



UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS
DE GRAN CANARIA

TESIS DOCTORAL

Programa de doctorado: Tecnología Industrial

Departamento de Ingeniería Eléctrica

APORTACIONES AL DISEÑO DE MÁQUINAS ELÉCTRICAS DE INDUCCIÓN MEDIANTE EL MÉTODO DE LA CELDA. ANÁLISIS TÉRMICO Y ELECTROMAGNÉTICO.

Autor: **Pablo Ignacio González Domínguez**

Las Palmas de Gran Canaria, España

Noviembre 2015



UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA
Departamento de Ingeniería Eléctrica

Programa de doctorado: Tecnología Industrial

**APORTACIONES AL DISEÑO DE MÁQUINAS
ELÉCTRICAS DE INDUCCIÓN MEDIANTE
EL MÉTODO DE LA CELDA.
ANÁLISIS TÉRMICO Y ELECTROMAGNÉTICO.**

Autor:

Director:

Pablo Ignacio González
Domínguez

Dr. José Miguel Monzón
Verona

Las Palmas de Gran Canaria, España

Noviembre 2015

A mi querida esposa Gladys por la paciencia que ha tenido conmigo. A mi querida hija Juanita porque espero algún día discutir con ella de su tesis. A mi querido hijo Gabi, que sé que nunca podré discutir con él de la suya, pero me queda el consuelo de su eterna sonrisa. A mi hermana Cari, que es mi apoyo incondicional. A mis difuntos padres.

Para todo ellos, mi esfuerzo.

Agradecimientos

A mi director de tesis, Dr. José Miguel Monzón Verona. Sin su apoyo, sobre todo anímico, yo no hubiese llegado aquí.

A mis compañeros Guillermo, Poli, Jesús Romero y Eugenio por soportar mis malos humores y mis charlas sobre tetraedros mientras almorzábamos.

A Carmen Rosa por su amistad y sus correcciones de estilo, que tanto me han ayudado en esta tesis.

A José Santana, mi profesor en Formación Profesional, quién fue el que me introdujo en esto de la Ingeniería.

A José Medina Padrón, Pepín, por ser mi tutor de proyecto de fin de carrera en Ingeniería Técnica Industrial.

A Miguel Martínez Melgarejo por ser mi tutor de proyecto de fin de carrera de Ingeniería en Organización Industrial.

A todos los que han hecho que yo pueda estar aquí.

A todos muchas gracias.

Reconocimientos

A la Cátedra Endesa Red ULPGC por su ayuda a la realización de parte de esta tesis.

Al Departamento de Ingeniería Eléctrica de la ULPGC por el apoyo recibido de parte de todos y cada uno de sus miembros.

Clasificación UNESCO

33 CIENCIAS TECNOLOGICAS

3306 INGENIERIA Y TECNOLOGIA ELECTRICA

330603 MOTORES ELECTRICOS

Resumen

En esta tesis se demuestra que la Formulación Finita y el Método de la Celda son aplicables a cálculos electromagnéticos y térmicos necesarios en la cuantificación de fenómenos físicos que aparecen en la máquina eléctrica asíncrona. Se compara el Método de la Celda con el Método de los Elementos Finitos.

Palabras clave: Formulación Finita, Celda, asíncrona, máquina, Elementos Finitos.

Abstract

In this PhD Thesis, It is demonstrated that Finite Formulation and the Cell Method are applicable to necessary electromagnetic and thermal calculations in the quantification of physical phenomena that appear in the asynchronous electric machine. The Cell Method was compared whit the Finite Elements Method.

Keywords: Finite Formulation, Cell Method, Asynchronous, machine, Finite Elements.

Lista de símbolos y abreviaturas

Símbolos con letras latinas

Símbolo	Nombre	Unidad SI
\vec{A}	Vector potencial magnético	$\text{Wb} \cdot \text{m}^{-1}$
a	Escalar potencial magnético	Wb
A	Área de una superficie	m^2
\vec{B}	Densidad de flujo magnético	$\text{Wb} \cdot \text{m}^{-2}$
$B_{\text{máx}}$	Densidad de flujo magnético máxima	$\text{Wb} \cdot \text{m}^{-2}$
\vec{B}	Fasor de densidad de flujo magnético	$\text{Wb} \cdot \text{m}^{-2}$
B_T	Baricentro del tetraedro	m
B_{3t}	Baricentro del triángulo en 3D	m
B_{2t}	Baricentro del triángulo en 2D	m
$\pm b_i$	Números de Betti	--
C_p	Calor específico	$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
\vec{D}	Densidad de flujo eléctrico	$\text{C} \cdot \text{m}^{-2}$
\vec{D}	Fasor densidad de flujo eléctrico	$\text{C} \cdot \text{m}^{-2}$
dL	Diferencial de longitud	m
dS	Diferencial de superficie	m^2
dV	Diferencial de volumen	m^3
dt	Diferencial de tiempo	s
$D\tau$	Gradiente de temperatura	$\text{K} \cdot \text{m}^{-1}$
\dim	Dimensión de una sistema coordinado	--
\vec{E}	Intensidad de campo eléctrico	$\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$
\vec{E}	Fasor de intensidad de campo eléctrico	$\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$
F_m	Fuerza magnetomotriz	A
\mathcal{F}_m	Impulso de fuerza magnetomotriz	C
f	Frecuencia	Hz
\vec{g}	Gradiente de temperatura	$\text{K} \cdot \text{m}^{-1}$
G^f	Flujo de carga magnética	Wb
G^c	Contenido de carga magnética	Wb
G^p	Producción de carga magnética	Wb
Ge	Género o número de huecos topológicos	--
\vec{H}	Intensidad de campo magnético	$\text{A} \cdot \text{m}^{-1}$
\vec{H}	Fasor de intensidad de campo magnético	$\text{A} \cdot \text{m}^{-1}$
h	Altura	m
h_c	Coefficiente de convección	$\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$
I	Intensidad de corriente eléctrica	A
\vec{j}	Densidad volumétrica de corriente eléctrica	$\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$
\vec{j}_L	Densidad superficial de corriente eléctrica	$\text{A} \cdot \text{m}^{-1}$
J_{Total}	Densidad volumétrica de corriente total	$\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$
L, \tilde{L}	Longitud de arista primal o dual	m
M	Masa	kg
\vec{n}	Vector normal a una superficie o línea	--
n	Módulo del vector normal	--

Símbolo	Nombre	Unidad SI
N_n	Número de nudos	--
N_a	Número de aristas	--
N_s	Número de caras	--
N_v	Número de volúmenes	--
N_b	Número de bucles en objetos topológicos	--
N_c	Número de caras cerradas y continuas (shell) en objetos topológicos	--
P, \tilde{P}	Punto, nudo, vértice, primal o dual	--
P_H	Potencia calorífica (pérdidas) debida a histéresis magnética	W
P_F	Potencia calorífica (pérdidas) por c. Foucault	W
P	Potencia calorífica (pérdidas)	W
Q^c	Contenido de carga eléctrica	C
Q^f	Flujo de carga eléctrica	C
Q^p	Producción de carga eléctrica	C
q	Calor que atraviesa una superficie	J
\dot{q}	Flujo de calor	W·m ⁻²
\vec{q}_x	Campo genérico con componente normal	--
q_x	Módulo del vector \vec{q}_x	--
q_n	Flujo de calor en dirección de la normal	W·m ⁻²
R	Resistencia eléctrica	Ω
S, \tilde{S}	Superficie primal y dual	m ²
S	Superficie	m ²
t, \tilde{t}	Instante de tiempo primal y dual	s
T, \tilde{T}	Intervalo de tiempo primal y dual	s
\vec{t}	Vector tangente	--
U_e	Tensión o diferencia de potencial eléctrico	V
U_m	Tensión o diferencia de potencial magnético	Wb·m ⁻¹
U_{xy}	Diferencia de potencial eléctrico entre x e y	V
u	Energía interna	J
U_i	Distribución volumétrica de potencia interna	W·m ⁻³
V, \tilde{V}	Volumen primal y dual	m ³
V	Volumen de figura geométrica	m ³
v_e	Potencial eléctrico	V
v_m	Potencial magnético	Wb·m ⁻¹
\vec{v}	Vector velocidad	m·s ⁻¹

Símbolos con letras griegas

Símbolo	Nombre	Unidad SI
α_{ref}	Constante de aproximación polinomial de la resistividad en función de la temperatura	K ⁻¹
β_{ref}	Constante de aproximación polinomial de la resistividad en función de la temperatura	K ⁻²
χ	Variable magnética auxiliar (<i>gauge</i>)	Wb
δ_E	Ángulo de pérdidas dieléctricas	rad
\mathcal{E}	Impulso de fuerza electromotriz	Wb
ε_e	Coefficiente de emisividad	--
ϕ	Flujo magnético	Wb
γ_{ref}	Constante de aproximación polinomial de la resistividad en función de la temperatura	K ⁻³
η	Variable auxiliar (<i>gauge</i>)	--
λ	Conductividad térmica volumétrica	W·K ⁻¹ ·m ⁻¹
μ	Permeabilidad magnética	N·A ⁻²
μ_1, μ_2	Notación de medio material 1 y 2	--
μ^T	Tensor de permeabilidades magnéticas	N·A ⁻²
ν	Reluctividad	m·H ⁻¹
θ	Termicidad	K·s
ρ_M	Densidad de máscica volumétrica	kg·m ⁻³
ρ_V	Densidad de carga eléctrica volumétrica	C·m ⁻³
ρ_S	Densidad de carga eléctrica superficial	C·m ⁻²
ρ_L	Densidad de carga eléctrica lineal	C·m ⁻¹
ρ_{ref}	Resistividad de referencia	Ω·m
ρ	Resistividad	Ω·m
σ	Conductividad eléctrica	S·m ⁻¹ , Ω ⁻¹ ·m ⁻¹
σ^T	Tensor de conductividades eléctricas	S·m ⁻¹ , Ω ⁻¹ ·m ⁻¹
σ_u	Fuente de calor	W·m ⁻³
$\sigma_{u,Jul}$	Fuente de calor producida por efecto Joule	W·m ⁻³
$\sigma_{u,Jul,\Omega c}$	Fuente de calor producida por efecto Joule en el dominio conductor Ωc	W·m ⁻³
$\sigma_{u,Hist}^{elip}$	Fuente de calor producida por efecto histéresis magnética de tipo elíptico	W·m ⁻³
$\sigma_{u,Hist}^{alt}$	Fuente de calor producida por efecto histéresis magnética de tipo alternativo	W·m ⁻³
$\sigma_{u,Hist}^{rot}$	Fuente de calor producida por efecto histéresis magnética de tipo rotativo	W·m ⁻³
σ_{SB}	Coefficiente de Stefan-Boltzman	W·m ⁻² ·K ⁻⁴
τ	Temperatura	K, °C
τ_∞	Temperatura de un fluido (procesos convectivo)	K, °C
Ω	Expresión genérica de dominio	--
Ω_C	Expresión de dominio conductor	--
ω	Frecuencia angular	rad·s ⁻¹
ψ	Flujo eléctrico	C
ϵ	Constante de rigidez dieléctrica	V·m ⁻¹
ϵ^T	Tensor de rigideces dieléctricas	V·m ⁻¹
$\bar{\epsilon}$	Constante de rigidez dieléctrica en variable compleja	V·m ⁻¹
\mathcal{V}_e	Impulso de potencial eléctrico	Wb
\mathcal{V}_m	Impulso de potencial magnético	C
\mathcal{U}_e	Impulso de tensión eléctrica	Wb
\mathcal{U}_m	Impulso de tensión magnética	C

Símbolo	Definición	Unidades SI
∂	Operador co-contorno	--
∂_t	Derivada respecto del tiempo	s ⁻¹
$\partial V, \partial \tilde{V}$	Contorno del volumen primal o dual	m ²
$\partial S, \partial \tilde{S}$	Contorno de la superficie primal o dual	m

Símbolo	Definición	Unidades SI
$\partial L, \partial \bar{L}$	Contorno de la línea primal o dual	m
$\text{grad}(\)$	Operador gradiente	--
$\text{curl}(\)$	Operador rotacional	--
$\text{div}(\)$	Operador divergencia	--
$\vec{\nabla}$	Operador nabla	--
$\vec{\nabla} \varphi(x, y, z)$	Gradiente	--
$\vec{\nabla} \times$	Rotacional	--
$\vec{\nabla} \cdot$	Divergencia	--
\propto	"Proporcional a ..."	--
\times	Producto vectorial de dos vectores	--
\cdot	Producto escalar de dos vectores	--
$j\omega$	Operador frecuencia	--
$X_s^* - j\omega W^*$	Conjugado de un número complejo	--
$\chi(M)$	Característica de Euler para objetos topológicos	--
$[G], [\tilde{G}]$	Gradiente primal y dual Método Celda	--
$[C], [\tilde{C}]$	Rotacional primal y dual Método Celda	--
$[D], [\tilde{D}]$	Divergencia primal y dual Método Celda	--
$\Re(\)$	Parte real de un número complejo	--
$\Im(\)$	Parte imaginaria de un número complejo	--
\subset	"Está incluido en ..."	--

Acrónimos

Abreviatura	Término
3D	Tridimensional, tres dimensiones
2D	Dimension fundamental
2D	Bidimensional, dos dimensiones
Gmsh-GetDP	Aplicación de informática para cálculos de campos, basada en elementos finitos, uso libre
Octave	Aplicación de informática para cálculos matemáticos varios, uso libre
Matlab	Aplicación de informática para cálculos matemáticos varios, uso bajo licencia comercial
Scilab	Aplicación de informática para cálculos matemáticos varios, uso libre
FF	Formulación Finita
MC	Método de la Celda
FF-MC	Formulación Finita y Método de la Celda
A-V	Un tipo de formulación en cálculo diferencial vectorial
A- χ	Un tipo de formulación en cálculo diferencial vectorial
(a, (a, v))	Un tipo de formulación en FF-MC
(a, (a, χ))	Un tipo de formulación en FF-MC
RAE:	Real Academia Española, de la Lengua

INDICE GENERAL	<u>PÁG.</u>
1. Estructura de la tesis	1
1.1 Introducción	1
1.2 Planteamiento del problema.....	1
1.3 Motivación y objetivos.....	2
1.4 Trabajo realizado y descripción de la metodología usada para llevarlo a cabo.....	2
1.5 Organización de la memoria.....	4
1.6 Resumen de publicaciones	5
2. Resumen del estado del arte.....	9
2.1 Introducción	9
2.2 Evolución de las máquinas eléctricas.....	9
2.3 El electromagnetismo clásico	10
2.4 El electromagnetismo computacional.....	11
2.4.1 El método de los Elementos Finitos.....	12
2.4.2 El gradiente conjugado con transformada rápida de Fourier.....	13
2.4.3 El método de los momentos.....	14
2.4.4 Diferencias finitas en el dominio del tiempo.....	14
2.4.5 Volúmenes finitos en el dominio del tiempo.....	15
2.4.6 El método de la matriz de la línea de transmisión	16
2.4.7 El método de los elementos de contorno	16
2.4.8 Teoría uniforme de la difracción	17
2.4.9 Técnicas híbridas	17
2.4.10 La Integración Finita.....	17
2.4.11 La Formulación Finita.....	18
2.5 Transferencia de calor en las máquinas eléctricas.....	19
2.6 La máquina eléctrica de inducción o asíncrona	22
2.7 Conclusiones.....	22
Bibliografía.....	23
3. Las ecuaciones electromagnéticas y térmicas en la Formulación Finita	31
3.1 Introducción	31

3.2	Planteamiento del problema físico en la Formulación Finita	37
3.3	Principios asociados a la Formulación Finita	38
3.4	Ecuaciones topológicas del electromagnetismo en su forma global.....	39
3.4.1	Ley de Gauss para el campo eléctrico	40
3.4.2	Ley de Gauss para el campo magnético	41
3.4.3	Ley de Faraday-Lenz-Neumann.	42
3.4.4	Ley de Ampere-Maxwell	42
3.5	Ecuaciones constitutivas electromagnéticas	43
3.6	Diagrama de Tonti del Electromagnetismo	45
3.7	Ecuaciones térmicas en las máquinas eléctricas. Aplicación de la Formulación Finita	45
3.7.1	Parámetros electromagnéticos y térmicos dependientes de la temperatura.....	46
3.7.2	Pérdidas por efecto Joule	47
3.7.3	Pérdidas en los dieléctricos	48
3.7.4	Pérdidas en el hierro.....	49
3.7.5	Pérdidas mecánicas	52
3.8	Procesos de transmisión de calor y materia en las máquinas asíncronas	53
3.8.1	Transmisión del calor por conducción	54
3.8.2	Transmisión del calor por convección	56
3.8.3	Transmisión del calor por radiación	57
3.9	La transferencia de calor por conducción en la Formulación Finita.....	57
3.10	Ecuaciones topológicas de la transferencia de calor	58
3.11	Ecuaciones constitutivas de la transferencia de calor	58
3.12	Conclusiones	59
	Bibliografía.....	60
4.	El Método de la Celda aplicado al electromagnetismo y la conducción térmica	65
4.1	Introducción	65
4.2	Generalidades.....	65
4.2.1	Concepto de celda	65
4.2.2	Mallado estructurado y no estructurado	66
4.2.3	Celda tetraédrica y celda triangular	67
4.2.4	Modo local y modo global	68
4.2.5	Ordenamiento de los elementos de las celdas en el dominio discretizado	69
4.2.6	El proceso de eliminación de entidades del mallado repetidas	71
4.2.7	Matrices de incidencia. Operadores discretos de gradiente, rotacional y divergencia.....	73
4.3	Operadores discretos de gradiente, rotacional y divergencia en el primal y el dual	77

4.4 Método de la Celda y campo electromagnético	78
4.4.1 Ley de Gauss del campo magnético con FF-MC	79
4.4.2 Ley de Ampere del campo magnético con FF-MC	80
4.4.3 Ley de Faraday-Lenz-Newman para la inducción con FF-MC	82
4.4.4 La Formulación A- χ en la FF-MC.....	83
4.4.5 Motivación de la formulación (a, (a-v)) y (a, χ) en la FF-MC	84
4.5 Método de la Celda y campo térmico	85
4.6 El sistema de ecuaciones lineales electromagnéticas partiendo del MC en formulación (a, (a,v))	88
4.7 Conclusiones.....	92
Bibliografía.....	92
5. Matrices constitutivas $[M_v]$ y $[M_\sigma]$	97
5.1 Introducción	97
5.2 Generalidades.....	97
5.3 Matriz constitutiva magnética $[M_v]$	98
5.4 Matriz constitutiva eléctrica $[M_\sigma]$.....	105
5.5 Conclusiones.....	108
Bibliografía.....	109
6. Matrices constitutivas térmicas. Varias aportaciones a la ecuación de transmisión de calor.....	113
6.1 Introducción	113
6.2 Transmisión de calor en la máquina asíncrona.....	113
6.3 La $M\lambda$ adaptada de $M\sigma$. Una aportación.....	117
6.4 Otra propuesta: la matriz $M\tau$	119
6.5 La matriz constitutiva $M\lambda 2D$ para dominios bidimensionales.....	122
6.6 La matriz constitutiva $M Cp$ para dominios tridimensionales	124
6.7 Conclusiones.....	125
Bibliografía.....	126
7. Ecuaciones de Maxwell y circuitales en FF-MC y el MNM en 3D	129

7.1	Introducción	129
7.2	El método de la Tabla.....	129
7.3	El Método de la Tabla Reducido	131
7.4	El Método Nodal Modificado.....	131
7.5	Incorporación de elementos electromagnéticos de dominio continuo al sistema de ecuaciones circuitales del Método Nodal Modificado	133
7.6	Conclusiones.....	140
	Bibliografía.....	140
8.	Experimentos numéricos y validación	144
8.1	Introducción	144
8.2	Metodología	144
8.2.1	Proceso de verificación y validación	144
8.2.2	Procedimiento seguido en los experimentos numéricos	146
8.2.3	Elaboración del informe del experimento	146
8.3	Experimentos numéricos de tipo térmico	147
8.3.1	Calibración del FEMM.....	147
8.3.2	Experimento térmico 1	151
8.3.3	Experimento térmico 2	155
8.3.4	Experimento térmico 3	160
8.3.5	Experimento térmico 4	163
8.4	Experimentos numéricos de tipo electromagnético	168
8.4.1	Experimento electromagnético 1	169
8.4.2	Experimento electromagnético 2	177
8.4.3	Experimento electromagnético 3	179
8.4.4	Experimento electromagnético 4	183
8.5	Experimentos numéricos de tipo electro-térmico	184
8.5.1	Experimento electro-térmico 1	185
8.5.2	Experimento electro-térmico 2	192
8.6	Conclusiones.....	196
	Bibliografía.....	197
9.	Conclusiones y líneas futuras	199
9.1	Conclusiones.....	199
9.2	Líneas futuras de investigación.....	200

10.	Cálculo de la matriz constitutiva térmica $A\tau$	205
10.1	Desarrollo de los términos g_x, g_y, g_z	207
10.2	Construcción de la matriz $A\tau$	209
10.3	Matriz $A\tau$ definitiva	218
11.	Potencia calorífica partiendo de la densidad de corriente en régimen armónico 219	
11.1	Interpolación de la densidad de corriente en cualquier punto del tetraedro	220
11.2	Parte real cuadrática de la densidad de corriente.....	220
11.3	Obtención de la potencia por integración en el volumen dual	221
11.4	Obtención de la potencia por integración en el volumen dual	222
11.4.1	Distribución de temperatura y energía interna	223
11.4.2	Cálculo de la potencia calorífica producida por efecto Joule y/o corriente de Foucault	224
11.5	Número de condición de una matriz	226
	Bibliografía.....	227
12.	Verificación y validación	229
12.1	Concepto de incertidumbre y error	229
12.2	Precisión y exactitud.....	230
12.3	Estadísticos utilizados para validar los modelos propuestos	230
12.4	Estadísticos empleado en la validación de los experimentos numéricos	231
	Bibliografía.....	237
13.	La importancia de utilizar variables globales frente a variables locales.....	239
13.1	Variables globales en el espacio y el tiempo.....	244
13.2	Ecuaciones topológicas	246
13.3	Ecuaciones de diferencia espacial o de gradiente	247
13.4	Ecuaciones circuitales	247
13.5	Ecuaciones de balance	248
13.6	Ecuaciones constitutivas	249

Bibliografía.....	250
14. Publicaciones.....	251
15. Bibliografía general.....	259

Índice de figuras

	<u>PÁG.</u>
Figura 2-1 Principales métodos de electromagnetismo computacional.....	12
Figura 3-1 Primal y dual con orientación interna y externa.	33
Figura 3-2 Orientación del tiempo en la Formulación Finita.	33
Figura 3-3 Complejo simplicial.	34
Figura 3-4 Dual cartesiano, tipo Voronoi y baricéntrico.....	34
Figura 3-5. Campo térmico.....	35
Figura 3-6. Campo eléctrico.	36
Figura 3-7 Campo eléctrico ortogonal al magnético (material isótropo).	36
Figura 3-8 El campo magnético en la Formulación Finita.	37
Figura 3-9 Proceso de co-contorno (<i>coboundary process</i>).	38
Figura 3-10 Configuración espacial del campo.	39
Figura 3-11. Ley de Gauss para el campo eléctrico.....	41
Figura 3-12: Ley de Gauss para el campo magnético.....	41
Figura 3-13. Ley de Faraday-Lenz-Neumann.	42
Figura 3-14. Ley de Ampere-Maxwell.....	43
Figura 3-15. Ecuaciones constitutivas electromagnéticas.....	43
Figura 3-16. Diagrama del electromagnetismo, (Tonti, 2013), pág. 312.	45
Figura 3-17. Ciclo de histéresis.....	50
Figura 3-18. Transmisión del calor por conducción (a) y convección (b).	55
Figura 3-19. Diagrama de transmisión del calor, (Tonti, 2013), pág. 398.....	58
Figura 3-20. Ecuaciones constitutivas térmicas.	59
Figura 4-1. Relación entre la Topología, el Algebra y el Cálculo.....	65
Figura 4-2. Mallados estructurados y no estructurados.....	66
Figura 4-3. Celdas primales y duales en 2D (triángulos) y en 3D (tetraedros).67	67
Figura 4-4. Modo local y modo global.	69
Figura 4-5. Dos tetraedros que comparten una cara, tres aristas y 3 nudos... 70	70
Figura 4-6. Orientación positiva o negativa de una superficie.....	71
Figura 4-7. Característica de Euler-Poincaré.	72
Figura 4-8. Característica de Euler y discretización en máquinas asíncronas. 73	73
Figura 4-9. Proceso de co-contorno desde el punto de vista gráfico.....	74
Figura 4-10. Operadores discretos del primal y dual. Adaptado de (Alotto, et al., 2013).	76
Figura 4-11. Tetraedro y triángulo de referencia utilizado en esta tesis.	77
Figura 4-12. Operadores discretos para tetraedro y triángulo de referencia. ... 77	77

Figura 4-13. Diseño de una máquina eléctrica con formulación (A-V).	78
Figura 4-14. Potencial magnético escalar en FF-MC.	80
Figura 4-15. Comparación entre potencial magnético y eléctrico.....	83
Figura 4-16. Matriz local y global simétricas con formulación (a, χ)	84
Figura 4-17. Diseño de una máquina eléctrica con formulación $(a, (a,v))$	85
Figura 4-18. Transmisión de calor en un cuerpo.....	86
Figura 4-19. Potencias caloríficas estática y rotórica.....	89
Figura 4-20. (a) Flujo de campo magnético.....	90
Figura 5-1. Concepto de ecuación y matriz constitutiva.....	97
Figura 5-2. (a) Flujo magnético en caras primales. (b) Semi-aristas duales. ..	99
Figura 5-3. Celda con semi-aristas duales.....	104
Figura 5-4. Caras duales en tres y dos dimensiones.	106
Figura 5-5. Baricentros en el tetraedro.....	106
Figura 6-1. Simetría plana y axial de un cuerpo de revolución.....	114
Figura 6-2. Rotor de jaula de ardilla (catálogo comercial).	115
Figura 6-3. Cabezas de bobina (catálogo comercial).....	115
Figura 6-4. Máquina asíncrona de rotor bobinado (a) y estator (b).	116
Figura 6-5. Modelo para transmisión de calor con $M\lambda$	118
Figura 6-6. Distribuciones superficiales de temperatura.	122
Figura 6-7. Celda triangular de referencia.....	123
Figura 6-8. Celda triangular con sus respectivas aristas duales.	123
Figura 7-1. Circuito genérico.	130
Figura 7-2. Dominio discretizado con corrientes cohomológicas.	135
Figura 8-1. Los caminos del conocimiento. Adaptado de (Oden, 2009).	145
Figura 8-2. Aplicaciones informáticas desarrolladas.	146
Figura 8-3. Calibración de FEMM.....	147
Figura 8-4. Calibración FEMM vs Sol. Analítica.	149
Figura 8-5. FEMM vs analítica 2517 nudos.....	149
Figura 8-6. FEMM vs analítica 1013144 nudos.....	149
Figura 8-7. Experimento térmico 1.	151
Figura 8-8. Condiciones de contorno CILINDRO1 λ	151
Figura 8-9. Cilindro de 1 conductividad térmica.	153
Figura 8-10. Histograma FF-CM vs analítica.....	153
Figura 8-11. Experimento térmico 2.	155
Figura 8-12. Condiciones de contorno CILINDRO2 λ	156
Figura 8-13. Temperaturas de referencia (FEMM).	157
Figura 8-14. Cilindro con 2 conductividades térmicas.	158
Figura 8-15. Comparativa de M_r con M_λ	161
Figura 8-16. Cuadrado 2D con 3 huecos.	163
Figura 8-17. Condiciones de contorno cuadrado 3 huecos.	165
Figura 8-18. Temperaturas en cuadrado con 3 huecos.....	166
Figura 8-19. 1CUBO y BICUBO.	169

Figura 8-20. Experimento electromagnético 1.....	169
Figura 8-21. Circuito eléctrico con 1CUBO.	170
Figura 8-22. Condiciones contorno 1CUBO.	171
Figura 8-23. 1CUBO. (a) Dimensiones. (b) Corrientes.....	171
Figura 8-24. Densidades de corriente en 1CUBO.....	172
Figura 8-25. Rectas regresión para J real y J imaginaria.....	175
Figura 8-26. Histograma de errores. (a) J real. (b) J imaginaria.....	176
Figura 8-27. Análisis de 1CUBO con FEMM.....	177
Figura 8-28. Contratación 1CUBO con FF-MC, GetDP y FEMM.....	178
Figura 8-29. Campo magnético en 1CUBO.....	179
Figura 8-30. Campo magnético bidimensional equivalente al de 1CUBO en 3D.....	180
Figura 8-31. Convergencia de las componentes del campo magnético.....	181
Figura 8-32. BICUBO con corrientes entrantes y salientes.	183
Figura 8-33. Simetrías de corrientes I_{c1} e I_{c2}	184
Figura 8-34. Transitorio electro-térmico en 1CUBO.....	185
Figura 8-35. Dominios para 1CUBO.....	187
Figura 8-36. Transitorio térmico con M_λ	187
Figura 8-37. Histogramas de errores para transitorio térmico.	189
Figura 8-38. Error 3D FPMC-GetDP vs 2D GetDP. Transitorio t: 0,01 s.	190
Figura 8-39. Error 3D FPMC-GetDP vs 2D GetDP. Transitorio t: 5,07 s.	190
Figura 8-40. Error 3D FPMC-GetDP vs 2D GetDP. Transitorio t: 9,91 s.	190
Figura 8-41. Potencia calorífica generado por corriente a 400 Hz.	192
Figura 8-42. Potencia en función de la frecuencia.	193
Figura 10-1. Tetraedro de referencia.....	205
Figura 11-1. Densidades de corriente J_k en los nudos.	219
Figura 11-2. Sub-celdas duales y politopo dual.	222
Figura 13-1. Campo eléctrico, magnético y térmico.	240
Figura 13-2. Condición de continuidad en la Formulación Finita.....	241
Figura 13-3. Teorema de Gauss y teorema de Stokes.....	243
Figura 14-1. Elementos primales y duales con contornos respectivos.....	246
Figura 14-2. El gradiente. Formulación: (a) Finita, (b) Diferencial.....	247
Figura 14-3. Ecuación circuital. Formulación: (a) Finita, (b) Diferencial.	248
Figura 14-4. Ecuación de balance. Formulación: (a) Finita, (b) Diferencial...	248
Figura 15-1. Tipos de constante K en las ecuaciones constitutivas.	250

Índice de tablas

PÁG.

Tabla 2-1. Principales escuelas en máquinas eléctricas.	10
Tabla 2-2 Ventajas e inconvenientes del BEM.	17
Tabla 3-1. Variables globales electromagnéticas, (Tonti, 2013), pág. 295.	40
Tabla 3-2. Parámetros de las ecuaciones constitutivas electromagnéticas. ...	44
Tabla 4-1. Notación topológica de celda primal y dual en 2D y 3D.	67
Tabla 4-2. Almacenamiento de datos de una discretización de un dominio. ...	70
Tabla 4-3. Ley de Gauss del campo magnético.	79
Tabla 4-4. Congruencia duales de campo magnético y campo eléctrico.	82
Tabla 6-1. Conducción térmica y conducción eléctrica (I).	117
Tabla 6-2. Conducción térmica y conducción eléctrica (II).	117
Tabla 7-1. Circuito de Figura 7-1 en forma de tabla.	130
Tabla 8-1. Temperaturas de calibración del FEMM.	149
Tabla 8-2. Estadísticos de calibración del FEMM.	150
Tabla 8-3. Temperaturas en cilindro 1 conductividad.	153
Tabla 8-4. Estadísticos del experimento térmico 1.	154
Tabla 8-5. Temperaturas en cilindro 2 conductividades.	158
Tabla 8-6. Estadísticos del experimento térmico 2.	159
Tabla 8-7. Temperaturas 2λ en matriz M_{τ}	161
Tabla 8-8. Estadísticos del experimento térmico 3.	162
Tabla 8-9. Comparativa entre M_{λ} y M_{τ}	162
Tabla 8-10. Temperaturas cuadrado 2D con 3 huecos.	166
Tabla 8-11. Estadísticos del experimento térmico 4.	167
Tabla 8-12. Densidades de corriente EE1-J Real.	173
Tabla 8-13. Estadísticos de EE1-J Real.	173
Tabla 8-14. Densidades de corriente EE1-J Im_{g}	174
Tabla 8-15. Estadísticos de EE1-J imaginaria.	174
Tabla 8-16. Datos FEMM experimento electromagnético 3.	180
Tabla 8-17. Valores máximos de B, en Teslas, para FF-MC.	180
Tabla 8-18. Comparativa densidad de flujo magnético en 2D GetDP, 3D FF-MC y 2D FEMM.	182
Tabla 8-19. Térmico transitorio. Comparativa entre modelos.	188
Tabla 8-20. Indicadores estadísticos para transitorio térmico.	188
Tabla 8-21. Térmico transitorio. Comparativas agrupadas por tiempo.	188

Tabla 8-22. Comparativa de potencia en función de la frecuencia.....	193
Tabla 8-23. Indicadores estadísticos potencia-frecuencia.....	194
Tabla 8-24. Relación entre mallado y potencia.	195
Tabla 11-1. Integración de $JR2$ y $JI2$ (Voitovich & Vandewalle, 2007).....	225
Tabla 13-1. Tabla de variables globales empleadas.	244
Tabla 13-2. Variables de configuración y de fuente del campo electromagnético.	245
Tabla 13-3. Variables de configuración y de fuente de la transmisión de calor.	245
Tabla 13-4. Criterios de tiempos dual y primal.	246

CAPITULO 1

ESTRUCTURA DE LA TESIS

1. Estructura de la tesis

1.1 Introducción

Se pretende explicar brevemente, sobre esta tesis, sus motivaciones, el planteamiento, desarrollo y realización de la misma. Se detalla el problema, o más bien, los problemas que se plantean en la simulación del comportamiento de una máquina eléctrica asíncrona. Se enuncian los motivos, los objetivos y la metodología llevada a cabo para su realización. Se indica como se ha estructurado toda la documentación. Por último, se hace una breve relación de las publicaciones donde este autor ha participado y que tienen un interés relevante para esta tesis.

1.2 Planteamiento del problema

La máquina eléctrica, en general, y la máquina asíncrona, en particular, presentan una serie de fenómenos físicos diversos. Esos fenómenos son de índole electromagnética, térmica, mecánica y de fluidodinámica, principalmente.

Para el tratamiento matemático de dichos fenómenos, tradicionalmente, se ha recurrido a diversos métodos numéricos como pueden ser métodos modulares, diferencias finitas, elementos finitos, etcétera.

Uno de estos métodos numéricos pudiera ser el Método de la Celda, método numérico para desarrollar una teoría de la Física Computacional Discreta como es la Formulación Finita.

1.3 Motivación y objetivos

Se planteó la hipótesis de la validez del Método de la Celda para realizar cálculos electrotérmicos aplicados a una máquina eléctrica asíncrona.

De entre los tipos de máquinas eléctricas existente, se particularizó en la máquina eléctrica asíncrona porque, con casi toda seguridad, es la máquina eléctrica de mayor uso.

En la bibliografía consultada y en el Departamento de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria existe experiencia en la aplicación de la Formulación Finita y el Método de la Celda al campo electromagnético.

En cambio, en el campo térmico, la bibliografía es muy escasa, circunscrita a aplicaciones electrotérmicas en el campo de la Medicina. Para su aplicación al caso de la máquina eléctrica, en general, y a la máquina eléctrica asíncrona, en particular, no le consta a este autor obra alguna en las fuentes bibliográficas consultadas donde se mencione dicha aplicación.

Todo lo anteriormente expuesto motivó la realización de esta tesis, con el *objetivo general* de probar que el acoplamiento electromagnético y térmico, existente en las máquinas asíncronas, se puede explicar numéricamente haciendo uso del Método de la Celda, dentro del marco teórico de la Formulación Finita.

Como *objetivos particulares* se pretende demostrar la validez de:

- Las matrices constitutivas térmicas propuestas, tanto para dos como para tres dimensiones.
- La Formulación Finita y el Método de la Celda para la resolución de problemas electrotérmicos transitorios.
- La integración sobre los volúmenes duales para el cálculo de la potencia calorífica generada por fenómenos electromagnéticos.

1.4 Trabajo realizado y descripción de la metodología usada para llevarlo a cabo

El trabajo que se ha realizado consta de diversas fases. A saber, éstas son:

1. Recopilación de bibliografía referente al tema a tratar: Formulación Finita y el Método de la Celda.
2. Recopilación de bibliografía auxiliar al tema principal de estudio.
3. Búsqueda de aplicaciones informáticas que permitan realizar los objetivos propuestos. Esta base se divide en dos etapas.

- Primera etapa: búsqueda de aplicaciones interpretadas como Matlab, Scilab y Octave, así como de un mallador de dominios discretizables como es el Gmsh.
 - Segunda etapa: búsqueda de entornos avanzados como Dev C++, GetDP y FEMM.
4. Selección de fenómenos físicos a estudiar.
 5. Diseño de los experimentos numéricos a realizar.
 6. Construcción de los modelos matemáticos adecuados.
 7. Simulación.
 8. Verificación y validación de resultados numéricos obtenidos.
 9. Compilación de resultados y redacción de este documento.
 10. Verificación y validación del documento en su conjunto.

La bibliografía existente sobre campo electromagnético aplicando la Formulación Finita y el Método de la Celda es relativamente amplia, todo lo contrario cuando se habla de la transmisión de calor. A la hora de contrastar los resultados obtenidos se ha optado por hacerlo con la metodología de los elementos finitos, pues de entre los métodos numéricos existentes, es el más extendido en el estudio de las máquinas eléctricas.

En cuanto a aplicaciones informáticas, en una primera etapa se optó por aplicaciones interpretadas como Octave y Matlab. A medida que se avanzó en el desarrollo de aplicaciones, se comprobó la limitada capacidad que tienen estas aplicaciones para manejar las dimensiones de las matrices que se utilizan en el Método de la Celda. Es por ello, que en una segunda etapa, se decide utilizar el lenguaje C++ en una aplicación de software libre como es el Dev C++. Todos los programas desarrollados en Octave fueron traducidos a Dev C++. Para crear los mallados de los modelos utilizados siempre se ha utilizado el Gmsh.

Una vez obtenidos los primeros resultados, para su validación se utilizaron los programas de software libre GetDP y FEMM, basados ambos en el método de los elementos finitos.

Una vez obtenidas y verificadas las aplicaciones desarrolladas en Scilab y Dev C++ para el Método de la Celda, se diseñaron una serie de experimentos numéricos para corroborar lo expuesto en las teorías electromagnéticas y térmicas bajo el punto de vista de la Formulación Finita. Cada uno de estos experimentos pasó por un proceso de verificación y validación. Dichos experimentos se pueden consultar en el Capítulo 8 y los estadísticos para su validación, desarrollados en Matlab, se pueden consultar en el Anexo 3.

En la Formulación Finita, el método numérico de resolución, tal como se ha dicho anteriormente, va a ser el Método de la Celda. A estos efectos, se considera que el material descrito en el interior de la celda es isótropo y no saturable.

Se sabe que estas consideraciones son un caso ideal en las máquinas eléctricas, pues éstas tienen un comportamiento no lineal en sus materiales. Y, puestos a considerar, por ejemplo, los núcleos ferromagnéticos, laminados en frío, aparte de saturarse, tiene un comportamiento anisótropo.

El objeto de esta tesis, en el caso de las ecuaciones constitutivas, no es modelar estos fenómenos. Se ha tratado de aplicar una simplificación de la realidad como es la de considerar dichos parámetros como constantes. Es decir, se desarrollan modelos matemáticos lineales de las máquinas, en especial de la máquina eléctrica asíncrona, objeto de estudio de esta tesis.

1.5 Organización de la memoria

La organización y redacción de esta tesis se ha hecho siguiendo el criterio de avanzar de lo más general a lo más concreto,

En el Capítulo 2 se hace un recorrido por el estado del arte, en cuanto a máquinas eléctricas se refiere, en especial a la máquina asíncrona; así como por los métodos numéricos más habituales aplicados al cálculo de fenómenos físicos concernientes a las mencionadas máquinas.

En el Capítulo 3 se explica la teoría de la Formulación Finita. Se ha optado por hacer una comparativa entre la Formulación Finita y la formulación integral y diferencial, ya que en las escuelas de ingeniería estas dos últimas son las más habituales, en cuanto a enseñanza y uso se refiere. Se centraron las explicaciones en el campo electromagnético, la electrodinámica y la transmisión del calor, por ser estos los objetivos de esta tesis, centrándose, aún más, estas explicaciones en su aplicación a la máquina eléctrica asíncrona.

En el Capítulo 4 se explica en que consiste el método de cálculo numérico conocido como Método de la Celda, el cual permite llevar a la práctica la teoría expuesta en la Formulación Finita. Se ha centrado en la formulación $(a, (a, v))$ y en la formulación $(a, (a, \chi))$, que son las formulaciones que se han implementado en las aplicaciones informáticas utilizadas en esta tesis.

En el Capítulo 5 se tratan las matrices constitutivas electromagnéticas $[M_v]$ y $[M_\sigma]$. Las matrices constitutivas son la piedra angular del Método de la Celda. Estas matrices permiten describir el medio material donde se desarrollan los campos físicos estudiados.

En el Capítulo 6 se explican cómo se generan las matrices constitutivas térmicas $[M_\lambda]$ y $[M_{cp}]$. Se destacan las aportaciones hechas en esta tesis como son la matriz constitutiva de transmisión térmica $[M_\lambda]$ en tres dimensiones, y su variante $[M_\lambda]^{2D}$ para transmisión de calor bidimensional. La primera matriz es una adaptación de la matriz constitutiva de conducción eléctrica a la conducción térmica. La segunda es una transformación a la conducción bidimensional por un método novedoso, consistente en trabajar directamente en el espacio dual.

En este capítulo también se hace otra aportación a la conducción del calor como es la matriz $[M_\tau]$, desarrollada a partir de métodos matriciales utilizando las relaciones geométricas de las caras duales. Por razones de economía computacional, esta aportación, aunque más rápida y precisa que la aportación $[M_\lambda]$, se recomienda sólo utilizarla en problemas exclusivos de transmisión de calor, ya que la estructura matricial de $[M_\lambda]$ tiene doble uso: cálculo eléctrico y cálculo térmico.

En el Capítulo 7 se explican las posibilidades de imbricar la Teoría de Circuitos con la Formulación Finita y el Método de la Celda en tres dimensiones. Se trata de conectar dominios continuos discretizables, tratados con el Método de la Celda, con circuitos de parámetros concentrados, tratados con el Método Nodal Modificado. Esto es de suma utilidad pues se pueden estudiar el comportamiento electromagnético y térmico de dominios continuos discretizables estimulados con corrientes y tensiones provenientes de circuitos de parámetros concentrados. Entre los muchos posibles casos de estudios, podemos hablar de corrientes y tensiones con alto contenido de armónicos, habituales en máquinas asíncronas estando sometidas a controles basados en electrónica de potencia.

En el Capítulo 8 se describen los experimentos numéricos realizados para comprobar y validar el uso del Método de la Celda en el estudio de fenómenos electrotérmicos, los cuales afectan al funcionamiento de las máquinas asíncronas.

En el Anexo 1 se describe como se obtuvo la componente matricial $[A_\tau]$ para obtener finalmente la matriz constitutiva térmica $[M_\tau]$, aportación que se hace en esta tesis.

En el Anexo 2 se describe como obtener la potencia calorífica generada por corrientes eléctricas a partir de la integración de las sub celdas duales del dominio discretizado.

En el Anexo 3 contiene la explicación de conceptos concernientes al proceso de verificación y validación, al cual se han sometido los experimentos numéricos. En él se explican una serie de estadísticos utilizados en la validación de los experimentos numéricos.

En el Anexo 4 se explican de las ventajas que presenta la utilización de las variables globales en la Formulación Finita, sobre todo en cuanto a salvar discontinuidades del medio material se refiere y otras cuestiones afines.

En el Anexo 5 se compilan una serie de publicaciones donde ha participado el autor de esta tesis y que tienen un interés directo para el desarrollo de esta tesis.

1.6 Resumen de publicaciones

Monzón Verona J.M.; Simón Rodríguez L.; González Domínguez P., "Global Equation of Cell Method and Modified Nodal Method of Electromagnetic and Circuital Problems", ISEF 2011 - XV International Symposium on

Electromagnetic Fields in Mechatronics, Electrical and Electronic Engineering, Funchal, Madeira, September 1-3, 2011.

Simón Rodríguez L.; González Domínguez P., Monzón Verona J.M., “Computational Geometry applied to Finite Formulation.”, ISEF 2011 - XV International Symposium on Electromagnetic Fields in Mechatronics, Electrical and Electronic Engineering Funchal, Madeira, September 1-3, 2011.

Simón Rodríguez L., González Domínguez P. I., Monzón Verona J.M.; Martínez Melgarejo, M., “La Matriz Fundamental de Bucles B en el Método de la Celda. Aplicación a un Problema Electromagnético de Corrientes Inducidas en 3D.”, 12° Congreso Interamericano de Computación Aplicada a la Ingeniería de Procesos CAIP’2015. Cartagena de Indias, Colombia, Septiembre, 2015.

Simón Rodríguez L., González Domínguez P. I., Monzón Verona J.M.; Martínez Melgarejo, M., “El Método de la Celda Aplicado al Análisis de Fallos en una Máquina de Inducción Magnética.”, 12° Congreso Interamericano de Computación Aplicada a la Ingeniería de Procesos CAIP’2015. Cartagena de Indias, Colombia, Septiembre 2015.

González Domínguez P. I., Simón Rodríguez L., Monzón Verona J.M.; Martínez Melgarejo, M., “El Método de la Celda aplicado al Estudio de Campos Electromagnéticos y Transferencia de Calor en Motores de Inducción”, 12° Congreso Interamericano de Computación Aplicada a la Ingeniería de Procesos CAIP’2015. Cartagena de Indias, Colombia, Septiembre 2015.

Capítulo 2

Índice	<u>PÁG.</u>
2. Resumen del estado del arte	9
2.1 Introducción	9
2.2 Evolución de las máquinas eléctricas	9
2.3 El electromagnetismo clásico	10
2.4 El electromagnetismo computacional	11
2.4.1 El método de los Elementos Finitos.....	12
2.4.2 El gradiente conjugado con transformada rápida de Fourier.....	13
2.4.3 El método de los momentos.....	14
2.4.4 Diferencias finitas en el dominio del tiempo.....	14
2.4.5 Volúmenes finitos en el dominio del tiempo.....	15
2.4.6 El método de la matriz de la línea de transmisión	16
2.4.7 El método de los elementos de contorno	16
2.4.8 Teoría uniforme de la difracción	17
2.4.9 Técnicas híbridas	17
2.4.10 La Integración Finita.....	17
2.4.11 La Formulación Finita.....	18
2.5 Transferencia de calor en las máquinas eléctricas	19
2.6 La máquina eléctrica de inducción o asíncrona	22
2.7 Conclusiones	22
Bibliografía.....	23

Síntesis

Se describen las leyes electromagnéticas y termodinámicas aplicadas al estudio de las máquinas eléctricas. Se describen las principales escuelas de estudio de las máquinas eléctricas. Se describen brevemente los principales métodos de cálculo numérico aplicados al estudio del Electromagnetismo Computacional y la transferencia de calor.

2. Resumen del estado del arte

2.1 Introducción

Se explica en este capítulo las principales escuelas existentes en el estudio de la máquina eléctrica y la evolución tecnológica de las mismas.

Se explica brevemente la génesis del electromagnetismo desde un punto de vista clásico, donde las ecuaciones de Maxwell son el principal referente, para pasar luego a explicar lo que se conoce como Electromagnetismo Computacional. Se hace un breve recorrido por los principales métodos numéricos utilizados en el Electromagnetismo Computacional.

Se hace una breve introducción a los procesos de transferencia de calor que aparecen en el funcionamiento de las máquinas eléctricas. Por último, se da una breve pincelada de la importancia que tiene la máquina eléctrica asíncrona en el mundo actual.

2.2 Evolución de las máquinas eléctricas

Actualmente, la investigación en máquinas eléctricas se centra principalmente en la mejora estructural de éstas. Bien sea aplicando nuevos tipos de aislamiento, o bien en la utilización de superconductores, bien en la mejora de las características mecánicas de las mismas. Es de destacar como línea de investigación activa la búsqueda de modelos matemáticos para el estudio de máquinas eléctricas (Kost, 1995), (Sykulski, 2007).

El modelado matemático de los fenómenos electromagnéticos para las máquinas eléctricas tradicionalmente sigue dos grandes escuelas, destacándose diversos tipos, a saber:

Modelos físico-matemáticos	Modelos paramétricos-físicos
<ul style="list-style-type: none"> • <i>Modelo en diferencias finitas</i> • <i>Modelos en elementos finitos</i> 	<ul style="list-style-type: none"> • <i>Modelos de Park y Ku</i> • <i>Teoría de los fasores espaciales</i>

Tabla 2-1. Principales escuelas en máquinas eléctricas.

Los modelos físico-matemáticos son empleados principalmente para el diseño y cálculo de las máquinas eléctricas. El modelo de máquina eléctrica en diferencias finitas está basado en la discretización de la ecuación diferencial de Poisson mediante la descomposición en una serie de Taylor. El modelo de máquina eléctrica basado en elementos finitos se fundamenta en la minimización de un funcional (energía) y en la descomposición en dominios de dimensión finita de la región en los que la función incógnita es representada por una aproximación polinomial.

Los modelos paramétrico-físicos permiten únicamente el estudio del comportamiento de las máquinas eléctricas. El modelo de máquinas eléctricas de Park y Ku logra, mediante transformaciones, hacer corresponder a las magnitudes reales una componente homopolar, otra inversa y otra directa, apoyándose para ello en la teoría de las componentes simétricas (Smith, 1990). El modelo de máquinas eléctricas basado en los fasores espaciales logra pasar magnitudes electromagnéticas del dominio temporal al dominio espacial. Este modelo es de una gran potencia, tanto conceptual como de cálculo, ya que no se pierde la visualización de las magnitudes físicas, tanto en su aspecto constructivo como electromagnético; permitiendo un planteamiento en forma matricial de las ecuaciones que definen la conversión energética, desarrollándose las mismas mediante técnicas de análisis numérico. Al ofrecer una representación espacial de las magnitudes electromagnéticas, este modelo puede ser utilizado, en ciertos aspectos, para la concepción y cálculo de la máquina eléctrica.

Para una mayor profundización en la evolución histórica de las máquinas eléctricas se recomienda (Fraile, 2008), en el apéndice 1, página 759.

2.3 El electromagnetismo clásico

El desarrollo de las máquinas eléctricas va parejo a los avances en electromagnetismo. Un hito claro en la teoría electromagnética fue el enunciado de las leyes de James Clerk Maxwell en 1879. En estas cuatro leyes, originalmente eran dieciséis, se resumen los principales fenómenos del electromagnetismo. Oliver Heaviside junto con Willard Gibbs, en 1884, reformulan dichas leyes a su forma vectorial actual.

Las leyes de Maxwell se formulan tanto en forma integral como diferencial. Para definir la naturaleza del medio donde se desarrollan los fenómenos electromagnéticos a estudiar, se definen las ecuaciones constitutivas del medio. Cuando se aplican las leyes de Maxwell, tanto en su forma integral como

diferencial, a casos concretos, estas ecuaciones terminan convirtiéndose en ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Su resolución ha consistido clásicamente en idealizar los recintos de integración superficial (S) o de circulación vectorial (L) a formas geométricas en las cuales son conocidas sus expresiones matemáticas. Esto ha limitado, en gran medida, el uso de dichas ecuaciones en la Física, pero especialmente en la Ingeniería. Se han hecho hipótesis simplificativas para tratar de facilitar el cálculo de las mismas. La Teoría de Circuitos Lineales es uno de esos casos. Para el cálculo de las máquinas eléctricas se ha utilizado tradicionalmente una mezcla de expresiones empírica y de la teoría de circuitos. Este panorama cambia radicalmente con la aparición de los ordenadores.

2.4 El electromagnetismo computacional

El Electromagnetismo Computacional surge por la dificultad de cálculo que presentan las ecuaciones de Maxwell en la mayoría de los casos prácticos. Las expresiones analíticas tanto de los campos escalares como vectoriales, así como los contornos geométricos de integración, en la mayoría de los casos son difíciles; o, simplemente, imposibles de obtener.

Todo ello ha llevado al desarrollo de multitud de métodos matemáticos para obtener una solución aproximada a dichas ecuaciones. Con la irrupción de los ordenadores a finales de los años cincuenta del siglo XX, comienza a aparecer una serie de métodos matemáticos que se han venido, con el paso de los años, a llamar Métodos de Electromagnetismo Computacional – MEC -.

Según sea el tipo de problema tratado, los MECs se han especializado en el dominio del tiempo o en el dominio de la frecuencia. Así mismo, dichos MECs pueden tomar como punto de partida las expresiones diferenciales o las expresiones integrales de las ecuaciones de Maxwell. Una excepción la constituyen los MECs aplicados a la alta frecuencia. En ellos, las ondas electromagnéticas son tratadas desde el enfoque de la Óptica.

La idea fundamental de los MECs es convertir un dominio continuo, abordable mediante cálculo infinitesimal, en un dominio discreto, abordable mediante cálculo discreto. El dominio continuo Ω se discretiza en un número finito de celdas V_i .

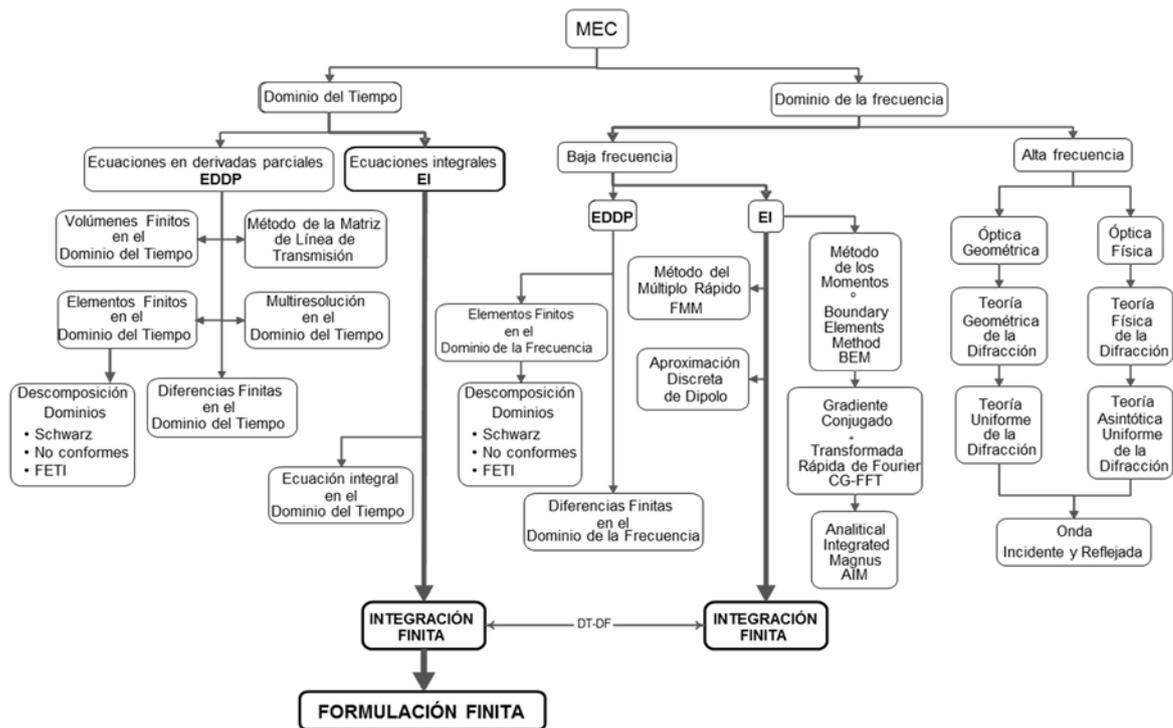


Figura 2-1 Principales métodos de electromagnetismo computacional.

Por su trascendencia histórica o por su aplicación al diseño de las máquinas eléctricas, cabe destacar especialmente el método de las Diferencias Finitas y el de los Elementos Finitos, tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia (Reitich & Tamma, 2004), (Trowbridge & Sykulski, 2006), (Kost, 2011).

Al estar esta tesis centrada en MECs aplicados al estudio de las máquinas eléctricas asíncronas, también llamadas de inducción, se explicarán algunos métodos basados en el dominio del tiempo y de la frecuencia, centrándose especialmente en la baja frecuencia. Para una mejor comprensión del tema a explicar, véase la Figura 2-1.

2.4.1 El método de los Elementos Finitos

El método de los elementos finitos, MEF de aquí en adelante, consiste en dividir la configuración a analizar en pequeñas piezas homogéneas o elementos. El modelo contiene información acerca de la geometría, la naturaleza de los materiales que la forman, apareciendo éstas como constantes numéricas; además de las excitaciones del sistema y los valores de contorno o frontera del mismo. El tamaño de los elementos va a depender del detalle con que se desea hacer el análisis. A más detalle corresponden elementos más pequeños. La unión entre elementos se realiza en los nodos. El objetivo del método de los elementos finitos es determinar el valor de las magnitudes del campo electromagnético que se le han asignado a los nudos, aristas o caras.

Desde los trabajos de Winslow en 1963, la aplicación del método de los elementos finitos al electromagnetismo computacional no ha parado de crecer (Sykulski, 2006). El MEF se basa en la discretización de dominios, en los cuales deben existir ecuaciones que definan el problema físico a resolver. El requisito básico del MEF es que las ecuaciones constitutivas y las ecuaciones de evolución temporal sean conocidas previamente. El MEF permite obtener una solución aproximada en un dominio (medio continuo) sobre el cual están establecidas diversas ecuaciones diferenciales en forma débil que caracterizan el comportamiento del sistema. El dominio se divide en diversos subdominios no intersectantes entre sí denominados elementos finitos (Zienkiewicz, et al., 1993), (Fonseca, 2011).

La mayoría de los métodos de elementos finitos utilizan técnicas variacionales. Las técnicas variacionales tratan de minimizar o maximizar una función conocida que se vuelve estacionaria cerca de la solución verdadera (Zienkiewicz, et al., 1993). En el caso del electromagnetismo se utilizan funcionales de energía asociada al campo magnético, al campo eléctrico y a la disipación en forma de calor (Hubing, 1991).

Uno de los mayores problemas que presenta el MEF aplicados al electromagnetismo es la dificultad para modelar regiones con configuraciones abiertas, donde el campo electromagnético no es conocido en todos los puntos de un contorno cerrado

Una de las ventajas que presenta el MEF es la de poder definir las propiedades electromagnéticas y geométricas de cada elemento de forma independiente. Esto permite modelar regiones con elementos sumamente pequeños cuando, por su complejidad, se requiera gran precisión. Por otro lado, en regiones donde no sea necesario gran precisión en el cálculo, los elementos serán mucho más grandes.

Cabe destacar la innovación que ha supuesto el empleo de la Descomposición de Dominios en el MEF para resolver problemas de electromagnetismo con circuitos magnéticos de materiales heterogéneos. Existen diversas técnicas de descomposición como son el algoritmo de Schwarz, los elementos finitos tipo cemento y los FETI (Finite Element Tearing and Interconnecting) (Vouvakis, 2005) y (Marcsa & Kuczmann, 2013).

En el campo del electromagnetismo computacional aplicando elementos finitos es de destacar la reinterpretación geométrica que ha hecho Alain Bossavit (Bossavit, 1998), (Bossavit, 2000), (Bossavit, 2005).

2.4.2 El gradiente conjugado con transformada rápida de Fourier

El Gradiente Conjugado con Transformada Rápida de Fourier, MGC+FFT de aquí en adelante, se utiliza para el estudio de dispersión electromagnética (*electromagnetic scattering*, en inglés), de uso en tecnologías de radar. Al ser

las emisiones de las máquinas eléctricas de relativa baja frecuencia, su uso en el modelado de máquinas eléctricas no es necesario. En algunos estudios sobre fallos en las máquinas eléctricas asíncronas mediante el análisis espectral de las corrientes de las máquinas se utiliza la Transformada Rápida de Fourier (FFT) y la transformada Wavelet, no siendo éste el objeto de estudio de la presente tesis. Véase a modo de ejemplo (Bellini, et al., 2006), (Puche Panadero, 2008), (Rosero, et al., 2008).

Se basa en la técnica de los residuos ponderados. Es similar al método de los momentos. Se ponderan una serie de funciones y se construye un sistema de ecuaciones lineales y, por último, se resuelve dicho sistema. Unas de las ventajas de MGC es la aplicación directa del método de resolución de ecuaciones lineales que lleva el mismo nombre, en especial para grandes sistemas de ecuaciones lineales en forma matricial dispersa.

2.4.3 El método de los momentos

El método de los momentos, MoM de aquí en adelante, resuelve ecuaciones integrales reduciéndolas a un sistema de ecuaciones lineales. El MoM emplea la técnica de residuos ponderados. Esto consiste en establecer funciones-solución triviales de una o más variables. Los residuos se evalúan mediante la diferencia existente entre la solución trivial y la verdadera (Hubing, 1991).

Las ecuaciones a resolver por el MoM están expresadas en forma de ecuación integral de campo eléctrico y de ecuación integral de campo magnético.

El MoM aplicado a la ecuación integral no es muy efectivo cuando se aplica a geometrías complejas con dieléctricos y materiales magnéticos no homogéneos. En cambio, con el MoM se obtiene buenos resultados en problemas de radiación electromagnética tridimensional.

2.4.4 Diferencias finitas en el dominio del tiempo

Las diferencias finitas en el dominio del tiempo, DFDT de aquí en adelante, es un método de resolución directa de las ecuaciones de Maxwell. Fue Kane S. Yee, en 1966, quien desarrolla el concepto de diferencias finitas en el dominio del tiempo aplicadas a la resolución de las ecuaciones de Maxwell, aportando, así mismo, el concepto de celda de Yee. La celda de Yee basa se basa en la forma de la onda electromagnética: dos ondas planas ortogonales entre sí.

Este concepto será el fundamento de las DFDT aplicadas al electromagnetismo y la base de otros métodos matemáticos para el electromagnetismo computacional que surgirán posteriormente.

Las ecuaciones de Maxwell deben presentarse en forma diferencial y hacer uso del rotacional aplicado a los vectores de campo eléctrico y magnético. Se utiliza la diferencia central aproximada para evaluar la derivada respecto del espacio y del tiempo, de esta forma se pasa de una forma diferencial continua a una

forma diferencial discreta. Esta forma de discretización se conoce como salto de la rana en diferencia finita (*leapfrog finite difference scheme*), aunque la correcta traducción sería salto de la púdola, del juego infantil. Las DFDT es un procedimiento pautado en el tiempo (*time stepping*), pues sus derivadas son temporales: La región a modelar está compuesta de dos mallados entrelazados. Uno de los mallados contiene los nudos en el que se evaluarán los valores de campo magnético. El otro mallado contiene los nudos donde se evaluará el campo eléctrico. Los intervalos temporales se siguen aplicando hasta que la solución sea estable y el resultado obtenido se aproxime al valor deseado. A cada paso de tiempo, las ecuaciones que definen los campos eléctrico y magnético son actualizadas. Los valores de permeabilidad magnética, rigidez dieléctrica y conductividad eléctrica se le asignan a cada celda que forma parte del mallado del dominio donde se quiere calcular los valores de campo. Dicha celda es un elemento cúbico, en el caso de tres dimensiones, o un cuadrado, en el caso de dos dimensiones. El mallado formado con las celdas es totalmente ortogonal celda a celda. La principal dificultad del método de las DFDT es la aproximación de superficies o contornos alabeados. Dicho contorno se debe aproximar de forma escalonada (*staircase*). Esto hace que configuraciones determinadas se necesite un tamaño de celda muy pequeño, lo que da lugar a un mallado muy denso con el consiguiente costo computacional. Este inconveniente se puede solventar utilizando el método de los volúmenes finitos en el dominio del tiempo, VFDT de aquí en adelante.

La gran desventaja de las DFDT es el modelado de formas diminutas en grandes contornos debido al pequeño tamaño que habrá que asignarle a las celdas. Cuando esto sucede, existen métodos más eficientes que el de las DFDT.

La principal ventaja que presentan las DFDT en la resolución de problemas de electromagnetismo es su simplicidad y la relativa flexibilidad para analizar las geometrías complejas.

Por otra parte, la principal desventaja de las DFDT es su alto costo computacional cuando los objetos a analizar tienen unas dimensiones muy grandes comparadas con la longitud de onda del campo electromagnético analizado. En este caso, las partes más alejadas del objeto producen errores por la dispersión numérica que aparece (Hubing, 1991). Para mayor profundización en este tema se recomienda leer (Yee & Chen, 1997).

2.4.5 Volúmenes finitos en el dominio del tiempo

El método de los volúmenes finitos en el dominio del tiempo, VFDT de aquí en adelante, se aplica a la resolución de las ecuaciones de Maxwell desde 1988 a partir de los trabajos de Bonnet (He, et al., 2012). La gran ventaja de este método es su aplicación a mallados no estructurados frente a las dificultades que presenta el método de las DFDT. Se han desarrollado diversas técnicas

como son la de la celda centrada, la del vértice centrado y la de la celda escalonada. La distribución del campo eléctrico y la del campo magnético coincide con la que se sigue en el método de las DFDT (Yee & Chen, 1997), (Bommaraju, 2009), y (He, et al., 2012). Originariamente el método de los VFDT fue desarrollado para el estudio de la mecánica de fluidos.

2.4.6 El método de la matriz de la línea de transmisión

EL método de la línea de transmisión, MLT de aquí en adelante, es similar al método de las DFDT. Fue introducido por P. B. Johns (Johns & Beurle, 1971). Se realiza en el dominio del tiempo, estando totalmente mallada la región objeto de análisis. Se establece una malla para el campo eléctrico \vec{E} y otra malla para el campo magnético \vec{H} . Los nodos de esta malla están interconectados entre sí por líneas virtuales de transmisión. Las fuentes de excitación están situadas en determinados nudos y transmiten dicha excitación a los nudos adyacentes a través de las líneas de transmisión virtuales a cada intervalo de tiempo. Para una mayor profundización consultar (Russer, 2000) y (Russer & Russer, 2011).

El MLT es muy parecido a las DFDT, teniendo, así mismo, sus mismas desventajas. La principal desventaja es la de utilizar un mallado muy fino cuando el problema requiere precisión, con el consiguiente costo computacional. El MLT requiere significativamente más memoria de ordenador por nodo. En cambio se obtiene un buen resultado para contornos de geometría compleja (Hubing, 1991).

2.4.7 El método de los elementos de contorno

El método de los elementos de contorno o método de los elementos de frontera, que por ser su acrónimo MEC sería similar la expresión Métodos de Electromagnetismo Computacional o, en caso de utilizar el acrónimo MEF, sería similar a Método de los Elementos Finitos, pasaremos, de aquí en adelante, a denominar BEM como acrónimo de *Boundary Element Method*, que son su siglas en inglés. El BEM utiliza la técnica de los residuos ponderados. Es, en parte, similar al MoM, pero las funciones de expansión y de ponderación se definen solamente para el contorno o frontera. En el caso de problemas en tres dimensiones, la frontera o contorno a estudiar sería la superficie envolvente de dicho volumen, no necesitándose, en la mayoría de los casos, el modelado del interior del volumen. El BEM se aplica a problemas donde se conoce la función de Green. Esto implica que los campos deben discurrir en medios lineales y homogéneos.

Las principales ventajas e inconvenientes del BEM son:

Ventaja	Inconveniente
Menos tiempo para preparar los datos	Las matemáticas usadas son poco familiares en el ámbito de la ingeniería
Alta resolución	El interior del volumen a estudiar debe ser modelado en materiales no homogéneos y no lineales
Menor tiempo de cálculo y memoria de almacenamiento	Matrices llenas y asimétricas
Menos información no deseada	Resultados muy pobres en estructuras finas y alabeadas tipo cáscara o concha (Shell, en inglés)

Tabla 2-2 Ventajas e inconvenientes del BEM.

Este motivo restringe severamente su utilización en el estudio de las máquinas eléctricas donde prevalecen los medios no lineales y heterogéneos. Se puede solventar esta dificultad mediante la discretización en subvolúmenes que presenten cierta linealidad y homogeneidad. Esto resta las ventajas que ofrece el BEM. El procedimiento seguido por el BEM es construir un mallado sobre la superficie a estudiar. Esto da lugar a matrices muy densas, lo cual genera mucho tiempo de cálculo y capacidad de almacenamiento.

2.4.8 Teoría uniforme de la difracción

Este tipo de técnica de electromagnetismo computacional se utiliza exclusivamente en alta y muy alta frecuencia. Tiene precisión cuando el objeto analizado es muy grande respecto de la longitud de onda del campo electromagnético objeto de análisis. Estas técnicas están basadas en el fenómeno físico de la difracción en alta frecuencia (Cheben & Calvo Padilla, 1998), (Rousseau, et al., 2007) y (Pathak & Kim, 2011).

2.4.9 Técnicas híbridas

Tratan de armonizar técnicas de electromagnetismo computacional tales como las DFDT con MLT, MEF con BEM, y otras combinaciones (Hubing, 1991), (Chen & Wang, 2014) y (Pellegrini, et al., 2014).

2.4.10 La Integración Finita

El método de la Integración Finita, MIF de aquí en adelante, fue desarrollado por Thomas Weiland en 1977, siendo una generalización del método de las DFDT. Actualmente también está extendido al dominio de la frecuencia y a mallados no estructurados (Weiland, 2003).

Utiliza dos mallados imbricados, el uno dentro del otro. El primer mallado se denomina *mallado primal* G . Al segundo mallado se le denomina *mallado dual* \tilde{G} , teniendo su fundamento en la celda de Yee de las DFD, pero con la salvedad, respecto de las DFDT, que estos mallados no tiene que ser estrictamente

ortogonales, pudiendo estar formados por tetraedros, hexaedros, octaedros, dodecaedros, etcétera. El primal G se compone de una serie finita de celdas, también llamadas volúmenes, V_i ($i = 1, \dots, N_V$). Cada celda está rodeada de caras o superficies C_i ($i = 1, \dots, N_C$). Cada cara está rodeada por al menos tres aristas, formando el borde de ésta, A_i ($i = 1, \dots, N_A$). Cada arista tiene dos nudos o vértices n_j y n_k en sus extremos, los cuales pueden ser compartidos por otras aristas.

En el espacio dual \tilde{G} , sucede lo mismo. Se cumple que tiene el mismo número de celdas $\tilde{N}_V = N_V$. Que tienen el mismo número de caras $\tilde{N}_C = N_C$. Que tienen el mismo número de aristas $\tilde{N}_A = N_A$. Y, por supuesto, el mismo número de nudos o vértices $\tilde{N}_n = N_n$.

Para aproximar un material real y heterogéneo, se discretiza dicho material. Cada celda puede ser distinta una de la otra, representando la heterogeneidad del material, pero el interior de cada celda V_i debe ser homogéneo.

En el MIF se utilizan las variables de estado denominadas *tensión de mallado* y *flujo de mallado* (Weiland, 2002). Son magnitudes escalares y se definen como las integrales del campo eléctrico y magnético a lo largo de una arista L_i de la celda y de la cara S_i de la celda V_i .

2.4.11 La Formulación Finita

Inicialmente desarrollada por Enzo Tonti (Tonti, 1995), (Tonti, 2000A), (Tonti, 2000B), (Tonti, 2001A), (Tonti, 2001B), (Tonti, 2002), (Tonti, 2013). Se trata de un método numérico para solucionar ecuaciones de campo. En el caso de la Formulación Finita, cualquier campo, escalar o vectorial, referido a cualquier fenómeno físico, al contrario que la Integración Finita, que está restringido al campo electromagnético. La esencia del método de la Formulación Finita es pasar directamente de la formulación directa de las leyes de campo a un sistema de ecuaciones algebraicas sin hacer uso de la formulación diferencial (Tonti, 2001B). Las bases de la Formulación Finita consisten en la identificación y definición de las cantidades físicas. El elemento base de discretización de la Formulación Finita es la celda. Esta idea fue introducida originariamente por Branin (Branin, 1966), (Tonti, 1995). Se hace uso de conceptos tales como los n -simplex, las homologías y cohomologías, etcétera. Todo ello proviene de la rama de las matemáticas conocida como Álgebra Topológica. Es decir, la Formulación Finita es el método de análisis del fenómeno y el Método de la Celda es su método numérico de resolución (Tonti, 2013), página 17, apartado 1.5.

La Formulación Finita de Tonti se puede ver como una generalización de la Integración Finita de Weiland (Bettini & Trevisan, 2003).

La Formulación Finita usa variables globales, las cuales presentan la gran ventaja de no necesitar establecer condiciones de salto o frontera para el caso de dominios heterogéneos (Tonti, 2013), página 17, apartado 1.5, como sucede

en la mayoría de los casos reales a estudiar y, en particular, en el caso de las máquinas eléctricas: circuito magnético hierro-aire-hierro, diferentes capas de dieléctricos en los aislamientos, conducción del calor por núcleos ferromagnéticos laminados en chapas aisladas entre sí, etcétera.

En la Formulación Finita las variables físicas se califican en *variables de fuentes*, *variables de configuración* y *variables de energía*. Esta clasificación fue introducida por Penfield y Haus en 1966.

Así mismo, las *ecuaciones constitutivas* relacionan las variables fuentes con las variables de configuración (Tonti, 2000B), (Tonti, 2001B), (Tonti, 2000), (Tonti, 2013).

En el Capítulo III de esta tesis se explicará en mayor profundidad la teoría de la Formulación Finita.

Se ha de destacar la experiencia previa del Departamento de Ingeniería Eléctrica en la aplicación de la Formulación Finita a problemas electromagnéticos (Monzón-Verona, et al., October, 2010) y (Rodríguez, Julio, 2015)

2.5 Transferencia de calor en las máquinas eléctricas

Las máquinas eléctricas funcionando producen y transmiten calor. Las fuentes de calor en las mismas son las corrientes eléctricas, tanto las provocadas por fuentes eléctricas externas circulando por los conductores, como las corrientes inducidas por los fenómenos electromagnéticos que se desarrollan en la máquina. También son fuentes de calor los fenómenos de histéresis magnética y las fricciones mecánicas que se producen en las partes móviles de la máquina.

El estudio del calor producido en las máquinas eléctricas es crucial, no sólo para su funcionamiento, sino para un diseño óptimo de las mismas. Hoy en día dicho estudio térmico está en auge, pues fenómenos no previstos, han aparecido con las técnicas de regulación y control electrónico aplicadas a las máquinas eléctricas. Hasta la aparición de la Electrónica de Potencia en estado sólido con alta velocidad de conmutación, la variación de la frecuencia de la corriente de alimentación de la máquina eléctrica constituía, en sí misma, un auténtico reto tecnológico. En su diseño, tradicionalmente sólo se previeron fenómenos electromagnéticos de muy baja frecuencia, de unos pocos centenares de hercios, múltiplos de la frecuencia fundamental (50 Hz en modelos tipo europeo. y 60 Hz en modelos tipo americano).

Al aplicarse corrientes con frecuencias variables para el control de velocidad rotórica, comenzaron a aparecer fenómenos de relativa alta frecuencia, de varios millares de hercios, que dan lugar a fenómenos electromagnéticos y mecánicos no previstos y no deseados, bajo un diseño de máquinas eléctricas clásico.

De otra parte, al controlar la velocidad rotórica de la máquina, y siendo la intención de disminuir dicha velocidad, se logra a la vez disminuir el flujo de aire frío que recorre el interior de la misma, como es el caso de las máquinas autoventiladas (máquinas que poseen ventiladores solidarios al eje del rotor). La disminución de la velocidad del flujo de aire hace que se empeore su ventilación, con el consiguiente aumento de temperatura interna.

Así mismo, al variar la frecuencia, los fenómenos dependientes de ella varían (histéresis magnéticas y corrientes inducidas), así como las impedancias. Las variaciones de las impedancias darán lugar a una modificación del sistema de corrientes que rigen en la máquina. Un aumento de estas corrientes repercutirá en un aumento de calor por efecto Joule.

Todos estos fenómenos llevan conjuntamente a lo mismo: a un aumento de la temperatura de la máquina eléctrica.

Tal como se observa, existe un acoplamiento entre distintos fenómenos físicos que se dan en la máquina eléctrica. No solamente ésta presenta dichos acoplamientos, sino que se dan en multitud de procesos. Es por todo esto que ha aparecido una nueva corriente en la Física llamada Multifísica, donde se estudian acoplamientos electromagnéticos, térmicos, mecánicos, de fluidos, elásticos, etcétera.

En el caso particular de las máquinas eléctricas, la Multifísica estudiaría los acoplamientos de fenómenos tales como: electromagnetismo-transferencia de calor, electromagnetismo-mecánica y electromagnetismo-transferencia de calor-mecánica-fluidodinámica.

Quizás este último acoplamiento sea el más complejo pues trataría de estudiar el par electromagnético que da origen al movimiento mecánico en la máquina eléctrica rotativa. Así mismo, este movimiento mecánico, junto con los fenómenos de histéresis y corrientes inducidas, daría lugar a la aparición de campos de temperatura, los cuales trataríamos de regular (refrigerar) haciendo uso de la transferencia de calor (ventilación o autoventilación, así como aletas de refrigeración). Todos estos sistemas de refrigeración conllevan la circulación de un fluido, normalmente aire.

La complejidad matemática que tiene el acoplamiento electromagnetismo-transferencia de calor-mecánica-fluidodinámica es motivadora de análisis y desarrollo tanto a nivel computacional como a nivel de diseño y desarrollo (Yatchev, 2003), (Bullo, et al., 2006), (Bullo, et al., 2007) y (Boglietti, et al., 2009).

Merece una lectura detallada el artículo de Lavers (Lavers, 2008) sobre el estado del arte de los procesos de inducción, que son también afines al estudio que nos atañe: calor generado por corrientes inducidas en máquinas eléctricas. También es meritorio leer el pequeño artículo de Pantelyat (Pantelyat, 2013) donde se resume muy bien esta parte de la Multifísica

Ciñéndose estrictamente al estudio del calor generado por las corrientes inducidas, la parte más involucrada de la física sería el electromagnetismo y la transferencia de calor: ley de inducción de Faraday, ley de Gauss para el campo magnético, ley de Ohm, ecuación de continuidad del campo magnético y la ecuación de Fourier de transferencia de calor.

El objetivo es encontrar el valor de las densidades de las corrientes inducidas (\vec{J}), pues con ellas se puede obtener el calor producido por las mismas. Una vez obtenido dicho calor, se introduce este valor en la ecuación de Fourier de transferencia de calor y, resolviendo dicha ecuación diferencial, se obtiene la distribución de temperatura en la máquina objeto de análisis. Siendo las temperaturas las incógnitas de dicha ecuación.

Este calor se va a transmitir por toda la máquina, y de ésta al exterior, de tres formas diferentes: por conducción, por convección y por radiación.

En las máquinas eléctricas, la conducción del calor se establece entre el medio conductor eléctrico (fundamentalmente los cables de los devanados, de cobre o aluminio) y otro medio, no tan buen conductor eléctrico, como es el núcleo ferromagnético. Las corrientes productoras de este calor, generado en los conductores, provienen de fuentes externas o de corrientes inducidas en dichos cables. Este calor producido se conoce como efecto Joule. Además, en los núcleos ferromagnéticos se inducen corrientes que también van a generar calor. Estas corrientes, que circulan por los núcleos, se conocen como corrientes parásitas, corriente de Foucault o corrientes eddy, según sea el autor de que se trate. El calor producido por ambos fenómenos se trasmite por los sólidos, conductores y núcleos, mediante la ley de conducción del calor de Fourier. Esto se produce tanto en el estator como en el rotor. El calor conducido llega a los bordes exteriores de ambos y, mediante el paso de un flujo de aire frío, se trasmite por convección al exterior. El aire, ahora caliente, es impulsado por un ventilador hacia el exterior, sucediéndose una nueva renovación de aire frío. En la parte externa de la máquina, donde las corrientes de aire son menores, el calor se evacua por radiación, haciendo uso de aletas de disipación.

A nivel computacional, el mayor problema que presenta la simulación del acoplamiento electromagnético-térmico es la elección de los intervalos de tiempo. Se debe a que los fenómenos electromagnéticos se producen en intervalos mucho más corto de tiempo que los fenómenos térmicos. Para llevar a cabo la simulación de tal acoplamiento, también llamada co-simulación electromagnética-térmica, existen diversos métodos. Todos ellos consisten en utilizar diferentes escalas de tiempo, la más corta para la simulación electromagnética y la más larga para la simulación térmica. Uno de estos métodos es el de *Método de la potencia media y la temperatura* (Kaufmann, et al., 2014).

2.6 La máquina eléctrica de inducción o asíncrona

La pregunta a formular es simple: ¿Hay algo más que investigar en las máquinas eléctricas de inducción o asíncronas? Quizás la respuesta se pueda encontrar en un sumario del estado del arte referente a máquinas eléctricas, que se encuentra en los artículos de (Capolino & Cavagnino, 2014A) y (Capolino & Cavagnino, 2014B) y en otro exhaustivo memorándum como es el de Gieras (Gieras & Gieras, 2001).

Las máquinas asíncronas ocupan más de la mitad del mercado donde se requiere el uso de una máquina eléctrica. Con la aplicación de la Electrónica de Potencia y las técnicas electrónicas de regulación y control, la máquina síncrona ha desplazado a otro tipo de máquinas, en especial a la máquina de corriente continua. Es más, algún tipo de máquina asíncrona, que prácticamente estaba condenada a los museos, ha resurgido con fuerza. Este es el caso de la máquina asíncrona de rotor devanada y su aplicación a la producción de energía eléctrica haciendo uso de las energías renovables. Nos referimos al generador de inducción doblemente alimentado.

En otros campos, la máquina de inducción puede compararse con otras y ser tan o más eficiente que éstas. Tal es el caso de los motores síncronos de imanes permanentes frente a los motores de inducción empleados en aviónica (Capolino & Cavagnino, 2014A), pág. 4282. Además, surgen nuevas soluciones tecnológicas para averías y problemas que aparecen en este tipo de máquinas (Capolino & Cavagnino, 2014B), página 4931 y 4935. Es recomendable leer el artículo de Riera-Guasp (Riera-Guasp, et al., 2015), apdo. 4 de la pág. 1749.

Pero la evolución de otro tipo de máquinas puede afectar al futuro desarrollo o permanencia en el uso industrial de la máquina de inducción, tal como indica Boglietti (Boglietti, et al., 2014), en las pág. 20 y 21.

Por todo esto, merece la pena emplear nuevos métodos de modelado, como puede ser la técnica de la Formulación Finita, para aproximar y mejorar resultados en modelos matemáticos de la máquina de inducción. Todo ello con objeto de tratar de mejorar, optimizar u eliminar dificultades técnicas que aún, a día de hoy, presenta la máquina de inducción.

2.7 Conclusiones

Lo visto anteriormente borra la equívoca imagen de que el estudio de la máquina eléctrica asíncrona es un tema agotado y carente de valor. Nada más lejos de la realidad.

Bibliografía

Bellini, A. y otros, 2006. *Monitoring of Induction Machines currents by high frequency resolution analysis*. Tampa, FL, IEEE, pp. 2320-2325.

Bettini, P. & Trevisan, F., 2003. Electrostatic analysis for plane problems with finite formulation. *Magnetics, IEEE Transactions on*, May, 39(3), pp. 1127-1130.

Boglietti, A. y otros, 2009. Evolution and Modern Approaches for Thermal Analysis of Electrical Machines. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, March, 56(3), pp. 871-882.

Boglietti, A. y otros, 2014. Electrical Machine Topologies: Hottest Topics in the Electrical Machine Research Community. *Industrial Electronics Magazine, IEEE*, June, 8(2), pp. 18-30.

Bommaraju, C., 2009. *Investigating Finite Volume Time Domain Methods in Computational Electromagnetics*, Darmstadt: TU Darmstadt.

Bossavit, A., 1998. On the geometry of electromagnetism: Maxwell's house. *J. Japan Soc. Appl. Electromagn. Mech.*, 6(4), p. pp. 318–326.

Bossavit, A., 2000. Computational electromagnetism and geometry: The "Galerkin hodge". *J. Japan Soc. Appl. Electromagn. Mech.*, 8(2), pp. 203-209.

Bossavit, A., 2005. *Discretization of Electromagnetic Problems: The "Generalized Finite Differences" Approach*. s.l.:Elsevier B.V..

Branin, F. H. (., 1966. The algebraic topological basis for Network analogies and the vector calculus. *Symposium. on Generalized Networks*, April.pp. 453-487.

Bullo, M., D'Ambrosio, V., Dughiero, F. & Guarnieri, M., 2006. Coupled electrical and thermal transient conduction problems with a quadratic interpolation cell method approach. *Magnetics, IEEE Transactions on*, April, 42(4), pp. 1003-1006.

Bullo, M., D'Ambrosio, V., Dughiero, F. & Guarnieri, M., 2007. A 3-D Cell Method Formulation for Coupled Electric and Thermal Problems. *Magnetics, IEEE Transactions on*, April, 43(4), pp. 1197-1200.

Capolino, G.-A. & Cavagnino, A., 2014A. New Trends in Electrical Machines Technology; Part I. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, Aug, 61(8), pp. 4281-4285.

Capolino, G.-A. & Cavagnino, A., 2014B. New Trends in Electrical Machines Technology; Part II. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, Sept, 61(9), pp. 4931-4936.

Cheben, P. & Calvo Padilla, M. L., 1998. Teorías de la difracción de ondas electromagnéticas por redes de volumen: Una revisión. *Revista Mexicana de Física*, 44(4), pp. 323-332.

Chen, J. & Wang, J., 2014. A WCS-PSTD Method for Solving Electromagnetic Problems Both With Fine and Electrically Large Structures. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, May, 62(5), pp. 2695-2701.

Fonseca, L. Z., 2011. *El método de los elementos finitos: una introducción*. s.l.:Fondo Editorial Biblioteca Univerisdad Rafael Urdaneta.

Fraile, M. J., 2008. *Máquinas Eléctricas. Sexta edición*. Sexta ed. Madrid: McGraw-Hill/Interamerica de España, S. A. U..

Gieras, J. F. & Gieras, I. A., 2001. *Recent Developements in Electrical Motors and Drives*. Bursa, Turkey, 2nd International Conference on Electrical and Electronics Engineering..

He, Z.-L., Huan, K. & Liang, C.-H., 2012. Hybrid finite difference/finite volume method for 3-d conducting media problems. *Progress In Electromagnetics Research M*, Volumen 24, pp. 85-95.

Hubing, T. H., 1991. Survey of numerical electromagnetic modeling techniques. *ITEM update*, pp. 17-30.

Johns, P. & Beurle, R., 1971. Numerical solution of 2-dimensional scattering problems using a transmission-line matrix. *Electrical Engineers, Proceedings of the Institution of*, September, 118(9), pp. 1203-1208.

Kaufmann, C. y otros, 2014. Efficient simulation of frequency-transient mixed co-simulation of coupled heat-electromagnetic problems. *Math. Ind*, Volumen 4.

Kost, A., 1995. Electromagnetic Aspects of Electrical Machines. *COMPEL: The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, 14(4), pp. 1-20.

Kost, A., 2011. *Review of low and high frequency methods for Computational Electromagnetics*. Wroclaw, Poland, ISBN: 978-1-84919-468-6, pp. 1-1.

Lavers, J. D., 2008. State of the art of numerical modeling for induction processes. *COMPEL. The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, 27(2), pp. 335-349.

Marcusa, D. & Kuczmann, M., 2013. Finite Element Tearing and Interconnecting Method and its Algorithms for Parallel Solution of Magnetic Field Problems. *Electrical, Control and Communication Engineering*, Sep, 3(1), pp. 25-30.

Monzón-Verona, J. M., Santana-Martín, F. J., García-Alonso, S. & Montiel-Nelson, J. A., October, 2010. Electro-Quasistatic Analysis of an Electrostatic Induction Micromotor Using the Cell Method. *Sensors*, 10(10), pp. 9102-9117.

Pantelyat, M. G., 2013. *Coupled Magneto-Thermo-Mechanical Phenomena in Electromagnetic Devices: Main Interactions and their Graphical Representation*. Pilsen, Czech Republic, University of West Bohemia, pp. p. IV-13-IV-14..

Pathak, P. & Kim, Y., 2011. *A uniform geometrical theory of diffraction (UTD) for curved edges illuminated by electromagnetic beams*. Columbus, OH, USA, IEEE, pp. 1-4.

Pellegrini, A., Monorchio, A., Manara, G. & Mittra, R., 2014. A Hybrid Mode Matching-Finite Element Method and Spectral Decomposition Approach for the Analysis of Large Finite Phased Arrays of Waveguides. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, May, 62(5), pp. 2553-2561.

Puche Panadero, R., 2008. *Nuevos métodos de diagnosis de excentricidad y otras asimetrías rotóricas en máquinas eléctricas de inducción a través del análisis de la corriente estatórica (Tesis doctoral)*.. Valencia, España: Universidad Politécnica de Valencia.

Reitich, F. & Tamma, K., 2004. State-of-the-art, trends, and directions in computational electromagnetics. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 5(4), pp. 287-294.

Riera-Guasp, M., Antonino-Daviu, J. & Capolino, G.-A., 2015. Advances in Electrical Machine, Power Electronic, and Drive Condition Monitoring and Fault Detection: State of the Art. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, March, 62(3), pp. 1746-1759.

Rodríguez, L. S., Julio, 2015. *Aportaciones al Método de la Celda en el Diseño y Análisis de un Modelo de Máquina Rotativa Trifásica de Inducción Magnética (Tesis doctoral)*. Universidad de Las Palmas de Gran Canaria ed. Las Palmas de Gran Canaria, España: Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.

Rosero, J. y otros, 2008. *Simulation and Fault Detection of Short Circuit Winding in a Permanent Magnet Synchronous Machine (PMSM) by means of Fourier and Wavelet Transform*. Victoria, BC, IEEE, pp. 411-416.

Rousseau, P., Pathak, P. & Chou, H.-T., 2007. A Time Domain Formulation of the Uniform Geometrical Theory of Diffraction for Scattering From a Smooth Convex Surface. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, June, 55(6), pp. 1522-1534.

- Russer, P., 2000. The transmission line matrix method. En: *Applied Computational Electromagnetics*. Berlín: Springer Berlin Heidelberg, pp. 243-269.
- Russer, P. & Russer, J., 2011. *Transmission Line Matrix (TLM) and network methods applied to electromagnetic field computation*. Alburquerque, New Mexico, USA, IEEE, pp. 1-4.
- Smith, J. R., 1990. *Response Analysis of A. C. Electrical Machines*. s.l.:John Wiley & Sons.
- Sykulski, J. K., 2006. *Field Simulation as an Aid to Machine Design: the State of the Art*. Portoroz, IEEE, pp. 1937-1942.
- Sykulski, J. K., 2007. Modern Design of Electromechanical Devices. *Proceedings of XLIIIrd International Symposium on Electrical Machines SME 2007, 2 -5 July, Poznan, Poland*.
- Tonti, E., 1995. On the geometrical structure of electromagnetism. *Gravitation, Electromagnetism and Geometrical Structures, for the 80th birthday of A. Lichnerowicz*, pp. 281-308.
- Tonti, E., 2000A. *Formulazione finita dell'elettromagnetismo*, Udine, Italia: Università degli Studi di Udine.
- Tonti, E., 2000B. *Formulazione Finita dell'Elettromagnetismo partendo dai fatti sperimentali*. Udine, Italia, Università degli Studi di Udine.
- Tonti, E., 2000. Formulazione finita delle equazioni di campo: Il Metodo delle Celle. *Atti del XIII Convegno Italiano di Meccanica Computazionale, Brescia, Italy, Novembre*.
- Tonti, E., 2001A. Finite formulation of the electromagnetic field. *Progress in Electromagnetics Research*, Volumen 32, pp. 1-44.
- Tonti, E., 2001B. A direct discrete formulation of field laws: The cell method. *CMES- Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 2(2), pp. 237-258.
- Tonti, E., 2002. Finite formulation of electromagnetic field. *IEEE Transactions on Magnetics*, 38(2), pp. 333-336.
- Tonti, E., 2013. *The Mathematical Structure of Classical and Relativistic Physics*. first ed. London, UK: Birkhäuser.
- Trowbridge, C. & Sykulski, J., 2006. Some key developments in computational electromagnetics and their attribution. *IEEE Transactions on Magnetics*, 42(4), pp. 503-508.

Vouvakis, M. N., 2005. *A non-conformal domain decomposition method for solving large electromagnetic wave problems*, Ohio, USA: The Ohio State University.

Weiland, T., 2002. Advances in FIT/FDTD modeling. *Proc. 18th Ann. Rev. Progr. Appl. Computat. Electromagn*, pp. 1-1.

Weiland, T., 2003. *RF Microwave Simulators-From Component to System Design*. Darmstadt, Germany , Microwave Conference, 2003. 33rd European, pp. 591-596.

Yatchev, I., 2003. Coupled field problems in electrical apparatus. *FACTA UNIVERSITATIS, Series: Mechanics, Automatic Control and Robotics*, 3(15), pp. 1089-1101.

Yee, K. S. & Chen, J. S., 1997. The finite-difference time-domain (FDTD) and the finite-volume time-domain (FVTD) methods in solving Maxwell's equations. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 45(3), pp. 354-363.

Zienkiewicz, O. C. y otros, 1993. *EL Método de los Elementos Finitos. Cuarta Edición. Volumen1: Formulación básica y problemas lineales*. 4 ed. Barcelona: CIMNE.

CAPITULO 3

Las ecuaciones electromagnéticas y térmicas en la Formulación Finita

Índice	<u>PÁG.</u>
3. Las ecuaciones electromagnéticas y térmicas en la Formulación Finita	31
3.1 Introducción	31
3.2 Planteamiento del problema físico en la Formulación Finita	37
3.3 Principios asociados a la Formulación Finita	38
3.4 Ecuaciones topológicas del electromagnetismo en su forma global	39
3.4.1 Ley de Gauss para el campo eléctrico	40
3.4.2 Ley de Gauss para el campo magnético	41
3.4.3 Ley de Faraday-Lenz-Neumann.	42
3.4.4 Ley de Ampere-Maxwell	42
3.5 Ecuaciones constitutivas electromagnéticas	43
3.6 Diagrama de Tonti del Electromagnetismo	45
3.7 Ecuaciones térmicas en las máquinas eléctricas. Aplicación de la Formulación Finita	45
3.7.1 Parámetros electromagnéticos y térmicos dependientes de la temperatura.....	46
3.7.2 Pérdidas por efecto Joule	47
3.7.3 Pérdidas en los dieléctricos	48
3.7.4 Pérdidas en el hierro.....	49
3.7.5 Pérdidas mecánicas	52
3.8 Procesos de transmisión de calor y materia en las máquinas asíncronas	53
3.8.1 Transmisión del calor por conducción.....	54
3.8.2 Transmisión del calor por convección	56
3.8.3 Transmisión del calor por radiación	57
3.9 La transferencia de calor por conducción en la Formulación Finita	57
3.10 Ecuaciones topológicas de la transferencia de calor	58
3.11 Ecuaciones constitutivas de la transferencia de calor	58
3.12 Conclusiones	59

Síntesis

La Formulación Finita es una nueva filosofía de interpretar la Física. Es un reordenamiento y clasificación de variables y operaciones a llevar a cabo en la resolución de un problema físico. Sus tres pilares fundamentales son la Geometría, el Álgebra Topológica y la clasificación de las variables físicas.

$$\psi[t, \partial\tilde{V}] = Q^c[t, \tilde{V}]$$

Formulación Finita:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_V$$

Formulación Diferencial:

$$\int_{\partial\tilde{V}} \vec{D} \cdot \vec{n} dS = \int_{\tilde{V}} \rho_V dV$$

Formulación Integral:

3. Las ecuaciones electromagnéticas y térmicas en la Formulación Finita

3.1 Introducción

La Formulación Finita es una nueva filosofía de interpretar la Física. La Formulación Finita es un reordenamiento y clasificación de variables y operaciones a llevar a cabo en la resolución de un problema físico. Aunque inicialmente fue planteada para la física discreta, se puede plantear, en su filosofía y en algunos de sus aspectos, al dominio continuo.

Los tres pilares fundamentales de la Formulación Finita son la Geometría, el Álgebra Topológica y la clasificación de las variables físicas.

El concepto de “*finita*” se debe a que está asociado al dominio discreto.

Inicialmente desarrollada por Enzo Tonti (Tonti, 1995), (Tonti, 2000a), (Tonti, 2000b), (Tonti, 2000c), (Tonti, 2001a), (Tonti, 2002a), (Tonti, 2002b), (Tonti, 2013). La Formulación Finita es aplicable a cualquier campo, escalar o vectorial, referido a cualquier fenómeno físico, al contrario que la Integración Finita (Weiland, 2001), que está restringida al campo electromagnético.

La esencia del método de la Formulación Finita es pasar directamente de la formulación directa de las leyes de campo a un sistema de ecuaciones algebraicas sin hacer uso de la formulación diferencial (Tonti, 2001a), (Tonti, 2013) pág. 18.

En la Formulación Finita, la identificación y definición de las cantidades físicas son las siguientes:

Constante física. Son todas las constantes que describen la naturaleza de un sistema o un material. Se incluyen las constantes universales, los parámetros de un sistema, las constantes de acoplamiento, etcétera (Tonti, 2001a), (Tonti, 2013) pág. 96.

Variable física. Especifica un estado particular del sistema, las fuerzas actuantes en él, las fuentes de campo, los diferentes tipos de energía del sistema, la energía interna del sistema, la energía potencial o cinética del mismo, su entalpía, etcétera (Tonti, 2001a), (Tonti, 2013) pág. 97-99.

Variables globales. Las variables globales o variables integrales son la masa, el momento, la energía, el flujo magnético, el impulso de tensión. Se obtiene mediante integración. En el caso particular del campo electromagnético se da el siguiente paralelismo entre variables (Tonti, 1995), (Tonti, 2000c), (Tonti, 2002b):

Método diferencial:	ρ	\vec{J}	\vec{B}	\vec{D}	\vec{E}	\vec{H}
Variable global correspondiente:	Q^c	Q^f	ϕ	ψ	ε	F_m

Por ejemplo:

$$Q^c = \int_V \rho \cdot dV \quad ; \quad \phi = \int_S \vec{\beta} \cdot d\vec{S} \quad ; \quad F_m = \int_L \vec{H} \cdot d\vec{L} \quad \text{Ec. 3.1}$$

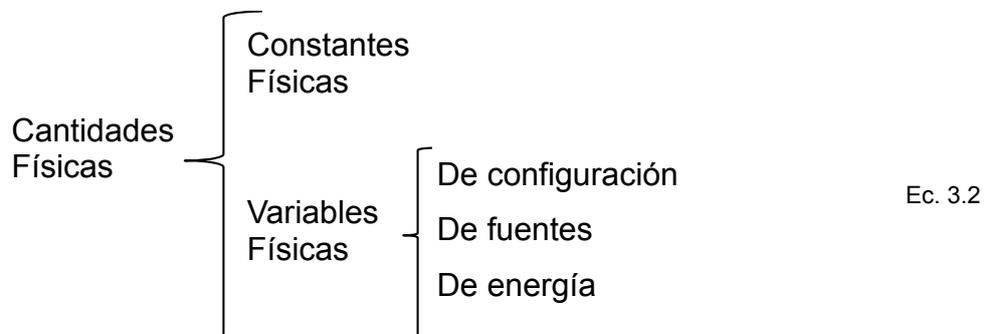
Las variables globales están asociadas con elementos geométricos y temporales como el punto (**P**), la línea (**L**), la superficie (**S**), el volumen (**V**), el instante de tiempo (**t**) y el intervalo de tiempo (**T**). Así, el flujo está asociado a una superficie, la diferencia de potencial está asociada a una línea, la carga eléctrica está asociada a un volumen, un impulso de voltaje está asociado a un intervalo de tiempo, etcétera (Tonti, 2001a), (Tonti, 2013) pág.106-112.

Variables locales. Son aquellas variables dependientes de coordenadas espaciales y temporales, estando vinculadas a una formulación diferencial. Variables locales son la temperatura, la densidad de corriente eléctrica, el vector inducción magnética, etcétera (Tonti, 2001a), (Tonti, 2013) pág. 99.

Variables de fuentes. Describen las fuentes de campo eléctrico, corrientes eléctricas, etcétera. Las variables de fuentes están ligadas a operaciones como la suma, la integración, la derivación, división por una longitud, o un área, o un volumen, o un intervalo y por derivadas con respecto al espacio y al tiempo (Tonti, 2001a), (Tonti, 2013) pág. 100-101.

Variables de configuración. Son aquella que configuran el sistema físico y todas las variables vinculadas a dicho sistema. Esta configuración se realiza mediante operaciones como la suma, la integración, la derivación, la división por una longitud, o un área y por derivación en el espacio y el tiempo (Tonti, 2001a), (Tonti, 2013) pág. 101-102.

Variables de energía. Son obtenidas mediante el producto de una variable fuente por una variable de configuración. Variables de energía pueden ser la energía cinética, potencial, interna, la entalpía, la energía de campo, el trabajo, la potencia, etcétera (Tonti, 2001a), (Tonti, 2013) pág. 102-103.



En la Formulación Finita cada elemento espacial tiene un dual y una orientación. Todos los elementos espaciales deben estar orientados, existiendo dos tipos de orientaciones:

Orientación interna. Los elementos espaciales están orientados sobre sí mismo. Se considera orientación positiva a aquella que se dirige sobre el elemento espacial.

Orientación externa. Los elementos espaciales se orientan en función de la dimensión donde están situados.

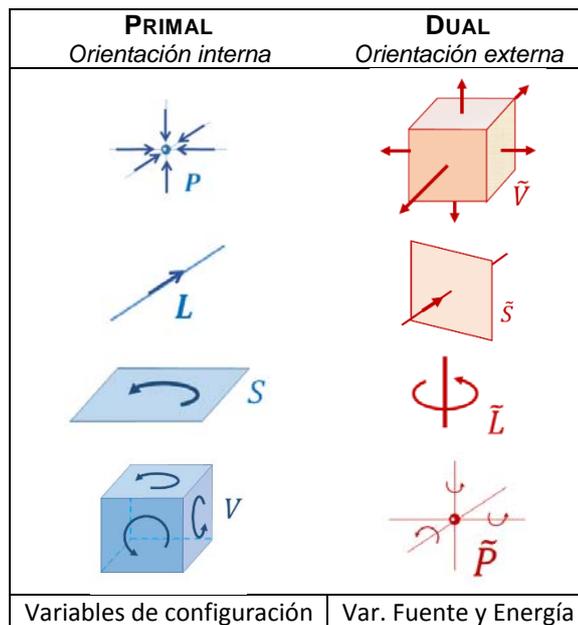


Figura 3-1 Primal y dual con orientación interna y externa.

En la Formulación Finita, al igual que se orienta el espacio, también se orienta el tiempo. El tiempo tiene instantes (t, \tilde{t}) e intervalos de tiempo (T, \tilde{T}).

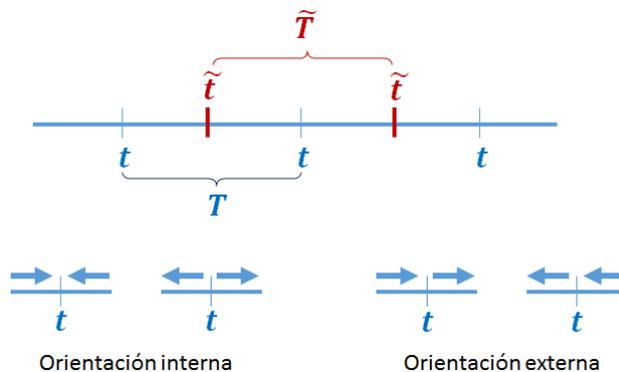


Figura 3-2 Orientación del tiempo en la Formulación Finita.

La celda. Llamada también simplex, simplejo en la versión hispanoamericana del español, es el elemento fundamental de la Formulación Finita. La

formulación diferencial está asociada a un sistema de coordenadas espaciales y temporales, mientras que la Formulación Finita está asociada a tramos finitos del espacio y del tiempo. La Formulación Finita consta de variables globales vinculadas a dichos tramos. Estos son el punto, la línea, la superficie, el volumen, el instante y el intervalo de tiempo.

Acudiendo al Álgebra Topológica, ésta utiliza los llamados complejos de celdas. Son figuras geométricas que pueden poseer vértices, aristas, caras y volúmenes. La celda puede tener dimensión cero (0-simplex), que equivale a un punto, nudo o vértice; dimensión uno (1-simplex), que equivale a un segmento o arista; dimensión dos (2-simplex), que equivale a una superficie o cara; y dimensión tres (3-simplex), que equivale a un volumen.

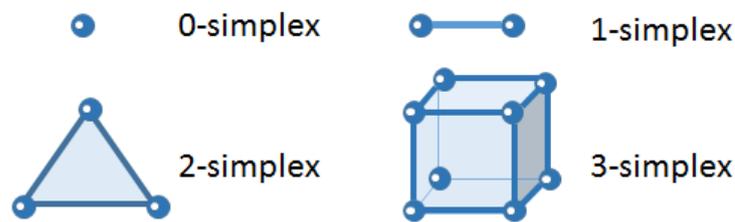


Figura 3-3 Complejo simplicial.

La Formulación Finita, al igual que la Integración Finita, posee un espacio primal y su respectivo dual. El espacio dual se construye a partir de los baricentros del primal. Para obtener el espacio dual se puede utilizar una división tipo Voronoi, pero debido a ciertos problemas que se pueden dar en las fronteras del recinto a discretizar (circuncentros fuera de la frontera), en esta tesis se opta por utilizar el método de los baricentros. A cada 1-simplex primal le corresponde un 1-simplex dual, siendo ortogonales entre sí. Al igual sucede con los 2-simples y 3-simplex.

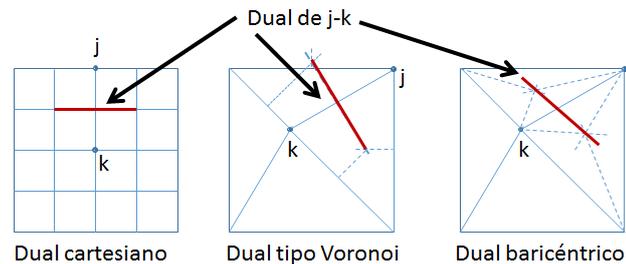


Figura 3-4 Dual cartesiano, tipo Voronoi y baricéntrico.

Cualquier figura geométrica puede ser espacio primal y dual en dos o tres dimensiones. Por ejemplo: líneas, triángulos, cuadrados, tetraedros, hexaedros, etcétera. Es habitual utilizar triángulos en dos dimensiones y tetraedros en tres dimensiones para estudiar cuerpos curvos, tal como son las máquinas eléctricas.

En la Formulación Finita se puede sustituir el concepto clásico de mallado (en inglés *mesh*) por el de celda (*cell-complex*) (Tonti, 2001a). La celda con orientación interna será la celda primal y la celda obtenida por la unión de baricentros será la celda dual, que tendrá orientación externa (Tonti, 2001a), (Tonti, 2013) pág.69-75.

Las variables globales y la celda. Un requisito fundamental de la Formulación Finita es conocer en profundidad el fenómeno físico que se quiere modelar. Las variables físicas están asociadas a elementos geométricos. En cada campo físico a estudiar se determinará el tipo de variable. En esta tesis se estudiarán los diferentes campos físicos que afectan a las máquinas eléctricas asíncronas en sus comportamientos electromagnético y térmico. Como regla general se tendrá en cuenta que: “*Las variables fuentes irán en la celda dual con orientación externa y las variables de configuración irán en la celda primal con orientación interna*”.

Campo térmico. Las variables globales son la energía interna y la fuente de calor, asociadas a la celda dual. Los flujos de calor discurren por las caras de la celda dual. La temperatura es medida en el vértice o nodo de la celda primal, o 0-simplex primal. La diferencia de temperatura se mide entre dos nudos primales equivalentes a dos baricentros duales. La línea que une estos dos baricentros constituye la arista de la celda primal o 1-simplex primal. Como regla para el campo térmico: “*La fuente de calor y el flujo de calor se sitúan en la celda dual. La temperatura en un punto primal y la diferencia de temperatura en una línea primal*”.

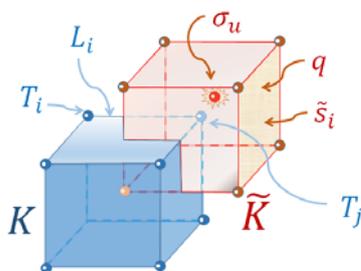


Figura 3-5. Campo térmico.

En la Figura 3-5, T_i y T_j son las temperaturas en los nudos i y j del primal. La diferencia de temperatura entre i y j se mide en la arista primal L_i . La fuente de calor σ_u se sitúa en la celda dual \tilde{K} . El flujo de calor q atraviesa la cara dual \tilde{s}_i .

Campo eléctrico. Las variables globales son el contenido de carga eléctrica y el flujo eléctrico. Están asociadas a la celda dual y orientación saliente. El flujo eléctrico discurre por las caras de la celda dual. El potencial eléctrico se mide en el baricentro de la celda dual. Dicho baricentro es el vértice o nodo de la celda primal, o un 0-simplex primal. La diferencia de potencial eléctrico o tensión se mide entre dos nudos primales equivalentes a dos baricentros duales. La línea que une estos dos baricentros constituye la arista de la celda primal o, de

otra manera, 1-simplex primal. Como regla para el campo eléctrico: “El contenido de carga y el flujo eléctrico se sitúan en la celda dual. El potencial eléctrico en un punto primal y la diferencia de potencial o tensión se sitúa en las aristas de la celda primal”.

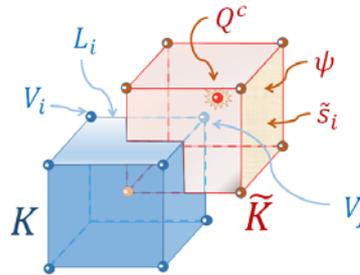


Figura 3-6. Campo eléctrico.

En la Figura 3-6, V_i y V_j son potenciales eléctricos en los nudos i y j del primal. La diferencia de potencial, o tensión U_{ij} entre V_i y V_j , se mide en la arista primal L_i . El contenido de carga eléctrica Q^c está situado en la celda dual \tilde{K} . El flujo eléctrico ψ atraviesa la cara dual \tilde{s}_i .

Campo magnético. Para entender el campo magnético en la Formulación Finita hay que tener en cuenta el siguiente fenómeno físico. “La circulación de cargas eléctricas, o corriente eléctrica, da lugar a la aparición de campo magnético en el espacio circundante a dicha circulación”.

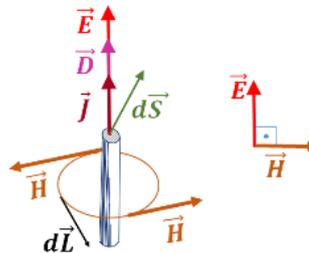


Figura 3-7 Campo eléctrico ortogonal al magnético (material isótropo).

La fuerza magnetomotriz corresponde a la circulación del vector de campo magnético \vec{H} a lo largo de la trayectoria L . Por lo tanto, aplicando la ley de Ampere:

$$F_m = \int_L \vec{H} \cdot d\vec{L} = \sum_{k=1}^n I_k \quad \text{Ec. 3.3}$$

Pero la intensidad en cualquier conductor k se obtiene de la integración de la densidad de corriente J de dicho conductor en su sección transversal S .

$$I_k = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad \text{Ec. 3.4}$$

Pasando de la formulación diferencial a la Formulación Finita, cualquier carga eléctrica está contenida en un espacio dual.

La corriente eléctrica y la densidad de corriente eléctrica representan flujos de carga eléctrica atravesando la cara de la celda dual. Por lo tanto, la circulación del campo magnético estaría circunscrita a la circulación de dicho campo magnético en las aristas que delimitan dicha cara. Es decir, en el contorno $\partial\tilde{S}$, siguiendo la analogía de la ley de Ampere.

$$F_m[\partial\tilde{S}] = I[\tilde{S}] \tag{Ec. 3.5}$$

Por otro lado, baste recordar que el flujo magnético se relaciona con la intensidad de campo magnético de la siguiente manera:

$$\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S \mu \cdot \vec{H} \cdot d\vec{S} \tag{Ec. 3.6}$$

Para poder definir el campo magnético en la Formulación Finita, según se observa en la Figura 3-8.

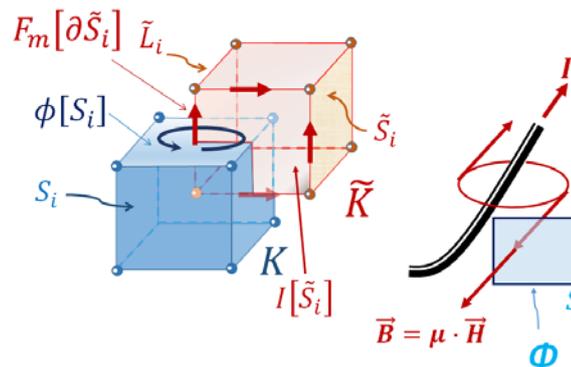


Figura 3-8 El campo magnético en la Formulación Finita.

Así, el flujo magnético $\phi[S]$ es una magnitud asociada a las caras primales, siendo una variable de configuración.

Mientras, la fuerza magnetomotriz $F_m[\partial\tilde{S}]$ está asociada a las aristas del dual, siendo una variable fuente, (Tonti, 2000a), (Tonti, 2000c).

3.2 Planteamiento del problema físico en la Formulación Finita

Para resolver cualquier problema físico, vinculado a un campo escalar o vectorial, mediante cantidades discretas, siendo la Formulación Finita un método más de resolución tal como explica Tonti en (Tonti, 2001a), (Tonti, 2013) pág. 273, se parte de alguna de las siguientes premisas:

- Se conoce la forma y dimensiones del problema.
- Se conoce la distribución espacial y temporal del campo.
- Se conoce la naturaleza de los materiales del dominio del campo.
- Se conocen las condiciones de contorno que afectan a las fuentes externas al dominio del campo.

El objetivo es obtener la configuración espacial y temporal del campo. La ecuación fundamental del campo trata de relacionar la fuente con el potencial de dicho campo. La ecuación fundamental de campo se obtiene al relacionar ecuaciones de campo con ecuaciones constitutivas. Las ecuaciones de campo relacionan variables de configuración entre sí, así como también variables fuente entre sí. Las ecuaciones constitutivas relacionan las variables fuentes con las variables de configuración. Ver (Tonti, 2001a) y (Tonti, 2013) pág. 8.

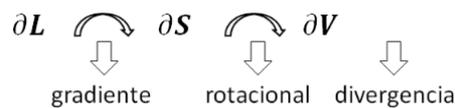


Figura 3-9 Proceso de co-contorno (*coboundary process*).

3.3 Principios asociados a la Formulación Finita

Tonti establece dos principios fundamentales asociados a la Formulación Finita (Tonti, 2002a). A saber:

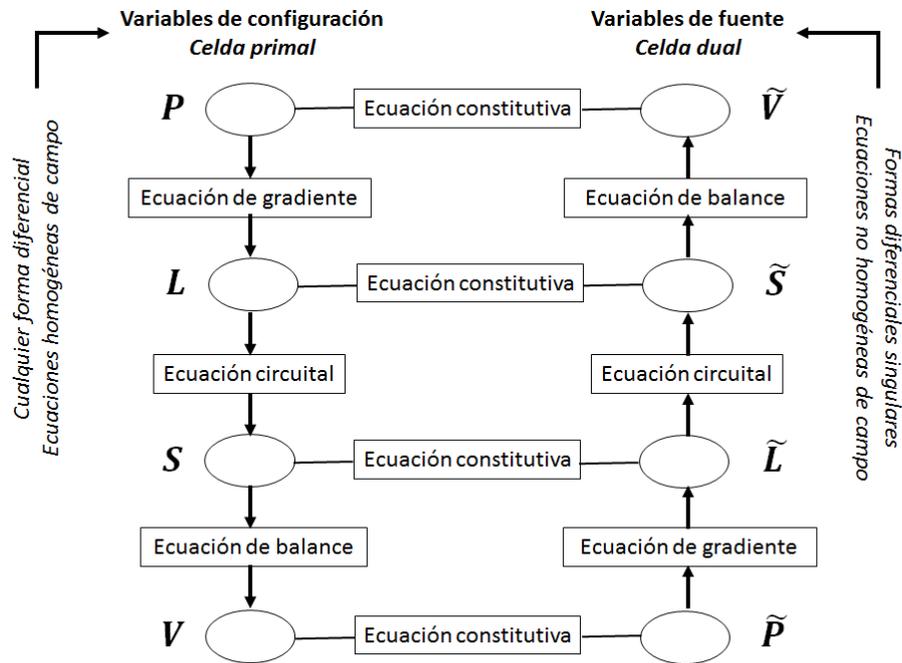
Primer Principio: “En cualquier teoría física las variables globales de configuración están asociadas a elementos de espacio y tiempo con orientación interna, mientras que las variables globales de fuente están asociadas a elementos de espacio y tiempo con orientación externa”

Segundo principio: “En cualquier teoría física, existen leyes físicas que enlazan elementos espacio-temporales orientados con otros referidos a su contorno orientado”

Las afirmaciones de Tonti se corroboran en la Topología Algebraica y, sobre todo, en el Cálculo Diferencial Exterior. Consecuencia de ello será la obtención de operadores discretos que permiten establecer relaciones entre elementos espacio-temporales siguiendo los principios anteriormente expuestos.

Observando la Figura 3-10 se explica el procedimiento para obtener la configuración espacial y temporal del campo a estudiar. Existe una relación con elementos geométricos de la celda y una perfecta dualidad en dicho procedimiento. En realidad se representan ecuaciones topológicas que

establecen las relaciones entre los elementos espacio-temporales, independientemente de su métrica.



The Mathematical Structure of Classical and Relativistic Physics, Enzo Tonti, Birkhäuser, ISBN 978-1-4614-7421-0, pág. 8

Figura 3-10 Configuración espacial del campo.

En Álgebra Topológica, a este tipo de procedimientos se le conoce con el nombre de co-contorno (*coboundary process*) A través de estos procesos se desarrollan las operaciones de gradiente, rotacional y divergencia, tanto en forma continua como discreta. Ver

Figura 3-9.

3.4 Ecuaciones topológicas del electromagnetismo en su forma global

Las ecuaciones topológicas que se van a utilizar en el estudio de la máquina eléctrica asíncrona son las referidas al electromagnetismo. En especial electrodinámica.

Es de destacar que para ciertos estudios relacionados con la rigidez dieléctrica de los aislamientos eléctricos o para cierto tipo de núcleos ferromagnéticos basados en imanes permanentes, se debe utilizar la electrostática y la magneto estática, respectivamente.

Todo ello, a modo de resumen, se exponen las principales ecuaciones topológicas que rigen el campo electromagnético, desde el punto de vista de la Formulación Finita, en la tabla Tabla 3-1

Variables de configuración Espacio: orientación interna Tiempo: orientación externa	Variables de fuente Espacio: orientación externa Tiempo: orientación interna
Función auxiliar primal (<i>gauge</i>): χ	Producción de carga eléctrica: $Q^p = \int_T \int_{\bar{V}} \sigma dV dt$
Impulso de potencial eléctrico: $\mathcal{V}_e = \int_{\bar{T}} v_e dt$	Contenido de carga eléctrica: $Q^c = \int_{\bar{V}} \rho dV$
Potencial magnético escalar: $a = \int_L \vec{A} \cdot \vec{t} dL$	Flujo de carga eléctrica: $Q^f = \int_T \int_S \vec{j} \vec{n} dS dt$
Impulso de fuerza electromotriz: $\mathcal{E} = \int_T \int_L \vec{E} \vec{t} dL dt$	Flujo eléctrico: $\psi = \int_S \vec{D} \vec{n} dS$
Flujo magnético: $\phi = \int_S \vec{B} \vec{n} dS$	Impulso de fuerza magnetomotriz: $\mathcal{F}_m = \int_T \int_L \vec{H} \vec{t} dL dt$
Flujo de carga magnética: $G^f = \int_{\bar{T}} \int_S \vec{j}_m \vec{n} dS dt$	Sin nombre: $f = \int_L \vec{F}_m \cdot \vec{t} dL$
Contenido de carga magnética: $G^c = \int_V \rho_m dV$	Impulso de potencial magnético: $\mathcal{V}_m = \int_T v_m dt$
Producción de carga magnética: $G^p = \int_{\bar{T}} \int_V \sigma_m dV dt$	Función auxiliar dual (<i>gauge</i>): η
Variables globales. Unidades SI: weber	Variables globales. Unidades SI: culombio

Tabla 3-1. Variables globales electromagnéticas, (Tonti, 2013), pág. 295.

La piedra angular del electromagnetismo son las leyes de Maxwell. A continuación se enuncian dichas leyes desde el punto de vista de la Formulación Finita.

3.4.1 Ley de Gauss para el campo eléctrico

La ley de Gauss para el campo eléctrico demuestra que el flujo de campo eléctrico a través de la superficie cerrada, que envuelve a la distribución de carga eléctrica, es causado por el contenido total de cargas en el interior de dicha superficie cerrada.

La distribución puede ser una distribución volumétrica de cargas eléctricas (ρ_V), una distribución superficial de cargas eléctricas (ρ_S), o una distribución lineal de cargas eléctricas (ρ_L).

De la ley de Gauss para el campo eléctrico se deduce que las líneas de dicho campo son abiertas.

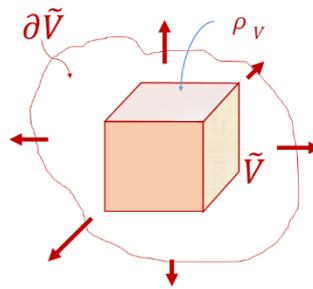


Figura 3-11. Ley de Gauss para el campo eléctrico.

Formulación Finita: $\psi[t, \partial\tilde{V}] = Q^c[t, \tilde{V}]$

Formulación integral: $\int_{\partial\tilde{V}} \vec{D} \cdot \vec{n} dS = \int_{\tilde{V}} \rho_v dV$

Formulación diferencial: $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_v; \quad D = f(x, y, z, t)$

3.4.2 Ley de Gauss para el campo magnético

La ley de Gauss para el campo magnético determina que el flujo que atraviesa la superficie cerrada que contiene al volumen donde está la fuente de campo magnético (V) es de carácter solenoidal. Es decir, el número de líneas de campo entrantes es igual al número de líneas salientes, con lo cual el flujo magnético neto es nulo. De ello se deduce que las líneas de campo magnético son cerradas.

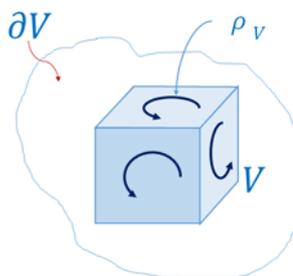


Figura 3-12: Ley de Gauss para el campo magnético.

Formulación Finita: $\phi[\tilde{t}, \partial V] = 0$

Formulación integral: $\int_{\partial V} \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0$

Formulación diferencial: $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0; \quad B = f(x, y, z, t)$

3.4.3 Ley de Faraday-Lenz-Neumann.

Esta ley permite establecer una relación entre campo eléctrico y campo magnético cuando este último campo varía en el tiempo.

Si en la superficie existente en los bordes interiores de un hilo conductor se producen variaciones temporales del campo magnético que atraviesa dicha superficie, entonces, en los extremos de dicho hilo conductor, aparecerá una fuerza electromotriz inducida.

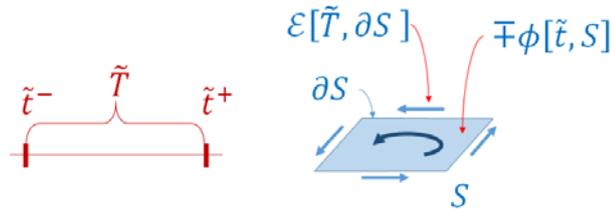


Figura 3-13. Ley de Faraday-Lenz-Neumann.

Formulación Finita: $\mathcal{E}[\tilde{T}, \partial S] = -\{\phi[\tilde{t}^+, S] + \phi[\tilde{t}^-, S]\}$

Formulación integral: $\int_{t^-}^{t^+} \int_{\partial S} (\vec{E} \cdot \vec{t} dl) dt = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS$

Formulación diferencial: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad B = f(x, y, z, t)$

Desde el punto de vista de la Formulación Finita el conductor está situado en el contorno (∂S) de la superficie (S) perteneciente al espacio primal K . dicha superficie (S) está siendo sometida a las variaciones de un flujo magnético (ϕ) en un determinado intervalo de tiempo (\tilde{T}). El intervalo de tiempo es dual pues la fuente creadora de campo magnético son cargas eléctricas en movimiento. Un cambio de sentido del movimiento de dichas cargas eléctricas a través de las superficies duales implicaría un cambio de signo del flujo magnético que atraviesa la superficie primal.

3.4.4 Ley de Ampere-Maxwell

La ley de Ampere-Maxwell relaciona el campo magnético con la circulación de cargas eléctricas por un medio conductor.

Supongamos un conductor por el cual fluyen cargas eléctricas a lo largo del tiempo. Si esto es así, es evidente que existe una determinada producción de cargas eléctricas $Q^f[T, \tilde{S}]$, que se produce en un intervalo de tiempo T . Dichas cargas van a atravesar superficies del espacio dual (variable de fuente). Instante a instante, estas caras duales estarán sometidas a un flujo eléctrico $\psi[t, \tilde{S}]$. Tanto la producción de cargas como la variación del flujo eléctrico justifican la

aparición del campo magnético $\mathcal{F}_m[T, \partial\tilde{S}]$. En la Formulación Finita dicho campo magnético se expresa en forma de impulso de fuerza magnetomotriz \mathcal{F}_m .

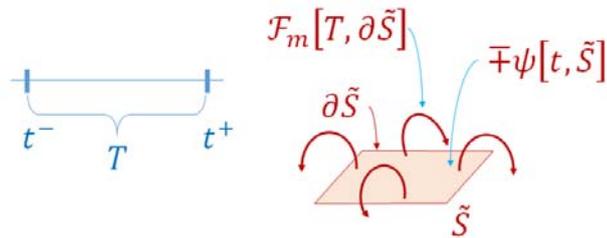


Figura 3-14. Ley de Ampere-Maxwell.

Formulación Finita: $\mathcal{F}_m[T, \partial\tilde{S}] = Q^f[T, \tilde{S}] + \{\psi[t^+, \tilde{S}] - \psi[t^-, \tilde{S}]\}$

Formulación integral: $\int_{\partial\tilde{S}} \vec{H} \cdot \vec{t} \, dl = \int_{\tilde{S}} \vec{j} \cdot \vec{n} \, dS + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tilde{S}} \vec{D} \cdot \vec{n} \, dS$

Formulación diferencial: $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad D = f(x, y, z, t)$

3.5 Ecuaciones constitutivas electromagnéticas

Las ecuaciones constitutivas electromagnéticas son las siguientes:

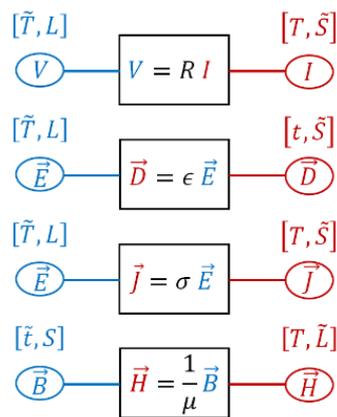


Figura 3-15. Ecuaciones constitutivas electromagnéticas.

Los parámetros R , σ , ϵ , μ van a definir al medio material por donde está discurriendo el campo electromagnético. La naturaleza matemática de dichos parámetros va a depender de cómo se comporte el campo en dicho material (constante, función o tensor).

Medio	Naturaleza matemática de R, σ, ϵ, μ
Isótropo y lineal	Constante
Isótropo y no lineal	Función dependiente: $R = f(\tau); \quad \sigma = f(E)$ $\epsilon = f(E); \quad \mu = f(H)$
Anisótropo, lineal	Tensor: $\sigma^\tau = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$ $\epsilon^\tau = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad \mu^\tau = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{bmatrix}$

Tabla 3-2. Parámetros de las ecuaciones constitutivas electromagnéticas.

En la Tabla 3-2 se explica cómo pueden los mismos parámetros de las ecuaciones constitutivas electromagnéticas adoptar diferente naturaleza matemática, según el tipo de material electromagnético a modelar. Nota: La resistencia eléctrica R es dependiente de la temperatura τ .

Cualquier dispositivo eléctrico, incluyendo las máquinas asíncronas, normalmente tiene un comportamiento no lineal. Por lo engorroso de los cálculos, se suele considerar un comportamiento lineal en ciertos tramos de su funcionamiento (linealización del funcionamiento). Así, lo normal es que los dieléctricos, entre ellos los aislamientos eléctricos de las máquinas, sufran polarizaciones de sus moléculas. Esto puede llevar a un estado de saturación y hacer que su comportamiento sea no lineal. Estos fenómenos son apreciables en máquinas eléctricas de alta tensión. De igual manera, los parámetros que afectarán a las corrientes, R y σ , tiene una notable dependencia de la temperatura, de ahí que, en ciertos rangos de funcionamiento, su comportamiento sea no lineal. Uno de los casos más notables en el funcionamiento de las máquinas eléctricas es la saturación de los núcleos ferromagnéticos. Normalmente, por cuestiones de optimización económica, las máquinas eléctricas se diseñan para trabajar en estado de saturación. La no linealidad del campo magnético en el entrehierro es manifiesta. Y, en el caso de los núcleos ferromagnéticos contruidos con chapas laminadas en frío, se añade la circunstancia del desigual comportamiento del campo magnético según sea la dirección del mismo respecto a la orientación de los dominios magnéticos de la chapa a la hora de ésta laminarse en frío.

El objeto de esta tesis, en el caso de las ecuaciones constitutivas, no es modelar estos fenómenos. Se ha tratado de aplicar una simplificación de la realidad como es la de considerar dichos parámetros como constantes. Es decir, se desarrollan modelos matemáticos lineales de las máquinas, en especial de la máquina eléctrica asíncrona, objeto de estudio de esta tesis.

3.6 Diagrama de Tonti del Electromagnetismo

Los diagramas de Tonti son una forma esquemática de representar un fenómeno físico y sus interacciones utilizando la Formulación Finita. El diagrama de Tonti del electromagnetismo es el siguiente:

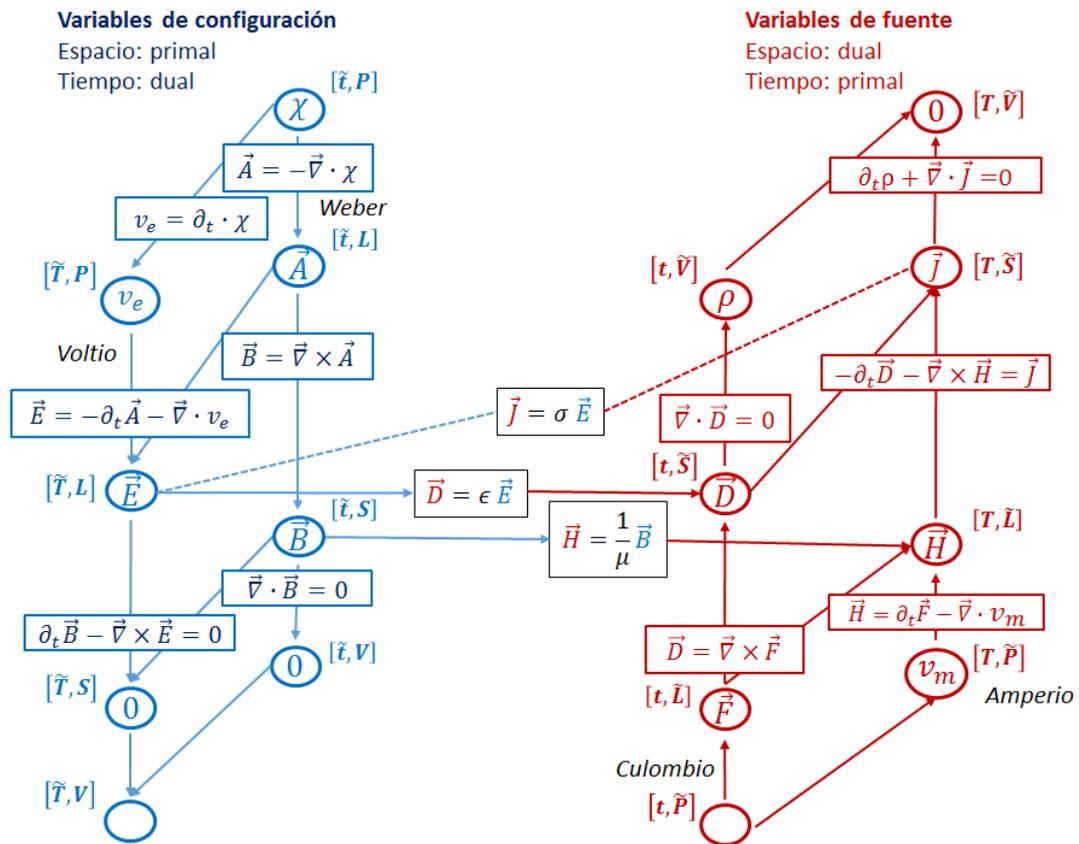


Figura 3-16. Diagrama del electromagnetismo, (Tonti, 2013), pág. 312.

3.7 Ecuaciones térmicas en las máquinas eléctricas. Aplicación de la Formulación Finita

Los procesos de transferencia de calor y materia que se dan en una máquina eléctrica asíncrona se deben a múltiples motivos. A partir de las variables J o I , se pueden obtener algunas de las fuentes de calor de la máquina eléctrica asíncrona. Cabe recordar que las fuentes de calor en una máquina eléctrica son: el calor en los conductores debido al efecto Joule, la histéresis magnética y las corrientes parásitas en los núcleos ferromagnéticos y, por último, cualquier fricción de las partes móviles de la máquina. Nos hemos centrado, por ahora, en el cálculo de las corrientes parásitas, postergando a un futuro inmediato el estudio de las otras dos fuentes de calor: histéresis magnética y fricciones mecánicas. Nuestro interés en el estudio térmico de la máquina radica en la disminución del rendimiento de la misma, el empeoramiento de la transmisión de calor al aumentar el aislamiento eléctrico en los conductores y en las chapas

de los núcleos ferromagnéticos y, en las últimas décadas, la aparición de corrientes de frecuencias muy por encima de los valores de la frecuencia nominal para las que fueron diseñadas. Esto último se debe a la aplicación de los ciclo-convertidores, fundamentalmente usados en el control de velocidad de la máquina.

La importancia del campo térmico en las máquinas eléctricas queda reflejada en la legislación internacional y nacional. Así la Norma UNE 60034-1:2011 hace referencia a los términos de funcionamiento de una máquina eléctrica, según la legislación española. Es de destacar en especial el apdo. 8, donde se detalla el funcionamiento térmico de éstas; así como los ensayos que deben realizarse para que el funcionamiento sea el deseado.

En la norma UNE-EN-60034-11:2005, apdo. 5, pág. 10, Tabla 1 y en el apdo. 6, pág. 11, Tabla 2 muestran los rangos de temperaturas normalizadas dónde deben trabajar las máquinas eléctricas. Este será el marco de referencia, en cuanto a temperatura se refiere, donde se trabajará en esta tesis.

3.7.1 Parámetros electromagnéticos y térmicos dependientes de la temperatura

Son varios los parámetros electromagnéticos y térmicos que dependen de la temperatura. Es decir, sus valores varían al variar la temperatura del medio que los rodea.

Así, la conductividad eléctrica ρ varía en función de cómo varíe la temperatura τ . Una aproximación, de tipo polinomial, puede ser la siguiente:

$$\rho = \rho_{ref} \left[1 (\Delta\tau)^0 + \alpha_{ref} (\Delta\tau)^1 + \beta_{ref} (\Delta\tau)^2 + \gamma_{ref} (\Delta\tau)^3 + \dots \right] \quad \text{Ec. 3.7}$$

Con valores aproximados para el cobre de $\rho_{ref} = 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$; $\alpha_{ref} = 2,3 \cdot 10^{-2} \text{ K}^{-1}$; $\beta_{ref} = 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-2}$; $\gamma_{ref} = 2,9 \cdot 10^{-9} \text{ K}^{-3}$, $\Delta\tau$ es la variación de temperatura, en K. Ver (Chaboudez, et al., 1994), (Dupre, et al., 1998) y (Driesen, 2000).

Existe una proporcionalidad entre la conductividad térmica y la conductividad eléctrica, teniendo esta proporcionalidad un valor aproximado a 2,4 para los metales.

$$\frac{\lambda}{\sigma} \approx 2,4 \propto \tau \quad \text{Ec. 3.8}$$

Las fuentes de calor en las máquinas eléctricas aparecen con ciertos fenómenos físicos que ocurren en el funcionamiento nominal de la máquina, agravándose algunos de ellos cuando el funcionamiento de la máquina es anómalo (cortocircuitos internos, sobretensiones de alimentación, frecuencias eléctricas muy diferentes a la nominal, sobrecarga mecánica, mal funcionamiento de los rodamientos o cojinetes, etcétera).

En la Electrotecnia, a esta producción de energía calorífica se le conoce habitualmente con el nombre genérico de *pérdidas*. Desde un punto de vista estrictamente físico no son pérdidas, sino transformaciones energéticas del tipo electromagnética a térmica, o mecánica a térmica. El término pérdida se acuña en ingeniería electrotécnica porque se trata de una pérdida de la utilidad económica de dicha energía. Esa energía disipada en forma de calor no tiene utilidad económica en la transformación energética que está realizando la máquina.

Las principales pérdidas que se producen en una máquina eléctrica son las siguientes:

- Pérdidas por efecto Joule
- Pérdidas en los dieléctricos
- Pérdidas en el hierro
- Pérdidas mecánicas

3.7.2 Pérdidas por efecto Joule

Las pérdidas por efecto Joule se produce cuando la corriente eléctrica circula por cualquier conductor. Debido a que la mayoría de las corrientes, en funcionamiento nominal, circulan por los devanados de las máquinas, estando éstos habitualmente fabricados con cobre, dichas pérdidas reciben también el nombre de *pérdidas en el cobre*. En esta tesis no se les dará esta denominación porque puede llevar a confusión. No solamente existen conductores fabricados con aluminio, sino que, últimamente se han incorporado nuevos materiales conductores a formar parte de los devanados, previéndose que en un futuro este proceso continúe. De ahí el obviar esta denominación habitual en la electrotecnia.

De una forma genérica, las pérdidas por efecto Joule responden a la siguiente expresión, en forma de fuente de calor (σ_u):

$$\sigma_{u,Jul} = \frac{J_{Total}^2}{\sigma} \quad \text{Ec. 3.9}$$

Donde J_{Total} sería la corriente neta que afecta a toda la máquina en un instante dado y σ la conductividad eléctrica equivalente de la máquina. Es evidente que la corriente puede circular por cualquier material metálico de la máquina, pero eso sería en circunstancias anómalas. En régimen nominal las corrientes circularán por lo que se denominará, de aquí en adelante, dominio conductor de la máquina Ω_c . Entonces, las pérdidas por efecto Joule corresponderían a la siguiente fuente de calor:

$$\sigma_{u,Jul,\Omega_c} = \frac{1}{\Omega_c} \int_{\Omega_c} \frac{J_{Total}^2}{\sigma} d\Omega \quad \text{Ec. 3.10}$$

La densidad de corriente va a depender de la conductividad del conductor y de la tensión aplicada:

$$\sigma_{u,Jul,\Omega_c} = \frac{1}{\Omega_c} \int_{\Omega_c} \sigma \left(V_s + \frac{\partial A}{\partial t} \right)^2 d\Omega \quad \text{Ec. 3.11}$$

V_s sería la tensión aplicada a la máquina, obtenida de una fuente externa. $\frac{\partial A}{\partial t}$ sería la fuerza electromotriz inducida en los conductores creada por las variaciones temporales del campo magnético que está afectando a los mismos.

Para el caso de corrientes eléctricas de frecuencia constante, la expresión Ec. 3.11 se puede desarrollar en variable compleja:

$$\sigma_{u,Jul,\Omega_c} = \frac{1}{\Omega_c} \int_{\Omega_c} \sigma (V_s + j\omega A)(V_s^* - j\omega A^*) d\Omega \quad \text{Ec. 3.12}$$

Como el proceso térmico desarrollado en Ec. 3.12, no va a permanecer estrictamente constante en el tiempo, entonces desarrollando dicha expresión para hacerla depender del tiempo queda como sigue:

$$\sigma_{u,Jul,\Omega_c} = \frac{1}{\Omega_c} \iint_T \sigma \left(V_s + j\omega A + \frac{\partial A}{\partial t} \right) \left(V_s^* - j\omega A^* + \frac{\partial A^*}{\partial t} \right) d\Omega dt \quad \text{Ec. 3.13}$$

Así se comprueba que las pérdidas debidas al efecto Joule van a depender de la naturaleza del conductor (σ), de las tensiones operantes $\left(V_s + j\omega A + \frac{\partial A}{\partial t} \right)$ y del tiempo que dure el proceso (T). Hay otros autores que simplifican al máximo estas expresiones (Popova, et al., 2011). La complejidad de las expresiones que se quieran implementar dependerá de las necesidades del modelo a desarrollar.

3.7.3 Pérdidas en los dieléctricos

Es habitual en los cálculos eléctricos en baja tensión considerar a los aislamientos como dieléctricos perfectos. Pero, a medida que sube la tensión y, además, pudiera subir la frecuencia, comienza un fenómeno de polarización en ciclos de histéresis de las moléculas del aislamiento. En máquinas eléctricas el efecto de la frecuencia no va a ser muy significativo en los dieléctricos debido a los bajos valores de ésta. En cambio, la tensión si va a jugar un papel muy importante en los transformadores, generadores y motores de alta tensión (Driesen, 2000).

A efectos de cálculo electromagnético se suele olvidar, o en el mejor de los casos despreciar el efecto que tiene el campo eléctrico creado por el

desplazamiento (polarización) de las cargas eléctricas (\vec{D}). En esta tesis se considerará despreciable. No obstante se presenta un pequeño apunte para determinar cuánto pudieran representar estas pérdidas.

$$\sigma_{u,die,\Omega_c} = \frac{1}{\Omega_c} \int_{\Omega_c} \omega \epsilon_{Re} \tan(\delta_E) E^2 d\Omega = \frac{1}{\Omega_c} \int_{\Omega_c} \omega \epsilon_{Im} E^2 d\Omega \quad \text{Ec. 3.14}$$

Siendo $\bar{\epsilon} = \epsilon_{Re} + j\epsilon_{Im}$, término que se conoce con el nombre de rigidez dieléctrica compleja. Al término δ_E se le conoce con el nombre de *ángulo de pérdidas*.

En la expresión Ec. 3.14 se comprueba el papel que juega la tensión, representada por el módulo del campo eléctrico (E), la frecuencia (ω) y la naturaleza del dieléctrico [$\tan(\delta_E), \bar{\epsilon}$]. El ángulo de pérdidas representa el retraso que existe ente los fasores \vec{D} y \vec{E} .

3.7.4 Pérdidas en el hierro

Es la disipación de energía calorífica originada por ciertos fenómenos físicos que aparecen en los núcleos de las máquinas eléctricas. Estos fenómenos son los siguientes:

- Pérdidas por histéresis magnética
- Pérdidas por corrientes parásitas

La histéresis magnética en los núcleos puede tener dos orígenes, prevaleciendo uno más que el otro. A saber, la llamada histéresis alternativa aparece por el ciclo de tipo histérico al que se ven sometidos los núcleos cuando varía el campo magnético cíclicamente, aún en los casos donde dicho núcleo no tiene movimiento físico relativo, como pudieran ser los núcleos de los transformadores. La conocida como histéresis rotativa aparece cuando el núcleo ferromagnético de la máquina se ve sometido a movimientos cíclicos, aun con un campo magnético de tipo estacionario (Driesen, 2000).

En el caso de la máquina asíncrona de inducción se dan simultáneamente los dos tipos de histéresis, prevaleciendo la histéresis magnética alternativa sobre la rotativa.

La histéresis magnética consiste en un proceso cíclico de orientación de los dipolos magnéticos del material que está sometido a dicho campo magnético cambiante. A nivel atómico significa una continua vibración mecánica de los spines de los electrones de valencia de los enlaces metálicos. Esto conlleva la producción de calor que medimos de forma macroscópica. Calor, que tal como se ha dicho, en el caso de las máquinas eléctricas, no produce utilidad económica.

Es de destacar que, salvo el caso de los transformadores estáticos, el calor producido por el ciclo de histéresis magnética en las máquinas rotativas se produce de la siguiente manera:

$$\sigma_{u,Hist}^{elip} = \sigma_{u,Hist}^{alt} + \sigma_{u,Hist}^{rot} \quad \text{Ec. 3.15}$$

Esto será importante en la medida que se forma un área que abarca todo el ciclo. A medida que esta aumenta, las pérdidas serán mayores (Driesen, 2000).

Sobre la histéresis magnética se han propuesto multitud de modelos matemáticos para poder calcular sus efectos, en especial el calor generado por ella (Dupre, et al., 1998), (Pruksanubal, et al., 2002). Muchos de estos modelos requieren un alto costo computacional. El concepto de partida es la energía contenida en el área abarcada por el ciclo de histéresis magnética.

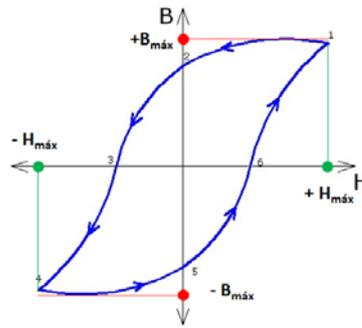


Figura 3-17. Ciclo de histéresis.

En la Figura 3-17, en el ciclo de histéresis, La energía disipada es proporcional al área 1-2-3-4-5-6 de B-H.

Como los núcleos son tridimensionales, entonces la energía será proporcional al volumen de material ferromagnético del núcleo.

$$\sigma_{u,Hist}^{elip} = V \cdot \oint \vec{H} \cdot d\vec{B} \quad \text{Ec. 3.16}$$

Como se observa, cuanto menos volumen de material haya, menos pérdidas por histéresis. Tal reducción no siempre es posible por motivos de diseño de la máquina. La otra solución sería, sin variar los valores de B_{max} , lograr que la superficie del ciclo se redujera. En esto se van a basar los diseñadores de máquinas eléctricas para construirlas, así como los modelos matemáticos que lo expliquen.

Estos modelos matemáticos de la histéresis magnética van desde los más simples como el propuesto por Steinmetz en 1892, para determinar la potencia equivalente:

$$P_H = K_H f B_{máx}^\alpha V \quad \text{Ec. 3.17}$$

O bien como otros autores (Vande Sande, et al., 2004), (Vande Sande, et al., 2004), (Cardelli & Faba, 2014), (Driesen, 2000) del cual destacamos el modelo de reluctividad compleja dependiente de la frecuencia de oscilación del campo magnético armónico:

$$\vec{H} = (\nu e^{j\omega})\vec{B} = (\nu e^{j\theta_B})\vec{B} = \bar{\nu} \vec{B} \quad \text{Ec. 3.18}$$

Que desarrollándose en el modelo propuesto por (Driesen, 2000) se convierte en:

$$\sigma_{u,Hist}^{elip} = \frac{1}{T} \int \left(H B \operatorname{sen}\theta_B H \cos\theta_B \frac{\partial B}{\partial \varphi_B} - H B \operatorname{sen}\theta_B \frac{\partial B}{\partial \varphi_B} \right) dt \quad \text{Ec. 3.19}$$

En esta tesis no se van a estudiar las pérdidas producidas por la histéresis magnética.

Las pérdidas por corrientes parásitas reciben otras denominaciones como pueden ser corrientes de Foucault (escuela francesa) y corrientes eddy (escuela anglosajona). Se utilizarán indistintamente estas denominaciones para referirnos a las mencionadas corrientes.

Quizás la mejor forma de definir estas corrientes sea la de *eddy currents*, pues se traducen aproximadamente como corrientes erráticas o corriente en remolino, definiéndose de forma muy gráfica este fenómeno.

Las corrientes de Foucault se producen en el interior de cualquier material conductor de la electricidad y que esté sometido a un campo magnético alterno. Es por ello que cualquier metal que forma parte de la máquina eléctrica está sometido a este tipo de fenómeno. Estas corrientes se producen también en los conductores, por lo cual no es fácil de distinguirlas respecto de las corrientes producidas por la aplicación de fuentes externas a los mismos.

Las corrientes de Foucault cobran importancia en los núcleos, pues no portan una mejora a la máquina, produciendo, por el contrario, pérdidas en las mismas.

El modelo matemático más sencillo para determinar la potencia calorífica disipada por corrientes de Foucault es el propuesto por Steinmetz:

$$P_F = K_F f^2 B_{m\acute{a}x}^2 a^2 \sigma V \quad \text{Ec. 3.20}$$

Donde a es el área transversal de la chapa aislada que forma parte de los núcleos de las máquinas eléctricas. Si a tendiese a cero, las pérdidas por corrientes de Foucault tenderían a desaparecer. Esto es lo que se intenta al laminar chapas y aislarlas entre sí. Cuanto más delgada es la chapa del núcleo, menos pérdidas de Foucault. Por otro lado, empeorando la conductividad σ del acero ferromagnético, menos corrientes eddy habrá. Es por ello que se le añade

silicio al acero ferromagnético, su tenacidad disminuye, pero también disminuyen las pérdidas por Foucault.

Un modelo propuesto para calcular dichas pérdidas por corrientes de Foucault es el siguiente (Driesen, 2000):

$$\sigma_{u,Fou}^{alt} = \frac{\sigma a^2}{12 T} \int_T \left(\frac{\partial B}{\partial t} \right)^2 dt \quad \text{Ec. 3.21}$$

Si se perdiese el aislamiento entre las chapas, este calor aumentaría, aproximadamente, de la siguiente manera (Driesen, 2000):

$$\sigma_{u,Fou}^{alt} = \frac{\pi^2 \sigma a^2 f^2}{6} B_m^2 \quad \text{Ec. 3.22}$$

Si el campo magnético está distorsionado con respecto a una onda senoidal, su contenido en armónicos contribuiría de la siguiente manera (Driesen, 2000):

$$\sigma_{u,Fou}^{alt} = \frac{\pi^2 \sigma a^2 f^2}{6} \sum_{ha=1}^n h_a^2 B_{máx,ha}^2 \quad \text{Ec. 3.23}$$

Si se consideran las pérdidas de Foucault como pérdidas elípticas (Driesen, 2000), entonces:

$$\sigma_{u,Fou}^{alt} = \frac{\pi^2 \sigma a^2 f^2}{6} \sum_{ha=1}^n h_a^2 (B_{máx,ha}^2 + B_{mín,ha}^2) \quad \text{Ec. 3.24}$$

En esta tesis se estudiarán modelos de conductores donde aparecerán corrientes inducidas. Estos conductores pueden ser devanados de la máquina, sometidos a campo magnético alternativo y conectados a fuentes externas, tanto de tensión como de corriente. Así mismo se estudiarán modelos donde únicamente existirán corrientes de Foucault debidas a campos externos alternativos.

3.7.5 Pérdidas mecánicas

Las pérdidas mecánicas están asociadas a máquinas eléctricas rotativas. Estrictamente las vibraciones de las chapas del núcleo, mayores o menores según el grado de acuñamiento, de los transformadores serían pérdidas mecánicas en dichas máquinas eléctricas. Por su dificultad para separarlas de las pérdidas en el hierro y en los devanados, se consideran incorporadas a ambos.

En las máquinas eléctricas rotativas, las pérdidas mecánicas consisten básicamente en fricciones en las partes móviles. A saber, fricciones de:

- Superficies externas del rotor y ventiladores solidarios al eje.
- Cojinetes de apoyo del eje rotórico con el estator.

El estudio de las pérdidas mecánicas no es objeto de esta tesis.

3.8 Procesos de transmisión de calor y materia en las máquinas asíncronas

Estudiadas las fuentes de calor en las máquinas eléctricas en general y, en la máquina asíncrona en particular, cabe hacerse la pregunta: ¿Qué importancia tiene la producción de calor y su transmisión? La respuesta se ha dado casi de antemano en las normas UNE mencionadas. Se trata de mantener una temperatura dada de funcionamiento. Esto sólo se consigue si hay equilibrio térmico:

$$q_{\text{producido}} = q_{\text{transmitido}} \Rightarrow \text{Temperatura constante} \quad \text{Ec. 3.25}$$

Visto y comprendido el equilibrio térmico, es condición necesaria conocer los mecanismos de transmisión del calor. Los principales mecanismos de transmisión del calor son:

- Conducción
- Convección
- Radiación

Sea cual sea el medio de evacuación del calor, éste será transmitido siempre al ambiente que envuelve a la máquina. Los tres métodos anteriormente funcionan de forma pasiva o natural en la máquina eléctrica. Aún a pesar de esto, el calor generado, sobre todo en el interior de la máquina, en la zona del entrehierro que comparten estator y rotor, es difícil de evacuar. Por todo ello se recurre a la evacuación forzada de este calor. En términos técnicos a esta evacuación del calor generado en el interior de la máquina se le denomina *ventilación forzada*. Para llevarla a término se diseñan las máquinas con un ventilador solidario al eje de la misma. Al girar la máquina, el ventilador impulsa aire fresco desde el exterior al interior de la misma. Cada unidad de aire introducida en la máquina se calienta (evacúa el calor generado) y es desplazada de nuevo al exterior. Este flujo de masa transporta energía calorífica. A este tipo de máquinas se les denomina autoventiladas. Aun así hay regímenes de funcionamiento de la máquina que no permiten la evacuación necesaria de calor mediante el flujo de aire frío por su interior. Es entonces cuando se recurre a ventiladores externos a la máquina que permitan dicha ventilación. Este problema se agudizado con la mala utilización de reguladores de velocidad en máquinas autoventiladas, especialmente en las máquinas asíncronas. El aumento de temperatura fuera

de las condiciones nominales de la máquina por una no adecuada ventilación mientras opera, se conoce con el término de *desclasamiento* de la máquina.

En esta tesis no se ha tenido en cuenta la transferencia de masa que supone el aire impulsado al interior de la máquina asíncrona con objeto de refrigerarla.

3.8.1 Transmisión del calor por conducción

La conducción del calor es la modalidad de transmisión del calor que se ha estudiado en esta tesis. La ecuación que rige la conducción de calor en sólidos en régimen dinámico es la siguiente:

$$\vec{\nabla} \cdot (-\lambda \cdot \vec{\nabla} \tau) + \rho C_p \frac{d\tau}{dt} = \dot{q} \quad \text{Ec. 3.26}$$

Es la llamada ecuación de transmisión del calor de Fourier. Esta ecuación representa un balance de energía calorífica que depende del flujo neto de energía calorífica $\{\vec{\nabla} \cdot (-\lambda \cdot \vec{\nabla} \tau)\}$, la energía calorífica generada $\{\dot{q}\}$ y la energía calorífica almacenada en el material $\{\rho C_p \frac{d\tau}{dt}\}$.

Si se ha alcanzado un régimen estacionario, no habrá variaciones de temperatura, permaneciendo ésta constante. Con lo que la Ec. 3.26 queda como sigue:

$$\vec{\nabla} \cdot (-\lambda \cdot \vec{\nabla} \tau) = \dot{q} \quad \text{Ec. 3.27}$$

Esto indicaría una correcta ventilación si la temperatura τ permanece en el rango de valores normalizado. Caso contrario, pudiera ser que se haya conseguido alcanzar el equilibrio térmico con una temperatura demasiado alta, fuera de norma.

Pudiera ser que nos interesara solamente analizar cómo se trasmite el calor a través de los materiales. Esto es sumamente importante en los aislantes eléctricos, que como tales, suelen ser también buenos aislantes térmicos. Esto hace que se favorezca el aislamiento eléctrico pero empeore la transmisión del calor desde el elemento conductor hacia el exterior. De igual manera se puede estudiar como transmiten calor las masas que constituyen el rotor y el estator.

Matemáticamente para realizar lo anteriormente descrito basta con anular las fuentes de calor y sólo considerar que se produce una transmisión simple desde el foco caliente hacia el foco frío. Entonces la expresión Ec. 3.27 queda como sigue:

$$\vec{\nabla} \cdot (-\lambda \cdot \vec{\nabla} \tau) = 0 \quad \text{Ec. 3.28}$$

Desarrollada queda como una ecuación tipo Laplace:

$$-\lambda \left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} \right) - \tau \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right) = 0 \quad \text{Ec. 3.29}$$

Donde λ es el coeficiente de transmisión del calor o conductividad térmica. La conductividad térmica puede permanecer constante o depender de la temperatura y las coordenadas del medio. Si el cuerpo es isótropo desde el punto de vista térmico, entonces la componente $\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right) = 0$, con lo que:

$$-\lambda \left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} \right) = 0 \quad \text{Ec. 3.30}$$

Sería el caso más simple de transmisión de calor a considerar.

A lo largo de los anteriores desarrollos hemos de decir que el papel que juega \dot{q} es el de ser el calor producido por la fuente total de generación de calor (histéresis alternativa, histéresis rotativa, histéresis elíptica, corriente de Foucault). La expresión Ec. 3.31 viene a simbolizar esto.

$$\dot{q} \propto \sigma_u = \sum \sigma_{u,k}^j \quad j = alt, rot, elip, \dots; k = Hist, Fou \quad \text{Ec. 3.31}$$

Se ha de destacar que, en la transmisión de calor, sea cual sea su modo, en la frontera Γ (pared o superficie por donde cruza el flujo de calor) el cruce de dicha frontera se hará en dirección a la normal \vec{n} a dicha superficie, siguiendo la condición de frontera de Neumann.

$$-\lambda \left. \frac{\partial \tau}{\partial} \right]_{\Gamma_n} \cdot A = q_n \quad \text{Ec. 3.32}$$

Es decir, se supone que el flujo de calor q_n atraviesa la pared Γ_n , de superficie A , en dirección de la normal \vec{n} a dicha pared siguiendo el mayor gradiente de temperatura $\left(-\lambda \frac{\partial \tau}{\partial} \right)$. Es preciso aclarar que, matemáticamente, q_n es un escalar, pues $\left(-\lambda \frac{\partial \tau}{\partial} \right]_{\Gamma_n} \cdot A \vec{n} = \vec{g} A \vec{n} = q_n$

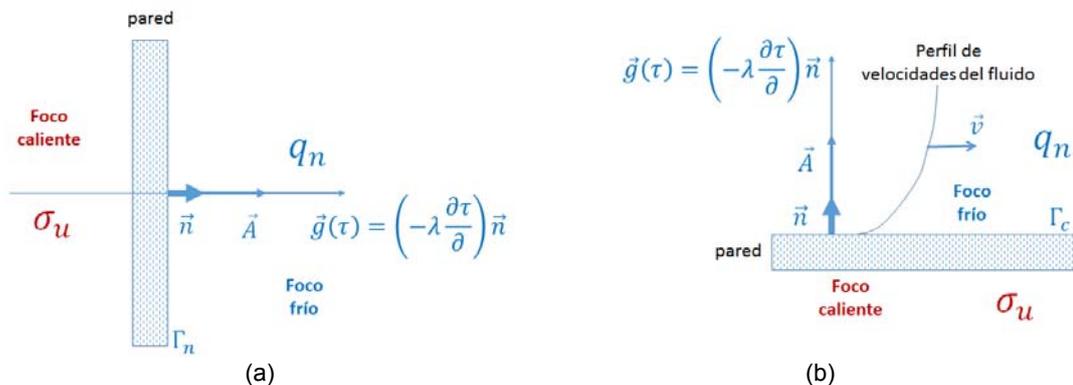


Figura 3-18. Transmisión del calor por conducción (a) y convección (b).

Esta introducción a la transmisión de calor por conducción, su cálculo y sus aplicaciones se ha extraído de (Holman, 1999), pág.1-7, 51-67, 95-101, 109-132; (Popescu, et al., March 26-27, 2015).

En esta tesis se estudiará este tipo de transmisión de calor, en régimen dinámico y aplicado a la máquina asíncrona.

3.8.2 Transmisión del calor por convección

En la transmisión del calor por convección, el calor se transmite entre la pared convectiva Γ_c y un fluido que discurre, tangente a la pared, y a una determinada velocidad \vec{v} . Ver Figura 3-18 (b).

$$q_n = -\lambda \left. \frac{\partial \tau}{\partial n} \right|_{\Gamma_c} \cdot A = h_c A (\tau - \tau_\infty) \Leftrightarrow q_n = h_c A (\tau - \tau_\infty) \quad \text{Ec. 3.33}$$

El flujo de calor depende del área A de la pared y de la diferencia de temperatura existente entre la temperatura de la pared τ y la temperatura del fluido τ_∞ , existiendo un coeficiente h_c , llamado *coeficiente de convección*.

En las máquinas eléctricas la velocidad \vec{v} del fluido, habitualmente aire, la impone el ventilador solidario al eje de la máquina, caso de las máquinas autoventiladas, o bien mediante ventiladores externos auxiliares. La temperatura τ_∞ será la del ambiente que rodea a la máquina. τ será la temperatura a estabilizar mediante al ventilación hasta conseguir los valores normalizados. h_c dependerá de la superficie donde actúa el fluido. Así, en el caso de la máquina asíncrona de rotor bobina, el coeficiente de convección de la superficie rotórica será diferente que el de su superficie estatórica. De igual manera no tendrá el mismo valor de coeficiente de convección la superficie rotórica de una máquina de jaula de ardilla. La morfología superficial de ambos tipos de máquina impondrá coeficientes de convección diferentes. Recordar también que las aletas de refrigeración de la carcasa se ven sometidas a un proceso convectivo debido al aire circulante por ellas, normalmente impulsado por los ventiladores solidarios al eje rotórico.

En esta tesis no se estudia el proceso convectivo de transmisión de calor. No obstante existen trabajos a este respecto como el de (Howey, et al., 2012) que, aunque tratan del el proceso convectivo en el entrehierro de motores de imanes permanentes (PM), por su aplicabilidad a los motores de inducción merece ser tenido en cuenta. Así mismo es de destacar el trabajo de (Jiang & Jahns, 2013) donde se estudia el proceso convectivo en estado permanente y transitorio, aportando además la técnica para estimar el parámetro convectivo de forma práctica en una máquina eléctrica prototipo.

La introducción a la transmisión de calor por convección ha sido extraída de (Holman, 1999), pág. 7-8, 149-158, 193-215; (Popescu, et al., March 26-27, 2015).

3.8.3 Transmisión del calor por radiación

La energía calorífica se transmite en forma de onda, cuya longitud de onda se sitúa entre el espectro infrarrojo y el espectro ultravioleta. El flujo de calor sigue la siguiente ley:

$$q_n = -\lambda \frac{\partial \tau}{\partial} \Big|_{\Gamma_r} \cdot A = \varepsilon_e \sigma_{SB} A(\tau^4 - \tau_\infty^4) \Leftrightarrow q_n = \varepsilon_e \sigma_{SB} A(\tau^4 - \tau_\infty^4) \quad \text{Ec. 3.34}$$

Donde ε_e es el coeficiente de emisividad de la pared de radiación Γ_r , cuya superficie es A . La variable σ_{SB} es el coeficiente de Stefan-Boltzman.

Estrictamente hablando no existe una transmisión de calor puramente radiante en las máquinas eléctricas. El caso más próximo sería el de los transformadores sin ventilación forzada. Aun así el proceso no es una radiación pura pues existe un proceso convectivo natural en las aletas de refrigeración. En el caso de la máquina asíncrona se acercaría, aproximadamente, a un proceso de transmisión del calor por radiación cuando la máquina, aún caliente, se parase y se dejase enfriar en ausencia de fluidos refrigerantes externos e internos.

En esta tesis no se estudia el proceso de transmisión de calor por radiación.

Si se ha de desatacar a este respecto el trabajo de (Boglietti, et al., 2009), que, utilizando redes resistivas para modelar térmicamente a la máquina eléctrica, aporta una expresión para calcular la resistencia equivalente a la radiación térmica en una máquina eléctrica.

La introducción a la transmisión de calor por radiación ha sido extraída de (Holman, 1999), pág. 9, 271-276; (Popescu, et al., March 26-27, 2015).

3.9 La transferencia de calor por conducción en la Formulación Finita

La ecuación de transmisión del calor por conducción (Ec. 3.26) en términos de Formulación Finita queda como sigue:

$$q[T, \tilde{S}] + \sigma_u[T, \tilde{V}] = u[t^+, \tilde{V}] - u[t^-, \tilde{V}] \quad \text{Ec. 3.35}$$

Análogamente, el flujo neto de energía calorífica es $\{q[T, \tilde{S}]\}$, la energía calorífica generada es $\{\sigma_u[T, \tilde{V}]\}$ y la energía calorífica almacenada en el material es $\{u[t^+, \tilde{V}] - u[t^-, \tilde{V}]\}$.

Son variables de fuente, por lo tanto están referidas a elementos espaciales duales y a elementos de tiempo primales. Se supone que las fuentes de calor están contenidas en volúmenes duales (\tilde{V}) y que el flujo de calor atraviesa las paredes de la celda dual (\tilde{S} o bien $\partial\tilde{V}$, que es lo mismo).

térmicas genéricas que permitan entender el diagrama de Tonti referido a la transmisión del calor en sólidos, que será el caso de estudio.

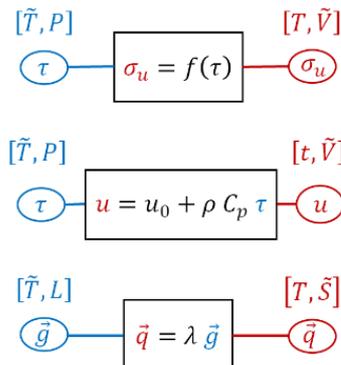


Figura 3-20. Ecuaciones constitutivas térmicas.

La primera ecuación constitutiva, Figura 3-20, parte superior, relaciona una fuente de calor con la temperatura. Esto cuando la propia fuente de calor depende de la temperatura. Este caso no es apreciable en máquinas eléctricas, pero si en muchos procesos físicos en los dispositivos semiconductores.

La segunda ecuación constitutiva, Figura 3-20, parte media, relaciona una fuente de calor con la temperatura. En este caso es la energía interna del material u que se ve modificada con la temperatura τ .

La tercera ecuación constitutiva, Figura 3-20, parte inferior, el calor \vec{q} con el gradiente de temperatura \vec{g} mediante el coeficiente de transmisión del calor por conducción λ .

En esta tesis se propone una nueva ecuación constitutiva para la transmisión por conducción. Por la importancia de esta aportación, este tema será tratado en capítulos posteriores con mayor amplitud.

3.12 Conclusiones

Al usar la Formulación Finita, se cuenta con un nuevo marco teórico alternativo a la formulación diferencial e integral aplicado al campo electromagnético y a la conducción del calor.

Se ha particularizado la Formulación Finita de las ecuaciones electromagnéticas y térmicas para aplicarlas al funcionamiento de la máquina eléctrica asíncrona.

Bibliografía

Alotto, P., Bullo, M., Guarnieri, M. & Moro, F., 2008. A coupled thermo-electromagnetic formulation based on the cell method. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 44(6), pp. 702-705.

Boglietti, A. y otros, 2009. Evolution and Modern Approaches for Thermal Analysis of Electrical Machines. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, March, 56(3), pp. 871-882.

Bullo, M., D'Ambrosio, V., Dughiero, F. & Guarnieri, M., 2006c. *A 3D Cell Method Formulation for Coupled Electric and Thermal Problems*. s.l., s.n., pp. 7-7.

Bullo, M., D'Ambrosio, V., Dughiero, F. & Guarnieri, M., 2006a. Coupled electrical and thermal transient conduction problems with a quadratic interpolation cell method approach. *Magnetics, IEEE Transactions on*, April, 42(4), pp. 1003-1006.

Bullo, M., Dughiero, F., Guarnieri, M. & Tittonel, E., 2006b. Nonlinear coupled thermo-electromagnetic problems with the cell method. *Magnetics, IEEE Transactions on*, April, 42(4), pp. 991-994.

Cardelli, E. & Faba, A., 2014. A Benchmark Problem of Vector Magnetic Hysteresis for Numerical Models. *Magnetics, IEEE Transactions on*, Feb, 50(2), pp. 1049-1052.

Chaboudez, C. y otros, 1994. Numerical modelling of induction heating of long workpieces. *Magnetics, IEEE Transactions on*, Nov, 30(6), pp. 5028-5037.

Driesen, J., 2000. *Coupled Electromagnetic-Thermal Problems in Electrical Energy Transducers*, Kardinaal Mercielaan 94-3001. Leuven (Haverlee): s.n.

Dupre, L., Keer, R. V. & Melkebeek, J., 1998. A computational model for the iron losses in rotating electrical machines. *International Journal of Engineering Science*, 36(7-8), pp. 699-709.

Holman, J. P., 1999. *Transferencia de Calor*. Octave en inglés. Priemra en español ed. s.l.:Mc Graw Hill.

Howey, D., Childs, P. & Holmes, A., 2012. Air-Gap Convection in Rotating Electrical Machines. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, March, 59(3), pp. 1367-1375.

Jiang, W. & Jahns, T., 2013. *Coupled electromagnetic-thermal analysis of electric machines including transient operation based on finite element techniques*. s.l., s.n., pp. 4356-4363.

- Popescu, M. y otros, 2015. *Modern heat extraction systems for electrical machines - A review*. s.l., s.n., pp. 289-296.
- Popova, L., Nerg, J. & Pyrhonen, J., 2011. *Combined Electromagnetic and thermal design platform for totally enclosed induction machines*. s.l., s.n., pp. 153-158.
- Pruksanubal, P., Binner, A. & Gonschorek, K., 2002. *Modelling of magnetic hysteresis using Cauchy distribution*. s.l., s.n., pp. 446-449.
- Tonti, E., 1995. On the geometrical structure of electromagnetism. *Gravitation, Electromagnetism and Geometrical Structures, for the 80th birthday of A. Lichnerowicz*, pp. 281-308.
- Tonti, E., 2000a. Formulazione finita dell'elettromagnetismo. Maggio.
- Tonti, E., 2000b. Formulazione finita delle equazioni di campo: Il Metodo delle Celle. *Atti del XIII Convegno Italiano di Meccanica Computazionale, Brescia, Italy*, Noovember.
- Tonti, E., 2000c. *Formulazione Finita dell'Elettromagnetismo partendo dai fatti sperimentali*. s.l., s.n.
- Tonti, E., 2001a. A direct discrete formulation of field laws: The cell method. *CMES- Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 2(2), pp. 237-258.
- Tonti, E., 2002a. Finite formulation of electromagnetic field. *IEEE Transactions on Magnetics*, 38(2), pp. 333-336.
- Tonti, E., 2002b. Finite formulation of electromagnetic field. *IEEE Transactions on Magnetics*, 38(2), pp. 333-336.
- Tonti, E., 2013. *The Mathematical Structure of Classical and Relativistic Physics*. first ed. s.l.:Birkhäuser.
- Vande Sande, H., Henrotte, F. & Hameyer, K., 2004. The Newton-Raphson method for solving non-linear and anisotropic time-harmonic problems. *COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 23(4), pp. 950-958.
- Weiland, M. C. T., 2001. Discrete electromagnetism with the finite integration technique. *Progress In Electromagnetics Research*, Volumen 32, pp. 65-87.

CAPITULO 4

El Método de la Celda en el electromagnetismo y la conducción térmica

Índice	<u>PÁG.</u>
4. El Método de la Celda aplicado al electromagnetismo y la conducción térmica	65
4.1 Introducción.....	65
4.2 Generalidades.....	65
4.2.1 Concepto de celda.....	65
4.2.2 Mallado estructurado y no estructurado.....	66
4.2.3 Celda tetraédrica y celda triangular.....	67
4.2.4 Modo local y modo global.....	68
4.2.5 Ordenamiento de los elementos de las celdas en el dominio discretizado.....	69
4.2.6 El proceso de eliminación de entidades del mallado repetidas.....	71
4.2.7 Matrices de incidencia. Operadores discretos de gradiente, rotacional y divergencia.....	73
4.3 Operadores discretos de gradiente, rotacional y divergencia en el primal y el dual.....	77
4.4 Método de la Celda y campo electromagnético.....	78
4.4.1 Ley de Gauss del campo magnético con FF-MC.....	79
4.4.2 Ley de Ampere del campo magnético con FF-MC.....	80
4.4.3 Ley de Faraday-Lenz-Newman para la inducción con FF-MC.....	82
4.4.4 La Formulación $A-\chi$ en la FF-MC.....	83
4.4.5 Motivación de la formulación $(a, (a-v))$ y (a, χ) en la FF-MC.....	84
4.5 Método de la Celda y campo térmico.....	85
4.6 El sistema de ecuaciones lineales electromagnéticas a partir del MC en formulación $(a, (a,v))$...	88
4.7 Conclusiones.....	92
Bibliografía	92

Síntesis

Se explica el Método de la Celda como método de cálculo numérico para llevar a término la Formulación Finita aplicada al campo electromagnético y térmico.

4. El Método de la Celda aplicado al electromagnetismo y la conducción térmica

4.1 Introducción

El Método de la Celda es el método numérico para llevar a términos de cálculo lo expresado en la Formulación Finita.

La conexión entre la Topología, el Álgebra y el Cálculo es intrínseca al Método de la Celda.

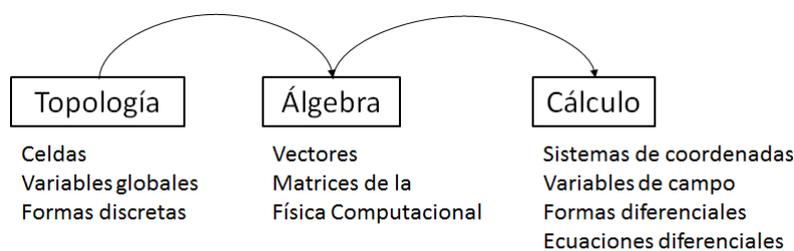


Figura 4-1. Relación entre la Topología, el Álgebra y el Cálculo.

Los fundamentos de este tipos de métodos de cálculo numérico está en el Cálculo Exterior de las Forma Diferenciales (Desbrun, et al., 2008). La aplicación del Calculo Diferencial Externo ha mejorado muchos métodos numéricos utilizados en la Física y la Ingeniería, evitando con ello errores en las soluciones globales del problema con estados de las soluciones locales bien estructurados (Desbrun, et al., 2008), pág. 288-289.

4.2 Generalidades

Se enunciarán una serie de conceptos claves para poder comprender en que consiste el método numérico de resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales conocido como Método de la Celda.

4.2.1 Concepto de celda

La celda o complejo simplicial es el elemento mínimo para aplicar el Método de la Celda en la Formulación Finita. De aquí en adelante, para simplificar se empleará el acrónimo FF-MC para referirse a la Formulación Finita y el Método de la Celda.

La celda puede ser del tipo 1-simplex, 2-simplex ó 3-simplex. Se recuerda que el 0-simplex es referido al punto geométrico. Ver el capítulo 3.

Para profundizar en aspectos topológicos del significado de la celda es recomendable leer a (Desbrun, et al., 2008), pág. 295-297 por su sencillez y didáctica en la explicación de este concepto topológico.

4.2.2 Mallado estructurado y no estructurado

Cuando un dominio continuo se discretiza, se puede hacer de diversas maneras. Sea cual sea la forma de discretización, esta discretización consiste en fragmentar el dominio continuo en celdas, utilizando para ello diversas formas geométricas asimilables a los complejos simpliciales. Si las celdas son ortogonales entre sí, entonces a estos mallados se les denomina *mallados estructurados*. Cuando las celdas no son ortogonales entre sí, a estos mallados se les denomina *mallados no estructurados*.

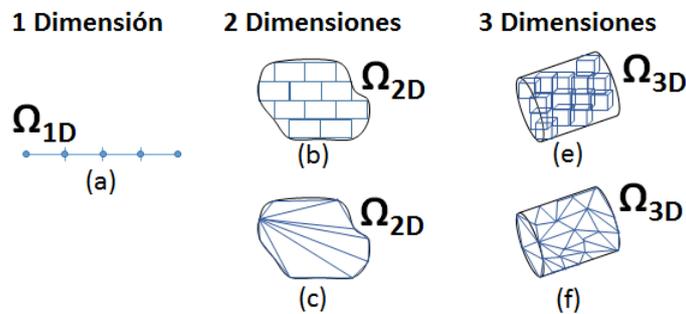


Figura 4-2. Mallados estructurados y no estructurados.

En la Figura 4-2 se aprecian mallados estructurados en dos dimensiones (b) y en tres dimensiones (e), así como mallados no estructurados (c) y (f). Para el mismo dominio bidimensional Ω_{2D} se comprueba que al utilizar rectángulos (b) el error es mucho mayor en la frontera que cuando se utilizan triángulos (c). De igual manera sucede en el dominio Ω_{3D} utilizando celdas hexaédricas (e) frente a celdas tetraédricas (f).

Cada problema y cada contorno llevan una celda adecuada. Así, en las máquinas eléctricas, por sus geometrías cóncavas y convexas, tanto tridimensionales como bidimensionales, las celdas que mejor se ajustan a los dominios a estudiar son las celdas tetraédricas y las celdas triangulares, respectivamente.

El estudio del mallado óptimo para un dominio determinado se sale del ámbito de esta tesis. Para realizar los mallados estudiados se ha recurrido a malladores como el Gmsh (Geuzaine & Remacle, 2009) o a programas que tienen sus propios malladores como el FEMM (Meeker, 2009). Ambos programas son de uso libre.

4.2.3 Celda tetraédrica y celda triangular

Para poder aplicar el Método de la Celda, MC de aquí en adelante, así como otros métodos numéricos, es necesario que la celda y sus elementos estén orientados - orientación externa e interna citadas en el capítulo 3 -. A lo largo de la presente tesis, la celda que se va a utilizar, en el caso tridimensional, es el tetraedro; siendo el triángulo utilizado en el caso bidimensional. En la figura Figura 4-3 se muestran las celdas primales y duales utilizadas en dos y tres dimensiones.

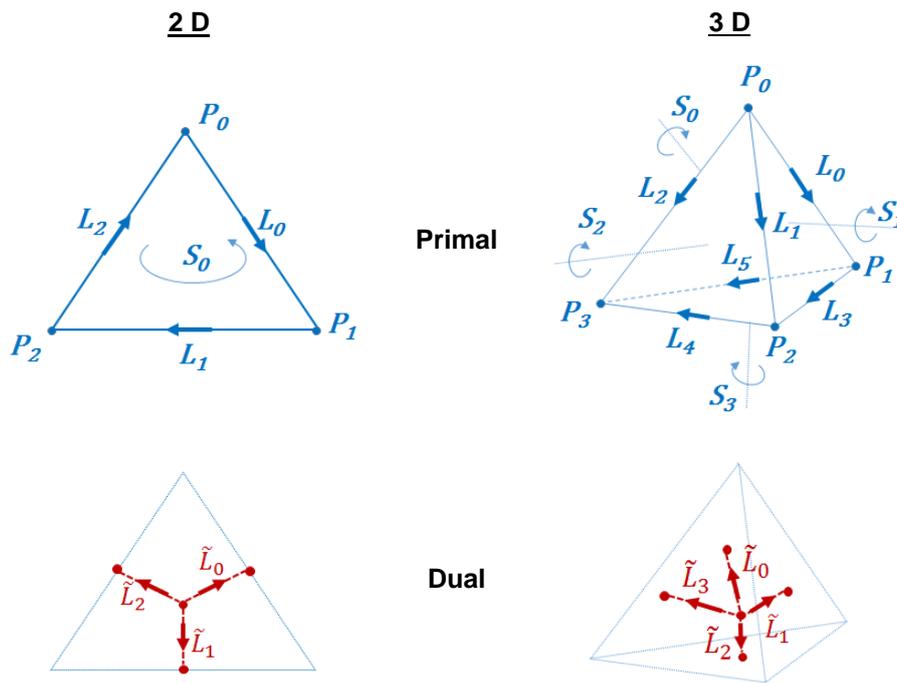


Figura 4-3. Celdas primales y duales en 2D (triángulos) y en 3D (tetraedros).

Para las superficies se considera que la orientación es positiva cuando su sentido es antihorario y negativa al contrario. La numeración de los elementos de la celda es arbitraria. Se ha escogido el subíndice inicial cero por motivos prácticos, ya que los contadores en el lenguaje de programación C++ se inician en cero. Siguiendo la notación topológica, la Figura 4-3 se puede enunciar de la siguiente manera:

2D primal	2D dual	3D primal	3D dual
$P \stackrel{\text{def}}{=} \{n_0, n_1, n_2\}$	$\tilde{P} \stackrel{\text{def}}{=} \{\tilde{n}_0, \tilde{n}_1, \tilde{n}_2\}$	$P \stackrel{\text{def}}{=} \{n_0, n_1, n_2, n_3\}$	$\tilde{P} \stackrel{\text{def}}{=} \{\tilde{n}_0, \tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \tilde{n}_3\}$
$L \stackrel{\text{def}}{=} \{L_0, L_1, L_2\}$	$\tilde{L} \stackrel{\text{def}}{=} \{\tilde{L}_0, \tilde{L}_1, \tilde{L}_2\}$	$L \stackrel{\text{def}}{=} \{L_0, L_1, L_2, L_3\}$	$\tilde{L} \stackrel{\text{def}}{=} \{\tilde{L}_0, \tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \tilde{L}_3\}$
$S \stackrel{\text{def}}{=} \{S_0\}$	$\tilde{S} \stackrel{\text{def}}{=} \{\tilde{S}_0\}$	$S \stackrel{\text{def}}{=} \{S_0, S_1, S_2, S_3\}$	$\tilde{S} \stackrel{\text{def}}{=} \{\tilde{S}_0, \tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \tilde{S}_3\}$
$V \stackrel{\text{def}}{=} \{\emptyset\}$	$\tilde{V} \stackrel{\text{def}}{=} \{\emptyset\}$	$V \stackrel{\text{def}}{=} \{V_1\}$	$\tilde{V} \stackrel{\text{def}}{=} \{\tilde{V}_1\}$

Tabla 4-1. Notación topológica de celda primal y dual en 2D y 3D.

En las celdas tetraédricas, las líneas de las sub-celdas duales se obtienen uniendo los baricentros de las caras primales con el baricentro del volumen dual. En las celdas triangulares, los baricentros de las sub-celdas duales se obtienen uniendo el baricentro del triángulo primal con el baricentro de la arista dual, que corresponde con el punto medio de dicha arista. La expresión Ec. 4.1 se utiliza para calcular el baricentro del tetraedro (B_T) y la expresión Ec. 4.2 para el calcular el baricentro de un triángulo en tres dimensiones (B_{3t}). Si el triángulo está en dos dimensiones, la expresión Ec. 4.3 sería la utilizada para el cálculo del baricentro de dicho triángulo (B_{2t}).

$$B_T(x, y, z) = \left(\frac{1}{4} \cdot \sum_{k=1}^4 x_k, \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=1}^4 y_k, \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=1}^4 z_k \right) \quad \text{Ec. 4.1}$$

$$B_{3t}(x, y, z) = \left(\frac{1}{3} \cdot \sum_{k=1}^3 x_k, \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=1}^3 y_k, \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=1}^3 z_k \right) \quad \text{Ec. 4.2}$$

$$B_{2t}(x, y) = \left(\frac{1}{3} \cdot \sum_{k=1}^3 x_k, \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=1}^3 y_k \right) \quad \text{Ec. 4.3}$$

Así $P_k = P_k(x_k, y_k, z_k)$ son las coordenadas de los nudos de un tetraedro o un triángulo, según corresponda.

Análíticamente se considera que una superficie en \mathbb{R}^2 , o un volumen en \mathbb{R}^3 , están orientados positivamente si las expresiones S y V de Ec. 4.4, respetivamente, son mayores que cero

$$S = \frac{1}{2!} \cdot \det(n_i, n_j, n_i, [1]) = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} > 0$$

$$V = \frac{1}{3!} \cdot \det(n_i, n_j, n_i, n_k, [1]) = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} > 0 \quad \text{Ec. 4.4}$$

En el código de programación dónde se implemente estas expresiones, una vez determinado la orientación negativa, si la hubiere, simplemente con permutar dos filas o columnas, la celda quedaría orientada positivamente, siendo éste el objetivo. Así mismo, una vez positivado, el valor numérico de S o de V será utilizado en cálculos posteriores en el MC.

4.2.4 Modo local y modo global

En el MC, prescindiendo de la necesidad del cálculo de las coordenadas absolutas del mallado (coordenadas cartesianas), el mallado en sí mismo no lleva métrica alguna, pues sus elementos realmente son etiquetas asociadas a

las coordenadas de los nudos: etiqueta $\rightarrow n_k (x_k, y_k, z_k)$. Entonces cada celda estará referida únicamente por sus etiquetas: triángulo $\rightarrow (n_i, n_j, n_k)$; tetraedro $\rightarrow (n_i, n_j, n_k, n_m)$.

El dominio que afecta al problema a estudiar lo denominaremos Ω_G . El mallado se hace sobre este dominio Ω_G . Éste contendrá un número finito de celdas, triángulos o tetraedros según sea la dimensión. Si se ejecutan todos los cálculos sobre el número total de celdas simultáneamente, entonces se dice que se hacen los cálculos en *modo global*. Si por el contrario, los cálculos se realizan celda a celda, para, una vez terminados, incorporarlos a una matriz global que interrelaciona a todo el dominio Ω_G , entonces se dirá que los cálculos han sido realizados en *modo local*.

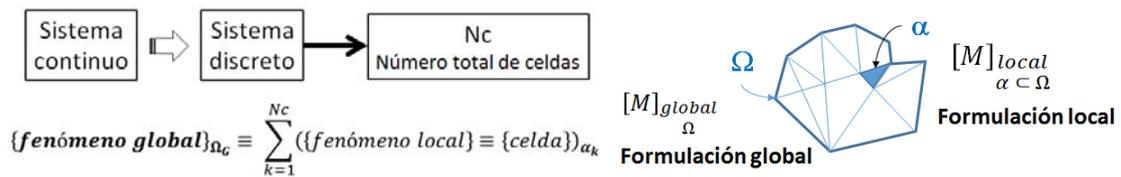


Figura 4-4. Modo local y modo global.

Normalmente se trabaja en modo local ya que el modo global requiere una gran capacidad computacional (memoria física del ordenador). Siendo esto así, la discretización conlleva un ordenamiento de los elementos de la celda para poder trabajar en modo local y evitar duplicidades erróneas a la hora de ensamblar el modo local en el modo global.

4.2.5 Ordenamiento de los elementos de las celdas en el dominio discretizado

El espacio continuo a estudiar se discretiza con una herramienta adecuada (mallador). Con este procedimiento se obtienen los nudos o vértices, que son las entidades fundamentales, y las relaciones entre ellos (tetraedros o triángulos, o los elementos geométricos que se hayan utilizado para mallar). A partir de estos datos se obtienen las aristas, superficies y volúmenes. Si los nudos tienen etiquetas de asignación, entonces se pueden formar celdas tipo. En la Figura 4-5 se muestra la obtención de las entidades a partir de dos tetraedros.

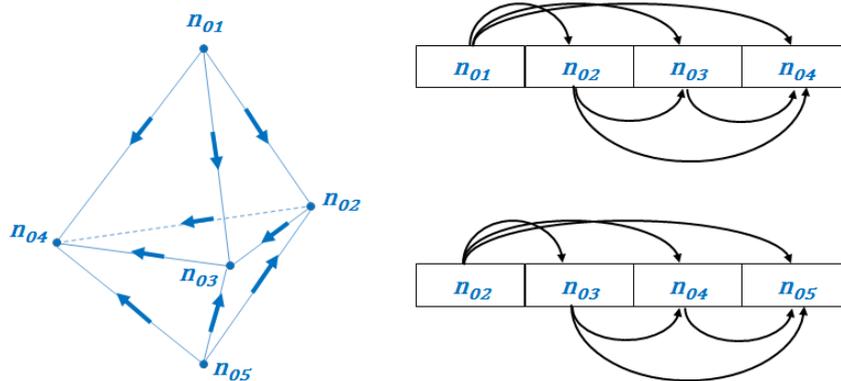


Figura 4-5. Dos tetraedros que comparten una cara, tres aristas y 3 nodos.

Los malladores, en este caso el Gmsh, aportan una serie de entidades: etiquetas de nodos y aristas, coordenadas cartesianas de los nodos, número de nodos, etiquetas de los tetraedros - o triángulos, cuadrángulos, etcétera; según sea elemento geométrico utilizado por el mallador -. A partir de estos datos, y mediante programas específicos, se obtienen los ficheros de datos que pretendemos. Un archivo tipo es el que se muestra en la Tabla 4-2. En ella se reflejan los datos obtenidos de los tetraedros de la Figura 4-5, siguiendo la secuencia que se indica a la derecha de la misma figura.

Tetraedro	nodos	Aristas T_0	nodos	Aristas T_{10}	nodos	Caras T_0	nodos	Caras T_{10}	nodos
T_0	$n_{01}, n_{02}, n_{03}, n_{04}$	a_0	n_{01}, n_{02}	a_0	n_{02}, n_{03}	S_0	n_{01}, n_{02}, n_{04}	S_4	n_{02}, n_{03}, n_{05}
...		a_1	n_{01}, n_{03}	a_5	n_{02}, n_{04}	S_1	n_{01}, n_{03}, n_{02}	S_5	n_{03}, n_{04}, n_{05}
T_{10}	$n_{02}, n_{03}, n_{04}, n_{05}$	a_2	n_{01}, n_{04}	a_7	n_{02}, n_{05}	S_2	n_{01}, n_{04}, n_{03}	S_6	n_{02}, n_{05}, n_{04}
...		a_3	n_{02}, n_{03}	a_8	n_{03}, n_{04}	S_3	n_{02}, n_{03}, n_{04}	S_3	n_{02}, n_{03}, n_{04}
...		a_4	n_{03}, n_{04}	a_4	n_{04}, n_{05}				
		a_5	n_{02}, n_{04}	a_{10}	n_{03}, n_{05}				

Tabla 4-2. Almacenamiento de datos de una discretización de un dominio.

Observando la tabla, las aristas a_0 , a_4 y a_5 son aristas compartidas por los dos tetraedros. La cara S_3 es una cara compartida por los tetraedros. Los nodos n_{02} , n_{03} y n_{04} son compartidos por ambos tetraedros. Con objeto de no acumular errores, tanto si se trabaja en modo local, como si se trabaja en modo global, en el conjunto de datos finales, las repeticiones de elementos, aristas y caras, deben eliminarse, sólo dejando una en la orientación inicial. Este proceso no es sencillo, pues a medida que aumenta la dimensión del elemento, aumenta las combinaciones para determinar si está repetido o no. Esto conlleva algoritmos de ordenamiento, clasificación y eliminación que tienen un coste computacional relativamente alto (Simón-Rodríguez, et al., 2011), (González-Domínguez & Monzón Verona, 2013). Algoritmos que mejoran cuando se utilizan lenguajes como el C++, y que empeoran con aplicaciones interpretadas como Octave® o Matlab®.

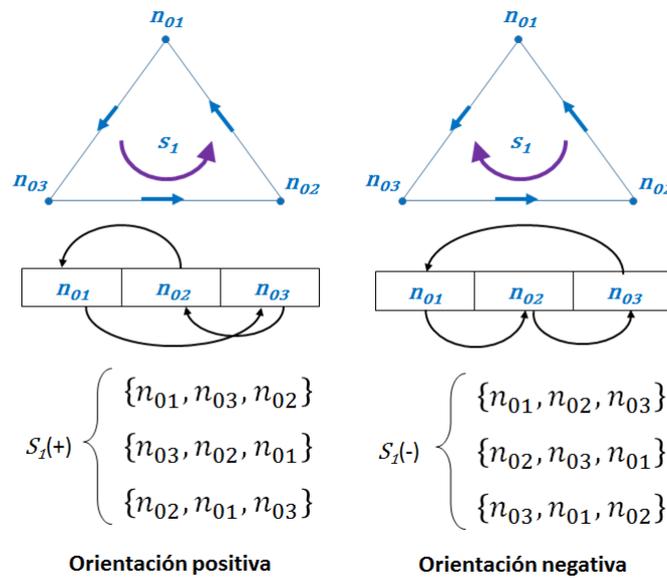


Figura 4-6. Orientación positiva o negativa de una superficie.

La orientación de los elementos de la celda es uno de los aspectos más importantes a tener en cuenta en el FF-MC. Según sea la secuencia de lectura de los nudos en el archivo informático, y siempre que se mantenga el mismo criterio, se pueden establecer orientaciones de los elementos con relativa facilidad. En la Figura 4-6 se muestra como se obtiene una orientación positiva o negativa de una superficie. Se hace notar que la permutación de un elemento cambia el signo de la orientación de orden superior. Así, si permutamos dos nudos, cambia la orientación de la arista, con lo cual cambia la orientación de la cara.

4.2.6 El proceso de eliminación de entidades del mallado repetidas

El proceso de eliminación de aristas y caras repetidas consiste en un ordenamiento previo de dichas entidades. Cuando se comprueba que existen repeticiones del elemento (arista o cara), se procede a su eliminación. Una vez que ha concluido este proceso, el archivo, con los elementos ordenados y sin repetición, tiene que ser topológicamente equivalente al archivo original.

¿Cómo se puede comprobar la equivalencia topológica entre el archivo original y el modificado?

La solución está en recurrir a la Fórmula de Euler-Poincaré Extendida:

$$N_n - N_a + N_s - (N_b - N_s) = 2 \cdot (N_c - Ge) \tag{Ec. 4.5}$$

Donde N_n es el número de nudos, N_a es el número de aristas, N_s es el número de caras, N_b es el número de bucles que se pueden realizar sobre el objeto, N_c

es el número de conchas o superficies cerradas que definen al objeto y Ge es el número de agujeros topológicos del objeto.

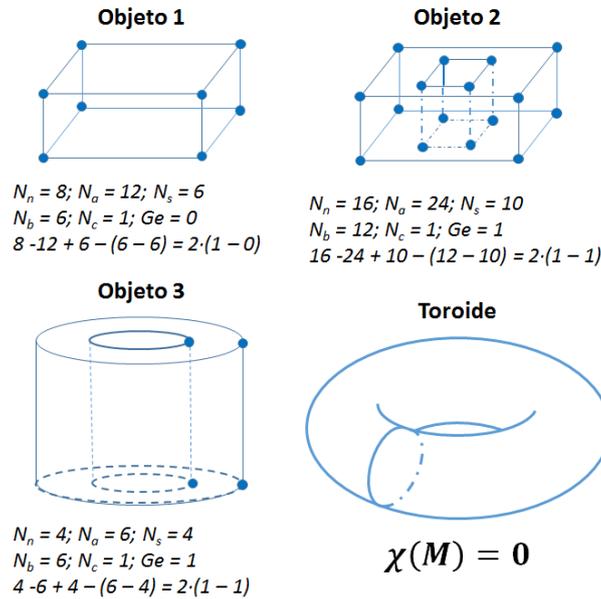


Figura 4-7. Característica de Euler-Poincaré.

Cuando se aplica la fórmula de Euler-Poincaré a los objetos de la Figura 4-7, se observa que todos aquellos que tienen un agujero topológico, objeto 2, objeto 3 y toroide tienen la segunda parte de la fórmula igual a cero. A este segundo miembro $\chi(M) = 2 \cdot (N_c - Ge)$ se le denomina *característica de Euler*.

La consecuencia de esto es inmediata: “Cualquier objeto topológico con un solo agujero y formado por una sola superficie cerrada, sea de la forma que sea el volumen formado, tiene la misma característica de Euler”. Esto se utilizará para confirmar que cualquier objeto que discretizemos, al ordenar y eliminar elementos de celda duplicados, debe tener la misma característica de Euler.

Un caso especial lo constituye la geometría bidimensional, donde la fórmula de Euler-Poincaré Extendida es:

$$N_n - N_a + N_s = 1 \cdot (1 + Ge) \quad \text{Ec. 4.6}$$

No obstante, desde un punto de vista práctico se puede recurrir a una forma simplificada de la fórmula de Euler-Poincaré Extendida como es el desarrollo de la misma mediante polinomios de números de Betti.

$$b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + \dots \mp b_n = \chi(M) \quad \text{Ec. 4.7}$$

En las máquinas eléctricas la dimensión espacial es, a lo sumo, \mathbb{R}^3 . Entonces la expresión Ec. 4.7 queda reducida a:

$$N_n - N_a + N_s - N_v = \chi(M) \tag{Ec. 4.8}$$

Donde N_v es el número de volúmenes. En esta condición, para tres dimensiones, la característica de Euler será $\chi(M) = 1 \cdot (1 - Ge)$, mientras que para dos dimensiones será $\chi(M) = 2 \cdot (1 - Ge)$. Dicho lo cual, las expresiones a emplear en esta tesis serán:

$$\begin{aligned} 3D \rightarrow & N_n - N_a + N_s - N_v = 1 \cdot (1 - Ge) \\ 2D \rightarrow & N_n - N_a + N_s = 2 \cdot (1 - Ge) \end{aligned} \tag{Ec. 4.9}$$

Si nos ceñimos a la topología de la máquina eléctrica asíncrona, los objetos topológicos principales tienen un agujero (estator) o cero agujero (rotor). Esto nos lleva a que la característica de Euler tome los valores $\chi(M) = 1 \cdot (1 - 1) = 0$, o bien que valga $\chi(M) = 1 \cdot (1 - 0) = 1$, (Simón-Rodríguez, et al., 2011). Su aplicación a la discretización de las máquinas eléctricas se puede observar en la Figura 4-8.

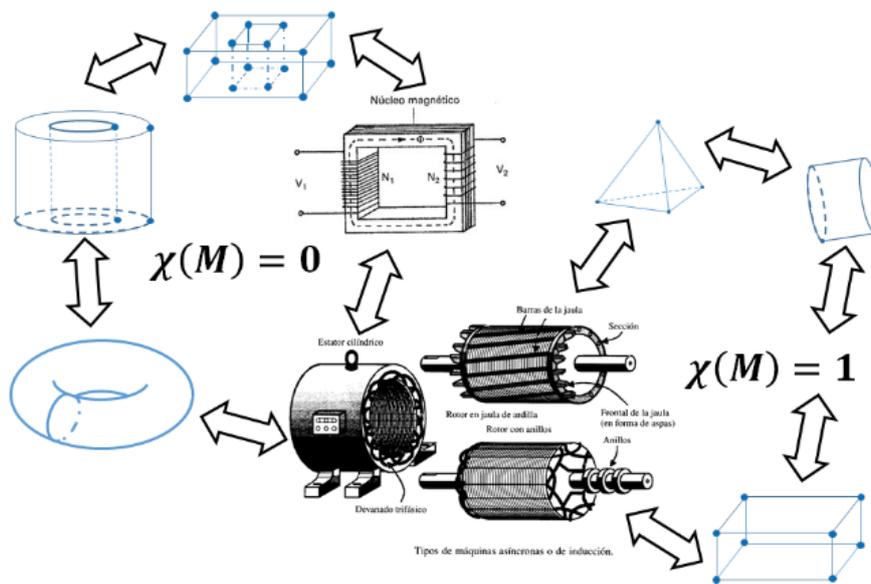


Figura 4-8. Característica de Euler y discretización en máquinas asíncronas.

4.2.7 Matrices de incidencia. Operadores discretos de gradiente, rotacional y divergencia

Antes de explicar el proceso de construcción de los operadores gradiente, rotacional y divergencia, conviene hacer una breve introducción de ciertos conceptos del Álgebra Topológica.

Se denomina *p-celda* a una celda de dimensión $dim = \{0, 1, 2, 3\}$. Las variables físicas están asociadas a un conjunto de *p-celdas* denominado *p-cadena*. El llamado proceso de *co-contorno* consiste en aumentar o disminuir la dimensión

de la p-cadena. Para llevarlo a cabo se utiliza el operador co-contorno ∂ . El proceso de co-contorno sería el siguiente:

$$0 \xrightarrow{\partial} C^0 \xrightarrow{\partial} C^1 \xrightarrow{\partial} C^2 \xrightarrow{\partial} C^3 \xrightarrow{\partial} 0 \tag{Ec. 4.10}$$

Gráficamente el proceso co-contorno sería aumentar de dimensión a la celda de cálculo (Desbrun, et al., 2008) pág. 296-299, 302-303. Se muestra claramente en la Figura 4-9.

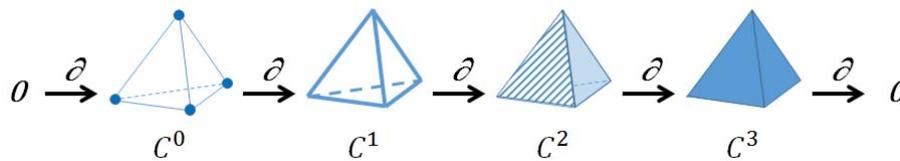


Figura 4-9. Proceso de co-contorno desde el punto de vista gráfico.

En el Álgebra Topológica, cada operador de co-contorno ∂ , que permite pasar de dimensión a una p-cadena $C^p \rightarrow C^{p+1}$ está asociado a una expresión matricial.

Concretando, cuando se aplica un operador como el gradiente, se hace sobre una función escalar (punto), obteniéndose un campo vectorial que sigue las trayectorias de máxima variación (línea). Si a este campo vectorial obtenido se le aplica el rotacional, da lugar a la aparición de circulaciones de dicho campo en los bordes del plano donde dicho campo circula (superficie). Si sobre dicho campo vectorial se aplica la divergencia, lo obtenido será un escalar (punto) indicando la existencia de fuente, sumidero o un simple cruce del campo por el volumen que encierra a dicho campo.

Haciendo una mezcla entre el Álgebra Topológica y el Cálculo Diferencial, se puede obtener una expresión como la de Ec. 4.11 que permite aclarar estos conceptos, ya que en la ingeniería prevalece la formación diferencial frente a la formación topológica

$$\begin{array}{ccccccc}
 \underbrace{0 \xrightarrow{\partial} C^0 \xrightarrow{\partial} C^1}_{\text{grad}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \vec{\nabla} f} & \xrightarrow{\partial} & C^1 & \xrightarrow{\partial} & C^2 & \xrightarrow{\partial} & C^3 \xrightarrow{\partial} 0 \\
 & & & & \underbrace{\phantom{C^2 \xrightarrow{\partial} C^3}}_{\text{div}(\vec{\gamma}) \stackrel{\text{def}}{=} \vec{\nabla} \cdot \vec{\gamma} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{\gamma} \cdot d\vec{S}}{\Delta V}} & &
 \end{array}
 \tag{Ec. 4.11}$$

De forma inmediata e intuitiva se aprecia que el operador gradiente debería relacionar nudos con aristas, el operador discreto rotacional relacionaría aristas

con superficies y el operador discreto divergencia relacionaría superficies con volúmenes.

Al estar todos los elementos de la celda orientados, esto debe reflejarse en la relación de pertenencia entre elementos.

Existen diversos operadores que permiten las operaciones de co-contorno. En el Cálculo Diferencial Discreto se utiliza el operador ** de Hodge* (Desbrun, et al., 2008), pág. 311-313.

Los operadores discretos que utiliza la FF-MC son las matrices de incidencia (Tonti, 2013) pág. 431-436, 464.

Existen trabajos antiguos (Kaplan & Murnaghan, 1930) tratando de relacionar el Cálculo Diferencial con el Álgebra Lineal. Pero, es a finales de los años sesenta del siglo XX, con los trabajos de Branin (Branin, 1964) y (Branin, April, 1966), cuando se empieza a sistematizar el uso del Álgebra Topológica en la resolución de problemas electromagnéticos.

Observando la Figura 4-10 se puede entender la construcción de las matrices de incidencia, de las cuales hace uso el MC.

El signo \pm indica la orientación del elemento. La pertenencia de un elemento de dimensión menor a otro de dimensión mayor se indica con ± 1 , cuando pertenece y con 0 cuando no pertenece.

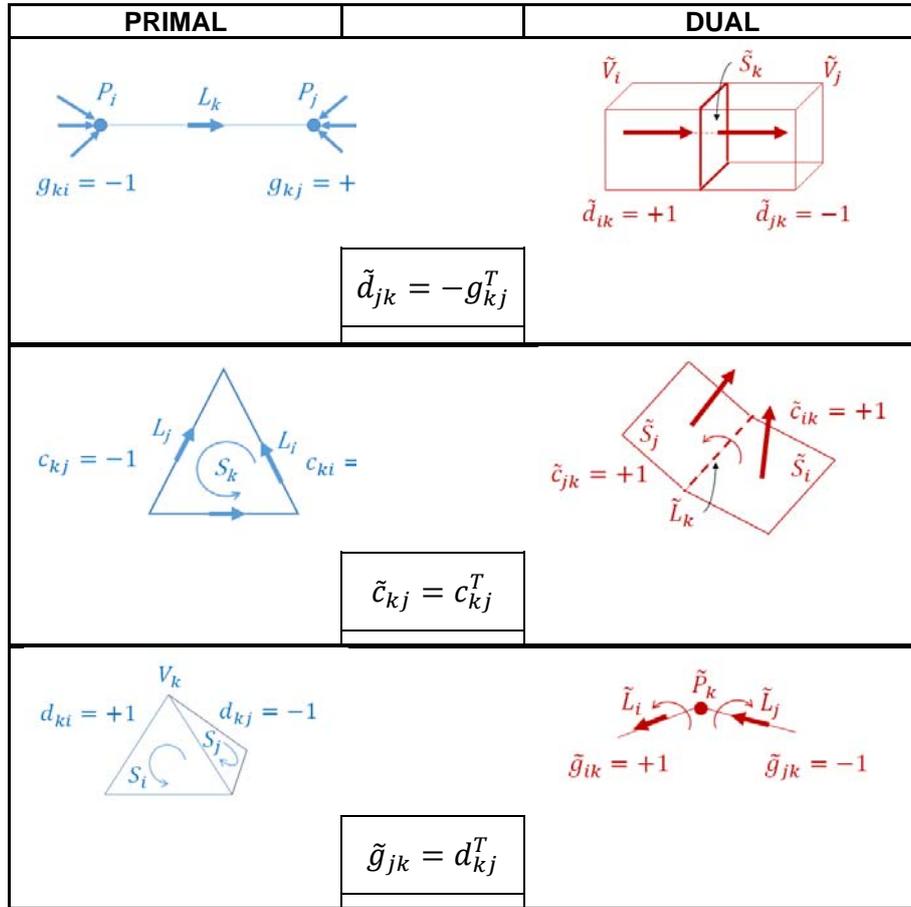


Figura 4-10. Operadores discretos del primal y dual. Adaptado de (Alotto, et al., 2013).

Así, la matriz equivalente al operador discreto gradiente es una matriz de incidencias aristas (filas) y nudos (columnas), cuyos valores pueden ser $(-1, 0, +1)$.

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & \ddots & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & -1 \end{bmatrix} \tag{Ec. 4.12}$$

La matriz equivalente al operador discreto rotacional es una matriz de incidencias caras (filas) y aristas (columnas), cuyos valores pueden ser $(-1, 0, +1)$.

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & \ddots & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & -1 \end{bmatrix} \tag{Ec. 4.13}$$

El operador discreto divergencia se construye a partir d una matriz de incidencias volúmenes (filas) y caras (columnas), cuyos valores pueden ser $(-1, 0, +1)$.

$$[D] = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & \ddots & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & -1 \end{bmatrix}$$

Ec. 4.14

En esta tesis se ha utilizado un tetraedro y un triángulo de referencia. Dicha elección es arbitraria. Se han obtenido sus respectivos operadores discretos.

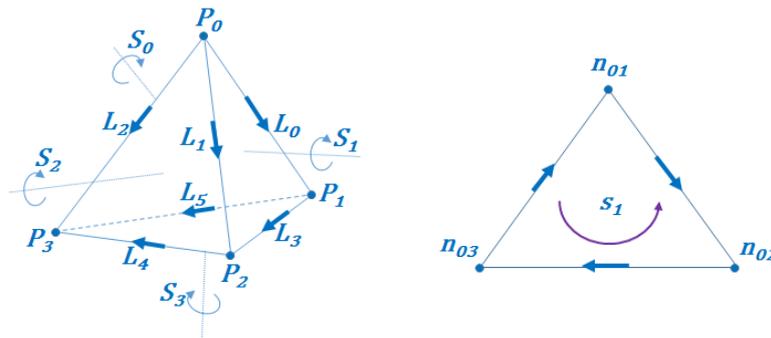


Figura 4-11. Tetraedro y triángulo de referencia utilizado en esta tesis.

Siguiendo las reglas de construcción anteriormente expuestas, los resultados obtenidos han sido los siguientes para:

Tetraedro		Triángulo
<u>Gradiente</u>		
$[G] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		$[G] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
<u>Rotacional</u>		
$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$		$[C] = [-1 \quad -1 \quad 1]$
<u>Divergencia</u>		
$[D] = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$		No se utiliza

Figura 4-12. Operadores discretos para tetraedro y triángulo de referencia.

4.3 Operadores discretos de gradiente, rotacional y divergencia en el primal y el dual

Observando la Figura 4-10, y siguiendo la metodología anteriormente expuesta, se establecen las siguientes relaciones entre operadores discretos del primal y del dual:

$$[\tilde{D}] = -[G]^T \quad [\tilde{C}] = [C]^T \quad [\tilde{G}] = [D]^T \quad \text{Ec. 4.15}$$

Estas relaciones son fundamentales, pues su cálculo, sobre todo los de los operadores de divergencia consumen un tiempo excesivo, siendo más útil recurrir a estas relaciones que calcularlos directamente (González-Domínguez & Monzón Verona, 2013). Al igual que los operadores diferenciales aplicados a las variables de campo, los discretos cumplen las mismas reglas a continuación expuestas.

$$\begin{aligned} [C] \cdot [G] = [0] & \Leftrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \cdot \equiv 0 \\ [D] \cdot [C] = [0] & \Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \equiv 0 \end{aligned} \quad \text{Ec. 4.16}$$

Estas relaciones cobran especial importancia a la hora de comprobar que los operadores discretos han sido correctamente ensamblados, sobre todo si se utiliza la formulación global (González-Domínguez & Monzón Verona, 2013).

4.4 Método de la Celda y campo electromagnético

Existen diversas formas de llegar a expresiones matriciales de las variables globales del campo electromagnético que se utilizan en la FF-MC. Como el ámbito de esta tesis es el análisis electromagnético de una máquina eléctrica asíncrona, nos ceñiremos a los clásicos esquemas A-V, o bien, A- χ .

Si se quiere diseñar una máquina eléctrica a partir de las ecuaciones de Maxwell, el esquema a seguir es el expuesto en la Figura 4-13.

Para facilitar la aplicación del MC en el esquema A-V, se compara la formulación diferencial con variables de campo frente a la FF-MC con variables globales, analizándose cada una de las leyes de Maxwell que van a ser empleadas.

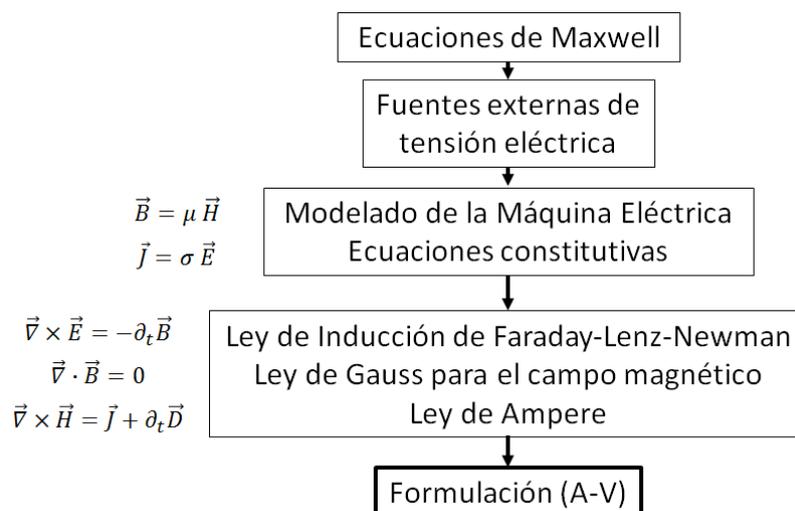


Figura 4-13. Diseño de una máquina eléctrica con formulación (A-V).

4.4.1 Ley de Gauss del campo magnético con FF-MC

En términos comparativos la ley se enuncia de la siguiente manera:

Formulación diferencial	FF-MC
$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$[D][\phi] = [D][C][a]$
$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$	$[\phi] = [C][a]$

Tabla 4-3. Ley de Gauss del campo magnético.

El vector potencial magnético \vec{A} es una magnitud comodín o auxiliar (gauge). Proviene de considerar que el vector inducción magnética es una circulación del vector potencial magnético. Se sabe que $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, en forma diferencial, es lo mismo que $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$, en forma integral. Entonces, aplicando el teorema de Stockes, deberá existir un vector tal que $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{L}$. Como el vector potencial magnético se asocia a una circulación en línea cerrada y la densidad de flujo a una superficie, entonces: $\oint_S (\vec{A} \times d\vec{L}) \cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{L}$. Por lo tanto $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.

En la FF el flujo magnético es una variable de configuración asociada a las caras primales de la celda. Se supone que la fuente de campo magnético está situada en el dual. Si el flujo magnético se vincula con una superficie primal (S), el dual de ésta será una línea (\vec{L}). La circulación de una magnitud en esta línea dará lugar al flujo magnético. Al usar magnitudes globales, el camino para encontrarla no será directo. Se puede obtener una magnitud magnética global que refleje esta circulación. Esta magnitud global será el potencial magnético escalar obtenido de la circulación del potencial magnético vectorial: $a = \int_L \vec{A} \cdot d\vec{L}$. Por otro lado, se sabe que la ecuación constitutiva $\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}$, en variables de campo, se puede adaptar a variables globales $\frac{F_m}{L} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\phi}{S} \rightarrow F_m = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{L}{S} \phi$ La variable global fuerza magnetomotriz F_m se ha podido relacionar con la variable global flujo ϕ . El potencial magnético escalar a se situará en las aristas primales. La circulación del potencial magnético (rotacional) dará lugar al flujo en las caras primales, siempre y cuando haya fuerza magnetomotriz en las aristas duales (Feliziani, et al., 2008).

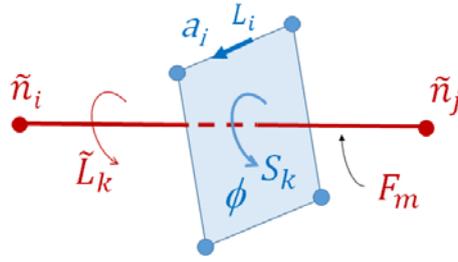


Figura 4-14. Potencial magnético escalar en FF-MC.

De tal manera que lo que se obtendría en términos MC sería:

$$[\phi] = [C][a] \quad \text{Ec. 4.17}$$

Con lo expuesto en Ec. 4.16 se verifica que:

$$[D][\phi] = [D]\{[C][a]\} = \{[D][C]\}[a] = \{0\}[a] = \{0\} \quad \text{c.q.d.} \quad \text{Ec. 4.18}$$

Se verifica el comportamiento solenoidal del campo magnético en la FF-MC (Trevisan, 2002), (Marrone, et al., 2002), (Repetto & Trevisan, 2003), (Giuffrida, et al., 2006), y (Feliziani, et al., 2008).

4.4.2 Ley de Ampere del campo magnético con FF-MC

La ley de Ampere desarrollada en forma diferencial sería $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \partial_t \vec{D}$. Teniendo en cuenta la relación constitutiva $\vec{B} = \mu \vec{H} \Rightarrow \vec{H} = 1/\mu \vec{B} = \nu \vec{B}$, entonces, al sustituir, dicha ley queda como sigue: $\vec{\nabla} \times (\nu \vec{B}) = \vec{j} + \partial_t \vec{D}$. Existiendo el vector potencial magnético, entonces: $\vec{\nabla} \times (\nu \vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{j} + \partial_t \vec{D}$.

El término $\partial_t \vec{D}$ representa la tensión que aparece al polarizarse eléctricamente las moléculas, siempre y cuando varíe esta polarización en el tiempo. Esto es importante en la alta tensión y a frecuencias muy elevadas. En máquinas eléctricas, normalmente funcionando a baja tensión y frecuencia, este término se puede despreciar. Dicho esto, la ley de Ampere quedaría de la siguiente manera:

$$\vec{\nabla} \times (\nu \vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{j} \quad \text{Ec. 4.19}$$

Por otro lado, en cuanto a campo eléctrico se refiere, la intensidad del campo eléctrico sigue la siguiente ley:

$$\vec{E} = -\partial_t \vec{A} - \vec{\nabla} v \quad \text{Ec. 4.20}$$

Donde $\vec{\nabla} v$ es la tensión eléctrica que proviene de las fuentes externas a la máquina. La tensión $\partial_t \vec{A}$ se debe a variaciones del campo magnético que rodea a la máquina y a la circulación de corrientes no estacionarias en la máquina.

Partiendo de la relación constitutiva $\vec{J} = \sigma \vec{E}$, sustituyendo en Ec. 4.20 se obtiene la siguiente expresión: $\vec{J} = \sigma(-\partial_t \vec{A} - \vec{\nabla}v)$. Si se vuelve a sustituir en Ec. 4.19 se obtiene la expresión siguiente:

$$\vec{\nabla} \times (\nu \vec{\nabla} \times \vec{A}) = \sigma(-\partial_t \vec{A} - \vec{\nabla}v) \quad \text{Ec. 4.21}$$

La expresión Ec. 4.21 sería la formulación (A,V) en forma diferencial de la ley de Ampere. Para realizar lo mismo en la FF-MC, se procede como a continuación se indica.

$$(\nu \vec{\nabla} \times \vec{A}) \Leftrightarrow [M_\nu][C][a] \quad \text{Ec. 4.22}$$

El término $[M_\nu][C][a]$ pertenece al primal. Por otro lado, volviendo a hacer uso de la formulación diferencial, observando lo indicado en la Tabla 4-4, ahora se trata de buscar la equivalencia del segundo miembro de Ec. 4.21 en la FF-MC. Para ello contamos con términos ya desarrollados. Así:

$$\vec{J} = \sigma(-\partial_t \vec{A} - \vec{\nabla}v) \Leftrightarrow [\tilde{I}] = -[M_\sigma] \left\{ \frac{d[a]}{dt} + [G][v] \right\} \quad \text{Ec. 4.23}$$

Si al segundo miembro de Ec. 4.22, se le aplicase un rotacional nos indicaría que el campo magnético tiene una circulación no nula y esta estaría originada por corrientes eléctricas

$$[\tilde{C}]\{[M_\nu][C][a]\} = [\tilde{I}] \quad \text{Ec. 4.24}$$

Igualando las expresiones de la corriente obtenidas en Ec. 4.23 y en Ec. 4.24, se obtiene que:

$$[\tilde{C}]\{[M_\nu][C][a]\} = -[M_\sigma] \left\{ \frac{d[a]}{dt} + [G][v] \right\} \quad \text{Ec. 4.25}$$

Recordando que $[\tilde{C}] = [C]^T$, entonces sustituyendo en Ec. 4.25, obtenemos la siguiente expresión:

$$[C]^T\{[M_\nu][C][a]\} = -[M_\sigma] \left\{ \frac{d[a]}{dt} + [G][v] \right\} \quad \text{Ec. 4.26}$$

Que corresponde con la expresión de la ley de Ampere en la formulación (a, (a,v)) en MC, que es equivalente a la formulación (A-V) en la formulación diferencial (Trevisan, 2002), (Marrone, et al., 2002), (Repetto & Trevisan, 2003), (Giuffrida, et al., 2006), y (Feliziani, et al., 2008).

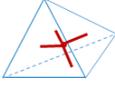
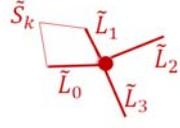
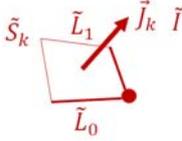
$\vec{\nabla} \times (\nu \vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{J}$		$\int_{\vec{L}} \vec{H} d\vec{L}$	
$\vec{\nabla} \times (\nu \vec{B}) = \vec{J}$			
$\vec{\nabla} \times (\nu \vec{H}) = \vec{J}$			
Término magnético perteneciente al dual	Término eléctrico perteneciente al dual		

Tabla 4-4. Congruencias duales de campo magnético y campo eléctrico.

Nota: La corriente se obtiene de la integración de todas las densidades de corrientes \vec{J}_k en las superficies \vec{S}_k . Por lo tanto, la corriente \vec{I} , aparte de ser una magnitud global, su naturaleza es escalar $I = \int_S \vec{J}_k \cdot d\vec{S}_k$.

4.4.3 Ley de Faraday-Lenz-Newman para la inducción con FF-MC

La ley de Faraday-Lenz-Newman dice que $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$, indicándonos que la circulación del campo eléctrico va a depender de las variaciones temporales del campo magnético. Como la densidad de campo magnético puede ser sustituida por la rotación del vector potencial magnético, entonces la ley de Faraday-Lenz-Newman pasa a tomar la siguiente forma:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} \times (-\partial_t \vec{A}) \quad \text{Ec. 4.27}$$

Este cambio es factible puesto que el operador rotacional ($\vec{\nabla} \times$) depende de coordenadas únicamente espaciales, mientras que el operador derivada temporal ∂_t sólo lo es del tiempo.

Observando la expresión Ec. 4.27, por analogía, se concluye que:

$$\vec{E} = -\partial_t \vec{A} \quad \text{Ec. 4.28}$$

Ahora bien, sean dos vectores cualquiera \vec{X} e \vec{Y} , tal que $\vec{\nabla} \times \vec{X} = \vec{\nabla} \times (-\partial_t \vec{Y})$. Comparando se concluye que $\vec{X} = -\partial_t \vec{Y}$. Supongamos que añadimos una función escalar f tal que: $\vec{X} = -\partial_t \vec{Y} - \vec{\nabla} f$. Entonces $\vec{\nabla} \times \vec{X} = \vec{\nabla} \times (-\partial_t \vec{Y} - \vec{\nabla} f)$.

Pero $\vec{\nabla} \times \vec{X} = \vec{\nabla} \times (-\partial_t \vec{Y}) + \vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla} f)$, que es lo mismo que $\vec{\nabla} \times \vec{X} = \vec{\nabla} \times (-\partial_t \vec{Y})$, puesto $\vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla} f) = 0$, recordando que el rotacional del gradiente es nulo. Así pues el añadir la función escalar f no modifica el resultado final. Esto es lo que se hará en la expresión Ec. 4.28.

$$\vec{E} = -\partial_t \vec{A} = -\partial_t \vec{A} - \vec{\nabla} \nu \quad \text{Ec. 4.29}$$

Sustituyendo Ec. 4.29 en el segundo miembro de Ec. 4.27, se obtiene:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times (-\partial_t \vec{A}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} v) \tag{Ec. 4.30}$$

Esta es la forma en que queda la ley de Faraday-Lenz-Newman en la formulación (A-V).

Como en FF-MC sólo se utilizan variables globales, la rotación del campo eléctrico será sustituida por la fuerza electromotriz U_e , quedando de la siguiente manera:

$$[C][U_e] = [C] \left\{ -\frac{d[a]}{dt} - [G][v] \right\} \tag{Ec. 4.31}$$

Que es la formulación (a,v) en el MC (Trevisan, 2002), (Marrone, et al., 2002), (Repetto & Trevisan, 2003), (Giuffrida, et al., 2006), y (Feliziani, et al., 2008).

4.4.4 La Formulación A- χ en la FF-MC

La formulación A- χ trata de dejar todos los segundos miembros de las ecuaciones en términos estrictamente magnéticos. Así, si tomamos la ley de Faraday-Lenz-Newman de la Ec. 4.31, y basándonos en lo expuesto anteriormente acerca de las funciones potenciales, entonces recurrimos a una función de potencial magnético auxiliar o *gauge*, la cual denominaremos χ . Así mismo, la derivada temporal de una función escalar sigue siendo una función escalar. Por lo tanto sustituyendo $\partial_t \chi$ por el potencial eléctrico v , la Ec. 4.31 se convierte en:

$$[C][U_e] = [C] \left\{ -\frac{d[a]}{dt} - [G] \frac{d[\chi]}{dt} \right\} \tag{Ec. 4.32}$$

El término $\partial_t \chi$ indica que las variaciones temporales del potencial magnético contribuyen a la creación de fuerza electromotriz, pues son equivalentes a un potencial eléctrico.



Figura 4-15. Comparación entre potencial magnético y eléctrico.

4.4.5 Motivación de la formulación $(a, (a-v))$ y (a, χ) en la FF-MC

La elección de la formulación $(a, (a-v))$ o de la formulación (a, χ) obedece a criterios de cálculo numérico. Estos criterios son:

- Si se utiliza $(a, (a-v))$, la matriz global del sistema no sería simétrica.
- Si se utiliza (a, χ) , la matriz global del sistema sería simétrica.

El objeto de hacer que las matrices locales $[M_v]$ y $[M_\sigma]$ sean simétricas es lograr que la matriz global de sistema también lo sea.

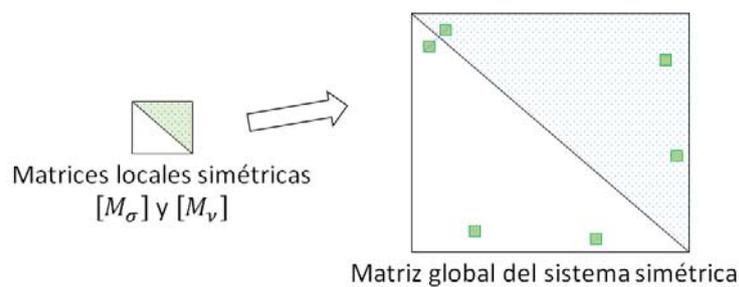


Figura 4-16. Matriz local y global simétricas con formulación (a, χ) .

La importancia de la simetría de las matrices constitutivas $[M_v]$ y $[M_\sigma]$ se puede consultar en (Trevisan, 2002), (Bettini & Trevisan, 2003), (Specogna & Trevisan, 2005), (Trevisan & Kettunen, 2006), (Codecasa & Trevisan, 2006) y (Alotto, et al., 2010).

Por último, lo que se expuso para el diseño de una máquina utilizando la formulación A-V en forma diferencial en la Figura 4-13, ha quedado transformado en la formulación $(a, (a, v))$ para la FF-MC.

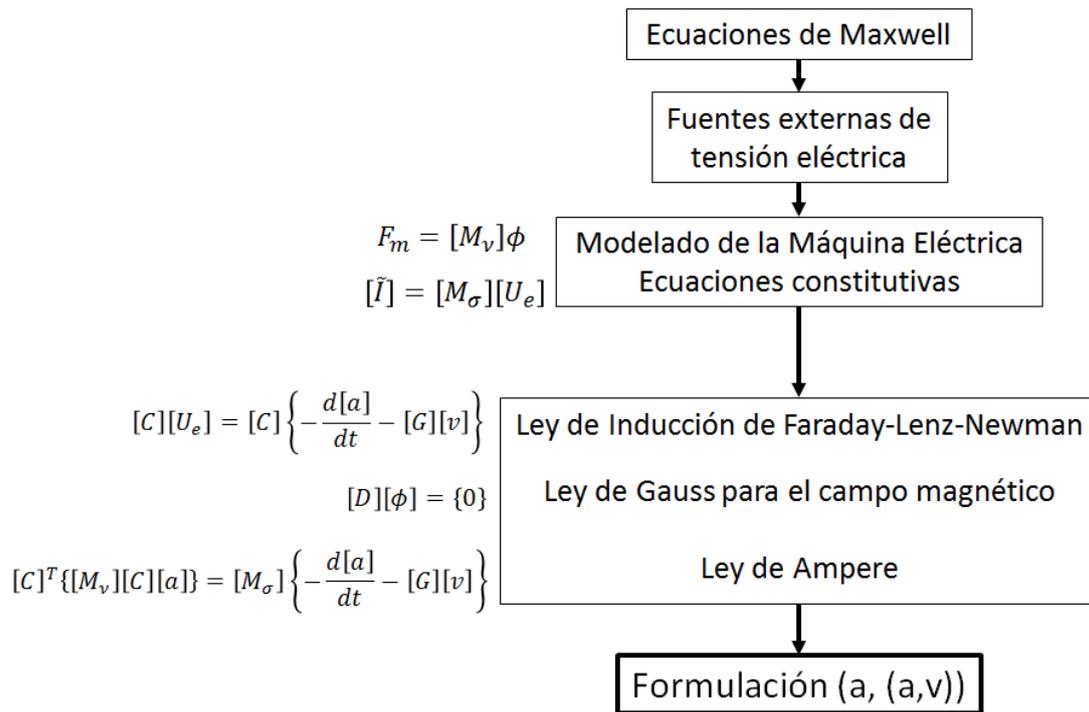


Figura 4-17. Diseño de una máquina eléctrica con formulación (a, (a,v)).

4.5 Método de la Celda y campo térmico

El campo térmico, tanto vectorial como escalar, desde un punto de vista matemático es mucho menos restrictivo que el campo electromagnético.

El campo térmico en la FF-MC su formulación sigue las siguientes reglas:

- Las temperaturas se asignan a los nudos primales, pues son variables de configuración.
- La diferencia de temperaturas se obtiene a partir de una operación de diferencias o gradiente, asignándose dichas diferencias de temperatura a las aristas primales. Las diferencias de temperatura se consideran variables de configuración.
- Las fuentes de calor están en los volúmenes duales, pues son variables de fuente.
- El flujo de calor atraviesa las superficies de los volúmenes duales. El flujo de calor es una variable de fuente.

El análisis que se va a hacer en esta tesis es el de una transmisión de calor, excluyéndose la transmisión de calor por convección y por radiación. Se parte de una situación de equilibrio donde el calor que entra es igual al calor que sale

más el posible calor generado en el interior del cuerpo, que es máquina eléctrica asíncrona en nuestro caso.

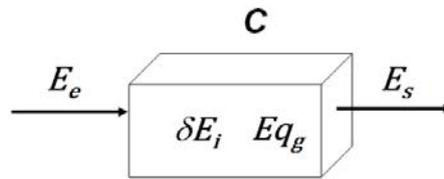


Figura 4-18. Transmisión de calor en un cuerpo.

El balance de energía debe ser $E_e \propto E_s$. Se pueden dar varios casos. Si $E_e = E_s$ estaríamos ante un caso de transmisión pura de calor (no se gana ni pierde temperatura en un proceso estacionario). Si $E_e > E_s$ estamos ante un enfriamiento del cuerpo, no es el caso de una máquina eléctrica. Entonces, el caso de la máquina eléctrica coincide con $E_e < E_s$. La explicación de este hecho es la siguiente:

$$E_e + E q_g - E_s = \delta E_i \quad \text{Ec. 4.33}$$

Que viene a decir que conocida la energía calorífica transmitida desde el exterior hacia el cuerpo E_e , conocida la energía generada en el interior del cuerpo $E q_g$, y medida la energía de salida del cuerpo E_s , si el balance no es cero se debe a una variación de su energía interna δE_i . Esta energía interna se relaciona con la capacidad que tienen los materiales del cuerpo para almacenar energía a lo largo de un tiempo determinado (Holman, 1999) pág. 1-7, 18-28. La ecuación analítica que explica este balance de energía es la ecuación de transmisión del calor:

$$\vec{\nabla} \cdot (-\lambda \cdot \vec{\nabla} \tau) + \rho C_p \frac{d\tau}{dt} = \dot{q} \quad \text{Ec. 4.34}$$

En el capítulo 3 se han desarrollado las bases teóricas de este tema con la amplitud requerida para el objeto de esta tesis. Es por ello que, aprovechando los mecanismos explicados del MC aplicados al campo electromagnético, pasaremos directamente a aplicarlos al campo térmico. Fraccionando la Ec. 3.26 en cada una de sus componentes, las iremos trasladando a los términos del MC.

La transmisión de calor por conducción $\dot{q}_\lambda = \vec{\nabla} \cdot (-\lambda \cdot \vec{\nabla} \tau)$, tipo Fourier, se correspondería en la FF-MC con la expresión siguiente:

$$\dot{q}_\lambda \equiv [\tilde{D}]\{-[M_\lambda][C][\tau]\} \quad \text{Ec. 4.35}$$

¿Por qué se le aplica una divergencia dual $[\tilde{D}]$? La explicación es sencilla: lo contenido en el paréntesis es una cantidad de calor, variable fuente, luego estará en el dual. Para ver esto más claro, volvamos a la formulación diferencial:

$$\vec{q} = -\lambda \cdot \vec{\nabla} \tau \quad \text{Ec. 4.36}$$

El vector \vec{q} representa el calor que fluye en la dirección de la normal \vec{n} siguiendo el gradiente de temperatura $\vec{\nabla} \tau$ y las condiciones impuestas por la conductividad térmica λ . El signo menos indica que va de foco caliente a foco frío (opuesto a la máxima variación). Así pues \vec{q} es la fuente del campo térmico. El aplicarle la divergencia tiene el significado de determinar si existe una fuente de calor. Evidentemente, si existe debe dar un valor distinto de cero. Cuando la divergencia es nula se está en una transmisión simple de calor. El valor \dot{q}_λ correspondería con la energía calorífica transmitida.

La matriz $[M_\lambda]$ es la parte más importante de esta parte de la Ec. 4.35. La determinación de las componentes de $[M_\lambda]$ constituye la clave del éxito del modelo a diseñar. En esta tesis se han desarrollado dos propuestas de construcción de la matriz de conductividad térmica que se detallarán en capítulos siguientes.

Aquí cabría hacer una valoración muy positiva de la Formulación Finita. En la literatura de formulación diferencial no se aclara bien el concepto de calor o energía calorífica, flujo térmico y densidad de flujo térmico. El calor o energía calorífica se trasmite a través de superficies que envuelven a la fuente calorífica $(\dot{q}_\lambda, \dot{q}, U)$. El flujo de calor pasaría a través de una superficie $q = -\lambda \cdot \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \tau$, ya que $\vec{A} = A \vec{n}$, por lo tanto q tiene el carácter de flujo (escalar). Y lo que normalmente aparece en la bibliografía como \vec{q} tiene el carácter de densidad de flujo de calor, pues $\vec{q} = \frac{\dot{q}}{A} \vec{n}$. Estas dudas quedan aclaradas en la Formulación Finita pues el calor es $Q[T, \tilde{S}]$, el flujo de calor es $\phi[T, \tilde{S}]$ y la densidad de calor es $q[T, \tilde{S}]$ (Tonti, 2013) pág.387-388.

El término \dot{q} corresponde a todas las posibles fuentes de energía calorífica que pueda tener la máquina: efecto Joule, histéresis, corrientes parásitas y fricciones mecánicas. En el MC se adoptará la expresión $[W]$.

El término $\{\rho C_p d\tau/dt\}$ se corresponde con la variación de energía interna en los materiales que constituyen la máquina eléctrica. En terminología de MC esta componente de la ecuación se expresa de la siguiente manera: $\{[M_{cp}] d\tau/dt\}$

Así pues, la expresión Ec. 3.26 , expresada en formulación diferencial, pasa a ser en la FF-MC de la siguiente manera:

$$[\tilde{D}]\{-[M_\lambda][G][\tau]\} + [M_{cp}] d\tau/dt = [W] \tag{Ec. 4.37}$$

Como conviene dejar todos los términos en operadores duales o primales, aprovechando las relaciones entre operadores primales y duales anteriormente explicadas, $[\tilde{D}] = -[G]^T$, la Ec. 4.37 pasa a ser:

$$[G]^T\{[M_\lambda][G][\tau]\} + [M_{cp}] d\tau/dt = [W] \tag{Ec. 4.38}$$

Toda esta ecuación viene dada en $[W \cdot m^{-3}]$, ya que son energía contenidas en un volumen.

4.6 El sistema de ecuaciones lineales electromagnéticas partiendo del MC en formulación $(a, (a,v))$

El MC ha permitido la construcción de un sistema de ecuaciones lineales tipo $[A][x] = [b]$ para resolver el problema electromagnético en una formulación global. La solución del vector de incógnitas permitirá obtener los valores de los potenciales escalares magnéticos y eléctricos:

$$[x] = \begin{bmatrix} [a]_{na \times 1} \\ [v]_{nn \times 1} \end{bmatrix}_{(na+nn) \times 1} \quad \text{Ec. 4.39}$$

El vector de constantes sería:

$$[b] = \begin{bmatrix} [I]_{na \times 1} \\ [0]_{nn \times 1} \end{bmatrix}_{(na+nn) \times 1} \quad \text{Ec. 4.40}$$

La matriz de coeficientes sería una matriz de bloques tal que:

$$[A] = \begin{bmatrix} [C^T M_v C]_{na \times na} & \frac{d}{dt} [M_\sigma G]_{na \times nn} \\ -\frac{d}{dt} [G^T M_\sigma]_{na \times na} & -\frac{d}{dt} [G^T M_\sigma G]_{nn \times nn} \end{bmatrix}_{(na+nn) \times (na+nn)} \quad \text{Ec. 4.41}$$

Las corrientes $[I]$ están asociadas a las superficies duales. Para el caso de la máquina eléctrica asíncrona se refiere a las corrientes estatóricas procedentes de fuentes externas y que se localizan en los devanados estatóricos, Figura 4-19. Estas corrientes se calculan por integración de las densidades de corriente \vec{J}_k de las superficies duales \tilde{S}_k , debiendo cumplir la condición de continuidad $\tilde{D}(\tilde{I}) = 0$, ver (Simón-Rodríguez, et al., 2015).

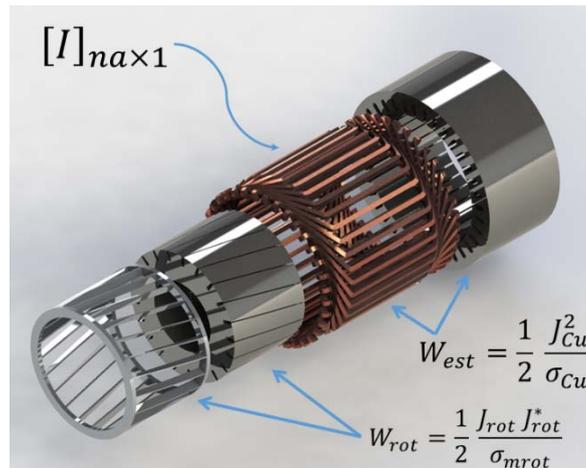


Figura 4-19. Potencias caloríficas estática y rotórica.

Una vez obtenido el vector de incógnitas $[x]$, la pregunta que cabe hacerse es: ¿Cuál es el motivo de calcular los potenciales a_i y v_i ? La respuesta es obtener los valores de campo \vec{B} y \vec{E} . A este procedimiento se le denomina *post-procesado*.

El sistema global anterior se ha obtenido mediante el ensamble de las matrices locales en la matriz global. Ahora, con el post-procesado el camino es inverso. Cada a_i y v_i corresponden a las respectivas aristas y nudos de las celdas. Habrá que post-procesar cada celda individualmente, colocándoles sus seis potenciales magnéticos escalares a , ya que son seis aristas de cada tetraedro, y sus cuatro potenciales eléctricos v , por los cuatro nudos respectivos del tetraedro.

El vector densidad de flujo magnético \vec{B} está vinculado a coordenadas espaciales y temporales. Recordemos que el flujo magnético en una celda se puede obtener de la siguiente manera:

$$[C]_{4 \times 6} \cdot [a]_{6 \times 1} = [\Phi]_{4 \times 1}$$

Ec. 4.42

$$[\Phi] = [\Phi_0 \ \Phi_1 \ \Phi_2 \ \Phi_3]^T$$

Observando la Figura 4-20(a) y haciendo cumplir la ley de Gauss para el campo magnético, $\Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0$, la única forma de que se cumpla es que uno de los flujos Φ_i sea combinación lineal de los otros tres. En el caso de la Figura 4-20(a) se observa que el flujo Φ_2 tiene una orientación entrante respecto de su cara y los otros tres la tienen saliente. La consecuencia práctica es que la restitución de los \vec{B}_i sólo se podrá hacer con tres de las componentes del flujo, siendo la cuarta combinación lineal de las otras tres.

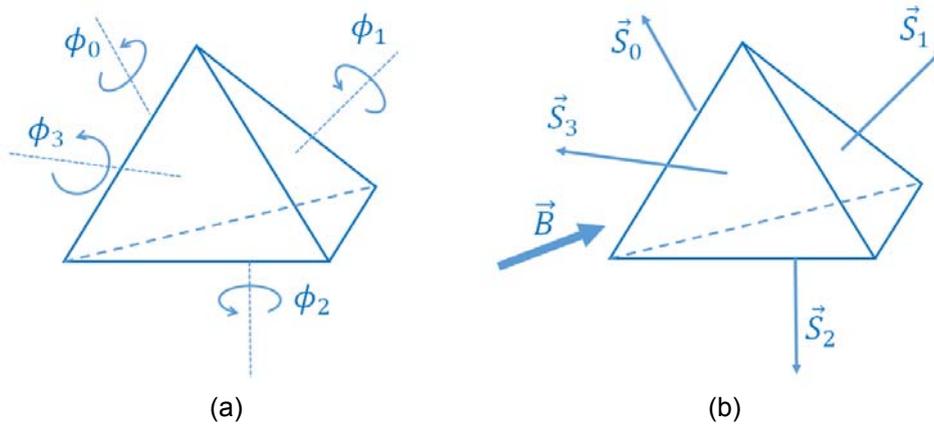


Figura 4-20. (a) Flujo de campo magnético.

En la Figura 4-20, en (a) se aprecia, que en el flujo de la celda, uno de ellos es combinación lineal de los otros tres. En (b) se indica la hipótesis de que el campo magnético es uniforme en toda la celda.

La hipótesis de partida es considerar la densidad de flujo magnético uniforme en la celda, Figura 4-20(b). Esto permite que el flujo de cada cara k sea $\phi_k = \vec{B} \cdot \vec{S}_k$. Los vectores que definen a las caras son del tipo $\vec{S}_k = S_{kx}\vec{i} + S_{ky}\vec{j} + S_{kz}\vec{k}$, entonces se puede montar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \Phi_0 \\ \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{0x} & S_{0y} & S_{0z} \\ S_{1x} & S_{1y} & S_{1z} \\ S_{2x} & S_{2y} & S_{2z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{0x} & S_{0y} & S_{0z} \\ S_{1x} & S_{1y} & S_{1z} \\ S_{2x} & S_{2y} & S_{2z} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Phi_0 \\ \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 4.43}$$

El post-procesado que se ha utilizado ha sido bajo el entorno GMSH. Este entorno tiene la particularidad de utilizar variables de campo y asignarlas a los nudos. Bajo la hipótesis de uniformidad, se puede asignar el valor de la densidad de flujo magnético, anteriormente calculada, a los cuatro nudos por igual. Pero para aumentar la precisión del cálculo, se recurre a una técnica de refinado denominada *superconvergencia* consistente en promediar todos los valores del campo que se han obtenido para un mismo nudo en cada una de la celdas que comparten dicho nudo, minimizándose el error cometido.

El siguiente reto consiste en obtener el valor del campo eléctrico \vec{E} . En esta tesis se ha adoptado un régimen armónico de corrientes para hacer los experimentos numéricos, por lo tanto el operador d_t pasa a ser $j\omega$. De esta manera la tensión inducida en la formulación global quedaría así:

$$[U]_{na \times 1}^G = -j\omega [a]_{na \times 1}^G - \{[G][v]\}_{na \times 1}^G \quad \text{Ec. 4.44}$$

Si se utilizase el vector de potenciales eléctricos $[v]$, ver Ec. 4.31. Teniendo esto en cuenta, la formulación local sería:

$$[U]_{6 \times 1}^L = -j\omega[a]_{6 \times 1}^L - \{[G][v]\}_{6 \times 1}^L \quad \text{Ec. 4.45}$$

De otra forma, si se utiliza la formulación (a, (a, χ)), ver Ec. 4.32, entonces:

$$[U]_{na \times 1}^G = -j\omega[a]_{na \times 1}^G - j\omega\{[G][\chi]\}_{na \times 1}^G \quad \text{Ec. 4.46}$$

El campo eléctrico \vec{E} se debe tomar como una función de campo afín. Para ello se recurre a las funciones de Whitney de orden uno W_i^1 asociadas a las aristas del tetraedro, siendo el campo eléctrico afín en la celda el siguiente:

$$\vec{E}_{k=1,\dots,4} = \sum_{i=1}^6 \vec{W}_i^1 U_i \quad \text{Ec. 4.47}$$

El post-procesado en GMSH asignará estos valores de campo a cada nudo k del tetraedro. Una vez obtenido el valor del campo eléctrico se procederá a obtener la densidad de corriente:

$$\vec{J}_{k=1,\dots,4} = \sigma \sum_{i=1}^6 \vec{W}_i^1 U_i \quad \text{Ec. 4.48}$$

Las densidades de corriente J permitirán calcular el calor que producen los fenómenos de Joule y de Foucault en la máquina asíncrona. En la ecuación de transmisión de calor Ec. 4.38 será el término $[W]$. Los valores de $[W]$ a partir de las densidades de corriente los obtendremos de las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \text{Rotor} &\rightarrow W_{rot} = \frac{1}{2} \frac{J_{rot} J_{rot}^*}{\sigma_{mrot}} \\ \text{Estator} &\rightarrow W_{est} = \frac{1}{2} \frac{J_{Cu}^2}{\sigma_{Cu}} \end{aligned} \quad \text{Ec. 4.49}$$

Siendo W_{rot} el calor generado en el rotor por las corrientes parásitas, en $[W \cdot m^{-3}]$; J_{rot} es la densidad de corriente en el rotor, en $[A \cdot m^{-2}]$; J_{rot}^* es el conjugado de J_{rot} , en $[A \cdot m^{-2}]$; σ_{mrot} es la conductividad eléctrica del material rotórico, en $[\Omega^{-1} \cdot m^{-1}]$; W_{est} es el calor generado en los conductores del estator, en $[W \cdot m^{-3}]$; J_{Cu} es la densidad de corriente de los devanados estatóricos, en $[A \cdot m^{-2}]$; σ_{Cu} es la conductividad de los devanados estatóricos, en $[\Omega^{-1} \cdot m^{-1}]$, ver (Lefik & Komez, 2008) y (Komez, et al., 2010). Ver Figura 4-19.

Una vez obtenidas las fuentes de calor $[W]$ y las matrices térmicas $[M_\lambda]$ y $[M_{Cp}]$, se procede a resolver la ecuación diferencial planteada en Ec. 4.38. para ello se utiliza el método de Crank-Nicolson con un tipo Euler implícito (Bullo, et al., 2007) (Delprete, et al., 10-13 Settembre 2008), (Alotto, et al., 2008), (Delprete, et al., 2010).

El objetivo es obtener el vector de temperaturas $\tau = [\tau_0, \dots, \tau_{nn}]^T$. Estas temperaturas serán obtenidas en diversos experimentos numéricos que se proponen en esta tesis. Con ellas validaremos la metodología FF-CM frente a otras temperaturas obtenidas en esos mismos experimentos pero mediante el Método de los Elementos Finitos.

4.7 Conclusiones

Se ha explicado el Método de la Celda y su adaptación a las ecuaciones electromagnéticas y térmicas formuladas bajo la teoría de la Formulación Finita.

Se ha particularizado dichas ecuaciones la formulación $(a, (a, v))$, y, además, se ha matizado que significa físicamente cada miembro de dichas ecuaciones cuando están aplicadas al funcionamiento de una máquina eléctrica asíncrona.

Bibliografía

Alotto, P., Bullo, M., Guarnieri, M. & Moro, F., 2008. A Coupled Thermo-Electromagnetic Formulation Based on the Cell Method. *Magnetics, IEEE Transactions on*, June, 44(6), pp. 702-705.

Alotto, P., Freschi, F. & Repetto, M., 2010. Multiphysics Problems via the Cell Method: The Role of Tonti Diagrams. *Magnetics, IEEE Transactions on*, Aug, 46(8), pp. 2959-2962.

Alotto, P., Freschi, F., Repetto, M. & Rosso, C., 2013. *The Cell Method for Electrical Engineering and Multiphysics Problems: An Introduction*. Primera ed. London, UK: Springer Science & Business Media.

Bettini, P. & Trevisan, F., 2003. Electrostatic analysis for plane problems with finite formulation. *Magnetics, IEEE Transactions on*, May, 39(3), pp. 1127-1130.

Branin, F. H., April, 1966. *The algebraic-topological basis for network analogies and the vector calculus*. Brooklyn, New York, USA, Polytechnic Institute of Brooklyn, pp. 453-491.

Branin, J. F. H., 1964. *D-C and Transient Analysis of Networks Using a Digital Computer*. New York, NY, USA, ACM, pp. 4.1--4.23.

Bullo, M., D'Ambrosio, V., Dughiero, F. & Guarnieri, M., 2007. A 3-D Cell Method Formulation for Coupled Electric and Thermal Problems. *Magnetics, IEEE Transactions on*, April, 43(4), pp. 1197-1200.

Codecasa, L. & Trevisan, F., 2006. Piecewise uniform bases and energetic approach for discrete constitutive matrices in electromagnetic problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 65(4), pp. 548-565.

Delprete, C., Freschi, F., Repetto, M. & Rosso, C., 10-13 Settembre 2008. *Metodo delle celle e approccio Multiphysics: applicazione alla termomeccanica*. s.l., AIAS - Associazione Italiana per L'Analisi delle Sollecitazioni.

Delprete, C., Freschi, F., Repetto, M. & Rosso, C., 2010. Experimental validation of a numerical multiphysics technique for electro thermo mechanical problem. *COMPEL - The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 29(6), pp. 1642-1652.

Desbrun, M., Kanso, E. & Tong, Y., 2008. Discrete differential forms for computational modeling. En: P. S. J. M. S. G. M. Z. Alexander I. Bobenko, ed. *Discrete differential geometry*. Berlin, Germany: Springer, pp. 287-324.

Feliziani, M. y otros, 2008. Educational value of the algebraic numerical methods in electromagnetism. *COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 27(6), pp. 1343-1357.

Geuzaine, C. & Remacle, J.-F., 2009. Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(11), pp. 1309-1331.

Giuffrida, C., Gruosso, G. & Repetto, M., 2006. Finite formulation of nonlinear magnetostatics with Integral boundary conditions. *Magnetics, IEEE Transactions on*, May, 42(5), pp. 1503-1511.

González-Domínguez, P. I. & Monzón Verona, J. M., 2013. *Contribution to improvement of the computing times for G, C, D matrix in the Cell Method*. Las Palmas de Gran Canaria, España, EUROGEN 2013, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, pp. 201-203.

Holman, J. P., 1999. *Transferencia de Calor*. Octava en inglés. Primera en español ed. Madrid, España: Mc Graw Hill.

Kaplan, C. & Murnaghan, F. D., 1930. On the Fundamental Constitutive Equations in Electromagnetic Theory. *Phys. Rev.*, Apr, Volumen 35, pp. 763-777.

Komez, K., Fernandez, X. M. L. & Lefik, M., 2010. Computer modelling of 3D transient thermal field coupled with electromagnetic field in three-phase induction

motor on load. *COMPEL - The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 29(4), pp. 974-983.

Lefik, M. & Komez, K., 2008. Computer modelling of 3D transient thermal field coupled with electromagnetic field in one phase induction motor with locked rotor. *COMPEL - The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 27(4), pp. 861-868.

Marrone, M., Rodriguez-Esquerre, V. & Hernandez-Figueroa, H., 2002. Novel numerical method for the analysis of 2D photonic crystals: the cell method. *Optics express*, 10(22), pp. 1299-1304.

Meeker, D., 2009. Finite Element Method Magnetics User's Manual, 2010. *Version*, Volumen 4, p. 25.

Repetto, M. & Trevisan, F., 2003. 3-D magnetostatic with the finite formulation. *IEEE transactions on magnetics*, 39(3), pp. 1135-1138.

Simón-Rodríguez, L. y otros, 2015. *La Matriz Fundamental de Bucles B en el Método de la Celda. Aplicación a un Problema Electromagnético de Corrientes Inducidas en 3D*. Cartagena de Indias, Colombia, CAIP 2015 - 12° Congreso Interamericano de Computación Aplicada a la Ingeniería de Procesos.

Simón-Rodríguez, L., P., G. D. & J.M., M. V., 2011. *Computational Geometry applied to Finite Formulation*. Funchal, Madeira, Portugal, ISEF 2011 - XV International Symposium on Electromagnetic Fields in Mechatronics, Electrical and Electronic Engineering.

Specogna, R. & Trevisan, F., 2005. Discrete constitutive equations in A-Chi geometric eddy-current formulation. *IEEE Trans. Magn*, 41(4), pp. 1259-1263.

Tonti, E., 2013. *The Mathematical Structure of Classical and Relativistic Physics*. first ed. Londo, UK: Birkhäuser.

Trevisan, F., 2002. Plane Magnetic Field Analysis with the Finite Formulation.

Trevisan, F. & Kettunen, L., 2006. Geometric interpretation of finite-dimensional eddy-current formulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 67(13), pp. 1888-1908.

CAPITULO 5

Matrices constitutivas $[M_\nu]$ y $[M_\sigma]$

Índice	<u>PÁG.</u>
5. Matrices constitutivas $[M_\nu]$ y $[M_\sigma]$	97
5.1 Introducción.....	97
5.2 Generalidades.....	97
5.3 Matriz constitutiva magnética $[M_\nu]$	98
5.4 Matriz constitutiva eléctrica $[M_\sigma]$	105
5.5 Conclusiones.....	108
Bibliografía	109

Síntesis

Se explica cómo se obtienen y la importancia que tienen las matrices constitutivas del campo electromagnético, que son la matriz de reluctividad $[M_\nu]$ y la matriz de conductividad $[M_\sigma]$.

Se exponen diferentes métodos para conseguir dichas matrices, enunciando las ventajas e inconvenientes que tiene cada uno de ellos.

5. Matrices constitutivas $[M_\nu]$ y $[M_\sigma]$

5.1 Introducción

Tanto en la Formulación Finita y en el Método de la Celda, el concepto de ecuación constitutiva es uno de los pilares fundamentales. No solamente porque es el nexo de unión entre variables de configuración y variables de fuente, sino que, además, es donde queda reflejado el comportamiento de la materia cuando es atravesada por los diferentes campos que se están estudiando.

En el Método de la Celda el papel fundamental corre a cargo de la *matriz constitutiva*. Es ella la que define el comportamiento del material cuando éste es atravesado por un campo.

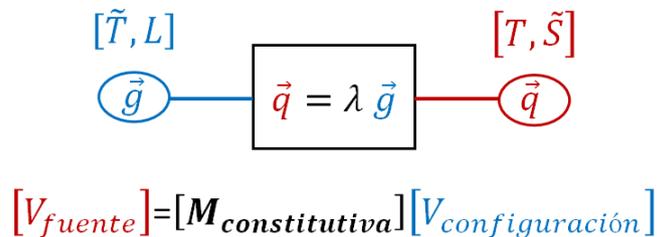


Figura 5-1. Concepto de ecuación y matriz constitutiva.

5.2 Generalidades

Tanto en la formulación diferencial como en la FF-MC existe el concepto de ecuación constitutiva. En el MC, donde la ecuación constitutiva está formada por un sistema matricial de ecuaciones, es donde aparece la matriz constitutiva. La matriz que va a enlazar la matriz de las variables de fuente con matriz de las variables de configuración será la matriz constitutiva.

En esta tesis trataremos las matrices constitutivas magnética, eléctrica y las del fenómeno de transmisión de calor.

Se ha estado observando en los capítulos 3 y 4 que deben existir propiedades de tipo geométrico y en el material, por donde discurre el campo, que permiten establecer la relación entre variables de configuración y variables de fuente.

Estas propiedades, sobre todo las geométricas, dependerán del tipo de celda utilizada.

En el Método de la Celda hay dos grandes estilos de calcular las matrices constitutivas.

Un estilo es mantener separadamente los cálculos que hayan de hacerse en el dual de los que hayan de hacerse en el primal, construyendo las matrices

constitutivas con magnitudes de ambos sub-espacios. A esta escuela pertenecen autores como Specogna, Trevisan, Kettunen, Repetto, entre otros.

Otro estilo de cálculo consiste en proyectar las magnitudes duales en el primal utilizando las relaciones geométricas adecuadas. Hecho esto, se procede a trabajar con las magnitudes primales - magnitudes de configuración - y las magnitudes proyectadas del dual en el primal. A partir de estas relaciones se construyen las matrices constitutivas. A esta escuela pertenecen autores como Tonti y Marrone, entre otros.

Salvo que se indique lo contrario, en esta tesis se trabajará cada variable en su correspondiente espacio dual y primal, sin recurrir a proyección alguna.

5.3 Matriz constitutiva magnética $[M_v]$

En el MC, la matriz constitutiva magnética permitirá relacionar la variable de configuración ϕ , flujo magnético, con la variable de fuente \mathcal{F}_m , fuerza magnetomotriz, de la siguiente manera:

$$[\mathcal{F}_m]_{4 \times 1}^L = [M_v]_{4 \times 4}^L [\phi]_{4 \times 1}^L \quad \text{Ec. 5.1}$$

El superíndice L indica que es una matriz de celda, o que se está trabajando en el modo local.

El equivalente de esta ecuación constitutiva en la formulación diferencial sería:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B} = \nu \vec{B} \quad \text{Ec. 5.2}$$

Se utiliza el tetraedro como celda. Para un determinado tetraedro V_k , por sus semi-aristas duales circula la \mathcal{F}_{mi} , con $i = (0, 1, 2, 3)$, Figura 5-2(b). Esto dará lugar a la aparición de un flujo ϕ_j en cada cara primal $j = (0, 1, 2, 3)$, Figura 5-2 (a).

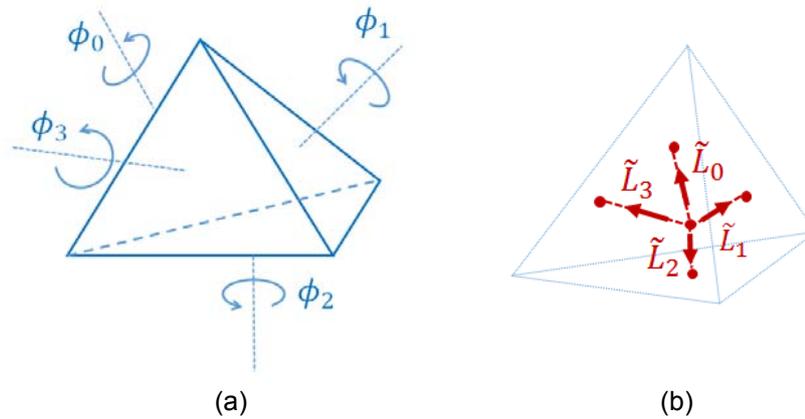


Figura 5-2. (a) Flujo magnético en caras primales. (b) Semi-aristas duales.

Se considera que el campo magnético es uniforme en el interior de la celda. Se considera que el material de la celda es isótropo y lineal. Podría no serlo, pero eso no es el objeto de esta tesis.

La ley de Gauss del campo magnético debe cumplirse. Por lo tanto:

$$\phi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = 0 \tag{Ec. 5.3}$$

Si ha de verificarse lo expuesto en Ec. 5.3 , junto con lo que se observa en la Figura 5-2(a), entonces uno de los flujos es combinación lineal de los otros tres. En este ejemplo es el flujo dos. Pero puede hacerse cualquier combinación lineal arbitraria. Proponemos al flujo tres como combinación lineal de los otros.

$$\phi_3 = -\phi_0 - \phi_1 - \phi_2 \tag{Ec. 5.4}$$

Considerando que:

$$\phi_j = \vec{B} \cdot \vec{S} = B_x S_{jx} + B_y S_{jy} + B_z S_{jz} \tag{Ec. 5.5}$$

Desarrollando los términos de flujo como productos matriciales de columnas por filas puesto que se supone que la incógnita es \vec{B} , entonces:

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} [S_{0x} \quad S_{0y} \quad S_{0z}] \\ \phi_1 &= \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} [S_{1x} \quad S_{1y} \quad S_{1z}] \\ \phi_2 &= \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} [S_{2x} \quad S_{2y} \quad S_{2z}] \end{aligned} \tag{Ec. 5.6}$$

Cuando se realiza una simulación no se sabe a priori que cara del tetraedro se va a enfrentar con el campo magnético para producir la mayor incidencia (mayor flujo). Para resolver esto en el caso del tetraedro utilizado como celda, se hacen cuatro supuestos.

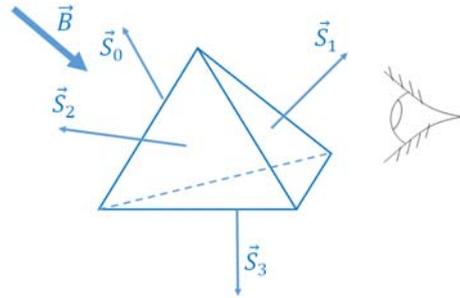
Supuesto 1:

La celda se enfrenta al campo por la cara 0.

$$\phi_0 = -\vec{B} \cdot \vec{S}_0 \quad \phi_1 = \vec{B} \cdot \vec{S}_1$$

$$\phi_2 = \vec{B} \cdot \vec{S}_2 \quad \phi_3 = \vec{B} \cdot \vec{S}_3$$

$$\phi_0 = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3$$



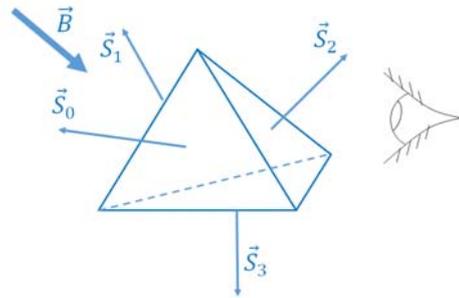
Supuesto 2:

La celda se enfrenta al campo por la cara 1.

$$\phi_0 = \vec{B} \cdot \vec{S}_0 \quad \phi_1 = -\vec{B} \cdot \vec{S}_1$$

$$\phi_2 = \vec{B} \cdot \vec{S}_2 \quad \phi_3 = \vec{B} \cdot \vec{S}_3$$

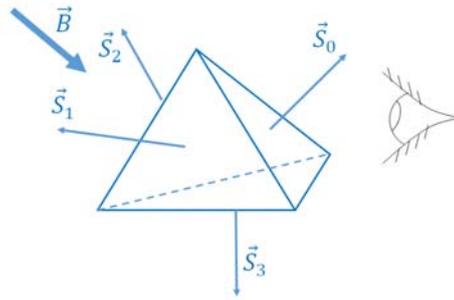
$$\phi_1 = \phi_0 + \phi_2 + \phi_3$$



Supuesto 3:

La celda se enfrenta al campo por la cara 2.

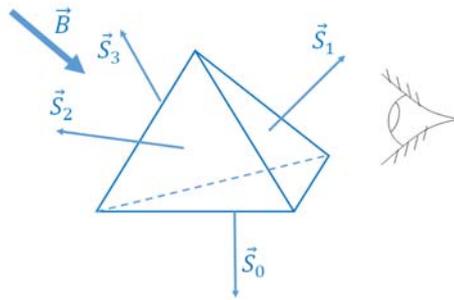
$$\begin{aligned} \phi_0 &= \vec{B} \cdot \vec{S}_0 & \phi_1 &= \vec{B} \cdot \vec{S}_1 \\ \phi_2 &= -\vec{B} \cdot \vec{S}_2 & \phi_3 &= \vec{B} \cdot \vec{S}_3 \\ \phi_2 &= \phi_0 + \phi_1 + \phi_3 \end{aligned}$$



Supuesto 4:

La celda se enfrenta al campo por la cara 3.

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \vec{B} \cdot \vec{S}_0 & \phi_1 &= \vec{B} \cdot \vec{S}_1 \\ \phi_2 &= \vec{B} \cdot \vec{S}_2 & \phi_3 &= -\vec{B} \cdot \vec{S}_3 \\ \phi_3 &= \phi_0 + \phi_1 + \phi_2 \end{aligned}$$



Debido a la amplitud del desarrollo, sólo se desarrolla el supuesto 1. Los otros supuestos tienen desarrollos análogos.

$$\phi_0 = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 \tag{Ec. 5.7}$$

Desarrollando:

$$\phi_0 = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{1x} \\ S_{1y} \\ S_{1z} \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{2x} \\ S_{2y} \\ S_{2z} \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{3x} \\ S_{3y} \\ S_{3z} \end{bmatrix}^T \tag{Ec. 5.8}$$

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1x} & S_{1y} & S_{1z} \\ S_{2x} & S_{2y} & S_{2z} \\ S_{3x} & S_{3y} & S_{3z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} \tag{Ec. 5.9}$$

Luego:

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1x} & S_{1y} & S_{1z} \\ S_{2x} & S_{2y} & S_{2z} \\ S_{3x} & S_{3y} & S_{3z} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} \equiv [B] = [S_a][\phi_a] \tag{Ec. 5.10}$$

Siguiendo los mismos procedimientos para los supuestos 2, 3 y 4:

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{0x} & S_{0y} & S_{0z} \\ S_{2x} & S_{2y} & S_{2z} \\ S_{3x} & S_{3y} & S_{3z} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} \equiv [B] = [S_b][\phi_b] \quad \text{Ec. 5.11}$$

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{0x} & S_{0y} & S_{0z} \\ S_{1x} & S_{1y} & S_{1z} \\ S_{3x} & S_{3y} & S_{3z} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \phi_3 \end{bmatrix} \equiv [B] = [S_c][\phi_c] \quad \text{Ec. 5.12}$$

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{0x} & S_{0y} & S_{0z} \\ S_{1x} & S_{1y} & S_{1z} \\ S_{2x} & S_{2y} & S_{2z} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \equiv [B] = [S_d][\phi_d] \quad \text{Ec. 5.13}$$

Como existe una combinación lineal con las expresiones de los flujos, para poderla salvar, procedemos de la siguiente manera para el supuesto 1:

$$[S_a] = \begin{bmatrix} S_{1x} & S_{1y} & S_{1z} \\ S_{2x} & S_{2y} & S_{2z} \\ S_{3x} & S_{3y} & S_{3z} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} S_{a11} & S_{a12} & S_{a13} \\ S_{a21} & S_{a22} & S_{a23} \\ S_{a31} & S_{a32} & S_{a33} \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 5.14}$$

Colocando adecuadamente vectores columna nulos, podemos expresar que las densidades de flujo son función de todos los flujos en cada supuesto.

Supuesto 1

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & S_{a11} & S_{a12} & S_{a13} \\ 0 & S_{a21} & S_{a22} & S_{a23} \\ 0 & S_{a31} & S_{a32} & S_{a33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} \equiv [B] = [S_{aa}][\phi_T] \quad \text{Ec. 5.15}$$

Supuesto 2

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{b11} & 0 & S_{b12} & S_{b13} \\ S_{b21} & 0 & S_{b22} & S_{b23} \\ S_{b31} & 0 & S_{b32} & S_{b33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} \equiv [B] = [S_{ba}][\phi_T] \quad \text{Ec. 5.16}$$

Supuesto 3

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{c11} & S_{c12} & 0 & S_{c13} \\ S_{c21} & S_{c22} & 0 & S_{c23} \\ S_{c31} & S_{c32} & 0 & S_{c33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} \equiv [B] = [S_{ca}][\phi_T] \quad \text{Ec. 5.17}$$

Supuesto 4

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{d11} & S_{d12} & S_{d13} & 0 \\ S_{d21} & S_{d22} & S_{d23} & 0 \\ S_{d31} & S_{d32} & S_{d33} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} \equiv [B] = [S_{da}][\phi_T] \quad \text{Ec. 5.18}$$

Como se pueden haber estado acumulando errores, entonces:

$$[B] \cong [S_{aa}][\phi_T] \cong [S_{ba}][\phi_T] \cong [S_{ca}][\phi_T] \cong [S_{da}][\phi_T] \quad \text{Ec. 5.19}$$

Convendría minimizar estos posibles errores. El procedimiento será el siguiente:

$$[B] = [\varpi][\phi_T] \quad \text{Ec. 5.20}$$

Siendo:

$$[\varpi] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \varpi_{00} & \varpi_{01} & \varpi_{02} & \varpi_{03} \\ \varpi_{10} & \varpi_{11} & \varpi_{12} & \varpi_{13} \\ \varpi_{20} & \varpi_{21} & \varpi_{22} & \varpi_{23} \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 5.21}$$

Obteniéndose cada ϖ_{ik} de la siguiente expresión:

$$\varpi_{ik} = \sum_{\substack{j=a,b,c,d \\ i=0,1,2 \\ k=0,1,2,3}} S_{ja} \quad \text{Ec. 5.22}$$

Una vez obtenido el campo \vec{B} , se puede obtener el valor de \vec{H} mediante su relación constitutiva: $\vec{H} = 1/\mu \vec{B} = \nu \vec{B}$.

Pero la FF utiliza variables globales. En ese caso la relación sería: $\mathcal{F}_m = M_\nu \phi$.

El objetivo será determinar el valor de M_ν . Para ello se parte de que:

$$\mathcal{F}_m = \int_{\vec{L}} \vec{H} \cdot d\vec{L} \quad \text{Ec. 5.23}$$

Está circulations del campo se efectuarán en las semi-aristas duales de la celda.

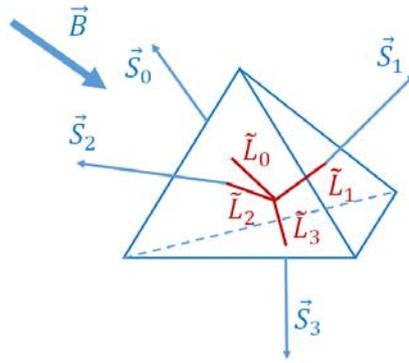


Figura 5-3. Celda con semi-aristas duales.

Las circulaciones de estas fuerzas magnetomotrices, $i = (0, 1, 2, 3)$, serán:

$$\mathcal{F}_{mi} = \tilde{L}_i \cdot \tilde{H} = (\tilde{L}_{ix}\vec{i} + \tilde{L}_{iy}\vec{j} + \tilde{L}_{iz}\vec{k}) \cdot (H_{ix}\vec{i} + H_{iy}\vec{j} + H_{iz}\vec{k}) \quad \text{Ec. 5.24}$$

Las aristas duales \tilde{L}_i están definidas como vectores de posición en la celda. El producto vectorial $\tilde{L}_i \cdot \tilde{H}$ se puede considerar como variable global pues es un escalar. En forma matricial, el conjunto de fuerzas magnetomotrices en la celda sería:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{F}_{m0} \\ \mathcal{F}_{m1} \\ \mathcal{F}_{m2} \\ \mathcal{F}_{m3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{L}_{0x} & \tilde{L}_{0y} & \tilde{L}_{0z} \\ \tilde{L}_{1x} & \tilde{L}_{1y} & \tilde{L}_{1z} \\ \tilde{L}_{2x} & \tilde{L}_{2y} & \tilde{L}_{2z} \\ \tilde{L}_{3x} & \tilde{L}_{3y} & \tilde{L}_{3z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 5.25}$$

$$[\mathcal{F}_m] = [\tilde{L}] [H] \quad \text{Ec. 5.26}$$

Pero:

$$[H]_{3 \times 1} = \nu [B]_{3 \times 1} = \nu [\varpi]_{3 \times 4} [\phi]_{4 \times 1} \quad \text{Ec. 5.27}$$

Luego, sustituyendo la Ec. 5.27 en Ec. 5.26:

$$[\mathcal{F}_m]_{4 \times 1} = [\tilde{L}]_{4 \times 3} \nu [\varpi]_{3 \times 4} [\phi]_{4 \times 1} \quad \text{Ec. 5.28}$$

Se concluye pues que:

$$[M_v]_{4 \times 4} = \nu [\tilde{L}]_{4 \times 3} [\varpi]_{3 \times 4} \quad \text{Ec. 5.29}$$

A este método de obtener la matriz constitutiva magnética $[M_v]$ se le denomina *método geométrico*. Para profundizar en este tema se recomienda leer a (Repetto & Trevisan, 2004).

Existe otra forma de construir la matriz $[M_v]$ con un campo magnético afín obtenido por la aplicación de funciones de Whitney de orden 1 (Trevisan & Kettunen, 2006). La matriz obtenida tiene la forma siguiente:

$$[M_v]_{4 \times 4}^{(\tilde{n})} = v \tilde{L}_i W_{f_j}^1(\tilde{n}) \quad \text{Ec. 5.30}$$

La matriz $[M_v]$, en su desarrollo geométrico, puede ser consultada en (Trevisan, 2002). No se detalla el desarrollo matemático para llegar a ella, pero si existe la suficiente información como para desarrollarlo como anteriormente se ha hecho. Así mismo, advierte del inconveniente que tiene la matriz de reluctividad: no es simétrica. Esto se corrige en la formulación global pues al realizar la operación $[\tilde{C}][M_v][C] = [C^T][M_v][C]$, la matriz local resultante si es simétrica, que es objetivo para poderse ensamblar en la matriz global.

Existe otro trabajo de (Marrone, 2004) donde adecua $[M_v]$ para operar con Diferencias Finitas y con el Método de los Elementos Finitos. Esto demuestra la versatilidad del Método de la Celda.

5.4 Matriz constitutiva eléctrica $[M_\sigma]$

La matriz constitutiva eléctrica $[M_\sigma]$ será la encargada de relacionar la variable de configuración tensión eléctrica U con la variable de fuente intensidad eléctrica I de la manera siguiente:

$$[I] = [M_\sigma][U] \quad \text{Ec. 5.31}$$

Para comprender la génesis de esta matriz constitutiva hay que recordar que las densidades de corriente eléctrica \vec{j} están asociadas a las seis semi-caras duales de la celda.

Estas semi-caras duales aportarán la corriente de la celda, pero la totalidad de la corriente que aporte el complejo dual será la suma de las corrientes aportadas por las celdas adyacentes a la estudiada.

En la Figura 5-4. Caras duales en tres y dos dimensiones. Se observan dos espacios duales. En Figura 5-4(a) correspondería a un espacio dual tridimensional. Las densidades de corriente irían en las semi-superficies duales \tilde{S}_i y \tilde{S}_j . En Figura 5-4(b) se muestra un dominio bidimensional, cuyas celdas son triángulos.

Por motivos de claridad en la explicación, se escoge el dominio bidimensional, entendiéndose que en el caso tridimensional sucede de manera análoga.

Escojamos el punto primal P_k . Las semi-superficies duales $(\tilde{S}_a, \tilde{S}_b, \tilde{S}_c)$ comparten este punto P_k .

Serán las densidades de corrientes, asociadas a las semi-superficies duales las que aporten la corriente total del dual estudiado en Figura 5-4(b).

Por analogía, en tres dimensiones, el papel que juega el punto P_k , lo jugará la arista a_k . Formándose la superficie dual con las semi-superficies duales que comparten la arista a_k .

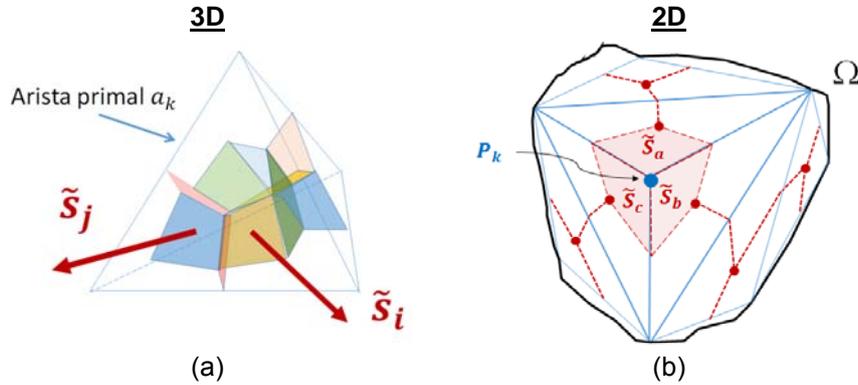


Figura 5-4. Caras duales en tres y dos dimensiones.

Hay dos criterios para situar en vector de densidades de corriente \vec{J} :

- Situar el vector \vec{J}_k en el baricentro de la cara ($B_{\tilde{S}_k}$)
- Calcular una densidades de corriente mediante un campo afín obtenido con funciones de Whitney de orden uno y situarlas en el baricentro promedio de las caras duales (\tilde{n})

En cuanto a baricentros se trata, en el complejo dual se hallan los baricentros de las caras duales $B_{\tilde{S}_k}$, los baricentros de la celda primal B_T y el promedio de los baricentros de las caras duales \tilde{n}

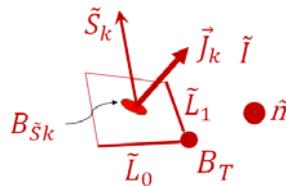


Figura 5-5. Baricentros en el tetraedro

En la Figura 5-5 Se muestran una serie de baricentros. El baricentro del tetraedro es B_T . El baricentro de la cara dual es $B_{\tilde{S}_k}$ y el promedio de los baricentros de las caras duales es \tilde{n} .

El promedio de los baricentros de las caras duales \tilde{n} se determina mediante la siguiente expresión:

$$\vec{n} = \left(\frac{1}{6} \sum_{k=0}^5 \tilde{S}_{kx}, \frac{1}{6} \sum_{k=0}^5 \tilde{S}_{ky}, \frac{1}{6} \sum_{k=0}^5 \tilde{S}_{kz} \right) \quad \text{Ec. 5.32}$$

En esta tesis se utilizará el baricentro (\vec{n}).

La corriente en una semi-cara del dual sería el producto vectorial $I_k = \vec{J}(B_{\tilde{S}k}) \cdot \vec{S}_k$. Por lo tanto, en todo el dual sería $I = \int_{\tilde{S}} \vec{J} \cdot d\vec{S}$.

Aplicando las funciones de Whitney de orden 1 en la arista primal j , se puede crear un campo eléctrico afín $E_j = W_j^1(B_{\tilde{S}i})$. Siendo $W_j^1(B_{\tilde{S}i})$ la función de Whitney de orden 1 para la arista primal j y evaluada en el baricentro de la cara primal i .

Cada elemento de la matriz de conductividad eléctrica $[M_\sigma]$, según (Specogna & Trevisan, 2005), se puede obtener mediante la expresión siguiente:

$$\sigma_{ij} = \sigma \vec{S}_i \cdot \vec{W}_j^1(B_{\tilde{S}i}) \quad i, j = (0, \dots, 5) \quad \text{Ec. 5.33}$$

Pero (Specogna & Trevisan, 2005) demuestran que se puede obtener una matriz de conductancia por otra vía más geométrica que la anterior. Proponen una matriz de conductancia eléctrica cuyos elementos sean se obtengan de la siguiente manera:

$$\sigma_{ij} = \frac{\sigma}{V_T} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \quad i, j = (0, \dots, 5) \quad \text{Ec. 5.34}$$

Si se desarrolla dicha matriz, su aspecto es el siguiente:

$$[M_\sigma] = \frac{\sigma}{V_T} \begin{bmatrix} \vec{S}_0 \cdot \vec{S}_0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \vec{S}_0 \cdot \vec{S}_5 \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \vec{S}_2 \cdot \vec{S}_2 & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ \vec{S}_5 \cdot \vec{S}_0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \vec{S}_5 \cdot \vec{S}_5 \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad \text{Ec. 5.35}$$

Esta matriz garantiza siempre su simetría. El procedimiento para construirla imposibilita que se sea singular, pues no existe ninguna cara dual de valor nulo. En realidad, desde el punto de vista matemático, lo que logra (Specogna & Trevisan, 2005) con esta operación es forzar la simetría de la matriz obtenida, en este caso $[M_\sigma]$.

Esto se puede entender si se parte de la base que una matriz simétrica se puede obtener de la siguiente manera:

$$[B]_{simétrica} = [A]_{no\ simétrica} \cdot [A]_{no\ simétrica}^T \quad \text{Ec. 5.36}$$

Teniendo esto en cuenta, la matriz de vectores de las caras duales, componente por componente, sería así:

$$[\tilde{S}] = \begin{bmatrix} \tilde{S}_{0x} & \tilde{S}_{0y} & \tilde{S}_{0z} \\ \tilde{S}_{1x} & \tilde{S}_{1y} & \tilde{S}_{1z} \\ \tilde{S}_{2x} & \tilde{S}_{2y} & \tilde{S}_{2z} \\ \tilde{S}_{3x} & \tilde{S}_{3y} & \tilde{S}_{3z} \\ \tilde{S}_{4x} & \tilde{S}_{4y} & \tilde{S}_{4z} \\ \tilde{S}_{5x} & \tilde{S}_{5y} & \tilde{S}_{5z} \end{bmatrix}_{6 \times 3} \quad y \quad [\tilde{S}]^T = \begin{bmatrix} \tilde{S}_{0x} & \tilde{S}_{1x} & \tilde{S}_{2x} & \tilde{S}_{3x} & \tilde{S}_{4x} & \tilde{S}_{5x} \\ \tilde{S}_{0y} & \tilde{S}_{1y} & \tilde{S}_{2y} & \tilde{S}_{3y} & \tilde{S}_{4y} & \tilde{S}_{5y} \\ \tilde{S}_{0z} & \tilde{S}_{1z} & \tilde{S}_{2z} & \tilde{S}_{3z} & \tilde{S}_{4z} & \tilde{S}_{5z} \end{bmatrix}_{6 \times 3} \quad \text{Ec. 5.37}$$

Operando:

$$[\tilde{S}] \cdot [\tilde{S}]^T = \begin{bmatrix} \vec{\tilde{S}}_0 \vec{\tilde{S}}_0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vec{\tilde{S}}_0 \vec{\tilde{S}}_5 \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \vec{\tilde{S}}_2 \vec{\tilde{S}}_2 & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ \vec{\tilde{S}}_5 \vec{\tilde{S}}_0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vec{\tilde{S}}_5 \vec{\tilde{S}}_5 \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad \text{Ec. 5.38}$$

Tal como demuestran (Specogna & Trevisan, 2005), esto es posible porque la obtención de un campo eléctrico afín mediante la utilización de las funciones de Whitney de orden 1, evaluadas en la arista j con respecto al baricentro \vec{n} , sería lo mismo que:

$$\sigma_{ij} = \sigma \vec{\tilde{S}}_i \cdot \vec{W}_j^1(\vec{n}) = \sigma \vec{\tilde{S}}_i \cdot \frac{1}{V_T} \vec{\tilde{S}}_j \quad i, j = (0, \dots, 5) \quad \text{Ec. 5.39}$$

Ya que $\vec{W}_j^1(\vec{n}) = \frac{1}{V_T} \vec{\tilde{S}}_j$. A lo largo de experimentos numéricos hechos en esta tesis, se ha comprobado que ambas propuestas son válidas.

5.5 Conclusiones

En esta tesis se han probado los tipos de matrices constitutivas propuestos en la literatura al respecto. Su validez ha quedado demostrada.

La elección de cada una de ellas dependerá de la dificultad de cálculo, en cuanto a costo computacional se refiere.

Hay modelos, como los basados en las funciones de Whitney que tienen un buen resultado en cuanto a precisión se refiere. Pero, cuando los mallados son muy densos, es obvio que se ralentice el proceso, pues la construcción de las funciones de Whitney puede ser laboriosa.

En cambio, con la propuesta hecha en Ec. 5.35, el cálculo se acelera. Esto se evidencia viendo que los vectores que definen a las aristas duales tienen que ser calculados para todas las propuestas hechas. Una vez calculados, basta con realizar los productos escalares que se indican y construir la matriz, consiguiendo un notable ahorro de tiempo.

Es de destacar que las matrices $[M_v]$ no son simétricas, pero al operarlas, en el MC, siguiendo el criterio $[\tilde{C}][M_v][C] = [C^T][M_v][C]$, se vuelven simétricas y semidefinidas (Specogna & Trevisan, 2005).

En cambio las matrices $[M_\sigma]$ garantizan, desde la formulación local, su simetría, sobre todo la propuesta en Ec. 5.35.

Bibliografía

Marrone, M., 2004. Properties of constitutive matrices for electrostatic and magnetostatic problems. *Magnetics, IEEE Transactions on*, May, 40(3), pp. 1516-1520.

Repetto, M. & Trevisan, F., 2004. Global formulation of 3D magnetostatics using flux and gauged potentials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60(4), pp. 755-772.

Specogna, R. & Trevisan, F., 2005. Discrete constitutive equations in A-Chi geometric eddy-current formulation. *IEEE Trans. Magn*, 41(4), pp. 1259-1263.

Trevisan, F., 2002. The Cell method for the analysis of 3D static and quasi-static magnetic fields. *Journal of Computational Physics (Elsevier Preprint)*.

Trevisan, F. & Kettunen, L., 2006. Geometric interpretation of finite-dimensional eddy-current formulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 67(13), pp. 1888-1908.

CAPITULO 6

Matrices constitutivas $[M_\lambda]$ y $[M_{Cp}]$. Varias aportaciones a la ecuación de transmisión de calor

Índice	<u>PÁG.</u>
6. Matrices constitutivas térmicas. Varias aportaciones a la ecuación de transmisión de calor	113
6.1 Introducción.....	113
6.2 Transmisión de calor en la máquina asíncrona	113
6.3 La M_λ adaptada de M_σ . Una aportación	117
6.4 Otra propuesta: la matriz M_τ	119
6.5 La matriz constitutiva $M_{\lambda 2D}$ para dominios bidimensionales.....	122
6.6 La matriz constitutiva M_{Cp} para dominios tridimensionales.....	124
6.7 Conclusiones	125
Bibliografía	126

Síntesis

Se explica cómo se obtienen y la importancia que tienen las matrices constitutivas del campo térmico, que son la matriz de conductividad térmica $[M_\lambda]$ y la matriz de capacidad térmica $[M_{Cp}]$.

Se exponen diferentes métodos para conseguir dichas matrices, enunciando las ventajas e inconvenientes que tiene cada uno de ellos.

6. Matrices constitutivas térmicas. Varias aportaciones a la ecuación de transmisión de calor

6.1 Introducción

Recordando la ecuación de transmisión del calor en la FF-MC, cuya expresión es:

$$[G]^T \{ [M_\lambda][G][\tau] \} + [M_{cp}] \frac{d\tau}{dt} = [W] \quad \text{Ec. 6.1}$$

Se puede observar que existen dos ecuaciones constitutivas $[M_\lambda]$ y $[M_{cp}]$. La matriz constitutiva $[M_\lambda]$ pertenece a la componente de transmisión de calor de la ecuación de Fourier. Mientras, la matriz constitutiva $[M_{cp}]$ pertenece a transmisión de calor con el cambio de temperatura, entendiéndose como la capacidad que tiene el cuerpo para almacenar energía calorífica. En el caso de esta tesis correspondería a la capacidad que tiene la máquina asíncrona para almacenar el calor generado en su interior.

Ambas matrices indican que dependen de las características físicas de los materiales de los cuales está hecha la máquina asíncrona. Estas características van a ser la conductividad térmica (λ), el calor específico del material (C_p) y la densidad del mismo (ρ).

6.2 Transmisión de calor en la máquina asíncrona

El tratamiento que se hace de la ecuación de Fourier de transmisión del calor en la FF-MC es el que halla en los trabajos de (Bullo, et al., 2006a), (Bullo, et al., 2006b) y (Bullo, et al., 2007), tanto si es en dos como en tres dimensiones. Estos autores pasan la celda de coordenadas generales cartesianas absolutas a coordenadas locales normalizadas, referido el origen en uno de los vértices del tetraedro.

Esto conlleva que cada celda, cuando se calcule en modo local, deban sus coordenadas absolutas ser convertidas en coordenadas locales normalizadas. Una vez terminados los cálculos, cuando los datos calculados en modo local deban ser ensamblados en las matrices globales, previamente deben ser convertidos a coordenadas absolutas, que son a las que está referido el modo global.

Este proceso de conversiones en ambos sentidos tiene un coste computacional que se debe pagar.

Los autores (Bullo, et al., 2006a), (Bullo, et al., 2006b) y (Bullo, et al., 2007), utilizan indistintamente modelos de distribución de temperaturas basados en interpolaciones lineales o en interpolaciones cuadráticas. Se debe tener en cuenta que una interpolación cuadrática consume más recursos del ordenador, pero es más precisa que una interpolación lineal. El hecho de ser cuadrática disminuye los errores al multiplicarse los valores aproximado por si mismos (elevar al cuadrado).

Otros autores recurren a buscar simetrías en el objeto o máquina a analizar. Escogen una distribución simétrica siguiendo un eje de revolución, o bien una simetría plana; con lo cual el problema queda reducido a un dominio bidimensional. Si el fenómeno térmico se comporta igual a lo largo del eje de simetría escogido, los resultados se restituirán de igual manera a lo largo del mencionado eje.

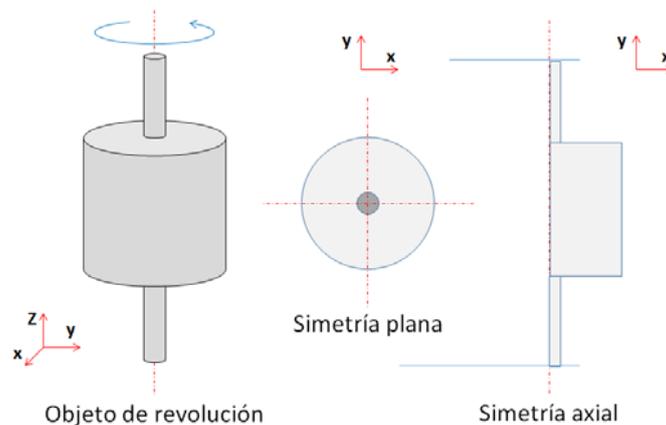


Figura 6-1. Simetría plana y axial de un cuerpo de revolución.

Entre los autores que siguen esta técnica está Enzo Tonti, (Tonti, 2000) y (Tonti, 2001). Utiliza distribuciones de temperatura de interpolación cuadrática. Aparte de esto, todas las variables del dual son proyectadas geoméricamente al primal, ciñéndose todos los cálculos al espacio primal. También recurre a crear un sistema de coordenadas locales, en este caso sobre un vértice de referencia en el triángulo, que va a ser la celda a utilizar debido a la distribución, con simetría plana, utilizada.

En la máquina eléctrica asíncrona no se puede utilizar una distribución, axial o plana, de temperaturas. Cabría pensar en el rotor de jaula de ardilla. En este caso las fuentes de calor están prácticamente situadas en el volumen que ocupa el mismo. Exceptuaríamos los segmentos anterior y posterior del eje, donde pudiera aparecer calor como consecuencia de corrientes inducidas en los mismos. El resto, en sí mismo, pudiera dar la apariencia de tener simetría axial o plana. La jaula y el núcleo ferromagnético ocupan el mismo volumen con una simetría parecida, la de un cilindro.



Figura 6-2. Rotor de jaula de ardilla (catálogo comercial).

Esto es restrictivo, pues el mismo razonamiento no se puede aplicar para una máquina asíncrona de rotor bobinado. Al menos las cabezas de bobinas rotórica no cumplirían con estas simetrías. Añadiendo, además, que los fenómenos electromagnéticos y térmicos son diferentes en las cabezas de bobina que en la parte cilíndrica del rotor.

Destacaríamos entre otras diferencias las siguientes:

- El volumen que rodea a las cabezas de bobinas rotóricas es, normalmente, aire.
- Las cabezas de bobinas rotóricas no están afectadas directamente por los fenómenos térmicos originados por la histéresis magnética y las corrientes de Foucault que aparecen en el núcleo rotórico.
- La capacidad de almacenar energía calorífica es mucho menor que en la parte cilíndrica del rotor, pues mientras éste está compuesto por acero ferromagnético, acero estructural (eje), material aislante y cobre; las cabezas de bobina sólo están formadas por cobre y material aislante.



Figura 6-3. Cabezas de bobina (catálogo comercial).

En la Figura 6-3, las flecha rojiblancas señalan las cabezas de bobina en un rotor bobinado de una máquina eléctrica asíncrona.

Se ha de señalar que una de las fuentes de calor que existe en el rotor son las fricciones mecánicas, las cuales transmiten calor al rotor. Son de especial importancia las generadas por las fricciones en los cojinetes.

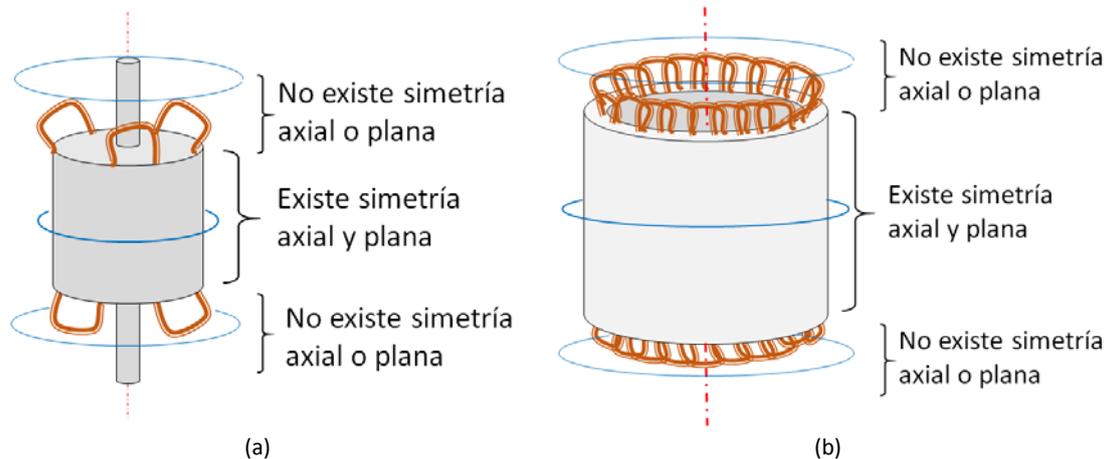


Figura 6-4. Máquina asíncrona de rotor bobinado (a) y estator (b).

En caso del estator predomina como fuente de calor el efecto Joule en los conductores, por los cuales discurren las corrientes procedentes de la fuente energía eléctrica situada en el exterior de la máquina eléctrica. También existen otras fuentes de calor como son los fenómenos de histéresis magnética y las corrientes de Foucault. Descartamos el calor transmitido por los escudos anterior y posterior y generado por la fricción del eje en los rodamientos, pues no es objeto de esta tesis. El estator, compartido por ambos tipos de máquinas, se podría hablar de simetría axial o simetría plana en la zona del entrehierro, encontrándonos con el mismo problema cuando se llegase a la zona de las cabezas de bobinas, anterior y posterior del estator.

Esta fue una de las causas, entre otras, para descartar como línea de actuación en esta tesis el buscar reducciones de objetos a simetría axiales o planas.

Por lo tanto, la única forma de resolver este inconveniente es desarrollar la FF-MC en dominios tridimensionales.

Con lo expuesto anteriormente, debemos descartar las simetrías axiales y planas, y, si se pudiera, evitar cambios de coordenadas y proyección del sub espacio dual al primal, con el consiguiente ahorro de memoria y tiempo computacional.

La hipótesis de trabajo fue: ¿Existe algún camino que pueda cumplir todos los requisitos que queremos? A continuación se intenta dar respuesta a esta pregunta.

6.3 La $[M_\lambda]$. adaptada de $[M_\sigma]$. Una aportación

El primer paso a dar es trabajar de forma separada la ecuación de conducción de calor. Concretamos esta ecuación en la máquina eléctrica asíncrona.

Ley de transmisión del calor de Fourier a través del rotor, entrehierro y estator

$$[G]^T \{ [M_\lambda] [G] [\tau] \} \tag{Ec. 6.2}$$

Fuentes de calor por efecto Joule, histéresis magnética y corrientes de Foucault

$$[W] \tag{Ec. 6.3}$$

Cambios en la energía interna dependiendo de los materiales constructivos

$$[M_{cp}] \frac{d\tau}{dt} \tag{Ec. 6.4}$$

Observamos que la ley de Fourier de conducción de calor tiene una analogía con la ley de conducción de la corriente eléctrica:

Conducción de calor	Corriente eléctrica
$[\tilde{D}] \{ -[M_\lambda] [G] [\tau] \} = [q_\lambda]$	$[\tilde{D}] \{ [M_\sigma] [G] [v] \} = [0]$

Tabla 6-1. Conducción térmica y conducción eléctrica (I).

Son fenómenos físicos que presentan ciertas analogías. La aplicación de la divergencia a un cuerpo en el cual existe un campo de temperaturas, nos indicará si existen fuente de calor positivo o negativo (frío). Sólo indicaría cero cuando se estuviera ante un cuerpo que lo único que se limita a conducir calor. En este caso la distribución de temperaturas se mantiene estacionaria a lo largo del tiempo.

En cambio, en el fenómeno de conducción eléctrica, hay que tener en cuenta que la aplicación de la divergencia a la ley de Ohm: $[M_\sigma] [G] [v] = [I]$, no puede dar un valor distinto de cero, pues incumpliría la ley de continuidad, o ley de Kirchhoff si estuviésemos aplicando la teoría de circuitos lineales.

Pero una cosa es cierta, si operamos con la divergencia dual y buscamos su equivalente primal, entonces lo expuesto en la tabla Tabla 6-1 pasa a ser:

Conducción de calor	Corriente eléctrica
$-[G]^T \{ -[M_\lambda] [G] [\tau] \} = [q_\lambda]$	$-[G]^T \{ [M_\sigma] [G] [v] \} = [0]$

Tabla 6-2. Conducción térmica y conducción eléctrica (II).

Salvo el cambio de signo y de operador, el resto permanece inalterado en ambas expresiones. Esto nos lleva a pensar que, operativamente, existe la siguiente analogía:

$$[M_\lambda] \Leftrightarrow [M_\sigma] \quad \text{Ec. 6.5}$$

Por lo tanto, bajo la hipótesis de que pudiera existir tal equivalencia en la FF-MC, tomando la expresión propuesta por (Specogna & Trevisan, 2005), diremos que:

$$\frac{\lambda}{V_T} \begin{bmatrix} \vec{s}_0 \vec{s}_0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vec{s}_0 \vec{s}_5 \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \vec{s}_2 \vec{s}_2 & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vec{s}_5 \vec{s}_0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vec{s}_5 \vec{s}_5 \end{bmatrix}_{6 \times 6} \Leftrightarrow \frac{\sigma}{V_T} \begin{bmatrix} \vec{s}_0 \vec{s}_0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vec{s}_0 \vec{s}_5 \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \vec{s}_2 \vec{s}_2 & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vec{s}_5 \vec{s}_0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vec{s}_5 \vec{s}_5 \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad \text{Ec. 6.6}$$

Puede parecer un hecho trivial, pero creemos que no lo es. Y no lo es por una sencilla razón. Sea como fuere, cuando se han de realizar cálculos térmicos a partir de fenómenos electromagnéticos, la matriz $[M_\sigma]$ habrá de calcularse obligatoriamente. Entonces, ¿Por qué calcular dos veces lo mismo?

Las matrices $[M_\lambda]$ y $[M_\sigma]$ topológicamente son iguales: $\lambda \left(\frac{1}{V_t} \vec{s}_i \vec{s}_j \right) \Leftrightarrow \sigma \left(\frac{1}{V_t} \vec{s}_i \vec{s}_j \right)$.

Para confirmar si esta suposición tiene validez, se diseñaron una serie de experimentos, que fueron contrastados con resultados cuya validez está asegurada, como pueden ser expresiones analíticas y software de reconocido prestigio. Este software está basado en el Método de los Elementos Finitos, tanto en dos como en tres dimensiones.

Los experimentos partieron de un supuesto de conducción pura de calor, en ausencia de fuentes internas de calor y temperaturas estacionarias:

$$[M_\lambda][G][\tau] = [q_\lambda] \quad \text{Ec. 6.7}$$

Se establecieron unas condiciones de contorno, tipo Dirichlet, donde se fijaron dos temperatura, T_1 y T_2 , en dos caras del cuerpo, considerándose el resto de las caras, que no eran atravesadas por el flujo de calor, como aislantes perfectos.

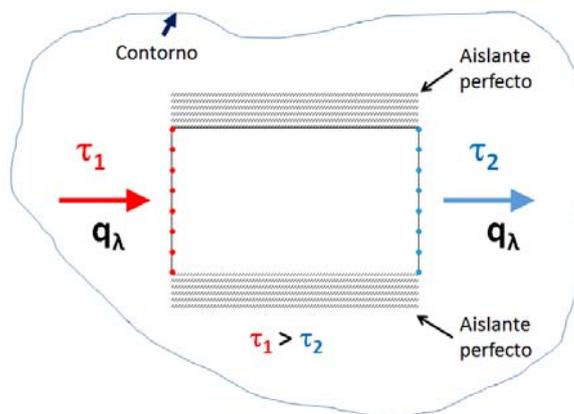


Figura 6-5. Modelo para transmisión de calor con $[M_\lambda]$.

El diseño tipo es el que se muestra en Figura 6-5. Los experimentos numéricos se llevaron a cabo en dos y tres dimensiones, con varios materiales de conductividades térmicas diferentes.

En la Figura 6-5, se expone uno de los modelos matemáticos que se utilizó para comprobar la validez de la matriz constitutiva de transmisión de calor con $[M_d]$. El análisis de los resultados obtenidos en los experimentos numéricos, los cuales se expondrán en capítulos posteriores, nos lleva a pensar que esta hipótesis es perfectamente válida.

Aun así, pudiendo pensar que tales suposiciones no fuesen correctas, hemos ideado una alternativa a la solución planteada.

6.4 Otra propuesta: la matriz $[M_\tau]$

Los resultados obtenidos con la matriz adaptada de la propuesta por (Specogna & Trevisan, 2005) fueron lo suficientemente buenos, que pudiera ser que no fuesen correctos del todo, o bien tuviesen singularidades que no se apreciaran en los diferentes experimentos que se llevaron a cabo.

Basados en estos supuestos, se diseñó una nueva matriz de conductividades térmicas.

Se parte que la temperatura se distribuye siguiendo una función lineal que depende de las coordenadas espaciales:

$$\tau_i(x, y, z) = g_x x + g_y y + g_z z + a \quad \text{Ec. 6.8}$$

Tal que los nudos de la celda, tetraedro, tengan las siguientes temperaturas:

$$\begin{aligned} \tau_0 &= g_x x_0 + g_y y_0 + g_z z_0 + a \\ \tau_1 &= g_x x_1 + g_y y_1 + g_z z_1 + a \\ \tau_2 &= g_x x_2 + g_y y_2 + g_z z_2 + a \\ \tau_3 &= g_x x_3 + g_y y_3 + g_z z_3 + a \end{aligned} \quad \text{Ec. 6.9}$$

El sistema de ecuaciones a resolver sería:

$$\begin{bmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_0 \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 6.10}$$

$$[B]_{4 \times 4} [Ga]_{4 \times 1} = [\tau]_{4 \times 1} \quad \text{Ec. 6.11}$$

No se calcula el término a pues: $\partial a / \partial x = 0$; $\partial a / \partial y = 0$; $\partial a / \partial z = 0$. En el Anexo 1 se calculan los términos g_x , g_y , g_z .

Entonces, al aplicar el gradiente a la expresión de la distribución espacial de temperaturas expuesta en Ec. 6.8, se obtiene lo siguiente:

$$\vec{\nabla} \cdot \tau_i(x, y, z) = g_x \vec{i} + g_y \vec{j} + g_z \vec{k} \quad \text{Ec. 6.12}$$

Utilizando la matriz $[M_\lambda]$, que hemos asimilado a una conducción eléctrica y que, supuestamente damos por válida, entonces podemos decir que el calor transmitido utilizando esta matriz es:

$$[Q]_{6 \times 1} = [M_\lambda]_{6 \times 6} [G]_{6 \times 4} [\tau]_{4 \times 1} \quad \text{Ec. 6.13}$$

Supongamos que existiese una matriz $[A_\tau]$ tal que:

$$[M_\lambda]_{6 \times 6} = [\tilde{S}]_{6 \times 3} [A_\tau]_{3 \times 6} \quad \text{Ec. 6.14}$$

Siendo $[\tilde{S}]$ la matriz de caras duales de la celda:

$$\tilde{S}_i = \tilde{S}_{ix} \vec{i} + \tilde{S}_{iy} \vec{j} + \tilde{S}_{iz} \vec{k} \quad i = (0, \dots, 5) \quad \text{Ec. 6.15}$$

Si denominamos:

$$[q]_{3 \times 1} = -\lambda \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{bmatrix}_{3 \times 1} = -\lambda [gradT]_{3 \times 1} \quad \text{Ec. 6.16}$$

Con lo que:

$$[Q']_{6 \times 1} = -\lambda [\tilde{S}]_{6 \times 3} [gradT]_{3 \times 1} \quad \text{Ec. 6.17}$$

Supongamos también que:

$$[q]_{3 \times 1} = [A_\tau]_{3 \times 6} [G]_{6 \times 4} [\tau]_{4 \times 1} \quad \text{Ec. 6.18}$$

Llamando $[X]_{6 \times 1} = [G]_{6 \times 4} [\tau]_{4 \times 1}$, entonces por dos caminos diferentes se debe llegar al mismo resultado:

$$[Q']_{6 \times 1} = [Q]_{6 \times 1} \quad \text{Ec. 6.19}$$

Sustituyendo:

$$-\lambda [\tilde{S}]_{6 \times 3} [gradT]_{3 \times 1} = [M_\lambda]_{6 \times 6} [G]_{6 \times 4} [\tau]_{4 \times 1} \quad \text{Ec. 6.20}$$

Volviendo a sustituir la matriz $[X]_{6 \times 1}$ y el valor dado a $[M_\lambda]$ en la expresión Ec. 6.14, entonces:

$$-\lambda [\tilde{S}]_{6 \times 3} [gradT]_{3 \times 1} = [\tilde{S}]_{6 \times 3} [A_\tau]_{3 \times 6} [X]_{6 \times 1} \quad \text{Ec. 6.21}$$

Simplificando el término $[\tilde{S}]_{6 \times 3}$, queda:

$$-\lambda [gradT]_{3 \times 1} = [A_\tau]_{3 \times 6} [X]_{6 \times 1} \quad \text{Ec. 6.22}$$

Tenemos un sistema de ecuaciones resoluble:

$$[X] = [G] [\tau] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_0 \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 6.23}$$

$$[X] = \begin{bmatrix} -\tau_0 + \tau_1 \\ -\tau_0 + \tau_2 \\ -\tau_0 + \tau_3 \\ -\tau_1 + \tau_2 \\ -\tau_2 + \tau_3 \\ -\tau_1 + \tau_3 \end{bmatrix}_{6 \times 1} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}_{6 \times 1} \quad \text{Ec. 6.24}$$

$$[A_\tau][X] = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} & A_{04} & A_{05} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \end{bmatrix}_{3 \times 6} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}_{6 \times 1} \quad \text{Ec. 6.25}$$

$$-\lambda \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} & A_{04} & A_{05} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \end{bmatrix}_{3 \times 6} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}_{6 \times 1} \quad \text{Ec. 6.26}$$

Por lo amplio del desarrollo de Ec. 6.26, el cálculo de la matriz $[A_\tau]$ se explica en el Anexo 1. Una vez calculados los términos $A_{\tau ij}$, pasamos a exponerlos:

$$[A_\tau] = \frac{\lambda}{\Delta} \begin{bmatrix} (y_3 z_2 - y_2 z_3) & (y_1 z_3 - y_3 z_1) & (y_2 z_1 - y_1 z_2) & (y_3 z_0 - y_0 z_3) & (y_1 z_0 - y_0 z_1) & (y_0 z_2 - y_2 z_0) \\ (x_2 z_3 - x_3 z_2) & (x_3 z_1 - x_1 z_3) & (x_1 z_2 - x_2 z_1) & (x_0 z_3 - x_3 z_0) & (x_0 z_1 - x_1 z_0) & (x_2 z_0 - x_0 z_2) \\ (x_3 y_2 - x_2 y_3) & (x_1 y_3 - x_3 y_1) & (x_2 y_1 - x_1 y_2) & (x_3 y_0 - x_0 y_3) & (x_1 y_0 - x_0 y_1) & (x_0 y_2 - x_2 y_0) \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 6.27}$$

Donde Δ es el determinante del sistema de ecuaciones definido en Ec. 6.10.

Se muestra que nuestra matriz es más complicada de operar que la propuesta por (Specogna & Trevisan, 2005).

$$[M_\tau] = [\tilde{S}][A_\tau] \quad \text{Ec. 6.28}$$

Queda evidenciado en los experimentos numéricos que existe más de una forma de construir las matrices constitutivas.

6.5 La matriz constitutiva $[M_\lambda]^{2D}$ para dominios bidimensionales

Si bien hemos advertido que en esta tesis no se han tratado los cuerpos tridimensionales con reducciones a simetrías axiales o a simetrías planas, conviene destacar lo siguiente. Existen problemas físicos que, en sí mismo, deben ser tratados como un dominio bidimensional, tengan o no simetría.

Concretando para el caso de las máquinas eléctricas asíncronas, el tratamiento de cualquier fenómeno superficial debe ser hecho en un dominio bidimensional. Como caso práctico, supongamos un estudio de la distribución de temperatura en los aislamientos – carlite - utilizados en las chapas de los núcleos ferromagnéticos (Evans & Von Holle, 1979). Si se tratase como un problema tridimensional, el modelado del baño de carlite en tres dimensiones tendría que ser muy denso comparado con el espesor de la chapa. Esto lejos de facilitar el procesamiento de datos, lo empeora, pues el mallado tridimensional del baño debe ser más denso que el de la chapa. Como de lo que se trata es de estudiar la distribución de temperaturas, no apartamos nada a la solución. Al contrario, bajamos el rendimiento computacional de la misma.

En cambio si optamos por un dominio bidimensional para estudiar la distribución de temperaturas, esto hará que el gasto computacional, innecesario en tres dimensiones, lo empleemos en aumentar la densidad del mallado bidimensional. Este hecho hará que la solución gane en precisión. A más densidad de mallado, mayor número de nudos, mejor interpolación de los valores de temperatura a averiguar.

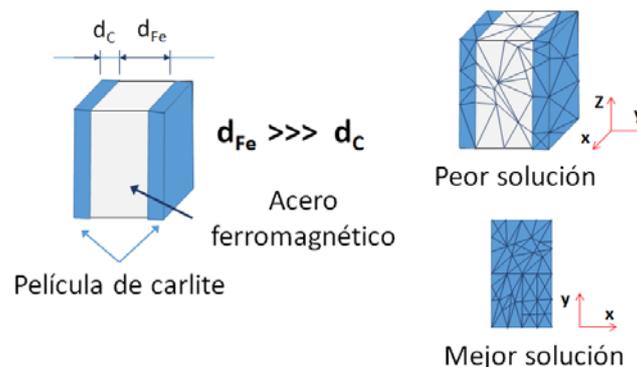


Figura 6-6. Distribuciones superficiales de temperatura.

Esto nos lleva a desarrollar la matriz propuesta y adaptada de la que propone (Specogna & Trevisan, 2005) aplicada a la conducción térmica para un dominio bidimensional.

En la bibliografía consultada en FF-MC, no parece una matriz de conductividad térmica basada en los baricentros de las caras duales. Los modelos que aparecen están basados en proyecciones a las caras primales o se consideran extrusiones cuando se hacen análisis con simetría axial. Por ello hemos decidido desarrollar el mismo procedimiento que se hizo en tres dimensiones, pero ahora de forma bidimensional.

Para ello adoptamos los parámetros primales y duales para la celda triangular siguiente:

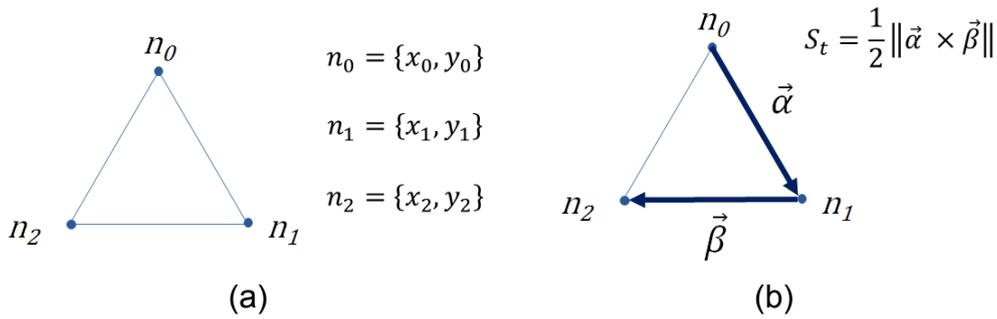


Figura 6-7. Celda triangular de referencia.

En la Figura 6-7, en (a) se indica cual es la celda de referencia bidimensional. En este caso es un triángulo. En (b) se explica cómo se obtiene la superficie del triángulo como la mitad del módulo del producto vectorial de dos vectores que describen sus lados.

En un triángulo, el sub espacio dual está referido a las líneas que unen el baricentro del triángulo con las medianas de los lados del triángulo. Así mismo todas las aristas, tanto primales como duales, deberán estar orientadas.

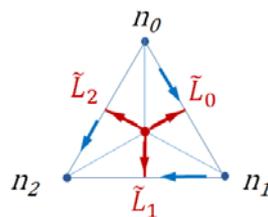


Figura 6-8. Celda triangular con sus respectivas aristas duales.

Procediendo de manera análoga a lo realizado en los dominios tridimensionales, tenemos que, en dominios bidimensionales, la matriz de conductancias térmicas es:

$$[M_\lambda]^{2D} = \frac{\lambda}{S_t} \begin{bmatrix} \tilde{L}_0 & & \\ & \tilde{L}_1 & \\ & & \tilde{L}_2 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 6.29}$$

Desarrollando el producto vectorial entre los vectores que definen a las aristas duales, se obtiene la siguiente expresión para la matriz de conductancias térmicas bidimensionales:

$$[M_\lambda]^{2D} = \frac{\lambda}{S_t} \begin{bmatrix} \tilde{L}_0 \cdot \tilde{L}_0 & \tilde{L}_0 \cdot \tilde{L}_1 & \tilde{L}_0 \cdot \tilde{L}_2 \\ \tilde{L}_1 \cdot \tilde{L}_0 & \tilde{L}_1 \cdot \tilde{L}_1 & \tilde{L}_1 \cdot \tilde{L}_2 \\ \tilde{L}_2 \cdot \tilde{L}_0 & \tilde{L}_2 \cdot \tilde{L}_1 & \tilde{L}_2 \cdot \tilde{L}_2 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 6.30}$$

En los experimentos en dos dimensiones que se ha realizado, se ha comprobado la validez de la matriz $[M_\lambda]^{2D}$ siguiendo los criterios anteriormente expuestos.

6.6 La matriz constitutiva $[M_{Cp}]$ para dominios tridimensionales

La matriz $[M_{Cp}]$ se asocia a la capacidad que tiene un cuerpo de almacenar calor por variación de su energía interna. Dicha variación de energía interna está asociada a un cambio de temperatura $(d\tau/dt)$.

Además dependerá también de la cantidad de masa (M) del cuerpo en cuestión y del calor específico (C_p) del material que lo constituye.

Autores como (Bullo, et al., 2006a), (Bullo, et al., 2006b), (Bullo, et al., 2007) proponen una expresión para esta matriz, que es la siguiente:

$$[M_{Cp}] = \frac{M C_p}{576} \begin{bmatrix} 75 & 23 & 23 & 23 \\ 23 & 75 & 23 & 23 \\ 23 & 23 & 75 & 23 \\ 23 & 23 & 23 & 75 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 6.31}$$

Donde $M = \rho_v V_T$ es la masa del tetraedro primal, obtenida de ρ_v como densidad volumétrica de masa del material del tetraedro y V_T como volumen del mismo.

Por la complejidad del desarrollo de la matriz $[M_{Cp}]$, éste se explica de forma detallada en el Anexo 2. Se trata básicamente de obtener los valores de los volúmenes de las celdas duales insertos en el tetraedro primal (Voitovich & Vandewalle, 2007).

Se demuestra que esta matriz, conocida como matriz de masa, es más exacta que la que habitualmente se emplea en el método de los elementos finitos (Bullo, et al., 2007). Para mayor información leer el Anexo 2.

La ecuación definitiva de la transmisión de calor en cualquier régimen quedaría como sigue:

$$[G]^T \{ [M_\lambda][G][\tau] \} + [M_{Cp}] \frac{d\tau}{dt} = [W] \quad \text{Ec. 6.32}$$

Para resolver esta ecuación diferencial se utiliza el método de Crank-Nicolson (Crank & Nicolson, 1996). La ecuación Ec. 6.32 se transforma en

$$[A][\tau] + [M_{cp}] \frac{d\tau}{dt} = [W] \quad \text{Ec. 6.33}$$

Siendo:

$$[A] = [G]^T [M_\lambda] [G] \quad \text{Ec. 6.34}$$

Quedando la ecuación Ec. 6.34 , dispuesta para ser integrada, de la siguiente forma:

$$\left(\frac{1}{\Delta t} [M_{cp}] + \theta [A] \right) \tau^{n+1} = \left(\frac{1}{\Delta t} [M_{cp}] - (1 - \theta) [A] \right) \tau^n + (1 - \theta) [W_i^n] + \theta [W_i^{n+1}] \quad \text{Ec. 6.35}$$

No obstante se debe destacar que (Bullo, et al., 2007) indica que la matriz $[M_{cp}]$ desarrollada por FF-MC presenta un número de condición de valor 2,7692 mientras que la misma matriz, desarrollada por el Método de los Elementos Finitos, presenta un valor de 5. La solución final es mucho más aproximada en FF-MC que en el FEM, pues el número de condición está más próximo a 1. Ver Anexo 2.

6.7 Conclusiones

La bibliografía sobre Formulación Finita y el Método de la Celda aplicada a la transmisión del calor es muy escasa. En el caso particular de las máquinas eléctricas es nula.

La Formulación Finita y el Método de la Celda tienen una gran versatilidad en cuanto a la creación y transformación de matrices constitutivas se refiere.

Se ha aportado una nueva forma de matriz constitutiva de transmisión de calor para la ecuación de Fourier basada en el promedio baricéntrico tetraédrico de las caras duales.

Se ha diseñado una nueva matriz constitutiva de transmisión de calor para la ecuación de Fourier que permite una precisión equivalente a otras matrices aquí propuestas. Es más complicada de manipular informáticamente, pero permite comprobar la versatilidad que tiene el Método de la Celda en cuanto a matrices y ecuaciones constitutivas se refiere.

Se comprueba que la energía interna depende de parámetros propios del material y de la geometría de la celda empleada.

Se demuestra que se puede crear una matriz de conductividad eléctrica para análisis térmicos bidimensionales.

Esta metodología puede aplicarse a un modelo térmico de máquina eléctrica, en particular a una máquina asíncrona

Bibliografía

Bullo, M., D'Ambrosio, V., Dughiero, F. & Guarnieri, M., 2006a. Coupled electrical and thermal transient conduction problems with a quadratic interpolation cell method approach. *Magnetics, IEEE Transactions on*, April, 42(4), pp. 1003-1006.

Bullo, M., D'Ambrosio, V., Dughiero, F. & Guarnieri, M., 2006b. *A 3D Cell Method Formulation for Coupled Electric and Thermal Problems b)*. Miami, FL, USA, IEEE, pp. 7-7.

Bullo, M., D'Ambrosio, V., Dughiero, F. & Guarnieri, M., 2007. A 3-D Cell Method Formulation for Coupled Electric and Thermal Problems. *Magnetics, IEEE Transactions on*, April, 43(4), pp. 1197-1200.

Crank, J. & Nicolson, P., 1996. A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type. *Advances in Computational Mathematics*, 6(1), pp. 207-226.

Evans, J. & Von Holle, A., 1979. Evidence for the effectiveness of stress coatings in altering magnetic properties of commercially produced grain-oriented 3% silicon-iron (invited). *Magnetics, IEEE Transactions on*, Nov, 15(6), pp. 1580-1585.

Specogna, R. & Trevisan, F., 2005. Discrete constitutive equations in A-Chi geometric eddy-current formulation. *IEEE Trans. Magn*, 41(4), pp. 1259-1263.

Tonti, E., 2000. Formulazione finita delle equazioni di campo: Il Metodo delle Celle. *Atti del XIII Convegno Italiano di Meccanica Computazionale, Brescia, Italy*.

Tonti, E., 2001. A direct discrete formulation of field laws: The cell method. *CMES- Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 2(2), pp. 237-258.

Voitovich, T. V. & Vandewalle, S., 2007. Exact integration formulas for the finite volume element method on simplicial meshes. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, September, 23(5), pp. 1059-1082.

CAPITULO 7

Ecuaciones de Maxwell y circuitales en FF-MC y el MNM en 3D

Índice	<u>PÁG.</u>
7. Ecuaciones de Maxwell y circuitales en FF-MC y el MNM en 3D	129
7.1 Introducción.....	129
7.2 El método de la Tabla	129
7.3 El Método de la Tabla Reducido.....	131
7.4 El Método Nodal Modificado.....	131
7.5 Incorporación de elementos electromagnéticos de dominio continuo al sistema de ecuaciones circuitales del Método Nodal Modificado	133
7.6 Conclusiones	140
Bibliografía	140

Síntesis

Las ecuaciones circuitales definen circuitos eléctricos con elementos de parámetros concentrados y que pueden ser también conectados a elementos continuos. Esta posibilidad se debe a la existencia de cohomologías en las zonas de conexión entre el dominio continuo y el de parámetros concentrados.

Se explica en este capítulo el método de la Tabla, el método de la Tabla Reducida, el método Nodal Modificado, el conjunto A_4 y las Cohomologías.

7. Ecuaciones de Maxwell y circuitales en FF-MC y el MNM en 3D

7.1 Introducción

Las ecuaciones circuitales definen circuitos eléctricos con elementos de parámetros concentrados y que pueden ser también conectados a elementos continuos. Esta posibilidad se debe a la existencia de cohomologías en las zonas de conexión entre el dominio continuo y el de parámetros concentrados.

Se explica en este capítulo el método de la tabla, el método de la tabla reducida, el método nodal modificado, el conjunto A4 y las cohomologías.

Todos estos métodos pretenden tratar grandes redes circuitales por métodos algebraicos basados en el álgebra matricial (Costa, et al., 2000), (Ho, et al., 1975), (Wali, et al., 1985).

7.2 El método de la Tabla

El método de la Tabla debe cumplir con las siguientes leyes:

- Primera ley de Kirchhoff

$$[A][I_b] = [0] \quad \text{Ec. 7.1}$$

- Segunda ley de Kirchhoff

$$[U_b] = [A]^T[v_n] \quad \text{Ec. 7.2}$$

- Ecuación de definición

$$[Y_b][U_b] + [Z_b][I_b] = [W_b] \quad \text{Ec. 7.3}$$

Donde $[A]$ es una matriz de incidencias nudos rama: $[A]_{n \times b}$

Nota: Se utiliza el subíndice b para indicar *rama* del inglés *branch*.

El significado de las matrices, todas ellas referidas a las ramas, es el siguiente:

$[I_b]$: Corrientes	$[Y_b]$: Admitancias de rama
$[U_b]$: Tensiones	$[Z_b]$: Impedancia de rama
$[v_n]$: Potenciales en los nudos	$[W_b]$: Fuentes de tensión o intensidad

Cada elemento de un circuito tiene que ser ordenado de una determinada manera. Sea el circuito genérico que se presenta en la Figura 7-1.

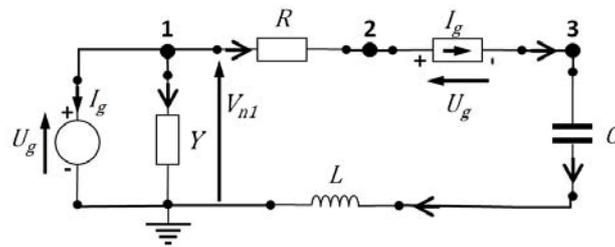


Figura 7-1. Circuito genérico.

El anterior circuito puede también ser representado mediante la siguiente tabla:

	Y_b	Z_b	W_b
R	1	$-R$	0
Y	G	-1	0
C	$j\omega C$	-1	0
L	1	$-j\omega L$	0
U_g	1	0	E
I_g	0	1	I_g

Tabla 7-1. Circuito de Figura 7-1 en forma de tabla.

Ahora comienza la construcción del sistema de ecuaciones del método de la Tabla. Las incógnitas a determinar son:

$$\begin{pmatrix} [U_b] \\ [I_b] \\ [v_n] \end{pmatrix}$$

La primera relación es la de tensiones y potenciales. Las tensiones en las ramas dependen de los potenciales en los nudos. Por lo tanto:

$$[U_b] = [A]^T \cdot [v_n] \quad \Rightarrow \quad [U_b] - [A]^T \cdot [v_n] = [0] \quad \text{Ec. 7.4}$$

Debe cumplirse la primera ley de Kirchhoff, entonces:

$$[A][I_b] = [0] \quad \text{Ec. 7.5}$$

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff, entonces:

$$[Y_b][U_b] + [Z_b][I_b] = [W_b], \quad \text{Ec. 7.6}$$

Ensamblando todas las ecuaciones del sistema:

$$\begin{pmatrix} [1] & [0] & -[A]^T \\ [0] & [A] & [0] \\ [Y_b] & [Z_b] & [0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [U_b] \\ [I_b] \\ [v_n] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0] \\ [0] \\ [W] \end{pmatrix} \quad \text{Ec. 7.7}$$

Al sistema $[T] \cdot [X] = [W]$ se le conoce como *Método de la Tabla*.

7.3 El Método de la Tabla Reducido

El método de la Tabla tiene el inconveniente de tener muchas incógnitas. El objetivo será reducir el número de éstas al máximo posible. Una de las incógnitas que se puede reducir es el bloque de tensiones de rama $[U_b]$, pues:

$$[U_b] = [A]^T [v_n] \quad \text{Ec. 7.8}$$

Entonces sustituyendo en el sistema de ecuaciones:

$$[A][I_b] = [0]$$

$$[Y_b][U_b] + [Z_b][I_b] = [W_b] \quad \Rightarrow \quad [Y_b][A]^T [v_n] + [Z_b][I_b] = [W_b] \quad \text{Ec. 7.9}$$

Quedando el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} [Y_b] & [Z_b] \\ [0] & [A] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [v_n] \\ [I_b] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [W_b] \\ [0] \end{pmatrix} \quad \text{Ec. 7.10}$$

Al sistema $[T_R] \cdot [X] = [W]$ se le conoce como *Método de la Tabla Reducido*.

7.4 El Método Nodal Modificado

En el Método Nodal Modificado existen tres conjuntos de elementos:

$$A_1 = \left\{ \begin{array}{l} \text{conductancia, condensador,} \\ \text{fuente de corriente dependiente de tensión, } \dots \end{array} \right\}$$

$$A_2 = \{ \text{resistencia, bobina, fuente de tensión, } \dots \}$$

$$A_3 = \{ \text{fuente independiente de corriente} \}$$

La característica que deben cumplir todos los elementos del conjunto A_1 es la siguiente:

$$[Y_1][U_1] \quad \text{Ec. 7.11}$$

Es decir: deben comportarse como admitancias.

La característica que deben cumplir todos los elementos del conjunto A_2 es que respondan a la siguiente ecuación:

$$[Y_2][U_2] + [Z_2][I_1] = [W_2] \quad \text{Ec. 7.12}$$

La característica que deben cumplir todos los elementos del conjunto A_3 es que respondan a la siguiente ecuación:

$$[I_3] = [I_j] \quad \text{Ec. 7.13}$$

Siendo $[I_j]$ el valor en amperios de la fuente independiente de corriente.

Estos elementos se agrupan en una matriz de bloques del tipo:

$$[[A_1] \quad [A_2] \quad [A_3]] \quad \text{Ec. 7.14}$$

Para cumplir con la segunda ley de Kirchhoff, esta matriz de elementos debe responder a la ecuación abajo expuesta:

$$[U_b] = [[A_1] \quad [A_2] \quad [A_3]]^T \cdot [v_n] \quad \text{Ec. 7.15}$$

Teniendo en cuenta las propiedades de la transpuesta de una matriz de bloques, se obtiene lo siguiente:

$$[[A_1] \quad [A_2] \quad [A_3]]^T \cdot [v_n] = \begin{pmatrix} [A_1]^T \\ [A_2]^T \\ [A_3]^T \end{pmatrix} \cdot [v_n] \quad \text{Ec. 7.16}$$

De lo que se deduce que existen tres bloques de tensiones de rama asociados a los elementos A_i :

$$\begin{pmatrix} [U_1] \\ [U_2] \\ [U_3] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [A_1]^T \\ [A_2]^T \\ [A_3]^T \end{pmatrix} \cdot [v_n] \quad \text{Ec. 7.17}$$

Luego:

$$\begin{aligned} [U_1] &= [A_1]^T \cdot [v_n] \\ [U_2] &= [A_2]^T \cdot [v_n] \\ [U_3] &= [A_3]^T \cdot [v_n] \end{aligned} \quad \text{Ec. 7.18}$$

La primera ley de Kirchhoff se aplica de la siguiente manera:

$$[[A_1] \quad [A_2] \quad [A_3]] \cdot \begin{bmatrix} [I_1] \\ [I_2] \\ [I_3] \end{bmatrix} = [0] \quad \text{Ec. 7.19}$$

$$[A_1] \cdot [I_1] + [A_2] \cdot [I_2] + [A_3] \cdot [I_3] = [0] \quad \text{Ec. 7.20}$$

El desarrollo del método nodal modificado insiste en eliminar el mayor número posible de incógnitas, exceptuando las tensiones en los nudos y las corrientes

asociadas al conjunto A_2 . Por lo tanto, los términos (A_1, I_1) y (A_3, I_3) tienen que ser reducidos a términos de I_2 y v_n .

Sustituyendo por valores previamente calculados, tenemos que:

$$[A_1] \cdot [I_1] = [A_1] \cdot ([Y_1] \cdot [U_1]) = [A_1] \cdot [Y_1]([A_1]^T \cdot [v_n]) \quad \text{Ec. 7.21}$$

$$[A_3] \cdot [I_3] = [A_3] \cdot [I_J] \quad \text{Ec. 7.22}$$

Entonces:

$$[A_1] \cdot [I_1] + [A_2] \cdot [I_2] + [A_3] \cdot [I_3] = [0] \quad \text{Ec. 7.23}$$

Se transforma en:

$$[A_1] \cdot [Y_1][A_1]^T \cdot [v_n] + [A_2] \cdot [I_2] + [A_3] \cdot [I_J] = [0] \quad \text{Ec. 7.24}$$

O bien:

$$[A_1] \cdot [Y_1][A_1]^T \cdot [v_n] + [A_2] \cdot [I_2] = -[A_3] \cdot [I_J] \quad \text{Ec. 7.25}$$

Si a la ecuación de definición de la tabla se le sustituye el término $[U_2]$, entonces:

$$[Y_2][A_2]^T \cdot [v_n] + [Z_2] \cdot [I_2] = [W_2] \quad \text{Ec. 7.26}$$

El sistema de ecuaciones construido a partir de las Ec. 7.25 y Ec. 7.26 queda como sigue:

$$\begin{pmatrix} [A_1] \cdot [Y_1][A_1]^T & [A_2] \\ [A_2]^T & [Z_2] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [v_n] \\ [I_2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -[A_3] \cdot [I_J] \\ [W_2] \end{pmatrix} \quad \text{Ec. 7.27}$$

A este método se le conoce como *Método Nodal Modificado* (Ho, et al., 1975) y (Wali, et al., 1985).

7.5 Incorporación de elementos electromagnéticos de dominio continuo al sistema de ecuaciones circuitales del Método Nodal Modificado

El objetivo es incorporar bloques de matrices que definen el comportamiento de un dominio continuo, que ha sido discretizado, en el sistema de ecuaciones del Método Nodal Modificado (Simon & Monzon, 2010).

Recordemos que se trata de elementos de un continuo discretizado que se van a incorporar a un circuito de elementos discretos concentrados.

Primer paso

Se modifica el vector de tensiones en el Método Nodal Modificado. Será necesario añadir un nuevo elemento A_4 tal que:

$$\begin{pmatrix} [U_1] \\ [U_2] \\ [U_3] \\ [\mathbf{U}_4] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [A_1]^T \\ [A_2]^T \\ [A_3]^T \\ [\mathbf{A}_4]^T \end{pmatrix} [v_n] \quad \text{Ec. 7.28}$$

Los elementos resaltados son los nuevos elementos a incorporar.

Segundo paso

En el Método Nodal Modificado hay que añadir el nuevo elemento A_4 a la primera ley de Kirchhoff:

$$[A_1] \cdot [I_1] + [A_2] \cdot [I_2] + [A_4] \cdot [I_4] = -[A_3] \cdot [I_3] \quad \text{Ec. 7.29}$$

El nuevo elemento A_4 es una matriz de incidencias nudos-ramas donde están incluidas las corrientes cohomológicas.

Previamente se agrupan las ecuaciones por conjuntos fundamentales:

$$\begin{aligned} \text{Conjunto 1} &\equiv [I_1] = [Y_1][U_1] \\ \text{Conjunto 2} &\equiv [Y_2][U_2] + [Z_2][I_2] = [W_2] \\ \text{Conjunto 3} &\equiv [I_3] = [I_j] \end{aligned} \quad \text{Ec. 7.30}$$

Hay que incorporar al conjunto 4. La ecuación que define a las corrientes en el dominio continuo discretizado Ω es:

$$[I_\Omega] = [M_\sigma] \cdot \{-j\omega[a] - [G][v_i]\} \quad \text{Ec. 7.31}$$

Se recuerda que estamos en un sistema que varía armónicamente ($j\omega$). Para el caso general se sustituiría por $\partial_t[a]$.

El $v_i \in [v]$ son los potenciales eléctricos en el dominio discretizado Ω , situados en los nudos primales de la celda, y cuyo gradiente $[G][v]$ da lugar a tensiones asociadas a las aristas primales.

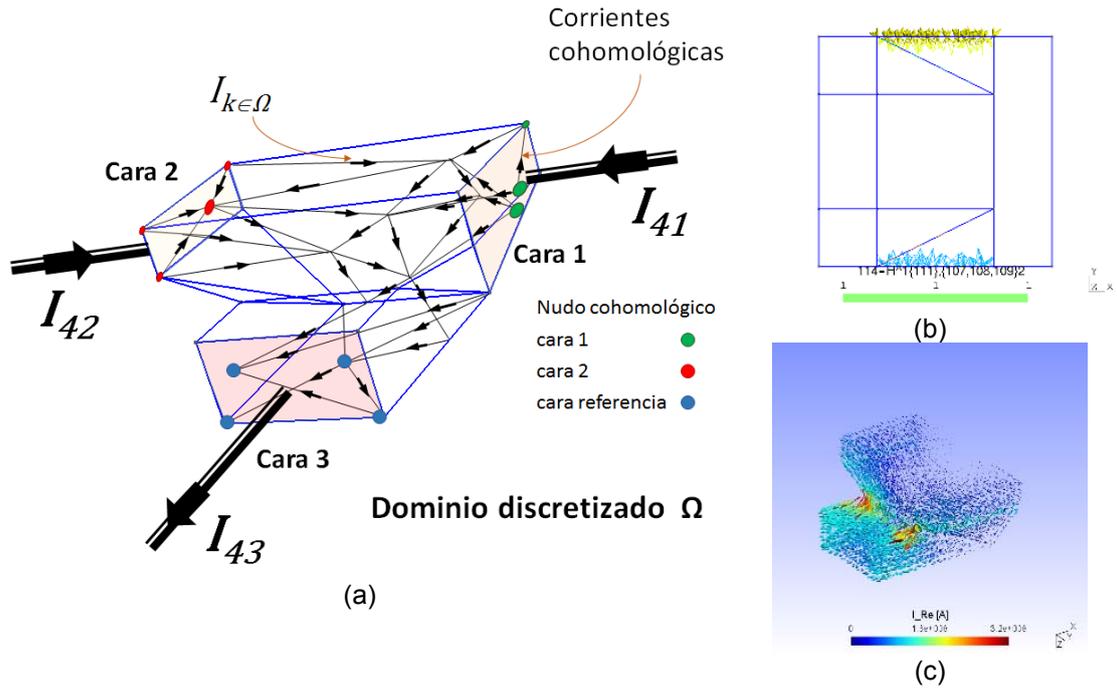


Figura 7-2. Dominio discretizado con corrientes cohomológicas.

En la Figura 7-2, (a) es el dominio discretizado con corrientes cohomológicas. (b) son las cohomologías obtenidas en simulación con Gmsh y (c) es la componente real de la corriente en el dominio, simulado con Gmsh. Las corrientes $[I_{41}]$, $[I_{42}]$ y $[I_{43}]$ son corriente que pertenecen al circuito de parámetros discretos concentrados y que comparten el dominio continuo discretizado Ω .

Aplicando la ley de continuidad:

$$[I_{41}] + [I_{42}] + [I_{43}] = [0] \tag{Ec. 7.32}$$

Conociendo las corriente cohomológicas de la cara 1 y la cara 2 del ejemplo expuesto en Figura 7-2, se pueden averiguar cuánto valen las corrientes $[I_{41}]$ e $[I_{42}]$.

El procedimiento es crear un vector de corriente cohomológicas a la cara 1 y a la cara 2. En el caso de la Figura 7-2 existen 2 caras, pero se puede extender a n caras. La matriz de corrientes cohomológicas tendrá tantas filas como caras cohomológicas tenga el objeto, y tantas columnas como aristas tengan el mallado del dominio discretizado Ω .

Para distinguir las aristas que inciden en la cara cohomológica de las del resto del mallado, se le asigna el valor (-1, 0 1) según incida en sentido contrario al esperado, no incida o incida en el sentido esperado, respectivamente. Por lo tanto, el elemento del grupo 4 tendría la siguiente forma:

$$[I_c] = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & -1 & 0 & 1 \\ -1 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n4 \times na} \tag{Ec. 7.33}$$

La corriente que deseamos averiguar para el grupo 4 serán:

$$[I_x]_{na \times 1} = [M_\sigma] \cdot \{-j\omega[a] - [G][v_i]\} \quad \text{Ec. 7.34}$$

Operando de la siguiente manera:

$$[I_c]_{n4 \times na} \cdot [I_x]_{na \times 1} = [I_4] \quad \text{Ec. 7.35}$$

Siendo $n4$ el número de nudos del mallado que son cohomológicos a las caras analizadas y na el número de aristas totales del mallado. Con lo que:

$$[I_4] = \begin{pmatrix} [I_{41}] \\ [I_{42}] \end{pmatrix} \quad \text{Ec. 7.36}$$

O bien, desde otro punto de vista:

$$[I_c][M_\sigma] \cdot \{-j\omega[a] - [G][v_i]\} = \begin{pmatrix} [I_{41}] \\ [I_{42}] \end{pmatrix} \quad \text{Ec. 7.37}$$

O bien:

$$-j\omega[I_c][M_\sigma][a] - [I_c][M_\sigma][G][v_i] - [I_4] = [0] \quad \text{Ec. 7.38}$$

Ahora se trata de introducir en el sistema de ecuaciones del Método Nodal Modificado los parámetros electromagnéticos obtenidos en la formulación (a , (a , v)).

Ordenando:

$$\{[C]^T[M_v][C] + j\omega[M_\sigma]\}[a] + [M_\sigma][G][v_i] = [I_f] \quad \text{Ec. 7.39}$$

La intensidad $[I_f]$ corresponde a las corrientes que circulan por el dominio continuo discretizado. No son corrientes inducidas. Son corrientes suministradas desde el circuito discreto, aunque circulan conjuntamente con las corrientes inducidas dentro del dominio continuo discretizado Ω .

A continuación se expone la ley de Ampere, conjuntamente con la ley de Faraday, en el dominio continuo discretizado Ω :

$$-j\omega[G]^T[M_\sigma][a] - [G]^T[M_\sigma][G][v_i] = [0] \quad \text{Ec. 7.40}$$

Se debe cumplir la ecuación de continuidad:

$$[A_1] \cdot [I_1] + [A_2] \cdot [I_2] + [A_4] \cdot [I_4] = -[A_3] \cdot [I_3] \quad \text{Ec. 7.41}$$

El sistema con el elemento $[A_4]$ incorporado sería:

$$\begin{pmatrix} [U_1] \\ [U_2] \\ [U_3] \\ [U_4] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [A_1]^T \\ [A_2]^T \\ [A_3]^T \\ [A_4]^T \end{pmatrix} [v_n] \quad \text{Ec. 7.42}$$

Donde:

$$\begin{aligned} [U_1] &= [A_1]^T [v_n] & [U_2] &= [A_2]^T [v_n] \\ [U_3] &= [A_3]^T [v_n] & [U_4] &= [A_4]^T [v_n] \end{aligned} \quad \text{Ec. 7.43}$$

Repitiendo el proceso, y teniendo en cuenta que las incógnitas deben aparecer en la forma $\{a, v_i, v_n, I_2, I_4\}$ el sistema final tiene que quedar en función de las incógnitas anteriormente citadas.

El término $\{[A_1] \cdot [I_1]\}$ de la expresión Ec. 7.41 puede ser modificado a:

$$[A_1] \cdot [I_1] = [A_1][Y_1][U_1] = [A_1][Y_1][A_1]^T [v_n] \quad \text{Ec. 7.44}$$

Sustituyendo:

$$[A_1][Y_1][A_1]^T [v_n] + [A_2] \cdot [I_2] + [A_4] \cdot [I_4] = -[A_3] \cdot [I_3] \quad \text{Ec. 7.45}$$

De la Ec. 7.30 se extrae la siguiente expresión:

$$[Y_2][U_2] + [Z_2][I_2] = [W_2] \quad \text{Ec. 7.46}$$

Entonces, sustituyendo el valor $[U_2] = [A_2]^T [v_n]$ en ella, se obtiene lo siguiente:

$$[Y_2][A_2]^T [v_n] + [Z_2][I_2] = [W_2] \quad \text{Ec. 7.47}$$

Ahora haciendo un ordenamiento de las ecuaciones obtenidas, se obtiene el siguiente agrupamiento de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \{[C]^T [M_v][C] + j\omega [M_\sigma]\}[a] + [M_\sigma][G][v_i] &= [I_f] \\ -j\omega [G]^T [M_\sigma][a] - [G]^T [M_\sigma][G][v_i] &= 0 \\ -j\omega [I_c][M_\sigma][a] - [I_c][M_\sigma][G][v_i] - [I_4] &= [0] \\ [Y_2][A_2]^T [v_n] + [Z_2][I_2] &= [W_2] \\ [A_1][Y_1][A_1]^T [v_n] + [A_2] \cdot [I_2] + [A_4] \cdot [I_4] &= -[A_3] \cdot [I_3] \end{aligned} \right\} \quad \text{Ec. 7.48}$$

La primera ecuación define a la Ley de Ampere y de Faraday aplicada al dominio continuo discretizado. Son las corrientes que se inducen por las variaciones del campo magnético, así como las corrientes que forzamos a circular en el dominio

continuo discretizado Ω y que proceden de los circuitos discretos conectados al dominio.

La segunda ecuación es la ley de continuidad de la corriente eléctrica en el dominio continuo discretizado Ω .

La tercera ecuación es la ecuación de definición de las corrientes cohomológicas en el dominio continuo discretizado Ω .

La cuarta ecuación corresponde a la Ley de Amperes pero aplicada al circuito discreto.

Y, por último, la quinta ecuación es una ecuación de definición y se corresponde con la segunda ley de Kirchhoff aplicada al circuito discreto.

Con esto queda demostrado que se pueden hibridar circuitos discretos de parámetros concentrados con dominios continuos, discretizables y conductores.

El sistema de ecuaciones expuesto en Ec. 7.48 se puede escribir de forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} [T_{11}]_{lxl} & [T_{11}]_{lx\eta} & [0]_{lxn} & [0]_{lxb2} & [0]_{lxb2} \\ [T_{11}]_{nxl} & [T_{11}]_{nx\eta} & [0]_{\eta xn} & [0]_{nxb2} & [0]_{nxb4} \\ [T_{11}]_{b4xl} & [T_{11}]_{b4x\eta} & [0]_{b4xn} & [0]_{b4xb2} & [-1]_{b4xb4} \\ [0]_{b2xl} & [0]_{b2x\eta} & [T_{11}]_{b2xn} & [Z_2]_{b2xb2} & [0]_{b2xb4} \\ [0]_{nxl} & [0]_{nx\eta} & [T_{11}]_{n xn} & [A_2]_{nxb2} & [A_4]_{nxb4} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} [a]_{lx1} \\ [v_i]_{\eta x1} \\ [v_n]_{nx1} \\ [I_2]_{b2x1} \\ [I_4]_{b4x1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [I_f]_{lx1} \\ [0]_{\eta x1} \\ [0]_{nx1} \\ [W_2]_{b2x1} \\ [-A_3 \ I_j]_{b4x1} \end{bmatrix}$$

Ec. 7.49

Debido a lo complejo de representar el sistema completo, se ha pasado a la hoja siguiente. Los subíndices son de suma importancia, pues nos van a indicar la dimensión global de la matriz y el espacio a que pertenece la submatriz: dominio continuo o circuito discreto. Los subíndices indican lo siguiente:

b_2 : ramas del grupo 2

b_4 : ramas del grupo 4

n : número de nudos del circuito discreto

η : nudos del dominio continuo discretizado Ω .

l : número de aristas del dominio Ω

$$\begin{bmatrix}
 \{[C]^T [M_o] [C] + j\omega [M_\sigma]\}_{lxl} \\
 [-j\omega [G]^T [M_\sigma]]_{nxl} \\
 [-j\omega [I_c] [M_\sigma] [a]]_{b4xl} \\
 [0]_{b2xl} \\
 [0]_{nxl}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 [M_\sigma] [G]_{lxl} \\
 [-G]^T [M_\sigma] [G]_{nxl} \\
 [I_c] [M_\sigma] [G]_{b4xl} \\
 [0]_{b2xl} \\
 [0]_{nxl}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 [0]_{lxn} \\
 [0]_{\eta xn} \\
 [0]_{b4xn} \\
 [Y_2] [A_2]^T_{b2xn} \\
 [A_1] [Y_1] [A_1]^T_{n xn}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 [0]_{lxb2} \\
 [0]_{nxb2} \\
 [0]_{b4xb2} \\
 [Z_2]_{b2xb2} \\
 [A_2]_{nxb2}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 [0]_{lxb2} \\
 [0]_{nxb4} \\
 [-1]_{b4xb4} \\
 [0]_{b2xb4} \\
 [A_4]_{nxb4}
 \end{bmatrix}
 \times
 \begin{bmatrix}
 [a]_{lxl} \\
 [v_i]_{\eta xl} \\
 [v_n]_{n xl} \\
 [I_2]_{b2xl} \\
 [I_4]_{b4xl}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 [I_f]_{lxl} \\
 [0]_{\eta xl} \\
 [0]_{n xl} \\
 [W_2]_{b2xl} \\
 [-A_3 I_j]_{b4xl}
 \end{bmatrix}$$

Ec. 7.50

7.6 Conclusiones

El estudio de las Homologías y las Cohomologías se incluye en el Algebra Homológica (Lluis-Puebla, 1990) pág. 4-5.

En esta tesis no es objeto de estudio el Algebra Homológica. Solamente se ha usado como herramienta, ya implementada en GMSH.

Del GMSH se han utilizado las cohomologías, cuya utilidad se ha explicado en apartados anteriores de este capítulo.

Básicamente, las cohomologías equivalen a los grupos de corte básicos en Teoría de Circuitos. Esta utilidad es la que se ha explotado en esta tesis para poder enlazar dominios continuos discretizados con dominios circuitales de parámetros concentrados.

Las homologías establecen ciclos cerrados sobre un dominio discretizado. La utilidad que han tenido es la de indicar dónde se sitúan las caras, del dominio discretizado, a conectar en el circuito de parámetros concentrados.

El trabajo consistió en establecer el conjunto de nudos y aristas cohomológicas a las caras C1 y C2, siguiendo las instrucciones del GMSH. El uso de los nudos y las aristas cohomológicas se ha explicado en apartados anteriores de este capítulo.

Par profundizar más en el tema de homologías y cohomologías aplicadas al electromagnetismo computacional se recomienda leer a (Dlotko, et al., 2009), (Pellikka, et al., 2010), (Pellikka, et al., 2013) y (Pellikka, 2014).

Bibliografía

Costa, M., Nabeta, S. & Cardoso, J., 2000. Modified nodal analysis applied to electric circuits coupled with FEM in the simulation of a universal motor. *Magnetics, IEEE Transactions on*, Jul, 36(4), pp. 1431-1434.

Dlotko, P., Specogna, R. & Trevisan, F., 2009. Automatic generation of cuts on large-sized meshes for the T- omega geometric eddy-current formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(47-48), pp. 3765-3781.

Ho, C.-W., Ruehli, A. E. & Brennan, P. A., 1975. The modified nodal approach to network analysis. *Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, Jun, 22(6), pp. 504-509.

Lluis-Puebla, E., 1990. *Álgebra homológica, cohomología de grupos y K-Teoría algebraica clásica*. Primera ed. México DF, México: Addison-Wesley Iberoamericana.

Pellikka, M., 2014. *Finite Element Method for Electromagnetics on Riemannian Manifolds. Topology and Differential Geometry Toolkit (PhD Thesis)*. 1 ed. Tampere, Finland: Tampereen teknillinen yliopisto - Tampere University of Technology.

Pellikka, M., Suuriniemi, S. & Kettunen, L., 2010. Homology in electromagnetic boundary value problems. *Boundary Value Problems*, 2010(1), p. 381953.

Pellikka, M., Suuriniemi, S., Kettunen, L. & Geuzaine, C., 2013. Homology and cohomology computation in finite element modeling. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 35(5), pp. B1195--B1214.

Simon, L. & Monzon, J., 2010. Cell Method and Modified Nodal Method in Eddy Current Electromagnetic Problems. *International Conference on Renewable Energies and Power Quality (ICREPQ'11)*, APRIL.

Wali, U., Pal, R. & Chatterjee, B., 1985. On the modified nodal approach to network analysis. *Proceedings of the IEEE*, March, 73(3), pp. 485-487.

CAPÍTULO 8

Experimentos numéricos y validación

Índice	<u>PÁG.</u>
8. Experimentos numéricos y validación	144
8.1 Introducción.....	144
8.2 Metodología	144
8.2.1 Proceso de verificación y validación.....	144
8.2.2 Procedimiento seguido en los experimentos numéricos	146
8.2.3 Elaboración del informe del experimento.....	146
8.3 Experimentos numéricos de tipo térmico.....	147
8.3.1 Calibración del FEMM	147
8.3.2 Experimento térmico 1.....	151
8.3.3 Experimento térmico 2.....	155
8.3.4 Experimento térmico 3.....	160
8.3.5 Experimento térmico 4.....	163
8.4 Experimentos numéricos de tipo electromagnético	168
8.4.1 Experimento electromagnético 1	169
8.4.2 Experimento electromagnético 2	177
8.4.3 Experimento electromagnético 3	179
8.4.4 Experimento electromagnético 4	183
8.5 Experimentos numéricos de tipo electro-térmico.....	184
8.5.1 Experimento electro-térmico 1	185
8.5.2 Experimento electro-térmico 2	192
8.6 Conclusiones	196
Bibliografía	197

Síntesis

Se exponen todos los experimentos numéricos que se han efectuado. Se dividen estos experimentos en: experimentos de tipo térmico, de tipo electromagnético y de tipo electro-térmico. Se han llevado a cabo en estado permanente y transitorio. Se validan los resultados respecto a los datos obtenidos con GetDP y FEMM. La validación se ha efectuado utilizando diversos estadísticos.

8. Experimentos numéricos y validación

8.1 Introducción

Para probar cada una de las teorías que hemos expuesto en los capítulos anteriores, se han desarrollado un conjunto de aplicaciones informáticas. Éstas aplicaciones han servido para realizar una serie de experimentos numéricos justificativos de la hipótesis que pretendemos demostrar: “*La Formulación Finita, con el Método de la Celda, es una metodología válida para cálculos electromagnéticos y térmicos en máquinas eléctricas asíncronas*”.

Para ello hemos hecho una clasificación de los experimentos numéricos que responde a la siguiente ordenación:

- Experimentos numéricos de tipo térmico.
- Experimentos numéricos de tipo electromagnético.
- Experimentos numéricos de tipo electro-térmico.

8.2 Metodología

El proceso que se ha llevado a cabo en esta tesis ha sido el utilizar un método numérico alternativo de resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, aplicado a problemas electromagnéticos y térmicos, que se desarrollan en las máquinas eléctricas asíncronas.

Para comprobar si las propuestas hechas en FF-MC son válidas, se han diseñado y ejecutado una serie de experimentos numéricos.

Los resultados obtenidos en estos experimentos numéricos deben ser sometidos a un proceso de *verificación y validación* para garantizar que la hipótesis de partida es válida: “*La Formulación Finita y su método numérico, el Método de la Celda, son válidos para estudiar electromagnéticamente y térmicamente a una máquina eléctrica asíncrona*”.

8.2.1 Proceso de verificación y validación

El proceso de verificación y validación, V&V de aquí en adelante, es un proceso continuo y no disjunto, pues el uno depende del otro.

La *verificación* consiste en comprobar si el procedimiento implementado es conceptualmente correcto (B.H.Thacker, et al., 2004), (Tedeschi, 2006) y (Oden, 2009).

En esta tesis el procedimiento ha consistido en utilizar una serie de aplicaciones informáticas de uso libre y crear otras utilizando lenguajes, también de uso libre,

para comprobar si la Formulación Finita, implementada numéricamente en dichas aplicaciones con el Método de la Celda, era válida para el estudio de las máquinas eléctricas asíncronas desde el punto de vista electromagnético y térmico.

Conceptualmente se ha verificado que no existen errores y que lo aportado por los experimentos es congruente con las teorías físicas que explican dichos fenómenos.

La *validación* consiste en comprobar si los datos obtenidos de los experimentos numéricos coinciden con una *realidad objetiva* (B.H.Thacker, et al., 2004), (Tedeschi, 2006) y (Oden, 2009).

En nuestro caso la realidad objetiva consiste en obtener resultados mediante aplicaciones informáticas, sobradamente contrastadas, como son el GetDP y FEMM. Los datos obtenidos de estas aplicaciones los contrastamos con los datos obtenidos en nuestros experimentos numéricos. De esta manera, aplicando los estadísticos correspondientes, damos validez a dichos resultados

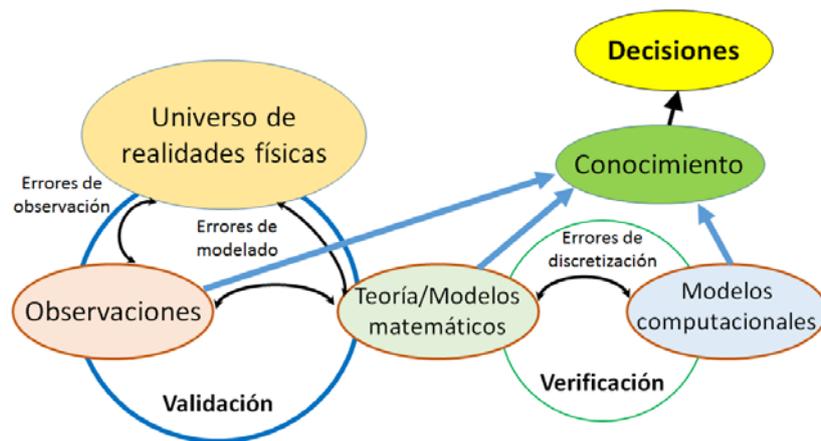


Figura 8-1. Los caminos del conocimiento. Adaptado de (Oden, 2009).

El modelo propuesto por (Oden, 2009) le da una gran importancia a la fase de validación. Esto es así porque cualquier hecho no contrastado, no tiene una validez verdadera en la ciencia. Es cierto que se puede lanzar una teoría, aparentemente coherente, pero hasta no ser comprobada, no alcanza el nivel de generalidad. También es cierto, como es el caso de esta tesis, que los modelos computacionales son una fuente de generación de conocimiento. Se puede encontrar también dos modelos interesantes de V&V en (B.H.Thacker, et al., 2004), pág. 5-7. En nuestro caso, como línea futura, se culminará el proceso en una contrastación con la realidad física. Es decir, ensayando y validado en laboratorio los resultados ahora obtenidos en la medida que esto sea factible.

Los experimentos llevados a cabo se han desarrollado en dos ordenadores con las siguientes características:

Ordenador 1	Ordenador 2
Fabricante: Packard Bell Procesador: Intel® Core™ i5 CPU: 3.20 GHz Memoria RAM: 4,00 GB Sistema operativo: Windows 7, 64 bit	Fabricante: Dell Procesador: Intel® Core™ i7-3820 CPU: 3,6GHz Memoria RAM:32GB Sistema operativo: OpenSUSE Linux

El software, de uso libre, utilizado fue: Gmsh-GetDP, FEMM, Scilab, Dev C++, Octave y Gnuplot. El software, bajo licencia, utilizado fue: Matlab, Excel y Word de Microsoft. Los sistemas operativos donde se trabajaron las aplicaciones informáticas fueron Windows 7 64 bit de Microsoft y OpenSUSE Linux.

Se han fabricado diversas aplicaciones para llevar a cabo los cálculos. Estas son:

	2D		3D	
	Nº aplicaciones	Promedio líneas de código	Nº aplicaciones	Promedio líneas de código
Dev C++	6	300	23	957
Matlab	6	200	4	900
Octave	No desarrolladas	No desarrolladas	5	150
Scilab	No desarrolladas	No desarrolladas	20	250
GetDP	2	200	4	200

Figura 8-2. Aplicaciones informáticas desarrolladas.

8.2.2 Procedimiento seguido en los experimentos numéricos

Todos experimentos numéricos que se ha llevado a cabo siguen la misma metodología (Paez, 2009), que es la siguiente:

1. Formulación del problema.
2. Modelado geométrico y definición del dominio electromagnético y/o térmico.
3. Establecimiento de las condiciones de contorno e iniciales.
4. Generación de la malla de cálculo.
5. Simulación.
6. Procesado de los resultados.
7. Análisis de los resultados.
8. Elaboración del informe.

8.2.3 Elaboración del informe del experimento

Cada experimento se ha diseñado siguiendo la misma estructura, siempre que sea posible. La validación se ha llevado a cabo con una batería de estadísticos. Los estadísticos empleados se pueden consultar en el Anexo 3. Los informes de cada experimento siguen el siguiente orden:

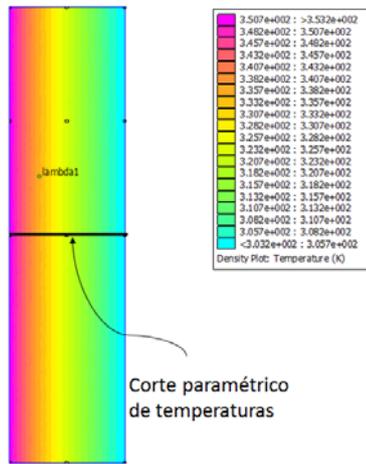
- Esquema del experimento
- Objetivos del experimento
- Descripción del experimento
- Gráficos obtenidos
- Estadísticos obtenidos
- Análisis de los datos
- Resumen del experimento

8.3 Experimentos numéricos de tipo térmico

Pretenden demostrar la validez del Método de la Celda en los procesos de transmisión de calor.

8.3.1 Calibración del FEMM

Esquema del experimento



(a)

$$\tau_x = (\tau_2 - \tau_1) \frac{\ln \frac{r_x}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} + \tau_1 \quad \text{Ec. 8.1}$$

Figura 8-3. Calibración de FEMM.

Objetivos del experimento

Con este experimento de calibración se pretende comprobar cómo se comporta, en cuanto a errores se refiere, el FEMM frente a una expresión analítica, la cual representa la distribución de temperaturas a través de una pared de un cilindro.

Descripción del experimento

El experimento consiste en crear un rectángulo de dimensiones 0,5 x 2,0 metros, que equivaldría a un corte de la pared de un cilindro de 2 metros de altura, 2 metros de diámetro. El espesor de las paredes corresponde al rectángulo anteriormente indicado, el cual se utilizará en otros experimentos numéricos, Figura 8-3(a). Se ha procedido así porque el FEMM está basado en el método de los elementos finitos. Utiliza simetrías axiales y planas, siendo nuestro caso el primero. La pared del cilindro tiene un coeficiente de conducción térmica de 1 [$\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\text{K}^{-1}$]. Este dato sólo representa un valor fácil de rastrear analíticamente, pero carente de sentido físico como material constituyente de una máquina asíncrona. Se comparó un corte paramétrico hecho en el modelo de FEMM, Figura 8-3(a), con los valores de temperatura obtenidos con la expresión Ec. 8.1. En él se midieron temperaturas para dos mallados concretos: un mallado de 2.517 nudos y otro de 1.013.144 nudos. Con estos mallados se pretendía observar el comportamiento del FEMM frente a la expresión analítica. El primer mallado lo seleccionó automáticamente el programa. El segundo mallado lo impusimos nosotros.

Las condiciones de contorno son: la temperatura más alta está en la cara externa del cilindro (80 °C) y la más baja está en la cara interna del cilindro (30 °C). Se considera que el calor avanza en sentido radial. Se considera la tapa superior e inferior del cilindro como aislantes perfectos. No hay fuente de calor en el interior del cilindro. Se considera una transmisión pura de calor. Se aplican condiciones tipo Dirichlet.

Las condiciones iniciales y finales son las mismas en el experimento, pues se trata de un proceso estacionario.

Gráficos obtenidos

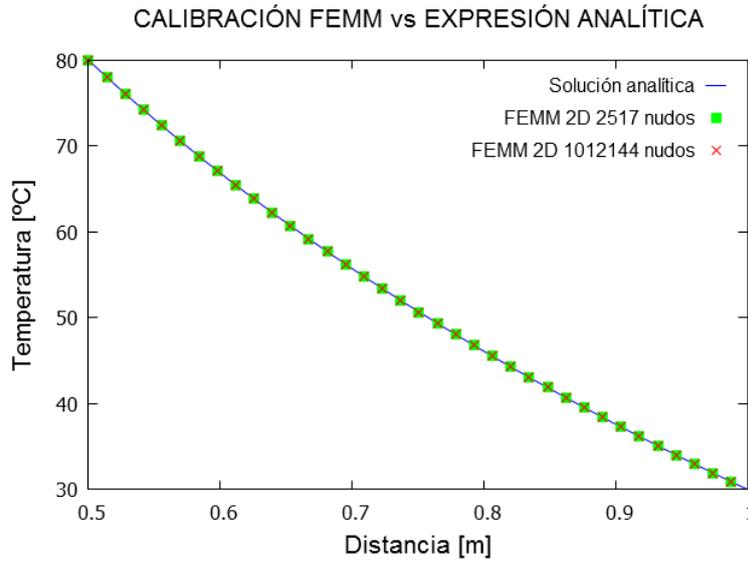


Figura 8-4. Calibración FEMM vs Sol. Analítica.

Estadísticos obtenidos

Mallado [Nudos]	2517	1013144
Temperatura [°C] a 0,75 m (Analítica ref: 72,7422 °C)	72,7585	72,7585
Diferencia de temperatura [°C]	0,0162	0,0162
Diferencia porcentual [%]	0,0223	0,0223

Tabla 8-1. Temperaturas de calibración del FEMM.

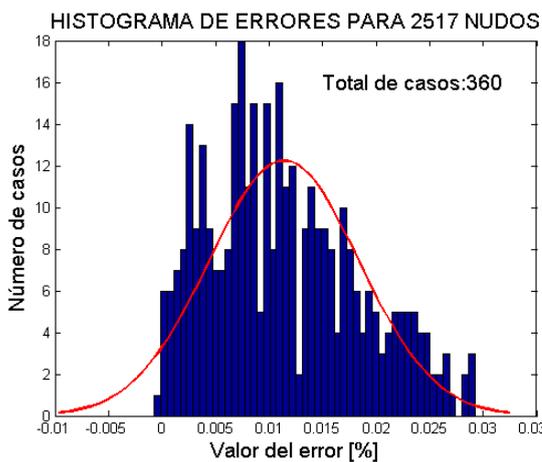


Figura 8-5. FEMM vs analítica 2517 nudos.

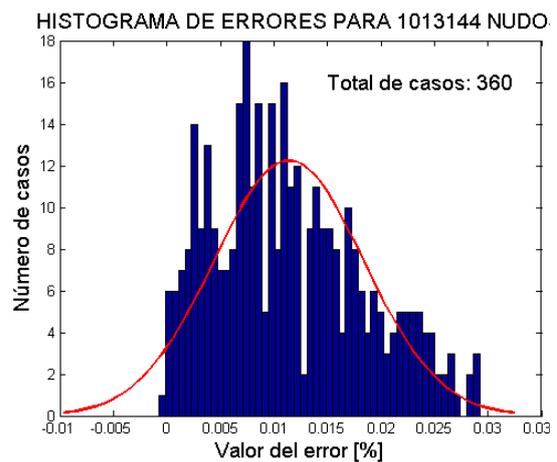


Figura 8-6. FEMM vs analítica 1013144 nudos.

Las temperaturas de la Tabla 8-1 han sido tomadas a 0,75 metros del centro del cilindro, en sentido radial, y a mitad de su altura, 1 metro.

Mallado [tetraedros]	2517	1013144
R ² [0, +1]. Óptimo: +1	1	1
MSE [°C ²][0, +∞]. Óptimo: 0	0,0001	0,0001
RMSE [°C]	0,0072	0,0072
RMSPE [-1, +1]. Óptimo: 0	0,0001	0,0001
MAE [°C]	0,006	0,006
MAEP [-1, +1]. Óptimo: 0	0,0001	0,0001
IRM [-∞, +∞]. Óptimo: 0	0,0087	0,0087
PBIAS [-1, +1]. Óptimo: 0	0,0001	0,0001
NSEF [-∞, 1]. Óptimo: 1	1	1
U1 de Theil [0, 1]. Óptimo: 0	0,0001	0,0001
UM de Theil [0, 1]. Óptimo: 0	0,6832	0,6832
US de Theil [0, 1]. Óptimo: 0	0,0353	0,0353
UC de Theil [0, 1]. Óptimo: 0	0,2815	0,2815
Willmott-dW [0, 1]. Óptimo: 1	1	1
MEF [-∞, 1]. Óptimo: 1	1	1
CD [-∞,+∞]. Óptimo: 1	0,9998	0,9998
C [-∞,+∞]. Óptimo: 0	0,0001	0,0001

Tabla 8-2. Estadísticos de calibración del FEMM.

Análisis de los datos

Las temperaturas obtenidas son lo suficientemente próximas a la solución analítica como para considerar al FEMM un buen patrón de comparación. En la distribución de los errores, Figura 8-5 y Figura 8-6 se nota sesgo respecto al error cero. Esto indica cierto fallo sistémico en el FEMM que tendremos que asumir: [0%, 0,03%]. Se confirma este sesgo con el indicador UM de Theil, el cual está indicando errores en los valores medios de dichas distribuciones (FEMM vs analítica). Se aprecia que entre el mallado automático (2.517 nudos) y el que le hemos impuesto (1.013.144 nudos) no existe mejora alguna en cuanto al error, con el consiguiente costo computacional para el segundo de los casos.

Resumen del experimento

Se puede considerar al FEMM como un patrón aceptable para validar distribuciones de temperatura. Se debe permitir que el programa seleccione de forma automática el tamaño del mallado, pues tal como demuestran los datos, está optimizada dicha selección para producir el mínimo error posible.

8.3.2 Experimento térmico 1

Esquema del experimento

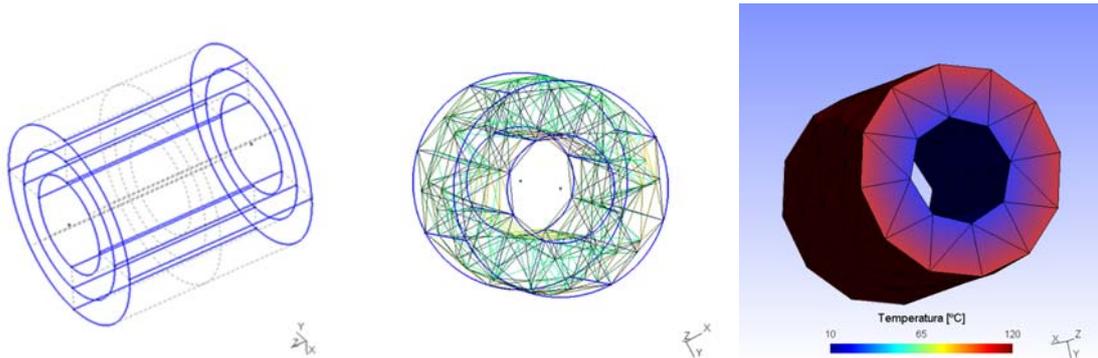


Figura 8-7. Experimento térmico 1.

Descripción del experimento

Se construye un cilindro de 2 metros de diámetro y 2 metros de altura. El cilindro tiene una pared interna de 0,5 metros de espesor.

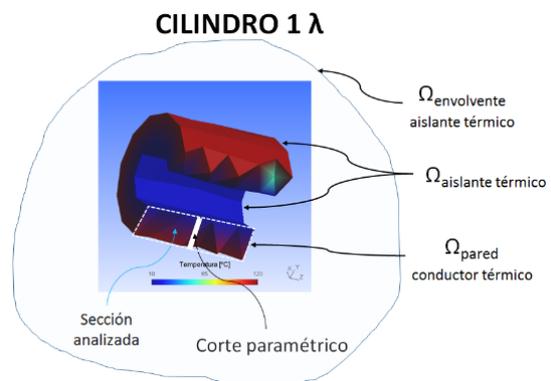
Los datos del experimento son:

$$\lambda: 1,00 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

Las condiciones de contorno del experimento son:

- El dominio pared Ω_{pared} es conductor térmico
- El dominio envolvente $\Omega_{\text{envolvente}}$ es aislante térmico.
- No existen fuentes de calor internas.

Figura 8-8. Condiciones de contorno CILINDRO1 λ .



Las condiciones iniciales son:

$$T_{0_ext}: 120 \text{ } ^\circ\text{C} \quad T_{0_int}: 30 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Las condiciones finales son:

$$T_{f_ext}: 120 \text{ } ^\circ\text{C} \quad T_{f_int}: 30 \text{ } ^\circ\text{C}$$

La temperatura más alta está en la cara externa del cilindro (120 °C) y la más baja está en la cara interna del cilindro (30 °C), se considera que el calor avanza en sentido radial. Se considera la tapa superior e inferior del cilindro como aislantes perfectos. No hay fuente de calor en el interior del cilindro. Se considera una transmisión pura de calor. Se aplican condiciones tipo Dirichlet.

Las paredes del cilindro tienen una conductividad térmica de 1 [W·m⁻¹ K⁻¹]. Este valor es ficticio y sirvió para calibrar desarrollo de funciones posteriores implementadas en C++.

Las condiciones iniciales son las mismas al principio y al final del experimento pues se trata de un proceso estacionario. Se hace un corte paramétrico sobre una línea, en sentido radial y se miden las temperaturas, según se indica en la Figura 8-8.

La temperatura de referencia se obtiene de una expresión analítica, Ec. 8.2. La temperatura (τ_x) se obtiene conociendo la temperatura de la cara exterior del cilindro (τ_2), la temperatura de la cara interior del cilindro (τ_1), el radio exterior del cilindro (r_2), el radio interior del cilindro (r_1) y el radio donde se desea conocer la temperatura (r_x).

$$\tau_x = (\tau_2 - \tau_1) \frac{\ln \frac{r_x}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} + \tau_1 \quad \text{Ec. 8.2}$$

Objetivos del experimento

Comprobar si la matriz constitutiva [M_λ], propuesta en el Capítulo 6, es válida en la conducción del calor, con un solo coeficiente de conductividad térmica, en régimen estacionario y con ausencia de fuentes internas de calor.

$$[G]^T \{ [M_\lambda] [G] [\tau] \} = [0] \quad \text{Ec. 8.3}$$

Se contrasta con la expresión analítica Ec. 8.2.

Gráficos obtenidos

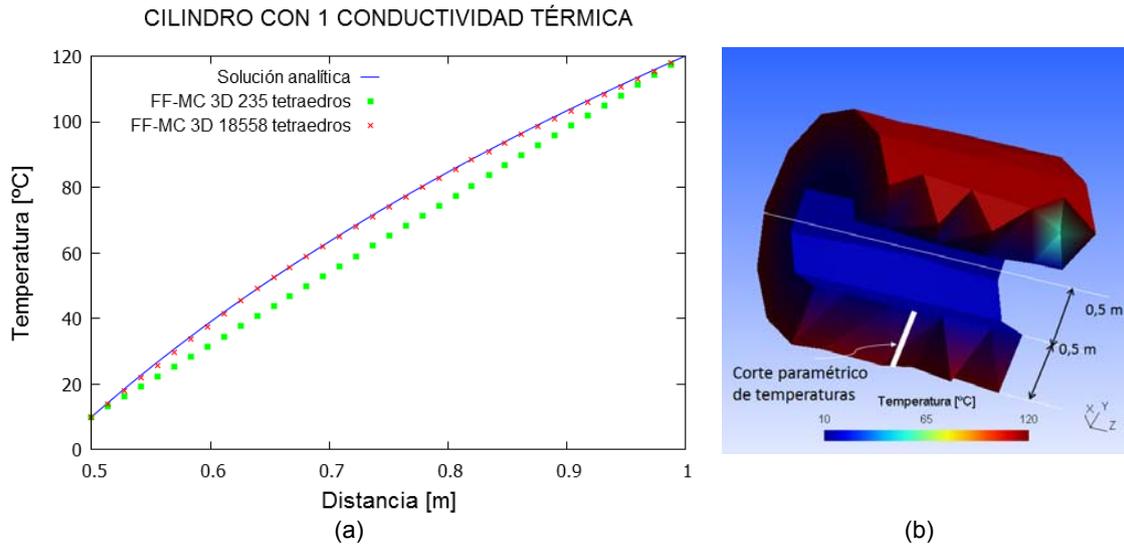


Figura 8-9. Cilindro de 1 conductividad térmica.

Estadísticos obtenidos

Mallado [Nudos]	235	18558
Temperatura [°C] a 0,75 m (Analítica ref: 74,4932 °C)	65,1646	73,9001
Diferencia de temperatura [°C]	-9,3286	-0,5931
Diferencia porcentual [%]	-12,5228	-0,7962

Tabla 8-3. Temperaturas en cilindro 1 conductividad.

HISTOGRAMA DE ERRORES PARA FEMM 18558 NUDOS

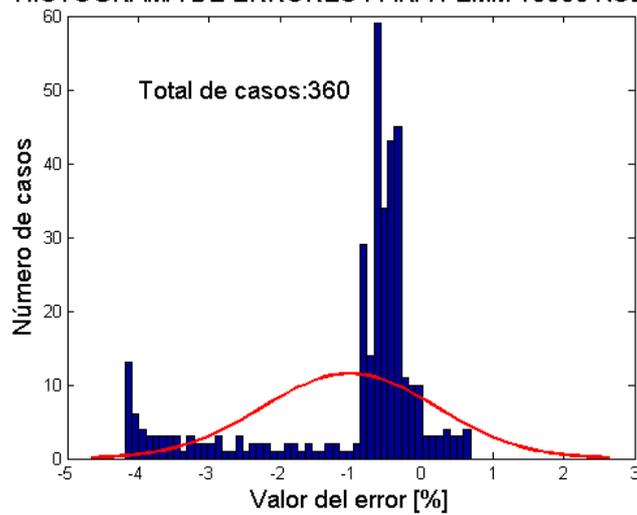


Figura 8-10. Histograma FF-CM vs analítica.

Mallado [tetraedros]	235	18558
R ² [0, +1]. Óptimo: +1	0,9921	0,9999
MSE [°C ²][0, +∞]. Óptimo: 0	47,4375	0,3091
RMSE [°C]	6,8875	0,556
RMSPE [-1, +1]. Óptimo: 0	0,0966	0,0078
MAE [°C]	6,2747	0,4926
MAEP [-1, +1]. Óptimo: 0	0,088	0,0069
IRM [-∞, +∞]. Óptimo: 0	7,5602	0,6275
PBIAS [-1, +1]. Óptimo: 0	-0,0965	-0,0066
NSEF [-∞, 1]. Óptimo: 1	0,9521	0,9997
U1 de Theil [0, 1]. Óptimo: 0	0,0458	0,0036
UM de Theil [0, 1]. Óptimo: 0	0,83	0,7156
US de Theil [0, 1]. Óptimo: 0	0,0029	0,01
UC de Theil [0, 1]. Óptimo: 0	0,1672	0,2745
Willmott-dW [0, 1]. Óptimo: 1	0,9883	0,9999
MEF [-∞, 1]. Óptimo: 1	0,9521	0,9997
CD [-∞,+∞]. Óptimo: 1	0,9405	0,9963
C [-∞,+∞]. Óptimo: 0	0,088	0,0069

Tabla 8-4: Estadísticos del experimento térmico 1.

Las temperaturas de la Tabla 8-3 han sido tomadas a 0,75 metros del centro del cilindro, en sentido radial, y a mitad de su altura, 1 metro.

Análisis de los datos

Es el primer experimento numérico sobre transmisión de calor que se realizó en esta tesis. De él se extrajo la necesidad de contar con un buen programa de graficado y validación de datos (Gnuplot y Matlab). Se creó una rutina para generar los estadísticos de validación. De la Figura 8-9(a) se deduce que, aparentemente, el modelo se ajusta bien a la expresión analítica Ec. 8.2. Observando los indicadores estadísticos se comprueba que, con un mallado denso, la validez de $[M_{\lambda}]$ está garantizada, tanto en cuanto se ha contrastado con una expresión analítica no sujeta a errores, ni controlados ni aleatorios. La expresión analítica es el contraste más fuerte al que se le puede someter los datos obtenidos de nuestro experimento. Esto lo demuestran los valores de los estadísticos para el mallado de 18.558 tetraedros. Los valores en magnitudes físicas muestran un error muy bajo (MSE, RMSE, MAE). Los indicadores porcentuales están muy próximos al óptimo. Si observamos los indicadores de fuente de error, vemos que es en las medias de errores hay mayor discrepancia (UM de Theil). Esto indica cierto sesgo que habrá que confirmar con un

histograma de errores, enfrentándolos a la distribución normal de los mismos. Ver Figura 8-10. Téngase en cuenta que, cuando hablamos de errores, debe hacerse en la medida porcentual y absoluta de los mismos, así como en la importancia que tengan para el caso de que se trate. Además, la expresión analítica corresponde al caso unidimensional (corte paramétrico), mientras que nuestro modelo ha sido desarrollado en 3D y le hemos hecho un corte paramétrico para hacerlo coincidir con la expresión analítica.

Resumen del experimento

Se decide, a partir de este experimento en adelante, tener como referencia el número de nudos, pues las aplicaciones informáticas utilizadas de patrón dan este dato como referencia. Además, el número de nudos indicará el número de ecuaciones e incógnitas que tendrá la matriz global del sistema.

El gradiente de temperatura es aproximadamente el esperado. Se tendrá que trasladar el foco caliente a la pared interior del cilindro para asemejarlo al proceso térmico real que aparece en las máquinas eléctricas asíncronas.

8.3.3 Experimento térmico 2

Esquema del experimento

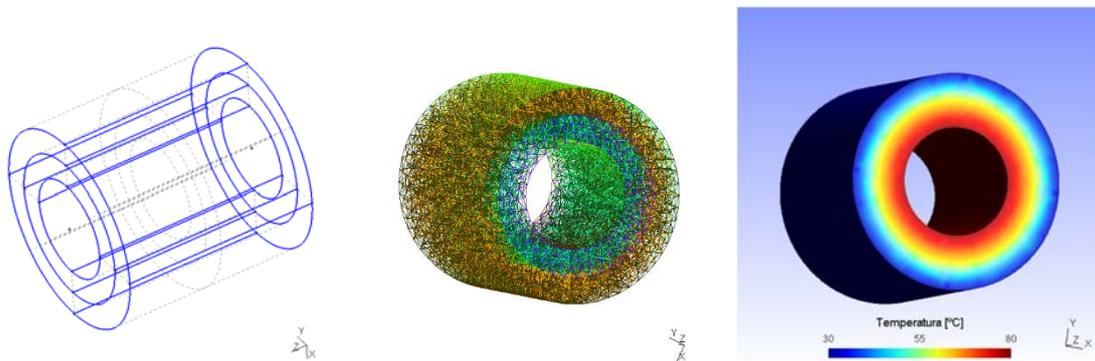


Figura 8-11. Experimento térmico 2.

Descripción del experimento

Se construye un cilindro de hueco de 2 metros de altura y 2 metros de diámetro. La pared tiene un espesor de 0,5 metros. Dicha pared está a su vez compuesta de dos cilindros concéntricos, con un espesor de 0,25 metros cada uno de ellos.

Los datos del experimento son:

$$\lambda_1: 50,00 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1} \text{ K}^{-1} \quad \lambda_2: 193,00 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

Las condiciones de contorno del experimento son:

- El dominio pared Ω_{pared} es conductor térmico
- El dominio envolvente $\Omega_{\text{envolvente}}$ es aislante térmico.
- No existen fuentes de calor internas.

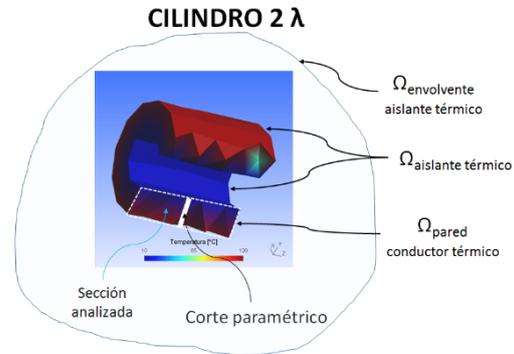


Figura 8-12. Condiciones de contorno CILINDRO2λ.

Las condiciones iniciales son:

$$T_{0_ext}: 30 \text{ °C} \quad T_{0_int}: 80 \text{ °C}$$

Las condiciones finales son:

$$T_{f_ext}: 30 \text{ °C} \quad T_{f_int}: 80 \text{ °C}$$

Las condiciones iniciales y finales del experimento son las mismas pues se trata de un proceso estacionario. Se hace un corte paramétrico sobre una línea, en sentido radial, donde se miden las temperaturas Figura 8-14 (b).

El cilindro interior tiene una conductividad térmica de $50 \text{ [W}\cdot\text{m}^{-1} \text{ K}^{-1}]$, típica de los aceros ($46,6\text{-}51,9 \text{ [W}\cdot\text{m}^{-1} \text{ K}^{-1}]$). El cilindro exterior tiene una conductividad térmica de $193 \text{ [W}\cdot\text{m}^{-1} \text{ K}^{-1}]$, típica de las aleaciones de aluminio ($95,3\text{-}222 \text{ [W}\cdot\text{m}^{-1} \text{ K}^{-1}]$).

Se considera que el calor avanza en sentido radial. Se considera la tapa superior e inferior del cilindro como aislantes perfectos. No hay fuente de calor en el interior del cilindro. Se considera una transmisión pura de calor. Se aplican condiciones tipo Dirichlet.

La temperatura que se utiliza como referencia es la obtenida por un corte paramétrico en una distribución bidimensional de temperatura, que corresponde al rectángulo generatriz de revolución de la pared del cilindro. Dicha distribución de temperaturas ha sido generada con FEMM y se observa en la Figura 8-13 (a).

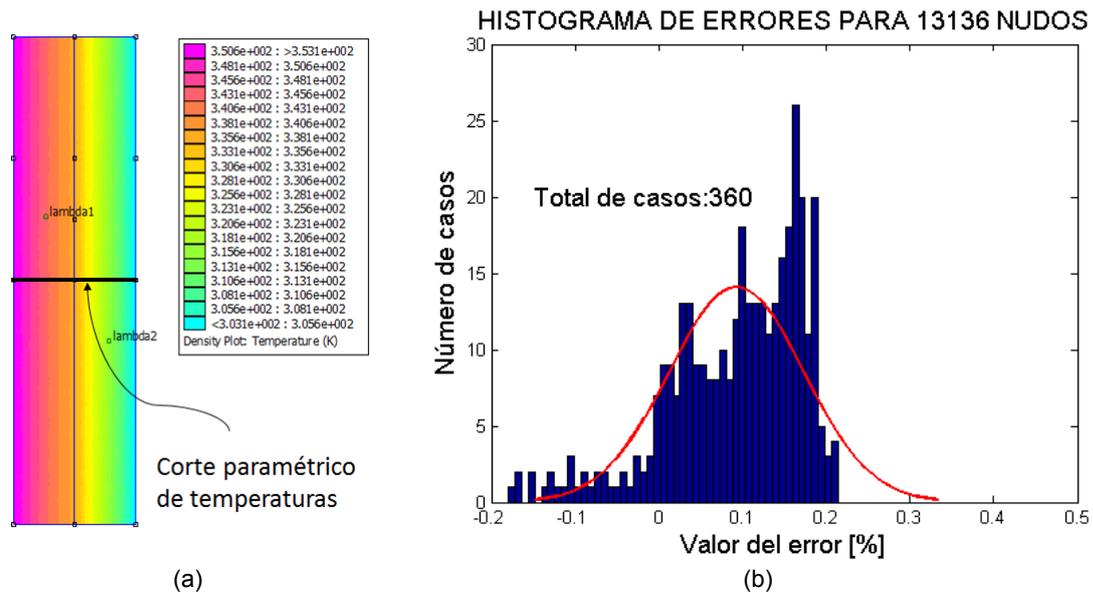


Figura 8-13. Temperaturas de referencia (FEMM).

Objetivos del experimento

Comprobar si la matriz constitutiva $[M_\lambda]$, propuesta en el Capítulo 6, es válida en la conducción del calor con dos coeficientes de conductividad diferentes, en régimen estacionario y con ausencia de fuentes internas de calor. La matriz $[M_\lambda]$ se ha propuesto en esta tesis como una alternativa a las matrices habitualmente utilizadas en las ecuaciones constitutivas de la FF-MC. Se calcula con la ecuación de transmisión de calor en FF-CM siguiente:

$$[G]^T \{ [M_\lambda][G][\tau] \} = [0]$$

Ec. 8.4

Gráficos obtenidos

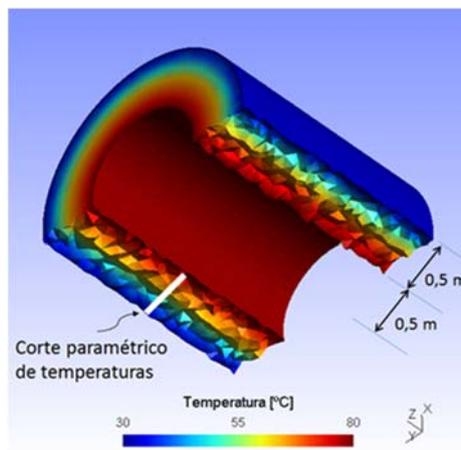
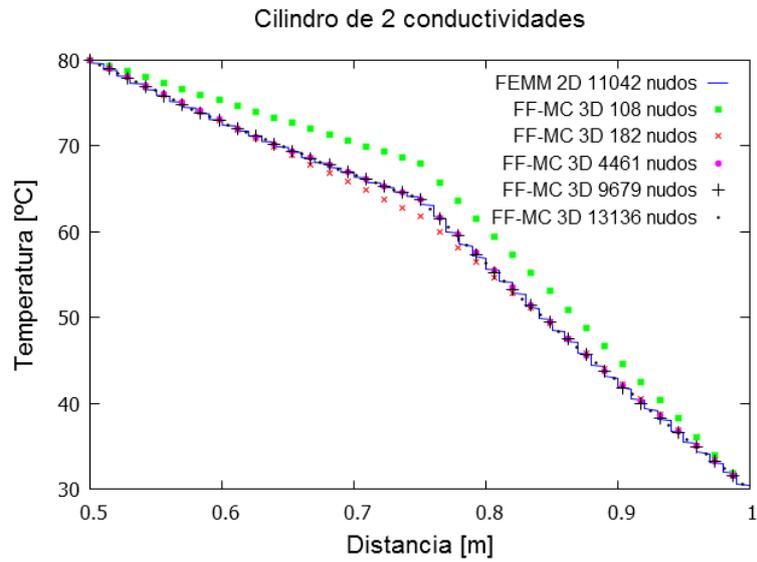


Figura 8-14. Cilindro con 2 conductividades térmicas.

Estadísticos obtenidos

Mallado [Nudos]	108	182	4461	9679	13136
Temperatura [°C] a 0,75 m (FEMM ref: 64,0653 °C)	67,8991	61,7719	64,0343	63,6987	63,6975
Diferencia de temperatura [°C]	3,8338	-2,2934	-0,031	-0,3666	-0,3678
Diferencia porcentual [%]	5,9842	-3,5798	-0,0484	-0,5722	-0,5741

Tabla 8-5. Temperaturas en cilindro 2 conductividades.

Las temperaturas de la Tabla 8-5 han sido tomadas a 0,75 metros del centro del cilindro, en sentido radial, y a mitad de su altura, 1 metro.

Mallado [nudos]	108	182	4461	9679	13136
R ² [0, +1]. Óptimo: +1	0,9929	0,9982	1	1	1
MSE [°C ²] _[0, +∞] . Óptimo: 0	9,2495	0,513	0,0282	0,006	0,0054
RMSE [°C]	3,0413	0,7162	0,1678	0,0773	0,0733
RMSPE [-1, +1]. Óptimo: 0	0,0518	0,0122	0,0029	0,0013	0,0012
MAE [°C]	2,7656	0,5034	0,1464	0,0672	0,063
MAEP [-1, +1]. Óptimo: 0	0,0471	0,0086	0,0025	0,0011	0,0011
IRM [-∞, +∞]. Óptimo: 0	3,3445	1,0191	0,1923	0,0889	0,0852
PBIAS [-1, +1]. Óptimo: 0	0,045	-0,0051	0,0025	0,0011	0,0009
NSEF [-∞, 1]. Óptimo: 1	0,9578	0,9977	0,9999	1	1
U1 de Theil [0, 1]. Óptimo: 0	0,0246	0,0059	0,0014	0,0006	0,0006
UM de Theil [0, 1]. Óptimo: 0	0,8269	0,1728	0,7551	0,6518	0,5668
US de Theil [0, 1]. Óptimo: 0	0,0027	0,0691	0,0008	0,0004	0,064
UC de Theil [0, 1]. Óptimo: 0	0,1704	0,7581	0,244	0,3478	0,3692
Willmott-dW [0, 1]. Óptimo: 1	0,9896	0,9994	1	1	1
MEF [-∞, 1]. Óptimo: 1	0,9578	0,9977	0,9999	1	1
CD [-∞, +∞]. Óptimo: 1	0,9467	1,0255	1,0006	0,9998	0,9975
C [-∞, +∞]. Óptimo: 0	0,0471	0,0086	0,0025	0,0011	0,0011

Tabla 8-6. Estadísticos del experimento térmico 2.

Análisis de los datos

Los indicadores estadísticos dan unos resultados excelentes. El coeficiente de determinación del modelo – MEF - y el coeficiente de determinación del modelo –C - dan valores cercanos al óptimo. El UM de Theil indica que la fuente de error detectada está, si se le quisiera dar significación, en los valores medios, que concuerda con el sesgo que presenta el histograma de errores respecto de la distribución normal de los mismos Figura 8-13 (b). El de la referencia – FEMM - discrepa del de FF-CM. No hay grandes desviaciones en los errores - US de Theil - . En cuanto a errores en verdadera magnitud, el RMSE da un máximo error de 3 °C para el mallado menos denso y de 0,0733 °C para el más denso. El error medio absoluto – MAE - se mueve entre 2,7656 y 0,063 °C. Hay concordancia entre todos los indicadores. Se puede dar por válido el modelo en base a la referencia tomada.

Resumen del experimento

El método se muestra muy fuerte, pues enfrentamos un modelo 3D en FF-MC, con mallados poco densos y tetraédricos, a un modelo de simetría axial, resuelto

por el método de los elementos finitos, con un mallado triangular (FEMM), relativamente denso. Los errores que se producen no son significativos. Existe una economía muy grande en el método propuesto. Recuérdese que el número de nudos indica el número de ecuaciones e incógnitas que hay que resolver en la matriz global. Esto nos lleva a ver que no existe mejora significativa al aumentar el número de nudos (mallado más denso), pues los resultados obtenidos con mallados de 9.679 y 13.136 nudos son muy similares, en cuanto a errores producidos se refiere.

8.3.4 Experimento térmico 3

Esquema del experimento

El experimento se ha realizado con el mismo cilindro que se indica en Figura 8-11. El modelo de FEMM utilizado es el mismo que se expone la Figura 8-13 (a). El corte paramétrico tridimensional es el mismo que se expone en la Figura 8-14 (b).

Objetivos del experimento

En este experimento se trata de comprobar la validez de la matriz de conductividad térmica $[M_\tau]$, propuesta en el Capítulo 6. Esta matriz es una aportación hecha por nosotros. Con esta matriz queremos demostrar la versatilidad de la FF-MC en cuanto a las ecuaciones constitutivas se refiere. La matriz $[M_\tau]$ debe dar unos resultados similares a $[M_\lambda]$ en la ecuación de transmisión de calor siguiente:

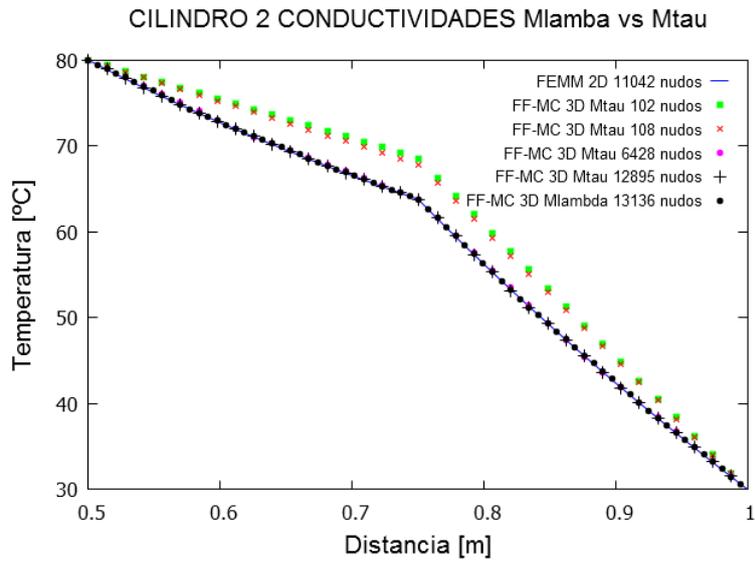
$$[G]^T \{ [M_\tau][G][\tau] \} = [0]$$

Ec. 8.5

Descripción del experimento

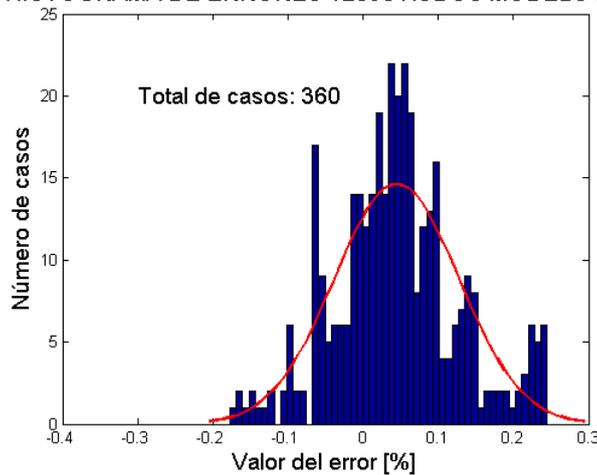
El experimento tiene los mismos datos que el experimento 8.3.3, excepto que se ha sustituido la matriz $[M_\lambda]$ por la matriz $[M_\tau]$. Los resultados que se esperan obtener deben ser parecidos a los obtenidos con el experimento 8.3.3.

Gráficos obtenidos



(a)

HISTOGRAMA DE ERRORES 12895 NUDOS MODELO Mtau



(b)

Figura 8-15. Comparativa de M_τ con M_λ .

Estadísticos obtenidos

Mallado [Nudos]	102	108	2328	6428	12895
Temperatura [°C] a 0,75 m (FEMM ref: 63,6959 °C)	68,4981	67,7963	63,7282	63,7047	63,6975
Diferencia de temperatura [°C]	4,8022	4,1004	0,0323	0,0088	0,0016
Diferencia porcentual [%]	7,5393	6,4375	0,0507	0,0138	0,0025

Tabla 8-7. Temperaturas 2λ en matriz M_τ

Las temperaturas de la Tabla 8-1 han sido tomadas a 0,75 metros del centro del cilindro, en sentido radial, y a mitad de su altura, 1 metro.

Mallado [nudos]	102	108	2328	6428	12895
R^2 [0, +1]. Óptimo: +1	0,9910	0,9932	1	1	1
MSE [°C ²] _[0, +∞] . Óptimo: 0	11,448	8,8893	0,0235	0,0247	0,0021
RMSE [°C]	3,3835	2,9815	0,1533	0,1571	0,0455
RMSPE [-1, +1]. Óptimo: 0	0,0576	0,0508	0,0026	0,0027	0,0008
MAE [°C]	3,0646	2,7128	0,135	0,1396	0,0386
MAEP [-1, +1]. Óptimo: 0	0,0522	0,0462	0,0023	0,0024	0,0007
IRM [-∞, +∞]. Óptimo: 0	3,7356	3,2769	0,1741	0,1767	0,0536
PBIAS [-1, +1]. Óptimo: 0	0,0496	0,0442	0,0014	0,0022	0,0004
NSEF [-∞, 1]. Óptimo: 1	0,9477	0,9594	0,9999	0,9999	1
U1 de Theil [0, 1]. Óptimo: 0	0,0273	0,0241	0,0013	0,0013	0,0004
UM de Theil [0, 1]. Óptimo: 0	0,8204	0,8279	0,3072	0,6868	0,2304
US de Theil [0, 1]. Óptimo: 0	0,0036	0,0025	0,0704	0,0582	0,0166
UC de Theil [0, 1]. Óptimo: 0	0,1761	0,1696	0,6224	0,255	0,753
Willmott-dW [0, 1]. Óptimo: 1	0,9872	0,99	1	1	1
MEF [-∞, 1]. Óptimo: 1	0,9477	0,9594	0,9999	0,9999	1
CD [-∞,+∞]. Óptimo: 1	0,9343	0,9488	0,9945	0,9948	1,0008
C [-∞,+∞]. Óptimo: 0	0,0522	0,0462	0,0023	0,0024	0,0007

Tabla 8-8. Estadísticos del experimento térmico 3.

Análisis de los datos

Se comprueba en la tabla Tabla 8-7 que nuestra segunda aportación [M_τ] se comporta mucho mejor que nuestra primera aportación [M_λ]. Cuando se eleva la densidad de mallado de [M_λ] aproxima peor que [M_τ]:

	FEMM ref: °C	Temp. obtenida	Error %
[M_λ] 13136 nudos	64,0653	63,6975	-0,5741
[M_τ] 12895 nudos	63,6959	63,6975	0,0025

Tabla 8-9. Comparativa entre M_λ y M_τ .

Manteniendo las mismas densidades de mallado anteriormente indicadas, pasamos a comparar ciertos estadísticos obtenidos. Si comparamos los UM de Theil, vemos que para $[M_\lambda]$ su valor es de 0,5668. En cambio para $[M_\tau]$: es de 0,2304. El UC de Theil, vemos que para $[M_\lambda]$ su valor es de 0,3692. En cambio para $[M_\tau]$ es de 0,753. Esto está indicando que en la propuesta $[M_\lambda]$ se producen más errores sistémicos que en la propuesta $[M_\tau]$.

Si esto es así, debe confirmarse en los valores absolutos y promediados de los errores. Tenemos para $[M_\lambda]$ un RMSE igual a 0,0733 °C y un MAE igual a 0,06 °C. Para la propuesta $[M_\tau]$ el RMSE es de 0,0455 °C y el MAE es de 0,0386 °C. Esto viene a confirmar lo anteriormente dicho.

Para tener mayor certeza de lo anteriormente afirmado, comparamos la distribución del error al usar $[M_\lambda]$ viendo el histograma de errores en Figura 8-13(b), con el histograma de errores, Figura 8-15(b), cuando utilizamos $[M_\tau]$. Se aprecia como en el caso de $[M_\tau]$ existe mucho menos sesgo, estando más próxima la media a cero que cuando se utiliza $[M_\lambda]$.

Resumen del experimento

Nuestra segunda aportación $[M_\tau]$ mejora a la primera $[M_\lambda]$.en cuanto a errores se refiere. Pero como se trata de cálculos electro-térmicos, es mucho más rentable en términos informáticos utilizar la propuesta primera, pues con ella podemos calcular densidades de corrientes, además de conducción de calor. La propuesta $[M_\tau]$ quedaría pues restringida a cálculos exclusivamente térmicos.

8.3.5 Experimento térmico 4

Esquema del experimento

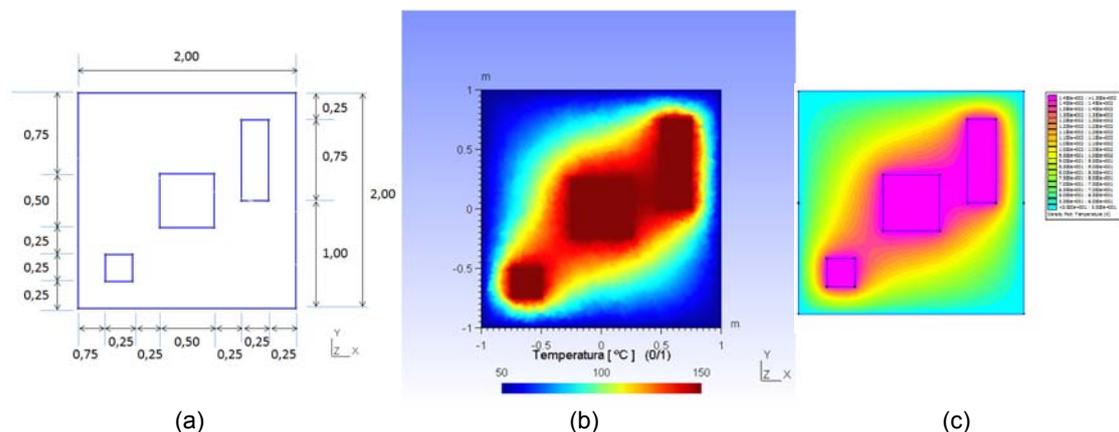


Figura 8-16. Cuadrado 2D con 3 huecos.

Objetivos del experimento

Se pretende validar el desarrollo de la matriz $[M_\lambda]^{2D}$ para dominios bidimensionales, tal como se ha explicado en el Capítulo 6. Para ello se utiliza la ecuación de transmisión de calor en dos dimensiones siguiente:

$$[G]^T \{ [M_\lambda]^{2D} [G] [\tau] \} = [0] \quad \text{Ec. 8.6}$$

Descripción del experimento

La forma analítica de desarrollar la ecuación de transmisión de calor en dominios bidimensionales es convertirla en una ecuación de Laplace, Ec. 8.7. A su vez, la ecuación de Laplace deberá desarrollarse en una serie de Fourier, Ec. 8.8. Esto es válido siempre que no existan huecos en el interior del dominio.

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} = 0 \quad \text{Ec. 8.7}$$

$$\theta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \text{sen} \left(\frac{2\pi x}{L} \right) \cdot \text{senh} \left(\frac{2\pi y}{L} \right) \quad \text{Ec. 8.8}$$

Donde:

$$C_n = \frac{2[(-1)^{n+1} + 1]}{n\pi \cdot \text{senh} \left(\frac{n\pi W}{L} \right)} \quad \text{Ec. 8.9}$$

Siendo θ la temperatura que se desea conocer; L es el ancho de la placa en el sentido del eje X; W es el alto de la placa en el sentido del eje Y. Las condiciones de contorno son: $\theta(0, y) = \tau_1$, $\theta(L, y) = \tau_1$, $\theta(x, 0) = \tau_1$, $\theta(x, W) = \tau_2$.

En nuestro experimento tomamos una placa de 2x2 metros, tal como se aprecia en la Figura 8-16(a). Le hemos creado tres huecos en su interior, a cuyos bordes le asignamos una temperatura. Al borde externo del cuadrado le asignamos otra temperatura.

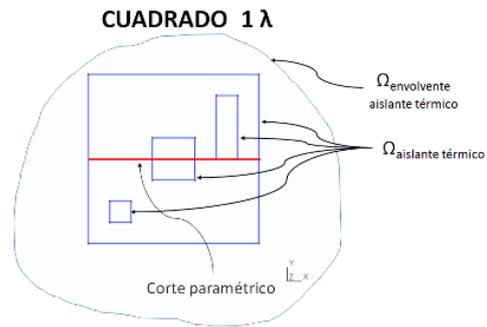
Los datos del experimento son:

$$\lambda_1: 50,00 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1} \text{ K}^{-1} \quad \lambda_2: 193,00 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

Las condiciones de contorno del experimento son:

- El dominio pared Ω_{pared} es conductor térmico
- El dominio envolvente $\Omega_{envolvente}$ es aislante térmico.
- No existen fuentes de calor internas.

Figura 8-17. Condiciones de contorno cuadrado 3 huecos.



Las condiciones iniciales son:

$$T_{0_ext}: 50 \text{ } ^\circ\text{C} \quad T_{0_int}: 150 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Las condiciones finales son:

$$T_{f_ext}: 50 \text{ } ^\circ\text{C} \quad T_{f_int}: 150 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Los bordes de los huecos están a 150 °C. El borde externo del cuadrado tiene una temperatura de 50 °C.

Las condiciones iniciales son las mismas que las finales, pues se considera una conducción de calor en régimen estacionario y con ausencia de fuentes de calor internas.

La superficie del cuadrado tienen una conductividad térmica de 1 [W·m⁻¹ K⁻¹]. Este valor es ficticio y sirvió para calibrar desarrollo de funciones, para el caso bidimensional, posteriores implementadas en C++.

Se aplica la matriz $[M_\lambda]^{2D}$ que, tal como se ha demostrado en el capítulo 6, es una adaptación a dos dimensiones de nuestra propuesta de $[M_\lambda]$ en tres dimensiones.

Se hace un corte paramétrico en sentido horizontal, a mitad del cuadrado (1 metro) y se miden las temperaturas. Se procede a realizar el análisis de este prototipo pero utilizando FEMM. Así mismo, en el FEMM, se realiza otro corte paramétrico de temperaturas. Con las temperaturas obtenidas en ambos cortes, se hace una comparativa y se analizan los resultados.

Gráficos obtenidos

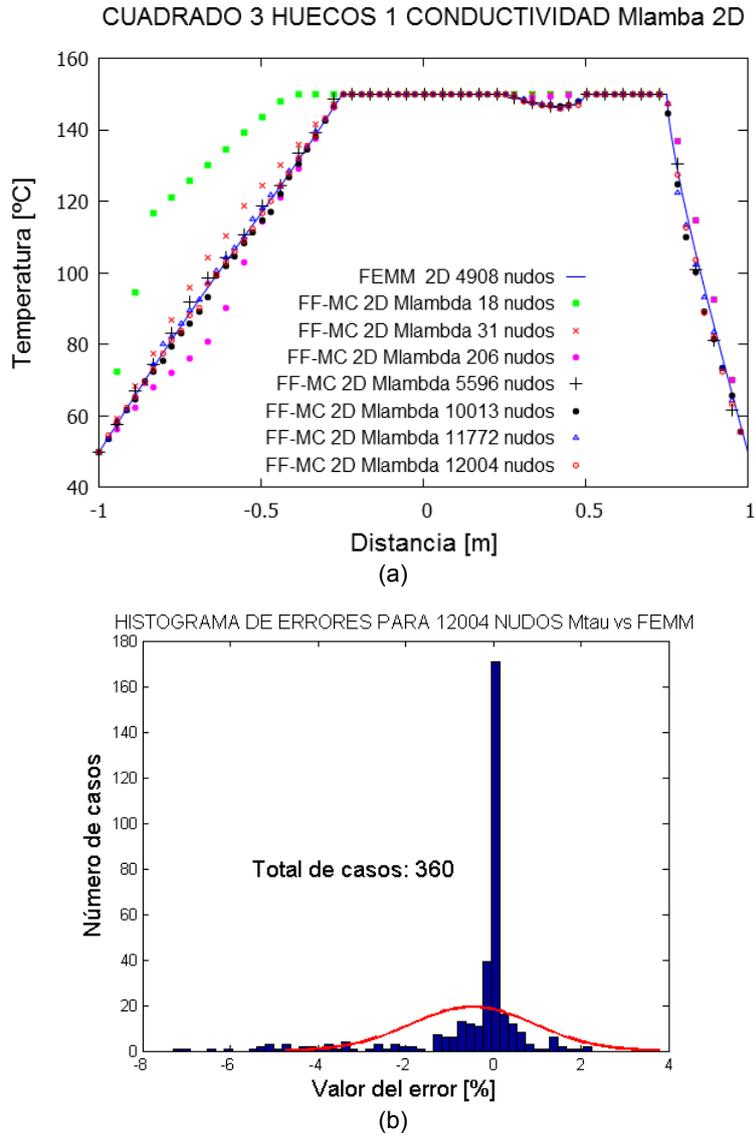


Figura 8-18. Temperaturas en cuadrado con 3 huecos.

Estadísticos obtenidos

Mallado [Nudos]	18	3	206	5596	10013	11772	12004
Temperatura [°C] a 1,00 m (FEMM ref: 150,00 °C)	150.00	150.00	150.00	149.98	150.00	150.00	149.9989
Diferencia de temperatura [°C]	0,00	0,00	0,00	0,20	0,00	0,00	0,001
Diferencia porcentual [%]	0,00	0,00	0,00	-0,012	0,00	0,00	7,3 10 ⁻⁶

Tabla 8-10. Temperaturas cuadrado 2D con 3 huecos.

Las temperaturas de la Tabla 8-10 han sido tomadas a 1,00 metros de la base del cuadrado, en sentido horizontal y 1 metro en sentido vertical. Corresponde a la coordenada (0, 0) de la Figura 8-16(b).

Mallado [nudos]	18	31	206	5596	10013	11772	12004
R ² [0, +1]. Óptimo: +1	0,8321	0,9922	0,9805	0,9970	0,9980	0,9986	0,9986
MSE [°C ²][0, +∞]. Óptimo:0	297,9439	17,8011	26,9098	3,4015	3,6492	1,52	1,8098
RMSE [°C]	17,2611	4,2191	5,1875	1,8443	1,9103	1,2329	1,3453
RMSPE [-1, +1]. Óptimo: 0	0,1392	0,034	0,0418	0,0149	0,0154	0,0099	0,0109
MAE [°C]	10,5191	2,8727	3,0939	0,9908	1,0204	0,6593	0,633
MAEP [-1, +1]. Óptimo: 0	0,0849	0,0232	0,025	0,008	0,0082	0,0053	0,0051
IRM [-∞, +∞]. Óptimo: 0	28,3241	6,1965	8,6978	3,4329	3,5764	2,3053	2,8589
PBIAS [-1, +1]. Óptimo: 0	0,0782	0,0226	-0,0097	0,0005	-0,0077	-0,0005	-0,0033
NSEF [-∞, 1]. Óptimo: 1	0,7151	0,983	0,9743	0,9967	0,9965	0,9985	0,9983
U1 de Theil [0, 1]. Óptimo: 0	0,0651	0,0163	0,0203	0,0072	0,0075	0,0048	0,0053
UM de Theil [0, 1]. Óptimo: 0	0,3714	0,4636	0,0526	0,0012	0,2485	0,0022	0,0905
US de Theil [0, 1]. Óptimo: 0	0,1318	0,0983	0,137	0,0361	0,1486	0,0246	0,1192
UC de Theil [0, 1]. Óptimo: 0	0,4968	0,4381	0,8104	0,9627	0,6029	0,9732	0,7903
Willmott-dW [0, 1]. Óptimo: 1	0,914	0,9956	0,9939	0,9992	0,9991	0,9996	0,9996
MEF [-∞, 1]. Óptimo: 1	0,7151	0,983	0,9743	0,9967	0,9965	0,9985	0,9983
CD [-∞,+∞]. Óptimo: 1	1,3231	1,0779	0,89	0,9787	0,9552	0,9881	0,9717
C [-∞,+∞]. Óptimo: 0	0,0849	0,0232	0,025	0,008	0,0082	0,0053	0,0051

Tabla 8-11. Estadísticos del experimento térmico 4.

Análisis de los datos

Los datos obtenidos, en líneas generales coinciden con la bibliografía consultada: existe mayor precisión en cálculos en 2D que en 3D. Por otro lado se comprueba la validez de nuestra aportación $[M_\lambda]^{2D}$ para el cálculo de la transmisión de calor bidimensional. Aunque los datos de la Tabla 8-10 son muy satisfactorios, conviene examinar otros estadísticos. Así los indicadores del error en verdadera magnitud - RMSE y MAE - indican cierto error en la muestra de temperaturas tomadas (corte paramétrico), si bien este error es pequeño. Téngase en cuenta que se compara dos sistemas sujetos a una relativa varianza entre ellos - FF-CM vs FEMM -. Esto lo está indicando el US de Theil que indica que una de la fuente de error es la varianza de los datos entre los modelos. Aun así, está muy alejada del valor máximo de estadístico, que es de valor 1. Así mismo UC está indicando que la fuente de error no es sistémica, sino aleatoria. Cabría preguntarse: ¿Cómo en un cálculo de este tipo puede haber factor aleatorio en el error? Existen muchas fuentes para inducir cierta aleatoriedad en

los errores. Por ejemplo, cuando se efectúa el corte paramétrico, dependerá de los elementos interceptados para obtener el valor de temperatura. Recuérdese que, tanto en el caso tridimensional como en el bidimensional, las temperaturas están situadas en los nudos. Cuanto más alejada pase la recta del corte paramétrico, más débil será el valor interpolado respecto de los puntos más próximos. Esto hace que los puntos más próximos a la recta del corte paramétrico aporten mayor peso que los más alejados. Así la recta de corte paramétrico tendrá valores más errados que otros, de aquí que aparezcan los valores relativamente altos de US y de UC. Eso es positivo, pues descarta errores provenientes del propio método. La confirmación de lo dicho está en la Figura 8-18(b) donde se muestra claramente que los errores están en torno al valor cero, siguiendo una distribución normal y coincidiendo con lo que explica en la teoría de errores.

Resumen del experimento

La validez de $[M_\lambda]^{2D}$ como matriz constitutiva en la transmisión del calor en dos dimensiones queda demostrada.

8.4 Experimentos numéricos de tipo electromagnético

Con carácter general, los experimentos electromagnéticos se ha centrado en dos partes importantes desde el punto de vista electromagnético y de funcionamiento de la máquina: un conductor situado en el estator y un conductor situado en el rotor. En el rotor se ha añadido un nuevo conductor que consta de tres terminales. Este nuevo conductor equivale a la conexión existente entre cualquier barra del rotor y el anillo de cortocircuito permanente, en caso del rotor de jaula de ardilla. Con estos modelos cubrimos todas las posibilidades en cuanto a fenómenos electromagnéticos se refiere. Cada conductor está rodeado por un cubo de material distinto que el del conductor. En este cubo cabe representar cualquier tipo de material. Como en esta tesis sólo se ha considerado modelos lineales, por ahora dicho cubo envolvente se ha rellenado con aire. Como líneas futuras, dicho cubo se puede rellenar de cualquier material: una distribución homogénea de aire o heterogénea de aire, polímeros y material ferromagnético. Al cubo de dos puertas le hemos denominado 1CUBO y al de tres puertas BICUBO, ya que la tercera puerta la utilizamos, en cuanto a potenciales se refiere, como puerta de referencia.

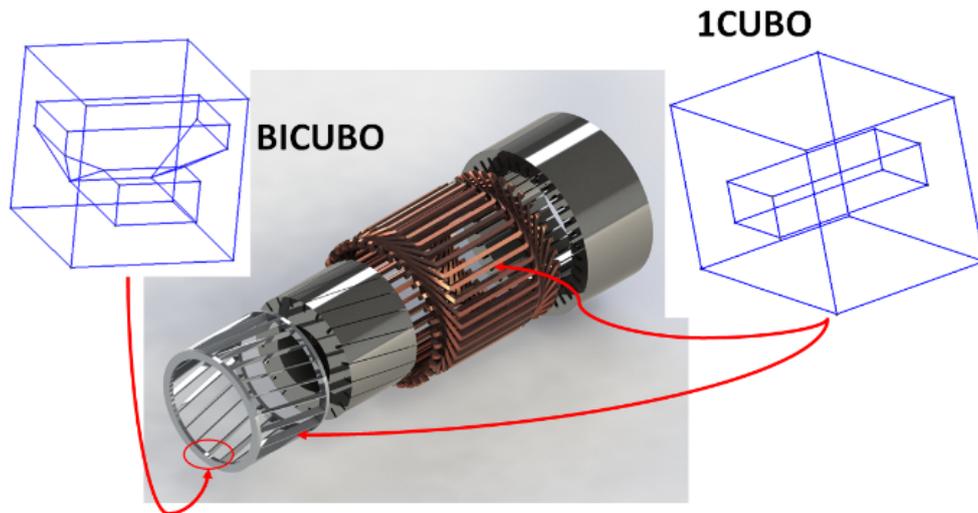


Figura 8-19. 1CUBO y BICUBO.

8.4.1 Experimento electromagnético 1

Esquema del experimento

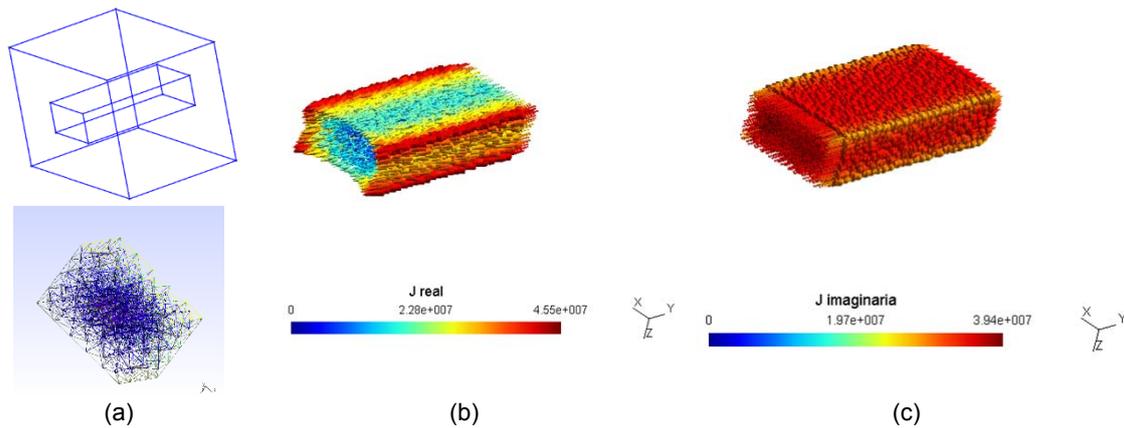


Figura 8-20. Experimento electromagnético 1.

Objetivos del experimento

Comprobar si la densidad de corriente inducida en un conductor, la cual es calculada mediante FF-MC en 3D, es coincidente con la calculada por el método de los elementos finitos utilizando el software GetDP en 2D.

Comprobar que se pueden conectar circuitos de parámetros concentrados a dominios continuos discretizables mediante el Método Nodal Modificado.

Descripción del experimento

Se ha conectado el elemento continuo 1CUBO de Figura 8-23 a un circuito eléctrico de parámetros discretos al circuito que se muestra en

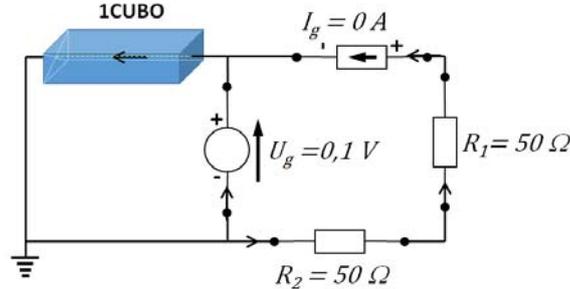


Figura 8-21. Circuito eléctrico con 1CUBO.

Los elementos del circuito se han ensamblado utilizando la metodología explicada en el capítulo 7, obteniéndose una matriz global como la expuesta en Ec. 8.10.

$$\begin{bmatrix} [C]^T[M_v][C] + j\omega[M_\sigma] & [M_\sigma][G] & [0] & [0] & [0] \\ -j\omega[G]^T[M_\sigma] & -[G]^T[M_\sigma][G] & [0] & [0] & [0] \\ -j\omega[I_c][M_\sigma][a] & [I_c][M_\sigma][G] & [0] & [0] & [-1] \\ [0] & [0] & [Y_2][A_2]^T & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [A_1][Y_1][A_1]^T & [A_2] & A_4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} [a] \\ [v_i] \\ [v_n] \\ [I_2] \\ [I_4] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [I_f] \\ [0] \\ [0] \\ [W_2] \\ [-A_3 I_j] \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 8.10}$$

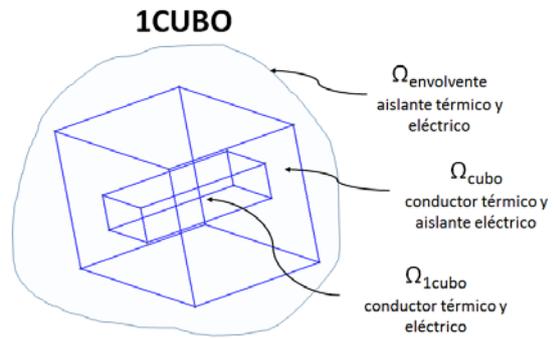
Los datos del experimento son:

$V:$	0,1 V	$M_{aire}:$	Por cálculo	kg
$I_g:$	0,0 A	$Cp_{aire}:$	1012	$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$, a 25°C y 1 ATA
$t_\theta:$	-.- No procede	$T_{\theta_{aire}}:$	20	°C
$t_f:$	-.- No procede	$M_{cu}:$	Por cálculo	kg
$\theta:$	-.- No procede	$Cp_{cu}:$	387	$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$, a 25°C y 1 ATA
$\Delta t:$	-.- No procede	$\lambda_{cu}:$	372,10	$W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
$\gamma_{aire}:$	1,25184 Kg/m^3 , a 25°C y 1 ATA	$\gamma_{cu}:$	8940	Kg/m^3 , a 25°C y 1 ATA
$\lambda_{aire}:$	0,024 $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$	$T_{\theta_{cu}}:$	20	°C
$\sigma_{aire}:$	-.- No procede	$\sigma_{cu}:$	$58 \cdot 10^6$	S/m

Las condiciones de contorno del experimento son:

- El dominio pared Ω_{pared} es conductor térmico y no conductor eléctrico.
- El dominio envolvente $\Omega_{envolvente}$ es conductor térmico y aislante eléctrico.

Figura 8-22. Condiciones contorno 1CUBO.



Se ha hecho un corte paramétrico para comprobar las densidades de corriente en el interior del conductor, en sentido transversal, según indica la Figura 8-23.

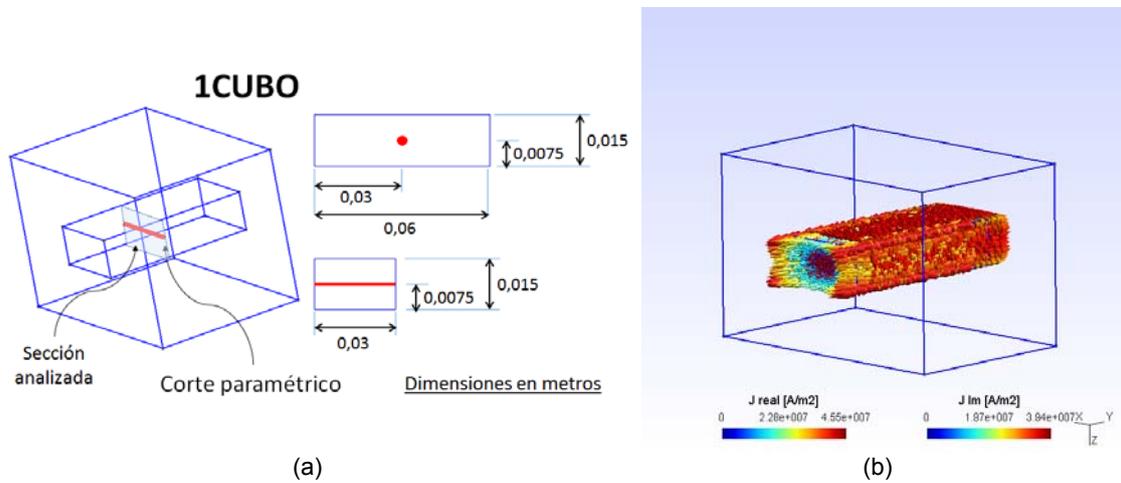


Figura 8-23. 1CUBO. (a) Dimensiones. (b) Corrientes.

Gráficos obtenidos

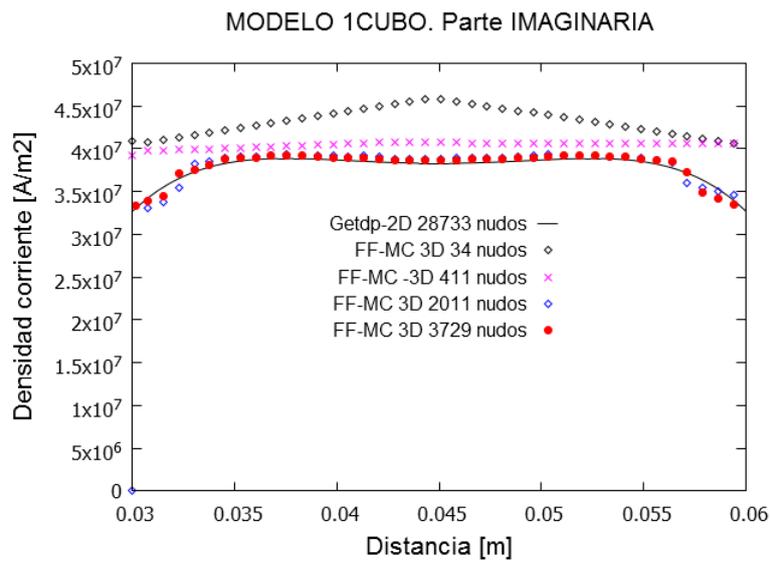
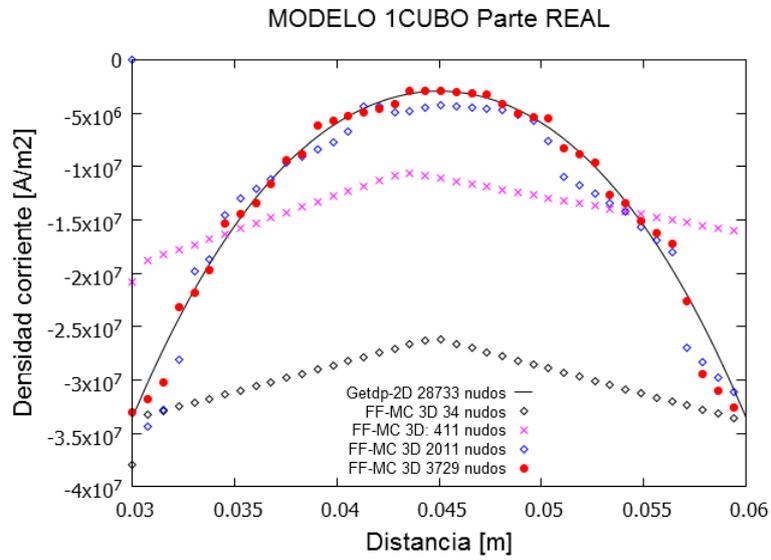


Figura 8-24. Densidades de corriente en 1CUBO.

Estadísticos obtenidos

- Componente real de la densidad de corriente.

Mallado [Nudos]	34	307	411	555	2011	3729
J real [Am ⁻²] a 0,045 m (GetDP ref: -2,94E+15 A·m ⁻²)	-2,62E+15	-7,99E+15	-1,11E+15	-2,31E+15	-4,21E+15	-2,94E+15
Diferencia de J real [A·m ⁻²]	3,20E+14	-5,05E+15	1,83E+15	6,30E+14	-1,27E+15	0,00E+00
Diferencia porcentual [%]	-10,8844	171,7687	-62,2449	-21,4286	43,1973	0,0000

Tabla 8-12. Densidades de corriente EE1-J Real.

Las densidades de corriente del experimento electromagnético 1, para abreviar EE1, en la Tabla 8-12, han sido tomadas en el centro de la recta del corte paramétrico, Figura 8-23(a).

Mallado [nudos]	34	307	411	555	2011	3729
R ² [0, +1]. Óptimo: +1	0,9149	0,7700	0,8462	0,9561	0,8305	0,9149
MSE [(Am ⁻²) ²] _[0, +∞] . Óptimo: 0	3,48E+14	4,08E+13	5,05E+13	5,29E+12	1,62E+13	3,48E+14
RMSE_ _[Am⁻²]	1,86E+07	6,39E+06	7,10E+06	2,30E+06	4,03E+06	1,86E+07
RMSPE [-1, +1]. Óptimo: 0	-1,48	-0,507	-0,5639	-0,1826	-0,3198	-1,48
MAE [Am ⁻²]	1,74E+07	5,03E+06	6,28E+06	1,72E+06	2,06E+06	1,74E+07
MAEP [-1, +1]. Óptimo: 0	-1,3779	-0,3995	-0,4985	-0,1363	-0,1638	-1,3779
IRM [-∞, +∞]. Óptimo: 0	2,00E+07	8,11E+06	8,04E+06	3,08E+06	7,86E+06	2,00E+07
PBIAS [-1, +1]. Óptimo: 0	0,5795	0,249	0,1055	-0,0113	0,0651	0,5795
NSEF [-∞, 1]. Óptimo: 1	-3,3254	0,4925	0,3721	0,9342	0,7981	-3,3254
U1 de Theil [0, 1]. Óptimo: 0	0,4097	0,1823	0,239	0,073	0,126	0,4097
UM de Theil [0, 1]. Óptimo: 0	0,8668	0,4277	0,0437	0,0037	0,0475	0,8668
US de Theil [0, 1]. Óptimo: 0	0,1281	0,0299	0,8921	0,2369	0,019	0,1281
UC de Theil [0, 1]. Óptimo: 0	0,0051	0,5424	0,0642	0,7593	0,9335	0,0051
Willmott-dW [0, 1]. Óptimo: 1	0,4724	0,8892	0,606	0,9853	0,952	0,4724
MEF [-∞, 1]. Óptimo: 1	-3,3254	0,4925	0,3721	0,9342	0,7981	-3,3254
CD [-∞,+∞]. Óptimo: 1	0,2622	0,6763	11,0193	0,7902	0,8792	0,2622
C [-∞,+∞]. Óptimo: 0	-1,3779	-0,3995	-0,4985	-0,1363	-0,1638	-1,3779

Tabla 8-13. Estadísticos de EE1-J Real.

- Componente imaginaria de la densidad de corriente.

Mallado [Nudos]	34	307	411	555	2011	3729
J real [$\text{A}\cdot\text{m}^{-2}$] a 0,045 m (GetDP ref: $3,83\text{E}+07 \text{ A}\cdot\text{m}^{-2}$)	4,58E+07	3,99E+07	4,07E+07	3,98E+07	3,89E+07	3,87E+07
Diferencia de J real [$\text{A}\cdot\text{m}^{-2}$]	7,50E+06	1,60E+06	2,40E+06	1,50E+06	6,00E+05	4,00E+05
Diferencia porcentual [%]	0,1958	0,0418	0,0627	0,0392	0,0157	0,0104

Tabla 8-14. Densidades de corriente EE1-J lmg.

Las densidades de corriente del experimento electromagnético 1, para abreviar EE1, en la Tabla 8-12, han sido tomadas en el centro de la recta del corte paramétrico, Figura 8-23(a).

Mallado [nudos]	34	307	411	555	2011	3729
R^2 [0, +1]. Óptimo: +1	0,4473	0,4281	0,2592	0,6894	0,4931	0,5223
MSE [$(\text{A}\cdot\text{m}^{-2})^2$] [0, +∞]. Óptimo: 0	2,95E+13	1,24E+13	8,37E+12	1,82E+12	1,13E+13	5,62E+12
RMSE [$\text{A}\cdot\text{m}^{-2}$]	5,44E+06	3,52E+06	2,89E+06	1,35E+06	3,36E+06	2,37E+06
RMSPE [-1, +1]. Óptimo: 0	0,1435	0,093	0,0764	0,0357	0,0888	0,0626
MAE [$\text{A}\cdot\text{m}^{-2}$]	5,29E+06	1,49E+06	2,59E+06	1,26E+06	9,36E+05	5,95E+05
MAEP [-1, +1]. Óptimo: 0	0,1398	0,0392	0,0683	0,0332	0,0247	0,0157
IRM [-∞, +∞]. Óptimo: 0	5,58E+06	8,36E+06	3,24E+06	1,45E+06	1,21E+07	9,45E+06
PBIAS [-1, +1]. Óptimo: 0	0,1226	0,0148	0,0639	0,0136	-0,0026	0,0005
NSEF [-∞, 1]. Óptimo: 1	-13,4817	-5,0821	-3,1048	0,1059	-4,5364	-1,7545
U1 de Theil [0, 1]. Óptimo: 0	0,067	0,046	0,0369	0,0177	0,0443	0,0312
UM de Theil [0, 1]. Óptimo: 0	0,9481	0,0262	0,7986	0,1503	0,0009	0,0001
US de Theil [0, 1]. Óptimo: 0	0,0009	0,6364	0,1497	0,28	0,6824	0,5506
UC de Theil [0, 1]. Óptimo: 0	0,051	0,3374	0,0517	0,5697	0,3167	0,4493
Willmott-dW [0, 1]. Óptimo: 1	0,2931	0,5613	0,3993	0,8509	0,5994	0,7008
MEF [-∞, 1]. Óptimo: 1	-13,4817	-5,0821	-3,1048	0,1059	-4,5364	-1,7545
CD [-∞, +∞]. Óptimo: 1	0,0668	0,1115	0,3008	0,4192	0,1153	0,2008
C [-∞, +∞]. Óptimo: 0	0,1398	0,0392	0,0683	0,0332	0,0247	0,0157

Tabla 8-15. Estadísticos de EE1-J imaginaria.

Análisis de los datos

A primera vista, los datos y estadísticos son inquietantes. La primera consideración que hay que hacer es: las magnitudes analizadas son las componentes real e imaginaria de las densidades de corriente en la dirección del eje Y, ya que es la dirección del gradiente de potencial. Las diferencias de potenciales se han establecido en los extremos de 1CUBO. La segunda consideración es: la barra 1CUBO prácticamente carece de impedancia, de ahí los valores tan altos de densidades de corriente. La tercera consideración es: nuestro patrón son unas densidades de corriente obtenidas sobre un modelo bidimensional, de 28.733 nudos, el cual contiene al corte paramétrico utilizado como patrón. Todo esto frente a nuestros modelos que son tridimensionales con una cantidad significativamente menor de nudos. El motivo de no aumentar nuestros nudos es de índole técnico. Se necesitan más recursos computacionales. De ahí ha surgido la necesidad de la computación en paralelo con bibliotecas especializadas, como pueden ser las bibliotecas PETSc.

Aun así, observando la Figura 8-24, tanto la parte real (a), como la parte imaginaria (b), tienden a converger. Podemos asegurar que, simplemente con aumentar la densidad del mallado, esto se conseguiría rápidamente. En los estadísticos, Tabla 8-13 y Tabla 8-15, se aprecia cierto error sistémico: UM de Theil igual a 0,8668 para la componente real y 0,0001 para la componente imaginaria. Los US y UC están indicando muchas fluctuaciones en los errores: [0,5506 -- 0,4493] para la parte imaginaria y [0,1281--0,0051] para la parte real, lo que se confirma en Figura 8-25(a, b). El US es más elevado en la componente imaginaria Figura 8-25(b) que en la real Figura 8-25(a). Eso indica que el modelo debe corregirse, y esa corrección debe ser por un aumento de la densidad de mallado. Todos los indicadores de desigualdad acentúan esta afirmación: NSEF, U1 y Willmott-dW.

Los indicadores estadísticos están indicando simplemente los que nuestros modelos están alejados de la recta de regresión perfecta ($R^2 = 1$). Pero, también es verdad que indican la tendencia que tiende a converger sobre la recta. De nuevo, insistimos en un aumento de la densidad de mallado.

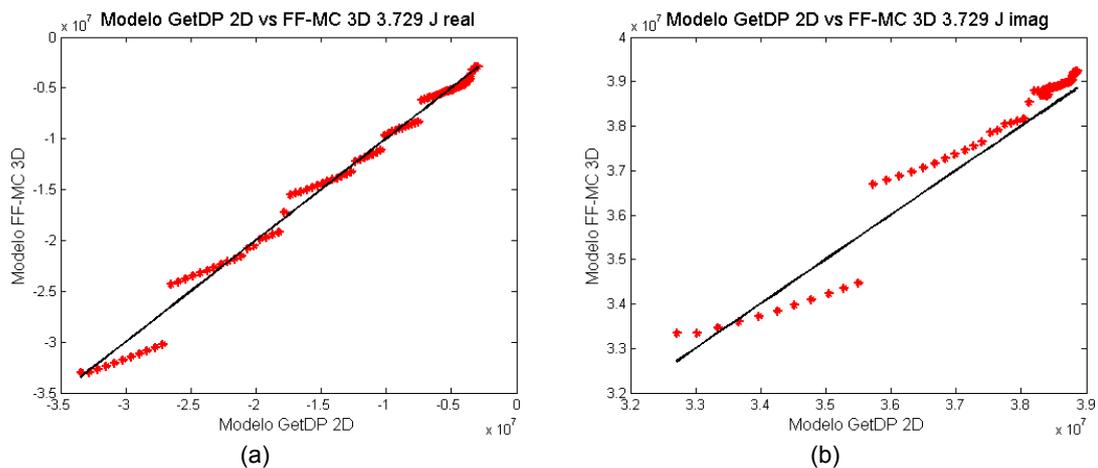


Figura 8-25. Rectas regresión para J real y J imaginaria.

Comparando la Figura 8-25 y las Tabla 8-13 y Tabla 8-15, se aprecia lo siguiente. Los valores de UM son altos para la J real y bajos para J imaginaria. En cambio los valores de US son bajos para J real y altos par J imaginaria, hecho que confirmamos observando Figura 8-25(a) y Figura 8-25(b), respectivamente.

Fijándonos en Tabla 8-13 y Tabla 8-15, los indicadores porcentuales de error como RMSPE, MAEP y PBIAS, indican unos valores muy bajos para la componente imaginaria, y no muy buenos para la componente real. Esto se comprueba mejor observando los histogramas de errores, Figura 8-26.

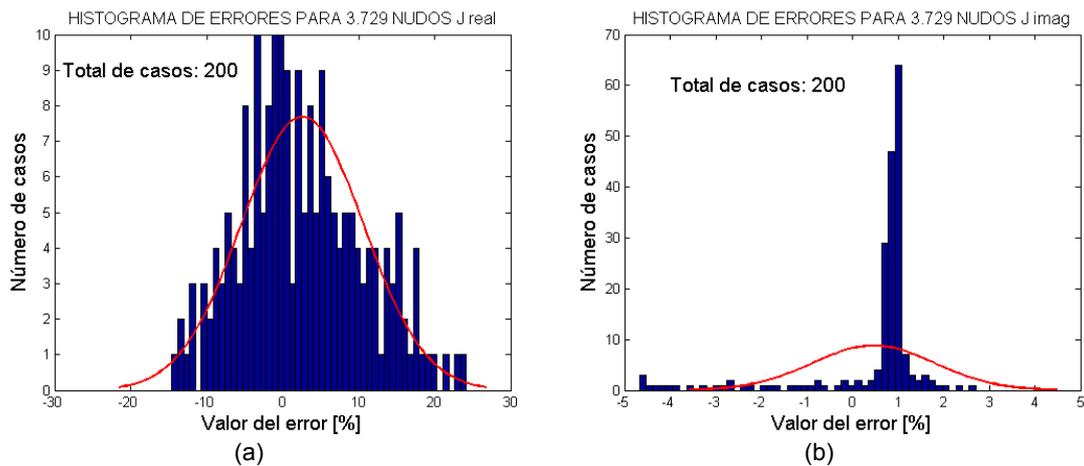


Figura 8-26. Histograma de errores. (a) J real. (b) J imaginaria.

Resumen del experimento

El FF-MC no se comporta por igual ante modelos de procesos físicos diferentes. El modelo térmico es menos complejo, numéricamente hablando, que el modelo electromagnético. Para aumentar la precisión en los modelos electromagnéticos deberá aumentarse las densidades de los mallados. Esto conlleva la necesidad de recursos informáticos más potentes. Se necesitan bibliotecas especializadas en computación paralela como puedan ser las Pctcs.

8.4.2 Experimento electromagnético 2

Esquema del experimento

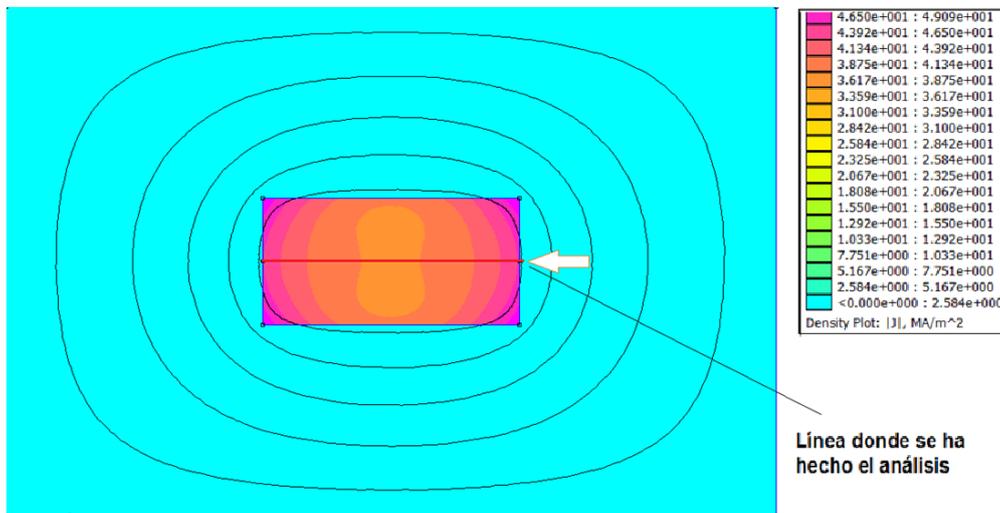


Figura 8-27. Análisis de 1CUBO con FEMM.

Objetivos del experimento

Confirmar las conclusiones del experimento 1 al contrastar con otra aplicación basada en los elementos finitos como es el FEMM.

Descripción del experimento

Ante la incertidumbre en los datos del experimento 1, se decide utilizar otra aplicación informática para confirmar las conclusiones hechas en ese experimento. Se analiza la sección transversal de 1CUBO, ver Figura 8-23(a), con la aplicación FEMM. Se procede de igual manera que con GetDP. En la Figura 8-27 se indica donde se hizo el corte paramétrico y las densidades de corriente obtenidas en el plano XY que representa la sección transversal de 1CUBO. Solamente se efectuó el análisis de la parte real, ya que era la más conflictiva desde el punto de vista del análisis de los errores.

Gráficos obtenidos

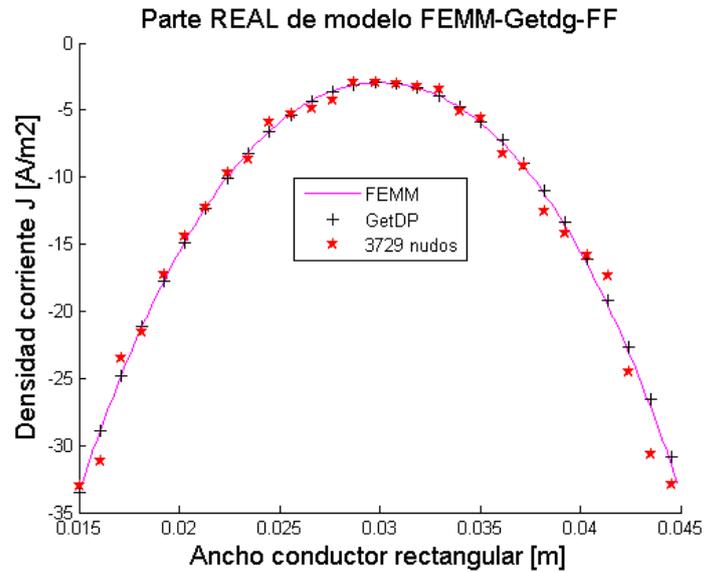


Figura 8-28. Contratación 1CUBO con FF-MC, GetDP y FEMM.

Estadísticos obtenidos

No se han utilizado estadísticos. Solo la inspección visual de la Figura 8-28 indica un comportamiento similar entre GetDP y FEMM. Por lo tanto 1CUBO FF-CM se comportará estadísticamente de manera similar, Figura 8-28.

Análisis de los datos

Queda probado que GetDP no constituye el problema a la hora de contrastar los datos de 1CUBO en FF-MC, pues tiene un comportamiento análogo cuando se contrasta con FEMM. Por lo tanto el problema reside la precisión del mallado en el caso de 1CUBO en FF-MC.

Resumen del experimento

Se descarta el posible error de contrate al utilizar GDP, pues sucede lo mismo con el FEMM. Se validan las conclusiones del experimento 1.

8.4.3 Experimento electromagnético 3

Esquema del experimento

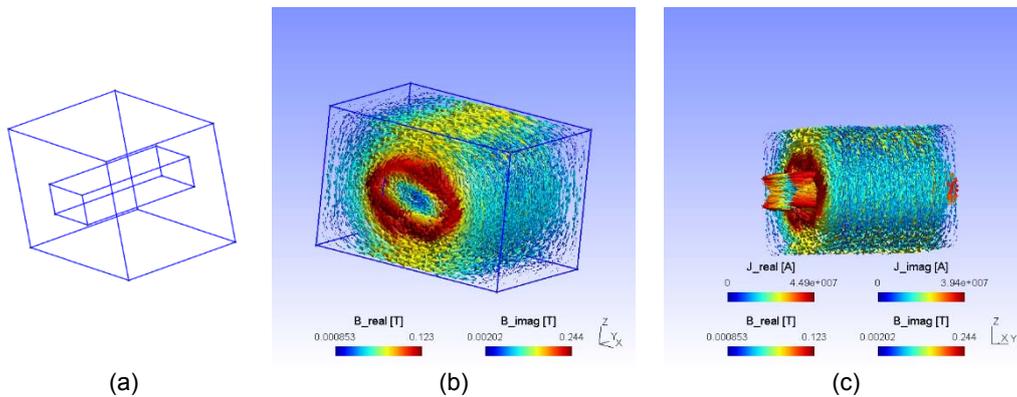


Figura 8-29. Campo magnético en 1CUBO.

En la Figura 8-28(a) se representa el modelo 1CUBO. En (b) se representa el campo magnético, parte real e imaginaria, de la densidad de flujo, en teslas. En (c) se representa el mismo campo magnético que en (b), pero incorporando las densidades de corriente, parte real e imaginaria, creadoras de dicho campo.

Objetivos del experimento

Se quiere comprobar la precisión que tiene el FF-CM frente al método de los elementos finitos en 2D y 3D para simulaciones del campo magnético, midiéndose para ello las componentes real e imaginaria de la densidad de flujo, en Teslas, a su valor máximo.

Descripción del experimento

El método del corte paramétrico no da buenos resultados en el campo magnético, tal como hemos venido haciendo para otros campos. Las aplicaciones que utilizamos como patrón, GetDP y FEMM, dan resultados que no concuerdan entre sí. Para armonizar dichos datos habría que recurrir a cálculos matemáticos para tal fin. Por ello se decidió a utilizar otra vía. Esta consistió en encontrar el *máximo maximorum* de la densidad de flujo en cada una de las tres distribuciones. Para el GetDP se obtuvo un valor equivalente a 0,255 T en su componente imaginaria. En el FEMM se utilizó una distribución con simetría plana, Figura 8-30. La sección representada equivale a un seccionamiento de 1CUBO en cualquier plano a lo largo de su eje longitudinal, Figura 8-28(a). Se obtuvieron unos valores de la componente normal que se indican en Tabla 8-16.

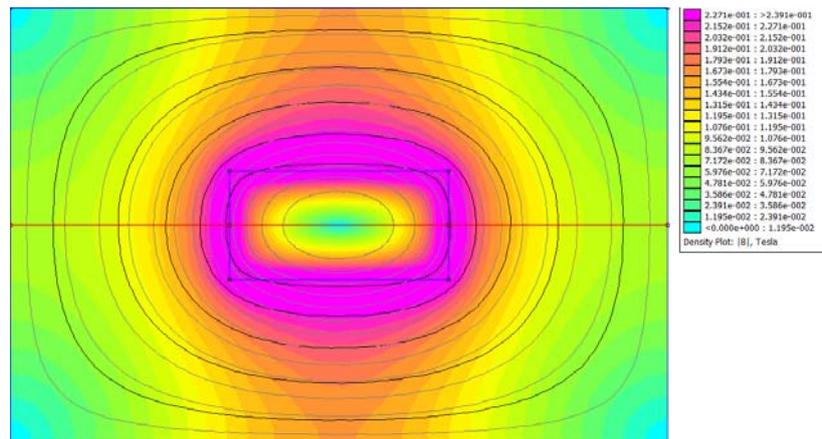


Figura 8-30. Campo magnético bidimensional equivalente al de 1CUBO en 3D.

B normal Real:	0,1244	T
B normal Imag.:	0,2463	T
Longitud:	60	mm
Simetría plana. Profundidad:	60	mm
Frecuencia:	50	Hz
Corriente inyectada:	-8048.7656+16310.0802 i	A
Nudos:	52128	

Tabla 8-16. Datos FEMM experimento electromagnético 3.

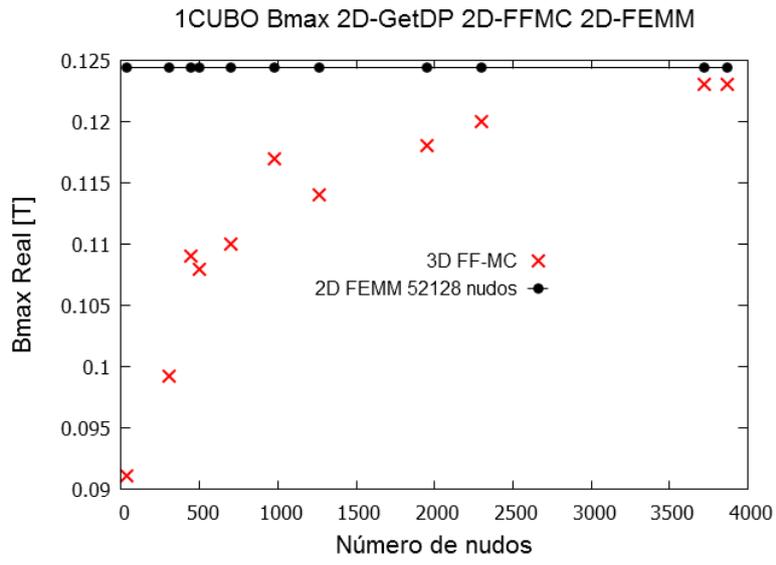
El supuesto a comprobar era que, a medida que aumentase la densidad de mallado en FF-MC, los máximos de ésta tenderían a converger hacia los valores máximos obtenidos con 2D GetDP y 2D FEMM.

Ordenado los valores obtenidos para FF-MC en orden creciente del número de nudos, los valores máximo de densidad de flujo magnético, componente real e imaginaria, son los indicados en Tabla 8-17.

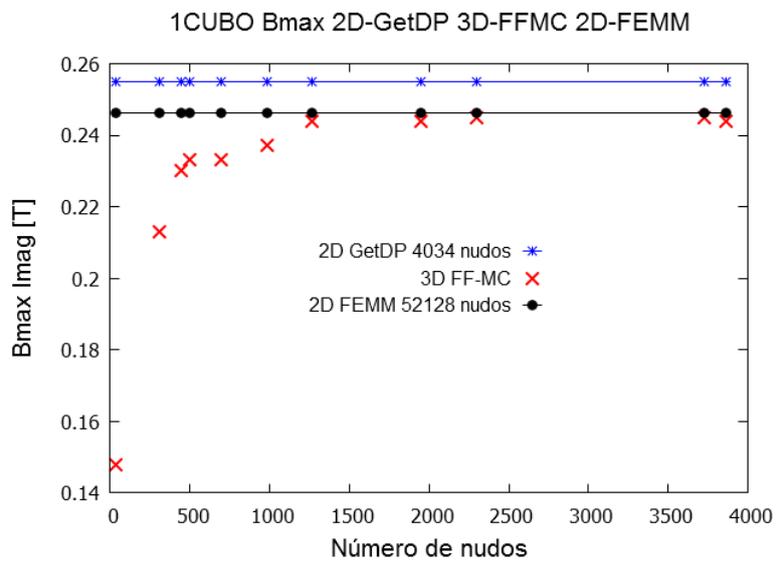
Nudos	34	308	444	499	698	981	1264	1950	2301	3725	3866
B_Re_MAX	0,0911	0,0992	0,109	0,108	0,11	0,117	0,114	0,118	0,12	0,123	0,123
B_Imag_MAX	0,148	0,213	0,23	0,233	0,233	0,237	0,244	0,244	0,245	0,245	0,244

Tabla 8-17. Valores máximos de B, en Teslas, para FF-MC.

Gráficos obtenidos



(a)



(b)

Figura 8-31. Convergencia de las componentes del campo magnético.

Estadísticos obtenidos

Se ha procedido a obtener la diferencia absoluta y porcentual entre los valores de 2D GetDP, 2D FEMM y 3D FF-MC.

Nudos	34	308	444	499	698	981	1264	1950	2301	3725	3866
GetDP Im Difer. (T)	-0,107	-0,042	-0,025	-0,022	-0,022	-0,018	-0,011	-0,011	-0,010	-0,010	-0,011
Difer. (%)	-41,96	-16,47	-9,80	-8,63	-8,63	-7,06	-4,31	-4,31	-3,92	-3,92	-4,31
Femm Re Difer. (T)	-0,033	-0,025	-0,015	-0,016	-0,014	-0,007	-0,010	-0,006	-0,004	-0,001	-0,001
Difer. (%)	-26,77	-20,26	-12,38	-13,18	-11,58	-5,95	-8,36	-5,14	-3,54	-1,13	-1,13
Femm Im Difer. (T)	-0,098	-0,033	-0,016	-0,013	-0,013	-0,009	-0,002	-0,002	-0,001	-0,001	-0,002
Difer. (%)	-39,91	-13,52	-6,62	-5,40	-5,40	-3,78	-0,93	-0,93	-0,53	-0,53	-0,93

Tabla 8-18. Comparativa densidad de flujo magnético en 2D GetDP, 3D FF-MC y 2D FEMM.

Análisis de los datos

Se comprueba que nuestro método, FF-MC, converge hacia un valor similar al obtenido con 2D FEMM. No extraña la desviación del valor 2D GetDP. Probablemente se deba al método utilizado para calcular el módulo de la densidad de flujo en la componente imaginaria del campo. El nuestro se obtiene por la suma geométrica de las componentes espaciales de los campos. Sea como fuere, el error es mínimo. De un $\pm 4,31\%$ para el caso del 2D GetDP y de $\pm 0,93\%$ para el caso 2D FEMM, en cuanto a parte imaginaria se refiere, si se comparase con la parte imaginaria aportada por FF-MC. Comprobar estos datos en Tabla 8-18. Viendo la Figura 8-31, se comprueba que la FF-MC converge hacia los valores aportados por el FEMM. Téngase en cuenta que el modelos del FEMM es bidimensional, de 52128 nudos, y lo comparamos con un modelo tridimensional de 3866 nudos. La diferencia de densidad de mallado es apreciable. Pesos a todo, converge claramente. Con un aumento, no muy grande, de la densidad de mallado en 3D FF-MC, garantizaríamos un error mínimo.

Resumen del experimento

Se puede decir que el FF-MC funciona adecuadamente en cuanto a modelado del campo magnético se refiere. Aumentando la densidad de mallado, el error sería mínimo. Hay una gran economía computacional al utilizar este método.

8.4.4 Experimento electromagnético 4

Esquema del experimento

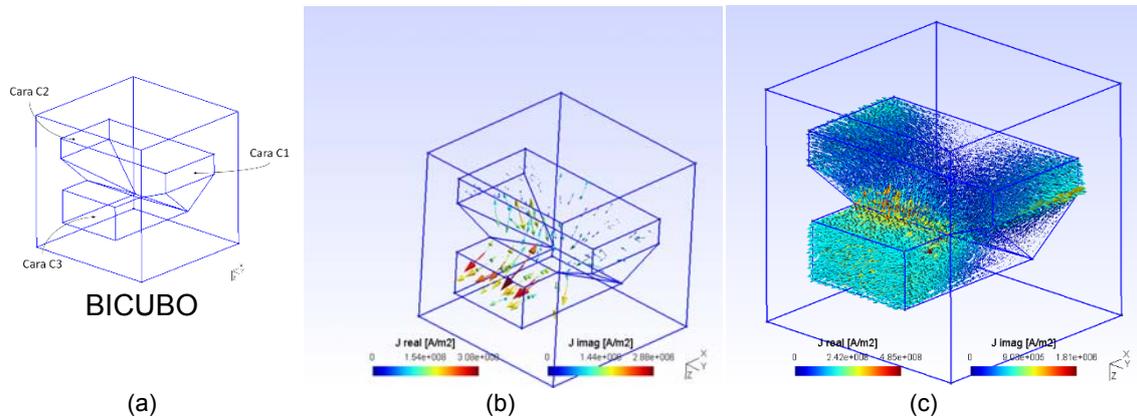


Figura 8-32. BICUBO con corrientes entrantes y salientes.

Objetivos del experimento

Comprobar las simetrías de las corrientes entrantes en nudo BICUBO.

Descripción del experimento

Este elemento, BICUBO, no tiene simetrías, luego no se puede hacer una sección para establecer un corte paramétrico y estudiar la totalidad del fenómeno. Por lo tanto, la metodología empleada en anteriores experimentos no es válida. El FEMM sólo trabaja con simetrías planas y axiales. Al GetDP le sucede lo mismo. Para un tratamiento de este prototipo tenemos que verificar fenómenos, a la espera de una posterior validación. En este experimento se trata de verificar si las corrientes que fluyen de las caras laterales, que llamaremos C1 y C2, son simétricas cuando convergen hacia la cara C3, Figura 8-32. Se observan dos casos: en el caso (b) hay una menor densidad e corriente que el caso (c).

Si es cierto que convergen, aparentemente de forma simétrica, a medida que se aumente la densidad de mallado, las corriente I_{C1} e I_{C2} tenderán a valer lo mismo y tener el mismo sentido.

Gráficos obtenidos

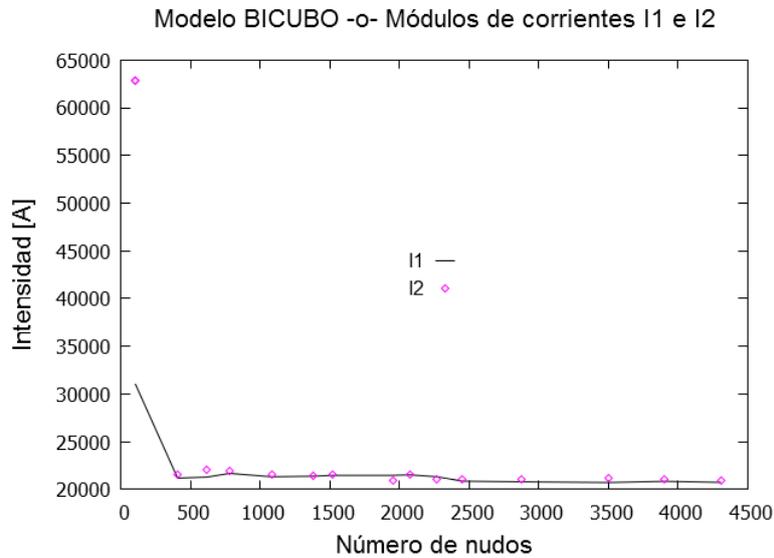


Figura 8-33. Simetrías de corrientes I_{c1} e I_{c2} .

Estadísticos obtenidos

No proceden, puesto que se trata de verificar si las corrientes convergen de forma simétrica a la cara C3.

Análisis de los datos

A pesar de necesitar mayores densidades de mallados para alcanzar una mayor precisión en el cálculo, cualitativamente los modelos se comportan como se espera. Con la computación en paralelo se podrá tener una buena medida del grado de asimetría de dichas corrientes.

Resumen del experimento

Se puede afirmar que las corrientes convergen a la cara C3 en la forma esperada pese a necesitarse mayor densidad de mallados.

8.5 Experimentos numéricos de tipo electro-térmico

Pretenden demostrar la validez del Método de la Celda en los procesos de transmisión de calor en régimen transitorio.

8.5.1 Experimento electro-térmico 1

Esquema del experimento

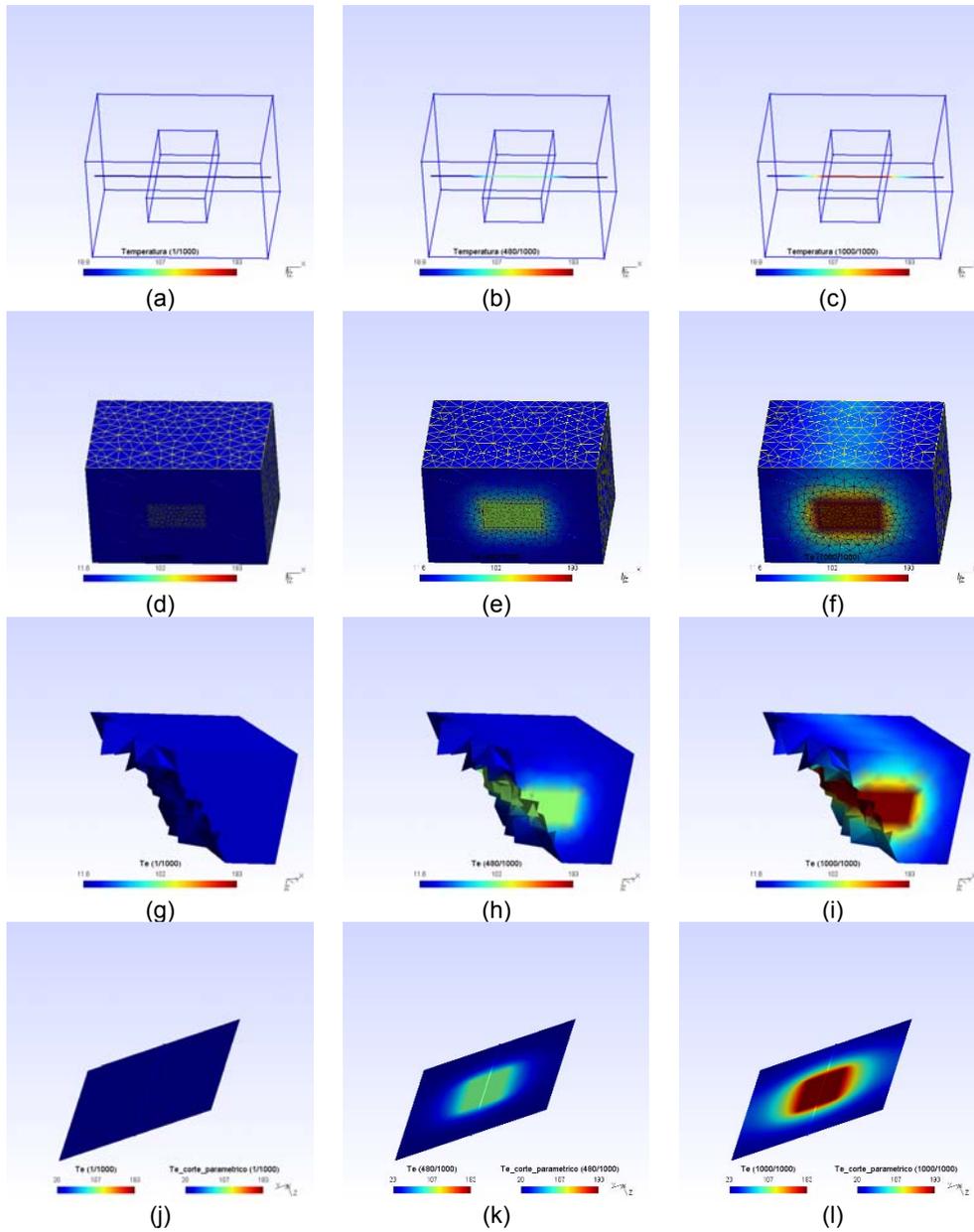


Figura 8-34. Transitorio electro-térmico en 1CUBO.

Objetivos del experimento

Comprobar si es válida la FF-CM para un fenómeno electro-térmico transitorio.
 Probar si es válida la propuesta de la matriz $[M_\lambda]$ en régimen transitorio.

Descripción del experimento

El experimento consiste en aplicar diferencia de potencial al elemento 1CUBO de la Figura 8-20. Dicha diferencia de potencial vale 0,1 V. Se hace en un intervalo de tiempo $T = [0,00, 10,00]$ segundos, en intervalos de 0,01 segundos. Para el experimento con FF-MC se ha hecho un corte paramétrico que atraviesa todo el volumen envolvente (aire) y el objeto 1CUBO (cobre). Dicho corte paramétrico se muestra en la Figura 8-34(a, b, c). Para contrastar los datos obtenidos, se ha diseñado una superficie equivalente a la sección transversal donde se ha experimentado FF-MC. Esta sección contiene un corte paramétrico idéntico al anteriormente explicado. Se ha simulado las mismas condiciones, pero con GetDP en 2D. Los datos obtenidos serán utilizados como patrón de comparación.

La ecuación que utiliza la FF-MC, con un esquema Crank-Nicolson para resolverla, es la siguiente:

$$\left(\frac{1}{\Delta t}[M_{cp}] + \theta[A]\right)\tau^{n+1} = \left(\frac{1}{\Delta t}[M_{cp}] - (1 - \theta)[A]\right)\tau^n + (1 - \theta)[W_i^n] + \theta[W_i^{n+1}] \quad \text{Ec. 8.11}$$

Donde:

$$[A] = [G]^T[M_\lambda][G] \quad \text{Ec. 8.12}$$

Los datos del experimento son:

$V:$	0,1 V	$M_{aire}:$	Por cálculo	kg
$I_g:$	0,0 A	$C_{p_{aire}}:$	1012	J·kg ⁻¹ ·K ⁻¹ , a 25°C y 1 ATA
$t_0:$	0,0 s	$T_{0_{aire}}:$	20	°C
$t_r:$	10,00 s	$M_{cu}:$	Por cálculo	kg
$\theta:$	1 Euler implícito	$C_{p_{cu}}:$	387	J·kg ⁻¹ ·K ⁻¹ , a 25°C y 1 ATA
$\Delta t:$	0,01 s	$\lambda_{cu}:$	372,10	W·m ⁻¹ K ⁻¹
$\gamma_{aire}:$	1,25184 Kg/m ³ , a 25°C y 1 ATA	$\gamma_{cu}:$	8940	Kg/m ³ , a 25°C y 1 ATA
$\lambda_{aire}:$	0,024 W·m ⁻¹ K ⁻¹	$T_{0_{cu}}:$	20	°C
$\sigma_{aire}:$	-.- No procede	$\sigma_{cu}:$	58·10 ⁶	S/m

Las condiciones de contorno del experimento son:

- El dominio cobre Ω_{Cu} es conductor eléctrico y térmico
- El dominio aire Ω_{aire} es conductor térmico
- El dominio envolvente $\Omega_{envolvente}$ es un aislante eléctrico y térmico

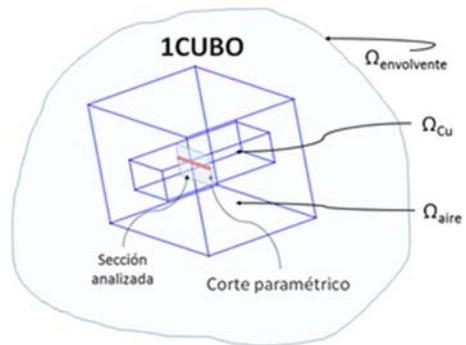


Figura 8-35. Dominios para 1CUBO

Las condiciones iniciales son:

$$T_{0,Cu}: 20,00 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$T_{0,aire}: 20,00 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Gráficos obtenidos

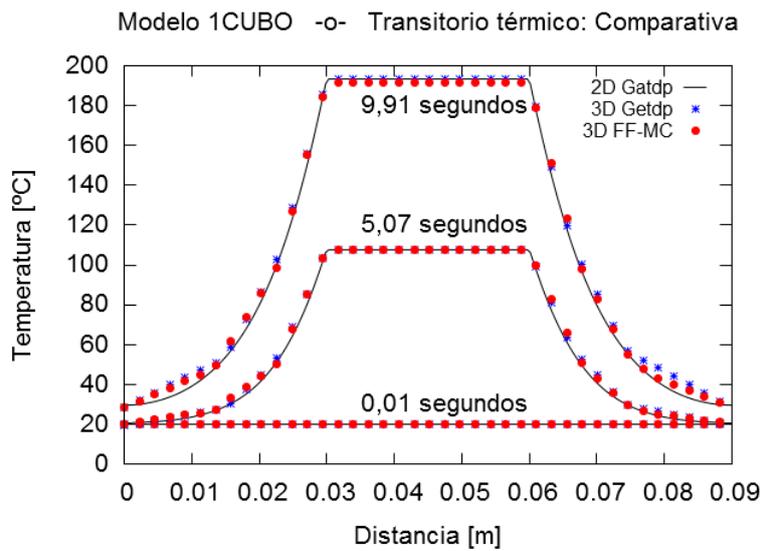


Figura 8-36. Transitorio térmico con M_λ .

Estadísticos obtenidos

C1:	FF-MC vs 2D GetDP a 0,01 segundos
C2:	FF-MC vs 2D GetDP a 5,07 segundos
C3:	FF-MC vs 2D GetDP a 9,91 segundos
C4:	FF-MC vs 3D GetDP a 0,01 segundos
C5:	FF-MC vs 3D GetDP a 5,07 segundos
C6:	FF-MC vs 3D GetDP a 9,91 segundos

Tabla 8-19. Térmico transitorio. Comparativa entre modelos.

Comparativa	C1	C2	C3	C4	C5	C6
R ² [0, +1]. Óptimo: +1	0,8572	0,9983	0,999	0,9521	0,9994	0,9994
MSE [°C ²][0, +∞]. Óptimo: 0	0,0011	3,8571	8,6927	0,0005	0,8781	4,6434
RMSE [°C]	0,0331	1,964	2,9483	0,0212	0,937	2,1548
RMSPE [-1, +1]. Óptimo: 0	0,0017	0,0315	0,0263	0,0011	0,0147	0,0188
MAE [°C]	0,0119	1,2312	2,4933	0,0107	0,5899	1,8743
MAEP [-1, +1]. Óptimo: 0	0,0006	0,0197	0,0222	0,0005	0,0093	0,0163
IRM [-∞, +∞]. Óptimo: 0	0,0926	3,1327	3,4865	0,0421	1,4885	2,4774
PBIAS [-1, +1]. Óptimo: 0	0,0005	0,0186	0,0119	0,0004	0,0003	-0,0123
NSEF [-∞, 1]. Óptimo: 1	0,8345	0,9972	0,9981	0,9398	0,9994	0,9989
U1 de Theil [0, 1]. Óptimo: 0	0,0008	0,0134	0,0112	0,0005	0,0064	0,0082
UM de Theil [0, 1]. Óptimo: 0	0,1088	0,3621	0,2111	0,1783	0,0006	0,4183
US de Theil [0, 1]. Óptimo: 0	0,0002	0,0171	0,2705	0,0674	0,0009	0,0044
UC de Theil [0, 1]. Óptimo: 0	0,891	0,6208	0,5184	0,7543	0,9986	0,5773
Willmott-dW [0, 1]. Óptimo: 1	0,9584	0,9993	0,9995	0,9838	0,9998	0,9997
MEF [-∞, 1]. Óptimo: 1	0,8345	0,9972	0,9981	0,9398	0,9994	0,9989
CD [-∞,+∞]. Óptimo: 1	0,9931	1,0129	1,0461	1,1269	0,9985	0,9953
C [-∞,+∞]. Óptimo: 0	0,0006	0,0197	0,0222	0,0005	0,0093	0,0163

Tabla 8-20. Indicadores estadísticos para transitorio térmico.

Las comparativas agrupadas por tiempos serían:

Tiempo (s)	Comparativas
0,01	C1-C4
5,07	C2-C5
9,91	C3-C6

Tabla 8-21. Térmico transitorio. Comparativas agrupadas por tiempo.

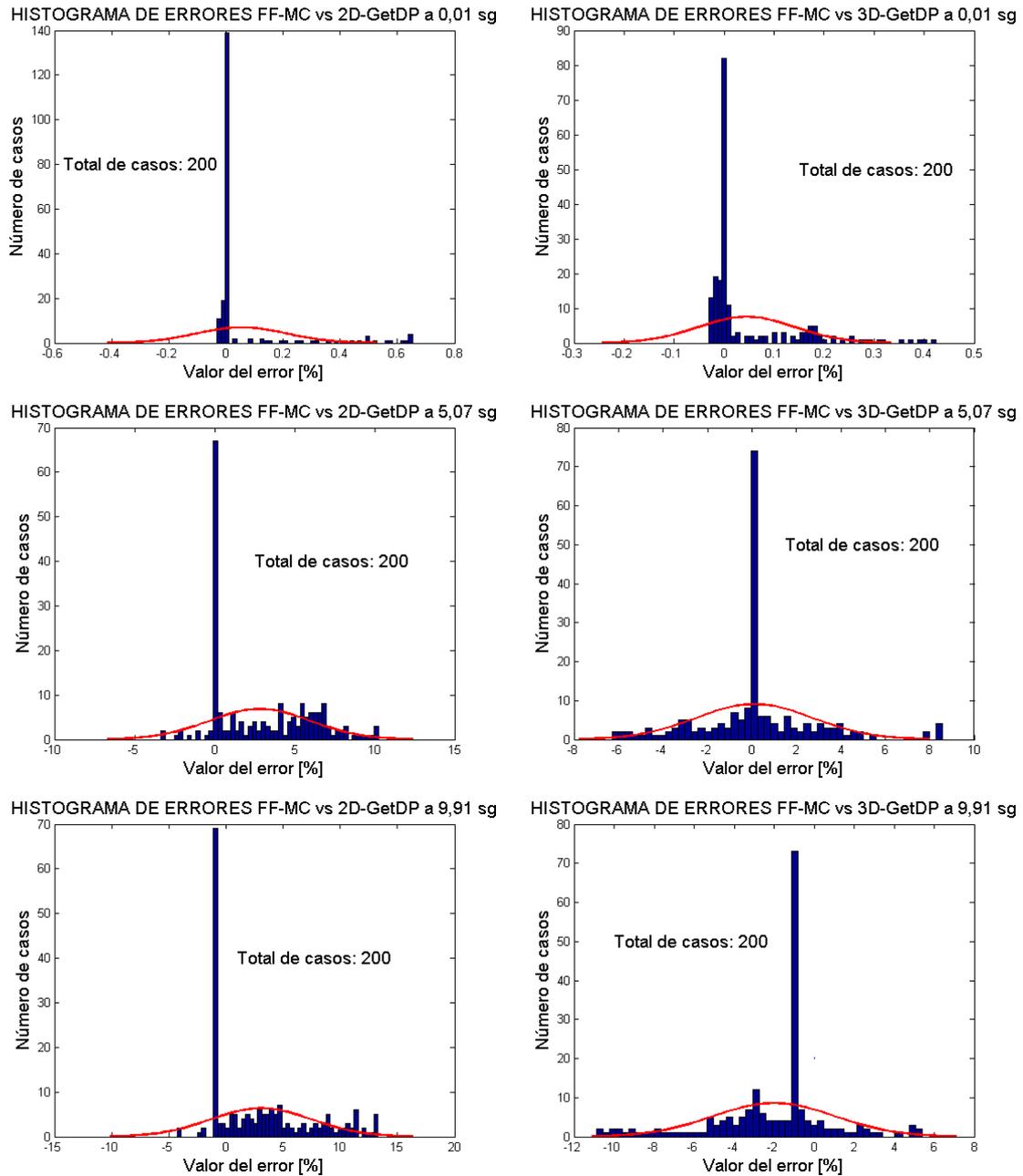


Figura 8-37. Histogramas de errores para transitorio térmico.

Como existían ciertas dudas en el porqué de la longitud de las colas de los histogramas, Figura 8-37, se decide hacer un análisis enfrentado 3D FF-MC y 3D GetDP, ambos frente a 2D GetDP. Los resultados de los errores se muestran a continuación en Figura 8-38, Figura 8-39 y Figura 8-40.

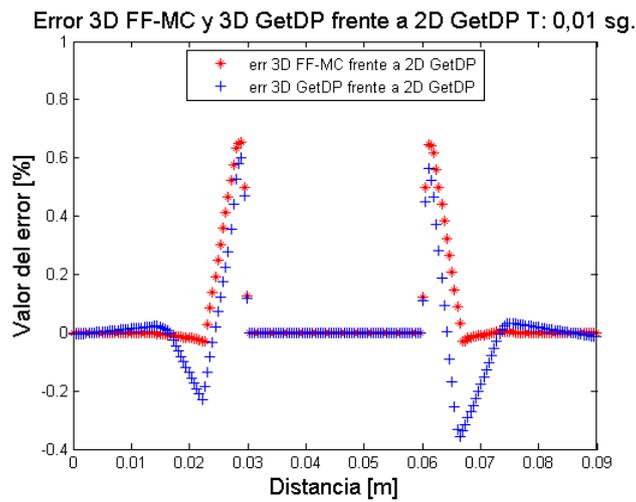


Figura 8-38. Error 3D FFMC-GetDP vs 2D GetDP. Transitorio t: 0,01 s.

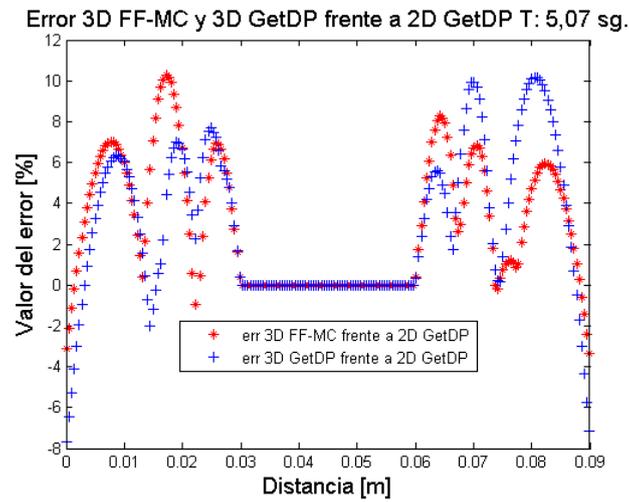


Figura 8-39. Error 3D FFMC-GetDP vs 2D GetDP. Transitorio t: 5,07 s.

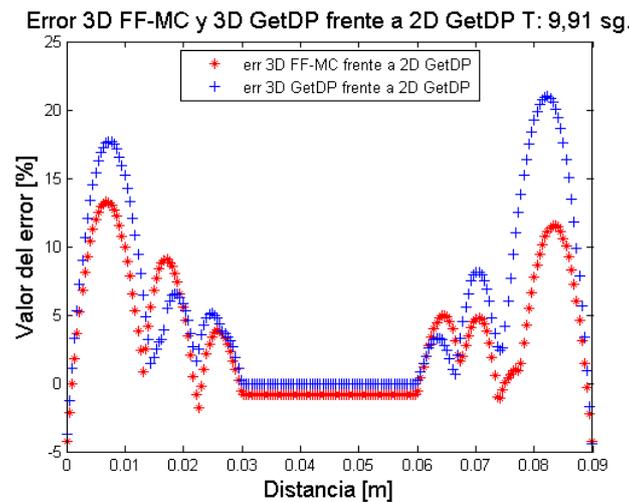


Figura 8-40. Error 3D FFMC-GetDP vs 2D GetDP. Transitorio t: 9,91 s.

Análisis de los datos

Viendo la agrupación por tiempos de la tabla Tabla 8-21, y comparando con los indicadores estadísticos de la Tabla 8-20, prácticamente son iguales cuando se compara FF-MC con 2D GetDP y cuando FF-MC se compara con 3D GetDP. Se comprueba que el error es de tipo aleatorio, pues así lo indica la UC de Theil, ya que la UM de Theil es muy baja. Esto se confirma viendo el indicador PBIAS que está próximo a cero en todos los casos. Los indicadores de error en verdadera magnitud, RMSE y MAE, tienen valores muy bajos. Los valores más altos para estos indicadores se producen en la comparativa C3. Tal como se aprecia en la Figura 8-36, se ve que en ciertas parte de la gráfica el FF-CM queda por arriba de modelo 2D GetDP, cuando se está acercando a las paredes del cubo de aire, y otras por debajo, cuando el conductor 1CUBO alcanza la temperatura máxima (parte central de la gráfica). Se ha de recordar que son errores promediados, dándosele la importancia que debieran según sea el caso a aplicar.

, se evidencia una notable diferencia entre el Método de los Elementos Finitos (GetDP) y el Método de la Celda (FF-MC). Mientras que la matriz de masas térmica en el Método de los Elementos Finitos tiene un número de condición igual a 5, la matriz de masas de la FF-MC tiene un número de condición de 2,7692. Esto hace que el FF-MC sea más preciso en el cálculo térmico transitorio que el Método de los Elementos Finitos. Ver Anexo 2.

Resumen del experimento

Se puede afirmar que el FF-CM es válido para el estudio del régimen transitorio térmico. Se puede afirmar que la matriz $[M_\lambda]$ es válida para el régimen transitorio térmico.

También estamos en condiciones de afirmar que la Formulación Finita, con el Método de la Celda, junto a la matrices propuesta $[M_\lambda]$ y $[M_\tau]$, supera en precisión al Método de los Elementos Finitos, en cuanto a cálculo térmico transitorio se refiere.

8.5.2 Experimento electro-térmico 2

Esquema del experimento

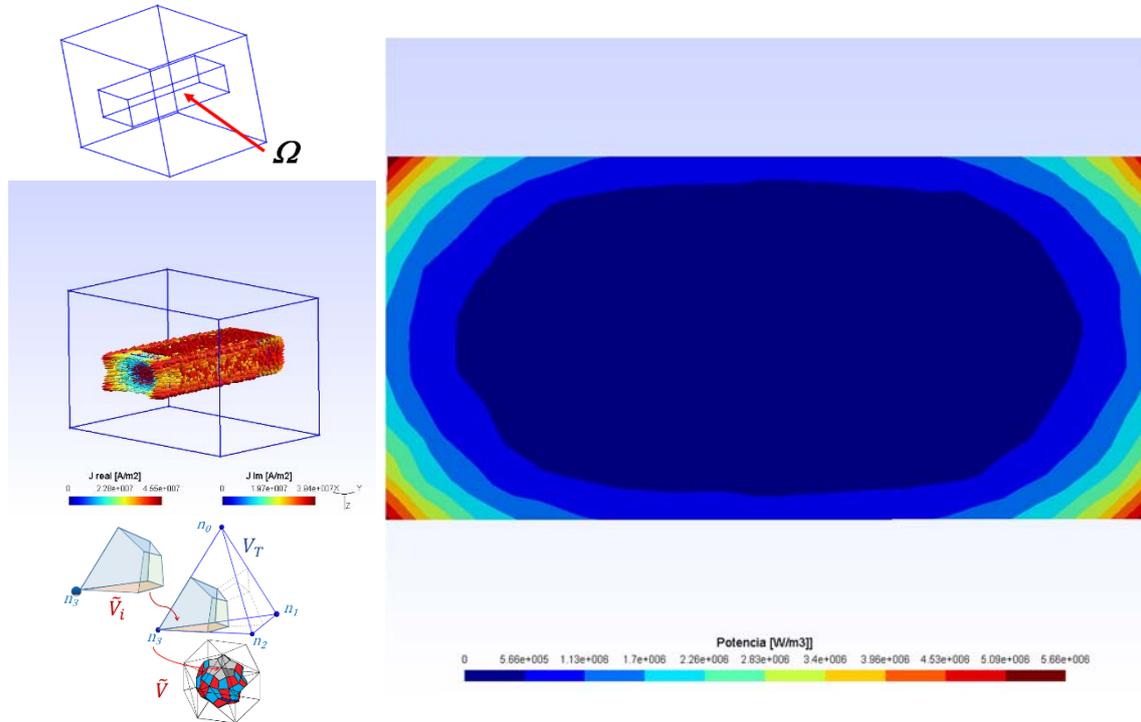


Figura 8-41. Potencia calorífica generado por corriente a 400 Hz.

Objetivos del experimento

Comprobar si la potencia calorífica generada por la densidad de corriente, obtenida con GetDP, mediante el método de los elementos finitos, coincide con la calculada con FF-MC utilizando la expresión siguiente:

$$P_{\Omega}^{JF} = \sum_{j=1}^{N_{V_T}} P_{\tilde{V}_i \subset V_{Tj}}^{JF} \quad \text{Ec. 8.13}$$

Donde:

$$P_{\tilde{V}_i \subset V_T}^{JF} = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{10} (P_{sR} + P_{sI}) \quad \text{Ec. 8.14}$$

Para mayor detalle, ver Anexo 2.

Descripción del experimento

Se ha simulado en GetDp 2D una sección del modelo 1CUBO, Figura 8-41(a), con una corriente variable en frecuencia, entre 0,00 Hz y 400,00 Hz. La potencia se obtiene por la integración de las componentes reales e imaginarias de las densidades de corriente siguiendo la expresión

$$P_{\bar{V}_i \subset V_T}^{J^F} = \iiint_{\bar{V}_i} \frac{1}{2\sigma} (J_R^2 + J_I^2) dV \quad \text{Ec. 8.15}$$

Como el 2D GetDP, obviamente carece de volumen, la potencia se calcula por la integración de la potencia distribuida en los ejes x - z , integrándose, al considerar la misma distribución de potencia a lo largo del eje y , por multiplicación por la longitud de este eje y en 1CUBO.

Se ha hecho la misma simulación, en cuanto a densidades de corriente se refiere, en 3D para 1CUBO, pero en FF-MC. La potencia calorífica se ha obtenido integrando en el volumen de 1CUBO con la metodología expuesta en Anexo 2.

Gráficos obtenidos

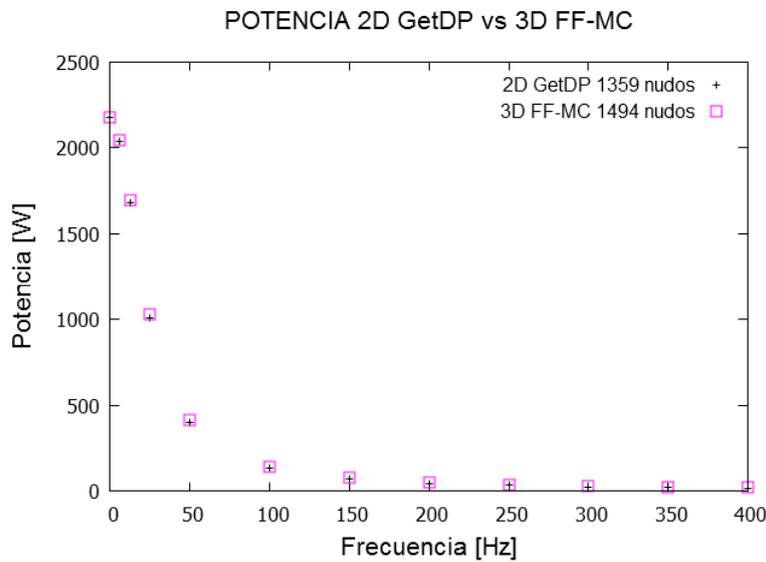


Figura 8-42. Potencia en función de la frecuencia.

Estadísticos obtenidos

Frecuencia [Hz]	0	50	150	250	350	400
Potencia 2D GetDP [W] ref.	2175,00	404,29	72,76	34,56	21,56	17,92
Potencia 3D FF-MC [W] C1	2175,00	419,04	79,07	38,91	24,76	20,69
Diferencia [W]	0	14,75	6,31	4,35	3,2	2,77
Diferencia porcentual [%]	0,00	3,65	8,67	12,59	14,84	15,46

Tabla 8-22. Comparativa de potencia en función de la frecuencia.

Comparativa	C1
R^2 [0, +1]. Óptimo: +1	1
MSE [W^2][0, +∞]. Óptimo: 0	85,7486
RMSE [W]	9,2601
RMSPE [-1, +1]. Óptimo: 0	0,0145
MAE [W]	7,27
MAEP [-1, +1]. Óptimo: 0	0,0114
IRM [-∞, +∞]. Óptimo: 0	11,7948
PBIAS [-1, +1]. Óptimo: 0	0,0113
NSEF [-∞, 1]. Óptimo: 1	0,9999
U1 de Theil [0, 1]. Óptimo: 0	0,0045
UM de Theil [0, 1]. Óptimo: 0	0,6164
US de Theil [0, 1]. Óptimo: 0	0,0036
UC de Theil [0, 1]. Óptimo: 0	0,3801
Willmott-dW [0, 1]. Óptimo: 1	1
MEF [-∞, 1]. Óptimo: 1	0,9999
CD [-∞,+∞]. Óptimo: 1	0,9986
C [-∞,+∞]. Óptimo: 0	0,0114

Tabla 8-23. Indicadores estadísticos potencia-frecuencia.

Análisis de los datos

Si consideramos que un modelo bidimensional, como es la sección desarrollada en 2D GetDP, más preciso que el modelo 1CUBO, desarrollado en 3D con FF-MC, podemos asegurar que, en vista de lo indicado por los estadísticos de las tablas Tabla 8-22 y Tabla 8-23, el modelo 3D FF-MC se adapta muy bien. Quizás en las frecuencias altas pueda presentar ciertas discrepancias en los errores porcentuales, Tabla 8-22. Aun así, el resto de los indicadores estadísticos de la tabla Tabla 8-23 son muy buenos. Aunque los valores en términos absolutos (RMSE y MAE) no son cero, los indicadores porcentuales están muy cerca del óptimo. Los indicadores de acuerdo y de eficacia del modelo también están cerca del óptimo. Quizás el UM de Theil está indicando cierto error sistémico, confirmado por el PBIAS, que no es cero. Tiene la ventaja que el US no es alto. Esto indica que no hay grandes desviaciones en los errores.

En la Tabla 8-22, en la diferencia porcentual, se observó cómo esta crecía a medida que lo hacía la frecuencia: después de analizar las posibles causas, en primera instancia se culpó al efecto pelicular – efecto skin - que tiene la corriente. Al dirigirse dicha corriente hacia la corteza del conductor, especialmente hacia las esquinas, ver Figura 8-41, en las zonas coloreadas con rojo, aparte de haber

más potencia, también hay más densidad de corriente. Esto hace que en esas zonas haya poca precisión por el poco número de tetraedros que hay en 3D FF-MC, frente a un número mayor de triángulos existentes en 2D GetDP para la misma zona. Para probar si esta suposición es cierta, se eligió una frecuencia arbitrariamente. No se simularon todas las frecuencias por el tiempo que dura el proceso. Si es cierto que la diferencia se debe a un mallado defectuoso en los bordes del conductor, entonces, a medida que se aumente el mallado en 3D FF-CM, para la misma frecuencia y manteniendo el mallado en 2D GetDP, la diferencia de potencias entre ambos modelos debe disminuir.

2D GetDP 100Hz:	135,6200	135,6200	135,6200
3D FF-MC 100 HZ:	144,0230	141,5000	139,3000
Nudos:	1494	2299	3725
Diferencia [W]:	8,4030	5,8800	3,6800
Diferencia [%]:	6,1960	4,3356	2,7135

Tabla 8-24. Relación entre mallado y potencia.

Se ve claramente que la diferencia entre modelos disminuye al aumentar el mallado en 3D FF-MC. Queda demostrado la importancia que tiene el efecto pelicular a la hora de calcular la potencia calorífica generada por las corrientes en el conductor.

Se observa que la tasa de disminución del error (r_{1D}) no es proporcional al aumento de nudos (r_{1n}).

$$r_{1n} = \frac{2299 - 1494}{1494} 100 = 53,88 \% \quad r_{2n} = \frac{3725 - 2299}{2299} 100 = 62,03 \% \quad \text{Ec. 8.16}$$

$$r_{1D} = \frac{4,3356 - 6,1960}{6,1960} 100 = -30,03 \% \quad r_{2D} = \frac{2,7135 - 4,3356}{4,3356} 100 = -37,41 \% \quad \text{Ec. 8.17}$$

Se concluye que una disminución drástica de la diferencia entre los dos modelos conlleva un mallado muy denso en 3D FM-MC, con el consiguiente coste computacional que esto tiene.

Visto lo anteriormente expuesto, se recomienda modelar los conductores sólidos con zonas diferenciadas, tal que el mallado de las zonas más próximas al exterior del conductor sea más denso y el de las zonas más próximas al eje longitudinal del conductor sea menos denso.

Resumen del experimento

El modelo 3D FF-MC, empleado el método de integración propuesto para obtener la potencia calorífica, responde bien.

La consecuencia práctica que se ha sacado del experimento es que hay que tener en cuenta el efecto pelicular -efecto skin- a la hora de modelar conductores sólidos. Se recomienda mallados cada vez más densos, en sentido radial, desde el interior hacia el exterior de la sección del conductor.

8.6 Conclusiones

El Método de la Celda presenta un excelente comportamiento ante problemas térmicos.

Nuestra segunda aportación $[M_\tau]$ mejora a la primera $[M_\lambda]$. en cuanto a errores se refiere. Pero como se trata de cálculos electro-térmicos, es mucho más rentable en términos informáticos utilizar la propuesta primera, pues con ella podemos calcular densidades de corrientes, además de conducción de calor. La propuesta $[M_\tau]$ quedaría pues restringida a cálculos exclusivamente térmicos.

La validez de $[M_\lambda]^{2D}$ como matriz constitutiva en la transmisión del calor en dos dimensiones queda demostrada.

El FF-MC no se comporta por igual ante modelos de procesos físicos diferentes. El modelo térmico es menos complejo, numéricamente hablando, que el modelo electromagnético. Para aumentar la precisión en los modelos electromagnéticos deberá aumentarse las densidades de los mallados. Esto conlleva la necesidad de recursos informáticos más potentes.

Se ha demostrado que el Método de la Celda se puede utilizar de forma acoplada con métodos circuitales como es el Método Nodal Modificado. Con ello se obtiene la ventaja operativa de inyectar señales eléctricas, tensión y/o intensidad, a voluntad del experimentador, a un dominio continuo discretizable y comprobar su respuesta ante tales estímulos.

Se puede afirmar que el FF-CM es válido para el estudio del régimen transitorio térmico. Se puede afirmar que la matriz $[M_\lambda]$ es válida para el régimen transitorio térmico.

También estamos en condiciones de afirmar que la Formulación Finita, con el Método de la Celda, junto a la matrices propuesta $[M_\lambda]$ y $[M_\tau]$, supera en precisión al Método de los Elementos Finitos, en cuanto a cálculo térmico transitorio se refiere.

El modelo 3D FF-MC, empleado el método de integración propuesto para obtener la potencia calorífica, responde bien. La consecuencia práctica que se ha sacado de los experimentos térmicos a con frecuencias altas es que hay que tener en cuenta el efecto pelicular -efecto skin- a la hora de modelar conductores sólidos. Se recomienda mallados cada vez más densos, en sentido radial, desde el interior hacia el exterior de la sección del conductor.

Bibliografía

B.H.Thacker, y otros, 2004. *Concepts of Model Verification and Validation*. First ed. Los Alamos, New Mexico, USA(New Mexico): Los Alamos National Lab.

Oden, J. T., 2009. *A brief view of verification, validation, and uncertainty quantification*. [En línea]

Available at: <http://users.ices.utexas.edu/~serge/WebMMM/Talks/Oden-VVUQ-032610.pdf>

[Último acceso: 15 Octubre 2015].

Paez, T. L., 2009. *Introduction to model validation*. Orlando, FL, USA, Society for Experimental Mechanics Inc..

Tedeschi, L. O., 2006. Assessment of the adequacy of mathematical models. *Agricultural Systems*, 89(23), pp. 225-247.

CAPITULO 9

Conclusiones y líneas futuras

Índice	<u>PÁG.</u>
9. Conclusiones y líneas futuras	199
9.1 Conclusiones	199
9.2 Líneas futuras de investigación	200

9. Conclusiones y líneas futuras

9.1 Conclusiones

La máquina eléctrica en general, y la máquina eléctrica asíncrona en particular, constituyen un paradigma donde intervienen diversas ramas de la Física y de la Ingeniería como pueden ser el electromagnetismo, la transmisión de calor, la dinámica, la estática, la elasticidad y la resistencia de materiales. Todo ello hace que sea muy atractiva para lo que hoy en día se denomina la Multi-Física Computacional. Lejos de ser un campo agotado, es un campo prometedor para ensayar nuevas metodologías numéricas y nuevos diseños de ingeniería aplicada.

En esta tesis se ha pretendido demostrar que la Formulación Finita y el Método de la Celda son metodologías válidas para el cálculo electromagnético y térmico que es aplicable a una máquina eléctrica asíncrona.

Se concluye que la matriz de conductividad eléctrica y la de conductividad térmica, en su estructura geométrica y topológica son análogas, sirviendo, indistintamente, para los cálculos de conducción eléctrica y térmica, respectivamente.

La matriz propuesta $[M_\tau]$ supera a la matriz $[M_\lambda]$, a su vez también propuesta, en cuanto a precisión se refiere. Se decide hacer prevalecer la segunda sobre la primera, pues su estructura matricial sirve indistintamente para el cálculo eléctrico y para el cálculo térmico.

Se demuestra la validez de la matriz $[M_\tau]^{2D}$ para el cálculo de transmisión de calor en dos dimensiones.

Se ha demostrado que el Método de la Celda se puede aplicar a problemas electromagnéticos y térmicos tridimensionales, donde se hace difícil o imposible, el encontrar simetrías planas o simetrías axiales bidimensionales equivalentes, como pueden darse, por ejemplo, en las cabezas de bobinas de los devanados estatóricos o rotóricos de la máquina eléctrica asíncrona.

Se ha demostrado que el Método de la Celda se puede utilizar acopladamente con método de resolución de circuitos lineales, como puede ser el Método Nodal Modificado, resolviéndose con ello problemas, que de otra manera puede ser más complicada su solución. Cito, entre otros, el simular corrientes o tensiones, con un alto contenido de armónicos, y comprobar cómo responden los dominios continuos discretizables ante tales estímulos.

Se ha demostrado la validez del Método de la Celda en el cálculo de fenómenos térmicos transitorios. Se asegura con ello la validez del método de integración sobre volúmenes duales, al objeto de calcular la potencia calorífica desarrollada por los fenómenos electromagnéticos intervinientes en la máquina eléctrica asíncrona.

Se comprueba que hay que tener en cuenta el efecto pelicular - efecto skin - de las corrientes a medida que aumenta la frecuencia y potencial con objeto de tener una mayor precisión en los cálculos electrotérmicos.

En definitiva, se demuestra que el Método de la Celda es un campo abierto que está a la espera de nuevas aplicaciones en el estudio de la máquina eléctrica asíncrona, en particular, y de las máquinas eléctricas, en general.

9.2 Líneas futuras de investigación

En esta tesis se ha podido ver que se abren múltiples puertas y no se cierra ninguna. Así pues han quedado claras nuevas líneas de investigación para el futuro más inmediato que, a continuación, pasamos a enunciar.

En esta tesis se ha demostrado la necesidad de implementar técnicas de computación paralela debido a la complejidad y dimensiones del cálculo matricial usado. La existencia de bibliotecas con funciones que facilitan su implementación constituye el paso más inmediato a dar.

Las solicitudes computacionales vienen motivadas por las dimensiones de las matrices utilizadas. Si se redujera su tamaño, sin menoscabar sus capacidades de cálculo y precisión, podrían mejorar los resultados y acometer nuevas metas.

Para ello se piensan estudiar nuevos tipos de formulación diferentes a la $(a, (a,v))$ y a la $(a, (a, \chi))$ al objeto de disminuir el número de incógnitas, y, por ende, el número de ecuaciones.

Otra línea de investigación es la incorporación de modelos matemáticos no lineales en el dominio electromagnético y térmico utilizando el Método de la Celda. Tanto en cuanto las ecuaciones constitutivas de dichos dominios lo permiten en el Método de la Celda y, por ello, aplicarlo al campo de las máquinas eléctricas donde así proceda: conductores, aislantes, núcleos ferromagnéticos y fluidos refrigerantes, principalmente aire.

Implementar el tensor de Maxwell en el Método de la Celda y, con ello, permitir el cálculo de pares electromagnéticos.

Implementar la ecuación de Navier-Stokes en el Método de la Celda, permitiendo hacer estudios de refrigeración de la máquina eléctrica asíncrona, en particular, y de las máquinas eléctricas, en general.

Construir dispositivos electromagnéticos simples para validar en el laboratorio cada paso que demos en la simulación numérica, teniendo como objeto final la validación en una máquina asíncrona experimental.

ANEXOS

ANEXO 1

10. Cálculo de la matriz constitutiva térmica A_τ

Se toma el siguiente tetraedro como referencia.

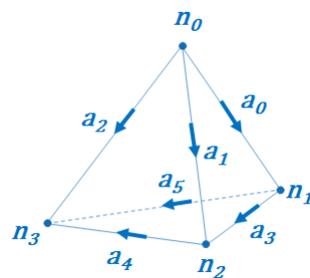


Figura 10-1. Tetraedro de referencia.

$$N = \{n_0, n_1, n_2, n_3\} \quad \text{card}(N) = 4 \text{ nudos}$$

$$A = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} \quad \text{card}(A) = 6 \text{ aristas}$$

Se define el operador gradiente discreto para el tetraedro de referencia como:

$$[G] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 10.1}$$

Se supone que la temperatura se distribuye siguiendo la siguiente función de coordenadas espaciales:

$$\tau_i(x, y, z) = g_x x + g_y y + g_z z + a \quad \text{Ec. 10.2}$$

Entonces la temperatura en los nudos primales del tetraedro de referencia será:

$$\begin{aligned}\tau_0 &= g_x x_0 + g_y y_0 + g_z z_0 + a \\ \tau_1 &= g_x x_1 + g_y y_1 + g_z z_1 + a \\ \tau_2 &= g_x x_2 + g_y y_2 + g_z z_2 + a \\ \tau_3 &= g_x x_3 + g_y y_3 + g_z z_3 + a\end{aligned}\tag{Ec. 10.3}$$

Siendo las coordenadas de cartesianas de los nudos $N = \{n_0, n_1, n_2, n_3\}$ las siguientes:

$$\begin{bmatrix} n_0 \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}\tag{Ec. 10.4}$$

El sistema de ecuaciones descrito en Ec. 10.1, en forma matricial es:

$$\begin{bmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_0 \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix}\tag{Ec. 10.5}$$

Que de forma abreviada se puede escribir como:

$$[B]_{4 \times 4} [Ga]_{4 \times 1} = [\tau]_{4 \times 1}\tag{Ec. 10.6}$$

Con lo cual:

$$[Ga] = [B]^{-1}[\tau]\tag{Ec. 10.7}$$

Se va a utilizar la regla de Cramer para resolver el sistema de ecuaciones. Al determinante del sistema lo llamamos de la siguiente manera:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}\tag{Ec. 10.8}$$

Entonces:

$$g_x = \frac{\begin{vmatrix} \tau_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ \tau_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ \tau_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ \tau_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} \qquad g_y = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & \tau_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & \tau_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & \tau_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & \tau_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

Ec. 10.9

$$g_z = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & \tau_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & \tau_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & \tau_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & \tau_3 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

No se calcula el término a pues: $\partial a / \partial x = 0$; $\partial a / \partial y = 0$; $\partial a / \partial z = 0$.

10.1 Desarrollo de los términos g_x , g_y , g_z

Cálculo del término g_x

Desarrollando por adjuntos:

$$g_x = \tau_0 \frac{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} - \tau_1 \frac{\begin{vmatrix} y_0 & z_0 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} + \tau_2 \frac{\begin{vmatrix} y_0 & z_0 & 1 \\ y_1 & z_1 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} - \tau_3 \frac{\begin{vmatrix} y_0 & z_0 & 1 \\ y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

Ec. 10.10

Operando:

$$\begin{aligned} g_x = & \frac{\tau_0}{\Delta} [(y_2 z_3 - y_3 z_2) - (y_1 z_3 - y_3 z_1) + (y_1 z_2 - y_2 z_1)] \\ & - \frac{\tau_1}{\Delta} [(y_2 z_3 - y_3 z_2) - (y_0 z_3 - y_3 z_0) + (y_0 z_2 - y_2 z_0)] \\ & + \frac{\tau_2}{\Delta} [(y_1 z_3 - y_3 z_1) - (y_0 z_3 - y_3 z_0) + (y_0 z_1 - y_1 z_0)] \\ & - \frac{\tau_3}{\Delta} [(y_1 z_2 - y_2 z_1) - (y_0 z_2 - y_2 z_0) + (y_0 z_1 - y_1 z_0)] \end{aligned}$$

Ec. 10.11

Cálculo del término g_y

Desarrollando por adjuntos:

$$g_y = -\tau_0 \frac{\begin{bmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix}}{\Delta} + \tau_1 \frac{\begin{bmatrix} x_0 & z_0 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix}}{\Delta} - \tau_2 \frac{\begin{bmatrix} x_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & z_1 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix}}{\Delta} + \tau_3 \frac{\begin{bmatrix} x_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \end{bmatrix}}{\Delta} \quad \text{Ec. 10.12}$$

Operando:

$$\begin{aligned} g_y = & -\frac{\tau_0}{\Delta} [(x_2 z_3 - x_3 z_2) - (x_1 z_3 - x_3 z_1) + (x_1 z_2 - x_2 z_1)] \\ & + \frac{\tau_1}{\Delta} [(x_2 z_3 - x_3 z_2) - (x_0 z_3 - x_3 z_0) + (x_0 z_2 - x_2 z_0)] \\ & - \frac{\tau_2}{\Delta} [(x_1 z_3 - x_3 z_1) - (x_0 z_3 - x_3 z_0) + (x_0 z_1 - x_1 z_0)] \\ & + \frac{\tau_3}{\Delta} [(x_1 z_2 - x_2 z_1) - (x_0 z_2 - x_2 z_0) + (x_0 z_1 - x_1 z_0)] \end{aligned} \quad \text{Ec. 10.13}$$

Cálculo del término g_z

Desarrollando por adjuntos:

$$g_z = \tau_0 \frac{\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}}{\Delta} - \tau_1 \frac{\begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}}{\Delta} + \tau_2 \frac{\begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}}{\Delta} - \tau_3 \frac{\begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix}}{\Delta} \quad \text{Ec. 10.14}$$

Operando:

$$\begin{aligned} g_z = & \frac{\tau_0}{\Delta} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) - (x_1 y_3 - x_3 y_1) + (x_1 y_2 - x_2 y_1)] \\ & - \frac{\tau_1}{\Delta} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) - (x_0 y_3 - x_3 y_0) + (x_0 y_2 - x_2 y_0)] \\ & + \frac{\tau_2}{\Delta} [(x_1 y_3 - x_3 y_1) - (x_0 y_3 - x_3 y_0) + (x_0 y_1 - x_1 y_0)] \\ & - \frac{\tau_3}{\Delta} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) - (x_0 y_2 - x_2 y_0) + (x_0 y_1 - x_1 y_0)] \end{aligned} \quad \text{Ec. 10.15}$$

Ahora bien:

$$\text{grad } \tau(x, y, z) = \frac{\partial \tau}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \tau}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \tau}{\partial z} \vec{k} \quad \text{Ec. 10.16}$$

Tal como se expresó la temperatura en Ec. 6.8, entonces:

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = g_x; \quad \frac{\partial \tau}{\partial y} = g_y; \quad \frac{\partial \tau}{\partial z} = g_z \quad \text{Ec. 10.17}$$

Con lo que:

$$\text{grad } \tau(x, y, z) = g_x \vec{i} + g_y \vec{j} + g_z \vec{k} \quad \text{Ec. 10.18}$$

10.2 Construcción de la matriz A_τ

Se ha establecido la ecuación de transmisión de calor de Fourier, utilizando el Método de la Celda, de la siguiente forma:

$$[Q']_{6 \times 1} = [M_\lambda]_{6 \times 6} [G]_{6 \times 4} [\tau]_{4 \times 1} \quad \text{Ec. 10.19}$$

Supongamos que exista una matriz $[A_\tau]$ tal que:

$$[M_\lambda]_{6 \times 6} = [\tilde{S}]_{6 \times 3} [A_\tau]_{3 \times 6} \quad \text{Ec. 10.20}$$

Siendo $[\tilde{S}]$ la matriz de caras duales de la celda:

$$[\tilde{S}] = \begin{bmatrix} S_{0x} & S_{0y} & S_{0z} \\ S_{1x} & S_{1y} & S_{1z} \\ S_{2x} & S_{2y} & S_{2z} \\ S_{3x} & S_{3y} & S_{3z} \\ S_{4x} & S_{4y} & S_{4z} \\ S_{5x} & S_{5y} & S_{5z} \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 10.21}$$

Llamaremos,

$$[q]_{3 \times 1} = [A_\tau]_{3 \times 6} [G]_{6 \times 4} [\tau]_{4 \times 1} \quad \text{Ec. 10.22}$$

También llamaremos:

$$[X]_{6 \times 1} = [G]_{6 \times 4} [\tau]_{4 \times 1} \quad \text{Ec. 10.23}$$

El vector densidad de calor será:

$$[\vec{q}]_{3 \times 1} = -\lambda \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{bmatrix} = -\lambda [grad(\tau)]_{3 \times 1} \quad \text{Ec. 10.24}$$

Entonces el flujo de calor es:

$$[Q]_{6 \times 1} = [\tilde{S}]_{6 \times 3} [\vec{q}]_{3 \times 1} \quad \text{Ec. 10.25}$$

Como tratamos de encontrar lo mismo por dos caminos diferentes, entonces lo expuesto en Ec. 10.19 tiene que ser igual a lo expuesto en Ec. 10.25, luego:

$$[Q] = [Q'] \quad \text{Ec. 10.26}$$

$$-\lambda [\tilde{S}]_{6 \times 3} [grad(\tau)]_{3 \times 1} = [M_\lambda]_{6 \times 6} [G]_{6 \times 4} [\tau]_{4 \times 1}$$

Lo expuesto en Ec. 10.20 y Ec. 10.23 se sustituye en el segundo miembro de Ec. 10.26, entonces:

$$-\lambda [\tilde{S}]_{6 \times 3} [\text{grad}(\tau)]_{3 \times 1} = [\tilde{S}]_{6 \times 3} [A_\tau]_{3 \times 6} [X]_{6 \times 1} \quad \text{Ec. 10.27}$$

Simplificado la matriz de caras duales:

$$-\lambda [\text{grad}(\tau)]_{3 \times 1} = [A_\tau]_{3 \times 6} [X]_{6 \times 1} \quad \text{Ec. 10.28}$$

Tal como se había expuesto en Ec. 10.1, sustituyendo este valor y el del vector de temperaturas:

$$[X]_{6 \times 1} = [G]_{6 \times 4} [\tau]_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{6 \times 4} \begin{bmatrix} \tau_0 \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix}_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} -\tau_0 + \tau_1 \\ -\tau_0 + \tau_2 \\ -\tau_0 + \tau_3 \\ -\tau_1 + \tau_2 \\ -\tau_2 + \tau_3 \\ -\tau_1 + \tau_3 \end{bmatrix}_{6 \times 1} \quad \text{Ec. 10.29}$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}_{6 \times 1} = \begin{bmatrix} -\tau_0 + \tau_1 \\ -\tau_0 + \tau_2 \\ -\tau_0 + \tau_3 \\ -\tau_1 + \tau_2 \\ -\tau_2 + \tau_3 \\ -\tau_1 + \tau_3 \end{bmatrix}_{6 \times 1} \quad \text{Ec. 10.30}$$

Entonces sustituyendo el valor de $[\text{grad}(\tau)]_{3 \times 1}$ y lo expuesto en Ec. 10.30, entonces:

$$-\lambda \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{bmatrix}_{3 \times 1} = [A_\tau]_{3 \times 6} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}_{6 \times 1} \quad \text{Ec. 10.31}$$

$$-\lambda \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} & A_{04} & A_{05} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \end{bmatrix}_{3 \times 6} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}_{6 \times 1} \quad \text{Ec. 10.32}$$

$$-\lambda \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{00} \cdot x_0 + A_{01} \cdot x_1 + A_{02} \cdot x_2 + A_{03} \cdot x_3 + A_{04} \cdot x_4 + A_{05} \cdot x_5 \\ A_{10} \cdot x_0 + A_{11} \cdot x_1 + A_{12} \cdot x_2 + A_{13} \cdot x_3 + A_{14} \cdot x_4 + A_{15} \cdot x_5 \\ A_{20} \cdot x_0 + A_{21} \cdot x_1 + A_{22} \cdot x_2 + A_{23} \cdot x_3 + A_{24} \cdot x_4 + A_{25} \cdot x_5 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 10.33}$$

Desarrollo del término g_x

$$-\lambda g_x = A_{00} \cdot x_0 + A_{01} \cdot x_1 + A_{02} \cdot x_2 + A_{03} \cdot x_3 + A_{04} \cdot x_4 + A_{05} \cdot x_5 \quad \text{Ec. 10.34}$$

Se sustituyen los valores x_i :

$$\begin{aligned} -\lambda g_x = & A_{00} \cdot (-\tau_0 + \tau_1) + A_{01} \cdot (-\tau_0 + \tau_2) + A_{02} \cdot (-\tau_0 + \tau_3) + \\ & + A_{03} \cdot (-\tau_1 + \tau_2) + A_{04} \cdot (-\tau_2 + \tau_3) + A_{05} \cdot (-\tau_1 + \tau_3) \end{aligned} \quad \text{Ec. 10.35}$$

Se agrupan todos los términos afectados por el mismo valor de temperatura:

$$\begin{aligned} -\lambda g_x = & \tau_0(-A_{00} - A_{01} - A_{02}) + \\ & + \tau_1(A_{00} - A_{03} - A_{05}) + \\ & + \tau_2(A_{01} + A_{03} - A_{04}) + \\ & + \tau_3(A_{02} + A_{04} + A_{05}) \end{aligned} \quad \text{Ec. 10.36}$$

Sustituyendo el valor de g_x calculado en Ec. 10.11, entonces, al igualar a lo obtenido en Ec. 10.36, se tiene que:

$$\begin{aligned} & -\frac{\lambda\tau_0}{\Delta} [(y_2z_3 - y_3z_2) - (y_1z_3 - y_3z_1) + (y_1z_2 - y_2z_1)] \\ & + \frac{\lambda\tau_1}{\Delta} [(y_2z_3 - y_3z_2) - (y_0z_3 - y_3z_0) + (y_0z_2 - y_2z_0)] \\ & - \frac{\lambda\tau_2}{\Delta} [(y_1z_3 - y_3z_1) - (y_0z_3 - y_3z_0) + (y_0z_1 - y_1z_0)] \\ & + \frac{\lambda\tau_3}{\Delta} [(y_1z_2 - y_2z_1) - (y_0z_2 - y_2z_0) + (y_0z_1 - y_1z_0)] = \begin{aligned} & \tau_0(-A_{00} - A_{01} - A_{02}) \\ & + \tau_1(A_{00} - A_{03} - A_{05}) \\ & + \tau_2(A_{01} + A_{03} - A_{04}) \\ & + \tau_3(A_{02} + A_{04} + A_{05}) \end{aligned} \end{aligned} \quad \text{Ec. 10.37}$$

Igualando los términos de ambos lados de la ecuación que afectan a τ_0 :

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda\tau_0}{\Delta} [(y_2z_3 - y_3z_2) - (y_1z_3 - y_3z_1) + (y_1z_2 - y_2z_1)] \\ = \tau_0(-A_{00} - A_{01} - A_{02}) \end{aligned} \quad \text{Ec. 10.38}$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\lambda}{\Delta} (y_2z_3 - y_3z_2) &= -A_{00} \\ \frac{\lambda}{\Delta} (y_1z_3 - y_3z_1) &= -A_{01} \\ -\frac{\lambda}{\Delta} (y_1z_2 - y_2z_1) &= -A_{02} \end{aligned} \right\} \quad \text{Ec. 10.39}$$

$$\begin{aligned}
 A_{00} &= \frac{\lambda}{\Delta} (y_2 z_3 - y_3 z_2) \\
 A_{01} &= \frac{\lambda}{\Delta} (y_3 z_1 - y_1 z_3) \\
 A_{02} &= \frac{\lambda}{\Delta} (y_1 z_2 - y_2 z_1)
 \end{aligned}
 \tag{Ec. 10.40}$$

Igualando los términos de ambos lados de la ecuación que afectan a τ_1 :

$$\frac{\lambda \tau_1}{\Delta} [(y_2 z_3 - y_3 z_2) - (y_0 z_3 - y_3 z_0) + (y_0 z_2 - y_2 z_0)] = \tau_1 (A_{00} - A_{03} - A_{05}) \tag{Ec. 10.41}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\lambda}{\Delta} (y_2 z_3 - y_3 z_2) &= A_{00} \\
 -\frac{\lambda}{\Delta} (y_0 z_3 - y_3 z_0) &= -A_{03} \\
 \frac{\lambda}{\Delta} (y_0 z_2 - y_2 z_0) &= -A_{05}
 \end{aligned} \right\} \tag{Ec. 10.42}$$

$$\begin{aligned}
 A_{00} &= \frac{\lambda}{\Delta} (y_2 z_3 - y_3 z_2) \\
 A_{03} &= \frac{\lambda}{\Delta} (y_0 z_3 - y_3 z_0) \\
 A_{05} &= \frac{\lambda}{\Delta} (y_2 z_0 - y_0 z_2)
 \end{aligned}
 \tag{Ec. 10.43}$$

Igualando los términos de ambos lados de la ecuación que afectan a τ_2 :

$$-\frac{\lambda \tau_2}{\Delta} [(y_1 z_3 - y_3 z_1) - (y_0 z_3 - y_3 z_0) + (y_0 z_1 - y_1 z_0)] = +\tau_2 (A_{01} + A_{03} - A_{04}) \tag{Ec. 10.44}$$

$$\left. \begin{aligned}
 -\frac{\lambda}{\Delta} (y_1 z_3 - y_3 z_1) &= A_{01} \\
 \frac{\lambda}{\Delta} (y_0 z_3 - y_3 z_0) &= A_{03} \\
 \frac{\lambda}{\Delta} (y_0 z_1 - y_1 z_0) &= A_{04}
 \end{aligned} \right\} \tag{Ec. 10.45}$$

$$\begin{aligned}
 A_{01} &= \frac{\lambda}{\Delta} (y_3 z_1 - y_1 z_3) \\
 A_{03} &= \frac{\lambda}{\Delta} (y_0 z_3 - y_3 z_0) \\
 A_{04} &= \frac{\lambda}{\Delta} (y_0 z_1 - y_1 z_0)
 \end{aligned}
 \tag{Ec. 10.46}$$

Igualando los términos de ambos lados de la ecuación que afectan a τ_3 :

$$\frac{\lambda\tau_3}{\Delta} [(y_1z_2 - y_2z_1) - (y_0z_2 - y_2z_0) + (y_0z_1 - y_1z_0)] = \tau_3(A_{02} + A_{04} + A_{05}) \quad \text{Ec. 10.47}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda}{\Delta} (y_1z_2 - y_2z_1) &= A_{02} \\ -\frac{\lambda}{\Delta} (y_0z_2 - y_2z_0) &= A_{04} \\ \frac{\lambda}{\Delta} (y_0z_1 - y_1z_0) &= A_{05} \end{aligned} \right\} \quad \text{Ec. 10.48}$$

$$\begin{aligned} A_{02} &= \frac{\lambda}{\Delta} (y_1z_2 - y_2z_1) \\ A_{05} &= \frac{\lambda}{\Delta} (y_2z_0 - y_0z_2) \\ A_{04} &= \frac{\lambda}{\Delta} (y_0z_1 - y_1z_0) \end{aligned} \quad \text{Ec. 10.49}$$

Desarrollo del término g_y

$$-\lambda g_y = A_{10} \cdot x_0 + A_{11} \cdot x_1 + A_{12} \cdot x_2 + A_{13} \cdot x_3 + A_{14} \cdot x_4 + A_{15} \cdot x_5 \quad \text{Ec. 10.50}$$

Se sustituyen los valores x_i :

$$\begin{aligned} -\lambda g_y &= A_{10} \cdot (-\tau_0 + \tau_1) + A_{11} \cdot (-\tau_0 + \tau_2) + A_{12} \cdot (-\tau_0 + \tau_3) + \\ &+ A_{13} \cdot (-\tau_1 + \tau_2) + A_{14} \cdot (-\tau_2 + \tau_3) + A_{15} \cdot (-\tau_1 + \tau_3) \end{aligned} \quad \text{Ec. 10.51}$$

Se agrupan todos los términos afectados por el mismo valor de temperatura:

$$\begin{aligned} -\lambda g_y &= \tau_0(-A_{10} - A_{11} - A_{12}) + \\ &+ \tau_1(A_{10} - A_{13} - A_{15}) + \\ &+ \tau_2(A_{11} + A_{13} - A_{14}) + \\ &+ \tau_3(A_{12} + A_{14} + A_{15}) \end{aligned} \quad \text{Ec. 10.52}$$

Sustituyendo el valor de g_y calculado en Ec. 10.13, entonces, al igualar a lo obtenido en Ec. 10.52, se tiene que:

$$\begin{aligned} &\lambda \frac{\tau_0}{\Delta} [(x_2z_3 - x_3z_2) - (x_1z_3 - x_3z_1) + (x_1z_2 - x_2z_1)] - \\ &-\lambda \frac{\tau_1}{\Delta} [(x_2z_3 - x_3z_2) - (x_0z_3 - x_3z_0) + (x_0z_2 - x_2z_0)] + \\ &+\lambda \frac{\tau_2}{\Delta} [(x_1z_3 - x_3z_1) - (x_0z_3 - x_3z_0) + (x_0z_1 - x_1z_0)] - \\ &-\lambda \frac{\tau_3}{\Delta} [(x_1z_2 - x_2z_1) - (x_0z_2 - x_2z_0) + (x_0z_1 - x_1z_0)] = \end{aligned} \quad \text{Ec. 10.53}$$

$$\begin{aligned} &\tau_0(-A_{10} - A_{11} - A_{12}) + \\ &+ \tau_1(A_{10} - A_{13} - A_{15}) + \\ &+ \tau_2(A_{11} + A_{13} - A_{14}) + \\ &+ \tau_3(A_{12} + A_{14} + A_{15}) \end{aligned}$$

Igualando los términos de ambos lados de la ecuación que afectan a τ_0 :

$$\lambda \frac{\tau_0}{\Delta} [(x_2 z_3 - x_3 z_2) - (x_1 z_3 - x_3 z_1) + (x_1 z_2 - x_2 z_1)] = \tau_0 (-A_{10} - A_{11} - A_{12}) \quad \text{Ec. 10.54}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda}{\Delta} (x_2 z_3 - x_3 z_2) &= -A_{10} \\ -\frac{\lambda}{\Delta} (x_1 z_3 - x_3 z_1) &= -A_{11} \\ \frac{\lambda}{\Delta} (x_1 z_2 - x_2 z_1) &= -A_{12} \end{aligned} \right\} \quad \text{Ec. 10.55}$$

$$\begin{aligned} A_{10} &= \frac{\lambda}{\Delta} (x_3 z_2 - x_2 z_3) \\ A_{11} &= \frac{\lambda}{\Delta} (x_1 z_3 - x_3 z_1) \\ A_{12} &= \frac{\lambda}{\Delta} (x_2 z_1 - x_1 z_2) \end{aligned} \quad \text{Ec. 10.56}$$

Igualando los términos de ambos lados de la ecuación que afectan a τ_1 :

$$-\lambda \frac{\tau_1}{\Delta} [(x_2 z_3 - x_3 z_2) - (x_0 z_3 - x_3 z_0) + (x_0 z_2 - x_2 z_0)] = +\tau_1 (A_{10} - A_{13} - A_{15}) \quad \text{Ec. 10.57}$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\lambda}{\Delta} (x_2 z_3 - x_3 z_2) &= A_{10} \\ \frac{\lambda}{\Delta} (x_0 z_3 - x_3 z_0) &= -A_{13} \\ -\frac{\lambda}{\Delta} (x_0 z_2 - x_2 z_0) &= -A_{15} \end{aligned} \right\} \quad \text{Ec. 10.58}$$

$$\begin{aligned} A_{10} &= \frac{\lambda}{\Delta} (x_3 z_2 - x_2 z_3) \\ A_{13} &= \frac{\lambda}{\Delta} (x_3 z_0 - x_0 z_3) \\ A_{15} &= \frac{\lambda}{\Delta} (x_0 z_2 - x_2 z_0) \end{aligned} \quad \text{Ec. 10.59}$$

Igualando los términos de ambos lados de la ecuación que afectan a τ_2 :

$$\lambda \frac{\tau_2}{\Delta} [(x_1 z_3 - x_3 z_1) - (x_0 z_3 - x_3 z_0) + (x_0 z_1 - x_1 z_0)] = \tau_2 (A_{11} + A_{13} - A_{14}) \quad \text{Ec. 10.60}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda}{\Delta}(x_1z_3 - x_3z_1) &= A_{11} \\ -\frac{\lambda}{\Delta}(x_0z_3 - x_3z_0) &= A_{13} \\ \frac{\lambda}{\Delta}(x_0z_1 - x_1z_0) &= -A_{14} \end{aligned} \right\} \text{Ec. 10.61}$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{\lambda}{\Delta}(x_1z_3 - x_3z_1) \\ A_{13} &= \frac{\lambda}{\Delta}(x_3z_0 - x_0z_3) \\ A_{14} &= \frac{\lambda}{\Delta}(x_1z_0 - x_0z_1) \end{aligned} \text{Ec. 10.62}$$

Igualando los términos de ambos lados de la ecuación que afectan a τ_3 :

$$\begin{aligned} -\lambda \frac{\tau_3}{\Delta} [(x_1z_2 - x_2z_1) - (x_0z_2 - x_2z_0) + (x_0z_1 - x_1z_0)] \\ = +\tau_3(A_{12} + A_{14} + A_{15}) \end{aligned} \text{Ec. 10.63}$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\lambda}{\Delta}(x_1z_2 - x_2z_1) &= A_{12} \\ \frac{\lambda}{\Delta}(x_0z_2 - x_2z_0) &= A_{15} \\ -\frac{\lambda}{\Delta}(x_0z_1 - x_1z_0) &= A_{14} \end{aligned} \right\} \text{Ec. 10.64}$$

$$\begin{aligned} A_{12} &= \frac{\lambda}{\Delta}(x_2z_1 - x_1z_2) \\ A_{15} &= \frac{\lambda}{\Delta}(x_0z_2 - x_2z_0) \\ A_{14} &= \frac{\lambda}{\Delta}(x_1z_0 - x_0z_1) \end{aligned} \text{Ec. 10.65}$$

Desarrollo del término g_z

$$-\lambda g_z = A_{20} \cdot x_0 + A_{21} \cdot x_1 + A_{22} \cdot x_2 + A_{23} \cdot x_3 + A_{24} \cdot x_4 + A_{25} \cdot x_5 \text{Ec. 10.66}$$

Se sustituyen los valores x_i :

$$\begin{aligned} -\lambda g_z &= A_{20} \cdot (-\tau_0 + \tau_1) + A_{21} \cdot (-\tau_0 + \tau_2) + A_{22} \cdot (-\tau_0 + \tau_3) + \\ &+ A_{23} \cdot (-\tau_1 + \tau_2) + A_{24} \cdot (-\tau_2 + \tau_3) + A_{25} \cdot (-\tau_1 + \tau_3) \end{aligned} \text{Ec. 10.67}$$

Se agrupan todos los términos afectados por el mismo valor de temperatura:

$$\begin{aligned}
 -\lambda g_z = & \tau_0(-A_{20} - A_{21} - A_{22}) + \\
 & +\tau_1(A_{20} - A_{23} - A_{25}) + \\
 & +\tau_2(A_{21} + A_{23} - A_{24}) + \\
 & +\tau_3(A_{22} + A_{24} + A_{25})
 \end{aligned}
 \tag{Ec. 10.68}$$

Sustituyendo el valor de g_z calculado en Ec. 10.15, entonces, al igualar a lo obtenido en Ec. 10.68, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 & -\lambda \frac{\tau_0}{\Delta} [(x_2 z_3 - x_3 y_2) - (x_1 y_3 - x_3 y_1) + (x_1 y_2 - x_2 y_1)] + \\
 & +\lambda \frac{\tau_1}{\Delta} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) - (x_0 y_3 - x_3 y_0) + (x_0 y_2 - x_2 y_0)] - \\
 & -\lambda \frac{\tau_2}{\Delta} [(x_1 y_3 - x_3 y_1) - (x_0 y_3 - x_3 y_0) + (x_0 y_1 - x_1 y_0)] + \\
 & +\lambda \frac{\tau_3}{\Delta} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) - (x_0 y_2 - x_2 y_0) + (x_0 y_1 - x_1 y_0)] =
 \end{aligned}
 \tag{Ec. 10.69}$$

$$\begin{aligned}
 & \tau_0(-A_{20} - A_{21} - A_{22}) + \\
 & +\tau_1(A_{20} - A_{23} - A_{25}) + \\
 & +\tau_2(A_{21} + A_{23} - A_{24}) + \\
 & +\tau_3(A_{22} + A_{24} + A_{25})
 \end{aligned}$$

Iguando los términos de ambos lados de la ecuación que afectan a τ_0 :

$$\begin{aligned}
 -\lambda \frac{\tau_0}{\Delta} [(x_2 z_3 - x_3 y_2) - (x_1 y_3 - x_3 y_1) + (x_1 y_2 - x_2 y_1)] \\
 = \tau_0(-A_{20} - A_{21} - A_{22})
 \end{aligned}
 \tag{Ec. 10.70}$$

$$\left. \begin{aligned}
 -\frac{\lambda}{\Delta} (x_2 z_3 - x_3 y_2) &= -A_{20} \\
 \frac{\lambda}{\Delta} (x_1 y_3 - x_3 y_1) &= -A_{21} \\
 -\frac{\lambda}{\Delta} (x_1 y_2 - x_2 y_1) &= -A_{22}
 \end{aligned} \right\}
 \tag{Ec. 10.71}$$

$$\begin{aligned}
 A_{20} &= \frac{\lambda}{\Delta} (x_2 z_3 - x_3 y_2) \\
 A_{21} &= \frac{\lambda}{\Delta} (x_3 y_1 - x_1 y_3) \\
 A_{12} &= \frac{\lambda}{\Delta} (x_1 y_2 - x_2 y_1)
 \end{aligned}
 \tag{Ec. 10.72}$$

Iguando los términos de ambos lados de la ecuación que afectan a τ_1 :

$$\lambda \frac{\tau_1}{\Delta} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) - (x_0 y_3 - x_3 y_0) + (x_0 y_2 - x_2 y_0)] = \tau_1(A_{20} - A_{23} - A_{25})
 \tag{Ec. 10.73}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda}{\Delta}(x_2y_3 - x_3y_2) &= A_{20} \\ -\frac{\lambda}{\Delta}(x_0y_3 - x_3y_0) &= -A_{23} \\ \frac{\lambda}{\Delta}(x_0y_2 - x_2y_0) &= -A_{25} \end{aligned} \right\} \text{Ec. 10.74}$$

$$\begin{aligned} A_{20} &= \frac{\lambda}{\Delta}(x_2y_3 - x_3y_2) \\ A_{23} &= \frac{\lambda}{\Delta}(x_0y_3 - x_3y_0) \\ A_{25} &= \frac{\lambda}{\Delta}(x_2y_0 - x_0y_2) \end{aligned} \text{Ec. 10.75}$$

Igualando los términos de ambos lados de la ecuación que afectan a τ_2 :

$$\begin{aligned} -\lambda \frac{\tau_2}{\Delta} [(x_1y_3 - x_3y_1) - (x_0y_3 - x_3y_0) + (x_0y_1 - x_1y_0)] \\ = +\tau_2(A_{21} + A_{23} - A_{24}) \end{aligned} \text{Ec. 10.76}$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\lambda}{\Delta}(x_1y_3 - x_3y_1) &= A_{21} \\ \frac{\lambda}{\Delta}(x_0y_3 - x_3y_0) &= A_{23} \\ -\frac{\lambda}{\Delta}(x_0y_1 - x_1y_0) &= -A_{24} \end{aligned} \right\} \text{Ec. 10.77}$$

$$\begin{aligned} A_{21} &= \frac{\lambda}{\Delta}(x_3y_1 - x_1y_3) \\ A_{23} &= \frac{\lambda}{\Delta}(x_0y_3 - x_3y_0) \\ A_{24} &= \frac{\lambda}{\Delta}(x_0y_1 - x_1y_0) \end{aligned} \text{Ec. 10.78}$$

Igualando los términos de ambos lados de la ecuación que afectan a τ_3 :

$$\lambda \frac{\tau_3}{\Delta} [(x_1y_2 - x_2y_1) - (x_0y_2 - x_2y_0) + (x_0y_1 - x_1y_0)] = \tau_3(A_{22} + A_{24} + A_{25}) \text{Ec. 10.79}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda}{\Delta}(x_1y_2 - x_2y_1) &= A_{22} \\ -\frac{\lambda}{\Delta}(x_0y_2 - x_2y_0) &= A_{25} \\ \frac{\lambda}{\Delta}(x_0y_1 - x_1y_0) &= A_{24} \end{aligned} \right\} \text{Ec. 10.80}$$

$$\begin{aligned}
 A_{22} &= \frac{\lambda}{\Delta} (x_1 y_2 - x_2 y_1) \\
 A_{25} &= \frac{\lambda}{\Delta} (x_2 y_0 - x_0 y_2) \\
 A_{24} &= \frac{\lambda}{\Delta} (x_0 y_1 - x_1 y_0)
 \end{aligned}
 \tag{Ec. 10.81}$$

10.3 Matriz A_τ definitiva

Una vez obtenido todos los términos A_{ij} , se ha podido ir viendo a lo largo del desarrollo que algunos términos se repite, coincidiendo sus valores por un camino o por otro. Esto es prueba de que el desarrollo es correcto.

Con los valores obtenidos se construye la matriz $[A_\tau]$, que tiene el siguiente aspecto:

$$[A_\tau] = \frac{\lambda}{\Delta} \begin{bmatrix} (y_3 z_2 - y_2 z_3) & (y_1 z_3 - y_3 z_1) & (y_2 z_1 - y_1 z_2) & (y_3 z_0 - y_0 z_3) & (y_1 z_0 - y_0 z_1) & (y_0 z_2 - y_2 z_0) \\ (x_2 z_3 - x_3 z_2) & (x_3 z_1 - x_1 z_3) & (x_1 z_2 - x_2 z_1) & (x_0 z_3 - x_3 z_0) & (x_0 z_1 - x_1 z_0) & (x_2 z_0 - x_0 z_2) \\ (x_3 y_2 - x_2 y_3) & (x_1 y_3 - x_3 y_1) & (x_2 y_1 - x_1 y_2) & (x_3 y_0 - x_0 y_3) & (x_1 y_0 - x_0 y_1) & (x_0 y_2 - x_2 y_0) \end{bmatrix}
 \tag{Ec. 10.82}$$

ANEXO 2

11. Potencia calorífica partiendo de la densidad de corriente en régimen armónico

Se toma el siguiente tetraedro como referencia, con las densidades de corriente asignadas a los nudos.

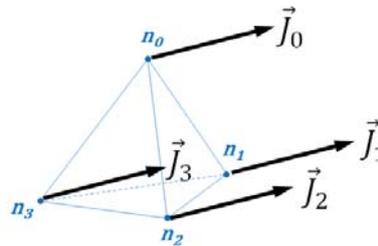


Figura 11-1. Densidades de corriente \vec{J}_k en los nudos.

Se trata de calcular la potencia calorífica, bien sea por efecto Joule, por corrientes de Foucault, o por la combinación de ambos fenómenos. Para ello se parte de la siguiente consideración:

$$P = \Re(\bar{S}) = \Re(\bar{U} \cdot \bar{I}^*) = \Re(Z \bar{I} \cdot \bar{I}^*) \quad \text{Ec. 11.1}$$

$$P = \Re[Z(I_R + i I_I)(I_R - i I_I)] \quad \text{Ec. 11.2}$$

$$P = \frac{1}{Y}(I_R^2 + I_I^2) \quad \text{Ec. 11.3}$$

$$\text{Si } I = \int_{\bar{S}} \vec{J} \cdot d\vec{S} \Rightarrow P = \frac{1}{Y}(I_R^2 + I_I^2) \Leftrightarrow P = \frac{1}{\sigma}(J_R^2 + J_I^2)$$

Si se utilizan valores máximos de corriente, entonces: $P = \frac{1}{2\sigma}(J_R^2 + J_I^2)$

11.1 Interpolación de la densidad de corriente en cualquier punto del tetraedro

En algunos post-procesadores, muchos de ellos basados en el Método de los Elementos Finitos, la densidad de corriente eléctrica está asignada los nudos del tetraedro - Figura 11-1 – Se trata de obtener el valor de la densidad de corriente eléctrica en el interior del tetraedro. Para ello se recurre a una interpolación lineal del tipo:

$$\vec{J}(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \vec{J}_0 \alpha_0 + \vec{J}_1 \alpha_1 + \vec{J}_2 \alpha_2 + \vec{J}_3 \alpha_3 \quad \text{Ec. 11.4}$$

Para ello se establece un sistema de coordenadas intrínsecas al tetraedro, tal que la cuarta componente es combinación lineal de las otras tres:

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \quad \text{Ec. 11.5}$$

Al estar asignados a cada nudo del tetraedro, los vectores de densidad de corriente tendrán las siguientes coordenadas:

$$\begin{aligned} \vec{J}_0 &= J_{0x} \vec{i} + J_{0y} \vec{j} + J_{0z} \vec{k} \\ \vec{J}_1 &= J_{1x} \vec{i} + J_{1y} \vec{j} + J_{1z} \vec{k} \\ \vec{J}_2 &= J_{2x} \vec{i} + J_{2y} \vec{j} + J_{2z} \vec{k} \\ \vec{J}_3 &= J_{3x} \vec{i} + J_{3y} \vec{j} + J_{3z} \vec{k} \end{aligned} \quad \text{Ec. 11.6}$$

Aplicando la interpolación lineal propuesta en Ec. 11.4, las componentes del vector de densidad de corrientes interpolado \vec{J} serán:

$$\begin{aligned} J_x &= J_{0x} \alpha_0 + J_{1x} \alpha_1 + J_{2x} \alpha_2 + J_{3x} \alpha_3 \\ J_y &= J_{0y} \alpha_0 + J_{1y} \alpha_1 + J_{2y} \alpha_2 + J_{3y} \alpha_3 \\ J_z &= J_{0z} \alpha_0 + J_{1z} \alpha_1 + J_{2z} \alpha_2 + J_{3z} \alpha_3 \end{aligned} \quad \text{Ec. 11.7}$$

Se ha establecido previamente el carácter armónico de los campos electromagnéticos. Por lo tanto el vector de campo \vec{J} pasa a ser considerado un fasor: $\vec{J} = J_R + i J_I$.

Las componentes J_R y J_I del fasor deben ser desarrolladas en coordenadas intrínsecas $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Se desarrollan las componentes J_R y J_I en estas coordenadas.

11.2 Parte real cuadrática de la densidad de corriente

Se tiene que:

$$J_R^2 = J_{Rx}^2 + J_{Ry}^2 + J_{Rz}^2 \quad \text{Ec. 11.8}$$

Sustituyendo el valor de estas componentes interpoladas:

$$J_R^2 = (J_{0xR} \alpha_0 + J_{1xR} \alpha_1 + J_{2xR} \alpha_2 + J_{3xR} \alpha_3)^2 + (J_{0yR} \alpha_0 + J_{1yR} \alpha_1 + J_{2yR} \alpha_2 + J_{3yR} \alpha_3)^2 + (J_{0zR} \alpha_0 + J_{1zR} \alpha_1 + J_{2zR} \alpha_2 + J_{3zR} \alpha_3)^2 \quad \text{Ec. 11.9}$$

Se desarrollaran los cuadrados de las componentes de J_R^2 . Para ello se recurre a la expresión del cuadrado de un polinomio:

$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd \quad \text{Ec. 11.10}$$

Entonces aplicado la expresión anterior:

$$(J_{0xR} \alpha_0 + J_{1xR} \alpha_1 + J_{2xR} \alpha_2 + J_{3xR} \alpha_3)^2 = (J_{0xR}^2 \alpha_0^2 + J_{1xR}^2 \alpha_1^2 + J_{2xR}^2 \alpha_2^2 + J_{3xR}^2 \alpha_3^2) + 2 \cdot (J_{0xR} \alpha_0 J_{1xR} \alpha_1 + J_{0xR} \alpha_0 J_{2xR} \alpha_2 + J_{0xR} \alpha_0 J_{3xR} \alpha_3) + 2 \cdot (J_{1xR} \alpha_1 J_{2xR} \alpha_2 + J_{1xR} \alpha_1 J_{3xR} \alpha_3) + 2 \cdot (J_{2xR} \alpha_2 J_{3xR} \alpha_3) \quad \text{Ec. 11.11}$$

$$(J_{0yR} \alpha_0 + J_{1yR} \alpha_1 + J_{2yR} \alpha_2 + J_{3yR} \alpha_3)^2 = (J_{0yR}^2 \alpha_0^2 + J_{1yR}^2 \alpha_1^2 + J_{2yR}^2 \alpha_2^2 + J_{3yR}^2 \alpha_3^2) + 2 \cdot (J_{0yR} \alpha_0 J_{1yR} \alpha_1 + J_{0yR} \alpha_0 J_{2yR} \alpha_2 + J_{0yR} \alpha_0 J_{3yR} \alpha_3) + 2 \cdot (J_{1yR} \alpha_1 J_{2yR} \alpha_2 + J_{1yR} \alpha_1 J_{3yR} \alpha_3) + 2 \cdot (J_{2yR} \alpha_2 J_{3yR} \alpha_3) \quad \text{Ec. 11.12}$$

$$(J_{0zR} \alpha_0 + J_{1zR} \alpha_1 + J_{2zR} \alpha_2 + J_{3zR} \alpha_3)^2 = (J_{0zR}^2 \alpha_0^2 + J_{1zR}^2 \alpha_1^2 + J_{2zR}^2 \alpha_2^2 + J_{3zR}^2 \alpha_3^2) + 2 \cdot (J_{0zR} \alpha_0 J_{1zR} \alpha_1 + J_{0zR} \alpha_0 J_{2zR} \alpha_2 + J_{0zR} \alpha_0 J_{3zR} \alpha_3) + 2 \cdot (J_{1zR} \alpha_1 J_{2zR} \alpha_2 + J_{1zR} \alpha_1 J_{3zR} \alpha_3) + 2 \cdot (J_{2zR} \alpha_2 J_{3zR} \alpha_3) \quad \text{Ec. 11.13}$$

Si se agrupan todos los términos α_k comunes, entonces:

$$J_R^2 = (J_{0xR}^2 + J_{0yR}^2 + J_{0zR}^2) \alpha_0^2 + (J_{1xR}^2 + J_{1yR}^2 + J_{1zR}^2) \alpha_1^2 + (J_{2xR}^2 + J_{2yR}^2 + J_{2zR}^2) \alpha_2^2 + (J_{3xR}^2 + J_{3yR}^2 + J_{3zR}^2) \alpha_3^2 + 2 (J_{0xR} J_{1xR} + J_{0yR} J_{1yR} + J_{0zR} J_{1zR}) \alpha_0 \alpha_1 + 2 (J_{0xR} J_{2xR} + J_{0yR} J_{2yR} + J_{0zR} J_{2zR}) \alpha_0 \alpha_2 + 2 (J_{0xR} J_{3xR} + J_{0yR} J_{3yR} + J_{0zR} J_{3zR}) \alpha_0 \alpha_3 + 2 (J_{1xR} J_{2xR} + J_{1yR} J_{2yR} + J_{1zR} J_{2zR}) \alpha_1 \alpha_2 + 2 (J_{1xR} J_{3xR} + J_{1yR} J_{3yR} + J_{1zR} J_{3zR}) \alpha_1 \alpha_3 + 2 (J_{2xR} J_{3xR} + J_{2yR} J_{3yR} + J_{2zR} J_{3zR}) \alpha_2 \alpha_3 \quad \text{Ec. 11.14}$$

11.3 Obtención de la potencia por integración en el volumen dual

Procediendo de igual manera con la componente l_i :

$$\begin{aligned}
J_I^2 = & (J_{0xl}^2 + J_{0yl}^2 + J_{0zl}^2)\alpha_0^2 + (J_{1xl}^2 + J_{1yl}^2 + J_{1zl}^2)\alpha_1^2 + \\
& (J_{2xl}^2 + J_{2yl}^2 + J_{2zl}^2)\alpha_2^2 + (J_{3xl}^2 + J_{3yl}^2 + J_{3zl}^2)\alpha_3^2 + \\
& + 2 (J_{0xl} J_{1xl} + J_{0yl} J_{1yl} + J_{0zl} J_{1zl}) \alpha_0 \alpha_1 + \\
& + 2 (J_{0xl} J_{2xl} + J_{0yl} J_{2yl} + J_{0zl} J_{2zl}) \alpha_0 \alpha_2 + \\
& + 2 (J_{0xl} J_{3xl} + J_{0yl} J_{3yl} + J_{0zl} J_{3zl}) \alpha_0 \alpha_3 + \\
& + 2 (J_{1xl} J_{2xl} + J_{1yl} J_{2yl} + J_{1zl} J_{2zl}) \alpha_1 \alpha_2 + \\
& + 2 (J_{1xl} J_{3xl} + J_{1yl} J_{3yl} + J_{1zl} J_{3zl}) \alpha_1 \alpha_3 + \\
& + 2 (J_{2xl} J_{3xl} + J_{2yl} J_{3yl} + J_{2zl} J_{3zl}) \alpha_2 \alpha_3
\end{aligned}
\tag{Ec. 11.15}$$

11.4 Obtención de la potencia por integración en el volumen dual

Las magnitudes de fuentes están siempre referidas al dual. Cada nudo del primal es el baricentro dual de la celda primal. De tal manera que, en un dominio tridimensional, para el tetraedro de referencia, tomando un nudo cualquiera, el volumen adjunto a ese nudo, y que corresponde a un cuarto del volumen primal, es la sub-celda dual incrustada en el volumen primal. En el caso de un dominio bidimensional, correspondería al tercio del triángulo primal y adjunto al nudo analizado, el papel de sub-celda dual. Sea como fuera, existe la necesidad de integrar el volumen de dichas sub-celdas.

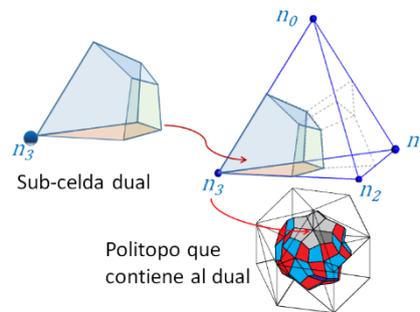


Figura 11-2. Sub-celdas duales y politopo dual.

Denominando \tilde{V}_{n_3} al volumen de la sub-celda dual asociada al nudo 3, entonces cualquier magnitud referida como densidad volumétrica uniforme M_{dv} en \tilde{V}_{n_3} , tendrá como integral la siguiente:

$$M = \iiint_{\tilde{V}_{n_3}} M_{dv} dV
\tag{Ec. 11.16}$$

En la FF-MC, como las variables fuentes están en el dual, entonces la integral M será una variable de fuente. La dificultad reside en la integración de las sub-celdas duales. Para ello existe una metodología desarrollada por (Voitovich & Vandewalle, 2007) que consiste en parametrizar una celda tetraédrica de

referencia, integrarla y referir al valor del volumen del primal del dominio analizado.

Para entender el procedimiento, se explicaran dos casos que se ha tratado con esta metodología en la presente tesis.

11.4.1 Distribución de temperatura y energía interna

Supongamos una distribución lineal de temperaturas en un sistema de coordenadas intrínsecas. Dicha distribución sigue la siguiente ley:

$$\tau(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \tau_0 \alpha_0 + \tau_1 \alpha_1 + \tau_2 \alpha_2 + \tau_3 \alpha_3 \quad \text{Ec. 11.17}$$

Sí quisiéramos calcular la potencia interna, entonces la distribución volumétrica de potencia vendría dada por:

$$U_i = \rho_v C_p \tau \quad \text{Ec. 11.18}$$

U_i está dada en $[W \cdot m^{-3}]$. Integrando en el volumen donde se desarrolla la energía interna (sub-celda \tilde{V}_{n3} anexa al nudo $n3$) se obtendría la potencia interna.

$$P_{\tilde{V}_{n3}}^i = \iiint_{\tilde{V}_{n3}} U_i dV = \iiint_{\tilde{V}_{n3}} \rho_v C_p (\tau_0 \alpha_0 + \tau_1 \alpha_1 + \tau_2 \alpha_2 + \tau_3 \alpha_3) dV \quad \text{Ec. 11.19}$$

Siguiendo la metodología propuesta por (Voitovich & Vandewalle, 2007), se debe tener en cuenta lo siguiente:

- Los subíndices k de α_k
- Los subíndices i del nudo n_i

Tal que:

$$Int = \iiint_{\tilde{V}_{ni}} \alpha_k dV \Rightarrow \begin{cases} Si \ k = i \Rightarrow Int = \frac{25}{192} \cdot V_T \\ Si \ k \neq i \Rightarrow Int = \frac{23}{576} \cdot V_T \end{cases} \quad \text{Ec. 11.20}$$

Donde V_T es el volumen del tetraedro primal. Yendo a Ec. 11.19, y aplicando las reglas explicada en el párrafo anterior, la potencia interna sería:

$$P_{\tilde{V}_{n3}}^i = \rho_v C_p \left(\tau_0 \frac{23}{576} + \tau_1 \frac{23}{576} + \tau_2 \frac{23}{576} + \tau_3 \frac{75}{576} \right) \cdot V_T \quad \text{Ec. 11.21}$$

Pero si ρ_v es la densidad volumétrica de masa de la materia contenida en el tetraedro, entonces: $M = \rho_v V_T$, siendo M la masa del tetraedro primal. Sustituyendo y reordenando:

$$P_{\tilde{V}_{n3}}^i = \frac{MC_p}{576} (23 \tau_0 + 23 \tau_1 + 23 \tau_2 + 75 \tau_3) \quad \text{Ec. 11.22}$$

Procediendo de igual manera para las sub-celdas duales $\tilde{V}_{n0}, \tilde{V}_{n1}, \tilde{V}_{n2}$, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$P_{\tilde{V}_i \subset V_T}^i = \frac{MC_p}{576} \begin{bmatrix} 75 & 23 & 23 & 23 \\ 23 & 75 & 23 & 23 \\ 23 & 23 & 75 & 23 \\ 23 & 23 & 23 & 75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_0 \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 11.23}$$

¿Qué significa $P_{\tilde{V}_i \subset V_T}^i$? Sería la potencia interna de cada uno de las sub-celdas duales \tilde{V}_i insertas en el volumen primal V_T .

¿Cómo se calcularía toda la potencia interna del dominio Ω ? Pues sencillamente calculando uno a uno cada tetraedro y ensamblándolo en la matriz global.

$$P_{\Omega}^i = \sum_{j=1}^{N_{V_T}} P_{\tilde{V}_i \subset V_{Tj}}^i \quad \text{Ec. 11.24}$$

11.4.2 Cálculo de la potencia calorífica producida por efecto Joule y/o corriente de Foucault

La potencia calorífica desarrollada por efecto Joule y por las corrientes de Foucault, conocidas las densidades de corriente, constituye un caso no lineal.

La potencia calorífica mencionada se calcula a partir de la expresión siguiente:

$$P_{\tilde{V}_i \subset V_T}^{JF} = \iiint_{\tilde{V}_i} \frac{1}{2\sigma} (J_R^2 + J_I^2) dV \quad \text{Ec. 11.25}$$

Los términos J_R^2 y J_I^2 se han desarrollado anteriormente y alcanzan los valores expuestos en Ec. 11.14 y Ec. 11.15, respectivamente. Al utilizar valores máximos de las densidades de corrientes como ondas senoidales, aparece el valor $1/2$. Particularizando para el nudo 3 de la Figura 11-2, para la parte real de la densidad de corriente, el primer sumando, el afectado por α_0 :

$$P_{1R} = \iiint_{\tilde{V}_{n3}} \frac{1}{2\sigma} (J_{0xR}^2 + J_{0yR}^2 + J_{0zR}^2) \alpha_0^2 dV \quad \text{Ec. 11.26}$$

Siguiendo la metodología de (Voitovich & Vandewalle, 2007), $\alpha_0^2 = \alpha_0 \cdot \alpha_0$, con lo cual:

$$Int = \iiint_{\tilde{V}_{ni}} \alpha_k \cdot \alpha_L dV \Rightarrow \begin{cases} Si k = L \neq i \Rightarrow Int = \frac{161}{17280} \cdot V_T \\ Si k = L = i \Rightarrow Int = \frac{83}{192} \cdot V_T \end{cases} \quad \text{Ec. 11.27}$$

Como $k = L = 0$ e $i = 3$, entonces:

$$P_{1R} = \frac{161}{17280} \cdot \frac{V_T}{2\sigma} \cdot (J_{0xR}^2 + J_{0yR}^2 + J_{0zR}^2) \tag{Ec. 11.28}$$

Procediendo con el quinto sumando de Ec. 11.14, entonces:

$$P_{5R} = \iiint_{\tilde{V}_{n_3}} \frac{1}{2\sigma} \cdot 2 (J_{0xR} J_{1xR} + J_{0yR} J_{1yR} + J_{0zR} J_{1zR}) \alpha_0 \alpha_1 dV \tag{Ec. 11.29}$$

Como $k = 0, L = 1$ e $i = 3$, entonces:

$$Int = \iiint_{\tilde{V}_{n_i}} \alpha_k \cdot \alpha_L dV$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Si\ k = L = i \Rightarrow Int = \frac{83}{192} \cdot V_T \\ Si\ k = L \neq i \Rightarrow Int = \frac{161}{17280} \cdot V_T \\ Si\ k \neq L\ y\ (k = i\ \acute{o}\ L = i) \Rightarrow Int = \frac{67}{3456} \cdot V_T \\ cualquier\ otro\ caso \Rightarrow Int = \frac{97}{17280} \cdot V_T \end{cases} \tag{Ec. 11.30}$$

$$P_{5R} = \frac{97}{17280} \cdot \frac{V_T}{\sigma} (J_{0xR} J_{1xR} + J_{0yR} J_{1yR} + J_{0zR} J_{1zR}) \tag{Ec. 11.31}$$

En la siguiente tabla indica los términos utilizados para la integración de J_R^2 y J_I^2 .

Término	Nudos			
	n_0	n_1	n_2	n_3
α_0^2	$\frac{83}{1152}$	$\frac{161}{17280}$	$\frac{161}{17280}$	$\frac{161}{17280}$
α_1^2	$\frac{161}{17280}$	$\frac{83}{1152}$	$\frac{161}{17280}$	$\frac{161}{17280}$
α_2^2	$\frac{161}{17280}$	$\frac{161}{17280}$	$\frac{83}{1152}$	$\frac{161}{17280}$
α_3^2	$\frac{161}{17280}$	$\frac{161}{17280}$	$\frac{161}{17280}$	$\frac{83}{1152}$
$\alpha_0 \alpha_1$	$\frac{67}{3456}$	$\frac{67}{3456}$	$\frac{97}{17280}$	$\frac{97}{17280}$
$\alpha_0 \alpha_2$	$\frac{97}{17280}$	$\frac{67}{3456}$	$\frac{97}{17280}$	$\frac{67}{3456}$
$\alpha_0 \alpha_3$	$\frac{97}{17280}$	$\frac{67}{3456}$	$\frac{67}{3456}$	$\frac{97}{17280}$
$\alpha_1 \alpha_2$	$\frac{97}{17280}$	$\frac{67}{3456}$	$\frac{67}{3456}$	$\frac{97}{17280}$
$\alpha_1 \alpha_3$	$\frac{97}{17280}$	$\frac{67}{3456}$	$\frac{97}{17280}$	$\frac{67}{3456}$
$\alpha_2 \alpha_3$	$\frac{97}{17280}$	$\frac{97}{17280}$	$\frac{67}{3456}$	$\frac{67}{3456}$

Tabla 11-1. Integración de J_R^2 y J_I^2 (Voitovich & Vandewalle, 2007).

Término a término, integrando con este procedimiento, se consigue la potencia calorífica generada por J_R^2 y J_I^2 .

Dicho lo cual, la potencia calorífica total, utilizando los valores máximos de corriente, será:

$$P_{\tilde{V}_i \in V_T}^{JF} = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{10} (P_{sR} + P_{sI}) \quad \text{Ec. 11.32}$$

Para el politopo dual, Figura 11-2, se procederá a ensamblar la matriz global y calcular la aportación de la celda anteriormente calculada:

$$P_{\Omega}^{JF} = \sum_{j=1}^{N_{V_T}} P_{\tilde{V}_i \in V_{Tj}}^{JF} \quad \text{Ec. 11.33}$$

Donde N_{V_T} es el número total de celdas tetraédricas que posee el dominio discreto Ω . Es decir: $N_{V_T} = \dim(\{\Omega\})$.

11.5 Número de condición de una matriz

Se denomina número de condición $N_c([A])$ de una matriz $[A]$ no singular, al valor obtenido de multiplicar la norma de la matriz por la norma de su inversa.

$$N_c([A]) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \quad \text{Ec. 11.34}$$

Debe cumplirse que $N_c([A]) \geq 1$. Una matriz está bien condicionada cuando N_c está próximo a 1, y mal condicionada cuanto más se aleje del valor 1.

Esto servirá para saber cuan precisa es la solución aproximada $[\tilde{x}]$ aportada al sistema de ecuaciones.

$$[A] \cdot [x] = [b] \quad \Rightarrow \quad [r] = [b] - [A] \cdot [\tilde{x}] \quad \text{Ec. 11.35}$$

Donde $[r]$ es el vector de residuos al aplicarse la solución aproximada $[\tilde{x}]$.

La matriz de masas para el Método de los Elementos Finitos que propone (Driesen, 2000) es:

$$M_{MEF} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 11.36}$$

La matriz de masas propuesta por (Bullo, et al., 2007) es:

$$M_{FFMC} = \begin{bmatrix} 75 & 23 & 23 & 23 \\ 23 & 75 & 23 & 23 \\ 23 & 23 & 75 & 23 \\ 23 & 23 & 23 & 75 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 11.37}$$

El número de condición de la matriz Ec. 11.36 es 5, mientras que el número de condición de la matriz Ec. 11.37 es 2,76.92.

Con el siguiente código en Matlab hemos comprobado lo que afirma (Bullo, et al., 2007):

```
clear all;
%Matriz de masas de (Driesen, 2000)
MMEF=[2 1 1 1;1 2 1 1;1 1 2 1;1 1 1 2];
%Matriz de masas de (Bullo, et al., 2007)
MFFMC=[75 23 23 23;23 75 23 23;23 23 75 23;23 23 23 75];
%Cálculo del número de condición de MMEF
Nc1=norm(MMEF)*norm(MMEF^-1)
%Cálculo del número de condición de MFFMC
Nc2=norm(MFFMC)*norm(MFFMC^-1)
```

Bibliografía

Voitovich, T. V. & Vandewalle, S., 2007. Exact integration formulas for the finite volume element method on simplicial meshes. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Sep, 23(5), pp. 1059-1082.

ANEXO 3

12. Verificación y validación

12.1 Concepto de incertidumbre y error

Según la RAE: *Incertidumbre*: 1. f. Falta de certidumbre. *Certidumbre*: Del lat. tardío certitudo, -inis.1. f. certeza. 2. f. desus. Obligación de cumplir algo. *Certeza*: De cierto.1. f. Conocimiento seguro y claro de algo.2. f. Firme adhesión de la mente a algo conocible, sin temor de errar.

De todas estas acepciones que nos da la RAE, la más próxima a nuestro interés es la de “*Conocimiento seguro y claro de algo*”, para el caso, incertidumbre, la ausencia de dicho conocimiento.

La incertidumbre procedería de la deficiencia potencial no identificada en una o varias partes del proceso. Debe atribuirse a la falta de conocimiento. En el caso de esta tesis la incertidumbre pudiera ser atribuida a la falta de certidumbre de las aplicaciones desarrolladas y/o a las aplicaciones informáticas utilizadas como patrón de medida. Para limitar tal incertidumbre existen una serie de contrastes relativamente simples. El más claro y, posiblemente más eficaz, consiste en diseñar un experimento, resolverlo con las dos aplicaciones utilizadas como patrón y enfrentar los datos obtenidos para las mismas condiciones de contorno e iniciales.

Estos datos se llevan a una gráfica enfrentando unos en el eje de abscisas y otros en el eje de ordenadas. Si ambos dan resultados muy próximos se debe formar una nube de puntos en torno a una recta de 45° que pasa por el origen de coordenadas.

Otro método de eliminar incertidumbre es enfrentar, tanto los resultados obtenidos como los *resultados patrón*, a una expresión analítica que resuelve el mismo problema que las aplicaciones informáticas mencionadas. El inconveniente de este método es que rara vez existe una expresión analítica que resuelva el problema, de aquí la justificación de los métodos numéricos que estamos tratando.

Según la RAE: *Error*: Del lat. error, -oris.1. m. Concepto equivocado o juicio falso.2. m. Acción desacertada o equivocada. 3. m. Cosa hecha erradamente. 4. m. Der. Vicio del consentimiento causado por equivocación de buena fe, que

anula el acto jurídico si afecta a lo esencial de él o de su objeto. 5. m. Fís. y Mat. Diferencia entre el valor medido o calculado y el real.

Evidentemente, la quinta acepción es la aplicable a nuestro caso. El error siempre procede de deficiencias identificables en una o varias partes del proceso. Conseguir un error cero es muy poco probable, pues todos los métodos numéricos son métodos aproximados. A esto hay que añadir los procesos de truncamiento numérico que existen en el propio funcionamiento aritmético de los ordenadores. Partiendo de que es prácticamente imposible conseguir un error cero, al menos trataremos de minimizar dicho error. Este error debe ser medido y cuantificado (Tedeschi, 2006) y (Martínez, 2008).

12.2 Precisión y exactitud

La *precisión* se relaciona con la capacidad que tiene un instrumento o método de medida para detectar la menor variación de la magnitud a medir (Tedeschi, 2006), (Martínez, 2008) y (Paez, 2009).

La exactitud es la concordancia que existe entre lo medido y el instrumento, o método de medida, respecto del patrón de medida utilizado (Tedeschi, 2006) y (Martínez, 2008).

En nuestro caso cabe más hablar de exactitud que de precisión: La precisión es alcanzable en el grado que el procesador aritmético del ordenador lo permita, pero la exactitud la alcanzamos al comparar los resultados con los patrones GMSH-GetDp y FEMM.

12.3 Estadísticos utilizados para validar los modelos propuestos

La bibliografía consultada al respecto es amplia y, en cierta manera existen controversias entre autores acerca de las bondades de los estadísticos que en ella se analizan. Pero una cosa queda clara: la validez de un estadístico dependerá del grado de correlación existente entre la medida y el patrón.

Así, existen modelos matemáticos donde un valor de correlación del 60% es aceptable, frente a otro tipo de modelos donde se le exige una correlación superior al 90%. Muchos de estos autores recomiendan un análisis gráfico previo de los datos (Tedeschi, 2006), (Moriasi, et al., 2007) y (Paez, 2009).

Al aplicar un modelo de regresión lineal entre los datos numéricos obtenidos del modelo propuesto y enfrentarlos con los datos obtenidos del patrón, cuanto más se acerque el coeficiente de determinación (r^2) al valor 1, mejor se comporta el modelo propuesto frente al patrón.

¿Por qué utilizar el coeficiente de determinación (r^2) frente al coeficiente de correlación (r), ya que el segundo es la raíz cuadrada del primero? Porque el

coeficiente de correlación (r) miden el grado de relación entre variables aleatorias y el coeficiente de determinación (r^2) mide el grado de relación entre una variable aleatoria con una variable fija (Mesple, et al., 1996). En nuestro caso la variable aleatoria son los datos numéricos experimentales de nuestro modelo y la variable fija son los datos numéricos de las aplicaciones informáticas patrones (GMSH-GetDp y FEMM). No obstante este estadístico debe ser usado como una primera aproximación y no la única para determinar la bondad del experimento (Martínez Rodríguez, 2005).

A partir de esta contrastación simple se puede seguir con otras más sofisticadas.

Es muy interesante tener un histograma de errores. Su utilidad reside en considerar que la fuente de errores tiene un origen aleatorio, no sistémico. Si esto es así, en el estado ideal, la distribución de errores debe coincidir con una distribución normal. Cuanto más se aleje de esta distribución normal, es más probable que el error sea sistémico y no aleatorio.

En nuestro caso debe haber una mínima parte de error sistémico atribuible a la precisión del método, errores de truncamiento del ordenador, etcétera. La fuente de error aleatorio quedaría limitada a ruido del propio ordenador. Es decir, de existir error, la probabilidad más alta es que sea sistémico. Por ello, la aproximación a una distribución normal es un buen síntoma de la bondad de nuestro modelo.

12.4 Estadísticos empleado en la validación de los experimentos numéricos

Se comentan de manera breve los diferentes estadísticos utilizados para la validación del modelo. La cantidad de ellos puede parecer excesiva, pero si todos convergen hacia la misma solución, nos dará “fuerza” a la bondad de nuestro modelo.

R²: Coeficiente de determinación

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - Y_i)^2}{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{Y})^2} \quad \text{Ec. 12.1}$$

- Valoración: $-1 \leq R^2 \leq 1$ Cuanto más cerca de 1 mejor.
- Ventajas: Nos indica cuan cerca estamos de la recta de regresión. En nuestro caso la recta de regresión perfecta tiene pendiente de valor 1.
- Inconvenientes: No siempre indica una correlación lineal entre los datos. Si la muestra es pequeña, puede que los datos, al aumentarse, indique una correlación de tipo no lineal
- Consultar a: (Martínez Rodríguez, 2005), (Tedeschi, 2006), (Piñeiro, et al., 2008)

MSE: Error medio cuadrático (Mean Square Error)

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - Y_i)^2 \quad \text{Ec. 12.2}$$

- Valoración: Cuanto más próximo a cero, mejor.
- Ventajas: Si los datos (X_i, Y_i) son independientes, entonces el MSE es un buen indicador de la exactitud del modelo. Sensible a grandes errores.
- Inconvenientes: Puede subestimar la verdadera medida pues trata de reproducir los datos reales.
- Consultar a: (Tedeschi, 2006), (Moriassi, et al., 2007), (Gupta, et al., 2009), (Fullerton Jr, et al., 2010), (Jolliffe & Stephenson, 2012)

RMSE: Raíz del error medio cuadrático (Root Mean Square Error)

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - Y_i)^2} \quad \text{Ec. 12.3}$$

- Valoración: Cuanto más próximo a cero, mejor.
- Ventajas: Presenta las mismas características que el MSE pero en las mismas unidades que las observaciones X_i, Y_i
- Inconvenientes: Puede subestimar la verdadera medida pues trata de reproducir los datos reales
- Consultar a: (Willmott & Matsuura, 2005), (Jolliffe & Stephenson, 2012), (Chai & Draxler, 2014)

RMSPE: Raíz del error medio cuadrático porcentual (Root M. S. Perceptual Error)

$$RMSPE = \left(\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - Y_i)^2} \right) \times \frac{1}{\bar{Y}} = \frac{RMSE}{\bar{Y}} \quad \text{Ec. 12.4}$$

- N : Número de datos
- X_i : Datos obtenidos
- Y_i : Datos de referencia
- \bar{Y} : Media de los datos de referencia
- Ventajas: Es adimensional y se puede utilizar para comparar modelos
- Inconvenientes: Puede subestimar la verdadera medida pues trata de reproducir los datos reales
- Consultar a: (Hyndman & Koehler, 2006)

MAE: Error Absoluto Medio (Mean Absolute Error)

$$MAE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X_i - Y_i| \quad \text{Ec. 12.5}$$

- Ventajas: Mide linealmente el error.
- Inconvenientes: Puede subestimar la verdadera medida pues trata de reproducir los datos reales
- Consultar a: (Willmott & Matsuura, 2005), (Moriassi, et al., 2007), (Jolliffe & Stephenson, 2012), (Chai & Draxler, 2014)

MAEP: Porcentaje de Error Absoluto Medio (Mean Absolute Percentage Error)

$$MAEP = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X_i - Y_i| \times \frac{1}{\bar{Y}} \quad \text{Ec. 12.6}$$

- Ventajas: Es una medida adimensional y robusta del error.
- Inconvenientes: Puede subestimar la verdadera medida pues trata de reproducir los datos reales
- Consultar a: (Hyndman & Koehler, 2006)

IRM: Índice RMSE/MAE

$$IRM = \frac{RMSE}{MAE} \quad \text{Ec. 12.7}$$

- Ventajas:
- Inconvenientes: Puede subestimar la verdadera medida pues trata de reproducir los datos reales
- Consultar a: (Moriassi, et al., 2007)

PBIAS

$$PBIAS = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - Y_i)}{\sum_{i=1}^N Y_i} \times 100 \quad \text{Ec. 12.8}$$

- Ventajas: Media de las desviaciones, o diferencia en los errores de sesgo, o, simplemente, error sistémico. El valor óptimo de PBIAS es 0. Detecta errores aberrantes o valores extremos. Si el valor es igual o superior a 1 es indicativo de la existencia de estos valores extremos. Mide la tendencia porcentual de los datos simulados a ser más grande o más pequeños que los datos de referencia.
- Inconvenientes: Puede subestimar la verdadera medida pues trata de reproducir los datos reales
- Consultar a: (Tedeschi, 2006), (Sanabria, et al., 2006), (Moriassi, et al., 2007), (Gupta, et al., 2009)

NSEF: Eficiencia del modelo (Modelling Efficiency Nash & Sutcliffe)

$$NSEF = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - Y_i)^2}{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{Y})^2} \quad \text{Ec. 12.9}$$

- Ventajas:** Su rango de variación es $[-\infty, 1]$. Si el modelo es perfecto su valor es 1. El peor escenario teórico sería $-\infty$, que conllevaría la invalidez completa del modelo.
- Inconvenientes:** Al estar los errores elevados al cuadrado, se sobreestiman los errores grandes y se subestiman los pequeños.
- Consultar a:** (Mathevet, et al., 2006), (Moriassi, et al., 2007), (Gupta, et al., 2009)

U1: Coeficiente de desigualdad de Theil (Theil Inequality coefficient)

$$U1 = \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (X_i - Y_i)^2}{N}}}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N X_i^2}{N} + \frac{\sum_{i=1}^N Y_i^2}{N}}} \quad \text{Ec. 12.10}$$

La anterior expresión la propuso Theil en 1958. Pero, en 1966, Theil propuso la siguiente modificación:

$$U2 = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N (X_i - Y_i)^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^N Y_i^2}} \quad \text{Ec. 12.11}$$

- Ventajas:** El modelo predice mejor cuanto más cerca de cero está el índice U de Theil. Permite comparar entre modelos
- Inconvenientes:** Al estar los errores elevados al cuadrado, se sobreestiman los errores grandes y se subestiman los pequeños.
- Consultar a:** (Bliemel, 1973), (Leuthold, 1975), (Fullerton Jr, et al., 2010)

Descomposición del error cuadrático medio (MSE decomposition)

El error medio cuadrático se puede descomponer en tres componentes:

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - Y_i)^2 = (\bar{X} - \bar{Y})^2 + (S_{X_i} - S_{Y_i})^2 + 2 \cdot (1 - r) \cdot S_{X_i} \cdot S_{Y_i} \quad \text{Ec. 12.12}$$

Dividiendo ambos lados de la igualdad por el término MSE ,

$$1 = \frac{(\bar{X} - \bar{Y})^2}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - Y_i)^2} + \frac{(S_{X_i} - S_{Y_i})^2}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - Y_i)^2} + \frac{2 \cdot (1 - r) \cdot S_{X_i} \cdot S_{Y_i}}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - Y_i)^2} \quad \text{Ec. 12.13}$$

$$1 = \frac{(\bar{X} - \bar{Y})^2}{MSE} + \frac{(S_{X_i} - S_{Y_i})^2}{MSE} + \frac{2 \cdot (1 - r) \cdot S_{X_i} \cdot S_{Y_i}}{MSE} \quad \text{Ec. 12.14}$$

- Proporción de sesgo (*Bias Proportion*) o error sistémico (diferencias entre medias)

$$U^M = \frac{(\bar{X} - \bar{Y})^2}{\frac{\sum_{i=1}^N (X_i - Y_i)^2}{N}} = \frac{(\bar{X} - \bar{Y})^2}{MSE} \quad \text{Ec. 12.15}$$

- Proporción de la varianza (*Variance proportion*) o diferencias entre desviaciones típicas (error sistémico)

$$U^S = \frac{(S_{X_i} - S_{Y_i})^2}{\frac{\sum_{i=1}^N (X_i - Y_i)^2}{N}} = \frac{(S_{X_i} - S_{Y_i})^2}{MSE} \quad \text{Ec. 12.16}$$

- Proporción de la covarianza (*Covariance proportion*) o error no sistémico

$$U^C = \frac{2 \cdot (1 - r) \cdot S_{X_i} \cdot S_{Y_i}}{\frac{\sum_{i=1}^N (X_i - Y_i)^2}{N}} = \frac{2 \cdot (1 - r) \cdot S_{X_i} \cdot S_{Y_i}}{MSE} \quad \text{Ec. 12.17}$$

Ventajas: Se puede detectar la fuente de errores; media, varianza o aleatorios. Se recomienda que el valor $U^C \approx 1$ y que $U^M = U^S \approx 0$. Permite comparar entre modelos por ser adimensional.

Inconvenientes: Al estar los errores elevados al cuadrado, se sobreestiman los errores grandes y se subestiman los pequeños. Pero puede ser localizados por los tres componente U^j

Consultar a: (Fullerton Jr, et al., 2010)

d: Índice d de Willmott (*d-Willmott index*)

$$d = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - Y_i)^2}{\sum_{i=1}^N (|X_i - \bar{Y}| + |Y_i - \bar{Y}|)^2} \quad \text{Ec. 12.18}$$

Ventajas: El modelo predice mejor cuanto más cerca de uno está el índice d de Willmott. Permite comparar entre modelos por ser adimensional.

Inconvenientes: Al estar los errores elevados al cuadrado, se sobreestiman los errores grandes y se subestiman los pequeños.

Consultar a: (Willmott, et al., 2012)

MEF: Coeficiente de determinación del modelo

$$MEF = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2} \quad \text{Ec. 12.19}$$

Ventajas: MEF indica la proporción de la variación total de los datos observados explicada por los datos predichos. El MEF, en un ajuste perfecto, valdría 1. Un valor de MEF cercano a 1 indica una mejora en las predicciones del modelo, $MEF > 1$ es un indicador de baja predicción y si $MEF < 1$ de sobre predicción.

Inconvenientes: Se recomienda utilizar conjuntamente medidas de desviación y métodos gráficos para validar modelos.

Consultar a: (Medina-Peralta, 2010)

CD: Coeficiente de determinación del modelo

$$CD = \frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{Y})^2} \quad \text{Ec. 12.20}$$

Ventajas: CD indica la proporción de la variación total de los datos observados explicada por los datos predichos. Al igual que la MEF, en un ajuste perfecto CD valdría uno. Un valor de CD cercano a uno indica una mejora en las predicciones del modelo, $CD > 1$ es un indicador de baja predicción y si $CD < 1$ de sobre predicción.

Inconvenientes: Se recomienda utilizar conjuntamente medidas de desviación y métodos gráficos para validar modelos.

Consultar a: (Medina-Peralta, 2010)

C: Coeficiente de error del modelo

$$C = \frac{MAE}{\bar{Y}} \quad \text{Ec. 12.21}$$

Ventajas: Un valor de C muy cercano a cero indica que el modelo cumple con su objetivo.

Inconvenientes: Se recomienda utilizar conjuntamente medidas de desviación y métodos gráficos para validar modelos.

Consultar a: (Medina-Peralta, 2010)

N : Número de datos

X_i : Datos obtenidos

Y_i : Datos de referencia

\bar{Y} : Media de los datos de referencia

\bar{X} : Media de los datos observados

S_{X_i} : Desviación típica de los datos obtenidos

S_{Y_i} : Desviación típica de referencia

r : Coeficiente de correlación entre los datos obtenidos y los de referencia

Bibliografía

Bliemel, F., 1973. Theil's Forecast Accuracy Coefficient: A Clarification. *Journal of Marketing Research*, 10(4), pp. 444-446.

Chai, T. & Draxler, R. R., 2014. Root mean square error (RMSE) or mean absolute error (MAE)? Arguments against avoiding RMSE in the literature. *Geoscientific Model Development*, 7(3), pp. 1247-1250.

Fullerton Jr, T. M., Novela, G. & others, 2010. Metropolitan Maquiladora Econometric Forecast Accuracy. *Romanian Journal of Economic Forecasting*, 13(3), pp. 124-140.

Gupta, H. V., Kling, H., Yilmaz, K. K. & Martinez, G. F., 2009. Decomposition of the mean squared error and performance criteria: Implications for improving hydrological modelling. *Journal of Hydrology*, 377(1), pp. 80-91.

Hyndman, R. J. & Koehler, A. B., 2006. Another look at measures of forecast accuracy. *International Journal of Forecasting*, 22(4), pp. 679-688.

Jolliffe, I. T. & Stephenson, D. B., 2012. *Forecast verification: a practitioner's guide in atmospheric science*. First ed. Sussex, UK: John Wiley & Sons.

Leuthold, R. M., 1975. On the Use of Theil's Inequality Coefficients. *American Journal of Agricultural Economics*, 57(2), pp. 344-346.

Martínez Rodríguez, E., 2005. Errores frecuentes en la interpretación del coeficiente de determinación lineal. *Anuario jurídico y económico escurialense*, Issue 38, pp. 315-331.

Martínez, L. S. y. R. B. P., 2008. *Tratamiento de los errores en las mediciones mecánicas*. [Online]

Available at: <http://monografias.umcc.cu/monos/2008/facultad%20Quimica-Mecanica/m0885.pdf>

[Accessed 5 octubre 2015].

Mathevet, T., Michel, C., Andreassian, V. & Perrin, C., 2006. A bounded version of the Nash-Sutcliffe criterion for better model assessment on large sets of basins. *IAHS PUBLICATION*, Volume 307, p. 211.

Medina-Peralta, S. a. V.-V. L. a. N.-A. J. a. C.-P. C. a. P.-R. S., 2010. Comparación de medidas de desviación para validar modelos sin sesgo, sesgo constante o proporcional. *Universidad y ciencia*, 12, Volume 26, pp. 255-263.

Mesple, F., Troussellier, M., Casellas, C. & Legendre, P., 1996. Evaluation of simple statistical criteria to qualify a simulation. *Ecological Modelling*, 88(1-3), pp. 9-18.

Moriasi, D. et al., 2007. Model evaluation guidelines for systematic quantification of accuracy in watershed simulations. *Trans. Asabe*, 50(3), pp. 885-900.

Paez, T. L., 2009. Introduction to model validation. *Proceedings of the 2009 IMAC*.

Piñeiro, G., Perelman, S., Guerschman, J. P. & Paruelo, J. M., 2008. How to evaluate models: observed vs. predicted or predicted vs. observed?. *Ecological Modelling*, 216(3), pp. 316-322.

Sanabria, J., García, J. & Lhomme, J.-P., 2006. Calibración y validación de modelos de pronóstico de heladas en el valle del Mantaro. *ECIPERU*, p. 18.

Tedeschi, L. O., 2006. Assessment of the adequacy of mathematical models. *Agricultural Systems*, 89(2), pp. 225-247.

Willmott, C. J. & Matsuura, K., 2005. Advantages of the mean absolute error (MAE) over the root mean square error (RMSE) in assessing average model performance. *Climate research*, 30(1), p. 79.

Willmott, C., Robeson, S. & Matsuura, K., 2012. Short Communication: A Refined Index of Model Performance. Intl. *International Journal of Climatology*, 32(13), pp. 2088-2094.

ANEXO 4

13. La importancia de utilizar variables globales frente a variables locales

Una variable global identifica completamente el sistema a estudiar, mientras que una variable local identifica a una parte del sistema a estudiar. Por ejemplo, la masa del cuerpo sería una variable global (totalidad del volumen del cuerpo) y la densidad de masa, uniforme o no uniforme, sería una variable local (asociada a una fracción del volumen del cuerpo). Ver (Tonti, 2013) pág. 99.

En la formulación diferencial de la Física, la mayoría de las variables están referidas a puntos en el espacio y a instantes en el tiempo. Para hallar el valor total en el sistema hay que recurrir a la integración. Mientras, la variable carece de información acerca del elemento geométrico que la contiene. Por el contrario, en la Formulación Finita nunca se pierde esta información geométrica al utilizar las variables globales. Supongamos una determinada magnitud global Q . Se puede desarrollar en varios tipos de sistemas integrando las densidades volumétrica, superficial o lineal que la definen. Dichas densidades son variables locales;

$$Q[V] = \int_V \rho \, dV \quad Q[S] = \int_S \sigma \, dS \quad Q[L] = \int_L \lambda \, dL \quad \text{Ec. 13.1}$$

Así mismo, los campos asociados dichas densidades poseen flujos a través de superficies y circulaciones a lo largo de trayectorias. Las magnitudes de campo que desarrollan flujos siempre tienen una componente normal a la superficie. Las magnitudes de campo que desarrollan circulaciones tienen una componente tangencial a la trayectoria o línea de campo.

$$Q_n[S] = \int_S \vec{q}_x \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{q}_x \cdot \vec{n} \, dS \int_S (q_x n \cos \alpha) \, dS = \int_S \sigma \, dS$$

$$Q_t[L] = \int_L \vec{v} \cdot d\vec{L} = \int_L \vec{v} \cdot \vec{t} \, dL \int_L (v t \cos \alpha) \, dL = \int_L \lambda \, dL$$

Ec. 13.2

La naturaleza matemática de las variables globales es de carácter escalar, con lo que su aditividad está garantizada.

Pero la gran ventaja que presentan *las variables globales es que son continuas a través del interfaz entre dos medios diferentes* (Tonti, 2013), pág. 112-113.

El campo eléctrico y el campo magnético, en su forma vectorial, se pueden representar, respectivamente, así:

$$\vec{D} = \frac{\psi}{S} \vec{n}$$

Ec. 13.3

$$\vec{H} = \frac{U_m}{L} \vec{t}$$

El calor se comporta como un vector asociado a la normal, siendo la temperatura un campo escalar.

$$\vec{q} = \frac{\sigma_u}{\tilde{S}} \vec{n}$$

Ec. 13.4

Siguiendo la Formulación finita, cada campo estará situado en el primal o en dual, según corresponda.

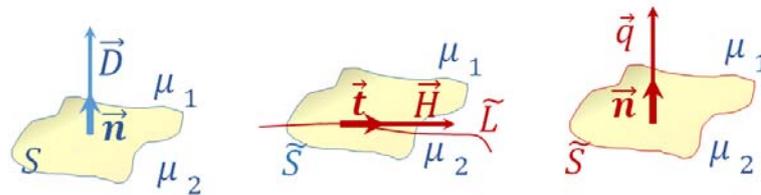


Figura 13-1. Campo eléctrico, magnético y térmico.

Cuando el campo atraviesa dos medios diferentes, μ_1 y μ_2 , en la formulación diferencial es condición necesaria que la función que define al campo sea continua antes, durante y después del interfaz que separa ambos medios, pues dichas funciones son derivables. En el caso de no haber continuidad en el interfaz, ésta debe garantizarse mediante las llamadas condiciones de salto. Los métodos numéricos basados en la formulación diferencial deben establecer estas condiciones de salto para evitar singularidades.

En la Formulación Finita y en el Método de la Celda, al utilizar variables globales, no es necesario utilizar estas condiciones de salto al pasar de un medio a otro. Ello es posible porque siempre se podrá colocar una celda en el interfaz que comparta nudos y cara con la celda contigua, la cual pertenece al otro medio (Figura 13-2). De esta manera queda garantizada la continuidad del campo con las magnitudes asociadas a flujos (superficies) y las que están asociadas a circulaciones (líneas). Ver (Tonti, 2000b) pág. 13; (Tonti, 2001a) pág.15.

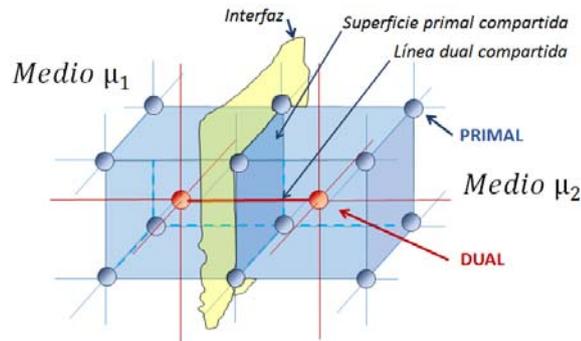


Figura 13-2. Condición de continuidad en la Formulación Finita.

Las condiciones de continuidad en el interfaz o frontera se pueden demostrar utilizando la formulación diferencial. Así, para el campo magnético tenemos que aplicando la ley de Gauss:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{B} \cdot \vec{n}_1 dS_1 - \int_{S_2} \vec{B} \cdot \vec{n}_2 dS_2 + \int_{S_3} \vec{B} \cdot \vec{n}_3 dS_3 = 0 \quad \text{Ec. 13.5}$$

Si en el cilindro de la Figura 13-3 (a), cuyo radio dr es todo lo pequeño que se quiera, hacemos que su altura Δh tienda a ser nula, también lo será la superficie lateral S_3 , ya que $S_3 = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int \Delta h 2\pi dr$. Entonces, base y tapa del cilindro tienden a coincidir con la superficie del interfaz, obteniéndose las consecuencias que a continuación se exponen:

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \left(\int_{S_1} \vec{B} \cdot \vec{n}_1 dS_1 - \int_{S_2} \vec{B} \cdot \vec{n}_2 dS_2 + \int_{S_3} \vec{B} \cdot \vec{n}_3 2\pi \Delta h dr \right) = 0 \quad \text{Ec. 13.6}$$

$$\int_{S_1} \vec{B} \cdot \vec{n}_1 dS_1 - \int_{S_2} \vec{B} \cdot \vec{n}_2 dS_2 + 0 = 0 \quad \text{Ec. 13.7}$$

$$\int_{S_1} \vec{B} \cdot \vec{n}_1 dS_1 = \int_{S_2} \vec{B} \cdot \vec{n}_2 dS_2 \Rightarrow \phi_1 = \phi_2 \quad \text{Ec. 13.8}$$

Lo que demuestra que, en la dirección de la normal a la superficie del interfaz, hay continuidad en el campo magnético.

Aplicando el teorema de Stokes para el campo magnético, Figura 13-3 (b), que no es otra cosa que la ley de Ampere, se llega a la siguiente conclusión:

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{L} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_L \vec{J}_L \cdot d\vec{L} \quad \text{Ec. 13.9}$$

$$\int_a^d \vec{H} \cdot \Delta h d\vec{L} + \int_d^c \vec{H} \cdot d\vec{L} - \int_c^b \vec{H} \cdot \Delta h d\vec{L} - \int_b^a \vec{H} \cdot d\vec{L} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_L \vec{J}_L \cdot d\vec{L} \quad \text{Ec. 13.10}$$

Si la altura del cilindro tiende a cero, $\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{L} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \left(\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_L \vec{J}_L \cdot d\vec{L} \right)$, la circulación del campo magnético sería:

$$\int_d^c \vec{H} \cdot d\vec{L} - \int_b^a \vec{H} \cdot d\vec{L} = \int_L \vec{J}_L \cdot d\vec{L} = I_{\text{superficial}} \quad \text{Ec. 13.11}$$

Esta corriente circularía por la superficie del interface. La ausencia de ella conllevaría la ausencia del campo magnético. Esto demuestra la continuidad del campo magnético cuando se pasa de un medio a otro.

Si se aplica la ley de Gauss para el campo eléctrico, Figura 13-3 (c), se llega a la siguiente conclusión:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{n}_1 dS_1 + \int_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{n}_2 dS_2 + \int_{S_3} \vec{E} \cdot \vec{n}_3 dS_3 \quad \text{Ec. 13.12}$$

Haciendo que la altura Δh tienda a ser nula, entonces base y tapa del cilindro tienden a coincidir con la superficie del interfaz, teniéndose las consecuencias que a continuación se exponen:

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \left(\int_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{n}_1 dS_1 + \int_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{n}_2 dS_2 + \int_{S_3} \vec{E} \cdot \vec{n}_3 2\pi \Delta h dr \right) \quad \text{Ec. 13.13}$$

$$\int_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{n}_1 dS_1 + \int_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{n}_2 dS_2 + 0 = Q^c \quad \Rightarrow \quad \psi_1 + \psi_2 = Q^c \quad \text{Ec. 13.14}$$

Lo cual indica que todo el flujo eléctrico que puede cruzar el interfaz, $\psi_1 + \psi_2$, se debe a la carga eléctrica contenida, Q^c , en el cilindro de prueba. Ambos flujos son iguales, salientes o entrantes, por la naturaleza no solenoidal (líneas abiertas de campo) que tiene el campo eléctrico. Con ello se garantiza la continuidad del campo eléctrico en el sentido de las normales al interfaz.

Aplicando el teorema de Stokes al campo eléctrico, Figura 13-3 (d), se obtiene la ley de inducción o ley de Faraday:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{L} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \text{Ec. 13.15}$$

$$-\int_a^d \vec{E} \cdot \Delta h d\vec{L} - \int_d^c \vec{E} \cdot d\vec{L} + \int_c^b \vec{E} \cdot \Delta h d\vec{L} + \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{L} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \text{Ec. 13.16}$$

Haciendo que la altura Δh tienda a ser nula, entonces:

$$0 - \int_d^c \vec{E} \cdot d\vec{L} + 0 + \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{L} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \left(-\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \right) \quad \text{Ec. 13.17}$$

El término $\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \left(-\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \right) = 0$ pues no habría superficie transversal al interfaz por donde circulase el campo magnético (componente normal). Esto conlleva que:

$$-\int_d^c \vec{E} \cdot d\vec{L} + \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{L} = 0 \quad \Rightarrow \quad U_{cd} = U_{ab} \quad \text{Ec. 13.18}$$

Lo cual indica que el interfaz es una superficie equipotencial, garantizando que la componente tangencial del campo es continua en él.

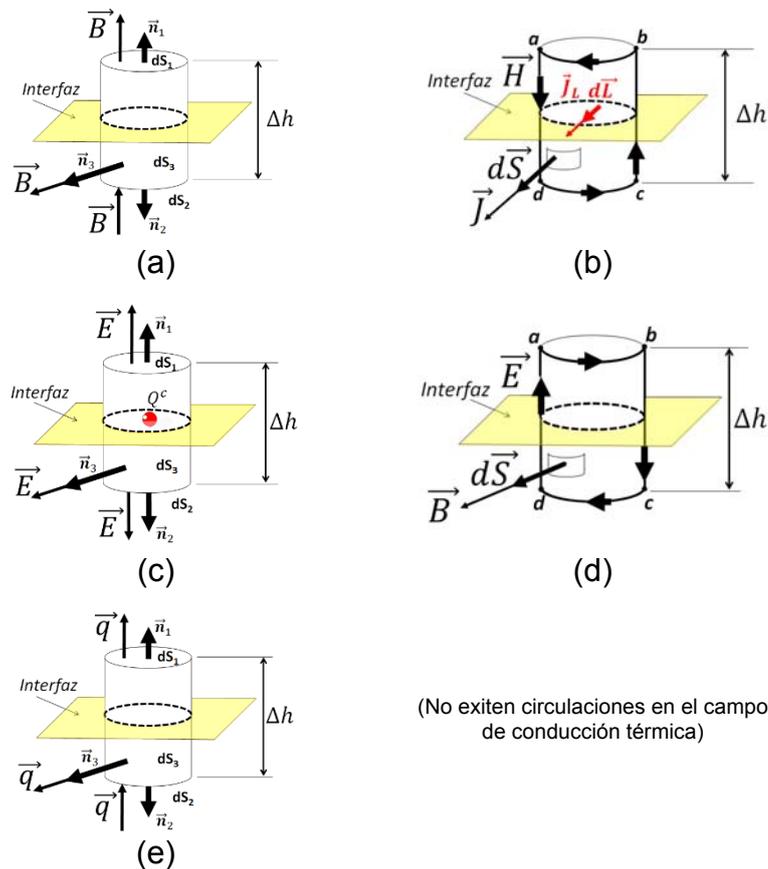


Figura 13-3. Teorema de Gauss y teorema de Stokes

En la Figura 13-3, se expone la aplicación del teorema de Gauss y del teorema de Stokes aplicados al campo magnético, (a) y (b); al campo eléctrico (c) y (d); y al campo de conducción térmica (e).

Para el calor \vec{q} , observado la Figura 13-3 (e), y aplicando el mismo razonamiento expuesto en Ec. 13.6, Ec. 13.7 y Ec. 13.8, se demuestra la continuidad del campo térmico.

13.1 Variables globales en el espacio y el tiempo

Por propia definición serían variables globales que dependen del espacio y el tiempo. Ciñéndonos al objeto de esta tesis, estudio electromagnético y térmico de la máquina eléctrica asíncrona, definiríamos las siguientes variables globales en el espacio-tiempo

Variable global		Variable de campo equivalente		
<u>Asociadas a volúmenes</u>				
Generación de calor	$\sigma_u[T, \tilde{V}]$	Densidad volumétrica de calor	$\sigma_q[T, \tilde{V}]$	--
<u>Asociadas a superficies</u>				
Flujo Magnético	$\phi[\tilde{t}, S]$	Densidad de flujo magnético	$B[\tilde{t}, S]$	$\vec{B}(t, P)$
Calor	$q[T, \tilde{S}]$	Densidad de flujo calorífico	$q[T, \tilde{S}]$	$\vec{q}(t, P)$
Flujo de carga eléctrica	$Q^f[T, \tilde{S}]$	Densidad de corriente eléctrica	$J[T, \tilde{S}]$	$\vec{j}(t, P)$
<u>Asociadas a líneas</u>				
Impulso de fuerza magnetomotriz	$\mathcal{F}_m[\tilde{T}, \tilde{L}]$	Intensidad de campo magnético	$H[T, \tilde{L}]$	$\vec{H}(t, P)$
Impulso de tensión eléctrica	$U[\tilde{T}, L]$	Intensidad de campo eléctrico	$E[\tilde{T}, L]$	$\vec{E}(t, P)$
Impulso de fuerza electromotriz	$\varepsilon[\tilde{T}, L]$	Fuerza electromotriz	$e[T, L]$	--
Diferencia de temperatura	$D\tau[\tilde{T}, L]$	Gradiente de temperatura	$g[\tilde{T}, L]$	$\vec{\nabla} \cdot \tau(t, P)$
<u>Asociadas a puntos</u>				
Termicidad	$\Theta[\tilde{t}, P]$	Temperatura	$\tau[\tilde{T}, P]$	$\tau(t, P)$

Tabla 13-1. Tabla de variables globales empleadas.

Una de las aportaciones de Tonti a la Formulación Finita fue la integración del tiempo en las variables globales. Esto permite saber si una variable es instantánea o se desarrolla en un intervalo de tiempo. Así mismo, respecto al espacio, la Formulación Finita permite saber si dicha variable global es dependiente de un volumen, superficie, línea o punto. Para asociar la variable a las mencionadas figuras geométricas es obvio que habrá que conocerse perfectamente el fenómeno físico a estudiar. En sí, el proceso de obtener una variable global consiste en integrar todas las magnitudes espacio-temporales de

las cuales depende la variable para convertirla en una variable de tipo escalar, matemáticamente hablando. Con esto se garantiza su aditividad y la continuidad de la misma. Lo que Tonti define como impulsos, no es otra cosa que integrar una variable espacial con el tiempo y convertirla así en global, sinónimo de integral.

Estas variables globales serán, a su vez, variables de configuración y de fuente.

Variables de configuración (S.I.: weber = voltio×segundo)		Variables de fuente (S.I.: culombio = amperio×segundo)	
Impulso de potencial eléctrico	$\mathcal{V}_e = \int_T v_e dt$	Flujo de carga eléctrica	$Q^f = \int_{\bar{T}} \int_{\bar{S}} \vec{j} d\vec{S} dt$
Impulso de tensión eléctrica	$\mathcal{U}_e = \int_T \int_L \vec{E} d\vec{L} dt$	Impulso de f. m. m	$\mathcal{F}_m = \int_{\bar{T}} \int_{\bar{L}} \vec{H} d\vec{L} dt$
Flujo Magnético	$\phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$		

Tabla 13-2. Variables de configuración y de fuente del campo electromagnético.

Variables de configuración (S.I.: grados kelvin; grados kelvin×metros ⁻¹)		Variables de fuente (S.I.: vatios; vatios×metros ⁻³)	
Temperatura	$\tau[\tilde{T}, P]$	Calor	$q[T, \tilde{S}]$
Diferencia de temperatura (gradiente)	$D\tau[\tilde{T}, L]$	Generación de calor	$\sigma_u[T, \tilde{V}]$

Tabla 13-3. Variables de configuración y de fuente de la transmisión de calor.

La termicidad es un concepto introducido por David van Dantzig (Rotterdam, Países Bajos, 1900-1959). Publicado por M. von Laue, Relativitätstheorie, Vol. 1 Vieweg, Braunschweig, en 1921. La termicidad equivale a la integral de la temperatura: $\Theta = \int_{t_0}^{t_1} T dt$. Equivaldría al mínimo desplazamiento termodinámico.

Es de destacar que las variables son referidas al tiempo de la siguiente manera:

- Cualquier variable física, que para medirse necesita un estado de equilibrio, está asociada a un intervalo de tiempo T o \tilde{T} , primal o dual según la variable.
- Si la variable física se puede medir sin alcanzar el estado de equilibrio, entonces dicha variable está asociada a un instante de tiempo t o \tilde{t} , primal o dual según la variable.

Cualquier variable, para referirla al tiempo, también debe cumplir con el criterio que se indica a continuación.

Variable física	¿Cambia de signo la variable al cambiar el sentido del movimiento?	
	No	Si
	Instante	t
Intervalo	\bar{T}	T

Tabla 13-4. Criterios de tiempos dual y primal.

13.2 Ecuaciones topológicas

Las variables físicas describen cuantitativamente un sistema físico, mientras que las ecuaciones físicas describen el comportamiento de dicho sistema.

Las ecuaciones físicas tienen varias formas de clasificarse. Así, las ecuaciones topológicas describen como es el sistema o el campo físico relacionándolo con elementos espacio-temporales como el punto, la línea, la superficie, el volumen, el instante y el intervalo de tiempo.

Las ecuaciones topológicas pueden clasificarse en los siguientes tipos:

$$\text{Ecuaciones topológicas} \left\{ \begin{array}{l} - \text{Ecuaciones de diferencia espacial o gradiente} \\ - \text{Ecuaciones circuitales} \\ - \text{Ecuaciones de Balance} \end{array} \right.$$

Las ecuaciones topológicas relacionan elementos espaciales con sus respectivos contornos.

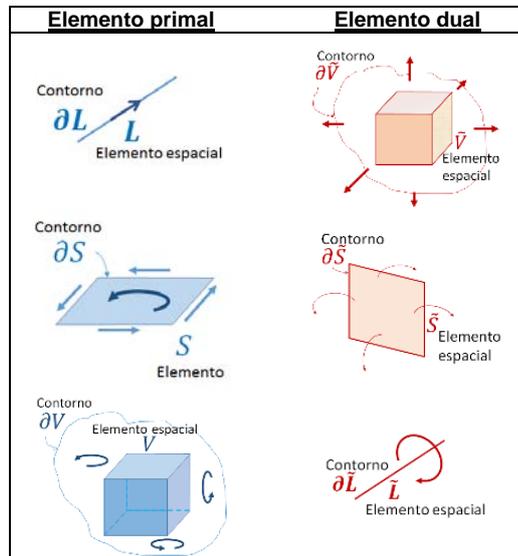


Figura 13-4. Elementos primales y duales con contornos respectivos.

Las ecuaciones topológicas son válidas para cualquier:

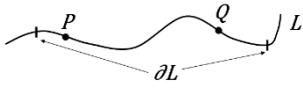
- Forma y tamaño del elemento espacio-temporal que define al fenómeno físico.
- Escala, tanto en la micro escala como en la macro escala.
- Medio que envuelva a la región donde se desarrolla el fenómeno físico.

13.3 Ecuaciones de diferencia espacial o de gradiente

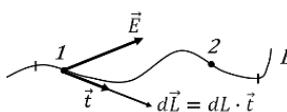
Las ecuaciones de diferencia o de gradiente son ecuaciones topológicas del tipo:

$$B[\delta L] = A[L] \tag{Ec. 13.19}$$

Se obtienen de la diferencia de la magnitud B que se desarrolla a lo largo de una línea y que se evalúa entre dos puntos P y Q .

$$B[\delta L] = B[Q] - B[P]$$


(a)

$$\int_L \vec{E} \cdot \vec{t} dL = U_1 - U_2 \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot U$$


(b)

Figura 13-5. El gradiente. Formulación: (a) Finita, (b) Diferencial.

En la formulación diferencial corresponde con la expresión de un gradiente. Por ejemplo, el concepto de diferencia de potencial eléctrico o tensión eléctrica, Figura 13-6 (b).

13.4 Ecuaciones circuitales

Las ecuaciones circuitales relacionan superficies con su contorno. Son del tipo:

$$B[\delta S] = \mp A[S] \tag{Ec. 13.20}$$

Están asociadas a circulaciones. El teorema de Stokes, en superficie abierta, es una ecuación topológica de tipo circuital.

$$B[\delta S] = \mp A[S]$$

$$\iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_C \vec{B} \cdot d\vec{L}$$

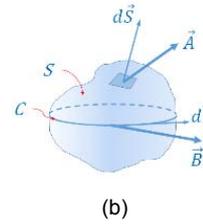
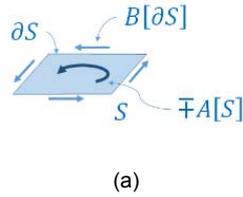


Figura 13-6. Ecuación circuital. Formulación: (a) Finita, (b) Diferencial.

13.5 Ecuaciones de balance

Las ecuaciones de balance define el estado de equilibrio, estático o dinámico, donde, aparte del elemento espacial, se ve involucrado un intervalo de tiempo.

Las ecuaciones de balance relacionan un volumen con su contorno de la siguiente forma:

$$B[\delta V] = \mp A[V] \tag{Ec. 13.21}$$

Las ecuaciones de balances están asociadas a flujos. Un ejemplo de ecuación de balance es el teorema de Ostrogradsky-Gauss o teorema de la divergencia.

$$B[\delta \tilde{V}] = \mp A[\tilde{V}]$$

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \, dV = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

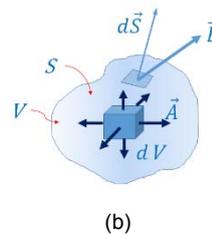
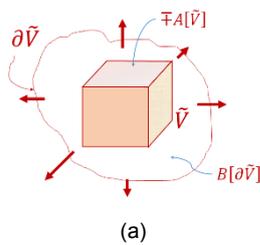


Figura 13-7. Ecuación de balance. Formulación: (a) Finita, (b) Diferencial.

Las ecuaciones de balance son las ecuaciones más importantes de la Física. Nos indican la producción de cierta magnitud física en un sistema. Supongamos una determinada magnitud $Q[\tilde{V}]$. Sus posibles ecuaciones de equilibrio serían las siguientes:

$$Q^{producido} = \Delta Q^{contenido} + Q^{saliente} \tag{Ec. 13.22}$$

$$0 = \Delta Q^{contenido} + Q^{saliente} \tag{Ec. 13.23}$$

En Ec. 13.22 existe producción de $Q[\tilde{V}]$, mientras que en Ec. 13.23 lo que entra es igual a lo que sale. El signo indica la dirección del flujo (- saliente, + entrante).

13.6 Ecuaciones constitutivas

Las ecuaciones constitutivas describe el comportamiento de un fenómeno físico, desarrollándose éste en un medio material.

Las ecuaciones constitutivas relacionan las variables de configuración con las variables de fuente.

$$B[T, \tilde{S}] = K \cdot A[\tilde{T}, L]$$

Ec. 13.24

$$B[T, \tilde{L}] = K \cdot A[\tilde{t}, S]$$

Las ecuaciones mostradas en Ec. 13.24 representan uno de los muchos ejemplos genéricos de ecuaciones constitutivas que pueden aparecer en la Física. A será la variable de configuración (elementos espaciales primales), B será la variable de fuente (elementos espaciales duales) y K será el parámetro que defina el comportamiento del material.

Las ecuaciones constitutivas son fundamentales en la Física y, especialmente en la Ingeniería, pues describen el comportamiento de las variables a través de los materiales con los que se construyen los diversos dispositivos utilizados en todas las ramas de la ingeniería.

El parámetro K puede tomar diferentes formas matemáticas. A saber:

- El material es isótropo y no se satura, permaneciendo constante a lo largo del tiempo. El material tiene un comportamiento lineal. El parámetro K es una constante matemática. Es el caso (1) de la Figura 13-8.
- El material es isótropo pero se modifica el valor de K dependiendo de los valores alcanzados por A . El material no es lineal. Se verifica que $K = f(A)$. Es el caso (2) de la Figura 13-8.
- El material es anisótropo. Dependiendo de la dirección de los ejes de coordenadas tiene un comportamiento diferente. Matemáticamente el parámetro K es un tensor. Es el caso (3) de la Figura 13-8.

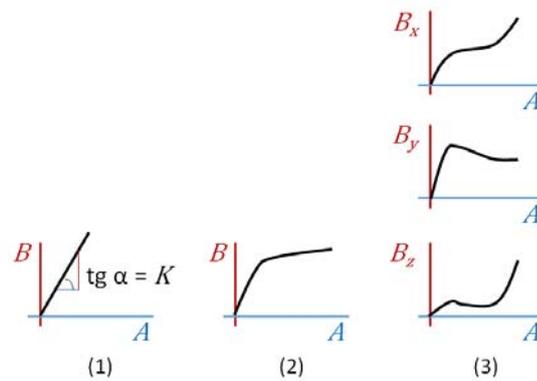


Figura 13-8. Tipos de constante K en las ecuaciones constitutivas.

Bibliografía

Tonti, E., 2000b. Formulazione finita delle equazioni di campo: Il Metodo delle Celle. *Atti del XIII Convegno Italiano di Meccanica Computazionale, Brescia, Italy*, Noovember.

Tonti, E., 2001a. A direct discrete formulation of field laws: The cell method. *CMES- Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 2(2), pp. 237-258.

Tonti, E., 2013. *The Mathematical Structure of Classical and Relativistic Physics*. first ed. s.l.:Birkhäuser.

ANEXO 5

14. Publicaciones

ISEF 2011 - XV International Symposium on Electromagnetic Fields
in Mechatronics, Electrical and Electronic Engineering
Funchal, Madeira, September 1-3, 2011

Global Equation of Cell Method and Modified Nodal Method of Electromagnetic and Circuital Problems

Monzón Verona J.M.; Simón Rodríguez L.; González Domínguez P.

Department of Electrical Engineering, University of Las Palmas de Gran Canaria
35017 – Tafira, Las Palmas (Spain). Phone/Fax number: +0034 928 452888/451874
e-mail: jmonzon@die.ulpgc.es, lsimon@pas.ulpgc.es, pgonzalez@die.ulpgc.es

***Abstract** – This paper presents an approximation of an electromagnetic eddy current problem coupled with circuital equations, using Cell Method (CM) and the Modified Nodal Method (MNM) of circuit theory. The definition equations of the two conductor models (filiform and solid types) are deduced with this formulation. The analysis is performed at steady state and transient state. To the transient state, a classical scheme of time discretization is used with the Theta's method. As validation method have been compared results between Finite Element Method and Finite Formulation of Electromagnetic Fields.*

1 Introduction.

In the technical literature there are several references that use the circuital equations using (MNM) and finite element method (FEM) [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7]. In this paper is used a variation of the (MNM) and the finite formulation of electromagnetic fields [8] applied to the Maxwell's equations. With this procedure is possible to assemble the continuous behavior of the discretized field equations, with the circuital equations in a single matrix. The matrix equations are implemented with the Scilab, a scientific software package for numerical computations.

To the continuous domain discretization is used the Gmsh program, that is an automatic 3D finite element mesh generator, with pre and post-processing facilities [9]. In this paper is developed a method that uses both tools, the MNM and FFEF. This allows the simultaneous analysis of the distributed and concentrated models.

All existing numerical methods for the solution of the field equation have, in one way or another, a differential formulation as their starting point. A discrete formulation is then obtained by means of the many discretization methods, such as Finite Difference Methods, Finite Element Method, Boundary Element Method, etc. As an alternative, most of the researchers reformulate field laws in finite form so that an algebraic system of equations is directly written to solve the field problem, avoiding the use of the discretization process applied to a differential equation. This approach is the Finite Formulation and the corresponding numerical method is known as the (CM) [10], [11], [12], [13].

The (FFEF) is based on the use of scalar global variables [8], obtained by integrating field variables on a double system of meshes, strictly connected by relations of duality. Global variables are distinguished in two types, the configuration variables (CV) associated to the primal mesh and the source variables (SV), associated to the dual one. CV involved in the magnetostatic problems are magnetic fluxes f on primal faces and line integral a of magnetic vector potential on primal edges. The considered SV are magnetomotive forces F on dual edges.

ISEF 2011 - XV International Symposium on Electromagnetic Fields
in Mechatronics, Electrical and Electronic Engineering
Funchal, Madeira, September 1-3, 2011

Computational Geometry applied to Finite Formulation.

Simón Rodríguez L.; González Domínguez P. ; Monzón Verona J.M.

Department of Electrical Engineering, University of Las Palmas de Gran Canaria
35017 – Tafira, Las Palmas (Spain). Phone/Fax number: +0034 928 452888/451874
e-mail: lsimon@mas.ulpgc.es, pgonzalez@die.ulpgc.es, jmonzon@die.ulpgc.es.

Abstract – In this paper the basic elements of the computational geometry and topology associated with the finite formulation are exhibited. The topological elements are related themselves by the incidences, and give place to a set of topological matrices so called G , C , and D and his respective dual ones \hat{G} , \hat{C} , and \hat{D} . In each matrix there is represented a directed graph formed by the pairs of elements that constitute it. Using Euler-Poincaré formula, it will be possible to quantify the relations between the different elements. But especially for very dense mesh, where the number of equations is quite high and it become necessary to have any tool that determines quantitatively these relations. An asymptotic approximation of the above mentioned formula is appeared, which makes this quantification possible providing information about the number of equations and the number of unknowns.

1 Introduction.

In physical theories, a big underlying geometric structure exists. Geometry is the mother tongue of numerous current physical and mathematics theories [11]. The elements of a topological network and their relations are defined in this work. The *complex cell* is a basic topological tool that determines the notions of *orientation*, *duality* and *numbers of incidences*, by means of a set of topological primal and dual matrices [5, 12]. The *complex cells* are going to represent the named *oriented graphs* or *directed graphs* [9]. Graph Theory has played a fundamental role in the discovery of structural properties in the electrical circuits. This is because they are a pictographic representation of the circuits and they capture all his structural characteristics. In the circuitual matrices will be reflected the dual nature of the circuits and the cut-sets, by means of the *tree* and the *fundamental loop matrices* and *fundamental cut-set matrices*. To find these circuitual matrices an implementation of the algorithm of Welsh [8] is used. The Euler-Poincaré expressions are going to determine the quantitative relations that exist between the topologic elements. This quantification allows know the relation between the number of equations and the number of unknowns in certain problems. In the meshes, this quantification corresponds to the Euler-Poincaré formula and his characteristic. The quantification depends of the topological objet genus. In very dense meshes, it is possible to obtain an empirical relation between the number of elements and the nodes elements. This allows a previous knowledge of the equations number and unknowns number. A program written in C ++ has been developed to obtain incidence matrices. That is the base of finite formulation. The free software Gmsh is used as mesher. Gmsh includes meshes generator, a CAD motor and postprocessor [7].

Contribution to the improvement of the computing time for G, C, D matrix in the Cell Method

González Domínguez, P. I.
 Universidad de Las Palmas de Gran Canaria
 Campus de Tafira, 35017 Las Palmas G. C, Spain
 Email: pgonzalez@die.ulpgc.es

Monzón Verona, J. M.
 Universidad de Las Palmas de Gran Canaria
 Campus de Tafira, 35017 Las Palmas G. C, Spain
 Email: jmonzon@die.ulpgc.es

Summary

The purpose of this work is to contribute to the improvement of the computing time for G, C, D matrices in Cell Method, applied to electrical machines studies. Cell Method (CM) is a discrete formulation, in the Finite Integration (FI) technique. CM uses the discrete matricial operators gradient, curl and divergence by means of edges-vertexes, faces-edges and volumes-faces incidences matrixes. Several algorithms have been studied to reduce the computing time in G, C, D matrixes construction. The free software Octave is used as programming language.

Keywords: Finite Integration, Cell Method, discrete Grad-Curl-Div operators, Octave®.

1. Introduction

Nowadays the electrical machines analysis needs powerful numerical tools. Diverse numerical methods like finite differences method (FDM) [1, 2], finite elements method (FEM) [1, 2], boundary elements method (BEM) [1, 2], among others, are used in the electrical machines analysis. We had centered on the study of the method of the Finite Formulation (FF) [3, 4], and its numerical method: the Cell Method (CM) [5].

The discrete operators studied are G, C, D matrices applied to Maxwell's equations in finite formulation. The above mentioned equations are:

$$C \cdot \hat{e} = -\frac{d}{dt} \hat{b} \tag{1}$$

$$\tilde{C} \cdot \hat{h} = \frac{d}{dt} \hat{d} + \hat{j} \tag{2}$$

$$D \cdot \hat{b} = 0 \tag{3}$$

$$\tilde{D} \cdot \hat{d} = q \tag{4}$$

Where (1) is Faraday's law, (2) is Ampere's law, (3) and (4) are Gauss's Law applied magnetic and electric field, respectively [3, pp 67-71].

G matrix is used to obtain the gradient of an electromagnetic field: For example, the electrical field gradient for a discrete potentials ϕ is:

$$\hat{e} = -G \cdot \phi \tag{5}$$

According to Weiland [4, pp 66-67], the FI-method consists in an open boundary problem restrict to a simply connected and bounded space region $\Omega \in \mathbb{R}^3$. The region Ω contents the space region of interest. The following step consists in the decomposition of the computational domain Ω into a finite number of simplicial cells $C_n \setminus C_n \in \mathbb{R}^3$.

In our case, the cell complex is a tetrahedron. The tetrahedron is an oriented 3-simplex $T = \{(v_1), (v_2), (v_3), (v_4), (v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_4, v_1), (v_1, v_2, v_3), (v_2, v_3, v_4), (v_1, v_2, v_4), (v_1, v_2, v_3, v_4)\}$, when the sub-set of vertexes is $N \subset T \setminus N = \{(v_1), (v_2), (v_3), (v_4)\}$, when the sub-set of edges is $E \subset T \setminus E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_1), (v_3, v_4), (v_2, v_4), (v_4, v_1)\} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$, when the sub-set of faces is $F \subset T \setminus F = \{(v_1, v_2, v_3), (v_2, v_3, v_4), (v_1, v_2, v_4), (v_1, v_3, v_4)\} = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, and finally the sub-set of volumes is $V \subset T \setminus V = \{(v_1, v_2, v_3, v_4)\}$.

The orientation of the 1-simplex (edges), 2-simplex (faces) and 3-simplex are obtained mean the ordering of the vertexes [6]. See Figure 1.

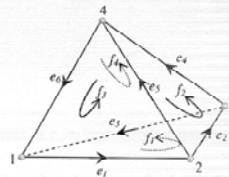


Figure 1. Oriented tetrahedron used in the mesh.

12º Congreso Interamericano de Computación Aplicada a la Ingeniería de Procesos
CAIP'2015

Cartagena de Indias, Colombia, Septiembre 2015

La Matriz Fundamental de Bucles B en el Método de la Celda. Aplicación a un Problema Electromagnético de Corrientes Inducidas en 3D.

Simón Rodríguez L., González Domínguez P. I.,
Monzón Verona J.M.; Martínez Melgarejo, M.

Departamento de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria
35017 – Tafira, Las Palmas (España). Número de teléfono/Fax: +0034 928 452888/451874
e-mail: leopoldo.simon@ulpgc.es, pablo.gonzalez@ulpgc.es,
josemiguel.monzon@ulpgc, mmartinez.melgarejo@ulpgc.es

Resumen– En este trabajo se discretizan las ecuaciones en derivadas parciales de un problema electromagnético de corrientes inducidas en 3D utilizando el método de la celda (CM). Se han calculado los resultados del campo magnético y corrientes inducidas para corrientes de excitación lineales, superficiales y volumétricas.

El error obtenido es menor de 0,15% cuando se compara con el método de los elementos finitos (FEM). La contribución de este trabajo está en forzar la condición de la continuidad de las corrientes superficiales y volumétricas de densidad de corriente, a través de un método puramente circuital. El método se basa en la matriz fundamental de bucle B, definido en un árbol de un grafo lineal en el dominio de las fuentes de corriente. Para obtener el árbol se utiliza el algoritmo de Welsh. La densidad de corriente superficial se evalúa en el baricentro de los triángulos y en los puntos medios de las líneas duales. La condición de continuidad se analiza en algunos cortes del dominio. Se hace un balance nodal para determinar la mejor evaluación de las corrientes en los nudos. La densidad de corriente volumétrica se evalúa en el centroide de los tetraedros y en los centroides de las caras duales.

1 Introducción.

Hoy en día, el diseño y el análisis de máquinas eléctricas se asocian a las herramientas numéricas de cálculo. Los métodos numéricos para la solución de un problema electromagnético de corrientes inducidas en 3D aplicadas al análisis de las máquinas eléctricas, tiene una formulación integral o diferencial como punto de partida. La formulación discreta se puede obtener entonces por muchos métodos de discretización, tales como el método de los elementos finitos (FEM), el método de las diferencias finitas (FDM), el método de los elementos del contorno (BEM), entre otros. Como alternativa, es posible formular las leyes de campo en forma finita de modo que, un sistema de ecuaciones algebraicas puede ser escrito directamente para resolver el problema de campo, evitando de esa forma el uso del proceso de discretización aplicada a una ecuación integral o diferencial. Este enfoque es el que se hace en la formulación finita (FF) y el método numérico correspondiente se conoce como el método de la celda (CM).

La geometría y la topología desempeñan un papel fundamental en la discretización de las ecuaciones de campo en derivadas parciales (PDE). Los operadores estándar gradiente, rotacional y divergencia son el equivalente en la FF a la matrices G, C and D. Estas matrices tienen una definición topológica natural, ya que corresponden a las incidencias entre los elementos geométricos involucrados en la discretización de la PDE. Para la definición de las cantidades físicas y la estructura topológica se ha seguido la clasificación de Tonti y sus diagramas. Tonti clasifica las cantidades electromagnéticas en variables de fuente, variables de configuración y variables

12º Congreso Interamericano de Computación Aplicada a la Ingeniería de Procesos
CAIP'2015

Cartagena de Indias, Colombia, Septiembre 2015

El Método de la Celda Aplicado al Análisis de Fallos en una Máquina de Inducción Magnética.

Simón Rodríguez L., González Domínguez P. I.,
Monzón Verona J.M.; Martínez Melgarejo, M.

Departamento de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria
35017 – Taira, Las Palmas (España). Número de teléfono/Fax: +0034 928 452888/451874
e-mail: leopoldo.simon@ulpgc.es, pablo.gonzalez@ulpgc.es,
josemiguel.monzon@ulpgc, mmartinez.melgarejo@ulpgc.es

Resumen– El análisis de máquinas eléctricas mediante el método de los elementos finitos es bien conocido. Una de las aportaciones de este trabajo es la comprobación de la formulación finita aplicada en el estudio de máquinas eléctricas trifásicas de inducción magnética. Los estudios realizados se han hecho sobre un modelo basado en una sección bidimensional de la máquina. Junto al modelo discreto se han incorporado ecuaciones circuitalas, particularmente de la fuente de alimentación. En un primer conjunto de experiencias, el sistema discreto se analiza imponiendo las corrientes de fase como fuente.

1 Introducción.

Se trabaja con una sección transversal de un prototipo de máquina eléctrica. En las hipótesis que se plantean se presupone una máquina recta, sin efecto skew. De forma general, el conjunto será tratado como un gran dominio tridimensional, cuyos elementos discretos en el mallado serán tetraedros. La sección, por su diseño, tiene simetría plana, lo que permite un planteamiento singular de las variables magnéticas. Dado que el vector densidad de corriente \vec{j} y el vector potencial magnético \vec{A} tienen el mismo sentido y son perpendiculares a la sección transversal, sus componentes magnéticas vectoriales sólo tienen valor en el eje Z, es decir, la circulación en las aristas de \vec{A} viene dada por la integral de línea $\alpha = \int \vec{A} \cdot d\vec{l}$, donde sus componentes vienen dadas como $\vec{A}(\vec{A}_x, \vec{A}_y, \vec{A}_z)$, siendo sus componentes $\vec{A}_x = 0$ y $\vec{A}_y = 0$. El valor del vector potencial magnético proyectado en las aristas de los triángulos de la superficie es cero, y donde único tiene valor es en los nudos, de tal forma que en las aristas del prisma (proyección de los nudos) que se forma por simetría, adquieren el valor del potencial magnético. Es decir, las corrientes son perpendiculares y las incógnitas son las proyecciones en los nudos de las aristas proyectadas en ellos. En virtud de ello, el mallado que se utiliza es prismático por su correspondencia con la ortogonalidad de los vectores magnéticos y la simetría plana de la sección. El número de variables libres está determinada por el número de ramas del árbol, y el número de ramas donde el vector $\vec{A} = 0$ determina el número de incógnitas. El rango de la matriz del conjunto de ecuaciones del sistema es $\text{rango} = \text{número de ecuaciones} - 1$. La matriz del conjunto de ecuaciones del sistema es singular por lo que se debe aplicar alguna condición de unicidad. La condición de unicidad se impone dándole un valor conocido a alguna de las incógnitas, es decir, asignando un valor a uno de los nudos. De esta forma el número de ecuaciones $- 1$. Como procedimiento general, se asigna un valor cero a uno de los nudos. Con respecto a las matrices de incidencia, en este caso la matriz $G = C$. El flujo magnético asociado a las caras del

12º Congreso Interamericano de Computación Aplicada a la Ingeniería de Procesos
CAIP'2015

Cartagena de Indias, Colombia, Septiembre 2015

EL MÉTODO DE LA CELDA APLICADO AL ESTUDIO DE CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS Y TRANSFERENCIA DE CALOR EN MOTORES DE INDUCCIÓN

González Domínguez P. I., Simón Rodríguez L.,
Monzón Verona J.M.; Martínez Melgarejo, M.

Departamento de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria
35017 – Tafira, Las Palmas (España). Número de teléfono/Fax: +0034 928 452888/451874
e-mail: pablo.gonzalez@ulpgc.es, leopoldo.simon@ulpgc.es,
josemiguel.monzon@ulpgc , mmartinez.melgarejo@ulpgc.es

Resumen—El principal objetivo de este trabajo es estudiar una máquina eléctrica de inducción, también conocida como máquina eléctrica asíncrona, desde el punto de vista electromagnético y térmico mediante la aplicación del método de la celda.

La validación de los resultados obtenidos se hará comparando dichos resultados con los obtenidos sobre la misma máquina pero utilizando el método de los elementos finitos a partir de un software comercial de reconocido prestigio tal como Opera-3d, Getdp, etcétera.

El método de la celda (MC), o cell method (CM), ha sido aplicado al estudio del electromagnetismo, más en el ámbito de la Física que en el ámbito de la Ingeniería. En la bibliografía consultada hay unos pocos trabajos dedicados al estudio de corrientes parásitas (eddy currents) en máquinas eléctricas. Y, prácticamente nulos, en el estudio termodinámico de máquinas eléctricas aplicando el MC.

1 Introducción.

A continuación se hará un resumen de las principales características del MC, comparándolos con otros métodos numéricos conocidos. El MC, después de analizar las estructuras comunes que poseen muchas teorías físicas, nace con objeto de formular directamente las ecuaciones de campo en su forma topológica. Consiste en una discretización del espacio-tiempo mediante dos complejos de celdas: la celda primal y la celda dual. Se distinguen una serie de variables: variables globales, de fuente, de configuración y de energía. Las variables están orientadas. Las variables pertenecientes al complejo primal están orientadas internamente. Las variables pertenecientes al complejo dual están orientadas externamente.

Las variables globales son continuas a través de espacios constituidos por diversos materiales. Por el contrario, en la formulación diferencial, las variables de campo no son continuas para espacios compuestos de materiales heterogéneos. Esto dará lugar a que se tenga que recurrir a diversos artificios matemáticos para garantizar la continuidad y, por lo tanto, su derivabilidad.

Las variables globales se pueden utilizar directamente en la formulación finita. Por el contrario, en la formulación diferencial son indispensables las funciones de campo. Las variables globales dependen del espacio y el tiempo, mientras que las variables de campo dependen de un punto y de un instante de tiempo.

Las variables de fuente describen el origen (fuente) del campo. Cualquier vinculación, tanto algebraica como diferencial, con este tipo de variables se hace sin la intervención de constantes físicas.

Las variables de configuración son las que describen la configuración del campo, sus potenciales y todas las variables que se pueden enlazar mediante operaciones algebraicas o diferenciales sin la

BIBLIOGRAFÍA GENERAL

15. Bibliografía general

Alotto, P., Bullo, M., Guarnieri, M. & Moro, F., 2008. A Coupled Thermo-Electromagnetic Formulation Based on the Cell Method. *Magnetics, IEEE Transactions on*, June, 44(6), pp. 702-705.

Alotto, P., Freschi, F. & Repetto, M., 2010. Multiphysics Problems via the Cell Method: The Role of Tonti Diagrams. *Magnetics, IEEE Transactions on*, Aug, 46(8), pp. 2959-2962.

Alotto, P., Freschi, F., Repetto, M. & Rosso, C., 2013. *The Cell Method for Electrical Engineering and Multiphysics Problems: An Introduction*. Berlin: Springer Science & Business Media.

B.H.Thacker, y otros, 2004. *Concepts of Model Verification and Validation*. First ed. Los Alamos(New Mexico): Los Alamos National Lab.

Bellini, A. y otros, 2006. *Monitoring of Induction Machines currents by high frequency resolution analysis*. TAMPA, FL, USA, IEEE, pp. 2320-2325.

Bettini, P. & Trevisan, F., 2003. Electrostatic analysis for plane problems with finite formulation. *Magnetics, IEEE Transactions on*, May, 39(3), pp. 1127-1130.

Bliemel, F., 1973. Theil's Forecast Accuracy Coefficient: A Clarification. *Journal of Marketing Research*, 10(4), pp. pp. 444-446.

Boglietti, A. y otros, 2009. Evolution and Modern Approaches for Thermal Analysis of Electrical Machines. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, March, 56(3), pp. 871-882.

Boglietti, A. y otros, 2014. Electrical Machine Topologies: Hottest Topics in the Electrical Machine Research Community. *Industrial Electronics Magazine, IEEE*, June, 8(2), pp. 18-30.

Bommaraju, C., 2009. *Investigating Finite Volume Time Domain Methods in Computational Electromagnetics (PhD Thesis)*, Darmstadt: TU Darmstadt.

- Bossavit, A., 1998. On the geometry of electromagnetism: Maxwell's house. *J. Japan Soc. Appl. Electromagn. Mech.*, 6(4), pp. pp. 318–326.
- Bossavit, A., 2000. Computational electromagnetism and geometry: The " Galerkin hodge". *J. Japan Soc. Appl. Electromagn. Mech.*, 8(2), pp. 203-209.
- Bossavit, A., 2005. *Discretization of Electromagnetic Problems: The "Generalized Finite Differences" Approach*. s.l.:Elsevier.
- Branin, F. H. (., 1966. The algebraic topological basis for Network analogies and the vector calculus. *Symposium. on Generalized Networks*, April.pp. 453-487.
- Branin, J. F. H., 1964. *D-C and Transient Analysis of Networks Using a Digital Computer*. New York, NY, USA, ACM, pp. 4.1--4.23.
- Bullo, M., D'Ambrosio, V., Dughiero, F. & Guarnieri, M., 2006. *A 3D Cell Method Formulation for Coupled Electric and Thermal Problems b)*. Miami, FL, USA, IEEE, pp. 7-7.
- Bullo, M., D'Ambrosio, V., Dughiero, F. & Guarnieri, M., 2006. Coupled electrical and thermal transient conduction problems with a quadratic interpolation cell method approach. *Magnetics, IEEE Transactions on*, April, 42(4), pp. 1003-1006.
- Bullo, M., D'Ambrosio, V., Dughiero, F. & Guarnieri, M., 2007. A 3-D Cell Method Formulation for Coupled Electric and Thermal Problems. *Magnetics, IEEE Transactions on*, April, 43(4), pp. 1197-1200.
- Bullo, M., Dughiero, F., Guarnieri, M. & Tittone, E., 2006. Nonlinear coupled thermo-electromagnetic problems with the cell method. *Magnetics, IEEE Transactions on*, April, 42(4), pp. 991-994.
- Capolino, G.-A. & Cavagnino, A., 2014. New Trends in Electrical Machines Technology; Part I. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, Aug, 61(8), pp. 4281-4285.
- Capolino, G.-A. & Cavagnino, A., 2014. New Trends in Electrical Machines Technology; Part II. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, Sept, 61(9), pp. 4931-4936.
- Cardelli, E. & Faba, A., 2014. A Benchmark Problem of Vector Magnetic Hysteresis for Numerical Models. *Magnetics, IEEE Transactions on*, Feb, 50(2), pp. 1049-1052.
- Chaboudez, C. y otros, 1994. Numerical modelling of induction heating of long workpieces. *Magnetics, IEEE Transactions on*, Nov, 30(6), pp. 5028-5037.

- Chai, T. & Draxler, R. R., 2014. Root mean square error (RMSE) or mean absolute error (MAE)? Arguments against avoiding RMSE in the literature. *Geoscientific Model Development*, 7(3), pp. 1247-1250.
- Cheben, P. & Calvo Padilla, M. L., 1998. Teorías de la difracción de ondas electromagnéticas por redes de volumen: Una revisión. *Revista Mexicana de Física*, 44(4), pp. 323-332.
- Chen, J. & Wang, J., 2014. A WCS-PSTD Method for Solving Electromagnetic Problems Both With Fine and Electrically Large Structures. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, May, 62(5), pp. 2695-2701.
- Codecasa, L. & Trevisan, F., 2006. Piecewise uniform bases and energetic approach for discrete constitutive matrices in electromagnetic problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 65(4), pp. 548-565.
- Costa, M., Nabeta, S. & Cardoso, J., 2000. Modified nodal analysis applied to electric circuits coupled with FEM in the simulation of a universal motor. *Magnetics, IEEE Transactions on*, Jul, 36(4), pp. 1431-1434.
- Crank, J. & Nicolson, P., 1996. A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type. *Advances in Computational Mathematics*, 6(1), pp. 207-226.
- Delprete, C., Freschi, F., Repetto, M. & Rosso, C., 2008. *Metodo delle celle e approccio Multiphysics: applicazione alla termomeccanica*. Roma, Italia, AIAS – Associazione Italiana per L'Analisi delle Sollicitazioni.
- Delprete, C., Freschi, F., Repetto, M. & Rosso, C., 2010. Experimental validation of a numerical multiphysics technique for electro thermo mechanical problem. *COMPEL - The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 29(6), pp. 1642-1652.
- Desbrun, M., Kanso, E. & Tong, Y., 2008. Discrete differential forms for computational modeling. En: *Discrete differential geometry*. Berlin: Springer, pp. 287-324.
- Dlotko, P., Specogna, R. & Trevisan, F., 2009. Automatic generation of cuts on large-sized meshes for the T- omega geometric eddy-current formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(47-48), pp. 3765-3781.
- Driesen, J., 2000. *Coupled Electromagnetic-Thermal Problems in Electrical Energy Transducers (PhD Thesis)*. First ed. Kardinaal Mercielaan 94-3001. Leuven (Haverlee): Katholieke Universiteit Leuven..

Dupre, L., Keer, R. V. & Melkebeek, J., 1998. A computational model for the iron losses in rotating electrical machines. *International Journal of Engineering Science*, 36(7-8), pp. 699-709.

Evans, J. & Von Holle, A., 1979. Evidence for the effectiveness of stress coatings in altering magnetic properties of commercially produced grain-oriented 3% silicon-iron (invited). *Magnetics, IEEE Transactions on*, Nov, 15(6), pp. 1580-1585.

Feliziani, M. y otros, 2008. Educational value of the algebraic numerical methods in electromagnetism. *COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 27(6), pp. 1343-1357.

Fonseca, L. Z., 2011. *El método de los elementos finitos: una introducción*. s.l.:Fondo Editorial Biblioteca Univerisdad Rafael Urdaneta.

Fraile, M. J., 2008. *Máquinas Eléctricas. Sexta edición*. Sexta ed. Madrid: McGraw-Hill/Interamerica de España, S. A. U..

Fullerton Jr, T. M., Novela, G. & others, 2010. Metropolitan Maquiladora Econometric Forecast Accuracy. *Romanian Journal of Economic Forecasting*, 13(3), pp. 124-140.

Geuzaine, C. & Remacle, J.-F., 2009. Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(11), pp. 1309-1331.

Gieras, J. F. & Gieras, I. A., 2001. *Recent Developements in Electrical Motors and Drives*. Bursa, Turkey, 2nd International Conference on Electrical and Electronics Engineering..

Giuffrida, C., Gruosso, G. & Repetto, M., 2006. Finite formulation of nonlinear magnetostatics with Integral boundary conditions. *Magnetics, IEEE Transactions on*, May, 42(5), pp. 1503-1511.

González-Domínguez, P. I. & Monzón Verona, J. M., 2013. *Contribution to improvement of the computing times for G, C, D matrix in the Cell Method*. Las Palmas de Gran Canaria, España, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, pp. 201-203.

Gupta, H. V., Kling, H., Yilmaz, K. K. & Martinez, G. F., 2009. Decomposition of the mean squared error and performance criteria: Implications for improving hydrological modelling. *Journal of Hydrology*, 377(1), pp. 80-91.

- Gupta, H. V., Kling, H., Yilmaz, K. K. & Martinez, G. F., 2009. Decomposition of the mean squared error and performance criteria: Implications for improving hydrological modelling. *Journal of Hydrology*, 377(1-2), pp. 80-91.
- He, Z.-L., Huan, K. & Liang, C.-H., 2012. Hybrid finite difference-finite volume method for 3-d conducting media problems. *Progress In Electromagnetics Research M*, Volumen 24, pp. 85-95.
- Ho, C.-W., Ruehli, A. E. & Brennan, P. A., 1975. The modified nodal approach to network analysis. *Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, Jun, 22(6), pp. 504-509.
- Holman, J. P., 1999. *Transferencia de Calor*. Octave en inglés. Priemra en español ed. Madrid: Mc Graw Hill.
- Howey, D., Childs, P. & Holmes, A., 2012. Air-Gap Convection in Rotating Electrical Machines. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, March, 59(3), pp. 1367-1375.
- Hubing, T. H., 1991. Survey of numerical electromagnetic modeling techniques. *ITEM update*, pp. 17-30.
- Hyndman, R. J. & Koehler, A. B., 2006. Another look at measures of forecast accuracy. *International Journal of Forecasting* , 22(4), pp. 679-688.
- Jiang, W. & Jahns, T., 2013. *Coupled electromagnetic-thermal analysis of electric machines including transient operation based on finite element techniques*. Denver, CO, USA, IEEE, pp. 4356-4363.
- Johns, P. & Beurle, R., 1971. Numerical solution of 2-dimensional scattering problems using a transmission-line matrix. *Electrical Engineers, Proceedings of the Institution of*, September, 118(9), pp. 1203-1208.
- Jolliffe, I. T. & Stephenson, D. B., 2012. *Forecast verification: a practitioner's guide in atmospheric science*. s.l.:John Wiley & Sons.
- Jolliffe, I. T. & Stephenson, D. B., 2012. *Forecast verification: a practitioner's guide in atmospheric science*. s.l.:John Wiley & Sons.
- Kaplan, C. & Murnaghan, F. D., 1930. On the Fundamental Constitutive Equations in Electromagnetic Theory. *Phys. Rev.*, Apr, Volumen 35, pp. 763-777.
- Kaufmann, C. y otros, 2014. Efficient simulation of frequency-transient mixed co-simulation of coupled heat-electromagnetic problems. *Math. Ind*, Volumen 4.

- Kobayashi, K. & Salam, M. U., 2000. Comparing simulated and measured values using mean squared deviation and its components. *Agronomy Journal*, 92(2), pp. 345-352.
- Komez, K., Fernandez, X. M. L. & Lefik, M., 2010. Computer modelling of 3D transient thermal field coupled with electromagnetic field in three phase induction motor on load. *COMPEL - The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 29(4), pp. 974-983.
- Kost, A., 1995. Electromagnetic Aspects of Electrical Machines. *COMPEL: The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, 14(4), pp. 1-20.
- Kost, A., 2011. *Review of low and high frequency methods for Computational Electromagnetics*. Wroclaw, Poland, IEEE, pp. 1-1.
- Lavers, J. D., 2008. State of the art of numerical modeling for induction processes. *COMPEL. The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, 27(2), pp. 335-349.
- Lefik, M. & Komez, K., 2008. Computer modelling of 3D transient thermal field coupled with electromagnetic field in one phase induction motor with locked rotor. *COMPEL - The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 27(4), pp. 861-868.
- Leuthold, R. M., 1975. On the Use of Theil's Inequality Coefficients. *American Journal of Agricultural Economics*, 57(2), pp. 344-346.
- Lluis-Puebla, E., 1990. *Álgebra homológica, cohomología de grupos y K-Teoría algebraica clásica*. México DF, Mx.: Addison-Wesley Iberoamericana.
- Marcusa, D. & Kuczmann, M., 2013. Finite Element Tearing and Interconnecting Method and its Algorithms for Parallel Solution of Magnetic Field Problems. *Electrical, Control and Communication Engineering*, Sep, 3(1), pp. 25-30.
- Marrone, M., Rodriguez-Esquerre, V. & Hernandez-Figueroa, H., 2002. Novel numerical method for the analysis of 2D photonic crystals: the cell method. *Optics express*, 10(22), pp. 1299-1304.
- Martínez Rodríguez, E., 2005. Errores frecuentes en la interpretación del coeficiente de determinación lineal. *Anuario jurídico y económico escurialense*, Issue 38, pp. 315-331.
- Martínez, L. S. y R. B. P., 2008. Tratamiento de los Errores en las Mediciones Mecánicas. *CD de Monografías 2008. Universidad de Matanzas "Camilo Cienfuegos"*.

- Mathevet, T., Michel, C., Andreassian, V. & Perrin, C., 2006. A bounded version of the Nash-Sutcliffe criterion for better model assessment on large sets of basins. *IAHS PUBLICATION*, Volumen 307, p. 211.
- Medina-Peralta, S., Vargas-Villamil, L., Navarro-Alberto, J. C.-P. C. & Peraza-Romero, S., 2010. Comparación de medidas de desviación para validar modelos sin sesgo, sesgo constante o proporcional. *Universidad y ciencia*, 12, Volumen 26, pp. 255-263.
- Meeker, D., 2009. Finite Element Method Magnetics User's Manual, 2010. *Version*, Volumen 4, p. 25.
- Mesple, F., Troussellier, M., Casellas, C. & Legendre, P., 1996. Evaluation of simple statistical criteria to qualify a simulation. *Ecological Modelling*, 88(1-3), pp. 9-18.
- Monzón, J., Santana, F. & Simón, L., 2007. *Acople del Método Nodal Modificado y el Método de los Elementos Finitos. Implementación en lenguaje Scilab y C++*. Funchal, Madeira Island, Portugal, XCLEEE 2007.
- Moriasi, D. y otros, 2007. Model evaluation guidelines for systematic quantification of accuracy in watershed simulations. *Trans. Asabe*, 50(3), pp. 885-900.
- Oden, J. T., 2009. A brief view of verification, validation, and uncertainty quantification. *A presentation to the Board of Mathematical Sciences and their Applications, National Research Council, Washington, DC*.
- Paez, T. L., 2009. *Introduction to model validation*. Orlando, Florida USA, IMAC-XXVII.
- Pantelyat, M. G., 2013. Coupled Magneto-Thermo-Mechanical Phenomena in Electromagnetic Devices: Main Interactions and their Graphical Representation.
- Pathak, P. & Kim, Y., 2011. *A uniform geometrical theory of diffraction (UTD) for curved edges illuminated by electromagnetic beams*. Istanbul, Turkey, IEEE, pp. 1-4.
- Pellegrini, A., Monorchio, A., Manara, G. & Mittra, R., 2014. A Hybrid Mode Matching-Finite Element Method and Spectral Decomposition Approach for the Analysis of Large Finite Phased Arrays of Waveguides. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, May, 62(5), pp. 2553-2561.
- Pelikka, M., 2014. *Finite Element Method for Electromagnetics on Riemannian Manifolds. Topology and Differential Geometry Toolkit (PhD Thesis)*. 1 ed. Tampere, Finland: Tampereen teknillinen yliopisto - Tampere University of Technology.

- Pellikka, M., Suuriniemi, S. & Kettunen, L., 2010. Homology in electromagnetic boundary value problems. *Boundary Value Problems*, 2010(1), p. 381953.
- Pellikka, M., Suuriniemi, S., Kettunen, L. & Geuzaine, C., 2013. Homology and cohomology computation in finite element modeling. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 35(5), pp. B1195--B1214.
- Piñeiro, G., Perelman, S., Guerschman, J. P. & Paruelo, J. M., 2008. How to evaluate models: observed vs. predicted or predicted vs. observed?. *Ecological Modelling*, 216(3), pp. 316-322.
- Popescu, M. y otros, 2015. *Modern heat extraction systems for electrical machines - A review*. Torino, Castello del Valentino, Italy, IEEE, pp. 289-296.
- Popova, L., Nerg, J. & Pyrhonen, J., 2011. *Combined Electromagnetic and thermal design platform for totally enclosed induction machines*. Bologna, Italia, IEEE, pp. 153-158.
- Pruksanubal, P., Binner, A. & Gonschorek, K., 2002. *Modelling of magnetic hysteresis using Cauchy distribution*. Beijing, China, IEEE, pp. 446-449.
- Puche Panadero, R., 2008. *Nuevos métodos de diagnóstico de excentricidad y otras asimetrías rotóricas en máquinas eléctricas de inducción a través del análisis de la corriente estatórica (Tesis doctoral)*. 1 ed. Valencia: Universidad Politécnica de Valencia.
- Reitich, F. & Tamma, K., 2004. State-of-the-art, trends, and directions in computational electromagnetics. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 5(4), pp. 287-294.
- Repetto, M. & Trevisan, F., 2003. 3-D magnetostatic with the finite formulation. *IEEE transactions on magnetics*, 39(3), pp. 1135-1138.
- Riera-Guasp, M., Antonino-Daviu, J. & Capolino, G.-A., 2015. Advances in Electrical Machine, Power Electronic, and Drive Condition Monitoring and Fault Detection: State of the Art. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, March, 62(3), pp. 1746-1759.
- Rodríguez, L. S., Julio, 2015. *Aportaciones al Método de la Celda en el Diseño y Análisis de un Modelo de Máquina Rotativa Trifásica de Inducción Magnética (Tesis doctoral)*. Universidad de Las Palmas de Gran Canaria ed. Las Palmas de Gran Canaria: Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.
- Rosero, J. y otros, 2008. *Simulation and Fault Detection of Short Circuit Winding in a Permanent Magnet Synchronous Machine (PMSM) by means of Fourier and Wavelet Transform*. Victoria, British CoMluba Canada, IEEE, pp. 411-416.

- Rousseau, P., Pathak, P. & Chou, H.-T., 2007. A Time Domain Formulation of the Uniform Geometrical Theory of Diffraction for Scattering From a Smooth Convex Surface. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, June, 55(6), pp. 1522-1534.
- Russer, P., 2000. The transmission line matrix method. En: N. Uzunoglu, K. S. Nikita & D. Kaklamani, edits. *Applied Computational Electromagnetics*. s.l.:Springer Berlin Heidelberg, pp. 243-269.
- Russer, P. & Russer, J., 2011. *Transmission Line Matrix (TLM) and network methods applied to electromagnetic field computation*. Baltimore, MD, USA, IEEE, pp. 1-4.
- Sanabria, J., García, J. & Lhomme, J.-P., 2006. Calibración y validación de modelos de pronóstico de heladas en el valle del Mantaro. *ECIPERU*, p. 18.
- Simon, L. & Monzon, J., 2011. *Cell Method and Modified Nodal Method in Eddy Current Electromagnetic Problems*. Las Palmas de Gran Canaria, España, ICREPQ'11.
- Simón-Rodríguez, L., González Domínguez, P. I. & Monzón Verona, J., 2011. *Computational Geometry applied to Finite Formulation*. Funchal, Madeira, Portugal, ISEF 2011.
- Simón-Rodríguez, L. y otros, 2015. *La Matriz Fundamental de Bucles B en el Método de la Celda. Aplicación a un Problema Electromagnético de Corrientes Inducidas en 3D*. Cartagena de Indias, Colombia, CAIP 2015.
- Smith, J. R., 1990. *Response Analysis of A. C. Electrical Machines*. s.l.:John Wiley & Sons.
- Specogna, R. & Trevisan, F., 2005. Discrete constitutive equations in A-Chi geometric eddy-current formulation. *IEEE Trans. Magn*, 41(4), pp. 1259-1263.
- Sykulski, J. K., 2006. *Field Simulation as an Aid to Machine Design: the State of the Art*. Portoroz, Slovenia, EPE-PEMC, pp. 1937-1942.
- Sykulski, J. K., 2007. Modern Design of Electromechanical Devices. *Proceedings of XLIIIrd International Symposium on Electrical Machines SME 2007, 2 -5 July, Poznan, Poland*.
- Tedeschi, L. O., 2006. Assessment of the adequacy of mathematical models. *Agricultural Systems*, 89(2-3), pp. 225-247.
- Tonti, E., 1995. On the geometrical structure of electromagnetism. *Gravitation, Electromagnetism and Geometrical Structures, for the 80th birthday of A. Lichnerowicz*, pp. 281-308.

- Tonti, E., 2000. *Formulazione finita dell'elettromagnetismo*, Udine, Italia: Universita degli Studi di Udine.
- Tonti, E., 2000. Formulazione finita delle equazioni di campo: Il Metodo delle Celle. *Atti del XIII Convegno Italiano di Meccanica Computazionale, Brescia, Italy*, Novembre.
- Tonti, E., 2000. *Formulazione Finita dell'Elettromagnetismo partendo dai fatti sperimentali*, Udine, Italia: Universita degli Studi di Udine.
- Tonti, E., 2001. A direct discrete formulation of field laws: The cell method. *CMES- Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 2(2), pp. 237-258.
- Tonti, E., 2001. Finite formulation of the electromagnetic field. *Progress in Electromagnetics Research*, Volumen 32, pp. 1-44.
- Tonti, E., 2002. Finite formulation of electromagnetic field. *IEEE Transactions on Magnetics*, 38(2), pp. 333-336.
- Tonti, E., 2013. *The Mathematical Structure of Classical and Relativistic Physics*. first ed. London, UK: Birkhäuser.
- Trevisan, F., 2002. *Plane Magnetic Field Analysis with the Finite Formulation*. [En línea] Available at: <http://www.dic.units.it/perspage/discretephysics/papers/TREVISAN/paper2D.pdf>
f
[Último acceso: 1 marzo 2013].
- Trevisan, F. & Kettunen, L., 2006. Geometric interpretation of finite-dimensional eddy-current formulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 67(13), pp. 1888-1908.
- Trowbridge, C. & Sykulski, J., 2006. Some key developments in computational electromagnetics and their attribution. *IEEE Transactions on Magnetics*, 42(4), pp. 503-508.
- Vande Sande, H., Henrotte, F. & Hameyer, K., 2004. The Newton-Raphson method for solving non-linear and anisotropic time-harmonic problems. *COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 23(4), pp. 950-958.
- Voitovich, T. V. & Vandewalle, S., 2007. Exact integration formulas for the finite volume element method on simplicial meshes. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Sep, 23(5), pp. 1059-1082.

- Vouvakis, M. N., 2005. *A non-conformal domain decomposition method for solving large electromagnetic wave problems (PhD Thesis)*. First ed. Columbus(Ohio): The Ohio State University.
- Wali, U., Pal, R. & Chatterjee, B., 1985. On the modified nodal approach to network analysis. *Proceedings of the IEEE*, March, 73(3), pp. 485-487.
- Weiland, M. C. T., 2001. Discrete electromagnetism with the finite integration technique. *Progress In Electromagnetics Research*, Volumen 32, pp. 65-87.
- Weiland, T., 2002. Advances in FIT/FDTD modeling. *Proc. 18th Ann. Rev. Progr. Appl. Computat. Electromagn*, pp. 1-1.
- Weiland, T., 2003. *RF Microwave Simulators-From Component to System Design*. Munich, Germany, IEEE, pp. 591-596.
- Willmott, C. J. & Matsuura, K., 2005. Advantages of the mean absolute error (MAE) over the root mean square error (RMSE) in assessing average model performance. *Climate research*, 30(1), p. 79.
- Willmott, C. J., Matsuura, K. & Robeson, S. M., 2009. Ambiguities inherent in sums-of-squares-based error statistics. *Atmospheric Environment* , 43(3), pp. 749-752.
- Willmott, C., Robesonb, S. & Matsuuraa, K., 2012. Short Communication: A Refined Index of Model Performance. Intl. *International Journal of Climatology*, 32(13), p. 2088–2094.
- Yatchev, I., 2003. Coupled field problems in electrical apparatus. *Facta Universitatis, Series: Mechanics, Automatic Control and Robotics*, 3(15), pp. 1089-1101.
- Yee, K. S. & Chen, J. S., 1997. The finite-difference time-domain (FDTD) and the finite-volume time-domain (FVTD) methods in solving Maxwell's equations. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 45(3), pp. 354-363.
- Zienkiewicz, O. C. y otros, 1993. *El Método de los Elementos Finitos. Cuarta Edición. Volumen1: Formulación básica y problemas lineales*. 4 ed. Barcelona: CIMNE.

