impedancia con la frecuencia. En las figuras correspondientes a $H/R=0.5$ se observan discrepancias entre los resultados presentados y los del resto ya que aparecen pequeñas oscilaciones a frecuencias inferiores a la primera frecuencia propia del estrato para las ondas S e intermedias entre esta y la correspondiente a las ondas P, tanto en la parte real como en la imaginaria, ademas de la magnitud del pico de resonancia asociado a esta última que pueden ser debidos por una parte a errores de tipo numérico o a la presencia de ondas distintas de las citadas que extraigan energía del

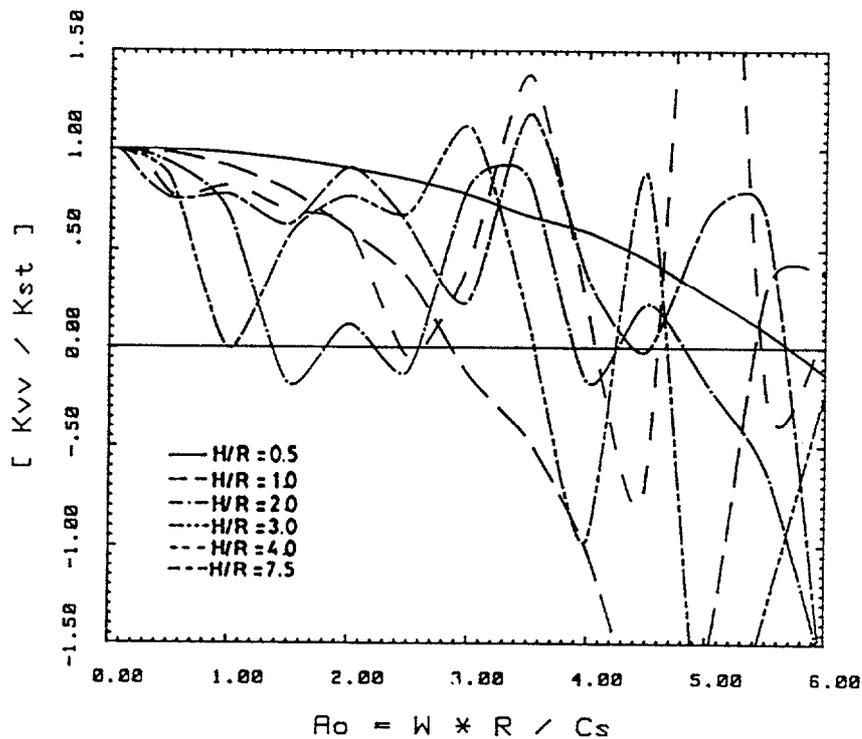
modelo. Los valores correspondientes al coeficiente de amortiguamiento presentan valores bajos para frecuencias inferiores a la de resonancia, para la que se observa existe un pico de considerable valor.

El comportamiento para las figuras b es similar al descrito si bien los picos adoptan valores mayores y de nuevo se manifiesta el mismo tipo de discrepancia con los resultados mostrados.

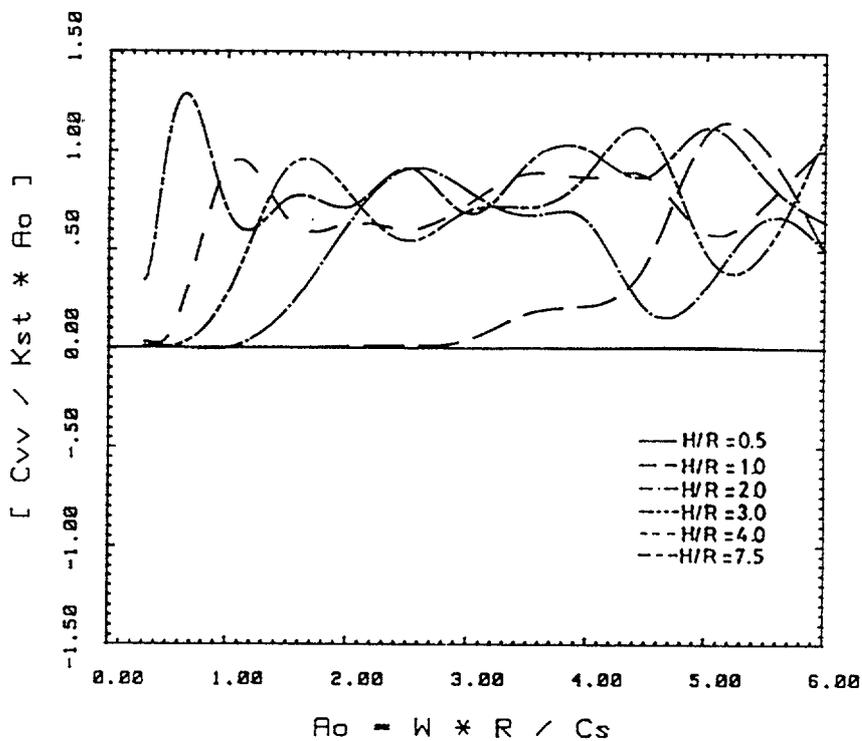
De cualquier forma estas discrepancias no son de una cuantía no excesivamente grandes con respecto a Luco y Cano, mejorando los resultados presentados por Chapel.

Tabla.-6.II
Rigideces Estáticas Vertical y de Torsión
Cimentación Superficial sobre base rígida, $\nu=0.3$

H/R	K_{vv}	K_{tt}
0.5	0.338300 E +08	0.380025 E +08
1.0	0.192651 E +08	0.322722 E +08
2.0	0.128295 E +08	0.307551 E +08
3.0	0.109464 E +08	0.305405 E +08
4.0	0.100406 E +08	0.304865 E +08
7.5	0.878636 E +07	0.304598 E +08
∞	0.777143 E +07	0.290133 E +08

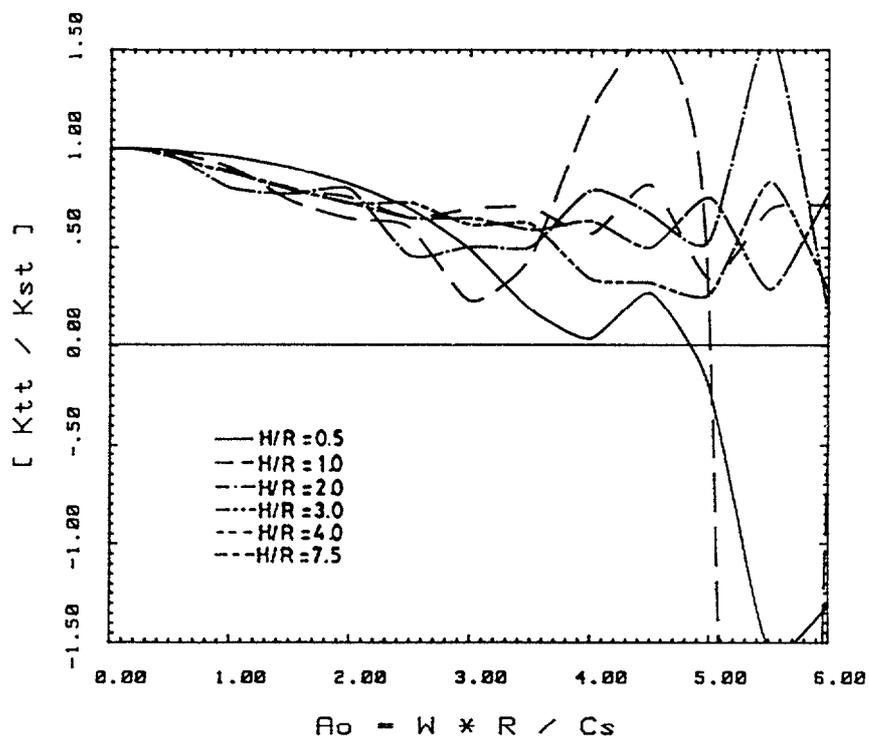


(a)

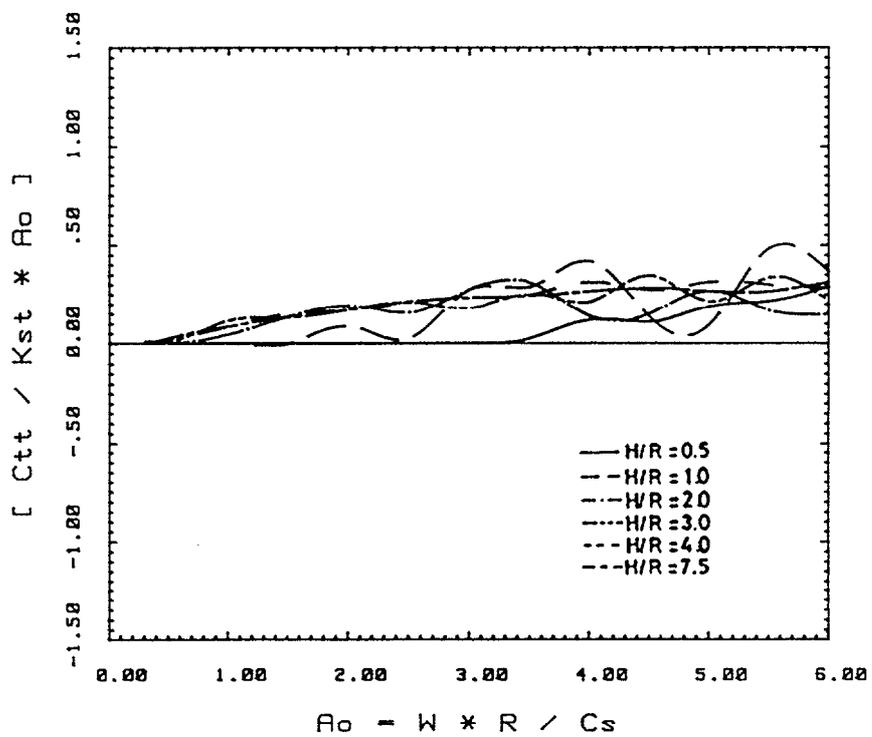


(b)

Figura 6.2 a y b Impedancia vertical, estrato de potencia variable sobre semiespacio rígido

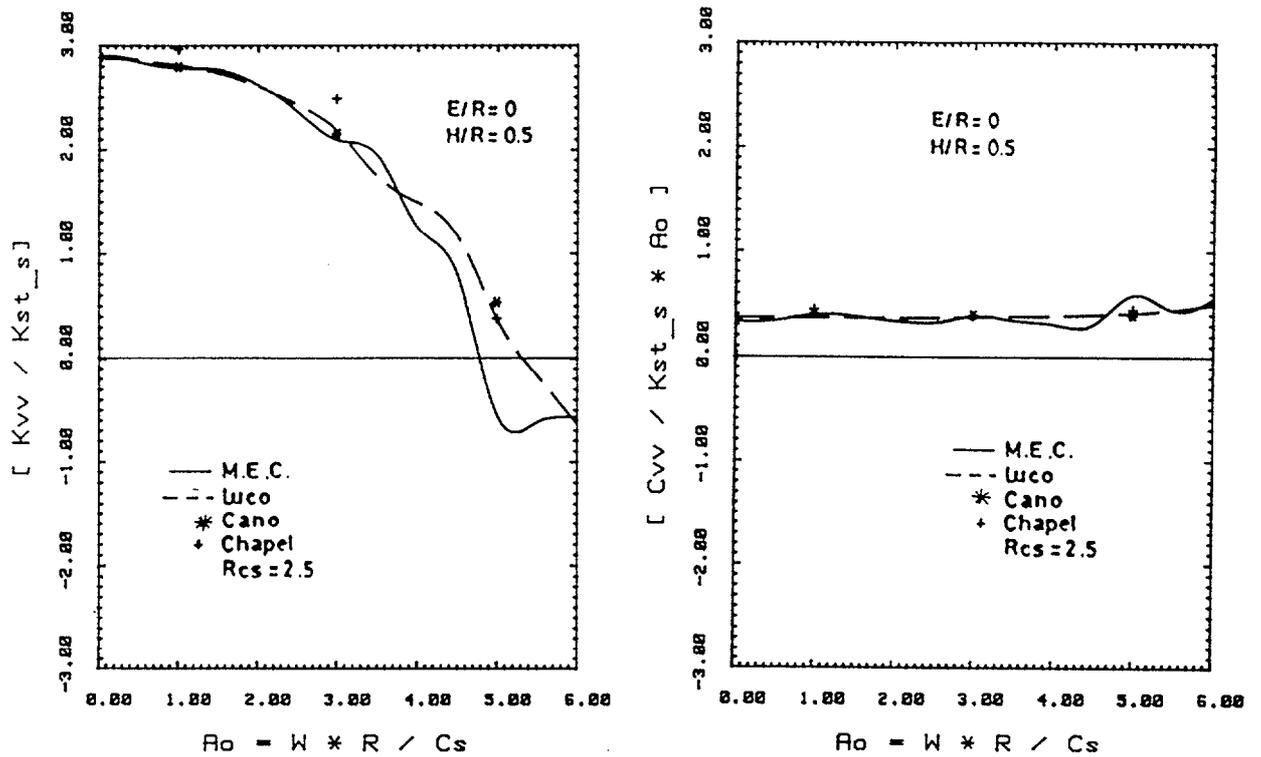


(a)

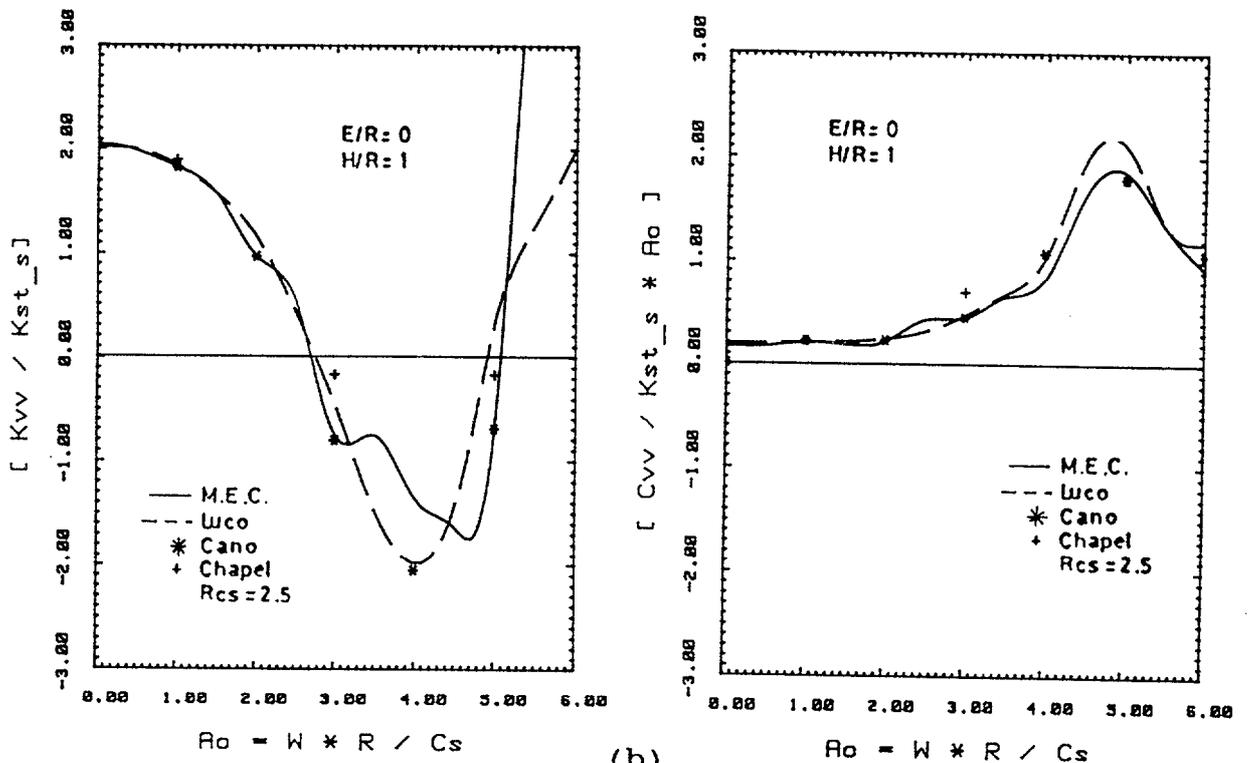


(b)

Figura 6-3 a y b Impedancia de torsión, estrato de potencia variable sobre semiespacio rígido



(a)



(b)

Figura 6.4 a y b Parámetros de Veletsos γ vertical, estrato de potencia variable sobre semiespacio $Rcs=2.5$

6.2-1-2 ESTRATO Y SEMIESPACIO VISCOELASTICOS

De acuerdo con lo dicho anteriormente, todos los materiales reales tienen amortiguamiento. Con objeto de contrastar los resultados obtenidos mediante el M.E.C. y los presentados por Kausel y Ushijima usando una formulación del M.E.F. capaz de incorporar el amortiguamiento del material $\xi = 5\%$, sobre base rígida, se ha variado el parámetro de la rigidez relativa del semiespacio $Rcs=2,4,100$ con potencias relativas del estrato de $H/R=2$ y 3 .

En las figuras 6.5a,b y 6.6a,b; se muestran las partes real e imaginaria de las impedancias vertical y de torsión, normalizadas con respecto a la rigidez estática correspondiente, frente a la frecuencia adimensional a_0 del estrato y valor de $H/R=2$. En ellas se incluyen los valores obtenidos por los autores citados en línea de raya y guión para base rígida. Como se puede observar, el comportamiento cualitativo es similar, especialmente cuando la rigidez relativa aumenta. Este efecto tiene importancia en las impedancias verticales y muy poca en las de torsión.

En la impedancia vertical, tanto en su parte real como imaginaria, las curvas tienen una fuerte dependencia de la frecuencia mostrando picos y valles asociados a las frecuencias propias de estrato para las ondas S y P y algunas otros intermedios, no imputables directamente a las anteriores, estando estos mejor fijados a las frecuencias correspondientes y de menor magnitud que en el caso puramente elástico.

Los valores obtenidos por el M.E.C., en su parte real, presentan valores inferiores a los correspondientes del M.E.F. para el caso de base rígida, observándose además como a medida que el parámetro Rcs evoluciona hacia valores menores la rigidez disminuye a medias y altas frecuencias, suavizándose las curvas, mientras que la posición de los picos de resonancia permanece prácticamente constante.

El coeficiente de amortiguamiento presenta un comportamiento diametralmente opuesto incrementandose su valor a medias y altas frecuencias a medida que se desrigidiza el semiespacio soporte, debido a la mayor energía disipada, manteniendose siempre superior al valor proporcionado por los elementos finitos en la hipótesis de base prácticamente rígida, mientras que para valores de la frecuencia menores que la primera de resonancia, el coeficiente se mantiene siempre superior a aquellos.

La impedancia de torsión, muestra un comportamiento similar al de la impedancia vertical pero mucho más suave.

Las discrepancias en cuanto a picos de resonancia que no aparecen bien a través del M.E.C. o del M.E.F. pueden ser debidos tal y como se ha dicho a la aparición de otros tipos de onda y tambien pudiera ser que el modelo empleado por los elementos finitos utilice discretizaciones muy groseras para poder analizar correctamente el modelo.

En las figuras 6.7a,b y 6.8a,b, se muestran los mismos resultados que en el caso anterior para un valor de $H/R=3$, para los que son totalmente válidos los comentarios del párrafo precedente, teniendo en cuenta que al aumentar la potencia del estrato el numero de picos y valles aumenta al desplazarse las frecuencias propias hacia valores inferiores, de acuerdo con la tabla 6.I, y por tanto incrementandose el número de armónicos de las mismas que intervienen. Ademas es de destacar que el comportamiento, tanto cuantitativo como cualitativo de las curva correspondiente a la parte real de la impedancia vertical entorno a $a_0=2.0$ y 5.0 es diferente, ya que el M.E.C. alcanza valores de la rigidez negativos para el valle situado en $a_0=4.3$, mientras que el otro método se mantiene siempre positivo.

En otra serie de figuras ~~6.9a,b~~ y 6.10a,b se presenta la influencia del amortiguamiento, para las impedancias

vertical y de torsión, cuando aquel adopta los valores siguientes $\xi=5,10,20\%$ para $H/R=2$ y $Rcs=100$. Se puede observar que, al incrementar el índice de amortiguamiento, en los resultados correspondientes al método propuesto se producen dos efectos claramente diferenciados.

El primero, es la suavización de la curva de respuesta de la cimentación para ambas impedancias y el segundo, la disminución de la parte real, fundamentalmente en la impedancia vertical llegando a adoptar para el índice más alto, valores nulos y negativos para gran parte del rango de frecuencias estudiado. Las gráficas presentadas por Kausel y Ushijima muestran un comportamiento diferente, si bien se produce el suavizado de la respuesta, no ocurre el efecto de desrigidización apuntado; contradiciendo de esta manera lo que acontece para estas mismas cimentaciones sobre el semiespacio viscoelástico al aumentar ξ .

En cuanto a la parte imaginaria, los valores obtenidos se incrementan a medida que aumenta el índice de amortiguamiento utilizado. Con la formulación de elementos finitos esto no ocurre siempre así adoptando valores inferiores del coeficiente para índices mayores contradiciendo de nuevo los resultados del semiespacio.

El estudio de la influencia del espesor relativo del estrato se muestra en las figuras 6.11a,b y 6.12a,b con $Rcs=100$ en el M.E.C. y los correspondientes de Kausel y Ushijima para las impedancias vertical y de torsión, ambos para $\xi=5\%$ y ya ha sido en parte comentado en párrafos anteriores.

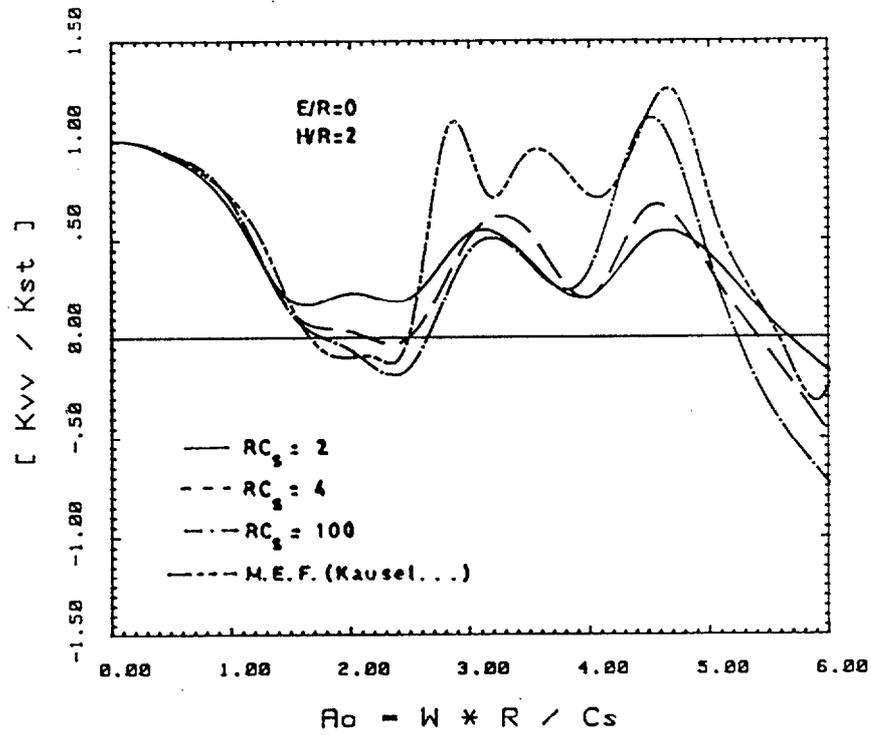
Como ocurría en los diferentes parámetros anteriormente estudiados, la influencia del espesor relativo del estrato tiene importancia en la impedancia vertical fundamentalmente siendo poco relevante en la de torsión debido a que esta última está excitada tan solo por

ondas de tipo SH o SV mientras que la primera lo es fundamentalmente por las ondas P.

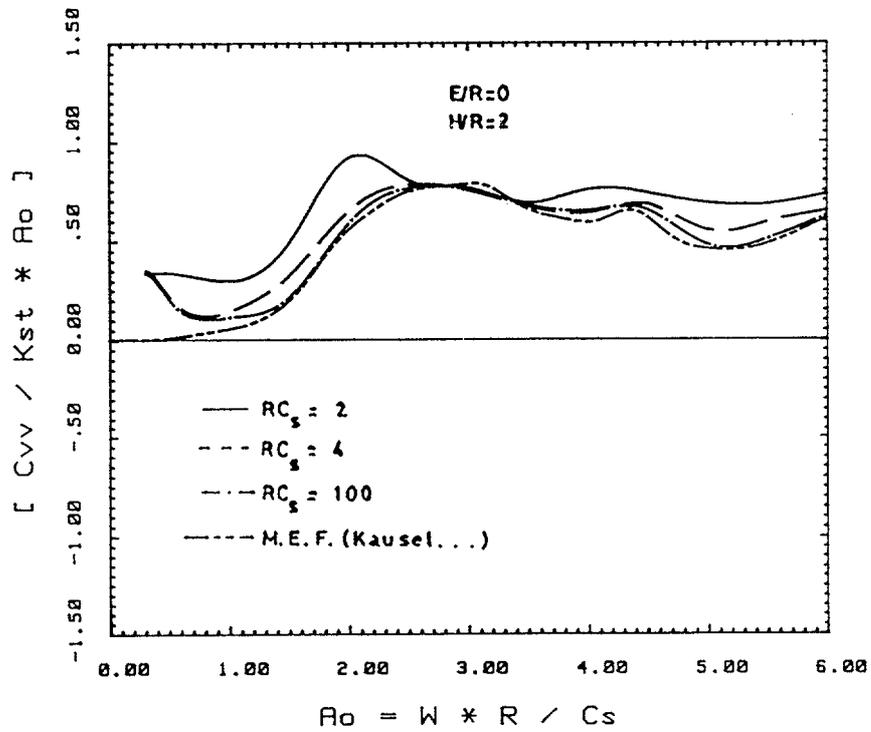
En la tabla 6.III, se dan las rigideces estáticas correspondientes a una cimentación superficial en medios bicapa en función de los parámetros Rcs y H/R para un estrato de las mismas características que el del caso elástico salvo en el coeficiente de Poisson que toma a igualdad que en el M.E.F. el valor $\nu=1/3$ y para $\xi=5\%$.

Tabla.-6.III Rigideces Estáticas Cimentación Superficial, estrato $\nu=1/3$

H/R	Rcs	K_{vv}	K_{tt}
2	2	0.117477 E +08	0.303122 E +08
	4	0.130316 E +08	0.303765 E +08
	100	0.135539 E +08	0.307551 E +08
3	2	0.104993 E +08	0.300969 E +08
	4	0.112153 E +08	0.301649 E +08
	100	0.114990 E +08	0.305435 E +08
∞	1	0.811940 E +07	0.290133 E +08

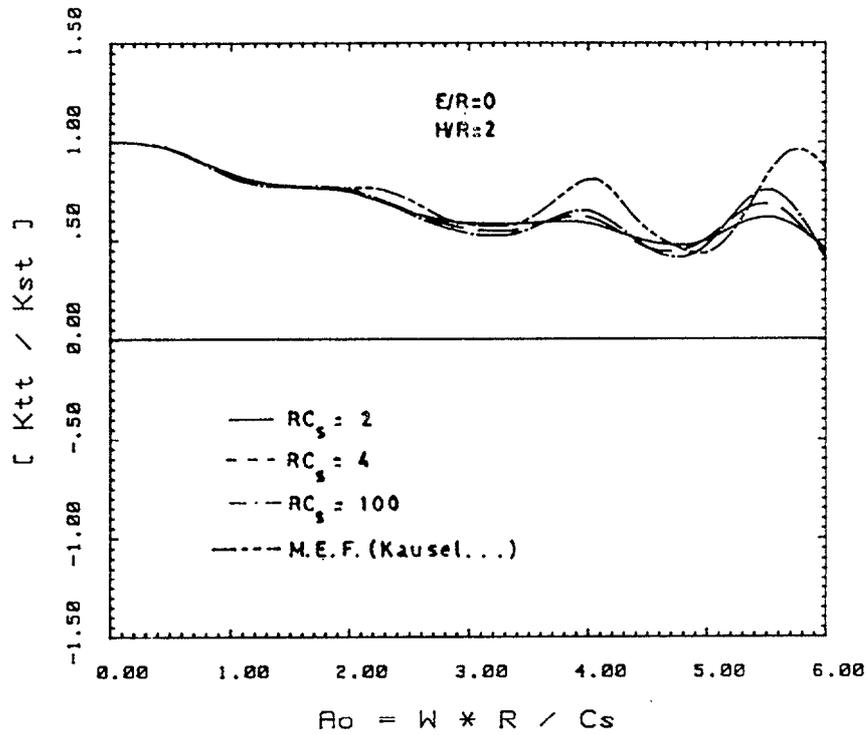


(a)

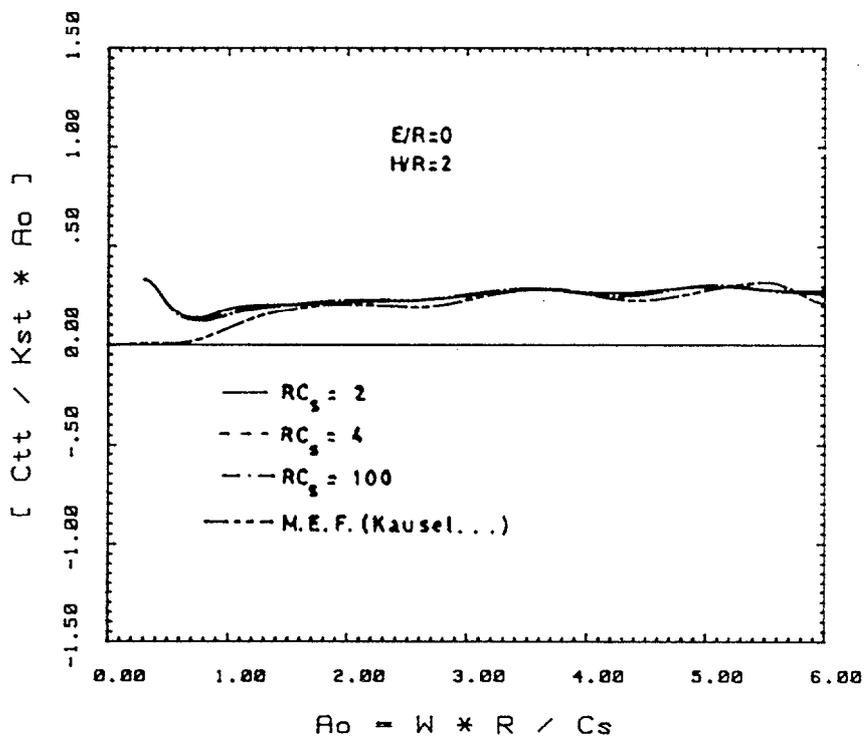


(b)

Figura 6.5 a y b - Impedancia Vertical. - Estrato y semiespacio viscoelásticos.

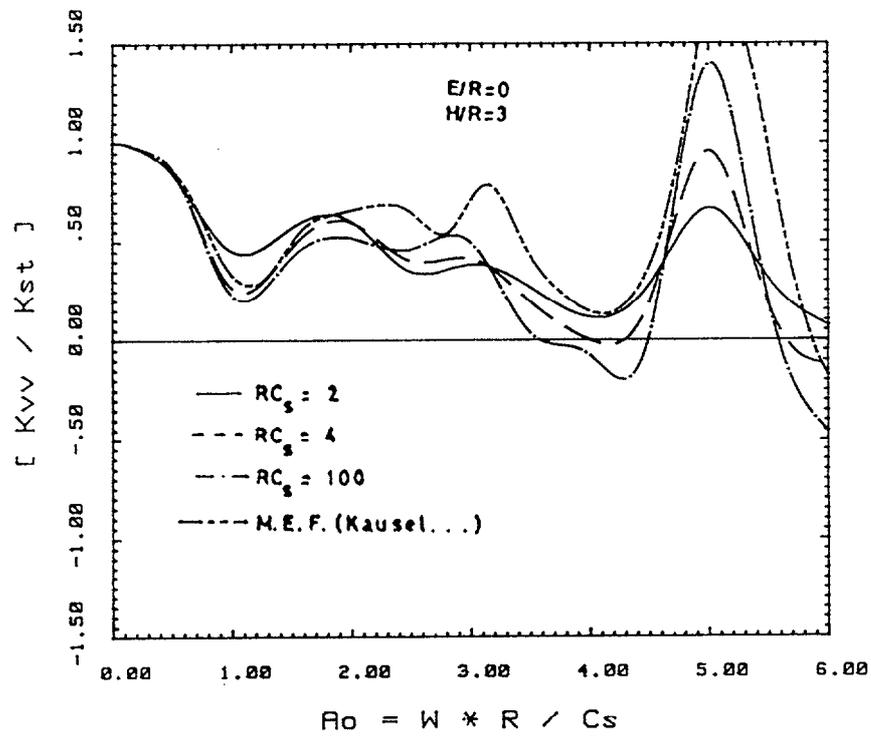


(a)

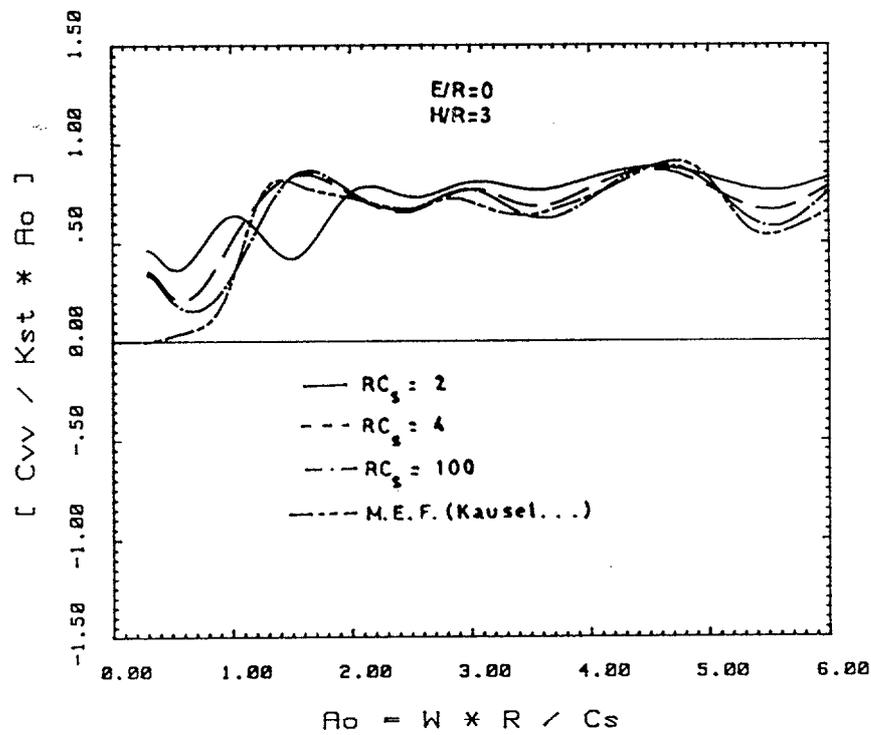


(b)

Figura 6.6 a y b Impedancia de Torsión. Estrato y semiespacio viscoelásticos.

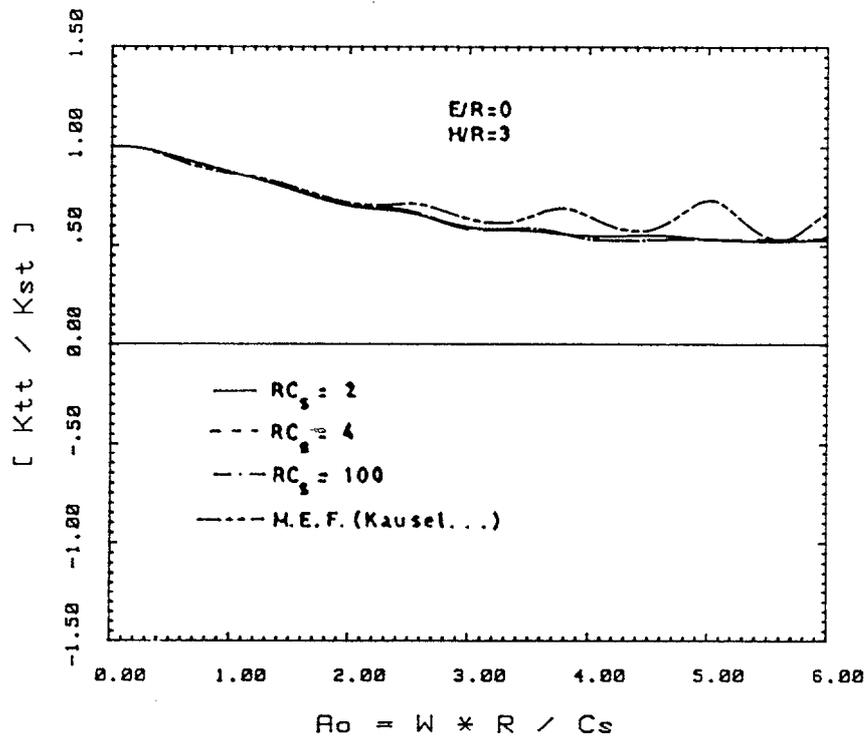


(a)

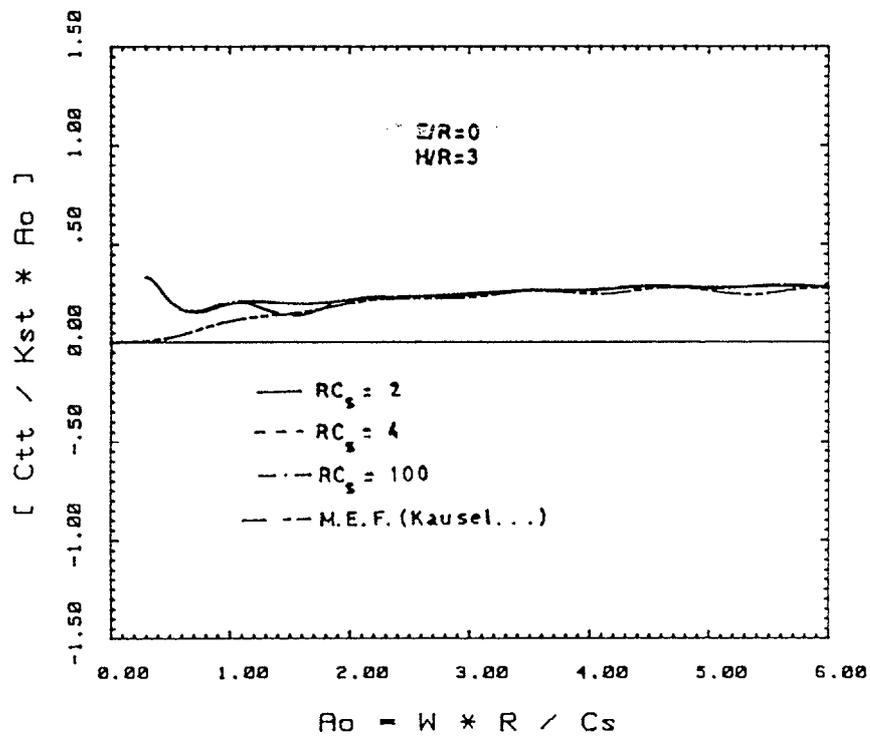


(b)

Figura 6.7 a y b Impedancia Vertical: - Estrato y semiespacio viscoelásticos.

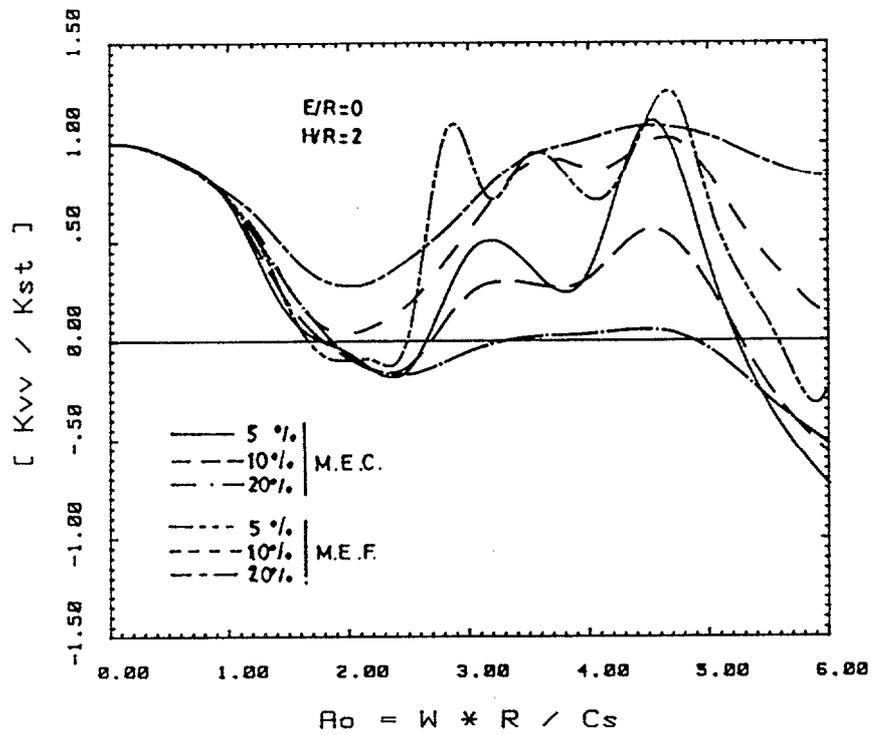


(a)

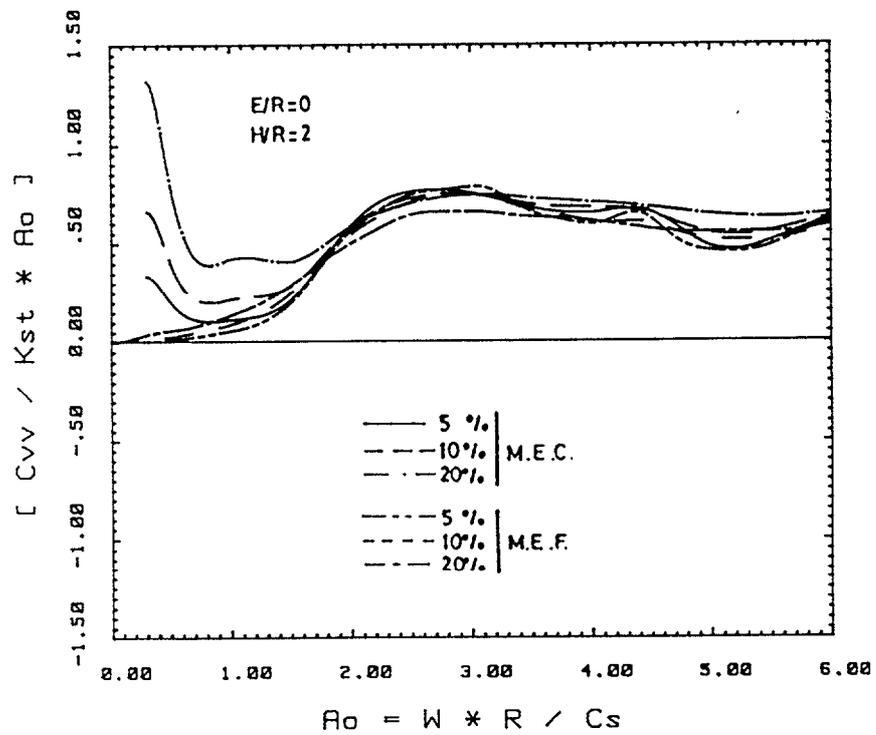


(b)

Figura 6.8 a y b Impedancia de Torsión. Estrato y semiespacio viscoelásticos.

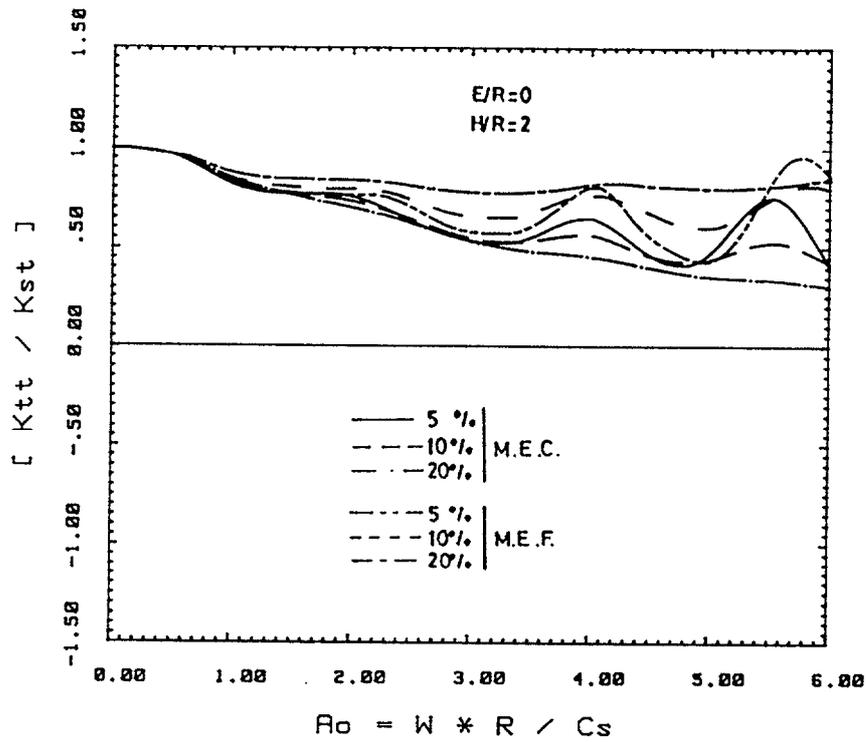


(a)

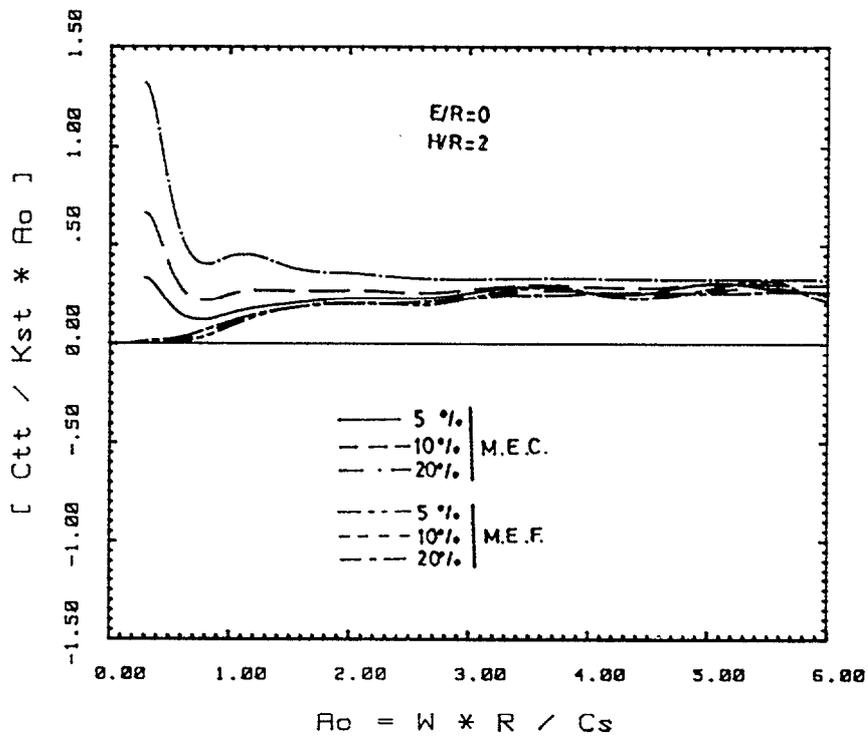


(b)

Figura 6.9 a y b Impedancia Vertical. Influencia del amortiguamiento. Estrato $H/R=2$, sobre base rígida

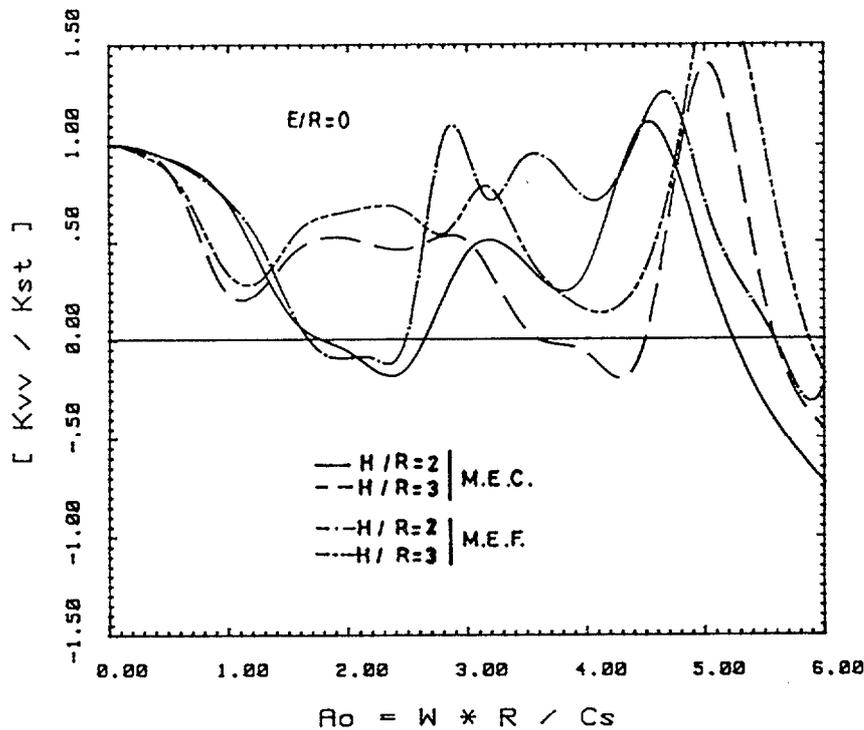


(a)

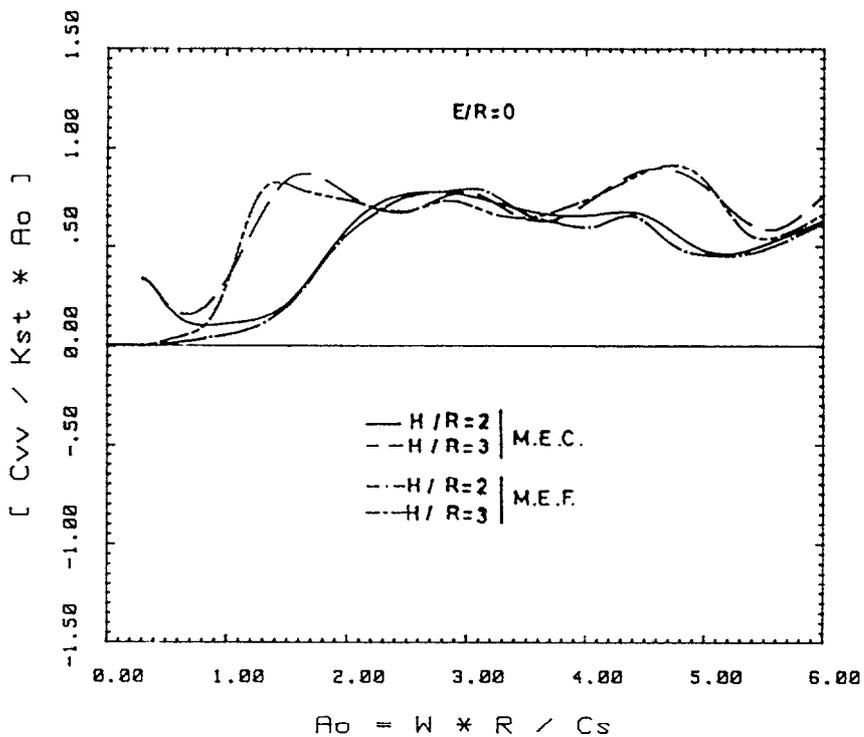


(b)

Figura 6.10 a y b Impedancia de Torsión. Influencia del amortiguamiento. Estrato $H/r=2$, base rígida.

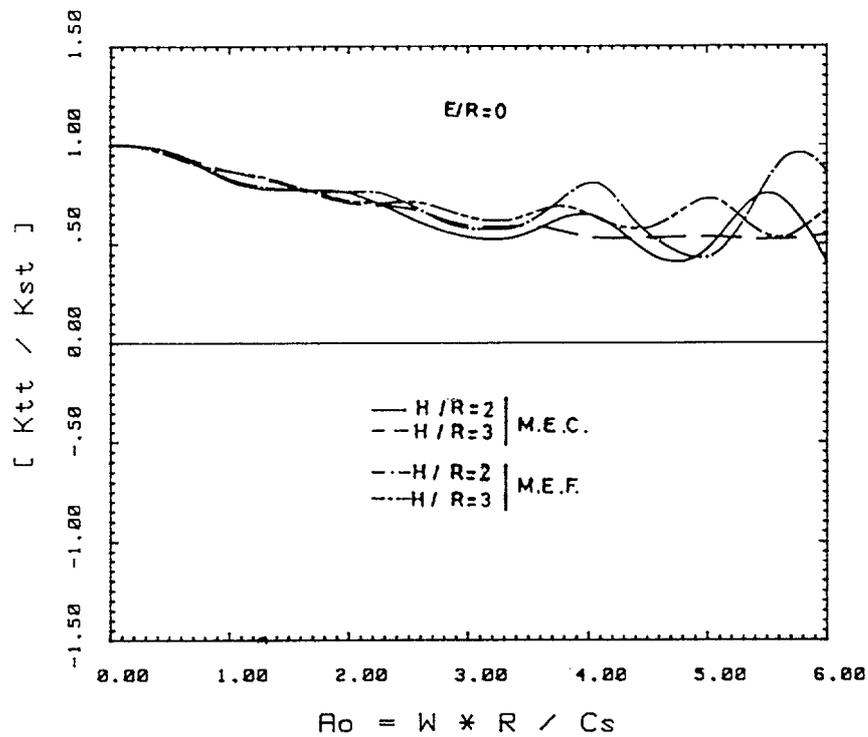


(a)

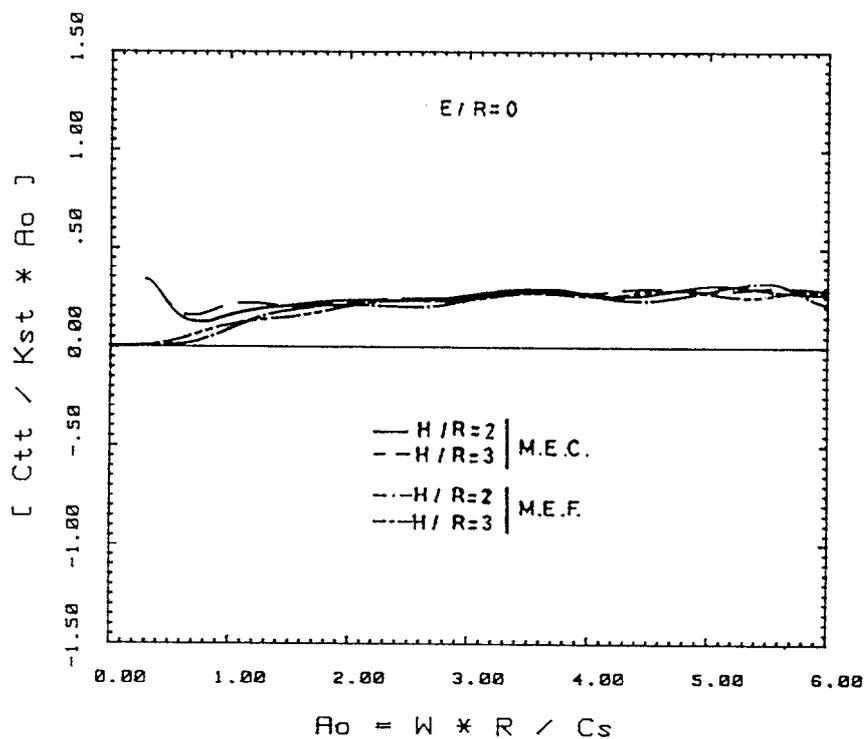


(b)

Figura 6.11-a y b- Impedancia Vertical. Influencia del espesor relativo del estrato, base rígida.



(a)



(b)

Figura 6.12 a y b Impedancia de Torsión. Influencia del espesor relativo del estrato, base rígida.

6.2.2 CIMENTACIONES EMBEBIDAS EN MEDIOS BICAPA VISCOELASTICOS

De acuerdo con lo expuesto en la introducción del capítulo, se muestran en este apartado los resultados obtenidos a través del M.E.C. para cimentaciones embebidas en modelos de terreno estratificado bicapa. Se estudian dos tipos de cimentación, cilíndricas y semiesféricas.

En las primeras se analiza su comportamiento ante excitaciones vertical y de torsión y las segundas frente a la totalidad de tipos de excitación posibles.

6.2-2.1 CIMENTACIONES CILINDRICAS

Como ejemplo de cimentación cilíndrica embebida, y a efecto de comparación, se muestran los resultados obtenidos para una cimentación con un grado de embebimiento igual a la unidad y como en casos anteriores los parámetros de rigidez y potencia relativas del estrato variables, con unas características mecánicas del mismo idénticas a las del correspondiente estudio de cimentaciones superficiales.

Las constantes del semiespacio soporte son : una densidad $\rho=2100 \text{ Kg/m}^3$, coeficiente de Poisson $\nu=0.25$ y factor de amortiguamiento $\xi=5\%$, siendo el módulo de rigidez transversal variable a fin de conseguir el valor deseado de la rigidez relativa de la base respecto al estrato, parámetro Rcs .

La discretización utilizada consta de 81 elementos de contorno distribuidos de la forma siguiente: 29 en la superficie libre, 20 en la zona de contacto y 32 en la interfase entre el estrato y el semiespacio, tal y como se muestra en la figura 6.13.

En las figuras 6.14 y 6.15 a y b se presenta la parte real e imaginaria de las impedancias vertical y de

torsión normalizadas con respecto a su correspondiente valor estático, para $H/R=2$ y valores de $Rcs=2,4,100$, este último con objeto de realizar una comparación con los resultados presentados por Kausel y Ushijima para el mismo tipo de cimentación obtenidos por medio del M.E.F.

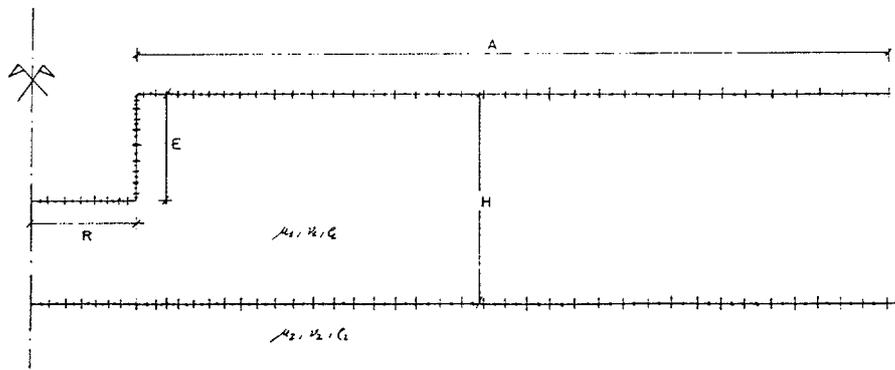


Figura.-6.13

Discretización cimentación embebida, medio bicapa

Tal y como ocurre para el caso de cimentación superficial el comportamiento cualitativo es correcto en todo el rango de frecuencias estudiadas, especialmente para $Rcs=100$.

En la impedancia vertical y en su parte real se observa que el M.E.C. obtiene valores inferiores de la rigidez vertical, a los correspondientes del M.E.F., Rcs infinito; mientras que el coeficiente de amortiguamiento correspondiente a ésta impedancia los valores que se alcanzan son similares a alta frecuencia, produciéndose las ya observadas discrepancias a frecuencias inferiores a la primera frecuencia propia de estrato, para las que el método propuesto da valores superiores.

La impedancia de torsión, en su parte real e imaginaria, muestra un comportamiento similar, si bien la curva tiene una variación más suave con la frecuencia, fundamentalmente a medias y altas frecuencias.

Respecto a la variación del parámetro de rigidez relativa del semiespacio soporte, al disminuir este es el de suavizar las gráficas, disminuyendo la amplitud de los picos y valles asociados a las frecuencias propias del estrato y además provocar un desplazamiento de los mismos hacia frecuencias inferiores a la teórica, dada por la tabla 6.I tanto en la parte real como imaginaria, fundamentalmente en las impedancia vertical.

Para la impedancia de torsión la influencia de este parámetro es prácticamente despreciable, como es habitual a similitud con lo acontecido en el resto de las cimentaciones hasta ahora estudiadas.

En las figuras 6.16 y 6.17a y b, se muestran resultados análogos a los representados en las figuras anteriores; para un valor de la potencia relativa del estrato de $H/R=3$ e idéntica variación del resto de los parámetros. De ellas se puede comentar lo mismo que en el párrafo precedente, con la salvedad de que debido a la mayor potencia del estrato las gráficas muestran picos de resonancia a frecuencias intermedias e inferiores asociados a los distintos armónicos de las frecuencias de estrato para las ondas S y P.

En las figuras 6.18 y 6.19a y b, se presenta la influencia del parámetro de potencia relativa del estrato, tan solo para el caso de $Rcs=100$, y los valores expuestos por Kausel y Ushijima. En ellas se observa la concordancia cualitativa de ambos métodos, M.E.C. y M.E.F., si bien los valores correspondientes al primero son cuantitativamente inferiores en prácticamente todo el rango de frecuencias, especialmente para la impedancia vertical.

En la tabla 6.IV se presentan los valores estáticos de las rigideces correspondientes a un movimiento de translación vertical y al modo de torsión.

Tabla.-6.IV Rigideces Estáticas Cimentación embebida, estrato $\nu=1/3$

H/R	Rcs	K_{vv}	K_{tt}
2	2	16.80666	20.6571
	4	21.58410	20.9354
	100	24.0327	21.0475
3	2	13.4543	20.1085
	4	15.3347	20.1718
	100	16.1352	20.2200
∞	1	9.0396	19.9140

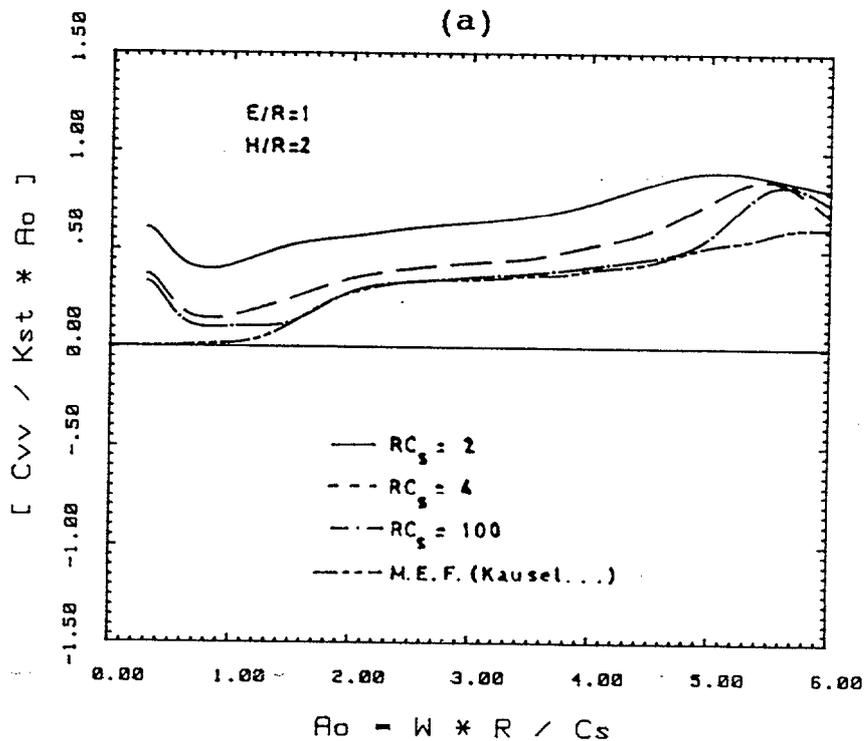
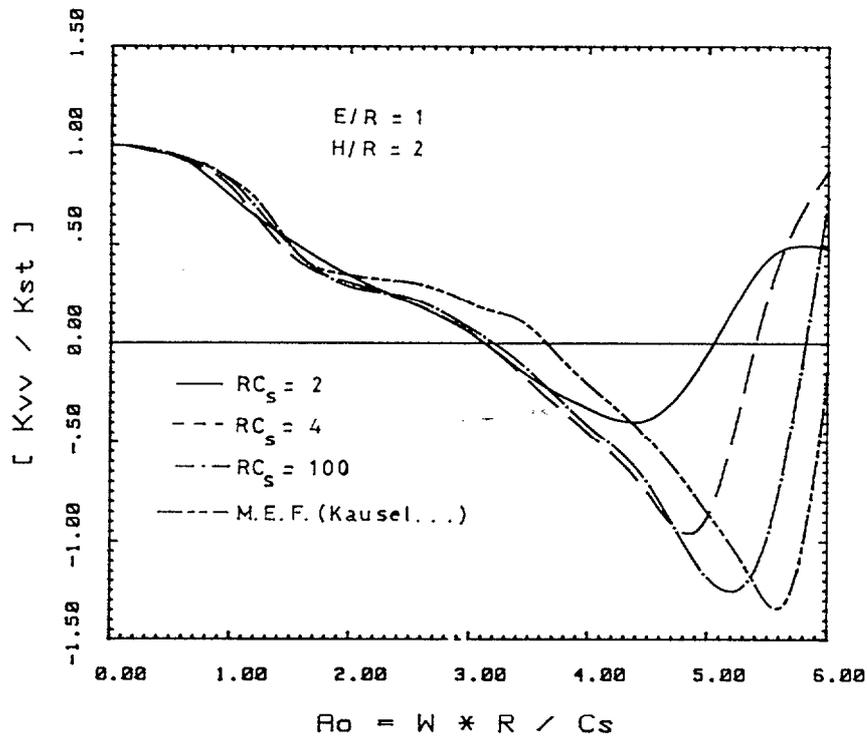
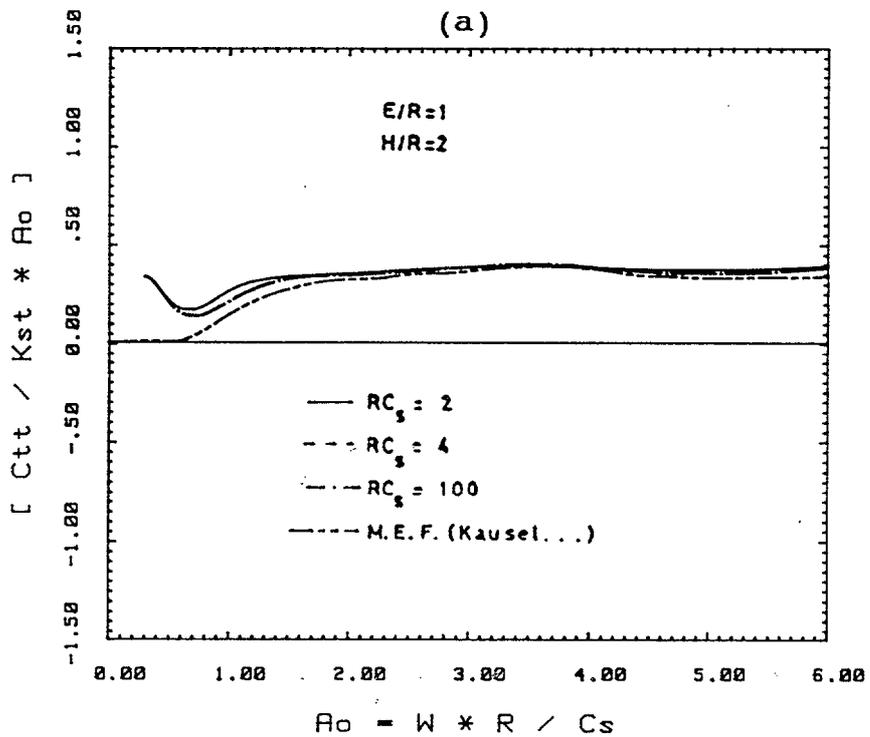
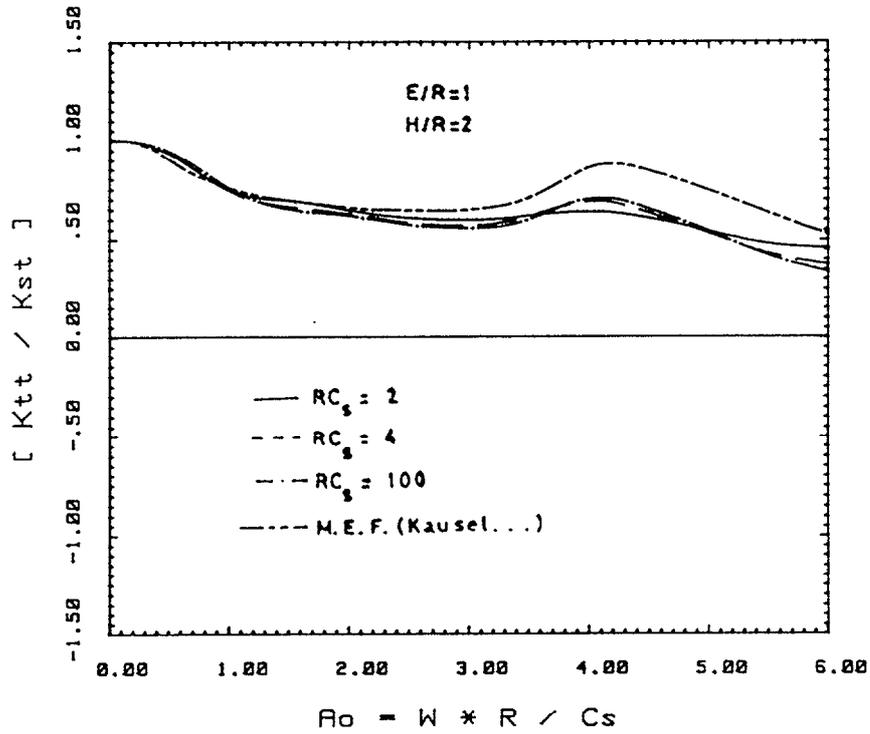


Figura 6.14 a y b Impedancia vertical normalizada, cimentación cilíndrica embebida en un estrato y sobre un semiespacio viscoelástico.



(b)

Figura 6.15 a y b Impedancia de torsión normalizada, cimentación cilíndrica embebida en un estrato y sobre un semiespacio viscoelástico.

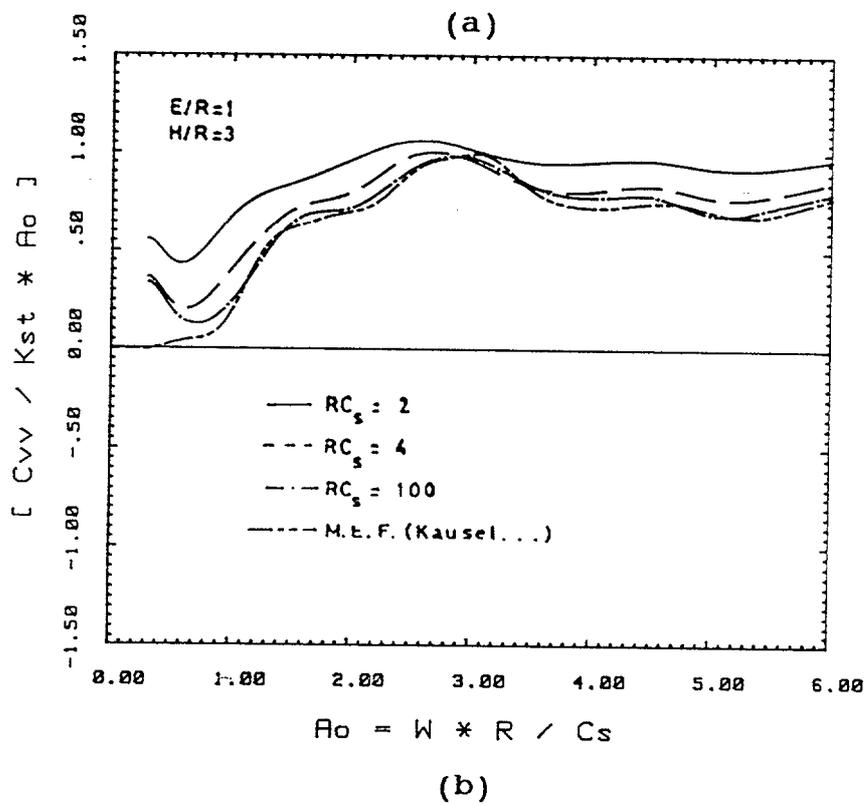
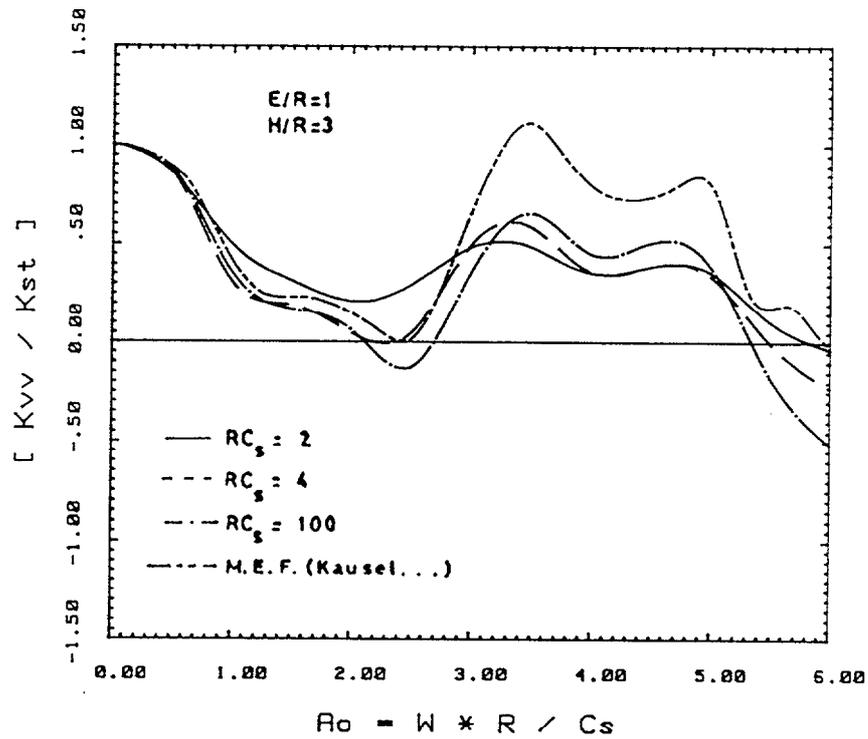


Figura 6.16 a y b Impedancia vertical normalizada, cimentación cilíndrica embebida en un estrato y sobre un semiespacio, viscoelásticos.

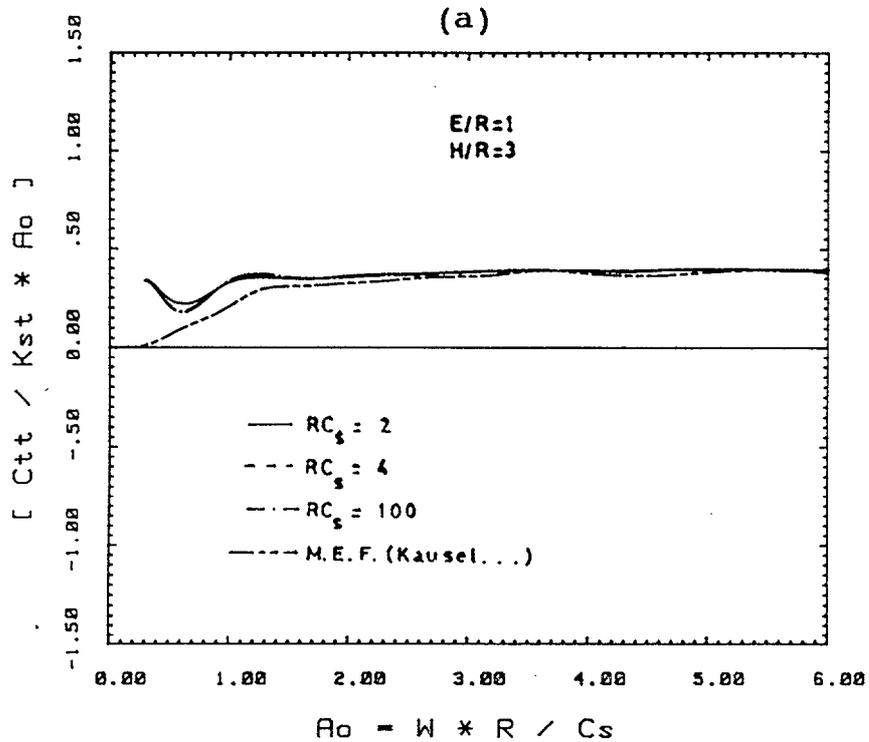
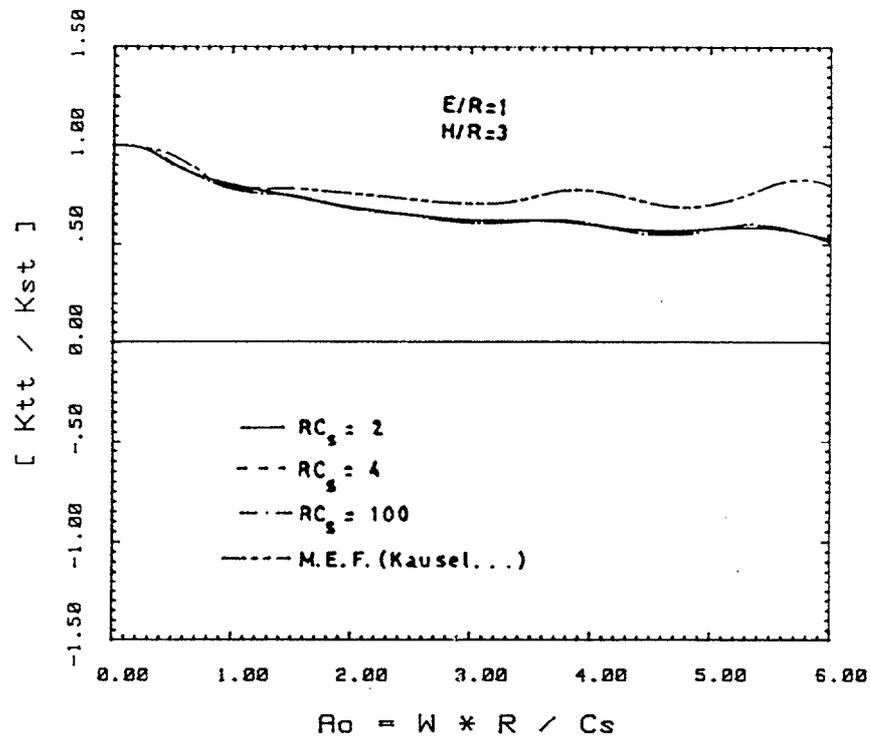


Figura 6.17 a y b Impedancia de torsión normalizada, cimentación cilíndrica embebida en un estrato y sobre un semiespacio, viscoelásticos.

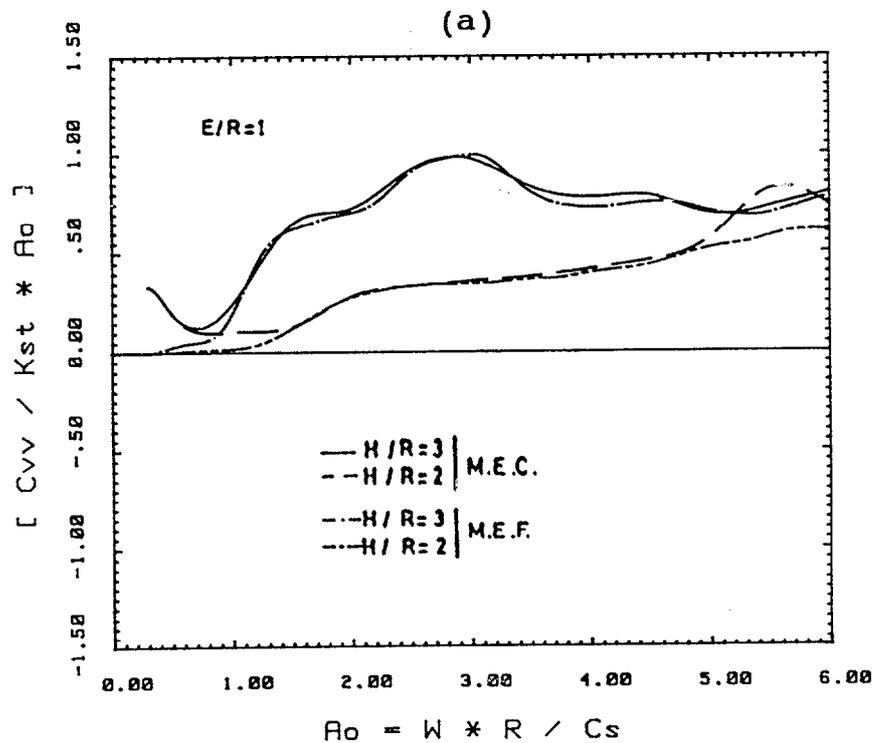
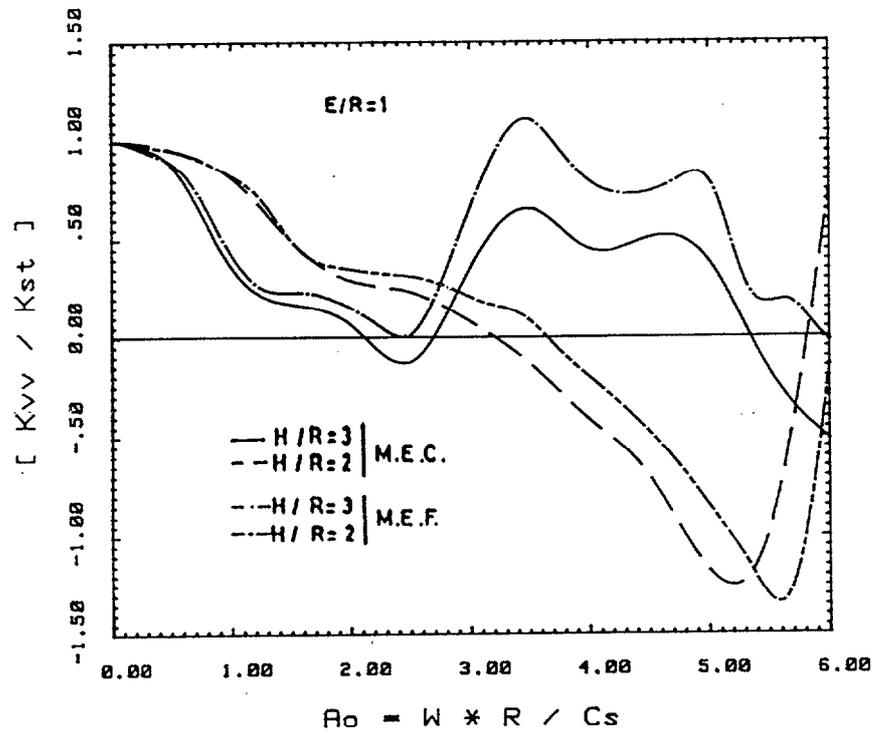
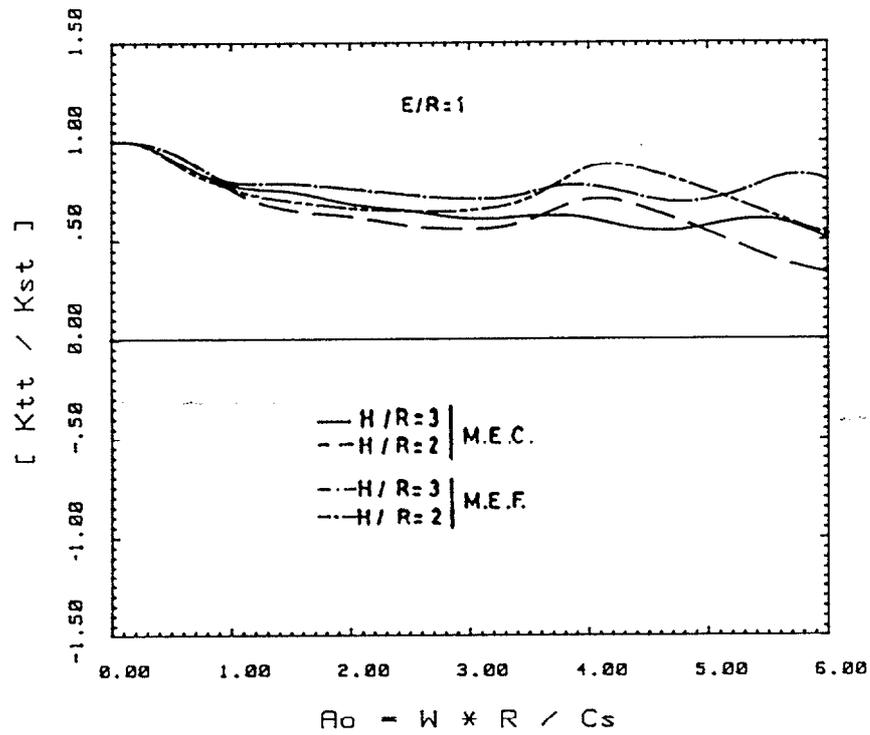
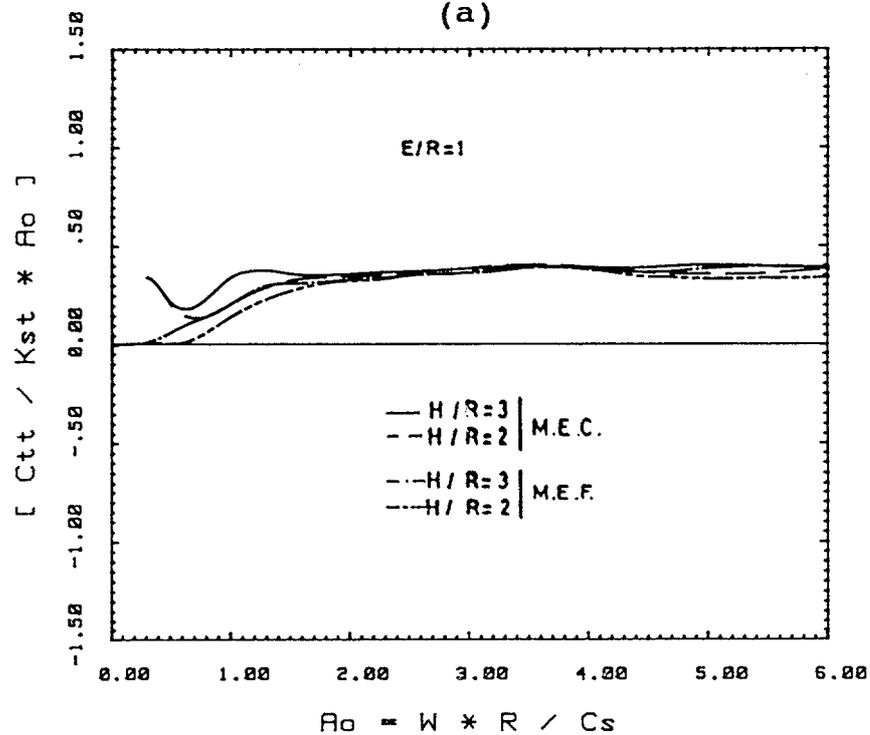


Figura 6.18 a y b Influencia del espesor relativo, impedancia vertical, cimentación cilíndrica-embecida en un estrato y sobre un semiespacio, viscoelásticos.



(a)



(b)

Figura 6.19 a y b Influencia del espesor del estrato, impedancia de torsión; cimentación cilíndrica embebida en un estrato y sobre un semiespacio, viscoelásticos.

6.2-2-2 CIMENTACIONES SEMIESFERICAS

El estudio de la respuesta de cimentaciones semiesféricas en medios estratificados viscoelásticos se ha realizado con el M.E.C. de forma similar al apartado anterior, utilizando una discretización del tipo de la de la figura 6.20 con un total de 73 elementos de contorno, distribuidos de la forma siguiente : diez elementos en la superficie de contacto, 29 en la superficie libre y 34 en la interfase entre el estrato de potencia H y el semiespacio soporte.

Las características del estrato son: densidad unidad, coeficiente de Poisson de un cuarto, Módulo de Rigidez Transversal unidad y un factor de amortiguamiento del 5% para ambas ondas S y P. Las propiedades del semiespacio son idénticas a las anteriores excepto el módulo de rigidez transversal que adopta los valores necesarios para obtener una variación del parámetro de rigidez relativa $Rcs=2,4,100$, a igualdad del ejemplo anterior.

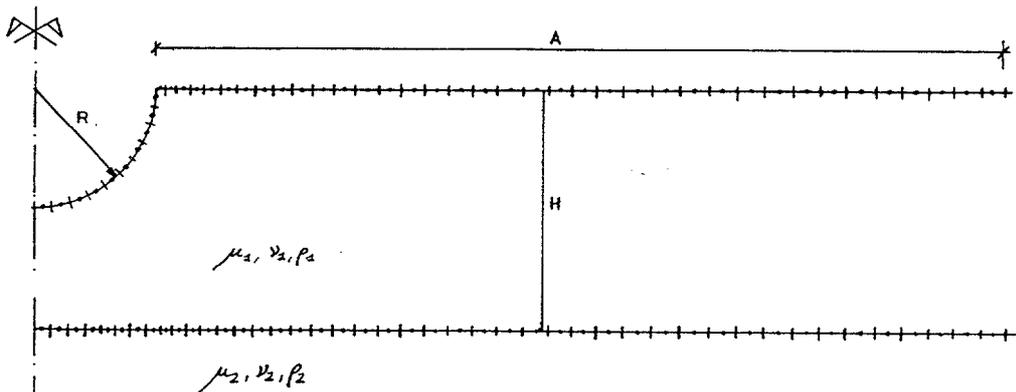


Fig.-6.20

Discretización cimentaciones semiesféricas, bicapa

En las figuras 6.21 hasta las 6.25 ayb, se presentan la parte real e imaginaria de las impedancias vertical, torsión, horizontal, cabeceo y acoplamiento

horizontal-cabeceo para un valor del parámetro de potencia relativa del estrato de $H/R=2$ y para los valores de Rcs mencionados en el párrafo anterior, incorporando con fines de comparación los resultados del semiespacio, adimensionalizadas por la rigidez estática respectiva, que se muestran en la tabla 6.V, frente a la frecuencia adimensional del estrato desde el valor cero hasta seis.

Del análisis de las figuras, se puede afirmar que el comportamiento de las cimentaciones semiesféricas en un medio estratificado difiere considerablemente del que presentan las mismas en el semiespacio para las impedancias dinámicas vertical, horizontal, cabeceo y acoplamiento entre ambas.

La impedancia vertical presenta una marcada variación con la frecuencia, con valores claramente menores desde frecuencias del orden de $a_0=2.0$ hasta prácticamente el valor 4.5 a partir del que se incrementan las rigideces equivalentes, el valor mínimo del valle se produce en las proximidades de $a_0=3.0$, existiendo diversos picos no asociados directamente a las frecuencias propias del estrato especialmente para el valor inferior de Rcs .

El coeficiente de amortiguamiento presenta la misma variación con la frecuencia, adoptando valores claramente inferiores a los correspondientes del semiespacio, tal y como era de esperar, debido a la menor pérdida de energía que presenta el modelo estratificado al rigidizar el semiespacio soporte.

El efecto del aumento del parámetro Rcs , rigidez relativa de la base, es análogo al de cimentaciones anteriores en el sentido de producir una magnificación de las amplitudes de los picos de resonancia y provocar el desplazamiento de los mismos hacia frecuencias más altas.

No obstante, en estas cimentaciones y pese a estar tratando un modelo viscoelástico para valores bajos del parámetro y a frecuencias intermedias se produce una fuerte oscilación de los resultados, la cual desaparece al aumentar Rcs . La causa de esta oscilación puede imputarse a dos fenómenos bien distintos, el primero a la posibilidad de la existencia de errores numéricos, por un mal condicionamiento de la matriz de coeficientes y el segundo a la aparición de ondas diferentes de las S y P del tipo de las de Rayleigh o Love de forma tal que extraigan energía del modelo; necesitando ampliar los estudios ya realizados. En otro sentido se debe destacar la diferencia de comportamiento cualitativo con las cimentaciones cilíndricas con el mismo grado de enterramiento y potencia de estrato para la que la rigidez equivalente asociada a la frecuencia propia de estrato asociada a la onda P adopta valores negativos, en la semiesférica se alcanza el máximo positivo, estando el valor mínimo asociada a la onda S mientras que en las cilíndricas este pico es prácticamente irrelevante.

La impedancia de torsión, tanto en su parte real como imaginaria, no presenta prácticamente diferencias con los valores obtenidos para el semiespacio, resaltando una vez más su insensibilidad al incremento de la rigidez del semiespacio soporte de la estratigrafía.

La impedancia horizontal presenta un comportamiento similar a la vertical, excepto en el aspecto cualitativo de que en la parte real sus valores, adimensionalizados, siempre se mantienen inferiores a los del semiespacio, mostrando también, aunque menos acusadamente, las oscilaciones ya reseñadas para $Rcs=2$.

En la impedancia de balanceo se puede señalar que el comportamiento de las gráficas es más suave que las anteriores, excepto la de torsión, presentando diferencias con las últimas en su parte real en que el valor máximo se alcanza a frecuencias intermedias y muy alta. En cuanto a

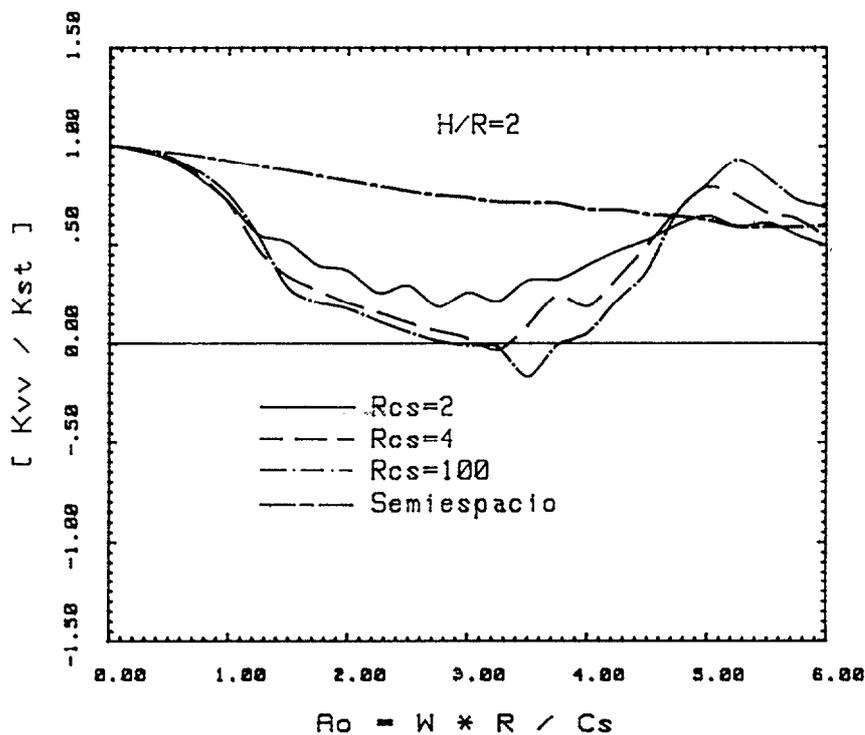
la parte imaginaria se observa que los resultados para el semiespacio y el modelo son prácticamente coincidentes excepto para frecuencias inferiores a dos.

La influencia del parámetro de rigidez de la base es aún menos acusado que en la impedancia precedente debido a estar excitado por ondas de tipo S.

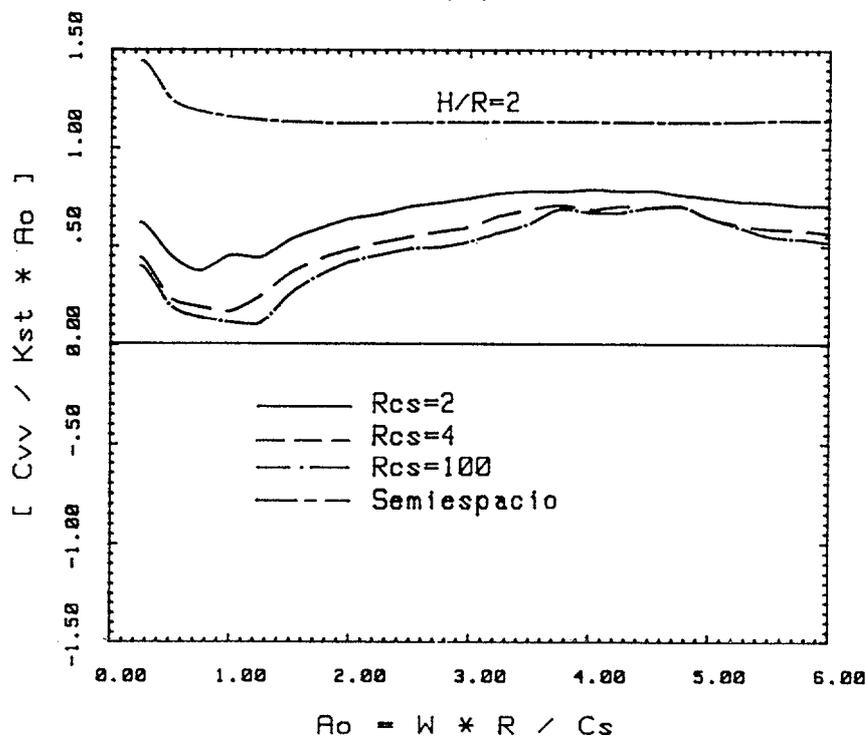
Las impedancias cruzadas muestran un comportamiento cualitativo similar a las de balanceo en su parte real, mientras que el coeficiente de amortiguamiento tiende a comportarse de forma parecida al correspondiente de la impedancia horizontal. En esta impedancia la influencia de R_{cs} es mayor que en las dos anteriores.

Tabla.-6.V Rigideces Estáticas Cim. Semiesféricas

H/R	R_{cs}	K_v	K_t	K_h	K_r	K_{hr}
2	2	11.3465	12.7533	10.3442	11.0958	4.94998
	4	13.5992	12.8522	11.5908	11.4660	5.45271
	100	14.6254	12.8925	12.1631	11.6209	5.68235
∞	1	7.2442	12.5296	7.9667	10.2203	3.96982

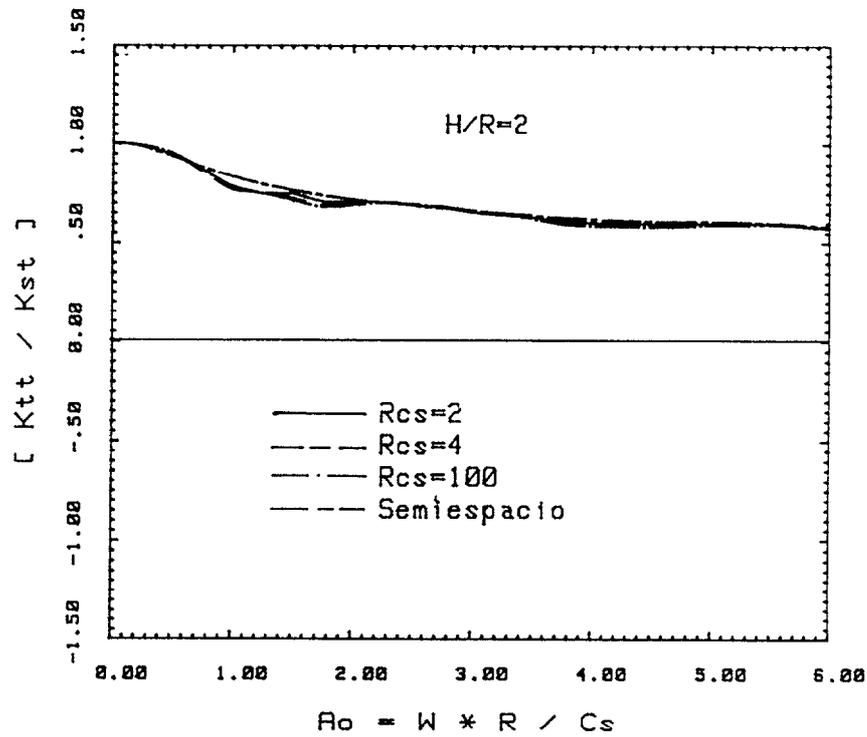


(a)

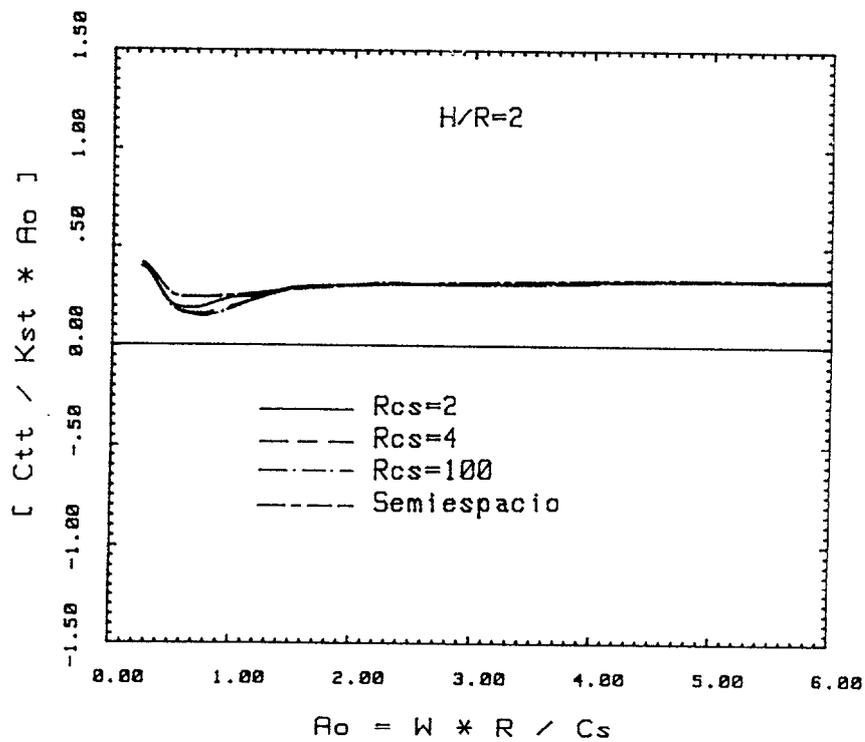


(b)

Figura 6.21 a y b Impedancia vertical normalizada, cimentación semiesférica, medio estratificado bicapa

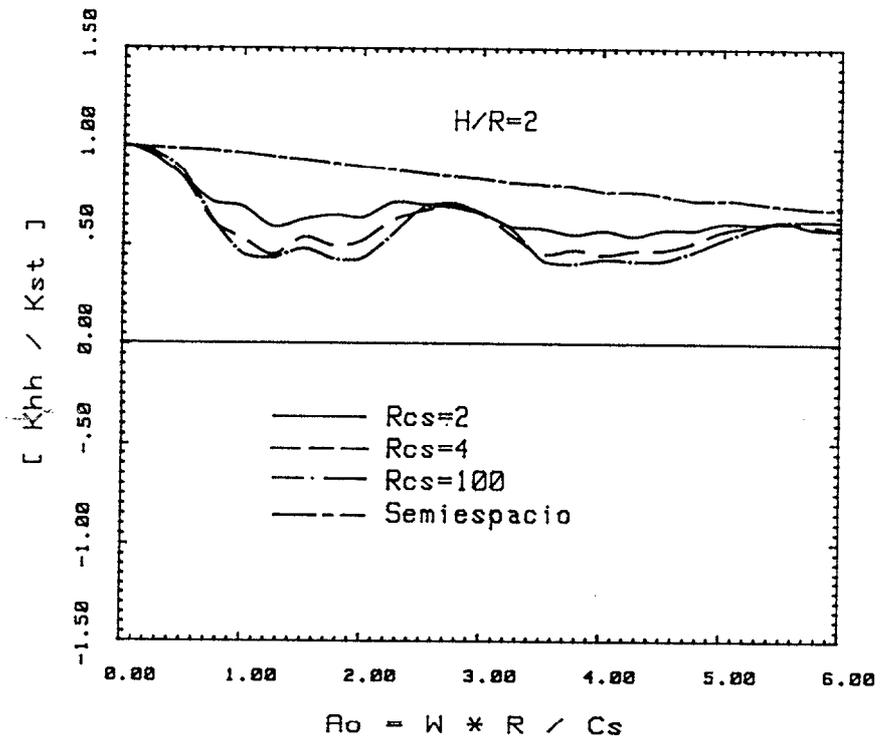


(a)

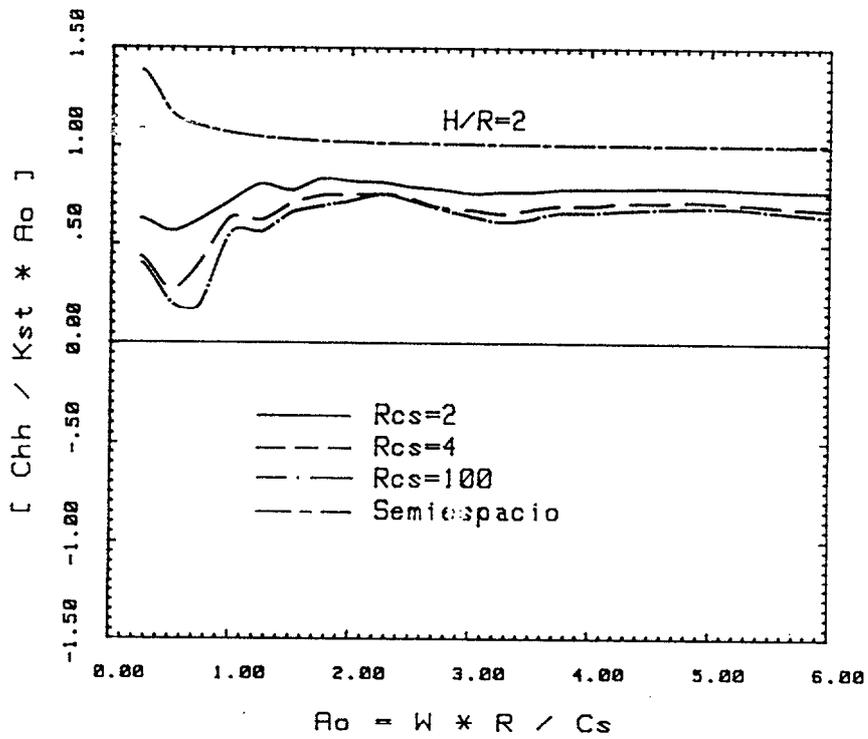


(b)

Figura 6.22 a y b Impedancia de torsión normalizada, cimentación semiesférica, medio estratificado bicapa

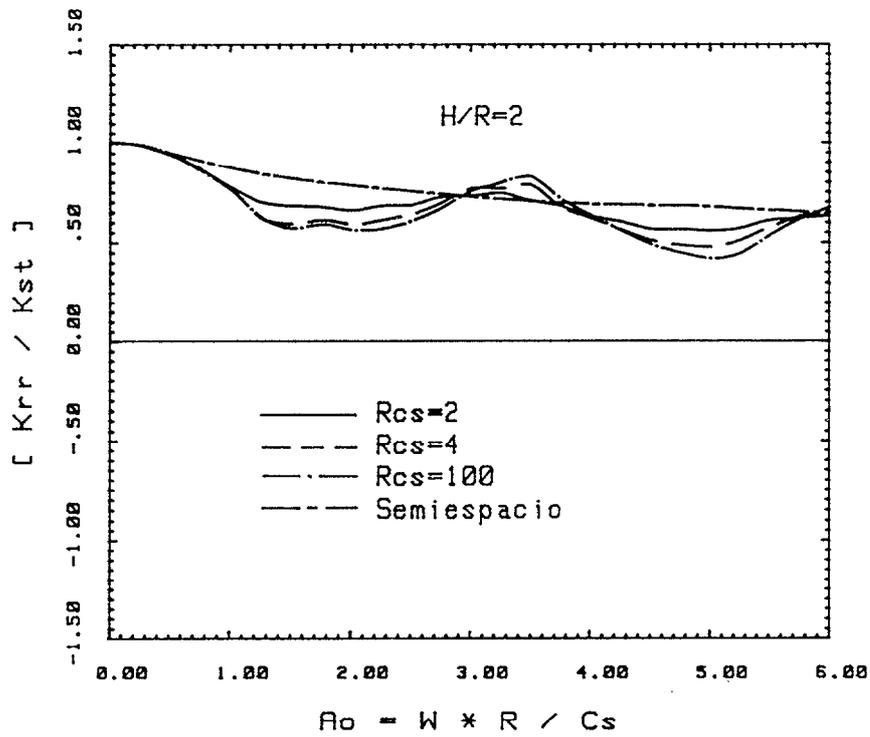


(a)

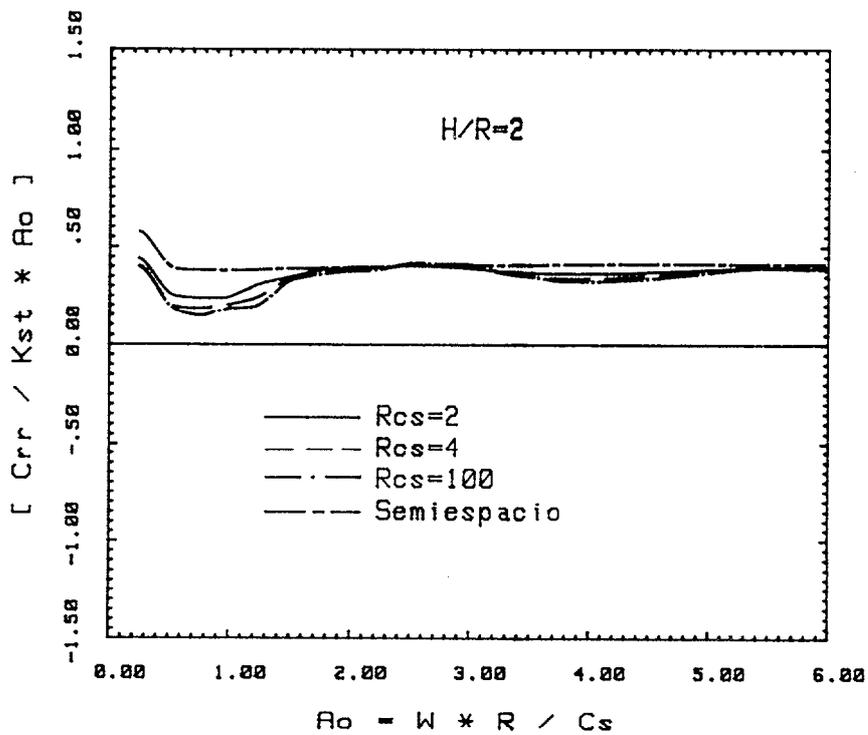


(b)

Figura-6-23 a-y b impedancia horizontal normalizada, cimentación semiesférica, medio estratificado bicapa



(a)



(b)

Figura 6.24 a y b Impedancia de cabeceo normalizada, cimentación semiesférica, medio estratificado bicapa

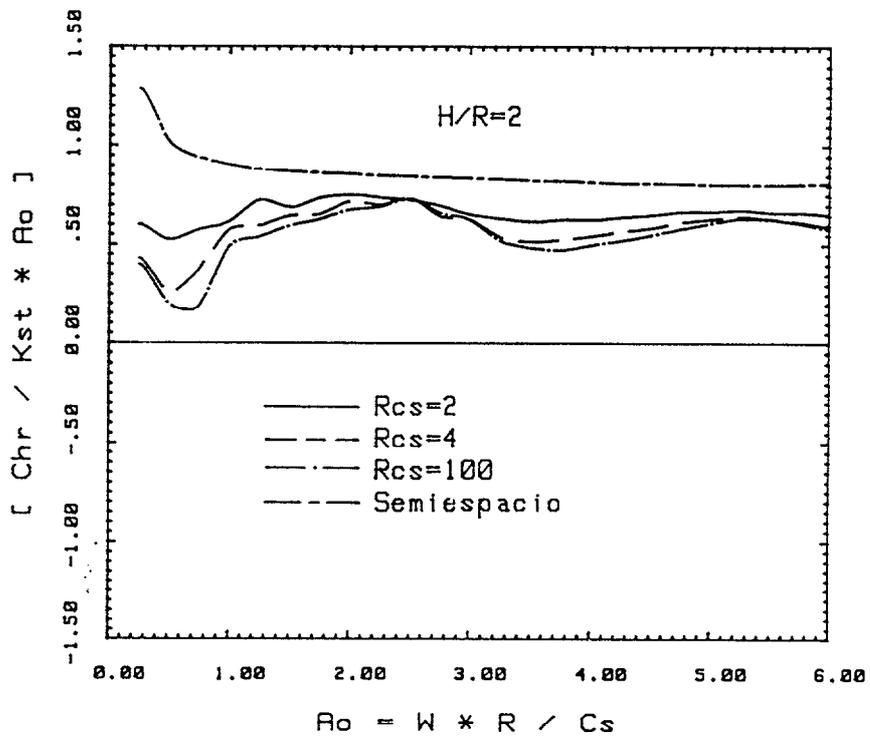
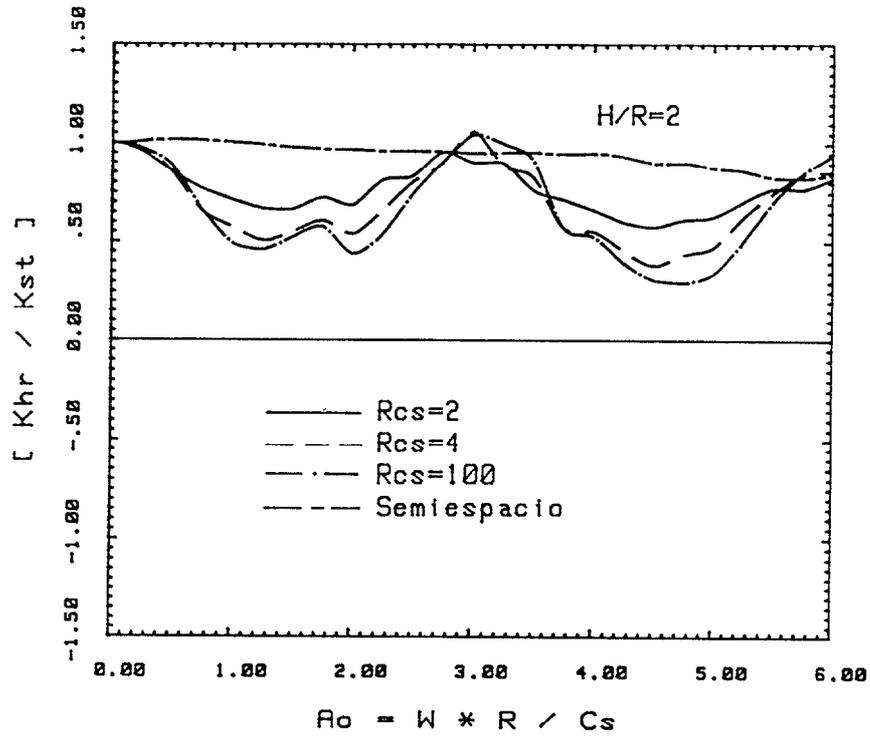


Figura 6.25 a y b Impedancia de acoplamiento normalizada, cimentación semiesférica, medio estratificado bicapa

6.3 MEDIOS ESTRATIFICADOS MULTICAPA

En este apartado se analiza el comportamiento del método y se estudian los resultados para medios más complejos que los utilizados en apartados precedentes y en cimentaciones superficiales y cilíndricas embebidas.

6.3-1 CIMENTACIONES SUPERFICIALES

Este ejemplo, tomado de la tesis de J. Cano y que a su vez proviene de un problema real ejecutado por medio del programa LUCON, estudia el comportamiento de una cimentación superficial de radio 52.5 pies que descansa en un terreno estratificado consistente en cuatro estratos sobre un semiespacio cuyas potencias y propiedades mecánicas se dan en la tabla 6.VII.

Tabla 6.VII.- Propiedades mecánicas y potencia estratos

N	Cs	ρ	ν	ξ (%)	H
1	3004	143.0	0.36	3	49.2
2	2198	138.0	0.37	5	65.6
3	3333	160.0	0.35	3	98.4
4	1703	136.0	0.37	7	164.0
5	2522	150.0	0.39	6	∞

unidades en libras, pies y segundos

La discretización utilizada es el del tipo de la figura 6.26, con 10 elementos en la superficie de contacto entre cemento y terreno, 9 elementos en la superficie libre y 12 elementos en cada una de las cuatro interfases entre estratos. El tamaño máximo del elemento esta obtenido en función de la longitud de onda de la excitación y es de 49.2 pies en la superficie con lo que se alcanza una distancia de 412.7 pies de superficie libre e interfases. En el modelo se empleó esta discretización para todo el rango de

frecuencias que varia de forma adimensional entre 0.2 y 1.4 que en frecuencia circular corresponde a $11.4 \leq \omega \leq 80.8$.

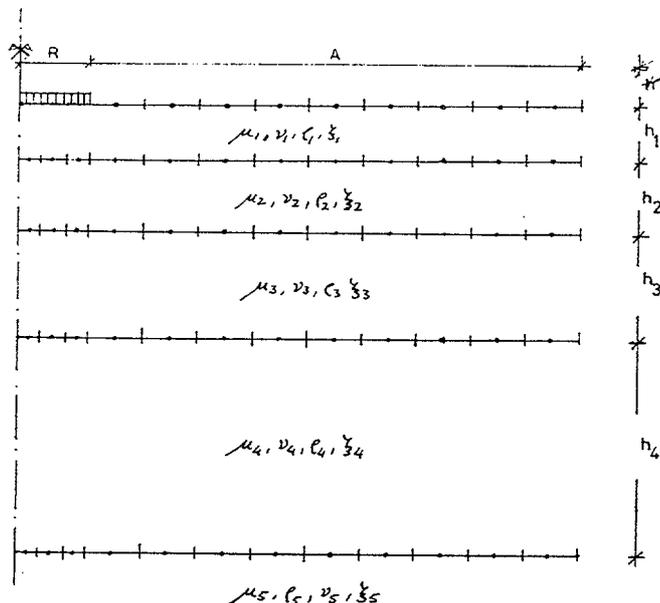


Figura 6.26.- Discretización Cimentación Superficial Medios Multicapa

En las figuras 6.27ayb hasta la 6.30ayb se presentan, en línea continua, los resultados adimensionalizados con respecto a la rigidez estática del disco soldado a un semiespacio con las características del primer estrato, frente a la frecuencia adimensional a_0 , en el rango indicado previamente, para las impedancias dinámicas correspondientes a los movimientos vertical, horizontal y los giros de torsión y balanceo. En las mismas figuras se presentan con distintos tipos de línea los resultados de J. Cano y de Luco, siendo los del primero obtenidos a través del M.E.C. y con discretización similar. De los resultados presentados por Luco se desconoce la discretización empleada.

La parte real de la impedancia vertical presenta un máximo para $a_0 = 0.4$, para a continuación ir decreciendo, con una inflexión en torno a 0.6, para estabilizarse a partir de

la frecuencia 1.0. El método propuesto proporciona rigideces dinámicas equivalentes superiores a los valores de Luco en todo el rango de frecuencias, con discrepancias apreciables a partir de la última de las frecuencias mencionadas. En cuanto a la comparación con Cano, este obtiene valores superiores en el primer tramo, con el máximo desplazado hacia frecuencias más altas, para a partir de la frecuencia unidad tomar valores muy inferiores próximos a los de Luco. Las discrepancias entre las tres curvas de respuesta se mantienen para la parte imaginaria si bien la discrepancia a alta frecuencia es aparentemente contradictoria pues los mencionados autores obtienen para rigideces menores coeficientes de amortiguamiento también inferiores lo que no es usual.

La impedancia de torsión, en la que tan solo se compara con Cano, presenta como es habitual las menores discrepancias tanto en su parte real como imaginaria y tiene un comportamiento muy suave a lo largo de todo el rango de frecuencias estudiado.

Las discrepancias entre las diversas curvas son menores en la impedancia horizontal, obteniendo valores superiores de la rigidez prácticamente en todas las frecuencias, mientras que la parte imaginaria coincide en gran parte con los resultados de Cano.

Con respecto a la impedancia de balanceo, el comportamiento es muy similar a la anterior dando valores superiores en la parte real y casi coincidentes en la imaginaria.

De lo anterior se desprende que la mayor discrepancia se produce en la impedancia vertical y dentro de esta en su componente real.

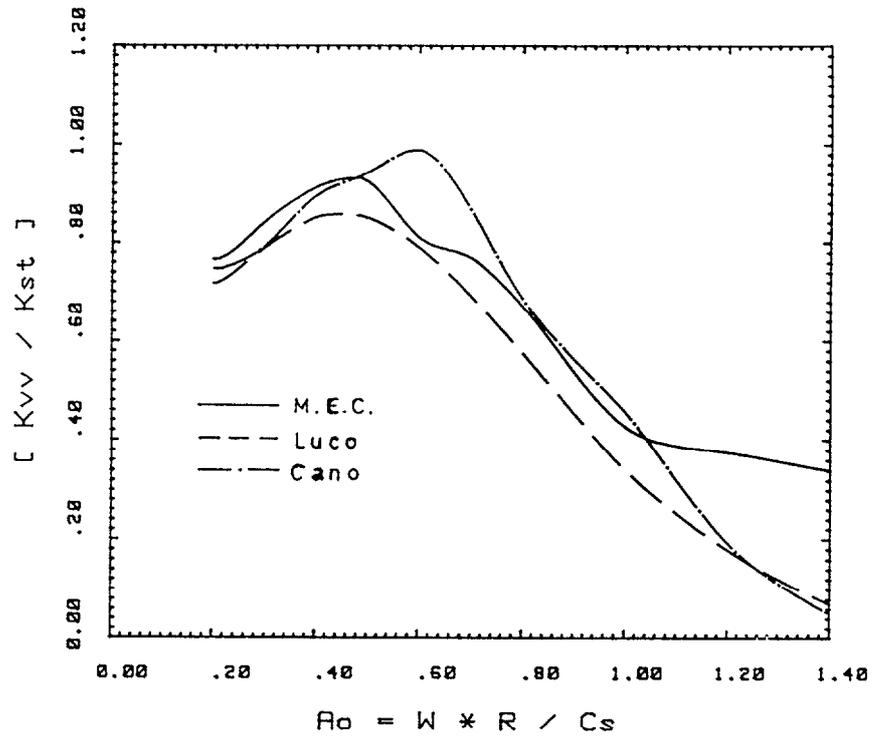
De la observación de la tabla 6.VII se desprende que el primer estrato es más rígido que el resto salvo el

tercero y que el de mayor potencia es precisamente el menos rígido.

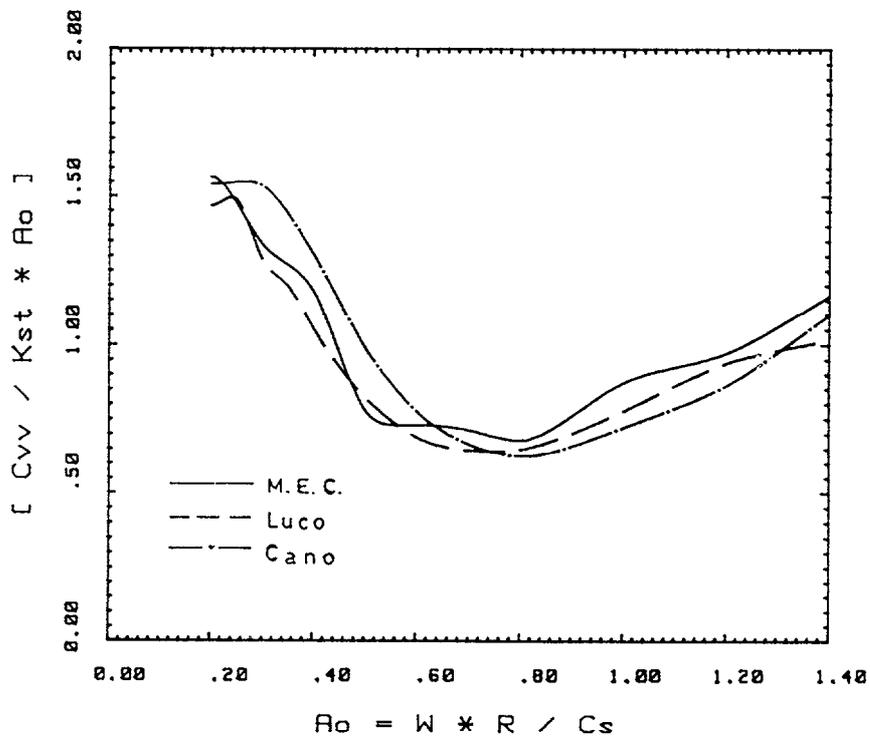
La compleja estratigrafía que presenta el problema en estudio no permite decir a priori cual es la frecuencia propia de estrato más significativa ni a cual de ellos corresponde. Con objeto de tener una idea acerca de la frecuencia hacia la que sería de esperar que el modelo resonara, se realizaría un modelo bicapa tomando la media ponderada, por la respectiva potencia del estrato, de todas las velocidades de propagación de las ondas S y se obtendría una relación $R_{cs}=0.85$, con respecto al primer estrato.

Suponiendo otro modelo sencillo formado por el primer estrato sobre una base rígida y elástico debería resonar a la frecuencia $a_0=1.697$, es decir ligeramente superior a la máxima frecuencia en estudio y para la que tanto Cano como Luco están próximos a un valor mínimo o negativo. Esta hipótesis está en contradicción con el modelo aproximado anterior ya que este no debería resonar a esta frecuencia de acuerdo con lo visto en apartados anteriores y además la bondad de esta suposición puede en parte estar confirmada por el hecho de que la rigidez estática que se obtiene en el modelo resuelto es menor que la teórica para el semiespacio con las características del primer estrato.

No obstante lo expresado en párrafos anteriores será necesario realizar estudios complementarios, alcanzando frecuencias superiores y con discretizaciones más finas a fin de observar la evolución de la gráfica.

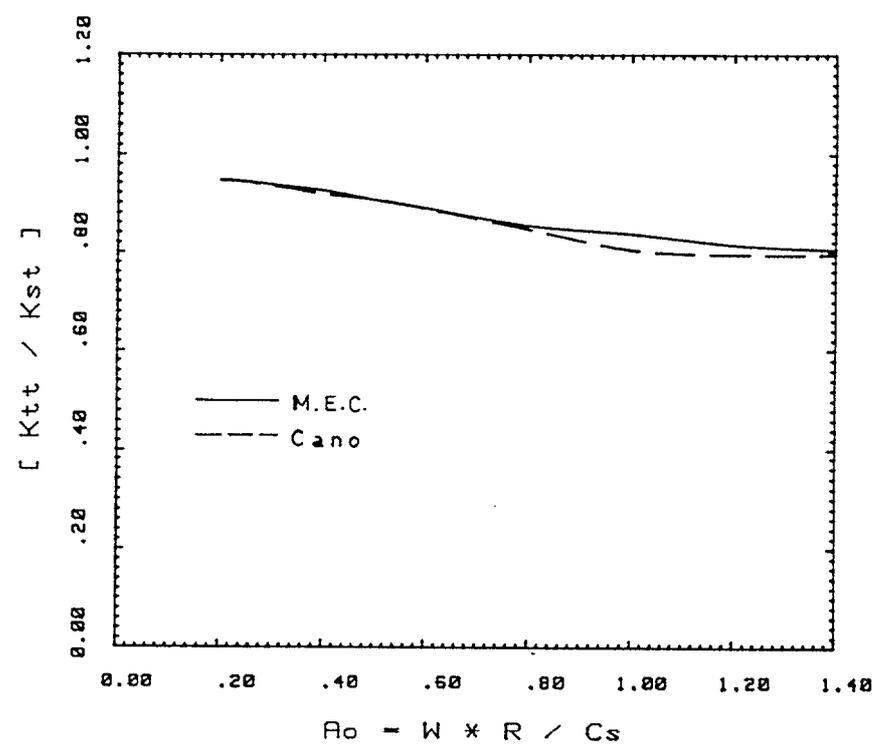


(a)

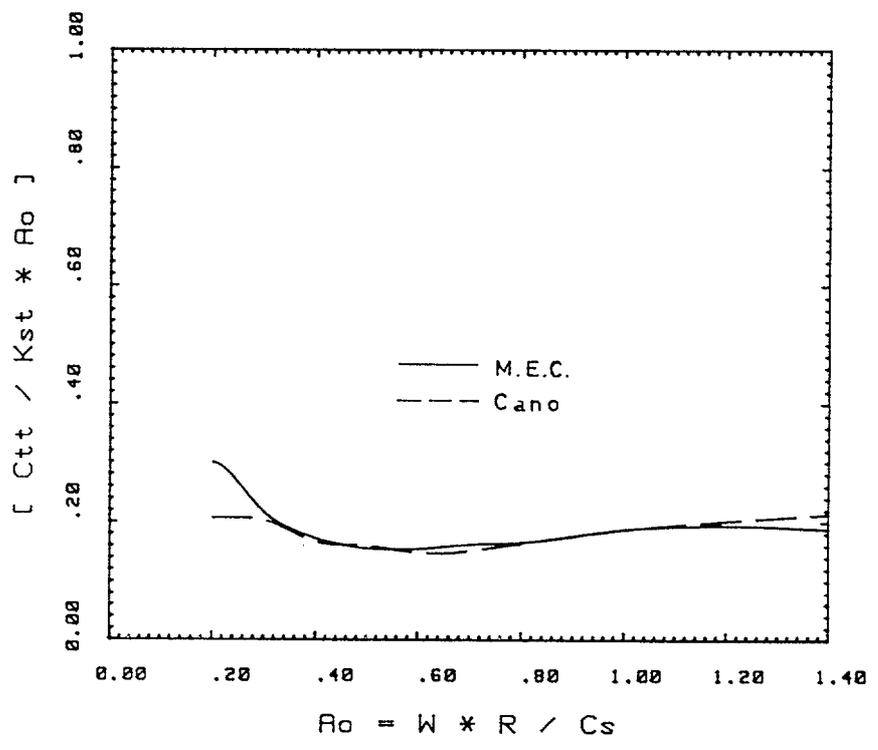


(b)

Figura 6.27 a y b - Parámetros de Veletso, movimiento vertical, medios estratificados.

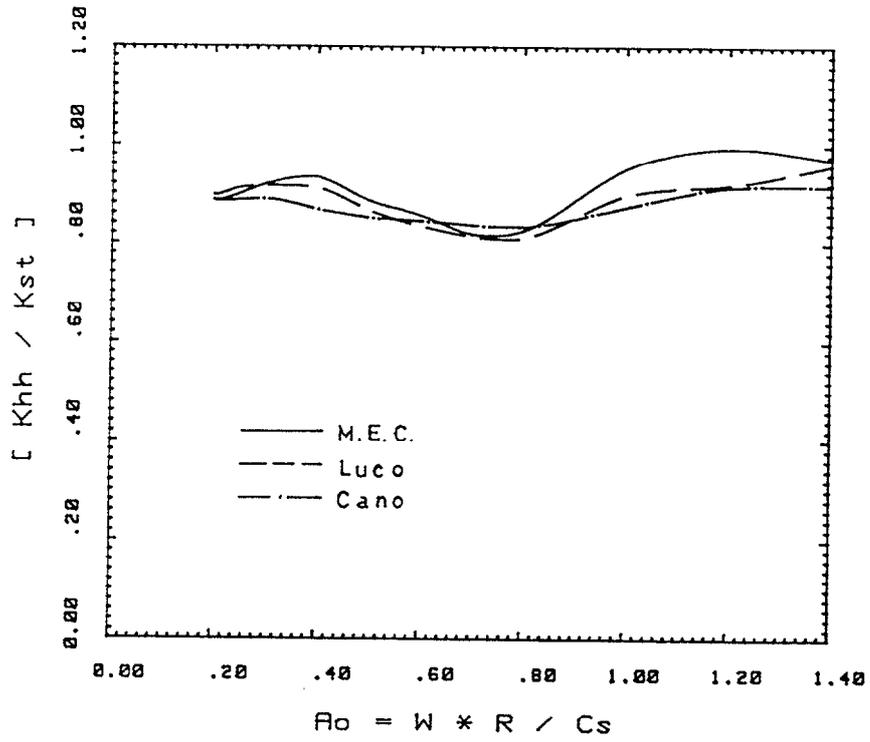


(a)

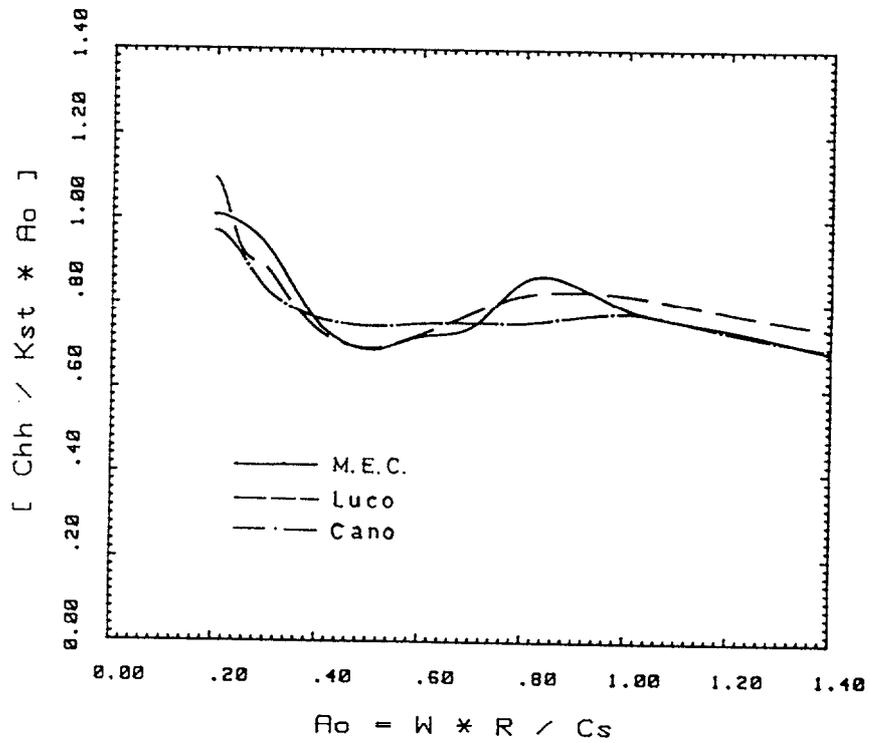


(b)

Figura 6.28 a y b Parámetros de Veletses, movimiento de torsión, medios estratificados.

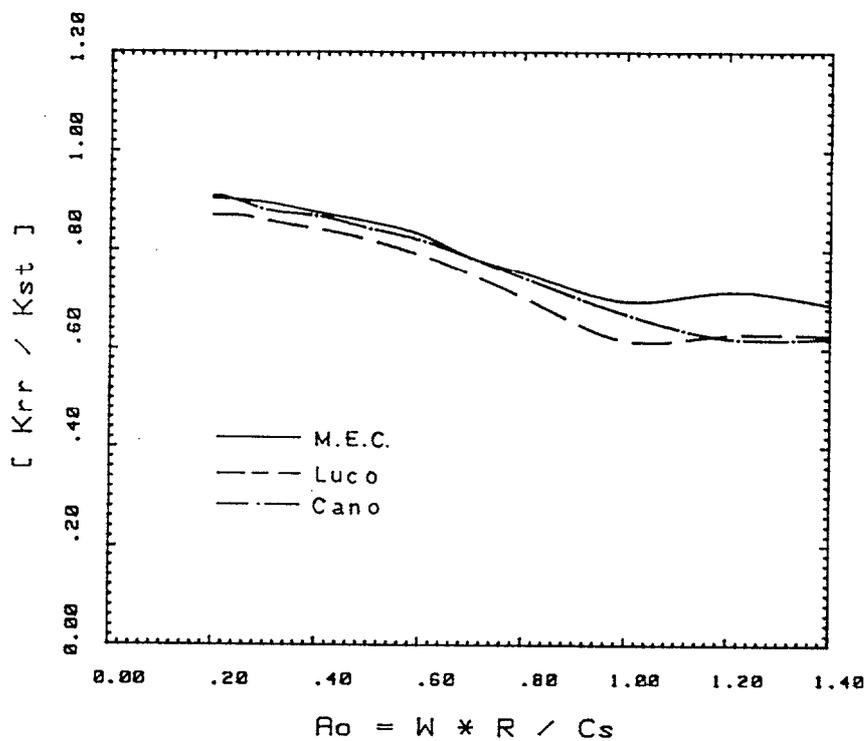


(a)

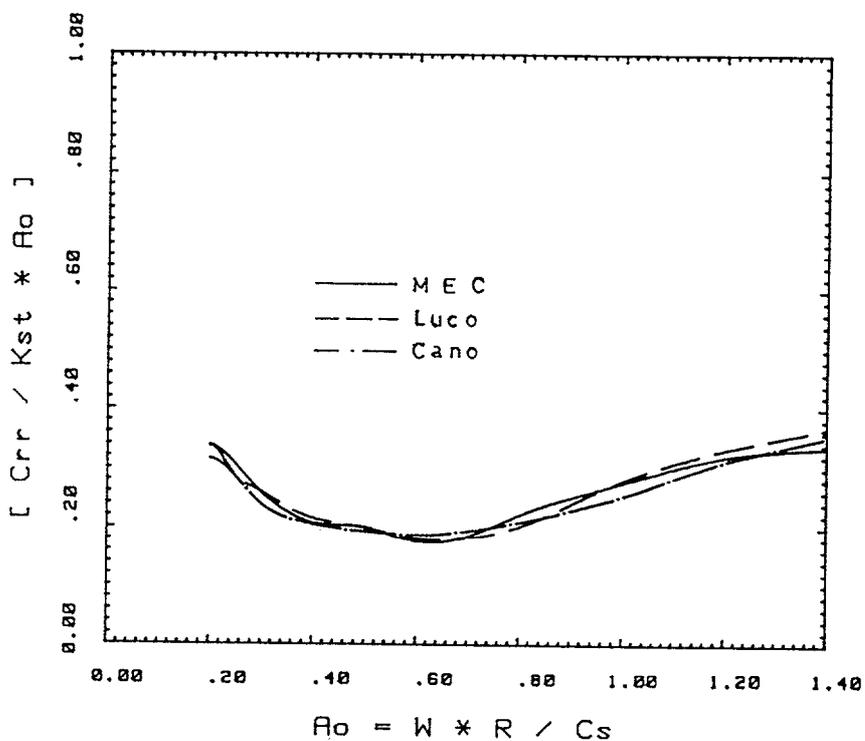


(b)

Figura 6.29 a y b Parámetros de Veletsos, movimiento horizontal, medios estratificados



(a)



(b)

Figura 6.30 a y b Parámetros de Veletsos, movimiento de cabeceo, medios estratificados.

6.3-2 CIMENTACIONES EMBEBIDAS

Este ejemplo se presente a fin de contrastar con los resultados correspondientes a Apsel y a Day. La cimentación bajo estudio tiene 40 pies de radio y un grado de embebimiento $E/R=0.40$. La estratigrafía del terreno es la dada en la tabla 6.VIII y se refleja en la figura 6.31 junto con la discretización utilizada que consta de 123 elementos distribuidos de la forma siguiente: 32 en la superficie libre y 6 en la zona de contacto entre la zapata y el primer estrato' 43, de los que 11 están en la zona de la cimentación, en la interfase entre el primer y segundo estrato y 42 en la segunda interfase entre el estrato y el semiespacio soporte.

Los resultados y se presentan en las figuras 6.32ayb a la 6.34ayb, en línea continua, junto con los de Apsel, línea discontinua y Day en línea de punto y guión. El modelo de terreno utilizado, de acuerdo con sus propiedades de amortiguamiento, es prácticamente elástico con objeto de comparar con el segundo de los autores que usa elementos finitos sin amortiguamiento del material.

De la observación de las figuras se desprende que existen algunas discrepancias entre los resultados proporcionados por el M.E.C. propuesto y los citados anteriormente, ya que éstos proporcionan unas curvas con una variación suave en todo el rango de frecuencias estudiado.

El método de los elementos de contorno utilizado proporciona en frecuencias bajas y medias una variación similar, pero a partir de $a_0=4.0$ aparecen picos análogos a los que se presentaban en los modelos bicapa ya estudiados.

De acuerdo con el razonamiento llevado a cabo en el apartado precedente y al ser el suelo modelado como elástico y tener una $Rcs>1.0$, aparentemente debería existir cierta resonancia.

En sentido opuesto se ha introducido en el modelo un índice de amortiguamiento mayor que el indicado, prácticamente duplicado, y los resultados aunque no se representan, trasladan la aparición de los picos hacia frecuencias más altas, lo que en cierta medida puede inducir a pensar que el método utilizado requiere de un cierto grado de amortiguamiento debido a posibles problemas de tipo numérico; que de nuevo habrán de ser objeto de un estudio en mayor profundidad.

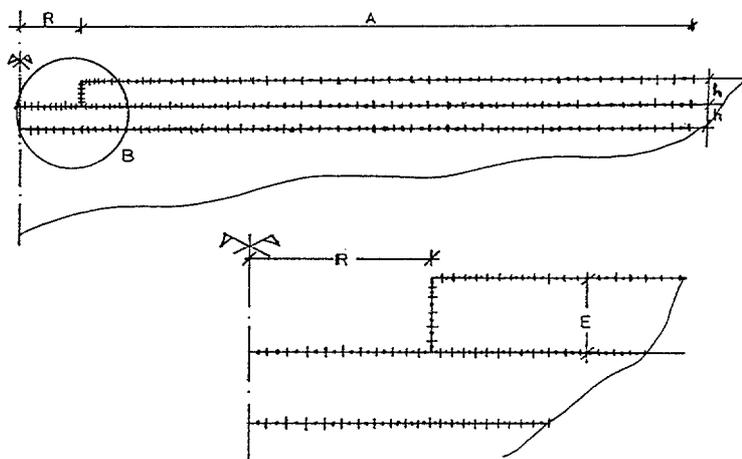
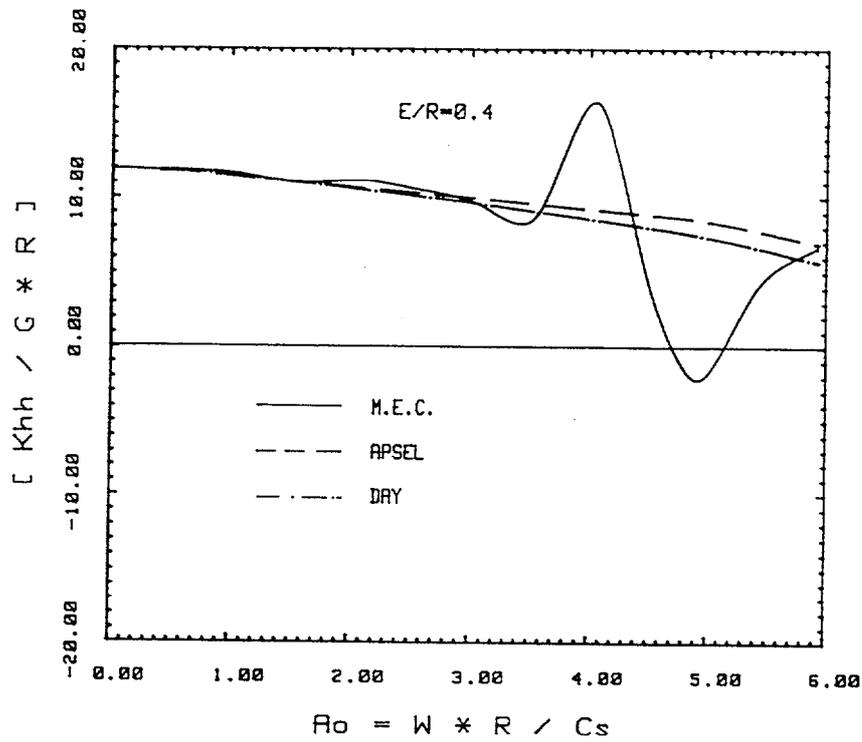


Figura 6.31.- Discretización Cimentación Embebida. Medio Multicapa

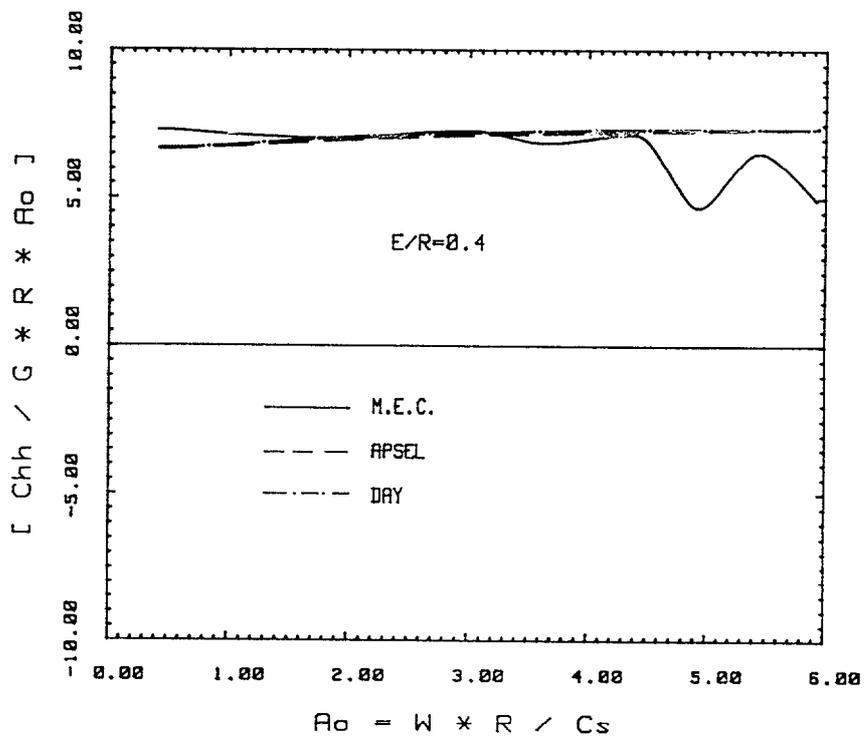
Tabla 6.VIII Propiedades Mecánicas Estratos

N	Cs	Cp	ρ	ξ_s (%)	ξ_p (%)	H
1	980	2400	113.0	0.5	0.25	16.0
2	1270	2540	113.0	0.5	0.25	16.0
3	1380	2760	113.0	0.334	0.167	2000

unidades en libras, pies y segundos

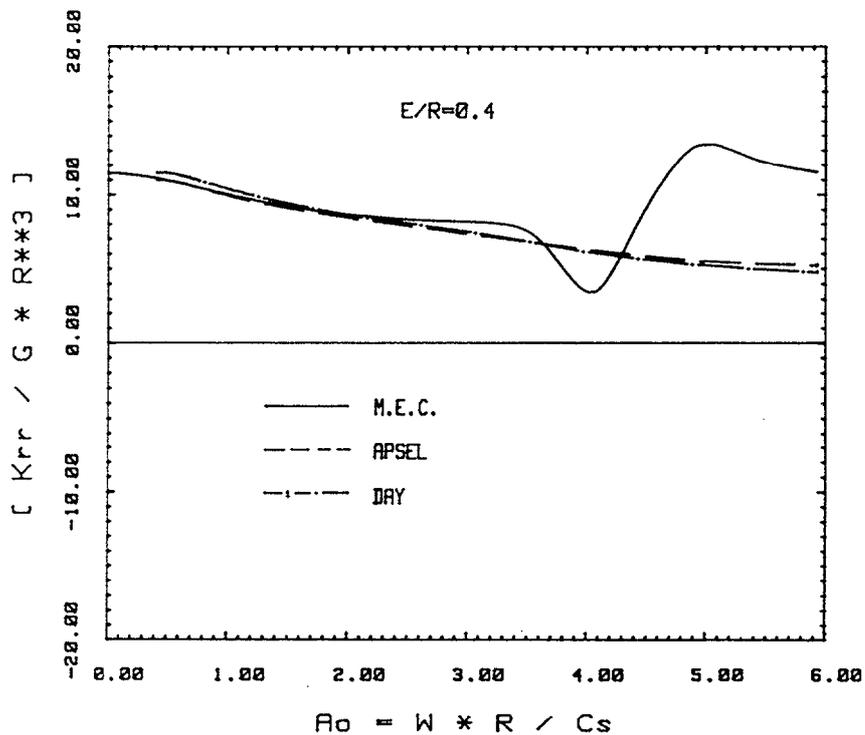


(a)

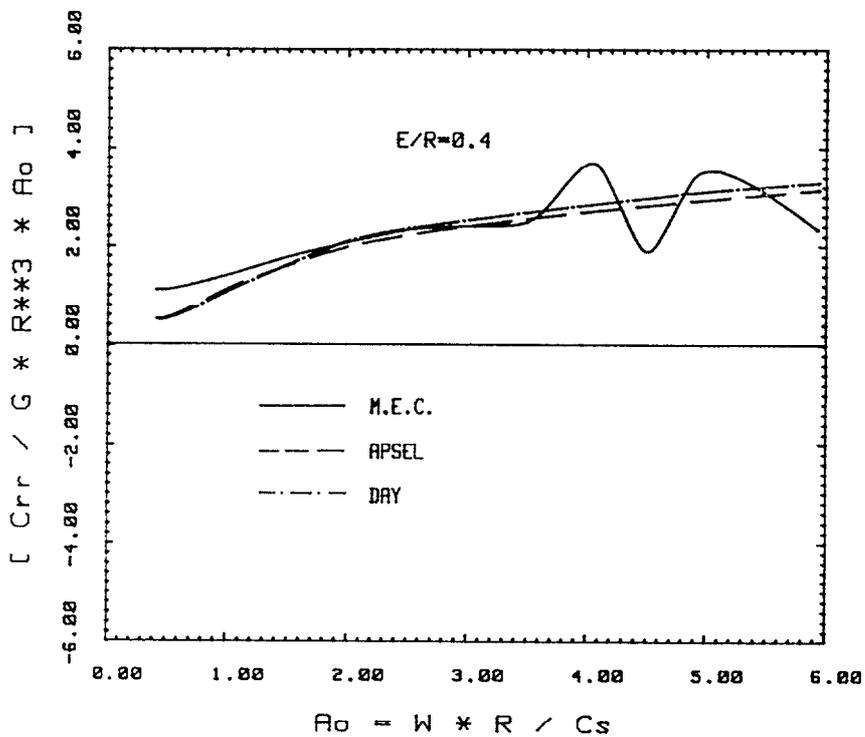


(b)

Figura 6.32- a y b Impedancia horizontal normalizada, cimentación embebida, medio multicapa

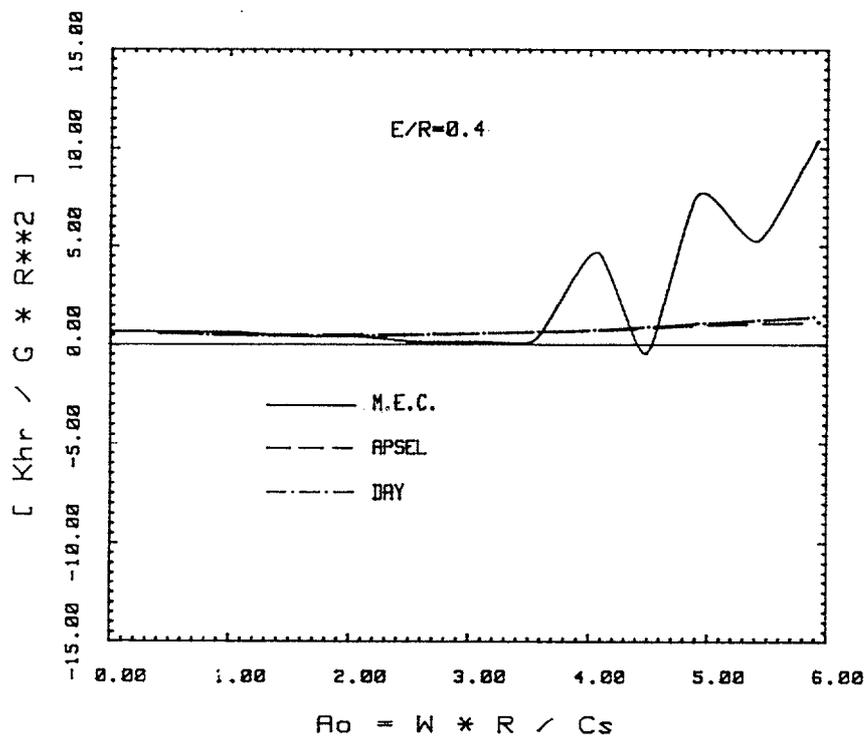


(a)

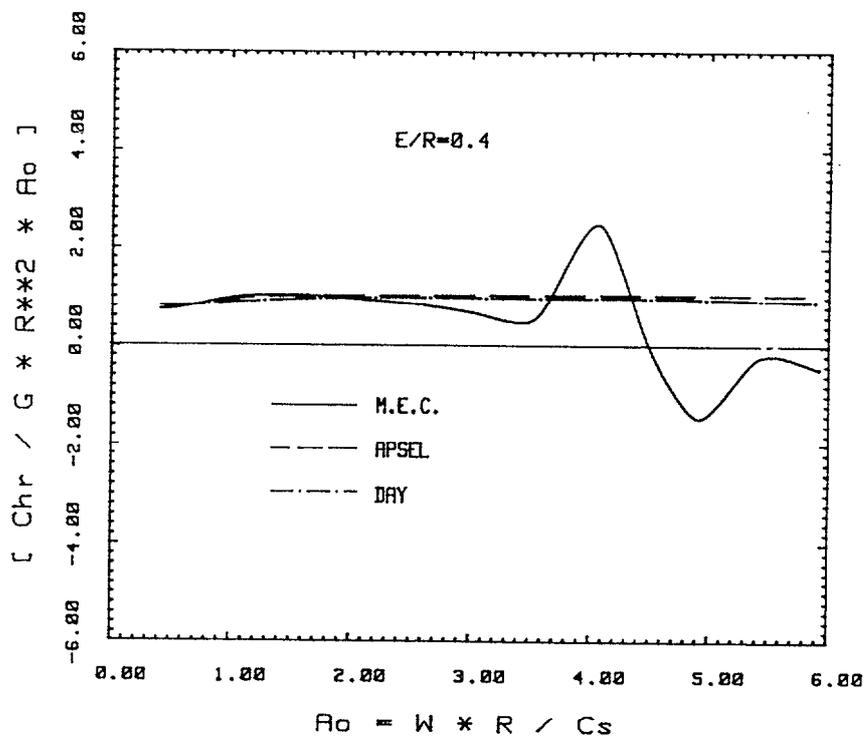


(b)

Figura 5.18 a y b Impedancia de cabeceo normalizada, cimentación embebida, medio multicapa



(a)



(b)

Figura 6.34 a y b Impedancia de acoplamiento normalizada, cimentación embebida, medio multicapa

6.4 RIGIDECES ESTATICAS

En este apartado se presntam de forma gráfica los valores de las rigideces estáticas vertical y de torsión correspondientes a cimentaciones superficiales y cilíndricas embebidas en medios bicapa.

En la figura 6.35 se muestra la influencia de la potencia relativa del estrato para las cimentaciones superficiales, correspondientes a la tabla 6.II, en línea continua y mediante * los valores dados por Kausel y Ushijima para los mismos valores del parámetro R/H.

Como se obseva la variación de la rigidez de torsión se puede aproximar de forma lineal mientras que para la rigidez vertical no ocurre lo mismo, especialmente cuando la potencia del estrato es pequeña, para la que parece más apropiado una variación de tipo potencial.

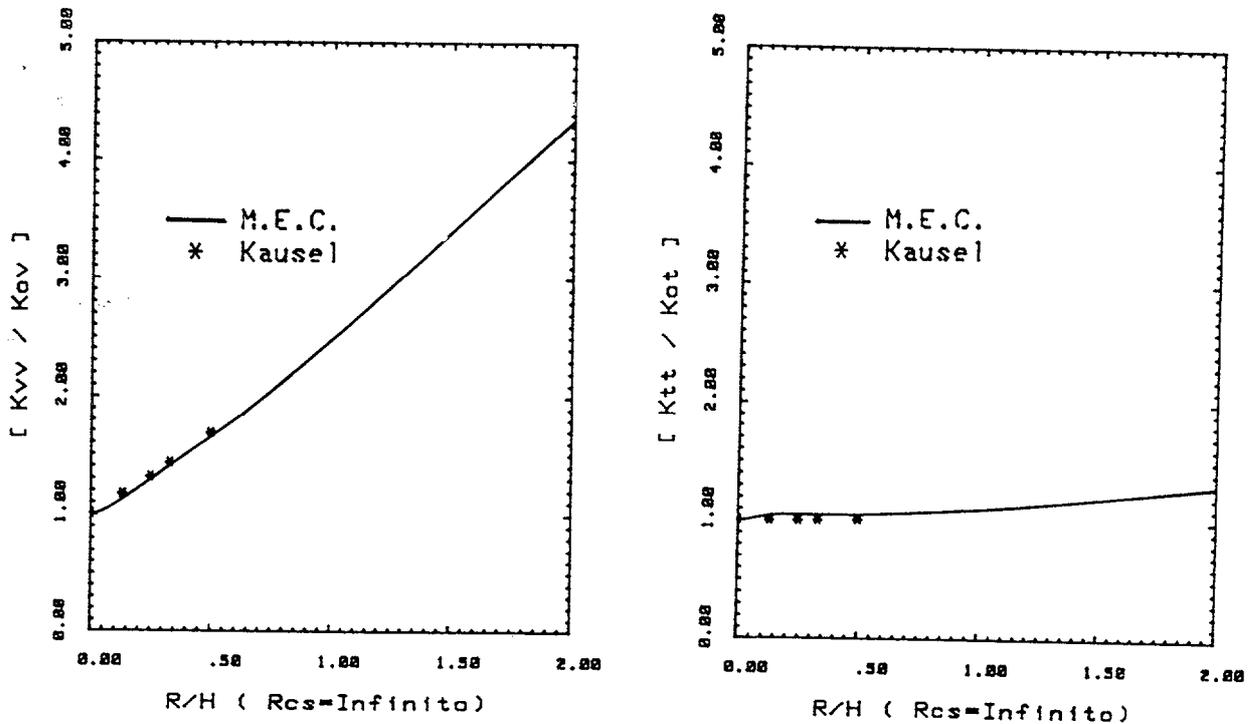
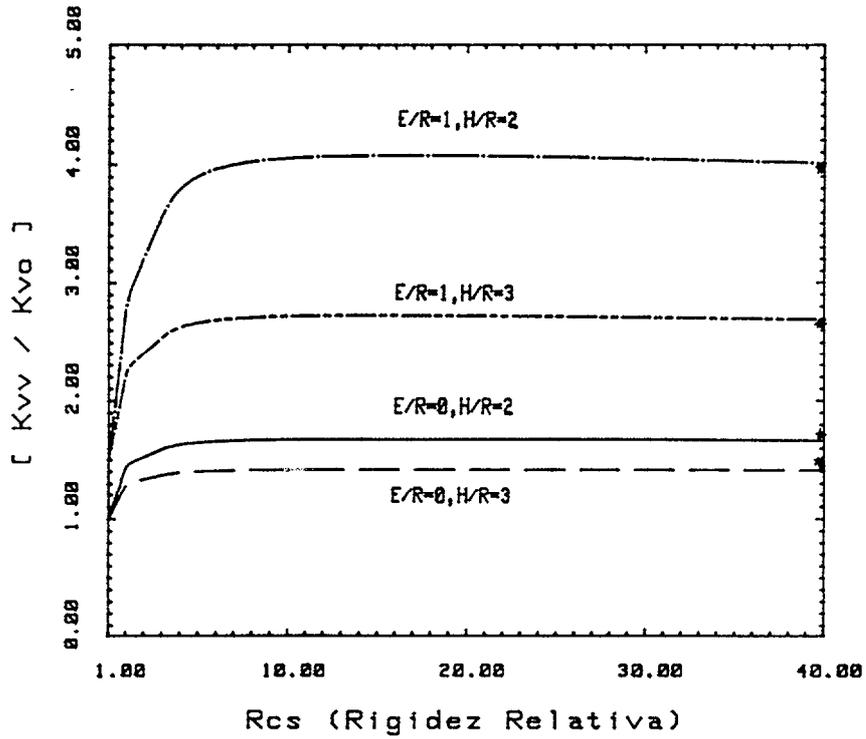


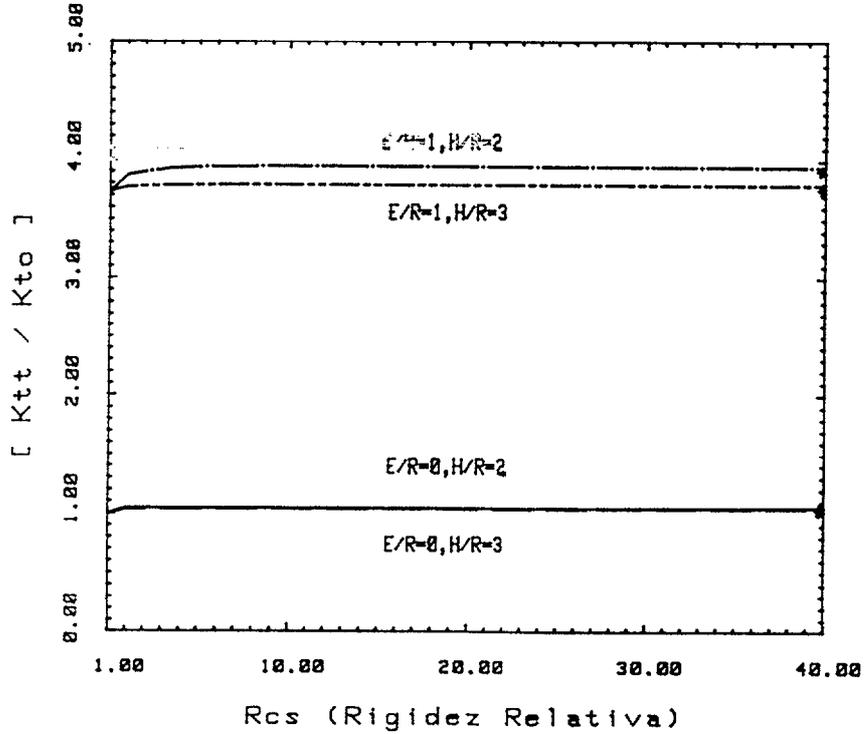
Figura 6.35 Rigidez Estatica Vertical y de Torsión
cimentación superficial en función de la potencia
del estrato sobre base rígida

En las figuras 6.36 a y b se presenta la influencia de la rigidez relativa del semiespacio soporte en los valores de la rigidez de ambos movimientos para cimentaciones superficial y embebida cuyos valores estan tabulados en las tablas 6.III y 6.IV y sobre las que se han señalado con * los valores correspondientes a los autores anteriores.

Las rigideces en este caso muestran una fuerte dependencia de los parámetros E/R y H/R , con valores crecientes a medida que se incrementa el primero y decrementa el segundo. Frente al parámetro Rcs , rigidez relativa, se observa que los valores tienden asintóticamente al valor correspondiente a una base rígida y simulada por el método desarrollado para el valor 100, que de hecho no se ha representado por motivos de escalado del dibujo, con objeto de reflejar mejor el comportamiento para valores bajos de Rcs . Esta tendencia se puede recoger de forma adecuada mediante una variación de tipo exponencial para valores constantes de los otros dos parámetros.



(a)



(b)

Figura.-6.36 Rigidez Estática Vertical y de Torsión para cimentaciones superficiales y embebidas, en función de R_{cs} , E/R y H/R

CAPITULO VII

CONCLUSIONES Y DESARROLLO FUTURO

7.1 RESUMEN

El primer objetivo cubierto por esta Tesis es el desarrollo de una formulación directa del Método de los Elementos de Contorno, capaz de hacer frente a la resolución de problemas elastodinámicos en sólidos con geometría de revolución con sección meridiana cualquiera, en el dominio de la frecuencia. Esto se ha realizado implementando un elemento de contorno axilsimétrico con aproximación constante de las variables en él, tanto en la formulación estática como en la dinámica.

Además se han analizado mediante el método, el comportamiento dinámico de cimentaciones axilsimétricas, superficiales y embebidas en el terreno, como segundo paso de la Subestructuración para la resolución del problema de interacción suelo-estructura.

El modelo de suelo empleado ha sido, tal y como se apuntó en los objetivos, de dos tipos. El primero de ellos un suelo puramente elástico a través de un Módulo de Rigidez Transversal $\mu \in \mathbb{R}^+$ y en segundo lugar como un sólido viscoelástico de tipo histerético introduciendo el amortiguamiento del material, de acuerdo con lo expuesto en el capítulo cuarto, mediante un módulo complejo dado por la expresión :

$$\mu^* = \mu(1. + 2\xi i) \in \mathbb{C}$$

donde ξ representa el índice de amortiguamiento con respecto al crítico del material, que puede ser distinto para las ondas S y P respectivamente.

Con estos modelos de suelo y el procedimiento de cálculo obtenido se ha analizado el comportamientos de los tipos de cimentación mencionados bajo dos aspectos diferentes. En el primero de ellos se ha considerado el

terreno como un medio isótropo y homogéneo, es decir un semiespacio. En el segundo se ha extendido la formulación desarrollada a medios heterogéneos, estratificados, bien debido a las características intrínsecas del terreno o a la simulación de un modelo de suelo de módulo de rigidez variable con la profundidad; introduciendo una técnica de subregionalización en la que cada una de ellas se comporte como medio homogéneo.

En el capítulo quinto se muestran y analizan los resultados obtenidos, convenientemente adimensionalizados, mediante gráficas que muestran la influencia del grado de embebimiento de la cimentación en el terreno y el incremento del índice de amortiguamiento para el caso de semiespacio homogéneo.

En el capítulo sexto se exponen los resultados y se interpreta la influencia de algunos de los parámetros, rigidez del semiespacio soporte y potencia relativa del estrato, que intervienen en la respuesta de las cimentaciones a través de gráficas y tablas para un modelo relativamente sencillo como es el bicapa, con tan sólo un estrato sobre un semiespacio. Además en este mismo capítulo se presentan los resultados obtenidos para estratigrafías más complejas en los casos de cimentaciones superficiales y cilíndricas embebidas.

A la vista de los resultados, que en líneas generales, concuerdan con el estado del arte, se infiere que el método desarrollado es correcto y ha sido suficientemente contrastado con el resto de los autores con los que se ha comparado.

7.2 CONCLUSIONES

Como conclusiones de esta tesis pueden apuntarse varias y pueden ser agrupadas bajo dos conceptos bien diferenciados. Unas respecto al procedimiento de cálculo

desarrollado y otras sobre algunos aspectos de la aplicación concreta efectuada; esto es el problema de interacción suelo-estructura.

Desde el primer enfoque y en primer lugar se hará mención que se ha desarrollado por primera vez un elemento de contorno axilsimétrico capaz de modelar dominios, acotados y no acotados, generados a partir de una línea cualquiera girando alrededor de un eje de simetría y con condiciones de contorno cualesquiera, aplicado a la resolución de problemas elastodinámicos en el dominio de la frecuencia. Además la formulación permite abordar el estudio de problemas con condiciones de contorno no axilsimétricas a través de un desarrollo en serie de Fourier que lo descompone en tantos problemas planos como modos sean necesarios para modelar adecuadamente las condiciones de contorno impuestas.

La formulación y por tanto el programa de computador que la implementan, no presenta grandes limitaciones para su uso; no teniendo problemas de estabilidad de la solución a muy baja frecuencia, de hecho muchas de los valores que se denominan rigidez estática se han calculado pasando frecuencias adimensionales del orden de 0.01. El programa es general, aunque está orientado a la resolución de problemas de interacción, y podría usarse para cualquier otro tipo de análisis con pequeñas modificaciones.

En cuanto a las limitaciones, habituales en problemas dinámicos, cabe pensar en el tamaño máximo de los elementos a utilizar que para obtener resultados con una precisión suficiente es necesario que este comprendido entre la cuarta y sexta parte de la longitud de onda de la excitación.

Otra recomendación para dominios infinitos o seminfinitos es la de cortar la discretización a una distancia adecuada para que la influencia de la parte omitida no penalize la bondad de la solución. Este

parámetro depende de la frecuencia y de otras características del modelo que se este procesando y que para la aplicación desarrollada son función del embebimiento de la cimentación y del radio de la misma siendo los valores recomendados entre 7 y 15 veces el primero y de 5 a 10 veces el segundo dependiendo del tipo de cimiento en estudio.

Pese a la característica inherente a los elementos de contorno de modelar correctamente los dominios ya mencionados, pueden surgir problemas de estabilidad para frecuencias altas y materiales puramente elásticos y por tanto es recomendable utilizar índices de amortiguamiento no inferiores a un tres por ciento.

Sobre el problema estudiado en la tesis se puede apuntar, como conclusiones de la misma, algunos aspectos acerca de la influencia de los diferentes factores que han sido objeto de estudio a lo largo de ella sobre el comportamiento de las cimentaciones a las que se les ha aplicado el procedimiento de cálculo desarrollado.

Con respecto al grado de embebimiento de la cimentación hay que decir que, en general, el incremento de su valor produce un aumento prácticamente lineal de todas las impedancias, especialmente la parte imaginaria de las mismas, y a todas las frecuencias de forma tal que la forma de la curva queda prácticamente inalterada en medios homogéneos. Por el contrario, para medios estratificados esto no es cierto debido a las ondulaciones producidas por las refracciones y reflexiones de las diferentes ondas en las interfases entre estratos.

El índice de amortiguamiento, introduce en la práctica totalidad de los casos estudiados la disminución de las partes reales de las impedancias y el incremento de la parte imaginaria normalizada con respecto a la frecuencia, coeficiente de amortiguamiento, a baja frecuencia cuando se incrementa el amortiguamiento y esto es

particularmente cierto, de la misma forma que el factor comentado en el párrafo anterior, para medios homogéneos y con las mismas salvedades para los estratificados ya que de nuevo las curvas a frecuencias altas presentan similares oscilaciones asociadas a las diferentes frecuencias propias de estrato para los distintos tipos de ondas.

La potencia relativa del estrato, en el modelo bicapa, manifiesta una marcada influencia sobre el comportamiento de las distintas impedancias produciendo un aumento en los valores absolutos de las mismas a medida que el parámetro disminuye y bajando el número de picos de resonancia, de acuerdo con la teoría monodimensional, dentro del rango de frecuencias estudiada y situándolos en las frecuencias predichas por ésta, especialmente en el caso de base rígida, estando mucho más claro este efecto en la impedancia vertical. En sentido opuesto, con el aumento de H/R el comportamiento de las distintas impedancias tiende hacia la solución del semiespacio siendo muy marcada esta tendencia en la impedancia de torsión.

Con respecto a la rigidez del semiespacio soporte, se puede decir que tiene una marcada influencia sobre todas las impedancias y para todos los tipos de cimentaciones estudiadas, excepto en la de torsión, en la que su efecto es prácticamente irrelevante. Esta influencia se manifiesta en una suavización de las gráficas y desplazamiento de las frecuencias a las que se producen los picos de resonancia asociados a las frecuencias propias de estrato conforme la rigidez tiende hacia la unidad. Con el incremento del parámetro el comportamiento de las impedancias tiende hacia el otro límite, modelo de base rígida obligatorio en los modelos de elementos finitos, pero en el que los valores obtenidos de las impedancias a alta frecuencia no llegan a alcanzarse.

Con respecto a algunos de los resultados, con los que se ha comparado, que utilizan el M.E.F. hay que decir que en

algunos casos la discretización utilizada no ha sido lo suficientemente fina, en comparación a la empleada en los ejemplos de la tesis, teniendo en cuenta que éste es un método de dominio lo que en principio debería implicar un elevado incremento en el número de elementos necesario para un correcto modelado del problema en estudio.

El estudio se ha extendido a medios estratificados cualquiera, tanto para cimentaciones superficiales como para las embebidas, con los que se ha comprobado la validez del método propuesto para resolver casos prácticos si bien han aparecido algunas discrepancias con los resultados obtenidos con los autores con los que se ha comparado, que han de ser objeto de un análisis más profundo.

7.3 DESARROLLO FUTURO

Como desarrollo futuro de esta tesis cabría actuar en varios aspectos de la misma.

En primer lugar, trabajos que conduzcan a la implementación de nuevos elementos, dentro del dominio de la frecuencia entre los que se podría apuntar los siguientes:

- a) La obtención de elementos con carácter infinito que permitan modelar de forma más correcta los contornos infinitos inherentes al problema, con una disminución apreciable en la discretización necesaria.
- b) El desarrollo de elementos de contorno axilsimétrico con funciones, aproximantes de la geometría y variables, de orden mayor a fin de mejorar los resultados obtenidos.

En segundo lugar, aquellos otros trabajos en los que el método de cálculo presentado, con sólo un esfuerzo adicional de programación, permitiría abordar la resolución

de problemas de amplificación e interacción cinemática.

A su vez con los resultados ya obtenidos se podría obtener la respuesta en el tiempo utilizando una técnica del tipo de la transformada rápida de Fourier, F.F.T., especialmente en el caso de semiespacio homogéneo dada la suavidad de la respuesta con la frecuencia.

En tercer lugar, formular un elemento de contorno axilsimétrico directamente en el dominio del tiempo con lo que se podrá tener en cuenta comportamientos no lineales en el modelo de suelo así como los fenómenos de plastificación del mismo. Este tipo de trabajo requerirá un mayor esfuerzo que alguno de los anteriores pues implica un planteamiento totalmente diferente del que se presenta en esta tesis.

REFERENCIAS

Referencias

- ABASCAL, R. (1984)
Estudio de Problemas Dinámicos en Interacción
suelo-estructura por el Método de los Elementos de
Contorno
Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla, España

- ACHEMBACH, J.D. (1973)
Wave propagation in Elastic Solids
North-Holland, 3^a ed.

- ADELI, H., HEJAZI, M.S., KEER, L.M y NEMAT-NASSER, S. (1981)
Dynamic Response of Foundations with Arbitrary Geometries
Proc. ASCE 107, EM5, pp 953-967

- ALARCON, E., DOMINGUEZ, J. y del CAÑO, F. (1980)
Dynamic Stiffness of Foundations
C.A. Brebbia., Ed., New development in Boundary Elements
Methods. Proc. of the Second Seminar on Recent Advances in
Boundary Elements Methods, Univ. of Southampton, pp. 264-280

- APSEL, R.J. (1979)
Dynamics Green's Functions for Layered Media and
Applications to Boundary Values Problems
Ph. D. Thesis, Univ. of California, San Diego

- APSEL, R.J. y LUCO, J.E. (1975)
Torsional Response of Rigid Embebed Foundations
Jour. Eng. Mech. Div. ASCE 102, pp 957-970.

- BANAUGH, R.P y GOLDSMITH, W. (1963)
Diffraction of Steady Elastic Waves by Surface of
Arbitrary Shape
Jour. Applied Mechanics. 30, pp 589-597

- BARANOV, V.A. (1967)
On the Calculations of Excited Vibrations of Embebed
Foundations.
Voprosi Dynamiki i Prochnoct. No. 14, Instituto

Referencias

- Politecnico. de Riga, pp. 195-209.
- BENITO, J. (1985)
Interacción Dinámica Terreno-estructura. Aplicación a Centrales Nucleares
Tesis Doctoral, Univ. Politecnica de Madrid, España
 - BEREDUGO, Y.O. y NOVAK, M. (1972)
Coupled Horizontal and Rocking Vibration of Embebed Footings.
Canadian Geotechnical Journal, 9, pp. 477-497.
 - BESKOS, D.E. (1974)
Use of Dynamic Influence Coefficients in Vibration Problems
Ph. D. Thesis, Cornell Univ., Ithaca, N.Y.
 - BETTESS, P. y ZIENKIEWICZ. O.C. (1977)
Diffraction and Refraction of Surface Waves using Finite and Infinite Elements.
Int. Jour. Num. Meth. Eng., 11, pp. 1271-1290.
 - BYCROFT, G.N. (1956)
Forced Vibrations of a Rigid Circular Plate on a semi-infinite Elastic Space or on a Elastic Stratum.
Phil. Trans. Royal Soc. of London, 248, pp. 327-368.
 - CANO, J.J. (1985)
Cálculo de Impedancias Dinámicas de Zapatas Circulares Rígidas en Terrenos Estratificados con Amortiguamiento Histerético
Tesis Doctoral, Univ. Politecnica de Valencia, España
 - CHAPEL, F. (1981)
Application de la methode des equations integrales a la dynamique des sols. Structures sur pieux
These présentée a l'ecole Centrale des Arts et Manufactures.

Referencias

- CHOW, Y.K. y SMITH, I.M. (1981)
Static and Periodic Infinite Solids Elements
Int. Jour. Num. Meth. Eng., Vol. 17, pp. 503-526.

- COLLINS, W.D. (1962)
The Forced Torsional Oscilations of an Elastic Half-space
and a Elastic Estratum.
Prc. London Math. Soc., Vol. 12, No. 46, pp. 226-244.

- CROTTY, J.M. (1982)
A block Equation Solver for Large Unsymetric Matrices
Arising in the Boundary Integral Equations Method.
Int. Jour. Num. Meth. Eng., Vol. 18, pp. 997-1017.

- CRUSE, T.A. y RIZZO, F.J. (1969)
A Direct Formulations and Numerical Solutions of the
General Transient Elastodynamics Problem I.
Jour. Math. Anal. Appl., 22, pp 244-259.

- CRUSE, T.A. SNOW, D.A., y WILSON, R.B. (1977)
Numerical Solution in Axisymmetric Elasticity.
Computer and Structures, Vol. 7, pp. 445-551.

- DASGUPTA, G. (1976)
A Numerical Solution for Viscoelastic Half-planes
Jour. Eng. Mech. Div. ASCE, Vol. 102, EM4, pp. 601-612

- DASGUPTA, S.P. y RAO, N.S.V.K. (1979)
Dynamic Response of Strip Foundations on Elastic
Half-Space.
Int. Jour. Num. Meth. ENg., Vol. 14, pp. 1597-1612

- DAVIS, P.J. Y RABINOWITZ, P. (1984)
Metods of Numerical Integration
2nd Edition, Academic Press

Referencias

- DAY, S.M. (1977)
Finite Element Analysis of Seismic Scattering Problems.
Ph. D. Thesis, University of California, San Diego

- DAY, S.M. y FRAZIER, G.A. (1979)
Seismic Response of Hemispherical Foundations.
Jour. Eng. Mech. Div., ASCE, 105, pp. 29-34

- DOMINGUEZ, J. (1978a)
Dynamic Stiffness of Rectangular Foundations.
Research Report R78-20, M.I.T.

- DOMINGUEZ, J. (1978b)
Response of Embeded Foundations to Traveling Waves.
Research Report R78-24, Order No 627, M.I.T.

- DOMINGUEZ, J. (1981)
The Use of the Method of Images in B.E.M. for
Elastodynamics.
Comunication at the N.A.T.O. Seminar on Numerical Methods
in Geomechanics. Vimeiro. Portugal.

- DOMINGUEZ, J. y ABASCAL, R. (1982)
El Uso de una Solución Fundamental Compuesta para el
Cálculo de Rigideces de Cimentaciones mediante el M.E.C.
Anales de Ingenieria Mecanica, No. 0.

- DOMINGUEZ, J. y ALARCON, E. (1981)
Elastodynamics.
Cap. 7 de Progress in Boundary Element Methods.
Ed. C.A. Brebbia, Pentech Press.

- DOMINGUEZ J., ALARCON, E. y ABASCAL, R. (1982)
The Boundary Element Method in Elastodynamics.
Proc. of 10th IMACS World Congress, Montreal.

Referencias

- DRAVINSKY, M. (1980)
Scattering of Elastic Waves by an Alluvial Valley of Arbitrary Shape.
Report NO. CE 80-06, Univ. of Southern, Los Angeles, Calif.

- ELSABEE, F. y MORRAY, J.P. (1977)
Dynamic Behavior of Embebed Foundations.
Research Report of M.I.T., 43, No. 578.

- EMPERADOR, J.M. y DOMINGUEZ, J. (1987)
Cálculo de Impedancias Dinámicas de Cimentaciones Axilsimétricas Embebidas en el Terreno
Anales de Ingenieria Mecanica, Año 5, No. 1

- ERINGEN, A.C. y SUHUBI, E. (1975)
Elastodynamics, Vol. II. Linear Theory
Academic Press

- ETTOURNEY, M.M. (1976)
Transmitting Boundaries: A Comparison
Research Report of M.I.T. R76-8, No. 572

- GAZETAS, G.C. (1983)
Aalysis of machine foundation vibrations: state of the art
Soil Dynam. and Earthquake Eng., Vol. 2, No. 1, pp. 2-42

- GAZETAS, G.C. y ROESSET, J.M. (1976)
Forced Vibrations of Strip Footings on Layered Soils
Proc. Nat. Struc. Eng. Conf. ASCE. Univ. of Winsconsin,
Vol. I, pp. 115-131

- GOMEZ-LERA, S., DOMINGUEZ, J. Y ALARCON, E. (1985)
On the Use of 3-D Fundamental Solutions for Axisymetric Steady-State Dynamics Problems
Proc. 7th Int. Conf. on B.E.M., Springer-Verlag

Referencias

- GONZALEZ, J.J. (1977)
Dynamic Interaction Between Adjacent Structures
Research Report of M.I.T., R77-30, No 577

- GRADSKTEIN, I.S. y RYZHIK, I.M. (1980)
Table of Integrals, Series and Products
Academic Press Inc.

- HISIEH, T.K. (1962)
Foundation Vibrations
Proc. Inst. Civil. Engrs., pp. 22-221

- JAKUB, M. (1977)
Dynamic Siffness of Foundations: 2-D vs 3-D Solutions
Research Report of M.I.T., R77-36, No. 581

- KARABALIS, D. y BESKOS, D.E. (1984)
Dynamic Response of 3-D Rigid Surface Foundations by Time
Domain B.E.M.
Earthquake Eng. and Struc. Dyn., Vol. 12, No. 1

- KAUSEL, E. (1974)
Forced Vibrations of Circular Foundations on Layered Media
Research Report of M.I.T. R74-11

- KAUSEL, E. (1981)
An Explicit Solution for the Green's Functions on Layered
Media
Research Report of M.I.T.

- KAUSEL, E. y ROESSET, J.M. (1974)
Soil-Structure Interaction Problems for Nuclear
Containment Structures
ASCE Power Div. Specialty Conf., Boulder, Colorado.

- KAUSEL, E. y ROESSET, J.M. (1974)
Semianalityc Hyperelement for Layered Strata
Jour. Eng. Mech. Div. ASCE, Vol. 109, No. EM4, pp. 569-588

Referencias

- KAUSEL, E. y USHIJIMA, R. (1979)
Vertical and Torsional Stiffness of Cylindrical Footings
Research Report of M.I.T. R79-6, No. 632.

- KERMANIDIS, T. (1975)
A Numerical Solution for Axially Symmetrical Elasticity Problems
Jour. Solids and Structures, Vol. 11, pp. 493-500

- KITAMURA, Y. y SAKURAI, S. (1979)
Dynamic Stiffness for Rectangular Rigid Foundations on a Semi-infinite Elastic Medium
Int. Jour. Num. Anal. Meth. Geomech., 3, pp.159-171

- KITAMURA, Y. y SAKURAI, S. (1982)
A Numerical Method for Determining Dynamic Stiffness
Z. Eisenstein, Ed. Num. Meth. Geomech. Edmonton, Balkema, Rotterdam

- KOBAYASHI, S. y NISHIMURA, N. (1982)
On the Indeterminacy of BIEM Solutions for the Exterior Problems of Time-harmonic Elastodynamics and Incompressible Elastostatics
Proc. of the Fth. Inter. Seminar of B.E.M. Ed. C.A. Brebbia, Springer-Verlag.

- KOBORI, T., MINAI, R. y SUZUKI, T. (1966)
Dynamic Ground Compliance of Rectangular Foundations on Elastic Stratum
Proc. 2nd Jap. Nat. Symp. on Earthquake Eng. Cont., Japan, pp. 261-266

- KOBORI, T., MINAI, R. y SUZUKI, T. (1967)
Dynamic Ground Compliance of Rectangular Foundations on Elastic Stratum over a Semi-infinite Rigid Medium
Annual Report Disaster Prevention Research Inst. of Kyoto Univ., No 11A, pp-348-367

Referencias

- KOBORI, T., MINAI, R. y SUZUKI, T. (1968)
Dynamic Ground Compliance of Rectangular Foundations on Elastic Stratum over a Semi-infinite Viscoelastic Medium
Annual Report Disaster Prevention Research Inst. of Kyoto Univ., No 11A, pp-348-367

- KOBORI, T. y SUZUKI, T. (1970)
Foundations Vibrations on a Viscoelastic Multilayered Medium
Proc. 3th Jap.- Earth. Eng. Sym., Tokyo, pp. 493-499

- COLE, D.M., KOSLOF, D.D. y MINSTER, J.B. (1978)
A Numerical Boundary Integral Equation for Elastodynamics I
Research Report of Seism. Lab. of the Calif. Inst. of Technology

- LUCO, J.E. (1969)
Dynamic Interaction of Shear Wall with the Soil
Jour. Eng. Mech. Div. ASCE, 95, pp. 333-346

- LUCO, J.E. (1974)
Impedance Functions for a rigid Foundation on a Layered Medium
Nuclear Engineering and Design.

- LUCO, J.E. (1974)
LUCON : Theoretical and Verification Manual
Bechtel Power Corp.

- LUCO, J.E. (1976a)
Torsion of a Rigid Cylinder Embebed in a Elastic Half-space
Jour. Appl. Mech. ASME, 43, pp.419-423

- LUCO, J.E. (1976b)
Torsional Response for SH Waves: the case of Hemisferical Foundations
Bull. Seism. Soc. Am. 66, pp. 109-129

Referencias

- LUCO, J.E. y WESTMANN, (1972)
Dynamic Response of a Rigid Footing Bonded to an Elastic Half-space
Jour. Appl. Mech., Trans. ASME, Vol. 39, Ser. E., No. 2, pp. 527-534

- LUCO, J.E. y WONG. H.L. (1986)
Response of Hemispherical foundations Embebed in Half-space
Jour. Eng. Mech. ASCE, Vol. 112, No. 12, pp. 1363-1374

- LUCO, J.E., WONG, H.L. y TRIFUNAC, M.D. (1975)
A Note on the Dynamic Response of Rigid Embebed Foundations
Int. Jour. Earth. Eng. and Struc. Dyn., 4, No. 2, pp. 19-128

- LYSMER, J. Y RICHART, F.E. (1966)
Dynamic Response of Footings to Vertical Loadings
Jour. of Soil. Mech. and Found. Div., ASCE, Vol. 92, No SMI, pp. 65-91

- LYSMER, J. y KUHLEMEYER, R.L. (1969)
Finite Dinamic Model for Infinite Media
Jour. Eng. Mech. Div. ASCE, 95, pp. 859-877

- MANOLIS, G.D. (1983)
A Comparation Study on tree Boundary Element Method Approaches to Problems in Elastodynamics
Int. Jour. Num. Meth. Eng.,19, pp. 73-91

- MANOLIS, G.D. y BESKOS, D.E. (1981)
Dynamic Stress Concentration Studies by Boundary Integrals and Laplace Transform
Int. Jour. Num. Meth. Eng., 17, pp. 573-599

- MURAKAMI, H., SHIOYAS, S. YAMADA, R. y LUCO, J.E. (1981)
Transmitting Boundaries for Time-harmonic Elastodynamics of Infinite Domains
Int. Jour. Num. Meth. Eng., 17, pp. 1697-1716

Referencias

- NELSON, I. e ISEMBERG, J. (1982)
Soil Island Approach to Structure-medis Interaction
C.S. Desai, Ed Nm. Meth. in Geomech., ASCE, N.Y., pp.
41-57

- NIWA, Y., FUKUI, T., KATO, S. y FUJIKI, K. (1978)
An Application of Integral Equation Method to
Two-dimensional Elastodynamics
Proc. 28th Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 28, pp. 281-290

- NIWA, Y., KOBAYASHI, S. y FUKUI, T. (1976)
Applications of Integral Equation Method to some
Geomechanical Problems
C.S. Desai. Ed Num. Meth. in Geomech., ASCE, N.Y., pp.
281-131

- NOVAK, M, y BEREDUGO, T.O. (1972)
Vertical Vibration of Embebed Footings
Jour. Soil. Mech. Div. ASCE, 98, pp. 1291-1310

- OTLENSTRENER, M. y SCHMID, G. (1981)
- Boundary Elements Applied to Soil-foundation Interaction
Proc. 3rd Int. Sem, on Recent Adv. in B.E.M., Irvine,
Calif., pp. 293-309

- PAUL, H.S. (1967)
Vibration of a Rigid Circular Disck on a Infinite Elastic
Plate
Jour.of Accoustical Soc. of Am., 42, pp. 412-416

- QUINLAN, P.M. (1953)
The Elastic Theory of Soil Dynamics
Symp. on Dyn. Test of Soils, ASTM STP No.1565, pp. 3-34

- REISSNER, E. (1936)
Stationaire, Axialsymetrische, durch eine schuttelnde Masse
erregte Schwingungen eines homogenen elastischen Halbraumes
Ingenieur-Archiv., Vol. 7, pp. 381-396.

Referencias

- REISSNER, E. y SAGOCI, H.F. (1944)
Forced Torsional Oscillations of an Elastic Half-space
Jour. Appl. Phys. 15, pp. 652-662

- RICHART, F.E. (1960)
Foundations Vibrations
Jour. of the Soil Mech. and Foun. Div

- RICHART, F.E., HALL, J.R. y WOODS, R.D. (1970)
Vibrations of Soils and Foundations
Prentice-Hall. Englewood. Cliffs, N.J.

- RIZZO, F.J. y SHIPPY, D.J. (1979)
A Boundary Integral Approach to Potential and Elasticity
Problems for Axisymmetric Bodies with Arbitrary Boundary
Conditions
Mech. Research Communications, Vol. 6, No. 2, pp. 99-103

- RIZZO, F.J., SHIPPY, D.J. y REZAYAT, M. (1985)
Boundary Integral Equation Method for Time-harmonic
Radiation and Scattering in a Elastic Half-space
Advanced Topics in Boundary Element and Anal.
Winter Annual Meeting of ASME, Miami Beach, Florida,
pp. 83-90, AMD-Vol.72

- SHIPPY, D.J., RIZZO, F.J. y GUPTA, A.K. (1980)
Boundary-Integral Solution of Potential Problems Involving
Axisymmetric Bodies and Nonsymmetric boundary Conditions
Proc. 10th Southeastern Conf. on Theo. and Appl. Mech.

- SHIPPY, D.J., RIZZO, F.J. y NIGAM, R.K. (1980)
A Boundary Integral Equation Method for Axisymmetric
Elastostatic Bodies under Arbitrary Surface Loads
Advances in Boundary Element Method, pp. 423-432

- SPIRAKOS, C.C. (1984)
Dynamic Response of Two-dimensional Foundations
Ph. D., Univ. Minnesota, Minneapolis

Referencias

- SUNG, T.Y. (1953)
Vibration in Semi-infinite Solids Due to Periodic Surface Loading
Sc. D. Thesis, Harvard University
- TASSOULAS, J.L. (1973)
Elements for the Numerical Analysis of Wave Motion in Layered Media
Research Report of M.I.T., R81-2, No 689
- THAU, S.A. y UMEK, A. (1973)
A transient Response of a Buried Foundation to Antiplane Shear Waves
Jour. Appl. Mech. ASME, 40, pp. 1061-1066
- UNDERWOOD, P. y GEERS, T.L. (1981)
Doubly Asymptotic Boundary Element Analysis of Dynamic Soil-structure Interaction
Int. Jour. Solids and Struc., 17, pp. 687-697
- VELETSOS, A.S. y VERBIC, B. (1973)
Vibrations of Viscoelastic Foundations
Jour. Geomech. Eng. Div. ASCE, 100
- VELETSOS, A.S. y WEI, Y.T. (1971)
Lateral and Rocking Vibration of Footings
Struc. Res., Report No. 8, Rice Univ. Houston, Texas
- VARDANEGA, C. (1878)
Soil-structure Interaction Effects on the Dynamic Response of Shear Wall Buildings
M.I.T., Master of Science in Civil Engineering.
- WAAS, G. (1972)
Linear Two-dimensional Analysis of Soil Dynamics in Semi-infinite Layered Media
Ph. D. Thesis Univ. of California, Berkeley.

Referencias

- WILSON, E.L. (1965)
Structural Analysis of Axisymmetric Solids
AIAA Jour., Vol. 3, pp. 2269,2274
- WHELLER, L.T. y STEMBERG, E. (1968)
Some Theorems in Clasical Elastodynamics
Achive for Rational Mech. and Analysis. Vol. 31, pp. 51-90
- WONG, H.L. (1979)
Diffraction of P, SV, and Rayleigh Waves by Surface
Topographies
Report No CE 79-05, Univ. of Southern, Los Angeles, Calif.
- WONG, H.L. y LUCO, J.E. (1978)
Dynamic Response of Rectangular Foundations to Obliquely
Incident Seismic Waves
Earth. Eng. and Struc. Dyn., 6, pp. 3-16
- WONG, H.L. y TRIFUNAC, M.D. (1974)
Interction of a Shear Wall with the Soil for Incident
Plane SH Waves: Eliptical Rigid Foundation
Bull. Seism. Soc. Am., 64, pp. 1825-1842
- YOSHIKAWA, F. y TANAKA, M. (1982)
Boundary Elements in Axisimetric Potential Problems
Proc. of the Fourth Inter. Semi., Southampton, Eng.
B.E.M. in Eng., Ed. C.A. Brebbia, Springer-Verlag, Berlin