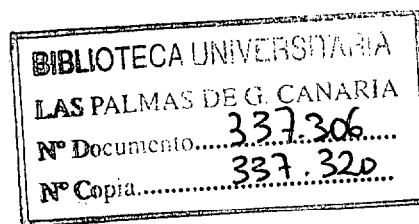


UNIVERSIDAD POLITECNICA DE CANARIAS

FACULTAD DE CIENCIAS DEL MAR

Departamento de Matemática Aplicada

---



CONTRIBUCION A LA MODELIZACION DE LA ELIMINACION DE  
RESIDUOS SOLIDOS POR VIA MARINA



*Isabel Fernández de la Nuez*

Las Palmas de Gran Canaria

1988

UNIVERSIDAD POLITECNICA DE CANARIAS  
FACULTAD DE CIENCIAS DEL MAR  
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA

---



CONTRIBUCION A LA  
MODELIZACION DE LA ELIMINACION DE RESIDUOS  
SOLIDOS POR VIA MARINA

*Memoria presentada por  
D<sup>a</sup> Isabel Fernández de la Nuez,  
Ingeniero Agrónomo, para optar al  
grado de Doctor en Ciencias del Mar*

Las Palmas de Gran Canaria  
1988

A mi hermano Francisco



**Universidad Politécnica de Canarias**  
**Departamento de Matemática Aplicada**

~~~~~

JOSE MIGUEL PACHECO CASTELAO, PROFESOR TITULAR DEL AREA DE MATEMATICAS APLICADAS  
EN LA FACULTAD DE CIENCIAS DEL MAR DE LA UNIVERSIDAD POLITECNICA DE CANARIAS

**CERTIFICO:** Que la presente memoria, titulada: "*Contribución a la modelización de la eliminación de residuos sólidos - por vía marina*", ha sido realizada bajo mi dirección por **D<sup>a</sup> Isabel Fernández de la Nuez**, Ingeniero Agrónomo, y constituye su Tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias del Mar.

Y para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente y a los efectos que haya lugar, firmo el presente en Las Palmas de Gran Canaria, a uno de Octubre de mil novecientos ochenta y ocho.

Vº. Bº.:  
EL DIRECTOR DEL DEPARTAMENTO,

Fdº.: G. Winter

### **Agradecimientos:**

*Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas que han intervenido en la realización de esta tesis:*

*Al Dr. José Miguel Pacheco Castela, por su paciencia en la dirección del trabajo.*

*Al Dr. Francisco Rubio Royo, por su constante estímulo.*

*A César, Angelo y Soledad, por su amistoso apoyo.*

*A Isabel Padilla y Vicente Benítez, por su ayuda en la recogida de datos.*

*A M<sup>ra</sup> Antonia Rodríguez Bernal, por su cuidadosa mecanografía.*

*Parte de este trabajo ha sido elaborado con el apoyo del Proyecto de Investigación nº 81/02.06.87, financiado por el Gobierno Autónomo Canario.*



## INDICE

|                                                                                                        | <u>Pág.</u> |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| PROLOGO . . . . .                                                                                      | 7           |
| I. INTRODUCCION Y OBJETIVOS . . . . .                                                                  | 8           |
| 1. La eliminación de residuos en la isla de Gran Canaria . . .                                         | 9           |
| 2. Cuestiones metodológicas . . . . .                                                                  | 11          |
| 3. Análisis científico del problema . . . . .                                                          | 38          |
| 3.1. Datos relevantes para tratar este tipo de problemas .                                             | 38          |
| 3.2. Aspectos científicos del problema . . . . .                                                       | 40          |
| 4. Objetivos . . . . .                                                                                 | 42          |
| II. ELIMINACION DE RESIDUOS. INTERACCION MAR-RESIDUOS . . . . .                                        | 43          |
| 1. Consideraciones generales acerca del concepto de contamina-<br>ción . . . . .                       | 44          |
| 2. La contaminación en el mar . . . . .                                                                | 46          |
| 3. Depuración y depuradoras . . . . .                                                                  | 49          |
| 3.1. Microbiología y modelos asociados . . . . .                                                       | 51          |
| 3.2. Aplicación del modelo al tratamiento biológico . . . .                                            | 57          |
| III. MODELOS MATEMATICOS . . . . .                                                                     | 68          |
| 1. El modelo compartimental . . . . .                                                                  | 70          |
| 2. El problema de la acumulación: Residuos degradables . . . .                                         | 76          |
| 2.1. Modelización . . . . .                                                                            | 77          |
| 3. Una modelización para la eliminación de partículas suspendi-<br>das en el Océano . . . . .          | 81          |
| 3.1. Cálculo del tiempo de eliminación . . . . .                                                       | 85          |
| 3.2. Resolución numérica del problema de contorno, experi-<br>mentos numéricos y comentarios . . . . . | 87          |
| IV. CONCLUSIONES . . . . .                                                                             | 103         |
| V. REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFIA . . . . .                                                                | 106         |

~o~o~o~o~o~o~o~o~o~

## Prólogo:

*Las Ciencias del Mar cubren un espectro amplio de disciplinas, que se aplican a cuestiones relacionadas con el mar y todo aquello que, de un modo u otro, se halla influido por él. Un problema importante es la gestión de áreas insulares, en especial cuando la densidad de población y de actividades empuja a los habitantes hacia la periferia. Aquí el mar se convierte en protagonista principal y su presencia es constante. Aparecen problemas de todo tipo en relación con las interacciones entre tierra, mar y población. Estos problemas exigen estudios, y tal vez, propuestas de solución arriesgadas. El papel de quienes se dedican a la Matemática Aplicada es precisamente éste: Plantear problemas de forma clara y correcta y, en caso necesario, indicar vías de solución. Este es el motivo de la presente memoria.*



**I.**  
**INTRODUCCION Y OBJETIVOS**

## 1. La eliminación de residuos sólidos en la isla de Gran Canaria

La isla de Gran Canaria, debido a su extraordinaria densidad de población (más de 350 h/km<sup>2</sup>) y a la distribución espacial de sus zonas habitadas, limitadas por lo quebrado del terreno y las dificultades de comunicación, puede considerarse como un núcleo urbano único. A la hora de eliminar los subproductos de la actividad humana lo anterior se hace muy patente; cualquier vertedero incontrolado se halla inevitablemente ubicado en las proximidades de áreas densamente pobladas, y debido a las pequeñas distancias en línea recta, los humos, malos olores, o simplemente los aspectos estéticos, alcanzan a grandes cantidades de ciudadanos. Más aún, la tendencia a urbanizar el suelo a lo largo de los caminos de nueva traza no hace sino agravar este problema.

Cuando se habla de residuos o subproductos suele hacerse una doble clasificación. La primera los divide en sólidos y aguas residuales. La segunda atiende a su origen y los clasifica, además, en industriales y urbanos. Esta división no es rígida, pero es lo bastante operativa para mantenerse en uso. Los residuos sólidos se pueden tratar y eliminar, cualquiera que sea su origen, incorporándose al ambiente en forma de material de relleno, de construcción, abono (compost) o vertedero sanitario, además del reciclado de algunos de sus constituyentes. El caso de las aguas residuales plantea un doble problema: En primer lugar se trata de recuperar el agua (reciclado), y en segundo, de eliminar los restos sólidos de la operación anterior, los denominados fangos. Aquí sí puede abrirse un catálogo de cuestiones interesantes para la isla de Gran Canaria. Estudiemos algunas de ellas con detalle:

- La salinidad natural de las aguas de uso en la isla en algunos casos puede ser elevada, de forma que no sea viable su recuperación, pues requeriría un proceso final de desalación, cosa

que carece de sentido. En este caso lo natural sería eliminarlas directamente por los conocidos emisarios, etc.

- Los fangos procedentes de las diferentes clases de aguas residuales deben ser tratados, en lo posible, separadamente, tras los procesos de depuración. Así, no resultarán iguales los correspondientes a las zonas urbanas a los generados por las actividades portuarias o industriales. Estos últimos pueden resultar venenosos para la tierra si se pretende eliminarlos en los clásicos vertederos sanitarios, haciendo así inviable su posterior uso para actividades humanas.

- La escasez de terrenos adecuados para proceder a vertidos controlados, unido a las tendencias urbanizadoras, parece dar la razón a quienes buscan alternativas para la eliminación de este tipo de residuos. Naturalmente, la alternativa más próxima es utilizar el mar como vertedero controlado. Esta última palabra hay que entenderla en el sentido de proceder a la eliminación só lo tras los estudios pertinentes de viabilidad, tanto ecológica como técnica, económica y legal.

Del mismo modo que la proliferación de vertidos, tanto legales como no, en el interior de la isla puede llegar a modificar sensiblemente la calidad de la vida humana en nuestro entorno, la utilización indiscriminada del océano debe prohibirse explícitamente si no se controla adecuadamente la calidad de los desechos que se depositan y sus posibles interacciones físicas, químicas y bio-geológicas con las aguas marinas. El estado actual de los conocimientos en ciencias del mar no permite garantizar de modo inmediato la oportunidad o no de realizar vertidos en el área próxima a la isla, sino que exige un tratamiento, que es uno de los objetos del presente trabajo.

La necesidad de estos estudios es cada vez más acuciante, - dada la creciente pérdida de actividad agrícola en la isla en fa- vor de una economía de sector terciario, lo cual hace evolucio-- nar el ecosistema (en sentido amplio) de uno de carácter cerrado a otro abierto. Por ello, la ampliación de la zona de interac-- ción hombre-naturaleza en el ámbito insular debe hacerse a costa del mar, y no sólo del inmediatamente próximo, sino también has- ta cierta distancia, suficiente para que el poder regenerador - del océano pueda actuar sin interferir con las áreas costeras de la isla o incluso con la totalidad de la isla por fenómenos me- teorológicos de escalas inferiores a la sinóptica.

Referencias: (2), (3), (4), (12), (15), (18), (24), (29), - (42), (44), (52), (53), (56), (60), (68), (73), (78), (81), (96).

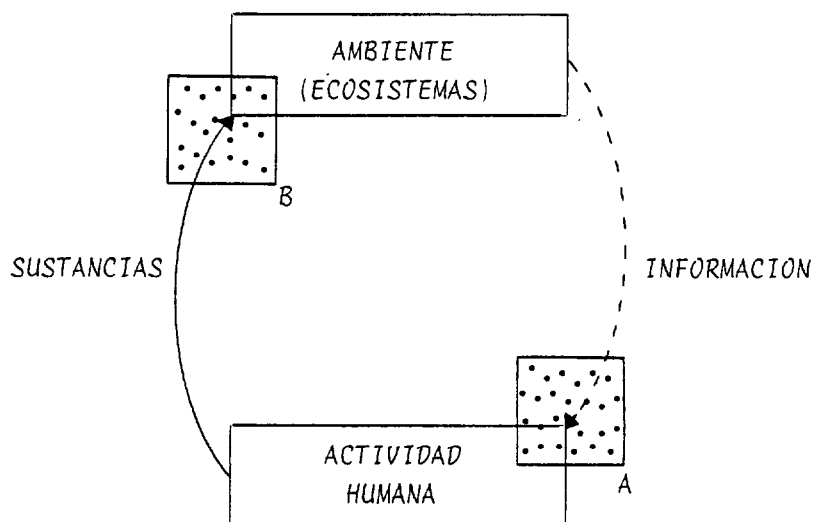
## 2. Cuestiones metodológicas

El problema planteado en el nº1 es un asunto de gran comple- jidad. Así, se ha observado que determinadas situaciones socia-- les, económicas, sirven como sensores de perturbaciones en el am- biente, y que éstas dan origen a estudios científicos, técnicos, económicos, etc. Ninguno de ellos resuelve satisfactoriamente el problema original, sino más bien va proveyendo informaciones y soluciones parciales, de modo que una adecuada combinación de - los aspectos parciales puede dar una idea clara del primer pro- blema y su hipótetica resolución. Este punto de vista se conoce como "teoría de sistemas" y resulta muy adecuado en este tipo de cuestiones, pues gran parte de los estudios parciales pueden lle- varse a cabo de forma independiente. Naturalmente, en cada uno - de los subproblemas puede repetirse el mismo esquema hasta alcan- zar un grado de simplicidad que se estime oportuno.

El problema de la eliminación de residuos puede dividirse, al menos cronológicamente, en los siguientes subproblemas:

1. Cuestión socio-económica,
2. Aspectos científicos y técnicos,
3. De nuevo, asuntos de índole socio-económico.

El contenido de esta memoria es precisamente el análisis - del punto 2, y lo explicamos detalladamente más abajo. Por ahora, hagamos un comentario a la totalidad. En el diagrama siguiente - se puede observar claramente la estructura general de este tipo de problemas:



Las áreas punteadas corresponden a los impactos que constituyen la esencia del problema. Nótese que A corresponde a una zona en que la información enviada por la naturaleza es relevante (p.ej. humos, olores...) y es el "sensor" de la existencia - del problema. Por tanto, se plantea el estudio de la zona B - por los medios al alcance de los científicos, técnicos, socioló-

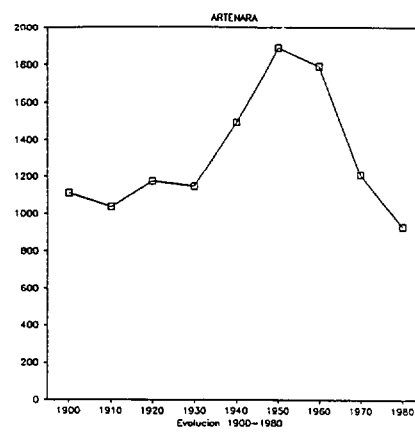
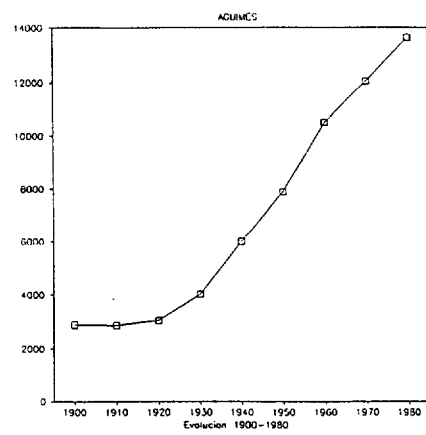
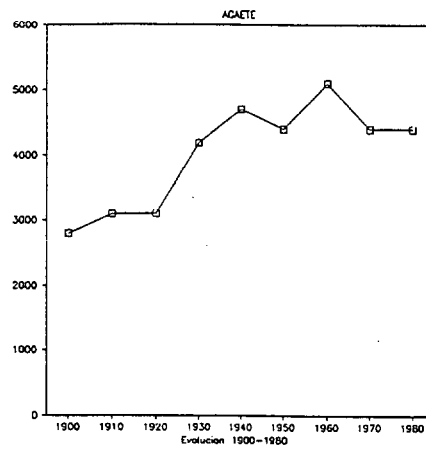
gicos etc, hasta conseguir que la información sea irrelevante. En este caso daríamos por resuelto el problema.

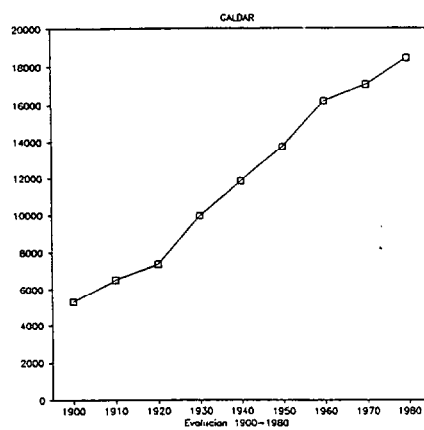
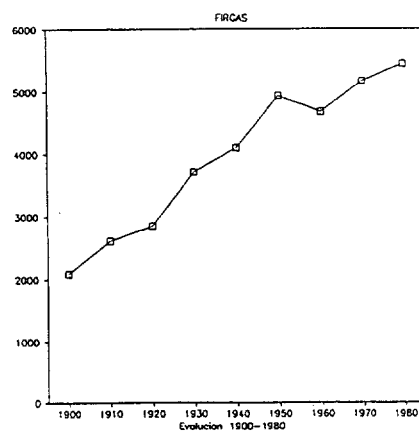
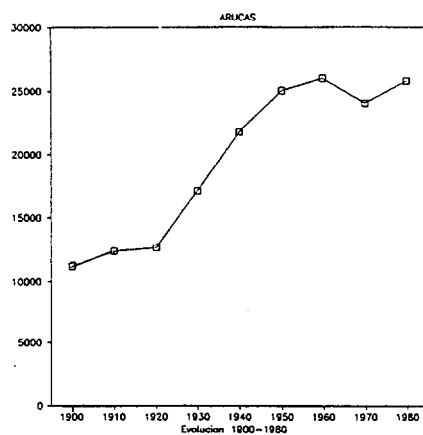
El punto 1, consiste en el análisis de las informaciones recibidas por la sociedad a partir del ambiente. Las características de esta información son, en líneas generales:

- Degradación del medio ambiente
- Pérdida de valor de las inversiones realizadas
- Malestar social.

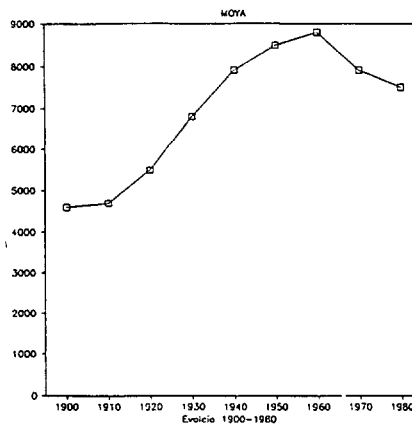
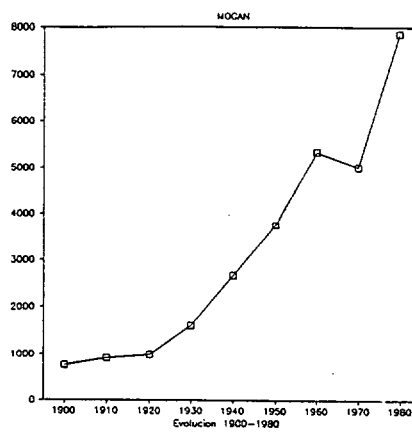
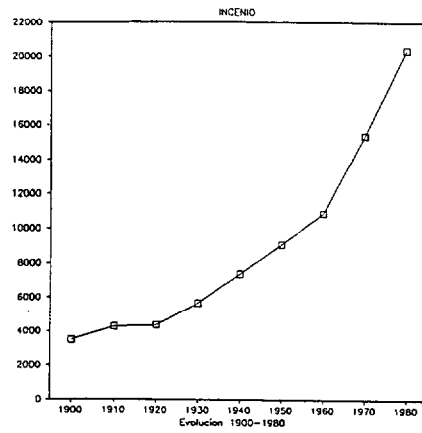
La valoración de los datos corresponde, en primer lugar, a la opinión pública, canalizada por los medios de expresión y por los representantes, pasando despues a los equipos competentes de sociólogos, economistas y gestores. Es posible que un análisis - adecuado en esta fase ayude a resolver parcialmente el problema, sobre todo dando su justa dimensión a las informaciones, que pueden resultar fácilmente distorsionadas por intereses ajenos al bienestar público. Dado que éste no es el objeto de la memoria, de esta parte vamos únicamente a justificar la selección de la isla como unidad ambiental.

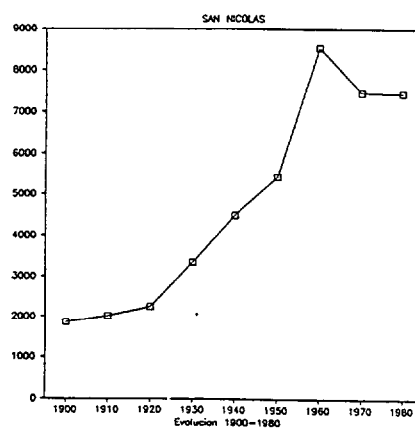
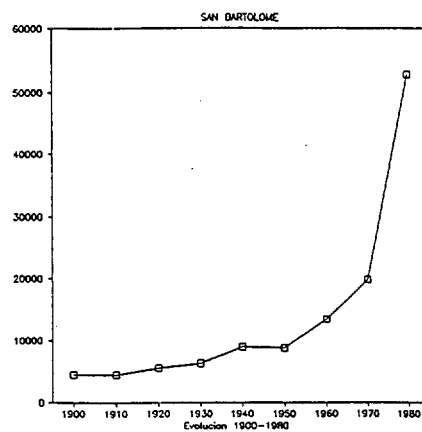
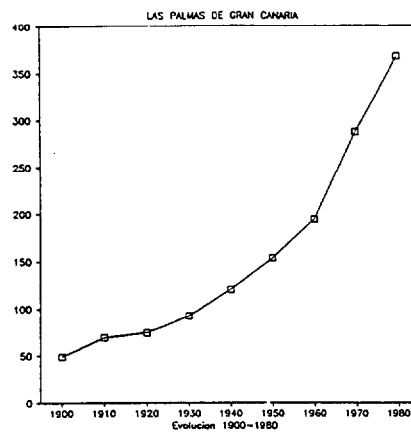
Las gráficas siguientes reflejan la evolución poblacional - de los diferentes municipios de la isla, desde principios de siglo hasta 1980. La elección del municipio en el ámbito insular - no es arbitraria, pues refleja por lo general una unidad geográfica que evoluciona conjuntamente.

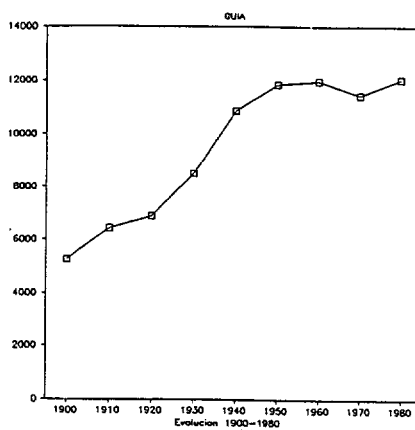
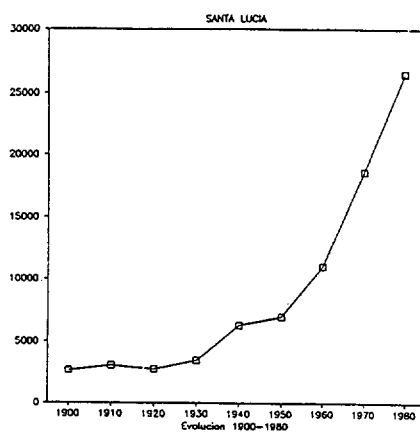
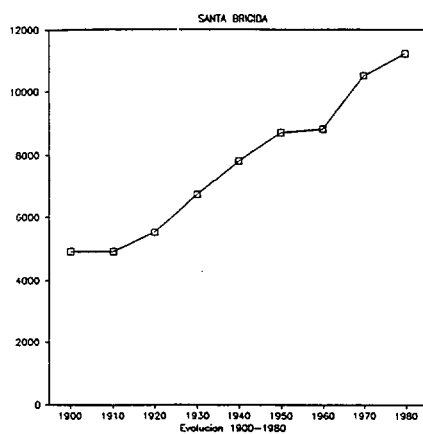


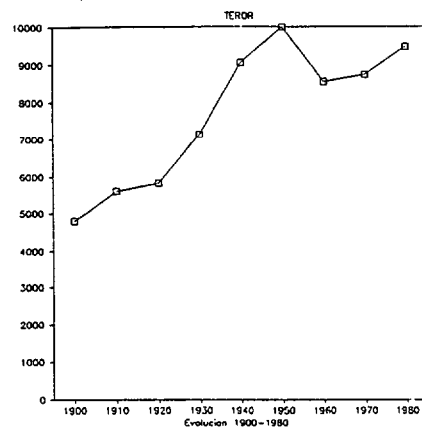
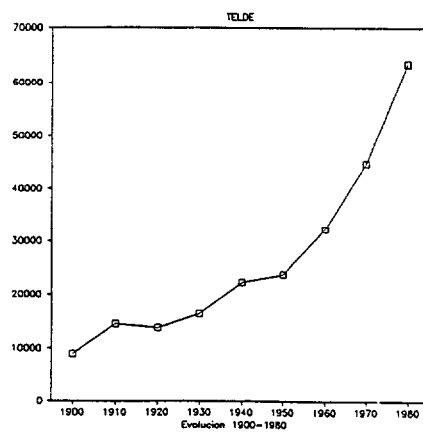
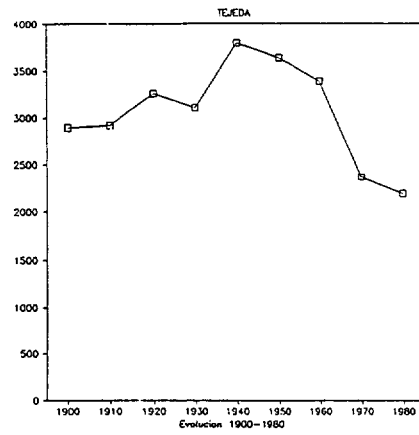


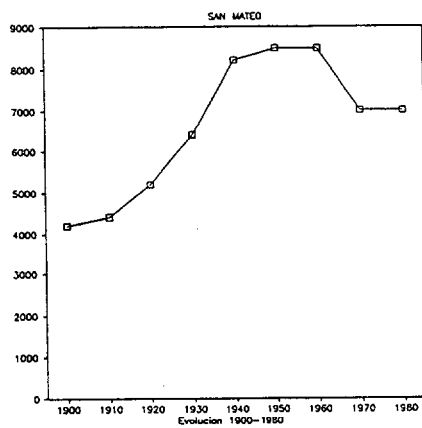
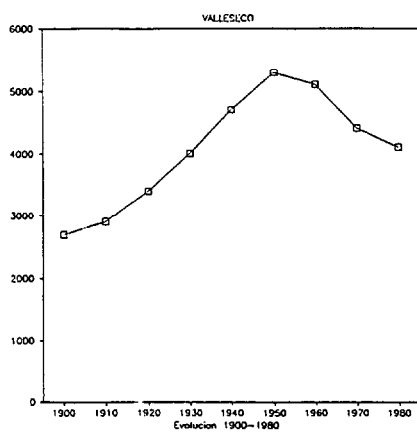
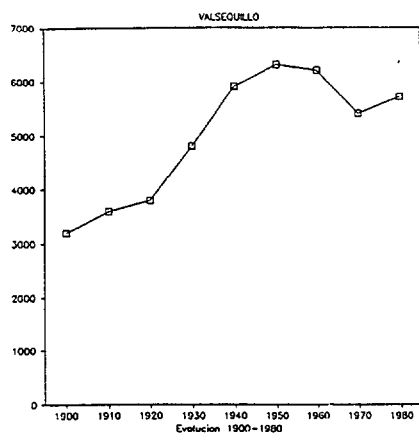


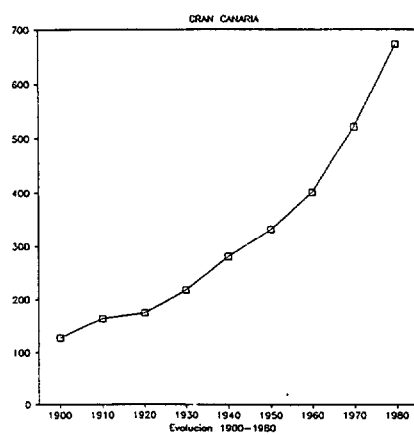




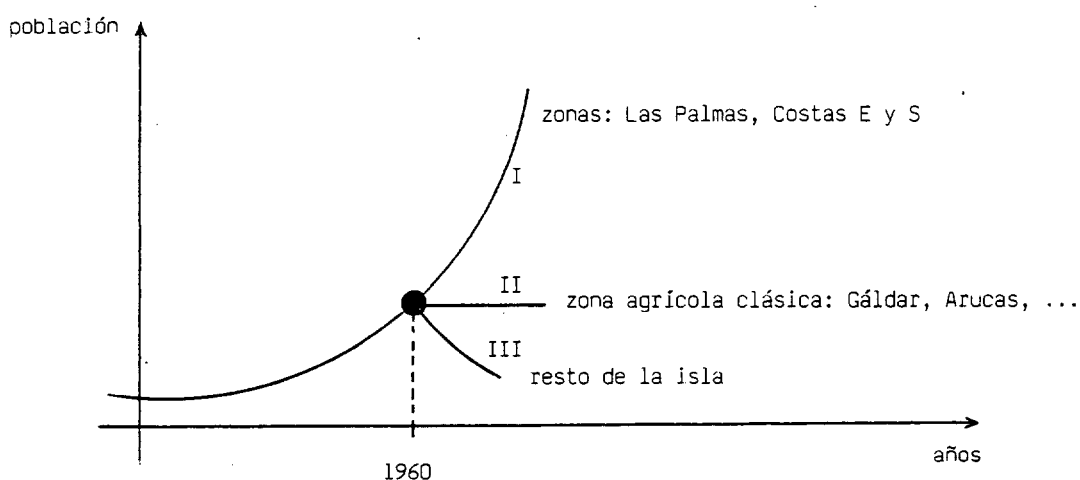








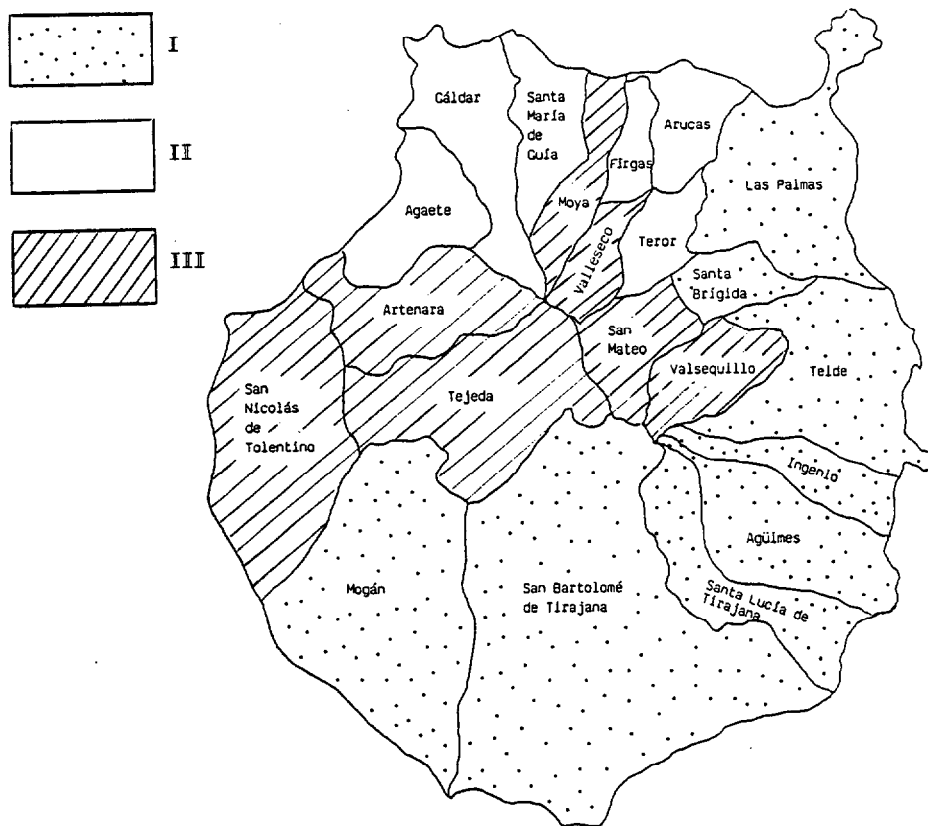
En las gráficas presentadas se observa una tendencia conjunta muy similar en todas ellas hasta llegar al año 1960. A partir de esa fecha el comportamiento se desdobra en tres ramas, que se corresponden con las zonas que se indican en el esquema siguiente:



Esta pauta se debe básicamente al carácter económico de los cambios a que se ha sometido el hábitat insular: El sistema se abre y permite una redistribución de la población en busca del sector servicios, abandonándose las actividades tradicionales. El mapa siguiente señala esquemáticamente las zonas.

Sin embargo, se mantiene la vinculación con el domicilio original, que puede ser residencia permanente u ocasional. El enorme parque automovilístico de la isla (del orden de 3000 vehículos por cada 10 km. de carretera) es un indicador fiable de la unidad estructural que presenta el ámbito insular.

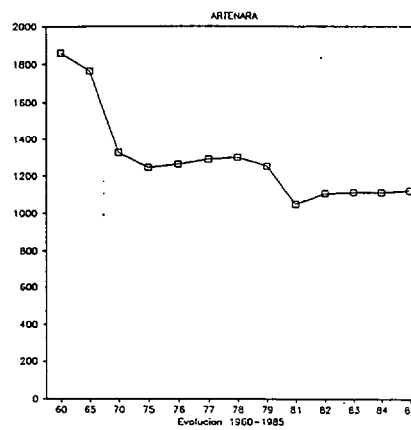
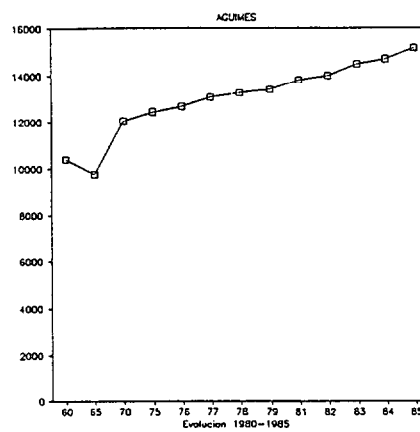
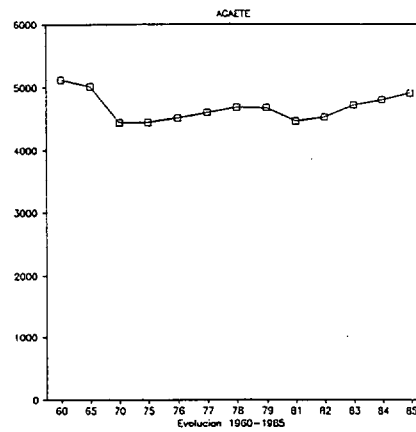
Las consideraciones anteriores se pueden estudiar con más detalle en la evolución 1960-1985, a partir del "punto crítico"

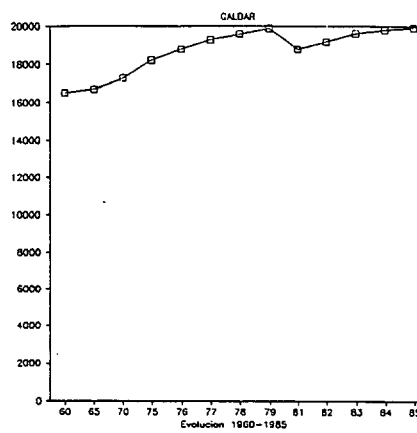
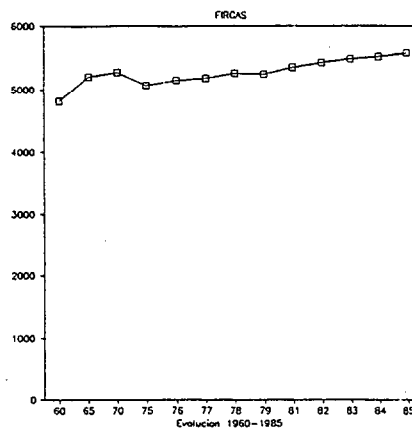
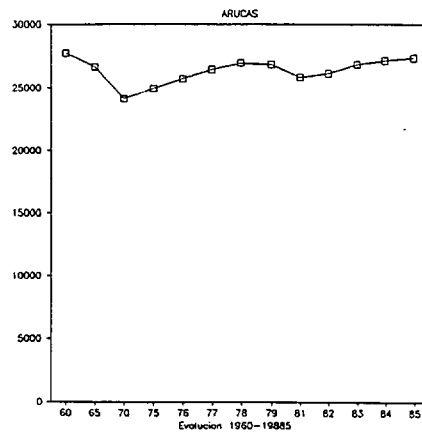


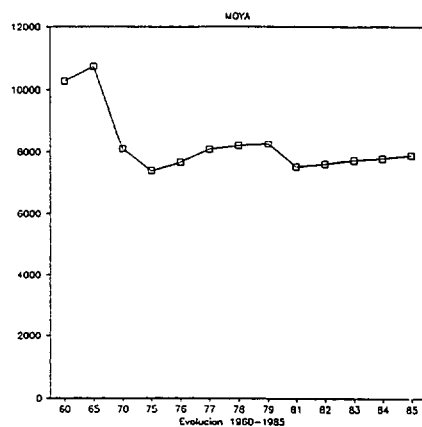
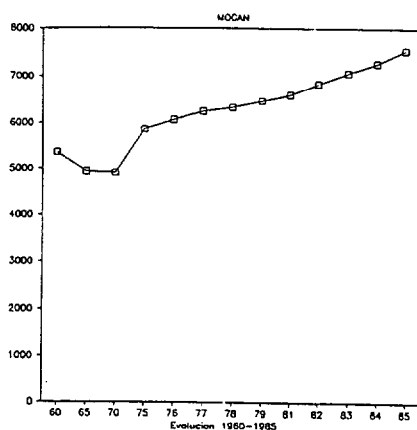
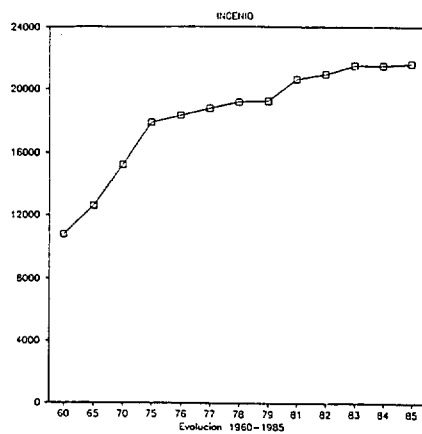
zonas poblacionales de la isla según el diagrama anterior

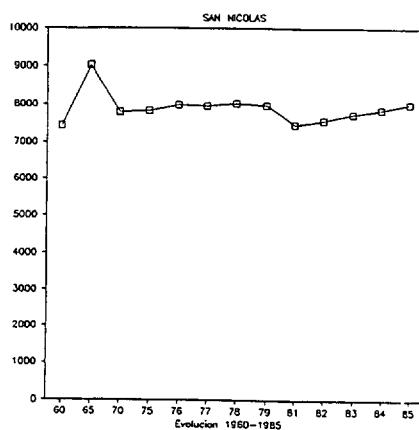
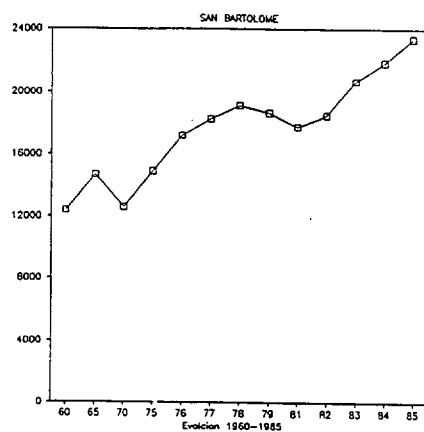
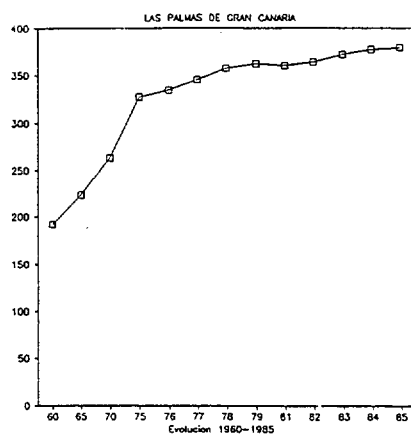


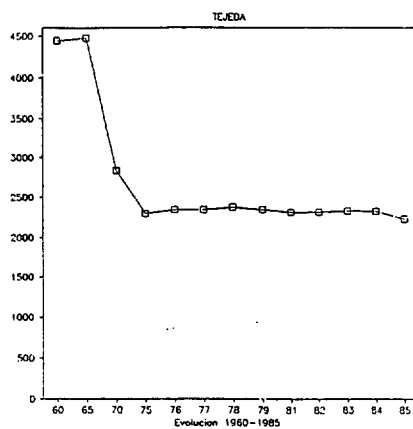
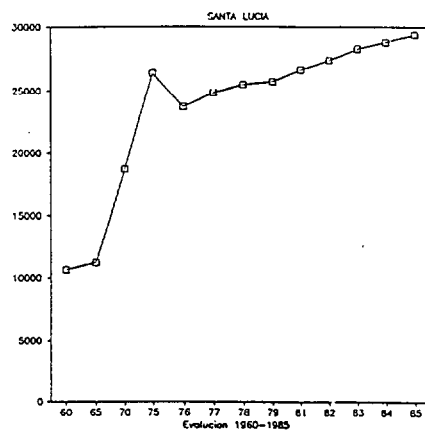
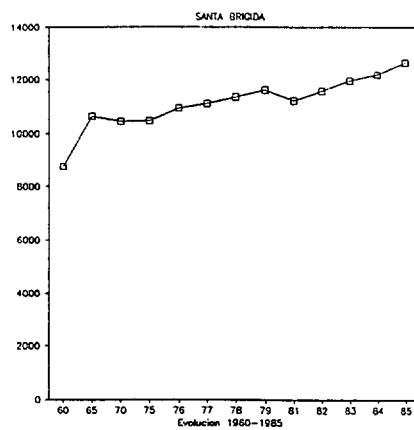
1960. Las gráficas siguientes, en las que se puede analizar esta evolución, permiten clasificar la isla en zonas por densidades, que se corresponden con las actividades actuales de la población insular. Hay que notar el gran peso de las casi conurbaciones - de Las Palmas-Telde y Sur, en el conjunto. En general se nota - una tendencia a núcleos más densos.

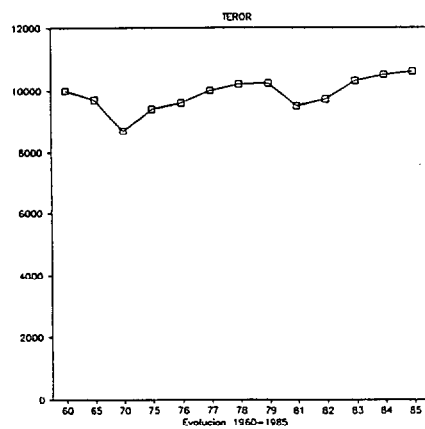
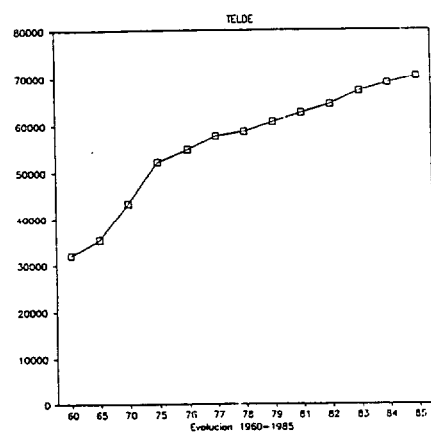
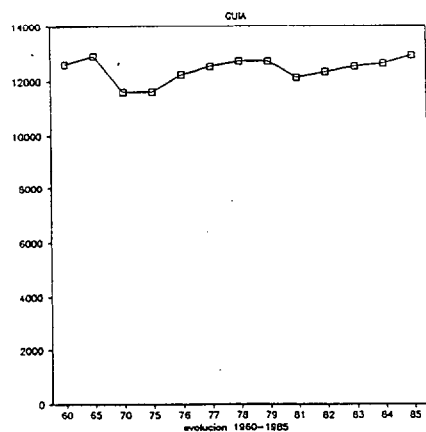


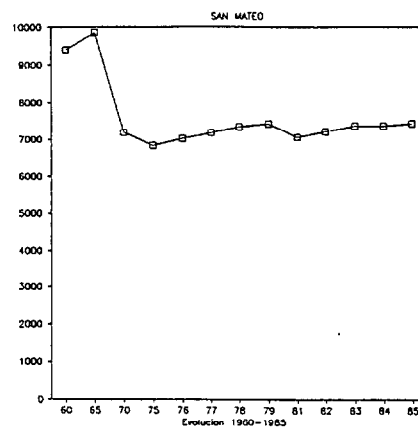
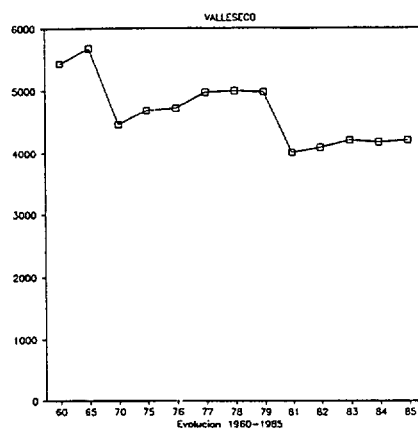
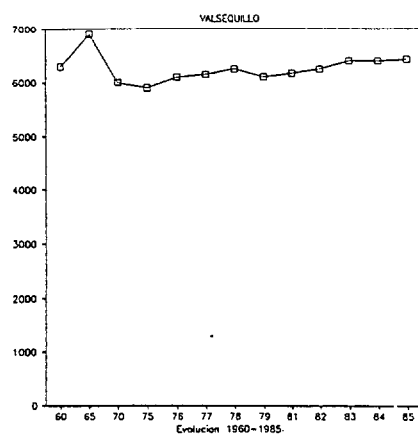




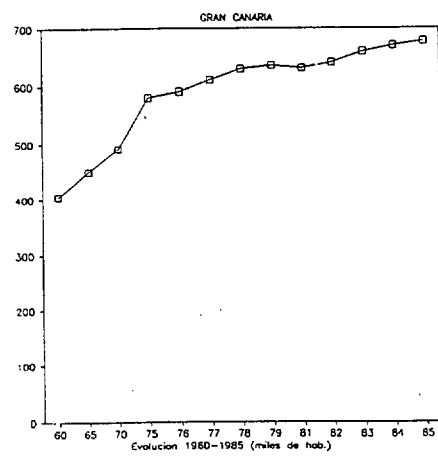






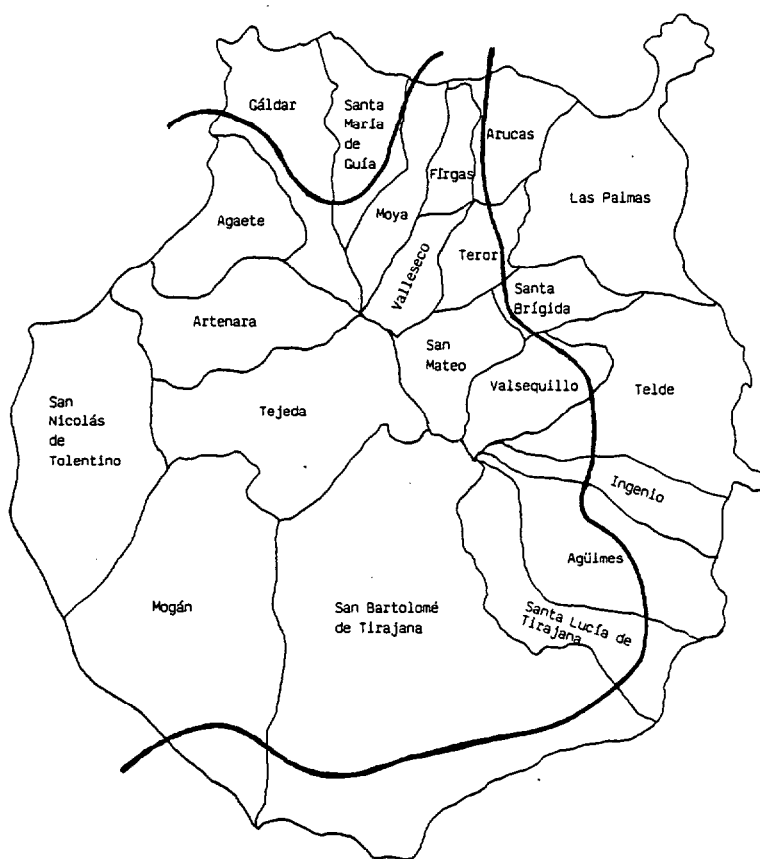






Las gráficas anteriores representan datos en cierto modo - fragmentarios, no se han encontrado de mejor calidad. En la re-- presentación no se han puesto los intervalos proporcionales a la duración temporal, pues sólo interesa el aspecto general.

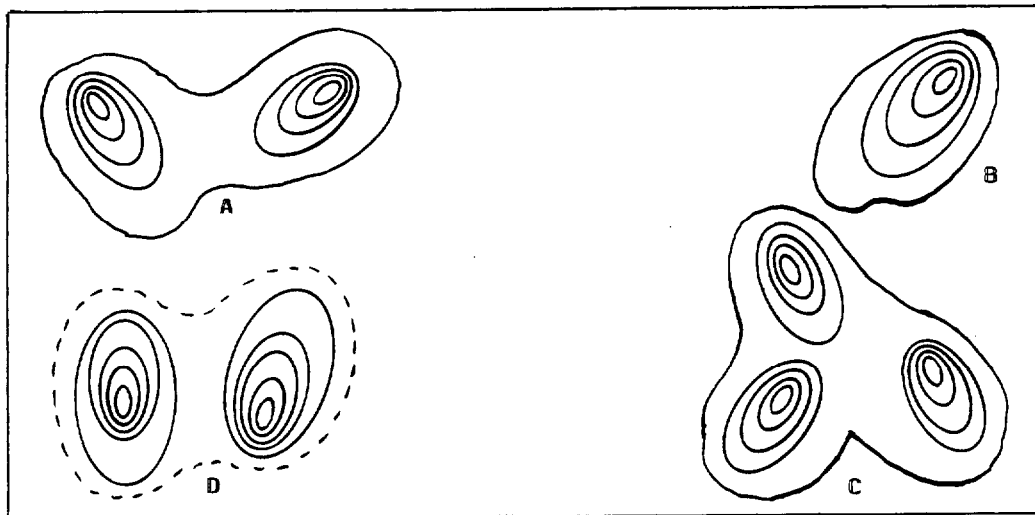
A continuación se presenta un mapa de zonas de densidad elevada, señaladas con trazo grueso:



*zonas de alta densidad de población*

Como ya se dijo en el nº1 de esta introducción, la isla se puede considerar como una unidad en nuestro estudio. Esta idea se justifica con la siguiente teoría, familiar a los geógrafos y estadísticos, y que no desarrollamos aquí en detalle: La idea de - escala de una aglomeración, que introducimos a continuación.

El ambiente "natural" de una agrupación de población puede considerarse en términos de densidad. La densidad de población - global ( $h/km^2$ ) es un indicador pobre, pues no considera las varia ciones locales, por lo que resulta más conveniente utilizar el - gradiente de densidad, y combinarlo con las dimensiones globales del área de estudio. La gráfica siguiente explica claramente la situación:



En la figura, el rectángulo representa una extensión pobla-- da, y las líneas llenas, isopletas de densidad (se dan 5 de ellas). Así B representa una situación aislada, A y C agrupaciones - por densidad y D una agrupación de núcleos, que aunque separa--

dos por la existencia de una zona despoblada, pueden considerarse "unidos" por proximidad geográfica. Esta última situación es muy típica de la isla de Gran Canaria, donde las poblaciones se ubican en las crestas o lomos dejando despoblados los fondos de los barrancos, sin embargo, la situación inversa no es corriente en la isla.

El concepto de diseminación puede analizarse en la isla con la evolución de los núcleos de población. La tabla siguiente señala el número de núcleos de población por municipio.

ANALISIS DE DISEMINACION POBLACIONAL. GRAN CANARIA. DATOS DE 1981

| Municipio                          | Pobl. total (*) | Nº núcleos | Pobl. del núcleo mayor (*) |
|------------------------------------|-----------------|------------|----------------------------|
| Agaete                             | 4,5             | 11         | 2,7                        |
| Agüimes                            | 13,8            | 9          | 6,0                        |
| Artenara                           | 1,0             | -          | -                          |
| Arucas                             | 26,0            | 16         | 10,0                       |
| Firgas                             | 5,5             | 15         | 2,0                        |
| Galdar                             | 19,0            | 10         | 8,5                        |
| Ingenio                            | 21,0            | 5          | 11,2                       |
| Mogán                              | 6,8             | 22         | 2,7                        |
| Moya                               | 7,5             | 22         | 1,0                        |
| Las Palmas                         | 360,0           | 18         | 333,0                      |
| S. Bartolomé                       | 18,0            | 36         | 8,2                        |
| S. Nicolás                         | 7,5             | 11         | 2,7                        |
| S <sup>a</sup> Brígida             | 11,2            | 10         | 2,3                        |
| S <sup>a</sup> Lucía               | 27,0            | 13         | 7,5                        |
| S <sup>a</sup> M <sup>a</sup> Guía | 12,0            | 16         | 7,5                        |
| Tejeda                             | 2,3             | 14         | 0,8                        |
| Telde                              | 64,0            | 36         | 19,0                       |
| Teror                              | 10,0            | 8          | 5,0                        |
| Valsequillo                        | 6,0             | 23         | 0,7                        |
| Valleseco                          | 4,1             | 12         | 1,1                        |
| Vega S. Mateo                      | 7,0             | 12         | 2,5                        |
| Totales                            | 636,2           | 319        | 441,4                      |

Población diseminada = 194,8 ; 30,5% del total

(\*) Miles de habitantes.

Esta diseminación es en la realidad mayor, pues incluso el núcleo de Las Palmas, debido a su orografía, se puede pensar como una aglomeración de agrupaciones independientes.

Lo importante es que la diseminación multiplica la necesidad y los problemas de servicios generales, entre los que se hallan los de eliminación de residuos. Una gestión unitaria aparece como inevitable, o al menos en grupos de cierta entidad.

Dado que el diámetro máximo de la isla es de unos 40 km. la distancia lineal entre núcleos es muy corta, lo cual justifica la elección. Unicamente podría objetarse algo con relación a la mitad Oeste de la isla, que pudiera considerarse como formando un área separada. Sin embargo, la rápida urbanización de la costa en la zona SW de la isla hace conveniente un tratamiento global. Por todas estas razones el estudio se llevará a cabo tomando la isla como una única entidad.

La fase siguiente, los aspectos científicos y técnicos, se explicará más en detalle a continuación, por lo cual hacemos ahora un comentario breve sobre la fase final, que de nuevo consiste en problemas socioeconómicos. Además, la recuperación de áreas dañadas ambientalmente suele requerir una campaña previa de concienciación y reacondicionamiento que puede llegar a ser costosa tanto en esfuerzos como económicamente. No está de más insistir en que la valoración social de estos problemas es de una importancia básica, siendo uno de los objetivos finales de la resolución la redacción y promulgación de nuevas leyes y disposiciones que reglamenten las actividades y protejan el bienestar social. Referencias: (1), (2), (3), (6), (8), (10), (11), (12), (14), (15), (17), (29), (34), (35), (43), (51), (53), (60), (68), (71), (72), (73), (87), (93), (97), (98).

### 3. El análisis científico del problema

En este número trataremos dos cuestiones claramente diferenciadas.

La primera es un comentario acerca de qué tipo de datos son de interés al tratar esta categoría de problemas. La segunda, de carácter más académico, se refiere a la aplicación de la metodología descrita al principio del nº2 para desmenuzar el problema científico-técnico en otros relativos a las diferentes disciplinas científicas por separado.

#### 3.1. Datos relevantes para tratar esta categoría de problemas

Aquí se exponen las principales características que deben recopilarse, tanto cuantitativa como cualitativamente, sobre los residuos generados en la isla. Comenzamos con un listado de datos generales a tener en cuenta sobre los residuos. Su estructura será:

| CONCEPTO              | UNIDADES             | CANTIDAD | TENDENCIA |
|-----------------------|----------------------|----------|-----------|
| R S U                 | Tm                   |          |           |
| Fangos de depuradoras | m <sup>3</sup>       |          |           |
| Aguas residuales      | m <sup>3</sup>       |          |           |
| Agua reciclada        | m <sup>3</sup>       |          |           |
| Plantas RSU           | Tm/año               |          |           |
| Vertederos sanitarios | Tm/año               |          |           |
| Depuradoras           | Hm <sup>3</sup> /año |          |           |

En el momento presente, los datos disponibles para la isla de Gran Canaria carecen de fiabilidad. Así, con referencia a las depuradoras, la mayor parte de las existentes o no funcionan, o no se han estrenado o se utilizan muy por bajo de su capacidad real.

Con relación a los residuos sólidos, la tabla anterior debe completarse con las habituales clasificaciones que pueden encontrarse en la bibliografía al uso.

En la cuestión de depuradoras de aguas deberán distinguirse las que depuran agua para consumo humano (potabilización, generalmente por medios químicos) y las que tratan las aguas residuales por medios biológicos. Los tipos de lodos provenientes de unas y otras son muy diferentes. Para nuestro trabajo nos basta con las del segundo tipo.

Acerca de los fangos de depuradoras, como sus calidades vienen determinadas por el tipo de agua que se trata en cada caso, se tiene una clasificación que complementa la tabla anterior. El listado tendrá la siguiente estructura:

| TIPO DE FANGO | MINER. ESTABLE | MINER. INESTABLE | ORGANICO | CON<br>HIDROCARBURO |
|---------------|----------------|------------------|----------|---------------------|
| INDUSTRIAL    |                |                  |          |                     |
| URBANO        |                |                  |          |                     |

A la vista de las cantidades que, obtenidas de las observaciones, rellenen la tabla, se tomará una decisión acerca de la vía más adecuada para su evacuación.

Hay que tener en cuenta que los fangos industriales procedentes de industrias agroalimentarias, poseen siempre una DBO alta, lo que influye en la decisión. Por tanto habría que afinar -



la clasificación anterior incorporando unos nuevos apartados para las aguas residuales de estas industrias y sus correspondientes fangos tras la depuración.

Al igual que en la primera tabla, por ahora los datos de este tipo disponibles para la isla de Gran Canaria son fragmentarios y sin utilidad práctica.

Con relación a los vertederos sanitarios, los datos necesarios son los siguientes:

Capacidad (Tm/año), Area utilizada (Ha), Población a la que sirve (generalmente en miles de habitantes), y vida útil del vertedero. Tampoco hemos encontrado datos fiables con relación a estos extremos en la isla.

Finalmente, tener en cuenta que también existe un tipo de contaminación térmica por aguas residuales procedentes de potabilizadoras, caso que se da en las Islas.

En este trabajo no se considerará este aspecto. Referencias: (2), (3), (17), (24), (26), (30), (43), (52), (53), (60), (68), (78), (81), (88), (98).

### 3.2. Aspectos científicos del problema

El problema planteado es, en pocas palabras, la eliminación de residuos por una vía alternativa, el vertido de parte de ellos en áreas marinas adecuadas. Así las cosas, el plan de trabajo científico que se ha de realizar consta de los siguientes apartados:

- Noción general de residuo, clasificación, vías de eliminación y ventajas e inconvenientes que se observan.

- Análisis local del asunto. Vías alternativas: El mar como receptor de residuos.
- Interacción mar/residuos. Aquí hay que distinguir claramente tres apartados:
  - Acción biológica
  - " química
  - " física.

En este trabajo, dada la complejidad de las dos primeras, nos detendremos en modelizar matemáticamente los aspectos esenciales de la interacción física (transporte y difusión), poniendo de relieve algunas características fundamentales que pueden quedar oscurecidas con un tratamiento global que no siga una metodología como la aquí utilizada.

En particular, se pasará revista a algunos métodos clásicos de modelización elemental, aunque compleja. Se hace un estudio del proceso de depuración insistiendo sobre todo en los conceptos de tiempo involucrados. Así, se comentará la importancia de los tiempos de retención en una depuradora y se introducirá la idea de primer tiempo de paso, habitual en los procesos estocásticos, para modelizar la desaparición de partículas contaminadas del medio.

Esta última idea supone abandonar, para la explicación del fenómeno contaminante, la habitual concentración o dilución en favor de un tratamiento individualizado de las partículas que componen el vertido. El modelo que se presenta es sencillo y flexible. Con la introducción de dos parámetros básicos y jugando con la variación vertical de ellos puede conseguirse un buen ajuste a fenómenos reales. Referencias: (1), (9), (31), (39), (48), (56), (58), (59), (82), (88), 94).

#### 4. Objetivos

En esta introducción se ha ido exponiendo una línea general de pensamiento, que va caracterizando los objetivos de esta memoria. Los objetivos que se pretenden corresponden a un trabajo - multidisciplinario nada sencillo, por tanto pertenecen a distintos ámbitos. Así tenemos:

1. Análisis de la necesidad de hallar vías alternativas de eliminación de residuos en el área insular.
2. Planteamiento de una metodología adecuada para el caso.
3. Comentario crítico acerca de las modelizaciones habituales.
4. Introducción de un tipo nuevo de modelo matemático para la eliminación de una clase concreta y abundante de residuos.
5. Experimentos numéricos con el modelo.

**II.**  
**ELIMINACION DE RESIDUOS.**  
**INTERACCION MAR-RESIDUOS**

## 1. Consideraciones generales acerca del concepto de contaminación

La idea de "contaminación" aparece ligada a la relación entre la actividad humana, sobre todo la que se desarrolla a gran escala, y la Naturaleza.

En ésta, sustancias de muy variados tipos se hallan presentes en concentraciones que fluctúan entre ciertos límites que hacen posible el funcionamiento equilibrado del sistema en su totalidad. A veces se modifica la concentración de alguna sustancia por causas naturales (p. ej. erupciones volcánicas, terremotos, géiseres, grandes tormentas) en áreas más o menos extensas. Cuando la concentración de tal sustancia sobrepasa el límite superior habitual, impidiendo así el normal desarrollo de las actividades del sistema, se dice que existe contaminación. No hay nombre aceptado para el caso de disminución drástica de concentración, pues normalmente este fenómeno se debe a un aumento en la de algún otro componente y entra en la definición anterior. Las sustancias generadas por la actividad humana al introducirse en el sistema, modifican el equilibrio "de fondo" de las sustancias naturales, bien porque al descomponerse producen cantidades de sustancias análogas a las naturales, bien porque añaden nuevas materias que interfieren las interacciones naturales. Cuando las variaciones producidas por la introducción de esas sustancias procedentes de actividades humanas sobrepasan los valores máximos citados antes, se habla de contaminación producida por el hombre.

La fijación de los niveles aceptables de fondo puede hacerse de dos formas. Una de ellas, basada en consideraciones puramente científicas, consiste en estudiar el sistema en estado puro y tomar nota de los valores observados y de su comportamiento ante perturbaciones naturales. Ello supone un estudio detallado de las series temporales de datos y una modelización dinámica -

que permita interpretar razonablemente esos datos. La Ecología, como ciencia, es la encargada de establecer estas cuestiones.

Otra vía es la determinada por la propia conveniencia para las actividades desarrolladas por el hombre. En este caso los niveles aceptables de fondo dependen intrínsecamente de su influencia, medida sobre todo por parámetros económicos, en las actividades extractoras y transformadoras llevadas a cabo por iniciativa humana. Corresponde a la Legislación la tarea de establecer los valores adecuados. Cuando los valores legales respetan los aceptados científicamente se dice que la legislación es proteccionista; en caso contrario se producen conflictos entre diferentes componentes del tejido social. Normalmente estos choques tienen lugar cuando las regulaciones legales han permitido ya una contaminación notable y se intenta volver atrás teniendo en cuenta las implicaciones socioeconómico-políticas de las decisiones pasadas. Más raras veces la actitud proteccionista aparece previamente a la aparición de contaminación, aunque existen razones, que pertenecen al mundo de la Sociología, para pensar que esas actitudes son señales de alerta ante procesos en marcha. En Matemáticas puede formularse este problema en el marco de la teoría de control, con la dificultad añadida de que la mayor parte de las variables que aparecen son de carácter cualitativo, lo que complica su tratamiento. Esa es una línea que queda abierta para futuras investigaciones.

Estas ideas conducen a una ampliación conceptual de la idea de contaminación, incluyendo en ella no sólo sustancias sino cualquier resultado de las actividades del hombre que modifique sustancialmente las escalas de aceptabilidad de tamaño y concentración de construcciones, intensidad de ruidos, densidad de tráfico, aglomeración de personas, etc. etc. Corresponde al Urbanismo, en sentido amplio, el estudio y control de estos procesos para reconducirlos a la escala humana.

También hay que resaltar aquí que la idea de contaminación se utiliza muchas veces con una visión excesivamente localista, sin tener en cuenta que el sistema es global y que las envolturas fluidas del planeta, atmósfera y océanos, contribuyen no sólo a transportar la contaminación, sino también a disiparla. - Las enormes cantidades de energía presentes en el medio natural son, si se aprovechan debidamente, un seguro contra la extensión de catástrofes originadas por las actividades del hombre. Referencias: (13), (15), (24), (26), (36), (38), (43), (80), (95), (97).

## **2. La contaminación en el mar**

Dejando a un lado la contaminación producida por causas naturales (volcanes, géiseres, etc.), nos vamos a limitar a la contaminación del mar de origen humano. Notamos que los ríos llevan al mar gran parte de la contaminación producida tierra adentro y ocasionalmente la escorrentía de grandes tormentas en zonas litorales tiene un efecto similar.

Hay dos grandes tipos de fuentes de contaminación: Los vertidos y las obras marinas.

Esta clasificación corresponde a las ideas de "activa" y "pasiva". Un vertido es una acción, deliberada o no, cuyo resultado es eliminar ciertas sustancias por vía marina. Por el contrario, una obra marina puede producir contaminación como resultado de una modificación local de los regímenes dominantes que, en zonas determinadas, son responsables del estado del mar.

Aquí nos ocuparemos sólo de las primeras. Las segundas, si no se ejecutan debidamente, producen alteraciones en la dinámica marina que pueden coadyuvar en las variaciones de concentración que definen la contaminación. Este asunto es objeto de la Ingeniería Oceánica y no corresponde aquí su estudio.

Los vertidos suelen dividirse en dos clases: Matéricos y energéticos. Estos últimos se refieren básicamente a efluentes de aguas a temperatura elevada que, sobre todo en zonas cálidas, pueden poner en peligro gran cantidad de formas de vida por exceso de temperatura; además la tasa de disolución del oxígeno disminuye con la temperatura. La disipación de estos vertidos depende de las condiciones de mezcla entre el agua fría y la cálida. No entraremos aquí en el análisis de esta categoría.

Habiendo reducido el campo de estudio a los vertidos matéricos, conviene estudiar las características básicas de los mismos. La naturaleza fluída del mar hace que, al contrario que en tierra, el vertido puede afectar a una zona muy extensa. Esto tiene también su contrapartida positiva, pues facilita el efecto diluyente para restituir las concentraciones razonables, en el caso de ser residuos degradables. Esta idea motiva el siguiente cuadro:

|          |                |                                       |   |
|----------|----------------|---------------------------------------|---|
| RESIDUOS | NO DEGRADABLES | inertes (arenas, lodos ...)           | 1 |
|          |                | persistentes, liposolubles (DDT etc.) | 2 |
|          | DEGRADABLES    | por acción de microorganismos         | 3 |
|          |                | por el contacto con el agua           | 4 |

Los residuos que tienen verdadero interés son los tipos 2 y 3. La influencia de los residuos totalmente inertes puede reducirse a episodios esporádicos de interacción con algún grupo de seres vivos en los que puede ocasionar molestias de tipo físico. También es pensable que, en grandes cantidades, modifican la topografía del fondo del mar. Los del tipo 4, que se descomponen en sustancias naturales, no exigen sino un control de las cantida--



des vertidas y de la ubicación de las mismas para que la acción disipadora del océano tenga lugar de manera óptima.

Los residuos no degradables persistentes y liposolubles se incorporan a las cadenas tróficas, influyendo notablemente, por tanto, en los seres situados al final de ellas, entre los que se halla el hombre. Por tanto, debe evitarse su eliminación por vía marina; incidentalmente se puede decir que se ensayan procesos - de incineración en alta mar, que originan ácido clorhídrico, anhídrido carbónico y agua, pero que encuentran una gran oposición a su aplicación práctica, por motivos similares a los expuestos en las consideraciones generales.

Finalmente, tratamos los vertidos degradables por medio de microorganismos que llevan a cabo un proceso de oxidación, resultan finalmente en agua, anhídrido carbónico, amoníaco, etc. Los residuos de este tipo proceden de las industrias agrícolas, de los cultivos, de la química, de las actividades urbanas y de los vertidos de petróleo.

La velocidad a que se degradan estos residuos depende de factores físico-químicos (temperatura, oxígeno disuelto...) que en proporciones adecuadas proveen las condiciones ideales para la actuación de las bacterias. Cuando la entrada de residuos en el agua tiene una velocidad mayor que la de degradación, se produce acumulación y por tanto puede aparecer contaminación. También es posible que ocurra que alguno de los factores dichos sea limitante, con los mismos efectos finales. Por otro lado, una abundancia de residuos origina gran actividad bacteriana, desoxigenándose el agua, con lo que el proceso de degradación deviene anaerobio, obteniéndose finalmente ácido sulfhídrico y metano, entre otros. Este proceso de acumulación-desoxigenación origina una modificación local del ecosistema, que es la principal consecuencia de la contaminación.

Ciertas actividades de gran interés, como el reciclado de - aguas residuales, producen materiales de desecho que pueden ser eliminados por vía marina. Esos materiales reciben el nombre - de lodos y se clasifican así:

|                      |                  |
|----------------------|------------------|
| lodos de depuradoras | { inertes        |
|                      | { biodegradables |

El origen y generación de estos lodos se tratan en este trabajo; en lo que sigue se analizará el destino de estos residuos en el caso de eliminarlos por vertido al mar. Referencias: (3), (13), (23), (52), (61), (97).

### **3. Depuración y depuradoras**

Ya hemos estudiado algunas de las consecuencias del proceso de recuperación de aguas que entroncan con el problema de la eliminación de residuos sólidos. Desde el punto de vista teórico, - el mar puede considerarse como una gigantesca máquina de depuración en la cual todos los subprocesos del reciclado tienen lugar de forma simultánea. Esta simultaneidad, así como las innumera-- bles interacciones que se originan, complican enormemente el análisis del problema. La metodología sistemática que hemos seguido implica separar unos procesos de otros. La eliminación de mate-- ria orgánica residual por vía biológica tiene lugar, de modo natural, en el seno de las aguas del océano y de los lagos y ríos. Este mecanismo, analizado en detalle y aislado el sistema, es - precisamente el utilizado en las depuradoras industriales bioló-- gicas.

Por lo anterior, y por una cuestión metodológica, la comprensión del mecanismo interno de la depuración es esencial. Además, un sistema aislado es más fácilmente matematizable. La gestión de una depuradora es un ejercicio matemáticamente fascinante: - Partiendo del esquema más simple, la conocida ecuación

$$y' = ky ,$$

por sucesivas complicaciones de interpretación puede alcanzarse un sistema diferencial no lineal, con sus problemas asociados de comportamiento a largo plazo y de control. Estas ideas justifican la introducción en esta memoria de unas secciones referentes a las depuradoras. Además, ponen de relieve el papel central de las matemáticas en las aplicaciones. Precisamente, un campo de aplicación aún no estudiado consiste en utilizar la dinámica no lineal estructural en estas cuestiones para explicar los comportamientos erráticos, a veces, de la fase biológica.

La recuperación de aguas a partir de las residuales se lleva a cabo en las depuradoras. Estas instalaciones llevan a cabo un proceso por el cual se modifican parámetros biológicos y de otro tipo en las aguas residuales para adaptarlas de nuevo a su utilización. En esencia, lo más importante es la eliminación de materia orgánica, que no es posible hacer desaparecer por medios puramente físicos. Esta materia orgánica se mide, de forma indirecta, mediante las DBO, COT, DQO, etc. Además de ello, se pueden perseguir objetivos tales como la nitrificación, desnitrificación y estabilización de los residuos.

Técnicamente, estos objetivos se alcanzan mediante un tratamiento biológico, consistente en utilizar el agua residual como caldo de cultivo de diversos microorganismos, básicamente bacterias, que utilizan la materia orgánica no sedimentable como base de su metabolismo. El resultado final son gases, que escapan a -

la atmósfera, y tejido celular, que, por su mayor peso específico, se elimina del agua por decantación. Notemos aquí que los gases son responsables de una de las características de mayor impacto social de las depuradoras, esto es, de sus malos olores. - Dentro del agua quedan los sólidos coloidales coagulados y estabilizados, formando un fango o lodo cuya eliminación es otro de los problemas técnicos de las depuradoras.

En la práctica se usan diferentes clases de procesos, de tipo aerobio, anaerobio, anóxico o combinación de algunos de ellos, atendiendo al tipo de microorganismos utilizado, y según el modo de efectuar el cultivo, puede hacerse con cultivo fijo, o en suspensión, o una mezcla de ambos.

Por tanto, el funcionamiento de una depuradora depende esencialmente del conocimiento de aspectos básicos de la ecología de los microorganismos utilizados. Esto se analiza a continuación. Referencias: (3), (13), (23), (26), (30), (59), (61), (71), (89), (99).

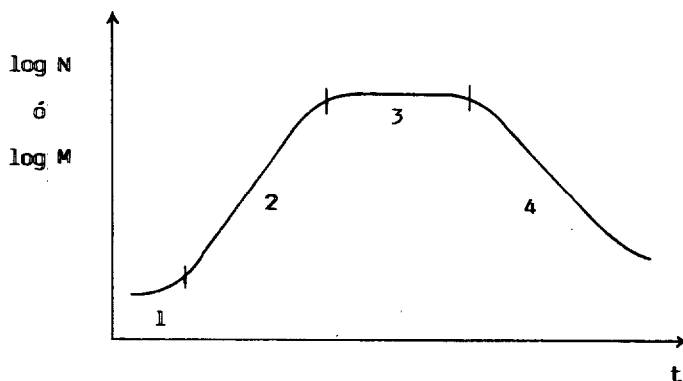
### 3.1. Microbiología y modelos asociados

Para conseguir un funcionamiento eficaz del sistema depurador es conveniente poder ejercer un control sobre el crecimiento de los microorganismos cultivados. La masa bacteriana puede medirse de diferentes modos, ya sea evaluando el número de células o utilizando una valoración de la masa total. En cualquier caso, podemos distinguir tres principios básicos para modelizar y controlar el crecimiento de microorganismos:

- cultivo puro
- cultivo mixto
- oxidación bacteriana.

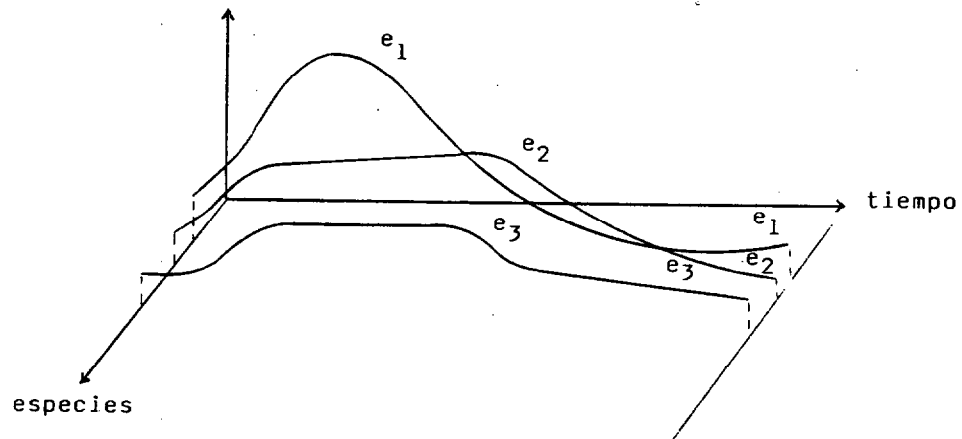
El caso de cultivo puro puede encararse con un modelo sencillo válido tanto para el cálculo con número de microorganismos o con biomasa.

Fenomenológicamente se observa una fase de aclimatación, de crecimiento lento, seguida de una fase de crecimiento malthusiano, posteriormente la competencia intraespecífica frena el crecimiento, haciéndose logístico. Finalmente, el agotamiento del sustrato fuerza a los microorganismos a consumir su propia masa celular, dando lugar a una fase final de decrecimiento rápido. En una gráfica puede representarse así:



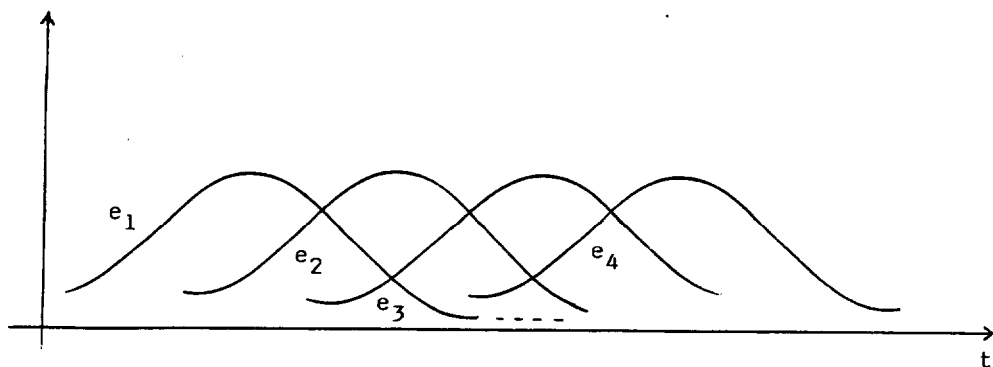
Para los cultivos mixtos se puede establecer un modelo consistente en una familia de curvas análogas a la de la figura, - que da origen a una interesante discusión difícil de modelizar - rigurosamente:

CASO 1: Microorganismos evolucionando en paralelo:



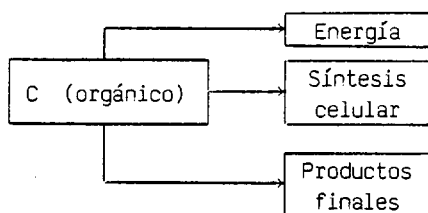
Que corresponde a una idea de finalización del proceso por cooperación. Se supone que la competencia interespecífica está controlada, para que el sistema sea lo más activo posible.

CASO 2: Cascada de microorganismos, modificando factores ambientales o de modo automático debido al propio proceso, utilizar microorganismos que se sustituyan unos a otros:



En este caso, la selección de especies depende del conocimiento de las condiciones internas del proceso.

Si nos fijamos en las características químicas, podemos utilizar modelos basados en el siguiente esquema:



La conversión de la materia orgánica en productos finales - gaseosos y tejido celular es posible por vía anaerobia, aerobia o facultativa, consiguiéndose la síntesis de tejido celular y - produciendo energía que mantiene el proceso en marcha. Cuando - falta la materia orgánica, el tejido se utiliza de modo endógeno, dando lugar a gases y materia residual. Tenemos así tres procesos, que normalmente ocurren de modo simultáneo:

Oxidación  
(disimilación) :  $\text{Mat.org.} + \text{O}_2 + \text{bacterias} \longrightarrow \text{CO}_2 + \text{NH}_3 + \text{Prof.final} + \text{Energ.}$

Síntesis  
(asimilación) :  $\text{Mat.org.} + \text{O}_2 + \text{bacterias} + \text{Energía} \longrightarrow \text{bacterias nuevas}$

Respiración  
(autooxidación) :  $\text{Bacterias nuevas} + \text{O}_2 \longrightarrow \text{CO}_2 + \text{NH}_3 + \text{H}_2\text{O} + \text{Energía}$

Pasamos ahora a analizar la dinámica del crecimiento bacteriano.

Para conseguir una eficacia razonable del proceso, los microorganismos deben permanecer en el sistema un tiempo que permita su reproducción y el consumo del sustrato orgánico. Lo ideal, - pues, es encontrar la relación entre ese periodo de tiempo y la

tasa específica de crecimiento, que puede determinarse por mediciones metabólicas en condiciones óptimas. Esto permitirá mantener siempre una masa bacteriana que garantice la eliminación máxima de sustrato.

Comenzamos con un proceso discontinuo o "batch":

Sea  $x$  la concentración de microorganismos (masa/volumen). Entonces, en la hipótesis de sustrato ilimitado, el modelo representativo es el de fase logarítmica o malthusiana:

$$x' = \mu x$$

donde  $\mu$  (unidades:  $t^{-1}$ ) es la tasa específica de crecimiento. - Este modelo da, como es clásico, la relación:

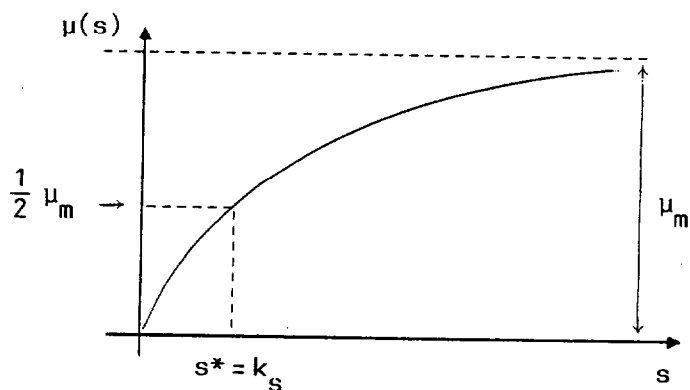
$$x(t) = x_0 e^{\mu t}$$

La hipótesis de sustrato ilimitado es poco realista en un proceso discontinuo. Más bien habremos de escribir  $\mu = \mu(s)$ , - siendo  $s$  la concentración de sustrato (masa/volumen). La expresión más comúnmente aceptada es la de Monod:

$$\mu(s) = \mu_m \frac{s}{k_s + s}$$

obtenida por consideraciones experimentales, donde  $\mu_m$  es el máximo observado y  $k_s$  corresponde a la concentración  $s^*$  para la cual  $\mu$  es  $\frac{1}{2} \mu_m$ :





Nótese que si  $s \rightarrow \infty$ ,  $\mu(s) \rightarrow \mu_m = \mu$  y estamos en el caso anterior. Cuando  $s = 0$ ,  $\mu(s) = 0$  y no hay reproducción bacteriana.

Por tanto, el modelo para el crecimiento bacteriano viene dado por la ecuación diferencial:

$$x' = \mu(s)x = \frac{s}{k_s + s} x$$

El análisis de esta ecuación diferencial depende de la forma de  $s$  como función del tiempo. Para comprender la cinética - estableceremos una relación entre la velocidad de crecimiento bacteriano y la velocidad de decrecimiento de la concentración del sustrato. Lo más sencillo es suponer una relación lineal: -

$$x' = -y s'$$

donde  $y$  es el "coeficiente de producción máxima", cuyas unidades son (masa bacteriana)/(masa de sustrato). Este coeficiente es el que se observa en la fase malthusiana y puede medirse experimentalmente en un periodo finito de tiempo durante esa fase. - Operando con esa ecuación tenemos:

$$s' = -\frac{x'}{y} = -\frac{1}{y} \cdot \frac{\mu_m s}{k_s + s} \quad x = -k \frac{s}{k_s + s} x$$

donde se ha introducido la constante específica  $k = \frac{\mu_m}{y}$ , que es la "tasa máxima de utilización de sustrato por unidad de masa de microorganismos".

La hipótesis básica del desarrollo anterior es que todas las células metabolizan de modo uniforme, esto es, no hemos considerado una estructura de edad, ni tampoco la mortalidad o la depredación. El conjunto de estos factores puede considerarse globalmente como un término corrector en la ecuación básica: De  $x' = \mu(s)x$  pasamos a

$$x' = \mu(s)x - k_d x$$

siendo  $k_d$  (unidades:  $t^{-1}$ ) la "tasa específica de degeneración". Por tanto, la velocidad neta de crecimiento de la masa bacteriana viene dada por

$$x' = \mu(s)x - k_d x = -ys' - k_d x$$

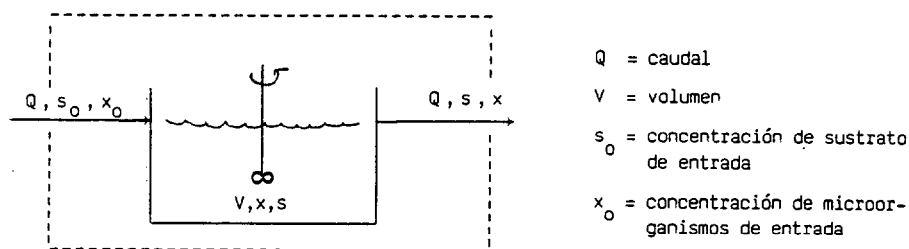
Esta ecuación lineal no homogénea modeliza el crecimiento bacteriano en función de la variación de  $s$ . Referencias: (23), (27), (47), (52), (58), (59), (61), (71), (78), (89), (99).

### 3.2. Aplicación del modelo al tratamiento biológico

El modelo matemático anterior es adecuado para utilizarlo en la descripción y análisis del tratamiento biológico de aguas residuales, donde hay que considerar los siguientes aspectos:

- Balances de masa de microorganismos y sustrato.
- Predicción de concentraciones finales (aquí interviene de cisivamente el aspecto social, ordenado por la legisla - - ción).
- Expresión del proceso mediante parámetros sencillos.
- Eficacia y estabilidad del proceso.

Describiremos en algún detalle un proceso de tratamiento - aerobio en un reactor bien mezclado sin recirculación. El esquema siguiente es suficientemente claro por sí sólo:



La línea de puntos representa el sistema completo, considerándolo aislado del exterior. Desde el punto de vista del ingeniero, la selección de límites es importante: representa una serie de hipótesis simplificadoras.

Suponiendo que  $Q$  es constante, que  $V$  no sufre variaciones por evaporación y que la mezcla en el reactor o tanque es homogénea, podemos plantear ecuaciones de balance de masa para los microorganismos y el sustrato. Como hipótesis suplementarias, se supone que las reacciones químicas en el reactor sólo afectan a un reaccionante y que la velocidad de cambio de la concentración de éste es de primer orden, esto es, es lineal.

Con estas ideas estableceremos un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales. En él se exigirá que el tanque sea "lavado" totalmente, con lo que no hay acumulación de microorganismos o de sustrato, lo cual permite llevar a cabo el análisis en el caso estacionario, esto es, estudiar los puntos críticos del sistema.

Definimos mediante  $x'V$  y  $s'V$  las velocidades de acumulación de microorganismos y de sustrato en el sistema. Estas velocidades pueden describirse con los balances siguientes:

$$\begin{aligned} x'V &= \text{microorganismos que entran} - \text{id. que salen} + \text{crecimiento neto} \\ s'V &= \text{masa de sustrato que entra} - \text{id que sale} - \text{masa utilizada en el crec.} \\ &\quad \text{de microorganismos} \end{aligned}$$

Estas expresiones pueden formularse como un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales:

$$\left. \begin{aligned} x'V &= x_0 Q - xQ + V(\mu(s) - k_d)x \\ s'V &= s_0 Q - sQ - V k \frac{xs}{k_s + x} \end{aligned} \right\} \quad (A)$$

donde  $\mu(s) = \frac{\mu_m xs}{k_s + s}$  y donde se han utilizado las expresiones obtenidas antes. En el caso de lavado total del sistema, y aceptando que el agua de entrada no transporta microorganismos aptos para la depuración ( $x_0 = 0$ ), queda el sistema estacionario:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -xQ + V(\mu(s) - k_d)x \\ 0 &= s_0 Q - sQ - V k \frac{xs}{k_s + s} \end{aligned} \right\} \quad (B)$$

Un análisis de los puntos críticos del sistema de ecuaciones diferenciales, que son las soluciones del sistema (B), permitirá obtener informaciones relevantes.

Comencemos, despejando  $Q/V$  (unidades  $t^{-1}$ ), así tenemos una expresión para el "tiempo de retención hidráulica",  $T$ , en función de parámetros del sistema:

$$\frac{1}{T} = \frac{Q}{V} = \frac{1}{x} (\mu(s) - k_d x) = \frac{1}{x} \left[ \frac{\mu_m x s}{k_s + s} - k_d x \right] = \frac{\mu_m s}{k_s + s} - k_d \quad (1)$$

Usando esta expresión en la segunda ecuación obtenemos:

$$s_0 - s - Tk \frac{xs}{k_s + s} = 0 \quad (2)$$

Resolviendo el sistema estacionario en forma de (1) y (2) se tiene:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{y}{1 + k_d T} (s_0 - s) \\ s &= \frac{k_s (1 + Tk_d)}{T(yk - k_d) - 1} \end{aligned} \right\}$$

Cuando existe una combinación adecuada de parámetros del sistema ( $V, k_d, k_s, \dots$ ) se puede garantizar la estabilidad de la solución singular dada por las ecuaciones anteriores, con lo que éstas se pueden usar para predecir el comportamiento del sistema, esto es, las concentraciones  $x$  y  $s$  en el efluente.

De la definición de tasa neta de crecimiento para los microorganismos y de la primera ecuación de (B) obtenemos:

$$\frac{1}{T} = \frac{Q}{V} = \mu_m \frac{s}{k_s + s} - k_d = \mu^* \quad (3)$$

donde usamos  $\mu^*$  como notación para la tasa neta de crecimiento de los microorganismos.

Como se vió antes, es posible escribir:

$$\mu_m \frac{s}{k_s + s} = -y \frac{s'}{x}$$

luego, definiendo la tasa específica del sustrato  $u = -\frac{s'}{x} = \frac{1}{T} \frac{s_0 - s}{x}$  se puede poner

$$\frac{1}{T} = y u - k_d \quad (4)$$

Las ecuaciones (3) y (4) nos dan relaciones importantes entre los parámetros del sistema y el tiempo de retención, que en este caso puede denominarse no sólo hidráulico, sino también "celular".

Eliminando  $T$  entre (3) y (4) llegamos a

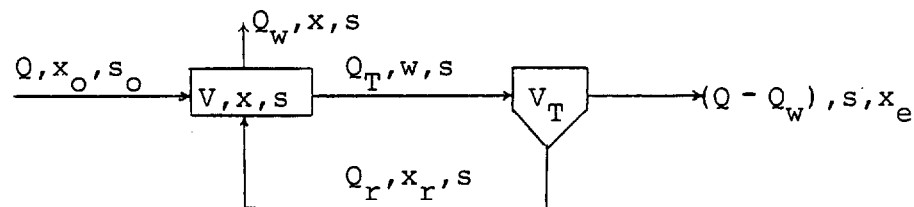
$$s = \frac{u k_s}{k - u} \quad (5)$$

de modo que, como las condiciones ambientales vienen dadas y las características  $y$ ,  $k_s$ ,  $k$ ,  $k_d$  son fijadas para cada población de microorganismos utilizados, la concentración  $s$  del efluente depende sólo de  $T$  ó de  $u$ . Fijando uno de ellos, p.ej.  $T$  a base del volumen del reactor, todo el proceso queda controlado por  $u$ .

Es claro que la ecuación (3) provee un valor mínimo del tiempo de retención celular, y que en la práctica debe seleccionarse un tiempo adecuado, o sea, un volumen grande que garantice una estancia prolongada de los microorganismos en el sistema.

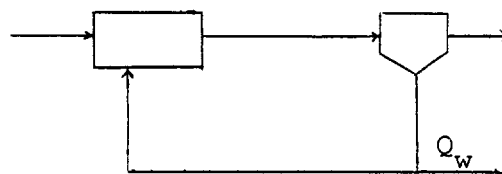
En las consideraciones anteriores se ha tratado de la estabilización por vía aerobia de los residuos orgánicos, en suspensión en el líquido que se depura, mediante una masa activada de microorganismos.

La activación continuada de esa masa (fango o lodo) se consigue modificando el proceso de tratamiento aerobio obteniéndose así el siguiente esquema con retroalimentación:



En la figura,  $Q_T, Q, Q_r, Q_w$  son caudales;  $x_o, x, x_r$  y  $x_e$  concentraciones de microorganismos;  $s_o$  y  $s$ , concentraciones de sustrato, y  $V, V_T$ , volúmenes de los recipientes.

El segundo recipiente es un "tanque de sedimentación". La biología de las bacterias utilizadas indica que las más jóvenes, más densas, se sedimentan, siendo reenviadas al tanque reactor, al menos en parte, para mantener el proceso en marcha. Otra parte es purgada del sistema, siendo ésta la fracción utilizada para control del proceso. Esta purga puede efectuarse en diferentes lugares del circuito. Otra muy corriente viene dada por la siguiente figura; siendo el estudio del proceso análogo al de la anterior figura:



Para el proceso modificado se tiene el siguiente balance de los flujos:

$$\left. \begin{array}{l} Q + Q_r = Q_r + Q_w \quad (\text{tanque}) \\ Q_r = Q_r + Q_s \quad (\text{sedimentador}) \end{array} \right\} Q + Q_r = Q_r + Q_s + Q_w \Rightarrow Q_s = Q - Q_w$$

En la segunda figura de la página anterior el balance es:

$$\left. \begin{array}{l} Q + Q_r = Q_T \quad (\text{tanque}) \\ Q_r = Q_s + Q_r + Q_w \quad (\text{sedimentador}) \end{array} \right\} Q + Q_r = Q_s + Q_r + Q_w \Rightarrow Q_s = Q - Q_w$$

Por tanto, desde el punto de vista hidráulico, ambos sistemas son equivalentes.

La recirculación contribuye a que las bacterias formen, a partir de la materia orgánica, un flóculo adecuado, requisito imprescindible para que la separación de sólidos biológicos tenga lugar en la instalación de sedimentación. Este proceso hace, en esencia, que el tiempo de retención celular del sistema aumente, con lo que las características de la sedimentación del flóculo biológico mejoran.

Para establecer un modelo matemático de funcionamiento del sistema de la primera figura, formulamos las siguientes hipótesis, ya usadas en el caso sencillo:

- El contenido del tanque reactor está bien mezclado.
- En el agua residual de entrada no hay microorganismos depuradores, esto es,  $x_0 = 0$ .
- La estabilización del residuo tiene lugar sólo en el tanque reactor.



- Únicamente interviene el volumen de este tanque en el cálculo del tiempo medio de retención celular.

Supondremos además que, una vez puesto en marcha el sistema depurador, tras un tiempo determinado, se ha alcanzado un estado estacionario. Esta hipótesis tiene un alto contenido matemático y ha sido tratada extensamente en un trabajo anterior (71), expresando, sencillamente, que el sistema de ecuaciones diferenciales que describe la depuradora posee soluciones estacionarias estables.

Las cinco ideas anteriores permiten establecer el balance de microorganismos y después hacer  $x' = 0$  en todo el sistema.

La aplicación de las hipótesis a la segunda versión del proceso modificado da el siguiente balance

$$0 = x'V = (\mu(s) - k_d)xV - Q_w x_r - (Q - Q_w)x_e = \mu'xV - Q_w x_r$$

si se supone  $x_e \approx 0$  como antes. Ahora el tiempo de retención celular puede definirse de forma análoga, aunque con expresión ligeramente distinta:

$$\frac{1}{T_c} = \mu' = \frac{Q_w x_r}{V x}$$

donde se pone de relieve el papel jugado por la recirculación. - Esto hace que se suela utilizar la recirculación como parámetro de control en los estudios teóricos; sin embargo, en el desarrollo aquí expuesto se ha preferido la versión, más sencilla, de la primera propuesta.

$$0 = x'V = -[Q_w x + (Q - Q_w) x_e] + (\mu(s) - k_d) xV$$

de donde:

$$\mu(s) - k_d = \mu' = \frac{Q_w x + (Q - Q_w) x_e}{xV} = \frac{1}{T_c} \quad (6)$$

donde  $T_c$  es el "tiempo de retención celular". Recordemos que el tiempo de retención hidráulica se definía como

$$\frac{1}{T} = \frac{V}{Q}$$

para el tanque simple. Análogamente, podríamos definir el tiempo de retención hidráulica para el sistema total por:

$$\frac{1}{T_s} = \frac{V + V_T}{Q}$$

En teoría,  $T_c$  es independiente de  $T$  y  $T_s$ , pero en la práctica  $T_c$  está relacionado con los otros dos. Si, además, el sistema funciona adecuadamente,  $x_e \approx 0$ , luego se puede poner:

$$T_c = \frac{Vx}{Q_w x} = \frac{V}{Q_w}$$

Utilizaremos esta expresión en el análisis del balance de sustrato. Usando las hipótesis, podemos poner:

$$0 = s'V = Qs_o - Qs - t_s V$$

donde  $t_s$  = tasa de utilización de sustrato. Despejando  $t_s$  quedará:

$$t_s = \frac{Q}{V} (s_o - s) = \frac{s_o - s}{T}$$

Llevando esta expresión a (6) se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_c} = \mu(s) - k_d &= \mu_m \frac{s}{K_s + s} - k_d = -y t_s \frac{1}{x} - k_d = \\ &= -y \frac{s_o - s}{T_x} - k_d \end{aligned}$$

De esta fórmula obtendremos el valor para la concentración de microorganismos en situación estacionaria:

$$x = \frac{T_c y (s - s_o)}{T(1 + T_c k_d)}$$

y usando la aproximación para  $T_c$ , el cociente  $T_c/T$  es igual a  $Q/Q_w$ , luego:

$$x = \frac{Q}{Q_w} \frac{y(s - s_o)}{1 + T_c k_d} \quad (7)$$

Esta expresión tiene una interpretación importante: La utilización de seres vivos en procesos como el que nos ocupa está sujeta a gran cantidad de influencias no controlables, por lo cual, sólo conociendo muchos parámetros del sistema: Físicos, ( $Q$ ,  $Q_w$ ,  $y$ ,  $T_c$ ); biológicos ( $k_d$ ) y otros locales, como  $s$  = concentración impuesta por el legislador, y  $s_o$ , concentración de llegada, que son fácilmente medibles, es posible determinar la concentración adecuada para mantener el proceso en marcha de modo estacionario. Dado que  $x$  aparece, como hemos explicado, dependiendo de la concentración final deseada, volviendo a (6) despejamos:

$$s = \frac{(1 + T_c k_d) k_s}{T_c (y k - k_d) - 1} \quad (8)$$

de modo que (7) y (8) determinan totalmente el estado del sistema. Variando los parámetros en (8) se consigue acomodar la calidad del efluente a las disposiciones legales, y hecho esto, con (7) se señala la concentración microbiana adecuada para el funcionamiento del sistema. Matemáticamente nos hallamos ante un "problema de control" ya tratado en el trabajo citado más arriba.

Notemos aquí que el control, en la práctica, queda ejercido por una variación en  $Q_w$ , flujo purgado del sistema, o, equivalentemente, por  $Q_r$ . Referencias: (59), (61), (71), (78).

**III.**  
**MODELOS MATEMATICOS**

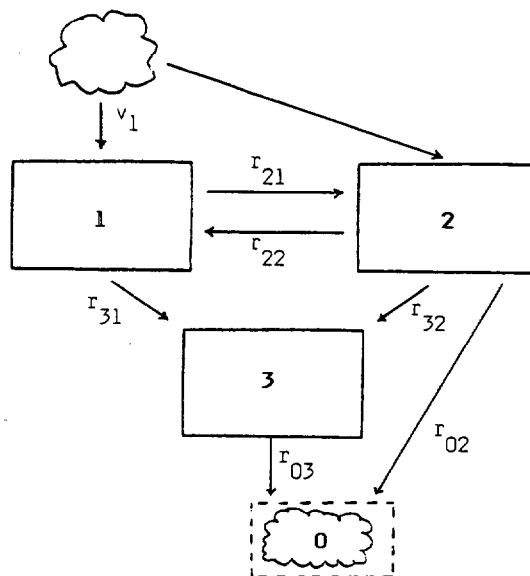
A lo largo de los capítulos anteriores se ha puesto de relieve la importancia de la matematización de los procesos de diversos tipos que intervienen en la eliminación de residuos sólidos. Además de los aspectos sociológicos, económicos, geográficos y técnicos se ha considerado en profundidad la estructura del proceso de depuración de aguas. Al analizarlo se ha insistido en tres aspectos importantes:

- a) El proceso es modelizable matemáticamente.
- b) El proceso origina un residuo, el lodo, que se toma como paradigma en nuestro estudio posterior.
- c) El "tiempo de retención" de las aguas y contaminantes juega un papel preponderante en el análisis.

Precisamente es el aspecto c) el que nos proporciona una idea valiosa, que desarrollamos en este capítulo. El tiempo invertido por un volumen de agua y las partículas y propiedades que viajan con él en el seno del sistema depurador es fundamental para comprender el funcionamiento y resultados del sistema. Con esta idea se desarrollan a continuación tres diferentes tipos de modelización. El primero es un análisis de los modelos compartimentales y su posibilidad de aplicación a estos problemas. El segundo es un comentario acerca del problema, aún abierto, de la capacidad de saturación y cuestiones sobre residuos degradables. Finalmente, el tercer tipo, que resulta novedoso, es la introducción de procesos aleatorios para el cálculo del tiempo de eliminación de una partícula del sistema.

## 1. El modelo compartimental

Este modelo es una herramienta conceptual, muy utilizado en las ciencias médicas, que permite plantear sistemas de ecuaciones en diferencias o diferenciales lineales para modelizar fenómenos en los que hay transferencia de alguna sustancia o propiedad entre diferentes compartimientos de la realidad, que se consideran aislados. Esas transferencias son flujos de cualquier magnitud. Por tanto, esquemáticamente nos hallamos ante situaciones como la siguiente:



Si se representa por  $x_i$  la cantidad de sustancia en el  $i$ -ésimo compartimiento, el estado del sistema se representa por un vector  $x = (x_i(t))$ , y los flujos  $r_{ij}(x,t)$  definen la dinámica del sistema.

Se suele poner un compartimiento 0 para representar las -

pérdidas al exterior del sistema, y el vector  $v = (v_i(t))$  representa las entradas exógenas al sistema.

Dividiendo  $r_{ij}/x_j = a_{ij}$  se obtienen los "coeficientes de transferencia" en unidades de  $T^{-1}$ . En general,  $a_{ij}$  no son constantes. La hipótesis de constancia es habitual, por lo cual el flujo  $r_{ij}$  depende sólo del compartimiento de salida  $x_j$ .

Cuando el sistema no incluye el vector  $v$  se obtienen sistemas homogéneos, y en caso contrario, no homogéneos.

El problema, pues, consiste en describir el estado  $x(t+\Delta t)$  del sistema a partir de  $x(t)$  y de los coeficientes  $a_{ij}$ . Comenzamos por el caso discreto homogéneo, y sea  $\Delta t$  un intervalo pequeño de tiempo. Por tanto,  $f_{ij} = a_{ij}\Delta t$  es la parte del compartimiento  $j$  que pasa al  $i$  en  $\Delta t$ . Así las cosas la ecuación de balance es:

$$\begin{aligned} x_i(t+\Delta t) &= x_i(t) + \text{Entradas} - \text{Salidas} \\ &= x_i(t) + \sum_{i \neq j} f_{ij} x_j(t) - \sum_{i \neq j} f_{ji} x_i(t) = \\ &= x_i(t) + \sum_{i \neq j} (a_{ij}\Delta t) x_j(t) - \underbrace{\left( \sum_{i \neq j} a_{ji} \right)}_{-a_{ii}} \Delta t x_i(t) = \\ &= x_i(t) + \Delta t \sum_{k=1}^k a_{ik} x_k(t) \end{aligned}$$

donde, poniendo  $A = (a_{ij})$ , se puede escribir resumidamente como

$$x(t+\Delta t) = (I + A\Delta t)x(t)$$



Esta ecuación en diferencias puede transformarse en una ecuación diferencial. En efecto, aplicando la fórmula de Taylor:

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \Delta t A x(t) + O(\Delta t) ,$$

de donde

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = A x(t) ,$$

esto es

$$x' = A x .$$

La solución de esta ecuación es, como se sabe,  $x(t) = e^{tA} x(0)$ , o bien puede llevarse a cabo un cálculo numérico de los valores y vectores propios de  $A$ . Dado que esto es clásico, no entramos en ello.

Cuando el sistema posee entradas exógenas, el sistema se transforma en el no homogéneo

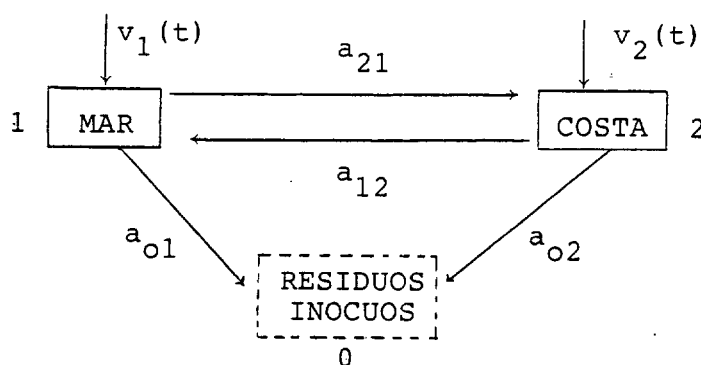
$$x' = Ax + v .$$

Esta situación parece adecuada para la descripción formal de problemas de contaminación. El papel de ésta viene modelizado por el vector  $v$ . Desde el punto de vista matemático, esta ecuación, junto con su condición inicial, se resuelve sin problemas obteniéndose la elegante fórmula de variación de las constantes

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{(t-s)A} v(s) ds$$

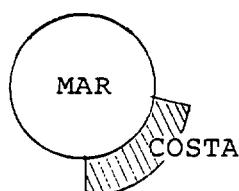
cuyo valor es fundamentalmente teórico. En la práctica se resuelve el problema numéricamente, por lo general.

Según estas ideas, el modelo para la contaminación del sistema mar-costas puede representarse con el diagrama siguiente:



donde  $a_{21}$  es la tasa debida a corrientes, oleajes... y  $a_{12}$  es la tasa por escorrentías, obras litorales, etc.

En este modelo, MAR representa un cuerpo de agua suficientemente localizado y definido, que, para nuestros efectos se puede considerar cerrado. Por ejemplo, un "giro" es una imagen adecuada en la mayor parte de los casos. Del mismo modo, COSTA representa una zona litoral definida y que, físicamente, es limítrofe con el mar:



El vector  $(0, v_1, v_2)$  representa los vertidos en ambos compartimientos, y las transferencias al compartimiento 0 indican la eliminación del sistema de las sustancias contaminantes por los diferentes medios usados o por causas naturales.

El problema del tiempo de eliminación de los contaminantes se expresa generalmente con el  $T_{90}$ , esto es, el tiempo necesario para que la cantidad de contaminante se reduzca al 10% de la inicial.

En esta familia de modelos, el asunto queda reducido a calcular, si existen, las soluciones de las ecuaciones:

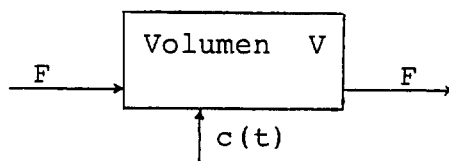
$$0,1 \ x(0) = x(0) e^{tA}$$

o bien

$$0,1 \ x(0) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{(t-s)A} v(s) ds$$

aunque en la práctica se suele calcular numéricamente las soluciones del sistema y observar los resultados. Dada la sencillez del sistema, un algoritmo tipo Runge-Kutta es suficiente, en especial si se complementa con un ajuste, tipo Fehlberg, automático del paso de tiempo. Este tipo de trabajos es habitual en los cursos del Departamento de Matemáticas en la Facultad de Ciencias del Mar, y no entramos en ello.

El principio de parsimonia o de máxima simplicidad es importante en esta modelización. Así, un ejemplo de aplicación de control de la contaminación en los Grandes Lagos fue puesto a punto por Rayney en 1969 con un modelo de un solo compartimiento (note se la semejanza con el modelo de depuradoras) con flujo constante:



Es claro que en este caso el modelo es

$$x' = -\frac{F}{V} x + c(t)$$

donde  $\frac{F}{V}$  es el "tiempo de volteo" del compartimiento.

Los coeficientes  $a_{ij}$  del modelo compartimental aplicado a la situación que nos ocupa han de calcularse previamente a la puesta en marcha del modelo. Es evidente que la toma de datos

continua ("monitoring", "ecological monitoring") permite estimaciones razonables de los  $a_{ij}$ , excepción hecha de  $a_{02}$  y  $a_{01}$ . Este último problema está íntimamente relacionado con el tiempo de eliminación, que será objeto de tratamiento posterior en este mismo capítulo. En cierto modo, este problema es análogo al encontrado en Medicina y Fisiología cuando con un análisis se pretende reconstruir el estado de un sistema complejo como el de un organismo vivo.

Sin embargo, la consideración de un sistema simplificado, sin los flujos de eliminación, origina el estudio de una dinámica simple que permite una visión general del proceso. En todo caso, las ecuaciones son del tipo

$$x' = Ax + v(t)$$

donde  $A = (a_{ij})$  con  $i, j = 1, 2$  en el caso sencillo, e  $i, j = 0, 1, 2$  en el caso general.

Un aspecto que criticamos aquí es la excesiva simplicidad del modelo, donde se ignoran explícitamente las interacciones, que quedan englobadas en los coeficientes de forma implícita. Por tanto, y dado que esta técnica de modelización está suficientemente contrastada por la práctica, pasamos a considerar el valor teórico de otros aspectos de la modelización en estas cuestiones. La dificultad de plantear un modelo global exige, siguiendo la metodología, aislar problemas parciales; así pues, se pasará revista al problema de la acumulación y finalmente se desarrollará un modelo de cálculo del tiempo de eliminación de partículas en suspensión. Referencias: (5), (9), (22), (40), (45), (54), (58), (71), (75), (90), (91).

## 2. El problema de la acumulación: Residuos degradables

Aquí "degradable" indica simplemente el paso de una situación activa del contaminante a otra en la cual su influencia puede considerarse nula. En el mar, por ejemplo, ese paso puede venir representado por una actividad química que degrada la sustancia a otras inocuas o, simplemente, por procesos físicos de transporte, como puede ser el alcanzar profundidades en las que se puede suponer que la actividad no interfiere con los procesos de interés para la sociedad.

Como ya se indicó en el apartado anterior, el modelo compartimental es difícil de aplicar, al no resultar fácil la identificación de los coeficientes  $a_{0j}$ , en el caso general. Por todo ello, parece adecuado pensar en alguna modelización más sencilla y que describa el proceso de degradación directamente.

Al contrario del modelo compartimental, donde se trata con flujos de magnitudes, aquí consideraremos la idea de concentración. Si se supone un cuerpo de agua de volumen  $V$ , sea  $c(t)$  la concentración de contaminante. La hipótesis básica es que el contaminante se degrada, por lo que el modelo es, como era de esperarse:

$$c' = -k c$$

Si además suponemos un aflujo de contaminante  $\omega$  (unidades de masa/tiempo), el balance es:

$$c' = -k c + \frac{\omega}{V}$$

donde se ha supuesto que la homogeneización de la mezcla es instantánea. Añadiendo la condición inicial  $c(0) = 0$  y resolviendo elementalmente quedará:

$$c(t) = \frac{\omega}{V} (1 - e^{-kt})$$

La concentración a largo plazo  $c(\infty)$  es  $\frac{\omega}{V}$ , y se puede calcular fácilmente el tiempo en que se alcanza, p.ej. el 90% de  $c(\infty)$  :

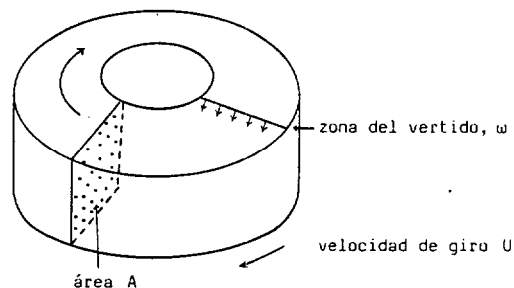
$$0,9 c(\infty) = 0,9 \frac{\omega}{V} = \frac{\omega}{V} (1 - e^{-kt}) ,$$

de donde se despeja  $t$  inmediatamente.

Según el valor obtenido será posible obtener una idea aproximada del tiempo en que el vertido deberá ser suprimido, en función de  $k$ ,  $\omega$  y  $V$ .

### 2.1. Modelización

En la práctica, el volumen  $V$  de agua no está quieto, sino que forma parte de algún sistema de corrientes. El modelo más simple posible viene dado por un giro, lo que se esquematiza en la figura siguiente:



Un observador lagrangiano en el giro notará que la concentración disminuye a partir de cada paso por la zona de vertido,

y que en dicho paso, la concentración presenta un salto. El tiempo necesario para completar un giro completo es  $\ell/U$ , siendo  $\ell$  la longitud total del giro. Así pues, entre cada dos pasos por la zona del vertido el factor de degradación es  $e^{-kt} = e^{-\frac{k\ell}{U}}$ . Si denotamos por  $\gamma$  el salto en la concentración en cada paso, tenemos el siguiente modelo en diferencias finitas:

$$c(t_n) = c(t_{n-1}) e^{-k \frac{\ell}{U}} + \gamma \quad (n=1,2,\dots)$$

Esta ecuación se resuelve fácilmente por un método de descenso. En efecto, escribiendo  $c_j = c(t_j)$  tenemos:

$$\begin{array}{rcl} c_n & = & c_{n-1} e^{-\frac{k\ell}{U}} + \gamma \\ \swarrow & & \\ c_{n-1} & = & c_{n-2} e^{-\frac{k\ell}{U}} + \gamma \\ \swarrow & & \\ c_{n-2} & = & c_{n-3} e^{-\frac{k\ell}{U}} + \gamma \\ & \vdots & \\ & \vdots & \\ & \vdots & \\ \swarrow & & \\ c_2 & = & c_1 e^{-\frac{k\ell}{U}} + \gamma \\ \swarrow & & \\ c_1 & = & c_0 e^{-\frac{k\ell}{U}} + \gamma \end{array}$$

de donde, sustituyendo y operando, llegamos a:

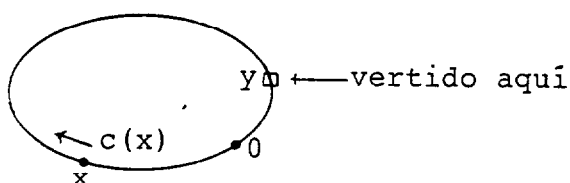
$$c_n = (c_{n-2} e^{-\frac{k\ell}{U}} + \gamma) e^{-\frac{k\ell}{U}} + \gamma = \dots = c_0 e^{-\frac{nk\ell}{U}} + \gamma \sum_{j=0}^{n-1} e^{-\frac{jk\ell}{U}}$$

de donde  $c(\infty)$  se halla por paso al límite:

$$c(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} c(t_n) = \gamma(1 - e^{-\frac{k\ell}{U}})$$

El análisis es ahora igual que en el caso anteriormente con siderado, quedando sólo determinar el valor del salto  $\gamma$ .

Para hallar ese valor consideramos una ecuación de balance a base de  $c(x)$ . Aquí  $x$  es una coordenada en un eje circular



así que consideremos el segmento  $[0, x]$ . La ecuación de balance de masa para ese segmento es:

$$\text{difusión} - \text{advección} - \text{degradación} + \text{influencia del vertido} = 0$$

o bien, incorporando el parámetro de difusión  $D$ :

$$DA(c'(x) - c'(0)) - UA(c(x) - c(0)) - kA \int_0^x c(s) ds + \omega H(x-y) = 0$$

donde  $H$  es la función de Heaviside.

Para hallar el valor  $\gamma$  del salto, pongamos la ecuación de balance para un segmento  $[y-\epsilon, y+\epsilon]$  alrededor de la coordenada de punto de vertido. Nos queda:

$$[-DA c'(x) + UA c(x)] \Big|_{y-\epsilon}^{y+\epsilon} + kA \int_{y-\epsilon}^{y+\epsilon} c(x) dx = \omega$$



Si  $c(x)$  ha de ser una función continua, al hacer tender  $\varepsilon \longrightarrow 0$  aparecerá un salto en la derivada:

$$c'(y+0) - c'(y-0) = - \frac{\omega}{DA}$$

pero si no hay difusión, esto es,  $D = 0$ , entonces  $c(x)$  ha de ser discontinua en  $x = y$ , siendo el salto, por tanto:

$$c(y+0) - c(y-0) = \frac{\omega}{AU} = \gamma$$

En las consideraciones recién hechas, puede simularse fácilmente el proceso para obtener estimaciones de los tiempos en que se alcanza una concentración prefijada. Lo más sencillo es, desde luego, una resolución numérica que no plantea problemas. No entramos aquí en esas consideraciones. El modelo presentado es, en su idea principal, debido a O'Kane (1986) Math. Modelling 7, 201-209.

El aspecto más criticable de este modelo, algo que también se puede achacar a los modelos compartimentales, es su extrema generalidad. En efecto, la modelización es sencilla, por ello mismo no hace frente sino a situaciones promedio. Los visos de realidad de los resultados obtenidos por el modelo no son, por tanto, muy grandes. Sin embargo, como primer escalón de una cadena de modelos, estamos ante una idea atractiva.

El comentario anterior pone de relieve que la complejidad de los fenómenos en el océano es tal que toda aproximación global está casi sin remedio condenada al fracaso. De ahí que los intentos parciales de resolver partes aparentemente inconexas de los problemas resulten más adecuados. Referencias: (27), (57), (58), (64), (83), (89), (99).

### 3. Una Modelización para la eliminación de partículas suspendidas en el océano

En los apartados anteriores de este capítulo se ha pasado revista a métodos conocidos para la evaluación de tiempos de eliminación para contaminantes vertidos en el océano. La idea subyacente en ambos era la consideración del conjunto del contaminante en el seno del océano, bien como una masa global como en el caso del modelo compartimental, bien en forma de concentración (o dilución) como se ha hecho en el caso de los residuos degradables.

Una idea nueva consiste en evaluar directamente el tiempo de eliminación para partículas aisladas. Esta idea resulta especialmente atractiva cuando las partículas son inertes, caso que se da en particular para una fracción importante de los lodos provenientes de la depuración de aguas residuales. Bajo la hipótesis de partículas inertes el problema es muy interesante, tanto desde el punto de vista teórico como desde el práctico, que puede conducir incluso a bases para la redacción de normativas legales de interés medioambiental.

Aquí nos concentraremos en el comportamiento de partículas inertes aisladas, dependiendo de sus tasas específicas de hundimiento, que se modelizan con la velocidad vertical  $w$  (m/día) y la mezcla debida a la difusión turbulenta, modelizada por el coeficiente  $T$  (m<sup>2</sup>/día). La importancia relativa de uno u otro parámetro depende de las propiedades geométricas de la partícula considerada y de las características específicas de la capa oceánica que se estudia. En todo caso, el fenómeno se modeliza por la probabilidad condicional

$$p(s,t;x,0)$$

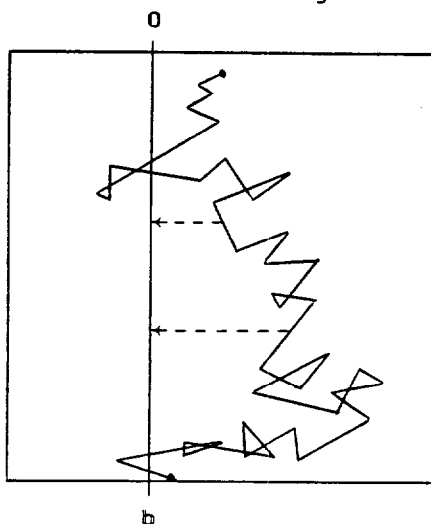
de encontrar una partícula en la posición  $s$  en el tiempo  $t$ , sabiendo que en el tiempo  $0$  la posición era  $0$ .

Considerando  $x$  y  $s$  como profundidades, podemos aplicar la teoría de procesos estocásticos, y ver que  $p(s,t;x,0)$  satisface la ecuación de Fokker-Planck del pasado en dimensión uno:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} B \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + A \frac{\partial p}{\partial x}$$

donde  $x$  es la profundidad de ejecución del vertido,  $B$  el coeficiente (que depende de la profundidad) de difusión turbulenta y  $A$ , que también depende de la profundidad, modeliza la advección fuera de la capa oceánica considerada. Típicamente, se puede trabajar en un intervalo  $[0,b]$ , donde  $0$  es la superficie y  $b$  alguna profundidad interesante (parte superior de la termoclina p.ej., etc...). Desde luego, la idea básica es que una partícula inerte, al descender a una cierta profundidad, puede considerarse eliminada del sistema y no contribuye a la contaminación.

Dado que el movimiento de descenso es complejo y tridimensional, la asunción de la ecuación de Fokker-Planck implica la proyección sobre un eje vertical de ese movimiento complejo. Así, los coeficientes  $A$  y  $B$  representan las características esenciales del proceso proyectado sobre el eje vertical:



Para la modelización supondremos que en la profundidad 0 , la partícula es automáticamente rechazada hacia el interior del océano, lo que se conoce como CONDICION DE BARRERA REFLECTANTE, y expresaremos la idea básica citada antes diciendo que, una vez alcanzado b , la partícula no vuelve a la capa superior. Esto es una CONDICION DE BARRERA ABSORBENTE.

Consideremos, pues, una partícula depositada en una profundidad  $x \in [0, b]$ . Tras un tiempo  $t$  , la probabilidad de que la partícula se halle aún en una profundidad entre 0 y b viene dada por:

$$P(x, t) = \int_0^b p(s, t; x, 0) ds$$

Esta fórmula puede leerse también de otro modo: dice que el tiempo de salida  $t_s$  de la partícula del intervalo  $[0, b]$  (por b , por supuesto), sigue la ley:

$$\text{prob}(t_s \geq t) = P(x, t)$$

Suponiendo homogeneidad en el proceso estocástico, como se ha hecho en otros trabajos, sabemos que  $p(s, t; x, 0)$  satisface la ecuación de Fokker-Planck del pasado, cuyos coeficientes dependen sólo de  $x$  :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} B \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + A \frac{\partial p}{\partial x} ,$$

donde  $\frac{1}{2} B$  se interpreta como el coeficiente de difusión turbulenta

$$\frac{1}{2} B(x) = T(x) \quad (m^2/día)$$

y  $A(x)$  combina la caída vertical específica  $w(x)$  de la partícula y la caída debida al gradiente vertical de turbulencia:

$$A(x) = w(x) + \frac{\partial T}{\partial x} \quad (\text{m/día})$$

Integrando la ecuación de Fokker-Planck respecto de  $s$  que  
da

$$\frac{\partial}{\partial t} P = A(x) \frac{\partial}{\partial x} P + \frac{1}{2} B(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} P \quad (*)$$

Imponemos ahora las condiciones inicial y de contorno:

a) Inicial:  $p(s,0;x,0) = \delta(x-s)$  , esto es:

$$P(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (0,b) \\ 0 & \text{si } x \notin (0,b) \end{cases}$$

b) Contorno: La barrera reflectante en  $x=0$  se modeliza por

$$\frac{\partial}{\partial x} P(0,t) = 0 ,$$

y la barrera absorbente en  $x=b$  , por  $P(b,t) = 0$  .

Referencias: (20), (27), (32), (37), (48), (55), (65), (69),  
(70), (74), (79), (92).

### 3.1. Cálculo del tiempo de eliminación

Para calcular el tiempo de salida  $t_s$ , o mejor dicho, su ley de distribución probabilística, comenzamos con la siguiente idea: Como  $P(x,t) = \text{prob}(t_s \geq t)$ , es cierto que  $\text{prob}(t_s < t) = 1 - P(x,t)$ , luego la función de densidad para esta distribución es simplemente

$$-\frac{\partial}{\partial t} P(x,t) .$$

Basta ahora hallar los momentos de la variable  $t_s$  para tener su distribución perfectamente definida:

$$\langle t_s \rangle = t_s(x) = - \int_0^{\infty} t \frac{\partial}{\partial t} P(x,t) dt = \int_0^{\infty} P(x,t) dt .$$

$$\langle t_s^n \rangle = t_s^{(n)}(x) = - t^n P(x,t) \Big|_0^{\infty} + n \int_0^{\infty} t^{n-1} P(x,t) dt =$$

$$= n \int_0^{\infty} t^{n-1} P(x,t) dt .$$

Para resolver nuestro problema basta considerar el primer momento  $\langle t_s \rangle = t_s(x)$ . El cálculo efectivo se lleva a cabo como sigue. Integrando en  $t$  entre 0 e  $\infty$  los términos de la ecuación (\*) nos quedará, imponiendo las condiciones necesarias para que las derivadas espaciales de  $P$  originen integrales convergentes:

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} P dt = -1 ,$$

$$\int_0^{\infty} A(x) \frac{\partial}{\partial x} P dt = A(x) \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} P dt = A(x) \frac{\partial}{\partial x} t_s(x) ,$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{2} B(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} P dt = \frac{1}{2} B(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^{\infty} P dt = \frac{1}{2} B(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} t_s(x)$$

luego obtenemos una ecuación diferencial ordinaria de 2º orden

$$\frac{1}{2} B(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} t_s(x) + A(x) \frac{\partial}{\partial x} t_s(x) = -1$$

Las condiciones de contorno impuestas a la ecuación de Fokker-Planck originan condiciones de contorno para esta ecuación ordinaria:

de  $\frac{\partial}{\partial x} P(0,t) = 0$  obtenemos por integración  $t'_s(0) = 0$ ,

y de  $P(b,t) = 0$ , por tanto,  $t_s(b) = 0$ .

Así pues, podemos resumir nuestro trabajo en el siguiente

#### TEOREMA

El tiempo medio de salida  $t_s(x)$  de una partícula depositada en una profundidad  $x \in [0,b]$ , a través de  $b$ , viene dado por la solución del problema de contorno siguiente para una ecuación diferencial ordinaria

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} B(x) t_s''(x) + A(x) t_s'(x) &= -1 \\ t_s(b) &= 0 \\ t_s'(0) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Referencias: (20), (32), (70), (79).

### 3.2. Resolución numérica del problema de contorno, experimentos numéricos y comentarios

El problema anterior puede resolverse, al menos teóricamente, en forma cerrada, obteniéndose expresiones relativamente manejables a base de la cantidad

$$e^{\int_0^{\infty} \frac{2A(x)}{B(x)} dx}$$

que puede calcularse numéricamente por cualquier método de cuadraturas. No usaremos esta vía, ni tampoco la de introducir una función de Green, que es la otra alternativa clásica en forma cerrada. Dado que en Oceanografía es corriente trabajar con perfiles calculados a intervalos discretos, resulta más razonable introducir un esquema en diferencias finitas. Se han desarrollado programas propios a base de diferencias centradas en la primera derivada y usando la habitual fórmula para la segunda derivada. Para las condiciones de contorno se usaron diferencias hacia adelante en 0 ; y para el gradiente de T se usaron diferencias centradas. Este esquema, conocido como "método de paso", origina un sistema tridiagonal de ecuaciones lineales que se resuelve directamente en dos fases: En la primera, yendo de 0 a b , se calculan los coeficientes y en la segunda se retrocede calculando valores de  $t_s$  . No es necesario recurrir a métodos numéricos de resolución de sistemas. Un procedimiento de partición del intervalo del tipo Runge se puede incorporar fácilmente, si el grado de precisión requerido exigiera implementarlo.

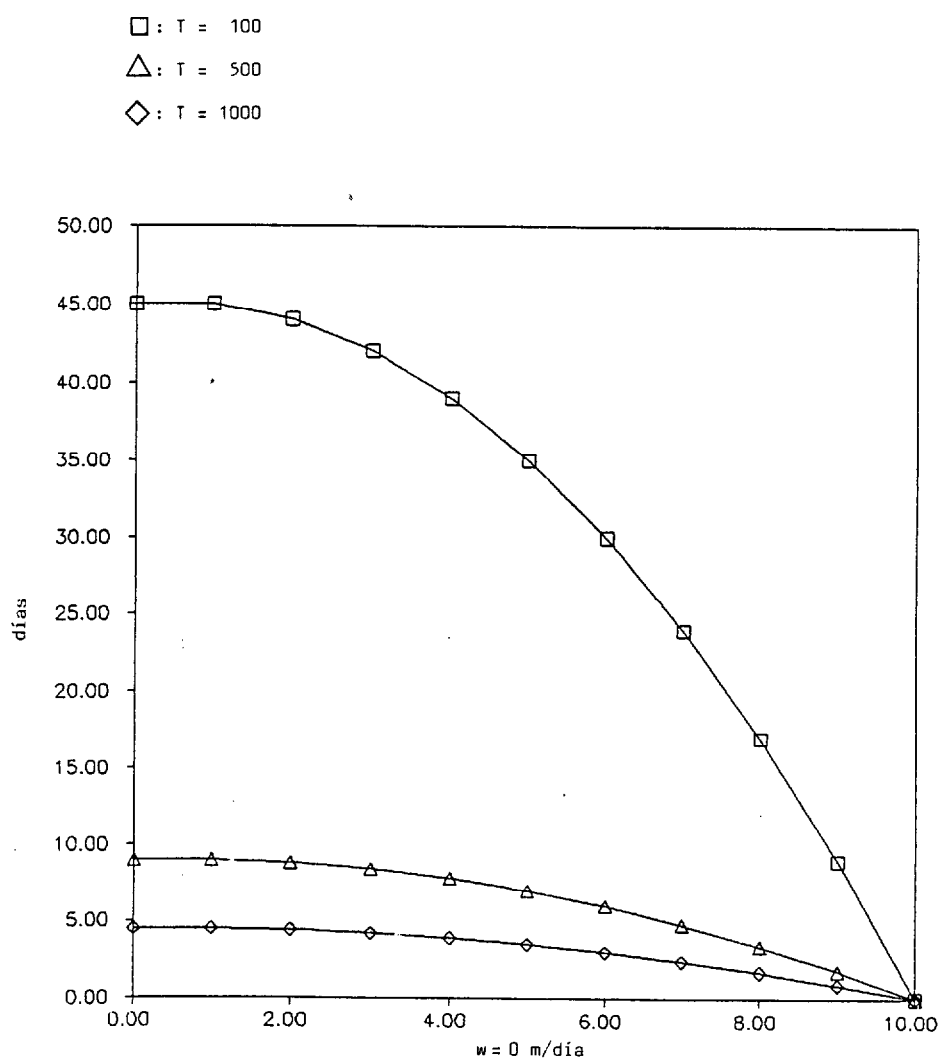
Se han llevado a cabo cálculos para valores de T y w considerados normales en las capas superiores del océano. Los experimentos se han efectuado poniendo  $b = 100$  m. El eje horizontal indica la profundidad del vertido en decenas de metros y

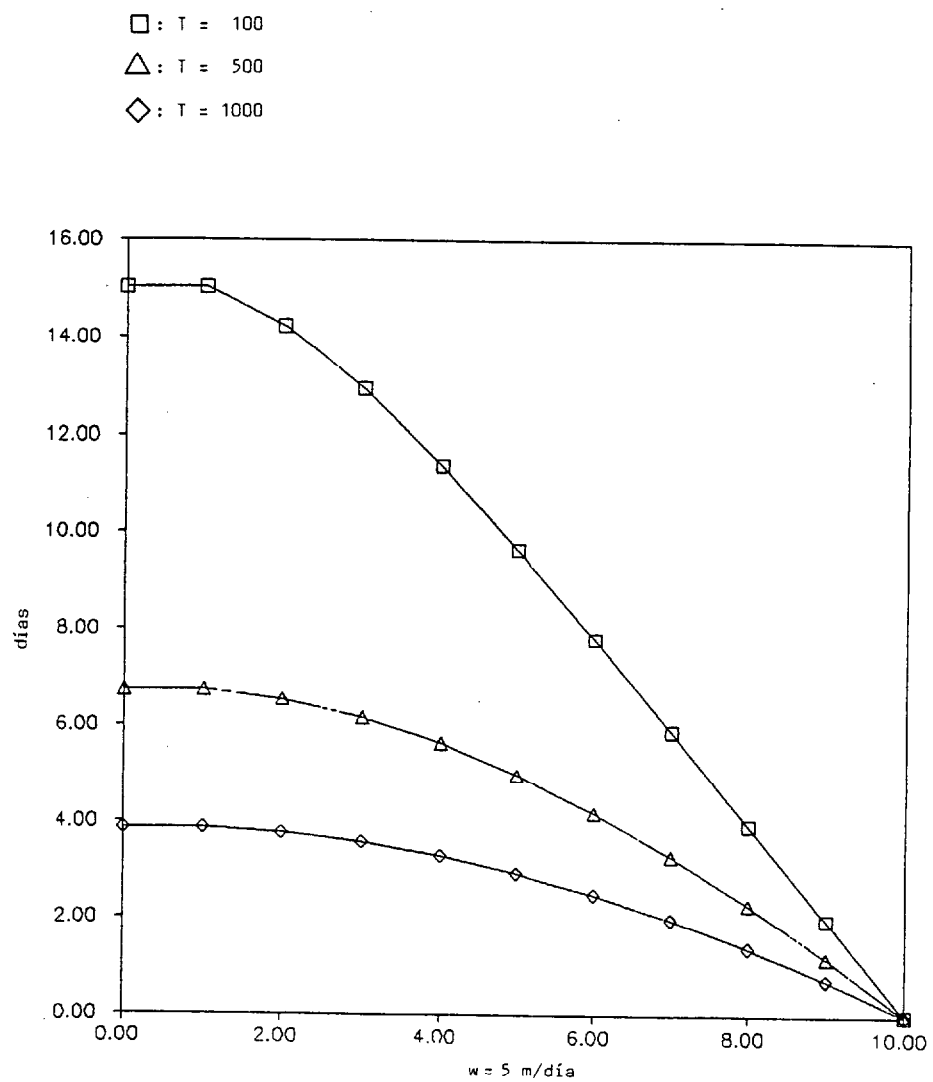


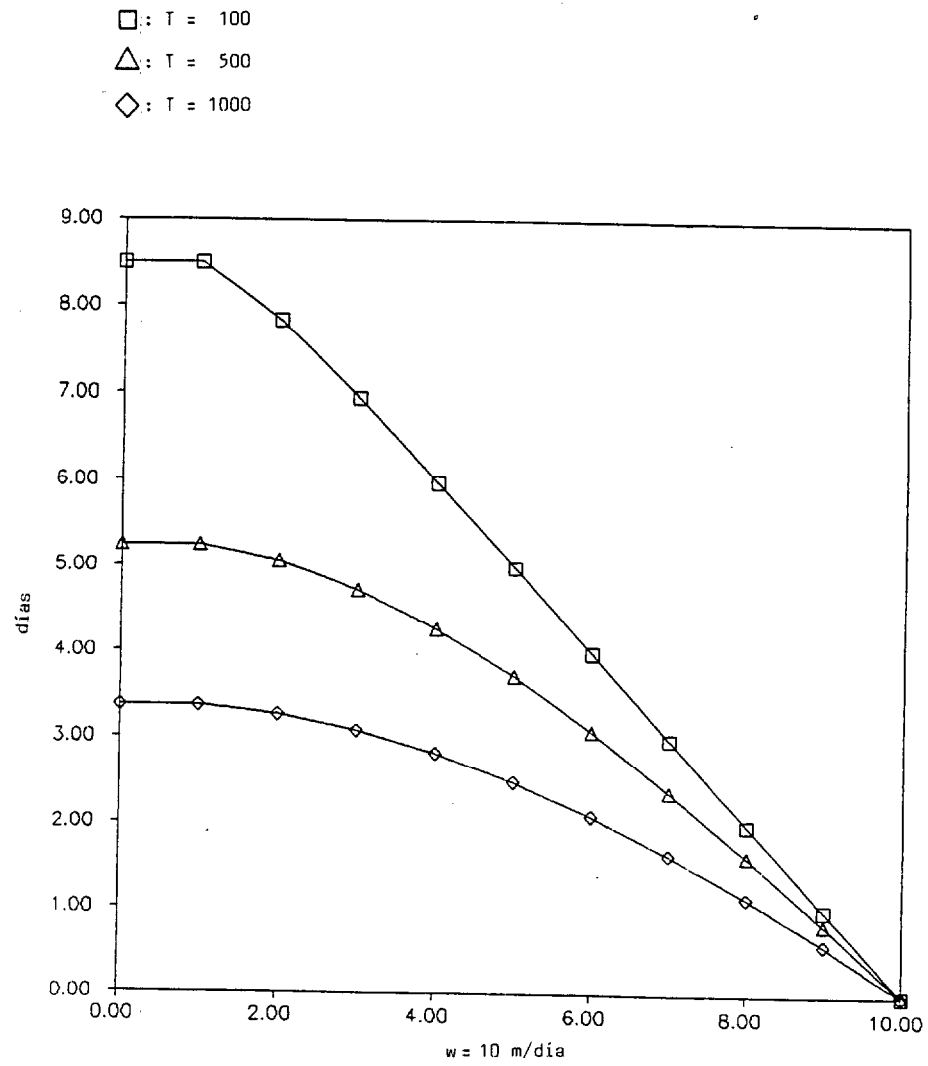
el eje de ordenadas refleja  $t_s(x)$  en días.

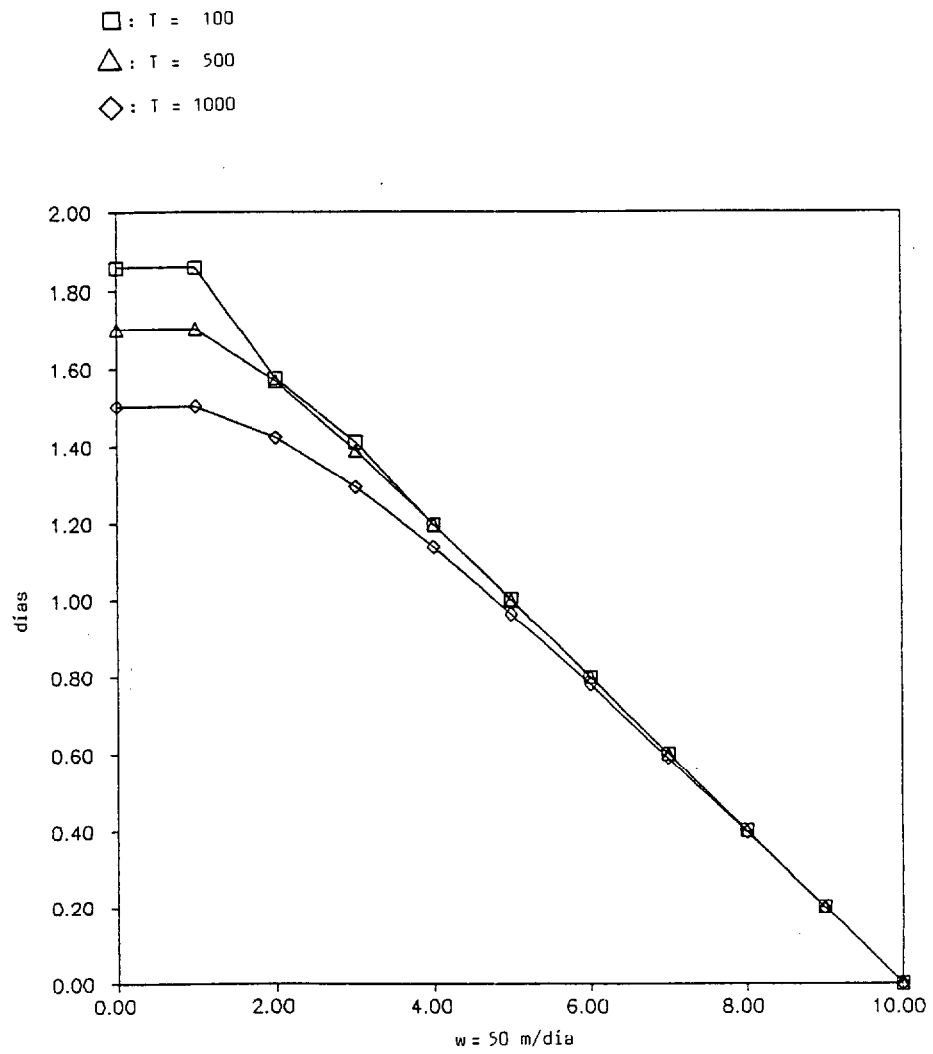
Los puntos angulosos que aparecen en ciertas gráficas se deben a haberse utilizado sólo 10 pasos de malla. Se ha comprobado que afinándola desaparecen, sin que se pierda el carácter general de las mismas.

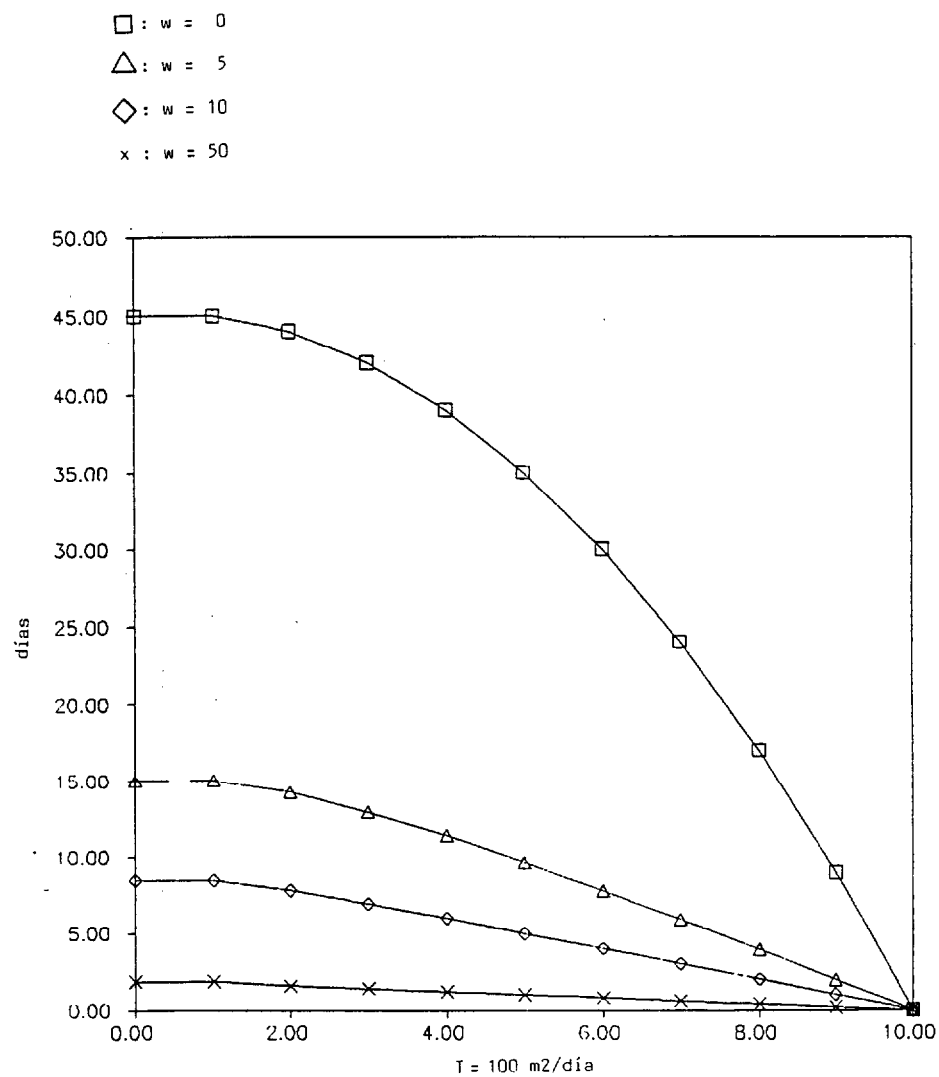
También se han incorporado experimentos numéricos con perfiles para  $T$  y  $w$ , que se dan en las correspondientes gráficas.

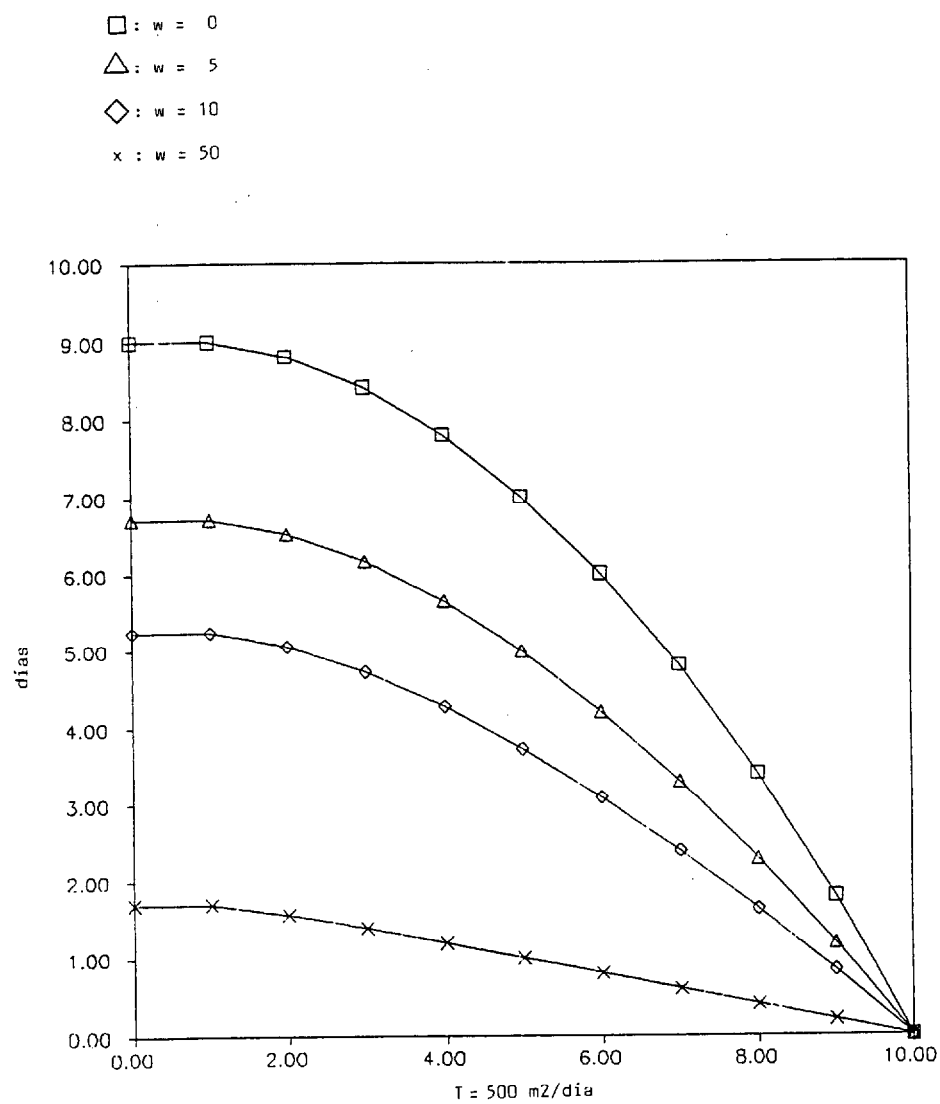


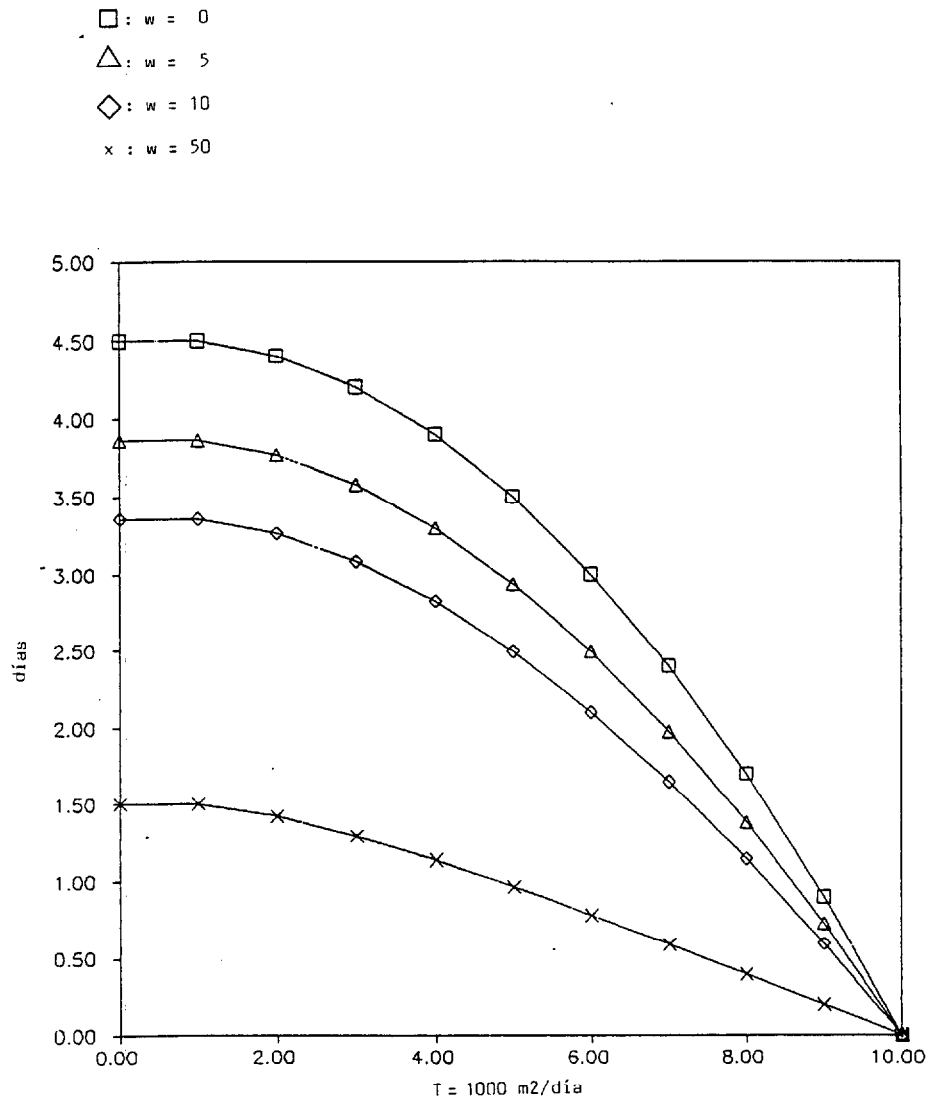




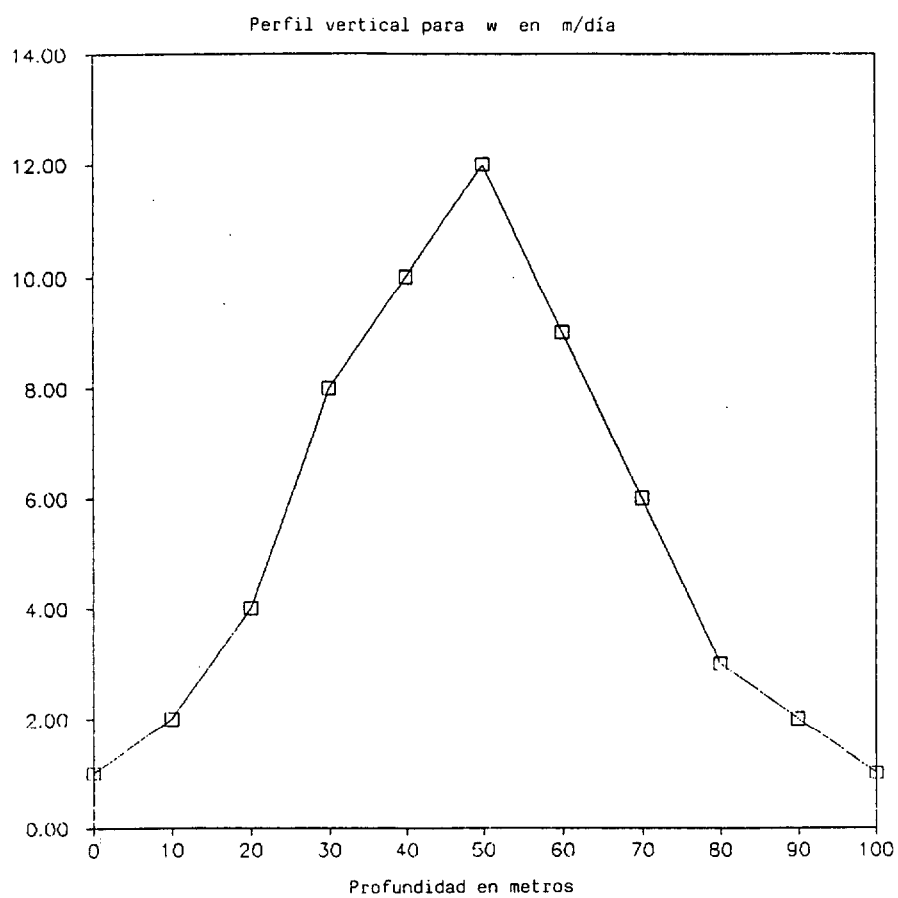


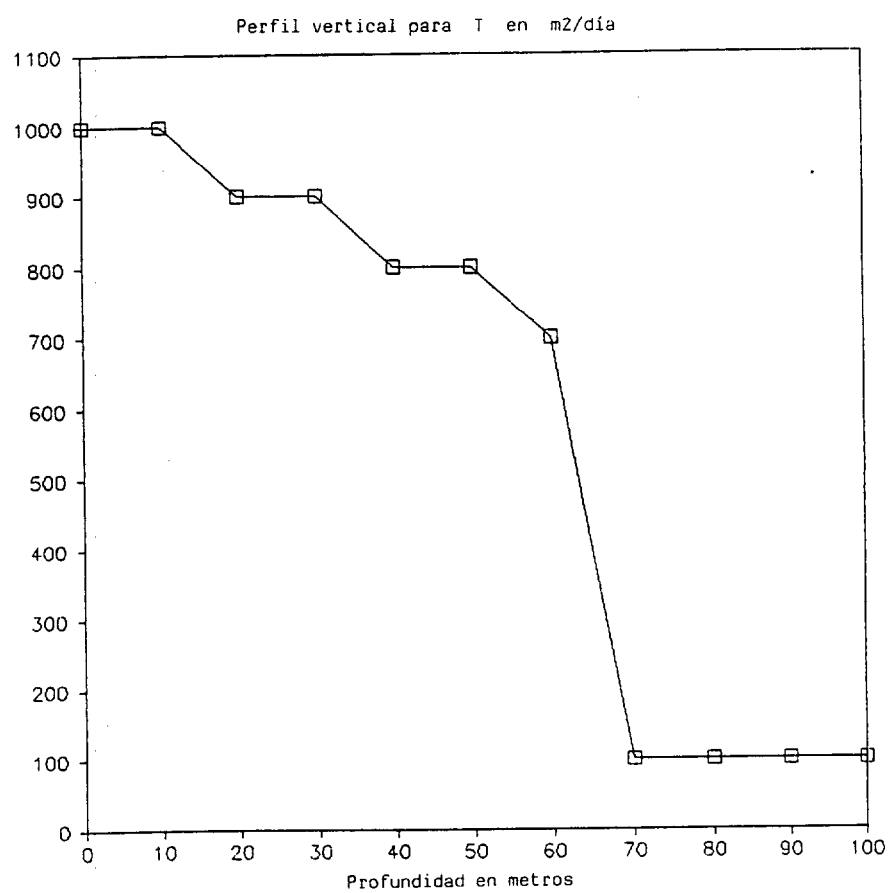


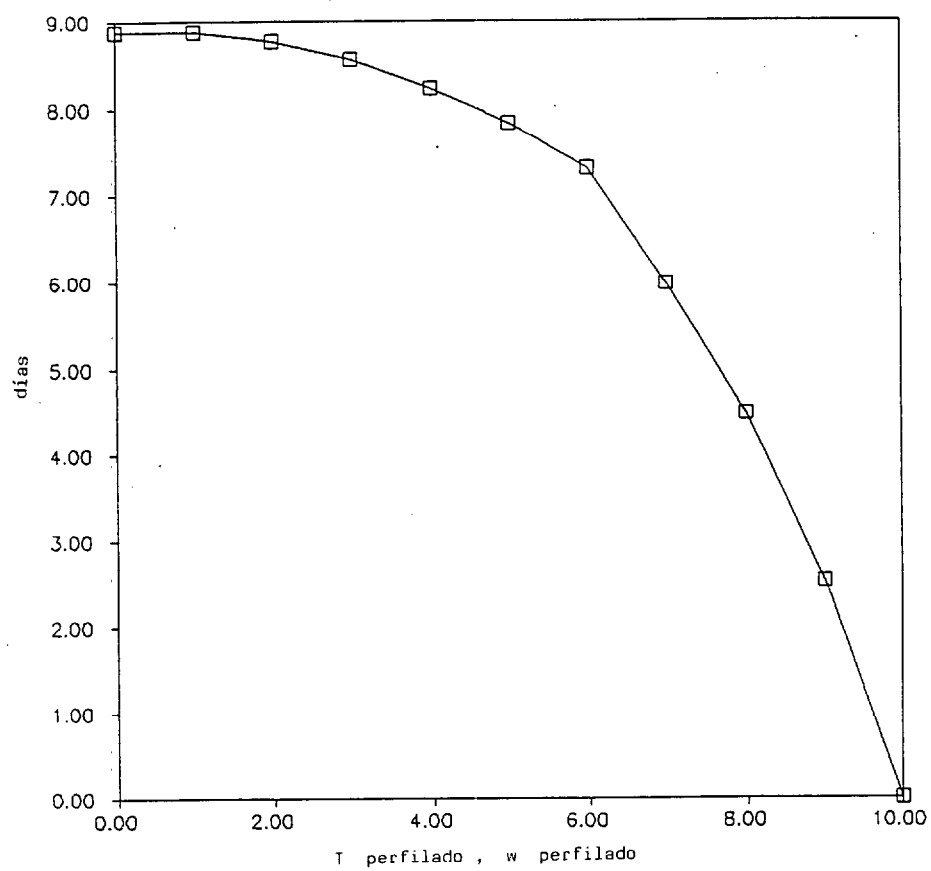


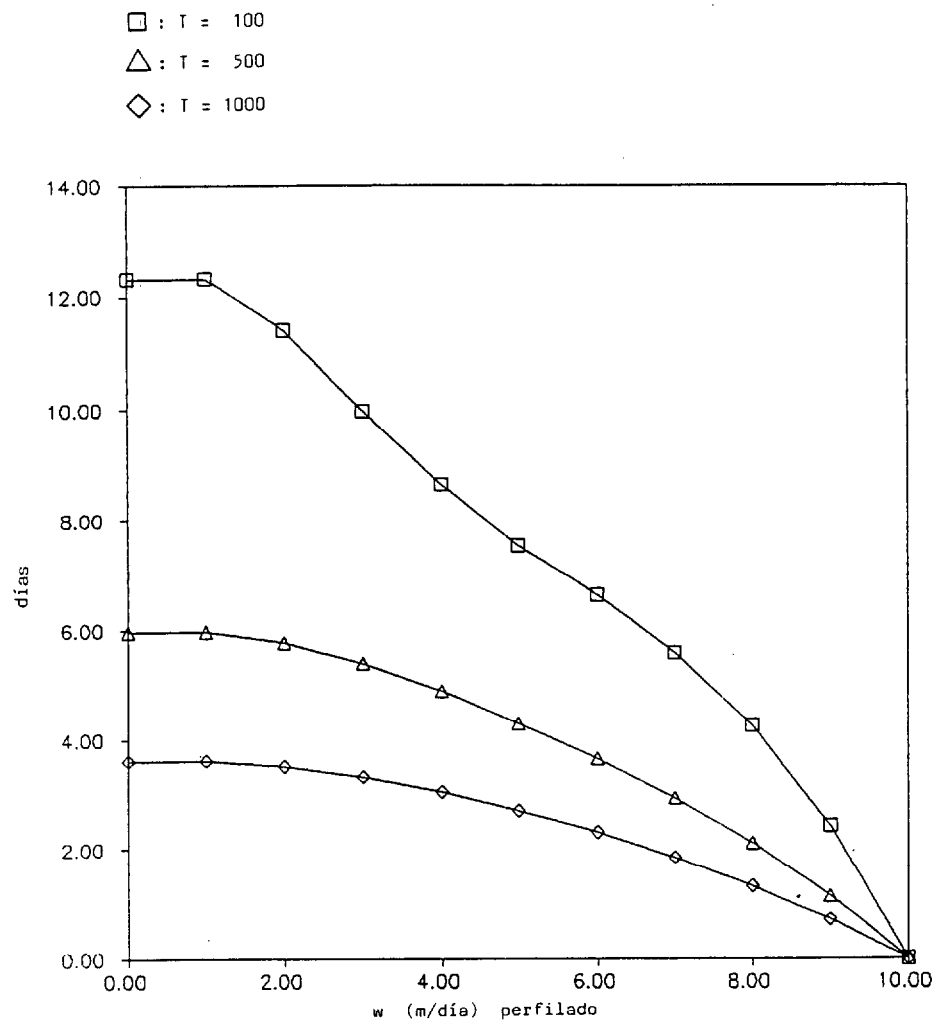












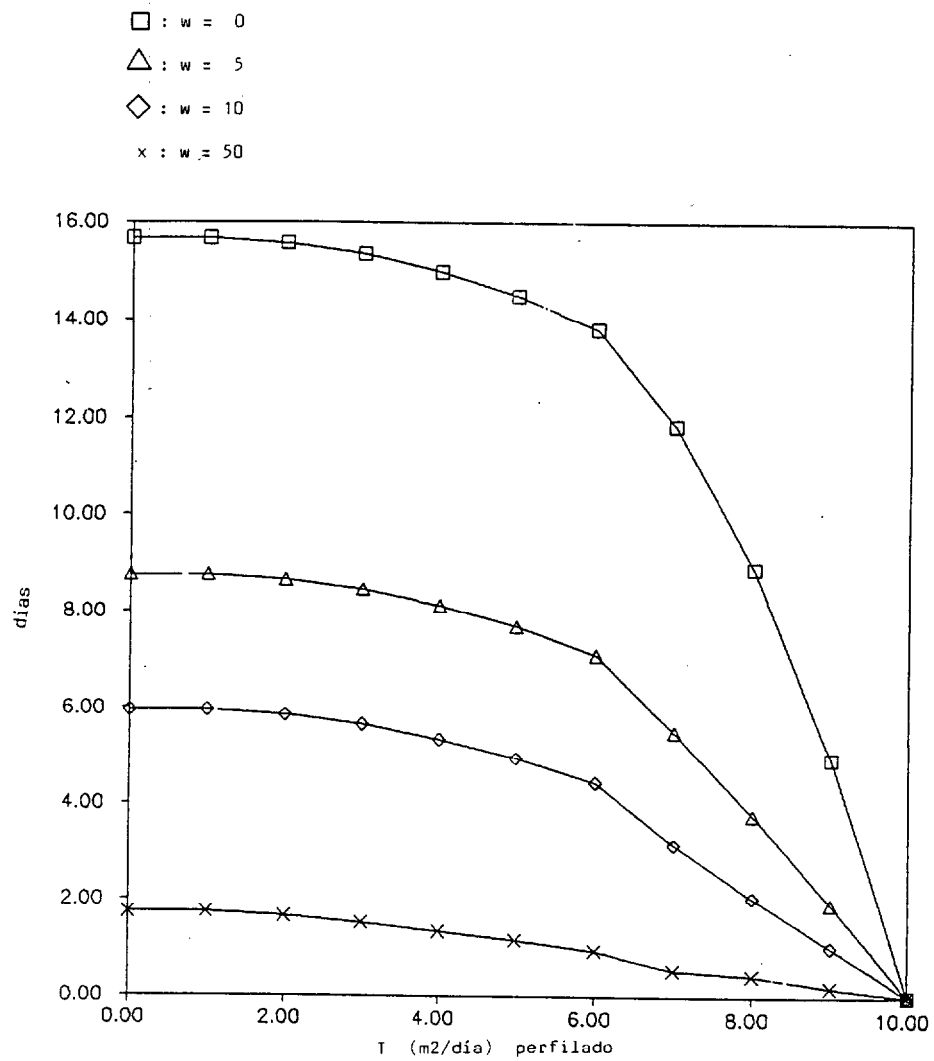


TABLA RESUMEN

DIAS INVERTIDOS POR UNA PARTICULA, DEPOSITADA EN LA SUPERFICIE,  
EN ALCANZAR LA PROFUNDIDAD DE 100 m.

T = coef. de difusión turbulenta ( $\text{m}^2/\text{día}$ )

w = velocidad vertical (m/día)

| <div>T<br/>w</div> | 100   | 500 | 1000 | con<br>Perfil |
|--------------------|-------|-----|------|---------------|
| 0                  | 45    | 9   | 4,5  | 15,8          |
| 5                  | 15    | 6,8 | 3,9  | 8,8           |
| 10                 | 8,5   | 5,2 | 3,4  | 6             |
| 50                 | 1,85  | 1,7 | 1,5  | 1,75          |
| con<br>Perfil      | 12,25 | 6   | 3,6  | 9             |

Los experimentos muestran que la eliminación de partículas de gran flotabilidad se ve mejorada por la aparición de turbulencias altas. Este es el caso de la mayor parte del fitoplankton y el de partículas en las que ciertas características geométricas dominan sobre la densidad relativa agua/partícula. Por otra parte, cuando  $w$  es alta (50 m/día), la influencia de la turbulencia es casi despreciable.

La introducción de un perfil para  $w$  está justificada pues, sobre todo para partículas vivas, es posible que su velocidad de caída se modifique al cruzar capas ricas en nutrientes, o bien - para partículas químicamente activas que modifiquen su geometría reaccionando con el entorno. Este caso no se da para partículas inertes originadas por el vertido de lodos o residuos sólidos, - aunque, debido a las diferencias de densidad, una evaluación de una velocidad promedio de caída puede simplificar los cálculos.

Se justifica la experimentación con perfiles para  $T$  debido a que la capa de trabajo puede incluir, p.ej. parte de la termoclina, lo que se reflejaría en la aparición de un pronunciado gradiente en la turbulencia en la capa estudiada.

Una idea no trabajada aquí es la de utilizar un modelo multicapa, cosa que podría proporcionar mejores resultados, más realistas. Esta noción, al igual que la de usar los transportes por corrientes, o patrones bidimensionales de difusión, tratados con las mismas técnicas estocásticas, y que serían de gran interés - en la gestión del litoral, está aún sin explotar, siendo una de las líneas a seguir en las investigaciones en Ciencias del mar. La introducción de perfiles variables con el tiempo origina interesantes y complicados problemas tanto teóricos como de cálculo que sólo ahora pueden comenzar a explorarse. Referencias: (28), (32), (46), (54), (57), (65), (70), (86).

## **IV. CONCLUSIONES**



El conjunto de técnicas y disciplinas que confluyen en las Ciencias del Mar es muy amplio. Por tanto el presente trabajo toca una serie de cuestiones pertenecientes a materias aparentemente muy alejadas entre sí. Desde los fundamentos de la Sociología a la Oceanografía, desde el Urbanismo a los Procesos Estocásti--cos, pasando por la Microbiología, todas ellas tienen cabida en un problema marino. Esto es especialmente cierto en situaciones que involucren áreas costeras o, como es nuestro caso, áreas in-sulares. La motivación para este estudio fue precisamente esa: - La compleja interacción entre la isla, sus habitantes y el entorno marino.

Así pues, pasamos a exponer las conclusiones obtenidas a lo largo de la memoria.

1. Se observa la necesidad de establecer una base de datos lo más completa posible en lo referente a la gestión de residuos de todo tipo en la isla.
2. Se establece la importancia de un tratamiento integral y común del volumen de residuos generados por la isla.
3. Se reconoce la importancia de plantear, en este ámbito, la viabilidad de la eliminación de una fracción de los residuos por vía marina.
4. Se presenta una definición operativa de contaminación y se aplica al medio marino.
5. Se efectúa una revisión de la idea de depuración, poniendo el énfasis en los aspectos matematizables. Se comprueba el - enorme potencial matemático de este estudio.
6. Se revisan críticamente dos tipos de modelos elementales, para hallar que un concepto esencial son los "tiempos de permanencia".

7. Se plantea un modelo nuevo para el cálculo del tiempo medio que necesita una partícula para descender a una profundidad prefijada. Este modelo abandona la línea general de tomar en cuenta concentraciones para considerar partículas aisladas y aplicar les técnicas de procesos estocásticos, y de las ecuaciones de evolución asociadas a las leyes de probabilidad correspondientes.

El modelo consiste en definir un movimiento aleatorio unidimensional que obedece una ecuación de Fokker-Planck del pasado. Este movimiento es la proyección del movimiento real, complejo, de la partícula, y se complementa con condiciones de contorno adecuadas.

En base a la ecuación de Fokker-Planck, se hallan las características de la variable aleatoria "tiempo de salida" y se plantea un problema de contorno para una ecuación diferencial ordinaria, donde la función desconocida es el "tiempo medio de salida".

8. La ecuación final del modelo, con sus condiciones de contorno, se resuelve por métodos numéricos ordinarios, aplicándose para valores razonables de los parámetros. Los resultados se presentan en gráficas y se comentan, añadiendo algunas perspectivas de futuro de estos estudios:

Extensión a dos dimensiones y aplicaciones a la gestión del litoral.

Introducción de dependencia temporal en los coeficientes.

**V.**  
**REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFIA**

- (1) AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY (1985), "Environmental and - natural resource Mathematics" AMS, Providence Rh.I.
- (2) AMERICAN PUBLIC WORKS ASSOCIATION (1976), "Tratamiento de residuos urbanos", Inst. Est. Adm. Local, Madrid.
- (3) AMERICAN PUBLIC WORKS ASSOCIATION (1975) "Control de Calidad y tratamiento de agua", Inst. Est. Adm. Local, Madrid.
- (4) ARMSTRONG, J. et al. (1981) "Ocean Management", Ann Arbor Science, Ann Arbor, Michigan.
- (5) AUBREY, D. (1986), Hydrodynamic control on sediment transport in well-mixed bays and estuaries. *Lect. N.Coast. Estuar. Studies*, 16. (245-258)
- (6) BAUMOL, W. y OATES, W. (1988), "The theory of environmental policy", Cambridge University Press.
- (7) BENNET, R. (1979), "Spatial time series", Pion Press, London.
- (8) BENNET, R. y TAN, K. (1984), "Optimal control of spatial - systems", Allen Unwin, London.
- (9) BERRY, J. et al. (eds.) (1984), "Teaching and applying mathematical modelling", Ellis Horwood, Chichester.
- (10) BRAAT, L. y VAN LIEROP, W. (1986), Economic-Ecological - Modelling: An introduction to methods and applications, - *Ecological Modelling*, 31, (33-44).
- (11) BRADLEY, R. et al. (1981), "Case studies in Mathematical - Modelling", Pentech Press, London.
- (12) CABILDO INSULAR DE GRAN CANARIA (sin fecha), "Plan Director de residuos sólidos urbanos", Las Palmas de Gran Canaria.

- (13) CANOVAS, J. (1980) "Calidad agronómica de las aguas de riego", Ed. del autor, Madrid.
- (14) CEDOC (1987), "Estadísticas básicas de Canarias 1980-1985", Las Palmas de Gran Canaria.
- (15) CHANLETT, E. (1976) "La protección del medio ambiente", - Inst. Est. Adm. Local, Madrid.
- (16) CHATFIELD, C. (1980), "The analysis of time series", Chapman and Hall, London.
- (17) CLARKE, R. (ed.) (1986) "The handbook of ecological monitoring", Oxford University Press.
- (18) COMISION MUNDIAL DEL MEDIO AMBIENTE Y DESARROLLO (1987) - "Nuestro futuro común", Alianza Ed. Madrid.
- (19) COMUNIDAD DE MADRID (1987) "Programa coordinado de actuación de residuos sólidos urbanos", Madrid.
- (20) COX, D. y MILLER, H. (1965), "The theory of stochastic processes", Chapman and Hall, London.
- (21) CRAVEN, D. et al. (1986) Fine-scale vertical distributions of microbial biomass, *Deep-Sea Res.*, 33, (379-390).
- (22) CULLEN, M. (1985), "Linear models in biology", Ellis - Horwood, Chichester.
- (23) DEGREMONT (1979) "Manual técnico del agua", Bilbao.
- (24) DIPUTACION DE VALENCIA (1986), "Curso de tecnología y educación medio-ambiental", Valencia.
- (25) DYM, C. y IVEY, E. (1980), "Principles of mathematical modelling", Academic, New York.

- (26) ESTRADA, P. (1986), "Manual de control analítico de la potabilidad", Díaz de Santos, Madrid.
- (27) FIFE, P. (1979), "Mathematical aspects of reacting and diffusing systems", Springer Verlag, Berlin.
- (28) FITZGIBBON, W. (1984), A two-dimensional model for turbulence, en LAKHSMIKANTHAM (ed.) *"Trends in theory and practice of nonlinear differential equations"*, Dekker, New York.
- (29) FORMAN, R. y GODRON, M. (1986), "Landscape Ecology", Wiley, New York.
- (30) GAMRASNI, M. (1985), "Aprovechamiento agrícola de aguas negras urbanas", Limusa, México.
- (31) GARCIA, R. (1982), "Modelos estocásticos para la predicción de contaminantes y otras variables meteorológicas", Tesis, Universidad Complutense de Madrid.
- (32) GARDINER, C. (1983), "Handbook of stochastic methods", Springer Verlag, Berlin.
- (33) GERSHMAN, BRICKNER & BRATTON INC. (1986), "Small-scale municipal solid waste energy recovering systems", Van Nostrand, New York.
- (34) GLYSON, E. et al. (1986) "Computerization in the water and wastewater fields", Lewis Publishers, Chelsea, Mich.
- (35) GOTTINGER, H. (1986), A computational model for solid waste management with applications. *Appl. Math. Modelling*, 10, (330-338).
- (36) GROSS, M. (1982), "Oceanography, a view of the Earth", Prentice-Hall, Englewood Cliffs.

- (37) HARRIS, C. (ed.) (1979) "Mathematical modelling of turbulent diffusion in the environment", Academic, London.
- (38) HERNANDEZ, E. y GARCIA R. (1985), "Problemas y perspectivas del tratamiento estocástico de la contaminación", Junta de Castilla y León, Valladolid.
- (39) HERNANDEZ, J. (1987), "Modelo bidimensional de advección-difusión de contaminantes", Tesis, Universidad de La Laguna.
- (40) HIGASHI, M. (1986), Residence time in constant compartmental ecosystems. *Ecological Modelling*, 32, (243-250).
- (41) HUGHES, T. y MARSDEN, J. (1976), "A short course in fluid mechanics", Publish or Perish, Berkeley.
- (42) ICONA-MOPU (1982), "Coloquio hispano-francés sobre espacios litorales", Serv. Publ. Agrarias, Madrid.
- (43) IGME (1984), "Protección de las aguas subterráneas en los abastecimientos urbanos", Ministerio de Industria y Energía, Madrid.
- (44) IGME (varios años), "Mapa de orientación al vertido de residuos sólidos urbanos", Madrid.
- (45) KINSMAN, B., et al. (1986), "Transport processes in estuaries", *Special Report 6*, Mar. Sci. Res. Center, SUNY at Stony Brook.
- (46) KOPCHENOVA, N. y MARON, I. (1981) "Computational Mathematics", Mir, Moscú.
- (47) KREBS, C. (1986), "Ecología", Omega, Barcelona.

- (48) LAX, M. (1980), Approximate solutions of random differential and integral equations, en ADOMIAN (Ed.), *Applied Stochastic Processes*, Academic, New York.
- (49) LESLIE, D. (1973), "Developments in the theory of turbulence", Oxford University Press.
- (50) Lighthill, H. (1986), "An informal introduction to theoretical fluid mechanics", Oxford University Press.
- (51) LOCHARD, J. et al. (1981), "L'effet de site sur l'impact des radionucléides rejetés dans le milieu marin", Int. Atomic Energy Agency, Viena.
- (52) LORA, F. y MIRO, H., (1978), "Técnicas de defensa del medio ambiente", Labor, Barcelona.
- (53) MAC-21 (varios años) "Informe sobre recursos hidráulicos en Canarias", Madrid.
- (54) MARGALEF, R. (1972), "Ecología", Omega, Barcelona.
- (55) MARKATOS, N. (1986), The mathematical modelling of turbulent flows, *Appl. Math. Modelling*, 10, (190-220).
- (56) MARSHALL, N. (1986), Marine Ecosystems, en POLUNIN (ed.), *Ecosystem theory and applications*, Academic, New York.
- (57) MAY, R. (ed.) (1976), "Theoretical ecology, principles and applications", Blackwell, Oxford.
- (58) MAYNARD-SMITH, J. (1970), "Mathematical models in ecology", Cambridge University Press.
- (59) METCALF-EDDY INC. (1985), "Ingeniería sanitaria", Labor, Barcelona.



- (60) MOPU (1981), "Gestión de residuos sólidos", Madrid.
- (61) MOPU/CEDEX (varios años), "Curso sobre tratamiento de aguas residuales y explotación de depuradoras", Madrid.
- (62) MOPU/CEOTMA (1981), "Plan director para la gestión de residuos sólidos de la Comunidad autónoma de Murcia". Ed. del Consejo Regional de Murcia.
- (63) MUGA, B. y WILSON, J. (1970), "Dynamic analysis of ocean - structures", Plenum Press, New York.
- (64) NEUMANN, G. y PIERSON, W. (1969), "Principles of physical oceanography", Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- (65) OKUBO, A. (1980), "Diffusion and ecological problems: - Mathematical models", Springer Verlag, Berlin.
- (66) OKUBO, A. et al. (1982), "A Lagrangian and Eulerian diffusion study in the coastal surface layers", *Special Report 46*, Mar. Sci. Res. Center, SUNY at Stony Brook.
- (67) ONISHI, S. (1986), Roles of large-scale eddies mass exchange between coastal and oceanic zones, *Lect. N. Coast. Estuar. Studies*, 16, (168-179).
- (68) OTERO, L. (1988), "Residuos sólidos urbanos", MOPU, Madrid.
- (69) PACHECO, J. y ROMERO, J. (1987), "Ecuaciones diferenciales estocásticas", Curso Monográfico de Doctorado (notas propias), Las Palmas.
- (70) PACHECO, J. y FERNANDEZ, I. (1988), Modelling and computing settling times for suspended particles in the ocean, en - ZIENKIEWICZ y SCHREFLER (eds.) *Computer Modelling in Ocean - - Engineering*, A.A. Balkema, Rotterdam (369-376).

- (71) PACHECO, J. y FERNANDEZ, I. (1988), El reciclado de aguas como conjunto de problemas de control, *Tecnología del agua*, 44 (19-24).
- (72) PACHECO, J., FERNANDEZ, I. y RODRIGUEZ, C. (1986), "Informe sobre el abastecimiento de agua a la ciudad de Las Palmas", presentado al Concurso Internacional de Ideas "Agua 2000", Las Palmas de Gran Canaria.
- (73) PADILLA, I. (1988), "Archivo de artículos sobre medio ambiente en Canarias", Colección del Departamento de Matemáticas en la Facultad de Ciencias del Mar.
- (74) PADGETT, W. et al., (1977), A random differential equation approach to the probability distribution of BOD and DO in streams, *SIAM J. Appl. Math.*, 32-2, (467-483).
- (75) PIELOU, E. (1969), "An introduction to mathematical ecology", Wiley, New York.
- (76) POND, S. y PICKARD, G. (1978), "Introductory dynamical oceanography", Pergamon, Oxford.
- (77) RAYNEY, R. (1969), Natural Displacements of pollution for the Great Lakes, *Science*, 155, (1242-1243).
- (78) RINALDI, S. (ed.) (1982), "Environmental Systems Analysis and Management", North-Holland, Amsterdam.
- (79) RISKEN, H. (1984), "The Fokker-Planck equation", Springer Verlag, Berlin.
- (80) ROBERTS, R. y ROBERTS, T. (1984), "Planning and Ecology", Chapman Hall. London.

- (81) ROBINSON, W. (ed.) (1986), "The solid waste handbook", -  
Wiley, New York.
- (82) RODRIGUEZ, C. y PACHECO, J. (1988), Un modelo matemático  
para la estimación del tamaño de manchas de contaminantes  
en el océano, *Actas de las Jornadas Matemáticas Hispano-Lusas*, (en  
prensa). Valladolid.
- (83) SAATY, T. y ALEXANDER, J. (1981), "Thinking with models",  
Pergamon, Oxford.
- (84) SALMON, R. (1986), A simplified ocean circulation theory.  
*J. Mar. Res.*, 44, (695-711).
- (85) SCOTT, J. et al. (1980), "Dictionary of waste and water -  
treatment", Butterworths, London.
- (86) SERRA, R. et al. (1986), "Physics of complex systems", -  
Pergamon, Oxford.
- (87) SIEBERT, H. (1987), "Economics of the environment", Sprin-  
ger, Berlin.
- (88) SIOLI, H. et al. (1982), "Ecología y protección de la natu-  
raleza", Blume, Barcelona.
- (89) SISSONS, C. et al. (1986), A new approach to the mathema--  
tical modellig of biodegradation processes, *Appl. Math. Mo-  
delling*, 10, (33-40).
- (90) SPLIID, H. et al. (1982), Empirical models for the spread  
of spills in marine environments, en ANDERSON (ed.) *Time  
series analysis*, 1, North-Holland, Amsterdam.
- (91) TAKEUCHI, Y. y ADACHI, N. (1986), Dynamics and stability -  
of ecological models, *Ecological Modelling*, 32, (95-104).

- (92) TIJMS, H. (1986), "Stochastic Modelling and analysis", Wiley Chichester.
- (93) UNITED STATES DEPARTMENT OF COMMERCE (1981), "Report to the Congress on Ocean Dumping Monitoring and Research", - Washington.
- (94) VALADARES, L. y DA SILVA, E. (eds.), (1986), "Systems - analysis applied to water and related land resources", - Pergamon, Oxford.
- (95) VESILIND, P. et al. (1986), "Sludge management and disposal" Lewis Publishers, Chelsea, Mich.
- (96) VICTORIA, F. y RUBIO, J. (1982), "La gestión de los resi-- duos sólidos en la región de Murcia", Ed. de la Conseje-- ría de Política Territorial e Infraestructura, Murcia.
- (97) WESTMAN, W. (1985), "Ecology, Impact Assessment, and Envi-- ronmental Planning", Wiley, New York.
- (98) WEYL, P. (1982), Simple information systems for coastal zo ne management, *Coast. Z. Man. J.*, 9, (155-182).
- (99) WINKLER, M. (1986), "Tratamiento biológico de las aguas de desecho", Limusa, México.

NOTA: La ilustración de la página 5 es una vista de la costa nor te de Gran Canaria en Bañaderos (El Puertillo). Al fondo, la montaña de Gáldar-Guía. (Fotografía de la autora).