

**UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA**  
**DEPARTAMENTO DE MÉTODOS CUANTITATIVOS EN ECONOMÍA Y**  
**GESTIÓN**



**TESIS DOCTORAL**

**PROBLEMAS DE EQUILIBRIO EN MODELOS DE**  
**COMPETENCIA ESPACIAL EN REDES**

**PABLO DORTA GONZÁLEZ**

Las Palmas de Gran Canaria, Septiembre de 2000

**Título de la tesis:**

***PROBLEMAS DE EQUILIBRIOS EN MODELOS DE  
COMPETENCIA ESPACIAL EN REDES***

**Thesis title:**

***EQUILIBRIUM PROBLEMS IN NETWORK SPATIAL  
COMPETITION MODELS***

## **EQUILIBRIUM PROBLEMS IN NETWORK SPATIAL COMPETITION MODELS**

**by Pablo Dorta-González**

In this book we revise the problems of spatial competition. An extension of certain network spatial games, analysing different scenarios, comparing results and studying the existence and uniqueness of equilibrium is presented. The term spatial game is used to refer to those problems of spatial competition, in which a number of firms try to enter and compete in a market where established firms do not exist, deciding on the location of its services and pricing policy or the level of production. Equilibrium analysis allows us to establish a situation which none of the firms wishes to modify.

Chapter 1 introduces the most important characteristics, which differentiate the spatial competition models treated in literature.

Chapter 2 compiles the classical models of competition and introduces non-cooperative games, some types of equilibrium solutions and results related to their existence and uniqueness.

Chapter 3 studies a spatial game in which two competing firms supply the same product in a spatially separated market. The equilibrium solutions to different scenarios (depending on either quantity or price competition, elastic or totally inelastic demand with respect to price, and various conjectures in relation to how different firms believe their competitors will react) are analysed and compared.

In Chapter 4, the models of the previous chapter are extended to the oligopoly. In both of these chapters (Chapters 3 and 4) a two-stage game where the firms compete in location anticipating subsequent competition in price or quantity, is considered.

In Chapter 5, negative externalities are introduced by considering a model in which each individual consumer is affected by actions carried out by the others. In these cases, apart from the price and the cost of transport, consumers must take into account a cost associated to the effect of the externality. Two scenarios are analysed: one in which the users take joint decisions minimising the aggregate costs to obtain a Pareto optimal allocation, and another where the users take individual decisions obtaining a Nash equilibrium.

Finally, Chapter 6 is dedicated to conclusions and possible future fields of study.

Dña. DOLORES ROSA SANTOS PEÑATE, Titular de la Universidad de las Palmas de Gran Canaria,

CERTIFICA: Que la presente memoria, titulada **“Problemas de equilibrio en modelos de competencia espacial en redes”** ha sido realizada bajo mi dirección en el Departamento de Métodos Cuantitativos en Economía y Gestión, por el Licenciado D. Pablo Dorta González, y constituye su Tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Económicas y Empresariales por la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.

Y para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente y a los efectos oportunos, firmo la presente en Las Palmas de Gran Canaria, a veinticinco de Septiembre de 2001.

Fdo.: Dolores Rosa Santos Peñate

Quiero expresar todo mi agradecimiento a la profesora Dolores Rosa Santos Peñate por su enorme trabajo en la dirección de esta memoria, la gran cantidad de tiempo que le ha dedicado y la extraordinaria paciencia que ha tenido, permitiéndome iniciarme en el complejo mundo de la investigación, hecho que hubiera sido imposible sin su respaldo y apoyo.

También quiero agradecer a todos los miembros del Departamento de Métodos Cuantitativos en Economía y Gestión que me han ayudado de una u otra forma. De manera expresa quiero agradecer a Rafael Suárez Vega por toda su ayuda a lo largo de los años que hemos compartido despacho, trabajo y tertulias.

Finalmente, quiero recordar a mi familia, en particular a mi hermana M<sup>a</sup> Isabel, y a mis amigos por su cariño y apoyo.

# Contenido

0.1	Notación . . . . .	9
0.2	Prólogo . . . . .	13
<b>1</b>	<b>Introducción</b> . . . . .	<b>17</b>
1.1	Representación espacial . . . . .	20
1.2	Objetivo y variables de decisión . . . . .	21
1.3	Política de precios . . . . .	23
1.4	Coste de transporte . . . . .	25
1.5	La demanda . . . . .	25
1.6	Estructura del mercado . . . . .	27
1.7	Reglas del juego . . . . .	28
1.8	Conjeturas de las empresas . . . . .	30
1.9	Comportamiento de los consumidores . . . . .	30
1.10	Externalidades . . . . .	32
<b>2</b>	<b>Modelos clásicos de competencia y nociones básicas</b> . . . . .	<b>35</b>
2.1	Modelos clásicos de competencia . . . . .	36
2.1.1	Modelos de Cournot y Stackelberg . . . . .	36
2.1.2	Modelos de Bertrand y Edgeworth . . . . .	41
2.1.3	Modelo de Hotelling . . . . .	42
2.2	Nociones y resultados básicos . . . . .	48
2.2.1	Redes . . . . .	49
2.2.2	Juegos . . . . .	51
2.2.3	Resultados generales de convexidad . . . . .	60
<b>3</b>	<b>Juego espacial duopolístico</b> . . . . .	<b>63</b>
3.1	Formulación . . . . .	64
3.2	Precios fijados e iguales . . . . .	66
3.3	Competencia en cantidades . . . . .	70
3.3.1	Modelo de Stackelberg en cantidades . . . . .	70
3.3.2	Modelo líder-líder en cantidades . . . . .	76
3.3.3	Análisis comparativo entre escenarios . . . . .	80
3.4	Competencia en precios . . . . .	83

3.4.1	Demanda totalmente inelástica . . . . .	83
3.4.2	Demanda elástica al precio. El caso lineal . . . . .	89
3.4.3	Análisis comparativo entre escenarios . . . . .	97
3.5	Resultados en la segunda etapa: cantidad frente a precio . . . . .	98
3.6	Efecto renta . . . . .	99
3.7	Ejemplo . . . . .	100
<b>4</b>	<b>Juego espacial oligopolístico</b>	<b>103</b>
4.1	Precios fijados e iguales . . . . .	103
4.2	Competencia en cantidades . . . . .	106
4.2.1	Equilibrio localización-cantidad . . . . .	107
4.2.2	Equilibrio localización-cantidad con demanda lineal . . . . .	119
4.3	Competencia en precios . . . . .	131
4.3.1	Demanda totalmente inelástica al precio . . . . .	131
4.3.2	Demanda elástica al precio. El caso lineal . . . . .	135
4.4	Comparación de resultados entre duopolio y oligopolio . . . . .	139
4.5	Ejemplos . . . . .	141
4.5.1	Equilibrio localización-cantidad . . . . .	141
4.5.2	Equilibrio localización-precio . . . . .	143
<b>5</b>	<b>Juego espacial duopolístico con externalidades</b>	<b>147</b>
5.1	Formulación general . . . . .	149
5.2	Equilibrio localización-precio con asignación de Pareto . . . . .	150
5.2.1	Asignaciones óptimas de Pareto . . . . .	150
5.2.2	Equilibrio localización-precio para $n = 1$ . . . . .	159
5.2.3	Equilibrio localización-precio para $n > 1$ . . . . .	173
5.2.4	Extensiones . . . . .	214
5.2.5	Ejemplos . . . . .	223
5.3	Equilibrio localización-precio con asignación de Nash . . . . .	232
5.3.1	Equilibrio de Nash en asignaciones . . . . .	232
5.3.2	Equilibrio en precios . . . . .	238
5.3.3	Equilibrio en localización para $n = 1$ . . . . .	240
<b>6</b>	<b>Conclusiones y posibles extensiones</b>	<b>243</b>

# Lista de figuras

2.1	Diferentes equilibrios en competencia vía cantidades . . . . .	40
2.2	Representación espacial considerada por Hotelling . . . . .	43
2.3	Ejemplo de una función cuasicóncava que no es cóncava . . . . .	53
3.1	Red con $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ . . . . .	67
3.2	Red con $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_4 = 1, \lambda_3 = 3$ . . . . .	67
3.3	Red con $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 0$ . . . . .	68
3.4	Red con $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1, \lambda_5 = \lambda_6 = 0$ . . . . .	69
4.1	Arbol con $\lambda_1 = 40, \lambda_2 = 30, \lambda_3 = 30, \lambda_4 = 10$ . . . . .	105
4.2	Red con 6 nodos . . . . .	116
4.3	Arboles con 9 y 11 nodos . . . . .	142
4.4	Arbol con $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$ . . . . .	143
5.1	Cuota de mercado óptima de Pareto . . . . .	157
5.2	Cuotas de mercado en equilibrio . . . . .	160
5.3	Regiones de definición del beneficio cuando $n = 1$ . . . . .	161
5.4	Arbol con $\lambda_4 = 3, \lambda_k = 0, k = 1, 2, 3, 5$ . . . . .	173
5.5	Red con $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 2, \lambda_5 = 2, \lambda_6 = 1$ . . . . .	175
5.6	El conjunto $\mathfrak{S}$ . . . . .	177
5.7	Función de beneficios de la firma $A$ para $p_B$ fijo . . . . .	181
5.8	El conjunto $\chi$ . . . . .	192
5.9	Precios de equilibrio en $R_j$ . . . . .	196
5.10	Red con 4 nodos . . . . .	224
5.11	Beneficio de la firma $A$ para diferentes valores de $p_B$ . . . . .	226
5.12	Regiones consideradas en el ejemplo . . . . .	227
5.13	Arbol con $\lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5, \lambda_4 = 7$ . . . . .	230
5.14	Arbol con $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 3$ . . . . .	230

# Lista de tablas

2.1	Matriz de pagos de un juego con dos equilibrios de Nash y una sólo estrategia no dominada . . . . .	57
2.2	Características de algunos juegos espaciales . . . . .	59
3.1	Resultados para la competencia en cantidades . . . . .	81
3.2	Beneficios en los nodos con precio colusivo . . . . .	97
3.3	Resultados para la competencia en precios y $c_A^k < c_B^k < a_k$ . . . . .	98
3.4	Resultados para demanda elástica y $c_A^k < c_B^k$ . . . . .	99
3.5	Localizaciones de equilibrio con competencia en cantidades . . . . .	101
3.6	Localizaciones de equilibrio con competencia en precios . . . . .	101
3.7	Precios y elasticidades en el equilibrio . . . . .	102
4.1	Coste de transporte entre vértices en la figura 4.2 . . . . .	117
4.2	Cantidades de equilibrio y beneficios para distintas localizaciones en vértices de la figura 4.2 . . . . .	118
4.3	Beneficio de las firmas (en columnas) en $v_k$ , $k = 1, 2, 3$ , en la figura 4.3 (a) . . . . .	143
4.4	Beneficio de las firmas (en columnas) en $v_k$ , $k = 1, 2, 3$ , en la figura 4.3 (b) . . . . .	144
4.5	Coste social en los vértices de la figura 4.4 . . . . .	144
4.6	Demanda captada por las firmas (en columnas) en los vértices de la figura 4.4 . . . . .	145
5.1	Beneficios para cada par de nodos de la figura 5.4 . . . . .	174
5.2	Beneficios para cada par de localizaciones factibles de la figura 5.5 . . . . .	176
5.3	Equilibrios parciales en cada región . . . . .	226
5.4	Coordenadas de los puntos $C_j$ y $D_j$ . . . . .	227
5.5	Precio de mejor respuesta y beneficio asociado en cada región . . . . .	228
5.6	Beneficios asociados a los equilibrios globales . . . . .	229

## 0.1 Notación

A continuación se encuentra una lista con los principales símbolos que aparecen en la memoria. En la primera columna se muestra la notación empleada y en la segunda una pequeña descripción.

$N(V, E)$	red
$T(V, E)$	árbol
$V = \{v_k\}_{k=1}^n$	conjunto de nodos de $N$ o $T$
$n$	$ V $
$E$	conjunto de aristas de $N$ o $T$
$[u, v]$	arista con extremos $u$ y $v$
$A, B$	firmas competidoras en un duopolio
$L, S$	firmas líder y seguidora, respectivamente
$i$	firma genérica
$r$	número de firmas en un oligopolio
$x_i$	localización de la firma $i$
$p_i^k$	precio que fija la firma $i$ en $v_k$
$p_i = (p_i^1, \dots, p_i^r)$	vector de precios de la firma $i$
$q_i^k$	cantidad que suministra la firma $i$ en $v_k$
$q_i = (q_i^1, \dots, q_i^r)$	vector de producción de la firma $i$
$q^k = \sum_{i=1}^r q_i^k$	cantidad total ofrecida en $v_k$
$P = (p_i^k)_{i=1, \dots, r; k=1, \dots, n}$	matriz de precios en un oligopolio
$Q = (q_i^k)_{i=1, \dots, r; k=1, \dots, n}$	matriz de producción en un oligopolio
$X = (x_1, \dots, x_r)$	vector de localizaciones en un oligopolio
$\pi_i^k$	beneficio bruto de la firma $i$ en $v_k$
$F_i$	coste fijo de la firma $i$
$\pi_i = \sum_{k=1}^n \pi_i^k - F_i$	beneficio neto de la firma $i$
$C'_i(x_i)$	coste marginal de la firma $i$ localizada en $x_i$
$\delta_{xy} = \delta(x, y)$	distancia de $x$ a $y$ en la red
$t_i^k(x_i) = t_i(\delta_{x_i v_k})$	coste de transporte unitario de la firma $i$
$c_i^k(x_i) = C'_i(x_i) + t_i^k(x_i)$	coste unitario de la firma $i$ en $v_k$
$c_i^k = C'_i + t_i^k$	notación empleada para $x_i$ fija
$t_k(x_i)$	coste de transporte unitario con precio f.o.b.
$t_{ki} = t_k(x_i)$	notación empleada para $x_i$ fija
$t_{BA} = t_{kB} - t_{kA}$	diferencia de costes de transporte

$\Gamma(I, S, \Pi)$	juego
$I = \{1, \dots, l\}$	conjunto de jugadores
$S = S_1 \times \dots \times S_l$	espacio de estrategias
$s_i$	estrategia del jugador $i$
$\Pi = (\Pi_1, \dots, \Pi_l)$	vector de pagos
$p^k(q^k) = a_k - b_k q^k$	función inversa de demanda lineal en $v_k$ ; $0 \leq q^k \leq \frac{a_k}{b_k}$
$q^k(p^k) = \alpha_k - \beta_k p^k$	función de demanda lineal en $v_k$ ; $0 \leq p^k \leq a_k$
$a_k > 0$	disposición a pagar de los consumidores en $v_k$
$b_k > 0$	
$\alpha_k = \frac{a_k}{b_k}$	
$\beta_k = \frac{1}{b_k}$	
$\epsilon_k = \frac{dq^k/dp^k}{q^k/p^k}$	elasticidad-precio de la demanda en $v_k$
$\lambda_k$	demanda totalmente inelástica en $v_k$
$\Lambda = \sum_{k=1}^n \lambda_k$	demanda total
$\lambda_{ki}$	parte de demanda de $v_k$ cubierta por la firma $i$
$\Lambda_i$	cuota de mercado de la firma $i$
$E_i(\Lambda_i)$	función de coste unitario de externalidad de la firma $i$
$c_i > 0$	coste unitario de externalidad lineal de la firma $i$
$E_i(q) = q^2 + d_i q$	coste de externalidad cuadrático de la firma $i$

$$\Delta_k = t_{kB} + p_B - t_{kA} - p_A, \quad k = 1, \dots, n$$

$$\Delta_n < \Delta_{n-1} < \dots < \Delta_2 < \Delta_1$$

$$\Delta_0 = +\infty, \quad \Delta_{n+1} = -\infty$$

$$f_j = \sum_{k=1}^j \lambda_k, \quad j = 1, \dots, n, \quad f_0 = 0$$

$$L_j = t_{jB} - t_{jA} + 2e_B \Lambda - 2(e_A + e_B) f_j, \quad j = 1, \dots, n$$

$$T_{j-1} = t_{jB} - t_{jA} + 2e_B \Lambda - 2(e_A + e_B) f_{j-1}, \quad j = 1, \dots, n$$

$$L_j^N = t_{jB} - t_{jA} + 2(e_A + 2e_B) \Lambda - 6(e_A + e_B) f_j, \quad j = 1, \dots, n$$

$$T_{j-1}^N = t_{jB} - t_{jA} + 2(e_A + 2e_B) \Lambda - 6(e_A + e_B) f_{j-1}, \quad j = 1, \dots, n$$

$$\mathfrak{S} = \{(p_A, p_B) \in \mathfrak{R}^2 : p_A \geq C'_A, p_B \geq C'_B\}$$

$$R_j = \mathfrak{S} \cap \{(p_A, p_B) \in \mathfrak{R}^2 : L_j \leq p_A - p_B \leq T_{j-1}\}, \quad j = 1, \dots, n$$

$$S_j = \mathfrak{S} \cap \{(p_A, p_B) \in \mathfrak{R}^2 : T_j \leq p_A - p_B \leq L_j\}, \quad j = 1, \dots, n-1$$

$$S_0 = \mathfrak{S} \cap \{(p_A, p_B) \in \mathfrak{R}^2 : p_A - p_B \geq T_0\}$$

$$S_n = \mathfrak{S} \cap \{(p_A, p_B) \in \mathfrak{R}^2 : p_A - p_B \leq L_n\}$$

$$\mathcal{X} = \{(p_A, p_B) \in \mathfrak{R}^2 : p_A \geq C'_A, p_B \geq C'_B, p_A + p_B \leq K\}$$

$$K = C'_A + C'_B + 2\Lambda(e_A + e_B)$$

$$C_j = \left(\frac{1}{2}(K + L_j), \frac{1}{2}(K - L_j)\right), \quad j = 1, \dots, n$$

$$D_j = \left(\frac{1}{2}(K + T_{j-1}), \frac{1}{2}(K - T_{j-1})\right), \quad j = 1, \dots, n$$

$$C_0 = (K - C'_B, C'_B)$$

$$D_{n+1} = (C'_A, K - C'_A)$$

## 0.2 Prólogo

La finalidad de esta memoria es la revisión de los problemas de competencia espacial y la extensión de determinados juegos espaciales en redes, analizando diferentes escenarios, comparando resultados y estudiando la existencia y unicidad del equilibrio. Se analiza el duopolio y el oligopolio, modelando el proceso de competencia como un juego.

Los juegos desempeñan un importante papel en la toma de decisiones. En esta memoria se utiliza el término juego espacial para referirse a aquellos problemas de competencia en los cuales un número dado de empresas pretenden entrar a competir en un mercado donde no existen empresas establecidas, decidiendo las ubicaciones de sus servicios y la política de precios o la producción. El análisis del equilibrio permite determinar una situación que ninguna empresa tiene incentivo a modificar mientras no se produzcan cambios en las condiciones del problema, lo que debe tenerse en cuenta en la toma de decisiones. En aquellos mercados en los que existen empresas operando, estos juegos permiten conocer aquella situación a la que previsiblemente conducirá la competencia, al menos si los costes irrecuperables no son tan importantes como para impedir la relocalización. Además, el equilibrio del juego constituye una situación de referencia respecto de la cual evaluar las situaciones presentes.

Existen numerosas aplicaciones de los juegos espaciales. El comercio internacional entre grandes ciudades conectadas por vías rápidas de comunicación, constituye una aplicación en mercados separados espacialmente de los que se habla en los capítulos 3 y 4. Los mercados en los cuales suelen producirse colas constituyen un marco de aplicación del modelo del capítulo 5. En estos casos, el equilibrio de Nash en asignaciones es una solución razonable para servicios privados, mientras que el óptimo de Pareto se adapta mejor a servicios públicos. Un ejemplo del primer escenario puede encontrarse en el servicio de restauración de comida rápida, en el cual los usuarios consideran, además del precio y los costes de desplazamiento, el tiempo de espera para ser atendido, al cual se le puede asociar un valor monetario. Un ejemplo del segundo escenario lo constituye el servicio público de salud, en el que ciertas clínicas privadas realizan intervenciones costeadas por la administración, cuya finalidad es la reducción de las listas de espera en ciertas especialidades. En este caso, el objetivo del servicio de salud es la minimización del coste agregado.

Los juegos espaciales se engloban dentro de los problemas de competencia espacial. El término competencia espacial puede ser identificado con el de localización competitiva. Mientras que el primero es más frecuente en Economía Industrial, el segundo suele ser más utilizado en el ámbito de la Investigación Operativa. Se consideran decisiones de localización, de fijación de precios y de niveles de producción, para un número de firmas competidoras que han de proporcionar bienes o servicios a un conjunto de consumidores o usuarios. La

Economía Industrial constituye un importante campo de investigación de la teoría económica y estudia el funcionamiento de los mercados. Los problemas de localización han sido objeto de estudio durante siglos, pero no fue hasta el desarrollo de la Investigación Operativa, a partir de la Segunda Guerra Mundial, cuando estos problemas tomaron mayor relevancia. Son muchas las disciplinas en las que se estudia este tipo de problemas. Economistas, matemáticos, geógrafos, ingenieros, informáticos y arquitectos tienen un interés común en la teoría de localización y no es extraño que se haya dedicado grandes esfuerzos al estudio del problema de la mejor ubicación de plantas de producción, centros de distribución, puntos de venta al por menor, centros de socorro, servidores en una red de ordenadores, componentes de una planta de producción en serie, centros de recogida y tratamiento de residuos, o cualquier otra cosa de cuya ubicación dependiera el cumplimiento de unos objetivos económicos o sociales.

En esta memoria se estudian modelos de competencia espacial considerando situaciones distintas. Se analizan dos tipos de competencia, Cournot y Bertrand, se estudian demandas elásticas e inelásticas al precio, y se establecen tres tipos de conjeturas respecto al modo en que reaccionarán las firmas competidoras. El supuesto más común en la literatura es la conjetura nula, según la cual cada empresa asume que sus competidoras no reaccionarán a cambios en su precio o producción; este supuesto se corresponde con el equilibrio de Nash. Otro supuesto es el del líder-seguidor, según el cual una empresa es líder y adelanta la reacción de las seguidoras; este supuesto corresponde al equilibrio de Stackelberg. Finalmente, todas las firmas pueden adoptar conjeturas no nulas y adelantar las reacciones de sus competidoras. Se establecen dos escenarios básicos, uno en el cual la decisión de cada usuario no tiene repercusión en el resto (ausencia de externalidad) y otro donde cada usuario sufre el efecto de las decisiones de los demás (presencia de externalidad).

A continuación, se detalla el contenido de la memoria. En el capítulo 1 se define el problema general de competencia espacial y se señalan las características más importantes que diferencian a los modelos tratados en la literatura. Un importante número de trabajos que abordan estos problemas se basan en modelos clásicos de competencia como los de Cournot, Bertrand, Stackelberg y Hotelling, entre otros. En muchos trabajos se argumentan cuestiones relacionadas con los equilibrios para estos modelos que representan, desde el punto de vista teórico, el comportamiento de las empresas en el mercado. Por estos motivos, en el capítulo 2 se recopilan los modelos clásicos de competencia y los resultados que de ellos se derivan. Además, se introducen los juegos no cooperativos, algunas soluciones de equilibrio y resultados de existencia y unicidad de soluciones, que serán empleados en los capítulos posteriores.

En el capítulo 3 se señalan algunos resultados conocidos cuando los precios están fijados y coinciden entre empresas. Con posterioridad, se estudia un juego

espacial en el que dos firmas competidoras suministran un mismo producto en un mercado separado espacialmente. El supuesto general de la existencia de una única curva de demanda y, en consecuencia, un único precio de mercado, igual para todos los consumidores, no es válido para este tipo de mercados. En estos casos, suele admitirse la existencia de una curva de demanda para cada mercado y es bastante común la discriminación espacial de precios, que consiste en vender unidades iguales de un mismo bien a precios distintos. Bajo estos supuestos, se estudian y comparan las soluciones de equilibrio para diferentes escenarios, según la competencia sea vía cantidades o precios, la demanda sea elástica o totalmente inelástica al precio, y distintas conjeturas para las empresas.

El análisis empieza con el duopolio, extendiéndose con posterioridad al oligopolio en el capítulo 4. En ambos capítulos se considera un juego en dos etapas y el concepto de equilibrio subjuego-perfecto (Selten, 1975), asumiendo que las firmas compiten en localización en la primera etapa, anticipando la posterior competencia en precios -o cantidades- de la segunda etapa. Se trata de un supuesto común en este tipo de modelos donde la competencia involucra más de una variable de decisión. Es un equilibrio para el juego porque no son creíbles cambios de localización en la segunda etapa debido a los costes irre recuperables asociados a cada ubicación (Vives, 1988, p.11).

En el capítulo 5 se introducen externalidades negativas, considerando un problema en el que cada consumidor o usuario sufre los efectos de las acciones de los demás. En estos casos, además del precio y el coste de transporte, los consumidores deben tener en cuenta un coste asociado al efecto de la externalidad. Un ejemplo de externalidad negativa es la congestión que se produce en determinados servicios, la cual se traduce en un coste por el tiempo de espera para ser atendido. El problema se aborda adelantando, por parte de las empresas, el equilibrio en las asignaciones de los usuarios una vez que ha terminado el proceso de decisión en dos etapas de las firmas. Se analizan dos escenarios, uno en el cual los usuarios toman las decisiones conjuntamente, minimizando el coste agregado para obtener un óptimo de Pareto, y otro donde los usuarios toman las decisiones de forma individual, obteniendo así un equilibrio de Nash. Se estudia un duopolio en el cual las empresas fijan precios en origen. Se utilizan funciones de externalidad simples con el fin de favorecer la obtención de resultados para las diferentes etapas del juego.

La sección 5.3 -decisiones individuales- está publicada en *Estudios de Economía Aplicada*, 1999. Una versión de la sección 5.2 -decisiones conjuntas- con precios de Nash ha sido publicada en la revista *Investigación Operacional*, 2000. El caso con precios de Stackelberg aparece publicado en *Studies in Locational Analysis*, 2000.

Finalmente, el capítulo 6 se dedica a algunas conclusiones y a posibles extensiones en los modelos.

# Capítulo 1

## Introducción

La *competencia espacial*, conocida también como *localización competitiva*, es un importante tema de investigación en el área de la Organización Industrial y la Ciencia Regional. En general, los modelos se centran en las decisiones de *localización*, de *fijación de precios* y *niveles de producción*, y de otras características relacionadas con los centros de servicio, que tienen que realizar una o varias empresas (firmas competidoras) que quieren entrar o están operando en un mercado espacial, ofreciendo productos o servicios a un conjunto de consumidores o usuarios. El objetivo principal de estas empresas es la maximización de los beneficios o la cuota de mercado. Existe una extensa literatura sobre el tema, de la cual destacamos las revisiones bibliográficas de Plastria (2001), Kilkenny y Thisse (1999), Serra y ReVelle (1995), Eiselt, Laporte y Thisse (1993), Hakimi (1990), Eiselt y Laporte (1989) y Friesz, Miller y Tobin (1988a). Labbé, Peeters y Thisse (1995) recopilan los principales resultados en redes. Eiselt y Laporte (1996a,b) ofrecen una extensa revisión del problema de Stackelberg y de los modelos que se han derivado del trabajo de Hotelling.

Además de la Economía, la Investigación Operativa y la Geografía tienen intereses comunes en el problema de competencia espacial. Sin embargo, en palabras de Eiselt y Laporte (1996b, p.64) “los economistas se han centrado en la búsqueda de equilibrios, su existencia y unicidad, mientras que los investigadores operativos han estado más interesados en la optimización de la localización.”

El trabajo de Cournot publicado en 1838, constituye la primera discusión formal sobre un problema de competencia, al considerar un modelo de duopolio donde las empresas deciden su nivel de producción. En 1883, Bertrand introduce la competencia vía precios como una alternativa a la competencia vía cantidades. Sin embargo, el estudio de Hotelling (1929) constituye el primer análisis que incorpora la localización como una variable de elección determinante. En este trabajo, Hotelling estudia las estrategias de dos competidores respecto al

precio y la localización, en un mercado lineal acotado con demanda totalmente inelástica al precio y uniformemente distribuida. El modelo de Hotelling ha tenido gran trascendencia en la literatura económica, dando lugar a un importante grupo de trabajos que analizan la localización desde el punto de vista de las preferencias de los consumidores (ver Andaluz (1995) para una recopilación de trabajos en este campo). El término competencia espacial no se limita a la localización física sino que incluye también otros aspectos como la diferenciación del producto, donde el espacio geográfico pasa a ser el espacio de características, la localización del consumidor se interpreta como su variedad ideal, la localización de la empresa representa la variedad ofrecida y el coste de transporte indica la pérdida de utilidad. Posteriormente, en el capítulo 2, se tratarán con más detalle los modelos clásicos en Organización Industrial.

Scarra y ReVelle (1995, p.368) definen un modelo de *localización competitiva* como “aquel en el que existe más de una firma compitiendo en un mercado espacial con interacción entre ellas; la decisión de localización de una firma afecta no sólo a su cuota de mercado sino también a la de sus competidoras”. Por otra parte, Friesz, Miller y Tobin (1988a, p.48) lo definen como “cualquier modelo de localización que explícitamente reconozca que la localización de una firma puede afectar a su cuota de mercado”, para incluir, de esta forma, a los modelos de monopolio. Sin embargo, aunque el monopolio es una forma de organización industrial, no supone competencia entre empresas. Estas definiciones no hacen referencia explícita a las políticas de precios y a los niveles de producción, quizás porque una importante parte de la literatura existente sobre este tema asume precios iguales y fijos entre firmas. En el capítulo 3 se muestran los principales resultados conocidos para estos modelos.

Desde el punto de vista metodológico, la principal característica que diferencia los modelos de competencia espacial de otros modelos de localización es el uso de argumentos de la teoría de juegos. Un juego tiene tres componentes principales: un grupo de jugadores, un conjunto de reglas y un sistema de pagos. Los *jugadores* son los participantes en el juego. Cada uno de ellos realiza una elección o elecciones de un conjunto de alternativas de acuerdo a las *reglas del juego*, las cuales especifican claramente las posibilidades que tiene cada jugador en cada circunstancia posible. El *sistema de pagos* asigna una cantidad a cada jugador bajo cada posible realización del juego. En el capítulo 2 se incluyen algunas soluciones de equilibrio y resultados de existencia para juegos no cooperativos. Para una introducción en los juegos puede consultarse Friedman (1991) y Fudenberg y Tirole (1991). Una recopilación de las aplicaciones económicas se encuentra en Wang y Parlar (1989).

El estudio de los modelos de competencia espacial está enfocado a resolver problemas cuya forma general es la siguiente. Dado un espacio donde se distribuyen clientes, varios jugadores desean determinar las localizaciones de uno o varios centros de servicio de acuerdo a unas reglas dadas y con unos objetivos

especificados previamente (Eiselt y Laporte, 1989). El término “localización” puede entenderse en un sentido amplio, haciendo referencia no sólo a la ubicación geográfica sino también a la selección de otros valores tales como los precios (o niveles de producción) y ciertas propiedades de los centros de servicio. Un problema general de competencia espacial es el que consiste en determinar los precios (o niveles de producción) y las localizaciones de  $p$  empresas entrantes que competirán con  $q$  ya establecidas, además de entre ellas, por proveer un bien homogéneo a un mercado, teniendo en cuenta que en el futuro  $r$  nuevas empresas pueden entrar a competir. El criterio seguido suele ser la maximización de la cuota de mercado o el beneficio. Cuando  $r = 0$  se tiene el problema del *medianoide* formulado por Hakimi (1983) y el problema de captura máxima estudiado por ReVelle (1986) y Serra y ReVelle (1995). Cuando  $q = 0$  se tiene el problema del *centroide*, formulado por Hakimi (1983) y conocido también como el problema de localización con anticipación (Serra y ReVelle, 1994). Un caso donde  $q = r = 0$  es el *juego espacial*, en el cual un grupo de empresas pretenden entrar a operar en un mercado y el equilibrio se alcanza cuando ninguna de ellas tiene incentivos a modificar sus variables de decisión. Este problema ha sido estudiado para  $p = 2$  por Hotelling (1929) sobre un segmento, Lederer y Hurter (1986) sobre un subconjunto bidimensional del plano y por Labbé y Hakimi (1991) y Lederer y Thisse (1990) sobre redes. Para 3 o más firmas ha sido estudiado por Sarkar, Gupta y Pal (1997). El capítulo 2 incluye un cuadro con las características de los trabajos más significativos sobre juegos espaciales. Los capítulos 3, 4 y 5 analizan el equilibrio en diferentes juegos espaciales.

Numerosas contribuciones han modificado y generalizado algunas de las suposiciones originales de Hotelling (ver Eiselt y Laporte (1996b) para una buena revisión de resultados), de las que se concluye que los modelos de localización competitiva son bastante inestables, incluso pequeñas modificaciones de las hipótesis o los parámetros alteran sustancialmente los resultados. En el modelo original de Hotelling no existe equilibrio pero, sin embargo, cuando el coste de transporte es una función cuadrática de la distancia existe equilibrio con diferenciación máxima. Si los precios están fijados en el modelo original de Hotelling, existe equilibrio para  $p \neq 3$ , con diferenciación mínima para  $p = 2$ , y no existe equilibrio para  $p = 3$ , siendo  $p$  el número de firmas. El comportamiento de las firmas está ligado con el servicio que prestan; así, mientras los restaurantes de comida rápida tienden a concentrarse en algunas zonas, no ocurre lo mismo con las librerías y tiendas de muebles, por ejemplo (Eiselt y Laporte, 1996b).

En las siguientes secciones, se detallan las principales características que diferencian a los modelos de competencia espacial en general y a los juegos espaciales en particular.

## 1.1 Representación espacial

Durante los años treinta y comienzo de los cuarenta, los trabajos aparecidos en la literatura utilizan la misma representación espacial que Hotelling (1929), es decir, el espacio lineal, cambiando alguno de los supuestos económicos. Lerner y Singer (1937) prueban que no existe equilibrio para tres firmas bajo los supuestos de Hotelling y que el equilibrio con cuatro firmas se alcanza cuando en cada cuartil se localizan dos de ellas. Aunque estos autores consideran demanda elástica por encima del precio de reserva, es Smithies (1941) el primero en considerar demanda elástica en todo el rango de variación del precio<sup>1</sup>. Sin embargo, “aunque estos modelos en mercados lineales son ricos desde el punto de vista teórico y han aumentado considerablemente nuestro conocimiento de la interdependencia en localización, proporcionan muy poca ayuda a la hora de realizar aplicaciones prácticas” (Ghosh y Craig, 1984, p.40).

Tras varias décadas de estancamiento en las contribuciones en el campo de la localización en mercados lineales, a finales de los setenta comienzan a aparecer diferentes modelos de competencia en redes. Una de las primeras cuestiones consideradas es la posible existencia de un conjunto de localizaciones de equilibrio en los nodos de la red. Wendell y McKelvey (1981) consideran la localización de dos empresas competidoras, con un único centro cada una, cuyo objetivo es obtener, al menos, la mitad del mercado, y prueban que puede no existir equilibrio si restringimos el problema a los nodos de la red. Hakimi (1983) analiza los problemas del medianoide y centroide en redes y prueba que ambos problemas son NP-duros. En árboles, el equilibrio de un duopolio con precios fijos e iguales, se sitúa en la mediana (Slater, 1975). Una recopilación de modelos económicos en redes puede encontrarse en Sharkey (1995). Para una síntesis de problemas y resultados sobre redes ver Labbé, Peeters y Thisse (1995).

Durante la década de los setenta aparecen también importantes contribuciones en espacios continuos. Hartwick y Hartwick (1971) realizan una síntesis de los trabajos aparecidos sobre el problema de Hotelling y D’Aspremont, Gabszewicz y Thisse (1979) señalan que no existe equilibrio en dicho modelo si no se asumen condiciones restrictivas como precios iguales y fijos. En tal caso, las localizaciones de equilibrio se sitúan en la mediana, lo que se conoce como el *principio de diferenciación mínima*, mientras que las localizaciones socialmente óptimas son los cuartiles (Hamilton, MacLeod y Thisse, 1991). Tabuchi (1994) estudia el problema de Hotelling sobre un rectángulo con demanda uniforme y prueba que dos firmas maximizan su distancia en una dimensión y la *minimizan en la otra*. Sin embargo, no existe equilibrio en este espacio para tres firmas (Shaked, 1975). Knoblauch (1996) prueba que existe una familia infinita de equilibrios en una esfera con demanda

---

<sup>1</sup> considera funciones de demanda lineales e idénticas en cada punto del mercado

uniforme; este espacio tiene interés en la localización de servicios sobre la superficie terrestre, como por ejemplo la ubicación de estaciones de seguimiento de satélites.

En Mirchandani y Francis (1990) se analizan con profundidad los modelos de localización discreta. En el espacio discreto existe sólo un conjunto finito de posibles ubicaciones en la red. Por tanto, la localización discreta de servicios puede ser considerado como un caso particular del problema de localización de servicios en redes. En ambos casos, suele suponerse que los consumidores se encuentran situados en los nodos de la red.

Como es lógico, la idoneidad de la representación espacial elegida depende del problema particular. En los últimos años se ha observado nuevamente un resurgimiento de los trabajos que se dedican a modificar los supuestos originales del modelo de Hotelling, como Mayer (2000) y Gupta (1994) con coste de producción dependiente de las localizaciones, Mai y Peng (2000) con cooperación entre las firmas en forma de intercambio de información, Bhadury (1996) con incertidumbre en costes, Tabuchi y Thisse (1995) con demanda no uniforme, Fujita y Thisse (1986) con puntos de demanda con localizaciones variables, Hamilton y Thisse (1993) con restricción de capacidad, entre otros. Esto se debe a que este tipo de modelos tienen aplicaciones importantes en el comercio y la política. El propio Hotelling indicó este hecho al sugerir que su modelo explicaba la similitud en los programas de los partidos Republicano y Demócrata a finales de la década de los veinte. El objetivo de un candidato es posicionarse ideológicamente sobre un tema concreto de forma que maximice el número de electores.

## 1.2 Objetivo y variables de decisión

Una característica que diferencia los modelos de competencia espacial es el criterio de optimalidad. En los modelos referidos al sector público suele maximizarse la cobertura o el bienestar social, mientras que los que se refieren al sector privado suelen maximizar los beneficios o la cuota de mercado. Estos dos últimos objetivos son equivalentes cuando el precio y el coste marginal no dependen de la cuota de mercado.

En otros casos, la decisión es tomada mediante una votación en la que cada agente implicado atiende a criterios económicos y/o políticos. Existe una estrecha relación entre la localización competitiva y la teoría del voto, pudiéndose entender el número de individuos que prefieren cierta localización como el peso (o demanda) de dicho punto. Hansen y Labbé (1988) proponen un algoritmo de tipo polinomial para determinar los conjuntos de puntos de Simpson y de Condorcet. Un punto de Simpson corresponde a un equilibrio de Stackelberg, mientras que un punto de Condorcet es aquel que asegura como

mínimo la mitad de los votos. En general, puede no existir punto de Condorcet, aunque la existencia de al menos un punto de Simpson está asegurada. Para un estudio más detallado sobre teoría del voto puede consultarse Campos (2000), Campos y Moreno (2000) y Hansen, Thisse y Wendell (1990).

Otras características que diferencian los modelos de competencia espacial son las variables de decisión. En algunos modelos se asume que el precio está fijado, es el mismo para todas las empresas y, por tanto, no es determinante en la decisión del consumidor. El único factor de decisión es la distancia o el coste de desplazamiento al centro de servicio. Un ejemplo es el sector farmacéutico, cuya función principal es la venta de medicamentos al público. En general, el consumidor se desplaza a la farmacia más próxima sin atender al precio, ya que éste es idéntico en todas ellas. ReVelle (1986), basándose en este supuesto, formula un problema entero de maximización de la cuota de mercado, el denominado problema de captura máxima o MAXCAP, que es el origen de otros modelos como el de captura máxima con anticipación (Serra y ReVelle, 1994) y el de captura máxima con incertidumbre (Serra, 1996). Este modelo ha sido adaptado a situaciones donde el servicio es jerárquico, como por ejemplo en los servicios sanitarios, donde conviven centros de atención primaria con centros hospitalarios (Serra, Marianov y ReVelle, 1992). También ha sido adaptado a situaciones en las que el precio es una variable de decisión y una firma desea establecer varios centros en un mercado donde otra firma opera con un número dado de centros (Serra, 1997).

Hakimi (1983) considera la localización de un número de firmas en un espacio donde ya hay otras establecidas o puede existir competencia en el futuro, como una generalización de los problemas de la  $p$ -mediana y  $p$ -centro, refiriéndose a ellos como medianoide y centroide, respectivamente. En su formulación, no se consideran precios y el objetivo de una firma entrante es la maximización de la cuota de mercado. En otras ocasiones se asume que los precios están fijados de antemano por un regulador (por ejemplo, el butano y los combustibles antes de la liberalización) o se trata de un servicio público gratuito. Algunos autores que consideran exclusivamente decisiones en localización física son Wendell y McKelvey (1981) y Dobson y Karmarkar (1986).

En otras ocasiones, las firmas deciden los niveles de producción en lugar del precio, como ocurre en el modelo de Cournot (1838). Labbé y Hakimi (1991) consideran niveles de producción en lugar de precios en el modelo de Lederer y Thisse (1990). La extensión del trabajo de Labbé y Hakimi al caso oligopolístico con función de demanda no lineal se debe a Sarkar, Gupta y Pall (1997).

### 1.3 Política de precios

Cuando el precio es una variable de decisión, suelen asumirse diferentes políticas. Peeters y Thisse (1995) comparan algunas de ellas, concluyendo que “la política de precios tiene un impacto significativo en las decisiones de localización” (p.366). A continuación se describen las principales políticas de precios, para un estudio más detallado puede consultarse el libro de Philips (1983).

El *precio en origen*, conocido también como precio de fábrica o f.o.b. price, consiste en fijar un mismo precio para todos los consumidores, los cuales asumen el coste de transporte desde su ubicación hasta el servicio. Esta política de precios es la única que no considera diferenciación entre los clientes y ha sido defendida por las autoridades antimonopolio (Peeters y Thisse, 1995, p.336). Otra posibilidad es fijar un *precio en destino*, conocido también como precio de entrega o delivered price, asumiendo las empresas el coste de transporte. En este caso, existen dos alternativas dependiendo de si la firma fija un mismo precio para todos los consumidores (*precio uniforme*) o si ofrece diferentes precios en función de donde estén localizados (*discriminación espacial de precios*). El precio uniforme perjudica a los clientes localizados más cerca del vendedor. La discriminación espacial de precios se utiliza frecuentemente en el comercio internacional y según Hobbs (1986, p.173), “es frecuentemente la evidencia de cierto poder de mercado”. Además, esta política es poco transparente para los consumidores. Por estos motivos, las políticas públicas suelen favorecer el precio en origen frente al precio en destino. Sin embargo, Anderson, DePalma y Thisse (1992) analizan estas políticas en el modelo de Hotelling y concluyen que el precio en origen es una práctica socialmente ineficiente. Incluso el equilibrio localización-precio uniforme puede generar mayor bienestar social que el equilibrio localización-precio en origen.

El precio puede depender de la cantidad o la calidad servida. Para entender esta idea, pensemos por ejemplo en una empresa que ofrece diferentes tamaños de cereales de desayuno a un precio por unidad de peso diferente según el tamaño del paquete. Pires y Sarkar (2000) analizan esta situación en el modelo de Hotelling.

La discriminación espacial de precios es conveniente para las empresas ya que permite extraer de los consumidores lo máximo que están dispuestos a pagar, aunque para poder discriminar son necesarias algunas condiciones. La primera es que sea posible diferenciar las distintas disposiciones a pagar de los clientes, bien individualmente o en grupos, es decir, que sean identificables las demandas individuales o por grupos de consumidores que presenten características similares. La segunda condición es que sea posible impedir la reventa del producto entre los consumidores de distintos grupos, porque de lo contrario quienes pudieran adquirir el bien a un precio inferior, podrían venderlo a otros consumidores con un beneficio de arbitraje. Estas dos condiciones

se satisfacen en los mercados separados espacialmente, los cuales son objeto de estudio en los capítulos 3 y 4 de esta memoria. A veces, la introducción de algún tipo de diferenciación en el producto permite una discriminación de precios no espacial. Las ediciones de libros en pastas duras y en rústica, cuya diferencia de precio no está justificada por los costes de encuadernación, tratan de captar la diferencia entre compradores de alto nivel adquisitivo o de consumo demostrativo y el resto. La diferencia en precio de un espectáculo en función de la hora de la sesión o del emplazamiento en el local son otros ejemplos de discriminación no espacial de precios.

El *precio por zonas* viene a sustituir la discriminación espacial cuando el número de clientes es elevado. La división en zonas puede venir dada de antemano según países, regiones económicas (comunitarias y no comunitarias, por ejemplo) o zonas geográficas (Península, centro de Europa y norte de África, por ejemplo), o fijarse al mismo tiempo que los precios. Peeters y Thisse (1996) señalan que el precio por zonas es una buena aproximación de la discriminación espacial y que el beneficio de las empresas se incrementa con el número de zonas. Esta política es viable sólo si las firmas pueden prevenir el arbitraje entre clientes que residen en diferentes zonas. Un ejemplo de arbitraje se encuentra en el mercado automovilístico europeo, donde los coches franceses se exportan a Bélgica, se venden a un precio inferior al fijado en Francia dada la mayor competencia y son reexportados por consumidores franceses a su país de origen (Peeters y Thisse, 1996). Hansen, Peeters y Thisse (1997) proponen un modelo que determina las áreas y los precios en cada una de ellas que debe fijar una firma para maximizar el beneficio.

Finalmente, con el *precio mixto* los clientes son libres de elegir entre desplazarse y obtener un precio en origen dado o aceptar el precio en destino. Algunos trabajos, aunque no consideran explícitamente localizaciones tienen interés en el campo de la competencia espacial. Hoover (1936) analiza diferentes políticas de precios y estudia el efecto que sobre dichas políticas tiene la elasticidad de la demanda y el coste de transporte, observando que las empresas ejercen cierto poder de monopolio sobre los consumidores más próximos, lo que les permite elevar los precios a la hora de discriminar. Tabuchi (1999) considera el modelo de Hotelling sobre un mercado circular con ubicaciones fijas e igualmente espaciadas para las firmas. En la primera etapa cada firma selecciona una política de precios (precio en origen o discriminación espacial) y en la segunda fija los precios.

Como indican Anderson y Neven (1990, p.1) la mayor parte de la literatura sobre competencia espacial asume precio en origen, siguiendo la pauta de Hotelling. Hoover (1936), Lederer y Hurter (1986), Lederer y Thisse (1990) examinan la discriminación espacial de precios cuando la demanda es totalmente inelástica, obteniendo que el precio de equilibrio en un mercado coincide con el coste en destino de la segunda firma con menor coste.

## 1.4 Coste de transporte

La consideración conjunta de la localización y el precio como variables estratégicas en los modelos de competencia espacial, pone de manifiesto la relevancia de los costes de transporte en los resultados obtenidos, siendo un claro ejemplo la conocida relación entre las funciones de coste lineal y cuadrática y los principios de mínima y máxima diferenciación, respectivamente, en el modelo de Hotelling. Andalus (1995), tras una descripción detallada del modelo básico de competencia espacial, presenta las principales modificaciones existentes en la literatura, poniendo especial énfasis en aquellos trabajos que centran su atención en el estudio de los costes de transporte. Concluye que “a pesar de las limitaciones existentes, el campo de aplicación de la teoría de la competencia espacial es mucho más central en la teoría económica de lo que su tradicional status periférico podría sugerir” (p.343). Además, “podemos decir que cuando los mercados se caracterizan por la dispersión geográfica y los costes de transporte son lo suficientemente relevantes, el modelo de competencia espacial surge como una aproximación analítica de carácter general, más adecuada que el modelo competitivo básico.” (p.343)

Es habitual asumir que el coste de transporte es una función cóncava y creciente de la distancia recorrida. Esta suposición es necesaria para probar que las funciones de beneficio son convexas y, por tanto, que cada firma se localiza en un nodo independientemente de las ubicaciones del resto de las firmas. Este resultado es importante porque reduce la búsqueda del equilibrio a los nodos de la red.

## 1.5 La demanda

La curva de demanda de un consumidor indica el precio al que está dispuesto a adquirir una unidad del bien, el cual depende de la oferta. Su precio de reserva es lo máximo que está dispuesto a pagar por una unidad del bien. La *curva de demanda* del mercado es la demanda agregada de todos los consumidores e indica la cantidad demandada en función del precio y la renta. La *disposición a pagar* es el precio máximo que alguien está dispuesto a pagar por una unidad del bien y coincide con el punto de corte de la curva de demanda con el eje  $q = 0$ .

Un concepto fundamental es la *elasticidad-precio* de la demanda, que es un indicador de la sensibilidad de las decisiones de compra a pequeñas variaciones del precio y viene dada por:

$$\epsilon = \frac{dq/dp}{q/p} = \frac{p}{q} \frac{dq}{dp}$$

Se dice que los bienes con  $|\epsilon| > 1$  son *elásticos*; los bienes con  $|\epsilon| < 1$  son *inelásticos*; y los bienes con  $|\epsilon| = 1$ , son de *elasticidad unitaria*. Cuando  $\epsilon = 0$  se dice que el bien es *totalmente inelástico* al precio. La elasticidad cero suele presentarse en bienes esenciales, donde la cantidad demandada no depende del precio del bien (*demanda constante*). La mayor parte de los autores (Hakimi 1983, 1990, entre otros) asumen bienes esenciales y, por tanto, que la demanda es totalmente inelástica, es decir, que los consumidores demandan una cantidad fija independientemente del precio y de lo alejado que se encuentre el servicio.

La elasticidad-precio en valor absoluto correspondiente a un punto cualquiera  $(p, q)$  de una curva de demanda lineal, puede interpretarse geoméricamente como el cociente entre la base y la altura del rectángulo que aparece al trazar perpendiculares desde el punto  $(p, q)$  a los ejes cartesianos, de lo que se deduce que la elasticidad-precio es igual a infinito cuando el precio es máximo y disminuye a cero al aproximarnos al origen. Por tanto, en una curva de demanda lineal se presentan todos los tipos de elasticidad.

La elasticidad de la demanda junto al hecho de que ésta sea continua y distribuida uniformemente o discreta y separada espacialmente, representan las principales cuestiones consideradas en el modelado de la demanda. Hotelling (1929) asume que la demanda es totalmente inelástica, suposición que es relajada por Lerner y Singer (1937) por encima de la disposición a pagar, y por Smithies (1941) en todo el rango de valores del precio. La demanda considerada por estos autores está uniformemente distribuida a lo largo de un segmento lineal, mientras que la demanda asumida por Hakimi (1983), ReVelle (1986), Lederer y Thisse (1990), Labbé y Hakimi (1991), entre otros, es discreta y se concentra en los nodos de la red. Además, estos dos últimos trabajos consideran elasticidad-precio distinta de cero al asumir funciones lineales de demanda.

La elasticidad-precio de la demanda de un bien depende de dos grandes factores: (i) Las posibilidades de sustitución; cuanto mayor es la facilidad con que los consumidores pueden sustituir unos bienes por otros, más elástica es la demanda. (ii) La proporción presupuestaria; los bienes que representan una elevada proporción en el gasto total tienen una mayor elasticidad-precio.

La variación del nivel medio de renta en un mercado generalmente desplaza la curva de demanda. La *elasticidad-renta* de la demanda de un bien se define de forma similar a la elasticidad-precio. Los bienes con elasticidad-renta positiva se denominan *bienes normales*, mientras que si es negativa se denominan *bienes inferiores*. Cuando los bienes son normales, el aumento de la renta desplaza hacia la derecha la curva de demanda del mercado; cuando son inferiores ocurre justo lo contrario.

## 1.6 Estructura del mercado

Otro aspecto importante es el número de firmas competidoras, lo que caracteriza la estructura del mercado. Cada una localizará un número dado de servicios en el espacio considerado. En el *monopolio* existe una única firma, por lo que no habrá comportamiento estratégico respecto a competidores efectivos, aunque lo puede haber respecto a empresas que sean potenciales competidoras en el futuro, respecto al propio monopolista en un contexto temporal o entre los diferentes centros de una misma firma. En el *oligopolio* existe más de una firma, generalmente un número pequeño. En el caso particular en que este número es dos se tiene el *duopolio*. Cuando el número de firmas es suficientemente grande se denomina competencia perfecta. En un oligopolio las empresas han de tener en cuenta la competencia que suponen los restantes oligopolistas y también los potenciales competidores que podrían entrar en el mercado (competencia potencial), lo que origina un comportamiento estratégico. Este comportamiento no aparece ni en la competencia perfecta, porque las empresas no tienen influencia sobre los precios, ni en el monopolio. La importancia del oligopolio no radica sólo en este comportamiento estratégico, sino también en el hecho de que se trata de la forma de organización industrial más frecuente.

En la revisión bibliográfica sobre el tema de Friesz, Miller y Tobin (1988a) se incluye el monopolio espacial dentro de los problemas de competencia espacial, al considerar "cualquier modelo de localización que explícitamente reconozca que la localización de una firma pueda afectar su cuota de mercado" (p.48). Wagner y Falkson (1975) y Erlenkotter (1977) fueron los primeros autores en formular modelos de localización con funciones de demanda elásticas en espacios no lineales. Sin embargo, estos autores no consideran competencia entre firmas, asumiendo una organización (gobierno o empresa) que pretende localizar varios centros con el fin de cumplir cierto objetivo empresarial (maximización del beneficio) o público (maximización del bienestar social).

La presencia de un número pequeño de empresas conlleva la tentación y la tendencia a realizar acuerdos que limiten o eliminen la competencia, con el fin de obtener beneficios extraordinarios, por lo que formalmente los modelos de oligopolio se pueden clasificar en dos grandes grupos, *colusivos* (coaliciones) y *no colusivos*. Los oligopolios no colusivos se caracterizan porque las empresas compiten entre sí, es decir, por tratarse de situaciones no cooperativas. Como es obvio, las empresas no maximizan los beneficios conjuntos, lo que podría conseguirse si las mismas se fusionan o llegan a algún tipo de acuerdo. Los oligopolios colusivos plantean dos tipos de problemas, por una parte internos, al existir incentivos a romper los acuerdos (dilema del prisionero), y por otra externos, ya que a medida que la cooperación sea mayor entre los oligopolistas, mayores serán los beneficios obtenidos y, por tanto, existirán más posibilidades de que entren nuevos competidores en el mercado.

Empezando por el modelo de Hotelling, e incluyendo los trabajos de Smithies (1941), Hartwick y Hartwick (1971) y Wendell y McKelvey (1981), el duopolio no colusivo ha sido objeto de especial atención. La mayor parte de los modelos estudian únicamente dos jugadores, aunque algunos autores han abordado el caso en el que existen tres firmas competidoras, como Eiselt y Laporte (1993), Weber (1992), Fujita y Thisse (1986), Shaked (1975) o Eaton (1972), entre otros. Sarkar, Gupta y Pal (1997) y Kohlberg (1983) estudian un problema con  $n$  firmas. Sin embargo, como indican Friesz, Miller y Tobin (1988a) el oligopolio ha recibido poca atención en la literatura sobre competencia espacial. En el capítulo 4 se presentan algunos resultados generales para el oligopolio y se extienden los modelos del capítulo 3 al caso en el que existen más de dos empresas.

## 1.7 Reglas del juego

Pueden considerarse decisiones *simultáneas o secuenciales*. La solución para un juego no cooperativo de *elección simultánea*, conocida como *equilibrio de Nash*, es aquella donde ningún jugador tiene incentivo a alterar unilateralmente su situación. Puede no existir equilibrio de Nash, como ocurre en el modelo para tres firmas en un mercado lineal de Lerner y Singer (1937).

Una alternativa al modelo de elección simultánea es la *elección secuencial*, según la cual un jugador decide conociendo las elecciones de los que le preceden y anticipando las decisiones posteriores de los restantes competidores. Asociado a este modelo surge el concepto de *solución o equilibrio de Stackelberg*. El líder del juego no siempre tiene ventaja sobre el seguidor, como ocurre por ejemplo en el problema de localización de dos firmas en un triángulo de lados iguales y demandas nodales e iguales. Por esta razón, existen leyes de patente que proporcionan al menos una ventaja temporal al líder del juego. Eiselt y Laporte (1996a) hacen una buena revisión del problema de Stackelberg, al que ellos genéricamente denominan de localización secuencial. Anderson (1987) analiza el equilibrio de Stackelberg en el problema de Hotelling y prueba que cuando las entradas de las firmas son secuenciales y se conoce que la competencia posterior en precios será de tipo líder-seguidor, la primera firma se localiza en el centro del mercado y la segunda indistintamente en  $x = 0.13$  ó  $x = 0.87$ . Además, la segunda firma en entrar adoptará el papel de líder en precios y la establecida el rol de seguidora, obteniendo ésta última mayores beneficios. García y Pelegrín (1997) estudian un problema de localización en árboles con demanda totalmente inelástica y prueban la existencia de un equilibrio de Stackelberg en localización.

En una generalización del problema de Hotelling sobre un rectángulo, Tabuchi (1994) prueba que la localización secuencial es más beneficiosa para las firmas que la simultánea. Eiselt (1998) considera un juego de Stackelberg en un árbol donde los duopolistas no conocen la demanda real y tienen diferentes

percepciones sobre ella. Si hay información completa, es decir, cada uno conoce la percepción de su oponente, no existen ventajas ni para el líder ni para el seguidor. Si la información es incompleta, es decir, el líder no conoce la percepción del seguidor, la ventaja es para éste último.

Hakimi (1983) introduce los términos medianoide y centroide para las localizaciones del seguidor y líder, respectivamente. En particular, el  $(r|X_p)$ -medianoide es el problema del seguidor cuando va a localizar  $r$  servicios en un espacio donde ya están localizados  $p$  servicios en los puntos del conjunto  $X_p$ . De forma similar, un  $(r|p)$ -centroide es el conjunto de  $p$  localizaciones para el líder, sabiendo que posteriormente el seguidor situará  $r$  servicios resolviendo el problema  $(r|X_p)$ -medianoide. Hakimi demuestra que ambos problemas son NP-duros y que, por ejemplo, el  $(1|X_1)$ -medianoide sobre una red no tiene necesariamente solución nodal. Benati y Laporte (1994) proponen un algoritmo de búsqueda tabú para resolver ambos problemas.

Si los precios son también variables, se pueden considerar dos alternativas. La primera consiste en suponer una elección simultánea de precio (o nivel de producción) y localización (Tobin y Friesz, 1986). Otros modelos, como ocurre en el de Hotelling, consideran que los jugadores deciden en dos etapas, motivado por el hecho de que la elección de la ubicación suele ser anterior a la del precio. En la primera etapa los jugadores deciden simultáneamente sus localizaciones y, conocidas éstas, los jugadores deciden simultáneamente los precios (o niveles de producción) en la segunda etapa. Una vez hallado el equilibrio de Nash en la segunda etapa, su expresión es incorporada en la función de beneficio para abordar el juego de la primera etapa. El correspondiente concepto de solución en dos etapas se denomina *equilibrio de Nash subjuego-perfecto*. Este concepto se basa en la idea de que los jugadores anticipan las consecuencias de la competencia en precios (o producción) a la hora de decidir sus localizaciones. Para una amplia discusión sobre este concepto ver Selten (1975).

Lederer y Thisse (1990) consideran un juego en dos etapas con discriminación espacial de precios en la segunda y prueban la existencia de un equilibrio de Nash subjuego-perfecto. Además, si los costes de transporte son funciones cóncavas de la distancia, existe un equilibrio en un conjunto de nodos de la red. Un resultado similar es obtenido por Labbé y Hakimi (1991) cuando las empresas deciden la cantidad a ofrecer en cada mercado separado espacialmente con demanda lineal. Los modelos anteriores consideran exclusivamente la posibilidad de instalar un único servicio para cada firma. Tobin y Friesz (1986) estudian el problema de maximizar el beneficio de una empresa que pretende introducirse con más de un servicio en un mercado ocupado por otras empresas. Este modelo es generalizado por Friesz, Tobin y Miller (1989) para permitir a la firma entrante decidir no sólo el nivel de producción y la localización de sus plantas, sino también el esquema de distribución. Sarkar, Gupta y Pal (1997) extienden el modelo de Labbé y Hakimi (1991) al caso del oligopolio con demanda no lineal y prueban que, bajo

ciertas condiciones, las firmas continúan situándose en los nodos de la red. Estos autores permiten que cada firma pueda ubicar más de un centro. Además, en el caso particular en el que la demanda es lineal prueban la existencia de un equilibrio de Nash subjuego-perfecto para el oligopolio.

Anderson y Engers (1994) consideran un juego en dos etapas con demanda totalmente inelástica al precio, donde en la primera etapa las firmas deciden las localizaciones en un espacio continuo, adelantando el posterior equilibrio en precios de la segunda etapa. El mercado está regulado por una autoridad que fija los precios de forma que se maximice el bienestar social. En equilibrio, se minimiza el coste social que viene dado por el coste total de producción y de transporte, obteniéndose la misma solución que si las firmas compitiesen libremente. Este resultado es similar al obtenido por Lederer y otros (1990, 1986). Spagat (1992) introduce un refinamiento del concepto de equilibrio subjuego-perfecto, que emplea para seleccionar una solución en un juego de competencia espacial con múltiples equilibrios subjuego-perfecto.

## 1.8 Conjeturas de las empresas

En la mayor parte de los modelos se asume que cada empresa fija un precio o decide su localización suponiendo constante el precio o la ubicación del resto de sus rivales. Se trata de un supuesto denominado “variación conjetural nula”. Como señalan Eaton y Lipsey (1974), dicho supuesto puede ser razonable a corto plazo dado que las empresas no tienen tiempo de observar la reacción de sus competidoras, o bien cuando la relocalización no se produce como consecuencia, por ejemplo, de unos elevados costes de instalación. En el modelo de Stackelberg sólo una de las firmas, la seguidora, mantiene este supuesto mientras que la líder asume conjeturas no nulas al adelantar la reacción de la seguidora. La tercera posibilidad aparece bajo el supuesto de conjeturas no nulas para ambas firmas. Estos tipos de conjeturas aparecen en Segura (1993) y serán tratados con posterioridad en los capítulos 2, 3 y 4.

## 1.9 Comportamiento de los consumidores

En general, podemos distinguir entre modelos determinísticos y probabilísticos. En un *modelo determinístico* los consumidores son atraídos por los centros de servicio de acuerdo a alguna función de utilidad dada en función de características tales como la distancia (o el coste de transporte) y el precio, entre otras. En el *modelo probabilístico* existe una función de atracción que determina la probabilidad de que un consumidor visite un servicio. La principal diferencia entre estos dos modelos radica, por tanto, en la asignación de los clientes a los centros de servicio. Mientras que en el modelo determinístico un usuario acude exclusivamente al centro que le produce mayor utilidad, lo que

lleva asociado una partición del espacio en áreas de mercado de los centros de servicio, en el modelo probabilístico un cliente puede visitar cualquier centro, incluso el menos atractivo, con una cierta probabilidad.

La suposición más común en el modelo determinístico es que los clientes eligen el servicio más próximo (en tiempo o distancia). El MAXCAP (maximum capture problem), formulado por ReVelle (1986) aplica el criterio de distancia mínima. En general, el cliente tiene en cuenta, además de la distancia, el precio, el servicio postventa, etc. Drezner (1994a), en un problema continuo, asume que los clientes basan su elección en una función de utilidad, que incorpora atributos del servicio y la distancia. Los clientes situados en un mismo punto de demanda presentan la misma función de utilidad y, por tanto, eligen el mismo servicio. Sin embargo, Drezner y Drezner (1996) consideran una función de utilidad que cambia de un consumidor a otro, incluso entre aquellos localizados en un mismo punto de demanda.

En un modelo probabilístico los clientes dividen su poder de compra entre las firmas competidoras. El modelo de Huff (1964), de tipo gravitacional, sugiere que la probabilidad de que un consumidor acuda a un servicio es proporcional al tamaño de dicho servicio e inversamente proporcional a la distancia. Este modelo es extendido por Nakanishi y Cooper (1974) quienes reemplazan el tamaño del servicio por un conjunto de características que definen su atractivo, dando lugar al modelo MCI (modelo de interacción competitiva multiplicativa). Plastria (1996) utiliza una variación del modelo de Huff para determinar la localización óptima y el atractivo de un nuevo servicio en un mercado competitivo. Peeters y Plastria (1998) proponen una variante del modelo de Huff, el modelo de Pareto-Huff, considerando que un consumidor visita un servicio  $A$  más distante que otro  $B$ , sólo si  $A$  es más atractivo que  $B$ . Este criterio es diferente al de Huff, donde los clientes pueden visitar, aunque sea con una probabilidad muy pequeña, servicios distantes incluso existiendo próximos a él servicios más atractivos. Santos, Suárez y Dorta (1999a, 1998) abordan el problema del equilibrio localización-atractivo para dos firmas que entran a competir simultáneamente con un único servicio cada una, considerando los modelos de Huff y de Pareto-Huff. Basándose en el MCI, Achabal, Gorr y Mahajan (1982) desarrollan un modelo de localización de servicios múltiple, mientras que Ghosh y Craig (1983) determinan estrategias de localización deseables en un mercado dinámico considerando posibles cambios competitivos y demográficos.

El modelo MAXCAP ha sido adaptado también al caso probabilístico. Benati (1999) considera un problema de captura máxima donde los consumidores toman sus decisiones de acuerdo a una función de utilidad aleatoria. Serra y Colomé (2000) modifican el modelo MAXCAP para permitir que la demanda de un nodo asignada a un determinado centro de servicio sea función de las distancias de ese nodo al resto de los centros de servicio.

## 1.10 Externalidades

Cuando cada consumidor o usuario sufre los efectos de las acciones de los demás, se dice que existe externalidad en el mercado. En estos casos, además del precio y el coste de transporte, los consumidores deben tener en cuenta un coste asociado al efecto de la externalidad. Como consecuencia, cuando los precios que fijan las empresas coinciden, no siempre es la asignación al centro de servicio más próximo la que proporciona el coste mínimo. A Muñiz (1998) señala en una revisión bibliográfica sobre externalidades, localización y crecimiento regional, que la presencia de externalidades explica la concentración observada en empresas e industrias dedicadas a una misma actividad.

Kohlberg (1983) modifica el modelo de Hotelling con el fin de evitar la discontinuidad de las funciones de pago en un juego donde las estrategias son las localizaciones en un intervalo. No tiene en cuenta el precio del producto, lo que equivale a considerarlo fijo e igual para todas las firmas. Considera que el tiempo de espera es una función creciente de la cuota de mercado, y suponiendo que el consumidor elige el centro de servicio minimizando el tiempo de transporte más el tiempo de espera, demuestra que las cuotas de mercado son funciones continuas de las localizaciones y que no existe equilibrio para tres o más firmas. Cuando el número de firmas es dos, existe equilibrio con diferenciación mínima y, al igual que en el modelo de Hotelling, las localizaciones socialmente óptimas se sitúan en los cuartiles.

Brandeau y Chiu (1994a, 1994b) introducen un coste de externalidad para servicios privados y públicos en un problema en redes, considerando que los consumidores minimizan la suma de los tiempos de desplazamiento y de espera en el servicio. Estos autores asumen que los precios no intervienen en el proceso de decisión. Consideran servicios con capacidades y funciones de externalidad convexas, crecientes y tendiendo a infinito cuando la utilización del servicio se aproxima a su capacidad. En el caso de servicios privados (1994a), dos firmas maximizadoras de su cuota de mercado deciden sus localizaciones según un juego de Stackelberg. Prueban que las decisiones de los usuarios en equilibrio son únicas y, por tanto, que la cuota de mercado en equilibrio también es única. En el caso de servicios públicos (1994b), se localizan un número dado de centros de servicio de manera que se minimice el coste social, que es el tiempo agregado de desplazamiento y de espera de la totalidad de los usuarios. Prueban que para costes de externalidad negativos las asignaciones de equilibrio no son en general únicas, aunque la cuota de mercado sí lo es. Cuando el número de centros públicos es dos, las asignaciones de equilibrio son únicas. En ambos trabajos, para el estudio de las localizaciones se particulariza el problema en árboles con demanda nodal.

Un problema similar incorporando el precio del producto es estudiado por Santos, Dorta y Suárez (2000a). En este trabajo se considera un juego en dos

etapas, en la primera se deciden las localizaciones y en la segunda, conocidas éstas, se deciden los precios, estudiándose la existencia de un equilibrio de Nash para cada etapa. El equilibrio de Stackelberg en precios es estudiado por Suárez, Dorta y Santos (2000). En ambos trabajos se supone que las asignaciones son impuestas por un agente regulador para minimizar el coste agregado y obtener así un óptimo de Pareto. El caso en que los consumidores toman sus decisiones individualmente es estudiado por Suárez, Dorta y Santos (1999).

Berman y Larson (1982) analizan el problema de la mediana con congestión en redes. El objetivo es minimizar el tiempo de respuesta (suma del tiempo de viaje y de espera) de un servicio en el que las llegadas se producen de forma aleatoria. Lee y Cohen (1985) consideran demanda elástica a la congestión. Desrochers y otros (1995) formulan un problema de localización de facilidades con congestión entero mixto, que es resuelto mediante ramificación y acotación.

En otras ocasiones las externalidades son positivas, como sucede con locales de ocio como pubs y discotecas, por ejemplo. En estos casos, muchos usuarios prefieren acudir a aquellos lugares con mayor afluencia.

## Capítulo 2

# Modelos clásicos de competencia y nociones básicas

Este capítulo está dedicado a los modelos clásicos de competencia oligopolística en Economía Industrial. Los modelos desempeñan un importante papel en la toma de decisiones, permitiendo a las empresas obtener información sobre la repercusión de sus posibles acciones. Existe una extensa literatura sobre modelos de oligopolio, que como se indicó con anterioridad es una estructura de mercado en la que existe más de una empresa, generalmente un número pequeño de ellas. En particular, cuando el número de firmas es dos se tiene un duopolio. La capacidad de las empresas de fijar los precios diferencia al oligopolio de la competencia perfecta. Por otra parte, la existencia de varias firmas supone que cada una tomará decisiones teniendo en cuenta las acciones de sus competidoras, lo que distingue al oligopolio del monopolio. Para una introducción en este tema puede consultarse Segura (1993), Tirole (1988), Chiang (1987), Arrow y Intriligator (1982), Hay y Morris (1979), entre otros.

En la sección 2.1 de este capítulo, se analizan los modelos clásicos de competencia oligopolística, de gran importancia para explicar el comportamiento estratégico de los productores, y se definen diferentes conceptos de solución. Se presenta en primer lugar la competencia vía cantidades, incluyendo aquellas situaciones asimétricas en las que una de las empresas es líder, para posteriormente abordar la competencia vía precios. En tercer lugar se analiza otro tipo de competencia, vía diferenciación del producto, donde las empresas deben decidir la ubicación de sus instalaciones o las características de sus productos.

La sección 2.2 contiene algunas nociones y resultados sobre juegos y redes que serán utilizados en la memoria. Se definen los principales tipos de solución de equilibrio y se muestra un cuadro resumen donde figuran las características de algunos juegos espaciales junto con los casos tratados en esta memoria. Finalmente, se recogen algunos resultados generales sobre convexidad que serán utilizados con posterioridad.

## 2.1 Modelos clásicos de competencia

### 2.1.1 Modelos de Cournot y Stackelberg

Sea  $r$  el número de firmas en el mercado, con funciones de costes de producción  $C_i(q_i)$ , donde  $q_i$  es el nivel de producción de la firma  $i$ ,  $i = 1, \dots, r$ . La función inversa de demanda viene dada por  $p = p(q)$ , siendo  $q = \sum_{i=1}^r q_i$  la cantidad total producida. Las empresas deciden simultáneamente su producción  $q_i$ , que será aquella que maximice el beneficio, es decir, la solución del siguiente problema de optimización

$$\max \pi_i(q) = q_i p(q) - C_i(q_i), \quad \forall i = 1, \dots, r,$$

donde se han relajado las restricciones de no negatividad. Asumiendo que las funciones de beneficio son cóncavas y diferenciables, las condiciones necesarias y suficientes de óptimo global son

$$p + q_i p'(q) \frac{dq}{dq_i} - C'_i(q_i) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, r.$$

Dado que  $q = \sum_{i=1}^r q_i$ , diferenciando se obtiene

$$\frac{dq}{dq_i} = 1 + \sum_{j=1, j \neq i}^r \frac{dq_j}{dq_i}, \quad \forall i = 1, \dots, r,$$

y las condiciones necesarias y suficientes de óptimo resultan

$$p + q_i p'(q) \left[ 1 + \sum_{j=1, j \neq i}^r \frac{dq_j}{dq_i} \right] - C'_i(q_i) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, r.$$

El término  $\frac{dq_j}{dq_i}$ ,  $j \neq i$ , representa la variación que ocurrirá en la producción del competidor  $j$  ante cambios en  $q_i$ . Estos términos se denominan *variaciones conjeturales*. La hipótesis más simple sobre los valores de las variaciones conjeturales es la nulidad, es decir, suponer que cada productor piensa que

sus competidores no reaccionarán a la alteración de su volumen de producción. Este es el supuesto formulado por **Cournot** (1838), bajo el cual, en el caso de un duopolio ( $r = 2$ ,  $i = A, B$ ), las ecuaciones anteriores se escriben de la siguiente forma:

$$p + q_A p'(q) - C'_A(q_A) = 0, \quad (r_A(q_B))$$

$$p + q_B p'(q) - C'_B(q_B) = 0, \quad (r_B(q_A))$$

y se denominan *funciones de reacción* o de mejor respuesta ( $r_A(q_B), r_B(q_A)$ ). Proporcionan respectivamente, el output de la firma  $A$  dado el de  $B$  ( $r_A(q_B)$ ), y el de la firma  $B$  dado el de  $A$  ( $r_B(q_A)$ ), indicando cómo reacciona una de ellas ante cambios en la oferta de la otra.

Una hipótesis alternativa consiste en suponer que una de las empresas asume variación conjetural nula, mientras que la otra considera variación conjetural no nula. Este es el supuesto formulado por **Stackelberg** (1934), donde la firma líder asume conjeturas no nulas mientras que la seguidora asume conjeturas nulas. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $A$  es líder y  $B$  seguidora. Entonces, el comportamiento de la empresa seguidora sigue estando representado por su función de reacción  $r_B$ , mientras que la nueva curva de reacción de la líder viene dada por

$$p + q_A p'(q) \left[ 1 + \frac{dq_B}{dq_A} \right] - C'_A(q_A) = 0.$$

Diferenciando la función de reacción de  $B$  respecto de  $q_A$  resulta

$$p'(q) \frac{dq}{dq_A} + \frac{dq_B}{dq_A} p'(q) + q_B p''(q) \frac{dq}{dq_A} - C''_B(q_B) \frac{dq_B}{dq_A} = 0,$$

y de la relación  $\frac{dq}{dq_A} = 1 + \frac{dq_B}{dq_A}$ , se obtiene que

$$\frac{dq_B}{dq_A} = - \frac{p'(q) + q_B p''(q)}{2p'(q) + q_B p''(q) - C''_B(q_B)}.$$

Sustituyendo en la curva de reacción de la empresa líder, y tras algunas simplificaciones, se obtiene

$$p + q_A p'(q) \left[ \frac{p'(q) - C''_B(q_B)}{2p'(q) + q_B p''(q) - C''_B(q_B)} \right] - C'_A(q_A) = 0.$$

Por tanto, la solución o equilibrio de Stackelberg viene dado por la solución del sistema

$$p + q_A p'(q) \left[ \frac{p'(q) - C''_B(q_B)}{2p'(q) + q_B p''(q) - C''_B(q_B)} \right] - C'_A(q_A) = 0, \quad (r_L)$$

$$p + q_B p'(q) - C'_B(q_B) = 0, \quad (r_S)$$

Lo anterior equivale a resolver el problema de maximización de beneficio del líder sujeto a la restricción de reacción del seguidor<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \max \quad & q_A p(q) - C_A(q_A) \\ \text{s.a.} \quad & p + q_B p'(q) - C'_B(q_B) = 0, \end{aligned}$$

que puede resolverse por el método de los multiplicadores de Lagrange.

En resumen, el seguidor se atendrá a su propia función de reacción, mientras que, por el contrario, el líder incorporará la información relativa a la reacción de su competidora a su función de beneficio.

Finalmente, el último escenario aparece al asumir que ambas firmas se comportan como líderes. En tal caso, el equilibrio surge al intersectar  $r_L$  con la que aparece al intercambiar en esta última los subíndices.

### Comparación de equilibrios para demandas lineales

Supongamos que la función inversa de demanda es lineal, del tipo  $p(q) = a - bq$ ,  $a, b > 0$ , y los costes marginales de ambas empresas son constantes e iguales. Si estos costes son  $C'_i(q_i) = c$ ,  $i = A, B$ , las curvas de reacción en el supuesto de Cournot son

$$a - b(q_A + q_B) - bq_A - c = 0,$$

$$a - b(q_A + q_B) - bq_B - c = 0,$$

y el equilibrio de Cournot es

$$q_A = q_B = q^C = \frac{a - c}{3b}.$$

Entonces, el precio de mercado y los beneficios para ambas empresas son

$$p^C = \frac{a + 2c}{3}, \quad \pi_A = \pi_B = \pi^C = \frac{(a - c)^2}{9b}.$$

Las curvas de reacción para el modelo de Stackelberg, si  $A$  es líder, son

$$a - b(q_A + q_B) - \frac{bq_A}{2} - c = 0,$$

$$a - b(q_A + q_B) - bq_B - c = 0,$$

---

<sup>1</sup>estamos prescindiendo de las restricciones de no negatividad

que proporcionan las siguientes cantidades de equilibrio

$$q^L = \frac{a-c}{2b}, \quad q^S = \frac{a-c}{4b} = \frac{q^L}{2}.$$

El precio de mercado y los beneficios en este caso son

$$p^{LS} = \frac{a+3c}{4}, \quad \pi^L = \frac{(a-c)^2}{8b}, \quad \pi^S = \frac{\pi^L}{2}.$$

Mientras que en el equilibrio de Cournot las producciones de ambas firmas coinciden, en el equilibrio de Stackelberg el nivel de producción del líder es el doble que el del seguidor, por lo que su beneficio también se duplica. Obsérvese que el beneficio del líder es superior al que obtendría según el modelo de Cournot, mientras que el del seguidor es menor. El beneficio conjunto de la solución de Stackelberg es menor que el beneficio conjunto de la solución de Cournot, lo que indica que la competencia con el criterio de Stackelberg conduce a una solución subóptima atendiendo al criterio de maximización del beneficio conjunto.

Por último, en el caso en que ambos duopolistas actuaran como líderes<sup>2</sup>, el equilibrio se alcanzaría resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} a - b(q_A + q_B) - \frac{bq_A}{2} - c &= 0, \\ a - b(q_A + q_B) - \frac{bq_B}{2} - c &= 0, \end{aligned}$$

cuya solución es

$$q_A = q_B = q^{LL} = \frac{2(a-c)}{5b},$$

con lo que la cantidad total producida es la mayor entre las situaciones analizadas, esperándose una disminución del precio y consecuentemente una reducción de los beneficios. En efecto,

$$p^{LL} = \frac{a+4c}{5}, \quad \pi_A = \pi_B = \pi^{LL} = \frac{2(a-c)^2}{25b}.$$

En la figura 2.1 se muestran las curvas de reacción y los equilibrios para las situaciones anteriores. El segmento  $\overline{FG}$  está formado por todas aquellas combinaciones cuyo output total equivale al de monopolio, y el  $\overline{DE}$  por todas aquellas que dan lugar a una producción de competencia perfecta<sup>3</sup>. El resto

<sup>2</sup>ambas firmas asumen conjeturas no nulas

<sup>3</sup>la solución de monopolio es aquella que iguala coste marginal e ingreso marginal; el precio en competencia perfecta coincide con el coste marginal

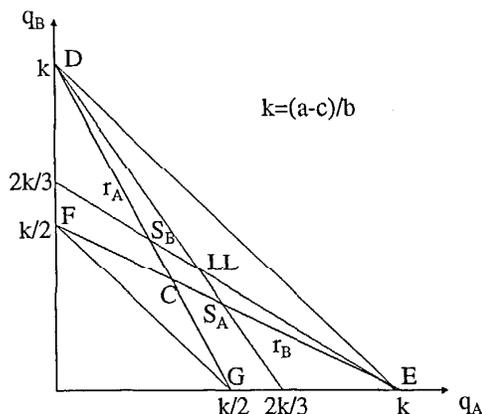


Figura 2.1: Diferentes equilibrios en competencia vía cantidades

de segmentos paralelos entre los anteriores, constituyen el lugar geométrico de todas aquellas producciones que proporcionan un mismo output, estando más alejado del origen cuanto mayor es la producción. Puesto que a las empresas les interesa reducir el output para que aumenten los precios, aproximándose a la situación de monopolio, puede observarse gráficamente que para ambos productores en conjunto la mejor situación es la de Cournot,  $C$ , seguida por aquella en la que uno es líder y el otro seguidor<sup>4</sup>,  $S_A$  y  $S_B$ , y por último aquella en la que los dos actúan como líderes,  $LL$ .

El equilibrio de Cournot, pese a constituir la mejor solución conjunta, descartada la coalición, presenta una cierta inestabilidad a largo plazo, debido a que para cada uno de ellos individualmente la mejor situación posible es convertirse en líder, siempre que su competidor acepte ser seguidor. Cada agente tendrá incentivos a ser líder, pero si lo son ambos la solución será la peor de las posibles. Este resultado apunta la conveniencia de llegar a coaliciones o acuerdos de reparto del mercado, la más obvia de las cuales sería la monopolización del mismo<sup>5</sup>, lo que les permitiría a ambos obtener los beneficios del líder.

Por último, es posible deducir que el oligopolio de Cournot es la forma de organización industrial intermedia entre la competencia perfecta y el monopolio, acercándose tanto más al extremo de la competencia (*monopolio*) cuanto mayor (menor) es el número de empresas que lo forman. Esta idea intuitiva es fácil de

<sup>4</sup>  $S_i$  denota el equilibrio de Stackelberg donde el líder es la firma  $i$ ,  $i = A, B$

<sup>5</sup>  $q_A = q_B = \frac{q^M}{2} = \frac{(a-c)}{4b}$ ,  $p^M = \frac{(a+c)}{2}$ ,  $\pi_A = \pi_B = \frac{\pi^M}{2} = \frac{(a-c)^2}{8b}$

formalizar si en el modelo utilizado se supone que existen  $r$  empresas iguales. En este caso, bajo la hipótesis de Cournot, la maximización del beneficio individual

$$\pi_i = (a - bq)q_i - cq_i, \quad i = 1, \dots, r,$$

da lugar a  $q_i = \frac{(a-c)}{(r+1)b}$ ,  $p = \frac{a+rc}{r+1}$ , y entonces

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^r q_i = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r(a-c)}{(r+1)b} = \frac{a-c}{b},$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} p = c,$$

por lo que la solución de Cournot cuando el número de oligopolistas tiende a infinito, coincide con la de competencia perfecta y, como es obvio, cuando  $r = 1$  con la de monopolio.

### 2.1.2 Modelos de Bertrand y Edgeworth

Los resultados del apartado anterior se han obtenido suponiendo que los oligopolistas compiten produciendo determinadas cantidades del bien, que son adquiridas al precio determinado por la función de demanda. Con frecuencia se ha criticado la falta de realismo de esta competencia vía cantidades, proponiéndose una hipótesis alternativa respecto al comportamiento de los oligopolistas, debida a Bertrand (1883), quien supuso que las empresas competían determinando el precio de venta del producto. Tratándose de un bien homogéneo, los consumidores adquirirán el bien al oligopolista que lo venda a menor precio, por lo que la solución si el coste marginal de todas las firmas coinciden es simplemente el equilibrio en competencia perfecta, es decir, precio igual al coste marginal.

Supongamos que inicialmente dos firmas venden a un precio común (superior al coste marginal); si una de ellas redujese el precio, incluso en una pequeña cantidad, y la otra lo mantuviese, la primera se haría con todo el mercado al ser el producto homogéneo. Sin embargo, la segunda puede también reducir su precio, por lo que mientras haya margen, es decir, siempre que el precio sea superior al coste marginal, habrá posibilidad de reducir el precio. Entonces, en el límite el precio de equilibrio, igual para ambas empresas, coincide con el coste marginal. La paradoja es que con tan sólo dos empresas, se ha obtenido el equilibrio en competencia perfecta. Sin embargo, este resultado se basa en tres supuestos fundamentales. El primero, el producto es perfectamente homogéneo; una ligera diferenciación del mismo conduce a que el resultado competitivo no se produzca, por lo que es beneficioso para los oligopolistas inmersos en una competencia en precios diferenciar sus productos (por ejemplo, elegir ubicaciones diferentes). En segundo lugar, el resultado competitivo sólo se justifica con un

planteamiento estático en el que las empresas, cuando rebajan ligeramente su precio, se apropian de todo el mercado. Sin embargo, si tienen en cuenta que a su decisión de rebajar el precio le seguirá ineludiblemente una reacción de los competidores rebajándolo aun más, resultará más conveniente para todos no entrar en una lucha a la baja de precios que conducirá a anular sus beneficios, siendo conveniente llegar a algún tipo de acuerdos. Por último, los costes de ambas empresas son iguales; en el caso de no ser así, el precio final de Bertrand igualaría al mayor coste marginal, por lo que la empresa con mayores costes no tendría beneficios. Este hecho motiva además la necesidad de reducir los costes.

Tenemos, en resumen, dos posibles explicaciones del comportamiento del oligopolio. La más realista desde el punto de vista del tipo de competencia que se establece entre los productores, la de Bertrand, da lugar a un resultado sorprendente ya que los oligopolios, en la práctica, no se comportan como competencia perfecta. La menos realista desde el punto de vista de cómo se compite, la de Cournot, proporciona un resultado más acorde con la realidad. La solución más satisfactoria sería, por tanto, que dispusiésemos de un modelo teórico de oligopolio que, considerando que los oligopolistas compiten vía precios, condujera a un equilibrio final en que el output total fuera inferior al de competencia perfecta. La idea original de esta síntesis se debe a Edgeworth.

Edgeworth (1925) supuso que si dos empresas instaladas compiten entre sí vía precios, lo hacen con dimensiones dadas, y que estas dimensiones implican restricciones de capacidad que hacen que el equilibrio final de la conjetura de Bertrand no sea el de competencia perfecta. Suponer que la dimensión de cada empresa no le permite satisfacer individualmente toda la demanda correspondiente a la solución competitiva, es un supuesto sensato debido a que no tendría sentido que las empresas instalasen capacidades excedentarias, teniendo que asumir los costes derivados. Si esto es así, la solución  $p_A = p_B = c$  no puede constituir un equilibrio ya que una de las empresas podría subir el precio y atender la demanda no cubierta por su competidora por falta de capacidad y obtener beneficios. En consecuencia, la restricción de capacidad impide que la solución del problema vía precios sea la de competencia perfecta. La formulación de esta idea en términos de teoría de juegos consiste en suponer que los oligopolistas participan en un juego en dos etapas, en la primera de las cuales eligen simultáneamente la dimensión de sus respectivas empresas, y en la segunda, una vez instaladas las capacidades y conocidas las mismas por ambas empresas, éstas compiten vía precios, fijándolos también de forma simultánea.

### 2.1.3 Modelo de Hotelling

Una de las suposiciones bajo la que se sostiene la paradoja de Bertrand es que el producto es homogéneo. En esta situación, el precio es la única variable de interés para los consumidores, y cuando el coste marginal de todos los

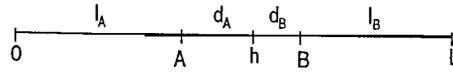


Figura 2.2: Representación espacial considerada por Hotelling

oligopolistas coincide, ninguna empresa puede elevar su precio por encima del coste marginal sin perder todo el mercado. Sin embargo, en la práctica esta suposición rara vez se cumple, existiendo otras variables que condicionan la decisión de los consumidores. Algunos pueden estar dispuestos a pagar un precio superior, si para adquirir el bien deben recorrer una distancia más corta, o si la empresa suministradora proporciona un mejor servicio postventa, por ejemplo.

La diferenciación del producto es un hecho en nuestra economía, siendo los bienes que ofrecen la mayoría de las empresas no homogéneos. La diferenciación presenta ventajas para todos los agentes; para los consumidores, porque la elección entre un abanico más amplio de posibilidades permite optar por aquel que mejor satisface sus preferencias, aumentando con ello su satisfacción; para las empresas, porque ser el único oferente de ciertas características confiere cierto poder de mercado.

El análisis de la diferenciación tiene interés en tres tipos de problemas. En el primero, varias firmas deciden las características de sus productos dentro del espacio de preferencias de los consumidores. En el segundo, un conjunto de agentes se posicionan ideológicamente para conseguir el mayor número de electores, o bien se decide democráticamente la ubicación de un servicio, lo que se conoce como *teoría del voto*. Finalmente, en el tercer problema un conjunto de firmas se ubican físicamente con el fin de satisfacer algún objetivo.

Para ilustrar estas cuestiones, consideremos el modelo clásico de competencia espacial formulado por Hotelling (1929). Supongamos una calle de longitud  $L$ , en la que se encuentran distribuidos uniformemente los consumidores. Existen dos empresas, ubicadas en lugares distintos de la calle, que producen el mismo bien. La primera empresa está situada en el punto  $A$ , a una distancia  $l_A$  del principio de la calle, y la segunda empresa se ubica en  $B$ , a una distancia  $l_B$  del final de la misma. Un consumidor genérico  $h$  se encuentra situado a una distancia  $d_A$  de la primera empresa y  $d_B$  de la segunda. Esta situación está representada en la figura 2.2.

Es obvio por propia construcción que  $l_A + d_A + d_B + l_B = L$  y que, como estamos analizando el caso en que ambas empresas están situadas en puntos distintos,  $l_A + l_B < L$ .

Las empresas<sup>6</sup> producen a un coste marginal  $c$  y venden a unos precios en fábrica  $p_i$ ,  $i = A, B$ . Transportar una unidad del bien cuesta  $\tau$  por unidad de distancia, por lo que el coste por unidad para un consumidor situado a una distancia  $d_i$  de la empresa  $i$  será  $p_i + \tau d_i$ ,  $i = A, B$ . Puesto que el bien es homogéneo, la única diferencia para el consumidor será su coste, de forma que para que un consumidor se encuentre indiferente entre adquirirlo de una u otra empresa (consumidor marginal) habrá de verificarse

$$p_A + \tau d_A = p_B + \tau d_B.$$

Si se cumple esta relación, y suponiendo que cada consumidor adquiere una unidad de bien, es decir, que la demanda es totalmente inelástica al precio (lo que sucede en el caso de bienes esenciales), la demanda cubierta por la primera empresa será  $l_A + d_A$  y la de la segunda  $l_B + d_B$ .

Asumiendo localizaciones dadas, las demandas captadas son funciones discontinuas del precio. En efecto, supongamos que  $p_B$  está dado; la firma  $A$  podría ganar mercado reduciendo  $p_A$ , lo que desplazaría hacia la derecha al consumidor marginal, reduciendo  $d_B$  y aumentando  $d_A$ . Para captar todo el mercado entre el comienzo de la calle y el punto en el que se ubica su competidora, la firma  $A$  debería fijar el siguiente precio

$$p_A^0 = p_B - \tau (d_A + d_B).$$

Si ahora redujera  $p_A$  ligeramente por debajo de  $p_A^0$ , la primera empresa se haría con todo el mercado. Por tanto, su cuota de mercado presentaría una discontinuidad en  $p_A^0$ , lo que motiva la no existencia de equilibrio. D'Aspremont, Gabszewicz y Thisse (1979) demostraron que si las empresas se encuentran en posiciones distintas próximas al centro, no existe precio de equilibrio. No obstante, cuanto más distantes se encuentren ambas empresas, es más probable que exista equilibrio al aumentar el dominio en el que las cuotas de mercado son continuas<sup>7</sup>. También demostraron que la condición para que los precios sean de equilibrio es

$$|p_A - p_B| \leq \tau (d_A + d_B) = \tau \delta,$$

siendo  $\delta = L - l_A - l_B$  la distancia entre ambas empresas. Supondremos en lo sucesivo que se satisface esta relación y que, por tanto, las firmas están suficientemente alejadas.

Dado que  $\delta = d_A + d_B$ , de la condición  $p_A + \tau d_A = p_B + \tau d_B$  se puede obtener

$$d_i = \frac{\tau \delta - p_i + p_j}{2\tau}, \quad i, j = A, B; \quad j \neq i,$$

<sup>6</sup> supondremos por simplicidad, sin que ello afecte a los resultados, que los costes fijos son iguales y no dependen de la localización

<sup>7</sup> en el caso límite en que cada empresa se situara en un extremo de la calle, no habría discontinuidad

y entonces el beneficio puede expresarse de la siguiente manera

$$\pi_i = (p_i - c)(l_i + d_i) = \frac{(\tau\delta - p_i + p_j + 2\tau l_i)(p_i - c)}{2\tau}, \quad i, j = A, B; \quad j \neq i.$$

Las condiciones de primer orden para el problema de maximización de beneficio vienen dadas por

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial p_i} = \frac{\tau\delta - 2p_i + p_j + 2\tau l_i + c}{2\tau} = 0, \quad i, j = A, B; \quad j \neq i,$$

de donde se obtienen los siguientes precios de equilibrio

$$\bar{p}_i = c + \tau \left( L + \frac{l_i - l_j}{3} \right), \quad i, j = A, B; \quad j \neq i,$$

lo que indica que, incluso con productos homogéneos, la diferenciación espacial puede conducir a precios de equilibrio diferentes.

Nótese que cada empresa aumentaría sus beneficios si, dados los precios y localización del rival, redujera su distancia al mismo, debido a que las derivadas parciales  $\partial \pi_i / \partial l_i$ ,  $i = A, B$ , evaluadas en estos precios de equilibrio son positivas. Este es un resultado razonable porque una aproximación le permitiría capturar parte del mercado rival sin perder nada del suyo. Esto, en el límite, conduciría a que ambas empresas se sitúen juntas en el centro del mercado. En esta situación, la diferenciación del producto es nula, resultado que se conoce como *principio de diferenciación mínima* de Hotelling.

Este principio parece indicar que la competencia espacial da lugar a una diferenciación mínima y ayudaría a comprender, por ejemplo, por qué los automóviles son muy similares entre sí, o por qué la regla general de cualquier productor que entra en un mercado consiste en ofrecer productos similares a los ya existentes. La generalidad del resultado hace que sea considerado en terrenos ajenos a los propios de la diferenciación del producto. Permite, por ejemplo, explicar las razones por las cuales distintas religiones poseen bastantes rasgos comunes o por qué los políticos, a la hora de diseñar sus campañas electorales, tratan de parecer más moderados.

Sin embargo, cabe destacar que este resultado no se obtiene del razonamiento seguido ya que Hotelling no se percató de que las expresiones del beneficio  $\pi_i$  de las que se deduce el equilibrio, se han obtenido suponiendo que las firmas se encuentran suficientemente alejadas. Este hecho es puesto de manifiesto por D'Aspremont, Gabszewicz y Thisse (1979), quienes además demuestran que si las firmas se encuentran próximas entre sí en la primera etapa, no existe equilibrio en precios en la segunda etapa. La razón es bastante simple; si las firmas se localizan próximas entre sí, la agresiva competencia en precios conduciría los beneficios de ambas firmas a cero. Sin embargo, cada firma aumentaría su beneficio alejándose de su competidora.

### Extensiones del problema de Hotelling

Hotelling asumió costes de transporte constantes por unidad de distancia (función lineal de la distancia) y demandas totalmente inelásticas al precio. Sin embargo, para otros tipos de costes de transporte el efecto puede ser justo el contrario, es decir, obtener máxima en lugar de mínima diferenciación. Supongamos, por ejemplo, que el coste de transportar una unidad del bien a una distancia  $d$  es  $\tau d^2$  (D'Aspremont y otros, 1979). Un efecto de este supuesto es que las demandas captadas, y por tanto los beneficios, dejan de ser discontinuas, con lo que se elimina el posible problema de existencia de equilibrio, es decir, no existe limitación alguna en la localización de las empresas.

Ahora, un consumidor será marginal si

$$p_A + \tau d_A^2 = p_B + \tau d_B^2,$$

lo que, teniendo en cuenta que  $\delta = d_A + d_B$ , permite expresar la distancia de cada empresa al consumidor marginal de la siguiente forma

$$d_i = \frac{\tau \delta^2 - p_i + p_j}{2\tau \delta}, \quad i, j = A, B; \quad j \neq i,$$

y, por tanto, los beneficios como

$$\pi_i = (p_i - c)(l_i + d_i) = \frac{(\tau \delta^2 - p_i + p_j + 2\tau \delta l_i)(p_i - c)}{2\tau \delta}, \quad i, j = A, B; \quad j \neq i.$$

Las condiciones de primer orden correspondientes conducen a los siguientes precios de equilibrio

$$\bar{p}_i = c + \tau \delta \left( L + \frac{l_i - l_j}{3} \right), \quad i, j = A, B; \quad j \neq i.$$

Se puede comprobar que el signo de  $\partial \pi_i / \partial l_i$  evaluado en el precio de equilibrio es negativo, por lo que las dos empresas tenderán a situarse en los extremos del mercado, obteniéndose por tanto un resultado que cabría llamar de diferenciación máxima. En resumen, el grado de diferenciación en los modelos de competencia espacial depende en gran medida de los costes de transporte.

Cuando las decisiones en localización y precios son simultáneas es fácil comprobar que no existe equilibrio de Nash independientemente de los costes de transporte<sup>8</sup>. Procediendo por reducción al absurdo, supongamos que existe equilibrio. Si las localizaciones son coincidentes, la competencia a la baja en precios lleva a ambas firmas fuera del mercado (modelo de Bertrand). Por tanto,

<sup>8</sup>incluso cuando los costes de transporte son funciones cuadráticas

supongamos que las localizaciones de equilibrio no son coincidentes. En tal caso, cualquiera de ellas puede aumentar sus beneficios desplazándose ligeramente hacia su competidor, ya que de esta forma aumentaría su cuota de mercado. Obsérvese que este hecho no ocurre cuando las decisiones son secuenciales ya que dicha firma conoce que a ese desplazamiento le sigue ineludiblemente una reducción de los precios en la siguiente etapa, y como se indicó anteriormente, una reducción del beneficio.

El problema de la existencia de equilibrio ha originado un extenso número de trabajos que modifican alguno de los supuestos del modelo de Hotelling, con el objetivo fundamental de recuperar el equilibrio y establecer conclusiones en cuanto al grado de diferenciación espacial de las empresas. Andaluz (1995) enumera las principales líneas de trabajo sobre el tema y señala que el grado de diferenciación viene determinado por el conflicto entre dos efectos: un efecto directo sobre la cuota de mercado y un efecto indirecto a través de la variación en el precio del competidor. El efecto directo incentiva a la empresa a localizarse próxima a su rival, con el fin de captar la máxima cuota de mercado posible. Por el contrario, el efecto indirecto lleva a cada duopolista a diferenciarse de su competidor, evitando así una excesiva competencia en precios en la segunda etapa del juego. En función de cual sea el efecto dominante, se obtendrá un determinado grado de diferenciación, lo cual se halla estrictamente relacionado con la función de coste de transporte. La función cuadrática de la distancia es frecuentemente utilizada en la literatura de marketing sobre preferencias individuales.

Anderson (1988) utiliza costes de transporte de la forma  $\tau_1 d + \tau_2 d^2$  y demuestra que sólo si  $\tau_1 = 0$ , es decir en el caso de costes de transporte puramente cuadráticos analizado con anterioridad, existe equilibrio en estrategias puras. Este tipo de costes es utilizado por Frutos y otros (1999) en un modelo circular. Por otro lado, los costes de transporte del tipo  $d^\alpha$  con  $\alpha \in [1, 2]$  son estudiados por Economides (1986). La conclusión es que si  $\alpha < 1.26$  no existe equilibrio de Nash subjuego-perfecto (este rango incluye el supuesto de Hotelling  $\alpha = 1$ ). Para  $1.26 \leq \alpha < 5/3$  las localizaciones de equilibrio son estrictamente interiores mientras que para  $\alpha \geq 5/3$  el equilibrio se alcanza en los extremos del intervalo (como caso particular se tiene  $\alpha = 2$ , estudiado por D'Aspremont y otros, 1979).

Otro intento de generalizar el modelo de Hotelling se debe a Lerner y Singer (1937) y posteriormente a Eaton y Lipsey (1975). El escenario es idéntico al de Hotelling sólo que ahora son tres las firmas que compiten en el mercado y los precios en fábrica están fijos y coinciden entre las firmas. Es fácil comprobar que no existe equilibrio en este caso. Puesto que el precio está fijo, cada firma maximiza su beneficio cuando es máxima su cuota de mercado. Si las firmas  $A$ ,  $B$  y  $C$  se encuentran situadas en el segmento en este orden, las dos exteriores ( $A$  y  $C$ ) verán aumentar su cuota de mercado al desplazarse hacia  $B$ , mientras

que la de ésta última tiende a cero. Entonces,  $B$  se verá obligada a desplazarse a la derecha de  $C$  o a la izquierda de  $A$ . Este proceso continúa indefinidamente. Teitz (1968) observa un comportamiento similar en un modelo con dos firmas donde una de ellas ubica dos centros y la otra sólo uno.

Cuando el número de firmas es mayor que tres, el caso es nuevamente diferente. El trabajo original de Lerner y Singer (1937) muestra que existe equilibrio para más de 8 firmas. Eaton y Lipsey (1975) demuestran que el único caso en el que no existe equilibrio de Nash es el de tres firmas. Además, para 6 o más firmas existen múltiples equilibrios. Como ejemplo, consideremos 6 firmas situadas en

$$\left( \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{3}{6}, \frac{3}{6}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6} \right).$$

Cada una capta una sexta parte del mercado. Puede comprobarse que ninguna de ellas aumenta su cuota de mercado relocalizándose unilateralmente, lo que indica que se trata de un equilibrio de Nash. Sin embargo, otro equilibrio de Nash es

$$\left( \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{7}{8} \right).$$

En este caso, las firmas con localizaciones diferentes captan  $2/8$  y el resto  $1/8$ .

Otro modelo simple fue propuesto por Smithies (1941). La diferencia respecto al de Hotelling radica en que ahora el bien ofrecido no es esencial, frente al resto de modelos en los que la demanda es totalmente inelástica. Smithies utiliza una función de demanda linealmente decreciente con precio de reserva finito. En este caso las firmas se sitúan en el primer y tercer cuartil.

Obsérvese que los resultados de estos modelos de competencia espacial son muy sensibles a las condiciones del problema. El modelo de Hotelling original no tiene equilibrio pero, sin embargo, el coste de transporte cuadrático proporciona un equilibrio con diferenciación máxima. Cuando los precios están fijados en el modelo de Hotelling, se recupera nuevamente el equilibrio aunque con diferenciación mínima. Sin embargo, basta añadir una tercera firma para que nuevamente se pierda el equilibrio.

## 2.2 Nociones y resultados básicos

En este apartado se recogen algunas nociones y resultados sobre juegos y redes que serán utilizados en el resto de la memoria. Se definen las principales soluciones de equilibrio y se muestra un cuadro resumen que recoge las características de algunos de los trabajos más destacados sobre juegos espaciales junto con los casos tratados en esta memoria. Finalmente, se recogen algunos resultados generales de convexidad que serán utilizados con posterioridad.

### 2.2.1 Redes

Una red  $N = N(V, E)$  es un par de conjuntos  $(V, E)$  tales que  $E \subseteq V \times V$ . A los elementos de  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  se les llama nodos o vértices y a los elementos de  $E$  se les llama aristas. Cada nodo tiene asociado un peso no negativo  $\lambda_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , y cada arista tiene asignada una longitud positiva.

Una definición alternativa de red es la siguiente. Una red es un conjunto  $N = N(V, E) \subset \mathbb{R}^d$  que resulta de la unión de un número finito de aristas. Cada arista es la imagen de un intervalo cerrado  $[0, l] \subset \mathbb{R}$  mediante una función continua e inyectiva  $f : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^d$ . La longitud de la arista es  $l$ . La intersección de dos aristas, si existe, ocurre en los extremos de las mismas. Un punto  $x$  de la red  $N(V, E)$  situado en la arista  $[v_i, v_j]$  de longitud  $l_{ij}$ , tiene asociado un único valor real  $\theta \in [0, l_{ij}]$ , donde  $\theta$  representa la distancia entre  $v_i$  y  $x$ . Si a  $x, x' \in [v_i, v_j]$  le corresponden  $\theta_x, \theta_{x'} \in [0, l_{ij}]$ , entonces  $\delta_{xx'} = |\theta_x - \theta_{x'}|$ . Para cada  $v_k$ , la distancia es una función continua y cóncava de  $\theta$  en  $[0, l_{ij}]$ , o lo que es equivalente,  $\delta_{xv_k}$  es una función continua y cóncava de  $x$  cuando  $x$  se mueve sobre la arista  $[v_i, v_j]$ .

Una red es conexa si existe un camino entre cualquier par de nodos, es decir, una sucesión de aristas que los conectan. En esta memoria se consideran redes conexas. Un árbol es una red conexa que no contiene ciclos, es decir, no existe ningún camino que una un nodo consigo mismo sin repetir alguna arista. En un árbol existe un único camino que no repite aristas entre cualquier par de nodos. Dado un problema en redes, cuando las localizaciones factibles se restringen a los nodos de la red, el problema resultante se dice que es *discreto*.

La distancia entre cualquier par de puntos en una red,  $\delta_{xy}$ , viene dada por la longitud del camino mínimo que une  $x$  con  $y$ . La distancia entre un punto dado de la red  $x$  y un punto  $y$  variable a lo largo de una arista que no contenga al primero es una función lineal a trozos, continua y cóncava de  $y$ . En el caso particular de un árbol, dicha distancia es una función lineal ( $y$ , por tanto, convexa).

Un punto  $m \in N$  es una *mediana* si y sólo si

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \delta(v_k, m) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k \delta(v_k, x), \quad \forall x \in N.$$

Es conocido que el conjunto de medianas es no vacío y que al menos una de ellas corresponde a un nodo. Además, cuando la demanda agregada es un número impar, cualquier mediana es un nodo (Hakimi, 1964).

El problema clásico de las  $p$ -medianas consiste en determinar un conjunto de  $p$  puntos de la red  $N = N(V, E)$ ,  $X_p^* \subset N$ , tal que minimicen la función

$$F(X_p) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \min \{ \delta(x_j, v_k) : x_j \in X_p \},$$

siendo  $X_p = \{x_j\}_{j=1}^p \subset N$ .

Este problema ha sido generalizado considerando varios productos o servicios, redes orientadas o no orientadas, demandas y costes de transporte estocásticos (en el sentido de que siguen alguna distribución de probabilidad y varían en el tiempo), varios objetivos "tipo mediana", y costes de transporte no lineales incorporando varios atributos de desplazamiento.

**Definición 2.1** (Mirchandani y Francis, 1990) *Un conjunto de puntos  $X_p^*$  es un conjunto de  $p$ -medianas generalizadas de la red  $N = N(V, E)$  si*

$$F_g(X_p^*) \leq F_g(X_p), \forall X_p \subset N,$$

donde

$$F_g(X_p) = \sum_{l=1}^s P^l \sum_{k=1}^n \bar{w}_k^l \cdot \bar{c}_k(\bar{D}^l(X_p, v_k))$$

y  $\bar{c}_k(\bar{D}^l(X_p, v_k))$  es el vector  $q$ -dimensional de costes unitarios cuya componente  $i$ -ésima es  $c_{ki}(\bar{D}_i^l(X_p, v_k))$ , siendo  $q$  el número de productos o servicios. El término  $\bar{w}_k^l$  representa el vector  $q$ -dimensional cuya componente  $i$ -ésima,  $w_{ki}^l$ , es la demanda en  $v_k$  del producto  $i$  en el estado  $N^l$  de la red con probabilidad  $P^l$ ,  $l = 1, \dots, s$ . Asociado con el transporte del producto  $i$  desde el punto de servicio en  $x_j$  hasta el punto de demanda  $v_k$  vía el camino óptimo, existe un coste de desplazamiento  $c_{ki}(\delta_i^l(x_j, v_k))$  donde  $\delta_i^l(x_j, v_k)$  es el vector de atributos de desplazamiento (distancia, tiempo, energía, etc.) para el producto  $i$  por el camino óptimo en el estado  $N^l$ , y  $\bar{D}_i^l(X_p, v_k)$  es el vector  $h$ -dimensional con componente  $u$ -ésima

$$D_{iu}^l(X_p, v_k) = \min \{ \delta_{iu}^l(x_j, v_k) : x_j \in X_p \},$$

siendo  $\delta_{iu}^l(x_j, v_k)$  el valor del atributo  $u$  correspondiente al desplazamiento del producto  $i$  desde el punto de servicio en  $x_j$  hasta el punto de demanda en  $v_k$ .

**Condición 2.1** (Propiedad de homogeneidad) *El valor de cualquier atributo de desplazamiento  $\alpha$  en una fracción  $\theta$  del arco  $[v_i, v_j]$  es  $\theta \alpha_{ij}^l$  para todo estado  $N^l$ , siendo  $\alpha_{ij}^l$  el valor del atributo  $\alpha$  en el arco  $[v_i, v_j]$  en el estado  $N^l$ .*

**Proposición 2.0** (Mirchandani y Francis, 1990) *Bajo la condición 2.1, si las funciones de coste de desplazamiento son cóncavas en los atributos, entonces existe al menos un subconjunto de  $p$  vértices,  $V' \subset V$ , que es un conjunto de  $p$ -medianas generalizadas de la red  $N = N(V, E)$ .*

### 2.2.2 Juegos

Tirole (1988, p.423) señala que la teoría de juegos no cooperativos es una herramienta útil para analizar las interacciones estratégicas entre jugadores y ha encontrado numerosas aplicaciones en el campo de la Economía Industrial. Un juego representa una situación de conflicto entre dos o más individuos, en el que cada contendiente, jugador o participante, tiene algún control, aunque no total, sobre el resultado del conflicto. Existen algunas características comunes en la mayor parte de los juegos. En primer lugar, los juegos poseen reglas que gobiernan el orden en que se realizan las acciones, que describen el conjunto de acciones permitidas y que definen en qué medida se relaciona el resultado del juego con las acciones adoptadas. En segundo lugar, existen dos o más jugadores, cada uno de los cuales lucha racionalmente por maximizar su utilidad. En tercer lugar, el resultado para un jugador depende de las acciones de los otros jugadores. El jugador conoce esto, y sabe que la elección de las mejores acciones requiere una valoración inteligente de las acciones que, probablemente, serán adoptadas por los otros jugadores (Friedman, 1991, p.3).

Un juego  $\Gamma(I, S, \Pi)$  está formado por un conjunto de jugadores  $I = \{1, 2, \dots, l\}$ , un espacio de estrategias  $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_l$ , siendo  $S_i \subseteq \mathbb{R}^m$  el espacio de estrategias del jugador  $i$ , y un vector de pagos  $\Pi = (\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_l)$  con  $\Pi_i$  la función de pagos del jugador  $i$ . En esta memoria se consideran juegos no cooperativos de información completa. No cooperativo supone que no se permiten acuerdos entre los jugadores. Un juego se dice de información completa si cada jugador conoce todos los conjuntos de estrategias y todas las funciones de pagos.

**Definición 2.2** (Friedman, 1991) *La función de mejor respuesta para el jugador  $i \in I$  es*

$$r_i(s) = \left\{ t_i \in S_i : \Pi_i(s | t_i) = \max_{s_i \in S_i} \Pi_i(s | s_i) \right\},$$

donde para cada  $s = (s_1, s_2, \dots, s_l) \in S$ ,  $s | t_i$  denota  $(s_1, \dots, s_{i-1}, t_i, s_{i+1}, \dots, s_l)$ , es decir, el vector  $s$  con  $t_i$  en lugar de  $s_i$ . Además, cuando  $s \in r(s)$ ,  $r(s) = (r_1(s), \dots, r_l(s))$ , se dice que  $s$  es un punto fijo de  $r$ .

Se tiene que  $s \in S$  es un equilibrio de  $\Gamma$  si y sólo si  $s \in r(s)$ , es decir, los puntos de equilibrio coinciden con los puntos fijos de  $r$ .

Según Wang y Parlar (1989), existen dos tipos principales de soluciones para este tipo de juegos, que son el equilibrio de Nash y el equilibrio de Stackelberg. Además de estos, a continuación se incluyen otros conceptos que serán empleados posteriormente.

(a) **Equilibrio de Nash.** Conocido también como equilibrio con conjeturas nulas o equilibrio de Cournot-Nash, es el principal concepto de solución para toda clase de juegos no cooperativos. Es propuesto por Nash (1951) y posteriormente extendido por otros autores. Un equilibrio de Nash es un conjunto de estrategias, una para cada jugador, de tal forma que cualquiera que se desvíe de ella unilateralmente, no mejoraría su pago.

Formalmente, la estrategia  $(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots, \bar{s}_l)$  es un *equilibrio de Nash* para  $\Gamma$  si y sólo si

$$\Pi_i(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots, \bar{s}_l) \geq \Pi_i(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots, \bar{s}_{i-1}, s_i, \bar{s}_{i+1}, \dots, \bar{s}_l), \forall s_i \in S_i, i = 1, 2, \dots, l.$$

Esto es,

$$\Pi_i(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots, \bar{s}_l) = \max_{s_i \in S_i} \Pi_i(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots, \bar{s}_{i-1}, s_i, \bar{s}_{i+1}, \dots, \bar{s}_l), i = 1, 2, \dots, l.$$

Si el objetivo es minimizar los pagos (si se trata de funciones de costes, por ejemplo), éstos se deben tomar con signo negativo o bien reemplazar en la definición anterior *max* por *min*.

Tanto el equilibrio de Cournot como el de Bertrand pueden formularse como casos particulares del equilibrio de Nash cuando el número de jugadores es dos. El conjunto de estrategias son las producciones y los precios, respectivamente, y los pagos vienen dados por las funciones de beneficios.

El equilibrio de Nash puede no existir. Sin embargo, si el juego es finito, es decir tanto el conjunto de jugadores como el espacio de estrategias son finitos, siempre habrá un equilibrio de Nash de estrategias mixtas<sup>9</sup> (Nash, 1951). No existe un método general para encontrar un equilibrio de Nash. En un juego finito es necesario evaluar todas las posibles combinaciones de estrategias, lo que lo hace, en ciertas ocasiones, intratable debido al gran número de combinaciones posibles<sup>10</sup>. Si los pagos son funciones diferenciables, la búsqueda del equilibrio de Nash puede realizarse con ayuda del cálculo diferencial. En esta sección se presentan condiciones suficientes de existencia y unicidad de equilibrio de Nash para funciones de pago cuasicóncavas. Existen diferentes definiciones y caracterizaciones de funciones cuasicóncavas. Para un estudio de la cuasicóncavidad y otros conceptos de concavidad generalizada puede consultarse el texto de Avriel (1988).

<sup>9</sup> una estrategia que consiste en una distribución de probabilidad de las estrategias originales (puras)

<sup>10</sup> por ejemplo, un juego con seis jugadores y seis estrategias presenta  $6^6 = 46656$  combinaciones posibles

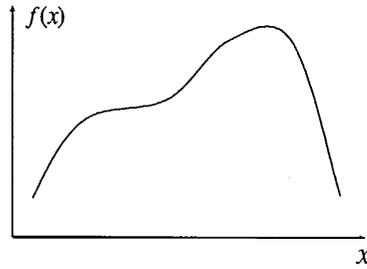


Figura 2.3: Ejemplo de una función cuasicóncava que no es cóncava

**Definición 2.3** Sea  $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $C$  convexo. Se dice que  $f$  es cuasicóncava si los conjuntos de niveles superiores

$$U_\alpha = \{x \in C : f(x) \geq \alpha\}$$

son convexos,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ . De forma similar,  $f$  es cuasiconvexa si los conjuntos de niveles inferiores

$$L_\alpha = \{x \in C : f(x) \leq \alpha\}$$

son convexos,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ .

Concavidad (convexidad) implica cuasiconcavidad (cuasiconvexidad). La implicación contraria no es cierta. En la figura 2.3 se muestra un ejemplo de una función que es cuasicóncava y no cóncava.

Una caracterización para funciones cuasicóncavas es la siguiente. La función  $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $C$  convexo, es cuasicóncava si y sólo si

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min \{f(x_1), f(x_2)\}, \forall x_1, x_2 \in C, \forall \lambda \in [0, 1].$$

Una función es estrictamente cuasicóncava si en la expresión anterior la desigualdad es estricta para  $\lambda \in (0, 1)$ . Además, es conocido que si  $f$  es creciente en  $C$  entonces  $f$  es cuasicóncava en  $C$ . Un resultado equivalente para funciones cuasiconvexas se obtiene teniendo en cuenta que  $f$  es cuasiconvexa si y sólo si  $-f$  es cuasicóncava.

**Proposición 2.1** (Rosen, 1965, y Friedman, 1991) Sea  $\Gamma(I, S, \Pi)$  un juego no cooperativo de información completa que satisface las condiciones siguientes:

*Condición 1.*  $S_i \subset \mathbb{R}^m$  es compacto y convexo para cada  $i \in I$ .

*Condición 2.*  $\Pi_i(s)$  es continua en  $S$  para cada  $i \in I$ .

*Condición 3.*  $\Pi_i(s | t_i)$  es cuasicóncava respecto de  $t_i \in S_i$ , para cada  $s \in S$ ,  $i \in I$ , donde para una estrategia  $s = (s_1, s_2, \dots, s_l) \in S$ ,  $s | t_i$  denota  $(s_1, \dots, s_{i-1}, t_i, s_{i+1}, \dots, s_l)$ .

Entonces el juego  $\Gamma$  tiene al menos un equilibrio de Nash.

**Proposición 2.2** (Rosen, 1965, y Friedman, 1991) Sea  $\Gamma(I, S, \Pi)$  un juego no cooperativo de información completa que satisface las condiciones siguientes:

*Condición 1.*  $S_i \subset \mathbb{R}^m$  es compacto y convexo para cada  $i \in I$ .

*Condición 4.*  $\Pi_i(s)$  es una función de clase  $C^{(2)}$  en  $S$  para cada  $i \in I$ .

*Condición 5.*  $\Pi_i(s | t_i)$  es estrictamente cuasicóncava respecto de  $t_i \in S_i$ , para cada  $s \in S$ ,  $i \in I$ .

*Condición 6.* La matriz  $H(s) = \left( \frac{\partial^2 \Pi_i(s)}{\partial s_{ik} \partial s_{jl}} \right)_{i,j \in I; k,l=1,\dots,m}$  es cuasidefinida negativa para cada  $s \in S$ ; esto es,  $H(s) + H^t(s)$  es definida negativa para cada  $s \in S$ .

Entonces el juego  $\Gamma$  tiene un único equilibrio de Nash.

Si el objetivo del juego es la minimización de los pagos, basta considerar como funciones de pagos las opuestas de las originales para aplicar las proposiciones 2.1 y 2.2.

(b) **Equilibrio de Stackelberg.** El equilibrio de Nash proporciona la solución de un juego en el que ningún jugador domina el proceso de decisión. En otro caso, una posible solución corresponde al equilibrio de Stackelberg, donde el jugador que tiene la posición dominante se llama líder, mientras que el resto, que reacciona a la decisión del líder, se denominan seguidores.

Formalmente, cuando el número de jugadores es dos, una estrategia  $(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$  es un *equilibrio de Stackelberg* para  $\Gamma$ , donde el primer jugador es líder, si y sólo si

$$\Pi_1(\bar{s}_1, \bar{s}_2) = \max_{s_1 \in S_1} \Pi_1(s_1, s_2(s_1)),$$

donde  $\Pi_2(s_1, s_2(s_1)) = \max_{s_2 \in S_2} \Pi_2(s_1, s_2)$ .

El equilibrio de Stackelberg puede ser también formulado de forma similar para más de dos jugadores, si uno asume el comportamiento de líder y el resto el de seguidor. Esto es,  $(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots, \bar{s}_l)$  es un *equilibrio de Stackelberg* para  $\Gamma$ , donde el primer jugador es líder, si y sólo si

$$\Pi_1(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots, \bar{s}_l) = \max_{s_1 \in S_1} \Pi_1(s_1, s_2(s_1), \dots, s_l(s_1)),$$

donde

$$\begin{aligned} & \Pi_i(s_1, \bar{s}_2, \dots, \bar{s}_{i-1}, s_i(s_1), \bar{s}_{i+1}, \dots, \bar{s}_l) \\ &= \max_{s_i \in S_i} \Pi_i(s_1, \bar{s}_2, \dots, \bar{s}_{i-1}, s_i, \bar{s}_{i+1}, \dots, \bar{s}_l), \quad i = 2, \dots, l. \end{aligned}$$

El líder no siempre tiene ventajas frente al seguidor. Un ejemplo donde la ventaja es para éste último ocurre en el problema de localización para dos firmas con precios fijos e iguales. En este caso, la empresa líder es la que se sitúa en primer lugar. Si se admiten localizaciones coincidentes, el seguidor se asegura como mínimo la mitad de la cuota de mercado (al situarse junto al líder). Sin embargo, como se mostró en la sección 2.1, la competencia vía cantidades da ventajas al líder.

Si el conjunto de estrategias es finito, siempre existirá al menos un equilibrio de Stackelberg.

**(c) Equilibrio con conjeturas no nulas.** (Segura, 1993) Se trata de una variante del equilibrio de Stackelberg donde todos los jugadores asumen el papel de líderes. Formalmente, cuando el número de jugadores es dos, el par  $(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$  es un *equilibrio con conjeturas no nulas* si y sólo si

$$\Pi_1(\bar{s}_1, \bar{s}_2) = \max_{s_1 \in S_1} \Pi_1(s_1, s_2(s_1)),$$

$$\Pi_2(\bar{s}_1, \bar{s}_2) = \max_{s_2 \in S_2} \Pi_2(s_1(s_2), s_2),$$

donde  $\Pi_2(s_1, s_2(s_1)) = \max_{s_2 \in S_2} \Pi_2(s_1, s_2)s_2(s_1)$  y  $\Pi_1(s_1(s_2), s_2) = \max_{s_1 \in S_1} \Pi_1(s_1, s_2)$ .

Esta formulación puede también ser extendida a más de dos jugadores de forma similar. En un equilibrio de Nash los jugadores toman las estrategias de los oponentes como dadas, por lo que no se considera la posibilidad de influir sobre ellas. Sin embargo, en el equilibrio con conjeturas nulas, cada jugador asume que su estrategia puede hacer variar la de sus oponentes, así que todos los jugadores consideran variaciones conjeturales no nulas.

(d) **Equilibrio subjuego-perfecto.** El concepto de equilibrio subjuego-perfecto está asociado a los denominados superjuegos (Friedman, 1991) y juegos dinámicos (Bierman y Fernández, 1998). Un superjuego es una secuencia de juegos, finita o infinita, desarrollada por un conjunto dado de jugadores. Un ejemplo lo constituye la repetición de un juego donde los jugadores mueven simultáneamente. En un juego dinámico los jugadores mueven siguiendo una secuencia fija. Los que mueven más tarde conocen los movimientos que han efectuado los jugadores que han intervenido antes. Un ejemplo de juego dinámico es el ajedrez. Los superjuegos y los juegos dinámicos pueden representarse en forma extensiva mediante un árbol. Un subjuego de un juego  $\Gamma$  es un juego contenido en  $\Gamma$  que se inicia en un nodo del árbol (en forma extensiva) asociado a  $\Gamma$  hasta un subconjunto de nodos terminales.

En un juego con varias etapas se efectúan secuencialmente un número dado de subjuegos. Un *equilibrio subjuego-perfecto* es una combinación de equilibrios para cada subjuego, donde los jugadores anticipan las consecuencias de las decisiones adoptadas en una etapa sobre las siguientes. En particular un *equilibrio de Nash subjuego-perfecto* es una combinación de equilibrios de Nash para cada subjuego (Selten, 1965).

(e) **Óptimo de Pareto.** Una estrategia  $s^*$  es un óptimo de Pareto si de existir alguna otra estrategia  $s \in S$  y algún jugador  $i$ ,  $i = 1, \dots, l$ , tal que  $\Pi_i(s) > \Pi_i(s^*)$ , entonces existe necesariamente otro jugador  $j$  tal que  $\Pi_j(s) < \Pi_j(s^*)$ . Es decir, ningún jugador puede conseguir un pago superior sin perjuicio para alguno de los restantes.

Los equilibrios introducidos con anterioridad constituyen una condición necesaria para que una propuesta de solución de un juego no cooperativo sea una predicción razonable del resultado final. Un juego puede tener varios equilibrios y cuando esto ocurre, no es posible adelantar cual será el resultado del juego, por lo que se hace necesario establecer un criterio para seleccionar alguno de ellos. Cuando estas situaciones se presentan, parece razonable tomar como solución, si existe, una estrategia no dominada, es decir, aquella que sea óptimo de Pareto. Un equilibrio constituye un óptimo de Pareto si no existe ningún otro equilibrio que proporcione un pago superior a un jugador y pagos no inferiores al resto de los jugadores.

**Ejemplo.** Con el fin de ilustrar los conceptos de estrategia no dominada y óptimo de Pareto, consideremos el juego bipersonal con dos posibles estrategias y matriz de pagos que se muestra en la tabla 2.1.

Como puede observarse, existen 2 equilibrios de Nash, las estrategias  $(s_1, s_1)$  y  $(s_2, s_2)$ . Sin embargo, la segunda está dominada por la primera. Entonces, la solución previsible del juego será  $(s_1, s_1)$ , la cual es una estrategia óptima de Pareto.

		Jugador 1	
		$s_1$	$s_2$
Jugador 2	$s_1$	$\Pi_1 = 4$ $\Pi_2 = 4$	$\Pi_1 = 3$ $\Pi_2 = 1$
	$s_2$	$\Pi_1 = 1$ $\Pi_2 = 3$	$\Pi_1 = 2$ $\Pi_2 = 2$

Tabla 2.1: Matriz de pagos de un juego con dos equilibrios de Nash y una sólo estrategia no dominada

Un juego puede ser definido de forma más general considerando que la estrategia del jugador  $i$  está representada por el vector  $s_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ ,  $i = 1, \dots, l$ . Las estrategias de los  $l$  jugadores vienen representadas por el vector  $s \in \prod_{i=1}^l \mathbb{R}^{m_i} = \mathbb{R}^m$ , con  $m = \sum_{i=1}^l m_i$ . El conjunto de estrategias factibles es  $R \subseteq \mathbb{R}^m$ . Si  $S_i$  es la proyección de  $R$  en  $\mathbb{R}^{m_i}$ , entonces  $R \subseteq S = \prod_{i=1}^l S_i$ . En gran parte de los trabajos sobre teoría de juegos el conjunto de estrategias posibles del jugador  $i$  es un conjunto convexo y compacto  $R_i \subseteq \mathbb{R}^{m_i}$  y  $R = S = \prod_{i=1}^l R_i$ .

Denotando por  $\Gamma(I, S, \Pi, R)$  al juego definido de esta forma, la estrategia  $\bar{s} = (\bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots, \bar{s}_l) \in R$  es un *equilibrio de Nash* para  $\Gamma$  si y sólo si

$$\Pi_i(\bar{s}) = \max_{s_i} \{ \Pi_i(\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_{i-1}, s_i, \bar{s}_{i+1}, \dots, \bar{s}_l) : (\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_{i-1}, s_i, \bar{s}_{i+1}, \dots, \bar{s}_l) \in R \},$$

para  $i = 1, 2, \dots, l$ . El resto de las soluciones de equilibrio se adaptan directamente a esta definición. A continuación se incluyen los resultados de existencia y unicidad de equilibrios de Nash para este juego. Una definición de juego aún más general que incluye las anteriores es la de seudojuego (Friedman, 1991.)

**Proposición 2.1'** (Rosen, 1965 y Friedman, 1991) Sea  $\Gamma(I, S, \Pi, R)$  un juego no cooperativo de información completa que satisface las condiciones siguientes:

*Condición 1'*.  $R \subseteq \mathbb{R}^m$  es compacto y convexo.

*Condición 2'*.  $\Pi_i(s)$  es continua en  $R$  para cada  $i \in I$ .

*Condición 3'*.  $\Pi_i(s \mid t_i)$  es cuasicóncava respecto de  $t_i \in R_i(s)$ , para cada  $s \in S$ ,  $i \in I$ , siendo  $R_i(s) = \{t_i \in S_i : s \mid t_i \in R\}$ .

Entonces el juego  $\Gamma$  tiene al menos un equilibrio de Nash.

**Proposición 2.2'** (Rosen, 1965 y Friedman, 1991) Sea  $\Gamma(I, S, \Pi, R)$  un juego no cooperativo de información completa,

$$R = \{x \in \mathbb{R}^m : h_j(x) \geq 0, j = 1, \dots, k\}$$

con  $h_j : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  una función cóncava de clase  $C^{(1)}$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $h_j(x) > 0, \forall j$ . El juego  $\Gamma$  satisface las condiciones siguientes:

**Condición 1'**.  $R \subset \mathbb{R}^m$  es compacto y convexo.

**Condición 4'**.  $\Pi_i(s)$  es una función de clase  $C^{(2)}$  en  $R$  para cada  $i \in I$ .

**Condición 5'**.  $\Pi_i(s | t_i)$  es estrictamente cuasicóncava respecto de  $t_i \in R_i(s)$ , para cada  $s \in S$ ,  $i \in I$ , siendo  $R_i(s) = \{t_i \in S_i : s | t_i \in R\}$ .

**Condición 6'**. La matriz  $H(s) = \left( \frac{\partial^2 \Pi_i(s)}{\partial s_{ik} \partial s_{jl}} \right)_{i,j \in I; k,l=1, \dots, m}$  es cuasidefinida negativa para cada  $s \in R$ ; esto es,  $H(s) + H^l(s)$  es definida negativa para cada  $s \in R$ .

Entonces el juego  $\Gamma$  tiene un único equilibrio de Nash.

La tabla 2.2 recoge algunos de los trabajos más relevantes sobre juegos espaciales. En la tabla se hace referencia también a los casos tratados en esta memoria. En cada modelo se señala el marco en el que se desarrolla el análisis de acuerdo a los elementos siguientes:

1. Representación espacial
  - (a)  $L$ : segmento lineal
  - (b)  $S$ : subconjunto del espacio real bidimensional
  - (c)  $N$ : red
  - (d)  $T$ : árbol
2. Número de jugadores
  - (a) 2: duopolio
  - (b) 3: oligopolio con tres empresas
  - (c)  $r$ : oligopolio con un número fijo pero arbitrario de empresas
3. Tipo de competencia
  - (a) Cournot: competencia en cantidades

Modelo	Esp.	Jug.	Comp.	Precio	Equil.	Ext.
Anderson (87)	$L$	2	Bertrand	fob	sub-per	no
Anderson y Engers (94)	$S$	$r$	Bertrand	fob	sub-per	no
Brandeau y Chiu (94a)	$T$	2	-	fijo	Stack	sí
Brandeau y Chiu (94b)	$T$	2	-	fijo	Nash	sí
Eiselt (98)	$T$	2	-	fijo	Stack	no
Hotelling (29)	$L$	2	Bertrand	fob	sub-per	no
Kohlberg (83)	$L$	$r$	-	fijo	Nash	sí
Labbé y Hakimi (91)	$N$	2	Cournot	dep	sub-per	no
Lederer y Hurter (86)	$S$	2	Bertrand	dep	sub-per	no
Lederer y Thisse (90)	$N$	2	Bertrand	dep	sub-per	no
Sarkar y otros (97)	$N$	$r$	Cournot	dep	sub-per	no
De esta memoria:						
capítulo 3, sección 3	$N$	2	Cournot	dep	sub-per	no
capítulo 3, sección 4	$N$	2	Bertrand	dep	sub-per	no
capítulo 4, sección 2	$N$	$r$	Cournot	dep	sub-per	no
capítulo 4, sección 3	$N$	$r$	Bertrand	dep	sub-per	no
capítulo 5	$N$	2	Bertrand	fob	sub-per	sí

Tabla 2.2: Características de algunos juegos espaciales

- (b) Bertrand: competencia en precios
- (c) - : no existe competencia en cantidad/precio ya que el precio está fijado

## 4. Política de precios

- (a) fob: precio en origen
- (b) dep: discriminación espacial de precios
- (c) fijo: los precios están fijos y coinciden entre empresas

## 5. Tipo de equilibrio

- (a) sub-per: equilibrio subjuego-perfecto
- (b) Nash: equilibrio de Nash
- (c) Stack: equilibrio de Stackelberg

## 6. Externalidad

- (a) sí: con externalidad
- (b) no: sin externalidad

### 2.2.3 Resultados generales de convexidad

A lo largo de esta memoria se utilizarán algunos resultados sobre composición de funciones convexas. Los de carácter general se incluyen a continuación.

**Proposición 2.3** Sean  $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $C$  convexo,  $g : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D$  convexo,  $f(C) \subseteq D$ . Si  $f$  y  $g$  son funciones convexas (cóncavas) y  $g$  es creciente, entonces  $g \circ f$  es convexa (cóncava).

**Demostración** Se probará para funciones convexas. La demostración para funciones cóncavas es similar. Por ser  $f$  convexa,

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y), \forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0, 1].$$

Entonces

$$\begin{aligned} (g \circ f)((1 - \lambda)x + \lambda y) &= g(f((1 - \lambda)x + \lambda y)) \\ &\stackrel{g \text{ creciente}}{\leq} g((1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)) \\ &\stackrel{g \text{ convexa}}{\leq} (1 - \lambda)(g \circ f)(x) + \lambda(g \circ f)(y). \quad \square \end{aligned}$$

**Proposición 2.3'** Sean  $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $C$  convexo,  $g : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D$  convexo,  $f(C) \subseteq D$ . Si  $f$  es estrictamente convexa (cóncava) y  $g$  es estrictamente creciente y convexa (cóncava), entonces  $g \circ f$  es estrictamente convexa (cóncava).

**Demostración** De forma similar a la proposición 2.3. □

**Proposición 2.4** Sea  $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $C$  convexo. Si  $f$  es una función convexa (estrictamente convexa) positiva, entonces  $f^2$  es convexa (estrictamente convexa).

**Demostración** Es consecuencia inmediata de las proposiciones 2.3 y 2.3' tomando  $g(x) = x^2$ , la cual es estrictamente creciente y convexa en  $[0, \infty)$ . □

**Proposición 2.5** Sean  $f : D \subseteq \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ ,  $D$  convexo, y  $g(x) = Ax^2 + Bx + C$  con  $x \in \mathfrak{R}$  y  $A, B, C$  constantes reales tales que  $A > 0, B \geq 0$  ( $A < 0, B \leq 0$ ) y  $f(x) > -\frac{B}{2A}$  para  $x \in D$ . Si  $f$  es convexa (cóncava), entonces  $g \circ f$  es convexa (cóncava).

**Demostración** Si  $A > 0$  ( $A < 0$ ) la función  $g$  es convexa (cóncava), además es creciente para  $x > -\frac{B}{2A}$ . Por tanto, si  $f$  es una función convexa (cóncava) y  $f(x) > -\frac{B}{2A}$ , aplicando la proposición 2.3 resulta la convexidad (concavidad) de  $g \circ f$ .  $\square$

**Corolario 2.1** Sean  $f : D \subseteq \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ ,  $D$  convexo, y  $g(x) = Ax^2 + Bx + C$  con  $x \in \mathfrak{R}$  y  $A, B, C$  constantes reales tales que  $A > 0, B \geq 0$  ( $A < 0, B \leq 0$ ). Si  $f$  es convexa (cóncava) positiva, entonces  $g \circ f$  es convexa (cóncava).

**Demostración** Si  $f$  es positiva, entonces  $f(x) > -\frac{B}{2A}$  y aplicando la proposición 2.5 resulta la convexidad (concavidad) de  $g \circ f$ .  $\square$

**Proposición 2.6** Sea  $\Pi_i(s_1, \dots, s_l)$  la función de pagos y  $S_i = N(V, E)$  el espacio de estrategias del jugador  $i$ ,  $i = 1, \dots, l$ . Sea  $\Pi_i$  una función cuasiconvexa de  $s_i$  cuando  $s_i$  se desplaza a lo largo de cualquier arista de  $N$  y  $s_j, j \neq i$ , permanecen fijos. Si existe equilibrio de Nash para el juego, entonces existe un equilibrio en  $V' \subset V$ .

**Demostración** Sea  $\bar{s} = (\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_l)$  un equilibrio de Nash y supongamos que  $\bar{s}_i \notin V$ . Entonces, existe una arista  $[v_L, v_U]$  de la red tal que  $\bar{s}_i \in ]v_L, v_U[$ . Como  $\Pi_i$  es cuasiconvexa cuando  $s_i$  se desplaza sobre  $[v_L, v_U]$  y  $s_j, j \neq i$ , permanecen fijos, ocurre que

$$\Pi_i(\bar{s}) \leq \max \{ \Pi_i(\bar{s}|v_L), \Pi_i(\bar{s}|v_U) \},$$

de donde se deduce que

$$\Pi_i(\bar{s}) = \max \{ \Pi_i(\bar{s}|v_L), \Pi_i(\bar{s}|v_U) \}.$$

Por tanto,  $\bar{s}_i$  puede sustituirse por uno de los extremos de la arista sin que decrezca el valor de  $\Pi_i$ . La misma operación puede repetirse para el resto de  $\bar{s}_j$  que no sean vértices.  $\square$

## Capítulo 3

# Juego espacial duopolístico

Este capítulo recoge los distintos escenarios que aparecen al combinar el tipo de competencia, ya sea vía cantidad o precio, con la elasticidad de la demanda, elástica o totalmente inelástica al precio, en mercados separados espacialmente en redes. De los cuatro escenarios posibles, existe uno que es no factible, que corresponde a la competencia en cantidad con demanda totalmente inelástica al precio. Dos de los escenarios que son factibles han sido tratados anteriormente en la literatura. Así, por ejemplo, Lederer y Thisse (1990) consideran demanda totalmente inelástica y competencia vía precios, mientras que Labbé y Hakimi (1991) analizan la competencia en cantidad con función de demanda lineal. La generalización de este último modelo al caso no lineal y al oligopolio se debe a Sarkar, Gupta y Pal (1997). En este capítulo, se unifica la notación, se modifican algunos supuestos de los modelos anteriores y se formula un nuevo escenario correspondiente a la competencia en precio con demanda lineal. Se proponen dos comportamientos distintos para las empresas en el modelo de Labbé y Hakimi, líder-seguidor de Stackelberg y variaciones conjeturales no nulas, y se comparan resultados entre escenarios. Se propone un algoritmo para la obtención del equilibrio en la primera etapa del modelo de Lederer y Thisse, basado en un resultado que garantiza la inexistencia de ciclos en el proceso de relocalización en el cual las empresas alternativamente maximizan el beneficio dada la elección de su competidora.

En líneas generales, en este capítulo se introduce la localización como variable de decisión en los modelos clásicos de competencia duopolística presentados en el capítulo anterior. Con posterioridad, en el capítulo 4, se extiende el estudio al caso general del oligopolio. El comportamiento estratégico de las empresas que compiten en el mercado es modelado como un juego en dos etapas, asumiendo que las firmas eligen en primer lugar las localizaciones y posteriormente, conocidas éstas, eligen la cantidad ofrecida en cada uno de los mercados separados espacialmente o los precios en destino de sus

productos (discriminación espacial de precios), según se trate de competencia tipo Cournot o Bertrand, respectivamente. El procedimiento seguido para obtener el equilibrio subjuego-perfecto consiste en estudiar el equilibrio en la segunda etapa del juego para localizaciones fijas de la primera etapa y tener en cuenta esta información en el juego de la primera etapa. De esta forma, las empresas adelantan en la primera etapa la competencia posterior de la segunda.

El resto del capítulo está estructurado de la siguiente manera. En el apartado 3.1 se formula el problema. Una recopilación de resultados cuando el precio no interviene se presenta en el apartado 3.2. En los apartados 3.3 y 3.4 se estudian los dos tipos de competencia (vía cantidades o precios). En ambos casos se plantean modelos y se analiza la existencia de equilibrios cuando la elección de la localización se combina con la de cantidad o precio del producto en cada uno de los mercados separados espacialmente. En la sección 3.5 se comparan los resultados obtenidos en la segunda etapa del juego para la competencia vía cantidad y vía precio. En la sección 3.6 se introduce el efecto renta y finalmente en la sección 3.7 se muestra un ejemplo.

### 3.1 Formulación

Dos firmas,  $A$  y  $B$ , desean establecer un centro de servicio cada una en un mercado donde no existen firmas competidoras. El mercado está representado por una red no dirigida y conexa  $N(V, E)$  donde  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  es el conjunto de nodos, que representan mercados separados espacialmente, y  $E$  es el conjunto de aristas. Un centro de servicio puede ubicarse en cualquier punto de la red y los consumidores están situados únicamente en los nodos. Las firmas deciden sus ubicaciones,  $x_A$  y  $x_B$ , y los precios  $p_i = (p_i^1, \dots, p_i^n)$  o cantidades  $q_i = (q_i^1, \dots, q_i^n)$ ,  $i = A, B$ . La demanda en el mercado  $k$  viene dada por la función inversa de demanda  $p^k(q^k)$ , diferenciable hasta orden dos, decreciente ( $dp^k/dq^k \leq 0$ ) y convexa ( $d^2p^k/d^2q^k \geq 0$ ), siendo la producción total  $q^k = q_A^k + q_B^k$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

Se asume que el coste marginal de producción no depende de la cantidad producida y se denota por  $C'_i(x)$ ,  $i = A, B$ . Esta condición significa que no hay rendimientos a escala y es necesaria para que los mercados pueden ser tratados independientemente, una vez conocidas las localizaciones de las empresas. Se considera también que  $C'_i(x)$  es cóncava con respecto de  $x$  cuando  $x$  se mueve sobre una arista de la red. Esta restricción de concavidad es justificada por Labbé y Hakimi (1990) considerando que en el proceso de producción la firma  $i$  emplea  $J$  inputs,  $j = 1, \dots, J$ , y que existen  $H_j$  posibles proveedores del input  $j$  en  $N$ , denotados por  $y_{jh}$ ,  $h = 1, \dots, H_j$ . El precio del input  $j$  en  $y_{jh}$  es  $p_{jh}$ . El coste de transporte de una unidad del input  $j$  desde  $y_{jh}$  hasta  $x$  es  $t_j(\delta(y_{jh}, x))$ , donde  $t_j$  es una función creciente y cóncava de la distancia. Sea  $a_j$  la cantidad del input  $j$  usada para producir una unidad de producto. Entonces, el coste

marginal de producción en  $x$  es

$$C'_i(x) = \sum_{j=1}^J \left[ \min_{h=1, \dots, H_j} \{p_{jh} + t_j(\delta(y_{jh}, x))\} \right] a_j,$$

que es una suma ponderada de mínimos de funciones cóncavas, pues la distancia  $\delta(y_{jh}, x)$  es una función cóncava de  $x$  cuando  $x$  se mueve a lo largo de una arista. Por tanto,  $C'_i(x)$  es también cóncava.

El coste de transporte unitario  $t_i^k(x) = t_i(\delta_{xv_k})$  es una función positiva y creciente de la distancia,  $\delta_{xv_k}$ , entre  $x$  y el nodo  $v_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , e indica el coste que supone a la empresa  $i$  trasladar una unidad del bien desde su ubicación  $x$  hasta el mercado  $k$ . En lo sucesivo, denotaremos por

$$c_i^k(x) = C'_i(x) + t_i^k(x)$$

al coste marginal en destino, es decir, el coste de suministrar una unidad del producto en el mercado  $k$  para la firma  $i$  localizada en  $x$ . Para simplificar la notación, cuando las localizaciones de las firmas se consideren fijadas, se podrán eliminar los argumentos de las funciones de costes. Si la función de coste de transporte unitario  $t_i$  es cóncava, entonces  $t_i^k = t_i \circ \delta_{xv_k}$  es cóncava cuando  $x$  se mueve sobre una arista ya que es composición de funciones cóncavas y  $t_i$  es creciente; en este caso,  $c_i^k(x)$  es una función cóncava de  $x$  cuando  $x$  se mueve sobre una arista, al ser suma de funciones cóncavas. Finalmente, existe un coste fijo  $F_i$  para cada firma, que por simplicidad supondremos que no depende de su localización.

Se asume que las firmas no bajarán los precios por debajo de sus costes, que es la conducta esperada si no existe comportamiento predatorio<sup>1</sup>, es decir, si  $p^k < C'_i + t_i^k$ , entonces  $q_i^k = 0$ . Se asume también que los productos son homogéneos, es decir, los consumidores adquirirán el bien de aquella empresa que se lo ofrezca a un precio en destino más bajo. El criterio seguido por las empresas es el de maximización de beneficios, que se obtienen como ingresos totales menos costes de producción y de transporte. Así, cuando las localizaciones están dadas, el beneficio para la firma  $i$  si la competencia se realiza vía cantidades viene dado por

$$\begin{aligned} \pi_i(q_A, q_B) &= \sum_{k=1}^n \pi_i^k(q_A^k, q_B^k) - F_i, \\ \pi_i^k(q_A^k, q_B^k) &= (p^k(q^k) - c_i^k) q_i^k, \end{aligned}$$

<sup>1</sup> en un modelo donde se intenta maximizar el beneficio presente y no futuro, es difícil justificar un comportamiento predatorio en precios

mientras que si compiten en precios, se expresará como

$$\begin{aligned}\pi_i(p_A, p_B) &= \sum_{k=1}^n \pi_i^k(p_A^k, p_B^k) - F_i \\ \pi_i^k(p_A^k, p_B^k) &= (p_i^k - c_i^k) q_i^k(p_A^k, p_B^k).\end{aligned}$$

El objetivo de cada firma es determinar su ubicación y la cantidad que colocará en cada uno de los mercados o el precio al que ofrecerá su producto, de forma que se maximice su beneficio. Este proceso de competencia puede modelarse como un juego no cooperativo en dos etapas, en la primera de las cuales se eligen las localizaciones y en la segunda, conocidas éstas, las cantidades o los precios. Una solución de equilibrio para este juego, es decir, una situación que ninguna de las empresas tenga unilateralmente incentivo a alterar, se denomina *equilibrio subjuego-perfecto* (Selten, 1975). En las siguientes secciones se analizan los casos particulares de demanda constante, la cual es totalmente inelástica al precio, y demanda lineal, que presenta diferentes tipos de elasticidad.

### 3.2 Precios fijados e iguales

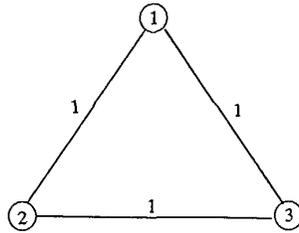
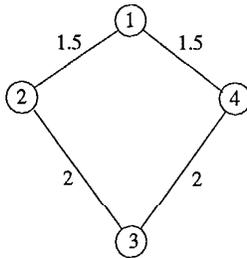
Sean  $A$  y  $B$  dos firmas que ofrecen el mismo producto al mismo precio en origen (mill price), el cual no depende de sus localizaciones. Supongamos además que los costes marginales y fijos son iguales para todas las localizaciones. En este caso, el consumidor acude al centro más próximo y la maximización del beneficio equivale a la maximización de la cuota de mercado. Cuando la distancia a ambos centros coincide, la demanda se reparte en partes iguales entre ellos. Si la empresa  $A$  está ubicada en  $x_A$ , la demanda captada viene dada por

$$\Lambda_A(x_A, x_B) = \sum_{v_k \in V_A} \frac{\lambda_k}{r_k},$$

donde

$$\begin{aligned}V_A &= \{v_k : \delta(v_k, x_A) \leq \delta(v_k, x_B)\}, \\ r_k &= \begin{cases} 1 & \text{si } \delta(v_k, x_A) < \delta(v_k, x_B) \\ 2 & \text{si } \delta(v_k, x_A) = \delta(v_k, x_B). \end{cases}\end{aligned}$$

Por otra parte,  $\Lambda_B(x_A, x_B) = \Lambda - \Lambda_A(x_A, x_B)$ , donde  $\Lambda$  es la demanda total.

Figura 3.1: Red con  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ Figura 3.2: Red con  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = \lambda_4 = 1$ ,  $\lambda_3 = 3$ 

Un par de localizaciones  $(\bar{x}_A, \bar{x}_B)$  es un equilibrio de Nash si y sólo si

$$\begin{aligned}\Lambda_A(\bar{x}_A, \bar{x}_B) &\geq \Lambda_A(x, \bar{x}_B), \forall x \in N, \\ \Lambda_B(\bar{x}_A, \bar{x}_B) &\geq \Lambda_B(\bar{x}_A, x), \forall x \in N.\end{aligned}$$

Si las dos firmas están localizadas en el mismo punto, se reparten el mercado, quedándose cada una con la mitad de éste. Por tanto, en el equilibrio,

$$\Lambda_A(\bar{x}_A, \bar{x}_B) = \Lambda_B(\bar{x}_A, \bar{x}_B) = \frac{\Lambda}{2}.$$

Si no fuese así, la empresa con menor cuota de mercado se movería, estableciéndose en la misma localización que la otra, y aumentaría de esta forma la demanda captada. Por tanto, si  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  es un equilibrio, también lo serán  $(\bar{x}_1, \bar{x}_1)$  y  $(\bar{x}_2, \bar{x}_2)$ .

Tanto si el problema es discreto o en redes, la existencia de equilibrio no está asegurada en general. Consideremos las redes de las figuras 3.1 y 3.2. Si

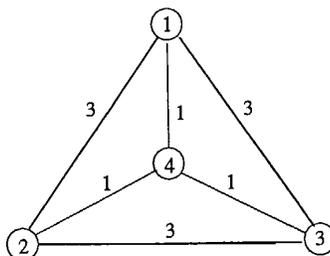


Figura 3.3: Red con  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ ,  $\lambda_4 = 0$

el problema es discreto, cualquier par de nodos de la figura 3.1 es un equilibrio, mientras que en la figura 3.2 no existe equilibrio. Considerando el problema en redes, en ninguno de los casos anteriores existe equilibrio. En la figura 3.1, un punto interior de una arista no puede formar parte del equilibrio ya que, en tal caso, la otra firma podría situarse en el vértice más cercano captando dos unidades; un vértice tampoco puede formar parte del equilibrio debido a que entonces la competidora podría situarse en el interior de la arista opuesta y captar dos unidades. Una situación parecida ocurre en la figura 3.2. Sin embargo, existe equilibrio en el problema en redes de la figura 3.3 si las dos firmas se sitúan en la mediana  $v_4$ , e incluso en la figura 3.1 tomando por ejemplo  $\lambda_2 = 2$ . Tenemos entonces que considerando la misma red, los resultados sobre el equilibrio pueden ser diferentes según trabajemos en el espacio discreto o en red.

Si consideramos el problema en redes, es conocido que cuando la red es un árbol, el conjunto de pares de equilibrio es  $M^2$ , siendo  $M$  el conjunto de medianas (Slater, 1975). Puesto que el conjunto de vértices  $V$  contiene una mediana y cuando  $\Lambda$  es impar cualquier mediana es un vértice (Hakimi, 1964), se deduce que en árboles existe al menos un equilibrio en los vértices, y si  $\Lambda$  es impar cualquier equilibrio está constituido por un par de vértices. Por tanto, en árboles los dos problemas, el discreto y el de redes, son equivalentes, aunque si  $\Lambda$  es par, pueden haber soluciones en redes que no lo sean del discreto.

Como ya hemos dicho, en el caso de redes generales no siempre existe equilibrio, y cuando éste existe, no siempre es una mediana o un vértice. En la figura 3.4 (Hakimi, 1983), un equilibrio es el par  $(\bar{x}, \bar{x})$  donde  $\bar{x}$  es el punto medio de la arista  $[v_5, v_6]$ . En este ejemplo,  $v_1$  no puede formar parte del equilibrio porque entonces  $\bar{x}$  obtendría más de la mitad del mercado. Por simetría, lo mismo ocurre con  $v_2, v_3$  y  $v_4$ . Suponiendo que  $v_5$  ( $v_6$ ) es elegido como candidato, entonces  $v_1$  ( $v_2$ ) captaría más de la mitad del mercado.

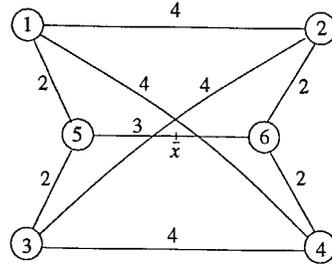


Figura 3.4: Red con  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$ ,  $\lambda_5 = \lambda_6 = 0$

Wendell y McKelvey (1981) estudian los equilibrios en una red  $N(V, E)$  conexa y no dirigida con  $n$  clientes  $U = \{1, \dots, n\}$  localizados en vértices distintos de la red (pueden haber vértices donde no existan clientes). El cliente  $i$  está en el vértice  $v_i$  y demanda una unidad del producto.  $P(x, y) = (x, v_{i_1}, \dots, v_{i_n}, y)$  representa un camino mínimo entre  $x$  e  $y$ , mientras que  $P^*(x, y)$  denota el conjunto de caminos mínimos entre  $x$  e  $y$ . Demuestran que si existe una biyección  $T : U \rightarrow U$  tal que  $\bar{x} \in P(v_i, T(v_i))$  para algún camino mínimo  $P(v_i, T(v_i))$  entre  $v_i$  y  $T(v_i)$ , para cada  $i \in U$ , entonces  $(\bar{x}, \bar{x})$  es un equilibrio de Nash. Como ejemplo, en la figura 3.3 se tiene que  $n = 3$  y se puede construir la biyección  $T(1) = 2$ ,  $T(2) = 3$  y  $T(3) = 1$ . Los conjuntos de caminos mínimos entre cualquier par de nodos de demanda son  $P^*(v_1, v_2) = \{(v_1, v_4, v_2)\}$ ,  $P^*(v_2, v_3) = \{(v_2, v_4, v_3)\}$  y  $P^*(v_3, v_1) = \{(v_3, v_4, v_1)\}$ . En cada caso, el único camino contiene  $v_4$ , luego  $(v_4, v_4)$  es un equilibrio de Nash.

Hansen, Thisse y Wendell (1990) estudian varios conceptos de solución en teoría del voto y localización competitiva en redes. Consideran que existe un conjunto finito  $U$  de clientes localizados en los vértices de la red  $N(V, E)$ . Cada cliente  $u$  viene descrito por su localización  $v(u) \in V$ . Puede ocurrir que dos clientes distintos,  $u$  y  $u'$ , estén localizados en el mismo vértice, en cuyo caso  $v(u) = v(u')$ . Demuestran que si  $x \in N(V, E)$  tiene la propiedad "betweenness" para una permutación  $\sigma$  de  $U$ , entonces  $x$  es una mediana de la red y  $(x, x)$  es un equilibrio de Nash. Dada una permutación  $\sigma$  definida en  $U$ , se dice que  $x$  tiene la propiedad "betweenness" para  $\sigma$  si  $x \in B(v(u), v(\sigma(u)))$  para todo  $u \in U$ , donde

$$B(v_i, v_j) = \{x \in N(V, E) : \delta(v_i, x) + \delta(x, v_j) = \delta(v_i, v_j)\}$$

para  $v_i, v_j \in V$ . Como ejemplo, en la figura 3.3 con  $\lambda_4 = 1$ , el vértice  $v_4$ , satisface la propiedad "betweenness" para la permutación

$$\sigma : v_1 \rightarrow v_2, v_2 \rightarrow v_1, v_3 \rightarrow v_4, v_4 \rightarrow v_3.$$

Estos autores muestran que la condición anterior es suficiente pero no necesaria. Prueban también que para determinar los puntos que satisfacen la propiedad “betweeness” basta considerar los vértices de la red, ya que si  $x \in N$  satisface esta propiedad para alguna permutación  $\sigma$ , entonces  $x \in V$  o existe una arista  $[v_i, v_j]$  conteniendo a  $x$  tal que  $\{(y, y) : y \in [v_i, v_j]\}$ , son equilibrios de Nash. Además, el resultado que relaciona la propiedad “betweeness” con el equilibrio de Nash se reduce a otro más simple cuando  $x$  es un vértice de corte, es decir, cuando la eliminación de  $x$  y de las aristas que inciden en él proporciona subredes conexas disjuntas. En tal caso, si la demanda de cada subred es menor o igual que  $\frac{\Lambda}{2}$ , entonces  $x$  es una mediana y  $(x, x)$  es un equilibrio de Nash. Esta condición también es necesaria si  $x$  es “un vértice de corte fuerte”, esto es, si  $x$  es un vértice tal que las aristas adyacentes a  $x$  son aristas de corte, lo que equivale a que la eliminación de cualesquiera de ellas proporciona dos subredes disjuntas.

### 3.3 Competencia en cantidades

Para que las firmas puedan competir según el modelo de Cournot, la demanda debe ser elástica al precio. Se asume que la cantidad demandada decrece linealmente con el precio, siendo la función inversa de demanda en el mercado  $k$  la siguiente

$$p^k(q^k) = \begin{cases} a_k - b_k q^k & \text{si } 0 \leq q^k \leq \frac{a_k}{b_k} \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde  $a_k > 0$  es la *disposición a pagar* de los consumidores de ese mercado y  $-b_k < 0$  la pendiente de la recta  $p^k(q^k) = a_k - b_k q^k$ . El cociente  $\frac{a_k}{b_k}$  representa la cantidad máxima que demanda el mercado.

Bajo variaciones conjeturales nulas, Labbé y Hakimi (1991) prueban que si las funciones de coste de transporte son cóncavas, existe un equilibrio de Nash subjuego-perfecto. En esta sección se analizan los dos nuevos escenarios que surgen al considerar conjeturas no nulas para una o dos empresas. El primero corresponde al modelo líder-seguidor de Stackelberg y el segundo al modelo líder-líder. En adelante, se utilizará también el término “modelo con conjeturas no nulas” para hacer referencia al modelo líder-líder.

#### 3.3.1 Modelo de Stackelberg en cantidades

Se asume que una de las firmas es líder en producción y su adversaria seguidora. En primer lugar, consideremos dadas las localizaciones y estudiemos la existencia de equilibrio para la segunda etapa del juego.

Se trata de hallar  $(\bar{q}_L, \bar{q}_S)$  tales que

$$\pi_L(\bar{q}_L, \bar{q}_S) = \max_{q_L} \pi_L(q_L, q_S(q_L)),$$

donde  $\pi_S(q_L, q_S(q_L)) = \max_{q_S} \pi_S(q_L, q_S)$ .

**Proposición 3.1** Sean dos localizaciones tales que

$$a_k > \max \{c_L^k, c_S^k\}, \quad k = 1, \dots, n,$$

donde  $L$  indica la empresa líder y  $S$  la seguidora. Entonces, existe un único equilibrio de Stackelberg  $(\bar{q}_L, \bar{q}_S)$ . Además:

(i) Si  $c_S^k \leq c_L^k$ , entonces

$$(\bar{q}_L^k, \bar{q}_S^k) = \begin{cases} \left(0, \frac{a_k - c_S^k}{2b_k}\right) & \text{si } a_k < 2c_L^k - c_S^k \\ \left(\frac{a_k - 2c_L^k + c_S^k}{2b_k}, \frac{a_k + 2c_L^k - 3c_S^k}{4b_k}\right) & \text{si } a_k \geq 2c_L^k - c_S^k. \end{cases}$$

(ii) Si  $c_S^k > c_L^k$ , entonces

$$(\bar{q}_L^k, \bar{q}_S^k) = \begin{cases} \left(\frac{a_k - c_L^k}{2b_k}, 0\right) & \text{si } a_k < 2c_S^k - c_L^k \\ \left(\frac{a_k - c_S^k}{b_k}, 0\right) & \text{si } 2c_S^k - c_L^k \leq a_k < 3c_S^k - 2c_L^k \\ \left(\frac{a_k - 2c_L^k + c_S^k}{2b_k}, \frac{a_k + 2c_L^k - 3c_S^k}{4b_k}\right) & \text{si } a_k \geq 3c_S^k - 2c_L^k. \end{cases}$$

**Demostración** Puesto que el coste marginal de producción no depende de la cantidad producida, los mercados pueden ser tratados independientemente. Para  $v_k \in V$  consideramos el problema

$$\max_{q_L^k} \pi_L^k(q_L^k, q_S^k(q_L^k)) \quad \text{s.a. } 0 \leq q_L^k \leq \frac{a_k}{b_k},$$

donde  $q_S^k(q_L^k)$  es la solución óptima del problema

$$\max_{q_S^k} \pi_S^k(q_L^k, q_S^k) \quad \text{s.a. } 0 \leq q_S^k \leq \frac{a_k}{b_k} - q_L^k.$$

Se resolverá en primer lugar este último problema. La función

$$\pi_S^k(q_L^k, q_S^k) = (a_k - b_k(q_L^k + q_S^k) - c_S^k) q_S^k$$

es cóncava con respecto a  $q_S^k$  y

$$\frac{\partial \pi_S^k}{\partial q_S^k} = -2b_k q_S^k + a_k - b_k q_L^k - c_S^k$$

para  $0 < q_S^k < \frac{a_k}{b_k} - q_L^k$ . Entonces,

$$\frac{\partial \pi_S^k}{\partial q_S^k} = 0 \iff q_S^k = \frac{a_k - b_k q_L^k - c_S^k}{2b_k}.$$

Sea  $\gamma_k = \frac{a_k - b_k q_L^k - c_S^k}{2b_k}$ . Se tiene que

$$\gamma_k \geq 0 \iff q_L^k \leq \frac{a_k - c_S^k}{b_k}$$

$$\gamma_k \leq \frac{a_k}{b_k} - q_L^k \iff q_L^k \leq \frac{a_k + c_S^k}{b_k}.$$

Por tanto, si  $q_L^k \leq \frac{a_k - c_S^k}{b_k}$ , entonces  $q_S^k(q_L^k) = \gamma_k$ , y si  $q_L^k > \frac{a_k - c_S^k}{b_k}$ , entonces  $q_S^k(q_L^k) = 0$ .

Consideremos ahora el problema

$$\max_{q_L^k} \pi_L^k(q_L^k, q_S^k(q_L^k)) \text{ s.a. } 0 \leq q_L^k \leq \frac{a_k}{b_k}.$$

Tenemos que

$$\pi_L^k(q_L^k, q_S^k(q_L^k)) = \begin{cases} \frac{(a_k - b_k q_L^k + c_S^k - 2c_L^k)}{2} q_L^k & \text{si } 0 \leq q_L^k \leq \frac{a_k - c_S^k}{b_k} \\ (a_k - b_k q_L^k - c_L^k) q_L^k & \text{si } \frac{a_k - c_S^k}{b_k} < q_L^k \leq \frac{a_k}{b_k}, \end{cases}$$

que es una función continua. Sean

$$f(q) = \frac{(a_k - b_k q + c_S^k - 2c_L^k)}{2} q,$$

$$g(q) = (a_k - b_k q - c_L^k) q.$$

Las funciones  $f$  y  $g$  son cóncavas y sus puntos críticos son  $q_f = \frac{a_k - 2c_L^k + c_S^k}{2b_k}$  y  $q_g = \frac{a_k - c_L^k}{2b_k}$ , respectivamente.

Podemos distinguir dos situaciones según sea  $c_S^k \leq c_L^k$  o  $c_S^k > c_L^k$ .

(i) Supongamos que  $c_S^k \leq c_L^k$ . En este caso,

$$q_f = \frac{a_k - 2c_L^k + c_S^k}{2b_k} \leq \frac{a_k - c_L^k}{2b_k} = q_g \leq \frac{a_k - c_S^k}{b_k}.$$

Si  $q_f \geq 0$ , entonces  $\bar{q}_L^k = q_f$  es la solución óptima del problema. Esto sucede si  $a_k - 2c_L^k + c_S^k \geq 0$ , esto es, si  $a_k \geq 2c_L^k - c_S^k$ .

Si  $q_f < 0$ , entonces la solución óptima es  $\bar{q}_L^k = 0$ .

(ii) Supongamos ahora que  $c_S^k > c_L^k$ . En este caso,

$$q_f = \frac{a_k - 2c_L^k + c_S^k}{2b_k} > \frac{a_k - c_L^k}{2b_k} = q_g.$$

Si  $q_f \leq \frac{a_k - c_S^k}{b_k}$ , entonces la solución óptima del problema es  $\bar{q}_L^k = q_f$ . Esta desigualdad ocurre si y sólo si  $a_k \geq 3c_S^k - 2c_L^k$ .

Si  $q_f > \frac{a_k - c_S^k}{b_k}$ , lo que equivale a  $a_k < 3c_S^k - 2c_L^k$ , pueden considerarse dos situaciones según  $q_g \leq \frac{a_k - c_S^k}{b_k}$  o  $q_g > \frac{a_k - c_S^k}{b_k}$ .

- (a) Si  $q_g \leq \frac{a_k - c_S^k}{b_k}$ , entonces la solución óptima es  $\bar{q}_L^k = \frac{a_k - c_S^k}{b_k}$ . Esta desigualdad equivale a  $a_k \geq 2c_S^k - c_L^k$ .
- (b) Si  $q_g > \frac{a_k - c_S^k}{b_k}$ , es decir para  $a_k < 2c_S^k - c_L^k$ , entonces la solución óptima es  $\bar{q}_L^k = q_g$ .

De todo lo anterior se deduce que:

(i) Si  $c_S^k \leq c_L^k$ , entonces:

$$(i.1) \quad \bar{q}_L^k = \frac{a_k - 2c_L^k + c_S^k}{2b_k} \text{ y } \bar{q}_S^k = \bar{q}_S^k(\bar{q}_L^k) = \frac{a_k + 2c_L^k - 3c_S^k}{4b_k}, \text{ si } a_k \geq 2c_L^k - c_S^k.$$

$$(i.2) \quad \bar{q}_L^k = 0 \text{ y } \bar{q}_S^k = \bar{q}_S^k(\bar{q}_L^k) = \frac{a_k - c_S^k}{2b_k}, \text{ si } a_k < 2c_L^k - c_S^k.$$

(ii) Si  $c_S^k > c_L^k$ , entonces:

$$(ii.1) \quad \bar{q}_L^k = \frac{a_k - 2c_L^k + c_S^k}{2b_k} \text{ y } \bar{q}_S^k = \bar{q}_S^k(\bar{q}_L^k) = \frac{a_k + 2c_L^k - 3c_S^k}{4b_k}, \text{ si } a_k \geq 3c_S^k - 2c_L^k.$$

$$(ii.2) \quad \bar{q}_L^k = \frac{a_k - c_S^k}{b_k} \text{ y } \bar{q}_S^k = \bar{q}_S^k(\bar{q}_L^k) = 0, \text{ si } 2c_S^k - c_L^k \leq a_k < 3c_S^k - 2c_L^k.$$

$$(ii.3) \quad \bar{q}_L^k = \frac{a_k - c_L^k}{2b_k} \text{ y } \bar{q}_S^k = \bar{q}_S^k(\bar{q}_L^k) = 0, \text{ si } a_k < 2c_S^k - c_L^k. \quad \square$$

**Corolario 3.1** *Dadas dos localizaciones tales que*

$$a_k > \max \{2c_L^k - c_S^k, 3c_S^k - 2c_L^k\},$$

*el único equilibrio de Stackelberg viene dado por*

$$\bar{q}_L^k = \frac{a_k - 2c_L^k + c_S^k}{2b_k}, \bar{q}_S^k = \frac{a_k + 2c_L^k - 3c_S^k}{4b_k}, k = 1, \dots, n,$$

*donde  $L$  indica la empresa líder y  $S$  la seguidora.*

**Demostración** Se obtiene como caso particular de la proposición 3.1, teniendo en cuenta que

$$\max \{2c_L^k - c_S^k, 3c_S^k - 2c_L^k\} \geq \max \{c_L^k, c_S^k\}, k = 1, \dots, n.$$

□

Bajo el supuesto del corolario 3.1 se deduce que el precio de mercado es

$$\bar{p}^k = \frac{a_k + 2c_L^k + c_S^k}{4}.$$

**Condición 3.1** *La red  $N(V, E)$  satisface*

$$a_k > \max \left\{ 2 \max_{x \in N} c_L^k(x) - \min_{x \in N} c_S^k(x), 3 \max_{x \in N} c_S^k(x) - 2 \min_{x \in N} c_L^k(x) \right\},$$

$k = 1, \dots, n.$

La condición 3.1 garantiza que ambas empresas ofrecen cantidades estrictamente positivas en todos los mercados. Bajo la condición anterior los beneficios en la primera etapa, asumiendo comportamiento de Stackelberg en la segunda etapa, son

$$\begin{aligned} \pi_L(x_L, x_S) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{8b_k} (a_k - 2c_L^k(x_L) + c_S^k(x_S))^2 - F_L, \\ \pi_S(x_L, x_S) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{16b_k} (a_k + 2c_L^k(x_L) - 3c_S^k(x_S))^2 - F_S. \end{aligned}$$

**Lema 3.1** *Bajo la condición 3.1, si las funciones de coste de transporte unitario  $t_i$  son cóncavas, entonces  $\pi_i(x_i, x_j)$  es una función convexa en  $x_i$  cuando  $x_i$  se desplaza a lo largo de una arista de la red y  $x_j$  está fijo,  $i, j = L, S$ ;  $j \neq i$ .*

**Demostración** Para cada vértice  $v_k \in V$ , la distancia  $\delta_{x_i v_k}$  es cóncava con respecto de  $x_i$  cuando  $x_i$  se mueve sobre una arista. Al ser  $t_i$  cóncava y creciente de la distancia, la función  $t_i^k = t_i \circ \delta_{x_i v_k}$  es cóncava respecto de  $x_i$  cuando  $x_i$  se mueve sobre una arista.

Para cada vértice  $v_k \in V$ , se tiene que

$$\begin{aligned}\pi_L^k(x_L, x_S) &= \frac{1}{8b_k} (a_k - 2c_L^k(x_L) + c_S^k(x_S))^2, \\ \pi_S^k(x_L, x_S) &= \frac{1}{16b_k} (a_k + 2c_L^k(x_L) - 3c_S^k(x_S))^2.\end{aligned}$$

Puesto que  $c_i^k(x) = C_i'(x) + t_i^k(x)$  y hemos asumido que  $C_i'(x)$  es una función cóncava con respecto de  $x$  cuando  $x$  se mueve sobre una arista de la red, entonces  $c_i^k(x)$  es una función cóncava con respecto de  $x$  cuando  $x$  se mueve sobre una arista de la red. Sean

$$\begin{aligned}f(x) &= a_k - 2c_L^k(x) + c_S^k, \\ g(x) &= a_k + 2c_L^k - 3c_S^k(x).\end{aligned}$$

Las funciones  $f$  y  $g$  son convexas y positivas bajo la condición 3.1. Entonces,  $f^2$  y  $g^2$  son también funciones convexas (proposición 2.4). Por tanto,  $\pi_L(x_L, x_S)$  ( $\pi_S(x_L, x_S)$ ) es una función convexa de  $x_L$  ( $x_S$ ) cuando  $x_L$  ( $x_S$ ) se desplaza a lo largo de una arista de la red y  $x_S$  ( $x_L$ ) está fijado.  $\square$

**Proposición 3.2** *Sea la condición 3.1 y funciones de coste de transporte unitario  $t_i$  cóncavas. Si existe equilibrio de Nash en la primera etapa con comportamiento de Stackelberg en la segunda, entonces existe uno en un subconjunto de vértices de la red.*

**Demostración** Basta aplicar el lema 3.1 y la proposición 2.6.  $\square$

Si existe equilibrio de Nash en la primera etapa, la búsqueda de uno de ellos puede hacerse aplicando el siguiente algoritmo, donde en cada proceso de relocalización se adopta aquel vértice que maximiza el beneficio.

**Algoritmo 3.1** *Equilibrio de Nash en localización*

**Paso 0.** Verificar la condición 3.1. Hacer  $h = 0$ . Tomar un par de vértices iniciales  $v_L^h$  y  $v_S^h$  de  $V$ , hacer  $\pi_L^h = \pi_L(v_L^h, v_S^h)$  y  $\pi_S^h = \pi_S(v_L^h, v_S^h)$ .

**Paso 1.** (Relocalización de  $L$ ) Calcular  $v_L^*$  tal que  $\pi_L^* = \pi_L(v_L^*, v_S^h) = \max_{v \in V} \pi_L(v, v_S^h)$ . Si  $\pi_L^* = \pi_L^h$  y  $h \neq 0$ , parar. Las localizaciones de equilibrio son  $v_i^h$ ,  $i = L, S$ . En otro caso, hacer  $v_L^{h+1} = v_L^*$  y  $\pi_L^{h+1} = \pi_L^*$ .

**Paso 2.** (Relocalización de  $S$ ) Calcular  $v_S^*$  tal que  $\pi_S^* = \pi_S(v_L^{h+1}, v_S^*) = \max_{v \in V} \pi_S(v_L^{h+1}, v)$ . Si  $\pi_S^* = \pi_S^h$ , parar. Las localizaciones de equilibrio son  $v_L^{h+1}$  y  $v_S^*$ . En otro caso, hacer  $v_S^{h+1} = v_S^*$ ,  $\pi_S^{h+1} = \pi_S^*$ ,  $h = h + 1$  e ir al paso 1.

Si no se producen ciclos, este proceso finaliza en un número finito de pasos y converge hacia el equilibrio en  $O(n^3)$ . Finalmente, obsérvese que en el paso 0 podría tomarse una localización inicial  $v_L^0 \in V$  y elegir  $v_S^0$  tal que  $\pi_S(v_L^0, v_S^0) = \max_{v \in V} \pi_S(v_L^0, v)$ .

**3.3.2** *Modelo líder-líder en cantidades*

Desde el punto de vista teórico, cada empresa podría actuar como líder asumiendo que su competidora se comportará como seguidora (Segura, 1993). Esto quiere decir que las firmas tomarán una decisión en base a una hipótesis que no se satisface, lo que puede justificarse al tratarse de un modelo estático.

El beneficio de cada firma puede expresarse en función de las decisiones tomadas tanto en localización como en cantidad. En primer lugar, consideremos dadas las localizaciones y estudiemos la existencia de equilibrio para la segunda etapa del juego. La función de beneficios en la segunda etapa es

$$\pi_i(q_A, q_B) = \sum_{k=1}^n (a_k - b_k (q_A^k + q_B^k) - c_i^k) q_i^k - F_i, \quad i = A, B,$$

donde  $q_A^k, q_B^k \geq 0$ ,  $q_A^k + q_B^k \leq \frac{a_k}{b_k}$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

Se trata de hallar  $(\bar{q}_A, \bar{q}_B)$  tales que

$$\pi_A(\bar{q}_A, \bar{q}_B) = \max_{q_A} \pi_A(q_A, q_B(q_A)),$$

$$\pi_B(\bar{q}_A, \bar{q}_B) = \max_{q_B} \pi_B(q_A(\bar{q}_B), q_B),$$

donde

$$\pi_B(q_A, q_B(q_A)) = \max_{q_B} \pi_B(q_A, q_B),$$

$$\pi_A(q_A(q_B), q_B) = \max_{q_A} \pi_A(q_A, q_B).$$

**Proposición 3.3** Sean dos localizaciones tales que

$$a_k > \max \{c_A^k, c_B^k\}, k = 1, \dots, n.$$

Entonces, existe un único equilibrio líder-líder  $(\bar{q}_A, \bar{q}_B)$ . Además:

(i) Si  $c_A^k \leq c_B^k$ , entonces

$$(\bar{q}_A^k, \bar{q}_B^k) = \begin{cases} \left( \frac{a_k - c_A^k}{2b_k}, 0 \right) & \text{si } a_k < 2c_B^k - c_A^k \\ \left( \frac{a_k - c_B^k}{b_k}, \frac{a_k + c_A^k - 2c_B^k}{2b_k} \right) & \text{si } 2c_B^k - c_A^k \leq a_k < 3c_B^k - 2c_A^k \\ \left( \frac{a_k - 2c_A^k + c_B^k}{2b_k}, \frac{a_k + c_A^k - 2c_B^k}{2b_k} \right) & \text{si } a_k \geq 3c_B^k - 2c_A^k. \end{cases}$$

(ii) Si  $c_A^k > c_B^k$ , entonces se intercambian los papeles de A y B en el equilibrio de (i).

**Demostración** Los valores  $\bar{q}_A^k, \bar{q}_B^k$ , son los obtenidos para el líder del modelo de Stackelberg en la proposición 3.1.  $\square$

**Corolario 3.2** Dadas dos localizaciones tales que

$$a_k > \max \{3c_A^k - 2c_B^k, 3c_B^k - 2c_A^k\}, k = 1, \dots, n,$$

el único equilibrio líder-líder viene dado por

$$\bar{q}_A^k = \frac{a_k - 2c_A^k + c_B^k}{2b_k}, \bar{q}_B^k = \frac{a_k + c_A^k - 2c_B^k}{2b_k}, k = 1, \dots, n.$$

**Demostración** Se obtiene como caso particular de la proposición 3.3, teniendo en cuenta que

$$\max \{3c_A^k - 2c_B^k, 3c_B^k - 2c_A^k\} \geq \max \{c_A^k, c_B^k\}, k = 1, \dots, n \quad \square$$

Bajo la hipótesis del corolario 3.2, el precio de mercado es

$$p^k = \frac{c_A^k + c_B^k}{2},$$

el cual no depende de la disposición a pagar de los consumidores. Esta hipótesis, similar a la asumida por Labbé y Hakimi para el estudio de la primera etapa, garantiza que las cantidades ofrecidas por ambas empresas en todos los mercados son estrictamente positivas. Este supuesto admite que las firmas pueden ofrecer cantidades a un precio inferior a su coste. Aunque a corto plazo este comportamiento no es razonable, las empresas podrían actuar de esta forma durante un período de tiempo con el fin de posicionarse en el mercado y obtener beneficios a largo plazo.

**Condición 3.2** *La red  $N(V,E)$  satisface*

$$a_k > \max \left\{ 3 \max_{x \in N} c_A^k(x) - 2 \min_{x \in N} c_B^k(x), 3 \max_{x \in N} c_B^k(x) - 2 \min_{x \in N} c_A^k(x) \right\},$$

$k = 1, \dots, n$ .

Bajo la condición 3.2, el beneficio en la primera etapa, asumiendo comportamiento líder-líder en la segunda etapa, es

$$\pi_i(x_A, x_B) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{4b_k} (a_k + c_j^k(x_j) - 2c_i^k(x_i)) (c_j^k(x_j) - c_i^k(x_i)) - F_i,$$

$i, j = A, B; j \neq i$ . Obsérvese que si cada empresa actúa como líder suponiendo que la otra es seguidora y no es así, ambas firmas sufren pérdidas en aquellos mercados donde su coste sea mayor que el de su competidora.

**Condición 3.2'** *La red  $N(V,E)$  satisface*

$$a_k > \max \left\{ 4 \max_{x \in N} c_A^k(x) - 3 \min_{x \in N} c_B^k(x), 4 \max_{x \in N} c_B^k(x) - 3 \min_{x \in N} c_A^k(x) \right\},$$

$k = 1, \dots, n$ .

La condición 3.2' implica la condición 3.2 y será utilizada con posterioridad.

Un equilibrio subjuego-perfecto, si existe, viene dado por un par de localizaciones de equilibrio para la primera etapa junto con las correspondientes cantidades de equilibrio para la segunda etapa. Un par de localizaciones,  $\bar{x}_A$  y  $\bar{x}_B$ , constituyen un equilibrio de Nash para la primera etapa si

$$\pi_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) = \max_{x \in N} \pi_i(x, \bar{x}_j), \quad i, j = A, B; \quad j \neq i.$$

Se probará que bajo determinadas condiciones, si existe equilibrio de Nash en la primera etapa, entonces existe uno en un subconjunto de vértices de la red.

**Lema 3.2** *Bajo la condición 3.2', si las funciones de coste de transporte unitario  $t_i$  son cóncavas, entonces  $\pi_i(x_i, x_j)$  es una función cóncava en  $x_i$  cuando  $x_i$  se desplaza a lo largo de una arista de la red y  $x_j$  está fijo,  $i, j = A, B; \quad j \neq i$ .*

**Demostración** Para cada vértice  $v_k \in V$ , la distancia  $\delta_{x_i, v_k}$  es cóncava con respecto de  $x_i$  cuando  $x_i$  se mueve sobre una arista. Al ser  $t_i$  cóncava y creciente de la distancia, la función  $t_i^k = t_i \circ \delta_{x_i, v_k}$  es cóncava respecto de  $x_i$  cuando  $x_i$  se mueve sobre una arista.

Para cada vértice  $v_k \in V$ , el beneficio  $\pi_i^k(x_A, x_B)$  se puede escribir como

$$\begin{aligned} \pi_i^k &= \frac{1}{4b_k} (a_k + c_j^k(x_j) - 2c_i^k(x_i)) (c_j^k(x_j) - c_i^k(x_i)) \\ &= \frac{1}{4b_k} \left\{ 2(c_i^k(x_i))^2 - (a_k + 3c_j^k(x_j))c_i^k(x_i) + (a_k + c_j^k(x_j))c_j^k(x_j) \right\} \\ &= A(-c_i^k(x_i))^2 + B(-c_i^k(x_i)) + C, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} A &= \frac{2}{4b_k} > 0, \\ B &= \frac{a_k + 3c_j^k(x_j)}{4b_k} > 0, \\ C &= \frac{(a_k + c_j^k(x_j))c_j^k(x_j)}{4b_k} > 0. \end{aligned}$$

Puesto que  $c_i^k(x) = C_i'(x) + t_i^k(x)$ , y hemos asumido que  $C_i'(x)$  es una función cóncava con respecto de  $x$  cuando  $x$  se mueve sobre una arista de la red, entonces  $c_i^k(x)$  es una función cóncava en la arista y, por tanto,  $-c_i^k(x)$  es convexa. Además,

$$\frac{-B}{2A} = -\frac{a_k + 3c_j^k(x_j)}{4},$$

y por la condición 3.2',

$$a_k > 4c_i^k(x) - 3c_j^k(x),$$

de donde

$$-\frac{a_k + 3c_j^k(x_j)}{4} < -c_i^k(x_i).$$

Aplicando la proposición 2.5 se deduce que  $\pi_i^k(x_i, x_j)$  es convexa respecto de  $x_i$  cuando  $x_i$  se desplaza a lo largo de una arista de la red y  $x_j, j \neq i$ , permanece fijo.  $\square$

**Proposición 3.4** *Sea la condición 3.2' y funciones de coste de transporte unitario  $t_i$  cóncavas. Si existe equilibrio de Nash en la primera etapa asumiendo comportamiento líder-líder en la segunda, entonces existe uno en un subconjunto de vértices de la red.*

**Demostración** Basta aplicar el lema 3.2 y la proposición 2.6.  $\square$

Si se dan las condiciones de la proposición anterior y existe equilibrio de Nash en la primera etapa, su búsqueda puede realizarse con un algoritmo similar al 3.1 del epígrafe anterior.

### 3.3.3 Análisis comparativo entre escenarios

La tabla 3.1 muestra el equilibrio para el mercado  $k$  en la segunda etapa, tanto de los escenarios estudiados con anterioridad como del considerado por Labbé y Hakimi (1991). La condición exigida en todos los casos es

$$a_k > \max \{3c_A^k - 2c_B^k, 3c_B^k - 2c_A^k\}.$$

Además, se muestra la elasticidad de la demanda.

La *elasticidad-precio de la demanda* en el mercado  $k$ , viene dada por la siguiente expresión

$$\epsilon_k = \frac{dq^k/dp^k}{q^k/p^k} = \frac{p^k}{q^k} (dq^k/dp^k) = -\frac{p^k}{a_k - p^k}.$$

La demanda será elástica si  $p^k > a_k/2$ , inelástica si  $p^k < a_k/2$  y tendrá elasticidad unitaria si  $p^k = a_k/2$ . Además, si  $p^k = a_k$  la elasticidad es infinita y cuando  $p^k = 0$  la demanda es totalmente inelástica.

Escenario	Conjeturas nulas	Conjeturas no nulas	Stackelberg (A líder)
$\bar{q}_A^k$	$\frac{a_k - 2c_A^k + c_B^k}{3b_k}$	$\frac{a_k - 2c_A^k + c_B^k}{2b_k}$	$\frac{a_k - 2c_A^k + c_B^k}{2b_k}$
$\bar{q}_B^k$	$\frac{a_k + c_A^k - 2c_B^k}{3b_k}$	$\frac{a_k + c_A^k - 2c_B^k}{2b_k}$	$\frac{a_k + 2c_A^k - 3c_B^k}{4b_k}$
$\bar{q}^k$	$\frac{2a_k - c_A^k - c_B^k}{3b_k}$	$\frac{2a_k - c_A^k - c_B^k}{2b_k}$	$\frac{3a_k - 2c_A^k - c_B^k}{4b_k}$
$\bar{p}^k$	$\frac{a_k + c_A^k + c_B^k}{3}$	$\frac{c_A^k + c_B^k}{2}$	$\frac{a_k + 2c_A^k + c_B^k}{4}$
$\epsilon_k$	$-\frac{a_k + c_A^k + c_B^k}{2a_k - c_A^k - c_B^k}$	$-\frac{c_A^k + c_B^k}{2a_k - c_A^k - c_B^k}$	$-\frac{a_k + 2c_A^k + c_B^k}{3a_k - 2c_A^k - c_B^k}$
elástica si	$a_k < 2c_A^k + 2c_B^k$	$a_k < c_A^k + c_B^k$	$a_k < 2c_A^k + c_B^k$

Tabla 3.1: Resultados para la competencia en cantidades

Como puede observarse, las cantidades de equilibrio del modelo líder-líder (con conjeturas no nulas) son 1.5 veces las obtenidas por Labbé y Hakimi asumiendo conjeturas nulas, es decir, adelantar la reacción de la firma competidora provoca un aumento de la producción del 50%. Por supuesto, el precio se reduce por el incremento de la oferta. Por otro lado, la firma líder pone en el mercado la misma cantidad que asumiendo conjeturas no nulas, aproximadamente el doble que la seguidora<sup>2</sup>. Obsérvese además, que los costes unitarios de la líder afectan en mayor medida a la cantidad y precio de mercado que los de la seguidora.

Respecto al precio de equilibrio, pueden comprobarse las siguientes relaciones sin más que tener en cuenta que bajo la condición exigida se tiene que

$$a_k > \max \{c_A^k, c_B^k, 2c_A^k - c_B^k, 2c_B^k - c_A^k\}.$$

Se cumple que

$$\frac{c_A^k + c_B^k}{2} < \min \left\{ \frac{a_k + 2c_A^k + c_B^k}{4}, \frac{a_k + c_A^k + 2c_B^k}{4} \right\},$$

es decir, el precio de equilibrio asumiendo conjeturas no nulas es menor que el precio de Stackelberg, independientemente de cual sea la firma líder. Por otro lado, también se tiene que

$$\max \left\{ \frac{a_k + 2c_A^k + c_B^k}{4}, \frac{a_k + c_A^k + 2c_B^k}{4} \right\} < \frac{a_k + c_A^k + c_B^k}{3},$$

luego el precio de equilibrio de Stackelberg, independientemente de cual sea la firma líder, es menor que el que se obtiene asumiendo conjeturas nulas.

En resumen, la competencia más agresiva, en cuanto a reducción de precios se refiere, se produce asumiendo conjeturas no nulas, seguida del comportamiento de Stackelberg y en último lugar las conjeturas nulas.

Finalmente, como

$$c_A^k + c_B^k < 2c_A^k + c_B^k < 2(c_A^k + c_B^k),$$

si la demanda es elástica en el escenario de conjeturas nulas, entonces también lo será en los otros dos escenarios. Sin embargo, podría ocurrir que en alguno de los escenarios donde alguna de las empresas asume conjeturas no nulas la demanda fuera elástica y que al considerar conjeturas nulas pasase a ser inelástica.

<sup>2</sup>exactamente el doble si los costes unitarios en ese mercado coinciden

### 3.4 Competencia en precios

En este modelo el comportamiento estratégico combina ubicación y política de precios en destino (delivered price). Las empresas discriminan precios en  $n$  mercados separados espacialmente, de forma que cubran, al menos, los costes de producción y de transporte. El objetivo de cada empresa es decidir la ubicación y el precio al que ofrecerá su producto en cada mercado, de forma que maximice el beneficio.

El proceso de competencia es modelado como un juego no cooperativo en dos etapas. El precio en la segunda etapa está condicionado por las localizaciones elegidas en la etapa anterior. Sea  $p_i^k(x_A, x_B)$  el precio al que ofrecerá la empresa  $i$  el bien en el mercado  $k$ , si las firmas  $A$  y  $B$  están ubicadas en  $x_A$  y  $x_B$ , respectivamente. Se asume que los consumidores adquirirán el producto de la firma con menor precio, es decir, si  $p_i^k(x_A, x_B) < p_j^k(x_A, x_B)$ , los consumidores situados en  $v_k$  comprarán a la firma  $i$  al precio  $p_i^k$ . Si en un determinado mercado los precios coinciden, supondremos que la demanda se reparte en partes iguales entre las firmas.

#### 3.4.1 Demanda totalmente inelástica

Sea  $\lambda_k$  la demanda en el mercado  $k$ -ésimo, que no depende del precio del bien en ese mercado. Este tipo de demanda totalmente inelástica corresponde a bienes de primera necesidad sin sustitutos cercanos. Este escenario ha sido estudiado por Lederer y Thisse (1990) cuando las firmas deciden además del precio, la forma de combinar los inputs para producir los outputs (tecnología de producción), que depende de sus respectivas ubicaciones. El problema analizado a continuación es similar al considerado por estos autores, asumiendo en esta ocasión, que las firmas deciden localizaciones y precios. Se propone un algoritmo para la obtención del equilibrio de Nash en la segunda etapa basado en un resultado que garantiza la inexistencia de ciclos en un proceso en el que las firmas deciden alternativamente la localización que maximiza su beneficio dada la ubicación de su rival.

Estudiemos en primer lugar la segunda etapa del juego. Para ello, dadas dos localizaciones, denotemos por  $K_A$  y  $K_B$ , los mercados captados por  $A$  y  $B$ , respectivamente, y por  $k_M$  el mercado marginal, es decir,

$$K_A = \{k : p_A^k < p_B^k\},$$

$$K_B = \{k : p_A^k > p_B^k\},$$

$$K_M = \{k : p_A^k = p_B^k\}.$$

Entonces, el beneficio para la firma  $i$  se escribe de la siguiente manera

$$\pi_i(p_A, p_B) = \sum_{k \in K_i} (p_i^k - c_i^k) \lambda_k + \frac{1}{2} \sum_{k \in K_M} (p_i^k - c_i^k) \lambda_k - F_i, \quad i = A, B.$$

Dadas dos ubicaciones y  $p_B^k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , la decisión óptima para  $A$  en el mercado  $k$  es

$$p_{A_\varepsilon}^k = \max \{c_A^k, p_B^k - \varepsilon\},$$

donde  $\varepsilon > 0$  es una cantidad tan pequeña como se desee. La empresa  $B$ , conocedora de la política de  $A$ , es decir, reducir mientras tenga margen de beneficio el precio fijado por  $B$ , adoptará el precio

$$\bar{p}_{B_\varepsilon}^k = \max \{c_B^k, c_A^k - \varepsilon\},$$

al que responderá  $A$  con

$$\bar{p}_{A_\varepsilon}^k = \max \{c_A^k, c_B^k - \varepsilon\}.$$

Esto significa que la empresa con menor coste en un determinado mercado lo capta completamente y que el precio fijado será algo inferior al coste de su competidora. Las empresas tomarán  $\varepsilon$  arbitrariamente pequeño, y en el límite

$$\bar{p}_A^k = \bar{p}_B^k = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{p}_{i_\varepsilon}^k = \max \{c_A^k, c_B^k\} = \bar{p}^k.$$

Este es un resultado conocido en la teoría sobre discriminación de precios, que asegura que el precio pagado por los consumidores es igual al coste marginal en destino de la empresa con costes superiores. Obsérvese que si  $c_A^k = c_B^k = c^k$ , entonces  $(\bar{p}_A^k, \bar{p}_B^k) = (c^k, c^k)$  es un equilibrio de Nash. En otro caso, es decir cuando  $c_A^k \neq c_B^k$ ,  $(\bar{p}_A^k, \bar{p}_B^k) = (\bar{p}^k, \bar{p}^k)$  no es un equilibrio de Nash. Nótese que si  $c_A^k < c_B^k$ , la función  $\pi_A^k(p_A^k, c_B^k)$  es discontinua y el problema

$$\max_{c_A^k \leq p_A^k \leq c_B^k} \pi_A^k(p_A^k, c_B^k)$$

no tiene solución. Por esta razón, nos referiremos al precio de mercado  $\bar{p}^k$  como seudoequilibrio ( $\varepsilon$ -equilibrio).

Bajo la regla usada para definir la cuota de mercado, con el precio  $\bar{p}^k = \max \{c_A^k, c_B^k\}$  cada empresa captará la mitad de la demanda. Sin embargo, aquella con mayores costes no obtendrá beneficios, es más, si  $c_i^k < c_j^k$  bastaría con que la firma  $i$  redujese mínimamente su precio para quedarse con toda la demanda del mercado, así que parece bastante razonable redefinir esta regla de forma que cada mercado sea cubierto por la firma con menor coste. Entonces,

el beneficio para la firma  $i$  en la primera etapa puede escribirse de la siguiente manera

$$\pi_i(x_A, x_B) = \sum_{k=1}^n \pi_i^k(x_A, x_B) - F_i,$$

$$\pi_i^k(x_A, x_B) = \begin{cases} (c_j^k(x_j) - c_i^k(x_i))\lambda_k & \text{si } c_i^k(x_i) < c_j^k(x_j) \\ 0 & \text{si } c_i^k(x_i) \geq c_j^k(x_j), \end{cases}$$

donde  $i = A, B$ ;  $j \neq i$ .

**Proposición 3.5** *El beneficio de cada firma en la primera etapa puede expresarse de la siguiente manera*

$$\pi_i(x_A, x_B) = \sum_{k=1}^n c_j^k(x_j)\lambda_k + F_j - CS(x_A, x_B), \quad i = A, B; \quad j \neq i,$$

donde

$$CS(x_A, x_B) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \min \{c_A^k(x_A), c_B^k(x_B)\} + F_A + F_B.$$

**Demostración** Se deduce teniendo en cuenta los mercados captados por cada empresa.  $\square$

La función  $CS$  se denomina coste social (Lederer y Thisse, 1990) y es el coste mínimo de cubrir toda la demanda. El resultado anterior indica que el beneficio de una firma es el coste que supone a su rival cubrir toda la demanda menos el coste social, que es el coste mínimo si las firmas actuaran de forma cooperativa.

Un equilibrio de Nash para la primera etapa viene dado por un par de localizaciones,  $\bar{x}_A$  y  $\bar{x}_B$ , tales que

$$\pi_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) = \max_{x \in N} \pi_i(x, \bar{x}_j), \quad i = A, B; \quad j \neq i.$$

Si asumimos  $x_j$  fijo, el coste que supone para la firma  $j$  suministrar todo el mercado es constante, por lo que el beneficio de la firma  $i$  se maximiza en aquella localización que minimice el coste social. Por tanto, se trata de estudiar si existen localizaciones,  $\bar{x}_A$  y  $\bar{x}_B$ , tales que

$$CS(\bar{x}_A, \bar{x}_B) = \min_{x \in N} CS(x, \bar{x}_B) = \min_{x \in N} CS(\bar{x}_A, x).$$

**Proposición 3.6** *Se tienen los siguientes resultados:*

- (i) *Si  $CS$  tiene mínimo global en  $(\bar{x}_A, \bar{x}_B) \in N \times N$ , entonces  $(\bar{x}_A, \bar{x}_B)$  es un equilibrio de Nash para la primera etapa del juego.*
- (ii) *Si las funciones  $C'_i, t_i^k$ , son continuas en  $N$ , entonces existe un equilibrio de Nash para la primera etapa del juego.*
- (iii) *Si las funciones  $t_i^k$  son cóncavas cuando  $x$  se mueve sobre una arista de la red, entonces  $CS(x_A, x_B)$  es una función cóncava en  $x_i$  cuando  $x_i$  se desplaza por una arista de la red y  $x_j$  permanece fijo,  $i = A, B; j \neq i$ .*

**Demostración**

- (i) Si  $(\bar{x}_A, \bar{x}_B)$  es un mínimo global de  $CS(x_A, x_B)$ , entonces

$$CS(\bar{x}_A, \bar{x}_B) \leq CS(x_A, x_B), \forall (x_A, x_B) \in N \times N,$$

por tanto,

$$CS(\bar{x}_A, \bar{x}_B) \leq CS(\bar{x}_A, x_B), \forall x_B \in N,$$

$$CS(\bar{x}_A, \bar{x}_B) \leq CS(x_A, \bar{x}_B), \forall x_A \in N,$$

de donde se deduce que  $(\bar{x}_A, \bar{x}_B)$  es un equilibrio de Nash.

- (ii) La función  $c_i^k(x) = C'_i(x) + t_i^k(x)$  es continua en  $N$ . Entonces,  $CS(x_A, x_B)$  es continua en  $N \times N$  por ser suma de mínimos de funciones continuas. Como  $N^2 = N \times N \subset \mathbb{R}^{2d}$  es compacto en  $\mathbb{R}^{2d}$  y  $CS(x_A, x_B)$  es continua en  $N^2$ , se deduce que existe mínimo global de  $CS(x_A, x_B)$  en  $N^2$ .
- (iii) Como se ha supuesto que  $C'_i(x)$  es una función cóncava de  $x$  cuando  $x$  se desplaza por una arista de la red, entonces  $c_i^k(x) = C'_i(x) + t_i^k(x)$  es una función cóncava de  $x$  cuando  $x$  se desplaza por una arista de la red. Entonces,  $CS(x_A, x_B)$  es una función cóncava de  $x_i$  cuando  $x_i$  se mueve sobre una arista y  $x_j$  permanece fijo, por ser suma de mínimos de funciones cóncavas.  $\square$

Obsérvese que, en equilibrio, dos empresas con iguales costes marginales y de transporte, no se localizarán en el mismo nodo siempre que exista otro con demanda no nula. Esto es debido a que si las localizaciones son coincidentes, ambas tendrán pérdidas, mientras que una de ellas podría relocalizarse en otro nodo con demanda no nula, obteniéndose mayores beneficios para ambas.

**Proposición 3.7** Sean  $t_i^k$  funciones cóncavas cuando  $x$  se mueve sobre una arista de la red. Si existe equilibrio de Nash en la primera etapa, entonces existe un equilibrio en un conjunto de nodos de la red.

**Demostración** Como  $t_i^k$  son funciones cóncavas cuando  $x$  se mueve sobre una arista de la red, entonces  $CS$  es una función cóncava cuando  $x$  se mueve sobre una arista de la red (proposición 3.6). Sea  $(\bar{x}_A, \bar{x}_B)$  un equilibrio. Si  $\bar{x}_A$  y  $\bar{x}_B \in V$  estaría probado el resultado. Si no fuera así, podemos suponer que  $\bar{x}_A \notin V$ . Esto significa que existe una arista  $[v_L, v_U]$  en la red, de forma que  $\bar{x}_A \in ]v_L, v_U[$ . Por hipótesis, el mínimo de la función cóncava  $CS$  está en el interior de  $[v_L, v_U]$ , por tanto  $CS$  debe ser constante en  $[v_L, v_U]$  y entonces cualquiera de los extremos del intervalo es también un equilibrio.  $\square$

En virtud del resultado anterior, la búsqueda de un equilibrio de Nash puede efectuarse con un método de enumeración que recorra las  $n^2$  posibilidades. Podría utilizarse un algoritmo de búsqueda que no recorra necesariamente todo el conjunto factible. Puede partirse de una localización inicial para una de las empresas y obtener consecutivamente la localización que minimiza el coste social dada la elección de la otra. El siguiente resultado asegura que este proceso acaba en un número finito de pasos en un equilibrio de Nash.

**Proposición 3.8** Dado un conjunto de localizaciones iniciales en nodos de la red, si las funciones  $t_i^k$  son cóncavas cuando  $x$  se mueve sobre una arista de la red, entonces el proceso de relocalizaciones consecutivas a un nodo con menor coste social acaba en un número finito de pasos en un equilibrio de Nash.

**Demostración** Puesto que el conjunto factible es finito, bastará con comprobar que no existen ciclos. Supongamos por reducción al absurdo que existen dos conjuntos  $\{v_A^1, v_A^2, \dots, v_A^s\}$  y  $\{v_B^1, v_B^2, \dots, v_B^s\}$  de nodos que representan las decisiones tomadas por  $A$  y  $B$ , respectivamente, siendo  $A$  la primera en decidir, que producen un ciclo en la iteración  $s$ . Se tendrá entonces:

$$\begin{aligned} CS(v_A^2, v_B^1) &< CS(v_A^1, v_B^1), \\ CS(v_A^2, v_B^2) &< CS(v_A^2, v_B^1), \\ CS(v_A^3, v_B^2) &< CS(v_A^2, v_B^2), \\ &\vdots \\ CS(v_A^1, v_B^s) &< CS(v_A^s, v_B^s), \\ CS(v_A^1, v_B^1) &< CS(v_A^1, v_B^s). \end{aligned}$$

Sumando todas las inecuaciones se tiene

$$\sum_{j=1}^s [CS(v_A^{j+1}, v_B^j) + CS(v_A^{j+1}, v_B^{j+1})] < \sum_{j=1}^s [CS(v_A^j, v_B^j) + CS(v_A^{j+1}, v_B^j)],$$

donde  $v_i^{s+1} = v_i^1$ ,  $i = A, B$ . Pasando todo al primer miembro, agrupando bajo el mismo sumatorio y simplificando, resulta

$$\sum_{j=1}^s [CS(v_A^{j+1}, v_B^{j+1}) - CS(v_A^j, v_B^j)] < 0.$$

Como el primer término se anula, se obtiene la contradicción que se buscaba ( $0 < 0$ ).  $\square$

Si las funciones  $t_i^k$  son cóncavas cuando  $x$  se mueve sobre una arista de la red, la búsqueda de un equilibrio de Nash para la primera etapa puede hacerse aplicando el siguiente algoritmo, donde en cada proceso de relocalización se minimiza el coste social.

**Algoritmo 3.2** *Obtención de un equilibrio para el juego*

**Paso 0.** Hacer  $h = 0$ . Tomar un par de localizaciones iniciales  $v_A^h$  y  $v_B^h$  de  $V$ , y hacer  $CS^h = CS(v_A^h, v_B^h)$ .

**Paso 1.** (Relocalización de A)

Hallar  $v_A^*$  tal que  $CS(v_A^*, v_B^h) = \min_{v \in V} CS(v, v_B^h)$ . Si  $CS(v_A^*, v_B^h) = CS^h$  y  $h \neq 0$ , parar. Las localizaciones son  $v_A^h$  y  $v_B^h$ , los precios  $\bar{p}^k = \max\{c_A^k(v_A^h), c_B^k(v_B^h)\}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , y el coste social es  $CS^h$ . En otro caso, hacer  $v_A^{h+1} = v_A^*$  y  $CS^{h+1} = CS(v_A^*, v_B^h)$ .

**Paso 2.** (Relocalización de B)

Hallar  $v_B^*$  tal que  $CS(v_A^{h+1}, v_B^*) = \min_{v \in V} CS(v_A^{h+1}, v)$ . Si  $CS(v_A^{h+1}, v_B^*) = CS^{h+1}$ , parar. Las localizaciones son  $v_A^{h+1}$  y  $v_B^h$ , los precios  $\bar{p}^k = \max\{c_A^k(v_A^{h+1}), c_B^k(v_B^h)\}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , y el coste social es  $CS^{h+1}$ . En otro caso, hacer  $v_B^{h+1} = v_B^*$ ,  $CS^{h+1} = CS(v_A^{h+1}, v_B^*)$ ,  $h = h + 1$  e ir al paso 1.

La proposición 3.8 garantiza que este proceso finaliza en un número finito de pasos y converge hacia el equilibrio en  $O(n^3)$ . Finalmente, obsérvese que en

el paso 0 podría tomarse una localización inicial  $v_A^0 \in V$  y elegir  $v_B^0$  tal que  $CS(v_A^0, v_B^0) = \min_{v \in V} CS(v_A^0, v)$ .

Se ha probado la existencia de un equilibrio de Nash para la primera etapa en un conjunto de nodos de la red si las funciones  $t_i^k$  son cóncavas cuando  $x$  se mueve sobre una arista. Además, el equilibrio de Nash que es óptimo de Pareto se alcanza cuando se minimiza el coste social, es decir, el coste mínimo para satisfacer toda la demanda. Esta idea lleva intrínseca cierta eficiencia, al confluir en el equilibrio los intereses de las firmas, de maximización del beneficio, y de los consumidores.

### 3.4.2 Demanda elástica al precio. El caso lineal

Dado que hemos asumido  $b_k \neq 0$ , es posible expresar la cantidad demandada en función del precio, dando lugar a la función de demanda

$$q^k(p^k) = \begin{cases} \alpha_k - \beta_k p^k & \text{si } 0 \leq p^k \leq a_k \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde  $\alpha_k = a_k/b_k > 0$  y  $\beta_k = 1/b_k > 0$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

El beneficio para una de las empresas se expresa de la siguiente manera

$$\pi_i(x_A, x_B, p_A, p_B) = \sum_{k=1}^n (p_i^k(x_A, x_B) - c_i^k(x_i)) q_i^k(p_A^k, p_B^k) - F_i,$$

siendo

$$q_i^k(p_A^k, p_B^k) = \begin{cases} \alpha_k - \beta_k p_i^k & \text{si } c_i^k \leq p_i^k < p_j^k \\ \frac{1}{2} (\alpha_k - \beta_k p_i^k) & \text{si } p_i^k = p_j^k \\ 0 & \text{si } a_k \geq p_i^k > p_j^k \end{cases}$$

con  $i, j = A, B$ ;  $j \neq i$ .

Dadas dos localizaciones,  $x_A$  y  $x_B$ , se tiene que

$$\pi_i(p_A, p_B) = \sum_{k=1}^n \pi_i^k(p_A^k, p_B^k) - F_i,$$

donde

$$\pi_i^k(p_A^k, p_B^k) = \begin{cases} (p_i^k - c_i^k) (\alpha_k - \beta_k p_i^k) & \text{si } c_i^k \leq p_i^k < p_j^k \\ \frac{1}{2} (p_i^k - c_i^k) (\alpha_k - \beta_k p_i^k) & \text{si } p_i^k = p_j^k \\ 0 & \text{si } a_k \geq p_i^k > p_j^k \end{cases}$$

con  $i, j = A, B; j \neq i$ .

Otra forma de expresar el beneficio es la siguiente

$$\pi_i(p_A, p_B) = \sum_{k \in K_i} (p_i^k - c_i^k) (\alpha_k - \beta_k p_i^k) + \frac{1}{2} \sum_{k \in K_M} (p_i^k - c_i^k) (\alpha_k - \beta_k p_i^k) - F_i,$$

donde  $i = A, B$ , y

$$K_A = \{k : c_A^k \leq p_A^k < p_B^k\},$$

$$K_B = \{k : p_A^k > p_B^k \geq c_B^k\},$$

$$K_M = \{k : p_A^k = p_B^k \geq c_A^k\}.$$

**Proposición 3.9** Sean dos localizaciones tales que

$$a_k > \max \{c_A^k, c_B^k\}, \quad k = 1, \dots, n.$$

(i) Si  $a_k < \max \{2c_A^k - c_B^k, 2c_B^k - c_A^k\}$ , entonces existe un equilibrio de Nash en precios en  $v_k$  dado por

$$(\bar{p}_A^k, \bar{p}_B^k) = \begin{cases} (\frac{1}{2}(a_k + c_A^k), c_B^k) & \text{si } a_k < 2c_B^k - c_A^k \\ (c_A^k, \frac{1}{2}(a_k + c_B^k)) & \text{si } a_k < 2c_A^k - c_B^k. \end{cases}$$

Además,

$$\bar{p}^k = \min \{\bar{p}_A^k, \bar{p}_B^k\} = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k + c_A^k) & \text{si } a_k < 2c_B^k - c_A^k \\ \frac{1}{2}(a_k + c_B^k) & \text{si } a_k < 2c_A^k - c_B^k. \end{cases}$$

(ii) Si  $a_k \geq \max \{2c_A^k - c_B^k, 2c_B^k - c_A^k\}$ , entonces existe equilibrio de Nash en  $v_k$  si y sólo si  $c_A^k = c_B^k - c^k$ , en cuyo caso el equilibrio es

$$(\bar{p}_A^k, \bar{p}_B^k) = (c^k, c^k)$$

$$\text{y } \bar{p}^k = \min \{\bar{p}_A^k, \bar{p}_B^k\} = c^k.$$

(iii) Si para  $k = 1, \dots, n$ , se tiene que

$$c_A^k = c_B^k \quad \text{o} \quad a_k < \max \{2c_A^k - c_B^k, 2c_B^k - c_A^k\},$$

entonces existe un equilibrio de Nash en precios.

**Demstración** Suponiendo fijadas las localizaciones  $x_i$ ,  $i = A, B$ , si los costes marginales son constantes los mercados pueden separarse y el estudio del equilibrio en precios en  $v_k \in V$  consiste en obtener un par  $(\bar{p}_A^k, \bar{p}_B^k)$  tal que  $\bar{p}_i^k$  es solución óptima del problema

$$\max_{p_i^k} \pi_i^k(p_A^k, p_B^k)$$

$$s.a. \quad \begin{aligned} c_i^k &\leq p_i^k \leq p_j^k \\ p_i^k &\leq a_k \end{aligned}$$

$i, j = A, B$ ;  $j \neq i$ , donde

$$\pi_i^k(p_A^k, p_B^k) = \begin{cases} (p_i^k - c_i^k)(\alpha_k - \beta_k p_i^k) & \text{si } c_i^k \leq p_i^k < p_j^k \\ \frac{1}{2}(p_i^k - c_i^k)(\alpha_k - \beta_k p_i^k) & \text{si } p_i^k = p_j^k \\ 0 & \text{si } a_k \geq p_i^k > p_j^k. \end{cases}$$

Fijado  $p_j^k$ , la función  $\pi_i^k(p_A^k, p_B^k)$  tiene una discontinuidad en  $p_j^k$ . Sea

$$f_{ik}(p) = -\beta_k p^2 + (\alpha_k + c_i^k \beta_k)p - \alpha_k c_i^k.$$

Entonces, para  $c_i^k \leq p_i^k < p_j^k$ ,

$$\pi_i^k(p_A^k, p_B^k) = f_{ik}(p_i^k), \quad i, j = A, B; j \neq i.$$

La función  $f_{ik}$  es cóncava y tiene un máximo en

$$p_{ik}^* = \frac{\alpha_k + c_i^k \beta_k}{2\beta_k} = \frac{1}{2}(a_k + c_i^k).$$

Como  $a_k > c_i^k$ , se tiene que  $p_{ik}^* < a_k$ . Entonces, si  $p_{ik}^* < p_j^k$ , la solución óptima del problema de optimización para  $\pi_i^k$  es  $p_{ik}^*$ . Si  $p_{ik}^* \geq p_j^k$ , no existe solución debido a la discontinuidad en  $p_j^k$ .

(a) Supongamos que  $c_A^k \leq c_B^k$ .

(a.1) Si  $\frac{1}{2}(a_k + c_A^k) < c_B^k$ , es decir  $a_k < 2c_B^k - c_A^k$ , entonces para todo  $p_B^k$  con  $c_B^k \leq p_B^k \leq a_k$ , la firma  $A$  obtiene el beneficio máximo en  $p_A^k = \frac{1}{2}(a_k + c_A^k) < c_B^k$  y la firma  $B$  tendería a bajar el precio hasta alcanzar  $c_B^k$ . Puesto que  $p_A^k < c_B^k$ , la demanda captada por  $B$  es nula y no le interesaría entrar en el mercado. En este caso

$$(\bar{p}_A^k, \bar{p}_B^k) = \left( \frac{1}{2}(a_k + c_A^k), c_B^k \right)$$

es un equilibrio de Nash.

- (a.2) Si  $\frac{1}{2}(a_k + c_A^k) \geq c_B^k$ , se tiene que  $p_B^k = \frac{1}{2}(a_k + c_B^k) \geq p_A^k$  y entonces  $B$  tendría incentivos a reducir precios. El proceso de reducción de precios llevaría a  $B$  hasta  $c_B^k$ . En este caso, se tendría un seudoequilibrio ( $A$  tendría incentivos a cambiar a  $c_B^k - \varepsilon$ ) en  $(\bar{p}_A^k, \bar{p}_B^k) = (c_B^k, c_B^k)$ , que no es equilibrio de Nash salvo cuando  $c_A^k = c_B^k = c^k$ , en cuyo caso

$$(\bar{p}_A^k, \bar{p}_B^k) = (c^k, c^k)$$

es un equilibrio de Nash.

- (b) Si  $c_A^k > c_B^k$ , se procede de forma similar que para  $c_A^k \leq c_B^k$ , obteniéndose que

$$(\bar{p}_A^k, \bar{p}_B^k) = \left( c_A^k, \frac{1}{2}(a_k + c_B^k) \right)$$

es un equilibrio de Nash si  $\frac{1}{2}(a_k + c_B^k) < c_A^k$ , es decir  $a_k < 2c_A^k - c_B^k$ , y  $(\bar{p}_A^k, \bar{p}_B^k) = (c_A^k, c_A^k)$  es un seudoequilibrio si  $\frac{1}{2}(a_k + c_B^k) \geq c_A^k$ , es decir  $a_k \geq 2c_A^k - c_B^k$ .  $\square$

Obsérvese que si  $a_k > \max\{c_A^k, c_B^k\}$ , entonces:

$$a_k < 2c_B^k - c_A^k \Rightarrow c_A^k < 2c_B^k - a_k < c_B^k,$$

$$a_k < 2c_A^k - c_B^k \Rightarrow c_B^k < 2c_A^k - a_k < c_A^k.$$

En el resto del epígrafe se considerará que los precios que fijan las empresas en la segunda etapa son

$$(p_A^k, p_B^k) = \begin{cases} \left( \frac{1}{2}(a_k + c_A^k), c_B^k \right) & \text{si } c_A^k \leq c_B^k \text{ y } c_B^k > \frac{1}{2}(a_k + c_A^k) \\ (c_B^k, c_B^k) & \text{si } c_A^k \leq c_B^k \text{ y } c_B^k \leq \frac{1}{2}(a_k + c_A^k) \\ \left( c_A^k, \frac{1}{2}(a_k + c_B^k) \right) & \text{si } c_A^k > c_B^k \text{ y } c_A^k > \frac{1}{2}(a_k + c_B^k) \\ (c_A^k, c_A^k) & \text{si } c_A^k > c_B^k \text{ y } c_A^k \leq \frac{1}{2}(a_k + c_B^k) \end{cases}$$

y que, por tanto, el precio competitivo en el mercado  $k$  es

$$p^k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k + c_A^k) & \text{si } c_B^k > \frac{1}{2}(a_k + c_A^k) \\ c_B^k & \text{si } c_A^k \leq c_B^k \leq \frac{1}{2}(a_k + c_A^k) \\ \frac{1}{2}(a_k + c_B^k) & \text{si } c_A^k > \frac{1}{2}(a_k + c_B^k) \\ c_A^k & \text{si } c_B^k < c_A^k \leq \frac{1}{2}(a_k + c_B^k). \end{cases}$$

Si ambas firmas se ponen de acuerdo para maximizar el beneficio conjunto en la segunda etapa, cada mercado es cubierto por aquella con menor coste, obteniéndose un óptimo de Pareto para las empresas. En tal caso, los precios colusivos que maximizan el beneficio conjunto de las firmas vienen dados por el siguiente resultado.

**Proposición 3.10** *Sean dos localizaciones tales que*

$$a_k > \max\{c_A^k, c_B^k\}, k = 1, \dots, n.$$

*Entonces, el precio colusivo que maximiza el beneficio conjunto de las empresas es*

$$p^{kc} = \frac{1}{2}(a_k + \min\{c_A^k, c_B^k\}).$$

**Demostración** Este resultado se obtiene considerando que en colusión el mercado  $k$  es cubierto por la firma con menores costes,  $\min\{c_A^k, c_B^k\}$ , y que  $\frac{1}{2}(a_k + c_i^k)$  es el precio de monopolio de la firma  $i$ .  $\square$

Finalmente, se trata de estudiar la existencia de un equilibrio de Nash para la primera etapa, asumiendo la siguiente condición.

**Condición 3.3** *La red  $N(V, E)$  satisface*

$$a_k > \max\{c_A^k(x), c_B^k(x)\}, \forall x \in N, k = 1, \dots, n.$$

**Corolario 3.3** *Bajo la condición 3.3, el beneficio en la primera etapa adelantando el precio competitivo en la segunda es*

$$\pi_i(x_A, x_B) = \sum_{k=1}^n \pi_i^k(x_A, x_B) - F_i,$$

donde

$$\pi_i^k(x_A, x_B) = \begin{cases} \frac{1}{4b_k} (a_k - c_i^k(x_i))^2 & \text{si } c_i^k(x_i) < 2c_j^k(x_j) - a_k \\ \frac{1}{2b_k} (c_j^k(x_j) - c_i^k(x_i)) (a_k - c_j^k(x_j)) & \text{si } 2c_j^k(x_j) - a_k \leq c_i^k(x_i) \\ & < c_j^k(x_j) \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

con  $i, j = A, B; j \neq i$ .

**Demostración** Se ha sustituido el precio competitivo en la función de beneficio.  $\square$

**Corolario 3.4** *Bajo la condición 3.3, el beneficio en la primera etapa adelantando el precio colusivo en la segunda es*

$$\pi_i^c(x_A, x_B) = \sum_{k=1}^n \pi_i^{kc}(x_A, x_B) - F_i,$$

donde

$$\pi_i^{kc}(x_A, x_B) = \begin{cases} \frac{1}{4b_k} (a_k - c_i^k(x_i))^2 & \text{si } c_i^k(x_i) < c_j^k(x_j) \\ \frac{1}{8b_k} (a_k - c_i^k(x_i))^2 & \text{si } c_i^k(x_i) = c_j^k(x_j) \\ 0 & \text{si } c_i^k(x_i) > c_j^k(x_j), \end{cases}$$

con  $i, j = A, B; j \neq i$ .

**Demostración** Se ha sustituido el precio colusivo en las funciones de beneficios.  $\square$

**Lema 3.3** *Bajo la condición 3.3, si la función de coste de transporte  $t_i$  es cóncava, entonces la función  $\pi_i(x_A, x_B)$  es convexa cuando  $x_i$  se mueve sobre una arista de la red y  $x_j$  permanece fijo,  $i, j = A, B; j \neq i$ .*

**Demostración** Supongamos  $x_j$  fijo. Sea  $f_k$  la función real de variable real definida en  $[0, a_k]$  de la forma

$$f_k(z) = \begin{cases} \frac{1}{4b_k} (a_k - z)^2 & \text{si } 0 \leq z < 2c_j^k - a_k \\ \frac{1}{2b_k} (c_j^k - z) (a_k - c_j^k) & \text{si } 2c_j^k - a_k \leq z < c_j^k \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si  $t_i$  es cóncava, entonces  $c_i^k(x_i)$  es cóncava cuando  $x_i$  se mueve por una arista de la red. Por otro lado,  $f_k(z)$  es convexa y decreciente en  $[0, a_k]$ . Además  $\pi_i^k(x_i, x_j) = f_k \circ c_i^k(x_i)$ . Aplicando la proposición 2.3 a las funciones  $-f_k(z)$  y  $c_i^k(x_i)$  se obtiene que  $-f_k \circ c_i^k(x_i)$  es cóncava y por tanto  $\pi_i^k(x_i, x_j)$  es convexa cuando  $x_i$  se mueve sobre una arista. Entonces,  $\pi_i(x_A, x_B)$  es convexa en la arista.  $\square$

**Proposición 3.11** *Sea la condición 3.3 y funciones de coste de transporte  $t_i$ ,  $i = A, B$ , cóncavas. Si existe equilibrio de Nash en la primera etapa asumiendo precio competitivo, entonces existe un equilibrio en un conjunto de vértices de la red.*

**Demostración** Basta aplicar el lema 3.3 y la proposición 2.6.  $\square$

Obsérvese que bajo la condición 3.3, aunque las funciones de coste de transporte  $t_i$ ,  $i = A, B$ , sean cóncavas, puede ocurrir que la función  $\pi_i^c(x_A, x_B)$  no sea convexa en  $x_i$  cuando  $x_i$  se mueve sobre una arista de la red y  $x_j$  permanece fijo,  $i, j = A, B; j \neq i$ . Si  $t_i$ ,  $i = A, B$ , son cóncavas, la función  $c_i^k(x_i)$  es cóncava cuando  $x_i$  se mueve sobre una arista de la red y  $x_j$  permanece fijo, y consecuentemente, bajo la condición 3.3,  $(a_k - c_i^k(x_i))^2$  es convexa en la arista. Para  $v_k \in V$ , supuesto  $x_j$  fijo, la función de beneficios es

$$\pi_i^{kc}(x_A, x_B) = \begin{cases} \frac{1}{4b_k} (a_k - c_i^k(x_i))^2 & \text{si } c_i^k(x_i) < c_j^k \\ \frac{1}{8b_k} (a_k - c_i^k(x_i))^2 & \text{si } c_i^k(x_i) = c_j^k \\ 0 & \text{si } c_i^k(x_i) > c_j^k. \end{cases}$$

Si  $c_i^k(x_i) < c_j^k$  para todo  $x_i$  de la arista, entonces  $\pi_i^{kc}(x_A, x_B)$  es convexa; lo mismo ocurre si  $c_i^k(x_i) > c_j^k$  en toda la arista. Supongamos que existe  $x_0$  en la arista tal que  $c_i^k(x_0) = c_j^k$ . Entonces, puede ocurrir que la función de beneficios no alcance el máximo en la arista debido a la discontinuidad. Por tanto, no puede asegurarse la convexidad de  $\pi_i^{kc}(x_A, x_B)$  en la arista. El siguiente ejemplo muestra una situación en la que esto ocurre.

#### Ejemplo

Se considera el segmento de longitud unidad  $I' = [v_1, v_2] = [1, 2]$  con nodos de demanda situados en los extremos. No se consideran costes fijos ( $F_A = F_B = 0$ ) y las funciones inversas de demanda son

$$p^k(q^k) = a_k - b_k q^k, \quad 0 \leq q^k \leq \frac{a_k}{b_k},$$

con  $a_1 = a_2 = 8$ ,  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = 2$ . Los costes marginales y los costes de transporte son

$$C'_A(x) = C'_B(x) = 1, \quad \forall x \in [v_1, v_2],$$

$$t_i^k(x_i) = 2\delta_{x_i v_k}, \quad i = A, B; \quad k = 1, 2.$$

Supongamos que  $x_B = v_2$ . Si la localización de  $A$  en la arista,  $x$ , viene dada por  $0 \leq \theta \leq 1$ , con  $\theta$  la distancia de  $v_1$  a  $x$ , se tiene que

$$c_A^1(x) < c_B^1(x_B) \quad \text{si } 0 \leq \theta < 1,$$

$$c_A^1(x) = c_B^1(x_B) \quad \text{si } \theta = 1.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \pi_A^{1c}(x, x_B) &= \begin{cases} \frac{1}{4b_1} (a_1 - (1 + 2\theta))^2 & \text{si } 0 \leq \theta < 1 \\ \frac{1}{8b_1} (a_1 - (1 + 2\theta))^2 & \text{si } \theta = 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{4} (7 - 2\theta)^2 & \text{si } 0 \leq \theta < 1 \\ \frac{1}{8} (7 - 2\theta)^2 & \text{si } \theta = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

La función  $\pi_A^{1c}(x, x_B)$  no es continua en  $\theta = 1$  ya que

$$\pi_A^{1c}(x_B^-, x_B) = \frac{25}{4}, \quad \pi_A^{1c}(x_B, x_B) = \frac{25}{8}.$$

Además, no es convexa, aunque sí es cuasiconvexa.

Supongamos ahora que

$$C'_A(x) = 1, \quad C'_B(x) = 2, \quad \forall x \in [v_1, v_2].$$

En esta ocasión se tiene que

$$c_A^1(x) < c_B^1(x_B) \quad \text{si } 0 \leq \theta \leq 1,$$

y entonces,

$$\pi_A^{1c}(x, x_B) = \frac{1}{4} (7 - 2\theta)^2, \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

$\pi_A^c(x_A, x_B)$ $\pi_B^c(x_A, x_B)$	$x_B = v_1$	$x_B = v_2$
$x_A = v_1$	15.37 0	2.25 4.5
$x_A = v_2$	6.12 9	12.37 0

Tabla 3.2: Beneficios en los nodos con precio colusivo

La función  $\pi_A^{1c}(x, x_B)$  es continua y convexa en  $0 \leq \theta \leq 1$ , por lo que de existir equilibrio, habría alguno en los extremos del intervalo. La tabla 3.2 muestra los beneficios de ambas firmas, para estos costes, en los extremos del segmento. Como puede observarse, no hay equilibrio en los extremos y, por tanto, tampoco hay equilibrio en  $T = [v_1, v_2]$ .

### 3.4.3 Análisis comparativo entre escenarios

La tabla 3.3 muestra los resultados en la segunda etapa cuando  $c_A^k < c_B^k$ , en los escenarios estudiados con anterioridad: demanda totalmente inelástica al precio, precio competitivo y precio colusivo. La condición exigida en todos los casos es  $a_k > \max\{c_A^k, c_B^k\}$ , es decir  $c_A^k < c_B^k < a_k$ . Si  $c_A^k > c_B^k$ , los papeles de las firmas A y B se intercambian.

Obsérvese que cuando las empresas compiten en precios se produce un reparto de los mercados, es decir, cada mercado es servido por una única empresa, la de menor coste en destino. Puede comprobarse que

$$c_B^k \leq \frac{a_k + c_A^k}{2} \Rightarrow \frac{a_k - c_B^k}{b_k} \geq \frac{a_k - c_A^k}{2b_k}.$$

Esto significa que cuando existe competencia en precios, la cantidad suministrada por la empresa con menor coste en destino es mayor o igual que la que se obtiene cuando existe colusión en precios. Por otra parte, el precio competitivo es menor o igual que el precio colusivo. En resumen, la colusión reduce la cantidad servida y eleva los precios, lo cual es un resultado conocido en otros modelos.

Escenario	demanda inelástica	precio competitivo	precio colusivo
$q_A^k$	$\lambda_k$	$\frac{a_k - c_A^k}{2b_k}$ si $c_B^k > \frac{a_k + c_A^k}{2}$ $\frac{a_k - c_B^k}{b_k}$ si $c_B^k \leq \frac{a_k + c_A^k}{2}$	$\frac{a_k - c_A^k}{2b_k}$
$q_B^k$	0	0	0
$q^k$	$\lambda_k$	$q_A^k$	$\frac{a_k - c_A^k}{2b_k}$
$p^k$	$c_B^k$	$\min \left\{ c_B^k, \frac{a_k + c_A^k}{2} \right\}$	$\frac{a_k + c_A^k}{2}$

Tabla 3.3: Resultados para la competencia en precios y  $c_A^k < c_B^k < a_k$ 

### 3.5 Resultados en la segunda etapa: cantidad frente a precio

Dado que la condición  $a_k > \max \{3c_A^k - 2c_B^k, 3c_B^k - 2c_A^k\}$ , aquella bajo la cual se han comparado los escenarios de Cournot, es más restrictiva que la condición  $a_k > \max \{c_A^k, c_B^k\}$ , aquella bajo la cual se ha estudiado el escenario de Bertrand, y que ésta última se satisface cuando se tiene la primera, en esta sección se comparan los resultados obtenidos en la competencia vía cantidades con los que se obtienen vía precios asumiendo

$$a_k > \max \{3c_A^k - 2c_B^k, 3c_B^k - 2c_A^k\}.$$

Bajo esta hipótesis se tiene también que

$$a_k > \max \{c_A^k, c_B^k, 2c_A^k - c_B^k, 2c_B^k - c_A^k\}.$$

La tabla 3.4 muestra la cantidad y el precio en la segunda etapa cuando  $c_A^k < c_B^k$ , en todos los escenarios estudiados con anterioridad en los que la demanda es elástica al precio. Si  $c_A^k > c_B^k$ , los papeles de las firmas A y B se intercambian.

Puede comprobarse la relación

$$p_{conj. \text{ no nula}}^k < p_{competitivo}^k < p_{Stack.}^k < p_{conj. \text{ nula}}^k < p_{colusivo}^k$$

	conj. nula	conj. no nula	Stack. (A líder)	precio comp.	precio colusivo
$\bar{q}^k$	$\frac{2a_k - c_A^k - c_B^k}{3b_k}$	$\frac{2a_k - c_A^k - c_B^k}{2b_k}$	$\frac{3a_k - 2c_A^k - c_B^k}{4b_k}$	$\frac{a_k - c_B^k}{b_k}$	$\frac{a_k - c_A^k}{2b_k}$
$\bar{p}^k$	$\frac{a_k + c_A^k + c_B^k}{3}$	$\frac{c_A^k + c_B^k}{2}$	$\frac{a_k + 2c_A^k + c_B^k}{4}$	$c_B^k$	$\frac{a_k + c_A^k}{2}$

Tabla 3.4: Resultados para demanda elástica y  $c_A^k < c_B^k$ 

y dado que la demanda es una función decreciente del precio, con la cantidad suministrada se tiene la relación inversa. Como puede observarse, la competencia más agresiva, en cuanto a reducción de precio se refiere, se produce compitiendo en cantidad bajo el supuesto de conjetura no nula, mientras que el precio más elevado se obtiene cuando existe colusión.

### 3.6 Efecto renta

Tanto en las secciones anteriores como en la literatura sobre el tema, se han considerado funciones de demanda compensadas o Hicksianas, cuya diferencia con las funciones de demanda directas o Marshallianas radica en que en las primeras se ha eliminado el efecto renta sobre la cantidad demandada. Mientras que la demanda directa es observable, la compensada no lo es, aunque puede ser estimada por técnicas econométricas. La curva de demanda Marshalliana  $q = q(p, I)$  recoge las variaciones en el consumo de un determinado bien ante cambios en su precio (efecto sustitución) y en la renta (efecto renta). Generalmente, suele suponerse que el bien tiene poco peso dentro del presupuesto del consumidor y, por tanto, que el efecto renta es nulo o próximo a cero.

Si la cantidad demandada es función lineal del precio y la renta, la función inversa de demanda puede expresarse de la siguiente manera, donde  $I_k$  es el nivel de renta en el mercado  $k$ ,

$$p^k(q^k, I_k) = \begin{cases} a_k - b_k q^k + c_k I_k & \text{si } 0 \leq q^k \leq \frac{a_k + c_k I_k}{b_k} \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

con  $a_k$  y  $b_k > 0$ ,  $\forall k$ ;  $c_k > 0$  en el caso de bienes normales y  $c_k < 0$  para bienes inferiores. Si los bienes son normales, el aumento de la renta desplaza hacia la derecha la curva de demanda del mercado, mientras que si son bienes inferiores, ocurre justamente lo contrario. Sin embargo, puesto que la renta no es una variable de decisión y se supone conocida, los cálculos hechos en los apartados

anteriores son válidos sin más que sustituir en los resultados  $a_k$  por la nueva disposición a pagar  $a_k + c_k I_k$ . Otra alternativa consiste en tomar una cantidad común a todos los mercados y otra específica proporcional a la renta, esto es  $a + c_k I_k$ .

Si la demanda es totalmente inelástica, no hay efecto renta. Por otro lado, si la demanda es lineal y el bien es inferior, una renta suficientemente grande puede asegurar la existencia de equilibrio de Nash en la segunda etapa cuando la competencia se realiza en cantidad. En este caso, la cantidad suministrada a cada mercado es una función creciente de la renta en el caso de bienes normales y decreciente para bienes inferiores; lo mismo sucede con el precio y el beneficio. Esto significa que para bienes normales la renta tiene un efecto negativo sobre los consumidores, al incrementar el precio de equilibrio, y positivo sobre las empresas, ya que incrementan el beneficio. Para bienes inferiores ocurre exactamente lo contrario. La única excepción lo constituye la suposición de conjeturas no nulas, donde se observa que no hay efecto renta sobre los precios.

### 3.7 Ejemplo

El siguiente ejemplo compara los resultados del juego espacial para diferentes escenarios. Se considera la red de la figura 3.1. El coste marginal para ambas firmas es de una unidad, al igual que el coste de transporte por unidad entre cualesquiera dos vértices, es decir,

$$c_i^k(v_k) = 1 \text{ y } c_i^k(v_l) = 2, \quad i = A, B; \quad k, l = 1, 2, 3; \quad l \neq k.$$

No se consideran costes fijos ( $F_A = F_B = 0$ ) y las funciones inversas de demanda son

$$p^k(q^k) = a_k - b_k q^k, \quad 0 \leq q^k \leq \frac{a_k}{b_k},$$

con  $a_1 = a_2 = 8$ ,  $a_3 = 9$ ,  $b_1 = b_3 = 1$ ,  $b_2 = 2$ . Las elasticidades son

$$\epsilon_1 = -\frac{8-q}{q}, \quad \epsilon_2 = -\frac{4-q}{q}, \quad \epsilon_3 = -\frac{9-q}{q}.$$

El tercer mercado es el más elástico y presenta también la mayor disposición a pagar, mientras que con el segundo mercado ocurre justo lo contrario.

Puede comprobarse que se cumple la condición 3.2 y, por tanto, también se cumplen las condiciones 3.1 y 3.3. En las tablas 3.5 y 3.6 aparecen marcados con un superíndice los equilibrios de Nash del problema discreto de la primera etapa para los siguientes escenarios de la segunda etapa: conjeturas nulas (Labbé y Hakimi), conjeturas no nulas (líder-líder), líder-seguidor de Stackelberg (A es líder), precio competitivo y precio colusivo.

		$(\pi_A(x_A, x_B), \pi_B(x_A, x_B))$			
		$x_A$	$x_B = v_1$	$x_B = v_2$	$x_B = v_3$
Conjeturas nulas	$v_1$		(12.89, 12.89)	(13.94, 11.78)	(13.11, 13.78) <sup>1</sup>
	$v_2$		(11.78, 13.94)	(12.17, 12.17)	(11.55, 14.39)
	$v_3$		(13.78, 13.11) <sup>2</sup>	(14.39, 11.55)	(13.11, 13.11) <sup>3</sup>
Conjeturas no nulas	$v_1$		(0, 0)	(2, 1)	(2, 2.25) <sup>4</sup>
	$v_2$		(1, 2)	(0, 0)	(1, 2.25)
	$v_3$		(2.25, 2) <sup>5</sup>	(2.25, 1)	(0, 0)
Stackelberg (A líder)	$v_1$		(14.5, 7.25)	(15.69, 6.59)	(14.75, 8.37) <sup>6</sup>
	$v_2$		(13.25, 8.62)	(13.69, 6.84)	(13, 9)
	$v_3$		(15.5, 7.75) <sup>7</sup>	(16.19, 6.34)	(14.75, 7.37)

Tabla 3.5: Localizaciones de equilibrio con competencia en cantidades

		$(\pi_A(x_A, x_B), \pi_B(x_A, x_B))$			
		$x_A$	$x_B = v_1$	$x_B = v_2$	$x_B = v_3$
Precio competitivo	$v_1$		(0, 0)	(6, 3)	(6, 7) <sup>8</sup>
	$v_2$		(3, 6)	(0, 0)	(3, 7)
	$v_3$		(7, 6) <sup>9</sup>	(7, 3)	(0, 0)
Precio colusivo	$v_1$		(14.50, 14.50)	(18.37, 12.25)	(14.50, 18.25)
	$v_2$		(12.25, 18.37)	(13.69, 13.69)	(10.62, 20.50)
	$v_3$		(18.25, 14.50)	(20.50, 10.62)	(14.75, 14.75) <sup>10</sup>

Tabla 3.6: Localizaciones de equilibrio con competencia en precios

Equilibrio	Op. de Pareto	$p^1$	$p^2$	$p^3$	$-\epsilon_1$	$-\epsilon_2$	$-\epsilon_3$
1,2	<i>sí</i>	3.67	4	4	0.85	1	0.8
3	<i>no</i>	4	4	3.67	1	1	0.69
4,5	<i>sí</i>	1.5	2	1.5	1	0.33	1
6	<i>sí</i>	3	3.5	3.5	0.6	0.78	0.64
7	<i>sí</i>	3.25	3.5	3.25	0.68	0.78	0.56
8,9	<i>sí</i>	2	2	2	0.33	0.33	0.29
10	<i>sí</i>	5	5	5	1.67	1.67	1.25

Tabla 3.7: Precios y elasticidades en el equilibrio

En la tabla 3.7 aparecen los precios y elasticidades para cada uno de los equilibrios de Nash recogidos en las tablas 3.5 y 3.6. Obsérvese que existe un equilibrio de Nash que no es óptimo de Pareto (el número 3). En 8 de los 10 equilibrios encontrados, una de las firmas se localiza en el primer mercado y la otra en el tercero; recuérdese que estos mercados son los que presentan mayor elasticidad-precio. Además, en todos ellos la firma que se ubica en el tercer mercado, aquel con mayor disposición a pagar, obtiene mayores beneficios. Tanto con precio competitivo como con conjeturas no nulas, las localizaciones coincidentes no pueden constituir un equilibrio de Nash porque ambas firmas obtienen beneficio nulo.

Los precios más altos en competencia y los beneficios más reducidos, se presentan asumiendo conjeturas no nulas. En colusión los precios son altos y aún así se obtienen importantes beneficios. Nótese que incluso pactando un reparto del mercado en la segunda etapa (precio colusivo), en equilibrio ambas firmas se sitúan juntas. Finalmente, si las localizaciones son coincidentes, el beneficio de la líder es el doble del de la seguidora.

## Capítulo 4

# Juego espacial oligopolístico

En este capítulo, se generalizan algunos resultados presentados en el capítulo anterior para el oligopolio y se extienden algunos de los resultados obtenidos por Sarkar, Gupta y Pall (1997) a un conjunto de funciones de demanda que incluye el considerado por estos autores. Para analizar esta nueva situación, consideremos  $r$  empresas,  $r \geq 2$ , que deciden sus ubicaciones  $X = \{x_1, \dots, x_r\}$  en la red  $N(V, E)$  y también los precios  $p_i^k$  o cantidades  $q_i^k$ ,  $i = 1, \dots, r$ , que fijarán en cada mercados separados espacialmente  $v_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , siendo  $q^k = \sum_{i=1}^r q_i^k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , la cantidad total ofrecida en el mercado  $k$ .

En todos los casos analizados se considera un juego en dos etapas. En la primera las firmas seleccionan la localización y en la segunda, conocida la ubicación de todas las firmas, seleccionan los precios o cantidades en cada mercado  $v_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Un equilibrio para este juego se denomina equilibrio subjuego-perfecto.

El resto del capítulo está estructurado de la siguiente manera. En el apartado 4.1 se analiza la competencia cuando los precios están fijados y coinciden. En los apartados 4.2 y 4.3 se estudia la competencia en cantidades y precios, respectivamente. En la competencia vía precios se distinguen dos posibilidades en función de que la demanda sea elástica o totalmente inelástica al precio. En el punto 4.4 se comparan los resultados obtenidos para el duopolio y el oligopolio. Finalmente, el apartado 4.5 recoge algunos ejemplos.

### 4.1 Precios fijados e iguales

Se asume que las  $r$  firmas ofrecen un producto homogéneo al mismo precio (mill price). En este caso, el consumidor acude al centro más próximo y, suponiendo costes marginales y fijos independientes de las localizaciones, la maximización del beneficio equivale a la maximización de la cuota de mercado. La demanda

captada por la firma  $i$  viene dada por

$$\Lambda_i(X) = \sum_{v_k \in V_i(X)} \frac{\lambda_k}{r_k(X)},$$

donde

$$V_i(X) = \{v_k : \delta(v_k, x_i) \leq \delta(v_k, x_j), j = 1, \dots, r\},$$

$$r_k(X) = \left\{ \left\{ l : \delta(v_k, x_l) = \min_{j=1, \dots, n} \delta(v_k, x_j) \right\} \right\}, k = 1, \dots, n.$$

Un conjunto de localizaciones  $\bar{X} = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r\}$  es un equilibrio de Nash sii

$$\Lambda_i(\bar{X}) \geq \Lambda_i(\bar{x}_1, \dots, x_i, \dots, \bar{x}_r), \forall x_i \in N, i = 1, \dots, r.$$

A diferencia de lo que sucede para  $r = 2$  (duopolio), en equilibrio las firmas pueden tener cuotas de mercado diferentes. Por ejemplo, en el problema discreto con dos nodos de igual demanda y tres firmas competidoras, cualquier distribución de las firmas en la que no todas las localizaciones sean coincidentes constituye un equilibrio de Nash. Sin embargo, dos de las firmas, aquellas con localizaciones coincidentes, captan una cuarta parte de la demanda total mientras que la tercera capta la mitad de dicha demanda.

Si  $\bar{X}$  es un equilibrio, cualquier permutación de las localizaciones de este conjunto sigue siendo un equilibrio. Sin embargo, tanto si el problema es discreto como en redes, la existencia de equilibrio no está asegurada. Consideremos las redes de las figuras 3.1 y 3.2 del capítulo anterior. En la figura 3.1, tanto para el problema discreto como en redes, existe equilibrio de Nash para  $r = 3$  cuando las tres firmas se localizan en nodos distintos. Es más, en el problema discreto existe equilibrio independientemente del número de firmas. Sin embargo, en la red de la figura 3.2 no existe equilibrio para  $r = 2$  y  $3$ , aunque sí existe equilibrio para  $r = 4$ ; dos firmas se localizan en el primer nodo y las otras dos en el tercero. Estos ejemplos ponen de manifiesto la sensibilidad del problema ante cambios en el número de firmas y la estructura de la red. Además, como se indicó para el caso del duopolio, no hay relación entre la solución del problema discreto y la del problema en redes.

Ni siquiera en árboles está asegurada la existencia de equilibrio. Un problema discreto sin equilibrio ocurre cuando tres firmas se localizan en el segmento  $[1, 5]$  con demanda unitaria en los números enteros. Tampoco un número par de firmas asegura la existencia de equilibrio. La figura 4.1 muestra un árbol donde el problema discreto no tiene equilibrio para  $r = 4$ .

Por otra parte, si existe equilibrio, éste no siempre coincide con una mediana. Por ejemplo, si tres firmas compiten por localizarse en la red de la figura 3.3,

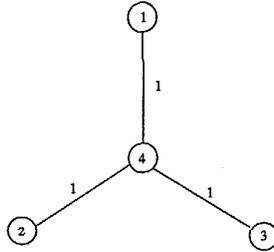


Figura 4.1: Árbol con  $\lambda_1 = 40$ ,  $\lambda_2 = 30$ ,  $\lambda_3 = 30$ ,  $\lambda_4 = 10$

el único equilibrio aparece cuando las tres se localizan en nodos distintos con demanda no nula. Sin embargo, la mediana es el cuarto nodo. A diferencia de lo que sucede para el duopolio, existen equilibrios en árboles en los que alguna firma no está en una mediana. Por ejemplo, en el segmento  $[1, 3]$  con demanda unitaria en los números enteros, la única mediana es el punto 2, y sin embargo, un equilibrio resulta cuando las tres firmas se ubican en nodos distintos con demanda no nula.

A continuación, se indican algunos resultados conocidos sobre existencia de equilibrio en árboles. Sea  $T_m^*$  el subárbol con mayor demanda de entre los subárboles que aparecen al eliminar una mediana  $m \in V$  y las aristas incidentes en  $m$ . Cuando las firmas se localizan en  $m$ , se reparten en partes iguales la demanda total  $\Lambda = w(T)$ , donde  $w(T)$  denota la demanda total en  $T$ . La cuota de mercado de una firma que se localizara en cualquier otro lugar sería como máximo  $w(T_m^*)$ . Por tanto, si  $w(T_m^*) \leq \frac{w(T)}{r}$ , entonces existe un equilibrio en el que las  $r$  firmas se sitúan en la mediana  $m$ . Además, el equilibrio es único cuando la desigualdad es estricta.

Intuitivamente, todas las firmas se localizarán en la mediana cuando se verifica alguna de las siguientes condiciones: (i)  $w(m)$  es suficientemente grande, o (ii) se obtienen al menos  $r$  subárboles con pesos similares, al eliminar  $m$  y las aristas incidentes en  $m$ . Si  $w(T_m^*)$  es grande (mayor que  $\frac{w(T)}{r}$ ), no existe equilibrio. Eiselt y Laporte (1993) prueban para tres firmas y valores intermedios de  $w(T_m^*)$ , que existen equilibrios en los cuales una firma se separa de las otras o las tres se encuentran dispersas. En cualquier caso, al menos una firma se sitúa en una mediana. Estos autores caracterizan las localizaciones de equilibrio cuando no se permiten localizaciones coincidentes.

## 4.2 Competencia en cantidades

En los problemas de equilibrio de Cournot se considera que las firmas deciden las cantidades de producto que ofrecen en cada mercado, dejando que éste determine el precio. Varios autores han estudiado condiciones de existencia y unicidad del equilibrio de Cournot, que han sido utilizadas por estos mismos autores o por otros diferentes en problemas de equilibrio localización-cantidad. Así, por ejemplo, Novshek (1985) demuestra la existencia de equilibrio de Cournot para  $r$  firmas que sirven un único producto homogéneo, cuando se cumple cierta condición de las funciones de demanda normalmente asumida en Economía Industrial. Estos resultados son utilizados por Anderson y Neven (1990) para demostrar la existencia y unicidad de equilibrio de Cournot fijadas las localizaciones de las firmas, incorporando los costes de producción y de transporte, con costes marginales de producción constantes (independientes de la cantidad) y funciones de coste de transporte homogéneas de grado uno con respecto a la cantidad desplazada.

Labbé y Hakimi (1991) estudian un problema de equilibrio localización-cantidad en redes para dos firmas y funciones de demanda lineales, demostrando la existencia y unicidad del equilibrio en la segunda etapa del juego y estableciendo condiciones de existencia de localizaciones de equilibrio en un conjunto de vértices de la red. Sarkar, Gupta y Pal (1997) extienden los resultados de Labbé y Hakimi a más de dos firmas y un conjunto de funciones de demanda más amplio que incluye a las lineales. También obtienen resultados para situaciones donde las firmas poseen más de un establecimiento.

En la sección 4.2.1 se extienden algunos de los resultados obtenidos por Sarkar, Gupta y Pal, a un conjunto de funciones de demanda que incluye el considerado por estos autores. La modificación incorporada consiste en sustituir la condición impuesta por ellos por la concavidad de la función de ingreso. Puesto que, de la misma forma que los autores citados, se consideran costes marginales de producción constantes, la existencia de equilibrio en cantidades puede probarse utilizando resultados conocidos de la teoría de juegos, mientras que la demostración de la unicidad sigue la línea trazada por Anderson y Neven. El tratamiento del problema del equilibrio en localizaciones es similar al desarrollado por Sarkar, Gupta y Pal.

En la sección 4.2.2 se estudia el caso particular en el que la demanda es una función lineal del precio y se generalizan algunos resultados del capítulo 3 al caso del oligopolio. Se analizan los escenarios siguientes: conjeturas nulas, líder-seguidor de Stackelberg y conjeturas no nulas.

### 4.2.1 Equilibrio localización-cantidad

El precio  $p_k$  en el mercado  $v_k$  es una función real definida en  $\mathfrak{R}$ , decreciente de la cantidad total de producto ofrecida en el mercado  $v_k$ . Existen  $r$  firmas en los puntos  $X = \{x_i\}_{i=1}^r \subset N$  que compiten para servir a los mercados. Cada firma  $i$  desea determinar la localización  $x_i$  y la cantidad  $q_i^k$  que debe ofrecer en cada mercado  $k$  para maximizar el beneficio total. Se supone que las firmas eligen en primer lugar la localización y posteriormente fijan las cantidades de producto que ofrecerán en cada mercado. Esta situación se modela mediante un juego en dos etapas y se estudia la existencia de equilibrio de Nash subjuego-perfecto.

Fijadas las localizaciones, una estrategia para la firma  $i$  es un vector

$$q_i = (q_i^1, q_i^2, \dots, q_i^n), \quad i = 1, \dots, r.$$

La cantidad total ofrecida por la firma  $i$  es  $\Lambda_i = \sum_{k=1}^n q_i^k$  y la cantidad total servida en el mercado  $k$  es  $q^k = \sum_{i=1}^r q_i^k$ . Para cada mercado  $k$  existe un valor  $U_k$  tal que  $p_k(U_k) = 0$  y  $p_k(q) \geq 0, \forall q \in [0, U_k]$ . El conjunto de estrategias factibles es

$$S = \{Q = (q_i^k) : q_i^k \geq 0, \sum_{i=1}^r q_i^k \leq U_k, 1 \leq i \leq r, 1 \leq k \leq n\},$$

donde  $Q$  representa una matriz real de orden  $r \times n$  cuya componente  $(i, k)$  es  $q_i^k$ .

**Condición 4.1** *El coste de transporte unitario desde la firma  $i$  en  $x_i$  hasta el mercado  $k$  en  $v_k$  es  $t_i^k(x_i) = t_i(\delta_{x_i v_k})$ , siendo  $t_i$  una función positiva, creciente y cóncava de la distancia.*

**Condición 4.2** *El coste marginal de producción para la firma  $i$  en  $x_i$  es una cantidad positiva e independiente de la producción que se denota  $C_i'(x_i)$ . Esta función es cóncava con respecto de  $x_i$  cuando  $x_i$  se mueve sobre una arista de la red.*

El coste unitario total de servir producto en el mercado  $v_k$  para la firma  $i$  en  $x_i$  es

$$c_i^k(x_i) = C_i'(x_i) + t_i(\delta_{x_i v_k}).$$

En lo sucesivo, para simplificar la notación, cuando las localizaciones de las firmas se consideren fijadas, se podrán eliminar los argumentos de las funciones de costes. Por simplicidad, la función inversa de demanda  $p_k(q)$  se denominará función de demanda.

**Condición 4.3** (Sarkar, Gupta y Pal, 1997) Las funciones  $p_k(q)$  son derivables hasta el orden 3 y satisfacen las condiciones siguientes:

$$(i) \quad p'_k < 0.$$

$$(ii) \quad p'_k + qp''_k \leq 0.$$

$$(iii) \quad -2(r-1)^2 \leq \frac{q^2[(p'_k)^2 - p'_k p''_k]}{(p'_k)^2} \leq (r-1)^3.$$

Bajo las condiciones 4.1, 4.2 y 4.3, si  $C'_i(x) = C'(x)$  y  $t_i = t$ ,  $i = 1, \dots, r$ , entonces queda asegurada la existencia y la unicidad del equilibrio en cantidades; esto es, el equilibrio en la segunda etapa del juego. Además, imponiendo condiciones sobre los costes y las funciones de demanda para que las cantidades de equilibrio sean estrictamente positivas, ocurre que cada firma obtiene el beneficio máximo en un vértice para cualesquiera que sean las localizaciones del resto de las firmas (Sarkar, Gupta y Pal, 1997). Por tanto, si existe equilibrio en la primera etapa, existirá un conjunto  $V' \subset V$  de localizaciones de equilibrio. Estos resultados son válidos cuando los costes marginales y de transporte dependen de la firma.

Las condiciones 4.3(i) y 4.3(ii) permiten, junto con las condiciones 4.1 y 4.2, demostrar la existencia de equilibrio en la segunda etapa del juego. La condición 4.3(i) implica que las funciones de demanda son estrictamente decrecientes. La condición 4.3(ii) es usualmente impuesta en Economía Industrial y recoge funciones de demanda tales que el ingreso marginal de una firma es una función decreciente de la oferta agregada del resto.

La condición 4.3(ii) implica también que la función de ingreso definida como  $I_k(q) = qp_k(q)$ , es estrictamente cóncava ya que para funciones de demanda estrictamente decrecientes se tendría

$$I''_k(q) = 2p'_k + qp''_k < p'_k + qp''_k \leq 0.$$

Sea  $X = (x_1, x_2, \dots, x_r)$  el vector de localizaciones de las firmas. El beneficio de la firma  $i$  en el mercado  $k$  viene dado por

$$\pi_i^k(X, Q) = q_i^k(p_k(q^k) - c_i^k),$$

y el beneficio total de la firma  $i$  es

$$\pi_i(X, Q) = \sum_{k=1}^n \pi_i^k(X, Q), \quad i = 1, \dots, r.$$

**Condición 4.4** Las funciones  $p_k(q)$  son derivables hasta el orden 2 y satisfacen las condiciones siguientes:

- (i)  $p'_k < 0$  en  $(0, U_k)$ .
- (ii)  $2p'_k + qp''_k < 0$  en  $(0, U_k)$ .

La condición 4.4(i) implica que  $p_k(q)$  es estrictamente decreciente en  $[0, U_k]$  y la 4.4(ii) implica que la función de ingreso  $I_k(q)$  es estrictamente cóncava en  $[0, U_k]$ . Cualquier función  $p_k$  derivable hasta orden dos, estrictamente decreciente y cóncava, cumple las condiciones 4.3(i), 4.3(ii) y 4.4. Las funciones cuadráticas de la forma  $p(q) = aq^2 + bq + c$ , con  $a < 0$ ,  $b < 0$  y  $c > 0$ , son funciones que cumplen las condiciones 4.3 y, por tanto, las condiciones 4.4. Las funciones cuadráticas de la forma  $p(q) = aq^2 + bq + c$ , con  $a > 0$ ,  $b < 0$ ,  $c > 0$  y  $9ac - 2b^2 < 0$ , cumplen la condición 4.4, y si además  $16ac - 3b^2 > 0$ , no cumplen 4.3.

**Proposición 4.1** Si se cumplen las condiciones 4.2 y 4.4, entonces la función  $\pi_i(Q) = \sum_{k=1}^n \pi_i^k(Q)$  es estrictamente cóncava con respecto de  $q_i = (q_i^1, q_i^2, \dots, q_i^n)$ ,  $\forall q_i$  con  $Q \in S$ .

**Demostración** Dados  $q_j$  con  $j \neq i$ , se tiene que

$$\pi_i(Q) = \pi_i(q_i) = \sum_{k=1}^n \pi_i^k(q_i^k).$$

Para  $q^k = \sum_{i=1}^r q_i^k \in (0, U_k)$ , de la condición 4.4, resulta

$$\frac{\partial^2 \pi_i^k}{\partial q_i^{k2}} = 2p'_k(q^k) + q_i^k p''_k(q^k) < 0.$$

En efecto, si  $p''_k(q^k) > 0$ , entonces

$$2p'_k(q^k) + q_i^k p''_k(q^k) \leq 2p'_k(q^k) + q^k p''_k(q^k) < 0, \forall i, k.$$

Si  $p''_k(q^k) \leq 0$ , por 4.4(i) es  $2p'_k(q^k) + q_i^k p''_k(q^k) < 0$ . Como consecuencia resulta la concavidad estricta de  $\pi_i^k$  con respecto de  $q_i^k$ , de donde se deduce la concavidad estricta de  $\pi_i$  con respecto a  $q_i$ .  $\square$

**Corolario 4.1** Si se cumplen las condiciones 4.2, 4.3(i) y 4.3(ii), entonces la función  $\pi_i(Q) = \sum_{k=1}^n \pi_i^k(Q)$  es estrictamente cóncava con respecto de  $q_i = (q_i^1, q_i^2, \dots, q_i^n)$ ,  $\forall q_i$  con  $Q \in S$ .

**Demostración** Resulta de considerar que las condiciones 4.3(i) y 4.3(ii) implican la condición 4.4  $\square$

**La segunda etapa: Equilibrio en cantidades**

Fijadas las localizaciones  $X$  de las firmas, el problema del equilibrio en cantidades consiste en determinar la matriz  $\bar{Q} = (\bar{q}_i^k)$  tal que

$$\pi_i(X, \bar{Q}) = \max_{\bar{Q}_i} \pi_i(X, \bar{Q}_i),$$

donde  $\bar{Q}_i = (\bar{q}_j^k)$  siendo  $\bar{q}_j^k = \bar{q}_j^k$  si  $j \neq i$  y  $\bar{q}_i^k = q_i^k$  variable. Puesto que el coste marginal de producción es independiente de la cantidad, los mercados pueden ser tratados separadamente.

**Proposición 4.2** *Bajo las condiciones 4.2 y 4.4, para un vector dado de localizaciones  $X = (x_1, x_2, \dots, x_r)$ , existe un único equilibrio de Nash en cantidades  $\bar{Q}(X)$ .*

**Demostración** La existencia de equilibrio de Nash resulta de aplicar resultados conocidos de la teoría de juegos (Friedman, 1991). Para la unicidad puede adaptarse la demostración de Anderson y Neven (1990).

El problema de la firma  $i$  en el mercado  $k$  puede formularse de la manera siguiente:

$$\max_{q_i^k} \pi_i^k(q^k) = q_i^k(p_k(q^k) - c_i^k)$$

$$s.a. \quad q_i^k \geq 0,$$

$$q_i^k \leq U_k - \sum_{j \neq i} q_j^k.$$

Si se relaja este problema eliminando la última restricción se obtiene

$$\max q_i^k(p_k(q^k) - c_i^k) \quad s.a. \quad q_i^k \geq 0,$$

cuyas condiciones de primer orden son:

$$p_k(q^k) + q_i^k p'_k(q^k) - c_i^k + \lambda = 0,$$

$$\lambda q_i^k = 0,$$

$$\lambda \geq 0.$$

Puesto que  $\pi_i^k$  es cóncava con respecto de  $q_i^k$  en el conjunto factible (proposición 4.1), las condiciones de optimalidad anteriores son necesarias y suficientes.

Considerando que se trata de un juego con funciones de pago continuas y cóncavas en el conjunto de estrategias  $\mathcal{S}$ , aplicando la proposición 2.1 se deduce que existe equilibrio  $\bar{Q}$ .

Sin pérdida de generalidad puede suponerse que

$$c_1^k \leq c_2^k \leq \dots \leq c_r^k.$$

En el equilibrio existirán firmas con  $\bar{q}_i^k > 0$ , o firmas activas, y firmas con  $\bar{q}_i^k = 0$ , o firmas no activas. Considerando las condiciones de optimalidad del problema relajado, se tendría que

$$p_k(\bar{q}^k) + \bar{q}_i^k p'_k(\bar{q}^k) - c_i^k = 0$$

para las firmas activas y  $p_k(\bar{q}^k) - c_i^k \leq 0$  para las firmas no activas con

$$0 < \bar{q}^k = \sum_{i=1}^r \bar{q}_i^k < U_k.$$

Supóngase que el número de firmas activas es  $r_k$ ; éstas serán las firmas  $i$  con  $i = 1, 2, \dots, r_k$ ;  $r_k \geq 1$ . Entonces las cantidades de equilibrio satisfacen las ecuaciones

$$p_k(q^k) + q_i^k p'_k(q^k) = c_i^k, \quad i = 1, 2, \dots, r_k, \quad (4.1)$$

que sumadas conducen a la ecuación

$$r_k p_k(q^k) + q^k p'_k(q^k) = \sum_{i=1}^{r_k} c_i^k. \quad (4.2)$$

Considérese la ecuación

$$F(q) = r_k p_k(q) + q p'_k(q) - \sum_{i=1}^{r_k} c_i^k.$$

La función  $F$  es continua en  $[0, U_k]$  y

$$F'(q) = (r_k + 1)p'_k(q) + q p''_k(q),$$

donde, suponiendo al menos una firma activa,  $r_k \geq 1$ , y por la condición 4.4 resulta que  $F'(q) < 0$  para  $q \in (0, U_k)$ , luego  $F$  es estrictamente decreciente en  $[0, U_k]$  y la solución de la ecuación (4.2) es única. Entonces, volviendo a las ecuaciones (4.1), tomando la solución de (4.2), se obtienen los valores

$$\bar{q}_i^k = \frac{c_i^k - p_k(\bar{q}^k)}{p'_k(\bar{q}^k)}, \quad i = 1, 2, \dots, r_k,$$

y  $\bar{q}_i^k = 0$ , para  $i > r_k$ . Los valores  $\bar{q}_i^k$  cumplen las condiciones de KKT para el problema del equilibrio en el mercado  $k$ , que vienen dadas por las expresiones siguientes:

$$p_k(q^k) + q_i^k p'_k(q^k) - c_i^k + \lambda_i^k - \mu_i^k = 0, \quad i = 1, \dots, r,$$

$$\lambda_i^k q_i^k = 0, \quad i = 1, \dots, r,$$

$$\mu_i^k (U_k - \sum_{j \neq i} q_j^k - q_i^k) = 0, \quad i = 1, \dots, r,$$

$$\lambda_i^k, \mu_i^k \geq 0, \quad i = 1, \dots, r.$$

Considerando  $r_k$  fijo, no existe otra solución con un conjunto de firmas activas diferentes a  $A = \{1, 2, \dots, r_k\}$ . Si existiese un conjunto de firmas activas  $\tilde{A} \neq A$ , existirían

$$1 \leq s_1 \leq r_k < s_2 \leq r,$$

tales que  $s_1 \in A - \tilde{A}$  y  $s_2 \in \tilde{A} - A$ . Sean  $(\bar{q}_i^k)$  y  $(\tilde{q}_i^k)$ , las soluciones óptimas correspondientes a  $A$  y  $\tilde{A}$ , respectivamente. Entonces,

$$c_{s_1}^k < p_k(\bar{q}^k) \leq c_{s_2}^k.$$

Puesto que en la nueva solución es  $\tilde{q}_{s_1}^k = 0$  y  $\tilde{q}_{s_2}^k > 0$ , y se cumple

$$c_{s_1}^k < c_{s_2}^k < p_k(\tilde{q}^k),$$

por las condiciones de KKT debería ser  $\lambda_{s_1}^k - \mu_{s_1}^k < 0$ , por tanto  $0 \leq \lambda_{s_1}^k < \mu_{s_1}^k$  y  $\sum_j q_j^k = U_k$ , luego

$$\tilde{q}^k - U_k \quad \text{y} \quad p_k(\tilde{q}^k) = p_k(U_k) = 0.$$

Entonces, en las condiciones de KKT para  $i = s_2$  quedaría

$$-c_{s_2}^k + q_{s_2}^k p'_k(q^k) - \mu_{s_2}^k = 0$$

y resultaría  $\mu_{s_2}^k < 0$ , no cumpliéndose por tanto las condiciones de optimalidad. De todo lo anterior se deduce que existe una única solución con  $r_k$  firmas activas.

Supóngase ahora que existe una solución con  $\tilde{r}_k < r_k$  firmas activas. Como  $p_k(\bar{q}^k) > c_i^k$ ,  $i = 1, 2, \dots, r_k$ , entonces

$$(r_k - \tilde{r}_k) p_k(\bar{q}^k) > \sum_{i=\tilde{r}_k+1}^{r_k} c_i^k,$$

por tanto, de la ecuación (4.2),

$$\tilde{r}_k p_k(\bar{q}^k) + \bar{q}^k p'_k(\bar{q}^k) < \sum_{i=1}^{\tilde{r}_k} c_i^k.$$

Puesto que el primer miembro de la ecuación (4.2) es una función decreciente de  $q^k$ , resulta que

$$\bar{q}^k < \bar{q}^k \quad \text{y} \quad p_k(\bar{q}^k) > p_k(\bar{q}^k),$$

y, por consiguiente,  $p_k(\bar{q}^k) > c_i^k$  para  $i = 1, 2, \dots, r_k$ , resultando así una contradicción. Por otro lado, tampoco existirá una solución con  $\tilde{r}_k > r_k$  ya que, en otro caso, según la argumentación anterior, no podría existir un equilibrio con  $r_k$  firmas activas.

A partir de la ecuación (4.1) se obtienen los valores óptimos de las cantidades ofrecidas por cada firma en cada uno de los mercados. Si la solución de la ecuación (4.2) es  $\bar{q}^k$ , entonces de las ecuaciones (4.1) resulta

$$\bar{q}_i^k(X) = \frac{p_k(\bar{q}^k) - c_i^k}{-p'_k(\bar{q}^k)}, \quad i = 1, 2, \dots, r_k$$

y

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_i^k(X) &= \pi_i^k(X, \bar{Q}) = \bar{q}_i^k(p_k(\bar{q}^k) - c_i^k) = -p'_k(\bar{q}^k) \bar{q}_i^k{}^2 \\ &= \frac{(p_k(\bar{q}^k) - c_i^k)^2}{-p'_k(\bar{q}^k)}, \quad i = 1, 2, \dots, r_k. \end{aligned}$$

□

Una condición que garantiza valores  $q_i^k(X) > 0, \forall i, k$  es la siguiente.

**Condición 4.5** (Sarkar, Gupta y Pal, 1997) Para cada vector de localizaciones  $X$  y cada vértice  $v_k \in V$ , se verifica

$$(r+1) \max_{1 \leq i \leq r} \{c_i^k(X)\} - c^k(X) < p_k(0),$$

donde  $c^k(X) = \sum_{i=1}^r c_i^k(X)$ .

**La primera etapa: Equilibrio en localizaciones**

Bajo las condiciones 4.2, 4.4 y 4.5, existe un equilibrio  $\bar{Q} = (\bar{q}_i^k)_{i,k}$  con  $\bar{q}_i^k > 0$ , en la segunda etapa del juego. Los correspondientes valores de los beneficios son  $\bar{\pi}_i^k$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ ;  $k = 1, 2, \dots, n$ , y el beneficio total para la firma  $i$  es

$$\bar{\pi}_i(X) = \sum_{k=1}^n \bar{\pi}_i^k(X) = \sum_{k=1}^n \bar{q}_i^k (p_k(\bar{q}^k) - c_i^k) = \sum_{k=1}^n -p'_k(\bar{q}^k) (\bar{q}_i^k)^2.$$

El problema del equilibrio en la primera etapa del juego, consiste en determinar un vector de localizaciones  $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_r)$ , tal que

$$\bar{\pi}_i(\bar{X}) = \max_{x \in N} \bar{\pi}_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}, x, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_r), \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Es posible imponer condiciones sobre las cantidades y las funciones de demanda que garantizan la convexidad de las funciones de beneficios  $\bar{\pi}_i(X)$  cuando  $x_i$  se mueve sobre una arista de la red y el resto de las localizaciones permanecen invariables.

**Condición 4.6** Las funciones  $p_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , son derivables hasta el orden 3,  $r > 2$  y se cumple la relación

$$-2(r-2)^2 + \frac{2}{r-1} \leq \frac{(q^k)^2}{(p'_k)^2} ((p''_k)^2 - p'_k p'''_k) \leq (r-2)^2(r-1) - 1.$$

La condición anterior para funciones cuadráticas de la forma  $p(q) = aq^2 + bq + c$ , con  $a > 0$ ,  $b < 0$ ,  $c > 0$  y  $9ac - 2b^2 < 0$ , conduce a:

$$\frac{4a^2 U^2}{(2aU + b)^2} \leq (r-2)^2(r-1) - 1,$$

siendo  $U$  la raíz más pequeña de  $p(q)$ . Esto es debido a que

$$\frac{(q^k)^2}{(p'_k)^2} ((p''_k)^2 - p'_k p'''_k) = \frac{4a^2 q^2}{(2aq + b)^2} \geq 0$$

y  $-2(r-2)^2 + \frac{2}{r-1} < 0$  para  $r > 2$ . Por tanto,

$$-2(r-2)^2 + \frac{2}{r-1} \leq \frac{(q^k)^2}{(p'_k)^2} ((p''_k)^2 - p'_k p'''_k).$$

Además,  $F(q) = \frac{4a^2 q^2}{(2aq+b)^2}$  es creciente en  $[0, U]$ , por lo que basta con exigir que

$$F(U) \leq (r-2)^2(r-1) - 1.$$

**Lema 4.1** *Bajo las condiciones 4.1, 4.2, 4.4, 4.5 y 4.6, la función  $\bar{\pi}_i$  es convexa con respecto de  $x_i$  cuando  $x_i$  se mueve sobre una arista de la red y el resto de las localizaciones  $x_j$ ,  $j \neq i$ , permanecen fijas.*

**Demostración** Para cada v3rtice  $v_k$ , suponiendo las localizaciones  $x_j$  fijadas,  $j \neq i$ , la funci3n  $\bar{\pi}_i^k(X)$  puede expresarse como

$$\bar{\pi}_i^k(X) = \bar{\pi}_i^k(x_i) = (g \circ f)(x_i),$$

donde  $f(x_i) = c_i^k$  y  $g(c_i^k) = \bar{\pi}_i^k(x_i)$ . La distancia desde un v3rtice  $v_k$  a un punto  $x$  de la red, es una funci3n c3ncava con respecto de  $x$  cuando  $x$  se mueve sobre una arista de la red. Por tanto la funci3n  $f$  es c3ncava respecto de  $x_i$  cuando  $x_i$  se mueve sobre una arista de la red y las localizaciones del resto de las firmas no cambian. Utilizando las ecuaciones (4.1) y (4.2) y derivando impl3citamente, puede demostrarse que la funci3n  $\bar{\pi}_i^k$  es decreciente y convexa con respecto de  $c_i^k$ . Entonces, la composici3n  $g \circ f$  es convexa con respecto de  $x_i$  cuando  $x_i$  se traslada sobre una arista de la red. Basta comprobar que, bajo las condiciones impuestas, se obtiene

$$\frac{\partial q_i^k}{\partial c_i^k} = \frac{rp'_k + (q^k - q_i^k)p''_k}{p'_k((r+1)p'_k + q^k p''_k)} < 0,$$

$$\frac{\partial \bar{\pi}_i^k}{\partial c_i^k} = -p''_k (q_i^k)^2 \frac{\partial q_i^k}{\partial c_i^k} - 2q_i^k p'_k \frac{\partial q_i^k}{\partial c_i^k} = -q_i^k \frac{2rp'_k + (2q^k - q_i^k)p''_k}{(r+1)p'_k + q^k p''_k} < 0,$$

$$\begin{aligned} & [(r+1)p'_k + q^k p''_k]^2 \frac{\partial^2 \bar{\pi}_i^k}{\partial c_i^{k2}} = \\ &= -\frac{2}{p'_k} [rp'_k + (q^k - q_i^k)p''_k]^2 \\ & \quad + \frac{q_i^k}{(r+1)p'_k + q^k p''_k} [2p'_k p''_k + (p''_k)^2 - p'_k p'''_k] (2q^k - (r+1)q_i^k) - (p''_k)^2 q_i^k \\ & > -2(r-2)^2 p'_k \\ & \quad + \frac{q_i^k}{(r+1)p'_k + q^k p''_k} [-2p'_k p''_k + (p''_k)^2 - p'_k p'''_k] (2q^k - (r+1)q_i^k) - (p''_k)^2 q_i^k. \end{aligned}$$

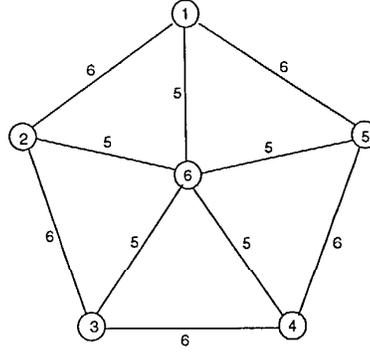


Figura 4.2: Red con 6 nodos

La condición

$$\frac{q_i^k}{p_k'((r+1)p_k' + q^k p_k'')} [-2p_k' p_k'' + (p_k''^2 - p_k' p_k''') (2q^k - (r+1)q_i^k)] \leq 2(r-2)^2$$

implica que  $\frac{\partial^2 \pi_i^k}{\partial c_i^2} > 0$ . Esta desigualdad se satisface si se verifica

$$2 + \frac{q^k}{(p_k')^2} ((p_k'')^2 - p_k' p_k''') (2q^k - (r+1)q_i^k) \leq 2(r-2)^2(r-1),$$

e imponiendo la condición 4.6 la relación anterior se cumple (obsérvese que la condición 4.6 tiene sentido sólo para  $r > 2$ ).

En las expresiones anteriores, con el fin de simplificar la notación, se ha prescindido de los argumentos de las funciones y se ha empleado  $\pi_i^k$ ,  $q_i^k$ ,  $q^k$  en lugar de  $\bar{\pi}_i^k$ ,  $\bar{q}_i^k$ ,  $\bar{q}^k$ .  $\square$

**Proposición 4.3** *Bajo las condiciones 4.1, 4.2, 4.4, 4.5 y 4.6, cada firma maximiza su beneficio localizándose en un vértice, para cualesquiera que sean las localizaciones del resto de las firmas.*

**Demostración** Se deduce del lema anterior.  $\square$

$t(v_k, v_l)$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$
$v_1$	0	6	10	10	6	5
$v_2$	6	0	6	10	10	5
$v_3$	10	6	0	6	10	5
$v_4$	10	10	6	0	6	5
$v_5$	6	10	10	6	0	5
$v_6$	5	5	5	5	5	0

Tabla 4.1: Coste de transporte entre vértices en la figura 4.2

**Ejemplo**

Se considera la red de la figura 4.2 con 6 nodos cuyas funciones de demanda son

$$p_1(q) = -(q-1)^3 - \frac{1}{2}q + 105,$$

$$p_2(q) = -(q-1)^3 - q + 90,$$

$$p_3(q) = -(q-1)^3 - q + 100,$$

$$p_4(q) = -(q-1)^3 - \frac{1}{2}q + 100,$$

$$p_5(q) = -(q-1)^3 - q + 95,$$

$$p_6(q) = -(q-1)^3 - \frac{1}{2}q + 120,$$

y 5 firmas cuyos costes marginales son

$$C'_i(x) = 8, \quad 1 \leq i \leq 5, \quad \forall x \in N.$$

Los costes de transporte vienen dados en la tabla 4.1.

Se verifica que  $p'_k(q) < 0$ ,  $\forall k$ . Las funciones  $p_k(q)$ , con  $k = 2, 3, 5$ , satisfacen las condiciones 4.3(i) y 4.3(ii). La condición 4.3(ii) no es satisfecha por el resto de las funciones de demanda, que sí cumplen la condición 4.4. Los valores de  $U_k$  son a 5.71019, 5.39016, 5.55391, 5.63383, 5.47344 y 5.92556, para  $1 \leq k \leq 6$ . Todas las funciones de demanda cumplen las condiciones 4.5 y 4.6.

La tabla 4.2 muestra las cantidades de equilibrio en cada mercado y los beneficios correspondientes a varios casos, distintos entre sí debido únicamente a las localizaciones diferentes de la firma 3.

Localización	Equilibrio	Beneficio
$x_1 = v_1$	$q^1 = 4.707353$	$\pi_1 = 303.5784$
$x_2 = v_2$	$q^2 = 4.408170$	$\pi_2 = 304.5880$
$x_3 = v_1$	$q^3 = 4.534719$	$\pi_3 = 303.5784$
$x_4 = v_4$	$q^4 = 4.594247$	$\pi_4 = 305.2968$
$x_5 = v_5$	$q^5 = 4.500779$	$\pi_5 = 304.0846$
	$q^6 = 4.900301$	
$x_1 = v_1$	$q^1 = 4.690383$	$\pi_1 = 303.9753$
$x_2 = v_2$	$q^2 = 4.427721$	$\pi_2 = 303.9441$
$x_3 = v_2$	$q^3 = 4.546909$	$\pi_3 = 303.9441$
$x_4 = v_4$	$q^4 = 4.594247$	$\pi_4 = 305.2410$
$x_5 = v_5$	$q^5 = 4.488281$	$\pi_5 = 304.6483$
	$q^6 = 4.900301$	
$x_1 = v_1$	$q^1 = 4.678985$	$\pi_1 = 304.4774$
$x_2 = v_2$	$q^2 = 4.408170$	$\pi_2 = 304.3817$
$x_3 = v_3$	$q^3 = 4.565046$	$\pi_3 = 304.3718$
$x_4 = v_4$	$q^4 = 4.606163$	$\pi_4 = 304.5016$
$x_5 = v_5$	$q^5 = 4.488281$	$\pi_5 = 304.5235$
	$q^6 = 4.900301$	
$x_1 = v_1$	$q^1 = 4.678985$	$\pi_1 = 304.5601$
$x_2 = v_2$	$q^2 = 4.395017$	$\pi_2 = 305.1223$
$x_3 = v_4$	$q^3 = 4.546909$	$\pi_3 = 304.0700$
$x_4 = v_4$	$q^4 = 4.623897$	$\pi_4 = 304.0700$
$x_5 = v_5$	$q^5 = 4.500779$	$\pi_5 = 303.9623$
	$q^6 = 4.900301$	
$x_1 = v_1$	$q^1 = 4.690383$	$\pi_1 = 304.0822$
$x_2 = v_2$	$q^2 = 4.395017$	$\pi_2 = 305.2608$
$x_3 = v_5$	$q^3 = 4.534719$	$\pi_3 = 303.5669$
$x_4 = v_4$	$q^4 = 4.606163$	$\pi_4 = 304.6951$
$x_5 = v_5$	$q^5 = 4.519369$	$\pi_5 = 303.5669$
	$q^6 = 4.900301$	
$x_1 = v_1$	$q^1 = 4.693222$	$\pi_1 = 299.9380$
$x_2 = v_2$	$q^2 = 4.411443$	$\pi_2 = 300.4483$
$x_3 = v_6$	$q^3 = 4.549944$	$\pi_3 = 300.9486$
$x_4 = v_4$	$q^4 = 4.609130$	$\pi_4 = 300.5608$
$x_5 = v_5$	$q^5 = 4.503890$	$\pi_5 = 299.9578$
	$q^6 = 4.913033$	

Tabla 4.2: Cantidades de equilibrio y beneficios para distintas localizaciones en vértices de la figura 4.2

Puede observarse que, fijadas las localizaciones de la firma  $i$  en  $v_i$  para  $i \neq 3$ , la mejor elección de la firma 3 es establecerse en  $v_3$ . Si existe equilibrio en localizaciones, existirá un equilibrio en los vértices de la red. Un proceso de relocalización secuencial de las firmas sin ciclos conduciría al equilibrio.

#### 4.2.2 Equilibrio localización-cantidad con demanda lineal

Se considera el caso particular en el que la demanda es una función lineal del precio y se generalizan algunos resultados del capítulo 3 al oligopolio. Sea la función inversa de demanda

$$p_k(q^k) = \begin{cases} a_k - b_k q^k & \text{si } 0 \leq q^k \leq \frac{a_k}{b_k} \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde  $a_k, b_k > 0$ . Obsérvese que  $p_k(q^k)$  cumple las condiciones 4.4 y 4.6.

#### Conjeturas nulas en cantidades

En la sección 4.2.1 se prueba la existencia de cantidades de equilibrio en la segunda etapa del juego, aunque no se indican explícitamente quienes son estas cantidades. En esta sección, se deducen las expresiones de las producciones de equilibrio. Por otra parte, se incluye un algoritmo de búsqueda secuencial considerado por Sarkar, Gupta y Pal (1997), basado en un resultado que asegura la inexistencia de ciclos en los procesos de elecciones secuenciales.

**Proposición 4.4** *Bajo la condición 4.2 y un conjunto dado de localizaciones para las firmas, existe un único equilibrio de Nash para la segunda etapa del juego. Además, si  $c_1^k \leq c_2^k \leq \dots \leq c_r^k$  y*

$$s = \max \left\{ i \in \{1, \dots, r\} : a_k > (1+i)c_i^k - \sum_{j=1}^i c_j^k \right\},$$

entonces las cantidades de equilibrio son

$$\bar{q}_i^k = \begin{cases} \frac{1}{(1+s)b_k} \left( a_k - (1+s)c_i^k + \sum_{j=1}^s c_j^k \right), & i = 1, \dots, s \\ 0, & i = s+1, \dots, r \end{cases}$$

y

$$\bar{q}^k = \frac{1}{(1+s)b_k} \left( sa_k - \sum_{i=1}^s c_i^k \right), \quad k = 1, \dots, n.$$

**Demostración** La existencia y unicidad del equilibrio de Nash resulta de aplicar la proposición 4.2. Para cada  $v_k \in V$ , sin pérdida de generalidad, los nodos pueden ordenarse de forma que  $c_1^k \leq c_2^k \leq \dots \leq c_r^k$ . Entonces,

$$(1+i)c_i^k - \sum_{j=1}^i c_j^k \leq (2+i)c_{i+1}^k - \sum_{j=1}^{i+1} c_j^k$$

ya que

$$\begin{aligned} (1+i)c_i^k - \sum_{j=1}^i c_j^k &= (2+i)c_{i+1}^k - \sum_{j=1}^{i+1} c_j^k - (1+i)(c_{i+1}^k - c_i^k) \\ &\leq (2+i)c_{i+1}^k - \sum_{j=1}^{i+1} c_j^k. \end{aligned}$$

Además, puede comprobarse que las cantidades  $\bar{q}_i^k$ ,  $i = 1, \dots, r$ , cumplen las condiciones de KKT del problema

$$\max_{q_i^k} \pi_i^k(q^k) = q_i^k(a_k - b_k q^k - c_i^k)$$

$$s.a. \quad q_i^k \geq 0,$$

$$q_i^k \leq \frac{a_k}{b_k} - \sum_{j \neq i} q_j^k,$$

dadas por:

$$a_k - b_k q^k - b_k q_i^k - c_i^k + \lambda_i^k - \mu_i^k = 0, \quad i = 1, \dots, r,$$

$$\lambda_i^k q_i^k = 0, \quad i = 1, \dots, r,$$

$$\mu_i^k \left( \frac{a_k}{b_k} - \sum_{j \neq i} q_j^k - q_i^k \right) = 0, \quad i = 1, \dots, r,$$

$$\lambda_i^k, \mu_i^k \geq 0, \quad i = 1, \dots, r.$$

□

Puede comprobarse que para  $r = 2$  se obtiene el resultado de Labbé y Hakimi (1991). Puede comprobarse también, que para  $r \geq 2$  las cantidades de equilibrio

cuando  $s = r$  coinciden con las resultantes de aplicar la formulación propuesta por Sarkar, Gupta y Pal (1997), quienes sólo consideran el caso en el que las cantidades ofrecidas por las firmas en los mercados son todas estrictamente positivas.

**Corolario 4.2** *Sea la condición 4.2 y un conjunto dado de localizaciones para las firmas. Si*

$$a_k > (1+r) \max_{1 \leq i \leq r} \{c_i^k\} - \sum_{i=1}^r c_i^k, \quad k = 1, \dots, n,$$

entonces el único equilibrio de Nash viene dado por

$$\bar{q}_i^k = \frac{1}{(1+r)b_k} \left( a_k - (1+r)c_i^k + \sum_{j=1}^r c_j^k \right), \quad i = 1, \dots, r,$$

y

$$\bar{q}^k = \frac{1}{(1+r)b_k} \left( ra_k - \sum_{i=1}^r c_i^k \right), \quad k = 1, \dots, n.$$

**Demostración** Se obtiene como caso particular del resultado anterior.  $\square$

En las condiciones del corolario 4.2, el precio de equilibrio en el mercado  $k$  es

$$\bar{p}^k = \frac{1}{(1+r)} \left( a_k + \sum_{i=1}^r c_i^k \right),$$

es decir, la media de los costes en destino de todas las empresas y la disposición a pagar. El precio, por tanto, aumenta con la disposición a pagar y con los costes de cualquiera de las firmas. Por otra parte, una reducción del coste de una de las firmas aumenta su producción y disminuye el precio de mercado. Cuando  $r = 2$ , se tiene como caso particular el precio obtenido por Labbé y Hakimi (1991). Además, para  $r = 1$  se obtiene la solución de monopolio

$$\bar{p}_{\lambda}^k = \frac{a_k + c^k}{2}.$$

La condición

$$a_k > (1+r) \max_{1 \leq i \leq r} \{c_i^k\} - \sum_{i=1}^r c_i^k, \quad k = 1, \dots, n,$$

garantiza que las cantidades ofrecidas en cada mercado son estrictamente positivas. Este supuesto para localizaciones variables viene dada por la siguiente condición.

**Condición 4.7** La red  $N(V,E)$  satisfice

$$a_k > \max_{x_1, \dots, x_n \in N} \left\{ (1+r) \max_{1 \leq i \leq r} \{c_i^k(x_i)\} - \sum_{i=1}^r c_i^k(x_i) \right\}, \quad k = 1, \dots, n.$$

**Condición 4.7'** La red  $N(V,E)$  satisfice

$$a_k > (1+r) \max_{1 \leq i \leq r} \max_{x \in N} \{c_i^k(x)\} - r \min_{1 \leq i \leq r} \min_{x \in N} \{c_i^k(x)\}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Bajo la condición 4.7' se tiene también la condición 4.7.

**Corolario 4.3** Bajo las condiciones 4.2 y 4.7, el beneficio en la primera etapa adelantando el equilibrio en cantidades de la segunda es

$$\pi_i(X) = \sum_{k=1}^n b_k (\bar{q}_i^k(X))^2, \quad i = 1, \dots, r,$$

con

$$\bar{q}_i^k(X) = \frac{1}{(1+r)b_k} \left( a_k - (1+r)c_i^k(x_i) + \sum_{j=1}^r c_j^k(x_j) \right).$$

**Demostración** Se obtiene sustituyendo el equilibrio en cantidades en la expresión del beneficio.  $\square$

**Corolario 4.4** Bajo las condiciones 4.1, 4.2 y 4.7, la función  $\pi_i(X)$  es convexa con respecto de  $x_i$  cuando  $x_i$  se mueve sobre una arista de la red y el resto de las localizaciones  $x_j$ ,  $j \neq i$ , permanecen fijas.

**Demostración** Se tiene como caso particular del lema 4.1.  $\square$

**Proposición 4.5** Bajo las condiciones 4.1, 4.2 y 4.7, existe un equilibrio de Nash subjuego-perfecto en nodos de la red.

**Demostración** Se probará que dado un conjunto de localizaciones iniciales en nodos de la red, el proceso de relocalización consecutiva a un nodo con mayor beneficio acaba en un número finito de pasos en un equilibrio de Nash para la primera etapa.

Dado un conjunto de localizaciones iniciales, se asume que las firmas siguen un orden estricto en la toma de decisiones, empezando por la primera y terminando por la que ocupa la posición  $r$ . Una vez que esta última ha decidido su localización en función de las de sus competidoras, la primera vuelve a decidir y así sucesivamente. Se probará que no existen ciclos, en cuyo caso el proceso acaba en un número finito de pasos, a lo sumo  $n^r$ . Supongamos por reducción al absurdo, que existen  $r$  subconjuntos  $\{v_i^1, \dots, v_i^s\}$ ,  $i = 1, \dots, r$ , de nodos que representan las decisiones tomadas por las  $r$  empresas, de tal manera que:

$$\begin{aligned} \pi_i(v_1^2, \dots, v_{i-1}^2, v_i^2, v_{i+1}^1, \dots, v_r^1) &\geq \pi_i(v_1^2, \dots, v_{i-1}^2, v_i^1, v_{i+1}^1, \dots, v_r^1), \quad i = 1, \dots, r, \\ \pi_i(v_1^3, \dots, v_{i-1}^3, v_i^3, v_{i+1}^2, \dots, v_r^2) &\geq \pi_i(v_1^3, \dots, v_{i-1}^3, v_i^2, v_{i+1}^2, \dots, v_r^2), \quad i = 1, \dots, r, \\ &\vdots \\ \pi_i(v_1^s, \dots, v_{i-1}^s, v_i^s, v_{i+1}^s, \dots, v_r^s) &\geq \pi_i(v_1^s, \dots, v_{i-1}^s, v_i^s, v_{i+1}^s, \dots, v_r^s), \quad i = 1, \dots, r, \end{aligned}$$

es decir, se produce un ciclo en la iteración  $s$ . Al menos una de las desigualdades anteriores es estricta, por lo que sumando todas las expresiones anteriores se llega a

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \pi_i(v_1^{j+1}, \dots, v_i^{j+1}, v_{i+1}^j, \dots, v_r^j) > \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \pi_i(v_1^{j+1}, \dots, v_i^j, v_{i+1}^j, \dots, v_r^j),$$

donde  $v_i^{s+1} = v_i^1$ ,  $i = 1, \dots, r$ . Pasando todo al primer miembro se obtiene

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \left\{ \pi_i(v_1^{j+1}, \dots, v_i^{j+1}, v_{i+1}^j, \dots, v_r^j) - \pi_i(v_1^{j+1}, \dots, v_i^j, v_{i+1}^j, \dots, v_r^j) \right\} > 0,$$

y sustituyendo la expresión del beneficio,

$$\frac{1}{(r+1)^2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^n \frac{1}{b_k} \left\{ \begin{aligned} &\left( a_k - r c_i^k(v_i^{j+1}) + \sum_{l < i} c_l^k(v_l^{j+1}) + \sum_{l > i} c_l^k(v_l^j) \right)^2 \\ &- \left( a_k - r c_i^k(v_i^j) + \sum_{l < i} c_l^k(v_l^{j+1}) + \sum_{l > i} c_l^k(v_l^j) \right)^2 \end{aligned} \right\} > 0.$$

Finalmente, desarrollando los cuadrados y simplificando se tiene,

$$\frac{2r}{(r+1)^2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^n \frac{1}{b_k} \left( c_i^k(v_i^j) - c_i^k(v_i^{j+1}) \right) \left( \sum_{l<i} c_l^k(v_l^{j+1}) + \sum_{l>i} c_l^k(v_l^j) \right) > 0.$$

Puede comprobarse que

$$\sum_{i=1}^r \left( c_i^k(v_i^j) - c_i^k(v_i^{j+1}) \right) \left( \sum_{l<i} c_l^k(v_l^{j+1}) + \sum_{l>i} c_l^k(v_l^j) \right) = 0,$$

por lo que en la expresión que precede a esta última, todos los términos se anulan, obteniéndose así la contradicción buscada ( $0 > 0$ ).  $\square$

La búsqueda de un equilibrio de Nash subjuego-perfecto puede hacerse aplicando el siguiente algoritmo, donde en cada proceso de relocalización se maximiza el beneficio.

**Algoritmo 4.1** *Obtención de un equilibrio de Nash para la primera etapa*

**Paso 0.** Verificar que se cumplen las condiciones 4.1, 4.2 y 4.7. Hacer  $h = 0$ .

Tomar un conjunto de localizaciones iniciales  $\{v_1^h, \dots, v_r^h\}$  de  $V$  y hacer  $\pi_i^h = \pi_i(v_1^h, \dots, v_r^h)$ ,  $i = 1, \dots, r$ .

**Paso 1.** Desde  $i = 1, \dots, r$ , hallar  $v_i^{h+1}$  tal que

$$\pi_i(v_1^{h+1}, \dots, v_{i-1}^{h+1}, v_i^{h+1}, v_{i+1}^h, \dots, v_r^h) = \max_{v \in V} \pi_i(v_1^{h+1}, \dots, v_{i-1}^{h+1}, v, v_{i+1}^h, \dots, v_r^h),$$

y hacer  $\pi_i^{h+1} = \pi_i(v_1^{h+1}, \dots, v_r^{h+1})$ ,  $i = 1, \dots, r$ .

**Paso 2.** Si  $\pi_i^{h+1} = \pi_i^h$ ,  $i = 1, \dots, r$ , entonces parar. El equilibrio es  $\{v_1^h, \dots, v_r^h\}$ . En otro caso, hacer  $h = h + 1$  e ir al paso 1.

La proposición 4.5 garantiza que este proceso finaliza en un número finito de pasos en un equilibrio. El orden de este algoritmo es  $O(n^{r+1})$ .

### Modelo de Stackelberg en cantidades

En primer lugar, consideremos dadas las localizaciones y estudiemos la existencia de equilibrio para la segunda etapa del juego. Recordemos que la función de beneficios en la segunda etapa es

$$\pi_i(Q) = \sum_{k=1}^n \left( \alpha_k - b_k \sum_{j=1}^r q_j^k - c_i^k \right) q_i^k, \quad i = 1, \dots, r,$$

y el conjunto de estrategias factibles es

$$S = \left\{ Q = (q_i^k)_{i,k} : q_i^k \geq 0, \sum_{j=1}^r q_j^k \leq \frac{\alpha_k}{b_k}, \quad i = 1, \dots, r; \quad k = 1, \dots, n \right\}.$$

Se asume que una de las firmas,  $i = 1$ , es líder en producción y sus adversarias son seguidoras. La firma líder decide la producción incorporando la reacción de las seguidoras. Dada la producción de la líder, las  $r - 1$  firmas seguidoras alcanzan un equilibrio de Nash con conjeturas nulas. Se trata de hallar  $(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_r)$  tal que

$$\pi_1(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_r) = \max_{\substack{0 \leq q_i^k \leq \frac{\alpha_k}{b_k} \\ k=1, \dots, n}} \pi_1(q_1, q_2(q_1), \dots, q_r(q_1)),$$

donde

$$\pi_i(q_1, q_2(q_1), \dots, q_r(q_1)) = \max_{\substack{0 \leq q_i^k \leq U_i^k \\ k=1, \dots, n}} \pi_i(q_1, q_2(q_1), \dots, q_i, \dots, q_r(q_1)),$$

$$\text{y } U_i^k = \frac{\alpha_k}{b_k} - q_1^k - \sum_{j \neq 1, i} q_j^k(q_1^k), \quad i = 2, \dots, r.$$

**Proposición 4.6** *Sea la condición 4.2 y un conjunto dado de localizaciones para las firmas. Supongamos que la primera firma es líder ( $i = 1$ ) y las restantes se comportan como seguidoras, y se verifica que*

$$a_k > \max \{ \gamma_1^k, \gamma_2^k \}, \quad k = 1, \dots, n,$$

donde

$$\gamma_1^k = 2r \max_{1 \leq j \leq r} \{ c_j^k \} - (r-1)c_1^k - \sum_{j=1}^r c_j^k,$$

$$\gamma_2^k = 2r \max_{1 \leq j \leq r} \{ c_j^k \} + c_1^k - 2 \sum_{j=1}^r c_j^k.$$

Entonces, las únicas cantidades de equilibrio de Stackelberg en la segunda etapa son

$$\begin{aligned} \bar{q}_1^k &= \frac{1}{2b_k} \left( a_k - (r+1)c_1^k + \sum_{j=1}^r c_j^k \right), \\ \bar{q}_i^k &= \frac{1}{2rb_k} \left( a_k + (r-1)c_1^k - 2rc_i^k + \sum_{j=1}^r c_j^k \right), \quad i = 2, \dots, r. \end{aligned}$$

**Demostración** Fijadas las localizaciones, como los costes marginales son constantes, los mercados pueden tratarse separadamente. Sin pérdida de generalidad, si analizamos el mercado  $k$ , podemos suponer que  $c_2^k \leq \dots \leq c_r^k$ . El beneficio para la firma  $i$ ,  $i = 2, \dots, r$ , es

$$\pi_i(Q) = \sum_{k=1}^n \pi_i^k(Q^k),$$

donde  $Q = (q_i^k)_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq k \leq n}}$ ,  $Q^k = (q_i^k)_{1 \leq i \leq r}$  y

$$\pi_i^k(Q^k) = \left( a_k - b_k q_1^k - b_k \sum_{j=2}^r q_j^k - c_i^k \right) q_i^k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Por la proposición 4.4, se obtiene que las cantidades de equilibrio de Nash (en función de  $q_1^k$ ) son

$$\bar{q}_i^k(q_1^k) = \frac{1}{s(q_1^k)b_k} \left( a_k - b_k q_1^k - c_1^k - s(q_1^k)c_i^k + \sum_{j=1}^{s(q_1^k)} c_j^k \right), \quad 2 \leq i \leq s(q_1^k),$$

y  $\bar{q}_i^k(q_1^k) = 0$  si  $i > s(q_1^k)$ , siendo

$$\begin{aligned} s(q_1^k) &= \max \left\{ i \in \{2, \dots, r\} : a_k - b_k q_1^k > i c_i^k - \sum_{j=2}^i c_j^k \right\} \\ &= \max \left\{ i \in \{2, \dots, r\} : q_1^k < \frac{a_k - i c_i^k + \sum_{j=2}^i c_j^k}{b_k} \right\}. \end{aligned}$$

Además, si

$$a_k - b_k q_1^k > r \max_{2 \leq j \leq r} \{c_j^k\} - \sum_{j=2}^r c_j^k,$$

las cantidades de equilibrio son todas estrictamente positivas. La expresión anterior es equivalente a la siguiente

$$a_k > r \max_{2 \leq j \leq r} \{c_j^k\} + c_1^k - \sum_{j=1}^r c_j^k + b_k q_1^k.$$

Bastaría con imponer

$$a_k > r \max_{2 \leq j \leq r} \{c_j^k\} + c_1^k - \sum_{j=1}^r c_j^k + \frac{a_k - c_1^k}{2},$$

para obtener cantidades de equilibrio estrictamente positivas, y esta condición se cumple pues  $a_k > \gamma_2^k$ .

La función  $\pi_1^k(q_1^k)$  que representa el beneficio de la firma líder en el mercado  $k$  es

$$\begin{aligned} \pi_1^k(q_1^k) &= \pi_1^k(q_1^k, \bar{q}_2^k(q_1^k), \dots, \bar{q}_r^k(q_1^k)) \\ &= \frac{1}{r} \left( a_k - b_k q_1^k - (r+1)c_1^k + \sum_{j=1}^r c_j^k \right) q_1^k, \end{aligned}$$

que tiene un máximo en

$$\bar{q}_1^k = \frac{1}{2b_k} \left( a_k - (r+1)c_1^k + \sum_{j=1}^r c_j^k \right),$$

de donde

$$\bar{q}_i^k = \bar{q}_i^k(\bar{q}_1^k) = \frac{1}{2rb_k} \left( a_k + (r-1)c_1^k - 2rc_i^k + \sum_{j=1}^r c_j^k \right), \quad i = 2, \dots, r.$$

La condición  $a_k > \max\{\gamma_1^k, \gamma_2^k\}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , garantiza que

$$\bar{q}_i^k > 0, \quad i = 1, \dots, r, \quad \text{y} \quad \bar{q}^k = \sum_{i=1}^r \bar{q}_i^k \leq \frac{a_k}{b_k}.$$

□

En particular, para  $r = 2$  la condición

$$a_k > \max \{ \gamma_1^k, \gamma_2^k \}, \quad k = 1, \dots, n,$$

conduce a

$$a_k > \max \{ 2c_L^k - c_S^k, 3c_S^k - 2c_L^k \}, \quad k = 1, \dots, n,$$

que se obtuvo en la sección 3.3.1, resultando entonces el corolario 3.1.

En equilibrio, la oferta agregada en el mercado  $k$  es

$$\bar{q}^k = \sum_{i=1}^r \bar{q}_i^k = \frac{1}{2rb_k} \left( (2r-1)a_k + (1-r)c_1^k - \sum_{i=1}^r c_i^k \right)$$

y el precio en dicho mercado es

$$\bar{p}_k = a_k - b_k \bar{q}^k = \frac{1}{2r} \left( a_k + (r-1)c_1^k + \sum_{i=1}^r c_i^k \right).$$

La condición  $a_k > \max \{ \gamma_1^k, \gamma_2^k \}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , para localizaciones variables es la siguiente.

**Condición 4.8** *La red  $N(V, E)$  satisface*

$$a_k > \max \{ \gamma_1^k(X), \gamma_2^k(X) \}, \quad \forall X = (x_1, \dots, x_r) \in N^r,$$

$k = 1, \dots, n$ , donde

$$\gamma_1^k(X) = 2r \max_{1 \leq j \leq r} \{ c_j^k(x_j) \} - (r-1)c_1^k(x_1) - \sum_{j=1}^r c_j^k(x_j),$$

$$\gamma_2^k(X) = 2r \max_{1 \leq j \leq r} \{ c_j^k(x_j) \} + c_1^k(x_1) - 2 \sum_{j=1}^r c_j^k(x_j).$$

Bajo la condición 4.8, los beneficios en la primera etapa, asumiendo comportamiento de Stackelberg en la segunda etapa, son

$$\pi_1(X) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{4rb_k} \left( a_k - (r+1)c_1^k(x_1) + \sum_{j=1}^r c_j^k(x_j) \right)^2,$$

$$\pi_i(X) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{4r^2b_k} \left( a_k + (r-1)c_1^k(x_1) - 2rc_i^k(x_i) + \sum_{j=1}^r c_j^k(x_j) \right)^2,$$

para  $i = 2, \dots, r$ .

La condición 4.8 garantiza que cada empresa ofrece una cantidad mayor que cero en todos los mercados. En este caso, se probará que siempre que exista equilibrio de Nash en la primera etapa, su búsqueda puede reducirse a los nodos de la red.

**Lema 4.2** *Bajo las condiciones 4.1, 4.2 y 4.8, la función  $\pi_i(X)$  es convexa con respecto de  $x_i$  cuando  $x_i$  se mueve sobre una arista de la red y el resto de las localizaciones  $x_j$ ,  $j \neq i$ , permanecen fijas.*

**Demostación** Dado  $v_k \in V$ , como el coste de transporte unitario es una función cóncava, las funciones  $c_i^k(x_i)$  son también cóncavas. Entonces, las funciones

$$f(x_1) = a_k - r c_1^k(x_1) + \sum_{j=2}^r c_j^k,$$

$$g_i(x_i) = a_k + (r-1) c_1^k - (2r-1) c_i^k(x_i) + \sum_{j \neq i} c_j^k,$$

son convexas. Bajo la condición 4.8, son además positivas. Entonces,  $f^2$  y  $g^2$  son también funciones convexas (proposición 2.4). Por tanto,  $\pi_i(X)$  es una función convexa de  $x_i$  cuando  $x_i$  se mueve sobre una arista de la red, al ser suma de funciones convexas en la arista.  $\square$

**Proposición 4.7** *Bajo las condiciones 4.1, 4.2 y 4.8, si existe equilibrio en la primera etapa, entonces existe un equilibrio en un conjunto de nodos de la red.*

**Demostación** Basta aplicar la proposición 2.6 junto al lema 4.2.  $\square$

#### Conjeturas no nulas en cantidades

En este caso, una extensión directa del comportamiento líder-líder del duopolio a más de dos firmas conduce a situaciones donde la cantidad total ofrecida en el mercado es superior a la demanda máxima y drásticas reducciones de precios.

Teniendo en cuenta el resultado de la proposición 4.6, dada la condición 4.2, y un conjunto de localizaciones para las firmas, si se verifica que

$$a_k > \max \{ \gamma_{1i}^k, \gamma_{2i}^k \}, \quad i = 1, \dots, r; \quad k = 1, \dots, n,$$

donde

$$\begin{aligned}\gamma_{1i}^k &= 2r \max_{1 \leq j \leq r} \{c_j^k\} - (r-1)c_i^k - \sum_{j=1}^r c_j^k, \\ \gamma_{2i}^k &= 2r \max_{1 \leq j \leq r} \{c_j^k\} + c_i^k - 2 \sum_{j=1}^r c_j^k,\end{aligned}$$

entonces, las únicas cantidades de equilibrio asumiendo conjeturas no nulas para todas las firmas son

$$\bar{q}_i^k = \frac{1}{2b_k} \left( a_k - (r+1)c_i^k + \sum_{j=1}^r c_j^k \right), \quad i = 1, \dots, r; \quad k = 1, \dots, n.$$

La oferta agregada en el mercado  $k$  sería

$$\bar{q}^k = \sum_{i=1}^r \bar{q}_i^k = \frac{1}{2b_k} \left( r a_k - \sum_{i=1}^r c_i^k \right),$$

expresión que podría ser superior a  $a_k/b_k$ . Además, el precio en dicho mercado sería

$$\bar{p}^k = a_k - b_k \bar{q}^k = \frac{1}{2} \left( (2-r)a_k + \sum_{i=1}^r c_i^k \right),$$

el cual podría ser inferior a  $\min_{i=1, \dots, r} \{c_i^k\}$ , e incluso menor que cero, es decir, ninguna firma obtendría beneficios en el mercado  $k$ . Considérese, por ejemplo, el caso  $r = 3$ . Bajo las condiciones anteriores, se cumple que

$$\begin{aligned}a_k &> \max \{ \gamma_{11}^k, \gamma_{12}^k, \gamma_{13}^k \} \\ &\geq 6 \max \{ c_1^k, c_2^k, c_3^k \} - 2c_i^k - (c_1^k + c_2^k + c_3^k), \quad i = 1, 2, 3,\end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned}a_k &> 6 \max \{ c_1^k, c_2^k, c_3^k \} - 2 \max \{ c_1^k, c_2^k, c_3^k \} - (c_1^k + c_2^k + c_3^k) \\ &= 4 \max \{ c_1^k, c_2^k, c_3^k \} - (c_1^k + c_2^k + c_3^k).\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
 \bar{p}^k &= \frac{1}{2} (-a_k + c_1^k + c_2^k + c_3^k) \\
 &< \frac{1}{2} (-4 \max \{c_1^k, c_2^k, c_3^k\} + 2(c_1^k + c_2^k + c_3^k)) \\
 &= -2 \max \{c_1^k, c_2^k, c_3^k\} + c_1^k + c_2^k + c_3^k \\
 &< \min \{c_1^k, c_2^k, c_3^k\}.
 \end{aligned}$$

Entonces, asumiendo las condiciones anteriores, parece que no es posible que tres firmas asuman el papel de líderes, siendo necesario que al menos una de ellas sea seguidora. Recordemos que cuando el número de firmas es dos, cada una de ellas obtiene pérdidas en aquellos mercados en los que su coste en destino es superior al de su competidora.

### 4.3 Competencia en precios

#### 4.3.1 Demanda totalmente inelástica al precio

Asumamos que  $\lambda_k$ , la demanda en el mercado  $k$ -ésimo, no depende del precio del bien en dicho mercado. Los clientes elegirán el producto menos costoso, es decir, si  $p_i^k(X) < p_j^k(X), \forall j \neq i$ , los consumidores situados en  $v_k$  comprarán a la firma  $i$  al precio  $p_i^k$ . Si en un determinado mercado los precios de varias empresas coinciden, supondremos que dichas empresas se reparten en partes iguales la demanda de ese mercado.

Denotando por  $K_i$  los mercados captados por la empresa  $i$ , y por  $M_i$  los mercados que  $i$  comparte con otras empresas, es decir,

$$K_i = \{k : p_i^k < p_j^k, j = 1, \dots, r; j \neq i\},$$

$$M_i = \left\{ k : p_i^k = \min_{j=1, \dots, r; j \neq i} p_j^k \right\},$$

el beneficio se escribe de la siguiente manera

$$\pi_i(X, P) = \sum_{k \in K_i} (p_i^k(X) - c_i^k(x_i)) \lambda_k + \sum_{k \in M_i} \frac{1}{r_i^k} (p_i^k(X) - c_i^k(x_i)) \lambda_k - F_i,$$

siendo

$$r_i^k = \left\| \left\{ l : p_i^k = p_l^k = \min_{j=1, \dots, r; j \neq i} p_j^k \right\} \right\|.$$

Dadas las ubicaciones  $X$  y los precios  $p_j^k(X)$ ,  $j = 1, \dots, r$ , la decisión óptima para la firma  $i$  es

$$p_{i_\epsilon}^k = \max \left\{ c_i^k, \min_{j \neq i} \{ c_j^k \} - \epsilon \right\}, \quad k = 1, \dots, n,$$

donde  $\epsilon > 0$  es una cantidad arbitrariamente pequeña. Esta formulación asume que la firma  $i$  no bajará los precios por debajo de sus costes (costes en destino), que es la conducta esperada si no existe comportamiento predatorio. Las empresas tomarán  $\epsilon$  arbitrariamente pequeño y en el límite,

$$\bar{p}_i^k = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} p_{i_\epsilon}^k = \max \left\{ c_i^k, \min_{j \neq i} c_j^k \right\}.$$

Entonces, se considerará que

$$\bar{p}^k = \min_{i \neq i^*} c_i^k, \quad k = 1, \dots, n,$$

donde  $i^*$  es tal que  $c_{i^*}^k = \min_{i=1, \dots, r} c_i^k$ .

Si  $c_{(1)}^k \leq c_{(2)}^k \leq \dots \leq c_{(r)}^k$  es una ordenación de los costes en el mercado  $k$ , con  $c_{(2)}^k \leq a_k$ , entonces el precio en el mercado  $k$  es

$$\bar{p}^k = c_{(2)}^k.$$

Esto significa que la demanda del nodo  $k$  es captada por la firma con menor coste y que el precio pagado es igual al coste marginal en destino (incluyendo el coste de transporte) de la segunda empresa con menores costes.

En el equilibrio, las dos firmas con menores costes fijarán los mismos precios. Si embargo, parece razonable asumir que dicha demanda sea captada por aquella con costes inferiores. El beneficio bajo el precio considerado es

$$\begin{aligned} \pi_i(X) &= \sum_{k=1}^n \pi_i^k(X) - F_i, \quad i = 1, \dots, r, \\ \pi_i^k(X) &= \begin{cases} \lambda_k (\min_{j \neq i} \{ c_j^k(x_j) \} - c_i^k(x_i)) & \text{si } c_i^k(x_i) < c_j^k(x_j), \forall j \neq i \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

**Proposición 4.8** *La función de beneficios en la primera etapa puede descomponerse de la siguiente manera*

$$\pi_i(X) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \min_{j \neq i} \{c_j^k(x_j)\} + \sum_{j \neq i} F_j - CS(X), \quad i = 1, \dots, r,$$

$$\text{donde } CS(X) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \min_{j=1, \dots, r} \{c_j^k(x_j)\} + \sum_{j=1}^r F_j.$$

**Demostración** Se deduce teniendo en cuenta los mercados captados por cada empresa.  $\square$

Este resultado asegura que el beneficio de una firma es la diferencia entre el coste de cubrir toda la demanda de la forma menos costosa sin que dicha firma intervenga y el coste social, es decir, el coste mínimo cuando intervienen todas la empresas.

El equilibrio de Nash en la primera etapa se obtendría maximizando el beneficio, dada la posición de sus adversarias. Si asumimos  $x_j$  fijo,  $\forall j \neq i$ , los dos primeros sumatorios de la expresión del beneficio son constantes. Entonces, el beneficio se maximiza en aquella localización que minimiza el coste social. En definitiva,  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r)$  es un equilibrio de Nash si y sólo si

$$CS(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_r) \leq CS(\bar{x}_1, \dots, x_i, \dots, \bar{x}_r), \quad \forall x_i \in N, \quad i = 1, \dots, r.$$

**Proposición 4.9** *Se tienen los siguientes resultados:*

- (i) *Si  $CS$  tiene mínimo global en  $\bar{X} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r) \in N^r$ , entonces  $\bar{X}$  es un equilibrio de Nash para la primera etapa del juego.*
- (ii) *Si las funciones  $C_i^k, t_i^k$ , son continuas en  $N$ , entonces existe un equilibrio de Nash para la primera etapa del juego.*
- (iii) *Bajo la condición 4.1,  $CS(X)$  es una función cóncava en  $x_i$  cuando  $x_i$  se desplaza por una arista de la red y  $x_j$  permanece fijo,  $i = 1, \dots, r; j \neq i$ .*

**Demostración** Se tiene de forma análoga al caso  $r = 2$  que se recoge en la proposición 3.6.  $\square$

**Proposición 4.10** *Bajo la condición 4.1, si existe equilibrio de Nash en la primera etapa, entonces existe un equilibrio en un conjunto de nodos de la red.*

**Demostración** Se tiene de forma análoga al caso  $r = 2$  que se recoge en la proposición 3.7.  $\square$

El problema de obtener una solución de equilibrio para la primera etapa se reduce a minimizar una función en un conjunto finito de cardinal  $n^r$ . Podría utilizarse un algoritmo de búsqueda que no recorra necesariamente el conjunto de oportunidades, de forma similar al propuesto para el duopolio en el capítulo 3. Puede partirse de una localización inicial para una de las empresas e ir obteniendo consecutivamente las localizaciones que minimizan el coste social. En virtud del siguiente resultado, puede asegurarse que este proceso acaba en un número finito de pasos en un equilibrio de Nash.

**Proposición 4.11** *Dado un conjunto de localizaciones iniciales en nodos de la red, si se verifica la condición 4.1, entonces el proceso de relocalizaciones alternativas a un nodo con menor coste social acaba en un número finito de pasos en un equilibrio de Nash.*

**Demostración** Se probará que no existen ciclos, en cuyo caso el proceso acaba en un número finito de pasos dado que el conjunto de vértices es finito. Para ello, supongamos por reducción al absurdo que existen  $r$  subconjuntos  $\{v_i^1, \dots, v_i^s\}$ ,  $i = 1, \dots, r$ , de nodos que representan las decisiones tomadas por las  $r$  empresas siguiendo un determinado orden de decisión, de tal manera que:

$$\begin{aligned} CS(v_1^2, \dots, v_{i-1}^2, v_i^2, v_{i+1}^1, \dots, v_r^1) &\leq CS(v_1^2, \dots, v_{i-1}^2, v_i^1, v_{i+1}^1, \dots, v_r^1), \quad i = 1, \dots, r, \\ CS(v_1^3, \dots, v_{i-1}^3, v_i^3, v_{i+1}^2, \dots, v_r^2) &\leq CS(v_1^3, \dots, v_{i-1}^3, v_i^2, v_{i+1}^2, \dots, v_r^2), \quad i = 1, \dots, r, \\ &\vdots \\ CS(v_1^s, \dots, v_{i-1}^s, v_i^s, v_{i+1}^s, \dots, v_r^s) &\leq CS(v_1^s, \dots, v_{i-1}^s, v_i^s, v_{i+1}^s, \dots, v_r^s), \quad i = 1, \dots, r, \end{aligned}$$

es decir, se produce un ciclo en la iteración  $s$ . Dado que al menos una de las desigualdades anteriores es estricta, sumando todas las inecuaciones se tiene

$$\sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^r CS(v_1^{j+1}, \dots, v_i^{j+1}, v_{i+1}^j, \dots, v_r^j) < \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^r CS(v_1^{j+1}, \dots, v_i^j, v_{i+1}^j, \dots, v_r^j),$$

donde  $v_i^{s+1} = v_i^1$ ,  $i = 1, \dots, r$ . Pasando todo al primer miembro se obtiene

$$\sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^r \left[ CS(v_1^{j+1}, \dots, v_i^{j+1}, v_{i+1}^j, \dots, v_r^j) - CS(v_1^{j+1}, \dots, v_i^j, v_{i+1}^j, \dots, v_r^j) \right] < 0,$$

pero en esta expresión todos los términos se anulan, obteniéndose la contradicción buscada ( $0 < 0$ ).  $\square$

La búsqueda de un equilibrio de Nash en la primera etapa puede hacerse aplicando el siguiente algoritmo, donde en cada proceso de relocalización se minimiza el coste social.

**Algoritmo 4.2** *Obtención de un equilibrio de Nash para la primera etapa*

**Paso 0.** Hacer  $h = 0$ . Tomar un conjunto de localizaciones iniciales  $\{v_1^h, \dots, v_r^h\}$  de  $V$  y hacer  $CS^h = CS(v_1^h, \dots, v_r^h)$ .

**Paso 1.** Desde  $i = 1, \dots, r$ , hallar  $v_i^{h+1}$  tal que

$$\begin{aligned} & CS(v_1^{h+1}, \dots, v_{i-1}^{h+1}, v_i^{h+1}, v_{i+1}^h, \dots, v_r^h) \\ &= \min_{v \in V} CS(v_1^{h+1}, \dots, v_{i-1}^{h+1}, v, v_{i+1}^h, \dots, v_r^h), \end{aligned}$$

y hacer  $CS^{h+1} = CS(v_1^{h+1}, \dots, v_r^{h+1})$ .

**Paso 2.** Si  $CS^{h+1} = CS^h$ , entonces parar. El equilibrio es  $\{v_1^h, \dots, v_r^h\}$ . En otro caso, hacer  $h = h + 1$  e ir al paso 1.

La proposición 4.11 garantiza que este proceso finaliza en un número finito de pasos en un equilibrio. El orden de este algoritmo es  $O(n^{r+1})$ .

### 4.3.2 Demanda elástica al precio. El caso lineal

Sea la función de demanda

$$q^k(p^k) = \alpha_k - \beta_k p^k, \quad 0 \leq p^k \leq a_k,$$

donde  $\alpha_k = \frac{a_k}{b_k}$ ,  $\beta_k = \frac{1}{b_k}$ , y

$$p^k = \min_{i=1, \dots, r} p_i^k$$

es el precio en el mercado  $k$ .

Dado un conjunto de localizaciones para las firmas, el beneficio de la firma  $i$  es

$$\pi_i(P) = \sum_{k=1}^n (p_i^k - c_i^k) q_i^k(p^k) - F_i,$$

siendo  $q_i^k$  la cuota de mercado de la firma  $i$  en el mercado  $k$ , dada por

$$q_i^k(p^k) = \begin{cases} \alpha_k - \beta_k p_i^k & \text{si } c_i^k \leq p_i^k < p_j^k, \forall j \neq i \\ \frac{1}{r_i^k} (\alpha_k - \beta_k p_i^k) & \text{si } p_i^k = \min_{j \neq i} p_j^k \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde

$$r_i^k = \left| \left\{ l : p_i^k = p_l^k = \min_{j=1, \dots, r; j \neq i} p_j^k \right\} \right|.$$

Es decir,

$$\pi_i(P) = \sum_{k=1}^n \pi_i^k(p^k) - F_i,$$

y

$$\pi_i^k(p^k) = \begin{cases} (p_i^k - c_i^k) (\alpha_k - \beta_k p_i^k) & \text{si } c_i^k \leq p_i^k < p_j^k, \forall j \neq i \\ \frac{1}{r_i^k} (p_i^k - c_i^k) (\alpha_k - \beta_k p_i^k) & \text{si } p_i^k = \min_{j \neq i} p_j^k \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

**Proposición 4.12** *Dado un conjunto de localizaciones para las firmas, si en el mercado  $k$  los nodos se pueden ordenar de forma que  $c_{(1)}^k \leq c_{(2)}^k \leq \dots \leq c_{(r)}^k$ , y se cumple que*

$$a_k > c_{(2)}^k, \quad k = 1, \dots, n,$$

entonces:

- (i) *Si  $c_{(1)}^k < c_{(2)}^k$  y  $a_k < 2c_{(2)}^k - c_{(1)}^k$ , entonces existe un equilibrio de Nash en precios en  $v_k$  dado por*

$$\bar{p}_{(i)}^k = \begin{cases} \frac{1}{2} (a_k + c_{(1)}^k), & i = 1 \\ c_{(i)}^k, & i \neq 1. \end{cases}$$

Además,

$$\bar{p}^k = \min_{1 \leq i \leq n} \{\bar{p}_i^k\} = \frac{1}{2} (a_k + c_{(1)}^k).$$

(ii) Si  $c_{(1)}^k \leq c_{(2)}^k$  y  $a_k \geq 2c_{(2)}^k - c_{(1)}^k$ , entonces existe equilibrio de Nash en  $v_k$  si y sólo si  $c_{(1)}^k = c_{(2)}^k$ , en cuyo caso el equilibrio es

$$\bar{p}_{(i)}^k = \begin{cases} c_{(1)}^k, & i = 1, 2 \\ c_{(i)}^k, & i > 2 \end{cases}$$

$$\text{y } \bar{p}^k = \min_{1 \leq i \leq n} \{\bar{p}_i^k\} = c_{(1)}^k.$$

(iii) Si para  $k = 1, \dots, n$ , se tiene

$$c_{(1)}^k = c_{(2)}^k \quad \text{o} \quad \left( c_{(1)}^k < c_{(2)}^k \quad \text{y} \quad a_k < 2c_{(2)}^k - c_{(1)}^k \right),$$

entonces existe un equilibrio de Nash en precios.

**Demostración** Similar al caso del duopolio en proposición 3.9. □

En el resto del epígrafe se considerará que el precio competitivo en el mercado  $k$  es

$$p^k = \begin{cases} \frac{1}{2} (a_k + c_{(1)}^k) & \text{si } c_{(2)}^k > \frac{1}{2} (a_k + c_{(1)}^k) \\ c_{(2)}^k & \text{si } c_{(1)}^k \leq c_{(2)}^k \leq \frac{1}{2} (a_k + c_{(1)}^k). \end{cases}$$

Si todas las firmas se ponen de acuerdo en la segunda etapa para maximizar el beneficio conjunto, cada mercado es cubierto por aquella con menor coste, obteniéndose un óptimo de Pareto para las empresas. En tal caso, el precio colusivo que maximiza el beneficio conjunto de las firmas vienen dados por el siguiente resultado.

**Proposición 4.13** Dado un conjunto de localizaciones para las firmas, si en el mercado  $k$  los nodos se pueden ordenar de forma que  $c_{(1)}^k \leq c_{(2)}^k \leq \dots \leq c_{(r)}^k$ , y se cumple que

$$a_k > c_{(2)}^k, \quad k = 1, \dots, n,$$

entonces el precio colusivo que maximiza el beneficio conjunto de las empresas es

$$p^{kc} = \frac{1}{2} \left( a_k + \min_{1 \leq i \leq r} \{c_i^k\} \right).$$

**Demostración** Similar al caso del duopolio en proposición 3.10.  $\square$

Finalmente, se trata de estudiar la existencia de un equilibrio de Nash para la primera etapa asumiendo la siguiente condición.

**Condición 4.9** La red  $N(V, E)$  satisface

$$a_k > c_i^k(x), \forall x \in N, k = 1, \dots, n, i = 1, \dots, r.$$

**Corolario 4.5** Bajo la condición 4.9, el beneficio en la primera etapa adelantando el precio competitivo en la segunda es

$$\pi_i(X) = \sum_{k=1}^n \pi_i^k(X) - F_i,$$

donde  $\pi_i^k(X)$ , con  $i = 1, \dots, r$ , es

$$\begin{cases} \frac{1}{4b_k} (a_k - c_i^k(x_i))^2 & \text{si } c_i^k(x_i) < 2c_{(2)}^k(x_{(2)}) - a_k \\ \frac{1}{2b_k} (c_{(2)}^k(x_{(2)}) - c_i^k(x_i)) (a_k - c_{(2)}^k(x_{(2)})) & \text{si } 2c_{(2)}^k(x_{(2)}) - a_k \leq c_i^k(x_i) < c_{(2)}^k(x_{(2)}) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

**Demostración** Se ha sustituido el precio competitivo en la función de beneficios.  $\square$

**Corolario 4.6** Bajo la condición 4.9, el beneficio en la primera etapa adelantando el precio colusivo en la segunda es

$$\pi_i^c(X) = \sum_{k=1}^n \pi_i^{kc}(X) - F_i,$$

donde

$$\pi_i^{kc}(X) = \begin{cases} \frac{1}{4b_k} (a_k - c_i^k(x_i))^2 & \text{si } c_i^k(x_i) < c_j^k(x_j), \forall j \neq i \\ \frac{1}{4b_k s_i^k} (a_k - c_i^k(x_i))^2 & \text{si } c_i^k(x_i) = \min_{j \neq i} c_j^k(x_j) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y

$$s_i^k = \left| \left\{ l : c_i^k = c_l^k = \min_{j=1, \dots, r; j \neq i} c_j^k \right\} \right|.$$

**Demostración** Se ha sustituido el precio colusivo en la función de beneficios de las empresas.  $\square$

**Lema 4.3** *Bajo las condiciones 4.1 y 4.9, la función  $\pi_i(X)$  es convexa cuando  $x_i$  se mueve sobre una arista de la red y  $x_j, j \neq i$ , permanecen fijas.*

**Demostración** Similar al lema 3.3 para duopolio.  $\square$

**Proposición 4.14** *Bajo las condiciones 4.1 y 4.9, si existe equilibrio de Nash en la primera etapa asumiendo precio competitivo, entonces existe un equilibrio en un conjunto de vértices de la red.*

**Demostración** Basta aplicar el lema 4.3 y la proposición 2.6.  $\square$

## 4.4 Comparación de resultados entre duopolio y oligopolio

El número de empresas afecta de manera importante en los resultados de un problema de competencia espacial. Por ejemplo, recordemos que existe equilibrio para el duopolio espacial de Hotelling cuando los precios están fijados, y, sin embargo, no existe equilibrio cuando el número de empresas es tres. En esta sección se comparan los resultados obtenidos para el duopolio en el capítulo 3 con los del oligopolio del capítulo 4.

Consideremos en primer lugar el problema en el que los precios están fijados y coinciden entre empresas. En este caso, la principal diferencia radica en la cuota de mercado. En el oligopolio las firmas pueden tener cuotas de mercado diferentes, mientras que en el duopolio las cuotas de mercado de ambas firmas coinciden. Además, la existencia de equilibrio en localización depende del número de empresas. Consideremos, por ejemplo, la red de la figura 3.1. Si el problema es discreto, existe equilibrio independientemente del número de empresas. En el caso particular del duopolio, existe equilibrio de Nash para cualquier localización de las firmas, por lo que existen equilibrios en los que se produce aglomeración (localizaciones coincidentes) y otros en los que hay dispersión (localizaciones diferentes). En cambio, cuando el número de firmas es

tres, existe siempre dispersión en las localizaciones de equilibrio. Si el problema no es discreto, no existe equilibrio en el duopolio, aunque sí existe equilibrio cuando el número de firmas es tres, produciéndose además localización en los nodos y dispersión entre las firmas. Consideremos ahora la red de la figura 3.2. Si el problema es discreto, no existe equilibrio para dos empresas, mientras que sí existe para tres, dos de las firmas se localizan en el primer nodo y la otra en el tercero, y cuatro firmas, dos en el primero y las otras dos en el tercero, por ejemplo. En redes, no existe equilibrio para dos y tres firmas, aunque sí existe equilibrio para cuatro, dos firmas se localizan en el primer nodo y las otras dos en el tercero.

Como se ha puesto de manifiesto, la existencia de equilibrio depende en gran medida del número de empresas, aunque también de la naturaleza del problema, ya sea discreto o en redes. La existencia de equilibrio no está asegurada ni siquiera en árboles, como ocurre en el problema de Hotelling con tres empresas y precios dados, incluso cuando el número de empresas es par, como pone de manifiesto el ejemplo discreto de la figura 4.1 cuando el número de firmas es cuatro.

Consideremos ahora que los precios son variables y que las empresas compiten vía cantidades o bien vía precios. Cuando la competencia se lleva a cabo en precios, no existen diferencias significativas en relación al número de empresas. De hecho, cuando compiten más de dos empresas, el problema en cada mercado se reduce al análisis del equilibrio entre las dos empresas con menores costes en destino. Sin embargo, esto no sucede con la competencia en cantidades, donde el precio en un determinado mercado, resultante de las cantidades de equilibrio, depende de los costes en destino de todas las firmas. Dado un conjunto de localizaciones para las firmas, el precio de equilibrio oligopolístico en el mercado  $k$  para la competencia en cantidades con conjeturas nulas es

$$\bar{p}^k = \frac{a_k + \sum_{i=1}^r c_i^k}{r+1},$$

mientras que si la competencia se realiza en precios el resultado es

$$\bar{p}^k = \begin{cases} \frac{1}{2} (a_k + c_{(1)}^k) & \text{si } c_{(2)}^k > \frac{1}{2} (a_k + c_{(1)}^k) \\ c_{(2)}^k & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde  $c_{(1)}^k \leq c_{(2)}^k \leq \dots \leq c_{(r)}^k$  es una ordenación de los costes en el mercado  $k$ , con  $a_k > c_{(2)}^k$ . Por otra parte, si existe colusión en precios el resultado en el mercado  $k$  es

$$\bar{p}^k = \frac{1}{2} (a_k + c_{(1)}^k).$$

Nótese que para  $r = 2$ , el precio asociado al equilibrio en cantidades proporciona el resultado conocido para el duopolio. Además, para  $r = 1$  se obtiene el precio de monopolio  $\bar{p}^k = \frac{a_k + c^k}{2}$ . Cuando la competencia es vía precios, cada firma captura aquellos mercados en los que su coste en destino es el menor de entre todas las firmas competidoras, fijando en dichos mercados el precio de monopolio siempre que éste sea inferior al segundo menor coste en destino.

Respecto a las conjeturas, se ha observado como para tres firmas y determinadas condiciones, una de ellas necesariamente ha de ser seguidora. Si las tres firmas deciden comportarse como líderes se obtiene una situación no factible.

Finalmente, veamos como afecta la entrada de nuevos competidores en el mercado. La incorporación de una nueva firma influye en el precio de equilibrio de todos los mercados si la competencia se produce vía cantidades, mientras que si la competencia se realiza vía precios, únicamente tiene repercusión en aquellos mercados en los que su coste en destino se encuentre entre los dos menores.

## 4.5 Ejemplos

A continuación se muestran dos ejemplos en los que se ha estudiado el grado de dispersión espacial en el equilibrio. El primero pone de manifiesto la sensibilidad del equilibrio a cambios en la red. En el segundo, se comparan los equilibrios con los obtenidos en el problema de captura máxima (precios fijados e iguales).

### 4.5.1 Equilibrio localización-cantidad

Se considera competencia en cantidades y dos escenarios diferentes, determinados por los árboles de la figura 4.3. La demanda en cada mercado viene dada por

$$p_k(q^k) = 14 - q^k, \quad 0 \leq q^k \leq 14, \quad k = 1, \dots, 11.$$

Tres firmas deciden sus ubicaciones en ambos escenarios, adelantando la posterior competencia en cantidades con conjeturas nulas en una segunda etapa. No se consideran costes fijos,  $F_i = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ , y los costes marginales son

$$C'_i(x_i) = 1, \quad \forall x_i \in T, \quad i = 1, 2, 3.$$

La longitud de cada una de las aristas es de una unidad y el coste de transporte unitario entre dos puntos coincide con la distancia que los separa, es decir,

$$t_i^k(x_i) = \delta_{x_i v_k}.$$

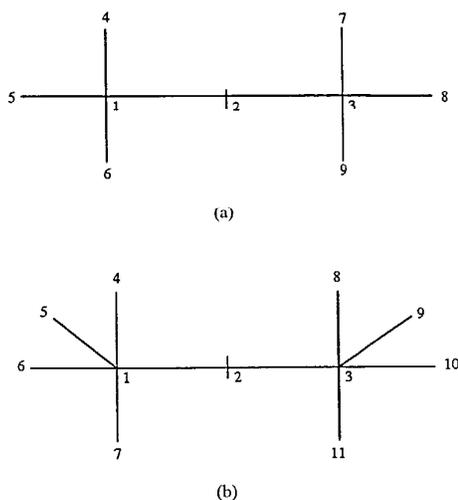


Figura 4.3: Árboles con 9 y 11 nodos

Bajo estos supuestos, se cumplen las condiciones 4.1, 4.2 y 4.7, y en virtud de la proposición 4.5, existen localizaciones de equilibrio para la primera etapa en los nodos de la red. Además, puede comprobarse que ninguna de las firmas se sitúa fuera de los nodos  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$ , por lo que nos restringiremos a estos nodos.

Las tablas 4.3 y 4.4 muestran los beneficios de las firmas en cada terna de nodos. Como puede observarse, en la red 4.3 (a) los únicos equilibrios aparecen cuando las tres firmas se localizan en nodos diferentes, es decir, cuando existe dispersión entre las firmas. Los beneficios asociados a los 6 equilibrios se indican en **negrita**. Sin embargo, como puede comprobarse, en la red 4.3 (b) ninguna firma se sitúa en la mediana, que corresponde al nodo  $v_2$ , por lo que los únicos equilibrios aparecen cuando dos de las firmas se sitúan en el nodo 1 y la tercera en el nodo  $v_3$ , o viceversa, es decir, dos de ellas se ubican en  $v_3$  y la restante en  $v_1$ . Los beneficios asociados a los 6 equilibrios se indican nuevamente en **negrita**.

$x_3$		$v_1$			$v_2$			$v_3$		
$x_1$	$x_2$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_1$	$v_2$	$v_3$
$v_1$		72.9	72.9	76.9	72.9	74.1	78.9	76.9	78.9	84.9
		72.9	79.4	84.9	72.9	76.1	78.9	76.9	77.4	76.9
		72.9	72.9	76.9	79.4	76.1	77.4	84.9	78.9	76.9
$v_2$		79.4	76.1	77.4	76.1	73.9	76.1	77.4	76.1	79.4
		72.9	76.1	78.9	74.1	73.9	74.1	78.9	76.1	72.9
		72.9	74.1	78.9	76.1	73.9	76.1	78.9	74.1	72.9
$v_3$		84.9	78.9	76.9	78.9	74.1	72.9	76.9	72.9	72.8
		76.9	77.4	76.9	78.9	76.1	72.9	84.9	79.4	72.8
		76.9	78.9	84.9	77.4	76.1	79.4	76.9	72.9	72.8

Tabla 4.3: Beneficio de las firmas (en columnas) en  $v_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , en la figura 4.3 (a)

### 4.5.2 Equilibrio localización-precio

Como se indicó en el epígrafe 4.3, cuando las firmas oligopolísticas compiten en precios y la demanda es totalmente inelástica, bajo la condición 4.1 existe un equilibrio de Nash para la primera etapa en los nodos de la red. Sin embargo, la existencia de equilibrio no está asegurada en el problema de captura máxima cuando el número de firmas es superior a dos. En este ejemplo se presenta una situación donde se pone de manifiesto esta circunstancia.

Se considera el árbol de la figura 4.4. Tres firmas deciden sus ubicaciones en esta red adelantando la posterior competencia en precios en la segunda etapa. No se consideran costes fijos,  $F_i = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ , y los costes marginales son

$$C'_i(x_i) = 1, \forall x_i \in T, i = 1, 2, 3.$$

La longitud de cada una de las aristas es de una unidad y el coste de transporte unitario viene dado por

$$t_i^k(x_i) = \delta_{x_i v_k}.$$

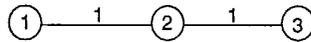


Figura 4.4: Árbol con  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$

$x_3$		$v_1$			$v_2$			$v_3$		
$x_1$	$x_2$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_1$	$v_2$	$v_3$
$v_1$		88.1	88.6	<b>93.1</b>	88.6	90.4	96.1	<b>93.1</b>	96.1	<b>103</b>
		88.1	95.1	<b>103</b>	88.6	91.4	96.1	<b>93.1</b>	92.6	<b>93.1</b>
		88.1	88.6	<b>93.1</b>	95.1	91.4	92.6	<b>103</b>	96.1	<b>93.1</b>
$v_2$		95.1	91.4	92.6	91.4	89.1	91.4	92.6	91.4	95.1
		88.6	91.4	96.1	90.4	89.1	90.4	96.1	91.4	88.6
		88.6	90.4	96.1	91.4	89.1	91.4	96.1	90.4	88.6
$v_3$		<b>103</b>	96.1	<b>93.1</b>	96.1	90.4	88.6	<b>93.1</b>	88.6	88.1
		<b>93.1</b>	92.6	<b>93.1</b>	96.1	91.4	88.6	<b>103</b>	95.1	88.1
		<b>93.1</b>	96.1	<b>103</b>	92.6	91.4	95.1	<b>93.1</b>	88.6	88.1

Tabla 4.4: Beneficio de las firmas (en columnas) en  $v_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , en la figura 4.3 (b)

$x_3$		$v_1$			$v_2$			$v_3$		
$x_1$	$x_2$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_1$	$v_2$	$v_3$
$v_1$		10	7	6	7	7	5	6	5	6
$v_2$		7	7	5	7	9	7	5	7	7
$v_3$		6	5	6	5	7	7	6	7	10

Tabla 4.5: Coste social en los vértices de la figura 4.4

Aplicando las proposiciones 4.10 y 4.11, existe un equilibrio en los nodos de este árbol, por lo que restringiremos su búsqueda a los vértices.

En la tabla 4.5 se muestra el coste social correspondiente a cada terna de vértices. Como puede observarse, el coste social es mínimo cuando las localizaciones de las tres firmas son diferentes (se muestra en negrita), por lo que cualquier distribución de las firmas en vértices diferentes constituye un equilibrio de Nash. Existe, por tanto, dispersión espacial entre las firmas.

Por otro lado, la tabla 4.6 muestra las demandas captadas por las firmas en cada terna de nodos, suponiendo que cada una captura la demanda más próxima (se están asumiendo precios fijados e iguales); si hay más de una firma a la misma distancia de un nodo de demanda, ésta se reparte en partes iguales entre dichas firmas. Como puede observarse, no existe equilibrio de Nash.

$x_3$		$v_1$			$v_2$			$v_3$		
$x_1$	$x_2$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_1$	$v_2$	$v_3$
$v_1$		1.66	1	1.33	1	2	2	1.33	2	2.33
		1.66	3	2.33	1	1.5	2	1.33	1	1.33
		1.66	1	1.33	3	1.5	1	2.33	2	1.33
$v_2$		3	1.5	1	1.5	1.66	1.5	1	1.5	3
		1	1.5	2	2	1.66	2	2	1.5	1
		1	2	2	1.5	1.66	1.5	2	2	1
$v_3$		2.33	2	1.33	2	2	1	1.33	1	1.66
		1.33	1	1.33	2	1.5	1	2.33	3	1.66
		1.33	2	2.33	1	1.5	3	1.33	1	1.66

Tabla 4.6: Demanda captada por las firmas (en columnas) en los vértices de la figura 4.4

## Capítulo 5

# Juego espacial duopolístico con externalidades

Cuando cada consumidor o usuario sufre los efectos de las acciones de los demás, se dice que existe externalidad en el mercado. En estos casos, además del precio y el coste de transporte, los consumidores deben tener en cuenta un coste asociado al efecto de la externalidad. Como consecuencia, cuando los precios que fijan las empresas coinciden, no siempre es la asignación al centro de servicio más próximo la que proporciona el coste mínimo.

Kohlberg (1983) modifica el modelo de Hotelling con el fin de evitar la discontinuidad de las funciones de pago en un juego donde las estrategias son las localizaciones en un intervalo. No tiene en cuenta el precio del producto, lo que equivale a considerarlo fijo e igual para todas las firmas. Considera que el tiempo de espera es una función creciente de la cuota de mercado, y suponiendo que el consumidor elige el centro de servicio minimizando el tiempo de transporte más el tiempo de espera, demuestra que las cuotas de mercado son funciones continuas de las localizaciones y que no existe equilibrio para  $\tau > 2$ , siendo  $\tau$  el número de firmas. Cuando sólo se considera tiempo de transporte, el equilibrio existe para  $\tau \neq 3$  (Eaton y Lypsey, 1974).

Brandeau y Chiu (1994a, 1994b) introducen un coste de externalidad para servicios privados y públicos en un problema en redes, considerando que los consumidores minimizan la suma de los tiempos de desplazamiento y de espera en el servicio. Estos autores asumen que los precios no intervienen en el proceso de decisión. Sin embargo, esta suposición sólo se sostiene en el caso de servicios públicos o servicios privados donde el precio está fijado y coincide entre firmas. Consideran servicios con capacidades y funciones de externalidad convexas, crecientes y tendiendo a infinito cuando la utilización del servicio se aproxima a su capacidad. En el caso de servicios privados (1994a), dos firmas

maximizadoras de su cuota de mercado deciden sus localizaciones según un juego de Stackelberg. Prueban que las decisiones de los usuarios en equilibrio son únicas y, por tanto, que la cuota de mercado en equilibrio también es única. En el caso de servicios públicos (1994b), se localizan  $r$  centros de servicio de manera que se minimice el coste social, que es el tiempo agregado de desplazamiento y de espera de la totalidad de los usuarios. Prueban que para costes de externalidad negativos las asignaciones de equilibrio no son en general únicas, aunque la cuota de mercado sí lo es. Cuando el número de centros públicos es dos, las asignaciones de equilibrio son únicas. En ambos trabajos, para el estudio de las localizaciones se particulariza el problema en árboles con demanda nodal.

En este capítulo, se estudia un problema de competencia espacial con externalidades en redes, incorporando el precio como variable de decisión. Aparte del precio, la principal diferencia respecto a los trabajos anteriores de Brandeau y Chiu radica en el estudio de costes en lugar de tiempos. Se consideran precios en origen y dos posibles escenarios. En el primero, los usuarios toman las decisiones conjuntamente o bien un regulador asigna las demandas a los servicios con el fin de minimizar el coste agregado y obtener un óptimo de Pareto en las asignaciones. En el segundo escenario, los usuarios toman sus decisiones individualmente con el fin de minimizar sus costes, obteniendo así un equilibrio de Nash. Al igual que en los capítulos anteriores, el proceso de competencia se modela como un juego en dos etapas; en la primera, las firmas eligen las localizaciones y, a partir de éstas, fijan simultáneamente los precios en la segunda etapa, de acuerdo con los dos escenarios descritos con anterioridad.

El equilibrio de Nash en asignaciones es una solución razonable para servicios privados, mientras que el óptimo de Pareto se adapta mejor a servicios públicos. Un ejemplo del primer equilibrio puede encontrarse en el servicio de restauración de comida rápida. Supongamos dos firmas que compiten decidiendo las ubicaciones de sus restaurantes y los precios de sus comidas. Evidentemente, los usuarios consideran, además de los costes de desplazamiento y las tarifas establecidas, el tiempo de espera para ser atendido, al cual se le puede asociar un valor monetario. Un ejemplo del segundo escenario puede encontrarse en el servicio público de salud. Ciertas clínicas privadas realizan intervenciones costeadas por el servicio público de salud, cuya finalidad es la reducción de las listas de espera en ciertas especialidades. En este caso, el objetivo de la administración es la minimización del coste agregado.

En los últimos años ha tomado gran importancia el problema de la contaminación y, en particular, el de la eliminación de los residuos. La comisión europea obliga a que los países miembros eliminen una parte de los residuos que producen, sancionando con importantes cantidades a aquellos que incumplen ciertas cuotas que dependen del tipo de residuo. La formulación del problema de localización, incorporando costes de externalidad además del

precio unitario del servicio, se ajusta a ciertos sistemas de gestión de residuos en los que se penaliza (penalización impuesta por la administración) la emisión de contaminación en los procesos de tratamiento, con la imposición de un coste económico dependiente de la cantidad de material tratado (considérese, por ejemplo, una planta de incineración), coste que las empresas (plantas de tratamiento) trasladan a sus clientes (generadores de los residuos).

El resto del capítulo está estructurado en 3 apartados. En el primero se formula el modelo, introduciendo la notación y los supuestos comunes a ambos escenarios. En el segundo se asumen decisiones conjuntas de los usuarios y en el tercero decisiones individuales.

## 5.1 Formulación general

Dos firmas,  $A$  y  $B$ , desean establecer un centro de servicio en un mercado donde no existen firmas competidoras. El mercado está representado por una red no dirigida y conexa  $N(V, E)$ , donde  $V$  es el conjunto de nodos de la red y  $E$  es el conjunto de aristas. Cada firma decide su ubicación en la red,  $x_i$ , y el precio en origen,  $p_i$ , que maximice su beneficio,  $i = A, B$ . La demanda en el nodo  $k$ ,  $\lambda_k \geq 0$ , es totalmente inelástica respecto del precio,  $k = 1, \dots, n$ . Sea

$$V_D = \{v_k \in V : \lambda_k > 0\}, \quad n = |V_D|.$$

La demanda total es  $\Lambda = \sum_{k=1}^n \lambda_k$ .

Tanto  $C'_i$  como  $F_i$  no dependen de la localización,  $i = A, B$ . La función de beneficios para la firma  $i$  se puede expresar como

$$\pi_i(x_A, x_B, p_A, p_B) = \{p_i(x_A, x_B, p_j) - C'_i\} \Lambda_i(x_A, x_B, p_A, p_B) - F_i,$$

donde  $\Lambda_i$  es la cuota de mercado captada por la firma  $i$ ,  $i, j = A, B$ ;  $j \neq i$ . Se asume que la demanda del mercado es satisfecha totalmente, es decir,  $\Lambda = \Lambda_A + \Lambda_B$ . Para simplificar la notación, en lo sucesivo se omitirán los argumentos de las funciones cuota de mercado y precio.

El coste de los usuarios en  $v_k$  viene dado por

$$C_k(x_A, x_B, p_A, p_B, \lambda_{kA}, \lambda_{kB}) = \sum_{i=A,B} \lambda_{ki}(p_i + t_k(x_i) + E_i(\Lambda_i)),$$

donde  $\lambda_{ki}$  es la parte de la demanda del nodo  $k$  que es asignada a la firma  $i$ ,  $i = A, B$ . Dado que la demanda ha de cubrirse en su totalidad, se tiene que  $\lambda_k = \lambda_{kA} + \lambda_{kB}$ , siendo  $\lambda_{ki} \geq 0$ ,  $i = A, B$ . El término  $t_k(x) \geq 0$  representa el coste de transporte de una unidad de demanda entre el nodo  $v_k$  y la localización  $x$ , y es una función creciente de la distancia  $t_k(x) = t(\delta(v_k, x))$ . En lo sucesivo,

cuando una localización esté fija se empleará la notación  $t_{ki} = t_k(x_i)$ . Los costes de externalidad unitarios,  $E_i(\Lambda_i)$ , son funciones definidas en  $[0, M)$ ,  $M > \Lambda$ , de clase  $C^{(1)}$ , positivas, estrictamente crecientes y convexas de la cuota de mercado captada. Obsérvese que, como  $\Lambda_A = \Lambda - \Lambda_B$ , se cumple que  $E_A$  ( $E_B$ ) es decreciente en  $\Lambda_B$  ( $\Lambda_A$ ).

## 5.2 Equilibrio localización-precio con asignación de Pareto

Supóngase la existencia de un agente regulador en el mercado que asigna la demanda a los centros de servicio, minimizando los costes agregados para obtener un óptimo de Pareto. En primer lugar, se estudiarán las asignaciones de equilibrio óptimas de Pareto. En segundo lugar, se tratará el equilibrio localización-precio para el caso  $n = 1$  y, con posterioridad, se generalizará para el caso  $n > 1$ . Finalmente, se desarrollarán algunas extensiones y se mostrará un ejemplo.

### 5.2.1 Asignaciones óptimas de Pareto

Dadas las localizaciones y los precios, el coste agregado viene dado por

$$C(\lambda_A, \lambda_B) = \sum_{k=1}^n C_k(\lambda_{kA}, \lambda_{kB}),$$

siendo  $\lambda_i = (\lambda_{1i}, \dots, \lambda_{ni})$  las asignaciones de la demanda al servicio  $i$ ,  $i = A, B$ .

Entonces, el problema a resolver es el siguiente:

$$\begin{aligned} & \min C(\lambda_A, \lambda_B) \\ \text{s.a.} \quad & \lambda_k = \lambda_{kA} + \lambda_{kB}, \quad k = 1, \dots, n, \\ & \lambda_{kA}, \lambda_{kB} \geq 0, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Sustituyendo  $\lambda_{kB}$  por  $\lambda_k - \lambda_{kA}$  en la función objetivo y teniendo en cuenta que  $\Lambda = \Lambda_A + \Lambda_B$ , se tiene

$$\begin{aligned} C(\lambda_A) &= \sum_{k=1}^n \lambda_{kA} (p_A + t_{kA} + E_A(\Lambda_A)) \\ &+ \sum_{k=1}^n (\lambda_k - \lambda_{kA}) (p_B + t_{kB} + E_B(\Lambda - \Lambda_A)) \end{aligned}$$

y el problema de las asignaciones es

$$\min C(\lambda_A) \text{ sujeto a } 0 \leq \lambda_{kA} \leq \lambda_k, k = 1, \dots, n.$$

**Lema 5.1** Si la función  $f : \mathfrak{R}_+^0 \rightarrow \mathfrak{R}$  es positiva, estrictamente creciente y convexa, entonces la función  $g : \mathfrak{R}_+^0 \rightarrow \mathfrak{R}$  definida como  $g(x) = xf(x)$  es estrictamente convexa en

$$\mathfrak{R}_+^0 = \{x \in \mathfrak{R} : x \geq 0\}.$$

**Demostración** Sean  $\mu \in (0, 1)$ ,  $x, y \in \mathfrak{R}_+^0$ ,  $x < y$ . Entonces, por ser  $f$  convexa y  $(1 - \mu)x + \mu y \geq 0$ , se satisface que

$$g((1 - \mu)x + \mu y) \leq [(1 - \mu)x + \mu y] [(1 - \mu)f(x) + \mu f(y)].$$

El segundo miembro de la desigualdad puede escribirse de la siguiente manera

$$(1 - \mu)xf(x) + \mu yf(y) + (1 - \mu)\mu [f(y) - f(x)](x - y),$$

expresión que es estrictamente menor que  $(1 - \mu)g(x) + \mu g(y)$  al ser  $f$  estrictamente creciente<sup>1</sup>. Luego

$$g((1 - \mu)x + \mu y) < (1 - \mu)g(x) + \mu g(y).$$

Por tanto,  $g(x)$  es estrictamente convexa.  $\square$

**Lema 5.2** Si las funciones  $E_i$ ,  $i = A, B$ , son positivas, estrictamente crecientes y convexas, entonces la función  $C(\lambda_A)$  es estrictamente convexa.

**Demostración** Obsérvese que

$$\begin{aligned} C(\lambda_A) &= \sum_{k=1}^n \{\lambda_{kA}(p_A + t_{kA}) + (\lambda_k - \lambda_{kA})(p_B + t_{kB})\} \\ &\quad + \Lambda_A E_A(\Lambda_A) + (\Lambda - \Lambda_A) E_B(\Lambda - \Lambda_A) \end{aligned}$$

es la suma de una función lineal y las funciones

$$F(\lambda_A) = \Lambda_A E_A(\Lambda_A),$$

$$G(\lambda_A) = (\Lambda - \Lambda_A) E_B(\Lambda - \Lambda_A).$$

<sup>1</sup> en cuyo caso  $(1 - \mu)\mu [f(y) - f(x)](x - y) < 0$

La función  $F$  es la composición  $F(\lambda_A) = (g \circ f)(\lambda_A)$  donde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $f(\lambda_A) = \sum_{k=1}^n \lambda_{kA}$  y  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $g(x) = xE(x)$ . La función  $f$  es lineal y  $g$  es, por el lema 5.1, estrictamente convexa, por tanto  $g \circ f$  es estrictamente convexa. De forma similar,  $G$  es también estrictamente convexa. Entonces,  $C$  es estrictamente convexa por ser suma de funciones convexas y estrictamente convexas.  $\square$

**Proposición 5.1** *Si las funciones  $E_i, i = A, B$ , son positivas, estrictamente crecientes y convexas, entonces el problema de las asignaciones*

$$\min C(\lambda_A) \quad \text{sujeito a} \quad 0 \leq \lambda_{kA} \leq \lambda_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

*tiene una única solución óptima y el óptimo es global.*

**Demostración** Se deduce directamente de la continuidad y convexidad estricta de la función objetivo garantizada por el lema 5.2, junto con la convexidad y compacidad del conjunto factible.  $\square$

Por tanto, bajo las hipótesis de la proposición anterior, la cuota de mercado óptima es única. Con el fin de deducir explícitamente su expresión, consideremos la siguiente notación. Sea

$$\Delta_k = t_{kB} + p_B - t_{kA} - p_A, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$\Delta_0 = +\infty, \quad \Delta_{n+1} = -\infty.$$

Sin pérdida de generalidad, puede asumirse que

$$\Delta_n < \Delta_{n-1} < \dots < \Delta_2 < \Delta_1.$$

Si  $\Delta_k = \Delta_{k+1}$  los nodos de demanda  $k$  y  $k+1$  son agregados. Finalmente, sea

$$f_j = \sum_{k=1}^j \lambda_k, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad f_0 = 0.$$

El siguiente resultado expresa las asignaciones de Pareto en función de la cuota de mercado.

**Proposición 5.2** Sean las funciones  $E_i$ ,  $i = A, B$ , positivas, estrictamente crecientes y convexas. Si  $\bar{q} = \bar{\Lambda}_A$  es la cuota de mercado óptima de Pareto de la firma A ( $\bar{\Lambda}_B = \Lambda - \bar{q}$ ), entonces existe  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  tal que

$$f_{j-1} \leq \bar{q} \leq f_j$$

y la asignación óptima de Pareto,  $\bar{\lambda}_A$  y  $\bar{\lambda}_B$ , es

$$\bar{\lambda}_{kA} = \lambda_k, \quad 1 \leq k \leq j-1,$$

$$\bar{\lambda}_{jA} = \bar{q} - f_{j-1},$$

$$\bar{\lambda}_{kA} = 0, \quad k > j,$$

$$\bar{\lambda}_{kB} = \lambda_k - \bar{\lambda}_{kA}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

**Demostración** Como  $\bar{q} \in [0, \Lambda]$  y  $\{f_j\}_{j=0}^n$  es una partición de  $[0, \Lambda]$ , existe  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  tal que  $\bar{q} \in [f_{j-1}, f_j]$ . Se probará que cualquier asignación distinta de  $\bar{\lambda}_A$  no es óptima. Sea  $\lambda_A^0 = (\lambda_{1A}^0, \lambda_{2A}^0, \dots, \lambda_{nA}^0)$  una asignación,  $\bar{\lambda}_A \neq \lambda_A^0$ . Como  $\bar{\lambda}_A \neq \lambda_A^0$ , existirán

$$r \in \{1, \dots, j\}, \quad s \in \{j, \dots, n\}, \quad r < s,$$

tales que  $\bar{\lambda}_{rA} > \lambda_{rA}^0$  y  $\bar{\lambda}_{sB} > \lambda_{sB}^0$ . Sea

$$\alpha = \min\{\bar{\lambda}_{rA} - \lambda_{rA}^0, \bar{\lambda}_{sB} - \lambda_{sB}^0\}$$

y considérese la asignación  $\lambda_A^1$  definida como

$$\lambda_{kA}^1 = \lambda_{kA}^0, \quad \forall k \neq r, s,$$

$$\lambda_{rA}^1 = \lambda_{rA}^0 + \alpha,$$

$$\lambda_{sA}^1 = \lambda_{sA}^0 - \alpha.$$

Sean  $C^0$  y  $C^1$  el coste para las asignaciones  $\lambda_A^0$  y  $\lambda_A^1$  respectivamente. Entonces,

$$C^1 = C^0 + \alpha(\Delta_s - \Delta_r) < C^0.$$

De la desigualdad anterior se sigue que  $\lambda_A^0$  no es óptima. Entonces, dado que existe asignación óptima (proposición 5.1), ésta tendrá que ser  $\bar{\lambda}_A$ .  $\square$

**Proposición 5.3** Sean las funciones  $E_i$ ,  $i = A, B$ , de clase  $C^{(1)}$ , positivas, estrictamente crecientes y convexas. Entonces, la cuota de mercado óptima de Pareto de la firma A es

$$\begin{cases} \bar{q} = f_j, & \text{si } \Delta_{j+1} \leq \frac{d}{dq}(CE_{total}(q)) \Big|_{f_j} \leq \Delta_j \text{ con } j \in \{0, 1, \dots, n\}, \\ f_{j-1} < \bar{q} < f_j, & \text{si } \frac{d}{dq}(CE_{total}(q)) \Big|_{\bar{q}} = \Delta_j \text{ con } j \in \{1, \dots, n\}, \end{cases}$$

donde  $CE_{total}(q) = qE_A(q) + (\Lambda - q)E_B(\Lambda - q)$  y  $\frac{d}{dx}(g(x)) \Big|_{x_0} = g'(x_0)$ .

**Demostración** Las condiciones necesarias y suficientes de Karush-Kuhn-Tucker del problema de las asignaciones de Pareto son:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dq}(CE_{total}(q)) - \Delta_k + \mu_k &\geq 0, & k = 1, \dots, n, \\ \left[ \frac{d}{dq}(CE_{total}(q)) - \Delta_k + \mu_k \right] \lambda_{kA} &= 0, & k = 1, \dots, n, \\ \mu_k(\lambda_k - \lambda_{kA}) &= 0, & k = 1, \dots, n, \\ \mu_k &\geq 0, & k = 1, \dots, n, \\ 0 &\leq \lambda_{kA} \leq \lambda_k, & k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Entonces, puede ocurrir uno de los siguientes casos:

(a)  $\bar{q} = 0$ .

Si  $\bar{q} = 0$ , entonces  $\bar{\lambda}_{kA} = 0$ ,  $k = 1, \dots, n$ . De las condiciones de KKT se deduce que

$$\mu_k = 0 \frac{d}{dq} \text{ y } (CE_{total}(q)) \Big|_0 - \Delta_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \bar{q} = 0 &\iff \bar{\lambda}_{kA} = 0, \quad k = 1, \dots, n \\ &\iff \frac{d}{dq}(CE_{total}(q)) \Big|_0 \geq \Delta_k, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

(b)  $\bar{q} = \Lambda$ .

Ahora  $\bar{\lambda}_{kA} = \lambda_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , y de las condiciones de KKT,

$$\frac{d}{dq}(CE_{total}(q))|_{\Lambda} - \Delta_k + \mu_k = 0,$$

donde  $\mu_k \geq 0$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Por tanto,

$$\frac{d}{dq}(CE_{total}(q))|_{\Lambda} - \Delta_k \leq 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Entonces,

$$\bar{q} = \Lambda \iff \bar{\lambda}_{kA} = \lambda_k, \quad k = 1, \dots, n$$

$$\iff \frac{d}{dq}(CE_{total}(q))|_{\Lambda} \leq \Delta_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

(c)  $0 < \bar{q} < \Lambda$ .

Si  $0 < \bar{q} < \Lambda$ , entonces existe  $1 \leq j \leq n$  de tal manera que  $f_{j-1} \leq \bar{q} \leq f_j$ . Pueden darse dos posibilidades:

(c.1)  $\bar{q} = f_j$ ,  $j = 1, \dots, n-1$ .

En este caso,

$$\bar{\lambda}_{kA} = \lambda_k, \quad k \leq j$$

$$\bar{\lambda}_{kA} = 0, \quad k > j.$$

Entonces, de las condiciones de KKT se deduce que,

$$\frac{d}{dq}(CE_{total}(q))|_{f_j} - \Delta_k + \mu_k = 0 \quad \text{si } k \leq j,$$

$$\frac{d}{dq}(CE_{total}(q))|_{f_j} - \Delta_k \geq 0 \quad \text{si } k > j.$$

Esto es,

$$\frac{d}{dq}(CE_{total}(q))|_{f_j} \leq \Delta_k \quad \text{si } k \leq j,$$

$$\frac{d}{dq}(CE_{total}(q))|_{f_j} \geq \Delta_k \quad \text{si } k > j.$$

Por tanto,

$$\Delta_{j+1} \leq \frac{d}{dq}(CE_{total}(q))|_{f_j} \leq \Delta_j.$$

(c.2)  $f_{j-1} < \bar{q} < f_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

En este caso,

$$\bar{\lambda}_{kA} = \lambda_k, \quad k \leq j-1,$$

$$\bar{\lambda}_{jA} = \bar{q} - f_{j-1},$$

$$\bar{\lambda}_{kA} = 0, \quad k > j.$$

Entonces, de las condiciones de KKT se deduce que,

$$\frac{d}{dq}(CE_{total}(q))|_{\bar{q}} - \Delta_k + \mu_k = 0 \quad \text{si } k \leq j-1,$$

$$\mu_k = 0 \text{ y } \frac{d}{dq}(CE_{total}(q))|_{\bar{q}} - \Delta_k = 0 \quad \text{si } k = j,$$

$$\mu_k = 0 \text{ y } \frac{d}{dq}(CE_{total}(q))|_{\bar{q}} - \Delta_k \geq 0 \quad \text{si } k > j.$$

Esto es,

$$\frac{d}{dq}(CE_{total}(q))|_{\bar{q}} \leq \Delta_k \quad \text{si } k \leq j-1,$$

$$\frac{d}{dq}(CE_{total}(q))|_{\bar{q}} = \Delta_k \quad \text{si } k = j,$$

$$\frac{d}{dq}(CE_{total}(q))|_{\bar{q}} \geq \Delta_k \quad \text{si } k > j.$$

Es decir,

$$\frac{d}{dq}(CE_{total}(q))|_{\bar{q}} = \Delta_j.$$

De (a), (b) y (c) se obtiene el valor de  $\bar{q}$ . □

La figura 5.1 ilustra el resultado anterior. Nótese que bajo las hipótesis de esta proposición la cuota de mercado óptima es única.

Se ha probado la existencia y unicidad de asignaciones de Pareto y, por tanto, de la cuota de mercado en equilibrio, cuando los costes de externalidad son funciones positivas, estrictamente crecientes y convexas. En particular, si

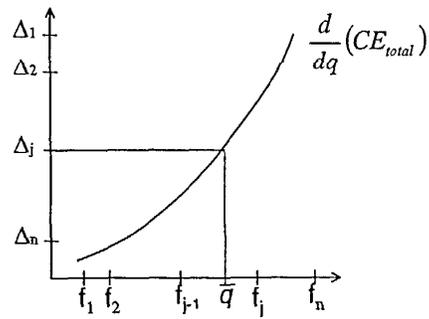
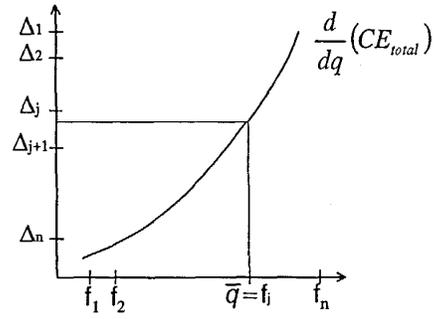


Figura 5.1: Cuota de mercado óptima de Pareto

los costes de externalidad son funciones lineales de la forma  $E_i(q) = e_i q$ , con  $e_i > 0$ ,  $i = A, B$ , tanto las asignaciones óptimas de Pareto como la cuota de mercado de Pareto son únicas. Esta suposición puede parecer poco realista y demasiado simple, sin embargo es una forma de obtener resultados sin que el problema se vuelva intratable (ver Laurent, Peeters y Thomas, 1997). Otras funciones más generales, como las lineales a trozos o cuadráticas, pueden considerarse en futuros trabajos. Las expresiones de las cuotas de mercado óptimas de Pareto se muestran en el corolario 5.1.

**Corolario 5.1** *Si  $E_i(q) = e_i q$ ,  $e_i > 0$ ,  $i = A, B$ , entonces la cuota de mercado óptima de Pareto es*

$$\bar{\Lambda}_A = \begin{cases} \Lambda & \text{si } p_A - p_B \leq L_n \\ \frac{p_B - p_A + t_{jB} - t_{jA} + 2e_B \Lambda}{2(e_A + e_B)} & \text{si } L_j < p_A - p_B < T_{j-1}, j = 1, \dots, n \\ f_j & \text{si } T_j \leq p_A - p_B \leq L_j, j = 1, \dots, n-1 \\ 0 & \text{si } p_A - p_B \geq T_0 \end{cases}$$

y  $\bar{\Lambda}_B = \Lambda - \bar{\Lambda}_A$ , donde

$$L_j = t_{jD} - t_{jA} + 2e_D \Lambda - 2(e_A + e_B) f_j, j = 1, \dots, n,$$

$$T_{j-1} = t_{jB} - t_{jA} + 2e_B \Lambda - 2(e_A + e_B) f_{j-1}, j = 1, \dots, n.$$

Además, si  $L_j < p_A - p_B < T_{j-1}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , se cumple que

$$f_{j-1} < \bar{\Lambda}_A < f_j \quad \text{y} \quad \Lambda - f_j < \bar{\Lambda}_B < \Lambda - f_{j-1}.$$

**Demostración** Como consecuencia de la proposición 5.3 se tiene

$$\bar{\Lambda}_A = \begin{cases} f_j & \text{si } \frac{\Delta_{j+1} + 2e_B \Lambda}{2(e_A + e_B)} \leq f_j \leq \frac{\Delta_j + 2e_B \Lambda}{2(e_A + e_B)} \text{ con } j \in \{0, 1, \dots, n\} \\ \frac{\Delta_j + 2e_B \Lambda}{2(e_A + e_B)} & \text{si } f_{j-1} < \frac{\Delta_j + 2e_B \Lambda}{2(e_A + e_B)} < f_j \text{ con } j \in \{1, \dots, n\} \end{cases}$$

expresión de la que se deduce este corolario. Si  $L_j < p_A - p_B < T_{j-1}$  entonces

$$\bar{\Lambda}_A = \frac{p_B - p_A + t_{jB} - t_{jA} + 2e_B \Lambda}{2(e_A + e_B)}.$$

Como  $p_B - p_A > -T_{j-1}$ , se tiene

$$\bar{\lambda}_A > \frac{-T_{j-1} + t_{jB} - t_{jA} + 2e_B\Lambda}{2(e_A + e_B)} = f_{j-1}.$$

De forma análoga, como  $p_B - p_A < -L_j$ , entonces

$$\bar{\lambda}_A < \frac{-L_j + t_{jB} - t_{jA} + 2e_B\Lambda}{2(e_A + e_B)} = f_j.$$

□

Obsérvese que

$$L_n < T_{n-1} < L_{n-1} < \dots < T_j < L_j < T_{j-1} < L_{j-1} < \dots < T_1 < L_1 < T_0.$$

Además,  $\bar{\lambda}_A$  y  $\bar{\lambda}_B$  son funciones continuas de  $(p_A, p_B)$  y, por tanto, también lo serán las funciones de beneficio. La figura 5.2 representa dichas cuotas de mercado.

En las siguientes secciones se estudia el problema del equilibrio localización-precio para funciones de externalidad lineales. En primer lugar se analizará el caso  $n = 1$  y con posterioridad se extenderán los resultados al caso  $n > 1$ .

## 5.2.2 Equilibrio localización-precio para $n = 1$

### 5.2.2.1 Precios de equilibrio

Suponiendo localizaciones dadas y denotando  $t_{BA} = t_{1B} - t_{1A}$ , las cuotas de mercado óptimas de Pareto son

$$\bar{\lambda}_A = \begin{cases} \Lambda & \text{si } p_A - p_B \leq L_1 \\ \frac{p_B - p_A + t_{BA} + 2e_B\Lambda}{2(e_A + e_B)} & \text{si } L_1 < p_A - p_B < T_0 \\ 0 & \text{si } p_A - p_B \geq T_0 \end{cases}$$

y  $\bar{\lambda}_B = \Lambda - \bar{\lambda}_A$ , donde  $L_1 = t_{BA} - 2e_A\Lambda$  y  $T_0 = t_{BA} + 2e_B\Lambda$ .

Sin pérdida de generalidad y por simplicidad, se considera que  $F_A = F_B = 0$ .

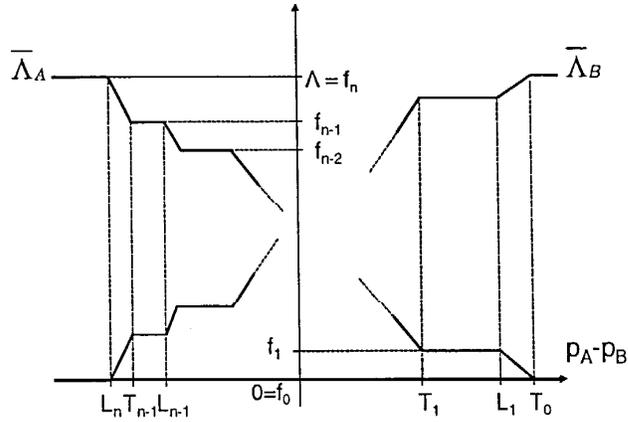


Figura 5.2: Cuotas de mercado en equilibrio

Entonces, la función de beneficio  $\pi(p_A, p_B) = (\pi_A(p_A, p_B), \pi_B(p_A, p_B))$  es

$$\begin{cases} ((p_A - C'_A)\Lambda, 0) & \text{si } (p_A, p_B) \in S_1 \\ \left( (p_A - C'_A) \left( \frac{p_B - p_A + t_{n-1}\Lambda + 2e_n\Lambda}{2(e_A + e_B)} \right), \right. \\ \quad \left. (p_B - C'_B) \left( \frac{p_A - p_B - t_{n-1}\Lambda + 2e_A\Lambda}{2(e_A + e_B)} \right) \right) & \text{si } (p_A, p_B) \in R_1 - (S_1 \cup S_0) \\ (0, (p_B - C'_B)\Lambda) & \text{si } (p_A, p_B) \in S_0, \end{cases}$$

donde

$$\mathfrak{S} = \{(p_A, p_B) \in \mathbb{R}^2 : p_A \geq C'_A, p_B \geq C'_B\},$$

$$S_1 = \mathfrak{S} \cap \{(p_A, p_B) \in \mathbb{R}^2 : p_A - p_B \leq L_1\},$$

$$R_1 = \mathfrak{S} \cap \{(p_A, p_B) \in \mathbb{R}^2 : L_1 \leq p_A - p_B \leq T_0\},$$

$$S_0 = \mathfrak{S} \cap \{(p_A, p_B) \in \mathbb{R}^2 : p_A - p_B \geq T_0\}.$$

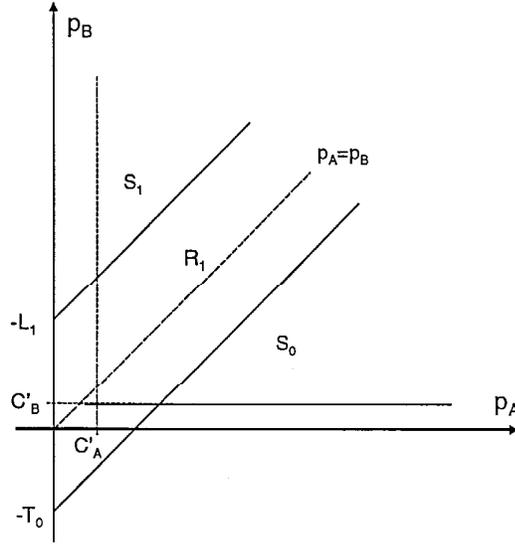


Figura 5.3: Regiones de definición del beneficio cuando  $n = 1$

El conjunto de interés

$$\mathfrak{S} = S_1 \cup R_1 \cup S_0 = [C'_A, +\infty) \times [C'_B, +\infty)$$

está representado en la figura 5.3. Puede comprobarse que  $\pi = (\pi_A, \pi_B)$  es continua en  $\mathfrak{S}$ . Además, fijado  $p_B$ , la función  $\pi_A(p_A | p_B)$  es cuasicóncava respecto de  $p_A$ . De forma similar ocurre con  $\pi_B(p_B | p_A)$ .

Sea  $r_{|C}(p_A, p_B) = (r_{A|C}(p_B), r_{B|C}(p_A))$  la función de mejor respuesta en un conjunto  $C \subseteq \mathbb{R}^2$ , es decir

$$r_{A|C}(p_B) = \left\{ p^* : (p^*, p_B) \in C, \pi_A(p^*, p_B) = \max_{(p, p_B) \in C} \pi_A(p, p_B) \right\},$$

$$r_{B|C}(p_A) = \left\{ p^* : (p_A, p^*) \in C, \pi_B(p_A, p^*) = \max_{(p_A, p) \in C} \pi_B(p_A, p) \right\}.$$

Cuando la mejor respuesta sea única se escribirá indistintamente

$$r_{A|C}(p_B) = \{p^*\} \text{ o } r_{A|C}(p_B) = p^*.$$

De forma análoga con la firma B.

**Proposición 5.4** Si  $n=1$  y los costes de externalidad son lineales, entonces las funciones de mejor respuesta son

$$\begin{aligned}
 r_{A|S_1}(p_B) &= p_B + L_1, \\
 r_{B|S_1}(p_A) &= \{p : p_A - p \leq L_1\}, \\
 r_{A|S_0}(p_B) &= \{p : p - p_B \geq T_0\}, \\
 r_{B|S_0}(p_A) &= p_A - T_0, \\
 r_{A|R_1}(p_B) &= \\
 &\begin{cases} C'_A & \text{si } p_B \leq -2T_0 + C'_A + t_{BA} + 2e_B\Lambda \\ \frac{1}{2}(p_B + C'_A + t_{BA} + 2e_B\Lambda) & \text{si } \begin{matrix} -2T_0 + C'_A + t_{BA} + 2e_B\Lambda < p_B \\ < -2L_1 + C'_A + t_{BA} + 2e_B\Lambda \end{matrix} \\ p_B + L_1 & \text{si } p_B \geq -2L_1 + C'_A + t_{BA} + 2e_B\Lambda, \end{cases} \\
 r_{B|R_1}(p_A) &= \\
 &\begin{cases} C'_B & \text{si } p_A \leq 2L_1 + C'_B - t_{BA} + 2e_A\Lambda \\ \frac{1}{2}(p_A + C'_B - t_{BA} + 2e_A\Lambda) & \text{si } \begin{matrix} 2L_1 + C'_B - t_{BA} + 2e_A\Lambda < p_A \\ < 2T_0 + C'_B - t_{BA} + 2e_A\Lambda \end{matrix} \\ p_A - T_0 & \text{si } p_A \geq 2T_0 + C'_B - t_{BA} + 2e_A\Lambda. \end{cases}
 \end{aligned}$$

**Demostración** La función de beneficio de la firma A es

$$\pi_A(p_A, p_B) = \begin{cases} (p_A - C'_A)\Lambda & \text{si } p_A - p_B \leq L_1 \text{ y } p_A \geq C'_A \\ (p_A - C'_A) \left( \frac{p_B - p_A + t_{BA} + 2e_B\Lambda}{2(e_A + e_B)} \right) & \text{si } \begin{matrix} L_1 < p_A - p_B < T_0 \\ \text{y } p_A \geq C'_A \end{matrix} \\ 0 & \text{en el resto de los casos.} \end{cases}$$

Dado que  $\pi_{A|S_1}(p_A, p_B) = (p_A - C'_A)\Lambda$  y  $\pi_{A|S_0}(p_A, p_B) = 0$ , entonces

$$r_{A|S_1}(p_B) = p_B + L_1 \quad \text{y} \quad r_{A|S_0}(p_B) = \{p : p - p_B \geq T_0\}.$$

Sea

$$\varphi(p_A) = (p_A - C'_A) \left( \frac{p_B - p_A + t_{BA} + 2e_B\Lambda}{2(e_A + e_B)} \right).$$

Entonces,

$$\varphi'(p_A) = 0 \iff p_A = \frac{1}{2}(p_B + C'_A + t_{BA} + 2e_B\Lambda).$$

Si

$$p_A^* = \frac{1}{2}(p_B + C'_A + t_{BA} + 2e_B\Lambda),$$

se tiene que  $L_1 < p_A^* - p_B < T_0$  si y sólo si

$$-2T_0 + C'_A + t_{BA} + 2e_B\Lambda < p_B < -2L_1 + C'_A + t_{BA} + 2e_B\Lambda.$$

Además, puede comprobarse que si se da la condición previa, entonces  $p_A^* > C'_A$ . Dado que  $\varphi''(p_A) < 0$ , la función  $\varphi(p_A)$  es cóncava y se cumple que

$$r_{A|R_1}(p_B) =$$

$$\begin{cases} C'_A = \max\{p_B + T_0, C'_A\} & \text{si } p_B \leq -2T_0 + C'_A + t_{BA} + 2e_B\Lambda \\ \frac{1}{2}(p_B + C'_A + t_{BA} + 2e_B\Lambda) & \text{si } \begin{matrix} -2T_0 + C'_A + t_{BA} + 2e_B\Lambda < p_B \\ < -2L_1 + C'_A + t_{BA} + 2e_B\Lambda \end{matrix} \\ p_B + L_1 & \text{si } p_B \geq -2L_1 + C'_A + t_{BA} + 2e_B\Lambda. \end{cases}$$

Puede comprobarse que  $p_B + L_1 \geq C'_A$ . Por otro lado, la función de beneficio de la firma B es

$$\pi_B(p_A, p_B) = \begin{cases} (p_B - C'_B)\Lambda & \text{si } p_A - p_B \geq T_0 \text{ y } p_B \geq C'_B \\ (p_B - C'_B) \left( \frac{p_A - p_B - t_{BA} + 2e_A\Lambda}{2(e_A + e_B)} \right) & \text{si } \begin{matrix} L_1 < p_A - p_B < T_0 \\ \text{y } p_B \geq C'_B \end{matrix} \\ 0 & \text{en el resto de los casos.} \end{cases}$$

Dado que  $\pi_{B_1S_1}(p_A, p_B) = 0$  y  $\pi_{B_1S_0}(p_A, p_B) = (p_B - C'_B)\Lambda$ , entonces

$$r_{B_1S_1}(p_A) = \{p : p_A - p \leq L_1\} \quad \text{y} \quad r_{B_1S_0}(p_A) = p_A - T_0.$$

Sea

$$\psi(p_B) = (p_B - C'_B) \left( \frac{p_A - p_B - t_{BA} + 2e_A\Lambda}{2(e_A + e_B)} \right).$$

Entonces,

$$\psi'(p_B) = 0 \iff p_B = \frac{1}{2}(p_A + C'_B - t_{BA} + 2e_A\Lambda).$$

Si

$$p_B^* = \frac{1}{2}(p_A + C'_B - t_{BA} + 2e_A\Lambda),$$

se tiene que  $L_1 < p_A - p_B^* < T_0$  si y sólo si

$$2L_1 + C'_B - t_{BA} + 2e_A\Lambda < p_A < 2T_0 + C'_B - t_{BA} + 2e_A\Lambda.$$

Puede comprobarse que bajo la condición anterior se cumple que  $p_B^* > C'_B$ . Dado que  $\psi''(p_B) < 0$ , la función  $\psi(p_B)$  es cóncava y

$$r_{B_1R_1}(p_A) =$$

$$\begin{cases} C'_B = \max\{p_A - L_1, C'_B\} & \text{si } p_A \leq 2L_1 + C'_B - t_{BA} + 2e_A\Lambda \\ \frac{1}{2}(p_A + C'_B - t_{BA} + 2e_A\Lambda) & \text{si } 2L_1 + C'_B - t_{BA} + 2e_A\Lambda < p_A < 2T_0 + C'_B - t_{BA} + 2e_A\Lambda \\ p_A - T_0 & \text{si } p_A \geq 2T_0 + C'_B - t_{BA} + 2e_A\Lambda. \end{cases}$$

□

Sustituyendo  $T_0$  y  $L_1$  por su valor, se obtiene la siguiente expresión para las funciones de mejor respuesta:

$$r_{A_1S_1}(p_B) = p_B + t_{BA} - 2e_A\Lambda,$$

$$r_{B_1S_1}(p_A) = \{p : p \geq p_A - t_{BA} + 2e_A\Lambda\},$$

$$\tau_{A|S_0}(p_B) = \{p : p \geq p_B + t_{BA} + 2e_B\Lambda\},$$

$$\tau_{B|S_0}(p_A) = p_A - t_{BA} - 2e_B\Lambda,$$

$$\tau_{A|R_1}(p_B) =$$

$$\begin{cases} C'_A & \text{si } p_B \leq C'_A - t_{BA} - 2e_B\Lambda \\ \frac{1}{2}(p_B + C'_A + t_{BA} + 2e_B\Lambda) & \text{si } C'_A - t_{BA} - 2e_B\Lambda < p_B \\ & < C'_A - t_{BA} + 2(2e_A + e_B)\Lambda \\ p_B + t_{BA} - 2e_A\Lambda & \text{si } p_B \geq C'_A - t_{BA} + 2(2e_A + e_B)\Lambda, \end{cases}$$

$$\tau_{B|R_1}(p_A) =$$

$$\begin{cases} C'_B & \text{si } p_A \leq C'_B + t_{BA} - 2e_A\Lambda \\ \frac{1}{2}(p_A + C'_B - t_{BA} + 2e_A\Lambda) & \text{si } C'_B + t_{BA} - 2e_A\Lambda < p_A \\ & < C'_B + t_{BA} + 2(e_A + 2e_B)\Lambda \\ p_A - t_{BA} - 2e_B\Lambda & \text{si } p_A \geq C'_B + t_{BA} + 2(e_A + 2e_B)\Lambda. \end{cases}$$

**Proposición 5.5** (*equilibrios parciales y locales*) Si  $n=1$  y los costes de externalidad son lineales, entonces:

- (i) Los equilibrios en  $S_1$  son los puntos  $(\bar{p}_A, \bar{p}_B) \in S_1$  tal que  $\bar{p}_A - \bar{p}_B = L_1$ .
- (ii) Los equilibrios en  $S_0$  son los puntos  $(\bar{p}_A, \bar{p}_B) \in S_0$  tal que  $\bar{p}_A - \bar{p}_B = T_0$ .
- (iii) En  $R_1$  existe equilibrio. Además,

(a) Si

$$t_{BA} - 2(2e_A + e_B)\Lambda \leq C'_A - C'_B \leq t_{BA} + 2(e_A + 2e_B)\Lambda,$$

entonces  $(\bar{p}_A, \bar{p}_B)$  es un equilibrio en  $R_1$  con

$$\bar{p}_A = \frac{1}{3}(2C'_A + C'_B + t_{BA} + 2(e_A + 2e_B)\Lambda),$$

$$\bar{p}_B = \frac{1}{3}(C'_A + 2C'_B - t_{BA} + 2(2e_A + e_B)\Lambda).$$

Además, si

$$t_{BA} - 2(2e_A + e_B)\Lambda < C'_A - C'_B < t_{BA} + 2(e_A + 2e_B)\Lambda,$$

entonces  $(\bar{p}_A, \bar{p}_B)$  es un equilibrio local en  $\mathfrak{S}$ .

(b) Si  $C'_A - C'_B < t_{BA} - 2(2e_A + e_B)\Lambda$ , entonces los puntos del conjunto

$$\mathfrak{S} \cap \{(p + L_1, p) : p_1 \leq p \leq p_2\}$$

son de equilibrio, siendo

$$p_1 = C'_A - t_{BA} + 2(2e_A + e_B)\Lambda,$$

$$p_2 = C'_B.$$

(c) Si  $C'_A - C'_B > t_{BA} + 2(e_A + 2e_B)\Lambda$ , entonces los puntos del conjunto

$$\mathfrak{S} \cap \{(p + T_0, p) : p_3 \leq p \leq p_4\}$$

son de equilibrio, siendo

$$p_3 = C'_B + 2(e_A + e_B)\Lambda,$$

$$p_4 = C'_A - t_{BA} + 2(e_A - 2e_B)\Lambda.$$

### Demostración

(i) Sea  $(\bar{p}_A, \bar{p}_B) \in S_1$  tal que  $\bar{p}_A - \bar{p}_B = L_1$ . Se tiene que

$$r_{A|S_1}(\bar{p}_B) = \bar{p}_A,$$

$$\bar{p}_B \in r_{B|S_1}(\bar{p}_A),$$

de donde se deduce que  $(\bar{p}_A, \bar{p}_B)$  es un equilibrio en  $S_1$ . Por otra parte, si  $\bar{p}_A - \bar{p}_B < L_1$  entonces  $(\bar{p}_A, \bar{p}_B)$  no es equilibrio en  $S_1$ . En efecto, si  $\bar{p}_A - \bar{p}_B + h = L_1$ , con  $h > 0$ , entonces  $r_{A|S_1}(\bar{p}_B) = \bar{p}_A + h$  y  $(\bar{p}_A, \bar{p}_B)$  no es equilibrio en  $S_1$ .

(ii) Sea  $(\bar{p}_A, \bar{p}_B) \in S_0$  tal que  $\bar{p}_A - \bar{p}_B = T_0$ . Se tiene que

$$\bar{p}_A \in r_{A|S_0}(\bar{p}_B),$$

$$r_{B|S_0}(\bar{p}_A) = \bar{p}_B,$$

de donde se deduce que  $(\bar{p}_A, \bar{p}_B)$  es un equilibrio en  $S_0$ . Además, puede comprobarse que si  $\bar{p}_A - \bar{p}_B > T_0$  entonces  $(\bar{p}_A, \bar{p}_B)$  no es equilibrio en  $S_0$ .

(iii) (a) Si

$$t_{BA} - 2(2e_A + e_B)\Lambda \leq C'_A - C'_B \leq t_{BA} + 2(e_A + 2e_B)\Lambda,$$

entonces  $L_1 \leq \bar{p}_A - \bar{p}_B \leq T_0$  y, por tanto,  $(\bar{p}_A, \bar{p}_B) \in R_1$ . Además,  $(\bar{p}_A, \bar{p}_B)$  es un punto fijo de  $r = (r_A, r_B)$  ya que es solución del sistema

$$\begin{aligned}\varphi'(p_A) &= 0, \\ \psi'(p_B) &= 0,\end{aligned}$$

donde  $\varphi$  y  $\psi$  fueron definidas en la proposición anterior.

Si

$$t_{BA} - 2(2e_A + e_B)\Lambda < C'_A - C'_B < t_{BA} + 2(e_A + 2e_B)\Lambda,$$

entonces existe un entorno en el que  $(\bar{p}_A, \bar{p}_B)$  es un equilibrio en  $R_1 \subset \mathfrak{S}$ , por lo que  $(\bar{p}_A, \bar{p}_B)$  es un equilibrio local en  $\mathfrak{S}$ .

(b) Si  $C'_A - C'_B < t_{BA} - 2(2e_A + e_B)\Lambda$  entonces el equilibrio está en la frontera de  $R_1$ , en la recta  $p_A - p_B = L_1$ . Sea  $(\bar{p}_A, \bar{p}_B)$  un punto de equilibrio y supongamos que  $(\bar{p}_A, \bar{p}_B) = (p + L_1, p)$ , esto es,  $(\bar{p}_A, \bar{p}_B)$  es un punto de la recta  $p_A - p_B = L_1$ . Se tiene que:

$$r_A(p) = \frac{1}{2}(p + C'_A + t_{BA} + 2e_B\Lambda) \leq p + L_1$$

$$\Leftrightarrow p \geq -2L_1 + C'_A + t_{BA} - t_{jA} + 2e_B\Lambda = p_1,$$

$$r_B(p + L_1) = \frac{1}{2}(p + L_1 + C'_B - t_{BA} + 2e_A\Lambda) \geq p$$

$$\Leftrightarrow p \leq L_1 + C'_B - t_{BA} + 2e_A\Lambda = p_2.$$

Como  $C'_A - C'_B < t_{BA} - 2(2e_A + e_B)\Lambda$  entonces  $p_1 < p_2$ . Por tanto, todo punto  $(p + L_1, p)$ ,  $p_1 \leq p \leq p_2$ , que pertenezca a  $\mathfrak{S}$  es de equilibrio.

- (c) Si  $C'_A - C'_B > t_{BA} + 2(e_A + 2e_B)\Lambda$  entonces el equilibrio está en la frontera de  $R_1$ , en la recta  $p_A - p_B = T_0$ . Sea  $(\bar{p}_A, \bar{p}_B)$  un punto de equilibrio y supongamos que  $(\bar{p}_A, \bar{p}_B) = (p + T_0, p)$ , esto es,  $(\bar{p}_A, \bar{p}_B)$  es un punto de la recta  $p_A - p_B = T_0$ . Se tiene:

$$r_A(p) = \frac{1}{2}(p + C'_A + t_{BA} + 2e_B\Lambda) \leq p + T_0$$

$$\Leftrightarrow p \geq -2T_0 + C'_A + t_{BA} + 2e_B\Lambda = p_3,$$

$$r_B(p + T_0) = \frac{1}{2}(p + T_0 + C'_B - t_{BA} + 2e_A\Lambda) \geq p$$

$$\Leftrightarrow p \leq T_0 + C'_B - t_{BA} + 2e_A\Lambda = p_4.$$

Como  $C'_A - C'_B > t_{BA} + 2(e_A + 2e_B)\Lambda$  puede comprobarse que  $p_3 < p_4$ . Por tanto, todo punto  $(p + T_0, p)$ ,  $p_3 \leq p \leq p_4$ , que pertenezca a  $\mathfrak{S}$  es de equilibrio.  $\square$

**Proposición 5.6 (equilibrio global)** Si  $n=1$  y los costes de externalidad son lineales, entonces el equilibrio en  $\mathfrak{S} = S_1 \cup R_1 \cup S_0$  es

$$(\bar{p}_A, \bar{p}_B) = \begin{cases} (p_A^1, p_B^1) & \text{si } C'_A - C'_B < t_{BA} - 2(2e_A + e_B)\Lambda \\ (\tilde{p}_A, \tilde{p}_B) & \text{si } t_{BA} - 2(2e_A + e_B)\Lambda \leq C'_A - C'_B \\ & \leq t_{BA} + 2(e_A + 2e_B)\Lambda \\ (p_A^2, p_B^2) & \text{si } C'_A - C'_B > t_{BA} + 2(e_A + 2e_B)\Lambda, \end{cases}$$

donde

$$\tilde{p}_A = \frac{1}{3}(2C'_A + C'_B + t_{BA} + 2(e_A + 2e_B)\Lambda),$$

$$\tilde{p}_B = \frac{1}{3}(C'_A + 2C'_B - t_{BA} + 2(2e_A + e_B)\Lambda),$$

$$p_A^1 = C'_B + t_{BA} - 2e_A\Lambda,$$

$$p_B^1 = C'_B,$$

$$p_A^2 = C'_A,$$

$$p_B^2 = C'_A - t_{BA} - 2e_B\Lambda.$$

**Demostración**

(a) Si

$$t_{BA} - 2(2e_A + e_B) \Lambda \leq C'_A - C'_B \leq t_{BA} + 2(e_A + 2e_B) \Lambda,$$

entonces  $(\tilde{p}_A, \tilde{p}_B)$  es un equilibrio en  $R_1$ .Fijado  $\tilde{p}_B$  se tiene que

$$r_{A|S_1}(\tilde{p}_B) = \tilde{p}_B + L_1$$

y como  $(\tilde{p}_B + L_1, \tilde{p}_B) \in R_1$ , entonces

$$r_{A|S_1 \cup R_1}(\tilde{p}_B) = r_{A|R_1}(\tilde{p}_B) = \tilde{p}_A.$$

Por otra parte,

$$r_{A|S_0}(\tilde{p}_B) = \{p : (p, \tilde{p}_B) \in S_0\}.$$

Como  $(\tilde{p}_B + T_0, \tilde{p}_B) \in R_1$  se tiene que

$$r_{A|S_1 \cup R_1 \cup S_0}(\tilde{p}_B) = r_{A|R_1}(\tilde{p}_B) = \tilde{p}_A.$$

Fijado  $\tilde{p}_A$  se tiene que

$$r_{B|S_0}(\tilde{p}_A) = \tilde{p}_A - T_0$$

y como  $(\tilde{p}_A, \tilde{p}_A - T_0) \in R_1$  entonces

$$r_{B|R_1 \cup S_0}(\tilde{p}_A) = r_{B|R_1}(\tilde{p}_A) = \tilde{p}_B.$$

Por otra parte,

$$r_{B|S_1}(\tilde{p}_A) = \{p : (\tilde{p}_A, p) \in S_1\}.$$

Como  $(\tilde{p}_A, \tilde{p}_A - L_1) \in R_1$  se tiene que

$$r_{B|S_1 \cup R_1 \cup S_0}(\tilde{p}_A) = r_{B|R_1}(\tilde{p}_A) = \tilde{p}_B.$$

(b) Si

$$C'_A - C'_B < t_{BA} - 2(2e_A + e_B) \Lambda,$$

entonces  $(p_A^1, p_B^1)$  es un equilibrio en  $S_1$ .Fijado  $p_A^1$ ,  $\forall p_B \geq p_B^1 = C'_B$  toda la demanda es capturada por A, por tanto la mejor respuesta de B es no entrar en el mercado fijando el precio  $p_B^1$ .

Fijado  $p_B^1$ , puede comprobarse que

$$r_{A|R_1}(p_B^1) > p_A^1 \iff C'_A - C'_B > t_{BA} - 2(2e_A + e_B)\Lambda$$

y como A no captura demanda en  $S_0$ , se deduce que si

$$C'_A - C'_B < t_{BA} - 2(2e_A + e_B)\Lambda,$$

la mejor respuesta de A es  $p_A^1$ .

(c) Si

$$C'_A - C'_B > t_{BA} + 2(e_A + 2e_B)\Lambda,$$

entonces  $(p_A^2, p_B^2)$  es un equilibrio en  $S_0$ .

Fijado  $p_B^2$ ,  $\forall p_A \geq p_A^2 = C'_A$  toda la demanda es capturada por B, por tanto la mejor respuesta de A es no entrar en el mercado fijando el precio  $p_A^2$ .

Fijado  $p_A^2$ , puede comprobarse que

$$r_{B|R_1}(p_A^2) > p_B^2 \iff C'_A - C'_B < t_{BA} + 2(e_A + 2e_B)\Lambda$$

y como B no captura demanda en  $S_1$ , se deduce que si

$$C'_A - C'_B > t_{BA} + 2(e_A + 2e_B)\Lambda$$

la mejor respuesta de B es  $p_B^2$ . □

Obsérvese que cuando

$$C'_A - C'_B < t_{BA} - 2(2e_A + e_B)\Lambda,$$

la firma A captura toda la demanda, mientras que si

$$C'_A - C'_B > t_{BA} + 2(e_A + 2e_B)\Lambda,$$

es la firma B la que captura la totalidad de la demanda. Si no existen grandes diferencias en los costes marginales, en concreto si

$$t_{BA} - 2(2e_A + e_B)\Lambda \leq C'_A - C'_B \leq t_{BA} + 2(e_A + 2e_B)\Lambda,$$

el precio de equilibrio es  $(\bar{p}_A, \bar{p}_B)$ . En tal caso, obsérvese que el precio de equilibrio de cada una de las firmas se incrementa con los costes marginales de externalidad, en mayor medida con los de la firma rival. El incremento del precio debido al aumento del coste marginal de externalidad de la propia firma viene justificado por el mayor aumento del precio de la empresa competidora. Además, los precios se incrementan con los costes marginales de producción, en mayor medida con los propios.

### 5.2.2.2 Localizaciones de equilibrio

Se trata de calcular el equilibrio de Nash en localizaciones conocido el comportamiento posterior de los precios. Un par de localizaciones,  $\bar{x}_A$  y  $\bar{x}_B$ , constituye un equilibrio de Nash si y sólo si:

$$\pi_A(\bar{x}_A, \bar{x}_B) = \max_{x_A \in N} \pi_A(x_A, \bar{x}_B),$$

$$\pi_B(\bar{x}_A, \bar{x}_B) = \max_{x_B \in N} \pi_B(\bar{x}_A, x_B).$$

Para el estudio del equilibrio en localización, se asumirá la siguiente condición.

**Condición 5.1** *La red  $N(V, E)$  tiene un sólo nodo con demanda no nula y*

$$C'_A - C'_B \geq \max_{x \in N} t_1(x) - \min_{x \in N} t_1(x) - 2(e_A + e_B) \Lambda,$$

$$C'_A - C'_B \leq \min_{x \in N} t_1(x) - \max_{x \in N} t_1(x) + 2(e_A + 2e_B) \Lambda.$$

La expresión del beneficio de la firma  $A$  bajo la condición 5.1 es

$$\pi_A(x_A, x_B) = \frac{(C'_B - C'_A + t_{BA}(x_A, x_B) + 2(e_A + 2e_B) \Lambda)^2}{18(e_A + e_B)}.$$

La expresión para  $B$  se obtiene intercambiando los subíndices. Nótese que sólo  $t_{BA}(x_A, x_B) = t_1(x_B) - t_1(x_A)$  depende de las localizaciones.

Se trata, por tanto, de resolver el siguiente problema

$$\max_{x_A \in N} \left\{ \frac{(C'_B - C'_A + t_{BA}(x_A, x_B) + 2(e_A + 2e_B) \Lambda)^2}{18(e_A + e_B)} \right\},$$

$$\max_{x_B \in N} \left\{ \frac{(C'_A - C'_B - t_{BA}(x_A, x_B) + 2(2e_A + e_B) \Lambda)^2}{18(e_A + e_B)} \right\}.$$

**Proposición 5.7** *Bajo la condición 5.1 y costes de externalidad lineales, el único equilibrio en localización es  $(\bar{x}_A, \bar{x}_B) = (v, v)$  siendo  $v$  el nodo con demanda no nula.*

**Demostración** Bajo la condición 5.1 se tiene que

$$\pi_A(x_A, x_B) = \frac{(C'_B - C'_A + t_{BA}(x_A, x_B) + 2(e_A + 2e_B) \Lambda)^2}{18(e_A + e_B)}$$

y

$$C'_B - C'_A + t_{BA}(x_A, x_B) + 2(e_A + 2e_B)\Lambda \geq 0.$$

Además,

$$\pi_B(x_A, x_B) = \frac{(C'_A - C'_B - t_{BA}(x_A, x_B) + 2(2e_A + e_B)\Lambda)^2}{18(e_A + e_B)}$$

y

$$C'_A - C'_B - t_{BA}(x_A, x_B) + 2(2e_A + e_B)\Lambda \geq 0.$$

- (a)  $(\bar{x}_A, \bar{x}_B) = (v, v)$  es un equilibrio. En efecto, dado  $\bar{x}_A = v$ , se tiene que  $t_{BA}(\bar{x}_A, x) \geq 0, \forall x \in N$ , y entonces

$$\pi_B(\bar{x}_A, \bar{x}_B) = \max_{x \in N} \pi_B(\bar{x}_A, x).$$

De forma similar, dado  $\bar{x}_B = v$ , se tiene que  $t_{BA}(x, \bar{x}_B) \leq 0, \forall x \in N$ , y entonces

$$\pi_A(\bar{x}_A, \bar{x}_B) = \max_{x \in N} \pi_A(x, \bar{x}_B).$$

- (b) Se probará que cualquier  $(x_A, x_B) \in N$  tal que  $(x_A, x_B) \neq (v, v)$  no es equilibrio. Se tiene que  $x_A \neq v$  o  $x_B \neq v$ . Si  $x_A \neq v$ , entonces  $t_{BA}(v, x_B) > t_{BA}(x_A, x_B)$  por lo que

$$\pi_A(v, x_B) > \pi_A(x_A, x_B)$$

y entonces  $(x_A, x_B)$  no es equilibrio. De forma similar, si  $x_B \neq v$ , entonces

$$\pi_B(x_A, v) > \pi_B(x_A, x_B),$$

por lo que  $(x_A, x_B)$  no es equilibrio.  $\square$

### 5.2.2.3 Ejemplo

Se considera la red de la figura 5.4 donde el único nodo con demanda no nula es  $v_4$  y  $\lambda_4 = 3 = \Lambda$ . Sean

$$C'_A = 2, C'_B = 3,$$

$$e_A = 0.2, e_B = 0.3,$$

$$t_1(x) = t(\delta_{v_4 x}) = \delta_{v_4 x}.$$

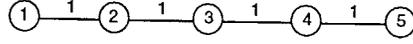


Figura 5.4: Arbol con  $\lambda_4 = 3$ ,  $\lambda_k = 0$ ,  $k = 1, 2, 3, 5$

Se cumple que

$$\max_{x \in N} t_1(x) = 3, \quad \min_{x \in N} t_1(x) = 0.$$

Además, puede comprobarse que se satisface la condición 5.1. Por tanto,

$$\begin{aligned} \pi_A(x_A, x_B) &= \frac{(C'_B - C'_A + t_{BA}(x_A, x_B) + 2(e_A + 2e_B)\Lambda)^2}{18(e_A + e_B)} \\ &= \frac{(5.8 + t_{BA}(x_A, x_B))^2}{9}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_B(x_A, x_B) &= \frac{(C'_A - C'_B - t_{BA}(x_A, x_B) + 2(2e_A + e_B)\Lambda)^2}{18(e_A + e_B)} \\ &= \frac{(3.2 - t_{BA}(x_A, x_B))^2}{9}. \end{aligned}$$

La tabla 5.1 muestra  $t_{BA}(x_A, x_B)$ ,  $\pi_A(x_A, x_B)$  y  $\pi_B(x_A, x_B)$  para cada par de nodos. Como puede observarse, el único equilibrio en los nodos se alcanza en  $(x_A, x_B) = (v_4, v_4)$ .

### 5.2.3 Equilibrio localización-precio para $n > 1$

Un grupo de problemas en los que  $n > 1$  se pueden reducir al caso  $n = 1$ . Esto sucede cuando las localizaciones factibles no son nodos de demanda y se cumple que  $\Delta_i = \Delta_j, \forall i, j \in V_D$ . En tal caso, las demandas de los nodos en  $V_D$  pueden agregarse en uno solo, por lo que esta situación se reduce al caso  $n = 1$ . El siguiente ejemplo ilustra esta situación.

$t_{BA}(x_A, x_B)$ $\pi_A(x_A, x_B)$ $\pi_B(x_A, x_B)$	$x_B$					
	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	
$x_A$		0	-1	-2	-3	-2
	$v_1$	3.738	2.560	1.604	0.871	1.604
		1.138	1.960	3.004	4.271	3.004
		1	0	-1	-2	-1
	$v_2$	5.138	3.738	2.560	1.604	2.560
		0.538	1.138	1.960	3.004	1.960
		2	1	0	-1	0
	$v_3$	6.760	5.138	3.738	2.560	3.738
		0.160	0.538	1.138	1.960	1.138
		3	2	1	0	1
	$v_4$	8.604	6.760	5.138	3.738	5.138
		0.004	0.160	0.538	1.138	0.538
		2	1	0	-1	0
	$v_5$	6.760	5.138	3.738	2.560	3.738
		0.160	0.538	1.138	1.960	1.138

Tabla 5.1: Beneficios para cada par de nodos de la figura 5.4

## 5.2.3.1 Ejemplo

Se considera la red de la figura 5.5 con localizaciones factibles  $\{v_1, v_2\}$  y nodos de demanda  $V_D = \{v_3, v_4, v_5, v_6\}$ , con

$$\lambda_3 = 1, \lambda_4 = 2, \lambda_5 = 2, \lambda_6 = 1, \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \Lambda = 6.$$

Sea

$$C'_A = 2, C'_B = 3,$$

$$e_A = 0.2, e_B = 0.3,$$

$$t_j(x) = t(\delta_{v_j x}) = \delta_{v_j x}, j = 3, 4, 5, 6.$$

Puede comprobarse que

$x_A$	$x_B$	$t_j(x_B) - t_j(x_A), j = 3, 4, 5, 6$
$v_1$	$v_1$	0
$v_1$	$v_2$	-1
$v_2$	$v_1$	1
$v_2$	$v_2$	0

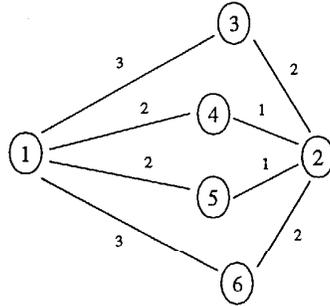


Figura 5.5: Red con  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_3 = 1$ ,  $\lambda_4 = 2$ ,  $\lambda_5 = 2$ ,  $\lambda_6 = 1$

y, por tanto,  $\Delta_i = \Delta_j$ ,  $\forall i, j \in V_D$ . Entonces pueden agruparse las demandas de  $V_D$  en un solo nodo. Se trata de estudiar si  $(v_1, v_1)$ ,  $(v_1, v_2)$ ,  $(v_2, v_1)$  ó  $(v_2, v_2)$  es equilibrio.

Puede comprobarse que se cumple la condición 5.1 y entonces

$$\begin{aligned} \pi_A(x_A, x_B) &= \frac{(C'_B - C'_A + t_{BA}(x_A, x_B) + 2(e_A + 2e_B)\Lambda)^2}{18(e_A + e_B)} \\ &= \frac{(10.6 + t_{BA}(x_A, x_B))^2}{9}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_B(x_A, x_B) &= \frac{(C'_A - C'_B - t_{BA}(x_A, x_B) + 2(2e_A + e_B)\Lambda)^2}{18(e_A + e_B)} \\ &= \frac{(7.4 - t_{BA}(x_A, x_B))^2}{9}. \end{aligned}$$

La tabla 5.2 muestra  $\pi_A(x_A, x_B)$  y  $\pi_B(x_A, x_B)$  para cada par de localizaciones factibles. Como puede observarse, el único equilibrio se alcanza cuando  $(x_A, x_B) = (v_2, v_2)$ , que es la localización más próxima a los nodos de demanda.

$\pi_A(x_A, x_B)$ $\pi_B(x_A, x_B)$	$x_B = v_1$	$x_B = v_2$
$x_A = v_1$	12.48 6.08	10.24 7.84
$x_A = v_2$	14.95 4.55	12.48 6.08

Tabla 5.2: Beneficios para cada par de localizaciones factibles de la figura 5.5

### 5.2.3.2 Precios de equilibrio

Cuando no se puede reducir al caso  $n = 1$  se procede de la siguiente forma. Sean

$$\mathfrak{S} = \{(p_A, p_B) \in \mathbb{R}^2 : p_A \geq C'_A, p_B \geq C'_B\},$$

$$R_j = \mathfrak{S} \cap \{(p_A, p_B) \in \mathbb{R}^2 : L_j \leq p_A - p_B \leq T_{j-1}\}, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$S_j = \mathfrak{S} \cap \{(p_A, p_B) \in \mathbb{R}^2 : T_j \leq p_A - p_B \leq L_j\}, \quad j = 1, \dots, n-1,$$

$$S_0 = \mathfrak{S} \cap \{(p_A, p_B) \in \mathbb{R}^2 : p_A - p_B \geq T_0\},$$

$$S_n = \mathfrak{S} \cap \{(p_A, p_B) \in \mathbb{R}^2 : p_A - p_B \leq L_n\}.$$

El conjunto de interés

$$\mathfrak{S} = [C'_A, +\infty) \times [C'_B, +\infty) = \left( \bigcup_{j=1}^n R_j \right) \cup \left( \bigcup_{j=0}^n S_j \right)$$

está representado en la figura 5.6.

Dadas dos localizaciones, la función de beneficio para la firma  $i$  es

$$\pi_i(p_A, p_B) = (p_i - C'_i)\bar{\Lambda}_i - F_i, \quad i = A, B.$$

Para simplificar la notación, asumamos que no existen costes fijos ( $F_i = 0$ ). En tal caso, el beneficio de las firmas viene dado por el siguiente resultado.

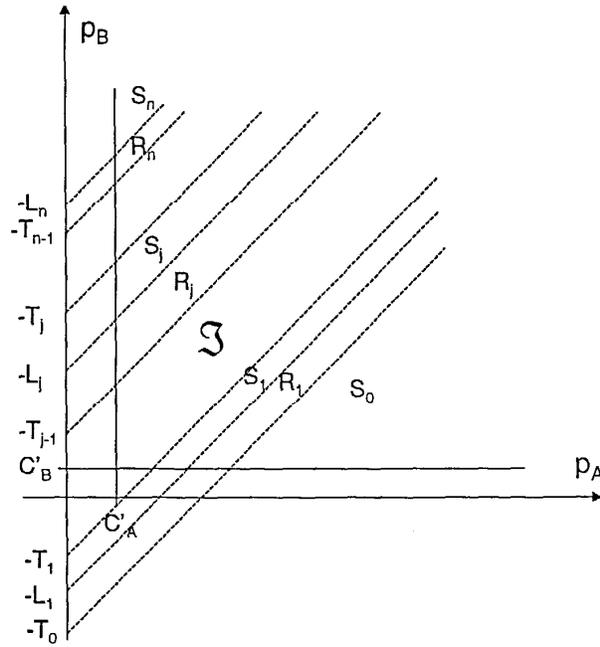


Figura 5.6: El conjunto  $\mathfrak{S}$

**Proposición 5.8** *La función*

$$\pi(p_A, p_B) = (\pi_A(p_A, p_B), \pi_B(p_A, p_B))$$

*está definida en  $\mathfrak{S}$  por la expresión*

$$\left\{ \begin{array}{ll} ((p_A - C'_A)\Lambda, 0) & \text{si } (p_A, p_B) \in S_n \\ \left( (p_A - C'_A) \left( \frac{p_B - p_A + t_{jn} - t_{j\Lambda} + 2e_n\Lambda}{2(e_\Lambda + e_n)} \right), \right. & \text{si } (p_A, p_B) \\ \left. (p_B - C'_B) \left( \frac{p_A - p_B + t_{j\Lambda} - t_{jn} + 2e_\Lambda\Lambda}{2(e_\Lambda + e_n)} \right) \right) & \in R_j - (S_j \cup S_{j-1}), \\ & j = 1, \dots, n \\ ((p_A - C'_A)f_j, (p_B - C'_B)(\Lambda - f_j)) & \text{si } (p_A, p_B) \in S_j, \\ & j = 1, \dots, n-1 \\ (0, (p_B - C'_B)\Lambda) & \text{si } (p_A, p_B) \in S_0. \end{array} \right.$$

Denotemos  $f|_D$  la restricción de la función  $f$  al conjunto  $D$  e  $\text{Int}(D)$  el interior de  $D$ . Se verifican las siguientes propiedades:

- (i) La función  $\pi(p_A, p_B)$  es continua en  $\mathfrak{S}$ .
- (ii) Las funciones  $\pi(p_A, p_B)|_{R_j}$  y  $\pi(p_A, p_B)|_{S_j}$  son de clase  $C^{(\infty)}$  en  $\text{Int}(R_j)$  e  $\text{Int}(S_j)$ , respectivamente.
- (iii) Las funciones  $\pi_A(p_A, p_B)|_{R_j}$  y  $\pi_B(p_A, p_B)|_{R_j}$  son estrictamente cóncavas respecto de las variables  $p_A$  y  $p_B$ , respectivamente. Las funciones  $\pi_A(p_A, p_B)|_{S_j}$  y  $\pi_B(p_A, p_B)|_{S_j}$  son funciones lineales y, por tanto, cóncavas.

**Demostración** La función de beneficio se obtiene reemplazando  $\bar{\Lambda}_i$  en

$$\pi_i(p_A, p_B) = (p_i - C'_i)\bar{\Lambda}_i$$

por la expresión dada en el corolario 5.1. Dado que

$$\frac{p_B - p_A + t_{jB} - t_{jA} + 2e_B\Lambda}{2(e_A + e_B)} = f_j \text{ si } p_A - p_B = L_j, j = 1, \dots, n$$

y

$$\frac{p_B - p_A + t_{jB} - t_{jA} + 2e_B\Lambda}{2(e_A + e_B)} = f_{j-1} \text{ si } p_A - p_B = T_{j-1}, j = 1, \dots, n,$$

se deduce que  $\pi_i(p_A, p_B)$  es continua en  $\mathfrak{S}$ . Como  $\pi_i(p_A, p_B)$  es lineal en  $S_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ , y cuadrática en  $R_j$  con

$$\frac{\partial^2 \pi_i}{\partial p_i^2} = -(e_A + e_B)^{-1} < 0 \text{ si } (p_A, p_B) \in R_j, j = 1, \dots, n, i = A, B,$$

las propiedades (ii) y (iii) se cumplen. □

**Proposición 5.9** *Se cumple que:*

- (i) Si  $C'_B \leq p_B \leq C'_A - T_{j-1} + 2(e_A + e_B)f_{j-1}$ , entonces  $\pi_A(p_A|p_B)$  es cuasicóncava en

$$\{p_A : p_A \geq C'_A, (p_A, p_B) \in S_j \cup R_j \cup S_{j-1}\}.$$

- (ii) Si  $C'_A \leq p_A \leq C'_B + L_j + 2(e_A + e_B)(\Lambda - f_j)$ , entonces  $\pi_B(p_B|p_A)$  es cuasicóncava en

$$\{p_B : p_B \geq C'_B, (p_A, p_B) \in S_j \cup R_j \cup S_{j-1}\}.$$

(iii) Si  $C'_B \leq p_B \leq C'_A - T_0$ , entonces  $\pi_A(p_A | p_B)$  es cuasicóncava en

$$\{p_A : (p_A, p_B) \in \mathfrak{S}\}.$$

(iv) Si  $C'_A \leq p_A \leq C'_B + L_n$ , entonces  $\pi_B(p_B | p_A)$  es cuasicóncava en

$$\{p_B : (p_A, p_B) \in \mathfrak{S}\}.$$

### Demostración

(i) Se comprobará que en ese caso  $\pi_A(p_A | p_B)$  es creciente en

$$\{p_A : p_A \geq C'_A, (p_A, p_B) \in S_j \cup R_j \cup S_{j-1}\}.$$

En efecto,  $\pi_A(p_A | p_B)$  es creciente en

$$\{p_A : p_A \geq C'_A, (p_A, p_B) \in S_j\} \quad \text{y} \quad \{p_A : p_A \geq C'_A, (p_A, p_B) \in S_{j-1}\}.$$

La función de beneficio en  $R_j$  es una parábola con vértice

$$\left(p_A^j\right)^* = \frac{1}{2} (p_B + t_{jB} - t_{jA} + 2e_B \Lambda + C'_A).$$

Además, en  $R_j$  se cumple que  $L_j \leq p_A - p_B \leq T_{j-1}$ . Entonces,  $\pi_A(p_A | p_B)$  es creciente en  $R_j$  si y sólo si

$$\left(p_A^j\right)^* \geq p_B + T_{j-1},$$

es decir

$$p_B \leq t_{jB} - t_{jA} + 2e_B \Lambda + C'_A - 2T_{j-1} = C'_A - T_{j-1} + 2(e_A + e_B)f_{j-1}.$$

(ii) De forma similar al caso anterior, basta considerar que en este caso  $\pi_B(p_B | p_A)$  es creciente en

$$\{p_B : p_B \geq C'_B, (p_A, p_B) \in S_j \cup R_j \cup S_{j-1}\}.$$

En efecto,  $\pi_B(p_B | p_A)$  es creciente en

$$\{p_B : p_B \geq C'_B, (p_A, p_B) \in S_j\} \quad \text{y} \quad \{p_B : p_B \geq C'_B, (p_A, p_B) \in S_{j-1}\}.$$

La función de beneficio en  $R_j$  es una parábola con vértice

$$\left(p_B^j\right)^* = \frac{1}{2} (p_A + t_{jA} - t_{jB} + 2e_A\Lambda + C'_B).$$

Además, en  $R_j$  se cumple que  $L_j \leq p_A - p_B \leq T_{j-1}$ . Entonces,  $\pi_B(p_B | p_A)$  es creciente en  $R_j$  si y sólo si

$$\left(p_B^j\right)^* \geq p_A - L_j,$$

es decir

$$p_A \leq t_{jA} - t_{jB} + 2e_A\Lambda + C'_B + 2L_j = C'_B + L_j + 2(e_A + e_B)(\Lambda - f_j).$$

- (iii) Basta tener en cuenta (i) y que la expresión  $C'_A - T_{j-1} + 2(e_A + e_B)f_{j-1}$  crece con  $j$ .
- (iv) Basta tener en cuenta (ii) y que la expresión  $C'_B + L_j + 2(e_A + e_B)(\Lambda - f_j)$  decrece a medida que  $j$  aumenta.

□

La figura 5.7 muestra un ejemplo de función de beneficio no cuasicóncava de la firma  $A$  para un valor  $p_B$  dado. La no cuasicóncava de las funciones de beneficio sobre  $\mathfrak{S}$  complica el estudio del equilibrio global ya que, por ejemplo, no puede aplicarse el teorema 2.1 que garantiza la existencia de equilibrio. Sin embargo, si existe equilibrio en  $\mathfrak{S}$ , este equilibrio en precios tiene que coincidir con alguno de los equilibrios en  $S_j$  o  $R_j$ . A continuación, se estudiarán los equilibrios en

$$S_0, S_j, R_j, j = 1, \dots, n,$$

o “equilibrios parciales”. Para ello, es necesario establecer la siguiente notación. Sean

$$L_j^N = t_{jB} - t_{jA} + 2(e_A + 2e_B)\Lambda - 6(e_A + e_B)f_j,$$

$$T_{j-1}^N = t_{jB} - t_{jA} + 2(e_A + 2e_B)\Lambda - 6(e_A + e_B)f_{j-1}, j = 1, \dots, n.$$

Puede comprobarse que

$$L_j^N = 3L_j - 2(t_{jB} - t_{jA}) + 2(e_A - e_B)\Lambda,$$

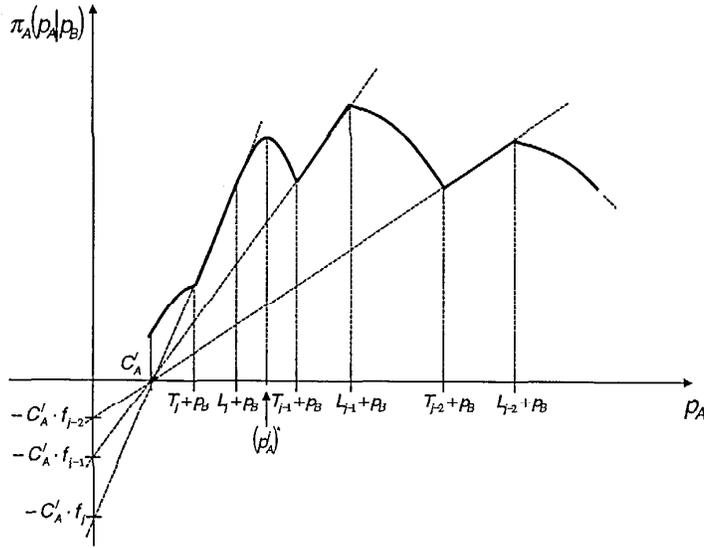


Figura 5.7: Función de beneficios de la firma A para  $p_B$  fijo

$$T_{j-1}^N = 3T_{j-1} - 2(t_{jB} - t_{jA}) + 2(e_A - e_B)\Lambda,$$

$$L_n^N < T_{n-1}^N < L_{n-1}^N < \dots < T_j^N < L_j^N < T_{j-1}^N < L_{j-1}^N < \dots < T_1^N < L_1^N < T_0^N.$$

**Proposición 5.10** Las funciones de mejor respuesta son

$$r_{A|s_0}(p_B) = \{p : p - p_B \geq T_0\},$$

$$r_{A|s_j}(p_B) = p_B + L_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$r_{A|r_j}(p_B) = \begin{cases} C'_A & \text{si } p_B \leq -2T_{j-1} + C'_A + t_{jB} - t_{jA} + 2e_B\Lambda \\ \tilde{r}_A^j(p_B) & \text{si } -2T_{j-1} + C'_A + t_{jB} - t_{jA} + 2e_B\Lambda < p_B \\ & < -2L_j + C'_A + t_{jB} - t_{jA} + 2e_B\Lambda \\ p_B + L_j & \text{si } p_B \geq -2L_j + C'_A + t_{jB} - t_{jA} + 2e_B\Lambda, \end{cases}$$

$$\text{con } \tilde{r}_A^j(p_B) = \frac{1}{2}(p_B + C'_A + t_{jB} - t_{jA} + 2e_B\Lambda), \quad j = 1, \dots, n.$$

$$r_{B|S_j}(p_A) = p_A - T_j, \quad j = 0, \dots, n-1,$$

$$r_{B|S_n}(p_A) = \{p : p_A - p \leq L_n\},$$

$$r_{B|R_j}(p_A) = \begin{cases} C'_B & \text{si } p_A \leq 2L_j + C'_B - t_{jB} + t_{jA} + 2e_A\Lambda \\ \tilde{r}_B^j(p_A) & \text{si } 2L_j + C'_B - t_{jB} + t_{jA} + 2e_A\Lambda < p_A \\ & < 2T_{j-1} + C'_B - t_{jB} + t_{jA} + 2e_A\Lambda \\ p_A - T_{j-1} & \text{si } p_A \geq 2T_{j-1} + C'_B - t_{jB} + t_{jA} + 2e_A\Lambda, \end{cases}$$

$$\text{con } \tilde{r}_B^j(p_A) = \frac{1}{2}(p_A + C'_B - t_{jB} + t_{jA} + 2e_A\Lambda), \quad j = 1, \dots, n.$$

**Demostración** La función de beneficio de la firma A,  $\pi_A(p_A, p_B)$ , es

$$\begin{cases} (p_A - C'_A)\Lambda & \text{si } (p_A, p_B) \in S_n \\ (p_A - C'_A) \left( \frac{p_B - p_A + t_{jB} - t_{jA} + 2e_B\Lambda}{2(e_A + e_B)} \right) & \text{si } (p_A, p_B) \in R_j - (S_j \cup S_{j-1}), \\ & j = 1, \dots, n \\ (p_A - C'_A)f_j & \text{si } (p_A, p_B) \in S_j, \quad j = 1, \dots, n-1 \\ 0 & \text{si } (p_A, p_B) \in S_0. \end{cases}$$

Dado que  $\pi_{A|S_0}(p_A, p_B) = 0$  y  $\pi_{A|S_j}(p_A, p_B) = (p_A - C'_A)f_j$ ,  $\forall j > 0$ , entonces

$$r_{A|S_0}(p_B) = \{p : p - p_B \geq T_0\} \quad \text{y} \quad r_{A|S_j}(p_B) = p_B + L_j, \quad \forall j > 0.$$

Sea

$$\varphi(p_A) = (p_A - C'_A) \left( \frac{p_B - p_A + t_{jB} - t_{jA} + 2e_B\Lambda}{2(e_A + e_B)} \right).$$

Entonces

$$\varphi'(p_A) = 0 \iff p_A = \frac{1}{2}(p_B + C'_A + t_{jB} - t_{jA} + 2e_B\Lambda).$$

Si

$$p_A^* = \frac{1}{2}(p_B + C'_A + t_{jB} - t_{jA} + 2e_B\Lambda),$$

se tiene que  $L_j < p_A^* - p_B < T_{j-1}$  si y sólo si

$$-2T_{j-1} + C'_A + t_{jB} - t_{jA} + 2e_B\Lambda < p_B < -2L_j + C'_A + t_{jB} - t_{jA} + 2e_B\Lambda.$$

Además, puede comprobarse que si se da la condición previa, entonces  $p_A^* > C'_A$ . Dado que  $\varphi''(p_A) < 0$ , la función  $\varphi(p_A)$  es cóncava y se cumple que

$$r_{A|R_j}(p_B) = \begin{cases} C'_A = \max\{p_B + T_{j-1}, C'_A\} & \text{si } p_B \leq -2T_{j-1} + C'_A + t_{jB} - t_{jA} + 2e_B\Lambda \\ \tilde{r}_A^j(p_B) & \text{si } -2T_{j-1} + C'_A + t_{jB} - t_{jA} + 2e_B\Lambda < p_B < -2L_j + C'_A + t_{jB} - t_{jA} + 2e_B\Lambda \\ p_B + L_j & \text{si } p_B \geq -2L_j + C'_A + t_{jB} - t_{jA} + 2e_B\Lambda. \end{cases}$$

Puede comprobarse que  $p_B + L_j \geq C'_A$  si

$$p_B \geq -2L_j + C'_A + t_{jB} - t_{jA} + 2e_B\Lambda.$$

Por otro lado, la función de beneficio de la firma B es

$$\begin{cases} 0 & \text{si } (p_A, p_B) \in S_n \\ (p_B - C'_B) \left( \frac{p_A - p_B - t_{jn} + t_{jA} + 2e_A\Lambda}{2(e_A + e_B)} \right) & \text{si } (p_A, p_B) \in R_j - (S_j \cup S_{j-1}), \\ & j = 1, \dots, n \\ (p_B - C'_B)(\Lambda - f_j) & \text{si } (p_A, p_B) \in S_j, j = 1, \dots, n-1 \\ (p_B - C'_B)\Lambda & \text{si } (p_A, p_B) \in S_0. \end{cases}$$

Dado que  $\pi_{B|S_n}(p_A, p_B) = 0$  y  $\pi_{B|S_j}(p_A, p_B) = (p_B - C'_B)(\Lambda - f_j)$ ,  $\forall j < n$ , entonces

$$r_{B|S_n}(p_A) = \{p : p_A - p \leq L_n\} \quad \text{y} \quad r_{B|S_j}(p_A) = p_A - T_j, \quad \forall j < n.$$

Sea

$$\psi(p_B) = (p_B - C'_B) \left( \frac{p_A - p_B - t_{jB} + t_{jA} + 2e_A\Lambda}{2(e_A + e_B)} \right).$$

Entonces,

$$\psi'(p_B) = 0 \iff p_B = \frac{1}{2}(p_A + C'_B - t_{jB} + t_{jA} + 2e_A\Lambda).$$

Si

$$p_B^* = \frac{1}{2}(p_A + C'_B - t_{jB} + t_{jA} + 2e_A\Lambda),$$

se tiene que  $L_j < p_A - p_B^* < T_{j-1}$  si y sólo si

$$2L_j + C'_B - t_{jB} + t_{jA} + 2e_A\Lambda < p_A < 2T_{j-1} + C'_B - t_{jB} + t_{jA} + 2e_A\Lambda.$$

Puede comprobarse que bajo la condición anterior se cumple que  $p_B^* > C'_B$ . Dado que  $\psi''(p_B) < 0$ , la función  $\psi(p_B)$  es cóncava y

$$r_{B|R_j}(p_A) = \begin{cases} C'_B = \max\{p_A - L_j, C'_B\} & \text{si } p_A \leq 2L_j + C'_B - t_{jB} + t_{jA} + 2e_A\Lambda \\ \tilde{r}_B^j(p_A) & \text{si } 2L_j + C'_B - t_{jB} + t_{jA} + 2e_A\Lambda < p_A < 2T_{j-1} + C'_B - t_{jB} + t_{jA} + 2e_A\Lambda \\ p_A - T_{j-1} & \text{si } p_A \geq 2T_{j-1} + C'_B - t_{jB} + t_{jA} + 2e_A\Lambda. \end{cases}$$

□

Para  $j = 1, \dots, n$ , sean

$$\begin{aligned} r_A^j(p_B) &= r_{A|R_j}(p_B), \\ r_B^j(p_A) &= r_{B|R_j}(p_A). \end{aligned}$$

**Proposición 5.11** (*Equilibrios parciales y locales en  $\mathfrak{S}$* )

- (i) Los equilibrios en  $S_n$  son los puntos  $(\bar{p}_A, \bar{p}_B) \in S_n$  tal que  $\bar{p}_A - \bar{p}_B = L_n$ .
- (ii) Los equilibrios en  $S_0$  son los puntos  $(\bar{p}_A, \bar{p}_B) \in S_0$  tal que  $\bar{p}_A - \bar{p}_B = T_0$ .

(iii) En  $S_j$  no existe equilibrio,  $j = 1, \dots, n-1$ .

(iv) En  $R_j$  existe equilibrio,  $j = 1, \dots, n$ . Además,

(a) Si  $L_j^N \leq C'_A - C'_B \leq T_{j-1}^N$ , entonces  $(\tilde{p}_A^j, \tilde{p}_B^j)$  es un equilibrio con

$$\tilde{p}_A^j = \frac{1}{3} [2C'_A + C'_B + t_{jB} - t_{jA} + 2(e_A + 2e_B)\Lambda],$$

$$\tilde{p}_B^j = \frac{1}{3} [C'_A + 2C'_B + t_{jA} - t_{jB} + 2(2e_A + e_B)\Lambda].$$

Además, si  $L_j^N < C'_A - C'_B < T_{j-1}^N$ , entonces  $(\tilde{p}_A^j, \tilde{p}_B^j)$  es un equilibrio "local" en  $\mathfrak{S}$ .

(b) Si  $C'_A - C'_B < L_j^N$ , entonces los puntos del conjunto

$$\mathfrak{S} \cap \{(p + L_j, p) : p_1 \leq p \leq p_2\}$$

son de equilibrio, siendo

$$p_1 = -2L_j + t_{jB} - t_{jA} + C'_A + 2e_B\Lambda,$$

$$p_2 = L_j + t_{jA} - t_{jB} + C'_B + 2e_A\Lambda.$$

(c) Si  $C'_A - C'_B > T_{j-1}^N$ , entonces los puntos del conjunto

$$\mathfrak{S} \cap \{(p + T_{j-1}, p) : p_3 \leq p \leq p_4\}$$

son de equilibrio, siendo

$$p_3 = T_{j-1} + t_{jA} - t_{jB} + C'_B + 2e_A\Lambda,$$

$$p_4 = -2T_{j-1} + t_{jB} - t_{jA} + C'_A + 2e_B\Lambda.$$

### Demostración

(i) Sea  $(\bar{p}_A, \bar{p}_B) \in S_n$  tal que  $\bar{p}_A - \bar{p}_B = L_n$ . Se tiene que

$$r_{A|S_n}(\bar{p}_B) = \bar{p}_A,$$

$$\bar{p}_B \in r_{B|S_n}(\bar{p}_A),$$

de donde se deduce que  $(\bar{p}_A, \bar{p}_B)$  es un equilibrio en  $S_n$ . Por otra parte, si  $\bar{p}_A - \bar{p}_B < L_n$  entonces  $(\bar{p}_A, \bar{p}_B)$  no es equilibrio en  $S_n$ . En efecto, si  $\bar{p}_A - \bar{p}_B + h = L_n$ , con  $h > 0$ , entonces  $r_{A|S_n}(\bar{p}_B) = \bar{p}_A + h$  y  $(\bar{p}_A, \bar{p}_B)$  no es equilibrio en  $S_n$ .

(ii) Sea  $(\bar{p}_A, \bar{p}_B) \in S_0$  tal que  $\bar{p}_A - \bar{p}_B = T_0$ . Se tiene que

$$\begin{aligned}\bar{p}_A &\in r_{A|S_0}(\bar{p}_B), \\ r_{B|S_0}(\bar{p}_A) &= \bar{p}_B,\end{aligned}$$

de donde se deduce que  $(\bar{p}_A, \bar{p}_B)$  es un equilibrio en  $S_0$ . Además, puede comprobarse que si  $\bar{p}_A - \bar{p}_B > T_0$  entonces  $(\bar{p}_A, \bar{p}_B)$  no es equilibrio en  $S_0$ .

(iii) Las funciones de beneficio  $\pi_i(p_A, p_B)$ ,  $i = A, B$ , son lineales y crecientes en  $S_j$ ,  $j = 1, \dots, n-1$ . Para cada punto  $(p_A, p_B) \in S_j$  existe  $(p'_A, p'_B) \in S_j$  tal que  $p'_A > p_A$  o  $p'_B > p_B$ . Entonces

$$\pi_A(p'_A, p_B) > \pi_A(p_A, p_B) \quad \text{o} \quad \pi_B(p_A, p'_B) > \pi_B(p_A, p_B),$$

y  $(p_A, p_B)$  no es equilibrio.

(iv) Sea  $j \in \{1, \dots, n\}$ .

(a) Si  $L_j^N \leq C'_A - C'_B \leq T_{j-1}^N$  puede probarse que  $(\tilde{p}_A^j, \tilde{p}_B^j) \in R_j$  y es un punto fijo de  $r^j = (r_A^j, r_B^j)$ . Si

$$L_j^N < C'_A - C'_B < T_{j-1}^N,$$

entonces existe un entorno en el que  $(\tilde{p}_A^j, \tilde{p}_B^j)$  es un equilibrio en  $R_j \subset \mathfrak{S}$ , por lo que  $(\bar{p}_A, \bar{p}_B)$  es un equilibrio local en  $\mathfrak{S}$ .

(b) Si  $C'_A - C'_B < L_j^N$  entonces el equilibrio está en la frontera de  $R_j$ , en la recta  $p_A - p_B = L_j$ . Sea  $(\bar{p}_A, \bar{p}_B) = (p + L_j, p)$ , esto es,  $(\bar{p}_A, \bar{p}_B)$  es un punto de la recta  $p_A - p_B = L_j$ . Se tiene que:

$$\tilde{r}_A^j(p) = \frac{1}{2}(p + C'_A + t_{jB} - t_{jA} + 2e_B\Lambda) \leq p + L_j$$

$$\iff p \geq -2L_j + t_{jB} - t_{jA} + C'_A + 2e_B\Lambda = p_1,$$

$$\tilde{r}_B^j(p + L_j) = \frac{1}{2}(p + L_j + C'_B + t_{jA} - t_{jB} + 2e_A\Lambda) \geq p$$

$$\iff p \leq L_j + t_{jA} - t_{jB} + C'_B + 2e_A\Lambda = p_2.$$

Como  $C'_A - C'_B < L_j^N$ , puede comprobarse que  $p_1 < p_2$ . Entonces, todo punto  $(p + L_j, p)$ ,  $p_1 \leq p \leq p_2$ , que pertenezca a  $\mathfrak{S}$  es de equilibrio. Nótese que  $C_j$ , representado en la figura 5.8, es el punto intermedio entre los extremos de este segmento, esto es  $(p_1 + L_j, p_1)$  y  $(p_2 + L_j, p_2)$ .

- (c) Si  $C'_A - C'_B > T_{j-1}^N$  entonces el equilibrio está en la frontera de  $R_j$ , en la recta  $p_A - p_B = T_{j-1}$ . Sea  $(\bar{p}_A, \bar{p}_B) = (p + T_{j-1}, p)$ , esto es,  $(\bar{p}_A, \bar{p}_B)$  es un punto de la recta  $p_A - p_B = T_{j-1}$ . Se tiene:

$$\begin{aligned}\tilde{r}_A^j(p) &= \frac{1}{2}(p + C'_A + t_{jB} - t_{jA} + 2e_B\Lambda) \geq p + T_{j-1} \\ \Leftrightarrow p &\leq -2T_{j-1} + t_{jB} - t_{jA} + C'_A + 2e_B\Lambda = p_4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{r}_B^j(p + T_{j-1}) &= \frac{1}{2}(p + T_{j-1} + C'_B + t_{jA} - t_{jB} + 2e_A\Lambda) \leq p \\ \Leftrightarrow p &\geq T_{j-1} + t_{jA} - t_{jB} + C'_B + 2e_A\Lambda = p_3.\end{aligned}$$

Como  $C'_A - C'_B > T_{j-1}^N$ , puede comprobarse que  $p_3 < p_4$ . Entonces todo punto  $(p + T_{j-1}, p)$ ,  $p_3 \leq p \leq p_4$ , que pertenezca a  $\mathfrak{S}$  es de equilibrio. Nótese que  $D_j$ , representado en la figura 5.8, es el punto intermedio entre  $(p_3 + T_{j-1}, p_3)$  y  $(p_4 + T_{j-1}, p_4)$ .  $\square$

**Proposición 5.12** Sea  $K = C'_A + C'_B + 2(e_A + e_B)\Lambda$  y  $(p_A, p_B) \in \mathfrak{S}$ .

- (i)  $\tilde{p}_A^j + \tilde{p}_B^j = K$ ,  $j = 1, \dots, n$ .  
(ii)  $p_A + p_B \leq K \Leftrightarrow \tilde{r}_A^j(p_B) + \tilde{r}_B^j(p_A) \leq K$ ,  $j = 1, \dots, n$ .  
(iii) Si  $(p_A, p_B)$  es un punto fijo de  $\tilde{r}^j = (\tilde{r}_A^j, \tilde{r}_B^j)$ , entonces  $p_A + p_B = K$ .  
(iv) Si  $p_A + p_B \leq K$ , entonces

$$\tau_A^j(p_B) + \tau_B^j(p_A) \leq K + 2(e_A + e_B)(f_j - f_{j-1}), \quad j = 1, \dots, n.$$

### Demostración

- (i) Se tiene que

$$\begin{aligned}\tilde{p}_A^j + \tilde{p}_B^j &= \frac{1}{3}[2C'_A + C'_B + t_{jB} - t_{jA} + 2(e_A + e_B)\Lambda] \\ &\quad + \frac{1}{3}[C'_A + 2C'_B + t_{jA} - t_{jB} + 2(e_A + e_B)\Lambda] \\ &= K, \quad j = 1, \dots, n.\end{aligned}$$

(ii) Como

$$\begin{aligned}\tilde{r}_A^j(p_B) + \tilde{r}_B^j(p_A) &= \frac{1}{2}(p_A + p_B + C'_A + C'_B + 2(e_A + e_B)\Lambda) \\ &= \frac{1}{2}(p_A + p_B + K),\end{aligned}$$

entonces,

$$\tilde{r}_A^j(p_B) + \tilde{r}_B^j(p_A) \leq K \iff p_A + p_B \leq K.$$

(iii) Sea  $(p_A, p_B)$  un punto fijo de  $\tilde{r}^j = (\tilde{r}_A^j, \tilde{r}_B^j)$ . Entonces  $\tilde{r}_A^j(p_B) = p_A$ ,  $\tilde{r}_B^j(p_A) = p_B$  y

$$p_A + p_B = \tilde{r}_A^j(p_B) + \tilde{r}_B^j(p_A) = \frac{1}{2}(p_A + p_B + K),$$

de donde se deduce que  $p_A + p_B = K$ .

(iv) Se pueden presentar las siguientes situaciones:

$$(a) \left( \tilde{r}_A^j(p_B), p_B \right) \in R_j \text{ y } \left( p_A, \tilde{r}_B^j(p_A) \right) \in R_j$$

En este caso  $r_A^j(p_B) = \tilde{r}_A^j(p_B)$  y  $r_B^j(p_A) = \tilde{r}_B^j(p_A)$ . Teniendo en cuenta (ii) se deduce que

$$r_A^j(p_B) + r_B^j(p_A) = \tilde{r}_A^j(p_B) + \tilde{r}_B^j(p_A) \leq K.$$

$$(b) \left( \tilde{r}_A^j(p_B), p_B \right) \in R_j \text{ y } \left( p_A, \tilde{r}_B^j(p_A) \right) \notin R_j$$

En este caso

$$L_j \leq \tilde{r}_A^j(p_B) - p_B \leq T_{j-1}, \quad r_A^j(p_B) = \tilde{r}_A^j(p_B)$$

y ocurre que  $p_A - \tilde{r}_B^j(p_A) > T_{j-1}$  o  $p_A - \tilde{r}_B^j(p_A) < L_j$ .

(b.1) Si  $p_A - \tilde{r}_B^j(p_A) > T_{j-1}$  entonces  $r_B^j(p_A) = p_A - T_{j-1}$ . Además,

$$\begin{aligned}r_A^j(p_B) + r_B^j(p_A) &= \tilde{r}_A^j(p_B) + p_A - T_{j-1} \\ &\leq p_B + T_{j-1} + p_A - T_{j-1} \\ &= p_A + p_B \leq K.\end{aligned}$$

(b.2) Si  $p_A - \tilde{r}_B^j(p_A) < L_j$  entonces  $r_B^j(p_A) = p_A - L_j$ . Además,

$$\begin{aligned} r_A^j(p_B) + r_B^j(p_A) &= \tilde{r}_A^j(p_B) + p_A - L_j \\ &\leq p_B + T_{j-1} + p_A - L_j \\ &\leq K + T_{j-1} - L_j \\ &= K + 2(e_A + e_B)(f_j - f_{j-1}). \end{aligned}$$

(c)  $(\tilde{r}_A^j(p_B), p_B) \notin R_j$  y  $(p_A, \tilde{r}_B^j(p_A)) \in R_j$

En este caso

$$L_j \leq p_A - \tilde{r}_B^j(p_A) \leq T_{j-1}, \quad r_B^j(p_A) = \tilde{r}_B^j(p_A)$$

y ocurre que  $\tilde{r}_A^j(p_B) - p_B > T_{j-1}$  o  $\tilde{r}_A^j(p_B) - p_B < L_j$ .

(c.1) Si  $r_A(p_B) - p_B > T_{j-1}$  entonces  $r_A^j(p_B) = p_B + T_{j-1}$ . Además,

$$\begin{aligned} r_A^j(p_B) + r_B^j(p_A) &= p_B + T_{j-1} + \tilde{r}_B^j(p_A) \\ &\leq p_B + T_{j-1} + p_A - L_j \\ &\leq K + T_{j-1} - L_j \\ &= K + 2(e_A + e_B)(f_j - f_{j-1}). \end{aligned}$$

(c.2) Si  $r_A(p_B) - p_B < L_j$  entonces  $r_A^j(p_B) = p_B + L_j$ . Además,

$$\begin{aligned} r_A^j(p_B) + r_B^j(p_A) &= p_B + L_j + \tilde{r}_B^j(p_A) \\ &\leq p_B + L_j + p_A - L_j \\ &= p_A + p_B \leq K. \end{aligned}$$

(d)  $(\tilde{r}_A^j(p_B), p_B) \notin R_j$  y  $(p_A, \tilde{r}_B^j(p_A)) \notin R_j$

En este caso se pueden presentar las siguientes situaciones:

$$(d.1) \quad \tilde{r}_A^j(p_B) - p_B > T_{j-1} \text{ y } p_A - \tilde{r}_B^j(p_A) > T_{j-1}$$

En este caso

$$r_A^j(p_B) = p_B + T_{j-1} \quad \text{y} \quad r_B^j(p_A) = p_A - T_{j-1}.$$

Además,

$$\begin{aligned} r_A^j(p_B) + r_B^j(p_A) &= p_B + T_{j-1} + p_A - T_{j-1} \\ &= p_A + p_B \leq K. \end{aligned}$$

$$(d.2) \quad \tilde{r}_A^j(p_B) - p_B > T_{j-1} \quad \text{y} \quad p_A - \tilde{r}_B^j(p_A) < L_j$$

En este caso

$$r_A^j(p_B) = p_B + T_{j-1} \quad \text{y} \quad r_B^j(p_A) = p_A - L_j.$$

Además,

$$\begin{aligned} r_A^j(p_B) + r_B^j(p_A) &= p_B + T_{j-1} + p_A - L_j \\ &\leq K + T_{j-1} - L_j \\ &= K + 2(e_A + e_B)(f_j - f_{j-1}). \end{aligned}$$

$$(d.3) \quad \tilde{r}_A^j(p_B) - p_B < L_j \quad \text{y} \quad p_A - \tilde{r}_B^j(p_A) > T_{j-1}$$

En este caso

$$r_A^j(p_B) = p_B + L_j \quad \text{y} \quad r_B^j(p_A) = p_A - T_{j-1}.$$

Además,

$$\begin{aligned} r_A^j(p_B) + r_B^j(p_A) &= p_B + L_j + p_A - T_{j-1} \\ &< p_A + p_B \leq K. \end{aligned}$$

$$(d.4) \quad \tilde{r}_A^j(p_B) - p_B < L_j \quad \text{y} \quad p_A - \tilde{r}_B^j(p_A) < L_j$$

En este caso

$$r_A^j(p_B) = p_B + L_j \quad \text{y} \quad r_B^j(p_A) = p_A - L_j.$$

Además,

$$\begin{aligned} r_A^j(p_B) + r_B^j(p_A) &= p_B + L_j + p_A - L_j \\ &= p_A + p_B \leq K. \end{aligned}$$

□

Sea

$$\chi = \{(p_A, p_B) \in \mathfrak{R}^2 : p_A \geq C'_A, p_B \geq C'_B, p_A + p_B \leq K\},$$

donde  $K = C'_A + C'_B + 2\Lambda(e_A + e_B)$ . El conjunto  $\chi$  es el conjunto compacto representado en la figura 5.8. La consideración de esta restricción está motivada por la ecuación  $\tilde{p}_A^j + \tilde{p}_B^j = K$ . Si se prescinde de esta restricción, es posible un incremento indefinido en precios y no existiría equilibrio en  $S_h$ ,  $h = 1, \dots, n-1$ .

**Proposición 5.13** (*Equilibrios parciales en  $\chi$* )

(i) *Los equilibrios en  $S_n \cap \chi$  son los puntos  $(\bar{p}_A, \bar{p}_B) \in \chi$  tal que  $\bar{p}_A - \bar{p}_B = L_n$  y el segmento  $\overline{D_{n+1}C_n}$ , donde*

$$D_{n+1} = (C'_A, K - C'_A),$$

$$C_n = \left( \frac{1}{2}(K + L_n), \frac{1}{2}(K - L_n) \right).$$

(ii) *Los equilibrios en  $S_0 \cap \chi$  son los puntos  $(\bar{p}_A, \bar{p}_B) \in \chi$  tal que  $\bar{p}_A - \bar{p}_B = T_0$  y el segmento  $\overline{D_1C_0}$ , donde*

$$D_1 = \left( \frac{1}{2}(K + T_0), \frac{1}{2}(K - T_0) \right),$$

$$C_0 = (K - C'_B, C'_B).$$

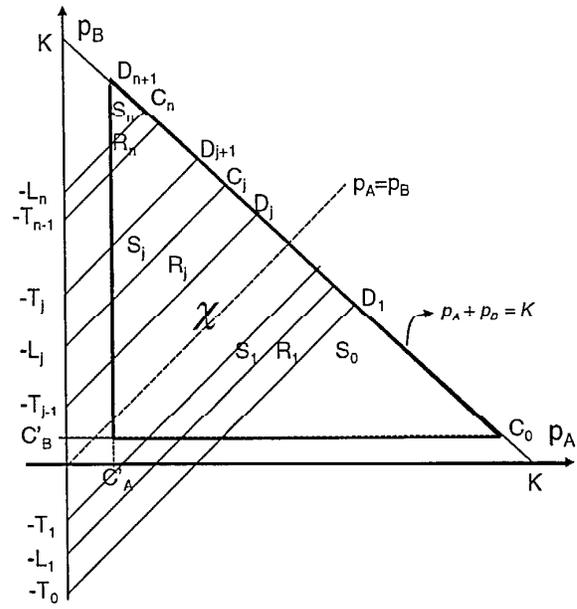


Figura 5.8: El conjunto  $\chi$

(iii) El conjunto de precios de equilibrio en  $S_j \cap \chi$ ,  $j = 1, \dots, n-1$ , es el segmento  $\overline{D_{j+1}C_j}$  donde

$$D_j = \left( \frac{1}{2}(K + T_{j-1}), \frac{1}{2}(K - T_{j-1}) \right),$$

$$C_j = \left( \frac{1}{2}(K + L_j), \frac{1}{2}(K - L_j) \right).$$

(iv) Existe equilibrio en  $R_j \cap \chi$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Además,

(a) Si  $L_j^N \leq C'_A - C'_B \leq T_{j-1}^N$ , entonces  $(\tilde{p}_A^j, \tilde{p}_B^j)$  es un equilibrio con

$$\tilde{p}_A^j = \frac{1}{3} [2C'_A + C'_B + t_{jB} - t_{jA} + 2(e_A + 2e_B)\Lambda],$$

$$\tilde{p}_B^j = \frac{1}{3} [C'_A + 2C'_B + t_{jA} - t_{jB} + 2(2e_A + e_B)\Lambda].$$

(b) Si  $C'_A - C'_B < L_j^N$ , entonces los puntos del conjunto

$$\chi \cap \left\{ (p + L_j, p) : p_1 \leq p \leq \frac{K - L_j}{2} \right\}$$

son de equilibrio, siendo  $p_1 = -2L_j + t_{jB} - t_{jA} + C'_A + 2e_B\Lambda$ .

(c) Si  $C'_A - C'_B > T_{j-1}^N$ , entonces los puntos del conjunto

$$\chi \cap \left\{ (p + T_{j-1}, p) : p_4 \leq p \leq \frac{K - T_{j-1}}{2} \right\}$$

son de equilibrio, siendo  $p_4 = -2T_{j-1} + t_{jB} - t_{jA} + C'_A + 2e_B\Lambda$ .

### Demostración

(i) Los puntos  $(\bar{p}_A, \bar{p}_B) \in \chi$  tal que  $\bar{p}_A - \bar{p}_B = L_n$  son equilibrios en  $S_n$  y, por tanto, también serán equilibrios en  $S_n \cap \chi \subset S_n$ . Por otra parte,  $\pi_B(p_A, p_B) - 0$  y  $\pi_A(p_A, p_B)$  es lineal y creciente en  $S_n$ . Por tanto, dado

$$(p_A, p_B) \in \overline{D_{n+1}C_n},$$

se tiene que  $r_A(p_B) = p_A$  y  $p_B \in r_B(p_A)$ , con lo que  $(p_A, p_B)$  es un equilibrio.

- (ii) Los puntos  $(\bar{p}_A, \bar{p}_B) \in \chi$  tal que  $\bar{p}_A - \bar{p}_B = L_0$  son equilibrios en  $S_0$  y, por tanto, también serán equilibrios en  $S_0 \cap \chi \subset S_0$ . Por otra parte,  $\pi_A(p_A, p_B) = 0$  y  $\pi_B(p_A, p_B)$  es lineal y creciente en  $S_0$ . Por tanto, dado

$$(p_A, p_B) \in \overline{D_1 C_0},$$

se tiene que  $p_A \in r_A(p_B)$  y  $r_B(p_A) = p_B$ , con lo que  $(p_A, p_B)$  es un equilibrio.

- (iii) Las funciones de beneficio  $\pi_i(p_A, p_B)$ ,  $i = A, B$ , son lineales y crecientes en  $S_j \cap \chi$ ,  $j = 1, \dots, n-1$ . Por tanto, dado  $(p_A, p_B) \in \overline{D_{j+1} C_j}$ , se tiene que  $r_A(p_B) = p_A$  y  $r_B(p_A) = p_B$ , con lo que  $(p_A, p_B)$  es un equilibrio. Por otra parte, para cada punto

$$(p_A, p_B) \in \{(S_j \cap \chi) - \overline{D_{j+1} C_j}\}$$

existe  $(p'_A, p'_B) \in S_j \cap \chi$  tal que  $p'_A > p_A$  o  $p'_B > p_B$ , por tanto  $\pi_A(p'_A, p_B) > \pi_A(p_A, p_B)$  o  $\pi_B(p_A, p'_B) > \pi_B(p_A, p_B)$ , y  $(p_A, p_B)$  no es un punto de equilibrio.

- (iv) (a) Si  $L_j^N \leq C'_A - C'_B \leq T_{j-1}^N$  entonces  $(\tilde{p}_A^j, \tilde{p}_B^j)$  es un equilibrio en  $R_j$  (proposición 5.11). Además, como  $\tilde{p}_A^j + \tilde{p}_B^j = K$  se tiene que

$$(\tilde{p}_A^j, \tilde{p}_B^j) \in R_j \cap \chi \subset R_j.$$

Entonces,  $(\tilde{p}_A^j, \tilde{p}_B^j)$  es también un equilibrio en  $R_j \cap \chi$ .

- (b) Si  $C'_A - C'_B < L_j^N$  entonces los puntos

$$\chi \cap \left\{ (p + L_j, p) : p_1 \leq p \leq \frac{K - L_j}{2} \right\}$$

son equilibrios en  $R_j$  (proposición 5.11). Entonces, dichos puntos son también equilibrios en  $R_j \cap \chi$ .

- (c) De forma similar al apartado (b). □

**Proposición 5.14** *Dados*

$$\tilde{p}_A^j = \frac{1}{3} [2C'_A + C'_B + t_{jB} - t_{jA} + 2(e_A + 2e_B) \Lambda],$$

$$\tilde{p}_B^j = \frac{1}{3} [C'_A + 2C'_B + t_{jA} - t_{jB} + 2(2e_A + e_B) \Lambda],$$

con  $j = 1, \dots, n$ , se tiene que:

(i)  $\tilde{p}_A^1 > \tilde{p}_A^2 > \dots > \tilde{p}_A^n$ .

(ii)  $\tilde{p}_B^1 < \tilde{p}_B^2 < \dots < \tilde{p}_B^n$ .

(iii) Si  $L_j^N \leq C'_A - C'_B \leq T_{j-1}^N$ , entonces

$$C'_A + 2(e_A + e_B) f_{j-1} \leq \tilde{p}_A^j \leq C'_A + 2(e_A + e_B) f_j$$

$$C'_B + 2(e_A + e_B) (\Lambda - f_j) \leq \tilde{p}_B^j \leq C'_B + 2(e_A + e_B) (\Lambda - f_{j-1}).$$

**Demostración**

(i) Como  $t_{jA} - t_{jB}$  crece con  $j$ , entonces  $\tilde{p}_A^j$  decrece con  $j$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

(ii) De forma similar a (i).

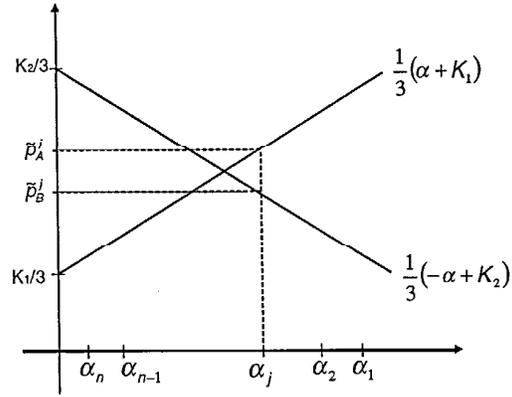
(iii) En efecto, como  $C'_B \leq C'_A - L_j^N$ , entonces

$$\begin{aligned} \tilde{p}_A^j &= \frac{1}{3} [2C'_A + C'_B + t_{jB} - t_{jA} + 2(e_A + 2e_B) \Lambda] \\ &\leq \frac{1}{3} [3C'_A - L_j^N + t_{jB} - t_{jA} + 2(e_A + 2e_B) \Lambda] \\ &= C'_A + 2(e_A + e_B) f_j. \end{aligned}$$

De forma similar, como  $C'_B \geq C'_A - T_{j-1}^N$ , entonces

$$\begin{aligned} \tilde{p}_A^j &= \frac{1}{3} [2C'_A + C'_B + t_{jB} - t_{jA} + 2(e_A + 2e_B) \Lambda] \\ &\geq \frac{1}{3} [3C'_A - T_{j-1}^N + t_{jB} - t_{jA} + 2(e_A + 2e_B) \Lambda] \\ &= C'_A + 2(e_A + e_B) f_{j-1}. \end{aligned}$$

Utilizando lo anterior y la igualdad  $\tilde{p}_A^j + \tilde{p}_B^j = K$  se deduce la acotación para  $\tilde{p}_B^j$ .  $\square$

Figura 5.9: Precios de equilibrio en  $R_j$ 

La figura 5.9 muestra los precios de equilibrio en  $R_j$  cuando

$$L_j^N \leq C'_A - C'_B \leq T_{j-1}^N, \quad j = 1, \dots, n,$$

suponiendo que  $K_1 < K_2$ ,  $\alpha_j = t_{jB} - t_{jA}$  y

$$\tilde{p}_A^j = \frac{1}{3}(\alpha_j + K_1),$$

$$\tilde{p}_B^j = \frac{1}{3}(-\alpha_j + K_2),$$

$$K_1 = 2C'_A + C'_B + 2(e_A + 2e_D)\Lambda,$$

$$K_2 = C'_A + 2C'_B + 2(2e_A + e_B)\Lambda.$$

El siguiente resultado compara los precios de equilibrio que maximizan los beneficios conjuntos e individuales sobre la recta

$$\chi \cap \{(p_A, p_B) : p_A + p_B = K\}.$$

**Proposición 5.15** Sean  $p_l^c$  y  $p_l^i$  los precios de la firma  $l$  que maximizan en

$$\chi \cap \{(p_A, p_B) : p_A + p_B = K\}$$

los beneficios conjuntos e individuales, respectivamente,  $l = A, B$ . Entonces:

(i) En  $S_j \cap \{(p_A, p_B) : p_A + p_B = K\}$ ,  $j = 0, \dots, n$ , se tiene

$$p_A^i = \frac{1}{2}(K + L_j),$$

$$p_B^i = \frac{1}{2}(K - T_j),$$

$$(p_A^c, p_B^c) = \begin{cases} C_j & \text{si } f_j > \frac{\Lambda}{2} \\ D_{j+1} & \text{si } f_j < \frac{\Lambda}{2}. \end{cases}$$

Si  $f_j = \frac{\Lambda}{2}$ , entonces  $(p_A^c, p_B^c) = (p_A, p_B)$ ,  $\forall (p_A, p_B) \in \overline{D_{j+1}C_j}$ . Además,

$$\begin{cases} p_A^i = p_A^c & \text{si } f_j > \frac{\Lambda}{2} \\ p_B^i = p_B^c & \text{si } f_j < \frac{\Lambda}{2}. \end{cases}$$

(ii) En  $R_j \cap \{(p_A, p_B) : p_A + p_B = K\}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , se tiene que

$$(p_A^c, p_B^c) = \begin{cases} C_j & \text{si } p_A^{*c} < \frac{L_j + K}{2} \\ (p_A^{*c}, p_B^{*c}) & \text{si } \frac{L_j + K}{2} \leq p_A^{*c} \leq \frac{T_{j-1} + K}{2} \\ D_j & \text{si } p_A^{*c} > \frac{T_{j-1} + K}{2}, \end{cases}$$

donde

$$p_A^{*c} = \frac{1}{4}(3C'_A + C'_B + t_{jB} - t_{jA} + (3e_A + 5e_B)\Lambda),$$

$$p_B^{*c} = \frac{1}{4}(C'_A + 3C'_B - t_{jB} + t_{jA} + (5e_A + 3e_B)\Lambda).$$

Además, si la firma  $A$  maximiza su beneficio individual (líder) y la firma  $B$  fija el precio  $p_B^i = K - p_A^i$  (seguidora), entonces

$$(p_A^i, p_B^i) = \begin{cases} C_j & \text{si } p_A^{*i} < \frac{L_j + K}{2} \\ (p_A^{*i}, p_B^{*i}) & \text{si } \frac{L_j + K}{2} \leq p_A^{*i} \leq \frac{T_{j-1} + K}{2} \\ D_j & \text{si } p_A^{*i} > \frac{T_{j-1} + K}{2}, \end{cases}$$

donde

$$p_A^{*i} = \frac{1}{4} (3C'_A + C'_B + t_{jB} - t_{jA} + 2(e_A + 2e_B) \Lambda),$$

$$p_B^{*i} = \frac{1}{4} (C'_A + 3C'_B - t_{jB} + t_{jA} + 2(3e_A + 2e_B) \Lambda).$$

**Demostración Sea**

$$\pi^c(p_A, p_B) = \pi_A(p_A, p_B) + \pi_B(p_A, p_B).$$

(i) En  $S_j$  se tiene

$$\pi^c(p_A, p_B) = (p_A - C'_A) f_j + (p_B - C'_B) (\Lambda - f_j).$$

Como  $p_A + p_B = K$ , entonces

$$\begin{aligned} \pi^c(p_A, p_B) &= (p_A - C'_A) f_j + (K - p_A - C'_B) (\Lambda - f_j) \\ &= (2f_j - \Lambda) p_A + (C'_B - C'_A - K) f_j + (K - C'_B) \Lambda \end{aligned}$$

y los precios que maximizan el beneficio conjunto son

$$(p_A^c, p_B^c) = \begin{cases} C_j & \text{si } f_j > \frac{\Lambda}{2} \\ D_{j+1} & \text{si } f_j < \frac{\Lambda}{2}. \end{cases}$$

Si  $f_j = \frac{\Lambda}{2}$ , entonces el beneficio conjunto no depende de  $p_A$ .

El máximo de  $\pi_A(p_A, p_B) = (p_A - C'_A) f_j$  en

$$S_j \cap \{(p_A, p_B) : p_A + p_B = K\}$$

se alcanza para el valor mayor de  $p_A$ , esto es  $p_A^i = \frac{1}{2} (K + L_j)$ . De forma similar,  $\pi_B(p_A, p_B) = (p_B - C'_B) (\Lambda - f_j)$  es máximo para el valor mayor de  $p_B$ , esto es  $p_B^i = \frac{1}{2} (K - T_j)$ .

(ii) En  $R_j \cap \{(p_A, p_B) : p_A + p_B = K\}$  se tiene que

$$\begin{aligned}\pi^c(p_A, p_B) &= (p_A - C'_A) \left( \frac{p_B - p_A + t_{jB} - t_{jA} + 2e_B \Lambda}{2(e_A + e_B)} \right) \\ &\quad + (p_B - C'_B) \left( \frac{p_A - p_B + t_{jA} - t_{jB} + 2e_A \Lambda}{2(e_A + e_B)} \right) \\ &= (p_A - C'_A) \left( \frac{K - 2p_A + t_{jB} - t_{jA} + 2e_B \Lambda}{2(e_A + e_B)} \right) \\ &\quad + (K - p_A - C'_B) \left( \frac{2p_A - K + t_{jA} - t_{jB} + 2e_A \Lambda}{2(e_A + e_B)} \right).\end{aligned}$$

El máximo de  $\pi^c$  es

$$p_A^{*c} = \frac{1}{4} (3C'_A + C'_B + t_{jB} - t_{jA} + (3e_A + 5e_B) \Lambda)$$

si  $L_j \leq p_A^{*c} - (K - p_A^{*c}) \leq T_{j-1}$ , es decir

$$\frac{L_j + K}{2} \leq p_A^{*c} \leq \frac{T_{j-1} + K}{2}.$$

Entonces,

$$(p_A^c, p_B^c) = \begin{cases} C_j & \text{si } p_A^{*c} < \frac{L_j + K}{2} \\ (p_A^{*c}, p_B^{*c}) & \text{si } \frac{L_j + K}{2} \leq p_A^{*c} \leq \frac{T_{j-1} + K}{2} \\ D_j & \text{si } p_A^{*c} > \frac{T_{j-1} + K}{2}, \end{cases}$$

donde

$$p_B^{*c} = K - p_A^{*c} = \frac{1}{4} (C'_A + 3C'_B - t_{jB} + t_{jA} + (5e_A + 3e_B) \Lambda).$$

El máximo del beneficio individual

$$\begin{aligned}\pi_A(p_A, p_B) &= (p_A - C'_A) \left( \frac{p_B - p_A + t_{jB} - t_{jA} + 2e_B \Lambda}{2(e_A + e_B)} \right) \\ &= (p_A - C'_A) \left( \frac{K - 2p_A + t_{jB} - t_{jA} + 2e_B \Lambda}{2(e_A + e_B)} \right),\end{aligned}$$

se obtiene para

$$p_A^{*i} = \frac{1}{4} (3C'_A + C'_B + t_{jB} - t_{jA} + 2(e_A + 2e_B) \Lambda),$$

si  $L_j \leq p_A^{*i} - (K - p_A^{*i}) \leq T_{j-1}$ , es decir

$$\frac{L_j + K}{2} \leq p_A^{*i} \leq \frac{T_{j-1} + K}{2}.$$

Entonces,

$$(p_A^i, p_B^i) = \begin{cases} C_j & \text{si } p_A^{*i} < \frac{L_j + K}{2} \\ (p_A^{*i}, p_B^{*i}) & \text{si } \frac{L_j + K}{2} \leq p_A^{*i} \leq \frac{T_{j-1} + K}{2} \\ D_j & \text{si } p_A^{*i} > \frac{T_{j-1} + K}{2}, \end{cases}$$

donde

$$p_B^{*i} = K - p_A^{*i} = \frac{1}{4} (C'_A + 3C'_B - t_{jB} + t_{jA} + 2(3e_A + 2e_B) \Lambda).$$

□

**Proposición 5.16** (*Equilibrio global*)

(i) Si  $j_0 \in \{1, \dots, n\}$  verifica  $L_{j_0}^N \leq C'_A - C'_B \leq T_{j_0-1}^N$  entonces  $(\bar{p}_A, \bar{p}_B) = (\tilde{p}_A^{j_0}, \tilde{p}_B^{j_0})$  constituye un equilibrio global en  $\chi$  y los beneficios son

$$\pi_A(\bar{p}_A, \bar{p}_B) = \frac{1}{18(e_A + e_B)} (C'_B - C'_A + t_{j_0B} - t_{j_0A} + 2(e_A + 2e_B) \Lambda)^2,$$

$$\pi_B(\bar{p}_A, \bar{p}_B) = \frac{1}{18(e_A + e_B)} (C'_A - C'_B + t_{j_0A} - t_{j_0B} + 2(2e_A + e_B) \Lambda)^2.$$

Además, si

$$L_{j_0}^N < C'_A - C'_B < T_{j_0-1}^N,$$

entonces  $(\tilde{p}_A^{j_0}, \tilde{p}_B^{j_0})$  es un equilibrio global en el rectángulo

$$\left\{ (p_A, p_B) \in \mathfrak{R}^2 : C'_A \leq \tilde{p}_A^{j_0} \leq \tilde{p}_B^{j_0} + T_{j_0-1}, C'_B \leq \tilde{p}_B^{j_0} \leq \tilde{p}_A^{j_0} - L_{j_0} \right\}.$$

(ii) Si  $C'_A - C'_B < L_n^N$ , entonces  $\bar{p}_A = C'_B + L_n$  y la firma B no entra en el mercado.

(iii) Si  $C'_A - C'_B > T_0^N$ , entonces  $\bar{p}_B = C'_A - T_0$  y la firma A no entra en el mercado.

**Demostración**

(i) Se comprobará que dado  $\tilde{p}_B^{j_0}$ , la mejor opción para  $A$  es  $\tilde{p}_A^{j_0}$  y viceversa.

Si  $L_{j_0}^N \leq C'_A - C'_B \leq T_{j_0-1}^N$ , entonces  $(\tilde{p}_A^{j_0}, \tilde{p}_B^{j_0}) \in R_{j_0}$  y

$$\{(p_A, \tilde{p}_B^{j_0}) : p_A \geq C'_A\} \cap (S_j \cap \chi) = \emptyset, \forall j < j_0,$$

$$\{(p_A, \tilde{p}_B^{j_0}) : p_A \geq C'_A\} \cap (R_j \cap \chi) = \emptyset, \forall j < j_0,$$

$$\{(\tilde{p}_A^{j_0}, p_B) : p_B \geq C'_B\} \cap (S_j \cap \chi) = \emptyset, \forall j \geq j_0,$$

$$\{(\tilde{p}_A^{j_0}, p_B) : p_B \geq C'_B\} \cap (R_j \cap \chi) = \emptyset, \forall j > j_0.$$

(i.1) Sea  $p_B = \tilde{p}_B^{j_0}$  y  $j \geq j_0 + 1$  tal que

$$(R_j \cap \chi) \cap \{(p_A, \tilde{p}_B^{j_0}) : p_A \geq C'_A\} \neq \emptyset.$$

Como

$$t_{j_0 B} - t_{j_0 A} > t_{j B} - t_{j A}, \forall j \geq j_0 + 1,$$

entonces

$$\begin{aligned} \pi_{A|_{R_{j_0}}} (p_A, \tilde{p}_B^{j_0}) &= (p_A - C'_A) \left( \frac{\tilde{p}_B^{j_0} - p_A + t_{j_0 B} - t_{j_0 A} + 2e_B \Lambda}{2(e_A + e_B)} \right) \\ &> (p_A - C'_A) \left( \frac{\tilde{p}_B^{j_0} - p_A + t_{j B} - t_{j A} + 2e_B \Lambda}{2(e_A + e_B)} \right) \\ &= \pi_{A|_{R_j}} (p_A, \tilde{p}_B^{j_0}), \forall p_A \geq C'_A. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \max_{(p_A, \tilde{p}_B^{j_0}) \in R_{j_0}} \pi_{A|_{R_{j_0}}} (p_A, \tilde{p}_B^{j_0}) &= \max_{p_A \geq C'_A} \pi_{A|_{R_{j_0}}} (p_A, \tilde{p}_B^{j_0}) \\ &> \max_{p_A \geq C'_A} \pi_{A|_{R_j}} (p_A, \tilde{p}_B^{j_0}) \\ &\geq \max_{(p_A, \tilde{p}_B^{j_0}) \in R_j} \pi_{A|_{R_j}} (p_A, \tilde{p}_B^{j_0}). \end{aligned}$$

(i.2) Sea  $p_B = \tilde{p}_B^{j_0}$  y  $j \geq j_0$  tal que

$$(S_j \cap \chi) \cap \left\{ (p_A, \tilde{p}_B^{j_0}) : p_A \geq C'_A \right\} \neq \emptyset.$$

Entonces, teniendo en cuenta (i.1) se sigue que

$$\begin{aligned} \pi_A \left( \tilde{p}_A^{j_0}, \tilde{p}_B^{j_0} \right) &\geq \max_{(p_A, \tilde{p}_B^{j_0}) \in R_j} \pi_A \Big|_{R_j} \left( p_A, \tilde{p}_B^{j_0} \right) \\ &\geq \max_{(p_A, \tilde{p}_B^{j_0}) \in R_j \cap S_j} \pi_A \Big|_{R_j} \left( p_A, \tilde{p}_B^{j_0} \right) \\ &= \max_{(p_A, \tilde{p}_B^{j_0}) \in S_j} \pi_A \Big|_{S_j} \left( p_A, \tilde{p}_B^{j_0} \right) \\ &= \pi_A \left( L_j + \tilde{p}_B^{j_0}, \tilde{p}_B^{j_0} \right). \end{aligned}$$

(i.3) De forma similar a (i.1), sea  $p_A = \tilde{p}_A^{j_0}$  y  $j \leq j_0 - 1$  tal que

$$(R_j \cap \chi) \cap \left\{ (\tilde{p}_A^{j_0}, p_B) : p_B \geq C'_B \right\} \neq \emptyset.$$

Como

$$t_{j_0 A} - t_{j_0 B} > t_{j A} - t_{j B}, \quad \forall j \leq j_0 - 1,$$

se sigue que

$$\begin{aligned} \pi_B \Big|_{R_{j_0}} \left( \tilde{p}_A^{j_0}, p_B \right) &= (p_B - C'_B) \left( \frac{\tilde{p}_A^{j_0} - p_B + t_{j_0 A} - t_{j_0 B} + 2e_A \Lambda}{2(e_A + e_B)} \right) \\ &> (p_B - C'_B) \left( \frac{\tilde{p}_A^{j_0} - p_B + t_{j A} - t_{j B} + 2e_A \Lambda}{2(e_A + e_B)} \right) \\ &= \pi_B \Big|_{R_j} \left( \tilde{p}_A^{j_0}, p_B \right), \quad \forall p_B \geq C'_B. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \max_{(\tilde{p}_A^{j_0}, p_B) \in R_{j_0}} \pi_B \Big|_{R_{j_0}} \left( \tilde{p}_A^{j_0}, p_B \right) &= \max_{p_B \geq C'_B} \pi_B \Big|_{R_{j_0}} \left( \tilde{p}_A^{j_0}, p_B \right) \\ &> \max_{p_B \geq C'_B} \pi_B \Big|_{R_j} \left( \tilde{p}_A^{j_0}, p_B \right) \\ &\geq \max_{(\tilde{p}_A^{j_0}, p_B) \in R_j} \pi_B \Big|_{R_j} \left( \tilde{p}_A^{j_0}, p_B \right). \end{aligned}$$

(i.4) De forma similar a (i.2), sea  $p_A = \tilde{p}_A^{j_0}$  y  $j \leq j_0 - 1$  tal que

$$(S_j \cap \chi) \cap \left\{ \left( \tilde{p}_A^{j_0}, p_B \right) : p_B \geq C'_B \right\} \neq \emptyset.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \pi_B \left( \tilde{p}_A^{j_0}, \tilde{p}_B^{j_0} \right) &> \max_{(\tilde{p}_A^{j_0}, p_B) \in R_{j+1}} \pi_B|_{R_{j+1}} \left( \tilde{p}_A^{j_0}, p_B \right) \\ &\geq \max_{(\tilde{p}_A^{j_0}, p_B) \in R_{j+1} \cap S_j} \pi_B|_{R_{j+1}} \left( \tilde{p}_A^{j_0}, p_B \right) \\ &= \max_{(\tilde{p}_A^{j_0}, p_B) \in S_j} \pi_B|_{S_j} \left( \tilde{p}_A^{j_0}, p_B \right) \\ &= \pi_B \left( \tilde{p}_A^{j_0}, \tilde{p}_A^{j_0} - T_j \right). \end{aligned}$$

Es fácil deducir que si

$$L_{j_0}^N < C'_A - C'_B < T_{j_0-1}^N,$$

entonces  $\left( \tilde{p}_A^{j_0}, \tilde{p}_B^{j_0} \right)$  es un equilibrio global en el rectángulo

$$\left\{ (p_A, p_B) \in \mathfrak{R}^2 : C'_A \leq \tilde{p}_A^{j_0} \leq \tilde{p}_B^{j_0} + T_{j_0-1}, C'_B \leq \tilde{p}_B^{j_0} \leq \tilde{p}_A^{j_0} - L_{j_0} \right\}.$$

(ii) Si  $C'_A - C'_B < L_n^N$ , entonces

$$\bar{p}_A - p_B \leq \bar{p}_A - C'_B = L_n, \forall p_B \geq C'_B$$

y, por tanto,  $(\bar{p}_A, p_B) \in S_n$ . En este caso,  $A$  captura toda la demanda y la mejor respuesta de  $B$  es no entrar en el mercado. Por otro lado, si  $B$  no entra en el mercado, la demanda deberá ser satisfecha por  $A$ . La mejor respuesta de  $A$  será fijar el precio máximo posible dentro de la región  $S_n$ , esto es  $\bar{p}_A = C'_B + L_n$ .

(iii) Similar a (ii). □

**Proposición 5.16'** Si  $L_j^N \leq C'_A - C'_B \leq T_{j-1}^N$ , entonces:

- (i)  $C'_B - C'_A + t_{jB} - t_{jA} + 2(e_A + 2e_B) \Lambda \geq 0$ ,
- (ii)  $C'_A - C'_B + t_{jA} - t_{jB} + 2(2e_A + e_B) \Lambda \geq 0$ .

**Demostración**(i) Como  $C'_A - C'_B \leq T_{j-1}^N$ , entonces

$$\begin{aligned} 0 &\leq C'_B - C'_A + t_{jB} - t_{jA} + 2(e_A + 2e_B)\Lambda - 6(e_A + e_B)f_{j-1} \\ &\leq C'_B - C'_A + t_{jB} - t_{jA} + 2(e_A + 2e_B)\Lambda. \end{aligned}$$

(ii) Como  $L_j^N \leq C'_A - C'_B$ , entonces

$$\begin{aligned} 0 &\leq C'_A - C'_B + t_{jA} - t_{jB} - 2(e_A + 2e_B)\Lambda + 6(e_A + e_B)f_j \\ &\leq C'_A - C'_B + t_{jA} - t_{jB} - 2(e_A + 2e_B)\Lambda + 6(e_A + e_B)\Lambda \\ &= C'_A - C'_B + t_{jA} - t_{jB} + 2(2e_A + e_B)\Lambda. \end{aligned}$$

□

**5.2.3.3 Localizaciones de equilibrio en árboles**

Se estudia el equilibrio de la primera etapa en árboles, suponiendo que existe  $j_0 \in \{1, \dots, n\}$  tal que

$$L_{j_0}^N \leq C'_A - C'_B \leq T_{j_0-1}^N,$$

es decir, que  $(\bar{p}_A, \bar{p}_B) = (\tilde{p}_A^{j_0}, \tilde{p}_B^{j_0})$  constituye un equilibrio global en precios en  $\mathcal{X}$ , global en el rectángulo

$$\left\{ (p_A, p_B) \in \mathfrak{R}^2 : C'_A \leq \tilde{p}_A^{j_0} \leq \tilde{p}_B^{j_0} + T_{j_0-1}^N, C'_B \leq \tilde{p}_B^{j_0} \leq \tilde{p}_A^{j_0} - L_{j_0} \right\}$$

y local en  $\mathfrak{X}$ .

**Proposición 5.17** Sea  $T(V, E)$  un árbol y  $t(x, y) = t(\delta_{xy}) = \alpha\delta_{xy}$ ,  $\alpha > 0$ . Supongamos que  $(\bar{x}_A, \bar{x}_B) \in T \times T$  es un equilibrio y que existe  $v_{j_0} \in V$  tal que

$$t_{j_0}(\bar{x}_B) - t_{j_0}(\bar{x}_A) + \beta_{j_0} \leq C'_A - C'_B \leq t_{j_0}(\bar{x}_B) - t_{j_0}(\bar{x}_A) + \beta_{j_0-1},$$

con  $\beta_j = 2(e_A + 2e_B)\Lambda - 6(e_A + e_B)f_j$ .

(i) Si  $\bar{x}_A \in E(u_A, v_A)$  y  $\bar{x}_B \in E(u_B, v_B)$ , con  $E(u_A, v_A) \neq E(u_B, v_B)$  y

$$t_{j_0}(x_B) - t_{j_0}(x_A) + \beta_{j_0} \leq C'_A - C'_B \leq t_{j_0}(x_B) - t_{j_0}(x_A) + \beta_{j_0-1},$$

$\forall x_A \in E(u_A, v_A), \forall x_B \in E(u_B, v_B)$ , entonces

$$(\bar{x}_A, \bar{x}_B) \in \{(u_A, u_B), (u_A, v_B), (v_A, u_B), (v_A, v_B)\}.$$

(ii) Si  $\bar{x}_A, \bar{x}_B \in E(u, v)$  y

$$t(u, v) + \beta_{j_0} \leq C'_A - C'_B \leq -t(u, v) + \beta_{j_0-1},$$

entonces  $(\bar{x}_A, \bar{x}_B) \in \{(u, u), (v, v)\}$ .

**Demostración** Como  $T$  es un árbol, existe un único camino entre  $\bar{x}_A$  y  $\bar{x}_B$ . Sea  $P(\bar{x}_A, \bar{x}_B)$  este camino. Para cada arista  $E(v_i, v_j)$  se define

$$V(v_i, v_j) = \{v \in V : \delta(v, v_i) < \delta(v, v_j)\},$$

$$V(v_j, v_i) = V^c(v_i, v_j) = \{v \in V : \delta(v, v_j) < \delta(v, v_i)\}.$$

Se verifica que  $v_i \in V(v_i, v_j), \forall E(v_i, v_j) \in E$ .

(i) Si  $\bar{x}_A$  y  $\bar{x}_B$  se encuentran en aristas distintas. Podemos suponer que  $u_A, v_A \in V(u_B, v_B)$ . Entonces,  $\forall v \in V(u_A, v_A)$  se tiene que

$$\begin{aligned} \delta(v, \bar{x}_B) - \delta(v, \bar{x}_A) &= (\delta(v, u_A) + \delta(u_A, \bar{x}_B)) - (\delta(v, u_A) + \delta(u_A, \bar{x}_A)) \\ &= \delta(u_A, \bar{x}_B) - \delta(u_A, \bar{x}_A) \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$t(v, \bar{x}_B) - t(v, \bar{x}_A) = t(u_A, \bar{x}_B) - t(u_A, \bar{x}_A),$$

con lo que podemos agrupar las demandas de los  $v \in V(u_A, v_A)$  en  $u_A$ . Análogamente,  $\forall v \in V(v_B, u_B)$  se tiene que

$$\begin{aligned} \delta(v, \bar{x}_B) - \delta(v, \bar{x}_A) &= (\delta(v, v_B) + \delta(v_B, \bar{x}_B)) - (\delta(v, v_B) + \delta(v_B, \bar{x}_A)) \\ &= \delta(v_B, \bar{x}_B) - \delta(v_B, \bar{x}_A). \end{aligned}$$

Por tanto, las demandas de los nodos  $v \in V(v_B, u_B)$  pueden agregarse en  $v_B$ . De forma similar, el resto de los nodos que no están en el camino  $P(u_A, v_B)$  pueden agregarse al nodo del camino  $P(u_A, v_B)$  más próximo. Por tanto, el problema se reduce al árbol lineal  $P(u_A, v_B)$ .

Reordenemos los nodos de forma que

$$P(u_A, v_B) = \{E(v_i, v_{i+1})\}_{i=1, \dots, m-1}.$$

Entonces,  $v_1 = u_A, v_2 = v_A, v_{m-1} = u_B, v_m = v_B$ . Puede suponerse que  $\bar{x}_A \neq v_2$  y  $\bar{x}_B \neq v_{m-1}$ . Esto siempre es posible, ya que si  $\bar{x}_A = v_2$  la demanda de  $v_1$  puede agregarse en  $v_2$ . De forma similar ocurre si  $\bar{x}_B = v_{m-1}$ . Se tiene que

$$\delta(v_j, \bar{x}_B) - \delta(v_j, \bar{x}_A) > \delta(v_{j+1}, \bar{x}_B) - \delta(v_{j+1}, \bar{x}_A), \quad 2 \leq j \leq m-1,$$

y entonces

$$t_j(x_B) - t_j(x_A) > t_{j+1}(x_B) - t_{j+1}(x_A), \quad 2 \leq j \leq m-1,$$

$$\forall x_A \in E(v_1, v_2), \forall x_B \in E(v_{m-1}, v_m).$$

Sea  $1 \leq j_0 \leq m$ , tal que

$$t_{j_0}(\bar{x}_B) - t_{j_0}(\bar{x}_A) + \beta_{j_0} \leq C'_A - C'_B \leq t_{j_0}(\bar{x}_B) - t_{j_0}(\bar{x}_A) + \beta_{j_0-1}.$$

Se tiene que  $(\tilde{p}_A^{j_0}, \tilde{p}_B^{j_0})$  es un equilibrio global en precios. Como

$$t_{j_0}(\bar{x}_B) - t_{j_0}(x_A) + \beta_{j_0} \leq C'_A - C'_B \leq t_{j_0}(\bar{x}_B) - t_{j_0}(x_A) + \beta_{j_0-1},$$

$\forall x_A \in E(v_1, v_2)$ , entonces para los precios de equilibrio se tiene que

$$\pi_A(x_A) = \frac{1}{18(e_A + e_B)} (C'_B - C'_A + t_{j_0}(\bar{x}_B) - \alpha d(v_{j_0}, x_A) + 2(e_A + 2e_B)\Lambda)^2.$$

Si  $l = \delta(v_1, v_2)$ , para  $x_A \in E(v_1, v_2)$  podemos escribir

$$\delta(v_1, x_A) = \theta l, \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

(i.1) Si  $j_0 \neq 1$ , entonces

$$\delta(v_{j_0}, x_A) = \delta(v_{j_0}, v_2) + (1 - \theta)l, \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

Sea

$$f_A(\theta) = (C'_B - C'_A + t_{j_0}(\bar{x}_B) - \alpha d(v_{j_0}, v_2) - \alpha(1 - \theta)l + 2(e_A + 2e_B)\Lambda)^2, \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

Como

$$C'_A - C'_B \leq t_{j_0}(\bar{x}_B) - t_{j_0}(\bar{x}_A) + \beta_{j_0-1},$$

entonces

$$C'_B - C'_A + t_{j_0}(\bar{x}_B) - t_{j_0}(\bar{x}_A) + \beta_{j_0-1} \geq 0.$$

Además, se tiene que

$$\beta_{j_0-1} < 2(e_A + 2e_B)\Lambda.$$

Entonces,

$$C'_B - C'_A + t_{j_0}(\bar{x}_B) - \alpha d(v_{j_0}, v_2) - \alpha(1 - \theta)l + 2(e_A + 2e_B)\Lambda > 0,$$

para  $0 \leq \theta \leq 1$ , luego el máximo de su cuadrado está en  $\theta = 1$ .

Entonces,  $\bar{x}_A = v_2$ .

- (i.2) Si  $j_0 = 1$ , entonces  $\delta(v_{j_0}, x_A) = \theta l$ ,  $0 \leq \theta \leq 1$ , y procediendo como en (i.1) se concluye que  $\bar{x}_A = v_1$ .

Razonando de forma similar para  $\bar{x}_B$ , se concluye que como  $\forall x_B \in E(v_{m-1}, v_m)$ , se cumple la relación

$$t_{j_0}(x_B) - t_{j_0}(\bar{x}_A) + \beta_{j_0} \leq C'_A - C'_B \leq t_{j_0}(x_B) - t_{j_0}(\bar{x}_A) + \beta_{j_0-1},$$

el óptimo es  $\bar{x}_B = v_{m-1}$  si  $j_0 \neq m$  y  $\bar{x}_B = v_m$  si  $j_0 = m$ . Entonces,

$$(\bar{x}_A, \bar{x}_B) \in \{(v_1, v_{m-1}), (v_2, v_{m-1}), (v_2, v_m)\}.$$

- (ii) Si  $x_A$  y  $x_B$  se encuentran en la misma arista, el problema se reduce a la arista  $E(u, v)$  pues las demandas de los nodos de  $V(u, v)$  se agregan en  $u$  y las de  $V(v, u)$  se agregan en  $v$ .

Sean  $v_1 = u, v_2 = v$  y  $l = \delta(u, v)$ . Entonces,  $\forall x \in E(v_1, v_2)$ , podemos escribir  $x = \theta l$ , con  $0 \leq \theta \leq 1$ . Sea  $\bar{x}_A = \theta_A l$  y  $\bar{x}_B = \theta_B l$ . Se utilizará  $\bar{x}_A < (\leq) \bar{x}_B$  y  $\theta_A < (\leq) \theta_B$  indistintamente. Podemos suponer que  $\bar{x}_A \leq \bar{x}_B$ .

Como

$$\delta(v_1, x_B) - \delta(v_1, x_A) > \delta(v_2, x_B) - \delta(v_2, x_A), \quad \forall x_A < x_B,$$

entonces

$$t_1(x_B) - t_1(x_A) > t_2(x_B) - t_2(x_A), \quad \forall x_A < x_B, \quad x_A, x_B \in E(v_1, v_2).$$

Sea  $j_0 \in \{1, 2\}$  tal que

$$t_{j_0}(\bar{x}_B) - t_{j_0}(\bar{x}_A) + \beta_{j_0} \leq C'_A - C'_B \leq t_{j_0}(\bar{x}_B) - t_{j_0}(\bar{x}_A) + \beta_{j_0-1}.$$

Atendiendo a la definición de  $\beta_j$ , se tiene que

$$\beta_0 = 2(e_A + 2e_B)\Lambda,$$

$$\beta_1 = 2(e_A + 2e_B)\Lambda - 6(e_A + e_B)f_1,$$

$$\beta_2 = -2(2e_A + e_B)\Lambda,$$

y  $\beta_2 < \beta_1 < \beta_0$ .

- (ii.1) Supongamos en primer lugar que  $j_0 = 1$ . Fijado  $\bar{x}_B$ , se cumple que  
 $t_1(\bar{x}_B) - t_1(x_A) + \beta_1 \leq C'_A - C'_B \leq t_1(\bar{x}_B) - t_1(x_A) + \beta_0, \forall x_A \leq \bar{x}_B$ .

Sea

$$f_A(\theta) = (C'_B - C'_A + t_1(\bar{x}_B) - \alpha\theta l + 2(e_A + 2e_B)\Lambda)^2,$$

que es una función convexa de  $\theta$ . Como

$$\begin{aligned} & C'_B - C'_A + t_1(\bar{x}_B) - t_1(x_A) + \beta_0 \\ &= C'_B - C'_A + t_1(\bar{x}_B) - \alpha\theta l + 2(e_A + 2e_B)\Lambda \geq 0, \forall \theta \leq \theta_B, \end{aligned}$$

entonces  $\max_{0 \leq \theta \leq \theta_B} f_A(\theta)$  tiene solución óptima en  $\theta = 0$ . Dado que  $\pi_A(x_A, \bar{x}_B) = f_A(\theta)$ , el valor máximo de  $\pi_A$  se alcanza en  $\bar{x}_A = v_1$ .

Por otra parte, fijado  $\bar{x}_A = v_1$ , se cumple que

$$t_1(x_B) + \beta_1 \leq C'_A - C'_B \leq t_1(x_B) + \beta_0, \forall x_B \geq v_1.$$

Sea

$$f_B(\theta) = (C'_A - C'_B - \alpha\theta l + 2(2e_A + e_B)\Lambda)^2,$$

que es una función convexa de  $\theta$ . Como

$$C'_A - C'_B - t_1(x_B) - \beta_1 \geq 0, \forall x_B \geq v_1,$$

entonces

$$\max_{0 \leq \theta \leq 1} f_B(\theta)$$

tiene solución óptima en  $\theta = 0$ . Entonces, como  $\pi_B(\bar{x}_A, x_B) = f_B(\theta)$ , el valor máximo de  $\pi_B$  se alcanza en  $\bar{x}_B = v_1$ .

De lo dicho anteriormente se deduce que el equilibrio

$$(\bar{x}_A, \bar{x}_B) = (v_1, v_1).$$

- (ii.2) Supongamos ahora que  $j_0 = 2$ . Se tiene que

$$\delta(v_2, x_A) = (1 - \theta_A)l, \quad \delta(v_2, x_B) = (1 - \theta_B)l.$$

Fijado  $\bar{x}_A$ , se cumple que

$$t_2(x_B) - t_2(\bar{x}_A) + \beta_2 \leq C'_A - C'_B \leq t_2(x_B) - t_2(\bar{x}_A) + \beta_1, \forall x_B \geq \bar{x}_A.$$

Sea

$$f_B(\theta) = (C'_A - C'_B + t_2(\bar{x}_A) - \alpha(1 - \theta)l + 2(2e_A + e_B)\Lambda)^2.$$

Como

$$\begin{aligned} & C'_A - C'_B - t_2(x_B) + t_2(\bar{x}_A) - \beta_2 \\ &= C'_A - C'_B + t_2(\bar{x}_A) - \alpha(1 - \theta)l + 2(2e_A + e_B)\Lambda \geq 0, \forall \theta \geq \theta_A, \end{aligned}$$

entonces

$$\max_{\theta_A \leq \theta \leq 1} f_B(\theta)$$

tiene solución óptima en  $\theta = 1$ . Entonces, como  $\pi_B(\bar{x}_A, x_B) = f_B(\theta)$ , el valor máximo de  $\pi_B$  se alcanza en  $\bar{x}_B = v_2$ .

Por otra parte, fijado  $\bar{x}_B = v_2$ , se tiene

$$-t_2(x_A) + \beta_2 \leq C'_A - C'_B \leq -t_2(x_A) + \beta_1, \forall x_A \leq v_2.$$

Sea

$$f_A(\theta) = (C'_B - C'_A - \alpha(1 - \theta)l + 2(e_A + 2e_B)\Lambda)^2.$$

Como

$$C'_B - C'_A - t_2(x_A) + \beta_1 = C'_B - C'_A - \alpha(1 - \theta)l + \beta_1 \geq 0, 0 \leq \theta \leq 1,$$

entonces

$$C'_B - C'_A - \alpha(1 - \theta)l + 2(e_A + 2e_B)\Lambda \geq 0$$

y

$$\max_{0 \leq \theta \leq 1} f_A(\theta)$$

tiene solución óptima en  $\theta = 1$ . Entonces, como  $\pi_A(x_A, \bar{x}_B) = f_A(\theta)$ , el valor máximo de  $\pi_A$  se alcanza en  $\bar{x}_A = v_2$ .

De lo dicho anteriormente se deduce que el equilibrio  $(\bar{x}_A, \bar{x}_B) = (v_2, v_2)$ .  $\square$

El resultado anterior puede utilizarse para reducir el conjunto de localizaciones candidatas a equilibrio en árboles. Esto es:

(i) Si existe  $j_0$  tal que

$$t_{j_0}(y) - t_{j_0}(x) + \beta_{j_0} \leq C'_A - C'_B \leq t_{j_0}(y) - t_{j_0}(x) + \beta_{j_0-1},$$

$\forall x \in E(u_A, v_A), \forall y \in E(u_B, v_B), E(u_A, v_A) \neq E(u_B, v_B)$ , las localizaciones candidatas a equilibrio en el conjunto

$$\{(x_A, x_B) \in T \times T : x_A \in E(u_A, v_A), x_B \in E(u_B, v_B)\}$$

se reducen a

$$\{(u_A, u_B), (u_A, v_B), (v_A, u_B), (v_A, v_B)\}.$$

(ii) Si existe  $j_0$  tal que

$$t(u, v) + \beta_{j_0} \leq C'_A - C'_B \leq -t(u, v) + \beta_{j_0-1},$$

entonces las localizaciones candidatas a equilibrio en  $E(u, v)$  se reducen a  $\{(u, u), (v, v)\}$ .

**Proposición 5.18** Sea  $T(V, E)$  un árbol y  $t(x, y) = t(\delta_{xy}) = \alpha\delta_{xy}$ ,  $\alpha > 0$ . Dado  $v_j \in V$ , sean

$$V(v_j) = \{v \in V : E(v_j, v) \in E\},$$

$$V(v_j, u) = \{v \in V : \delta_{vv_j} < \delta_{vu}\}, \forall u \in V(v_j),$$

$$\lambda(V(v_j, u)) = \sum_{v \in V(v_j, u)} \lambda_v,$$

$$\eta_j = \min_{u \in V(v_j)} \{\lambda(V(v_j, u))\},$$

$$\gamma_j = \max_{v \in V} \{t(v_j, v)\}.$$

Si existe  $v_{j_0} \in V$  tal que

$$\gamma_{j_0} + 2(e_A + 2e_B)\Lambda - 6(e_A + e_B)\eta_{j_0} \leq C'_A - C'_B$$

$$\leq -\gamma_{j_0} + 2(e_A + 2e_B)\Lambda - 6(e_A + e_B)(\Lambda - \eta_{j_0}),$$

entonces  $(\bar{x}_A, \bar{x}_B) = (v_{j_0}, v_{j_0})$  es un equilibrio de Nash para la primera etapa y el vértice  $v_{j_0}$  es una 1-mediana del árbol. Además,  $(\bar{p}_A, \bar{p}_B)$  es un equilibrio de Nash para la segunda etapa del juego, siendo

$$\bar{p}_A = \frac{1}{3} [2C'_A + C'_B + 2(e_A + 2e_B) \Lambda],$$

$$\bar{p}_B = \frac{1}{3} [C'_A + 2C'_B + 2(2e_A + e_B) \Lambda],$$

y

$$\pi_A(\bar{x}_A, x_B, \bar{p}_A, \bar{p}_B) = \frac{1}{18(e_A + e_B)} (C'_B - C'_A + 2(e_A + 2e_B) \Lambda)^2,$$

$$\pi_B(\bar{x}_A, \bar{x}_B, \bar{p}_A, \bar{p}_B) = \frac{1}{18(e_A + e_B)} (C'_A - C'_B + 2(2e_A + e_B) \Lambda)^2.$$

### Demostración

- (a) Sea  $\bar{x}_A = v_{j_0}$  y  $x_B \in T$ . Veamos que la firma  $B$  maximiza el beneficio cuando  $x_B = v_{j_0}$ .

Considerando los nodos ordenados en el árbol lineal de acuerdo a la situación  $\bar{x}_A = v_{j_0}$ ,  $x_B \in T$ , se tiene que

$$\begin{aligned} L_1^N &= t_{j_0B} - t_{j_0A} + 2(e_A + 2e_B) \Lambda - 6(e_A + e_B) f_{j_0} \\ &= t_{j_0B} + 2(e_A + 2e_B) \Lambda - 6(e_A + e_B) f_{j_0} \\ &\leq \gamma_{j_0} + 2(e_A + 2e_B) \Lambda - 6(e_A + e_B) f_{j_0} \\ &\leq \gamma_{j_0} + 2(e_A + 2e_B) \Lambda - 6(e_A + e_B) \eta_{j_0} \\ &\leq C'_A - C'_B. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
T_0^N &= t_{j_0 B} - t_{j_0 A} + 2(e_A + 2e_B)\Lambda - 6(e_A + e_B)f_{j_0-1} \\
&= t_{j_0 B} + 2(e_A + 2e_B)\Lambda \\
&\geq -\gamma_{j_0} + 2(e_A + 2e_B)\Lambda \\
&\geq -\gamma_{j_0} + 2(e_A + 2e_B)\Lambda - 6(e_A + e_B)(\Lambda - \eta_{j_0}) \\
&\geq C'_A - C'_B.
\end{aligned}$$

Entonces, como  $L_{j_0}^N \leq C'_A - C'_B \leq T_{j_0-1}^N$ , se tiene que

$$\begin{aligned}
\pi_B(\bar{x}_A, x_B) &= \frac{1}{18(e_A + e_B)} (C'_A - C'_B + t_{j_0 A} - t_{j_0 B} + 2(2e_A + e_B)\Lambda)^2 \\
&= \frac{1}{18(e_A + e_B)} (C'_A - C'_B - t_{j_0 B} + 2(2e_A + e_B)\Lambda)^2.
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
t_{j_0 B} - 2(2e_A + e_B)\Lambda &\leq \gamma_{j_0} + 2(e_A + 2e_B)\Lambda - 6(e_A + e_B)\eta_{j_0} \\
&\leq C'_A - C'_B,
\end{aligned}$$

entonces

$$C'_A - C'_B - t_{j_0 B} + 2(2e_A + e_B)\Lambda \geq 0$$

y  $\pi_B$  es máximo cuando  $t_{j_0 B}$  es mínimo, es decir cuando  $\bar{x}_B = v_{j_0}$ .

- (b) Sea  $\bar{x}_B = v_{j_0}$  y  $x_A \in T$ . Veamos que la firma  $A$  maximiza el beneficio cuando  $x_A = v_{j_0}$ .

Considerando los nodos ordenados en el árbol lineal de acuerdo a la

situación  $\bar{x}_B = v_{j_0}$ ,  $x_A \in T$ , se tiene que

$$\begin{aligned}
 L_m^N &= t_{j_0B} - t_{j_0A} + 2(e_A + 2e_B)\Lambda - 6(e_A + e_B)f_{j_0} \\
 &= -t_{j_0A} + 2(e_A + 2e_B)\Lambda - 6(e_A + e_B)\Lambda \\
 &\leq \gamma_{j_0} + 2(e_A + 2e_B)\Lambda - 6(e_A + e_B)\Lambda \\
 &\leq \gamma_{j_0} + 2(e_A + 2e_B)\Lambda - 6(e_A + e_B)\eta_{j_0} \\
 &\leq C'_A - C'_B.
 \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
 T_{m-1}^N &= t_{j_0B} - t_{j_0A} + 2(e_A + 2e_B)\Lambda - 6(e_A + e_B)(\Lambda - f_{j_0}) \\
 &= -t_{j_0A} + 2(e_A + 2e_B)\Lambda - 6(e_A + e_B)(\Lambda - f_{j_0}) \\
 &\geq -\gamma_{j_0} + 2(e_A + 2e_B)\Lambda - 6(e_A + e_B)(\Lambda - f_{j_0}) \\
 &\geq -\gamma_{j_0} + 2(e_A + 2e_B)\Lambda - 6(e_A + e_B)(\Lambda - \eta_{j_0}) \\
 &\geq C'_A - C'_B.
 \end{aligned}$$

Entonces, como  $L_{j_0}^N \leq C'_A - C'_B \leq T_{j_0-1}^N$ , se tiene que

$$\begin{aligned}
 \pi_A(\bar{x}_A, x_B) &= \frac{1}{18(e_A + e_B)} (C'_B - C'_A + t_{j_0B} - t_{j_0A} + 2(e_A + 2e_B)\Lambda)^2 \\
 &= \frac{1}{18(e_A + e_B)} (C'_B - C'_A - t_{j_0A} + 2(e_A + 2e_B)\Lambda)^2.
 \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
 -t_{j_0A} + 2(e_A + 2e_B)\Lambda &\geq -\gamma_{j_0} + 2(e_A + 2e_B)\Lambda - 6(e_A + e_B)(\Lambda - \eta_{j_0}) \\
 &\geq C'_A - C'_B,
 \end{aligned}$$

entonces

$$C'_B - C'_A - t_{j_0A} + 2(e_A + 2e_B)\Lambda \geq 0$$

y  $\pi_A$  es máximo cuando  $t_{j_0A}$  es mínimo, es decir cuando  $\bar{x}_A = v_{j_0}$ .

De (a) y (b) se concluye que  $(\bar{x}_A, \bar{x}_B) = (v_{j_0}, v_{j_0})$  es un equilibrio de Nash para la primera etapa. Además, la desigualdad

$$\begin{aligned} & \gamma_{j_0} + 2(e_A + 2e_B)\Lambda - 6(e_A + e_B)\eta_{j_0} \\ & \leq -\gamma_{j_0} + 2(e_A + 2e_B)\Lambda - 6(e_A + e_B)(\Lambda - \eta_{j_0}) \end{aligned}$$

ocurre si y sólo si

$$2\gamma_{j_0} \leq 6(e_A + e_B)(\Lambda + 2\eta_{j_0}),$$

esto es,

$$\eta_{j_0} \geq \frac{\Lambda}{2} + \frac{\gamma_{j_0}}{6(e_A + e_B)} > \frac{\Lambda}{2},$$

de donde se deduce que  $v_{j_0}$  es una 1-mediana del árbol.

Si  $\bar{x}_A = \bar{x}_B = v_{j_0}$  el problema se reduce al caso de un nodo de demanda ( $n = 1$ ) y como

$$-2(2e_A + e_B)\Lambda \leq C'_A - C'_B \leq 2(e_A + 2e_B)\Lambda,$$

entonces los precios de equilibrio (proposición 5.6) y los beneficios asociados son

$$\bar{p}_A = \frac{1}{3}[2C'_A + C'_B + 2(e_A + 2e_B)\Lambda],$$

$$\bar{p}_B = \frac{1}{3}[C'_A + 2C'_B + 2(2e_A + e_B)\Lambda],$$

$$\pi_A(\bar{x}_A, \bar{x}_B, \bar{p}_A, \bar{p}_B) = \frac{1}{18(e_A + e_B)}(C'_B - C'_A + 2(e_A + 2e_B)\Lambda)^2,$$

$$\pi_B(\bar{x}_A, \bar{x}_B, \bar{p}_A, \bar{p}_B) = \frac{1}{18(e_A + e_B)}(C'_A - C'_B + 2(2e_A + e_B)\Lambda)^2.$$

□

## 5.2.4 Extensiones

### 5.2.4.1 Precios de Stackelberg para $n = 1$

En el modelo líder-seguidor de Stackelberg, el equilibrio en precios se define como el par  $(\bar{p}_L, \bar{p}_S)$  tal que

$$\pi_L(\bar{p}_L, \bar{p}_S) = \max_{p_L \geq C'_L} \pi_L(p_L, p_S(p_L)),$$

siendo  $p_S(p_L)$  la curva de reacción de la seguidora (su mejor respuesta), esto es, la función de  $p_L$  que satisface la relación

$$\pi_S(p_L, p_S(p_L)) = \max_{p_S \geq C'_S} \pi_S(p_L, p_S).$$

**Proposición 5.19** Sea  $n=1$  y  $E_i(x) = e_i x$ ,  $i = L, S$ .

(i) Si  $t_{SL} - 2(3e_L + 2e_S)\Lambda \leq C'_L - C'_S \leq t_{SL} + 2(e_L + 2e_S)\Lambda$ , entonces

$$\begin{aligned} \bar{p}_L &= \frac{1}{2}(C'_L + C'_S + t_{SL} + 2(e_L + 2e_S)\Lambda), \\ \bar{p}_S &= \frac{1}{4}(C'_L + 3C'_S - t_{SL} + 2(3e_L + 2e_S)\Lambda), \end{aligned}$$

es un equilibrio de Stackelberg.

(ii) Si  $C'_L - C'_S < t_{SL} - 2(3e_L + 2e_S)\Lambda$ , entonces  $\bar{p}_L = C'_S + t_{SL} - 2e_L\Lambda$ ,  $\bar{p}_S = C'_S$  y la empresa seguidora no entra en el mercado.

(iii) Si  $C'_L - C'_S > t_{SL} + 2(e_L + 2e_S)\Lambda$ , entonces  $\bar{p}_S = C'_L - t_{SL} - 2e_S\Lambda$ ,  $\bar{p}_L = C'_L$  y la empresa líder no entra en el mercado.

**Demostración** La función de mejor respuesta de la empresa seguidora (proposición 5.4) es

(a)  $p_S(p_L) = C'_S$  y la empresa seguidora no entra en el mercado, si

$$p_L \leq C'_S + t_{SL} - 2e_L\Lambda.$$

(b)  $p_S(p_L) = \frac{1}{2}(p_L + C'_S - t_{SL} + 2e_L\Lambda)$  si

$$C'_S + t_{SL} - 2e_L\Lambda < p_L < C'_S + t_{SL} + 2(e_L + 2e_S)\Lambda.$$

(c)  $p_S(p_L) = p_L - t_{SL} - 2e_S\Lambda$  si  $p_L \geq C'_S + t_{SL} + 2(e_L + 2e_S)\Lambda$ .

Un equilibrio de Stackelberg en precios es un par  $(\bar{p}_L, p_S(\bar{p}_L))$  tal que

$$\pi_L(\bar{p}_L, p_S(\bar{p}_L)) = \max_{p_L \geq C'_L} \pi_L(p_L, p_S(p_L)),$$

donde  $\pi_L(p_L, p_S(p_L))$  está definido como

$$\begin{cases} (p_L - C'_L)\Lambda & \text{si } C'_L \leq p_L \leq C'_S + t_{SL} - 2e_L\Lambda \\ (p_L - C'_L) \left( \frac{-p_L + C'_S + t_{SL} + 2(e_L + 2e_S)\Lambda}{4(e_L + e_S)} \right) & \text{si } C'_S + t_{SL} - 2e_L\Lambda < p_L < C'_S + t_{SL} + 2(e_L + 2e_S)\Lambda \\ 0 & \text{si } p_L \geq C'_S + t_{SL} + 2(e_L + 2e_S)\Lambda. \end{cases}$$

La función  $\pi_L(p_L, p_S(p_L))$  es continua respecto de  $p_L$ . Sea

$$\Psi(p_L) = (p_L - C'_L) \left( \frac{-p_L + C'_S + t_{SL} + 2(e_L + 2e_S)\Lambda}{4(e_L + e_S)} \right).$$

Se tiene que

$$\Psi'(p_L) = 0 \iff p_L = \frac{1}{2}(C'_L + C'_S + t_{SL} + 2(e_L + 2e_S)\Lambda).$$

Sea

$$p_L^* = \frac{1}{2}(C'_L + C'_S + t_{SL} + 2(e_L + 2e_S)\Lambda).$$

Se cumple que

$$C'_S + t_{SL} - 2e_L\Lambda < p_L^* < C'_S + t_{SL} + 2(e_L + 2e_S)\Lambda \iff$$

$$t_{SL} - 2(3e_L + 2e_S)\Lambda < C'_L - C'_S < t_{SL} + 2(e_L + 2e_S)\Lambda,$$

de donde se deduce  $\bar{p}_L$  y teniendo en cuenta la función de mejor respuesta se obtiene  $\bar{p}_S$ .  $\square$

Si la diferencia de costes marginales satisface la relación

$$t_{SL} - 2(3e_L + 2e_S)\Lambda \leq C'_L - C'_S \leq t_{SL} + 2(e_L + 2e_S)\Lambda,$$

entonces el precio de equilibrio de Stackelberg es

$$\bar{p}_L = \frac{1}{2}(C'_L + C'_S + t_{SL} + 2(e_L + 2e_S)\Lambda),$$

$$\bar{p}_S = \frac{1}{4}(C'_L + 3C'_S - t_{SL} + 2(3e_L + 2e_S)\Lambda).$$

Bajo esta condición, se observa que el equilibrio de Stackelberg, a diferencia del equilibrio de Nash, es asimétrico. Se incrementa con los costes de externalidad,

en mayor medida con el de la firma rival. También con los costes marginales de producción, en la misma proporción para la líder.

**Condición 5.2** *La red  $N(V, E)$  tiene un sólo nodo con demanda no nula y*

$$C'_L - C'_S \geq \max_{x \in N} t_1(x) - \min_{x \in N} t_1(x) - 2(3e_L + 2e_S)\Lambda,$$

$$C'_L - C'_S \leq \min_{x \in N} t_1(x) - \max_{x \in N} t_1(x) + 2(e_L + 2e_S)\Lambda.$$

La expresión del beneficio de la firma líder bajo la condición 5.2 es

$$\pi_L(x_L, x_S) = \frac{(-C'_L + C'_S + t_{SL}(x_L, x_S) + 2(e_L + 2e_S)\Lambda)^2}{16(e_L + e_S)}$$

y el de la seguidora es

$$\pi_S(x_L, x_S) = \frac{(C'_L - C'_S - t_{SL}(x_L, x_S) + 2(3e_L + 2e_S)\Lambda)^2}{32(e_L + e_S)}.$$

Nótese que sólo  $t_{SL}(x_L, x_S) = t_1(x_S) - t_1(x_L)$  depende de las localizaciones.

El equilibrio de Nash en localizaciones resulta de resolver el siguiente problema:

$$\max_{x_L \in N} \left\{ \frac{(-C'_L + C'_S + t_{SL}(x_L, x_S) + 2(e_L + 2e_S)\Lambda)^2}{16(e_L + e_S)} \right\},$$

$$\max_{x_S \in N} \left\{ \frac{(C'_L - C'_S - t_{SL}(x_L, x_S) + 2(3e_L + 2e_S)\Lambda)^2}{32(e_L + e_S)} \right\}.$$

Si las firmas tienen iguales costes<sup>2</sup> y localizaciones coincidentes, el beneficio de la líder es inferior al de la seguidora. Además, ambas firmas mejoran sus beneficios respecto al equilibrio de Nash en precios<sup>3</sup>.

**Proposición 5.20** *Bajo la condición 5.2, el único equilibrio de Nash en localización es  $(\bar{x}_L, \bar{x}_S) = (v, v)$  donde  $v$  es el nodo con demanda no nula.*

<sup>2</sup> es decir,  $e_L = e_S = e$ ,  $C'_L = C'_S$

<sup>3</sup>  $\pi_L = 1.125e\Lambda^2$ ,  $\pi_S = 1.562e\Lambda^2$  y  $\pi_A = \pi_B = e\Lambda^2$

Demostración Bajo la condición 5.2 se tiene que

$$\pi_L(x_L, x_S) = \frac{(-C'_L + C'_S + t_{SL}(x_L, x_S) + 2(e_L + 2e_S)\Lambda)^2}{16(e_L + e_S)}$$

y  $-C'_L + C'_S + t_{SL}(x_L, x_S) + 2(e_L + 2e_S)\Lambda \geq 0$ . Además,

$$\pi_S(x_L, x_S) = \frac{(C'_L - C'_S - t_{SL}(x_L, x_S) + 2(3e_L + 2e_S)\Lambda)^2}{32(e_L + e_S)}$$

y  $C'_L - C'_S - t_{SL}(x_L, x_S) + 2(3e_L + 2e_S)\Lambda \geq 0$ .

(a)  $(\bar{x}_L, \bar{x}_S) = (v, v)$  es un equilibrio.

Dado  $\bar{x}_L = v$ , se tiene que  $t_{SL}(\bar{x}_L, x) \geq 0, \forall x \in N$ , y entonces

$$\pi_S(\bar{x}_L, \bar{x}_S) = \max_{x \in N} \pi_S(\bar{x}_L, x).$$

De forma similar, dado  $\bar{x}_S = v$ , se tiene que  $t_{SL}(x, \bar{x}_S) \leq 0, \forall x \in N$ , y entonces

$$\pi_L(\bar{x}_L, \bar{x}_S) = \max_{x \in N} \pi_L(x, \bar{x}_S).$$

(b)  $(x_L, x_S) \in N$  tal que  $(x_L, x_S) \neq (v, v)$  no es equilibrio.

Se tiene que  $x_L \neq v$  o  $x_S \neq v$ . Si  $x_L \neq v$ , entonces  $t_{SL}(v, x_S) > t_{SL}(x_L, x_S)$ , por lo que

$$\pi_L(v, x_S) > \pi_L(x_L, x_S)$$

y entonces  $(x_L, x_S)$  no es equilibrio. De forma similar, si  $x_S \neq v$  entonces

$$\pi_S(x_L, v) > \pi_S(x_L, x_S)$$

y  $(x_L, x_S)$  no es equilibrio. □

#### 5.2.4.2 Funciones cuadráticas de externalidad

Si los costes de externalidad son funciones cuadráticas de la forma

$$E_i(q) = q^2 + e_i q, \quad e_i \geq 0, \quad i = A, B,$$

de la proposición 5.1 y 5.3 se deduce que existe un único conjunto de asignaciones óptimas de Pareto y una única cuota de mercado óptima, definida en el corolario siguiente.

**Corolario 5.2** Si  $E_i(q) = q^2 + e_i q$ ,  $i = A, B$ , las cuotas de mercado óptimas de Pareto son

$$\bar{\Lambda}_A = \begin{cases} \Lambda & \text{si } p_A - p_B \leq L_n^c \\ \frac{p_B - p_A + t_{jB} - t_{jA} + 2e_B \Lambda + 3\Lambda^2}{2(e_A + e_B + 3\Lambda)} & \text{si } L_j^c < p_A - p_B < T_{j-1}^c, j = 1, \dots, n \\ f_j & \text{si } T_j^c \leq p_A - p_B \leq L_j^c, j = 1, \dots, n-1 \\ 0 & \text{si } p_A - p_B \geq T_0^c \end{cases}$$

y  $\bar{\Lambda}_B = \Lambda - \bar{\Lambda}_A$ , donde

$$L_j^c = t_{jB} - t_{jA} + 2e_B \Lambda + 3\Lambda^2 - 2(e_A + e_B + 3\Lambda) f_j, j = 1, \dots, n,$$

$$T_{j-1}^c = t_{jB} - t_{jA} + 2e_B \Lambda + 3\Lambda^2 - 2(e_A + e_B + 3\Lambda) f_{j-1}, j = 1, \dots, n.$$

**Demostración** Como consecuencia inmediata de la proposición 5.3 se tiene que  $\bar{\Lambda}_A$  es

$$\begin{cases} f_j & \text{si } \frac{\Delta_{j+1} + 2e_B \Lambda + 3\Lambda^2}{2(e_A + e_B + 3\Lambda)} \leq f_j \leq \frac{\Delta_j + 2e_B \Lambda + 3\Lambda^2}{2(e_A + e_B + 3\Lambda)} \text{ con } j \in \{0, 1, \dots, n\} \\ \frac{\Delta_j + 2e_B \Lambda + 3\Lambda^2}{2(e_A + e_B + 3\Lambda)} & \text{si } f_{j-1} < \frac{\Delta_j + 2e_B \Lambda + 3\Lambda^2}{2(e_A + e_B + 3\Lambda)} < f_j \text{ con } j \in \{1, \dots, n\}, \end{cases}$$

expresión de la que se deduce este resultado.  $\square$

Obsérvese que

$$L_n^c < T_{n-1}^c < L_{n-1}^c < \dots < T_j^c < L_j^c < T_{j-1}^c < \dots < T_1^c < L_1^c < T_0^c.$$

Además,  $\bar{\Lambda}_A$  y  $\bar{\Lambda}_B$  son funciones continuas en  $(p_A, p_B)$  y por tanto también lo serán las funciones de beneficio.

Sean

$$\mathfrak{S} = \{(p_A, p_B) \in \mathbb{R}^2 : p_A \geq C'_A, p_B \geq C'_B\},$$

$$R_j^c = \mathfrak{S} \cap \{(p_A, p_B) \in \mathbb{R}^2 : L_j^c \leq p_A - p_B \leq T_{j-1}^c\}, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$S_j^c = \mathfrak{S} \cap \{(p_A, p_B) \in \mathbb{R}^2 : T_j^c \leq p_A - p_B \leq L_j^c\}, \quad j = 1, \dots, n-1,$$

$$S_0^c = \mathfrak{S} \cap \{(p_A, p_B) \in \mathbb{R}^2 : p_A - p_B \geq T_0^c\},$$

$$S_n^c = \mathfrak{S} \cap \{(p_A, p_B) \in \mathbb{R}^2 : p_A - p_B \leq L_n^c\}.$$

El conjunto de interés es

$$\mathfrak{S} = \left( \bigcup_{j=1}^n R_j^c \right) \cup \left( \bigcup_{j=0}^n S_j^c \right),$$

y la función de beneficio para la firma  $i$  es

$$\pi_i(p_A, p_B) = (p_i - C'_i)\bar{\Lambda}_i - F_i, \quad i = A, B.$$

Asumamos sin pérdida de generalidad y por simplicidad en la notación, que no existen costes fijos ( $F_i = 0$ ). En tal caso, el beneficio de las firmas viene dado por el siguiente resultado.

**Proposición 5.21** *La función de beneficios*

$$\pi(p_A, p_B) = (\pi_A(p_A, p_B), \pi_B(p_A, p_B))$$

está definida en  $\mathfrak{S}$  y viene dada por

$$\left\{ \begin{array}{ll} ((p_A - C'_A)\Lambda, 0) & \text{si } (p_A, p_B) \in S_n^c \\ \left( (p_A - C'_A) \left( \frac{p_B - p_A + t_{jB} - t_{jA} + 2e_B\Lambda + 3\Lambda^2}{2(e_A + e_B + 3\Lambda)} \right), \right. & \text{si } (p_A, p_B) \\ \left. (p_B - C'_B) \left( \frac{p_A - p_B + t_{jA} - t_{jB} + 2e_A\Lambda + 3\Lambda^2}{2(e_A + e_B + 3\Lambda)} \right) \right) & \in R_j^c - (S_j^c \cup S_{j-1}^c), \\ & j = 1, \dots, n \\ ((p_A - C'_A)f_j, (p_B - C'_B)(\Lambda - f_j)) & \text{si } (p_A, p_B) \in S_j^c, \\ & j = 1, \dots, n-1 \\ (0, (p_B - C'_B)\Lambda) & \text{si } (p_A, p_B) \in S_0^c. \end{array} \right.$$

Además, se verifican las siguientes propiedades:

- (i)  $\pi(p_A, p_B)$  es continua en  $\mathfrak{S}$ .
- (ii) Las funciones  $\pi(p_A, p_B) |_{R_j^c}$  y  $\pi(p_A, p_B) |_{S_j^c}$  son de clase  $C^{(\infty)}$  en  $\text{Int}(R_j^c)$  e  $\text{Int}(S_j^c)$ , respectivamente.
- (iii)  $\pi_A(p_A, p_B) |_{R_j^c}$  y  $\pi_B(p_A, p_B) |_{R_j^c}$  son estrictamente cóncavas respecto de las variables  $p_A$  y  $p_B$ , respectivamente. Las funciones  $\pi_A(p_A, p_B) |_{S_j^c}$  y  $\pi_B(p_A, p_B) |_{S_j^c}$  son funciones lineales de  $p_A$  y  $p_B$ , respectivamente, y por tanto cóncavas.

**Demostración** La función de beneficio se obtiene reemplazando  $\bar{\Lambda}_i$  en

$$\pi_i(p_A, p_B) = (p_i - C'_i) \bar{\Lambda}_i$$

por la expresión dada en el corolario 5.2. Dado que

$$\frac{p_B - p_A + t_{jB} - t_{jA} + 2e_B \Lambda + 3\Lambda^2}{2(e_A + e_B + 3\Lambda)} = f_j \text{ si } p_A - p_B = L_j^c, j = 1, \dots, n,$$

y

$$\frac{p_B - p_A + t_{jB} - t_{jA} + 2e_B \Lambda + 3\Lambda^2}{2(e_A + e_B + 3\Lambda)} = f_{j-1} \text{ si } p_A - p_B = T_{j-1}^c, j = 1, \dots, n,$$

se deduce que  $\pi_i(p_A, p_B)$  es continua en  $\mathfrak{S}$ . Como  $\pi_i(p_A, p_B)$  es lineal en  $S_j^c$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ , y cuadrática  $R_j^c$  con

$$\frac{\partial^2 \pi_i}{\partial p_i^2} = -(e_A + e_B + 3\Lambda)^{-1} < 0 \text{ si } (p_A, p_B) \in R_j^c, j = 1, \dots, n, i = A, B,$$

las propiedades (ii) y (iii) se cumplen.  $\square$

Sean

$$L_j^{cN} = 3L_j^c - 2(t_{jB} - t_{jA}) + 2(e_A - e_B) \Lambda,$$

$$T_{j-1}^{cN} = 3T_{j-1}^c - 2(t_{jB} - t_{jA}) + 2(e_A - e_B) \Lambda, j = 1, \dots, n,$$

$$\chi^c = \{(p_A, p_B) \in \mathfrak{R}^2 : p_A \geq C'_A, p_B \geq C'_B, p_A + p_B \leq K^c\},$$

$$K^c = C'_A + C'_B + 2(e_A + e_B + \Lambda) \Lambda.$$

**Proposición 5.22** (*Equilibrios parciales en  $\chi^c$* )

(i) El conjunto de precios de equilibrio en  $S_j^c \cap \chi^c$ ,  $j = 1, \dots, n-1$ , es el segmento  $\overline{D_{j+1}^c C_j^c}$ , donde

$$C_0^c = (K^c - C'_B, C'_B),$$

$$C_j^c = \left( \frac{1}{2} (K^c + L_j^c), \frac{1}{2} (K^c - L_j^c) \right),$$

$$D_j^c = \left( \frac{1}{2} (K^c + T_{j-1}^c), \frac{1}{2} (K^c - T_{j-1}^c) \right),$$

$$D_{n+1}^c = (C'_A, K^c - C'_A).$$

(ii) En  $R_j^c \cap \chi^c$  existe equilibrio,  $j = 1, \dots, n$ . Además,

(a) Si  $L_j^{cN} \leq C'_A - C'_B \leq T_{j-1}^{cN}$ , entonces  $(\tilde{p}_A^{cj}, \tilde{p}_B^{cj})$  es un equilibrio con

$$\tilde{p}_A^{cj} = \frac{1}{3} [2C'_A + C'_B + t_{jB} - t_{jA} + 2(e_A + 2e_B)\Lambda] + 3\Lambda^2,$$

$$\tilde{p}_B^{cj} = \frac{1}{3} [C'_A + 2C'_B + t_{jA} - t_{jB} + 2(2e_A + e_B)\Lambda] + 3\Lambda^2.$$

(b) Si  $C'_A - C'_B < L_j^{cN}$ , entonces los puntos del conjunto

$$\chi^c \cap \left\{ (p + L_j^c, p) : p_1^c \leq p \leq \frac{K^c - L_j^c}{2} \right\}$$

son de equilibrio, siendo

$$p_1^c = -2L_j^c + t_{jB} - t_{jA} + C'_A + 2e_B\Lambda + 3\Lambda^2.$$

(c) Si  $C'_A - C'_B > T_{j-1}^{cN}$ , entonces los puntos del conjunto

$$\chi^c \cap \left\{ (p + T_{j-1}^c, p) : p_4^c \leq p \leq \frac{K^c - T_{j-1}^c}{2} \right\}$$

son de equilibrio, siendo

$$p_4^c = -2T_{j-1}^c + t_{jB} - t_{jA} + C'_A + 2e_B\Lambda + 3\Lambda^2.$$

**Demostración** Obsérvese que la función de beneficio  $\pi(p_A, p_B)$  es similar al caso lineal; la diferencia radica en determinadas constantes que no afectan sustancialmente al desarrollo de la demostración. Por tanto, de forma similar a la demostración de la proposición 5.13 se prueba este resultado.  $\square$

Nótese que  $\tilde{p}_A^{c_j} + \tilde{p}_B^{c_j} = K^c$ .

**Proposición 5.23** (Equilibrio global en  $\chi^c$ )

(i) Si  $j_0 \in \{1, \dots, n\}$  verifica  $L_{j_0}^{cN} \leq C'_A - C'_B \leq T_{j_0-1}^{cN}$ , entonces  $(\bar{p}_A, \bar{p}_B) = (\tilde{p}_A^{c_{j_0}}, \tilde{p}_B^{c_{j_0}})$  constituye un equilibrio en  $\chi^c$  y los beneficios son

$$\pi_A(\bar{p}_A, \bar{p}_B) = \frac{1}{18(e_A + e_B + 3\Lambda)} (C'_B - C'_A + t_{j_0B} - t_{j_0A} + 2(e_A + 2e_B)\Lambda + 9\Lambda^2)^2$$

$$\pi_B(\bar{p}_A, \bar{p}_B) = \frac{1}{18(e_A + e_B + 3\Lambda)} (C'_A - C'_B + t_{j_0A} - t_{j_0B} + 2(2e_A + e_B)\Lambda + 9\Lambda^2)^2$$

(ii) Si  $C'_A - C'_B < L_n^{cN}$ , entonces  $\bar{p}_A = C'_B + L_n^c$  y la firma B no entra en el mercado.

(iii) Si  $C'_A - C'_B > T_0^{cN}$ , entonces  $\bar{p}_B = C'_A - T_0^c$  y la firma A no entra en el mercado.

**Demostración** De forma similar al caso lineal.  $\square$

## 5.2.5 Ejemplos

### 5.2.5.1 Ejemplo 1

Se considera la red de la figura 5.10 (a) y se asumen decisiones conjuntas de los usuarios. Las demandas son  $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$  y  $\lambda_4 = 7$ . Los costes marginales son

$$C'_A(x) = 2, C'_B(x) = 3, \forall x \in N,$$

los costes de externalidad unitarios son  $e_A = 0.2, e_B = 0.3$ , y los costes fijos  $F_A = F_B = 0$ . Las distancias entre nodos se indican en la figura y se considera que  $t(v_k, v_j) = t(\delta_{v_k v_j}) = \delta_{v_k v_j}$ .

Se presenta en primer lugar un escenario en el que la función de beneficio no es cuasiconcava. La firma A está situada en el nodo  $v_1$  y la firma B en un punto

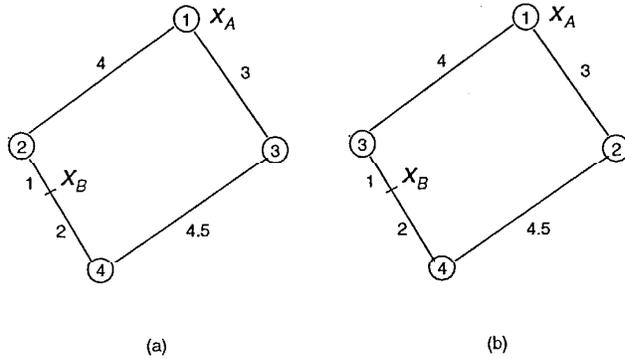


Figura 5.10: Red con 4 nodos

intermedio, que no es un nodo, entre los nodos  $v_2$  y  $v_2$ . Puede comprobarse que  $t_{jB} - t_{jA}$  viene dado por

$j$	$t_{jB} - t_{jA}$
1	5
2	-3
3	3.5
4	-5

Entonces,  $\Delta_4 < \Delta_2 < \Delta_3 < \Delta_1$ . Se considera la siguiente permutación en la denominación de los nodos:  $1 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 4 \rightarrow 4$ . De esta forma, se tiene que

$$\Delta_4 < \Delta_3 < \Delta_2 < \Delta_1.$$

La figura 5.10 (b) representa la nueva situación. Entonces, puede comprobarse que

$j$	$t_{jB} - t_{jA}$	$\lambda_j$	$f_j$	$L_j$	$T_j$
0	-	-	0	-	15.2
1	5	3	3	12.2	10.7
2	3.5	5	8	5.7	-0.8
3	-3	2	10	-2.8	-4.8
4	-5	7	17	-11.8	-

y, como se indicó con anterioridad, que

$$T_0 > L_1 > T_1 > L_2 > T_2 > L_3 > T_3 > L_4.$$

Sea  $p_B = 5$  y los puntos

$$14.7 \in [L_2 + 5, T_1 + 5],$$

$$16.7 \in [T_1 + 5, L_1 + 5],$$

$$17 \in [T_1 + 5, L_1 + 5],$$

pertenecientes a las regiones  $R_2, S_1$  y  $S_1$ , respectivamente. Como

$p_A$	$\pi_A(p_A, p_B)$
14.7	50.8
16.7	44.1
17	45

se sigue que  $16.7 = \lambda(14.7) + (1 - \lambda)17$  con  $\lambda = \frac{3}{23}$  y

$$\pi_A(16.7, 5) = 44.1 < \min\{50.8, 45\}.$$

Por tanto,  $\pi_A(p_A, p_B)$  no es cuasicóncava respecto de  $p_A$ .

La figura 5.11 muestra la función  $\pi_A(p_A, p_B)$  para diferentes valores de  $p_B$ . Como puede observarse, toma valores no nulos entre  $C'_A$  y  $K - p_B$ , siendo  $K = 22$ .

Las regiones  $R_j$  y  $S_j$ , y los equilibrios parciales se muestran en la figura 5.12 y en la tabla 5.3, respectivamente. Las coordenadas de los puntos  $C_j$  y  $D_j$  se indican en la tabla 5.4.

Puede comprobarse que  $P_3^e = (\tilde{p}_A^3, \tilde{p}_B^3)$  es un equilibrio global en  $\chi$ . Para ello, basta verificar que fijado  $\tilde{p}_A^3$ , el precio de mejor respuesta de la firma  $B$  en las regiones  $R_2$  y  $S_2$  provoca un beneficio para dicha firma no superior al beneficio que obtiene en  $R_3$ . De forma análoga, el precio de mejor respuesta de la firma  $A$  en las regiones  $S_3$  y  $R_4$  provoca un beneficio para esta firma no superior al beneficio que obtiene en  $R_3$ . Estos datos se muestran en la tabla 5.3.

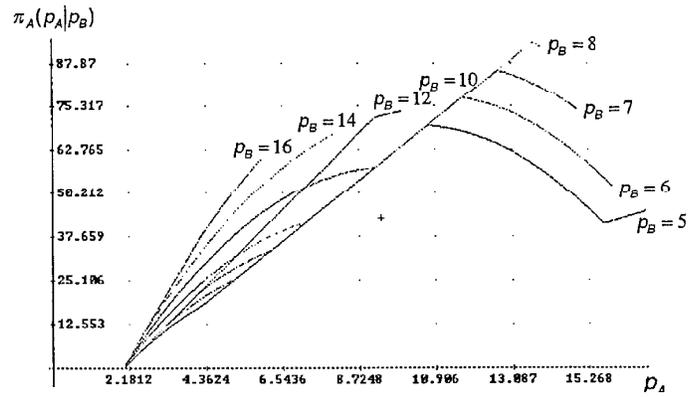


Figura 5.11: Beneficio de la firma  $A$  para diferentes valores de  $p_B$

Región	Equilibrio
$S_4$	$\overline{D_5 C_4}$
$R_4$	$D_4$
$S_3$	$\overline{D_4 C_3}$
$R_3$	$P_3^e = (\tilde{p}_A^3, \tilde{p}_B^3) = (10.4, 11.6)$
$S_2$	$\overline{D_3 C_2}$
$R_2$	$C_2$
$S_1$	$\overline{D_2 C_1}$
$R_1$	$C_1$
$S_0$	$D_1 C_0$

Tabla 5.3: Equilibrios parciales en cada región

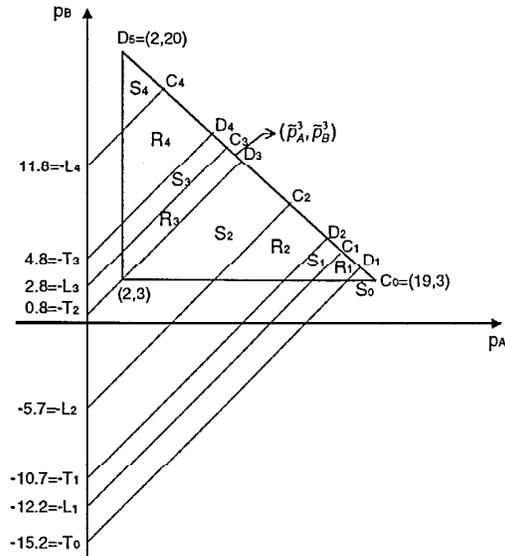


Figura 5.12: Regiones consideradas en el ejemplo

$j$	$C_j$	$D_j$
0	(19, 3)	-
1	(17.1, 4.9)	(18.6, 3.4)
2	(13.85, 8.15)	(16.35, 5.65)
3	(9.6, 12.4)	(10.6, 11.4)
4	(5.1, 16.9)	(8.6, 13.4)
5	-	(2, 20)

Tabla 5.4: Coordenadas de los puntos  $C_j$  y  $D_j$

Fijo	reacción	$R_2$	$S_2$	$R_3$	$S_3$	$R_4$
$\bar{p}_A^3$	$p_B$	4.7	11.2	$\bar{p}_B^3$	—	—
	$\pi_B$	15.3	73.8	73.96	—	—
$\bar{p}_B^3$	$p_A$	—	—	$\bar{p}_A^3$	8.8	6.8
	$\pi_A$	—	—	70.56	68	48

Tabla 5.5: Precio de mejor respuesta y beneficio asociado en cada región

Las funciones de beneficio son

$$\pi_A(p_A, p_B) \big|_{R_j} = (p_A - 2)(p_B - p_A + t_{jB} - t_{jA} + 10.2),$$

$$\pi_B(p_A, p_B) \big|_{R_j} = (p_B - 3)(p_A - p_B + t_{jA} - t_{jB} + 6.8),$$

$$\pi_A(p_A, p_B) \big|_{S_j} = (p_A - 2)f_j,$$

$$\pi_B(p_A, p_B) \big|_{S_j} = (p_B - 3)(17 - f_j),$$

y las funciones de mejor respuesta en  $R_j$  son

$$r_A^j(p_B) = \frac{1}{2}p_B + \frac{t_{jB} - t_{jA} + 12.2}{2},$$

$$r_B^j(p_A) = \frac{1}{2}p_A + \frac{t_{jA} - t_{jB} + 9.8}{2}.$$

Procediendo de forma similar a como se ha hecho con  $P_3^e$ , puede comprobarse que  $D_4$  es también un equilibrio global. Por tanto, este ejemplo muestra una situación en la que el equilibrio global no es único. En realidad, puede comprobarse que el conjunto de equilibrios globales es

$$\{\overline{D_4H_1}, P_3^e, \overline{H_2C_2}\}$$

donde  $H_1 = (9.5, 12.5)$  y  $H_2 = (10.61, 11.39)$ .

Dado que el equilibrio global es múltiple, descartaremos aquellas estrategias dominadas. Los beneficios correspondientes aparecen en la tabla 5.6. El beneficio agregado se denota por  $\Pi = \pi_A + \pi_B$ .

Puede comprobarse que para  $p_A \in [8.6, 9.06]$  se tiene que

$$\pi_A(P_3^e) > \pi_A(p_A, 22 - p_A),$$

$$\pi_B(P_3^e) > \pi_B(p_A, 22 - p_A),$$

	$p_A$	$p_B$	$\pi_A(p_A, p_B)$	$\pi_B(p_A, p_B)$	$max\Pi$
$\overline{D_4H_1}$	[8.6, 9.5]	$22 - p_A$	$10p_A - 20$	$133 - 7p_A$	141.5
$P_3^e$	10.4	11.6	70.56	73.96	144.52
$\overline{H_2C_2}$	[10.61, 13.85]	$22 - p_A$	$8p_A - 16$	$171 - 9p_A$	144.39

Tabla 5.6: Beneficios asociados a los equilibrios globales

por lo que los puntos anteriores están dominados por  $P_3^e$ . De forma similar, para  $p_A \in (10.78, 10.82)$  se tiene que

$$\pi_A(P_3^e) > \pi_A(p_A, 22 - p_A)$$

$$\pi_B(P_3^e) > \pi_B(p_A, 22 - p_A),$$

con lo que estos puntos están dominados por  $P_3^e$ . En definitiva, las estrategias no dominadas son

$$P_3^e,$$

$$\{(p_A, p_B) : p_A \in [9.06, 9.5], p_B = 22 - p_A\},$$

$$\{(p_A, p_B) : p_A \in [10.61, 10.78] \cup [10.82, 13.85], p_B = 22 - p_A\}.$$

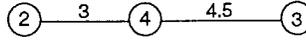
Obsérvese que  $P_3^e$  es la estrategia no dominada con mayor beneficio agregado. En realidad es el equilibrio global con mayor beneficio agregado.

Finalmente, para el estudio del equilibrio en la primera etapa del juego consideremos el árbol  $T$  que aparece al eliminar el vértice  $v_1$  y las aristas incidentes en  $v_1$  de la red de la figura 5.10(a). La figura 5.13 representa la nueva situación. El resto de los datos del problema se consideran iguales salvo los costes marginales, teniendo en cuenta que ahora  $\Lambda = 14$ .

Dado  $v_{j_0} = v_4$ , se tiene que  $\gamma_{j_0} = 4.5$  y

$$V(v_{j_0}, v_2) = \{v_3, v_4\}, \lambda(V(v_{j_0}, v_2)) = 12,$$

$$V(v_{j_0}, v_3) = \{v_2, v_4\}, \lambda(V(v_{j_0}, v_3)) = 9.$$

Figura 5.13: Arbol con  $\lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5, \lambda_4 = 7$ 

Entonces  $\eta_{j_0} = 9$  y

$$\gamma_{j_0} + 2(e_A + 2e_B)\Lambda - 6(e_A + e_B)\eta_{j_0} = -0.1,$$

$$-\gamma_{j_0} + 2(e_A + 2e_B)\Lambda - 6(c_A + c_B)(\Lambda - \eta_{j_0}) = 2.9.$$

Por tanto, para valores de  $C'_A$  y  $C'_B$  tales que

$$-0.1 \leq C'_A - C'_B \leq 2.9,$$

se tiene que  $(\bar{x}_A, \bar{x}_B) = (v_4, v_4)$  es un equilibrio de Nash para la primera etapa del juego y  $v_4$  es una 1-mediana del árbol (proposición 5.18). En particular, si  $C'_A = C'_B = 1$  los precios de equilibrio son  $\bar{p}_A = 8.47$ ,  $\bar{p}_B = 7.53$ , y los beneficios asociados son

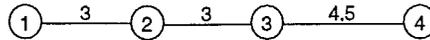
$$\pi_A(\bar{x}_A, \bar{x}_B, \bar{p}_A, \bar{p}_B) = 55.75,$$

$$\pi_B(\bar{x}_A, \bar{x}_B, \bar{p}_A, \bar{p}_B) = 42.68.$$

### 5.2.5.2 Ejemplo 2

El siguiente ejemplo muestra una situación en la que una mediana no es un equilibrio de Nash. Consideremos el árbol  $T$  de la figura 5.14. Los costes marginales son

$$C'_A(x) = 10, C'_B(x) = 5, \forall x \in T,$$

Figura 5.14: Arbol con  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 3$

los costes de externalidad unitarios son  $e_A = 0.2$ ,  $e_B = 0.3$ , y los costes fijos  $F_A = F_B = 0$ . Las distancias entre nodos se indican en la figura y se considera que  $t(v_k, v_j) = t(\delta_{v_k v_j}) = \delta_{v_k v_j}$ .

Como puede observarse,  $v_2$  y  $v_3$  son medianas. Además, si  $j_0 = 3$ , entonces  $\gamma_{j_0} = 6$  y

$$\eta_{j_0} = 6 = \frac{\Lambda}{2} < \frac{\Lambda}{2} + \frac{\gamma_{j_0}}{6(e_A + e_B)}.$$

Si  $x_A = x_B = v_3$ , se tendría lo siguiente. Como  $t_{j_B} - t_{j_A} = 0$ ,  $\forall j$ , el problema se reduce al caso  $n = 1$ , y dado que

$$-2(2e_A + e_B)\Lambda \leq C'_A - C'_B \leq 2(e_A + 2e_B)\Lambda,$$

entonces

$$\pi_A(v_3, v_3) = 22.40,$$

$$\pi_B(v_3, v_3) = 52.80.$$

Si ahora la firma  $A$  se sitúa en  $v_2$  y la firma  $B$  en  $v_3$ , agregando los nodos resulta la arista  $[v_2, v_3]$ . Reordenando los nodos de forma que  $u_1 = v_3$  y  $u_2 = v_2$ , se tiene que  $\Delta_2 < \Delta_1$  y

$$L_1^N = 4.2,$$

$$T_0^N = 22.2,$$

$$L_1^N \leq C'_A - C'_B \leq T_0^N.$$

Entonces,

$$\pi_A(v_2, v_3) = 32.87,$$

$$\pi_B(v_2, v_3) = 39.27,$$

esto es, la firma  $A$  mejoraría moviéndose a  $v_2$ , por lo que  $(v_3, v_3)$  no sería equilibrio de Nash.

### 5.3 Equilibrio localización-precio con asignación de Nash

Cuando los usuarios toman sus decisiones de forma individual aparece el equilibrio de Nash en las asignaciones. En esta sección se estudia en primer lugar el equilibrio de Nash en las asignaciones para localizaciones y precios fijados. En segundo lugar se analiza el equilibrio en precios para localizaciones dadas, conocido el comportamiento posterior de las asignaciones. Finalmente, se investiga el equilibrio en localizaciones dado el comportamiento posterior de los precios.

#### 5.3.1 Equilibrio de Nash en asignaciones

En esta ocasión, el usuario  $k$  minimiza su coste dado por

$$C_k(\lambda_A) = \lambda_{kA}(p_A + t_{kA} + E_A(\Lambda_A)) + (\lambda_k - \lambda_{kA})(p_B + t_{kB} + E_B(\Lambda - \Lambda_A)).$$

Se trata, por tanto, de obtener  $\bar{\lambda}_A$  que sea solución de los siguientes  $n$  problemas:

$$\min C_k(\lambda_A) \text{ sujeto a } 0 \leq \lambda_{kA} \leq \lambda_k.$$

El vector  $\bar{\lambda}_A = (\bar{\lambda}_{1A}, \dots, \bar{\lambda}_{nA})$  es un equilibrio de Nash en asignaciones si

$$C_k(\bar{\lambda}_A) = \min_{0 \leq \lambda_{kA} \leq \lambda_k} C_k(\bar{\lambda}_{1A}, \dots, \lambda_{kA}, \dots, \bar{\lambda}_{nA}), \quad k = 1, \dots, n.$$

**Proposición 5.24** *Si  $E_i$ ,  $i = A, B$ , son funciones positivas, estrictamente crecientes y convexas, entonces:*

(i) *Fijados  $\lambda_{jA}$ ,  $\forall j \neq k$ , la función  $C_k(\lambda_A)$  es estrictamente convexa respecto de  $\lambda_{kA}$ ,  $k = 1, \dots, n$ .*

(ii) *Fijados  $\lambda_{jA}$ ,  $\forall j \neq k$ , el problema*

$$\min_{\lambda_{kA}} C_k(\lambda_A) \text{ sujeto a } 0 \leq \lambda_{kA} \leq \lambda_k$$

*tiene una única solución óptima y el óptimo es global.*

(iii) *Fijadas las localizaciones y los precios,  $x_A, x_B, p_A, p_B$ , existe equilibrio de Nash en asignaciones.*

**Demostración**

(i) Fijados  $\lambda_{jA}$ ,  $\forall j \neq k$ , el coste  $C_k(\lambda_A)$  puede escribirse como

$$\begin{aligned} f(\lambda_{kA}) &= \lambda_{kA}(p_A + t_{kA} + E_A(\Lambda_A)) \\ &\quad + (\lambda_k - \lambda_{kA})(p_B + t_{kB} + E_B(\Lambda - \Lambda_A)) \\ &= F(\lambda_{kA}) + G(\lambda_{kA}) + H(\lambda_{kA}), \end{aligned}$$

donde  $F$  es una función lineal,  $G(\lambda_{kA}) = \lambda_{kA}E_A(\Lambda_A)$  y  $H(\lambda_{kA}) = (\lambda_k - \lambda_{kA})E_B(\Lambda - \Lambda_A)$ . Puesto que  $E_A$  y  $E_B$  son positivas, estrictamente crecientes y convexas, aplicando el lema 5.1 y considerando que la suma de una función lineal y una función estrictamente convexa es estrictamente convexa, resulta la convexidad estricta de  $f(\lambda_{kA})$ .

(ii) Resulta de considerar que la función objetivo es continua y estrictamente convexa, y el conjunto factible es compacto y convexo.

(iii) Resulta de aplicar la proposición 2.1. □

Si los costes de externalidad son funciones lineales de la forma  $E_i(q) = e_i q$ , con  $e_i > 0$ ,  $i = A, B$ , entonces

$$C_k(\lambda_A) = \lambda_{kA}(p_A + t_{kA} + e_A \Lambda_A) + (\lambda_k - \lambda_{kA})(p_B + t_{kB} + e_B(\Lambda - \Lambda_A)).$$

**Proposición 5.25** *Dadas localizaciones y precios, si*

$$E_i(q) = e_i q, \quad e_i > 0, \quad i = A, B,$$

*entonces existe equilibrio de Nash en asignaciones y es único.*

**Demostración** La existencia se tiene como caso particular de la proposición 5.24. Además,

$$\frac{\partial^2 C_k}{\partial \lambda_{kA} \lambda_{jA}} = \begin{cases} 2(e_A + e_B) & \text{si } j = k \\ e_A + e_B & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

y

$$H = (e_A + e_B) \begin{bmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 2 \end{bmatrix}.$$

Entonces,

$$H + H^t = 2(e_A + e_B) \begin{bmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 2 \end{bmatrix}$$

es definida positiva y aplicando la proposición 2.2 se deduce la unicidad del equilibrio.  $\square$

Nótese que las cuotas de mercado en equilibrio son únicas cuando los costes de externalidad son lineales. Esto es debido a que las asignaciones de Nash son también únicas.

**Proposición 5.26** *Dadas localizaciones y precios, sean*

$$E_i(q) = e_i q, \quad e_i > 0, \quad i = A, B,$$

$$F_k = -\frac{1}{e_A + e_B} [e_B(\Lambda + \lambda_k) + \Delta_k],$$

$$G_k = \Lambda + \lambda_k + F_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Entonces:

(i)  $\bar{\lambda}_{kA} = 0$ ,  $k = 1, \dots, n$ , es un equilibrio de Nash y  $\bar{\Lambda}_A = 0$ , sii

$$F_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

(ii)  $\bar{\lambda}_{kA} = \lambda_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , es un equilibrio de Nash y  $\bar{\Lambda}_A = \Lambda$ , sii

$$G_k \leq 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

(iii) Si existen  $k_1, k_2 \in \{1, \dots, n\}$  tales que  $F_{k_1} < 0$  y  $G_{k_2} > 0$ , entonces existirá  $j \in \{1, \dots, n\}$  tal que

$$f_{j-1} \leq \bar{\Lambda}_A \leq f_j, \quad \bar{\Lambda}_A \neq 0, \quad \bar{\Lambda}_A \neq \Lambda.$$

Además:

(a) Si existe una ordenación de los nodos tal que

$$-F_s \leq f_j \leq -\lambda_r - F_r, \quad r \in \{1, \dots, j\}, \quad s \in \{j+1, \dots, n\},$$

entonces

$$\bar{\lambda}_{kA} = \begin{cases} \lambda_k & \text{si } k = 1, \dots, j \\ 0 & \text{si } k = j+1, \dots, n \end{cases}$$

es un equilibrio de Nash y  $\bar{\Lambda}_A = f_j$ .

(b) Si existe una ordenación de los nodos tal que

$$-F_s \leq \frac{f_{j-1} - F_j}{2} \leq -\lambda_r - F_r, \quad r \in \{1, \dots, j-1\}, \quad s \in \{j+1, \dots, n\},$$

con  $0 \leq -\frac{f_{j-1} + F_j}{2} \leq \lambda_j$ , entonces

$$\bar{\lambda}_{kA} = \begin{cases} \lambda_k & \text{si } k = 1, \dots, j-1 \\ -\frac{f_{j-1} + F_j}{2} & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k = j+1, \dots, n \end{cases}$$

es un equilibrio de Nash y  $\bar{\Lambda}_A = \frac{f_{j-1} - F_j}{2}$ .

**Demostración** Las condiciones de KKT del problema

$$\min C_k(\lambda_A) \text{ sujeto a } 0 \leq \lambda_{kA} \leq \lambda_k,$$

son

$$\lambda_{kA} + \sum_{j=1}^n \lambda_{jA} + F_k + \mu_k \geq 0,$$

$$(\lambda_{kA} + \sum_{j=1}^n \lambda_{jA} + F_k + \mu_k) \lambda_{kA} = 0,$$

$$\mu_k (\lambda_k - \lambda_{kA}) = 0,$$

$$\mu_k \geq 0,$$

$$0 \leq \lambda_{kA} \leq \lambda_k.$$

Un equilibrio de Nash debe cumplir simultáneamente las condiciones de KKT para  $k = 1, \dots, n$ . Entonces:

- (i) Sea  $\bar{\lambda}_{kA} = 0$ ,  $k = 1, \dots, n$ , un equilibrio de Nash. Entonces, de las condiciones de KKT se deduce que  $\mu_k = 0$  y  $F_k \geq 0, \forall k$ . Recíprocamente, si  $F_k \geq 0, \forall k$ , haciendo  $\bar{\lambda}_{kA} = 0, \mu_k = 0, \forall k$ , se satisfacen simultáneamente las condiciones de optimalidad de KKT para los  $n$  problemas. Además,

$$\bar{\Lambda}_A = \sum_{k=1}^n \bar{\lambda}_{kA} = 0.$$

- (ii) Sea  $\bar{\lambda}_{kA} = \lambda_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , un equilibrio de Nash. Entonces, de las condiciones de KKT se deduce que  $\mu_k = -G_k \geq 0, \forall k$ . Recíprocamente, si  $G_k \leq 0, \forall k$ , haciendo  $\bar{\lambda}_{kA} = \lambda_k, \mu_k = -G_k, \forall k$ , se satisfacen simultáneamente las condiciones de KKT para todo  $k$ . Además,

$$\bar{\Lambda}_A = \sum_{k=1}^n \bar{\lambda}_{kA} = \Lambda.$$

- (iii) Si existen  $k_1, k_2 \in \{1, \dots, n\}$  tales que  $F_{k_1} < 0$  y  $G_{k_2} > 0$ , entonces de (i) y (ii) se deduce que  $\exists j \in \{1, \dots, n\}$  tal que

$$f_{j-1} \leq \bar{\Lambda}_A \leq f_j, \quad \bar{\Lambda}_A \neq 0, \quad \bar{\Lambda}_A \neq \Lambda.$$

- (a) Si existe una ordenación de los nodos tal que

$$-F_s \leq f_j \leq -\lambda_r - F_r, \quad r \in \{1, \dots, j\}, \quad s \in \{j+1, \dots, n\},$$

entonces

$$\begin{cases} \lambda_{rA} = \lambda_r, \mu_r = -(\lambda_r + f_j + F_r) & r = 1, \dots, j \\ \lambda_{sA} = 0, \mu_s = 0 & s = j+1, \dots, n \end{cases}$$

satisfacen las condiciones de KKT para  $k = 1, \dots, n$ . En este caso

$$\bar{\Lambda}_A = \sum_{r=1}^j \lambda_r = f_j.$$

- (b) Si existe una ordenación de los nodos tal que

$$-F_s \leq \frac{f_{j-1} - F_j}{2} \leq -\lambda_r - F_r, \quad r \in \{1, \dots, j-1\}, \quad s \in \{j+1, \dots, n\},$$

con  $0 \leq -\frac{f_{j-1}+F_j}{2} \leq \lambda_j$ , entonces

$$\begin{cases} \lambda_{rA} = \lambda_r, \mu_r = -(\lambda_r + F_r + \frac{f_{j-1}-F_j}{2}), r = 1, \dots, j-1 \\ \lambda_{jA} = \frac{f_{j-1}-F_j}{2} - f_{j-1} = -\frac{f_{j-1}+F_j}{2}, \mu_j = 0 \\ \lambda_{sA} = 0, \mu_s = 0, s = j+1, \dots, n \end{cases}$$

satisfacen las condiciones de KKT para  $k = 1, \dots, n$ . En este caso

$$\bar{\lambda}_A = f_{j-1} - \frac{f_{j-1}+F_j}{2} = \frac{f_{j-1}-F_j}{2}. \quad \square$$

**Proposición 5.27** Sean  $E_i(q) = e_i q$ ,  $e_i > 0$ ,  $i = A, B$ , y la red  $N(V, E)$  con  $\lambda_k = \lambda$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Sean además  $x_A, x_B$ , localizaciones dadas tales que  $t_{kB} - t_{kA} = t_{BA}$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Si  $p_A, p_B$ , satisfacen

$$-t_{BA} - (n+1)e_B\lambda \leq p_B - p_A \leq -t_{BA} + (n+1)e_A\lambda,$$

entonces las expresiones

$$\bar{\lambda}_{kA} = \bar{\lambda}_A = \frac{1}{(n+1)(e_A + e_B)} ((n+1)e_B\lambda + p_B - p_A + t_{BA}), k = 1, \dots, n,$$

son un equilibrio de Nash y  $\bar{\lambda}_A = n\bar{\lambda}_A$ .

**Demostración** El sistema

$$\lambda_{kA} + \sum_{j=1}^n \lambda_{jA} = -F_k, k = 1, \dots, n,$$

es compatible determinado con solución  $\bar{\lambda}_{kA}$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Además, si

$$-t_{BA} - (n+1)e_B\lambda \leq p_B - p_A \leq -t_{BA} + (n+1)e_A\lambda,$$

se cumple que  $0 \leq \bar{\lambda}_{kA} \leq \lambda_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , por lo que estas asignaciones satisfacen las condiciones de KKT del problema, que aparecen en la demostración de la proposición 5.26, tomando  $\mu_k = 0$ ,  $k = 1, \dots, n$ .  $\square$

Nótese que la condición

$$t_{kB} - t_{kA} = t_{BA}, k = 1, \dots, n,$$

se cumple para  $x_A = x_B$ , en cuyo caso  $t_{BA} = 0$ . También se cumple esta condición cuando la red tiene un único nodo con demanda no nula. Obsérvese que bajo las hipótesis de la proposición anterior, la cantidad asignada a la firma  $A$  desde cada punto de demanda es la misma. Además, la asignación del nodo de demanda  $k$  a la firma  $B$  es  $\bar{\lambda}_{kB} = \lambda - \bar{\lambda}_{kA}$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

### 5.3.2 Equilibrio en precios

Sea la red  $N(V, E)$  con  $\lambda_k = \lambda$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Sean  $x_A, x_B$ , localizaciones dadas tales que  $t_{kB} - t_{kA} = t_{BA}$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Supongamos que

$$-t_{BA} - (n+1)e_B\lambda \leq p_B - p_A \leq -t_{BA} + (n+1)e_A\lambda.$$

La función de beneficio para la empresa  $i$  se puede expresar de la siguiente forma

$$\pi_i(p_A, p_B) = (p_i - C'_i)\bar{\lambda}_i - F_i, \quad i = A, B,$$

y sustituyendo la cuota de mercado en equilibrio se tiene que

$$\pi_A(p_A, p_B) = \frac{n}{(n+1)(e_A + e_B)}(p_A - C'_A)((n+1)e_B\lambda + p_B - p_A + t_{BA}) - F_A.$$

El beneficio de B se obtiene sin más que permutar los subíndices.

**Proposición 5.28** Sean  $E_i(q) = e_i q$ ,  $e_i > 0$ ,  $i = A, B$ , y la red  $N(V, E)$  con  $\lambda_k = \lambda$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Sean además  $x_A, x_B$ , localizaciones dadas tales que  $t_{kB} - t_{kA} = t_{BA}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , y

$$\bar{\lambda}_{kA} = \bar{\lambda}_A = \frac{1}{(n+1)(e_A + e_B)}((n+1)e_B\lambda + p_B - p_A + t_{BA}), \quad k = 1, \dots, n.$$

Entonces, el único equilibrio de Nash en precios es

$$(\bar{p}_A, \bar{p}_B) = \begin{cases} (\bar{p}_A, C'_B) & \text{si } C'_A - C'_B < L \\ (p^*, p^*) & \text{si } L \leq C'_A - C'_B \leq U \\ (C'_A, \bar{p}_B) & \text{si } C'_A - C'_B > U, \end{cases}$$

donde

$$p_A^* = \frac{1}{3} [2C'_A + C'_B + t_{BA} + (n+1)(e_A + 2e_B)\lambda],$$

$$p_B^* = \frac{1}{3} [C'_A + 2C'_B - t_{BA} + (n+1)(2e_A + e_B)\lambda],$$

$$\bar{p}_A = \frac{1}{2} [C'_A + C'_B + t_{BA} + (n+1)e_B\lambda],$$

$$\bar{p}_B = \frac{1}{2} [C'_A + C'_B - t_{BA} + (n+1)e_A\lambda],$$

$$L = t_{BA} - (n+1)(2e_A + e_B)\lambda,$$

$$U = t_{BA} + (n+1)(e_A + 2e_B)\lambda.$$

**Demostración** El beneficio  $\pi_i(p_A, p_B)$  es una función de clase  $C^{(2)}$  y estrictamente cóncava respecto de  $p_i$  ya que

$$\frac{\partial^2 \pi_i}{\partial p_i^2} = \frac{-2n}{(n+1)(e_A + e_B)} < 0, \quad i = A, B,$$

con  $p_i$  en el conjunto compacto y convexo  $[C'_i, h]$ , donde  $h$  es un valor suficientemente grande. La matriz Hessiana  $H(s)$  cumple

$$H(s) + H^t(s) = \begin{pmatrix} -2c & c \\ c & -2c \end{pmatrix}$$

donde  $c = \frac{2n}{(n+1)(e_A + e_B)}$ . Esta matriz es definida negativa<sup>4</sup>. Aplicando la proposición 2.2 se deduce que existe un único equilibrio de Nash. El par  $(\bar{p}_A, \bar{p}_B)$  satisface simultáneamente las condiciones de KKT de los problemas

$$\begin{cases} \max_{p_A \geq C'_A} \pi_A(p_A, \bar{p}_B) \\ \max_{p_B \geq C'_B} \pi_B(\bar{p}_A, p_B) \end{cases}$$

<sup>4</sup>los menores principales son  $H_1 = -2c < 0$ ,  $H_2 = 3c^2 > 0$

dadas por las ecuaciones siguientes:

$$\frac{c}{2} ((n+1)e_B\lambda - 2p_A + p_B + C'_A + t_{BA}) + \lambda = 0,$$

$$\frac{c}{2} ((n+1)e_A\lambda - 2p_B + p_A + C'_B - t_{BA}) + \mu = 0,$$

$$\lambda(p_A - C'_A) = 0,$$

$$\mu(p_B - C'_B) = 0,$$

$$p_A \geq C'_A,$$

$$p_B \geq C'_B,$$

$$\lambda, \mu \geq 0.$$

Basta considerar

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lambda = 0, \mu = nc[2(C'_B - p_B^*) + p_A^* - \bar{p}_A] & \text{si } C'_A - C'_B < L \\ \lambda = 0, \mu = 0 & \text{si } L \leq C'_A - C'_B \leq U \\ \lambda = nc[2(C'_A - p_A^*) + p_B^* - \bar{p}_B], \mu = 0 & \text{si } C'_A - C'_B > U \end{array} \right.$$

expresiones que son  $\geq 0$ . Entonces, se deduce que  $(\bar{p}_A, \bar{p}_B)$  son los precios de equilibrio.  $\square$

Puede comprobarse que cuando  $L \leq C'_A - C'_B \leq U$ , se tiene que

$$-t_{BA} - (n+1)e_B\lambda \leq p_B^* - p_A^* \leq -t_{BA} + (n+1)e_A\lambda,$$

y entonces  $\bar{\lambda}_{kA}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , es un equilibrio de Nash en asignaciones. En el resto del epígrafe supondremos que se cumple la condición  $L \leq C'_A - C'_B \leq U$ .

### 5.3.3 Equilibrio en localización para $n = 1$

Supongamos que la red  $N(V, E)$  tiene un único nodo con demanda no nula  $v_1$  (y quizás otros con demanda nula) y denotemos  $t_{BA}(x_A, x_B) = t_1(x_B) - t_1(x_A)$ . Supongamos además que

$$L(x_A, x_B) \leq C'_A - C'_B \leq U(x_A, x_B), \forall x_A, x_B \in N,$$

donde

$$L(x_A, x_B) = t_{BA}(x_A, x_B) - 2(e_A + e_B)\lambda,$$

$$U(x_A, x_B) = t_{BA}(x_A, x_B) + 2(e_A + 2e_B)\lambda.$$

Bajo la condición anterior el precio de equilibrio es  $(p_A^*, p_B^*)$ . Sustituyendo  $\bar{p}_B - \bar{p}_A$  por

$$p_B^* - p_A^* = \frac{1}{3} [C'_B - C'_A - 2t_{BA}(x_A, x_B) + 2(e_A - e_D)\lambda]$$

en la expresión  $\pi_A(x_A, x_B)$  se obtiene

$$\pi_A(x_A, x_B) = \frac{[C'_B - C'_A + t_{BA}(x_A, x_B) + 2(e_A + 2e_B)\lambda]^2}{18(e_A + e_B)} F_A.$$

La expresión para  $B$  se obtiene intercambiando los subíndices. Obsérvese que tanto las expresiones del beneficio como los precios de equilibrio son los mismos que para la asignación de Pareto estudiada con anterioridad. Esto es debido a que sólo existe un nodo con demanda no nula y que entonces la asignación de Pareto coincide con la asignación de Nash. Como se probó en la sección 5.2.2.2, bajo la condición 5.1 y costes de externalidad lineales el único equilibrio en localizaciones es  $(\bar{x}_A, \bar{x}_B) = (v_1, v_1)$ .

## Capítulo 6

# Conclusiones y posibles extensiones

En esta memoria se hace una revisión de los problemas de competencia espacial y una extensión de determinados juegos espaciales en redes, que son aquellos problemas de competencia espacial en los cuales un determinado número de empresas pretenden instalarse sobre una red de transporte, donde no existen aún competidores, y servir la demanda de un determinado producto, la cual se localiza en los nodos de la red.

Los supuestos comunes a todos los modelos analizados en esta memoria son los siguientes:

- (i) Las firmas, maximizadoras del beneficio, se localizan en la red en una primera etapa y con posterioridad deciden el precio del producto o la producción en una segunda etapa. Este supuesto es necesario para poder modelar el comportamiento estratégico de las empresas como un juego en dos etapas.
- (ii) El coste marginal no depende de la cantidad total producida. Este supuesto, que es bastante restrictivo, se emplea en los capítulos 3 y 4 para desagregar el problema original en  $n$  subproblemas, uno para cada mercado separado espacialmente. Por otro lado, se trata de una condición asumida frecuentemente en la literatura sobre juegos espaciales.
- (iii) El coste de transporte es una función positiva, creciente y cóncava de la distancia recorrida. Esta suposición es utilizada para probar que las funciones de beneficio son convexas y, por tanto, que si el objetivo es la maximización de beneficio, cada firma se localiza en un nodo independientemente de las ubicaciones del resto de las firmas. Este resultado es importante porque reduce la búsqueda del equilibrio en la

primera etapa a los nodos de la red, garantizando que si existe equilibrio, entonces existe uno en un conjunto de nodos de la red.

Otros supuestos que dan lugar a diferentes escenarios son los siguientes:

- (iv) La estructura del mercado corresponde a un duopolio o un oligopolio.
- (v) La demanda es elástica o totalmente inelástica al precio. La función inversa de demanda en cada mercado es una función decreciente de la cantidad servida. Siempre que no ha sido posible obtener resultados para funciones más generales se ha particularizado para demandas constantes o funciones de demanda lineales.
- (vi) Las empresas compiten en la segunda etapa decidiendo el precio que fijarán o la cantidad que proveerán en cada mercado. Este supuesto da lugar a dos tipos de competencia, vía precios o competencia a la Bertrand, y vía cantidades o competencia a la Cournot.
- (vii) Las empresas establecen diferentes conjeturas respecto al modo en el cual reaccionarán sus competidoras en la segunda etapa. En esta memoria se analizan y comparan tres tipos de conjeturas. El supuesto más común en la literatura es la conjetura nula, según el cual cada empresa asume que sus competidoras no reaccionarán a cambios en su precio o producción. Este supuesto se corresponde con el equilibrio de Nash. Otro supuesto es el del líder-seguidor, según el cual una empresa es líder y adelanta la reacción de las seguidoras. Este supuesto corresponde al equilibrio de Stackelberg. Finalmente, todas las firmas pueden adoptar conjeturas no nulas y adelantar las reacciones de sus competidoras.
- (viii) Pueden existir externalidades negativas. Bajo este supuesto, la decisión de cada usuario influye en el resto. Se estudian dos casos diferentes, en el primero el objetivo es la minimización del coste agregado y en el segundo el objetivo es la minimización del coste individual.
- (ix) Se consideran dos políticas de precios. En los problemas sin externalidad las empresas fijan el precio en destino (discriminación espacial de precios), mientras que en los problemas con externalidad las empresas fijan el precio en origen. Cuando las firmas fijan precio en destino, los mercados deben estar separados espacialmente para evitar que algún consumidor pueda adquirir el producto en un punto de demanda diferente a aquel en el que se encuentra, o incluso comprar en un punto de demanda para vender en otro obteniendo beneficios. Un ejemplo de este tipo de mercados separados espacialmente se encuentra en el comercio internacional con grandes núcleos urbanos conectados por vías rápidas de comunicación.

Bajo estos supuestos se estudia la existencia y unicidad del equilibrio localización-cantidad o localización-precio, y se comparan los resultados obtenidos para los diferentes escenarios. Como resultado de carácter general, puede decirse que la solución es bastante sensible a los siguientes supuestos: el tipo de competencia, la elasticidad de la demanda, el número de competidores y la presencia de externalidad.

A continuación, se detallan por capítulos algunos de los resultados obtenidos.

### Capítulo 3. Juego espacial duopolístico

Se han presentado diferentes escenarios, probándose la existencia de equilibrio en la segunda etapa bajo determinadas condiciones y localizaciones fijas. Respecto a la primera etapa, se ha probado que el beneficio es una función convexa a lo largo de cualquier arista de la red cuando el coste de transporte es una función cóncava de la distancia. Por tanto, si existe equilibrio, entonces existe un equilibrio en los nodos de la red. Cuando la demanda es totalmente inelástica al precio se prueba, además, la existencia de equilibrio en la primera etapa.

Analicemos en primer lugar el supuesto de demanda totalmente inelástica al precio. En este caso, la competencia se produce necesariamente vía precios. Como se ha comprobado, el precio competitivo en un determinado mercado coincide con el mayor coste en destino, siendo la firma con menor coste la que captura toda la demanda de dicho mercado. Las localizaciones de equilibrio son aquellas que minimizan el coste de proveer la totalidad de los mercados, por lo que se trata de un óptimo de Pareto para el problema de reducción de costes en destino, además de una solución deseable socialmente al maximizar el beneficio de las empresas al mismo tiempo que se reduce la cantidad total pagada por los consumidores. Un resultado similar a este se obtiene también en el caso de demanda lineal.

La introducción de elasticidad-precio al considerar funciones de demanda lineales, da lugar a dos posibles tipos de competencia, vía cantidades y vía precios. Se han comparado los resultados obtenidos en la segunda etapa para los diferentes escenarios estudiados, presentando bajo la condición  $a_k > \{3c_A^k - 2c_B^k, 3c_B^k - 2c_A^k\}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , una clasificación de los mismos en función del precio alcanzado, obteniéndose las siguientes conclusiones. Consideremos en primer lugar la competencia en cantidades. En este caso, existe un único equilibrio de Nash en la segunda etapa tanto con conjeturas de Stackelberg como con conjeturas no nulas. Las cantidades suministradas en cada mercado asumiendo conjeturas no nulas son un 50% superiores que las que se obtienen con conjeturas nulas. En el supuesto de Stackelberg la producción del líder es el doble de la del seguidor. Las conjeturas no nulas originan la competencia más agresiva respecto a la reducción del precio, seguida del supuesto de Stackelberg, mientras que el precio mayor se produce bajo conjeturas nulas. En segundo

lugar se analiza la competencia en precios. En esta ocasión, a diferencia del caso anterior, se produce un reparto de los mercados, esto es, cada mercado es servido por una única empresa, la de menor coste en destino, fijando en dicho mercado el precio de monopolio siempre que éste sea inferior al coste en destino de su competidora. La colusión en precios reduce la cantidad servida y eleva los precios, lo cual es un resultado ya conocido para otros modelos.

Para comparar ambos tipos de competencia cuando la demanda es lineal, cantidad frente a precio, se ha comprobado la siguiente relación entre los precios en un determinado mercado  $k$  para los diferentes escenarios analizados,

$$p_{conj. no nula}^k < p_{competitivo}^k < p_{Stack.}^k < p_{conj. nula}^k < p_{colusivo}^k$$

y dado que la demanda es una función decreciente del precio, con la cantidad suministrada se tiene la relación inversa. Como puede observarse, la competencia más agresiva, en cuanto a reducción de precio se refiere, se produce compitiendo en cantidad bajo el supuesto de conjetura no nula, mientras que el precio más elevado se obtiene cuando existe colusión.

#### Capítulo 4. Juego espacial oligopolístico

El número de empresas competidoras es un factor importante en los problemas de competencia espacial, hasta tal punto que un mismo problema puede tener equilibrio para un determinado número de firmas y no existir equilibrio para otro.

En primer lugar se considera el escenario en el que los precios están fijados y coinciden entre empresas. En este caso, la principal diferencia radica en la cuota de mercado. En el oligopolio las firmas pueden tener cuotas de mercado diferentes, mientras que en el duopolio las cuotas de mercado de ambas firmas coinciden. Además, la existencia de equilibrio en localización depende del número de empresas, de la naturaleza del problema, ya sea discreto o continuo, y del tipo de red. Ni siquiera en árboles puede asegurarse la existencia de equilibrio, como ocurre con el problema de Hotelling con tres empresas y precios dados.

Consideremos ahora que los precios son variables. Algunos de los resultados de equilibrio localización-cantidad obtenidos por Sarkar, Gupta y Pal (1997) han sido extendidos considerando funciones de demanda que cumplen una condición más general que la impuesta por los autores citados y que incluye el tipo de funciones utilizadas por éstos. Esta condición consiste en la concavidad estricta de las funciones de ingreso de las firmas que, dado que los costes marginales de producción se han considerado independientes de la cantidad, implica la concavidad estricta de las funciones de beneficio. Para este tipo de funciones, se prueba la existencia y unicidad del equilibrio de Nash en cantidades para la segunda etapa cuando las localizaciones están fijas. Además, bajo ciertas

condiciones, si existe equilibrio y el coste de transporte es una función cóncava de la distancia, entonces existe un equilibrio en los nodos de la red. En el caso particular en el que la demanda es lineal, existe un equilibrio de Nash subjuego perfecto en los nodos de la red y la solución puede obtenerse mediante un algoritmo de orden  $O(n^{r+1})$ .

Cuando la competencia se realiza en precios, no existen diferencias significativas en relación al número de empresas. De hecho, cuando compiten más de dos empresas, el problema en cada mercado se reduce al análisis del equilibrio entre las dos empresas con menor coste en destino. Esto no sucede con la competencia en cantidades, donde el precio en un determinado mercado depende de los costes en destino de todas las firmas. En la competencia vía precios, cada firma captura aquellos mercados en los que tiene el menor coste en destino entre todas las firmas competidoras, fijando en dichos mercados el precio de monopolio siempre que éste sea inferior al segundo menor coste en destino.

Cuando la competencia es en precios y la demanda es totalmente inelástica, existe equilibrio en un conjunto de nodos de la red. Además, dichas localizaciones minimizan el coste social, que es el coste mínimo de cubrir toda la demanda si las firmas actúan de forma cooperativa en la primera etapa. Se propone un algoritmo de orden  $O(n^{r+1})$  para obtener las localizaciones de equilibrio, basado en un resultado que asegura la inexistencia de ciclos en los procesos en los que las firmas deciden alternativamente su mejor ubicación en los nodos de la red, dada la ubicación del resto de las firmas.

Finalmente, dada una situación de equilibrio, la entrada de una nueva empresa afecta al precio de equilibrio de todos los mercados cuando la competencia se produce vía cantidades, mientras que si la competencia se realiza vía precios, únicamente afecta a aquellos mercados en los que su coste en destino es uno de los dos menores.

## Capítulo 5. Juego espacial duopolístico con externalidades

Se consideran externalidades negativas y dos escenarios distintos. En el primero, un agente regulador lleva a cabo las asignaciones con el fin de minimizar el coste agregado de todos los consumidores y obtener así un óptimo de Pareto. En el segundo, los consumidores toman sus decisiones individualmente para obtener un equilibrio de Nash. En el primero de estos escenarios, la externalidad se internaliza al agregar los costes y, de esta forma, se evita la ineficiencia social del segundo escenario.

En el primer escenario se prueba la existencia de una única asignación óptima de Pareto cuando el coste de externalidad es una función positiva, estrictamente creciente y convexa. Además, se estudia el equilibrio localización-precio en el caso particular de externalidades lineales. En la segunda etapa, las funciones

de beneficio están definidas sobre ciertos conjuntos, en los cuales se estudian los equilibrios parciales. Posteriormente, esta información se utiliza para deducir algunos resultados sobre el equilibrio global en precios. En la primera etapa y bajo ciertas condiciones, como que la red sea un árbol y que el coste de transporte sea una función lineal de la distancia, entre otras, se prueba que el equilibrio, si existe, se localiza en los nodos de la red. Cuando el coste de externalidad es una función cuadrática puede seguirse un desarrollo similar al caso lineal y no existen diferencias significativas en los resultados que se obtienen.

En el segundo escenario, se prueba la existencia de un equilibrio de Nash en asignaciones cuando el coste de externalidad es una función positiva, estrictamente creciente y convexa. En el caso particular en el que los costes de externalidad son lineales, se prueba la unicidad de esta solución y se estudia el equilibrio localización-precio. Bajo ciertas condiciones existe un único equilibrio de Nash en precios.

### Posibles extensiones

El estudio realizado podría extenderse a funciones de demanda y costes de externalidad más generales, como por ejemplo lineales a trozos, que dieran lugar a funciones de beneficios cuasiconcavas o de otro tipo que permitan asegurar la existencia de equilibrio en la segunda etapa. Algunas de estas condiciones diferentes a la cuasiconcavidad pueden encontrarse en Nishimura y Friedman (1981), aunque la verificación de las mismas así como la obtención de las expresiones del equilibrio en la segunda etapa suele ser laboriosa y no exenta de dificultad. Ello puede hacer más compleja la obtención de resultados para la primera etapa del juego.

En los capítulos 3 y 4 se consideran demandas insensibles al precio (totalmente inelásticas) y curvas de demanda lineales. Se asumen demandas lineales por simplicidad y por la necesidad de obtener resultados para cada etapa. Un tipo de demanda más general es la siguiente,

$$p(q) = \begin{cases} a - bq^c & \text{si } 0 \leq q \leq \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{c}} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde  $a$  es un número real no negativo y  $b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$ , de forma que se satisfagan las condiciones de demanda, es decir, que sea decreciente, esto es  $\frac{dp}{dq} = -bcq^{c-1} \leq 0$ , y convexa, es decir  $\frac{d^2p}{dq^2} = -bc(c-1)q^{c-2} \geq 0$ . De la primera condición se deduce (i)  $bc \geq 0$ , es decir,  $b$  y  $c$  deben tener el mismo signo, y de la segunda se concluye (ii)  $bc(c-1) \leq 0$ . De las condiciones (i) y (ii) se deduce que  $c \leq 1$ . Como caso particular aparecen la demanda lineal ( $c = 1$ ) y la demanda de elasticidad constante  $c$  ( $a = 0$  y  $c < 0$ ), que incluye a la hipérbola equilátera como caso particular ( $a = 0$ ,  $b = -1$  y  $c = -1$ ).

En el capítulo 5, por simplicidad, se asumen costes de externalidad lineales y cuadráticos, aunque sería interesante estudiar funciones de espera como ha hecho Brandeau y Chiu (1994a, 1994b), quienes consideran servicios con capacidades y funciones de externalidad convexas, crecientes y tendiendo a infinito cuando la utilización del servicio se aproxima a su capacidad. Sin embargo, estos autores asumen que los precios no intervienen en el proceso de decisión y la introducción de este tipo de funciones más realistas puede hacer intratable el juego en dos etapas que considera decisiones en precios en la segunda. Por otra parte, la demanda es totalmente inelástica al precio y una primera extensión consistiría en asumir que la demanda es lineal. Además, la extensión del duopolio al oligopolio podría aportar resultados interesantes.

Además de las extensiones específicas de cada capítulo, existen otras de carácter general que serán enumeradas a continuación. Una suposición bastante restrictiva es asumir costes marginales de producción constantes. Este supuesto se utiliza para desagregar el problema de maximización de beneficios en  $n$  subproblemas, uno para cada mercado. Sin embargo, cuando existen rendimientos a escala crecientes, tanto los costes marginales como los costes medios son decrecientes. Por otra parte, cuando existen rendimientos a escala decrecientes, ambos costes son crecientes. Generalmente, los monopolios actúan bajo rendimientos a escala crecientes, aunque en competencia lo habitual son los rendimientos a escala decrecientes.

Uno de los objetivos del estado es garantizar la competencia en los mercados como forma de salvaguardar los intereses de los consumidores. Sin embargo, existen cárteles como la OPEP, Organización de Países Exportadores de Petróleo, donde se decide regularmente la producción de los países miembros con el fin de estabilizar los precios dentro de cierta franja que interesa a los miembros del cártel. Resulta de interés, por tanto, la colusión entre las empresas, que se produce cuando existen acuerdos entre las mismas que limitan o reducen la competencia y, por consiguiente, incrementan los beneficios de las firmas. De forma similar a como se procedió en el modelo de competencia en precios con demanda lineal (capítulos 3 y 4) podría realizarse un análisis de los juegos cooperativos para el resto de los escenarios.

Una extensión natural es la generalización del modelo al caso en que existan empresas operando en el mercado, asumiendo que no hay posibilidad de relocalización para las firmas establecidas. Por otro lado, la extensión al caso en el que cada firma puede localizar más de un centro de servicio podría estudiarse de manera similar a como lo ha hecho Sarkar, Gupta y Pal (1997) con el modelo de competencia en cantidades con conjeturas nulas del capítulo 4. Finalmente, puede ser interesante el estudio de juegos dinámicos.

# Bibliografía

- [1] Achabal, D. D., W. L. Gorr y V. Mahajan (1982), "MULTILOC: a multiple store location decision model", *Journal of Retailing*, 58, 5-25.
- [2] Aikens, C. H. (1985), "Facility location models for distribution planning", *European Journal of Operational Research*, 22, 263-279.
- [3] Andaluz Funcia, J. (1995), "Competencia en localización y precios: influencia de los costes de transporte", *Cuadernos Aragoneses de Economía*, 2, 343-358.
- [4] Andaluz Funcia, J. (2000), "On protection and vertical product differentiation", *Regional Science and Urban Economics*, 30, 77-97.
- [5] Anderson, S. P. (1987), "Spatial competition and price leadership", *International Journal of Industrial Organization*, 5, 369-398.
- [6] Anderson, S. P. (1988), "Equilibrium existence in a linear model of spatial competition", *Economica*, 55, 479-491.
- [7] Anderson, S. P., DePalma, A. y J. F. Thisse (1992), "Social surplus and profitability under different spatial pricing policies", *Southern Economic Journal*, 58, 934-949.
- [8] Anderson, S. P. y M. Engers (1994), "Spatial competition with price-taking firms", *Economica*, 61, 125-136.
- [9] Anderson, S. P. y D. J. Neven (1990), "Spatial competition a la Cournot: price discrimination by quantity-setting oligopolists", *Journal of Regional Science*, 30, 1-14.
- [10] Anderson, S. P. y D. J. Neven (1991), "Cournot competition yields spatial agglomeration", *International Economic Review*, 32, 793-808.
- [11] Arrow, K. J. y M. D. Intriligator (1982), *Handbook of Mathematical economics*, vol. 11, North Holland.

- [12] Ashtiani, H. Z. y T. L. Magnanti (1981), "Equilibria on a congested transportation network", *SIAM Journal of Algebra and Discrete Methods*, 2, 213-226.
- [13] Avella, P. y otros (1988), "Some personal views on the current state and the future of locational Analysis", *European Journal of Operational Research*, 104, 269-287.
- [14] Avriel, M., W. E. Diewert, S. Schaible e I. Zang (1988), *Generalized Concavity*, Plenum Press.
- [15] Ball, M. O., T. L. Magnanti, C. L. Monma y G. L. Nemhauser (1995), *Network routing*, Handbooks in Operations Research and Management Science, vol. 8, North Holland.
- [16] Bauer, A., W. Domschke y E. Pesch (1993), "Competitive location on a network", *European Journal of Operational Research*, 66, 372-391.
- [17] Beckmann, M. J. (1989), "A note on spatial price policy when demand is linear but non-uniform", *Regional Science and Urban Economics*, 15, 103-157.
- [18] Ben-Akiva, M., A. De Palma y J. F. Thisse (1989), "Spatial competition with differentiated products", *Regional Science and Urban Economics*, 15, 5-19.
- [19] Benati, S. (1998), "NP-hardness of some competitive location models with probabilistic allocation rules", *documento de trabajo*.
- [20] Benati, S. (1999), "The maximum capture problem with heterogeneous customers", *Computers and Operations Research*, 26, 1351-1367.
- [21] Benati, S. y G. Laporte (1994), "Tabu search algorithms for the (r|Xp)-medianoid and (r|p)-centroid problems", *Location Science*, 2, 193-204.
- [22] Berge, C. (1991), *Graphs*, North-Holland.
- [23] Berman, O. y R. C. Larson (1982), "The median problem with congestion", *Computation and Operations Research*, 9, 119-126.
- [24] Berman, O., R. C. Larson y S. S. Chiu (1985), "Optimal server location on a network operating as an M/G/1 queue", *Operations Research*, 33, 746-771.
- [25] Bertrand, J. (1883), "Théorie mathématique de la richesse sociale", *Journal des Savants*, 499-508.
- [26] Bhadury, J. (1996), "Competitive location under uncertainty of costs", *Journal of Regional Science*, 4, 527-554.

- [27] Bierman, H. S. y L. Fernández (1998), *Game theory with economic applications*, Addison-Wesley.
- [28] Braid, R. M. (1991), "The locations of congestible facilities in adjacent jurisdictions", *Regional Science and Urban Economics*, 21, 617-626.
- [29] Braid, R. M. (1999), "Asymmetric entrant location with a discrete consumer distribution: spatial price discrimination versus mill pricing", *Journal of Regional Science*, 39, 125-148.
- [30] Brandeau, M. L. y S. S. Chiu (1989), "An overview of representative problems in location research", *Management Sciences*, 35, 645-674.
- [31] Brandeau, M. L. y S. S. Chiu (1994a), "Location of competing facilities in a user-optimizing environment with market externalities", *Transportation Science*, 28, 125-140.
- [32] Brandeau, M. L. y S. S. Chiu (1994b), "Facility location in a user-optimizing environment with market externalities: analysis of customer equilibria and optimal public facility locations", *Location Science*, 2, 129-147.
- [33] Brandeau, M. L., S. S. Chiu, S. Kumar y T. A. Grossman (1995), "Location with market externalities", en *Facility location*, Z. Drezner (ed.), 121-150, Springer.
- [34] Campos Rodríguez, C. (2000), "Localización mediante votos en redes", Memoria de tesis doctoral, Dpto. de Estadística, Investigación Operativa y Computación, Universidad de La Laguna.
- [35] Campos Rodríguez, C. y J. A. Moreno Pérez (2000), "Comparison of  $\alpha$ -Condorcet points with median and center locations", *Top*, 8, 215-234.
- [36] Caplin, A. y B. Nalebuff (1991), "Aggregation and imperfect competition", *Econometrica*, 59, 25-59.
- [37] Chamorro Rivas, J. M. (2000), "Plant proliferation in a spatial model of Cournot competition", *Regional Science and Urban Economics*, 30, 507-518.
- [38] Cheung, F. K. y X. Wang (1995), "Spatial price discrimination and location choice with non-uniform demands", *Regional Science and Urban Economics*, 25, 59-73.
- [39] Chiang, A. C. (1987), *Métodos fundamentales de economía matemática*, McGraw-Hill.

- [40] Chiu, S. S. y R. C. Larson (1985), "Locating an n-server facility in a stochastic environment", *Computers and Operations Research*, 12, 509-516.
- [41] Cornes, R. y T. Sandler (1986), *The theory of externalities, public goods, and club goods*, Cambridge University Press.
- [42] Cournot, A. (1838), "Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses", edición en castellano con el título "Investigaciones acerca de los principios matemáticos de la teoría de las riquezas", Alianza Editorial, 1969.
- [43] Craig, S., A. Ghosh y S. McLafferty (1984), "Models of the retail location process: a review", *Journal of Retailing*, 60, 5-36.
- [44] D'Aspremont, C., J. J. Gabszewicz y J. F. Thisse (1979), "On Hotelling's stability in competition", *Econometrica*, 47, 1145-1150.
- [45] Daskin, M. S. (1995), *Network and discrete location: models, algorithms, and applications*, Wiley-Interscience.
- [46] DePalma, A. y L. Leruth (1993), "Equilibrium in competing networks with differentiated products", *Transportation Science*, 27, 73-80.
- [47] Densham, P. J. y G. Rushton (1992), "Strategies for solving large location-allocation problems by heuristic methods", *Environment and Planning A*, 24, 289-304.
- [48] Desrochers, M., P. Marcotte y M. Stan (1995), "The congested facility location problem", *Location Science*, 3, 9-23.
- [49] Devletoglou, N. E. (1965), "A dissenting view of duopoly and spatial competition", *Economica*, Mayo, 140-164.
- [50] Diestel, R. (1997), *Graph Theory*, Springer-Verlag, New York.
- [51] Dixit, A. y S. Skeath (1999), *Games of Strategy*, Norton.
- [52] Dobson, G. y U. S. Karmarkar (1987), "Competitive location on a network", *Operations Research*, 35, 565-574.
- [53] Dorta González, P., D. R. Santos Peñate y R. Suárez Vega (1997), "Facility location according to legal conditions. An application to the Canary Islands retail trade", *Studies in Locational Analysis*, 11, 177-192.
- [54] Dorta González, P., D. R. Santos Peñate y R. Suárez Vega (2000a), "Competencia espacial duopolística: Un análisis del equilibrio bajo diferentes conjeturas", *Documento de trabajo*.

- [55] Dorta González, P., D. R. Santos Peñate y R. Suárez Vega (2000b), "Un modelo de competencia espacial duopolística vía precios con diferentes elasticidades de la demanda", *Documento de trabajo*.
- [56] Drezner, T. (1994a), "Locating a single new facility among existing unequally attractive facilities", *Journal of Regional Science*, 34, 237-252.
- [57] Drezner, T. (1994b), "Optimal continuous location of a retail facility, facility attractiveness, and market share: an interactive model", *Journal of Retailing*, 70, 49-64.
- [58] Drezner, T. (1995), "Competitive facility location in the plane" en *Facility location: A survey of applications and methods*, Z. Drezner (ed.), 285-300, Springer.
- [59] Drezner, T. y Z. Drezner (1996), "Competitive facilities: Market share and location with random utility", *Journal of Regional Science*, 36, 1-15.
- [60] Drezner, Z. (1982), "Competitive location strategies for two facilities", *Regional Science and Urban Economics*, 12, 485-493.
- [61] Drezner, Z. (1995a), *Facility location: A survey of applications and methods*, Springer.
- [62] Drezner, Z. (1995b), "Dynamic facility location: the progressive p-median problem", *Location Science*, 3, 1-7.
- [63] Drezner, Z. y G. O. Wesolowsky (1999a), "Allocation of demand when cost is demand-dependent", *Computers and Operations Research*, 26, 1-15.
- [64] Drezner, Z. y G. O. Wesolowsky (1999b), "Allocation of discrete demand with changing costs", *Computers and Operations Research*, 26, 1335-1349.
- [65] Drezner, Z., G. O. Wesolowsky y T. Drezner (1998), "On the logit approach to competitive facility location", *Journal of Regional Science*, 38, 313-327.
- [66] Dutta, B. K. y W. R. King (1980), "Metagame analysis of competitive strategy", *Strategic Management Journal*, 1, 357-370.
- [67] Eaton, B. C. (1972), "Spatial competition revisited", *Canadian Journal of Economics*, 15, 268-278.
- [68] Eaton, B. C. y R. G. Lipsey (1974), "The principle of minimum differentiation reconsidered: Some new developments in the theory of spatial competition", *Review Economics Studies*, 42, 27-49.
- [69] Economides, N. S. (1986), "Minimal and maximal product differentiation in Hotelling duopoly", *Economics Letters*, 21, 67-71.

- [70] Economides, N. S. (1993), "Hotelling main street with more than two competitors", *Journal of Regional Science*, 33, 303-319.
- [71] Edgeworth, F. Y. (1925), "The pure theory of monopoly", *Papers Relating to Political Economy*, 1, 111-142.
- [72] Eiselt, H. A. (1998), "Perception and information in a competitive location model", *European Journal of Operational Research*, 108, 94-105.
- [73] Eiselt, H. A. y G. Laporte (1988), "Location of a new facility in the presence of weights", *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, 15, 160-165.
- [74] Eiselt, H. A. y G. Laporte (1989), "Competitive spatial models", *European Journal of Operational Research*, 39, 231-242.
- [75] Eiselt, H. A. y G. Laporte (1993), "The existence of equilibria in the 3-facility Hotelling model in a tree", *Transportation Science*, 27, 39-43
- [76] Eiselt, H. A. y G. Laporte (1996a), "Sequential location problems", *European Journal of Operational Research*, 96, 217-231.
- [77] Eiselt, H. A. y G. Laporte (1996b), "Equilibrium results in competitive location models", *Middle East Forum*, 1, 63-92.
- [78] Eiselt, H. A., G. Laporte y J. F. Thisse (1993), "Competitive location models: a framework and bibliography", *Transportation Science*, 27, 44-54.
- [79] Erlenkotter, D. (1977), " Facility location with price-sensitive demands: private, public, and quasi-public", *Management Science*, 24, 378-386.
- [80] Erlenkotter, D. (1981), "A comparative study of approaches to dynamic location problems", *European Journal of Operational Research*, 6, 133-143.
- [81] Francis, R. L., L. F. McGinnis y J. A. White (1983), "Locational analysis", *European Journal of Operational Research*, 12, 220-252.
- [82] Frank, R. (1992), *Microeconomía y conducta*, McGraw-Hill.
- [83] Friedman, J. W. (1982), "Oligopoly theory" en *Handbook of mathematical economics*, vol. II, K.J. Arrow y M.D. Intriligator (eds.), North-Holland, 491-534.
- [84] Friedman, J. W. (1991), *Game theory with applications to economics*, Oxford University Press.

- [85] Friesz, T. L., P. T. Harker y R. L. Tobin (1984), "Alternative algorithms for the general network spatial price equilibrium problem", *Journal of Regional Science*, 24, 475-507.
- [86] Friesz, T. L., T. Miller y R. L. Tobin (1988a), "Competitive network facility location models: a survey", *Papers of the Regional Science Association*, 65, 47-57.
- [87] Friesz, T. L., T. Miller y R. L. Tobin (1988b), "Algorithms for spatially competitive network facility-location", *Environment and Planning B: Planning and Design*, 15, 191-203.
- [88] Friesz, T. L., R. L. Tobin y T. Miller (1989), "Existence theory for spatially competitive network facility location models", *Annals of Operations Research*, 18, 267-276.
- [89] Frutos, M. A., H. Hamoudi y X. Jarque (1999), "Equilibrium existence in the circle model with linear quadratic transport cost", *Regional Science and Urban Economics*, 29, 605-615.
- [90] Fudenberg, D. y J. Tirole (1991), *Game theory*, MIT Press.
- [91] Fujita, M. y J. F. Thisse (1986), "Spatial competition with a land market: Hotelling and Von Thunen unified", *Review of Economics Studies*, 53, 819-841.
- [92] Gabszewicz, J. J. y P. G. Garella (1987), "Price search and spatial competition", *European Economic Review*, 31, 827-842.
- [93] Gannon, C. A. (1973a), "Central concentration in simple spatial duopoly: some behavioural and functional conditions", *Journal of Regional Science*, 13, 357-375.
- [94] Gannon, C. A. (1973b), "Optimization of market share in spatial competition", *Southern Economic Journal*, 40, 66-79.
- [95] García Pérez, M. D. y B. Pelegrín Pelegrín (1997), "Two-stage competitive location on a tree", *Studies in Locational Analysis*, 11, 101-114.
- [96] Ghosh, A. y C. S. Craig (1983), "Formulating retail location strategy in a changing environment", *Journal of Marketing*, 47, 56-68.
- [97] Ghosh, A. y C. S. Craig (1984), "A location allocation model for facility planning in a competitive environment", *Geographical Analysis*, 16, 39-51.
- [98] Ghosh, A., S. McLafferty y C. S. Craig (1995), "Multifacility retail networks", en *Facility location: A survey of applications and methods*, Z. Drezner (ed.), Springer, 301-330.

- [99] Green, P. E. y A. M. Krieger (1989), "Recent contributions to optimal positioning and buyer segmentation", *European Journal of Operational research*, 41, 127-141.
- [100] Grossman, T. A. y M. L. Brandeau (1996), "Optimal Service improvement investment in facilities with congestion externalities", *documento de trabajo*.
- [101] Gupta, B. (1994), "Competitive spatial price discrimination with strictly convex production costs", *Regional Science and Urban Economics*, 24, 265-272.
- [102] Haddock, D. D. (1982), "Basing-point pricing: competitive vs. collusive theories", *American Economic Review*, 72, 289-306.
- [103] Hakimi, S. L. (1964), "Optimum locations of switching centres and the absolute centers and medians of a graph", *Operations Research*, 12, 450-459.
- [104] Hakimi, S. L. (1983), "On locating new facilities in a competitive environment", *European Journal of Operational Research*, 12, 29-35.
- [105] Hakimi, S. L. (1990), "Locations with spatial interactions: competitive locations and games", en *Discrete location theory*, Mirchandani, P.B. y R.L. Francis (eds.), 439-478.
- [106] Hamilton, J. H., W. B. MacLeod y J. F. Thisse (1991), "Spatial competition and the core", *The Quarterly Journal of Economics*, 3, 925-937.
- [107] Hamilton, J. H. y J. F. Thisse (1993), "Competitive spatial price discrimination with capacity constraints", *Transportation Science*, 27, 55-61.
- [108] Hamilton, J. H., J. F. Thisse y A. Weskamp (1989), "Spatial discrimination: Bertrand vs. Cournot in a model of location choice", *Regional Science and Urban Economics*, 15, 87-102.
- [109] Hanjoul, P. y J. F. Thisse (1984), "The location of a firm on a network", en *Applied Decision Analysis and Economic Behaviour*, Hughes, A.J. (ed.), 289-326.
- [110] Hansen, P. y M. Labbé (1988), "Algorithms for voting and competitive location on a network", *Transportation Science*, 4, 278-288.
- [111] Hansen, P., D. Peeters y J. F. Thisse (1995), "The profit-maximizing weber problem", *Location Science*, 3, 67-85.

- [112] Hansen, P., D. Peeters y J. F. Thisse (1997), "Facility location under zone pricing", *Journal of Regional Science*, 1, 1-22.
- [113] Hansen, P., J. F. Thisse y R. E. Wendell (1990), "Equilibrium analysis for voting and competitive location problems" en *Discrete location theory*, Mirchandani, P. B. y R. L. Francis (eds.), 479-501.
- [114] Harker, P. T. (1986), "Alternative models of spatial competition", *Operations Research*, 34, 410-425.
- [115] Hartwick, J. M. y P. G. Hartwick (1971), "Duopoly in space", *Canadian Journal of Economics*, 4, 485-505.
- [116] Hay, D. A. y D. J. Morris (1979), *Industrial economics*, Oxford University Press.
- [117] Hobbs, B. F. (1986), "Mill pricing versus spatial price discrimination under Bertrand and Cournot spatial competition", *Journal of Industrial Economics*, 35, 173-191.
- [118] Hodgson, M. J. (1981), "A location-allocation model maximizing consumers' welfare", *Regional Studies*, 15, 493-506.
- [119] Hoover, E. M. (1936), "Spatial price discrimination", *Review of Economic Studies*, 4, 182-191.
- [120] Hotelling, H. (1929), "Stability in competition", *Economic Journal*, 39, 41-57.
- [121] Hoyer, R. W. y L. S. Mayer (1974), "Comparing Strategies in a spatial model of electoral competition", *American Journal of Political Science*, 18, 501-523.
- [122] Huff, D. L. (1964), "Defining and estimating a trading area", *Journal of Marketing*, 28, 34-38.
- [123] Hurter, A. y P. Lederer (1985), "Spatial duopoly with discriminatory pricing", *Regional Science and Urban Economics*, 15, 541-553.
- [124] Hurter, A. y J. S. Martinich (1989), *Facility location and the theory of production*, Kluwer Academic Publishers.
- [125] Infante Macías, R. y J. Muñoz Pérez (1995), "Competitive location with rectilinear distances", *European Journal of Operational Research*, 80, 77-85.
- [126] Jungnickel, D. (1999), *Graphs, Networks and Algorithms*, Algorithms and computation in mathematics, vol. 5, Springer-Verlag, Berlin.

- [127] Kats, A. (1989), "Spatial oligopoly and price discrimination with downward sloping demand", *Regional Science and Urban Economics*, 15, 55-68.
- [128] Kats, A. (1995), "More on Hotelling's stability in competition", *International Journal of Industrial Organization*, 13, 89-93.
- [129] Kilkenny, M. y J. F. Thisse (1999), "Economics of location: A selective survey", *Computers and Operations Research*, 26, 1369-1394.
- [130] Knoblauch, V. (1996), "A pure strategy Nash equilibrium for a 3-firm location game on a sphere", *Location Science*, 4, 247-250.
- [131] Kohlberg, E. (1983), "Equilibrium store locations when consumers minimize travel time plus waiting time", *Economics Letters*, 11, 211-216.
- [132] Kramer, G. H. y A. K. Klevorick (1973), "Existence of a local cooperative equilibrium in a class of voting Games", *Review of Economic Studies*, 539-547.
- [133] Labbé, M. y S. L. Hakimi (1991), "Market and location equilibrium for two competitors", *Operations Research*, 39, 749-756.
- [134] Labbé, M., D. Peeters y J. F. Thisse (1995), "Location on networks", en *Handbooks in Operations Research and Management Science*, vol. 8: Network Routing, 551-624.
- [135] Laurent, M., D. Peeters e I. Thomas (1997), "Spatial externalities and optimal locations. Simulations on a theoretical network", *Studies in locational Analysis*, 11, 193-210.
- [136] Lederer, P. J. (1986), "Duopoly competition in networks", *Annals of Operations Research*, 6, 99-109.
- [137] Lederer, P. J. (1993), "A competitive network desing problem with pricing", *Transportation Science*, 27, 25-38.
- [138] Lederer, P. J. y A. P. Hurter (1986), "Competition of firms: discriminatory pricing and location", *Econometrica*, 54, 623-640.
- [139] Lederer, P. J. y J. F. Thisse (1990), "Competitive location on networks under delivered pricing", *Operations Research Letters*, 9, 147-153.
- [140] Lee, H. L. y M. A. Cohen (1985), "Equilibrium analysis of disaggregate facility choice systems subject to congestion-elastic demand", *Operations Research*, 7, 293-311.
- [141] Lerner, A. P. y H. W. Singer (1937), "Some notes on duopoly and spatial competition", *Journal of Political Economy*, 45, 145-186.

- [142] Mai, C. y H. Hwang (1994), "On a location theory under duopoly", *Regional Science and Urban Economics*, 24, 773-784.
- [143] Mai, C. y S. Peng (2000), "Cooperation vs competition in a spatial model", *Regional Science and Urban Economics*, 29, 463-472.
- [144] Marianov, V., D. Serra y C. ReVelle (1999) "Location of hubs in a competitive environment", *European Journal of Operational Research*, 114, 363-371.
- [145] Martínez Giralt, X. (1990), "Empresas multiproducto, competencia en precios y localización", *Investigaciones Económicas*, 14, 503-517.
- [146] Mayer, T. (2000), "Spatial Cournot competition and heterogeneous production cost across locations", *Regional Science and Urban Economics*, 30, 325-352.
- [147] McKelvey, R. D. (1975), "Policy related voting and electoral equilibrium", *Econometrica*, 43, 815-843.
- [148] McKelvey, R. D. y R. E. Wendell (1976), "Voting equilibria in multidimensional choice spaces", *Mathematics of Operations Research*, 1, 144-158.
- [149] Miller, T. C., T. L. Friesz y R. L. Tobin (1996), *Equilibrium facility location on networks*, Springer.
- [150] Miller, T. C., R. L. Tobin y T. L. Friesz (1991), "Stackelberg games on a network with Cournot-Nash oligopolistic competitors", *Journal of Regional Science*, 31, 435-454.
- [151] Mirchandani, P. B. y R. L. Francis (1990) *Discrete location theory*, John Wiley & Sons.
- [152] Moreno Pérez, J. A. (1995), "El Problema de Localización Discreto", Documento de Trabajo.
- [153] Morris, D. J., P. J. Sinclair, M. D. Slater y J. S. Vickers (1986), *Strategic behaviour and industrial organization*, Oxford University Press.
- [154] Mulligan, G. F. y T. J. Fik (1994), "Price and location conjectures in medium and long-run spatial competition models", *Journal of Regional Science*, 34, 179-198.
- [155] Mulligan, G. F. y T. J. Fik (1995), "Consistent price and location conjectures in spatial competition models", *Annals of Regional Science*, 29, 91-109.

- [156] Muñiz Olivera, I. (1998), "Externalidades, localización y crecimiento: una revisión bibliográfica", *Estudios Regionales*, 52, 155-175.
- [157] Nakanishi, M. y L. G. Cooper (1974), "Parameter estimation for a multiplicative competitive interaction model: least squares approach", *Journal of Marketing Research*, 11, 303-311.
- [158] Nash, J. F. (1950), "Equilibrium points in n-person games", *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 36, 48-49.
- [159] Nash, J. F. (1951), "Non-cooperative games", *Annals of Mathematics*, 54, 286-295.
- [160] Nishimura, K. y J. Friedman (1981), "Existence of Nash equilibrium in n-person games without quasiconcavity", *International Economic Review*, 22, 637-648.
- [161] Novak, L. y A. Gibbons (1999), *Hybrid graph theory and network analysis*, Cambridge University Press.
- [162] Novshek, W. (1985), "On the existence of Cournot Equilibrium", *Review of Economic Studies*, 52, 85-98.
- [163] Peeters, D. y J. F. Thisse (1995), "Economic models of firm locations", en *Facility location: a survey of applications and methods*, Drezner, Z. (ed.), 331-366.
- [164] Peeters, D. y J. F. Thisse (1996), "Zone pricing", *Journal of Regional Science*, 36, 291-301.
- [165] Peeters, P. H. (1995), "Some new algorithms for location problems on network", *documento de trabajo*.
- [166] Peeters, P. H. y F. Plastria (1998), "Discretization results for the Huff and Pareto-Huff competitive location models on networks", *Top*, 2, 247-260.
- [167] Peng, S. K. y C. Mai (2000), "Tariffs and quotas in a spatial duopoly with a land market", *The Annals of Regional Science*, 34, 233-250.
- [168] Philips, L. (1983), *The economics of price discrimination*, Cambridge University Press.
- [169] Pires, C. P. y S. Sarkar (2000), "Delivered nonlinear pricing by duopolists", *Regional Science and Urban Economics*, 30, 429-456.
- [170] Plastria, F. (1996), "Profit maximising location in the plane of a single competitive facility with deterministic gravity-type consumer behaviour", *documento de trabajo*.

- [171] Plastria, F. (2001), "Static competitive facility location: An overview of optimisation approaches", *European Journal of Operational Research*, 12, 461-470.
- [172] Ponsard, C. (1983), *History of spatial economic theory*, Springer-Verlag, Berlin.
- [173] ReVelle, C. (1986), "The maximum capture or "sphere of influence" location problem: Hotelling revisited on a network", *Journal of Regional Science*, 26, 343-358.
- [174] Roberg, P. y C. R. Abbess (1998), "Diagnosis and treatment of congestion in central urban areas", *European Journal of Operational Research*, 104, 218-230.
- [175] Rosen, J. B. (1965), "Existence and uniqueness of equilibrium points for concave n-person games", *Econometrica*, 33, 520-534.
- [176] Rushton, G. y J. C. Thill (1989), "The effect of distance metric on the degree of spatial competition between firms", *Environment and Planning A*, 21, 499-507.
- [177] Sakashita, N. (1967), "Production function, demand function and location theory of the firm", *Regional Science Association*, 20, 109-122.
- [178] Samuelson, P. A. (1952), "Spatial price equilibrium and lineal programming", *American Economic Review*, 42, 283-303.
- [179] Santos Peñate, D. R., P. Dorta González y R. Suárez Vega (2000a), "Modelo de competencia espacial incorporando externalidades", *Investigación Operacional*, 21, 61-74.
- [180] Santos Peñate, D. R., P. Dorta González y R. Suárez Vega (2000b), "Pareto optimal allocation and price equilibrium for duopoly with negative externality", *documento de trabajo*.
- [181] Santos Peñate, D. R., R. Suárez Vega y P. Dorta González (1998), "Competitive location in discrete space using Huff and Pareto-Huff models", *documento de trabajo*.
- [182] Santos Peñate, D. R., R. Suárez Vega y P. Dorta González (1999a), "Equilibrio localización-atractivo para dos competidores con cadenas de centros de servicio igualmente atractivos", *Estudios de Economía Aplicada*, 12, 145-164.
- [183] Santos Peñate, D. R., R. Suárez Vega y P. Dorta González (1999b), "Localización competitiva con criterios basados en funciones de atracción", *Investigación Operacional*, 20, 213-225.

- [184] Santos Peñate, D. R., R. Suárez Vega y P. Dorta González (2001), "Un modelo de decisión multicriterio para la localización de centros de tratamiento de residuos", *Estudios de Economía Aplicada*, 17, 163-182.
- [185] Sarkar, J., B. Gupta y D. Pal (1997), "Location equilibrium for Cournot oligopoly in spatially separated markets", *Journal of Regional Science*, 2, 195-212.
- [186] Segura, J. (1993), *Teoría de la economía industrial*, Civitas.
- [187] Selten, R. (1975), "Re-examination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games", *International Journal of Game Theory*, 4, 25-55.
- [188] Serra, D. (1996), "Estrategias de localización de servicios en régimen de competencia", en *Lecturas en teoría de localización*, Puerto Albandoz, J. (ed.), 297-216.
- [189] Serra, D. (1997), "Competitive location and pricing in networks", *documento de trabajo*.
- [190] Serra, D y R. Colomé (2000), "Consumer choice and optimal locations models: Formulations and Heuristics", *documento de trabajo*.
- [191] Serra, D., V. Marianov y C. ReVelle (1992), "The maximum-capture hierarchical location problem", *European Journal of Operational Research*, 62, 363-371.
- [192] Serra, D. y C. ReVelle (1994), "Market capture by two competitors: the preemptive location problem", *Journal of Regional Science*, 34, 549-561.
- [193] Serra, D. y C. ReVelle (1995), "Competitive location in discrete space", en *Facility location: a survey of applications and methods*, Drezner, Z. (ed.), 367-386.
- [194] Shaked, A. (1974), "Non-existence of equilibrium for the two-dimensional three-firms location problem", *Review of Economic Studies*, 42, 51-56.
- [195] Sharkey, W. W. (1995), "Network models in economics", en *Handbooks in Operations Research and Management Science*, vol. 8: *Network and Routing*, 713-765.
- [196] Siebert, H. (1995), *Locational competition in the world economy*, Siebert, H. (ed.)
- [197] Slater, P. J. (1975), "Maximin facility location", *Journal Res. Nat. Bur. Stand.*, B79, 107-115.

- [198] Smith, T. E. y T. L. Friesz (1985), "Spatial market equilibria with flow-dependent supply and demand", *Regional Science and Urban Economics*, 15, 181-218.
- [199] Smithies, A. (1941), "Optimum location in spatial competition", *Journal of Political Economics*, 49, 423-439.
- [200] So, K. C. y J. S. Song (1998), "Price, delivery time guarantees and capacity selection", *European Journal of Operational Research*, 111, 28-49.
- [201] Spagat, M. (1992), "Validated equilibrium and sequential spatial competition games", *Mathematical Social Science*, 24, 49-57.
- [202] Stackelberg, H. F. (1934), "Marktform und gleichgewicht", traducción inglesa con el título "The theory of market economy", Oxford University Press.
- [203] Stokes, D. E. (1963), "Spatial models of party competition", *American Political Science Review*, 57, 368-377.
- [204] Suárez Vega, R., P. Dorta González y D. R. Santos Peñate (1999), "Competencia espacial con externalidades considerando decisiones individuales de los usuarios", *Estudios de Economía Aplicada*, 13, 143-165.
- [205] Suárez Vega, R., P. Dorta González y D. R. Santos Peñate (2000), "Externality in a Stackelberg spatial competition model", *Studies in Locational Analysis*, 14, 191-209.
- [206] Suárez Vega, R., D. R. Santos Peñate y P. Dorta González (2001), "Implantación de nuevos centros de distribución alimentaria en Gran Canaria", *Revista Asturiana de Economía*, 20, 157-182.
- [207] Tabuchi, T. (1994), "Two-stage two-dimensional spatial competition between two firms", *Regional Science and Urban Economics*, 24, 207-227.
- [208] Tabuchi, T. (1999), "Pricing policy in spatial competition", *Regional Science and Urban Economics*, 29, 617-631.
- [209] Tabuchi, T. y J. F. Thisse (1995), "Asymmetric equilibria in spatial competition", *International Journal of Industrial Organization*, 13, 213-227.
- [210] Tamir, A. (1993), "On the core of cost allocation games defined on location problems", *Transportation Science*, 27, 81-86.
- [211] Teitz, M. B. (1968), "Locational strategies for competitive systems", *Journal of Regional Science*, 8, 135-148.

- [212] Thie, P. R. (1988), *An introduction to linear programming and game theory*, John Wiley & Sons.
- [213] Tirole, J. (1988), *The theory of industrial organisation*, MIT Press.
- [214] Tobin, R. L. y T. L. Friesz (1986), "Spatial competition facility location models: definition, formulation and solution approach", *Annals of Operations Research*, 6, 49-74.
- [215] Tobin, R. L., T. Miller y T. L. Friesz (1995), "Incorporating competitor's reactions in facility location decisions: a market equilibrium approach", *Location Science*, 3, 239-253.
- [216] Varian, H. R. (1987), *Microeconomía intermedia*, Antoni Bosch, ed.
- [217] Vives, X. (1988), "Economía industrial y teoría de juegos", *Investigaciones Económicas*, suplemento, 7-21.
- [218] Wagner, J. L. y Falkson, L. M. (1975), "The optimal nodal location of public facilities with price-sensitive demand", *Geographical Analysis*, 7, 69-83.
- [219] Wang, Q. y M. Parlar (1989), "Static game theory models and their applications in management science", *European Journal of Operational Research*, 42, 1-21.
- [220] Weber, S. (1992), "On hierarchical spatial competition", *Review of Economic Studies*, 59, 407-425.
- [221] Wendell, R. E. y R. D. McKelvey (1981), "New perspectives in competitive location theory", *European Journal of Operational Research*, 6, 174-182.
- [222] Wong, S. C. y H. Yang (1999), "Determining market areas captured by competitive facilities: A continuous equilibrium modelling approach", *Journal of Regional Science*, 39, 51-72.

## Fe de erratas

1. En la sección 3.3.2 Modelo líder-líder en cantidades, también conocido como desequilibrio de Stackelberg (ver Intriligator, 1971, pág. 210), la proposición 3.3 no es correcta. Las expresiones del corolario 3.2, de las que se deducen el resto de resultados de este epígrafe son

$$\bar{q}_A^k = \frac{2a_k - 6c_A^k + 4c_B^k}{5b_k}, \quad \bar{q}_B^k = \frac{2a_k + 4c_A^k - 6c_B^k}{5b_k}.$$

Según estas nuevas expresiones, el lema 3.2 sigue siendo cierto, aunque la demostración cambia porque las expresiones del beneficio también cambian. La proposición 3.4 es correcta y además puede comprobarse que existe un equilibrio en localización para la primera etapa.

Las expresiones de la tabla 3.1 correspondientes a este desequilibrio se ven alteradas, aunque las conclusiones obtenidas en el punto 3.3.3 siguen verificándose. Este cambio afecta también a las tablas 3.5 y 3.6, así como al modelo oligopolístico de las páginas 129-131.

2. En la proposición 5.16 (pág. 200-203), las variables que definen el rectángulo son evidentemente  $p_A$  y  $p_B$ , en lugar de  $\tilde{p}_A^{j_0}$  y  $\tilde{p}_B^{j_0}$ , como por error se indica.