UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

TESIS DOCTORAL

ANÁLISIS NUMÉRICO - EXPERIMENTAL DEL OLEAJE EN MARES MIXTOS

MERCEDES PACHECO MARTÍNEZ

Las Palmas de Gran Canaria, 2003

55/2002-03

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA
UNIDAD DE TERCER CICLO Y POSTGRADO

Reunido el día de la fecha, el Tribunal nombrado por el Excmo. Sr. Rector Magfco. de esta Universidad, el/a aspirante expuso esta TESIS DOCTORAL.

Terminada la lectura y contestadas por el/a Doctorando/a las objeciones formuladas por los señores miembros del Tribunal, éste calificó dicho trabajo con la nota de Sobresaliente Cum laude (unanimidad)

Las Palmas de Gran Canaria, a 29 de mayo de 2003.

El/la Presidente/a: Dr. D. Francisco José Vázquez Polo

El/la Secretario/a: Dr. D. Juan Manuel Martín González

El/la Vocal: Dr. D. Antonio Lechuga Alvaro

El/la Vocal: Dr. D. José Carlos Nieto Borges

El/la Vocal: Dra. Dña. María del Carmen Carrión López

El/la Doctorando/a: Dña. Mercedes Pacheco Martínez

Anexo I

D/Dª SALVADOR GALVÁN HERRERA SECRETARIO/A DEL DEPARTAMENTO DE FÍSICA DE LA UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA,

CERTIFICA,

Que el Consejo de Doctores del Departamento en su sesión de fecha veintiséis de marzo de dos mil tres, tomó el acuerdo de dar el consentimiento para su tramitación, a la tesis doctoral titulada "Análisis Numérico-Experimental del Oleaje en Mares Mixtos" presentada por el/la doctorando/a D/Dª Mercedes Pacheco Martínez y dirigida por el/la Doctor/a Germán Rodríguez Rodríguez.

Y para que así conste, y a efectos de lo previsto en el Artº 73.2 del Reglamento de Estudios de Doctorado de esta Universidad, firmo la presente en Las Palmas de Gran Canaria, a veintiséis de marzo de dos mil tres.

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA

Departamento de Física

Programa de Doctorado: Oceanografía Física

Tesis Doctoral

Análisis Numérico-Experimental del Oleaje en Mares Mixtos

El Director

El Doctorando

Fdo. Germán Rodríguez Rodríguez

Fdo. Mercedes Pacheco Martínez

Las Palmas de Gran Canaria, 28 de marzo de 2003

A mis padres, Mercedes y Manolo

A mis hermanos, Manolo y Pedro

Agradecimientos

Antes de cometer un error de omisión, me gustaría expresar mi gratitud a todos los que, de una forma u otra, han tenido que ver con este trabajo, en especial a aquellos que me estiman, ellos y yo sabemos quienes son.

En primer lugar quiero agradecer al director de esta tesis, Dr. Germán Rodríguez Rodríguez su interés, empeño y dedicación. Como alguién dijo una vez de él *es un enamorado de las olas*, y esa pasión se refleja en su entrega a este trabajo, el cual se ha visto enormemente enriquecido por su profundo y actual conocimiento del tema abordado. Su orientación académica y el rigor ciéntifico que aplica en su trabajo ha sido de vital importancia en la dirección de esta tesis doctoral.

También quisiera agradecer al Área de Conocimiento y Análisis del Medio Físico perteneciente al Ente Público Puertos del Estado el habernos facilitados los datos de oleaje que han sido analizados en este trabajo.

En la etapa final de esta tesis hay personas que me han ayudado de una forma que no podría agradecer aquí, aún así, quiero dar las gracias a Gustavo Rodríguez por ayudarme con esos 'problemillas' con MATLAB y a Javier González por su dedicación en esta última fase.

Deseo dar las gracias a mis compañeros del Departamento de Física, algunos más que compañeros amigos. En especial me gustaria dar las gracias a José Luis Trenzado por estar siempre ahí para lo que necesitara, a Jesús García Rubiano y a Rafael Rodríguez por hacer más llevaderas las horas que dedicamos a este trabajo, a Luis García Weil, a Angeles Marrero y a Angel Rodríguez porque siempre se han ofrecido para lo que necesitara, a Ricardo Florido porque cuando por las tardes huele a café se hacen más cortas, a Juan Miguel Gil, a Juan Manuel Martín, ... en definitiva a todos los compañeros del Departamento por mostrarme siempre su apoyo.

No podría terminar sin mostrar mi más profundo agradecimiento a las personas que han sido el motor de mi vida, mis padres y mis hermanos, por prestarme siempre su apoyo incondicional, porque en la distancia siempre encontramos los momentos para reunirnos aunque sea electrónicamente, porque muchas veces su deseo de ver concluido este trabajo era mayor que el mio y eso hacía que volviera a animarme, porque todavía sigo aprendiendo de ellos y porque siempre están conmigo. Gracias.

Contenidos

Lista de Figuras

Lista de Tablas

Capítulo 1

Introducción

El conocimiento de las propiedades del oleaje resulta vital en disciplinas como la Ingeniería Naval, la Ingeniería Oceánica y la Ingeniería de Costas, debido a su importancia en el diseño, planificación y ejecución de cualquier tipo de obra o actividad desarrollada por el hombre en el mar. Además, durante la última década se ha empezado también a reconocer el importante papel que este fenómeno físico desempeña en los intercambios de materia y energía a través de la interfase entre el océano y la atmósfera, y por tanto en las condiciones climáticas. Por otro lado, este fenómeno es en gran medida el responsable de las características reflectivas de la superficie del mar, de modo que su conocimiento resulta imprescindible para una adecuada interpretación de la información procedente de sensores remotos.

En este sentido, durante los últimos 50 años se han logrado importantes avances en el estudio del oleaje tanto desde el punto de vista teórico como experimental. Entre los primeros cabe destacar la introducción de la ecuación del balance de energía (Gelci, et al., 1956) y los posteriores estudios desarrollados por numerosos autores para caracterizar cada uno de los términos fuente incluidos en la misma. Un avance trascendental en la caracterización del oleaje desde un punto de vista más pragmático es el debido a Pierson (1952), quien introdujo la teoría de los procesos estocásticos, con el concepto de densidad espectral, que representa la herramienta esencial para poder predecir el comportamiento del oleaje mediante la evaluación de la ecuación del balance energético.

Por otra parte, la introducción de la teoría de los procesos estocásticos en el estudio del oleaje ha hecho posible el desarrollo de modelos probabilísticos que permiten estudiar la estructura estadística de dicho fenómeno. En este sentido cabe destacar la labor realizada por Longuet-Higgins, con innumerables trabajos pioneros en los que, a partir de sólidos fundamentos físicos y matemáticos, se introducen modelos probabilísticos para describir la estructura de la superficie del mar y de numerósos parámetros característicos de la misma.

No obstante, es necesario señalar que, debido a la elevada complejidad del fenómeno, la gran mayoría de los trabajos desarrollados hasta la fecha han centrado sus objetivos en el estudio de las propiedades de campos de oleaje con una estructura frecuencial simple, o unimodal, tal como queda reflejado en la reciente monografía de Ochi (1998). Además, para reducir la complejidad del proceso es bastante frecuencte recurrir a hipótesis simplificadoras, tales como la de ancho de banda espectral estrecho, limitando así la validez de los resultados.

En consecuencia, el estudio de las propiedades del oleaje en condiciones en la que el oleaje observado es el resultado de dos, o más, sistemas de oleaje individuales ha quedado relegado a un segundo plano, a pesar de la notable frecuencia con la que tales situaciones se dan, especialmente en determinadas áreas del océano, y la importancia que revisten, tal como se ha puesto de manifiesto durante la última década, siendo de especial relevancia la llamada de atención del comité de especialistas en oleaje de la ITTC que, en su vigésimo tercera conferencia (ITTC, 2002), resalta la necesidad de profundizar en el estudio de las condiciones de oleaje en mares mixtos.

Es también necesario indicar que la casi totalidad de los estudios sobre caracterización de las propiedades del oleaje han sido desarrollados atendiendo a las propiedades de dicho fenómeno en los dominios temporal (probabilístico) y espectral, obviando el interés que presenta su descripción en el dominio de los desfases temporales. En este sentido, algunos de los escasos autores que han abordado el estudio del oleaje desde esta perspectiva han mencionado el potencial de dicha metodología para avanzar en el conocimiento de un fenómeno con estructuras espaciales y temporales tan complejas.

1.1 Objetivos y estructura

En correspondencia con los comentarios anteriores, la finalidad del presente trabajo es profundizar en el conocimiento de las propiedades estocásticas de los campos de oleaje resultantes de la superposición de dos sistemas de oleaje individuales, dando como resultado un campo de oleaje del tipo denominado mixto, combinado, o bimodal.

En particular, este trabajo de investigación pretende contribuir, en la medida de lo posible, a mejorar los conocimientos existentes sobre las propiedades del oleaje en mares mixtos, así como a poner de manifiesto las posibles limitaciones que puedan presentar los modelos teóricos o empíricos, desarrollados para caracterizar las propiedades estocásticas del oleaje bajo condiciones de mares simples, al ser aplicados para describir el comportamiento de dicho fenómeno en situaciones en las que se combinan distintos campos de oleaje individuales, resaltando, en su caso, la necesidad de desarrollar modelos más adecuados para tal fin, realizando algunas aportaciones en este sentido.

Con este propósito, el trabajo se ha estructurado en siete capítulos cuyos contenidos se pueden sintetizar de la siguiente forma. En lo que resta de este primer capítulo se introducen, en primer lugar, los fundamentos de la teoría lineal de ondas. A continuación se resalta la enorme variabilidad tanto temporal como espacial que presenta el oleaje real, así como la necesidad de abordar su estudio sistemático desde el punto de vista de los procesos estocásticos. Seguidamente se describen de forma breve los fundamentos físicos de la generación, propagación y disipación del oleaje, para posteriormente señalar algunas características peculiares de los campos de oleaje resultantes de la combinación de más de un sistema individual de oleaje, conocidos como mares mixtos, y cuyo estudio centra la atención de este trabajo, destacando el interés que presenta el conocimiento de este tipo de condiciones de oleaje.

En el siguiente capítulo se presentan los fundamentos de las principales técnicas de análisis de las que se ha hecho uso para obtener información sobre las propiedades del oleaje, tanto en los dominios temporal, como en el de los desfases temporales y el frecuencial. Posteriormente se introducen las características básicas de las técnicas de simulación de registros de oleaje, y finalmente se describen las características de los registros experimentales utilizados, comentando las condiciones climáticas generales de la zona en la que se han realizado las observaciones experimentales.

En el tercer capítulo se examinan las características fundamentales de los distintos tipos de sistemas de oleaje individuales existentes, en los tres dominios anteriormente citados, de modo que sea posible comprender los rasgos distintivos de los campos de oleaje generados por la combinación de los mismos. Además, ello permitirá analizar la validez relativa de los modelos existentes para caracterizar este tipo de oleaje.

En los capítulos del 4 al 6 se examinan las características de los campos de oleaje bimodal en los dominios frecuencial, de los desfases temporales y probabilístico, respectivamente. Además, en ellos se analizan los correspondientes modelos empleados para caracterizar este tipo de oleaje, se examina su idoneidad y, en su caso, se proponen nuevos modelos, analizando y comparando su validez relativa, o bien se resalta la necesidad de desarrollar modelos alternativos que permitan una mejor caracterización de los distintos aspectos analizados.

Por último, en el capítulo 7 se presentan los principales resultados y conclusiones alcanzados en el presente trabajo y se indican las posibles líneas de trabajo a seguir, como consecuencia de los resultados obtenidos y de las cuestiones que permanecen abiertas.

1.2 Caracterización física y estocástica del oleaje

Dentro del conjunto de movimientos ondulatorios que tienen lugar en la superficie del océano, este trabajo centra su interés en aquellas ondas generadas directamente por la acción del viento y cuyas longitudes de onda van, aproximadamente, desde los centímetros a la pocas centenas de metros, mientras los periodos cubren el rango entre uno y treinta segundos, aproximadamente. En este rango de longitudes de onda y de periodos la fuerza predominante que tiende a reestablecer el equilibrio de la superficie libre del mar, perturbado por la acción del viento, es la fuerza gravitatoria terrestre, motivo por el cual estas ondas reciben el nombre de ondas gravitatorias generadas por el viento, o simplemente oleaje.

Es importante señalar que oleaje es el término genérico utilizado para designar a las ondas gravitatorias generadas por el viento en la superficie del océano y que éste puede ser subdividido en dos clases. Así, el *oleaje de viento* representa aquel oleaje que se encuentra dentro de la zona del océano donde el viento está transmitiendo energía de forma activa al campo de oleaje, mientras que el oleaje que ha abandonado la zona de generación y se propaga sobre la superficie del océano sin recibir energía del viento recibe el nombre de *oleaje de fondo.* En ocasiones, debido a su uso extendido entre la comunidad científica internacional y a su simplicidad, a lo largo del presente trabajo se hará referencia a estos dos tipos de oleaje empleando su denominación inglesa, es decir, el oleaje de viento será denominado como "wind-sea", o simplemente *sea*, y el oleaje de fondo como "swell". Además, el área de la superficie oceánica sobre la que el viento transmite energía al oleaje recibirá el nombre de *zona de generación*, o "fetch". En consecuencia, el término oleaje se refiere a las ondas generadas por el viento, independientemente de si estas se encuentran aún recibiendo energía del oleaje, si han salido de la zona de generación convirtiendose en oleaje de fondo, o si consisten en una combinación de oleaje de viento y de oleaje de fondo.

La característica más evidente del oleaje es la apariencia enormemente compleja que adquiere la superficie del mar en su presencia, tal como se observa en la figura 1.1. Esta estructura tan irregular del oleaje es fundamentalmente el resultado de la elevada aleatoriedad intrínseca a los mecanismos mediante los cuales el viento perturba la superficie del océano y da lugar a dicho fenómeno, motivo por el que después de más de un siglo de estudio la comprensión de los mismos dista sustancialmente de ser la deseable. La fuerte aleatoriedad de las estructuras espaciales y temporales del oleaje hace que su caracterización realista no pueda estar basada únicamente en fundamentos hidrodinámicos, siendo necesario recurrir a la teoría de los procesos estocásticos para abordar su estudio de un modo sistemático y eficiente. Por ello, en la siguiente sección se introducen los principios básicos de la teoría de ondas en la superficie del agua, para posteriormente revisar brevemente

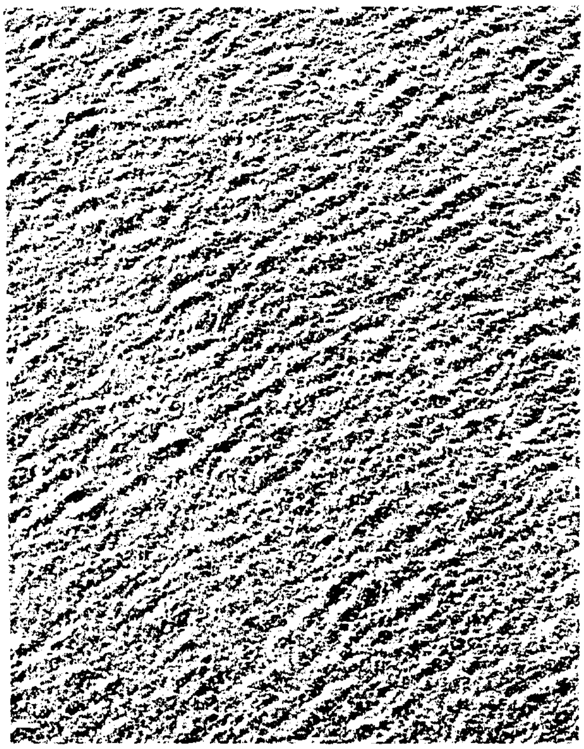

Figura 1.1: Imagen aérea de la superficie del mar ilustrando la complejidad de un campo de oleaje

los aspectros fundamentales de la teoría de los procesos estocásticos requeridos para la descripción del oleaje.

1.2.1 Descripción del oleaje en términos de la teoría de ondas lineales

Las principales hipótesis admitidas en el estudio de las ondas en la superficie de un volumen de agua son que ésta puede ser considerada como incompresible y no viscosa, así como que la única fuerza externa que actúa sobre dicho fluido es la debida a la atracción gravitatoria terrestre. En consecuencia, el movimiento ondulatorio resultante debe ser irrotacional y, por ello, el campo de velocidades de las partículas de fluido puede ser expresado como el gradiente de un potencial de velocidades, Φ. Esto es,

$$\vec{v} = -\nabla\Phi \tag{1.1}$$

Así, puesto que el agua es esencialmente incompresible, la ecuación de conservación de la masa (ec. de continuidad) adopta la expresión simplificada

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \tag{1.2}$$

Combinando las ecuaciones (1.1) y (1.2) se obtiene la conocida ecuación de Laplace

$$\nabla^2\Phi = 0 \tag{1.3}$$

Por otro lado, bajo las hipótesis admitidas previamente, la presión, p en el interior del fluido vendrá dada por la ecuación de Bernoulli. Es decir,

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + \frac{p}{\rho_w} + gz = 0 \tag{1.4}$$

donde g es la aceleración debida a la fuerza gravitatoria terrestre y ρ_w es la densidad del agua.

Las ecuaciones (1.3) y (1.4), conjuntamente con las oportunas condiciones de contorno, permiten derivar la expresión del potencial de velocidades, Φ. Para ilustrar los diferentes parámetros involucrados en estas condiciones considérese una onda de forma constante y longitud de onda L (o periodo $T = 1/f$) que se propaga en la dirección positiva del eje X, tal como se ilustran en la figura 1.2, donde h es la profundidad de la columna de fluido sobre la que se propaga la onda y que se admite constante. La onda es plana (bidimensional), es decir, con altura H constante a lo largo de las crestas y sustancialmente menor que la longitud de onda y la profundidad. Es decir, $H/L \ll 1$ y $H/h \ll 1$.

Condición de contorno dinámica en la superficie libre:

En la superficie libre, $z = \eta$, la presión es igual a la atmosférica. Así, admitiendo como valor de referencia para la presión el correspondiente a la presión atmosférica y que éste es nulo sobre toda la superficie, $p = 0$, (1.4) se reduce a

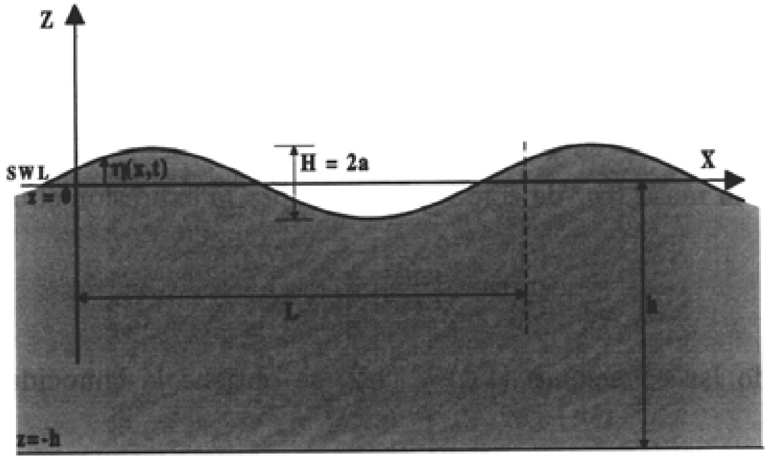

Figura 1.2: Ilustración esquemática de los parámetros característicos y el dominio de solución para la teoría de ondas lineal.

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial t}+g\eta=0\bigg|_{z=0} \tag{1.5}$$

donde el término representativo de las velocidades cuadráticas de las partículas de fluido ha sido despreciado por ser de orden $O[H/L]^2$. Es importante notar que esta condición de contorno ha sido aplicada en $z=0$, en lugar de en $z=\eta$ al haber admitido que la onda es de amplitud infinitesimal.

Condición de contorno cinemática en la superficie libre:

Esta condición implica que no es posible la existencia de transporte de fluido a través de la superficie libre. Por tanto, la velocidad vertical de la superficie libre debe ser igual a la velocidad vertical de las partículas de fluido que forman parte de la misma. Es decir,

$$w=\frac{D}{Dt}\eta(x,t)=\frac{\partial\eta}{\partial t}+u\frac{\partial\eta}{\partial x}\bigg|_{z=\eta} \tag{1.6}$$

Sustituyendo las expresiones de la velocidad w en términos del potencial de velocidades, y teniendo en cuenta que la pendiente de la superficie libre, $\partial\eta/\partial t$, será despreciable bajo la hipótesis de amplitud infinitesimal y que, por el mismo motivo, la condición de contorno puede considerarse aplicada en $z=0$, la ecuación (1.6) se reduce a

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \left.\frac{\partial \eta}{\partial t}\right|_{z=0} \tag{1.7}$$

Condición de contorno cinemática en el fondo:

Admitiendo un fondo impermeable, esta condición establece que no puede existir flujo a través del fondo sólido. Es decir, la componente normal de la velocidad en el fondo debe ser nula

$$w = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0\bigg|_{z=-h} \tag{1.8}$$

En definitiva el problema se reduce a la resolución de la ecuación de Laplace (1.3), sujeta a las condiciones de contorno (1.5), (1.7), y (1.8). Empleando el método de separación de variables es posible obtener como solución a este problema de valores de contorno la siguiente expresión para el potencial de velocidades

$$\Phi(x, z, t) = \frac{ag}{\omega} \frac{\cosh\left[k(h+z)\right]}{\cosh[kh]} \cos(kx - \omega t) \tag{1.9}$$

donde $a = H/2$ es la amplitud de la onda, $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$ su frecuencia angular, y $k = 2\pi/L$ el número de onda. A partir de la expresión (1.9) pueden derivarse las propiedades básicas de las ondas lineales en agua (ver, p.ej., LeBlond y Mysak, 1978). Así, por ejemplo, sustituyendo (1.9) en (1.5) y diferenciando respecto de t, se tiene que

$$\eta(x, t) = a \operatorname{sen}(kx - \omega t + \phi) \tag{1.10}$$

donde ϕ es la fase inicial. Es decir, la posición de la superficie libre del fluido varía de forma sinusoidal tanto en el espacio como en el tiempo.

Por otro lado, combinando (1.5) y (1.7) se tiene

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{1}{g} \left.\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}\right|_{z=0} \tag{1.11}$$

y sustituyendo (1.9) en (1.11) se obtiene la denominada relación de dispersión para ondas lineales, que establece la siguiente relación entre ω, k y h,

$$\omega^2 = gk \tanh(kh) \tag{1.12}$$

Es importante tener en cuenta que la expresión anterior es válida en ausencia de corrientes. En presencia de una corriente, la frecuencia de la onda se ve modificada por efecto Doppler, modificándose también el vector número de onda. En tal caso, la relación entre la frecuencia angular absoluta, ω_a, observada en un sistema de referencia estacionario, y la frecuencia angular relativa, ω_r, observada en un sistema de referencia que se desplaza con la corriente (de velocidad $\vec{u}$), viene dada por

$$\omega_a = \omega_r + \vec{k} \cdot \vec{u} \tag{1.13}$$

donde

$$\omega_a^2 = gk_0 \tanh(k_0 h) \tag{1.14}$$

y

$$\omega_r^2 = (\omega_a - \vec{k} \cdot \vec{u}) = gk \tanh(kh) \tag{1.15}$$

siendo k_o el módulo del vector número de onda en ausencia de corriente.

Admitiendo que no existen corrientes y teniendo en cuenta la definición de velocidad de fase, $\vec{c} = \frac{\omega}{k}$, de una onda, y sustituyendo en ella la relación de dispersión dada por (1.12) se tiene que su módulo es

$$c = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kh)} \tag{1.16}$$

expresión que pone de manifiesto que además de depender de la profundidad, la velocidad de propagación de una onda depende de su frecuencia y su longitud de onda, de modo que las ondas más largas viajarán con mayor velocidad que las más cortas. De forma análoga, teniendo en cuenta la definición de la velocidad de grupo, $\vec{c}_g$, y sustituyendo en ella la relación de dispersión se tiene que

$$\vec{c}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{(2kh)}{\operatorname{senh}(2kh)}\right) c\vec{n} \tag{1.17}$$

siendo $\vec{n}$ un vector unitario en la dirección perpendicular a la cresta de la onda.

Es interesante señalar que mientras la velocidad de fase, $\vec{c}$, representa la velocidad a la que viaja el perfil de onda, la velocidad de grupo, $\vec{c}_g$, es la velocidad con la que se propaga la energía de la onda. En consecuencia, teniendo en cuenta que la energía de una onda por unidad de área, también denominada energía específica, es

$$E = \frac{1}{8}\rho_w g H^2 = \frac{1}{2}\rho_w g a^2 \tag{1.18}$$

el flujo de energía puede ser expresado como

$$\vec{F} = E\,\vec{c}_g \tag{1.19}$$

En el presente trabajo el interés se centra en las *ondas de aguas profundas*. Es decir, aquellas para las cuales la profundidad de la columna de fluido es mucho mayor que su longitud de onda. Es decir, $L \ll h$, o $kh \gg 1$. En tal caso $\tanh(kh) \approx 1$, de modo que la relación de dispersión se reduce a

$$\omega^2 = gk \tag{1.20}$$

mientras los módulos de las velocidades de fase y de grupo adquieren las expresiones

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{g}{\omega} = \frac{g}{2\pi f} \tag{1.21}$$

$$c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{g}{4\pi f} \tag{1.22}$$

En la práctica, el límite de las aguas profundas se establece en $h/L \geq 1/2$, o $kh \geq \pi$.

Resulta inmediato extender la solución obtenida para el perfil de las ondas, dado por (1.10) en el caso de una onda viajando según el eje X, a la situación más general de una onda que se propaga formando un ángulo θ con dicho eje, tal como se ilustra en la figura 1.3. En tal caso, la expresión del perfil de la onda adquiere la expresión

$$\eta(x, y, t) = a\cos\left\{\frac{\omega^2}{g}(x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta) - \omega t + \phi\right\} \tag{1.23}$$

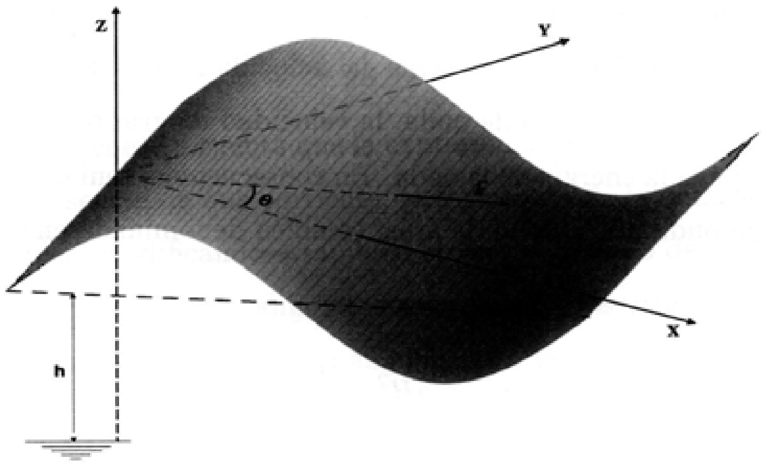

Figura 1.3: Ilustración de una onda progresiva viajando en una dirección arbitraria.

La teoría lineal de ondas representa la más simple de las posibles soluciones para el problema de valores de contorno anteriormente planteado. Naturalmente, las hipótesis simplificadoras admitidas en su desarrollo implican ciertas restricciones en su aplicabilidad. Así, en ésta se admite que la altura de las ondas es tan pequeña que las condiciones de contorno de superficie libre pueden ser aplicadas en el nivel medio en reposo del agua (S.W.L) en lugar de en la superficie perturbada $z = \eta$. En la naturaleza, el peralte del oleaje, H/L, raramente excede los valores en el rango 0.05-0.08 y, por tanto, la hipótesis de amplitud infinitesimal suele ser aceptable con frecuencia. No obstante, existen situaciones en que las hipótesis simplificadoras admitidas en esta teoría dejan de ser consistentes, haciéndose necesario recurrir al uso de teorías de onda no lineales, o de amplitud finita. Dichas teorías requieren que las condiciones de contorno sean evaluadas en la superficie libre, la cual es inicialmente desconocida al ser parte de la solución perseguida. En estos casos, la aproximación más comun para poder abordar de forma eficiente el problema está basada en el uso de métodos de perturbación, en los cuales se admite que la solución al problema no lineal puede ser aproximada mediante pequeñas correcciones de la teoría lineal.

Físicamente, la diferencia esencial entre la teoría de ondas lineal y las teorías no lineales es que éstas últimas consideran la influencia de la propia onda sobre posible si se conociesen todas las condiciones iniciales. Un procedimiento alternativo consiste en recurrir a un modelo simple basado en los fundamentos hidrodinámicos de las ondas superficiales en líquidos, comentadas brevemente en la sección anterior, y hacer uso de la teoría de los procesos estocásticos para introducir las características estadísticas del proceso. Este procedimiento ofrece la posibilidad de predecir desde un punto de vista estadístico las características de la compleja estructura de la superficie del mar. Por ello, a continuación se introducen de forma muy resumida algunos aspectos de interés de la teoría de los procesos estocásticos.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores sobre la variabilidad de la superficie libre del mar, resulta razonable considerar las fluctuaciones de la superficie libre del mar en un punto e instante dados, $\eta(x_0, y_0, t_i) = \eta(t_i) \equiv X(t_i)$ como una variable aleatoria. Es decir, al medir el valor del desplazamiento en un instante t_i se obtiene un valor que no es más que uno de los infinitos posibles valores que se podían haber observado, de entre el espacio muestral de la variable. En consecuencia, al medir un registro de oleaje durante un periodo de tiempo determinado se obtiene una secuencia de valores, $X^{(i)}(t)$, que representa una de las infinitas posibles secuencias que se podían haber dado, tal como se ilustra en la figura 1.4. Cada una de estas secuencias recibe el nombre de *realización* del proceso, y el conjunto de todas las realizaciones recibe el nombre de *ensemble.* De este modo, el proceso estocástico, o aleatorio, estaría representado por este conjunto de posibles realizaciones.

Una definición más estricta de proceso estocástico (en adelante, *p.e.*) puede obtenerse teniendo en cuenta que en el conjunto de realizaciones mostrado en la figura 1.4, para cualquier valor dado de t se tiene una variable aleatoria (en adelante, *v.a.*). Así, un *p.e.* denotado por $\{x(t), t \in \mathcal{T}\}$, puede ser definido como una familia de variables aleatorias $x(t)$, donde el parámetro t pertenece a un determinado conjunto índice $\mathcal{T}$.

Nótese que, aunque a lo largo de esta memoria el parámetro t representa el tiempo, en general éste puede ser otro parámetro, o conjunto de parámetros. En particular, si se desea caracterizar la variación espacial y temporal del oleaje, el *p.e.* a tener en cuenta será $\{\eta(\vec{x}, t); \vec{x} \in \mathcal{X}, t \in \mathcal{T}\}$, donde $\vec{x}$ representa el vector de posición de cada punto de la superficie del mar respecto al origen elegido. No

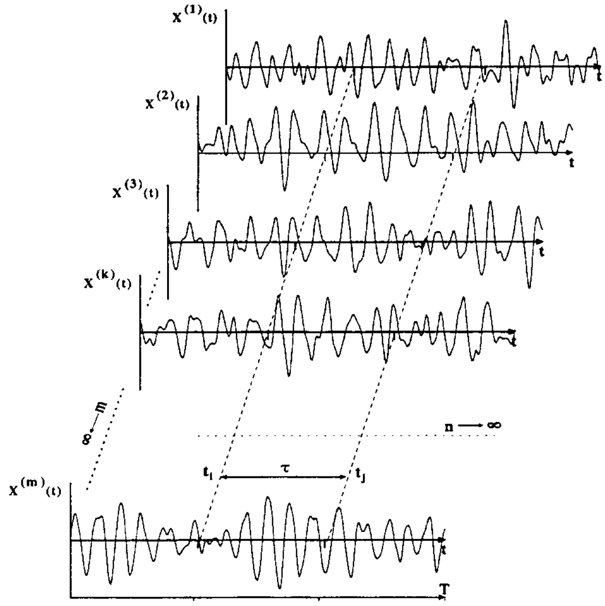

Figura 1.4: Ilustración del conjunto de realizaciones de un proceso estocástico.

obstante, el interés del presente trabajo se centra exclusivamente en la variación temporal de dicho fenómeno, por lo que el *p.e.* considerado podría ser denotado por $\{\eta(t)\} \equiv \{x(t)\}$. Por otra parte, es importante mencionar que si el parámetro considerado, t, tiene como rango de existencia toda la recta real, el *p.e.* recibe el nombre de proceso de parámetro continuo (tiempo continuo), mientras que si sólo toma un conjunto discreto de valores es denominado como *p.e.* de parámetro discreto (tiempo discreto). Además, las *v.a.* definidas para cada valor de t pueden ser discretas o continuas. En consecuencia, podemos distinguir cuatro tipos de *p.e.*: (a) discretos de variable discreta, (b) discretos de variable continua, (c) continuos de variable discreta y (d) continuos de variable continua.

Al igual que la mayoría de los procesos aleatorios encontrados en geofísica, el oleaje es un *p.e.* continuo de variable continua. Sin embargo, el almacenamiento de las observaciones en soporte digital y su procesamiento mediante técnicas computacionales hace necesario discretizar la señal analógica correspondiente, convirtiéndose así en un *p.e.* discreto de variable continua.

En principio, las propiedades estadísticas de un fenómeno aleatorio deben ser obtenidas con respecto al ensemble, es decir empleando un conjunto de muchos datos observados simultáneamente. Sin embargo, resulta evidente que al realizar medidas experimentales sólo es posible obtener una de las posibles realizaciones del proceso, es decir, en cada instante se obtiene un único valor. No obstante, admítase por un momento que se han obtenido todas las posibles realizaciones de un *p.e.* $\{x(t)\}$, con realizaciones $X^{(i)}(t)$, $(i = 1, 2, \cdots, \infty)$, tal como el ejemplo ilustrado en la figura 1.4. En un instante dado, $t = t_i$, el proceso se convierte en una *v.a.* continua, $X(t_i)$, denotada como X_i, y en cualquier otro instante, $t = t_j$, se tendrá otra *v.a.*, $X(t_j)$, designada por X_j. El comportamiento estadístico de cualquiera de las *v.a.*, por ejemplo X_i, está gobernado por su *función de distribución de probabilidad acumulada* (*FDP*), o simplemente *función de distribución*, dada por

$$F(x) = Prob[X_i \leq x] \tag{1.24}$$

o, de forma equivalente, por la *función de densidad de probabilidad* (*fdp*), $f(x)$, definida por

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \tag{1.25}$$

A partir de la cual es posible definir el *momento de orden r respecto al origen* $(x = 0)$ de dicha *v.a.* como

$$m_r = E\left[X_i^r\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)dx \tag{1.26}$$

donde $E[\ ]$ representa el operador esperanza matemática, e implícitamente expresa promedios calculados "*a través*" del conjunto de realizaciones. De especial interés son los momentos de orden uno y dos. El primero de ellos, representa el *valor medio* de X_i, designado por μ_x

$$\mu_x = E\left[X\right] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \tag{1.27}$$

El segundo, es el *valor medio cuadrático* de X,

$$E\left[X_i^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx \tag{1.28}$$

cuya raiz cuadrada positiva recibe el nombre de *raiz media cuadrática.*

De modo análogo, se definen los *momentos respecto a la media*, o *momentos centrales*, *de orden* r como

$$\mu_r = E\left[(X_i - \mu_x)^r\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^r f(x)dx \tag{1.29}$$

En particular, el momento central de orden dos es la *varianza*, designada por σ_x^2

$$\sigma_x^2 = \mu_2 = E\left[(X_i - \mu_x)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 f(x)dx \tag{1.30}$$

Por otro lado, el comportamiento estadístico conjunto de dos *v.a.*, $X(t_i) \equiv X_i$ y $X(t_j) \equiv X_j$, (*v.a.* bidimensional), queda caracterizado por su *función de distribución de probabilidad conjunta* (*FDPC*), *bidimensional*, dada por

$$F(X_i, X_j) = Prob[X_i \leq x_i, X_j \leq x_j] \tag{1.31}$$

o por su *función de densidad de probabilidad conjunta* (*fdpc*) *bidimensional*, $f(x_i, x_j)$, definida por

$$F(X_i, X_j) = \int_{-\infty}^{x_j} \int_{-\infty}^{x_i} f(x_i, x_j)dx_i dx_j \tag{1.32}$$

a partir de la cual se definen los *momentos de orden* q *y* r*, respecto al origen* $(x_i = 0, x_j = 0)$, de una *v.a.* bidimensional, como

$$m_{qr} = E\left[X_i^q X_j^r\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_i^q x_j^r f(x_i, x_j)dx_i dx_j \tag{1.33}$$

y los *momentos centrales de orden* q *y* r como

$$\mu_{qr} = E\left[(X_i - \mu_{x_i})^q \left(X_j - \mu_{x_j}\right)^r\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \mu_{x_i})^q \left(x_j - \mu_{x_j}\right)^r f(x_i, x_j)dx_i dx_j \tag{1.34}$$

Un caso particular de especial interés es el momento central de órdenes $q = r = 1$, que recibe el nombre de *covarianza*, denotada por $Cov[X_i, X_j]$, o simplemente como $C(X_i, X_j)$, y viene dada por

$$\mu_{11} = C(X_i, X_j) = E\left[(X_i - \mu_{x_i})\left(X_j - \mu_{x_j}\right)\right] \tag{1.35}$$

o bien, en función de los momentos respecto al origen,

$$C(X_i, X_j) = E\left[(X_i - \mu_{x_i})\left(X_j - \mu_{x_j}\right)\right] = E[X_i X_j] - \mu_{x_i}\mu_{x_j} = m_{11} - m_{10}m_{01} \tag{1.36}$$

Dado que el *p.e.* $\{X(t)\}$, está constituido por un conjunto de n *v.a.*, asociadas a los instantes, $t_1, t_2, \cdots, t_n$ $(n \to \infty)$, cada una de las cuales está gobernada por su correspondiente *fdp*, el *p.e.* quedará completamente especificado, en sentido estadístico, si la *FDPC n-dimensional*,

$$F[x_1, x_2, \cdots, x_n] = Prob[X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \cdots, X(t_n) \leq x_n] \tag{1.37}$$

o bien la *fdpc n-dimensional*,

$$f[x_1, x_2, \cdots, x_n] \tag{1.38}$$

de las n *v.a.* $X(t_1), X(t_2), \cdots X(t_n)$ es conocida para todos los instantes $t_1, t_2, \cdots t_n$. En consecuencia, en general, la especificación completa de un proceso estocástico es extremadamente compleja, si no imposible.

En definitiva, a la hora de caracterizar un *p.e.* se plantean dos problemas principales. En primer lugar, su completa caracterización implica la determinación de la *fdpc n-dimensional.* Por otro lado, las distintas *fdp*, tanto univariadas como conjuntas (de orden $1, 2, \cdots, n$) deben ser evaluadas haciendo uso de todas las posibles realizaciones del proceso, mientras que en la práctica sólo se puede disponer de una de ellas, la observada experimentalmente.

No obstante, además de en función de la continuidad, o no, del parámetro independiente, t, y la *v.a.*, los *p.e.* pueden ser clasificados en términos de su *"regularidad"* estadística. Según esta clasificación los procesos aleatorios pueden ser *estacionarios* y *no estacionarios*.

De acuerdo con lo comentado anteriormente, la *FDPC* de orden n de un *p.e.* $F(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n)$ posee, en general, una dependencia explícita con los valores de los parámetros temporales $t_1, t_2, \cdots, t_n$. Es decir, el comportamiento estadístico del proceso es función del origen absoluto de tiempos considerado. Esta clase de *p.e.* recibe el calificativo de *no estacionarios*. Es importante resaltar que la mayor parte de los fenómenos físicos de naturaleza aleatoria pertenece a este grupo. En particular, el oleaje suele comportarse como un proceso no estacionario. Sin embargo, bajo determinadas condiciones, las propiedades estadísticas de éste y otros fenómenos aleatorios, no varían significativamente en función del tiempo, al menos en un intervalo temporal adecuado. Es decir, a pesar de su naturaleza aleatoria, las distribuciones de probabilidad asociadas no se ven sustancialmente modificadas por una traslación arbitraria respecto al parámetro tiempo. Este tipo de procesos recibe el nombre de *estacionarios*.

La definición estricta de estacionareidad requiere que las *FDPC*, o equivalentemente las *fdpc*, del proceso sean invariantes en el tiempo. Es decir,

$$F(X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n); t_1, t_2, \cdots, t_n) = \\ F(X(t_1+\tau), X(t_2+\tau), \cdots, X(t_n+\tau); t_1+\tau, t_2+\tau, \cdots, t_n+\tau) \tag{1.39}$$

para cualquier instante t e intervalo temporal τ. En otras palabras, para un *p.e.* estacionario la dependencia de sus *FDPC* con el tiempo es únicamente a través de sus diferencias, τ, pero no del origen absoluto de dicho parámetro. Cuando un *p.e.* verifica dicha condición se dice que es *estrictamente estacionario*, o *fuertemente estacionario*.

La independencia respecto al origen de t debe verificarse para las sucesivas *FDPC* de orden superior. Sin embargo, para un problema físico dado, el cálculo de las *FDPC* hasta el orden n-ésimo es difícilmente realizable.

En particular, la estacionariedad de primer orden implica que

$$f(x(t_i)) = f(x(t_i + \tau)) = f(x) \tag{1.40}$$

para cualquier valor de τ. Es decir, la *fdp* univariada es equivalente para cualquier instante de tiempo. Por otro lado la estacionariedad de segundo orden implica que

$$f(x(t_i), x(t_j)) = f(x(t_i + \tau), x(t_j + \tau)) \tag{1.41}$$

para cualquier valor de τ. Nótese que la condición anterior no implica una independencia de la *fdp* de segundo orden respecto al tiempo. La independencia es con relación al origen de tiempos, pero no con respecto a las diferencias temporales τ. Así, considerando dos instantes de tiempos cualesquiera, t_p y t_q, tales que $t_q - t_p = t_j - t_i = \tau$, se deberá verificar que

$$f(x(t_i), x(t_j)) = f(x(t_p), x(t_q)) \tag{1.42}$$

Condición que sólo es cierta si la *fdpc* únicamente es función de τ, es decir

$$f(x(t_i), x(t_j)) = f(x(t_p), x(t_q)) = f(x_i, x_j, \tau) \tag{1.43}$$

Un proceso que verifica las condiciones dadas por (1.40) y (1.41), se dice estacionario en segundo orden. No obstante, en la práctica, la condición de estacionareidad se suele establecer atendiendo únicamente a los momentos de primer y segundo orden. Naturalmente, para un $p.e.$ $\{x(t)\}$ que satisface la condición (1.40) se tiene que

$$E[x(t_i)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_i f(x(t_i)) dx_i = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx_i = E[x] = \mu_x \tag{1.44}$$

y también

$$E\left[(x(t_i) - E[x(t_i)])^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[(x(t_i) - \mu_{x_i})^2\right] f(x(t_i)) dx_i = \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \mu_{x_i})^2 f(x_i) dx_i = \sigma_{x_i}^2 \tag{1.45}$$

Si dicho $p.e.$ satisface, además, la condición (1.41) se tendrá que,

$$
\begin{aligned}
C(x(t_i), x(t_j)) &= E\left[(x(t_i) - \mu_x)\,(x(t_j) - \mu_x)\right] \\
&= \mu_x^2 + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(t_i)x(t_j)f(x(t_i), x(t_j))dx_i dx_j \\
&= \mu_x^2 + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_i x_j f(x_i, x_j, \tau) dx_i dx_j \\
&= C(\tau) = R(\tau) - \mu_x^2
\end{aligned}
\tag{1.46}
$$

para todo τ, donde la función $R(\tau)$ es definida como

$$
R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_i x_j f(x_i, x_j, \tau) dx_i dx_j = C(\tau) + \mu_x^2 \tag{1.47}
$$

De acuerdo con los resultados anteriores, si para un proceso aleatorio se verifican las siguientes condiciones

$$
\left\{
\begin{aligned}
|E\{x(t_i)\}| &= \mu_x \quad \text{constante} < \infty \\
E\left[(x(t_i) - \mu_x)\,(x(t_j) - \mu_x)\right] &= \sigma_x^2 \quad \text{constante} < \infty \\
E\{x(t_i)x(t_j)\} = R(t_j - t_i) &= R(\tau) < \infty
\end{aligned}
\right.
\tag{1.48}
$$

éste recibe el nombre de *p.e. débilmente estacionario*, *estacionario en sentido amplio*, o *estacionario en la covarianza.*

Es obvio que cualquier *p.e.* estacionario en sentido estricto, es decir, que verifique la condición (1.39), y cuyos momentos hasta el segundo orden existen (son finitos), es tambien débilmente estacionario. Sin embargo, en general, la relación inversa no es cierta. En realidad ésta sólo es cierta en casos muy particulares, tal como en el caso de los procesos aleatorios Gaussianos, cuyas *fdpc* quedan determinadas para cualquier orden sólo con la media y la covarianza.

En definitiva, admitiendo la estacionariedad del proceso, al menos en sentido amplio, el problema de la estimación de la función de densidad de probabilidad conjunta n-dimensional, se reduce a la obtención de los momentos estadísticos de primer orden, μ_x, y segundo orden, σ_x^2, y $C(\tau)$.

Estos estadísticos deben ser estimados mediante promedios aplicados sobre el conjunto de realizaciones, o *ensemble*, del proceso en instantes específicos de tiempo.

Sin embargo, ya se ha indicado que, en la práctica, sólo es posible obtener una de las posibles realizaciones. El procedimiento usual para aliviar este problema consiste en admitir que el registro temporal (realización) obtenido experimentalmente corresponde a un *p.e. ergódico.* De forma simple, un proceso ergódico es aquel para el cual los estadísticos obtenidos mediante promedios temporales sobre una única muestra del proceso son aproximadamente iguales a los obtenidos mediante promedios sobre el *ensemble.* En otras palabras, los estadísticos calculados sobre diferentes realizaciones no difieren.

Así, por ejemplo, considerando el instante de tiempo t_i en el proceso aleatorio ilustrado en la figura 1.4, el valor medio sobre el ensemble para dicho instante es expresado como una esperanza matemática,

$$E[x(t_i)] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x^{(n)}(t_i) \tag{1.49}$$

Mientras que si admitimos que se dispone de la realización k-ésima, de duración T, del *p.e.* de la figura 1.4., se podrá obtener la media temporal como

$$\langle x^k(t)\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{m=1}^{M} x^{(k)}(t)dt \tag{1.50}$$

o bien, para procesos de tiempo continuo

$$\langle x^k(t)\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^{(k)}(t)dt \tag{1.51}$$

Entonces, si el proceso es ergódico se tendrá que

$$E[x(t)] = \mu_x = \langle x^k(t)\rangle \tag{1.52}$$

y

$$E[x(t)x(t+\tau)] = R_x(\tau) = \langle x^k(t)x^k(t+\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^{(k)}(t)x^{(k)}(t+\tau)dt \tag{1.53}$$

De forma intuitiva, puede decirse que en un proceso ergódico la realización observada $x^{(k)}$ es estadísticamente representativa de todas las demás del *ensemble.*

En consecuencia, en un proceso ergódico, $\{x(t)\}$, el valor medio temporal, la varianza y la covarianza, así como otras propiedades obtenidas mediante promedios temporales, son iguales a los correspondientes promedios evaluados sobre el ensemble. Es importante notar que si un proceso es ergódico también debe ser estacionario, pero un proceso aleatorio estacionario no tiene porqué ser ergódico.

Los procesos ergódicos son una clase bastante especial dentro del conjunto de los *p.e.*, dado que todas sus propiedades pueden ser determinadas realizando promedios sobre una única muestra. Afortunadamente, en la práctica los datos aleatorios que representan fenómenos físicos estacionarios son generalmente ergódicos. Por ello, en general, en el análisis de datos experimentales correspondientes a procesos físicos se asume la ergodicidad del proceso subyacente, de modo que las propiedades estadísticas del mismo pueden ser evaluadas a partir de un único registro. En consecuencia, en lo sucesivo los registros experimentales medidos y simulados serán considerados como muestras de un proceso ergódico. Además, en adelante, el operador $E[\,]$ se empleará para representar promedios temporales.

Descripción espectral del oleaje

En la práctica, siguiendo el procedimiento estocástico, la elevación de la superficie libre del mar es caracterizada generalmente como la superposición lineal de un número, (N), elevado de ondas lineales, de modo que cada onda componente posee su propia amplitud, a_n, frecuencia, ω_n, longitud de onda, L_n, y dirección de propagación, θ_n, tal como se ilustra en la figura 1.5. Así, empleando un sistema de coordenadas cartesianas (X, Y, Z), con el eje Z dirigido según la vertical, con su origen situado en la posición del nivel medio del mar en reposo (S.W.L.), y los ejes X e Y en el plano definido por dicho nivel, la estructura de la superficie libre del mar puede ser descrita mediante la siguiente expresión

$$\eta(\vec{x}, t) = \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\left(\vec{k_n} \cdot \vec{x} - \omega_n t + \phi_n\right) \tag{1.54}$$

donde ϕ_n es la fase inicial de la componente $n-$ésima, $\vec{x}$ es el vector de posición

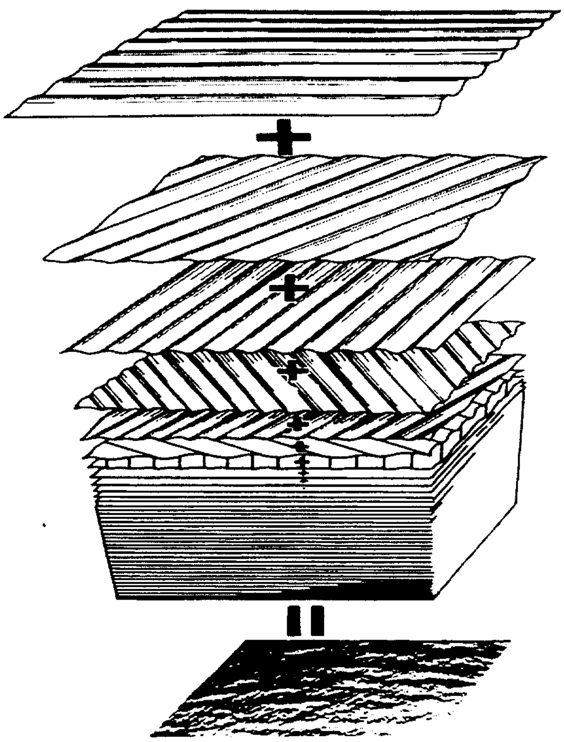

Figura 1.5: Modelo de oleaje lineal para caracterizar la estructura del oleaje real (Pierson, 1955).

$$\vec{x} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$\vec{k_n}$ el vector número de ondas

$$\vec{k_n} = k_n \cos\theta\vec{i} + k_n \operatorname{sen}\theta\vec{j} = k_{x_n}\vec{i} + k_{y_n}\vec{j}$$

y θ_n es la dirección de propagación de la componente n-ésima respecto al eje X.

Teniendo en cuenta la relación de dispersión para aguas profundas (1.20), la ecuación (1.54) puede ser expresada como

$$\eta(\vec{x}, t) = \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\left\{\frac{\omega_n^2}{g}(x\cos\theta_n + y \operatorname{sen}\theta_n) - \omega_n t + \phi_n\right\} \tag{1.55}$$

donde a_n, ω_n, θ_n, y ϕ_n son variables aleatorias, cubriendo los rangos $0 \leq a_n \leq \infty$, $0 \leq \omega_n \leq \infty$, $0 < \theta_n < 2\pi$, y $0 < \phi_n < 2\pi$, respectivamente.

Asumiendo que todas las fases, ϕ_n, son estadísticamente independientes y están uniformemente distribuidas en el intervalo $(0, 2\pi)$, el teorema central del límite establece que la elevación de la superficie libre en un punto dado, $\eta(x_0, y_0, t)$, sigue una distribución Gaussiana (ver sec. [2.1.2]). Por ello, el modelo de oleaje dado por la ecuación (1.54) recibe el nombre de modelo de fases aleatorias, modelo Gaussiano, o modelo lineal de oleaje aleatorio.

Según el modelo lineal de oleaje, $\eta(\vec{x}, t)$ representa un proceso estocástico Gaussiano estacionario en el tiempo y homogéneo en el espacio, cuyas características estadísticas quedan completamente determinadas por su función de covarianza, dada para un *p.e.* en general por (1.35; 1.36) y para un proceso estacionario por (1.46), que para un proceso ergódico (en el tiempo) y homogéneo adopta la forma

$$C(\vec{r}, \tau) = \langle \eta(\vec{x}, t)\eta(\vec{x} + \vec{r}, t + \tau) \rangle \tag{1.56}$$

donde $\vec{r}$ es el vector desplazamiento, τ es el desfase temporal y $\langle\ \rangle$ denota el promedio temporal sobre una realización del proceso. Si bien esta función describe completamente las características estadísticas de un campo de oleaje lineal, estacionario y homogéneo, generalmente se considera más conveniente el uso de la función de densidad espectral de varianzas, definida como la transformada de Fourier de la función de covarianza y dado por

$$S(\vec{k}, f) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C(\vec{r}, \tau) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r} + 2\pi f \tau)} d\vec{r}\, d\tau \tag{1.57}$$

donde $S(\vec{k}, f)$ es la función de densidad espectral de varianzas tridimensional.

Resulta interesante notar que la varianza del proceso, σ_η^2,viene dada por

$$\sigma_\eta^2 = C(0, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(\vec{k}, f) d\vec{k}\, df \tag{1.58}$$

El producto de la varianza de las elevaciones de la superficie del mar por la densidad del agua, ρ_w, y por la aceleración gravitatoria, g, representa la energía del oleaje por unidad de área. Debido a esta estrecha relación entre la varianza y la energía del oleaje, el espectro de varianzas suele recibir el nombre de espectro de energía. Esta función también suele ser denominada espectro de potencia, o simplemente espectro.

Debido a que, en general, la información disponible para analizar las propiedades de un campo de oleaje no incluye simultaneamente la variación espacial y temporal del mismo, el espectro tridimensional dado por (1.57) no suele ser una representación conveniente para el estudio del oleaje. Por ello, suelen emplearse versiones reducidas del mismo, obtenidas mediante la proyección en sub-espacios del espacio de números de onda y frecuencias, tales como el sub-espacio de números de onda, el de frecuencias y direcciones, o el de frecuencias. Así, la integración de $S(\vec{k}, f)$ con respecto a la frecuencia permite obtener el espectro bidimensional de números de onda, $S(\vec{k})$. Teniendo en cuenta que el espectro tridimensional es una función par de la frecuencia, $S(\vec{k})$ queda expresado por

$$S(\vec{k}) = 2\int_0^\infty S(\vec{k}, f)df \tag{1.59}$$

siendo la varianza del proceso en este caso

$$\sigma_\eta^2 = \int_0^\infty S(\vec{k})d\vec{k} = \int_0^\infty\int_0^\infty S(k_x, k_y)dk_x\,dk_y \tag{1.60}$$

donde k_x y k_y son las componentes del vector número de ondas en las direcciones x e y.

Empleando la relación de dispersión (1.20) el espectro bidimensional de número de ondas $S(\vec{k})$ puede ser expresado como una función de la frecuencia, f, y la dirección, θ, obteniéndose el denominado espectro direccional, $S(f, \theta)$, dado por

$$S(f, \theta) = S(\vec{k})J \tag{1.61}$$

donde J es el Jacobiano de la transformación, dado por

$$J = \frac{\partial\vec{k}}{\partial(f, \theta)} = \frac{4\pi}{\sqrt{g}}k^{3/2} \tag{1.62}$$

o bien en términos de la frecuencia angular

$$S(\omega, \theta) = \frac{S(f, \theta)}{2\pi} \tag{1.63}$$

con la varianza dada por

$$\sigma_\eta^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} S(f, \theta) df\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} S(\omega, \theta) d\omega\, d\theta \tag{1.64}$$

También es frecuente expresar el espectro de número de onda en términos del módulo del vector número de onda y el ángulo correspondiente $[\vec{k} \equiv (k \cos\theta, k \operatorname{sen}\theta)]$. Estos espectros están relacionados por la siguiente igualdad

$$S(\vec{k}) d\vec{k} = S(k, \theta) k\, dk\, d\theta \tag{1.65}$$

La situación más común es aquella en la que se dispone de información sobre las fluctuaciones de la superficie del mar en un único punto del océano, $(\vec{k} = 0)$, careciendo de información relativa a la dirección de propagación de las ondas, tal como ocurre en el presente trabajo. En tales casos es necesario reducir el espectro direccional a un espectro frecuencial, eliminando la dependencia de la energía del oleaje que se registra en dicho punto con la dirección de propagación de las ondas. Esto es equivalente a admitir que todas las ondas se aproximan al punto de medida en la misma dirección.

El espectro de frecuencias se obtiene a partir del espectro bidimensional, $S(f, \theta)$, integrando con respecto a la dirección. Es decir,

$$S(f) = \int_0^{2\pi} S(f, \theta) d\theta \tag{1.66}$$

o en términos de la frecuencia angular

$$S(\omega) = \int_0^{2\pi} S(\omega, \theta) d\theta = \frac{S(f)}{2\pi} \tag{1.67}$$

Nótese que ambos espectros están simplemente relacionados por

$$\begin{gathered} S(\omega) d\omega = S(f) df \\ S(f) = S(\omega) \tfrac{d\omega}{df} = 2\pi S(\omega) \end{gathered} \tag{1.68}$$

siendo la varianza del proceso

$$\sigma_\eta^2 = \int_0^\infty S(f)df = \int_0^\infty S(\omega)d\omega \tag{1.69}$$

Aún en el caso de que los registros de oleaje disponibles no contengan información sobre la dirección de propagación del oleaje, es posible realizar una conversión entre el espectro frecuencial y el espectro de bidimensional de números de onda para una dirección específica haciendo uso de la relación de dispersión. Así, el espectro frecuencial, tambien denominado espectro escalar, puede ser transformado en el espectro de números de onda en una dirección dada mediante la siguiente relación

$$S(k) = S(f)\frac{df}{dk} \tag{1.70}$$

que para condiciones de aguas profundas adopta la forma

$$S(k) = \left[\frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{g}{k}}\right] S(f) \tag{1.71}$$

La ecuación (1.55), que representa la estructura aleatoria de la superficie del mar, puede ser rescrita tal como sigue

$$\eta(x, y, t) = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} a_{mn}\cos\left[k_m(x\cos\theta_n + y\,\mathrm{sen}\,\theta_n) - 2\pi f_m t + \phi_{mn}\right] \tag{1.72}$$

donde a_{mn} y ϕ_{mn} representan la amplitud y la fase inicial, respectivamente, de las componentes con frecuencias y direcciones comprendidas en los rangos $(f_m, f_m+\Delta f)$ y $(\theta_n, \theta_n + \Delta\theta)$, respectivamente.

Entonces, considerando la expresión de la energía para una onda lineal dada por (1.18) y la relación existente entre el espectro direccional y la varianza del proceso, dada por (1.64), resulta inmediato demostrar que

$$S(f_m, \theta_n)\Delta f\Delta\theta = \frac{E[a_{mn}^2]}{2} \tag{1.73}$$

representa la energía media (varianza por haber eliminado el factor $\rho_w g$ de la expresión de la energía de una onda) en el rango de frecuencias y direcciones antes indicado, donde $E[\,]$ denota el operador esperanza matemática.

Así, teniendo en cuenta que el número discreto de ondas elementales consideradas en la expresión (1.72) es extremadamente elevado, ($M \rightarrow \infty$), mientras que $\Delta f \rightarrow 0$ y $\Delta\theta \rightarrow 0$, el sumatorio puede ser representado como una integral respecto a f y θ. De este modo, la superficie del mar puede ser expresada mediante la siguiente representación integral estocástica (Pierson, 1955),

$$\eta(x,y,t) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \cos\left\{\frac{(2\pi f)^2}{g}(x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta) - 2\pi f t + \phi(f,\theta)\right\}\sqrt{2S(f,\theta)df\,d\theta} \tag{1.74}$$

No obstante, debe tenerse en cuenta que las integrales en la ecuación anterior no son integrales en el sentido de Riemann (Longuet-Higgins, 1957), sino una simple abstracción matemática, pudiendo ser interpretadas como *pseudo-integrales.*

Con frecuencia resulta interesante expresar la ecuación (1.74) en la siguiente forma vectorial

$$\eta(\vec{x},t) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \cos\left(\vec{k}\cdot\vec{x} - 2\pi f t + \phi\right) dA(f,\theta) \tag{1.75}$$

o, de modo equivalente

$$\eta(\vec{x},t) = \mathrm{Re}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-2\pi f t+\phi\right)} dA(f,\theta) \tag{1.76}$$

donde Re indica la parte real, $A(f,\theta)$ representa la amplitud compleja y $dA(f,\theta)$ denota un elemento diferencial en el espacio bidimensional (f,θ). Más explícitamente,

$$dA(f,\theta) = [A(f+df,\theta+d\theta) - A(f+df,\theta) - A(f,\theta+d\theta) + A(f,\theta)] \tag{1.77}$$

En el caso común de la representación del oleaje en el dominio frecuencial en un punto dado y sin considerar la dirección de propagación del oleaje, la contribución esperada a la varianza del proceso de las componentes cuya frecuencia está comprendida en el intervalo $(f_m, f_m + \Delta f)$ puede ser expresada por

$$S(f_m)\Delta f = \frac{E[a_m^2]}{2} \tag{1.78}$$

En estas condiciones, la representación de la superfície libre dada por (1.72) adquiere la siguiente expresión

$$\eta(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(2\pi f_n t + \phi_n) \tag{1.79}$$

donde a_n y ϕ_n son variables aleatorias. La ecuación (1.79) puede ser expresada de modo equivalente a (1.74) tal como sigue,

$$\eta(t) = \int_0^{\infty} \sqrt{2S(f)\Delta f} \cos(2\pi f_n t + \phi_n) \tag{1.80}$$

que en forma discreta, para $N \to \infty$, adopta la forma

$$\eta(t) = \sum_{n=1}^{N} \sqrt{2S(f_n)\Delta f} \cos(2\pi f_n t + \phi_n) \tag{1.81}$$

Las expresiones (1.79-1.81) representan un modelo de oleaje unidireccional Gausiano, en el que se consideran las fluctuaciones de la superficie del mar en un punto como la superposición lineal de un número elevado de ondas lineales, sin tener en cuenta la dirección asociada a cada una de ellas, o lo que es equivalente, admitiendo que todas las ondas se propagan en la misma dirección, tal como se ilustra en la figura 1.6.

1.2.2 Generación, propagación y disipación del oleaje

En la sección previa se introdujo el concepto de espectro del oleaje para caracterizar el contenido energético de un campo de oleaje estacionario y homogéneo, en sus diferentes formas. En esta sección se describen de forma breve los diferentes factores que contribuyen a la evolución del espectro de energía del oleaje, introduciendo para ello la denominada ecuación del balance energético, también denominada ecuación de transferencia radiativa o ecuación del transporte de energía

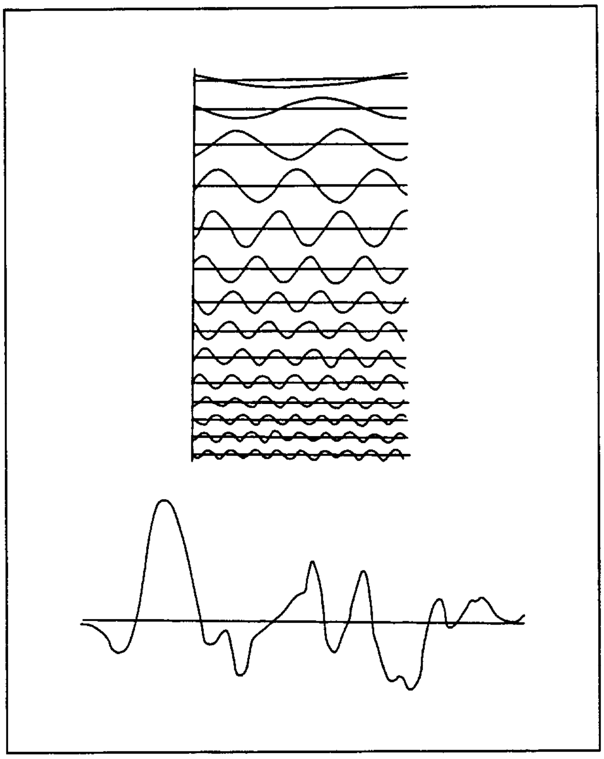

Figura 1.6: Modelo de oleaje lineal unidireccional para caracterizar la estructura del oleaje real.

del oleaje (Gelci et al., 1956; Hasselmann, 1960), como herramienta fundamental para comprender la evolución del espectro del oleaje en los dominios espacial y temporal.

Admitiendo que la acción del viento es la única fuente de entrada de energía al oleaje, resulta evidente que la energía, o el momento, total acumulado por éste con el tiempo no puede ser superior al que le ha transmitido el viento. Por otro lado, la rotura del oleaje es un proceso disipativo, por lo cual sólo puede extraer energía del campo de oleaje. Además, tal como se comentó en la sección anterior, el oleaje puede ser considerado como el resultado de la superposición de un número muy elevado de ondas lineales individuales. En consecuencia, es posible que algunas de éstas ondas componentes den lugar a combinaciones que permitan el intercambio de energía mediante interacciones no lineales. Estos procesos, es decir, el aporte de energía desde el viento, la disipación por rotura y el intercambio de energía entre componentes mediante interacciones no lineales, constituyen la base del conocimiento actual sobre el balance de energético del oleaje.

Ecuación del balance de energía

La ecuación del transporte de energía en aguas profundas puede ser expresada como

$$\frac{dQ}{dt} = \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial t}}_{a} + \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{dx}{dt}}_{b} + \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial y}\frac{dy}{dt}}_{c} + \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial k_x}\frac{dk_x}{dt}}_{d} + \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial k_y}\frac{dk_y}{dt}}_{e} = \mathcal{S}_T(\vec{k}, t; x, y) \qquad (1.82)$$

donde $Q \equiv Q(\vec{k}, t; x, y)$ representa el espectro de energía en el espacio de los números de onda, $S(\vec{k})$, en el instante de tiempo t y en la posición (x, y). $\mathcal{S}_T$ denota la función fuente neta y representa a todos los procesos físicos que suministran o extraen energía de las componentes espectrales del oleaje, o bien la intercambian entre éstas.

En la ecuación (1.82), el término a representa la variación temporal, o local, de la energía, los términos b y c indican la variación espacial, o la advección, de energía, mientras los términos d y e tienen en cuenta las variaciones de energía generadas por efectos de asomeramiento y refracción. En aguas profundas no existen variaciones del número de onda por asomeramiento o refracción, de modo que los términos d y e pueden ser eliminados de la ecuación (1.82).

En consecuencia, para aguas profundas, la ecuación del transporte de energía se reduce a

$$\frac{dQ}{dt} = \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial t}}_{a} + \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{dx}{dt}}_{b} + \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial y}\frac{dy}{dt}}_{c} = \mathcal{S}_T \qquad (1.83)$$

En la práctica el espectro del oleaje no suele ser estimado en términos del vector número de onda sino como función de la frecuencia y la dirección. Así, considerando la relación entre ambas formulaciones del espectro, dada por (1.61), que puede ser expresada como

$$Q \equiv S(\vec{k}) = \left[\frac{c\,c_g}{4\pi^2 f}\right] S(f,\theta) \tag{1.84}$$

y que, en ausencia de corrientes y de difracción, la energía del oleaje se propaga a lo largo de las ortogonales (curvas tangentes en todo punto al vector número de ondas) con velocidad $\vec{c}_g$, de modo que la frecuencia permanece constante a lo largo de las ortogonales, cuya ecuación característica es

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{c}_g \tag{1.85}$$

es decir,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= c_g \cos\theta \\ \frac{dy}{dt} &= c_g \operatorname{sen}\theta \end{aligned} \tag{1.86}$$

es posible demostrar (p.ej., Sobey, 1986) que la ecuación del balance energético puede ser expresada como

$$\frac{\partial S(f,\theta;x,y,t)}{\partial t} + \vec{c}_g \cdot \nabla S(f,\theta;x,y,t) = \mathcal{S}_T \tag{1.87}$$

donde

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j}$$

de modo que

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \left[(c_g \cos\theta)\,\frac{\partial S}{\partial x} + (c_g \operatorname{sen}\theta)\,\frac{\partial S}{\partial y}\right] = \mathcal{S}_T \tag{1.88}$$

El primer término de la parte izquierda de la igualdad da cuenta de la variación temporal de la energía del oleaje y el segundo término representa la propagación de ésta. La parte derecha de la igualdad es el término fuente total en aguas profundas, el cual incluye la transferencia de energía desde el viento, $\mathcal{S}_{in}$, la disipación por rotura del oleaje en aguas profundas, $\mathcal{S}_{ds}$, y las interacciones no lineales, $\mathcal{S}_{nl}$. Es decir,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \vec{c}_g \cdot \nabla S = \mathcal{S}_{in} + \mathcal{S}_{ds} + \mathcal{S}_{nl} \tag{1.89}$$

Los conocimientos actuales sobre los diferentes procesos físicos involucrados en la función fuente dista considerablemente del nivel requerido para la caracterización exacta de los distintos términos de esta función. No obstante, desde comienzos de los años 50 hasta la actualidad se han logrado avances significativos en este sentido. A continuación se describen de forma resumida las expresiones empleadas para caracterizar cada uno de estos términos, un desarrollo exhaustivo de éstos puede encontrarse en Komen et al (1994). No obstante, con el fin de facilitar la descripción de los términos de la función fuente resulta adecuado introducir previamente algunos conceptos básicos sobre las características del viento en la capa límite atmosférica, poniendo especial atención a la variación de la velocidad del viento con la altura.

Variación de la velocidad del viento sobre el mar. La capa límite atmosférica, definida como aquella parte de la atmósfera influida por los efectos de fricción debidos a superficie subyacente (tierra o mar), puede ser dividida en dos partes. Una parte inferior, denominada capa superficial, caracterizada por una tensión tangencial constante y fuertes variaciones de la celeridad del viento, con una altura típica de unos 100 metros. Por otro lado, la parte superior de la capa límite atmosférica posee una altura típica que ronda los 1000 metros y está caracterizada por lentas variaciones de la celeridad y la dirección del viento. En general, la mayor parte de las variaciones de la dirección del viento tienen lugar en la capa superior, mientras que la mayor parte de la reducción en celeridad ocurre en la capa superficial.

Las formas más comunes de considerar la velocidad del viento son, como la velocidad de fricción del viento u_* y la velocidad del viento a una altura determinada sobre el nivel medio de la superficie, U_z.

La velocidad de fricción se define como la raiz cuadrada de la relación entre la tensión superficial generada por el viento, τ, y la densidad del aire, ρ_a, es decir,

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau}{\rho_a}} \tag{1.90}$$

Este parámetro presenta una gran importancia en el estudio del oleaje debido a que está directamente relacionado con el flujo vertical de momento horizontal desde la capa superficial hacia la superficie del mar. Sin embargo, en general, dicho parámetro no puede ser estimado directamente, recurriéndose a su estimación indirecta mediante la medida de la velocidad del viento a una altura dada sobre el nivel del mar.

El método general para calcular la velocidad del viento a una altura z, U_z, está basado en el perfil logarítmico en la capa superficial, dado por

$$U_z = \frac{u_*}{\kappa} \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) \tag{1.91}$$

donde κ es la constante de von Karman ($\kappa \approx 0.4$), z_0 es la longitud de rugosidad, cuya expresión más simple es la dada por Charnok (1955) como

$$z_0 = a\frac{u_*}{g} \tag{1.92}$$

siendo a la constante de Charnok, cuyo valor según Wu (1982) es ($a = 0.0185$).

En la práctica, la relación entre la velocidad de fricción y la velocidad del viento a una altura z suele realizarse empleando el coeficiente de arratre, C_D, definido como

$$C_D(z) = \left(\frac{u_*}{U_z}\right)^2 \tag{1.93}$$

Para un perfil logarítmico C_D adopta la forma

$$C_D = \frac{\kappa^2}{\ln^2(z/z_0)} \tag{1.94}$$

El valor de C_D depende de la elección de la longitud de rugosidad y de la altura de la observación. Para una altura de 10 m, Wu (1982) propuso una fórmula aproximada para $C_D(10)$ dada por

$$C_D(10) = (0.8 + 0.065U_{10})10^{-3} \tag{1.95}$$

donde U_{10} es la velocidad del viento a 10m de altura, que puede ser obtenida mediante una relación implícita derivada de la combinación de (1.91), (1.93), y (1.95). Esto es,

$$U_{10} = U_z \left(1 + \frac{C_D(10)^{1/2}}{\kappa} \ln\left(\frac{z}{10}\right)\right)^{-1} \tag{1.96}$$

En general, se suele admitir que el coeficiente de arrastre sólo depende de z y U_z. Sin embargo, en el estudio del termino $\mathcal{S}_{in}$ de la función fuente se verá que algunos estudios han puesto de manifiesto una dependencia de dicho parámetro con las condiciones de oleaje.

Términos fuente

Transferencia de energía desde el viento, ($\mathcal{S}_{in}$). Resulta evidente que el oleaje es generado por el viento. Sin embargo, los mecanismos mediante los cuales se transfiere la energía desde el viento al mar para generar el oleaje no son en absoluto obvios. Los primeros estudios sistemáticos sobre este tema se remontan a principios del siglo pasado. Sin embargo, no fue hasta mediados del mismo cuando, en base a los numerosos trabajos realizados previamente, fueron publicados dos de los trabajos claves para el avance en la comprensión de los procesos mecánicos involucrados en el flujo de momento y energía en la generación del oleaje. Paradójicamente, estos trabajos fueron publicados simultáneamente y a la postre resultan ser complementarios. En uno de ellos, (Phillips, 1957) propone la denominada teoría lineal de crecimiento, mientras en el otro (Miles, 1957) se sugiere un modelo de crecimiento exponencial.

En función de los resultados derivados de los citados trabajos, en el crecimiento del oleaje pueden distinguirse dos fases. Una primera fase en la que las ondas no afectan el perfil de viento y una segunda en la que éste se ve modificado por la presencia de las ondas en la superficie del mar. La primera de estas fases fue sugerida por Phillips (1957), según el cual la densidad de energía asociada a una componente frecuencial aumenta linealmente con el tiempo. En la segunda fase, analizada por Miles (1957), la tasa de entrada de energía a una componente dada del oleaje es proporcional a la energía de la misma, de modo que la densidad de energía crece exponencialmente con el tiempo.

Si bien durante la fase de crecimiento exponencial el aumento de la densidad de energía es mucho mayor que durante la fase inicial, resulta imprescindible la existencia de un crecimiento inicial, a partir de un mar en calma, para que las ondas generadas alcancen la amplitud suficiente para comenzar a perturbar el perfil del viento y entre en acción el mecanismo sugerido por Miles. En consecuencia, el término de entrada de energía en la función fuente se suele representar como la suma de un crecimiento lineal y exponencial. Es decir,

$$\mathcal{S}_{in}(f,\theta) = A + BS(f,\theta) \tag{1.97}$$

donde A y B son expresiones dependientes del espectro de energía. El término A representa el crecimiento lineal (Phillips, 1957) generado por el forzamiento debido a la presión turbulenta externa y es importante en los primeros estadíos de crecimiento del oleaje a partir de un mar en calma, siendo su expresión

$$A(\vec{k}) = \frac{\pi}{\rho_w^2 g^2}\omega^2 P(\vec{k},\omega) \tag{1.98}$$

donde $P(\vec{k},\omega)$ representa el espectro de las fluctuaciones de presión turbulentas.

Desde un punto de vista práctico, el término exponencial, B, que representa el mecanismo de retroalimentación de Miles resulta mucho más eficiente una vez transcurridos los primeros estadíos de la generación. Por ello, en los modelos de predicción de oleaje, generalmente, el término lineal de transferencia de energía desde el viento se considera despreciable.

Tomando como base la parametrización de la transferencia de energía desde el viento al oleaje realizada por Snyder et al. (1981), pero empleando la velocidad de fricción del viento, u_*, en lugar de la velocidad del viento en un nivel de referencia dado, Komen et al, (1984) sugieren la siguiente expresión para el término $\mathcal{S}_{in}$,

$$\mathcal{S}_{in}(f,\theta) = \max\left\{0, 0.25\frac{\rho_a}{\rho_w}\left[28\beta\frac{u_*}{c}\cos(\theta-\theta_w) - 1\right]\right\}\omega S(f,\theta) \tag{1.99}$$

donde θ es la dirección de la onda, θ_w es la dirección del viento, c es la velocidad de fase, y donde β es un factor empírico cuyo valor es aproximadamente igual a 1.

Realmente, en las expresiones de Snyder et al. (1981) o de Komen et al. (1984) sólo se tiene en cuenta la energía transferida desde el aire al océano. Trabajos más recientes como los realizados por Janssen (1989, 1991) muestran que el efecto de oleaje sobre el perfil de la velocidad del viento puede ser muy importante en la evolución del oleaje y que el término que contempla la entrada de energía del viento, no depende sólo de la velocidad del viento, sino también del estado de mar. En la teoría cuasilineal de generación del oleaje de Janssen (1989, 1991), B puede expresarse como:

$$B = \max\left\{0, \epsilon\frac{\beta_m}{\kappa^2}x^2\mu\ln^4\mu\right\}\omega \qquad \mu < 1 \tag{1.100}$$

donde ϵ es la relación entre la densidad del aire y la del agua $\left(\epsilon = \frac{\rho_a}{\rho_w}\right)$, β_m es una constante ($\beta_m = 1.2$), y x y μ pueden expresarse como

$$x = \cos(\theta - \theta_w)\frac{u_*}{c} \tag{1.101}$$

$$\mu = kz_c \tag{1.102}$$

donde z_c es la altura crítica a la cual la velocidad del viento, U, es igual a la velocidad de fase, c, y

$$u_* = U_{10}\sqrt{C_D(U_{10}, \tau_w)} \tag{1.103}$$

donde es interesante notar que el coeficiente de arratre, C_D, es función de la velocidad de U_{10} y de la tensión inducida por el oleaje, τ_w, es decir, la tensión que ejerce el oleaje sobre el viento.
Por otro lado, μ puede ser determinado como

$$\mu = \frac{gz_0}{(\kappa c)^2}e^{\frac{\kappa}{x}} \tag{1.104}$$

donde también la longitud de rugosidad, z_0, depende del estado de mar y además de la tensión inducida por el viento τ_w, y se puede determinar como

$$z_0 = \frac{\alpha \tau}{g\sqrt{1 - \frac{\tau_w}{\tau}}} \tag{1.105}$$

donde α es una constante ($\alpha = 0.01$).

En relación con la tensión inducida por el oleaje sobre el viento, τ_w, la cual se refleja en una perdida de momento por parte del viento y una ganancia para el oleaje, es interesante notar que ésta es una función del término de transferencia de energía desde el viento, $\mathcal{S}_{in}$, y a su vez éste es una función implícita del espectro, $S(f, \theta)$.

Una descripción más detallada de esta teoría cuasi-lineal puede encontrarse en Janssen (1991). Esta teoría para la transferencia de energía desde el viento es coherente con las observaciones de laboratorio y de campo (Komen et al. 1994), aunque hay una dispersión considerable en las observaciones, por esta razón, esta teoría se ha implementado en las versiones más recientes del modelo de predicción WAM (Komen et al., 1994).

Disipación por rotura, ($\mathcal{S}_{ds}$). La transferencia de energía desde el viento hacia el oleaje tiene como resultado un aumento de la amplitud de las olas. Este proceso continúa hasta que eventualmente las olas se hacen inestables y rompen. Este tipo de rotura debe distinguirse del que ocurre en una playa al aproximarse el oleaje a la orilla, inducido por efectos de fondo (fricción y asomeramiento). La rotura del oleaje en aguas profundas resulta fácilmente visible desde el aire en forma de zonas blancas, debidas a la formación de espuma tal como se muestra en la figura 1.7, denominadas *whitecaps*, motivo por el cual este tipo de rotura recibe el nombre de *whitecapping.* Este tipo de rotura es considerado como el mecanismo disipativo dominante en un campo de oleaje, dado que otros mecanismos como la viscosidad molecular o la turbulencia resultan inadecuados para explicar la disipación de la cantidad de energía transferida desde el viento.

La rotura por *whitecapping* depende fuertemente del peralte del oleaje y representa un proceso altamente no lineal, con escalas temporales muy cortas, que no puede ser tratado mediante las técnicas de perturbaciones estándares, tal como las

Figura 1.7: Ilustración del aspecto de la superficie del mar generado por la rotura del oleaje (*whitecapping*).

aplicadas en el caso de las interacciones no lineales entre componentes frecuenciales, que serán tratadas en la siguiente sección. Este y otros motivos hacen que el término de disipación sea actualmente el más desconocido entre los involucrados en la función fuente de la ecuación del balance energético para aguas profundas.

Las formulaciones empleadas en la mayoría de los modelos de predicción del oleaje actuales están basadas en el estudio teórico desarrollado por Hasselmann (1974). Este autor sugirió que la rotura podía ser expresada en términos de un promedio de pulsos de presión aleatorios, considerando que, bajo condiciones muy generales, este mecanismo disipativo fuertemente no lineal localmente puede ser considerado como débilmente no lineal en la media, entendiéndose por débil en la media que por unidad de longitud de onda éste provoca un cambio pequeño en el espectro de energía. En consecuencia, admitiendo que la disipación de energía por rotura está relacionada con el espectro de números de onda de una forma *quasi-lineal*, este autor propuso una expresión para el término de disipación proporcional al espectro de números de onda y al cuadrado de la frecuencia

$$\mathcal{S}_{ds}(\vec{k}) = -\vartheta\omega^2 S(\vec{k}) \tag{1.106}$$

donde ϑ es un factor de proporcionalidad, dependiente del número de onda y de parámetros integrales del espectro, tales como el peralte medio.

Una generalización del modelo dado por (1.106) fué obtenida por Komen et al (1984) para permitir la existencia de una solución de equilibrio de la ecuación del balance de energía cuando el oleaje está totalmente desarrollado. La expresión sugerida por dichos autores para el término de disipación es

$$\mathcal{S}_{ds}(f,\theta) = -C_{ds}\bar{\omega}\left(\frac{\omega}{\bar{\omega}}\right)^n \left(\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\alpha}_{PM}}\right)^m S(f,\theta) \tag{1.107}$$

donde C_{ds}, m y n son coeficientes de disipación que pueden ser ajustados experimentalmente, siendo los valores sugeridos por Komen et al (1984) para los mismos, 3.33×10^{-5}, 2, y 2, respectivamente. $\bar{\omega}$ es la frecuencia angular media, definida como

$$\bar{\omega} = \frac{2\pi}{m_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} f S(f,\theta) df\, d\theta \tag{1.108}$$

siendo m_0 el momento espectral de orden cero, que representa la energía total del oleaje,

$$m_0 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} S(f,\theta) df\, d\theta \tag{1.109}$$

$\hat{\alpha}$ el peralte integral medio, definido como

$$\hat{\alpha} = \frac{m_0\bar{\omega}^4}{g^2} \tag{1.110}$$

y $\hat{\alpha}_{PM}$ es el valor teórico de $\hat{\alpha}$ para un modelo espectral Pierson-Moskowitz (ver sec. 3.1.3), cuyo valor es $\hat{\alpha}_{PM} = 4.57 \times 10^{-3}$.

Interacciones no lineales, ($\mathcal{S}_{nl}$). En primer orden de aproximación, el oleaje puede ser considerado como la superposición de componentes espectrales libres e independientes. Sin embargo, tal como se comentó en la sección [1.2], en la teoría lineal las condiciones de contorno son satisfechas eliminando términos de orden superior. En consecuencia, para órdenes de aproximación superiores existen interacciones entre las componentes espectrales que dan lugar a una transferencia de energía (Phillips, 1960). Estas interacciones fuerón descritas en detalle por Hasselmann (1962, 1963a, 1963b). Este autor admitio que las ondas eran sólo débilmente no lineales y, aplicando una técnica de perturbaciones para interacciones no lineales resonantes de ondas libres, encontró que un conjunto de cuatro componentes, denominado cuadrupleta, puede dar lugar a un intercambio de energía cuando éstas satisfacen las siguientes condiciones de resonancia

$$\begin{aligned} \vec{k}_1 + \vec{k}_2 &= \vec{k}_3 + \vec{k}_4 \\ \omega_1 + \omega_2 &= \omega_3 + \omega_4 \end{aligned} \tag{1.111}$$

donde, para aguas profundas, ω_i y k_i, $(i = 1, 2, 3, 4)$, están relacionados mediante la relación de dispersión dada por (1.20).

Hasselmann (1963a) describió las interacciones no lineales en términos de la densidad de acción, definida como el cociente entre la densidad de energía y su frecuencia angular. La tasa de cambio en la densidad de acción para un número de onda dado, k_4, debido a todas las interacciones entre cuadrupletas que involucran a este número de onda viene dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_4}{\partial t} &= \iiint G(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3, \vec{k}_4) \times \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4) \times \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_3 - \vec{k}_4) \\ &\times \; [N_1 N_2 (N_3 + N_4) - N_3 N_4 (N_1 + N_2)]\, d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3 \end{aligned} \tag{1.112}$$

donde $N_i = N(\vec{k}_i)$ es la densidad de acción en el número de onda $\vec{k}_i$ y G es el coeficiente de acoplamiento, dado por

$$G = \frac{\pi g^2 D^2}{4 \rho_w \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4} \tag{1.113}$$

siendo D el coeficiente de interacción, cuya expresión es una complicada función de los números de onda $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3$ y $\vec{k}_4$ (ver, p. ej. Van Vledder, 1990). Las funciones delta en (1.112) aseguran que las contribuciones a la integral sólo ocurran para las cuadrupletas que satisfacen las condiciones de resonancia (1.111).

La expresión integral (1.112) es conocida como integral de Boltzman para el oleaje, en analogía con la expresión similar empleada en física teórica para describir la tasa de cambio en la distribución de densidad de partículas en un sistema de partículas interactuantes. Este concepto fué introducido en el estudio del oleaje por Hasselmann (1963a). En este sentido, es justo reconocer que, trabajando de forma independiente, Zakharov (1968) llegó a las mismas conclusiones empleando un procedimiento Hamiltoniano.

Es importante señalar que estas interacciones son en realidad débiles, pero su efecto llega a ser significativo para periodos de unas pocas horas, o un número elevado de periodos de ola. En concreto, la escala de tiempos característica necesaria para que las interacciones lleguen a ser efectivas es del orden de magnitud $\tilde{T} \sim T_0/\delta^4$, donde T_0 es un periodo característico y δ el peralte del oleaje. En un campo de oleaje en crecimiento las pendientes pueden ser del orden de 10^{-1} o menores. Por tanto, el tiempo requerido para que las interacciones entren en juego es largo en comparación con el periodo del oleaje, poniendo de manifiesto que las interacciones son localmente débiles, pero importante sobre periodos del orden de la duración de las tormentas.

También debe notarse que existen bastantes autores que sugieren el uso del espectro de densidad de acción, $N(\omega, \theta)$, en lugar del espectro de densidad de energía, $S(\omega, \theta)$, debido a que en presencia de corrientes la densidad de energía no se conserva, debido a los intercambios de energía entre las corrientes y el oleaje, mientras que la densidad de acción, $N(\omega, \theta) = S(\omega, \theta)/\omega$, si que se conserva.

No obstante, la transferencia de energía por interacciones no lineales conserva la energía, la densidad de acción y el momento totales del campo de oleaje. El principal efecto de estas interacciones es redistribuir la energía dentro del espectro, transfiriéndola fundamentalmente desde el pico espectral hacia componentes de baja frecuencia y, en menor media, hacia componentes de frecuencias superiores. Los resultados de cálculos numéricos (e.g., Hasselman et al, 1973) y los obtenidos durante el experimento JONSWAP han puesto de manifiesto el papel relevante que las interacciones no lineales desempeñan en la evolución del espectro del oleaje,

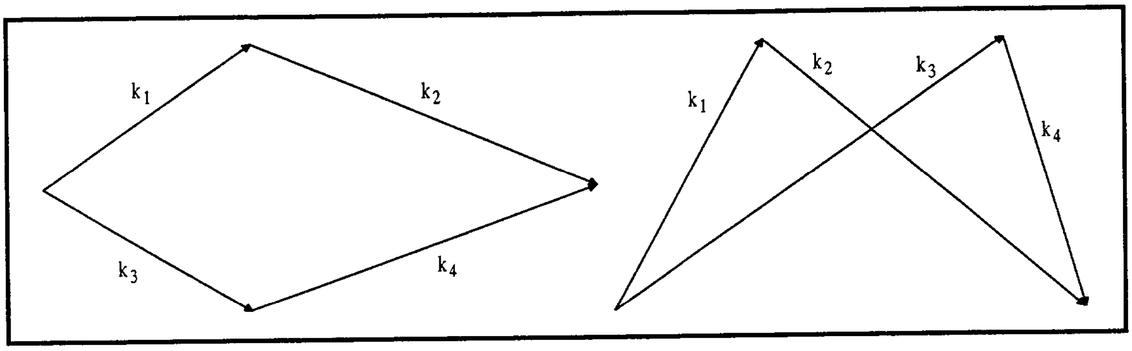

Figura 1.8: Ejemplos de cuadrupletas de vectores número de onda que satisfacen la primera de las condiciones de resonancia dadas por (1.111).

especialmente en el crecimiento de componentes de bajas frecuencias.

El hecho de que las interacciones no lineales transfieran energía fundamentalmente desde la zona del pico espectral hacia bajas frecuencias tiene como resultado un desplazamiento del pico espectral hacia frecuencias cada vez menores. No obstante, llega un momento en que este desplazamiento del pico espectral hacia bajas frecuencias cesa debido a que la intensidad de las mismas depende del coeficiente de interacción D, el cual disminuye en función de ω^8. Otro efecto importante de las interacciones no lineales es el de estabilizar la forma del espectro, suavizando las pequeñas perturbaciones locales mediante la transferencia de energía.

Por último, resulta interesante resaltar que dado el caracter vectorial de la primera de las condiciones de resonancia (1.111), éstas no sólo definen las componentes frecuenciales que pueden interactuar de forma resonante, sino también sus direcciones de propagación. En la figura 1.8 se muestran dos ejemplos de cuadrupletas de vectores número de onda que satisfacen la condición de resonancia dada en términos de $\vec{k}$. Nótese que no basta con que se verifique esta condición, sino que también las frecuencias asociadas con estos números de onda deben satisfacer la segunda de las condiciones de resonancia. En consecuencia, las interacciones no sólo permiten la transferencia de energía entre componentes con diferentes frecuencias, sino también entre componentes propagándose en diferentes direcciones. Es decir, las ondas componentes no han de ser colineales para poder intercambiar energía entre ellas.

1.3 Características distintivas del oleaje de viento y de fondo

Antes de describir las características de los sistemas oleaje de viento y de fondo, resulta interesante introducir algunos conceptos que serán de utilidad a lo largo del trabajo, en relación a los factores que controlan el crecimiento del oleaje. En principio, es posible admitir que el desarrollo del oleaje está controlado fundamentalmente por tres factores. Estos son, la velocidad del viento, la extensión de la zona de generación (*fetch*) y la duración, o periodo durante el cual el viento sopla con velocidad aproximadamente constante sobre el fetch. Así, para una velocidad del viento dada, a medida que éste transmite energía hacia la superficie del mar, el oleaje aumenta su contenido energético mientras se propaga dentro del fetch. De este modo, si la longitud del fetch y la duración del viento son suficientemente elevadas, llegará un momento en que el oleaje no puede almacenar más energía, de forma que todo aporte adicional de energía por parte del viento es eliminado mediante el proceso de rotura. En tal caso se dice que el oleaje se encuentra *totalmente desarrollado.* Por el contrario, si el fetch no es suficientemente extenso, o bien la acción del viento no se prolonga durante el tiempo necesario, el oleaje no llega a alcanzar su máximo crecimiento energético posible. Se dice entonces que el oleaje se encuentra *parcialmente desarrollado.* Obviamente, el que no se alcance el desarrollo total del oleaje puede ser debido a dos motivos. Por un lado, a que la longitud del fetch no sea suficiente, aunque el viento continúe soplando, o bien a que el periodo durante el cual sopla el viento sobre el fetch no sea suficiente, aunque éste sea lo bastante extenso para permitir un mayor crecimiento. En el primero de los casos se dice que el crecimiento del oleaje está limitado por el fetch, mientras que en el segundo se dice que el crecimiento está limitado por la duración.

En este sentido, es necesario señalar que el concepto de oleaje totalmente desarrollado ha sido puesto en entredicho por diferentes autores (e.g., Komen et al, 1984) por el siguiente motivo. En la idea de oleaje totalmente desarrollado se admite que existe una situación en la cual el oleaje no puede captar más energía del viento y comienza a disipar cualquier aporte adicional. Sin embargo, en ésta no se considera el papel de las interacciones no lineales, capaces de redistribuir energía entre las componentes del oleaje, especialmente desde la zona del pico espectral hacia la banda de bajas frecuencias, donde las componentes tienen una longitud de onda que les permite almacenar gran cantidad de energía sin llegar a volverse inestables. De este modo, si a medida que el viento inyecta más energía al campo de oleaje, las interacciones no lineales son capaces de transferir parte de esa energía hacia frecuencias cada vez más bajas, en principio no existe motivo alguno por el cual el oleaje no pueda seguir aumentado su grado de desarrollo. No obstante, dado que ni la longitud del fetch puede ser infinita, ni el viento sopla con velocidad aproximadamente constante de forma indefinida, a pesar de lo antes comentado, en la práctica se sigue admitiendo que bajo determinadas condiciones el oleaje se encuentra totalmente desarrollado.

Tal como se indicó al comienzo de este capítulo, el oleaje de viento se caracteriza por estar dentro de la zona de generación, recibiendo energía de forma activa desde el viento. En consecuencia, debido a la elevada variabilidad de los campos de viento, dentro de este área aparecen olas que se propagan en diferentes direcciones, cubriendo un amplio rañgo de frecuencias. Este rango de frecuencias aumenta a medida que transcurre el tiempo y el oleaje se propaga bajo la acción del viento como una onda forzada, generándose cada vez más y más componentes, especialmente por la acción de las interacciones no lineales que, tal como hemos visto, intensifican su importancia a medida que el oleaje se vuelve más peraltado.

En la figura 1.9 se muestra una imagen aérea en la que resulta evidente el aspecto considerablemente irregular de la estructura de la superficie del mar bajo la acción del viento. En estas cirscunstancias, los frentes de onda son sustancialmente cortos, y las crestas aparecen notablemente apuntadas, con ondas más cortas superpuestas, al igual que ocurre en los valles. De este modo resulta imposible encontrar un patrón común en toda la imágen. Así, mientras en unas zonas las olas paceren estar alineadas, en otras aparecen propagándose en direcciones parcialmente enfrentadas, mientras en algunas partes estás parecen alejarse entre sí. Además resulta fácil observar la gran variabilidad existente entre las alturas de una ola y las adyacentes, así como de una zona a otra de la imagen. Por otra parte, las longitudes de onda

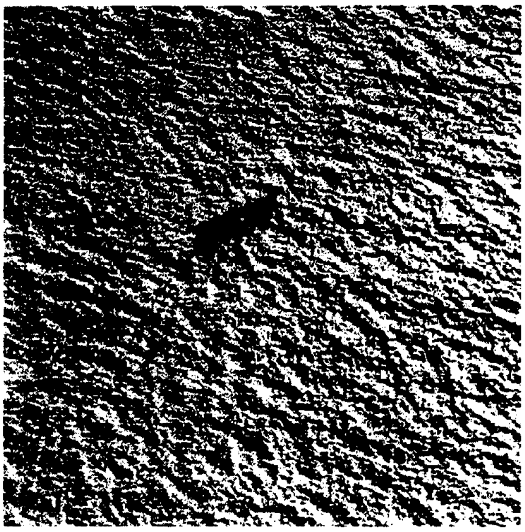

Figura 1.9: Imagen aérea de un campo de oleaje de viento.

son notablemente diferentes de una zona a otra, reflejando la enorme variabilidad de los periodos. En consecuencia, entre las características más destacables del oleaje de viento cabe señalar su elevada variabilidad tanto en periodos como en direcciones y la enorme dificultad que entraña poder predecir las características de las olas atendiendo a las observadas en un instante dado. Es decir, existe muy poca correlación entre las características de olas sucesivas.

Por el contrario, en un campo de oleaje de fondo, la estructura de la superficie del mar, aunque aleatoria, es sustancialmente menos irregular, tanto cuanto más alejado se encuentre éste de la zona donde fue generado. Así, en la figura 1.10, en la que se muestra una imágen aérea de un oleaje de fondo, resulta mucho más simple observar un patrón claro en los frentes de onda que se extienden sobre distancias sustancialmente superiores a las correspondientes a los del oleaje de viento. Además, resulta fácilmente apreciable la simulitud de las alturas entre las olas que se encuentra próxinas entre sí, observándose grupos de olas grandes seguidos por grupos de olas más pequeñas, así como una menor variabilidad en las longitudes de onda, considerablemente mayores en este caso. En relación a las direcciones es evidente la escasa variabilidad, con los frentes de ondas dispuestos básicamente con orientaciones similares. En definitiva, aunque con naturaleza aleatoria, sobre cortas

Figura 1.10: Imagen aérea de un campo de oleaje de fondo.

escalas de tiempo (unos pocos periodos de ola), el swell resulta mucho más predecible que el sea, aunque para periodos de mayor duración ambos sean prácticamente impredecibles.

A las diferencias señaladas, cuyo origen y explicación se abordarán en detalle en el capítulo 3, hay que añadir un aspecto importante que no aparece claramente reflejado en la figura 1.9, pero que es característico del oleaje de viento, especialmente durante condiciones de generación con fuertes vientos. Bajo estas condiciones el oleaje de viento se hace frecuentemente inestable y rompe disipando energía y dando lugar a la presencia de zonas en las que las cretas aparecen cubiertas de espuma, tal como se observa en la figura 1.11, dando un aspecto aún más caótico a la estructura de la superficie del mar. Este fenómeno es raramente apreciado en un oleaje de fondo durante su propagación, dado que este se propaga como una onda libre sin recibir energía del viento que lo haga inestable.

Las variabilidades en términos de periodos y alturas se pueden apreciar más claramente en los registros de oleaje mostrados en las figuras 1.12, para un oleaje de viento, y 1.13, para otro de fondo. En ambos la duración de los registros observados es la misma, 5 minutos, sin embargo, resulta evidente que el número de olas presentes en la serie correspondiente al oleaje de viento es significativamente superior que el

Figura 1.11: Imagen de un campo de oleaje de viento mostrando la irregularidad del mismo y la presencia de zonas de disipación por rotura.

número de olas existentes en el oleaje de fondo, poniendo de manifiesto que el periodo y, por tanto, las longitudes de onda son superiores en el swell (considerando el periodo como el intervalo de tiempo entre dos pasos consecutivos del registro por el nivel medio, en el mismo sentido). Además, de ser mayores, puede observarse que son mucho más regulares, menos variables, que los periodos en el registro de oleaje de viento, donde se intercalan olas de periodo largo con otras de corto periodo.

Por otra parte, en el registro de oleaje de viento se puede apreciar la gran variabilidad de las alturas de ola (distancia vertical entre un máximo del registro y el siguiente mínimo). Nótese como en la figura 1.12, una altura de ola grande puede estar precedida y sucedida por una altura pequeña, sin ningún patrón claramente discernible, intercalándose olas grandes y pequeñas de un modo difícilmente predecible. En contraste, en el registro de oleaje de fondo, las alturas de ola grandes aparecen agrupadas, de modo que una ola grande suele estar acompañada por olas de magnitud similar, al igual que las olas pequeñas. En dicho registro puede apreciarse claramente como en la parte inicial las alturas de ola son relativamente

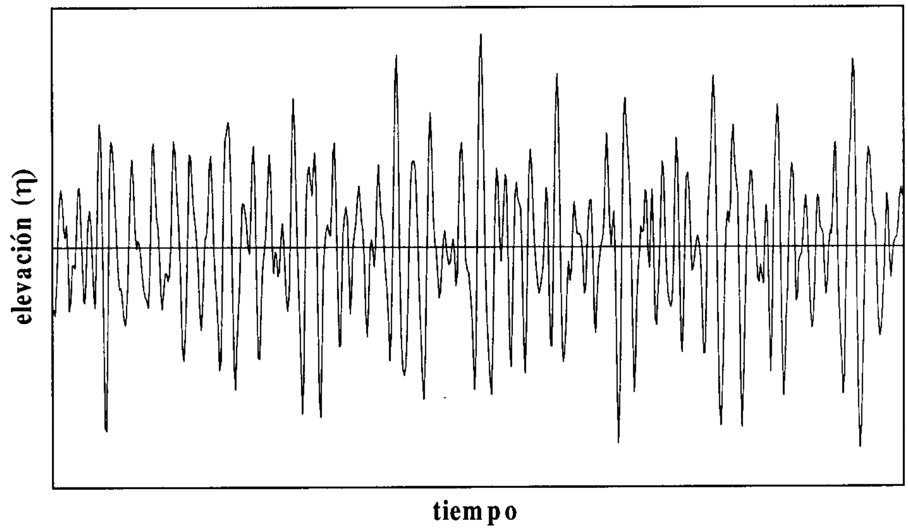

Figura 1.12: Registro experimental de oleaje de viento.

pequeñas y a medida que transcurre el tiempo las alturas aumentan progresivamente para en la parte final del registro comenzar a disminuir nuevamente.

En definitiva, una de las características distintivas básicas entre el oleaje de viento y el de fondo es la diferencia en la predictibilidad de ambos tipos de oleaje sobre escalas temporales cortas. El oleaje de viento es mucho más irregular e impredecible, por no emplear el término caótico, que el oleaje de fondo, en el cual existe una dependencia significativa entre la situación en un instante dado y la inmediatamente precedente. No obstante, ello no quiere decir que el oleaje de fondo sea perfectamente predecible, únicamente que el grado de irregularidad es comparativamente menor en éste que en el oleaje de viento.

Naturalmente, esta diferencia de comportamiento tiene su origen en determinados factores físicos que, en general, son bien conocidos. Sin embargo, la discusión de los mismos se pospone hasta que en el siguiente capítulo se hayan introducido algunas herramientas de análisis que facilitarán su explicación e interpretación adecuadas.

No obstante, es importante mencionar que, mientras las características citadas para el oleaje de viento son una constante en su estructura, puesto que por definición este oleaje se encuentra dentro de la zona de generación bajo la acción directa del

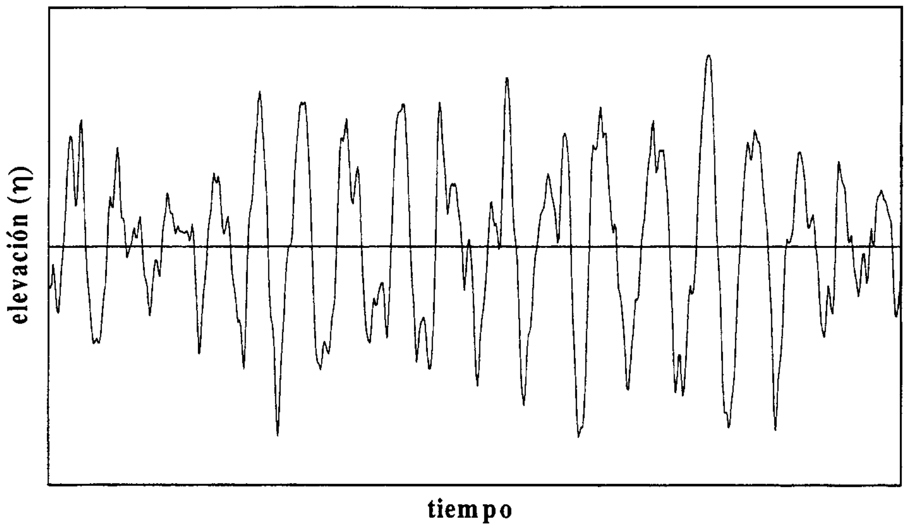

Figura 1.13: Registro experimental de oleaje de fondo.

viento, las atribuidas al swell sólo son claramente evidenciadas cuando el oleaje se ha alejado considerablemente de dicha zona, habiendo transcurrido el tiempo suficiente para que los fenómenos físicos que lo convierten en un oleaje con las características antes citadas hayan tenido tiempo para llevar a cabo dicha transformación. Entre esta situación y su inmediata salida del fetch existe una zona de transición en la que el oleaje no puede ser caracterizado mediante ninguna de las descripciones anteriores, sino que éste presenta características intermedias entre ambos tipos de oleaje, aproximándose a la descripción dada de swell a medida que se aleja de la zona de generación. Además, cuanto mayor es la distancia recorrida por el swell, más se acentúan las características citadas previamentes. Por ello, es posible distinguir entre *oleaje de fondo joven*, *oleaje de viento maduro*, con diferentes grados de madurez, en función de las distancias recorridas por éste fuera de la zona de generación.

1.4 Relevancia del estudio de los campos de oleaje mixtos

Tal como se comentó al comienzo del presente capítulo, resulta bastante frecuente encontrar situaciones en las que los dos tipos de oleaje descritos anteriormente aparecen conjuntamente. Durante mucho tiempo estas situaciones han sido consideradas como poco frecuentes e irrelevantes, probablemente por la dificultad que entraña su estudio, en comparación con las condiciones de oleajes de un único tipo, o mares simples, ya de por sí sustancialmente complicadas. Así, es muy frecuente encontrar trabajos en la bibliografía en los que claramente se cita la existencia de un porcentaje considerable de registros, entre los empleados para realizar los estudios, que corresponden a situaciones en las que aparecen superpuestos un oleaje de viento y un oleaje de fondo, y que desde la etapa de selección de la información a ser examinada son directamente descartados.

En los capítulos 4 y 5, en los que se aborda el estudio de las propiedades de este tipo de oleaje, se demostrará que éstas situaciones no son en absoluto anómalas o extraordinarias, sino que son más comunes de lo generalmente aceptado, y que en realidad existen determinadas zonas del océano en las que resulta difícil encontrar situaciones en las que un oleaje de viento, o de fondo, aparecen de forma totalmente aislada.

No obstante, el objetivo de esta sección es poner de manifiesto el interés que durante los últimos años ha despertado el estudio de las condiciones de oleaje en situaciones de mares mixtos, resaltando la relevancia que las mismas tienen desde el punto de vista práctico, y justificando de este modo la necesidad de profundizar en su estudio.

En la sección introductoria de este capítulo se indicó que entre las sugerencias del panel de especialistas en oleaje de la ITTC (International Towing Tank Conference) del año 2002 se destacaba la necesidad de profundizar en el estudio de las características del oleaje en condiciones de mares mixtos, o bimodales. Este llamamiento a la comunidad científica no es más que el resultado de las conclusiones de diversos trabajos, realizados especialmente durante la última década, sin olvidar aquellos que, de forma esporádica, se realizaron con anterioridad, que ponen de manifiesto la importancia de tales condiciones de oleaje en diferentes campos de las ingenierías oceánica, costera y naval, así como en la física de la interacción atmósfera-océano. No obstante, se debe señalar que debido al escaso trabajo desarrollado en este campo, muchos de los resultados presentan contradicciones que permanecen sin una explicación consistente. A continuación se describen brevemente algunos de estos resultados.

Van den Eynde y Monbaliu (1989) y Van den Eynde y De Wolf (1990) observan que en las costas de Bélgica, el oleaje está constituido frecuentemente por una componente de viento y otra de oleaje de fondo, siendo esta última el principal problema para la navegación durante las operaciones de aproximación a los puertos.

Por otra parte, varios autores han investigado la posibilidad de que entre dos sistemas de oleaje con diferente composición frecuencial se establezcan interacciones no lineales resonantes. Así, Young et al. (1985) examinan este tipo de interacciones considerando dos sistemas de oleaje, cada uno de ellos modelizado mediante un espectro JONSWAP (ver sec. 3.1.3), con diferentes separaciones entre las frecuencias de pico y las direcciones principales de propagación. Estos autores evaluaron la integral de Boltzmann (1.112) de dos formas diferentes. Por un lado calcularon las interacciones no lineales para el espectro combinado y por otra evaluaron estas interacciones para cada espectro por separado y sumaron los resultados correspondientes a cada sistema de oleaje. De este modo, si los dos procedimientos dan el mismo resultado se puede concluir que los dos sistemas de oleaje no interactúan. En caso contrario, la comparación de las diferencias encontradas permitirá cuantificar el grado de acoplamiento entre ambos espectros. Los resultados obtenidos por dichos autores muestran que cuando las frecuencias de pico de los dos sistemas son iguales, el acoplamiento es máximo para direcciones de propagación idénticas, mientras que el acoplamiento es despreciable para diferencias en las direcciones de propagación superiores o iguales a 90^o. Para sistemas de oleaje con la misma dirección de propagación observan que el acoplamiento disminuye a medida que los picos espectrales se separan. Para diferencias de 0.1 Hz entre frecuencias de pico encuentran un flujo de energía desde las componentes de altas frecuencias hacia el swell, reduciendo así la posibilidad de crecimiento del oleaje de altas frecuencias.

Siguiendo un procedimiento similar Kalmykov (1989), evaluó la ecuación de Boltzmann (1.112) para un espectro bimodal, con frecuencias de pico en 0.16 Hz y 0.19 Hz, y observó que para ángulos hasta 60^o entre los sistemas de oleaje de altas y bajas frecuencias, éste último sustrae energía del oleaje de viento, mientras que para ángulos menores de 60^o el oleaje de viento recibe energía del oleaje de fondo, si bien las interacciones son bastante débiles.

Otro estudio análogo fué realizado por, Masson (1993). Sus resultados indican que el acoplamiento no lineal entre el sea y el swell produce una atenuación del swell. Sin embargo, en la región justo por debajo de la frecuencia de pico del sea, el swell crece a expensas del oleaje de viento. El acoplamiento máximo se da cuando la frecuencia de pico del swell es aproximadamente el 80% de la del sea, mientras que cuando la frecuencia de pico del swell es inferior al 60% de la del sea, el acoplamiento se hace despreciable. Este autor también encontró una dependencia del nivel de acoplamiento con el ángulo entre las direcciones de propagación de ambos sistemas de oleaje, con un incremento máximo de la energía del swell para un ángulo de unos 40^o y un rápido descenso para ángulos mayores.

Las interacciones entre el perfil de vientos, las ondas largas (swell) y las ondas cortas (wind-sea), han sido examinadas por diferentes autores (e.g., Donelan y Dobson, 1997; Young y Sobey, 1985; Mitsuyasu y Kusaba, 1993; etc.) con el fin de conocer el efecto de la presencia del oleaje de fondo sobre el crecimiento del oleaje de viento. En general, los escasos estudios al respecto han centrado su interés en las situaciones más simples, tales como un oleaje de fondo propagándose en la dirección del viento, con velocidad de fase superior a la velocidad del viento, oleaje de fondo propagándose en contra de la dirección del viento, o el caso de direcciones perpendiculares para ambos fenómenos.

En este contexto, mientras estudios como los antes citados parecen poner de manifiesto una atenuación en el crecimiento del oleaje de viento en presencia del swell, aunque los resultados de algunos autores son contradictorios, Van Vledder (1999), realizando experimentos de simulación con modelos de generación de oleaje de tercera generación, tales como el WAM y el SWAN, observa que la presencia de un sistema de swell intensifica el crecimiento del oleaje de viento, debido a que, en presencia de un oleaje mixto, los modelos dan lugar a una fuerte reducción en la disipación energética por *whitecapping*.

Este autor realiza simulaciones numéricas con modelos de predicción de oleaje considerando oleajes bimodales con distinta estructura. En concreto considera situaciones en las que el oleaje de fondo es muy poco energético respecto al de viento, otras en las que el oleaje de fondo posee un nivel energético significativo, y situaciones en las que ambos sistemas son igualmente energéticos. De este modo observa que la disipación de energía por rotura en el sistema de oleaje de viento se reduce levemente en el primer caso. Por el contrario, en el caso de un swell de energía moderada, la reducción de la disipación por rotura en el oleaje de viento se hace más pronunciada. Finalmente, cuando ambos sistemas de oleaje presentan un contenido energético equivalente, la reducción en la disipación por rotura en el campo de oleaje de viento resulta dramática, haciéndose prácticamente nula. Nótese que esto implicaría un incremento en la función fuente neta y, en consecuencia, una intensificación del crecimiento del oleaje de viento en el caso de oleajes mixtos.

Naturalmente, tal como correctamente señala Van Vledder (1999), estos resultados están relacionados con las técnicas de modelización y no con la física del oleaje, indicando la necesidad de modificar los esquemas numéricos empleados en los modelos de predicción de oleaje para considerar de forma adecuada la presencia conjunta de oleajes de viento y de fondo. Es decir, estos resultados evidencian claramente la necesidad de un mejor conocimiento de la estructura del oleaje en condiciones de oleajes mixtos y la forma en que interactúan los distintos sitemas de oleaje constituyentes.

Capítulo 2

Técnicas de análisis, simulación y datos experimentales

En este capítulo se presentan, en primer lugar, los fundamentos de las técnicas de análisis empleadas para obtener información sobre las propiedades del oleaje, en los dominios temporal, de los desfases temporales y frecuencial. Posteriormente se introducen las características básicas de las técnicas de simulación de registros de oleaje, y finalmente se describen las características de los registros experimentales utilizados, comentando las condiciones climáticas generales de la zona en la que se han realizado las observaciones experimentales.

2.1 Técnicas de análisis

Tal como se mencionó en el capítulo anterior, los registros de oleaje analizados en este trabajo serán considerados como realizaciones de un proceso estocástico $\{\eta(t)\}$, que representa las elevaciones del nivel del mar respecto a su posición de equilibrio. Además, tanto los registros obtenidos mediante medidas realizadas en el mar como los generados empleando técnicas de simulación numérica, representarán realizaciones de duración finita, es decir muestras, discretizadas a intervalos regulares de tiempo. Luego los registros considerados son series temporales discretas de duración T, de modo que durante dicho periodo el proceso puede ser considerado como estacionario, admitiéndose como hipótesis la ergodicidad del mismo.

2.1.1 Preprocesamiento de datos

En general, las series temporales obtenidas experimentalmente para el análisis de cualquier fenómeno físico pueden presentar valores que no representan en absoluto características del mismo. Así, por ejemplo, la señal original puede contener errores debidos a un funcionamiento inadecuado de los aparatos de medida, o a problemas que pueden surgir durante las etapas de transmisión, recepción o almacenamiento de los datos. Por otro lado, puede suceder que las series temporales obtenidas contengan información solapada de distintos fenómenos físicos.

La magnitud de estos problemas puede ser tal que, debido a su pésima calidad, las series deban ser rechazadas. Sin embargo, en muchas ocasiones, estos problemas pueden ser remediados procediendo de forma adecuada. Por ello, antes de llevar a cabo el tratamiento de los datos, resulta imprescindible realizar un análisis previo, conocido como *preprocesamiento*, en el que se evalúe el nivel de calidad de los registros, se detecten posibles errores y, si es posible, se eliminen o alivien las inconsistencias existentes.

A continuación se describe de forma sucinta los aspectos considerados en el presente trabajo durante el preprocesamiento de las series de datos experimentales. Es preciso, sin embargo, hacer notar que, de forma inevitable, algunas de las desiciones tomadas en el preprocesamiento de una señal aleatoria poseen un cierto grado de subjetividad, tal como apuntan Otnes y Enochson (1978).

Eliminación de tendencias

Las tendencias en una serie temporal de oleaje pueden presentarse por diferentes motivos. En particular, las series temporales experimentales empleadas en este trabajo han sido registradas empleando boyas del tipo *Waverider*. Este tipo de boya es diseñado para seguir los movimientos de la superficie del mar y medir las aceleraciones verticales, obteniendo los desplazamientos verticales mediante una doble integración digital de las mismas. De este modo, un error sistemático en el circuito de integración puede introducir una tendencia en las observaciones.

Las tendencias cuya expresión puede ser aproximada mediante una expresión polinómica pueden ser eliminadas mediante el método de mínimos cuadrados (e.g., Otnes y Enochson, 1978).

Eliminación de valores anómalos

Los valores anómalos o, *spikes*, son datos que se desvian considerablemente del resto de los valores de la serie. Generalmente, son causados por interferencias con los aparatos registradores, o con la señal emitida por estos durante la transmisión hasta la estación receptora. La presencia de dichos valores en una serie da lugar a un aumento de la varianza de la serie.

El procedimiento estándar para reconocer un valor anómalo en una serie temporal consiste en establecer un intervalo dentro del cual deberían estar todos los valores de la serie. Para definir los límites de este intervalo es necesario que la media de la serie sea nula. Así, admitiendo que los valores de las elevaciones de la superficie están normalmente distribuidos, siguiendo una distribución $N(0, \sigma_\eta^2)$, se definen los límites como el producto de la desviación estándar de $\eta(t)$ por una constante arbitraria, K. En este estudio el valor empleado umbral empleado es $4.5\sigma_\eta$ (e.g., Rodríguez, 1995).

Los valores anómalos simples, o aislados, son eliminados mediante interpolación lineal entre los datos adyacentes.

Aceleraciones no físicas

Las series temporales son examinadas para detectar posibles valores de la aceleración vertical de la superficie que no son posibles físicamente. Las aceleraciones son estimadas mediante el siguiente esquema en diferencias finitas

$$\ddot{\eta} = \frac{x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}}{(\Delta t)^2}$$

Para que la serie sea aceptada, en el presente estudio, todos los valores de la aceleración deben estar comprendidos en el rango $-10m/s^2$ y $10m/s^2$.

Los valores de la aceleración que no verifiquen la condición anterior son corregidos mediante interpolación lineal entre los valores adyacentes. Si el número de puntos en los que la aceleración se encuentra fuera del rango anterior es superior al 4 por mil, la serie es rechazada para su porterior análisis.

Periodos largos

Las series también son chequeadas para detectar la existencia de posibles periodos que son improbables que ocurran en una serie de oleaje. Es decir, se examina si la serie permanece durante un periodo superior a uno prefijado por encima, o por debajo, del nivel medio entre dos pasos consecutivos por el mismo. En este caso se admite una duración máxima de 20 segundos. Puesto que este tipo de problemas no puede ser corregido de un modo razonable, su presencia en una serie conduce directamente a su rechazo.

Señales constantes

Las interferencias en el equipo de procesamiento de la señal pueden hacer que esta adquiera un valor constante durante un cierto tiempo. En este estudio, se adopta un valor umbral de. 5 segundos, de modo que si la serie toma un valor constante durante un periodo superior a éste, es eliminada para su posterior análisis.

Interpolación

En los puntos anteriores se ha visto que una forma útil de aliviar algunos de los problemas presentes en una serie temporal es recurriendo a la interpolación entre datos adyacentes a uno dado. Además, tal como se verá en la próxima sección, los principales parámetros del oleaje son definidos en términos de los instantes en los que el perfil de la superficie libre del mar cruza por el nivel medio o se encuentra en un máximo (o mínimo). En consecuencia, debido a que la serie temporal está discretizada, en general estos puntos de cruce o máximos (mínimos) no corresponderan con valores de la serie, por lo cual será necesario realizar una interpolación lineal entre los valores asociados a los instantes anterior y posterior a un cruce por el nivel medio, o una interpolación parabólica entre el valor máximo observado en la serie y los dos adyacentes, para detectar de forma más adecuada la posición y el instante de tiempo en el que ocurre el máximo (mínimo).

En consecuencia, acontinuación se presentan los esquemas empleados en este trabajo para realizar las interpolaciones lineales y parabólicas.

Interpolación lineal

Dados dos valores de una función discreta, $f(x_i)$, $f(x_{i+1})$, para

$$x_i < x < x_{i+1}$$

Realizando un desarrollo en series de Taylor entorno a $f(x_i)$, truncado en el término lineal, se tiene que

$$f(x) = f(x_i) + (x - x_i)f'(x_i) + \cdots \tag{2.1}$$

Entonces, empleando un esquema en diferencias finitas centradas

$$f(x) = f(x_i) + (x - x_i)\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \tag{2.2}$$

Si los datos están igualmente espaciados, como es el caso, $\Delta x = x_{i+1} - x_i$, y

$$f(x) = f(x_i) + (x - x_i)\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x} \tag{2.3}$$

La interpolación inversa vendrá dada por

$$x = x_i + (x_{i+1} - x_i)\frac{f(x) - f(x_i)}{f(x_{i+1}) - f(x_i)} \tag{2.4}$$

En el instante de un cruce por cero ascendente se verificará que,

$$f(x) = 0; \qquad f(x_{i+1} > 0); \qquad f(x_i) < 0$$

Por tanto, la interpolación inversa adopta la expresión

$$x = x_i + \frac{-f(x_i)}{f(x_{i+1}) - f(x_i)}\Delta x \tag{2.5}$$

Interpolación parabólica

Dados tres puntos igualmente espaciados, $f(x_{i-1})$, $f(x_i)$, $f(x_{i+1})$, donde

$$x_{i-1} = x_i - \Delta x = x_{i+1} - 2\Delta x$$

Empleando un desarrollo en series de Taylor en el entorno de $f(x_i)$, truncado en el término cuadrático, se tiene que

$$f(x) = f(x_i) + (x - x_i)f'(x_i) + \frac{(x - x_i)^2}{2}f''(x_i) + \cdots \tag{2.6}$$

Haciendo uso de un esquema en diferencias finitas centradas, esta ecuación puede ser expresada como

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_i) + (x - x_i)\left[\tfrac{f(x_{i+1})-f(x_{i-1})}{2\Delta x}\right] \\ &+\tfrac{(x-x_i)^2}{2}\left[\tfrac{f(x_{i-1})-2f(x_i)+f(x_{i+1})}{(\Delta x)^2}\right] \end{aligned} \tag{2.7}$$

Si $f(x)$ es un máximo, su primera derivada es cero. Entonces, estimando la derivada de la expresión (2.7) e igualando a cero

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\tfrac{f(x_{i+1})-f(x_{i-1})}{2\Delta x}\right] - x_i\left[\tfrac{f(x_{i-1})-2f(x_i)+f(x_{i+1})}{(\Delta x)^2}\right] \\ &+\left[\tfrac{f(x_{i-1})-2f(x_i)+f(x_{i+1})}{(\Delta x)^2}\right]x = 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

La expresión para la interpolación parabólica inversa puede ser escrita como

$$x = x_i - \frac{1}{2}\left[\frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1})}\right]\Delta x \tag{2.9}$$

2.1.2 Análisis en el dominio temporal

El objetivo fundamental del análisis de series temporales en el dominio temporal, o probabilístico, es estimar la frecuencia relativa de presentación de un suceso, perteneciente al espacio muestral de una variable aleatoria determinada. Por tanto, este tipo de análisis se basa en la determinación de funciones de densidad y distribución de probabilidad, momentos estadísticos, etc., de diversos parámetros del oleaje que permiten obtener una descripción estadística de la estructura de dicho fenómeno.

El análisis detallado de los fundamentos del análisis estadístico de variables aleatorias puede encontrarse en numerosos textos especializados, tales como Cramer (1966), Papoulis (1984) y Ochi (1990), por citar algunos. En la sección [1.2.1], en la cual se introdujeron los conceptos de procesos aleatorios estacionarios y ergódicos, ya se describieron algunos aspectos de este tipo de análisis. A continuación se definen los parámetros de mayor interés práctico en un registro de oleaje, para posteriormente introducir brevemente algunas de las distribuciones probabilísticas más empleadas en el estudio del oleaje, así como algunos conceptos básicos que resultarán de utilidad, tanto en la sección en la que se describe la generación de números aleatorios, como en capítulos posteriores.

Parámetros característicos del oleaje

A partir del perfil de la superficie libre del mar, $\eta(t)$, pueden definirse varios parámetros de interés práctico. Entre estos destacan la altura, H, y el periodo del oleaje, T. Estos parámetros suministran información sobre el contenido energético, y su distribución temporal, de un campo de oleaje, de donde se deduce su importancia práctica. No obstante, al contrario que en un tren de ondas regular, donde las definiciones de la altura y el periodo son inmediatas, su definición en el contexto del oleaje real presenta algunas dificultades prácticas, motivo por el cual existen diversos criterios para distinguir las olas individuales y definir sus parámetros característicos.

Antes de definir las alturas y los periodos según diferentes criterios, es importante especificar claramente los puntos de $\eta(t)$ que permiten establecer con precisión tales definiciones, así como introducir la terminología y notación utilizadas. En general, a lo largo de este trabajo se emplea la nomenclatura recomendada por el comité especializado de oleaje de la IAHR (Asociación Internacional para Investigaciones Hidraulicas, 1989) para el análisis de registros de oleaje.

Cresta: Máximo local de $\eta(t)$. Una cresta queda definida por:

$$\dot{\eta}(t) = 0 \qquad \text{y} \qquad \ddot{\eta}(t) < 0$$

Seno: Mínimo local de $\eta(t)$. Es decir:

$$\dot{\eta}(t) = 0 \qquad \text{y} \qquad \ddot{\eta}(t) > 0$$

Nivel medio: Valor medio del registro durante el periodo de medida (NMR), habiendose eliminado las fluctuaciones del nivel medio originadas por fenómenos de periodicidad fuera del rango del oleaje (por ej. la marea).

$$\eta(t) = 0$$

Cruce ascendente: Punto en el que $\eta(t)$ intersecta el NMR con pendiente positiva. Analíticamente, dicho punto queda determinado por:

$$\eta(t) = 0 \qquad \text{y} \qquad \dot{\eta}(t) > 0$$

Cruce descendente: Punto en el que $\eta(t)$ intersecta el NMR con pendiente negativa. Un cruce descendente es definido por:

$$\eta(t) = 0 \qquad \text{y} \qquad \dot{\eta}(t) < 0$$

En este trabajo se emplea el criterio más común para la definición de H y T. Es decir, el criterio de *cruces por cero ascendente*, según el cual, una ola queda definida por dos cruces consecutivos del perfil de la superficie libre con el NMR en sentido ascendente. Utilizando este criterio se pueden definir los siguientes parámetros, ilustrados en la figura 2.1:

$\boldsymbol{H_z} \equiv$ Altura de ola de paso ascendente por cero: Distancia vertical máxima entre los puntos de la superficie libre comprendidos entre dos pasos por cero ascendentes consecutivos.

$\boldsymbol{T_z} \equiv$ Periodo de ola de paso ascendente por cero: Intervalo temporal entre dos pasos por cero ascendentes consecutivos.

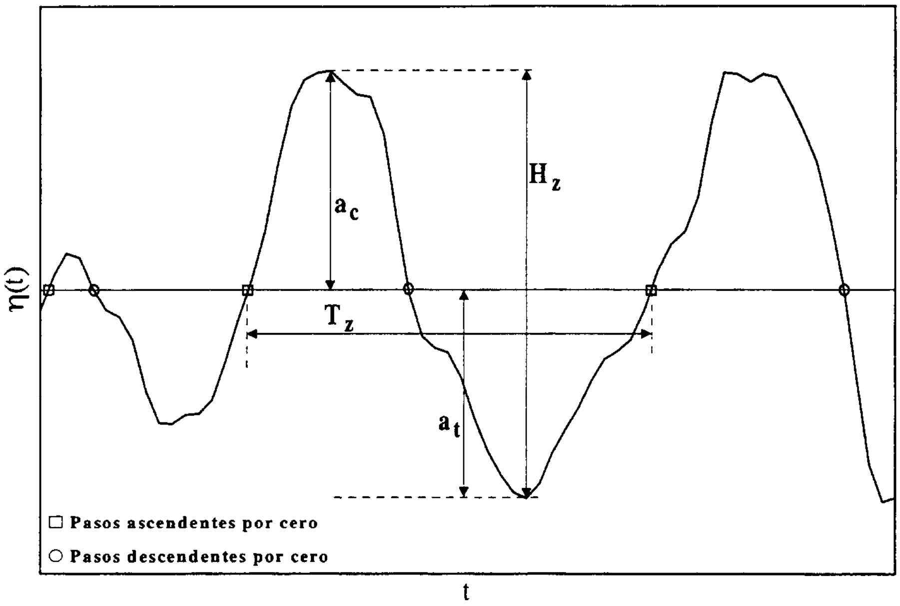

Figura 2.1: Parámetros característicos del oleaje según el criterio de pasos ascendentes por cero

$a_c \equiv$ Amplitud de cresta: Distancia vertical máxima desde el NMR entre entre un paso ascendente y otro descendente consecutivos por el nivel cero.

$a_t \equiv$ Amplitud de seno: Distancia vertical máxima desde el NMR entre entre un paso descendente y otro ascendente consecutivos por el nivel cero.

Con el fin de diferenciar entre los parámetros definidos mediante distintos criterios, la IAHR recomienda el uso del subíndice z para denotar los parámetros de paso por cero. No obstante, puesto que en este trabajo se emplean únicamente los parámetros definidos según el criterio de pasos ascendentes por cero, se suprime el úso de los subíndices al denotar las alturas y los periodos, con el fín de simplificar la nomenclatura, entendiéndose que H y T representan los parámetros de paso por cero ascendente, salvo que se especifique lo contrario.

Distribución de probabilidad Uniforme

Para una *v.a.* X uniformemente distribuida en el intervalo (x_1, x_2), denotado como $X \sim U(x_1, x_2)$, las *fdp* y *FDP* vienen dadas por

$$\begin{cases} f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_2 - x_1} & \Longleftrightarrow \quad x_1 \leq x \leq x_2 \\ 0 & \Longleftrightarrow \quad x_1 > x > x_2 \end{cases} \\ \\ F(x) = \begin{cases} 0 & \Longleftrightarrow \quad x \leq x_1 \\ \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} & \Longleftrightarrow \quad x_1 < x \leq x_2 \\ 1 & \Longleftrightarrow \quad x > x_2 \end{cases} \end{cases} \tag{2.10}$$

El *valor medio* y la *varianza* toman los valores:

$$\mu = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad ; \quad \sigma^2 = \frac{(x_2 - x_1)^2}{2} \tag{2.11}$$

Distribución de probabilidad Normal

La *v.a.* X, de media μ y varianza σ^2, posee una distribución probabilística *Normal*, o *Gaussiana*, $N(\mu, \sigma^2)$, si sus *fdp* y *FDP* pueden expresarse como

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]} \\ \\ F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]} dx \end{cases} \quad -\infty < x < \infty \tag{2.12}$$

Nótese que en la expresión de la *FDP* Normal aparece de forma implícita la denominada *función de error.* Por tanto, dicha función no puede ser evaluada analíticamente debiéndose recurrir a métodos numéricos. Sin embargo, este hecho no representa una grave complicación, puesto que los valores de ésta función se encuentran tabulados para el caso en que $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$. Luego, bastará con *estandarizar* la *v.a.* $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Es decir, generamos una nueva *v.a.* Z definida por

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \tag{2.13}$$

de modo que, su distribución de probabilidad será una $N(0,1)$, y sus *fdp* y *FDP*, denominadas *función de densidad (distribución) de probabilidad Normal estándar* se definen como

$$\begin{cases} f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left[-\frac{z^2}{2}\right]} \\ \\ F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{\left[-\frac{z^2}{2}\right]} dz \end{cases} \qquad -\infty < z < \infty \tag{2.14}$$

Una propiedad a destacar, entre las que poseen las *v.a.* Gaussianas, es que dadas n *v.a.* independientes X_i, distribuidas según una $N(\mu_i, \sigma_i^2)$, la suma de todas ellas es una nueva *v.a.* Y, también distribuida normalmente,

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \tag{2.15}$$

con *media* y *varianza*:

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n \quad ; \quad \sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_n \tag{2.16}$$

Distribución de probabilidad Chi-cuadrado

Dadas n *v.a.* X_i, con distribución $N(0,1)$, la suma de sus cuadrados da lugar a una nueva *v.a.* Y distribuida según una distribución denominada *Chi-cuadrado* con n grados de libertad ($G.L$), y denotada por χ_n^2,

$$Y = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \tag{2.17}$$

La expresión matemática de la *fdp* es

$$f(y) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} y^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} e^{-(y/2)} = \chi_n^2 \qquad 0 \leq y < \infty \tag{2.18}$$

donde $\Gamma(x)$ es la función Gamma.
La *media* y la *varianza* de esta *fdp* son

$$\mu = n \quad ; \quad \sigma^2 = 2n \tag{2.19}$$

Distribución de probabilidad Weibull

Una *v.a.* X posee una distribución de Weibull si sus *fdp* y *FDP* pueden expresarse como

$$\begin{cases} f(x) = c\lambda^c x^{(c-1)} e^{-(\lambda x)^c} \\ \\ F(x) = 1 - e^{-(\lambda x)^c} \end{cases} \qquad 0 \leq x \leq \infty \tag{2.20}$$

Su *valor medio* y su *varianza* son:

$$\mu = \frac{1}{\lambda}\Gamma\left(1+\frac{1}{c}\right) \quad ; \quad \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}\left\{\Gamma\left(1+\frac{2}{c}\right) - \left[\Gamma\left(1+\frac{1}{c}\right)\right]^2\right\} \tag{2.21}$$

Distribución de probabilidad Rayleigh

Una *v.a.* X sigue una distribución de Rayleigh si sus *fdp* y *FDP* vienen dadas por

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2x}{R} e^{\left(-\frac{x^2}{R}\right)} \\ \\ F(x) = 1 - e^{\left(-\frac{x^2}{R}\right)} \end{cases} \qquad 0 \leq x \leq \infty \tag{2.22}$$

Su *valor medio* y su *varianza* son:

$$\mu = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{R} \quad ; \quad \sigma^2 = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) R \tag{2.23}$$

Obsérvese que la distribución de Rayleigh puede obtenerse como caso particular de la distribución de Weibull, para $c = 2$ y $\lambda = 1/\sqrt{R}$.

Teorema Central del Límite

El teorema central del límite (*TCL*) establece que: dado un conjunto de n *v.a.* mútuamente independientes e identicamente distribuidas, con medias μ y varianzas σ^2, la distribución de probabilidad de la suma de todas ellas,

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{2.24}$$

normalizada:

$$Z = \frac{Y - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \tag{2.25}$$

tiende a una $N(0,1)$ para $n \to \infty$.

La gran importancia de la distribución Normal reside en este teorema, puesto que la aleatoriedad de un gran número de fenómenos físicos surge como resultado neto de la acción de diversos factores aleatorios. En consecuencia, la distribución gaussiana permite, al menos en primera aproximación, caracterizar una abundante cantidad de fenómenos físicos aleatorios.

Dos aspectos a tener en cuenta, respecto a la posible caracterización de un fenómeno estocástico mediante la distribución Normal, en virtud del *TCL*, son:

1. El número de *v.a.* necesarias para que el *TCL* de lugar a resultados aceptables depende, de la distribución de las *v.a.* individuales y de la precisión requerida. Sin embargo, en muchas aplicaciones, se obtienen resultados razonablemente precisos con valores significativamente pequeños de n, $(n \geq 20)$.

2. La suposición de gaussianidad de un fenómeno aleatorio solo es válida si en dicho fenómeno no existen componentes deterministas.

En la sección [1.2] se introdujo la definición general de los momentos de una distribución probabilística, tanto respecto al origen, como respecto a la media, o centrales. Entre estos se encontraban la media, μ_x, la media cuadrática, $\overline{x^2}$, la varianza, σ_x^2, y la covarianza, $C(x,y)$. Además de los momentos centrales dados entonces, cabe destacar que dado que las unidades de la varianza son las de la *v.a.* al cuadrado, para muchos propósitos resulta útil emplear como medida de dispersión su raiz cuadrada positiva, que recibe el nombre de *desviación estándar* σ_x, con el fin de obtener los resultados de dispersión en las mismas unidades que la propia *v.a.* y su valor medio. Por otro lado, en el estudio de determinadas características del oleaje, es necesario introducir momentos centrales de orden superior al segundo. En particular, el momento central de orden tres, denominado genéricamente como *sesgo* de la distribución, se define como

$$\mu_3 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^3 f(x)dx \tag{2.26}$$

Aunque, en la práctica, resulta más útil emplear su forma adimensionalizada respecto a σ_x, conocida como *coeficiente de asimetría*, y expresada por

$$\lambda_3 = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3} \tag{2.27}$$

A pesar de la diferencia entre el sesgo y el coeficiente de asimetría, es frecuente denominar a este último también como sesgo.

De forma similar, el momento central de cuarto orden adimensionalizado respecto a σ_x recibe el nombre de *curtosis*, o *coeficiente de apuntamiento*, y se define como

$$\lambda_4 = \frac{E\left[(X - \mu_x)^4\right]}{\sigma_x^4} \tag{2.28}$$

Es bastante frecuente encontrar la curtosis definida como

$$\lambda_4 = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3 \tag{2.29}$$

debido al uso de la distribución Normal, cuya curtosis es igual a 3, como referencia del nivel de apuntamiento.

En cuanto al significado de los momentos, es interesante notar que cuanto mayor es su orden, mayor es la contribución de las colas de la *fdp* a su valor, y por tanto mayor es la información que proporcionan sobre la estructura de dichas zonas. Los momentos centrales de orden par no hacen distinción entre las dos colas de la *fdp*, y por ello son empleados como descriptores del grado de dispersión, o agrupamiento, de la *v.a.* respecto a su valor medio. Los momentos centrales de orden impar son todos nulos para *fdp* simétricas, por tanto, ofrecen información sobre la asimetría de la distribución. Así, el sesgo posee un valor positivo si la cola positiva es más larga que la negativa, es decir, si la *moda* de la *v.a.* está situada en la zona negativa, y toma valor negativo en caso contrario. El valor de la curtosis será tanto mayor, cuanto más largas sean las colas de la *fdp*, o lo que es equivalente, cuanto más apuntada sea la distribución.

Por otra parte, la covarianza entre dos *v.a.*, dada por (1.34), suele emplearse preferentemente en forma normalizada. Para ello se define el *coeficiente de correlación lineal* ρ_{xy}, expresado como

$$\rho_{xy} = \frac{Cov[X,Y]}{\sqrt{\sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2}} = \frac{Cov[X,Y]}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \tag{2.30}$$

Pudiendose demostrarse (e.g., Reimann, 1989) que

$$\begin{aligned} &1) \quad |\rho_{xy}| \leq 1 \\ &2) \quad \text{Si } X \text{ e } Y \text{ son independientes} \Longrightarrow \rho_{xy} = 0 \\ &3) \quad \text{Si } X = aY + b \Longrightarrow \begin{cases} \rho_{xy} = +1 & \text{para} \quad a > 0 \\ \rho_{xy} = -1 & \text{para} \quad a < 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{2.31}$$

En relación a la segunda de las propiedades dada en (2.31) es interesante recordar que dos *v.a.* X e Y son estadísticamente independientes, si se verifica que su *fdpc* es igual al producto de sus respectivas funciones de densidad marginales. Es decir,

$$f(x,y) = f(x)f(y) \tag{2.32}$$

Por otra parte, se dice que dos *v.a.* X e Y están *incorrelacionadas* si se verifica que

$$E[xy] = E[x]E[y] \tag{2.33}$$

Luego, las *v.a.* estadísticamente independientes están incorrelacionadas, puesto que la condición dada por (2.32) implica (2.33). Desafortunadamente, esta relación no siempre se verifica a la inversa. Es decir, puede no existir correlación estadística entre las *v.a.* aunque éstas sean estadísticamente dependientes. Es decir,

$$f(x,y) = f(x)f(y) \Longrightarrow E[xy] = E[x]E[y]$$

$$E[xy] = E[x]E[y] \not\Longrightarrow f(x,y) = f(x)f(y) \tag{2.34}$$

Sin embargo, aunque en general la relación inversa no es válida, si que es cierta si las $v.a.$ están normalmente distribuidas. Es decir, si las variables aleatorias X e Y poseen una distribución conjunta Normal, la independencia y la incorrelación son equivalentes.

La definición de independencia estadística anterior puede generalizarse para un conjunto de n $v.a.$. Así, se dice que las $v.a.$ $X_1, X_2, \cdots, X_n$ son estadísticamente independientes si,

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n) \tag{2.35}$$

verificándose, además, que si las $v.a.$ $X_1, X_2, \cdots, X_n$ son estadísticamente independientes, tambien están estadísticamente incorrelacionadas.

2.1.3 Análisis en el dominio frecuencial

Tal como se comentó en el capítulo anterior, un avance trascendental en el estudio del oleaje es el debido a Pierson (1952), al introducir el concepto de espectro en la representación y análisis del oleaje. De este modo, las fluctuaciones de la superficie en un punto dado del océano pueden ser expresadas en términos de la función de densidad espectral (o espectro), tal como se indica en la ecuación (1.80).

La idea básica subyacente en el análisis espectral es la de traspasar la información contenida en las observaciones realizadas en el dominio del tiempo al dominio frecuencial. El objetivo es descomponer fenómenos, de mayor o menor complejidad, en constituyentes elementales y conocer cual es la contribución de cada uno de ellos al proceso. De esta forma podremos obtener un mayor conocimiento de la estructura y la evolución temporal (espacial) del sistema de cuya observación se ha obtenido la muestra.

En particular, el análisis en el dominio frecuencial de una serie temporal, $\eta(t)$, permite conocer la contribución de cada banda de frecuencias $f \pm df$ al proceso analizado. En esta sección se introducen las propiedades fundamentales de la función le densidad espectral, así como algunos de los procedimientos más empleados para su estimación.

Función de Densidad Espectral

La *función de densidad espectral* de un proceso aleatorio estacionario y ergódico, $\eta(t)$, es por definición

$$G(f) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \mid X(f) \mid^2 \tag{2.36}$$

siendo $X(f)$ la transformada de Fourier de $\eta(t)$. $G(f)$ representa la contribución cuantitativa al proceso de las componentes cuya frecuencia está contenida en el intervalo $f \pm df$.

No obstante, la función de densidad espectral puede ser estimada haciendo uso de la función de autocorrelación del proceso, $R(\tau)$, función estrechamente relacionada con la función de autocovarianza y que fué introducida en la sección [1.2.1], ecuaciones (1.47) y (1.48), al establecer las condiciones de estacionariedad de segundo orden de un proceso aleatorio. Debido a su interés, esta función será examinada con mayor detalle en la próxima sección y en el capítulo 5.

Teorema de Wiener-Khintchine, (Wiener, 1930; Khintchine, 1934), establece que la función de autocorrelación y la función de densidad espectral constituyen un par de Fourier, transformando $R(\tau)$ desde el dominio de los desfases temporales al dominio de frequencias y viceversa. La expresión matemática de dicho teorema es,

$$\left.\begin{aligned} G(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \mathrm{e}^{(-\mathrm{i}2\pi f\tau)} d\tau \\ R(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(f) \mathrm{e}^{(\mathrm{i}2\pi f\tau)} df \end{aligned}\right\} \tag{2.37}$$

donde $G(f)$ está definida sobre todo el rango de frecuencias, tanto positivas como negativas. Si bien, esto tiene sentido desde el punto de vista matemático, no es así desde una perspectiva física. Naturalmente, en la composición frecuencial de un fenómeno real no existen frecuencias negativas.

Dadas las relaciones de simetría existentes entre una función definida en el dominio del tiempo, $f(t)$, y su transformada en el dominio de las frecuencias se tiene que para una función real y par, como es el caso de $R(\tau)$, su transformada de Fourier, $G(f)$, tambien será real y par (e.g., Bracewell, 1978). Es decir,

$$G(f) = G(-f) \tag{2.38}$$

Por ello, $G(f)$ recibe el nombre de función de densidad espectral)*bi-lateral* y se define el *espectro uni-lateral*, $S(f)$, en todo el rango de frecuencias positivas, como

$$S(f) = \begin{cases} 2\,G(f) & \text{para} \quad f \geq 0 \\ \\ 0 & \text{para} \quad f < 0 \end{cases} \tag{2.39}$$

Es decir, se transfiere la energía asociada a las frecuencias negativas a las frecuencias positivas, equidistantes respecto a la frecuencia cero. Este procedimiento se realiza teniendo en cuenta que, tanto la función de autocorrelación como la función de densidad espectral son funciones reales y pares. Gráficamente equivale a doblar el espectro por el eje de coordenadas y sumar las densidades espectrales correspondientes a cada frecuencia. Por ello, $S(f)$ suele denominarse como *espectro doblado*. En consecuencia, teniendo en cuenta (2.39), $S(f)$ puede ser expresada como

$$S(f) = 2\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\mathrm{e}^{(-\mathrm{i}2\pi f\tau)}d\tau \tag{2.40}$$

y teniendo en cuenta que $R(\tau) = R(-\tau)$, la función de densidad espectral puede ser expresada como

$$S(f) = 4\int_{0}^{\infty} R(\tau)\mathrm{e}^{(-\mathrm{i}2\pi f\tau)}d\tau \tag{2.41}$$

Además, haciendo uso de la relación de Euler y sustituyendo en dicha expresión, se tiene

$$S(f) = 4\left[\int_0^{\infty} R(\tau)\cos(2\pi f\tau)d\tau - \mathrm{i}\int_0^{\infty} R(\tau)\,\mathrm{sen}\,(2\pi f\tau)d\tau\right] \tag{2.42}$$

puesto que $R(\tau)$ es una función par y la función sen(x) es impar, el segundo término de esta ecuación es nulo, de modo que

$$S(f) = 4\left[\int_0^{\infty} R(\tau)\cos(2\pi f\tau)d\tau\right] \tag{2.43}$$

Procediendo de manera inversa, se tiene que

$$R(\tau) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} S(f)\mathrm{e}^{(i2\pi f\tau)}df \tag{2.44}$$

o bien

$$R(\tau) = \int_0^{\infty} S(f)\cos(2\pi f\tau)df \tag{2.45}$$

Luego, el *Teorema de Wiener-Khintchine* puede ser expresado como sigue

$$\left.\begin{aligned} S(f) &= 4\int_0^{\infty} R(\tau)\cos(2\pi f\tau)d\tau \\ R(\tau) &= \int_0^{\infty} S(f)\cos(2\pi f\tau)df \end{aligned}\right\} \tag{2.46}$$

Las expresiones dadas para $S(f)$ y $R(\tau)$ en (2.46) pueden ser escritas en forma discreta. Así, empleando la regla trapezoidal para aproximar la integración en (2.43) se tiene,

$$\hat{S}(f_m) = 4\left[\sum_{n=0}^{M} \frac{\hat{R}(\tau_n)cos(2\pi f_m\tau_n) + \hat{R}(\tau_{n-1})cos(2\pi f_m\tau_{n-1})}{2}\Big(\tau_n - \tau_{n-1}\Big)\right]$$

que para registros equiespaciados, en los cuales $(\tau_n - \tau_{n-1})$ se reduce a

$$(\tau_n - \tau_{n-1}) = \Delta t$$

adopta la expresión

$$\hat{S}(f_m) = 2\Delta t \left[\hat{R}(0) + 2 \sum_{n=1}^{M-1} \hat{R}(n\Delta t) \cos(2\pi f_m n \Delta t) + \hat{R}(M) \cos(2\pi f_m M \Delta t) \right] \tag{2.47}$$

donde M es el número máximo de Lags y la frecuencia del espectro correspondiente a cada lag viene dada por

$$f_m = \frac{m}{2\Delta t M} \tag{2.48}$$

donde se han considerado las restricciones impuestas, sobre la resolución frecuencial, por la longitud finita del registro, T, y la frecuencia de muestreo empleada, $1/\Delta t$. Estas restricciones tienen su explicación teórica en el Teorema del Muestreo y se expresan análiticamente mediante la frecuencia de Nyquist, f_N. Esto es,

$$f_N = \frac{1}{2\Delta t} \tag{2.49}$$

de forma que si para valores dados de M y Δt la resolución frecuencial viene dada por

$$\Delta f = \frac{1}{M\Delta t} \tag{2.50}$$

la frecuencia máxima resoluble será

$$f_{max} = M\Delta f = \frac{1}{2\Delta t} \tag{2.51}$$

de donde

$$\Delta f = \frac{1}{2\Delta t M} \tag{2.52}$$

por lo que

$$f_m = m\Delta f = \frac{m}{2\Delta t M} \tag{2.53}$$

Incluyendo esta restricción en la ecuación (2.47), se puede escribir

$$\hat{S}(m\Delta f) = 2\Delta t\left[\hat{R}(0) + 2\sum_{n=1}^{M-1}\hat{R}(n\Delta t)\cos\left(\frac{mn\pi}{M}\right) + \hat{R}(M)\cos\left(\frac{m\pi}{M}\right)\right] \tag{2.54}$$

o bien, teniendo encuenta que

$$\cos\left(\frac{m\pi}{M}\right) = \begin{cases} 1 & \text{para } m \text{ par} \\ \\ -1 & \text{para } m \text{ impar} \end{cases} \tag{2.55}$$

es decir,

$$\cos\left(\frac{m\pi}{M}\right) = (-1)^m \tag{2.56}$$

el estimador dado por (2.54) puede expresarse como

$$\hat{S}(m\Delta f) = 2\Delta t\left[\hat{R}(0) + 2\left(\sum_{n=1}^{M-1}\hat{R}(n\Delta t)\cos\left(\frac{mn\pi}{M}\right)\right) + (-1)^m\hat{R}(M)\right] \tag{2.57}$$

para $n = 0, 1, 2, \cdots, M$ y $m = 0, 1, 2, \cdots, M$

Por otro lado, empleando la regla de integración trapezoidal para discretizar ecuación que define la función de autocorrelación de $R(\tau)$ en términos de $S(f)$, se tiene que

$$\hat{R}(n\Delta t) = \frac{1}{4M\Delta t}\left[\hat{S}(0) + 2\left(\sum_{m=1}^{M-1}\hat{S}(m\Delta f)\cos\left(\frac{mn\pi}{M}\right)\right) + (-1)^n\hat{S}(M)\right] \tag{2.58}$$

para $n = 0, 1, 2, \cdots, M$ y $m = 0, 1, 2, \cdots, M$.

En definitiva, de densidad espectral puede obtenerse a partir de la función de autocorrelación, haciendo uso de un estimador de $R(\tau)$. Sin embargo, este procedimiento de estimación de $S(f)$, empleado durante bastante tiempo denominado *método de Blackman & Tukey*, no resulta eficiente desde un punto de vista computacional. Por ello, en la actualidad, su uso es prácticamente nulo. Esto es debido a la existencia de algoritmos considerablemente eficientes que permiten evaluar la expresión (2.36) directamente, sin necesidad de estimar $R(\tau)$ como paso intermedio. No obstante, aunque el uso de $R(\tau)$ como vía para obtener la función de densidad espectral no resulta computacionalmente eficiente, en el capítulo 5 se podrá comprobar que dicha función posee información relevante para el conocimiento del fenómeno físico analizado.

Estimación del periodograma

Teniendo en cuenta la definición dada en (2.36) y lo anteriomente comentado, la función de densidad espectral puede ser definida como

$$S(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{2}{T} \mid X(f) \mid^2 \tag{2.59}$$

donde $X(f)$ son los coeficientes complejos de Fourier, puede estimarse directamente a partir de la serie temporal $\eta(t)$, mediante la transformada de Fourier de ésta, sin necesidad de obtener la función de autocorrelación. La transformada de Fourier de una serie temporal discreta puede expresarse como

$$X(f) = \sum_{-\infty}^{\infty} \eta(t) \mathrm{e}^{(-i2\pi f t)} \Delta t \tag{2.60}$$

La estimación del espectro así obtenida recibe generalmente el nombre de *periodograma.*

Así, considerando una serie temporal discreta, constituida por N puntos muestreados en intervalos de tiempo equidistantes Δt,

$$\eta(t_n) = \eta_n = \eta(n\Delta t) \qquad n = 0, 1, 2, \cdots, N-1$$

y limitando el rango de variación de la sumatoria a los valores comprendidos entre 0 y $N-1$, se tendrá que, para una frecuencia dada

$$X(f_m) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \eta(t_n) \mathrm{e}^{(-\mathrm{i}2\pi f_m t_n)} \tag{2.61}$$

para

$$m = 0, 1, 2, \cdots, N-1 \qquad y \qquad n = 0, 1, 2, \cdots, N-1$$

donde

$$t_n = n\Delta t \qquad y \qquad f_m = m\Delta f$$

siendo Δf la resolución frecuencial obtenida al realizar la transformación de $\eta(t)$. Es decir, Δf representa la separación entre las frecuencias asociadas a cada dos valores de $X(f_m)$ consecutivos. Así, para una serie temporal de duración $T = N\Delta t$, la relación entre la resolución frecuencial y el intervalo de muestreo viene dada por

$$\Delta f = \frac{1}{N\Delta t} \tag{2.62}$$

de forma que

$$2\pi f_m t_n = 2\pi m n \Delta f \Delta t = \frac{2\pi m n}{N}$$

por lo que la Transformada Discreta de Fourier para $\eta(t)$ se podrá escribir como

$$X(f_m) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \eta(t_n) e^{(-i2\pi m \Delta f n \Delta t)} \tag{2.63}$$

o bien

$$X(f_m) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \eta(t_n) e^{\left(\frac{-i2\pi m n}{N}\right)} \tag{2.64}$$

donde cada valor de f_m vendrá dado por

$$f_m = \frac{m}{N\Delta t} \qquad \text{para} \qquad m = 0, 1, 2, \cdots\cdots, N-1$$

Sin embargo, se debe notar que no es necesario realizar el cálculo de los coeficientes complejos de Fourier hasta el punto $N-1$ puesto que la transformada de Fourier verifica la siguiente relación de simetría

$$X(f_m) = X(f_{m-N}) \tag{2.65}$$

Luego, solamente es preciso especificar $X(f_m)$ para valores de m comprendidos entre 0 y $N/2$.

Ademas, para un periodo de muestreo, Δt, la frecuencia máxima que puede ser resuelta viene dada por la frecuencia de Nyquist, f_N,

$$f_{max} = \frac{1}{2\Delta t} = f_N$$

Es decir, el valor máximo que puede tomar m en f_m viene determinado por

$$\frac{m_{max}}{N\Delta t} = \frac{1}{2\Delta t} \Longleftrightarrow m_{max} = \frac{N}{2}$$

En otras palabras, para m igual a $N/2$ se tiene el valor de la frecuencia máxima resoluble, f_N

$$f_{max} = f_{\frac{N}{2}} = \frac{N/2}{N\Delta t} = \frac{1}{2\Delta t} = f_N$$

Esto es, el valor máximo de m debe ser, $N/2$, de forma que con los valores de $X(f)$ asociados a las frecuencias pertenecientes al rango

$$0 \leq f_m \leq f_N$$

se obtiene toda la información que nuestro intervalo de muestreo Δt permite.

Por otra parte, considerando la relación de Euler, el término exponencial de la transformada discreta de Fourier se puede escribir como

$$\mathrm{e}^{(-\mathrm{i}2\pi mn/N)} = \cos(2\pi mn/N) - \mathrm{sen}(2\pi mn/N) \tag{2.66}$$

Es decir, los coeficientes complejos de Fourier pueden ser descompuestos en una parte real ($\Re$) y otra imaginaria ($\Im$), tal como sigue

$$X(f) = \Re\left[X(f)\right] - \mathrm{i}\Im\left[X(f)\right] \tag{2.67}$$

donde

$$\Re\left[X(f_m)\right] = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \eta_n \cos\left(\frac{2\pi mn}{N}\right) \longrightarrow \boxed{\text{Transformada Coseno}} \tag{2.68}$$

$$\Im\left[X(f_m)\right] = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \eta_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi mn}{N}\right) \longrightarrow \boxed{\text{Transformada Seno}} \tag{2.69}$$

Es decir,

$$X(f_m) = \left[\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \eta_n \cos\left(\frac{2\pi mn}{N}\right) - \mathrm{i}\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \eta_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi mn}{N}\right)\right] \tag{2.70}$$

que escrito en forma más compacta es

$$X(f_m) = \Re_m - \Im_m$$

Entonces, según la definición dada para la función de densidad espectral (2.59), y teniendo en cuenta que

$$\mid X(f_m) \mid^2 = X(f_m)X(f_m)^* = (\Re_m - \mathrm{i}\Im_m)(\Re_m + \mathrm{i}\Im_m) = \left(\Re_m^2 + \Im_m^2\right) \tag{2.71}$$

es posible obtener una estimación de la función de densidad espectral, $\hat{S}(f)$, considerando que el registro analizado es de longitud finita, $T = N\Delta t$, mediante

$$\begin{array}{lcll} \hat{S}(f_0) & = & \frac{1}{T} \mid X(f_0) \mid^2 & \\ \hat{S}(f_m) & = & \frac{2}{T} \mid X(f_m) \mid^2 & m = 1, 2, \cdots, \frac{N}{2} - 1 \\ \hat{S}(f_{N/2}) & = & \frac{1}{T} \mid X(f_{N/2}) \mid^2 & \end{array} \tag{2.72}$$

de donde, expresando $X(f_m)$ en función de las transformadas seno y coseno y extrayendo como factor común el valor Δt, se tiene

$$\hat{S}(f_m) = \frac{2}{T} \mid X(f_m) \mid^2 = \frac{2(\Delta t)^2}{N\Delta t}\left(\Re_m^2 + \Im_m^2\right) = \frac{2\Delta t}{N}\left(\Re_m^2 + \Im_m^2\right) \tag{2.73}$$

para

$$f_m = \frac{m}{N\Delta t} \quad ; \quad m = 0, 1, 2, \cdots\cdots, N/2$$

Los términos $\Re_m$ e $\Im_m$ se pueden obtener directamente a partir de sus definiciones, dadas por (2.68) y (2.69). No obstante, este proceso requiere un tiempo de computación muy elevado, principalmente para valores altos de N. Por ello, en general, estas expresiones son evaluadas empleando el algoritmo de la "*Transformada Rápida de Fourier*", (FFT), que permite reducir sustancialmente el número de multiplicaciones involucradas en la resolución de las expresiones anteriores, consiguiendose así una reducción drástica en el tiempo de computación necesario.

Suavizado del periodograma

El análisis de las propiedades estadísticas de los coeficientes de Fourier revela que éstos presentan una elevada varianza respecto a su valor medio. De esta forma, el periodograma, o espectro "*crudo*", obtenido directamente a partir de los mismos, no proporciona resultados estadísticamente significativos.

La forma más elemental de reducir la variabilidad de las estimaciones espectrales es emplear el operador "*promedio*" para suavizar las estimaciones espectrales. Los métodos empleados con este fin pueden clasificarse en dos grupos:

1. Promedio de diferentes estimaciones para la misma frecuencia.

2. Promedio de las estimaciones centradas alrededor de una frecuencia dada.

Para obtener varias estimaciones espectrales para la misma frecuencia, a partir de una serie temporal discreta, se debe subdividir la secuencia de observaciones en segmentos de menor tamaño. Automáticamente, ésto da lugar a una disminución en la resolución frecuencial.

Al promediar estimaciones alrededor de una frecuencia dada, éstas deben ser estadísticamente independientes entre sí para que el promedio sea fructífero. Si el espectro varía rápidamente sobre dichas frecuencias, el promedio generará un sesgo significativo.

Los promedios tipo (1) corresponden al denominado método de Bartlett, (Bartlett, 1948), mejorado posteriormente por Welch, (Welch, 1967). Los promedios tipo (2) constituyen el método de suavizado propuesto por Daniell, (Daniell, 1946). Una descripción detallada de estos métodos de suavizado del espectro puede encontrase en diferentes monografías (e.g., Rodríguez, 1993). En esta sección sólo se expondrá de forma breve el método de Welch, por ser el empleado en el presente estudio.

Método de Welch

Welch (1967) propuso una modificación del método de Bartlett, que básicamente consiste en subdividir la serie original $\eta(t)$ en K segmentos, de M datos cada uno, y aplicar una ventana de datos, $w(t)$, diferente de la rectangular, a cada uno de ellos, permitiendo además que tales segmentos puedan solaparse. El objetivo que se persigue al utilizar las ventanas de datos es el de reducir el sesgo de las estimaciones, minimizando el efecto *leakage*, aunque ésto provoque un ligero descenso de la resolución frecuencial. El permitir el solapamiento de los segmentos tiene como fín el aumentar el número de segmentos o, lo que es equivalente, de periodogramas a promediar, para así conseguir una mayor reducción de la varianza de las estimaciones espectrales. La aplicación de estas mejoras, conjuntamente con la eficiencia computacional del algoritmo FFT, han permitido que el método de Welch se halla convertido en el procedimiento de estimación espectral más frecuentemente usado en la actualidad.

El método de Welch puede ser descrito tal como sigue. Dado un registro de N datos, $\eta(t)$

$$\left\{\eta(0), \eta(1), \cdots\cdots, \eta(N-1)\right\}$$

Al dividir $\eta(t)$ en K segmentos, de M datos cada uno, solapados en una cantidad $(S = M - D)$, donde D representa el desplazamiento entre segmentos adyacentes, el comienzo de la segunda secuencia se localiza en la ordenada D, la tercera secuencia en $2D$ y así sucesivamente, hasta alcanzar la posición $N - M - 1$, origen de la última secuencia a analizar. De esta forma, los K segmentos pueden expresarse como,

$$\left.\begin{array}{l}
\eta_0(t) = \eta_0, \eta_1, \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \eta_{(M-1)} \\
\eta_1(t) = \eta_D, \eta_{D+1}, \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \eta_{D+M-1)} \\
\eta_2(t) = \eta_{2D}, \eta_{2D+1}, \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \eta_{2D+(M-1)} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\eta_{(K-1)}(t) = \eta_{(K-1)D}, \eta_{(K-1)D+1}, \cdots\cdots, \eta_{(K-1)D+(M-1)}
\end{array}\right\} \qquad (2.74)$$

o bien, en forma más compacta

$$\eta_J(I) = \eta(I + JD) \tag{2.75}$$

donde

$$\begin{cases} I = 0, 1, 2, \cdots, M-1 \\ J = 0, 1, 2, \cdots, K-1 \end{cases} \tag{2.76}$$

siendo JD el origen de la J-esima secuencia. Es decir, la diferencia entre el número de datos por segmento y el de los datos solapados,

$$JD = J(M - S) \tag{2.77}$$

Para un M y un S dados, el número de subseries que se obtiene, a partir de un registro de N datos, viene dado por

$$K = INT\left[\frac{N-S}{M-S}\right] \tag{2.78}$$

o teniendo en cuenta que la cantidad de desplazamiento D es

$$(D = M - S) \quad \Longrightarrow \quad K = INT\left[\frac{N-M+D}{D}\right]$$

la expresión de los diferentes segmentos ponderados mediante la ventana de datos será

$$\eta_J(I) = w(I) \cdot \eta(I + JD) \tag{2.79}$$

y la estimación del espectro correspondiente a cada uno de ellos,

$$\hat{S}_J(f) = \frac{2}{UM\Delta t}\,|X_J(f)|^2 \qquad ; \qquad 0 \leq f \leq \frac{1}{2\Delta t} \tag{2.80}$$

donde $X_J(f)$ es la transformada discreta de Fourier del segmento J-ésimo,

$$X_J(f) = \Delta t \sum_{I=0}^{M-1} w(I)\eta_J(I)e^{(-i2\pi f I\Delta t)} \tag{2.81}$$

y $\mathcal{U}$ es un factor de correción, introducido para tener en cuenta la reducción de energía (varianza) en la subserie al aplicar una ventana de datos,

$$\mathcal{U} = \frac{1}{M} \sum_{I=0}^{M-1} \left(w(I) \right)^2 \tag{2.82}$$

La ventana de datos más frecuentemente empleada en el procedimiento de Welch, y que ha sido utilizada también en este trabajo, es la ventana cosenoidal truncada (e.g., Sand, 1986), que tiene por expresión

$$\begin{array}{ll} w_j = \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{\pi j}{k}\right)\right] & j = 0, \cdots, k-1 \\ w_j = 1 & j = k, \cdots, M-k-1 \\ w_j = \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{\pi(M-j)}{k}\right)\right] & j = M-k, \cdots, M-1 \end{array} \tag{2.83}$$

siendo $k = 0.1M$.

Una vez calculados los periodogramas correspondientes a cada una de las K subseries, se realiza el promedio de éstos, obteniendose el estimador espectral de Welch,

$$\tilde{S}^{(W)}(f) = \frac{1}{K} \sum_{J=0}^{K-1} \hat{S}_J(f) \tag{2.84}$$

Propiedades estadísticas del estimador de Welch

La esperanza matemática del estimador de Welch viene expresada por

$$E\left[\tilde{S}^{(W)}(f)\right] = \frac{1}{K} \sum_{J=0}^{K-1} E\left[\hat{S}_J(f)\right] = E\left[\hat{S}_J(f)\right] \tag{2.85}$$

mientras la esperanza matemática de los periodogramas individuales es

$$E\left[\hat{S}_J(f)\right] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S(f) W(f-\alpha) d\alpha \tag{2.86}$$

donde

$$W(f) = \frac{1}{M\mathcal{U}} \left| \sum_{I=0}^{M-1} w(I) e^{(-i2\pi f I)} \right|^2 \tag{2.87}$$

El factor de normalización, $\mathcal{U}$, asegura que

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} W(f) df = 1 \tag{2.88}$$

Dado que la correlación entre los distintos periodogramas, obtenidos mediante el método de Welch, aumenta al crecer el porcentaje de solapamiento entre los segmentos de datos, es obvio, que el solapamiento provocará un incremento parcial en la varianza del estimador (2.84). Dicha varianza, para un solapamiento del 0%, viene dada por

$$Var\left[\tilde{S}^{(W)}(f)\right] = \frac{1}{K} Var\left[\hat{S}_J(f)\right] \approx \frac{1}{K} S^2(f) \tag{2.89}$$

Sin embargo, para un solapamiento distinto de cero, la reducción de varianza no es exactamente proporcional a $\frac{1}{K}$, sino inferior, tanto más cuanto mayor es el porcentaje de solapamiento. Welch (1967) utilizando ruido blanco obtuvo que, para un valor de S del 50% la reducción en varianza es

$$Var\left[\tilde{S}^{(W)}(f)\right] \approx \frac{11}{9K} S^2(f) \tag{2.90}$$

Al comparar el factor (11/9) con el factor (1), obtenido en el método de Bartlett (sin solapamiento), parece obvio que ha habido un aumento de varianza. No obstante, en realidad la varianza sufre en total una disminución, puesto que en el método de Bartlett, el número de segmentos, K, es N/M, mientras que en el de Welch, para un 50% de solapamiento, es

$$K = \frac{N}{\frac{M}{2}} - 1 = \frac{2N}{M} - 1 \approx \frac{2N}{M} \tag{2.91}$$

de manera que para valores fijos de N y M, la reducción total de varianza, para $S = 50\%$, será

$$Var\left[\tilde{S}^{(W)}(f)\right] \approx \frac{11}{18K} S^2(f) \tag{2.92}$$

En definitiva, el procedimiento de solapar los segmentos de datos provoca un incremento en la varianza de las estimaciones, debido a la pérdida de independencia estadística entre éstas, pero por otro lado, el solapamiento de los datos implica un aumento de las subseries de M puntos que pueden formarse, a partir de una serie de N datos, y, en consecuencia, una reducción en la varianza. Estos dos efectos tienden a contrarrestarse mútuamente, en lo que concierne a la varianza. Así, empleando una ventana de datos efectiva, el efecto del incremento del número de segmentos tiene mayor importancia, hasta que el porcentaje de solapamiento alcanza un valor significativamente alto.

A la vista de lo comentado anteriormente, es evidente que la cantidad de solapamiento, S, utilizada en el análisis, que suele expresarse como un porcentaje de M, es decir,

$$S = \frac{X}{100} \cdot M$$

representa uno de los puntos más conflictivos de este método. Welch (1967), recomienda que éste no sea superior al 50%. Sin embargo, algunos autores consideran válido un solapamiento entre el $50 - 75\%$ (e.g., Kay, 1988), mientras que otros rechazan este porcentaje tan elevado (e.g., Yuen y Fraser,1978). En el presente trabajo se ha optado por un porcentaje de solapamiento del 50%.

El número de *grados de libertad* de las estimaciones espectrales obtenidas mediante este método, se puede expresar en función del porcentaje de solapamiento como

$$\nu = 2K = 2 \cdot INT\left[\frac{N-S}{M-S}\right] \tag{2.93}$$

Parámetros espectrales del oleaje

En la sección [2.1.2] se comentó la utilidad de introducir una serie de estadísticos, denominados momentos de la función de densidad de probabilidad de un proceso aleatorio estacionario, que permiten caracterizar de forma simple la estructura probabilística del proceso. De forma análoga, es posible definir los momentos espectrales de un proceso aleatorio, para caracterizar de forma simple y aproximada su función de densidad espectral. Así, se define el momento espectral de orden n, m_n, como

$$m_n = \int_0^\infty f^n S(f) df \tag{2.94}$$

y el momento espectral respecto a la media de orden n, μ_n, como

$$\mu_n = \int_0^\infty (f - \bar{f})^n S(f) df \tag{2.95}$$

donde la frecuencia media $\bar{f}$ queda definida por

$$\bar{f} = \frac{m_1}{m_0} \tag{2.96}$$

Es importante resaltar que la frecuencia media, $\bar{f}$, no representa el promedio de todas las frecuencias involucradas en el proceso, sino la media de la función de densidad espectral.

Nótese qũe tanto la frecuencia media como el momento espectral de orden cero, m_0, ya fueron introducidos en la sección [1.2.2], en términos del espectro direccional, ecuaciones (1.108) y (1.109). Además, en la sección [1.2.1], ecuación (1.69), se indicó que el momento espectral de orden cero era equivalente a la varianza del proceso. Es decir,

$$\sigma_\eta^2 = m_0 \tag{2.97}$$

Los momentos espectrales más utilizados son los de orden $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$. En particular, el momento espectral de orden 2, dado por

$$m_2 = \int_0^\infty f^2 S(f) df \tag{2.98}$$

representa la varianza de las velocidades verticales de las elevaciones de la superficie del mar, cuyo espectro, $S_v(f)$, puede ser evaluado como

$$S_v(f) = \int_0^\infty f^2 S(f) df \tag{2.99}$$

de donde

$$m_2 = \int_0^\infty S_v(f) df = \sigma_v^2 \tag{2.100}$$

De manera análoga, el momento de orden 4, dado por

$$m_4 = \int_0^\infty f^4 S(f) df \tag{2.101}$$

representa la varianza de las aceleraciones verticales de las elevaciones de la superficie libre, cuyo espectro, $S_a(f)$, puede ser estimado como

$$S_a(f) = \int_0^\infty f^4 S(f) df \tag{2.102}$$

de modo que

$$m_4 = \int_0^\infty S_a(f) df = \sigma_a^2 \tag{2.103}$$

de las expresiones (2.97), (2.100) y (2.103) se deriva inmediatamente de m_0, m_2 y m_4, son cantidades positivas.

A lo largo de los siguientes capítulos se podrá comprobar que es posible definir un gran número de parámetros característicos del oleaje en términos de los momentos espectrales. Entre ellos, cabe destacar el denominado *parámetro de anchura de banda espectral* (Cartwright y Longuet-Higgins, 1956), dado por

$$\epsilon = \left(1 - \frac{m_2^2}{m_0 m_4}\right)^{1/2} \tag{2.104}$$

parámetro adimensional que cuantifica en rango de frecuencias cubierto por el proceso de modo que cuando el rango de frecuencias es pequeño dicho parámetro también es pequeño y su valor aumenta a medida que se incrementa el rango de frecuencias contenido en el proceso. Resulta sencillo demostrar (e.g., Price y Bishop, 1974) que ϵ satisface la siguiente relación

$$0 \leq \epsilon \leq 1 \tag{2.105}$$

Así, para un proceso con $\epsilon \to 0$ se tiene un proceso de banda estrecha, mientras que en el caso en que $\epsilon \to 1$ el proceso es de banda ancha.

2.1.4 Análisis en el dominio de los desfases

El análisis de una serie temporal en el dominio de los desfases es realizado a través de la función de autocorrelación, cuyas propiedades y características se describen en esta sección, conjuntamente con los estimadores utilizados para evaluarla a partir de un registro de longitud finita.

Autocovarianza y Autocorrelación

Dado un registro temporal $\eta(t)$ de un proceso aleatorio ergódico. Se define la función de autocovarianza de dicho proceso como

$$C(t, t+\tau) = E[\{\eta(t) - E[\eta(t)]\}\{\eta(t+\tau) - E[\eta(t)]\}] \tag{2.106}$$

Denotando el valor medio del proceso por

$$E[\{\eta(t)\}] = \bar{\eta} \tag{2.107}$$

podemos escribir

$$C(\tau) = E[\{\eta(t) - \bar{\eta}\}\{\eta(t+\tau) - \bar{\eta}\}] \tag{2.108}$$

o, de forma equivalente

$$C(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \{\eta(t) - \bar{\eta}\}\{\eta(t+\tau) - \bar{\eta}\}\, dt \tag{2.109}$$

y

$$\bar{\eta} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \eta(t)dt \tag{2.110}$$

donde T es la duración del registro temporal y τ es el desfase temporal entre dos valores dados de $\eta(t)$. Operando en la ecuación (2.108), se puede escribir

$$C(\tau) = E\left[\eta(t)\eta(t+\tau)\right] - \left(E\left[\eta(t)\right]\right)^2 \tag{2.111}$$

Es importante notar que la función de autocovarianza, $C(\tau)$, representa un caso particular de la función de covarianza, definida en la sección [1.2.1], ecuación (1.35), como el momento central de orden $(1,1)$, y que, de acuerdo con la expresión (2.30), indica el grado de correlación lineal existente entre dos variables aleatorias X e Y. En concreto, la función de autocovarianza es la función de covarianza entre una variable $x(t)$ y esa misma variable desfasada en una cierta cantidad τ.

La expresión dada anteriormente para la función de autocovarianza puede representarse como

$$C(\tau) = R(\tau) - \bar{\eta}^2 \tag{2.112}$$

siendo $R(\tau)$ la *función de autocorrelación*, es decir

$$R(\tau) = E\left[\eta(t)\eta(t+\tau)\right] \tag{2.113}$$

que analíticamente viene dada por

$$R(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \eta(t)\eta(t+\tau)dt \tag{2.114}$$

De su definición, se deduce fácilmente que la función de autocorrelación es siempre una función par de τ. Esto es,

$$R(\tau) = E\left[\eta(t)\eta(t+\tau)\right] = E\left[\eta(t)\eta(t-\tau)\right] = R(-\tau) \tag{2.115}$$

o bien, de forma equivalente,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \eta(t)\eta(t+\tau)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \eta(t)\eta(t-\tau)dt \tag{2.116}$$

es decir,

$$R(\tau) = R(-\tau)$$

Dicho de otra forma, la función de autocorrelación presenta *simetría conjugada.* En base a esta propiedad, que obviamente también se verifica para la función de autocovarianza, tanto $C(\tau)$ como $R(\tau)$ podrán redefinirse como

$$C(\tau) = \begin{cases} 2\,C(\tau) & \text{para} \quad \tau \geq 0 \\ \\ 0 & \text{para} \quad \tau < 0 \end{cases} \tag{2.117}$$

y

$$R(\tau) = \begin{cases} 2\,R(\tau) & \text{para} \quad \tau \geq 0 \\ \\ 0 & \text{para} \quad \tau < 0 \end{cases} \tag{2.118}$$

por lo que su expresión analítica será ahora

$$C(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \{\eta(t) - \bar{\eta}\}\,\{\eta(t+\tau) - \bar{\eta}\}\,dt \tag{2.119}$$

y

$$R(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \eta(t)\eta(t+\tau)dt \tag{2.120}$$

Además, considerando t_n solamente para $n = 0, 1, 2, \cdots\cdots, N-1$, el *valor medio cuadrático* de $\eta(t)$ será,

$$\overline{\eta^2} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \eta(t)^2 dt \tag{2.121}$$

cuya raiz cuadrada positiva representa la *raiz cuadrática media.* La *media* y la *varianza* de dicho proceso vendrán dadas respectivamente por

$$\bar{\eta} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \eta(t)dt \tag{2.122}$$

y

$$\sigma^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[\eta(t) - \bar{\eta}\right]^2 dt \tag{2.123}$$

Según la ecuación (2.120), y las definiciones anteriores, se tiene que para $\tau = 0$,

$$R(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \eta(t)^2 dt = \overline{\eta^2} = \sigma^2 + \bar{\eta}^2 \tag{2.124}$$

de forma que, si la media del proceso es nula, tal como ocurre en el caso de un registro de oleaje estacionario, $R(0)$ coincidirá con la varianza y la media cuadrática de éste. En consecuencia, según (2.97), en un registro de oleaje se verificará que

$$\sigma_\eta^2 = m_0 = R(0) \tag{2.125}$$

Es decir, el momento espectral de orden cero y la función de autocorrelación para un desfase nulo coinciden con la varianza del proceso. Además, según (2.112), para un proceso de media nula, la función de autocovarianza y la función de autocorrelación serán equivalentes.

Otra propiedad importante de la función de autocorrelación, es que su valor máximo se localiza siempre en $\tau = 0$ (e.g., Ochi, 1990),

$$R(0) \geq R(\tau) \qquad \forall\, \tau \tag{2.126}$$

Es importante tener en mente que, en la práctica, la duración de los registros, T, es finita. Por consiguiente, para un registro de longitud finita, la expresión (2.120) tomará la forma

$$\hat{R}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \eta(t)\eta(t+\tau) dt \tag{2.127}$$

donde $\hat{R}(\tau)$ representa una estimación de la función de autocorrelación calculada a partir de un registro de longitud finita T. En consecuencia, los valores obtenidos para cada τ, serán simplemente estimaciones del valor real, que presentarán una cierta varianza con respecto al verdadero valor de dicho parámetro.

Con frecuencia, suele emplearse una expresión ligeramente diferente para el estimador de la función de autocorrelación de un proceso ergódico dada por

$$\hat{R}(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_{0}^{T-\tau} \eta(t)\eta(t+\tau)dt \qquad (2.128)$$

que, tal como se verá a continuación tiene la propiedad de ser un estimador insesgado, mientras que la expresión (2.127) representa a un estimador sesgado.

Dada una serie temporal discreta, $\eta(t_n)$, de longitud finita T, en la cual los datos han sido muestreados a intervalos regulares de tiempo, Δt, Blackman y Tukey (1958) proponen la siguiente expresión para obtener numéricamente la función de autocorrelación,

$$\hat{R}_1(\tau) = \frac{1}{N\Delta t - \tau} \sum_{n=0}^{N-K-1} \eta(t_n)\eta(t_n+\tau)\Delta t \qquad (2.129)$$

eliminando Δt se puede escribir

$$\hat{R}_1(\tau) = \hat{R}_1(k\Delta t) = \hat{R}_1(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{n=0}^{N-k-1} \eta_n\eta_{n+k} \qquad ;k = 0, 1, 2, \cdots\cdots, M \qquad (2.130)$$

siendo N el número de datos de la serie y M el número de Lags, es decir, el máximo valor que toma k.

El estimador dado por (2.130) presenta la propiedad de ser *insesgado*, es decir, su esperanza matemática coincide con el valor real del parámetro poblacional que se desea conocer, $R(\tau)$. Es decir,

$$E\left[\hat{R}_1(k)\right] = \left(\frac{1}{N-k}\right) \sum_{n=0}^{N-k-1} \eta_n\eta_{n+k} = R(\tau) \qquad (2.131)$$

Además, puede demostrarse (e.g., Blackman y Tukey, 1958) que la varianza de este estimador es aproximadamente

$$Var\left[\hat{R}_1(k)\right] \approx \left(\frac{1}{(N-k)^2}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big(R^2(n) + R(n+k)R(n-k)\Big) \qquad (2.132)$$

de forma que al aumentar la longitud de la serie, para un Δt dado, la varianza tiende a cero, por lo es posible afirmar que $\hat{R}_1(k)$ es un estimador *consistente* de la función de autocorrelación.

En lugar de discretizar la expresión (2.127), Akaike (1964) propone hacerlo con la ecuación (2.128), obteniendo entonces

$$\hat{R}_2(\tau) = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{n=0}^{N-K-1} \eta(t_n)\eta(t_n + \tau)\Delta t \qquad (2.133)$$

Procediendo de igual manera que con el estimador $\hat{R}_1(\tau)$, se puede escribir

$$\hat{R}_2(\tau) = \hat{R}_2(k\Delta t) = \hat{R}_2(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-k-1} \eta_n \eta_{n+k} \qquad (2.134)$$

Luego, la única diferencia entre el estimador $\hat{R}_1(k)$ y el $\hat{R}_2(k)$ es el factor de normalización que, mientras en el primero varía con k, en el segundo permanece constante. Este estimador presenta el inconveniente de ser *sesgado* para valores finitos de N, es decir, su esperanza matemática no coincide con el valor real del parámetro poblacional, $R(\tau)$,

$$E\left[\hat{R}_2(k)\right] = \left(1 - \frac{k}{N}\right) R(\tau) \qquad (2.135)$$

aunque es fácilmente apreciable que para valores de $N \rightarrow \infty$, éste es *asintóticamente insesgado.* La varianza de dicho estimador es aproximadamente (e.g., Jenkins y Watts, 1968).

$$Var\left[\hat{R}_2(k)\right] = \left(\frac{N-k}{N}\right) Var\left[\hat{R}_1(k)\right] \approx \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R^2(n) + R(n+k)R(n-k) \qquad (2.136)$$

de forma que este estimador tambien es *consistente*, puesto que su varianza tiende a cero al incrementarse el número de puntos de la serie, N.

Analizando las expresiones (2.132) y (2.136), se observa que al aumentar el valor de M, es decir el número de lags empleados, la varianza aumenta para ambos estimadores. Esto es debido a que al incrementarse el valor de k, el número de productos $(\eta_n \eta_{n+k})$ que se promedian para obtener la estimación de $R(\tau)$ es menor y, por ende, la confianza estadística de la estimación disminuye, es decir, aumenta la incertidumbre estadística. Por otro lado, para un desfase $\tau = 0$, ambos estimadores representan la varianza total del proceso, esto es, ambos conservan la energía presente en el registro analizado,

$$\hat{R}_1(0) = \hat{R}_2(0) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \eta_n^2 \tag{2.137}$$

Es importante comentar, que aunque el estimador $\hat{R}_1(\tau)$ es consistente e insesgado, el error medio cuadrático tiende a ser mayor para éste que para el estimador sesgado, especialmente cuando el número de lags se aproxima al número de datos de la muestra. Además, el estimador insesgado puede dar lugar a estimaciones que violan la propiedad

$$R(0) \geq \mid R(\tau) \mid$$

Es decir, empleando $\hat{R}_1(\tau)$ como estimador de $R(\tau)$ se pueden obtener matrices de autocorrelación no semidefinidas positivas, hecho que puede conducir a la aparición de valores negativos en la estimación de la función de densidad espectral. Estos valores negativos de $\hat{S}(f)$ son pequeños en módulo, y están situados en zonas donde la verdadera función de densidad espectral es pequeña, por lo cual, en general, no dificultan la interpretación de los datos experimentales. Sin embargo, físicamente, las densidades espectrales negativas no tienen significado alguno. Por el contrario, el estimador sesgado conduce siempre a la obtención de matrices de autocorrelación semidefinidas positivas. Por esta razón, generalmente, es preferible emplear la expresión dada por $\hat{R}_2(\tau)$ para calcular la función de autocorrelación.

Una de las aplicaciones más evidentes de la función de autocorrelación, es detectar el efecto que los valores de un registro, en instantes dados, tienen sobre valores de esa misma muestra en instantes posteriores. Esto es, determinar el grado de "*memoria*" que presenta el proceso analizado.

Por otro lado, aunque es cierto que la interpretación de muchos fenómenos resulta más simple en el dominio frecuencial, estimando el espectro de varianzas, el teorema de Wiener-Kintchine pone de manifiesto que la función de autocorrelación y el espectro contienen exactamente la misma información sobre el proceso, aunque en diferentes dominios. Por esto, resulta obvio que la información extraida del espectro debe estar presente de algún modo en la función de autocorrelación. Por ello, en el capítulo [5] se examinará en detalle la estructura de la función de autocorrelación del oleaje, con el fin de poner de manifiesto la utilidad del análisis de los registros de oleaje en el dominio de los desfases temporales.

2.2 Técnicas de simulación

En términos generales podemos entender la simulación como una técnica numérica que nos permite realizar experimentos de fenómenos para los cuales, bien por su elevado coste o bien por su dificultad, resulta poco viable realizar medidas experimentales rutinarias en la naturaleza. Es necesario resaltar que el punto de partida de toda técnica de simulación es un modelo del proceso a simular. Es decir, se asume que el fenómeno ha sido caracterizado mediante una formulación adecuada. La existencia de un modelo adecuado no debe entenderse como una formulación exacta y cerrada, pues ello implicaría disponer de un modelo determinista, en cuyo caso la simulación carece de sentido. No obstante, si es necesario disponer de un modelo lo más adecuado posible, fundado en hipótesis razonables, de modo que los resultados obtenidos mediante la simulación sean coherentes con la realidad. En particular, en la simulación estocástica el modelo debe ser también un modelo estocástico, no determinista, es decir, que considere la aleatoriedad del fenómeno explícitamente.

Una de las principales razones que justifican el uso de las técnicas de simulación es que muchos fenómenos naturales son el resultado de numerosas variables que interaccionan entre sí dando lugar a fenómenos extremadamente complejos, tal como ocurre en la mayoría de los procesos geofísicos, de modo que su formulación matemática precisa resulta prácticamente imposible o intratable.

Naylor (1971) enumera algunas de las utilidades de las técnicas de simulación. Entre ellas podemos destacar las siguientes:

1. La simulación de un proceso complejo puede proporcionar información sobre

cuáles son las variables de mayor importancia y de cómo interaccionan.

2. La simulación permite estudiar y experimentar con las complejas interacciones internas de un proceso determinado.

3. A través de la simulación se pueden analizar los efectos de ciertos cambios medioambientales en la respuesta del sistema estudiado, realizando alteraciones en el modelo del proceso y observando sus efectos en el comportamiento del sistema.

4. La simulación puede emplearse como una herramienta para experimentar con nuevas situaciones sobre las cuales existe poca, o ninguna información. Así, por ejemplo, la simulación puede facilitar la detección de problemas que puedan surgir por la introducción de nuevos elementos en el sistema.

2.2.1 Generación de números aleatorios

Los generación de secuencias de números aleatorios es el ingrediente esencial de todo método de simulación estocástica. No obstante, este tipo de secuencia de números no sólo es importante en simulación estocástica, sino en muchas otras aplicaciones, tales como experimentos estadísticos, análisis numérico, criptología, protocolos de seguridad en comunicaciones, etc. Sin embargo, en principio, los números puramente aleatorios sólo pueden ser generados mediante el uso de mecanismos físicos que generan eventos esencialmente impredecibles. No obstante, los intentos realizados hasta la fecha empleando sistemas físicos, tales como los diodos de ruido o los contadores de rayos γ (Marsaglia, 1985), no resultan ni prácticos ni fidedignos, porque son voluminosos y, además, generalmente, no es cierto que los números sucesivos que producen sean independientes y estén uniformemente distribuidos (L'Cuyer 2001). Es decir, no cumplen los requisitos básicos de las secuencias de números totalmente aleatorias, en las que los números deben ser mutuamente independientes y seguir una distribución uniforme.

En la actualidad, la técnica más conveniente y fiable de generación de números aleatorios es el uso de algoritmos deterministas que producen secuencias de números *pseudo-aleatorios*, intentando reproducir en la medida de lo posible las propiedades estadísticas de los verdaderos números aleatorios. Es decir, la idea de estos algoritmos es la implementación del concepto matemático de variables aleatorias mutuamente independientes y uniformemente distribuidas en el intervalo $[0,1]$, denotada de forma abreviada como $(i.i.d.)$ $U[0,1]$. Estos algoritmos reciben el nombre genérico de generadores de números aleatorios (*GNAs*), o más apropiadamente, generadores de números pseudo-aleatorios (*GNPAs*).

La base de la gran mayoría de los algoritmos *GNPA* es una relación de recurrencia en el que cada número es una función determinista del valor precedente. No obstante, si la relación de recurrencia y sus parámetros son apropiadamente elegidos, estos algoritmos producen secuencias que estadísticamente parecen ser aleatorias. Esta apariencia de aleatoriedad es el origen del término "*números pseudo-aleatorios*".

Así, generalmente se asume que un *GNPA* produce una secuencia números aleatorios estadísticamente independientes y uniformemente distribuidos en $[0,1]$. Sin embargo, debido al origen determinista de las relaciones de recurrencia, después de un cierto periodo, la secuencia de números vuelve a repetirse, llegando a ser periódica. Por ello, un buen *GNPA* debe tener un periodo de repetición, o ciclo, lo más alto posible.

Además de tener un *ciclo largo* y satisfacer en buen grado las propiedades de *independencia* y *uniformidad*, un buen *GNPA* debe poseer las siguientes características:

Eficiencia: Rapidez y bajo consumo de memoria.

Repetibilidad: Capacidad de reproducir exactamente la misma secuencia de números.

Portabilidad: Trabajar del mismo modo bajo diferentes ambientes de *software* y *hardware*.

En particular, la capacidad de reproducir exactamente la misma secuencia de números es una de las mayores ventajas de los *GNPAs* sobre los mecanismos físicos, por ejemplo, para verificación de programas, reducción de la varianza en las simulaciones, etc. (Law y Kelton, 2000).

Debido al interés que posee la generación de secuencias de números pseudo-aleatorios que satisfagan las propiedades anteriormente citadas, durante las últimas décadas se han propuesto numerosos algoritmos de generación, y al mismo tiempo un elevado número de técnicas para examinar su fiabilidad (e.g. Hellekalek, 1998). Así, desde un punto de vista pragmático, si la secuencia de datos supera los tests, cuantos más mejor, puede considerarse como generada mediante un mecanismo ideal capaz de seleccionar números dentro de un intervalo dado de forma independiente y con igual probabilidad para cada uno de ellos. Estos dos requisitos de independencia y equiprobabilidad implican que los números deben ser observaciones aleatorias de una distribución uniforme. Por ello, los términos *número aleatorio* y *número aleatorio uniforme* suelen emplearse como sinónimos.

Gammel (1998) ha examinado la calidad de 11 *GNPAs*, considerados entre los mejores, mediante la aplicación del estadístico R/S (rango reescalado), propuesto por Hurst (1951), que resulta especialmente eficiente para determinar la presencia de dependencias estadísticas a largo plazo y su intensidad. Entre los algoritmos que superan dicho test se encuentran el propuesto por Marsaglia y Zaman (1994) (`MZRAN13`) y el sugerido por Matsumoto y Kurita (1992, 1994) (`twisted GFSR`).

Según L'Ecuyer (2001), no existe un *GNPA* que pueda dar garantía absoluta de su bondad, pero existen algunos basados en un adecuado soporte teórico, que han sido exahustivamente testeados y, además, su uso es relativamente simple. Entre estos se encuentra el generador denominado `Mersenne twister` (`MT19937`), desarrollado por Matsumoto y Nishimura (1998) como una versión mejorada del presentado previamente por Matsumoto y Kurita (1992, 1994).

A continuación se describen brevemente las características principales de los métodos de generación de números aleatorios más comunes y se detallan algunas peculiaridades de los dos *GNPAs* empleados en este trabajo.

GNPAs basados en recurrencias lineales

Los *GNPAs* más ampliamente utilizados son aquellos basados en recurrencias lineales del tipo

$$x_i = (a_1 x_{i-1} + \cdots + a_k x_{i-k}) \bmod (m) \tag{2.138}$$

donde el módulo m y el orden k de la recurrencia son enteros positivos, los coeficientes $a_l \in Z_m = (0, 1, \cdots, m-1)$ y el estado en el paso i es $s_i = (x_{i-k+1}, \cdots, x_i)$. Si m es un número primo y si los coeficientes a_l satisfacen ciertas condiciones (e.g., Knuth, 1998), la secuencia $\{x_i, i \geq 0\}$ tiene longitud (periodo) máximo $\rho = m^k - 1$.

Una forma simple de definir la secuencia de salida, cuando m es grande, es haciendo

$$u_i = x_i/m \tag{2.139}$$

En tal caso, el *GNPAs* resultante recibe el nombre de *generador recursivo múltiple* (MRG). En el caso particular de $k = 1$ se obtiene el generador congruencial lineal clásico (LCG) (e.g., Law y Kelton, 2000).

Otro procedimiento consiste en tomar un valor pequeño de m, por ejemplo $m = 2$, y generar cada valor de salida, u_i, a partir de L valores consecutivos de x_j, haciendo

$$u_i = \sum_{j=1}^{L} x_{is+j-1}\, m^{-j} \tag{2.140}$$

donde s y $L \leq k$ son enteros positivos. En este caso, el *GNPAs* resultante es denominado (LSFR). Una variante importante de éste último tipo de generador es el `MT19937` (Matsumoto y Nishimura, 1998), el cual proporciona una rápida implementación y tiene un periodo sustancialmente elevado $(2^{19937} - 1)$.

Otra forma de mejorar la estructura y aumentar el periodo de los generadores de tipo LCG es empleando una combinación de ellos. Así, Marsaglia y Zaman (1994) sugieren la combinación, suma o resta, de dos generadores que empleen aritméticas considerablemente diferentes, por ejemplo, uno que use sumas o diferencias y otro que utilice multiplicaciones. Entre las combinaciones sugeridas destaca el *GNPAs* `MZRAN13`, en el cual se combinan los siguientes LCG,

$$\begin{aligned} x_n &= 69069x_{n-1} + a \bmod (2^{31}) \\ x_n &= x_{n-2} + x_{n-2} + c \bmod (2^{32} - 18) \end{aligned} \tag{2.141}$$

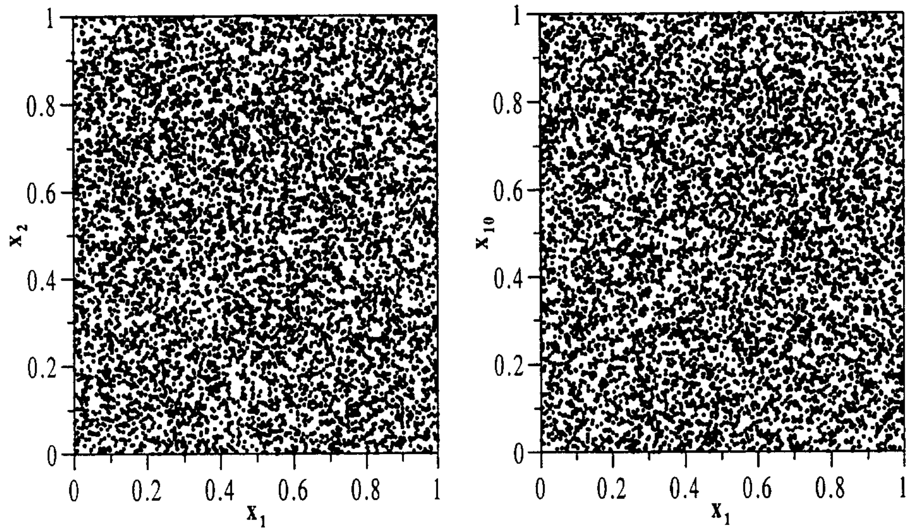

Figura 2.2: Ilustración de la uniformidad de una secuencia *pseudo-aleatoria* obtenida con los generadores `MZRAN13` y `MT19937`, para los desfases 1 y 10.

donde a es una constante impar y c es una variable que toma valores 0 o 1 y que debe ser modificada dependiendo de que el resultado sea positivo o negativo. El generador resultante tiene un periodo aproximado de 2^{125}.

En este estudio, se ha optado por el uso de dos *GNPAs*. En primer lugar, el generador `MZRAN13` ha sido empleado para generar archivos de valores semillas que se emplean como entrada al generador `MT19937`. En la figura 2.2 se muestran los diagramas de desfases para una secuencia de $N = 2 \times 10^{13}$ números pseudo-aleatorios generados empleando ésta metodología. En ella puede observarse la uniformidad en la distribución de los puntos sobre el plano unidad, para los desfase $\tau = 1$, y $\tau = 10$.

En general, resulta necesario emplear secuencias de números aleatorios con una distribución probabilística diferente de la uniforme. Estas pueden ser obtenidas aplicando transformaciones adecuadas a los números aleatorios uniformes (e.g., Law y Kelton, 2000). En el caso de la simulación de registros de oleaje suele ser necesaria la generación de secuencias de números aleatorios con distribución Normal, Rayleigh, y, en ocasiones χ^2.

Existen diferentes metodologías para poder obtener números aleatorios distribuidos según una función de densidad de probabilidad específica, a partir de una secuencia *i.i.d.* $U[0,1]$. Entre ellos destacan el *método de la transformación inversa* y el *método de aceptación-rechazo.* Sin embargo, dado que nuestro interés se centra en la generación de variables aleatorias normales y de Rayleigh, trataremos aquí sólo el procedimiento de la transformación inversa que será necesario para poder entender las técnicas específicas, descritas posteriormente, que permiten generar observaciones normalmente distribuidas de forma bastante eficiente. El método de aceptación-rechazo y otros pueden encontrarse, p. ej., en Rubinstein (1981).

Método de la transformación inversa

Considérese una *v.a.* X con función de distribución de probabilidad $F_X(x)$. Puesto que dicha función es no decreciente, es posible definir la función inversa $F_X^{-1}(y)$, para cualquier valor de y entre 0 y 1, como

$$F_X^{-1}(y) = inf\{x : F_X(x) \geq y\}, \qquad 0 \leq y \leq 1 \tag{2.142}$$

Es decir, $F_X^{-1}(y)$ es el menor valor de x que satisface la relación $F_X(x) \geq y$. En consecuencia, si U está uniformemente distribuido en $(0,1)$ y admitiendo que $F_X(x)$ denota la función de distribución de $X = F^{-1}(U)$, se verificará que

$$F_X(x) = P[X \leq x] = P\left[F^{-1}(U) \leq x\right] \tag{2.143}$$

Puesto que $F(x)$ es una función monótona creciente de x, la relación $a \leq b$ será equivalente a la desigualdad $F(a) \leq F(b)$. Por tanto, de (2.143) se deduce que

$$P[X \leq x] = P\left[F\left(F^{-1}(U)\right) \leq F_X(x)\right] \tag{2.144}$$

y dado que $F\left(F^{-1}(U)\right) = U$,

$$P\left[F\left(F^{-1}(U)\right) \leq F_X(x)\right] = P\left[U \leq F_X(x)\right] \tag{2.145}$$

Además, al ser U uniforme en $(0,1)$, su función de distribución viene dada por

$$F(u) = P[U \leq u] = \frac{u-0}{1-0} = u \tag{2.146}$$

de donde,

$$P\left[U \leq F_X(x)\right] = F_X(x) \tag{2.147}$$

Por tanto, dada una *v.a.* $U(0,1)$, la *v.a.* X definida como

$$X = F^{-1}(U) \tag{2.148}$$

tendrá una distribución de probabilidad $F_X(x)$.

En conclusión, es posible generar una *v.a.* X, con función de distribución continua $F(x)$ dada, generando números aleatorios $U(0,1)$ y haciendo $X = F^{-1}(U)$. En principio, esta metodología es aplicable a cualquier tipo de *v.a.* con función de distribución continua. Sin embargo, en la práctica sólo resulta aplicable cuando la función inversa puede ser determinada explícitamente o, en su defecto, convenientemente aproximada. A continuación se presenta un ejemplo de aplicación de esta metodología que será de utilidad posteriormente.

Sea X una *v.a.* con *función de densidad de probabilidad exponencial.* Es decir

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \tag{2.149}$$

donde λ es el parámetro de la distribución y el valor medio de ésta es $1/\lambda$. Admitiendo que $\lambda = 1$, la función de distribución será

$$F(x) = 1 - e^{-x} \tag{2.150}$$

Haciendo $x = F^{-1}(u)$, se tiene que

$$u = F(x) = 1 - e^{-x} \qquad \text{o bien} \qquad 1 - u = e^{-x} \tag{2.151}$$

tomando logaritmos,

$$x = -\ln(1-u) \tag{2.152}$$

Por tanto, es posible generar una *v.a.* con distribución exponencial de parámetro $\lambda = 1$, generando números aleatorios $U(0,1)$ y haciendo

$$X = F^{-1}(U) = -\ln(1-U) \tag{2.153}$$

Por otro lado, es interesante observar que $(1-U)$ es también uniforme en $(0,1)$ y que, por tanto, $-\ln(1-U)$ tiene la misma distribución que $-\ln(U)$. Es decir, el logaritmo negativo de un número aleatorio uniforme en $(0,1)$ tiene una distribución exponencial de parámetro 1.

Además, nótese que si X es exponencial con media $1/\lambda = 1$, entonces, para cualquier valor positivo c, cX es exponencial con media c. En consecuencia, una *v.a.* X exponencial con parámetro λ (media $1/\lambda$), puede ser generada a partir de números aleatorios $U(0,1)$ y haciendo

$$X = -\frac{1}{\lambda}\ln(U) \tag{2.154}$$

2.2.2 Variables aleatorias con distribución Normal

La técnica más ampliamente utilizada para generar números aleatorios normales a partir de números *i.i.d.* $U[0,1]$, es debida a Box y Muller (1958), cuyo fundamento es el siguiente.

Método de Box-Muller

Sean X e Y *v.a.* independientes con distribución $N(0,1)$, y sean R y θ las coordenadas polares del vector (X,Y). Es decir,

$$\begin{aligned} R^2 &= X^2 + Y^2 \\ \tan\theta &= \frac{Y}{X} \end{aligned} \tag{2.155}$$

Puesto que X e Y son independientes, su función de densidad de probabilidad conjunta viene dada por

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2} \\ &= \frac{1}{2\pi}e^{-(x^2+y^2)/2} \end{aligned} \tag{2.156}$$

Para determinar la función de densidad conjunta de R^2 y θ, resulta conveniente realizar los siguientes cambios de variables,

$$d = x^2 + y^2 \quad ; \quad \theta = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \tag{2.157}$$

Teniendo en cuenta que el Jacobiano de la transformación es

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial d}{\partial x} & \frac{\partial d}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{vmatrix} = 2 \tag{2.158}$$

resulta que,

$$f_{R^2,\theta}(d,\theta) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}e^{-d/2}\right) \qquad ;0 < d < \infty \quad , \quad 0 < \theta < 2\pi \tag{2.159}$$

es decir, se tiene que la distribución de R^2 y θ es igual al producto de una distribución uniforme en $(0, 2\pi)$ por otra exponencial de media $1/\lambda = 2$. De lo anterior se deduce que

$$\begin{aligned} R^2 \text{ y } \theta &\longrightarrow \text{ son independientes} \\ R^2 &\longrightarrow \text{ tiene una distribución exponencial de media 2} \\ \theta &\longrightarrow \text{ está distribuida uniformemente en } (0, 2\pi) \end{aligned}$$

Por tanto, si consideramos una *v.a.* $U(0,1)$, y hacemos

$$R^2 = -2\ln U \qquad \text{y} \qquad \theta = 2\pi U \tag{2.160}$$

R^2 tendrá una distribución exponencial con media 2 y θ una distribución uniforme en $(0, 2\pi)$. Luego, será posible generar un par de *v.a.* normales e independientes generando primero sus coordenadas polares y transformándolas posteriormente a sus coordenadas rectangulares. Este es el fundamento de la transformación de Box-Muller, que en forma de algoritmo se puede expresar como:

1. Generar un par de valores aleatorios uniformes U_1 y U_2

2. Hacer,

$$\begin{aligned} R^2 &= -2\ln U_1 \\ \theta &= 2\pi U_2 \end{aligned}$$

3. Hacer,

$$\begin{aligned} X &= R\cos\theta = \sqrt{-2\ln U_1}\cos(2\pi U_2) \\ Y &= R\,\mathrm{sen}\,\theta = \sqrt{-2\ln U_1}\,\mathrm{sen}\,(2\pi U_2) \end{aligned} \tag{2.161}$$

Método Polar

El método anterior tiene el inconveniente de necesitar el cálculo de las funciones seno y coseno, lo cùal aumenta el tiempo de computación. El cálculo de estas funciones trigonométricas se puede evitar determinándolas de forma indirecta mediante el procedimiento que se describe a continuación, propuesto por Marsaglia (1958).

Resulta evidente que si U es uniforme en $(0,1)$ entonces $2U$ es uniforme en $(0,2)$ y que $2U-1$ lo es en $(-1,1)$. Luego, generando los números aleatorios U_1 y U_2 y haciendo

$$\begin{aligned} V_1 = 2U_1 - 1 \\ V_2 = 2U_2 - 1 \end{aligned} \tag{2.162}$$

el punto de coordenadas (V_1, V_2) estará uniformemente distribuido en el cuadrado de lado 2, centrado en $(0,0)$, que tiene inscrito al círculo unidad. A continuación se comprueba si el par (V_1, V_2) está dentro del círculo unidad, es decir

$$V_1^2 + V_2^2 < 1 \tag{2.163}$$

En caso de no verificarse dicha desigualdad, se repite el procedimiento anterior hasta obtener un par de valores (V_1, V_2) que la satisfagan. Este par de valores estará uniformemente distribuido en el círculo unidad. Así, denotando las coordenadas polares de este par de valores por R y θ, y procediendo de forma similar al apartado anterior, resulta fácil demostrar que R y θ son independientes, con R^2 uniforme en $(0,1)$ y θ uniforme en $(0, 2\pi)$. Luego, puesto que θ es un ángulo aleatorio, será posible generar los senos y los cosenos de un ángulo aleatorio θ mediante la generación de un punto aleatorio (V_1, V_2) en el círculo unidad, y haciendo

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta &= \frac{V_2}{R} = \frac{V_2}{(V_1^2 + V_2^2)^{1/2}} \\ \cos\theta &= \frac{V_1}{R} = \frac{V_1}{(V_1^2 + V_2^2)^{1/2}} \end{aligned} \tag{2.164}$$

De este modo, sustituyendo en la expresión (2.161) del método de Box-Muller es posible obtener *v.a.* $N(0,1)$, generando un número $U(0,1)$, y haciendo

$$\begin{aligned} X &= (-2\ln U)^{1/2} \frac{V_1}{(V_1^2 + V_2^2)^{1/2}} \\ Y &= (-2\ln U)^{1/2} \frac{V_2}{(V_1^2 + V_2^2)^{1/2}} \end{aligned} \tag{2.165}$$

El procedimiento puede simplificarse teniendo en cuenta que $R^2 = V_1^2 + V_2^2$ está uniformemente distribuido en $(0,1)$ y es independiente del ángulo aleatorio θ. Por tanto, es posible utilizar R^2 como el número aleatorio $U(0,1)$ requerido en la expresión (2.165). Luego, haciendo $S = R^2$ se obtiene que

$$X = (-2\ln S)^{1/2} \frac{V_1}{S^{1/2}} = V_1 \left(\frac{-2\ln S}{S} \right)^{1/2}$$

$$Y = (-2\ln S)^{1/2}\frac{V_2}{S^{1/2}} = V_2\left(\frac{-2\ln S}{S}\right)^{1/2} \tag{2.166}$$

donde X e Y son $N(0,1)$, cuando (V_1, V_2) es un punto aleatoriamente elegido en el círculo unidad centrado en el origen y $S = V_1^2 + V_2^2$.

En resumen, los pasos del algoritmo para obtener un par de valores $N(0,1)$ mediante el método polar son,

1. Generar números aleatorios $U(0,1) \longrightarrow U_1\, U_2$

2. Hacer,

$$\begin{aligned} V_1 &= 2U_1 - 1 \\ V_2 &= 2U_2 - 1 \\ S &= V_1^2 + V_2^2 \end{aligned}$$

3. Si $S > 1$ volver a (1)

4. Estimar los valores de X e Y, independientes y $N(0,1)$

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{\frac{-2\ln S}{S}}V_1 \\ Y &= \sqrt{\frac{-2\ln S}{S}}V_2 \end{aligned}$$

2.2.3 Variables aleatorias con distribución de Rayleigh

Tal como se comentó en la sección [2.1.2], la distribución de Rayleigh desempeña un papel fundamental en la caracterización de las amplitudes y las alturas de ola. Además, también se comentó que una *v.a.* X tiene una distribución de Rayleigh si su función de densidad de probabilidad es expresada por (2.22). Es decir,

$$f(x) = \frac{2x}{R}e^{-x^2/R} \quad ; \qquad 0 \leq x < \infty$$

Un teorema de enorme importancia en el análisis de las amplitudes de procesos aleatorios gaussianos es el siguiente:

Teorema 1 *Dadas dos v.a. X_1 y X_2 que poseen ambas una distribución normal con media cero y varianza σ^2, $N(0, \sigma^2)$. Entonces, la* v.a.

$$\sqrt{X_1^2 + X_2^2} \tag{2.167}$$

sigue una distribución de Rayleigh con parámetro $R = 2\sigma^2$.

cuya demostración puede encontrarse, p.ej., en Ochi (1990).

Luego, haciendo uso de (2.167) será posible generar números aleatorios con distribución de Rayleigh a partir de números aleatorios con distribución $N(0, 1)$.

Por otra parte, la generación de números aleatorios con distribución de Rayleigh puede realizarse mediante el método de la transformación inversa, tal como sigue. La función de distribución de Rayleigh viene dada por

$$F(x) = 1 - e^{-x^2/R}$$

Entonces, haciendo

$$u = F(x) = 1 - e^{-x^2/R} \quad \Longrightarrow \quad X = F^{-1}(U) \tag{2.168}$$

de donde,

$$\begin{aligned} 1 - u &= e^{-x^2/R} \\ x^2 &= -R\ln(1-u) = -R\ln u \end{aligned} \tag{2.169}$$

es decir, podremos obtener números aleatorios con distribución de Rayleigh, a partir de números aleatorios $U(0, 1)$, mediante la transformación

$$X = \sqrt{-R\ln U} \tag{2.170}$$

Obsérvese que $U \neq 0$ para evitar el valor de la función $\ln U = -\infty$ en dicho punto.

2.2.4 Variables aleatorias con distribución χ^2

Otro tipo de variables de interés en el análisis de procesos estocásticos son aquellas que poseen una distribución χ^2_k. Una *v.a.* sigue una distribución χ^2_k con k grados de libertad si su función de densidad de probabilidad viene dada por (2.18)

Teorema 2 *Dadas las variables aleatorias $X_1, X_2, \cdots X_k$ con distribución $N(\mu, \sigma^2)$, entonces la variable*

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^2}$$

tiene una distribución χ^2_k.

La demostración de dicho teorema puede consultarse, p. ej., en Ochi (1990).

Considerando el teorema 2, admítase que $Z_1, Z_2, \cdots, Z_k$ son *v.a.* $N(0,1)$. Entonces, la variable

$$Y = \sum_{i=1}^{k} Z_i^2 \tag{2.171}$$

tiene una distribución χ^2_k. Es decir, la suma de los cuadrados de *v.a.* estándar normales e independientes tiene una distribución chi-cuadrado con un número de grados de libertad igual al número de términos del sumatorio.

Resulta obvio que un posible procedimiento para generar números aleatorios con distribución χ^2_k es generar k *v.a.* $N(0,1)$ y luego aplicar la relación (2.171).

No obstante, existe otro procedimiento que hace uso del hecho de que la distribución χ^2 es un caso particular de la *distribución gamma*, con los parámetros de dicha distribución iguales a $\alpha = k/2$ y $\beta = 2$, respectivamente.

En este procedimiento se pueden considerar dos casos:

<u>Caso 1:</u> *Si k es par*, entonces Y puede ser calculada como

$$Y = -2 \ln \left(\prod_{i=1}^{k/2} U_i \right) \tag{2.172}$$

Obsérvese que en esta expresión se requieren $k/2$ variables uniformes, frente a las k normales que se precisan en (2.171). Además, en este caso se necesita una sola transformación logarítmica, mientras que para generar las k variables normales, utilizando el método de Box-Muller, son necesarios k logaritmos, k senos y k cosenos.

<u>Caso 2:</u> *Si k es impar*, entonces

$$Y = -2\ln\left(\prod_{i=1}^{k/2-1/2} U_i\right) + Z^2 \tag{2.173}$$

donde Z es $N(0,1)$.

Cuando el número de grados de libertad, k, es superior a 30, puede emplearse la aproximación normal de las variables χ^2, según la cual

$$Z = \sqrt{2Y} - \sqrt{2k-1} \tag{2.174}$$

de donde, despejando la variable Y (χ^2), se tiene

$$Y = \frac{\left(Z + \sqrt{2k-1}\right)^2}{2} \tag{2.175}$$

Por otra parte, resulta interesante notar que, según lo visto anteriormente, dadas dos *v.a.* X_1 y X_2 con distribuciones $N(0,1)$, la suma de sus cuadrados da lugar a una *v.a.* χ_2^2, mientras que con la raíz cuadrada de la suma de sus cuadrados se obtiene una variable con distribución de Rayleigh. Es decir,

$$X_1^2 + X_2^2 = \chi_2^2$$

$$\sqrt{X_1^2 + X_2^2} = Rayl. \quad ; \qquad R = 2m_0 = 2\sigma^2$$

Luego, es inmediato que la raíz cuadrada de una *v.a.* χ_2^2 es una nueva *v.a.* con distribución de Rayleigh,

$$Rayl. = \sqrt{\chi_2^2}$$

2.2.5 Simulación espectral de registros de oleaje

En esta sección se describen los diferentes procedimientos empleados usualmente para la simulación de registros de oleaje lineal. En las técnicas descritas a continuación se elimina la *direccionalidad* del oleaje. Es decir, en ellos se considera al oleaje como un proceso aleatorio unidireccional y, por tanto, se emplea como modelo teórico el expresado por la ecuación (1.80).

Las metodologías para simular oleaje irregular lineal escalar (unidimensional) existentes pueden clasificarse esencialmente en dos amplias categorías (Borgman, 1969). Por un lado, las técnicas basadas en la *superposición de componentes armónicas*, partiendo de una función de densidad espectral determinada, que denominaremos *espectro inicial* (o *espectro de partida*), y que puede ser teórica o experimental; y por otro, aquellas cuyo fundamento radica en la aplicación de un filtro lineal en el dominio temporal para modificar un ruido blanco, de modo que la serie resultante posea la función de densidad espectral deseada. En estos últimos métodos el espectro inicial no viene dado específicamente, sino que es aproximado mediante la selección adecuada de ciertos parámetros, motivo por el cual suelen recibir el nombre de *métodos paramétricos*.

La metodología de simulación numérica de registros de oleaje empleada en el presente trabajo pertenece al primero de los grupos antes citados. Es decir, a las técnicas de superposición de componentes armónicas, o espectrales, motivo por el cual también son denominadas métodos de representación espectral. Dentro de este grupo existen diversas variaciones (e.g., Osborne, 1982). Entre ellas destacan las conocidas como métodos DSA y NSA que se describen a continuación

Método DSA

Este procedimiento de simulación conocido como *método de las fases aleatorias* (Miles y Funke, 1988), o también como *método de amplitudes espectrales deterministas* (Tuah y Hudspeth, 1982), utiliza la expresión dada por Rice(1944, 1945) para corrientes eléctricas lineales con distribución Gaussiana, en forma de superposición de componentes armónicas mediante series discretas de Fourier, según la cual el perfil de la superficie libre del mar puede expresarse como

$$\eta(t) = \sum_{n=1}^{N/2} A_n cos(2\pi f_n t + \phi_n) \tag{2.176}$$

donde N representa el número de datos de la serie que se desea simular. Las frecuencias f_n están densamente distribuidas en el rango $[0, \infty)$ y las amplitudes A_n vienen determinadas por el espectro de partida seleccionado mediante la igualdad:

$$A_n = \sqrt{2S(f_n)\Delta f} \quad ; n = 1, 2, \cdots, N/2 \tag{2.177}$$

de modo que la ecuación (2.176) puede ser escrita como:

$$\eta(t) = \sum_{n=1}^{N/2} \sqrt{2S(f_n)\Delta f}\, cos(2\pi f_n t + \phi_n) \tag{2.178}$$

Las frecuencias utilizadas vienen definidas por el incremento frecuencial, Δf, determinado por la frecuencia máxima, o de corte, f_{max}, para la que se admite que el espectro posee un contenido energético significativo, y cuyo valor máximo queda fijado por la frecuencia de Nyquist. Entonces,

$$f_n = (n-1)\Delta f \qquad ; \qquad \Delta f = \frac{f_{max}}{N} \qquad ; \qquad f_{max} \leq \frac{1}{2\Delta t} \tag{2.179}$$

La naturaleza estocástica del proceso es incluida a través de los ángulos de fase, ϕ_n, admitiendo que éstos están uniformemente distribuidos en el intervalo $(0, 2\pi)$. Los valores de ϕ_n pueden obtenerse utilizando alguno de los procedimientos descritos previamente para generar números aleatorios uniformemente distribuidos en $(0, 1)$, los cuales pueden ser fácilmente transformados a $U(0, 2\pi)$.

Esta metodología presenta la característica de que el espectro obtenido a partir de la serie temporal simulada reproduce con bastante aproximación el espectro de partida, tal como se ilustra en la figura 2.3, donde se muestran conjuntamente el espectro inicial (objetivo) y el espectro obtenido a partir de la serie simulada, de la cual se muestra un fragmento en la figura 2.4.

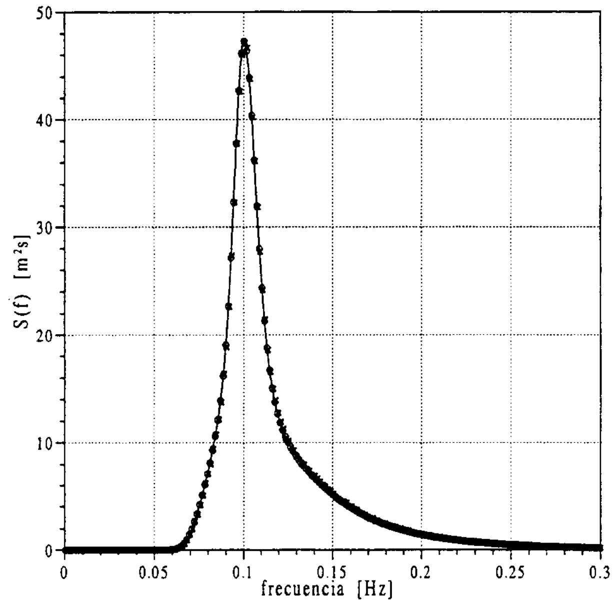

Figura 2.3: Espectros objetivo (línea continua) y reproducido (círculos) a partir de la serie de la figura 2.4, método DSA

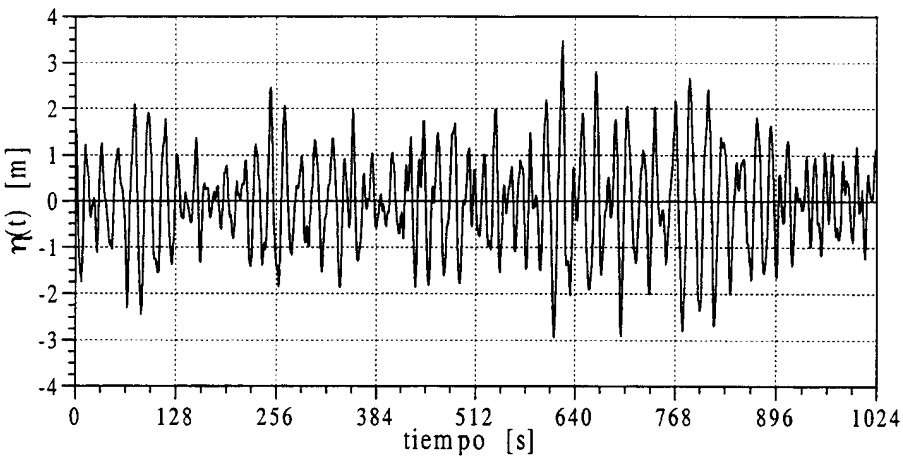

Figura 2.4: Serie simulada a partir del espectro objetivo de la figura 2.3, con el método DSA

2.2.6 Método NSA

Este método denominado *método del espectro complejo* (Miles y Funke, 1988), o también *método de las amplitudes espectrales no deterministas* (NSA) (Tuah y Hudspeth, 1982), se basa en una representación alternativa dada por Rice(1944, 1945) para procesos aleatorios con distribución normal, según la cual la elevación de la superficie del mar puede ser descrita en función del tiempo por la siguiente relación:

$$\eta(t) = \sum_{n=1}^{N/2} a_n cos(2\pi f_n t) + b_n sen(2\pi f_n t) \tag{2.180}$$

donde a_n y b_n son variables aleatorias independientes normalmente distribuidas, con media cero y desviación estándar:

$$\sigma_{a_n} = \sigma_{b_n} = \sqrt{S(f_n)\Delta f} \tag{2.181}$$

Haciendo,

$$R_n^2 = a_n^2 + b_n^2 \qquad \text{y} \qquad \phi_n = \tan^{-1}\left(-\frac{b_n}{a_n}\right) \tag{2.182}$$

es posible escribir la ecuación (2.180) en una forma análoga a (2.176),

$$\eta(t) = \sum_{n=1}^{N/2} R_n cos(2\pi f_n + \phi_n) \tag{2.183}$$

Tal como se vió anteriormente, dado que a_n y b_n siguen una $N(0, \sigma)$, R_n posee una distribución de Rayleigh y ϕ_n se distribuye uniformemente en $[0, 2\pi]$. Además, el cociente

$$\frac{R_n^2}{\sigma_{a_n}} = \frac{R_n^2}{\sigma_{b_n}} = \frac{R_n^2}{\sqrt{S(f_n)\Delta f}} \tag{2.184}$$

representa una variable aleatoria distribuida según una χ_2^2, que corresponde a la distribución estadística admitida para las estimaciones de $S(f)$.

Definiendo dos nuevas variables aleatorias distribuidas según una $N(0, 1)$, dadas por

$$\alpha_n = \frac{a_n}{\sqrt{S(f_n)\Delta f}} \qquad \text{y} \qquad \beta_n = \frac{b_n}{\sqrt{S(f_n)\Delta f}} \tag{2.185}$$

tal que,

$$R_n = \sqrt{S(f_n)\Delta f}\left(\alpha_n^2 + \beta_n^2\right)^{1/2} \tag{2.186}$$

y

$$\phi_n = arctan\left(-\frac{\beta_n}{\alpha_n}\right) \tag{2.187}$$

La ecuación (2.183) puede se expresada como

$$\eta(t) = \sum_{n=1}^{N/2} \sqrt{S(f_n)\Delta f}\left(\alpha_n^2 + \beta_n^2\right)^{1/2} cos(2\pi f_n + \phi_n) \tag{2.188}$$

En la figura 2.6 se muestra un segmento de registro de oleaje generado a partir del espectro objetivo mostrado en la figura 2.5, mediante esta técnica. Es decir, conocido el espectro de partida y generando un par de secuencias aleatorias $N(0,1)$ correspondientes a α_n y β_n, mediante uno de los procedimientos vistos en la sección anterior, es posible obtener una serie temporal, $\eta(t)$, en la cual tanto las fases como las amplitudes de cada componente armónica poseen carácter aleatorio. Por este motivo, el espectro de las series simuladas mediante este método no reproduce exactamente el espectro de partida (ver figura 2.5), sino que presenta las fluctuaciones aleatorias respecto a dicho modelo, semejantes a las observadas al estimar el espectro a partir de un registro de oleaje real.

Es importante indicar que, aunque en teoría con los métodos DSA y NSA se podrían generar registros de longitud indefinida utilizando un número muy elevado de componentes sinusoidales, en la práctica los procedimientos de simulación basados en superposición de un número N de ondas armónicas presentan el problema de repetirse con una periodicidad $T = 1/\Delta f$. Sin embargo, tanto el método DSA como el NSA son, en la gran mayoría de las ocasiones, implementados utilizando el algoritmo FFT para que resulten computacionalmente eficientes (Hudspeth y Borgman, 1979). De este modo, el problema de la periodicidad de

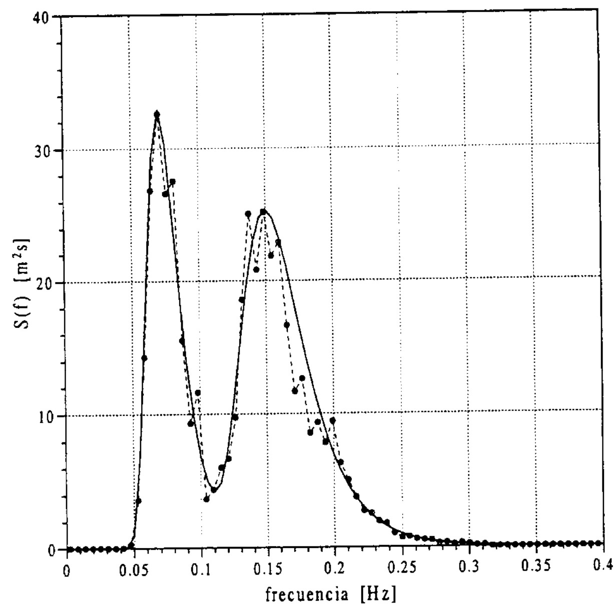

Figura 2.5: Espectros objetivo (línea continua) y reproducido (línea discontinua) a partir de la serie de la figura 2.6, método NSA

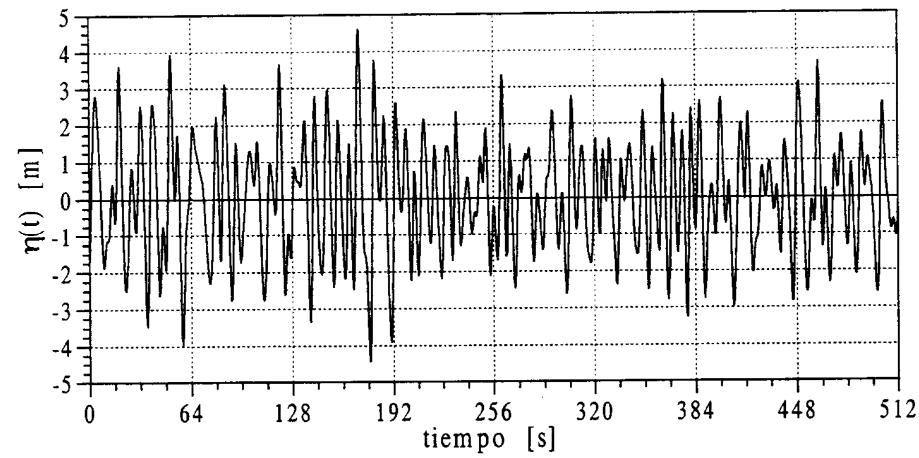

Figura 2.6: Serie simulada a partir del espectro objetivo de la figura 2.5, con el método NSA

las series simuladas desaparece, puesto que la longitud de las series así simuladas es precisamente $1/\Delta f$. No obstante, la longitud de las series sigue estando limitada ya que para aumentar su duración será preciso incrementar el número de componentes armónicas empleadas, y la eficiencia computacional de la FFT es del orden de $N \log_2(N)$ para los algoritmos FFT estándar, en los cuales N debe ser una potencia entera de 2, de modo que el número de componentes necesarias para aumentar el registro crece espectacularmente.

Por otro lado, puede demostrarse (e.g., Rice, 1954) que las series generadas mediante el método NSA convergen a un proceso aleatorio ergódico. Además, en diferentes trabajos (Tucker, 1984; Rodríguez y Guedes Soares, 1999, Rodríguez et al., 2003) se ha observado que el procedimiento DSA presenta importantes limitaciones para reproducir adecuadamente diferentes propiedades estocásticas del oleaje, al no introducir la variabilidad aleatoria intrínseca a las amplitudes del proceso.

En consecuencia, en el presente trabajo se adopta la metodología NSA para simular registros de oleaje a partir de distintos espectros objetivos que serán descritos en los siguientes capítulos. Tal como se comentó en la sección anterior, los números aleatorios necesarios para generar las fases y amplitudes aleatorias son obtenidos empleando los *GNPAs* `MZRAN13` y `MT19937`. Los números aleatorios resultantes son transformados de una $U(0,1)$ a una $N(0,1)$ empleando el método polar.

2.3 Datos experimentales

En esta sección se indican las localizaciones de las boyas acelerométricas empleadas para obtener las series temporales de elevaciones de la superficie del mar examinadas en el presente trabajo. Además, se especifican las características de las estaciones de medida y de los registros experimentales obtenidos. Finalmente se realiza una breve descripción de las características climatológicas del área donde han sido obtenidas las observaciones experimentales.

2.3.1 Localización y características de los registros

Los registros de oleaje empleados en este estudio han sido obtenidos mediante boyas acelerómetricas del tipo *Waverider* pertenecientes a la red REMRO (Red de Medida y Registro de Oleaje) del Ministerio de Fomento, gestionada por el centro de Estudios de Puertos y Costas (CEPYC-CEDEX), y han sido facilitados por el Departamento de Medio Físico del Ente Público de Puertos del Estado. En concreto, estos corresponden a los registros obtenidos mediante boyas instaladas en el norte y noreste de la isla de Gran Canaria. En la figura 2.7 se ilustran las localizaciones de ambas boyas, en adelante denotadas como LP-I (norte), señalada en rojo, y LP-II (noreste), señalada en azul. Las características de las estaciones y su ubicación exacta se dan en la tabla 2.1.

Tabla 2.1: Características del fondeo de las boyas LP-I y LP-II

Boya	Latitud	Longitud	Profundidad
LP-I	$28^{\circ}8.5'$ N	$15^{\circ}27.5'$ W	42 m
LP-II	$28^{\circ}4.0'$ N	$15^{\circ}23.8'$ W	48 m

Las series de elevaciones de la superficie registradas en cada una de las boyas tienen una duración aproximada de 42 minutos y, en general, la cadencia de muestreo empleada es de una hora. La frecuencia de muestreo es de $2Hz$, es decir, el intervalo de muestreo es de dos muestras por segundo. Los periodos cubiertos por las medidas examinadas son, 15 años (1987-2001) para la boya LP-I, y 12 años (1990-2001), para la boya LP-II.

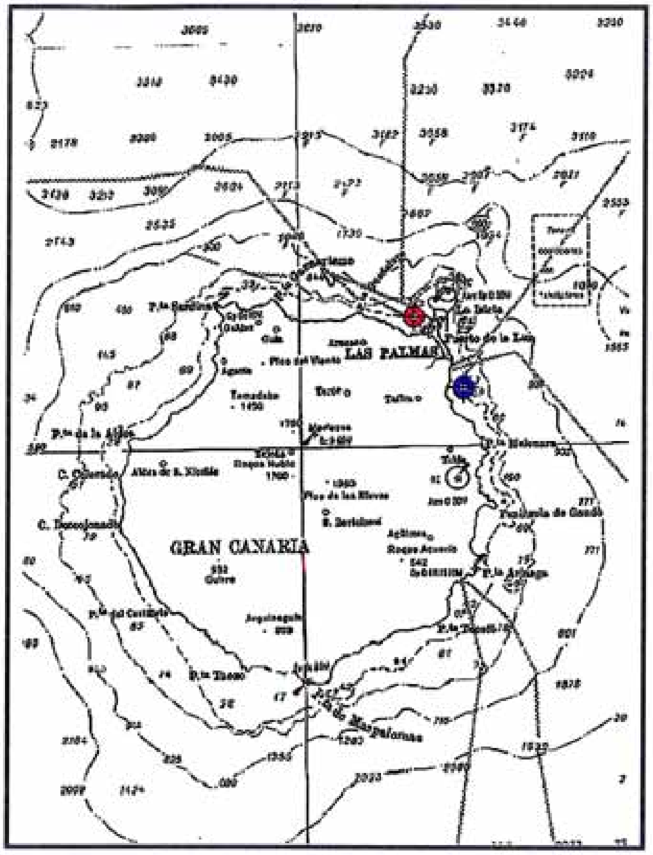

Figura 2.7: Ubicación de las boyas LP-I (rojo) y LP-II (azul)

2.3.2 Características climatológicas de la zona de medida

A excepción de las áreas que experimentan ciclones tropicales, en general, las mayores tormentas se producen en los denominados cinturones de tormentas, donde los vientos son de gran intensidad y notablemente variables. En estas zonas, las costas están sometidas en una elevada proporción a condiciones de oleaje de viento. En el hemisferio norte, el cinturón de tormentas cubre un área mucho más extensa que en el hemisferio sur, tal como se observa en la figura 2.8, y las tormentas ocurren fundamentalmente durante el invierno. Naturalmente, el oleaje generado en las zonas de tormentas se propaga hacia otras zonas del océano en forma de oleaje de fondo. De este modo, el oleaje generado el el cinturón de tormentas del norte del Atlántico Norte puede propagarse hacia el sur en forma de swell. En particular, las tormentas localizadas en la región en la que se ubica el denominado sistema de bajas

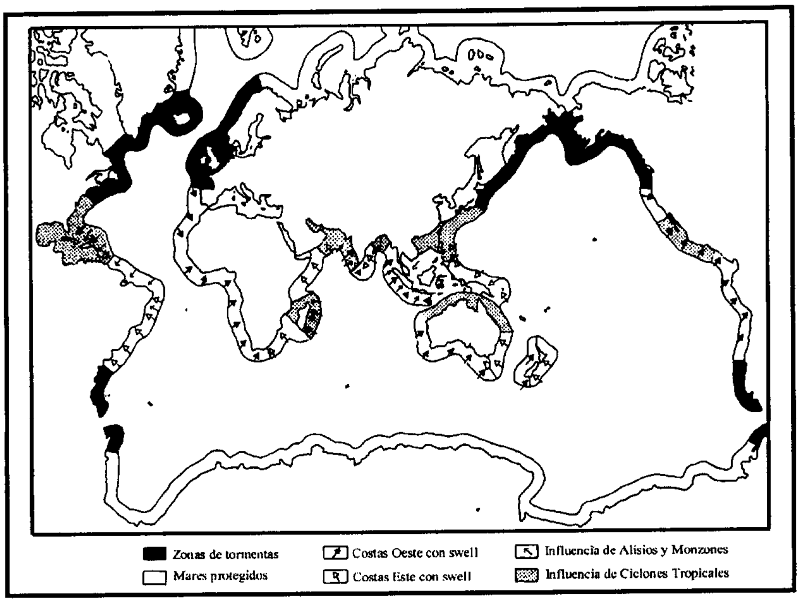

Figura 2.8: Ilustración de las zonas de tormentas y costas dominadas por el swell (Adaptada de Davies, 1972).

presiones, o de borrascas, de Islandia genera frecuentemente oleaje que se propaga en forma de swell hacia la zona de las Islas Canarias. En función de lo anteriormente expresado, el área de Canarias se encuentra entre las denominadas zonas dominadas por el swell, tal como se observa en la figura 2.8.

En la figura 2.9 (Titov, 1971) se observa como el swell que se aproxima a Canarias procede fundamentalmente del NNW, especialmente de la zona comprendida entre Canada e Islandia, donde se sitúa la zona de bajas presiones de Islandia, dando lugar a fuertes tormentas. El oleaje generado en dicha zona se propaga hacia canarias en forma de swell, que durante el invierno presenta un oleaje de fondo casi permanente y que durante aproximadamente el 20% de los casos supera los 3 metros de altura. Este oleaje de fondo persiste, aunque con menor intensidad, durante el verano, época en la que también puede presentarse un oleaje de fondo generado al norte de las mismas.

Por otro lado, el régimen de vientos dominante en la zona es el de los vientos alisios, soplando con intensidad entre débil y moderada desde el N-NNE, especialmente en verano. De este modo, el oleaje generado por los alisisos es en

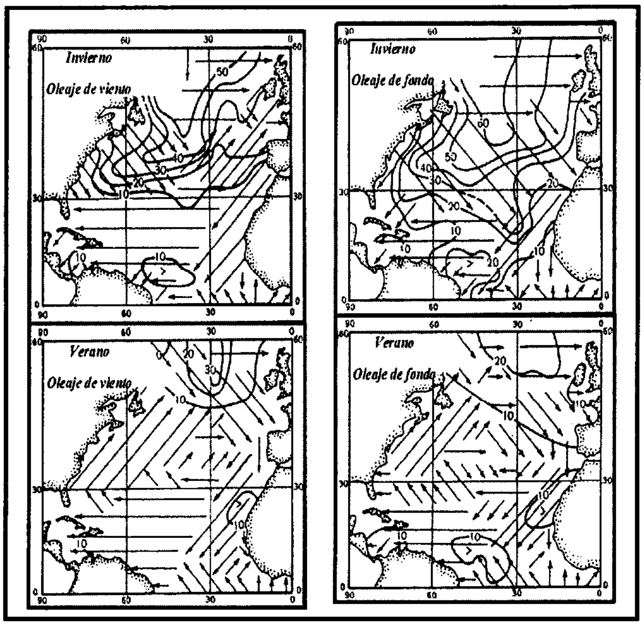

Figura 2.9: Condiciones de oleaje de viento y de fondo durante las épocas de invierno y verano en el Atlántico Norte (Adaptada de Titov, 1971).

realidad un oleaje de viento que alcanza tanto la parte norte como la parte noreste de la isla de Gran Canaria, tal como se observa en la figura 2.9. Por el contrario, durante el invierno, cuando el anticiclón de las Azores se debilita y la actividad del ciclón de Islandia se intensifica, éste genera campos de oleaje de intensidad notable que se propagan en forma de swell hacia las islas, procedentes de NNW. En consecuencia, este tipo de oleaje afecta claramente al norte de Gran Canaria donde, con frecuencia, se combina con el oleaje de viento dando lugar a campos de oleaje mixtos, mientras la zona noreste, donde está ubicada la boya LP-II, se ve protegida por la propia isla, sintiendo mucho menos el efecto de este oleaje de fondo.

En consecuencia, en general, el oleaje en el norte de las Islas Canarias estará caracterizado por la presencia de un swell dominante procedente del NNW, especialmente durante el invierno, y un oleaje de viento procedente fundamentalmente del NNE, en especial durante el verano, pudiéndose detectar también en ocasiones un swell joven procedente de esta misma dirección. No obstante, también es necesario tener en cuenta la posibilidad de que, de forma

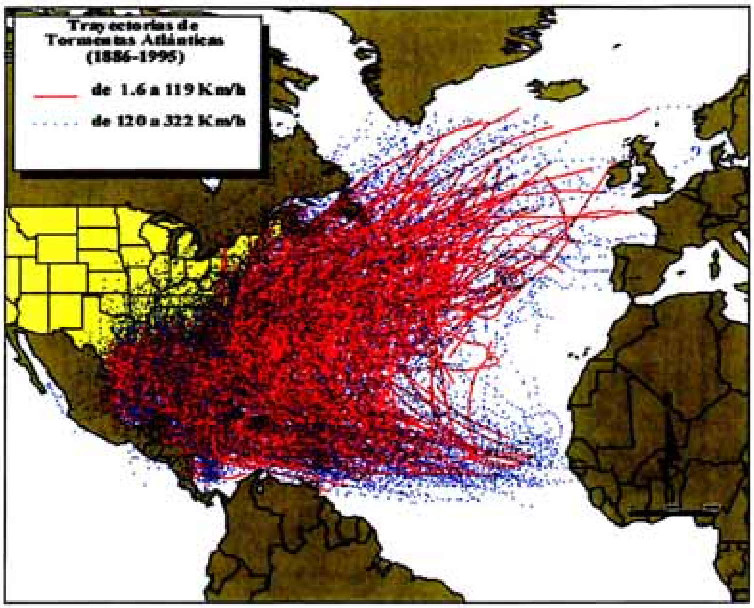

Figura 2.10: Trayectorias de tormentas tropicales observadas durante el periodo 1886-1995.

esporádica, a las islas llege oleaje de fondo generado por las tormentas tropicales que, tal como se observa en la figura 2.10, suelen seguir trayectorias que prácticamente rodean esta zona. Del mismo modo, de forma esporádica, las islas experimentan la presencia de tormentas que, generalmente, se aproximan desde el sector N-NW, y en menor medida desde el sur.

En función de lo anterior, resulta evidente que el oleaje en la zona norte de las islas presentará con bastante frecuencia una estructura frecuencial bimodal, debida a la combinación en este área del oleaje de fondo procedente del NNW y del oleaje de viento generado por los alisios, que soplan desde el NNE, tal como se ilustra de forma esquemática en la figura 2.11.

En las figuras 2.12 y 2.13 se muestran los valores horarios medios durante el año para la altura de ola significativa, en el Norte de la isla (LP-I) y el Noreste (LP-II), respectivamente. Obsérvese que, mientras en la zona norte la altura de ola presenta un patrón estacional bastante claro, este rasgo no aparece reflejado en la figura correspondiente a la zona noreste. En general, en la zona norte la altura de

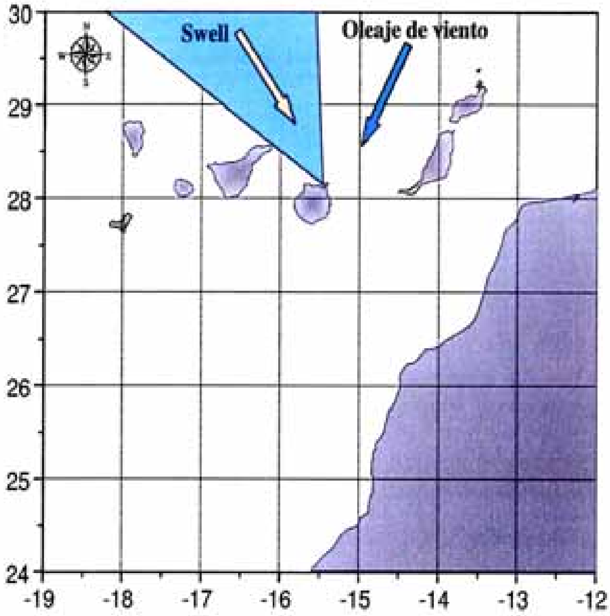

Figura 2.11: Oleaje incidente en la zona de observación

ola es mayor durante el invierno y alcanza sus valores mínimos durante el verano, siendo ésta la única época en la que las alturas de ola son similares en ambas zonas.

Este patrón estacional se hace aún más evidente al examinar los valores medios horarios anuales de los periodos medios del oleaje en ambas zonas, mostrados en las figuras 2.14, y 2.15, para la boya LP-I y LP-II, respectivamente. En la figura correspondiente al norte de la isla se aprecia claramente el aumento del periodo medio durante los meses de invierno, finales de otoño y comienzos de la primavera, causado por la presencia del swell procedente de la zona de tormentas del Atlántico Nor-noroeste, que no afecta a la zona noreste de la isla, al quedar ésta protegida por la propia isla de este tipo de oleaje. Durante el verano, debido a la intensificación del anticiclón de las Azores, y bajo el predominio de los alisios, en ambos puntos el periodo del oleaje alcanza valores similares.

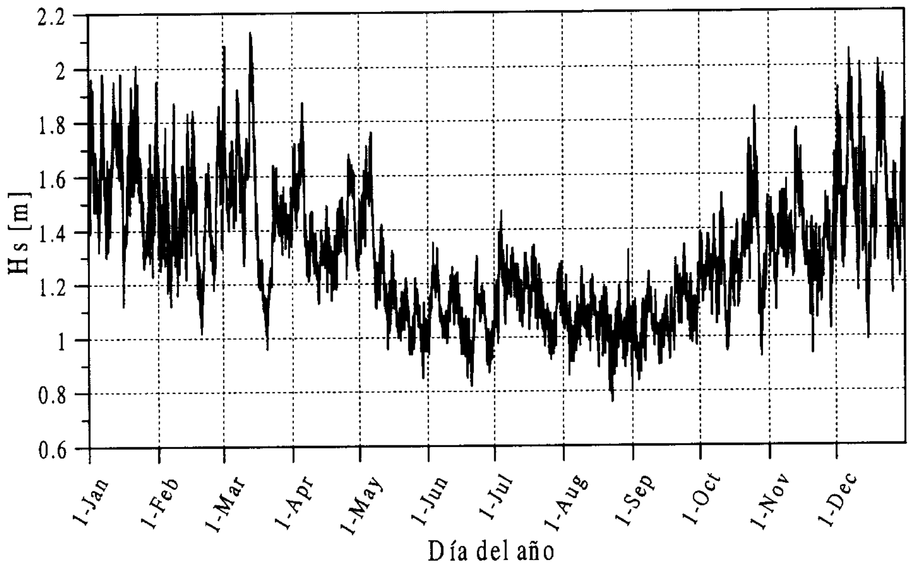

Figura 2.12: Valor medio horario anual de la altura de ola significativa en la boya LP-I (1987-2001)

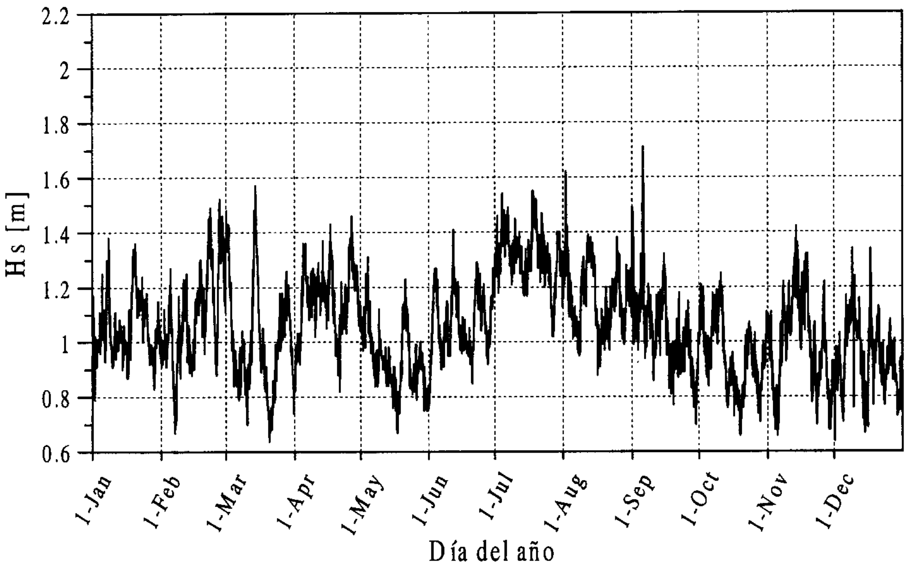

Figura 2.13: Valor medio horario anual de la altura de ola significativa en la boya LP-II (1990-2001)

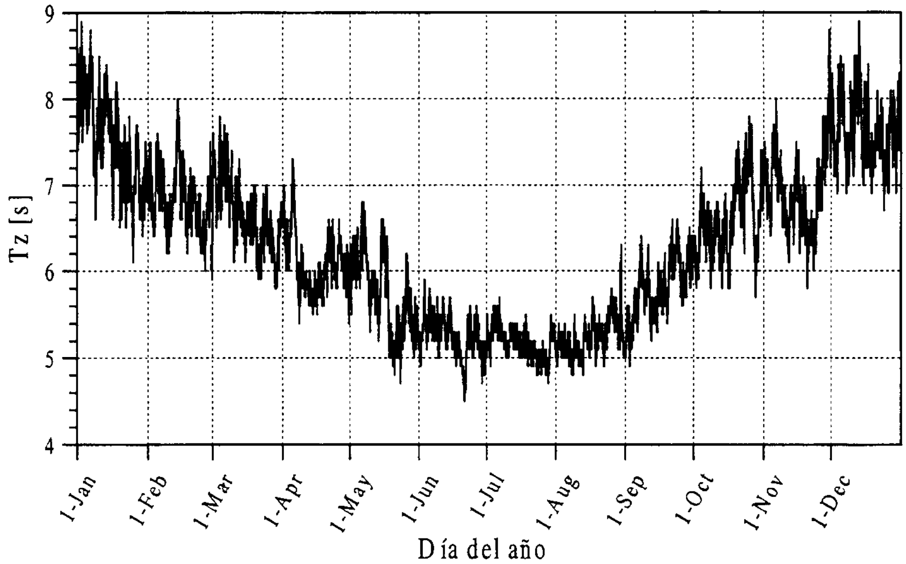

Figura 2.14: Valor medio horario anual del periodo medio en la boya LP-I (1987-2001)

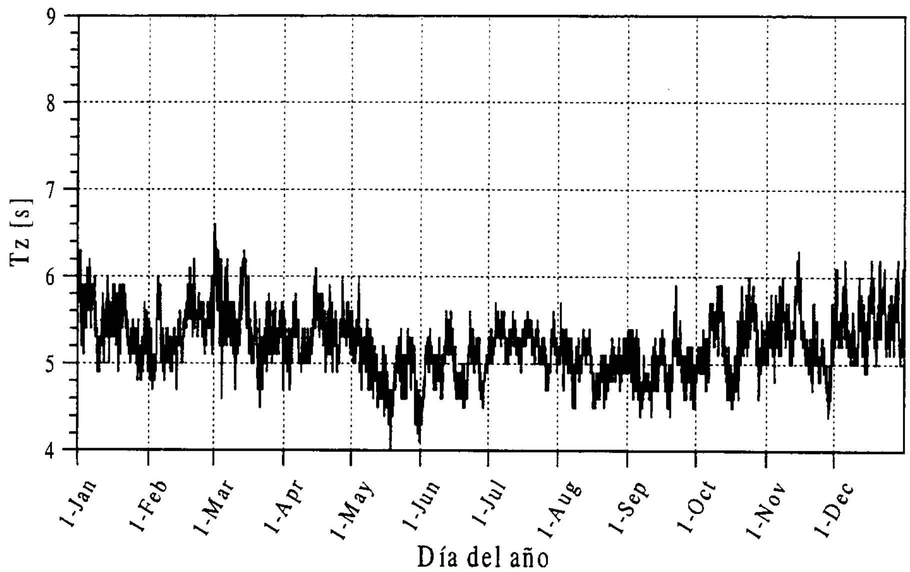

Figura 2.15: Valor medio horario anual del periodo medio en la boya LP-II (1990-2001)

Capítulo 3

Caracterización estocástica de campos de oleaje unimodales

En este capítulo se introducen los principales avances logrados en el estudio de las propiedades, tanto estadísticas como espectrales, de los campos de oleaje en condiciones de estados de mar simples. Es decir, en condiciones de oleaje de viento o de fondo puros. Además, se examinan las características de estos dos tipos de oleaje en el dominio de los desfases temporales.

En primer lugar se discuten la propiedades de los campos de oleaje de viento, comentado inicialmente los modelos empleados para caracterizar la estructura probabilística de distintos parámetros del oleaje, así como las hipótesis generalmente admitidas para ello. Posteriormente se examinan las propiedades de este tipo de oleaje en el dominio frecuencial y se describen algunos modelos espectrales de interés propuestos para describir la estructura energética en términos de la frecuencia. A continuación se examina la estructura de los estados de mar de viento en el dominio de los desfases temporales, es decir, las características de la función de autocorrelación asociada a este tipo de oleaje. Finalmente se repite el procedimiento anterior para los estados de mar simples generados por un oleaje de fondo puro, cuyas características son mucho menos conocidas que los correspondientes al oleaje de viento.

3.1 Caracterización del oleaje de viento

La elevada variabilidad de las condiciones meteorológicas y oceanográficas, geomorfológicas, etc., hacen que las características tanto probabilísticas como espectrales del oleaje de viento presenten variaciones espaciales y temporales sustanciales. Además, tal como ya se ha comentado, este tipo de oleaje se caracteriza por presentar una irregularidad considerablemente mayor que la correspondiente al oleaje de fondo, al encontrarse dentro de la zona de generación recibiendo energía desde el viento de forma activa. En consecuencia, su energía suele estar distribuida sobre en un amplio rango de frecuencias y, por tanto, su estructura temporal suele presentar una fuerte variabilidad que resulta notablemente difícil de caracterizar.

3.1.1 Propiedades estadísticas

Dada la elevada variabilidad del oleaje de viento, en general, resulta indispensable admitir alguna hipótesis que suavice esta variabilidad para poder deducir modelos teóricos que permitan caracterizar el comportamiento estadístico de diversos parámetros representativos de la estructura del oleaje.

En consecuencia, normalmente, con el fin de simplificar la deducción teórica de las funciones de densidad de probabilidad de los parámetros característicos de un registro de oleaje, $\eta(t)$, se suele admitir una versión simplificada del modelo de oleaje dado por (1.80), en la cual se asume que la densidad espectral del proceso está concentrada entorno a un valor dado de la frecuencia, f_0, y abarca un rango estrecho de frecuencias. Matemáticamente, y desde un punto de vista idealizado, esto equivale a admitir el siguiente modelo para caracterizar las fluctuaciones de la superficie libre en el punto de interés,

$$\eta(t) = \int_0^\infty [2S(f)df]^{1/2} \cos(2\pi f t + \phi) \qquad (3.1)$$

donde

$$S(f) \approx \sigma_\eta^2 \delta(f - f_0) \qquad (3.2)$$

Expresión que equivale a admitir un espectro con un ancho de banda infinitesimal ($\nu \to 0$). Sin embargo, en la práctica el espectro del oleaje puede tener un ancho de banda pequeño, pero siempre finito.

Debido a su frecuente uso y sus implicaciones, resulta interesante examinar con algo más de detalle el concepto de proceso aleatorio de banda estrecha. En particular, el admitir que un proceso aleatorio es de banda estrecha implica que la amplitud y la fase del mismo varía lentamente con el tiempo, mientras que la frecuencia permanece prácticamente constante, oscilando ligeramente respecto a la frecuencia f_0. En consecuencia, un proceso de banda estrecha puede ser expresado como

$$\eta(t) = A(t)\cos\left[2\pi f_0 t + \phi(t)\right] \tag{3.3}$$

donde la frecuencia central, f_0, permanece constante, mientras $A(t)$ y $\phi(t)$ son variables aleatorias cuyos rangos de variación son $0 \leq A(t) < \infty$ y $0 \leq \phi(t) \leq 2\pi$, respectivamente. Así, escribiendo el modelo de oleaje dado por (1.79) como

$$\eta(t) = \Re\left\{e^{i2\pi f_0 t}\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{i[2\pi(f_n - f_0)t + \phi_n]}\right\} = \Re\left\{A(t)e^{i2\pi f_0 t}\right\} \tag{3.4}$$

donde

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{i[2\pi(f_0 - f_p)t + \phi_n]} = \rho(t)e^{i\chi(t)} \tag{3.5}$$

siendo $\rho(t)$ la envolvente del proceso, también conocida como amplitud instantánea, y $\chi(t)$ la fase instantánea. La fase total del proceso queda especificada por $\psi(t) = 2\pi f_0 t + \chi(t)$. Ambas funciones pueden ser estimadas haciendo uso de la transformada de Hilbert de la serie $\eta(t)$, es decir, $\hat{\eta}(t)$, de modo que la amplitud instantánea viene dada por

$$\rho(t) = \sqrt{\eta^2(t) + \hat{\eta}^2(t)} \tag{3.6}$$

mientras la fase instantánea es

$$\chi(t) = \tan^{-1}\left[\frac{\hat{\eta}(t)}{\eta(t)}\right] \tag{3.7}$$

definiéndose la frecuencia instantánea del proceso como $\omega(t) = \frac{d\chi(t)}{dt}$.

En un proceso de banda estrecha, la envolvente del proceso, $\rho(t)$, y la fase instantánea, $\chi(t)$, varían lentamente. Un proceso que no cumpla estos requisitos o, lo que es equivalente, que no verifique la expresión (3.3) recibe el nombre de proceso de banda ancha.

Distribución de alturas de ola

Considerando el proceso $\eta(t)$ como un proceso de banda estrecha, Longuet-Higgins (1952) demostró que las amplitudes instantáneas, es decir, los valores de la envolvente, siguen una distribución de Rayleigh. Es decir

$$p(\rho) = \frac{\rho}{\sigma_\eta^2} \exp\left[-\frac{\rho^2}{2\sigma_\eta^2}\right] \tag{3.8}$$

De este modo, asumiendo que la altura de ola, H, es dos veces la amplitud de la onda, y que esta coincide con el valor de la envolvente, se tiene que H sigue una distribución de Rayleigh con expresión

$$p(H) = \frac{H}{4\sigma_\eta^2} \exp\left[-\frac{H^2}{8\sigma_\eta^2}\right] \tag{3.9}$$

Resulta obvio que esta distribución caracterizará adecuadamente la estructura probabilística de las alturas de ola cuando el proceso sea realmente de banda estrecha, hecho que no suele darse en el oleaje de viento. Por este motivo se han propuesto diferentes modelos alternativos en los cuales se incluye explícitamente la dependencia con el ancho de banda espectral. estos modelos serán discutidos en el capítulo 6, al examinar las distribuciones de probabilidad de las alturas de ola en estados de mar mixtos.

Distribución de los periodos de ola

El comportamiento estadístico de los periodos del oleaje resulta, en general, mucho más difícil de caracterizar que el correspondiente a las alturas. No obstante, debido al interés práctico que reviste el conocimiento de la estructura probabilística de dicho parámetro, se han sugerido diversos modelos estadísticos para dicho fin.

Estos modelos serán debidamente comentados en el capítulo 6, en el que se examina la estructura probabilística de los periodos del oleaje en mares combinados.

Correlación entre alturas de olas sucesivas

Un aspecto de especial relevancia en la estructura probabilística del oleaje es la existencia de correlaciones entre alturas sucesivas, debido a su relación directa con el fenómeno del agrupamiento de las alturas de ola, es decir, con la tendencia de las olas más altas que un cierto umbral a aparecer en forma de rachas o grupos de olas sucesivas. Así, a pesar de su elevada variabilidad, en el oleaje de viento existe un cierto grado de correlación mútua entre alturas de olas sucesivas. Esta correlación ha sido estudiada, entre otros, por Rye (1974), Arhan y Ezraty (1978) y Lamberti y Rossi (1993).

En el dominio temporal, la dependencia entre alturas de ola sucesivas viene expresada por su coeficiente de correlación (Rye, 1974), que puede estimarse mediante

$$r_{hh,k} = \frac{1}{\sigma_H^2} \frac{1}{N_w - k} \sum_{i=1}^{N_w - k} (H_i - H_m)(H_{i+k} - H_m) \tag{3.10}$$

donde N_w es el número de olas del registro, H_m es la altura de ola media, σ_H es la desviación estándar de las alturas de ola y k es un valor entero que cuantifica la separación entre las olas cuya correlación se analiza.

Arhan y Ezraty (1978) propusieron una solución teórica para la distribución conjunta de las alturas de dos olas sucesivas, empleando la teoría desarrollada por Rice (1944,1945), para la distribución de dos valores de la envolvente de un proceso gaussiano en dos instantes diferentes, separados por un intervalo τ. Estos dos valores, denotados por $R(t) = R_1$ y $R(t+\tau) = R_2$, poseen una distribución conjunta dada por

$$p(R_1, R_2) = \frac{\pi^2}{4} \frac{R_1 R_2}{R_m^4 (1-\kappa^2)} \exp\left[-\frac{\pi}{4} \frac{R_1^2 + R_2^2}{R_m^2 (1-\kappa^2)}\right] I_0 \left(\frac{\pi}{2} \frac{\kappa}{1-\kappa^2} \frac{R_1 R_2}{R_m^2}\right) \tag{3.11}$$

donde R_m es el valor medio de la amplitud de la envolvente e I_0 es la función de

Bessel de orden cero modificada. κ^2 es el parámetro de correlación lineal entre R_1^2 y R_2^2. Su valor satisface la relación

$$0 \leq \kappa^2 \leq 1 \tag{3.12}$$

y puede calcularse en función de la densidad espectral de frecuencias como

$$\kappa^2 = \frac{1}{m_0^2}\left\{\left[\int_0^{\infty} S(f)cos\,(2\pi f\tau)\,df\right]^2 + \left[\int_0^{\infty} S(f)sen\,(2\pi f\tau)\,df\right]^2\right\} \tag{3.13}$$

Además, el coeficiente de correlación r entre R_1 y R_2 puede ser evaluado a partir de la siguiente expresión (Uhlenbeck, 1943),

$$r = \frac{E(\kappa) - \frac{1}{2}(1-\kappa^2)K(\kappa) - \frac{\pi}{4}}{1 - \frac{\pi}{4}} \tag{3.14}$$

donde K y E son las integrales elípticas completas de primer y segundo orden respectivamente. Sin embargo, su cálculo se puede simplificar sustancialmente empleando el siguiente desarrollo en serie (Battjes, 1974),

$$r = \frac{\pi}{16 - 4\pi}\left(\kappa^2 + \frac{\kappa^4}{16} + \frac{\kappa^2}{64}\right) \tag{3.15}$$

De este modo, el coeficiente de correlación entre dos alturas de ola sucesivas, H_i, H_{i+1}, puede determinarse como

$$r_{hh1} = \frac{\pi}{16 - 4\pi}\left(\kappa^2 + \frac{\kappa^4}{16} + \frac{\kappa^2}{64}\right) \tag{3.16}$$

considerando como desfase temporal τ el periodo medio de pasos por cero, $\tau = T_{02}$.

De forma similar, utilizando los valores, $\tau = 2T_{02}, \tau = 3T_{02}, \cdots$, pueden obtenerse los coeficientes de correlación entre alturas de ola separadas por una ola, dos olas, etc., denotados por r_{hh2}, r_{hh3}, etc.

Admitiendo la hipótesis de banda estrecha, es posible asumir que la altura de ola es igual a la suma de las amplitudes de la envolvente en dos instantes separados por un desfase τ. Es decir, $H = A(t) + A(t+\tau)$. De este modo, la distribución de las alturas de ola sucesivas toma la expresión

$$p(H_i, H_{i+1}) = \frac{H_i H_{i+1}}{16m_0^2(1-\kappa^2)} \exp\left[-\frac{H_i^2 + H_{i+1}^2}{8m_0(1-\kappa^2)}\right] I_0 \left[\frac{H_i H_{i+1} \kappa}{(1-\kappa^2)4m_0}\right] \tag{3.17}$$

En la figura 3.1 se muestra la distribución $p(H_i, H_{i+1})$ experimental, obtenida mediante simulación numérica a partir de un espectro PM empleando la metodología NSA (Rodríguez y Guedes-Soares, 1999), conjuntamente con el modelo teórico dado por (3.17). Aunque de las figuras se desprende que el modelo es capaz de caracterizar de forma bastante adecuada los resultados exprerimentales, la comparación entre las distribuciones experimental y teórica resulta más simple representando los valores esperados condicionados de H_{i+1}, dado H_i, denotados por $E[H_{i+1}/H_i]$. Estos valores se muestran conjuntamente con las distribuciones teórica y experimental, en la figura 3.1, donde la línea continua representa los valores teóricos y los puntos los experimentales.

Nótese que si las alturas de ola sucesivas no están correlacionadas $E[H_{i+1}/H_i]$ debe ser constante. Sin embargo, se observa que la correlación no es nula y que el modelo es capaz de predecir el comportamiento observado de forma adecuada, especialmente para valores de H menores de 8m.

Los valores de $r_{hhk}, k = 1, 2, 3, 4$ obtenidos por Rodríguez y Guedes-Soares (1999) se dan en la tabla 3.1, conjuntamente con los observados por otros autores. Los valores de dicha tabla muestran que a pesar de la enorme variabilidad que caracteriza el oleaje de viento, la correlación entre alturas de ola sucesiva toma valores no despreciables para $k = 1$, aunque disminuye rápidamente al aumentar la separación entre olas.

Por otra parte, es interesante notar que la correlación aumenta con el apuntamiento del espectro. Así, en los resultados de Sobey (1996) se observa que a medida que aumenta el factor de intensificación γ en un espectro JONSWAP, aumenta la correlación. De modo análogo, los resultados correspondientes a condiciones de oleaje en generación son superiores a los observados en condiciones de decay, es decir, dentro de la zona de generación, pero con la velocidad del viento disminuyendo.

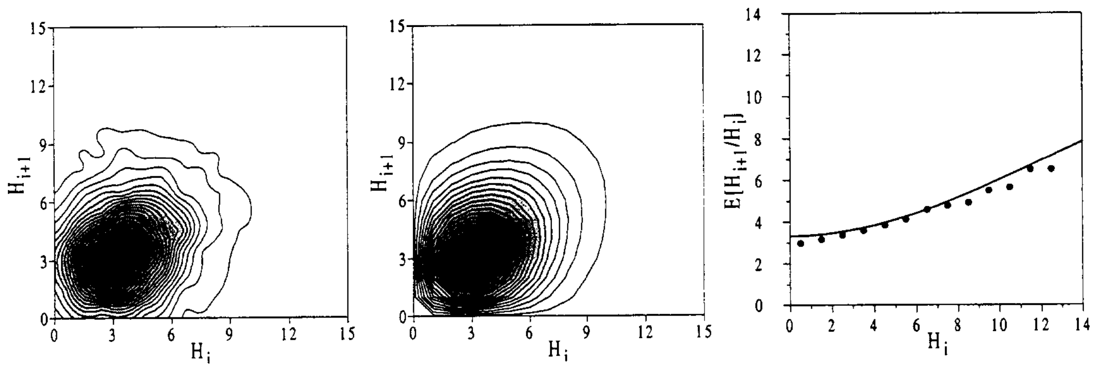

Figura 3.1: Distribución de probabilidad conjunta de alturas de olas sucesivas empírica (a), teórica (b), y valores esperados condicionados de H_{i+1}, dado H_i (c), para un estado de mar con espectro PM.

Tabla 3.1: Valores de $r_{hh,k}$ obtenidos por diferentes autores

Autor/es	Estado del Mar	$r_{hh,1}$	$r_{hh,2}$	$r_{hh,3}$	$r_{hh,4}$	$r_{hh,5}$
Rye (1974)	Generación	0.300	-	-	-	-
	Decay	0.200	-	-	-	-
	Total	0.240	-	-	-	-
Dattatri (1977)		0.236	-	-	-	-
Arhan (1978)	Mar Norte	0.297	0.051	0.036	-	-
	JONSWAP	0.298	0.113	<0.01	-	-
	PM	0.163	0.043	<0.01	-	-
Su (1982)	Generación	0.374	0.066	0.000	-0.021	-
	Decay	0.340	0.070	0.021	0.013	-
	Total	0.329	0.070	0.003	-0.006	-
Sobey (1996)	PM	0.310	-	-	-	-
	J $\gamma = 3.3$	0.450	-	-	-	-
	J $\gamma = 7.0$	0.751	-	-	-	-
Rguez y GS (1999)	PM	0.263	0.001	0.000	0.039	0.005

3.1.2 Propiedades espectrales

En principio, la ecuación del balance energético del oleaje para aguas profundas, descrita en el capítulo [1], cuya expresión más simple para un punto dado del océano en el que se observa el contenido energético del oleaje sin considerar su direccionalidad es

$$\frac{\partial S(f,t)}{\partial t} = \mathcal{S} = \mathcal{S}_{in} + \mathcal{S}_{ds} + \mathcal{S}_{nl} \tag{3.18}$$

debería permitir obtener la expresión exacta de la función de densidad espectral correspondiente a un campo de oleaje de viento en cualquier instante de tiempo, a partir de las expresiones correspondientes a los diferentes términos de la función fuente $\mathcal{S}$. Sin embargo, tal como se comentó en la sección [1.1.2], el conocimiento actual sobre los distintos procesos físicos involucrados en la generación, desarrollo, propagación y disipación del oleaje, no permite poder expresar dicha función mediante una formulación analítica exacta, empleándose en general para su caracterización expresiones aproximadas y desarrolladas en base a resultados experimentales.

En consecuencia, el procedimento general empleado para caracterizar la función de densidad espectral del oleaje de viento está basado en los conocimientos existentes sobre los mecanismos físicos subyacentes en los procesos ya descritos y, especialmente, en el ajuste de observaciones experimentales a determinadas funciones analíticas que permiten describir de forma aproximada el contenido energético del oleaje de viento en el dominio frecuencial.

Debido a la comentada notable variabilidad de la densidad espectral del oleaje de viento en función de factores tales como las condiciones meteorológicas y oceanográficas, entre otros, no es posible obtener un modelo espectral de validez universal. Es decir, el espectro del oleaje presenta estructuras significativamente distintas en diferentes puntos del océano, así como una variación considerable en función del tiempo para un lugar dado. En definitiva, no es posible emplear una formulación única para caracterizar la estructura energética del oleaje, incluso para un mismo punto del océano. Sin embargo, desde el punto de vista práctico, resulta de gran interés disponer de una función representativa del espectro del oleaje. Por ello, el procedimiento general empleado para tal fin consiste en caracterizar la función de densidad espectral mediante modelos paramétricos que permitan una represención adecuada de los espectros observados.

La parametrización del espectro tiene dos objetivos fundamentales. En primer lugar, permite la representación de un espectro empleando un número limitado de variables, estimadas o predichas. El modelo espectral podría en principio tener cualquier forma, aunque una formulación basada en fundamentos teóricos debería permitir la profundización en el conocimiento de los fenómenos físicos involucrados en los procesos de generación, propagación, disipación, etc. del oleaje. En segundo lugar, los parámetros empleados para caracterizar el espectro pueden ser relacionados entre sí, o con medidas medioambientales (e.g., velocidad del viento, fetch, duración del viento, edad del oleaje, etc.) permitiendo así una modelización predictiva del clima marítimo. Por estos motivos, a lo largo de los últimos 50 años, desde que Neumann (1953) propuso su modelo para caracterizar el espectro del oleaje de viento, se han propuesto numerosas formulaciones para caracterizar el espectro del oleaje en términos de unos pocos parámetros, con el fin de facilitar la predicción del oleaje y representar de forma realista las condiciones de diseño de las estructuras marítimas. Algunos ejemplos notables son el modelo biparamétrico de Bretschneider (1959), el modelo espectral para oleaje totalmente desarrollado de Pierson y Moskowitz (1964), y el espectro para oleajes en desarrollo JONSWAP (Hasselmann et al., 1973), siendo éste último el más ampliamente utilizado en los modelos de predicción y en el diseño de estructuras marítimas durante las tres últimas décadas.

En esta sección se realiza un breve resumen de algunas de las numerosas expresiones paramétricas propuestas hasta la fecha para caracterizar el oleaje de viento, atendiendo a su interés práctico, o en casos muy particulares por su interés metodológico, haciendo especial énfasis en aquellos considerados de interés en el desarrollo de modelos espectrales útiles para la caracterización de la función de densidad espectral asociada a estados de mar combinados o mixtos.

No obstante, es importante indicar que, mientras las expresiones generales de todos estos modelos son básicamente similares, éstos incluyen un número de coeficientes empíricos y exponentes de naturaleza teórica o empírica, que difieren de unos a otros modelos. La aplicabilidad y universalidad de estos parámetros ha sido, y sigue siendo, objeto de frecuentes discusiones y disputas. Por ello, antes de exponer los distintos modelos espectrales, es importante discutir ciertas propiedades de la estructura del espectro del oleaje que suelen ser consideradas como generales, o universales. En particular, la existencia de un rango de equilibrio en la zona de altas frecuencias.

Rango de equilibrio

El análisis espectral de registros de oleaje experimentales realizados a mediados de los años cincuenta, especialmente el estudio realizado por Burling (1955), revelaron que mientras el viento soplaba con una velocidad dada sobre la superficie del mar, el oleaje crecía progresivamente, en función del fetch y la duración del viento, de modo que el rango de frecuencias contenido en la densidad espectral aumentaba al aumentar el contenido energético del oleaje. Estos trabajos también pusieron de manifiesto que, mientras la densidad espectral de las componentes de frecuencias relativamente bajas continuaba creciendo, la asociada a las componentes contenidas en la banda de frecuencias significativamente mayores que la frecuencia de pico, f_p y considerablemente menores que aquellas en las que los efectos de la tensión superficial comienzan a ser importantes, f_γ, no continuaban creciendo, aún cuando el viento seguía transmitiendo energía al oleaje. De este modo, el espectro de energía del oleaje en esta zona de altas frecuencias presentaba una disminución de la densidad espectral que podía ser caracterizada como una potencia negativa de la frecuencia, es decir

$$S(f) \propto f^{-n} \quad ; \qquad n = 5 \tag{3.19}$$

Así, partiendo de estas evidencias experimentales, Phillips (1958) consideró que, en ausencia de corrientes y de oleaje de fondo, la estabilidad de la superficie libre queda determinada únicamente por la aceleración gravitatoria terrestre, g, de modo que la aceleración vertical de la superficie no puede exceder el valor de g, y cuando esto sucede la ola rompe transfiriendo energía a la turbulencia. En consecuencia, la densidad espectral en la zona de altas frecuencias debe ser función sólo de g y de la frecuencia local, f, y debe ser independiente de la velocidad del viento.

De este modo, admitiendo que la energía en el rango de altas frecuencias del espectro es independiente de la velocidad del viento, los parámetros de los cuales puede depender la energía del oleaje serán la densidad del aire, ρ_a, la densidad del agua, ρ_w, la aceleración debida a la fuerza gravitatoria terrestre, g, y la frecuencia del oleaje. Naturalmente, debe notarse que las ondas capilares, las cuales están influidas por la tensión superficial y la viscosidad, no han sido consideradas. Por tanto, el análisis está restringido a ondas cuya longitud de onda es superior a los 5 cm, aproximadamente.

En consecuencia, Phillips (1958), admitió que en el contexto del análisis dimensional, el espectro del oleaje podía ser expresado de la siguiente forma

$$S(f) = \alpha \rho_a^a \rho_w^b g^c f^d \tag{3.20}$$

donde α es una constante adimensional, y a, b, c y d son constantes a determinar. Así, teniendo en cuenta que las dimensiones de la densidad espectral del oleaje son L^2T^1 y expresando el término de la derecha en función de sus dimensiones se tiene

$$M^0L^2T^1 = \left(\frac{M}{L^3}\right)^a \left(\frac{M}{L^3}\right)^b \left(\frac{L}{T^2}\right)^c \left(\frac{1}{T}\right)^d \tag{3.21}$$

Igualando los exponentes de masa se obtiene que $a = -b$, lo cual implica que las densidades sólo pueden aparecer en la expresión en la forma (ρ_a/ρ_w). No obstante, en la práctica este cociente es aproximadamente constante, por lo cual la dependencia de la función de densidad espectral con las densidades de los dos fluidos puede ser eliminada. Además, igualando los exponentes de L y T, respectivamente, se tiene que $c = 2$ y $d = -5$. Así, Phillips llegó a la conclusión de que la función de densidad espectral para el rango de frecuencias altas podía ser expresada como

$$S(f) = \left(\frac{\alpha g^2}{(2\pi)^4}\right) f^{-5} \qquad f_p \ll f \ll f_\gamma \tag{3.22}$$

o bién, en términos de la frecuencia angular,

$$S(\omega) = \alpha g^2 \omega^{-5} \qquad \omega_p \ll \omega \ll \omega_\gamma \tag{3.23}$$

donde α es una constante adimensional. Esta expresión es conocida con el nombre de espectro de Phillips y en adelante será expresada como

$$S_P(f) = \left(\frac{\alpha_p g^2}{(2\pi)^4} \right) f^{-5} \tag{3.24}$$

con el fin de distinguir entre los distintos modelos espectrales y las constantes similares a α propuestas por otros autores para caracterizar la densidad espectral del oleaje en la zona de altas frecuencias.

Nótese que, al derivar el modelo dado por la ecuación (3.24), Phillips admite que en un punto dado del océano donde se está transfiriendo energía desde el viento hacia el oleaje de forma activa, transcurrido un periodo de tiempo suficientemente amplio, las componentes del oleaje de frecuencias altas alcanzan su saturación, de modo que su contenido energético permanece constante disipando mediante el fenómeno de rotura todo aporte adicional de energía, denominando a este rango de frecuencias como *rango de saturación*. Es decir, en términos de la ecuación del balance energético, se admite que

$$\frac{\partial S(f,t)}{\partial t} = S_{in} - S_{ds} = 0 \qquad ; \quad f \gg f_p \tag{3.25}$$

de modo que, en dicho rango de frecuencias la densidad espectral permanece constante.

Varios extudios experimentales realizados principalmente durante los años sesenta, cuyos resultados fueron resumidos por Hess et al. (1969), y los años setenta, respaldaron la validez de la relación (3.24). Sin embargo, Toba (1973) consideró que, tal como había demostrado Phillips, siendo el rango de saturación independiente de la velocidad del viento, el espectro en dicha zona debe ser proporcional a f^{-n}, con $n = 5$, entonces, si el espectro en dicha banda frecuencial muestra una caida proporcional a otro valor del exponente, la densidad espectral debe depender de la velocidad del viento. Así, partiendo de datos experimentales, de laboratorio y de campo, y asumiendo una estructura autosemejante para el espectro propuso la siguiente expresión para la función de densidad espectral del oleaje en el rango de altas frecuencias del espectro,

$$S_T(f) = \left(\frac{\alpha_t g}{(2\pi)^3} U_*\right) f^{-4} \tag{3.26}$$

Esta formulación ha recibido el respaldo de numerosos estudios experimentales (e.g. Kawai et al., 1977; Forristall, 1981; Kahma, 1981; Donelan et al., 1985). En particular, Kahma (1981), haciendo uso de registros experimentales obtenidos en el Golfo de Botnia y empleando como velocidad de escala U_{10}, en lugar de la velocidad de fricción sugiere la siguiente expresión para la densidad espectral en el rango de altas frecuencias

$$S_K(f) = \left(\frac{\alpha_k g}{(2\pi)^3} U_{10}\right) f^{-4} \tag{3.27}$$

donde el parámetro α_k es aproximadamente independiente de la velocidad del viento y del fetch, siendo su valor medio $\alpha_k \approx 4.5 \times 10^{-3}$.

Por otro lado, Donelan et al. (1985), analizando datos medidos en el Lago Ontario y en un canal de oleaje, sugieren una modificación del modelo de Phillips, reemplazando f^{-5} por f^{-4}/f_p, dada por

$$S(f)_D = \left(\frac{\alpha_d g^2}{(2\pi)^4 f_p} U_*\right) f^{-4} \tag{3.28}$$

donde el parámetro α_d presenta una clara dependencia con la *edad del oleaje*, A_w, definida como el cociente entre la velocidad de fase de las ondas asociadas al pico espectral, c_p, y la componente de la velocidad del viento a 10 m, en la dirección de propagación de las mismas.

Teniendo en cuenta las expresiones (3.26), (3.27) y (3.28), y las relaciones entre las velocidades de escala dadas en la sección [1.2], es posible demostrar (Rodríguez y Rubio, 1998) que los tres coeficientes de proporcionalidad y las velocidades de escala estan relacionados mediante la expresión

$$\alpha_d^2 = \left[\left(\frac{2\pi}{g}\right)^2 U_* U_{10} f_p^2\right] \alpha_t \alpha_k \tag{3.29}$$

Nótese que en este modelo la frecuencia de pico actúa de forma análoga a una velocidad de escala, pudiéndose demostrar (e.g., Toba et al., 1990) que

$$f_p = \frac{U_*}{2\pi z_0} B \tag{3.30}$$

donde B es una constante ($B \approx 0.015$). En consecuencia, puede demostrarse que, bajo condiciones de estabilidad atmosférica neutra, los tres modelos sugeridos para caracterizar la estructura del espectro del oleaje en la zona de frecuencias superiores a la frecuencia del pico espectral, dados por (3.26), (3.27) y (3.28), pueden expresarse mediante la siguiente expresión unificada (Rodríguez y Rubio, 1998),

$$S_X(f) = \left(\frac{\alpha_x g}{(2\pi)^3} U_x \right) f^{-4} \tag{3.31}$$

donde α_x denota la constante de proporcionalidad correspondiente a cada uno de los modelos, mientras U_x representa la velocidad de fricción, U_*, en los modelos de Toba y Donelan et al., y U_{10} en el de Kahma. Además, recuérdese que ambas velocidades están relacionadas mediante el coeficiente de arrastre, C_D, dado por (1.93).

Considerando las numerosas evidencias experimentales que soportaban una dependencia del tipo f^{-4} para el rango de altas frecuencias del espectro, Kitaigorodskii (1983) y el propio Phillips (1985) reexaminaron la idea del rango de saturación, empleando una descripción detallada de la ecuación del balance energético del oleaje, en la cual los diferentes términos de la función fuente, $\mathcal{S}_{in}$, $\mathcal{S}_{ds}$, y $\mathcal{S}_{nl}$, adquieren diferentes niveles de importancia relativa en la determinación de la forma espectral en la zona de altas frecuencias. Los balances de energía sugeridos por estos autores resulta consistente con una ley de potencias del tipo f^{-4}. De estas dos derivaciones teóricas de una dependencia del tipo f^{-4}, la más significativa es la obtenida por Phillips (1985), puesto que en ella se emplea el concepto de equlibrio dinámico entre los distintos términos de la función fuente antes señalados, en lugar de la idea inicial de un rango de saturación que subyace en el desarrollo del modelo original propuesto por este mismo autor. En consecuencia, la región del espectro de frecuencias significativamente mayores que f_p debe ser denominada como *rango de equilibrio*, y no como rango de saturación, en la cual

$$\mathcal{S}_{in} + \mathcal{S}_{ds} + \mathcal{S}_{nl} = 0 \tag{3.32}$$

En definitiva, resulta obvio que el fallo del modelo inicial de Phillips reside en el hecho de haber considerado a la rotura como el único mecanismo disipativo que controla el crecimiento del oleaje, es decir, sólo se considera el balance energético entre $\mathcal{S}_{in}$ y $\mathcal{S}_{ds}$. En este sentido, es necesario destacar que en el momento en que se propuso este modelo los conocimientos sobre la existencia e importancia de las interacciones no lineales entre componentes frecuenciales eran prácticamente nulos, y que fué este autor (Phillips, 1960; Longuet-Higgins y Phillips, 1962) uno de los principales impulsores y artífices de los avances en este campo, tal como se puede comprobar en la excelente revisión sobre la historia de este problema publicada por él mismo (Phillips, 1981).

Es interesante notar que, paradójicamente, uno de los mayores respaldos a la formulación de Phillips fue proporcionado por los resultados del experimento JONSWAP (Hasselmann et al., 1973), cuyo objetivo prioritario era el examinar la importancia de las interacciones no lineales en el desarrollo del oleaje, y cuyo investigador jefe había sido una de las piezas claves en el esclarecimiento teórico de la posibilidad de intercambio energético mediante interacciones no lineales resonantes entre ondas componentes (Hasselmann, 1962, 1963a, 1963b). No obstante, la revisión y análisis detallado de los datos obtenidos durante este experimento (Battjes et al., 1987) demostraron que la diferencia en la bondad de ajuste, con un 99.9% de nivel de confianza, entre las leyes de potencia f^{-4} y f^{-5} era significativa y que los espectros eran mejor ajustados empleando una formulación del tipo f^{-4}.

Sin embargo, a pesar de la creciente aceptación de una dependencia proporcional a $n = -4$, existen evidencias teóricas y experimentales que ponen de manifiesto la no unicidad de la pendiente del espectro en el rango de quilibrio. Así, por ejemplo, Mitsuyasu et al. (1980) observan que, mientras para frecuencias superiores a $2f_p$ el espectro muestra una pendiente de equilibrio proporcional a f^{-5}, para frecuencias inferiores, $f_p < f < 2f_p$, éste sigue una pendiente próxima a f^{-4}. Adicionalmente, Forristall (1981) mostró resultados que evidenciaban la presencia de una transición entre un comportamiento del tipo f^{-4} justo por encima del pico espectral $(1.5f_p <$

$f < 3f_p$)) hacia otro proporcional a f^{-5} para frecuencias superiores ($f > 3f_p$). Simultáneamente, Kahma (1981) analizó registros de oleaje obtenidos en el Golfo de Botnia bajo condiciones de viento sustancialmente estacionarias, observando que los espectros examinados sugerían un comportamiento del tipo f^{-4} en el rango de equilibrio. Sin embargo, aunque en sus conclusiones no excluyen la posibilidad de una transción entre los comportamientos antes citados, no llegan a obtener resultados que permitan confirmar su existencia.

Más recientemente, Hansen et al. (1990), analizan registros de oleaje obtenidos en el Lago Washinton y concluyen que los espectros muestran una frecuencia de transición, f_t, en $f_t \approx 3f_p$, desde una comportamiento f^{-4} en frecuencias inferiores a f_t hacia otro proporcional a f^{-5} por encima de la misma. Ewans and Kibblewhite (1990) analizan datos medidos alrededor de Nueva Zelanda y los agrupan en tres clases, dependiendo de las condiciones de viento como, en crecimiento, estacionarias y en atenuación. Analizando todos los registros conjuntamente obtienen valores de la pendiente en el rango $2f_p < f < 4.5f_p$ comprendidos entre -4 y -5. Analizando el grupo de espectros correspondientes a situaciones estacionarias, que contenía el mayor número de espectros, obtienen un valor medio de $n \approx -4.5$. Aplicando el mismo procedimiento de análisis sobre dos rangos frecuenciales, $2f_p - 3f_p$ y $3f_p - 4.5f_p$, observan un doble rango de equilibrio con una transición entre leyes de potencia de -4 a -5 para una frecuencia próxima a $3f_p$, que corresponde con la frecuencia de transición sugerida por Forristal (1981).

Kahma y Calkoen (1992), reanalizarón un gran conjunto de espectros obtenidos previamente durante diferentes experimentos y observarón una débil transición entre pendientes del tipo f^{-4} y f^{-5} en algunos de los espectros. Sin embargo, esta transición resultó mas evidente al analizar el espectro medio resultante de todo el conjunto de espectros adimensionalizados, situándo la frecuencia de transición en 1.2 veces la frecuencia de pico adimensional. Prevosto et al. (1996), analizando registros de oleaje medidos en aguas de Portugal, Noruega y Creta, observan claras diferencias entre las pendientes de los espectros en el rango $f_p - 2f_p$ y la banda comprendida entre $2f_p$ o $3f_p$ y $5f_p$.

La existencia de una frecuencia de transición entre dos subrangos de transición también ha sido postulada desde un punto de vista teórico por Kitaigorodskii (1983), quien argumentó que la disipación de energía por inestabilidades gravitatorias sólo es dominante para frecuencias muy altas, $f > f_t$, mientras que la entrada de energía desde el viento se hace asintóticamente despreciable en este rango frecuencial. por el contrario, en la banda de frecuencias, $f_p < f < f_t$, las interacciones no lineales resonantes actúan como principal factor en el control de la forma espectral. En consecuencia, este autor postula la existencia de una transición en la pendiente del espectro desde una banda de frecuencias cuasi-saturada, dependiente de la velocidad del viento con un comportamiento del tipo f^{-4} a otra región dominada por la rotura, o completamente saturada, donde el espectro es proporcional a f^{-5}.

Rodríguez y Guedes Soares (1999), analizan registros de oleaje obtenidos en el Lago Michigan bajo condiciones de oleaje próximas al desarrollo total y sustancialmente estacionarias, de modo que el conjunto de espectros correspondientes a los distintos registros puede ser considerado como una muestra homogénea de la misma población estadística. Examinando cuidadosamente los distintos factores no deseables que pueden afectar la estructura de la densidad espectral en el rango de altas frecuencias, tales como el desplazamiento Doppler generado por la presencia de corrientes u ondas largas y que reduce la amplitud máxima que pueden alcanzar las ondas más cortas antes de romper, establecen el rango de equilibrio en el intervalo entre $1.5f_p$ y $5.5f_p$. El ajuste de los espectros estimados, transformados logarítmicamente, en este rango de frecuencias a funciones del tipo $S(f) = Cf^{-n}$ con $n = 4$ y $n = 5$, demuestra que estas dos funciones se cortan en una frecuencia $f_t \approx 3f_p$, mientras que a ambos lados de esta frecuencia la pendiente media del conjunto de registros muestra un comportamiento diferente. Para frecuencias en el rango $1.5f_p - 3f_p$ se obtiene un ajuste adecuado a una ley de potencias f^{-4}, mientras en el rango superior, $3f_p - 5.5f_p$, el ajuste es más adecuado para una la ley f^{-5}, tal como se muestra en la figura 3.2.

El análisis detallado de la cola de altas frecuencias en los dos subrangos definidos por f_t, es decir $(1.5f_p - f_t; f_t - 5.5f_p)$ de forma independiente revela como mejores ajustes en cada uno de ellos los valores de $n = -4.12$ y $n = -5.09$, respectivamente, tal como se ilustra en las figuras 3.3a y 3.3b. Los valores numéricos de las pendientes

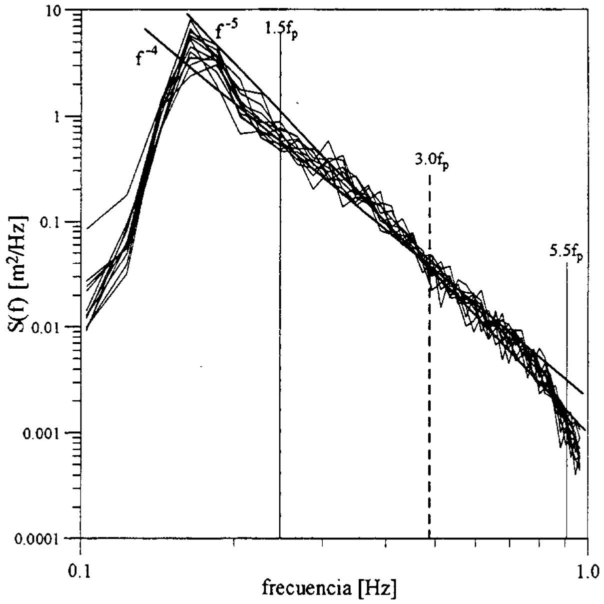

Figura 3.2: Pendientes espectrales en el rango de frecuencias $1.5f_p - 5.5f_p$ y leyes de potencia f^{-4} y f^{-5} ajustadas.

obtenidas para cada uno de los espectros y para el espectro promedio en cada uno de los rangos de frecuencia considerados se muestran en la tabla 3.2. De la misma se desprende que los valores de las pendientes de los espectros individuales en todo el rango de equilibrio oscila entre -4.3 y -5.3, aproximadamente, mientras que el espectro medio presenta una pendiente $n = -4.678$. En el subrango controlado por las interacciones no lineales, la pendientes individuales muestran un rango de variación comprendido entre -3.45 y -4.9, con un valor medio de -4.12, mientras en el subrango gobernado por la rotura las pendientes individuales se encuentran entre -4.8 y -6.41, siendo el valor de la pendiente para el espectro medio igual a -5.09.

En definitiva, se ha observado que dentro del rango entre f_p y $3f_p$, el balance energético ocurre principalmente entre S_{in} y S_{nl}, y que la disipación por rotura sólo llega a ser importante para frecuencias aproximadamente mayores que $3f_p$.

No obstante, una simple revisión de la bibliografía específica revela la incertidumbre existente sobre el verdadero valor del exponente que gobierna el

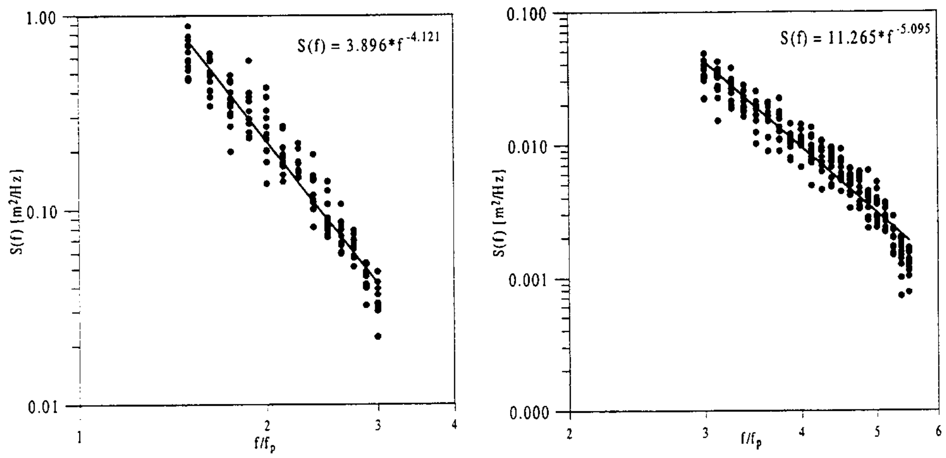

Figura 3.3: Pendientes espectrales medias en los rangos de frecuencias $1.5f_p - 3.0f_p$ (izquierda) y $3.0f_p - 5.5f_p$ (derecha).

Tabla 3.2: Pendientes estimadas para cada uno de los espectros individuales adimensionalizados en los intervalos ($1.5f_p - 3.0fp$, $3.0fp - 5.5fp$ y en el rango completo $1.5fp - 5.5fp$, con los correspondientes coeficientes de determinación y desviación estándar

Nº de	$1.5fp - 3.0fp$			$3.0fp - 5.5fp$			$1.5fp - 5.5fp$		
Registro	n	R^2	σ	n	R^2	σ	n	R^2	σ
1	-3.447	0.926	0.228	-5.358	0.952	0.230	-4.465	0.976	0.294
2	-4.156	0.935	0.254	-5.097	0.927	0.274	-4.545	0.975	0.281
3	-3.681	0.949	0.199	-4.982	0.901	0.317	-4.432	0.969	0.306
4	-4.901	0.956	0.229	-6.412	0.885	0.405	-5.172	0.959	0.387
5	-4.771	0.964	0.200	-6.308	0.933	0.297	-5.219	0.974	0.306
6	-4.181	0.962	0.275	-5.202	0.890	0.350	-4.795	0.970	0.327
7	-4.050	0.941	0.237	-5.010	0.931	0.262	-4.670	0.979	0.266
8	-4.233	0.973	0.164	-5.032	0.916	0.291	-4.806	0.980	0.263
9	-4.137	0.921	0.283	-4.908	0.955	0.203	-4.635	0.982	0.244
10	-4.323	0.969	0.180	-4.793	0.915	0.280	-4.707	0.982	0.244
11	-3.919	0.868	0.356	-4.907	0.951	0.213	-4.572	0.974	0.287
12	-4.375	0.945	0.247	-5.600	0.913	0.331	-4.921	0.972	0.324
$\langle S(f) \rangle$	-4.121	0.980	0.137	-5.095	0.964	0.188	-4.678	0.988	0.195

comportamiento del espectro del oleaje en el rango de equilibrio, tal como se comprobará en secciones posteriores.

Rodríguez y Guedes Soares (1999) sugieren que, al menos en parte, esta incertidumbre y la variabilidad entre los resultados obtenidos por diferentes autores, puede ser justificada por la variabilidad aleatoria intrínseca al oleaje y por los procedimietos empleados para la estimación del espectro.

Para tal fin, dichos autores emplean datos experimentales registrados en la costa de Portugal y técnicas de simulación numerica. En particular, para generar registros de oleaje sintéticos emplean la técnica NSA que, tal como se comentó en la sección [2.2.6], además de caracterizar adecuadamente un estado de mar Gaussiano y estacionario, presenta la peculiaridad de que las densidades espectrales obtenidas a partir de las series simuladas fluctúan con respecto al espectro objetivo de forma consistente con la variabilidad estadística observada al estimar un espectro a partir de un registro de longitud finita, que tal como se comentó en la sección [2.2.6] siguen una distribución $\chi^2_{r,\alpha}$.

Considerando un único registro simulado a partir de un espectro objetivo con $n = -5$, estiman el espectro correspondiente, suavizado de forma que cada estimación espectral posee 30 grados de libertad, así como los intervalos de confianza asociados, para un nivel de confianza del 90%. El espectro resultante, la recta de mejor ajuste y los intervalos de confianza, para el intervalo $2f_p - 3.5f_p$, se muestran en la figura 3.4, en escala doblemente logarítmica. En dicha figura se observa que, naturalmente, la pendiente del espectro obtenido (línea discontinua) en el citado rango es muy próxima a -5 ($n = -4.9$). Sin embargo, también se observa que con un nivel de confianza del 90% los valores del espectro podrían haber adoptado pendientes comprendidas entre $n = -6.2$ y $n = -3.6$ (líneas contínuas representadas dentro de la zona sombreada, delimitada por los intervalor de confianza). Nótese que estos valores cubren adecuadamente el rango de valores observado en los trabajos comentados previamente.

Para reforzar esta simple idea, Rodríguez y Guedes-Soares (1999) simulan 1000 registros a partir del mismo espectro objetivo y analizan la pendiente de los espectros resultantes, obtenidos con 22 y 30 grados de libertad, en el rango antes citado. Los

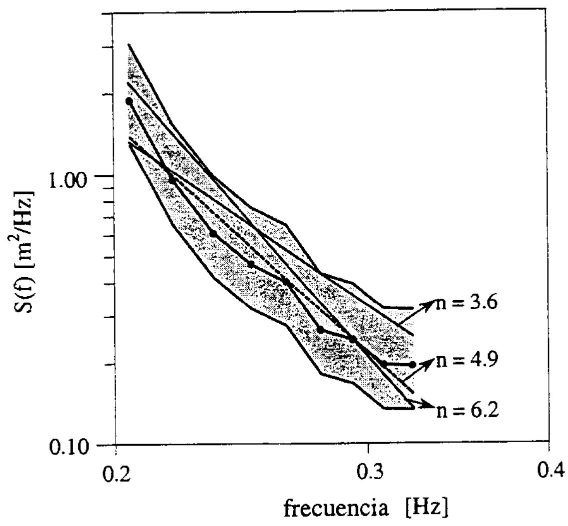

Figura 3.4: Ilustración de la incertidumbre de la pendiente de la cola de altas frecuencias del espectro debida a la variabilidad estadística de las estimaciones espectrales.

resultados confirman que, mientras el valor medio de la pendiente para los 1000 espectros toma un valor muy próximo a -5, la pendiente de los espectros individuales oscila dentro del rango $(-3, -6)$.

Por otro lado, estos autores observan que la estimación del espectro mediante diferentes técnicas, tales como el método de Blackman y Tukey, la transformada discreta de Fourier, y el método de máxima entropía, así como el uso de diferentes ventanas temporales, de desfases, o espectrales, y distintos grados de suavizado de las estimaciones dan lugar a variaciones significativas en los valores de n obtenidos.

En definitiva, estos autores llegan a las siguientes conclusiones. Por un lado, a la hora de analizar los resultados del valor de la pendiente en el rango de altas frecuencias, es necesario tener en mente que el análisis espectral es una técnica estadística, en el que se emplean estimadores de la "verdadera" función de densidad espectral, de modo que los resultados deben ser considerados en sentido estadístico, haciendo uso de los intervalos de confianza apropiados. Por otro lado, debido al elevado número de técnicas que pueden ser empleadas para obtener las estimaciones de la densidad espectral, y de los múltiples grados de suavizado que pueden aplicarse para reducir la varianza de las estimaciones, es necesario emplear el mismo procedimiento de análisis para poder comparar los resultados de diferentes trabajos.

Por último, se debe resaltar el hecho de que, la inmensa mayoría de los estudios experimentales realizados para intentar eliminar la incertidumbre existente sobre el verdadero valor, si existe, del exponente de la frecuencia en el rango de altas frecuencias han sido desarrollados en base a datos obtenidos en zonas específicas, tales como canales de oleaje, grandes Lagos, Golfos, mares semicerrados, etc., con el fin de evitar problemas como los que aparecen por la presencia de swell procedente de zonas remotas. Sin embargo, durante los programas de medida sistemáticos llevados a cabo en el mar, las situaciones en que el oleaje de viento se presenta en ausencia total de swell constituyen más la excepción que la tónica general. En consecuencia, las condiciones anteriormente comentadas no son representativas de las que, en general, se dan en mar abierto. Por ello, si bien desde un punto de vista teórico el valor de la pendiente del rango de altas frecuencias, para el caso de oleajes de viento puro, parece ser un valor en el intervalo $4-5$, en el capítulo [4] se constatará la enorme variabilidad que dicho parámetro presenta bajo condiciones de oleaje no tan específicas y, en la medida de lo posible, controladas.

Parámetro de proporcionalidad α

La frecuentemente denominada constante de proporcionalidad, α, desempeña un papel fundamental en la caracterización del espectro, puesto que es la que controla el contenido energético del espectro en el rango de altas frecuencias, tal como se observa en la figura 3.5, en la que se muestra el espectro dado por la expresión (3.24) para dos valores diferentes de α.

Este parámetro fué inicialmente considerado por Phillips como una constante universal de valor $\alpha_p = 1.23 \times 10^{-2}$. Sin embargo, numerosos autores (e.g., Burling, 1959; Kinsman, 1960), cuyos resultados daban soporte a experimental a la dependencia del tipo f^{-5} para el espectro en altas frecuencias, observaban la necesidad de emplear diferentes valores de esta constante de proporcionalidad para obtener ajustes adecuados entre las observaciones y los modelos teóricos.

Longuet-Higgins (1969) realizó una estimación semi-teórica de la relación entre

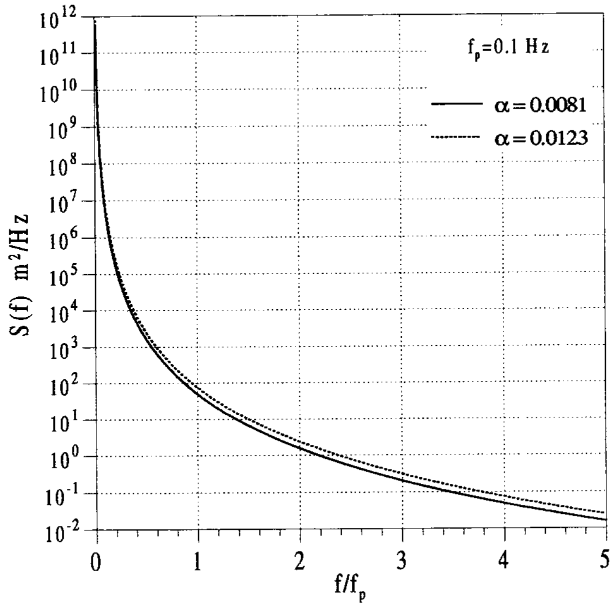

Figura 3.5: Espectro de Phillips para el rango de altas frecuencias en función de α.

α y la disipación de energía por rotura, asumiendo que la rotura del oleaje tiene lugar cuando la aceleración vertical en la cresta se aproxima a $-g/2$. A partir de dicho estudio obtuvo que el valor de esta constante de proporcionalidad debía ser $\alpha \approx 1.35 \times 10^{-2}$. No obstante, el análisis de los datos experimentales obtenidos durante el experimento JONSWAP (Hasselmann et al., 1973), conjuntamente con los resultados alcanzados previamente por numerosos autores, reveló una clara dependencia de este parámetro con el grado de desarrollo del oleaje. En particular, aunque con una considerable dispersión de los datos, este parámetro mostró una evidente dependencia con el valor del fetch adimensional, $\tilde{X}$, siendo la función de mejor ajuste la dada por

$$\alpha = 0.076\tilde{X}^{-0.22} \tag{3.33}$$

Como soporte adicional a la dependencia de α con el grado de desarrollo del oleaje, el análisis de datos experimentales de gran calidad registrados en el Lago Ontario (Donelan et al., 1985), cubriendo un amplio rango de grados de desarrollo del oleaje, desde condiciones de desarrollo fuertemente limitado por el fetch hasta oleajes totalmente desarrollados, puso de manifiesto la dependencia existente entre dicho parámetro y la *edad del oleaje*, A_w, anteriormente definida. La relación obtenida es expresada por

$$\alpha = 0.006 A_w^{-0.55} \quad ; \qquad 0.2 < A_w = \left(\frac{c_p}{U}\right) < 1.2 \tag{3.34}$$

En consecuencia con estas evidencias, α no debe ser considerado como una constante, sino como un parámetro cuyo valor es función del grado de desarrollo del oleaje.

Teoría de la semejanza de Kitaigorodskii

Independientemente de los valores exactos del parámetro de proporcionalidad, α, y del exponente, n, que afecta a la frecuencia local en el rango de equilibrio, los modelos espectrales descritos anteriormente sólo son válidos para caracterizar el espectro del oleaje en el rango de saturación, es decir, para describir el contenido energético de las ondas más cortas presentes en un campo de oleaje. Sin embargo, resulta evidente la necesidad de disponer de formulaciones teóricas capaces de caracterizar el contenido energético del oleaje en todo el rango de frecuencias asociado a éste.

En gran medida, los avances logrados en este sentido se deben a Kitaigorodskii (1961) quien, tomando como base los estudios realizados por Monin (1958) sobre la estructura estocástica de la turbulencia atmosférica, y el modelo propuesto por Phillips para el rango de frecuencias, extendió el estudio de la estructura espectral del oleaje a todo el rango de frecuencias, considerando que los mecanismos de generación del oleaje dan lugar a un espectro autosemejante que sólo depende de la extensión de la zona de generación, de la velocidad del viento, del periodo de tiempo durante el cual actúa, y de la aceleración gravitatoria terrestre. Hecho que ha sido confirmado por numerosos autores (e.g., Mitsuyasu, 1968, 1969; Liu 1971; Hasselmann et al., 1973; etc.).

En concreto, dicho autor empleó como variables el fetch y la frecuencia adimensionales, dadas respectivamente por

$$\tilde{X} = \frac{gX}{U^2} \tag{3.35}$$

$$\tilde{f} = \frac{Uf}{g} \tag{3.36}$$

donde X es la longitud del fetch y U el módulo de la velocidad del viento, para demostrar que el espectro del oleaje en condiciones de limitación por fetch podía ser caracterizado mediante una expresión adimensional del tipo

$$S(f) = g^2 f^{-5} \psi\left(\tilde{X}, \tilde{f}\right) \tag{3.37}$$

donde $\psi(\quad)$ es una función universal del fetch y la frecuencia adimensionales que debe ser determinada experimentalmente en cada caso. La importancia de este resultado radica en que proporciona información sobre la estructura del espectro de oleaje en todo el rango frecuencial, para una velocidad del viento dada.

Nótese que de acuerdo con la teoría propuesta por Kitaigoroodskii (1961), para condiciones de oleaje totalmente desarrollado, es decir, para un fetch suficientemente largo y una acción del viento suficientemente prolongada, la forma espectral sólo será función de la frecuencia adimensional, de modo que todos los espectros tendrán la misma forma básica y estarán escalados por la velocidad del viento (auto-semejanza). También es importante resaltar que esta teoría sólo tiene validez en condiciones de oleaje de viento puro, es decir, en ausencia de oleaje de fondo.

3.1.3 Modelos espectrales

Los avances anteriormente comentados sobre la estructura del espectro de oleaje de viento en la zona de altas frecuencias y la aparición de la teoría de la semejanza, conjuntamente con el progresivo desarrollo de las técnicas de medida experimentales ha permitido que numerosos autores hayan propuesto diferentes formulaciones empíricas para la función ψ en función del grado de desarrollo del oleaje.

Es interesante destacar que la inmensa mayoría de estos modelos se adopta una expresión funcional constituida por el producto de una potencia de la frecuencia y una función exponencial. Sin embargo, no existe razón física para tal elección (Huang et al., 1990). Por otra parte las distintas fornulaciones se diferencian entre sí en aspectos como el número de parámetros libres que presenta y si éstos están especificados por variables internas, del propio campo de oleaje, o en función de variables externas, tales como la velocidad del viento o la longitud del fetch.

A continuación se presentan algunas de las numerosas formulaciones espectrales de oleaje de viento en aguas profundas propuestas durante los últimos 50 años, para caracterizar la estructura frecuencial de este tipo de oleaje, tomando como base las ideas expuestas anteriormente y haciendo uso de medidas experimentales, atendiendo especialmente a aquellas que han sido, o pueden ser, de utilidad para la construcción de modelos espectrales bimodales. No obstante, también se comentarán algunos modelos que a pesar de poseer la misma estructura básica antes comentada, no han sido desarrollados partiendo de la teoría de la semejanza de Kitaigoroodskii.

Espectro Pierson-Moskowitz

Probablemente, el espectro más popular desde su publicación hasta comienzos de los años 80 es el propuesto por Pierson y Moskowitz (1964), quienes derivaron un modelo espectral considerando la formulación dada por Phillips para el rango de altas frecuencias y la teoría de semejanza dada por Kitaigorodskii. Para caracterizar la función ψ emplearon datos experimentales medidos en el Atlántico Norte mediante sensores instalados en barcos meteorológicos. En el estudio sólo fueron analizados aquellos registros de oleaje para los cuales se podía admitir la condición de oleaje totalmente desarrollado. De este modo obtuvieron un modelo espectral dependiente exclusivamente de la velocidad del viento. Es decir, la función ψ es función de la frecuencia pero no del fetch. El denominado espectro Pierson-Moskowitz (PM) tiene por expresión

$$S(f) = \frac{\alpha g^2}{(2\pi)^4} f^{-5} \exp\left[-0.74\left(\frac{g}{2\pi U_{19.5} f}\right)^4\right] \tag{3.38}$$

donde $U_{19.5}$ es la velocidad del viento a 19.5 metros sobre el nivel del mar.

No obstante, en un oleaje totalmente desarrollado para una velocidad del viento dada, la frecuencia de pico es un valor constante que según los datos experimentales utilizados por estos autores viene dado por

$$f_p = 0.14 \left(\frac{g}{U_{19.5}} \right) \tag{3.39}$$

sustituyendo esta expresión en (3.38) se tiene que

$$S(f) = \frac{\alpha g^2}{(2\pi)^4} f^{-5} \exp \left[-\frac{5}{4} \left(\frac{f}{f_p} \right)^{-4} \right] \tag{3.40}$$

donde el término exponencial representa la *función de forma* del espectro PM. Es decir,

$$\psi_{PM}(f, f_p) = \exp \left[-\frac{5}{4} \left(\frac{f}{f_p} \right)^{-4} \right] \tag{3.41}$$

En consecuencia, el modelo espectral PM puede ser expresado como

$$S(f) = S_P(f) \psi_{PM}(f, f_p) \tag{3.42}$$

En la figura 3.6 se muestra la forma de la función de forma propuesta por estos autores. Nótese que dicha función aumenta rápidamente para valores ligeramente inferiores a la frecuencia de pico y tiende asintóticamente a 1 para valores superiores a dos veces la frecuencia de pico. Es decir, esta función introduce una subida brusca en la parte trasera del espectro, donde multiplica por cero al espectro de Phillips, al que deja inalterado para frecuencias superiores a la frecuencia de pico. La forma espectral resultante, dada por (3.41) se muestra en la figura 3.7, donde se ilustra su evolución en función de la frecuencia de pico, para un valor fijo de α.

Espectro JONSWAP

Algunos resultados experimentales obtenidos en trabajos realizados a mediados de los años 60 (Snyder, 1965; Snyder y Cox, 1966), pusieron de manifiesto una clara inconsistencia en el crecimiento del oleaje observado en la naturaleza y las predicciones realizadas con el mecanismo sugerido por Miles (1957). Resultados análogos fueron obtenidos por Barnett y Wilkerson (1967). Estas deficiencias

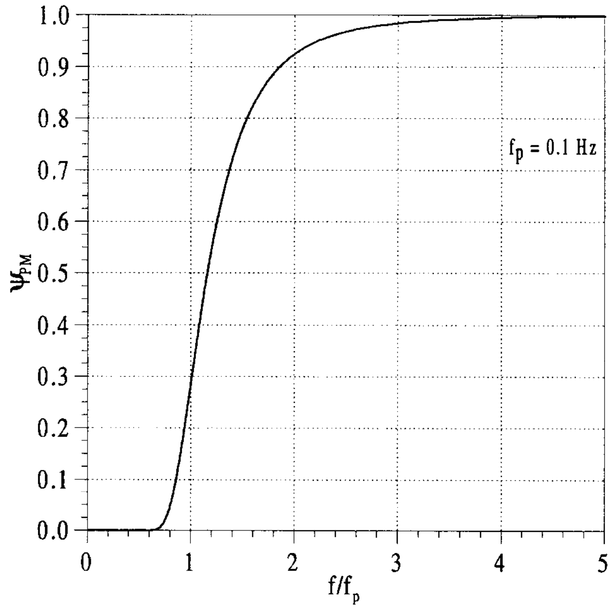

Figura 3.6: Función de forma ψ para el espectro Pierson-Moskowitz

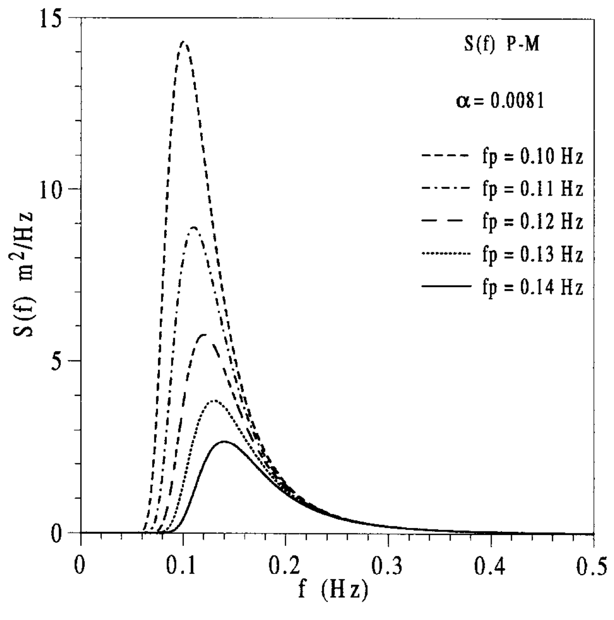

Figura 3.7: Variación del espectro Pierson-Moskowitz en función de f_p

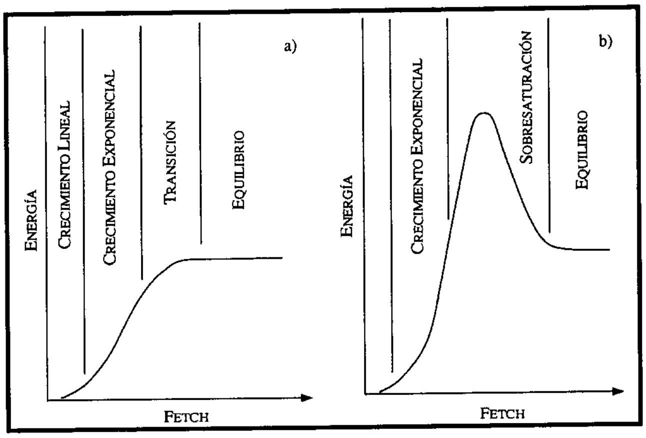

Figura 3.8: Crecimiento energético de una componente espectral de frecuencia dada según los mecanismos de Phillips y Miles, y efecto de sobresaturación.

indujeron a pensar que, mientras en las primeras fases del crecimiento del oleaje, el mecanismo sugerido por Phillips (1957) resultaba adecuado para explicar la transferencia de energía desde la atmósfera hacia el oleaje, la transferencia de energía desde el viento en las fases posteriores debía ser mayor que la predicha por el mecanismo de Miles. Sin embargo, junto con estas observaciones, Barnett y Wilkerson (1967) pusieron de manifiesto que el crecimiento energético del oleaje para una frecuencia dada no tenía lugar monótonamente hasta alcanzar el valor final correspondiente a la saturación, sino que antes de alcanzar dicho valor se observaba una sobresaturación energética, tal como se muestra en la figura 3.8. Este comportamiento en el crecimiento energético de una componente frecuencial dada sugirió que el responsable de dicho fenómeno debía ser un proceso de tipo no lineal.

Con el fin de explicar estos fenómenos y de investigar la importancia relativa de las interacciones no lineales entre componentes frecuenciales en el desarrollo energético del oleaje, a finales de los años 60 y principios de los 70 se desarrollo una gran campaña de medidas de campo en el Mar del Norte, frente a las costas de Dinamarca, que recibió el nombre de *Joint North Sea Wave Project* y que ha llegado a ser conocido por la comunidad científica con el nombre correspondiente a su acrónimo JONSWAP (Hasselmann et al., 1973).

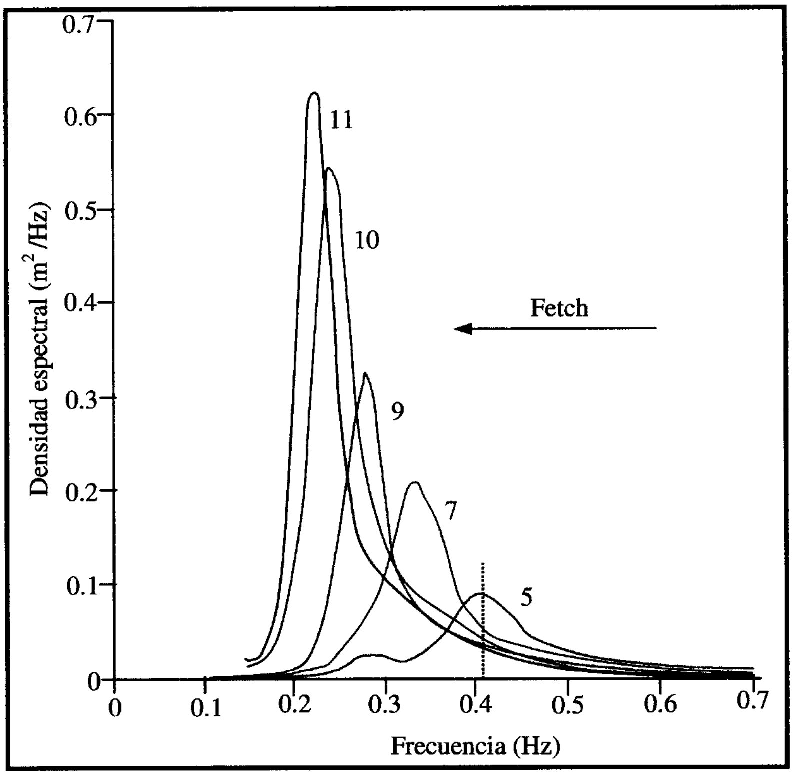

Figura 3.9: Evolución del espectro de oleaje con el fetch para vientos soplando desde costa hacia el mar, con el número indicando la estación de medida.

Los resultados de este proyecto pusieron de manifiesto que un elevado porcentaje del crecimento energético experimentado por el oleaje podía ser explicado gracias a las interacciones no lineales resonantes entre cuadrupletas de ondas componentes. Además, se observó que el fenómeno de sobresaturación podía ser explicado perfectamente considerando este tipo de interacciones. En la figura 3.9 se muestra una secuencia de espectros obtenidos durante dicho experimento, donde el número asociado a cada espectro indica una longitud creciente del fetch, considerado como la distancia desde la costa hasta cada estación de medida. Si se centra la atención en una frecuencia determinada, tal como la señalada con una línea vertical en la figura se observa que su contenido energético aumenta inicialmente y luego disminuye hasta estabilizarse en su posición de equilibrio.

De la figura 3.9 también se desprende que las interacciones no lineales provocan la transferencia de una gran cantidad de energía hacia bajas frecuencias, dando lugar a un rápido crecimiento en la zona de baja frecuencias del espectro, el cual muestra una fuerte pendiente en la cara a dicho lado del pico espectral. Esta transferencia de energía también tiene como resultado el desplazamiento progresivo del pico espectral hacia frecuencias cada vez más bajas y un apuntamiento del pico espectral, que es considerado como un rasgo típico del papel auto-estabilizador de las interacciones no lineales.

Además de estos resultados, los espectros medidos durante el citado proyecto pusierón de manifiesto que la forma espectral de los campos de oleaje en desarrollo no eran adecuadamente caracterizados mediante formulaciones espectrales del tipo PM, que habían sido sugeridos para caracterizar oleajes totalmente desarrollados. En particular se observó que el pico espectral correspondiente a oleajes parcialmente desarrollados aparecía mucho más apuntado que el predicho por el modelo PM. En consecuencia, se propuso una formulación espectral similar a la PM en la que se introdujo un término adicional que permitiese reproducir la intensificación del pico espectral observada experimentalmente. Este término recibe el nombre de factor de intensificación del pico espectral y tiene la siguiente expresión

$$\Phi_J\left(f, f_p, \gamma, \sigma\right) = \gamma^{exp\left[-\frac{(f-f_p)^2}{2\sigma^2 f_p^2}\right]} \tag{3.43}$$

o bien,

$$\Phi_J\left(f, f_p, \gamma, \sigma\right) = \exp\left\{\ln(\gamma)\exp\left[-\frac{(f-f_p)^2}{2\sigma^2 f_p^2}\right]\right\} \tag{3.44}$$

Nótese que el factor Φ_J es igual a γ para $f = f_p$ y tiende rápidamente hacia 1 a medida que f disminuye o aumenta en relación a f_p, tal como se muestra en la figura 3.10, para un valor de $\gamma = 3.3$ y $f_p = 0.1$ Hz.

De este modo, la función de forma $\psi_J()$, correspondiente a la formulación espectral JONSWAP viene dada por

$$\psi_J\left(f, f_p, \gamma, \sigma\right) = \psi_{PM}(f, fp)\Phi_J\left(f, f_p, \gamma, \sigma\right) = \exp\left[-\frac{5}{4}\left(\frac{f}{f_p}\right)^{-4}\right]\gamma^{exp\left[-\frac{(f-f_p)^2}{2\sigma^2 f_p^2}\right]} \tag{3.45}$$

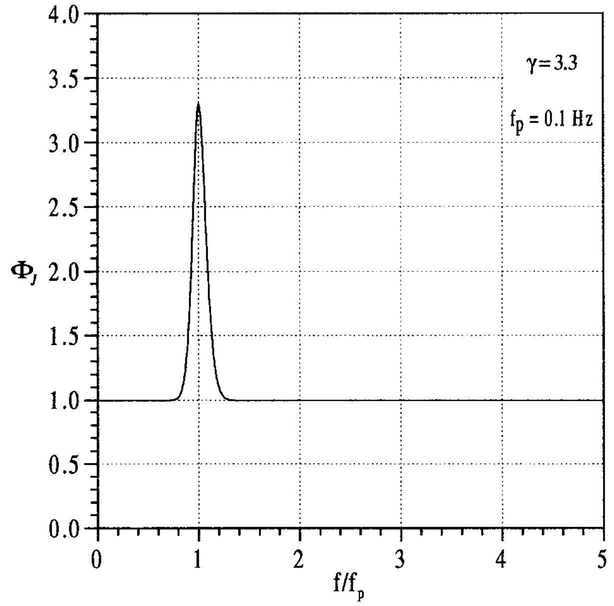

Figura 3.10: Factor de intensificación del pico en el espectro JONSWAP

Es decir,

$$\psi_J\left(f, f_p, \gamma, \sigma\right) = \exp\left\{-\frac{5}{4}\left(\frac{f}{f_p}\right)^{-4} + \exp\left[-\frac{(f-f_p)^2}{2\sigma^2 f_p^2}\right]\ln\gamma\right\} \tag{3.46}$$

La figura 3.11 muestra la forma de la función ψ_J que resulta del producto de las funciones ψ_{PM} y Φ_J. Obsérvese que el efecto del factor de intensificación de pico, Φ_J sobre la función de forma, es intensificar fuertemente el valor de la densidad espectral en la zona del pico del mismo, sin alterar el resto de la estructura de dicha función, tal como se observa en la figura 3.11, para los valores de $\gamma = 3.3$ y $\gamma = 7.0$.

En definitiva, la expresión correspondiente al modelo espectral JONSWAP será

$$S(f) = S_P(f)\psi_{PM}(f, fp)\Phi_J\left(f, f_p, \gamma, \sigma\right) = S_P(f)\psi_J\left(f, f_p, \gamma, \sigma\right)$$

$$= \frac{\alpha g^2}{(2\pi)^4} f^{-5} \exp\left[-\frac{5}{4}\left(\frac{f}{f_p}\right)^{-4}\right] \gamma^{exp\left[-\frac{(f-f_p)^2}{2\sigma^2 f_p^2}\right]} \tag{3.47}$$

La variación de dicho espectro con respecto al parámetro de intensificación de pico γ se muestra en la figura 3.12, donde puede observárse que el incremento de

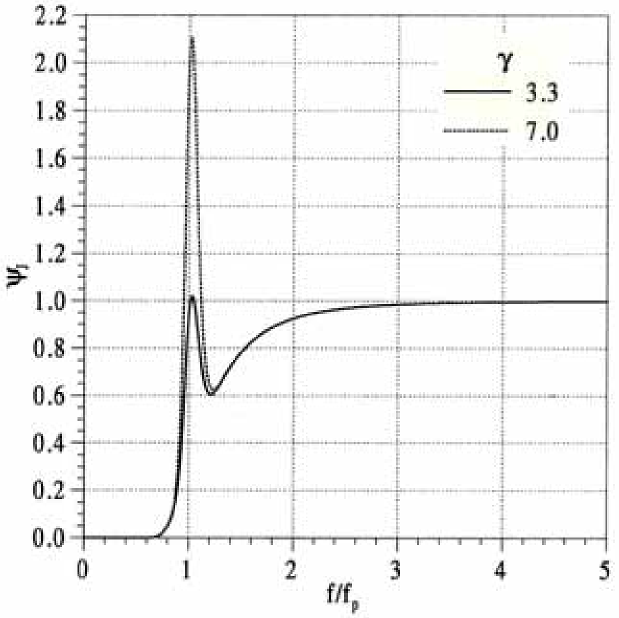

Figura 3.11: Función $\psi()$ para el espectro JONSWAP en función de γ

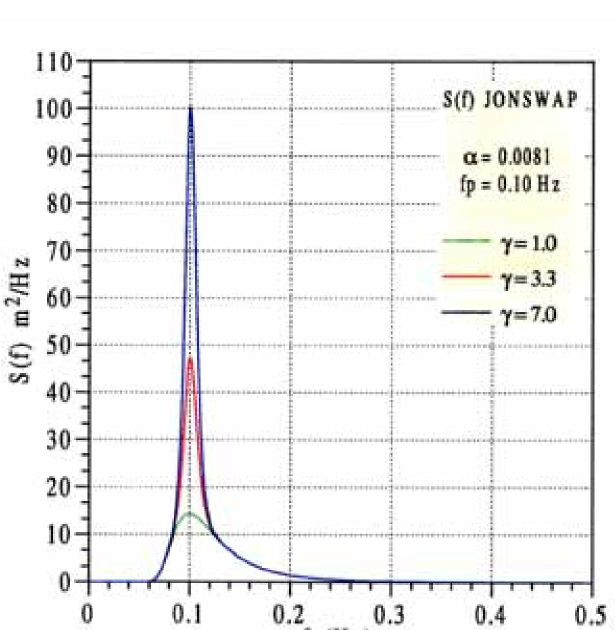

Figura 3.12: Variación del espectro JONSWAP en función de γ

γ únicamente produce un aumento de la energía asociada a la frecuencia de pico y a las inmediatamente adyacentes, pero no modifica, al menos de forma apreciable, ni la estructura del rango de altas frecuencias, ni la correspondiente a la banda de frecuencias notablemente menores que la de pico.

Espectro de Donelan

La revisión de los datos experimentales obtenidos durante el experimento JONSWAP realizada por Battjes et al. (1987) puso de manifiesto que en la cola de altas frecuencias los espectros experimentales eran mejor ajustados por una ley de potencias del tipo sugerido por Toba, es decir, proporcional a f^{-4}. La diferencias observadas en la bondad del ajuste para una ley del tipo f^{-5} y otra del tipo f^{-4} resultaron estadísticamente significativas para un nivel de confianza del 99.9%. En consecuencia con los resultados obtenidos, estos autores sugieren el siguiente modelo espectral

$$S_T(f) = \frac{\alpha_T g u_*}{(2\pi)^3} f^{-4} \exp\left[-\left(\frac{f}{f_p}\right)^{-4}\right] \gamma^{exp\left[-\frac{(f-f_p)^2}{2\sigma^2 f_p^2}\right]} \tag{3.48}$$

Por otra parte, con anterioridad a esta revisión, Donelan et al. (1985) sugirieron una modificación del espectro JONSWAP que incluyese una formulación del tipo propuesto por Toba (1973), para caracterizar adecuadamente los espectros experimentales registrados durante una campaña de medida realizada en el Lago Ontario. El modelo propuesto por estos autores tiene la siguiente expresión

$$S_D(f) = \frac{\alpha_D g^2}{(2\pi)^4 f_p} f^{-4} \exp\left[-\left(\frac{f}{f_p}\right)^{-4}\right] \gamma^{exp\left[-\frac{(f-f_p)^2}{2\sigma^2 f_p^2}\right]}$$

Es decir, el espectro de Donelan es una modificación del espectro JONSWAP en el cual la relación f^{-5} es reemplazada por el término f^{-4}/f_p. Nótese que el cociente 5/4 que aparece en el término exponencial del espectro JONSWAP no debe ser incluido en ésta modificación, ni en la dada por (3.48), puesto que f_p es definida como la frecuencia del pico espectral.

En el modelo $S_D(f)$, el parámetro α_D adopta la expresión

$$\alpha_D = 0.006 A_w^{-0.55} \qquad \text{para} \qquad 0.2 < A_w < 1.2 \tag{3.49}$$

donde $A_w = c_p/U_{10}$ es la *edad del oleaje*, definida como la relación entre la velocidad de fase de la componente asociada al máximo espectral y la componente de la velocidad del viento en la dirección de la onda de frecuencia f_p, medida a 10 m de altura sobre el nivel medio del mar.

Además, el factor de apuntamiento, γ, viene dado por

$$\begin{aligned} \gamma &= 1.7 && \text{para} \qquad 1.0 < A_w < 1.2 \\ \gamma &= 1.7 + 6.0 \log A_w && \text{para} \qquad 0.2 < A_w \leq 1.0 \end{aligned} \tag{3.50}$$

mientras el parámetro de anchura del pico espectral, σ, toma los valores

$$\sigma = 0.08 \left(1 + 4A_w^3\right) \qquad \text{para} \qquad 0.2 < A_w < 1.2 \tag{3.51}$$

En consecuencia, esta forma espectral depende únicamente de dos variables, la frecuencia de pico y la edad del oleaje. Además, es importante notar que A_w es una variable local. Es decir, no depende del fetch, el cual resulta generalmente dificil de determinar. Los parámetros α_D, σ y γ son funciones de la edad del oleaje exclusivamente.

Espectro Gamma

Lopatoukhin et al. (2002), consideran que el espectro Gamma constituye un modelo simple capaz de caracterizar tanto oleajes de viento como de fondo. La expresión analítica de dicho espectro viene dada por

$$S_\Gamma(f) = \frac{n}{f_p} \left(\frac{f}{f_p}\right)^{-n} \exp\left[-\left(\frac{n}{n-1}\right)\left(\frac{f}{f_p}\right)^{1-n}\right] \tag{3.52}$$

Nótese que en esta formulación la cola de altas frecuencias es asintóticamente proporcional a $-n$ y que el apuntamiento del espectro también es gobernado por el valor de n. Además, este modelo espectral posee area unidad. Es decir,

$$\int_0^\infty S_\Gamma(f)df = 1 \tag{3.53}$$

de modo que para caracterizar un espectro experimental no normalizado el modelo debe tomar la expresión

$$S_\Gamma(f) = m_0 \frac{n}{f_p}\left(\frac{f}{f_p}\right)^{-n} \exp\left[-\left(\frac{n}{n-1}\right)\left(\frac{f}{f_p}\right)^{1-n}\right] \tag{3.54}$$

Espectro Wallops

Partiendo de datos de laboratorio y de fundamentos teóricos de la dinámica del oleaje , Huang. et al. (1981) proponen una formulación espectral a la que denominan espectro Wallops y cuya expresión analítica viene dada por

$$S_W(f) = \frac{\beta g^2}{(2\pi)^4 f_p^5}\left(\frac{f}{f_p}\right)^{-n} \exp\left[-\frac{n}{4}\left(\frac{f}{f_p}\right)^{-4}\right] \tag{3.55}$$

donde β y n son parámetros que deben ser determinados experimentalmente. Dichos autores demuestran teóricamente que ambos parámetros son función de la energía total, m_0, y el número de onda de la componente frecuencial asociada al pico espectral, k_p. Es importante destacar que en este modelo el valor de la potencia que controla la pendiente del espectro en el rango de altas frecuencias no es prefijada, sino que queda determinada por el valor de n, el cual puede ser expresado en términos de las características básicas del propio espectro. En concreto,

$$n = \left|\frac{\log(\sqrt{2}\pi\S)^2}{\log 2}\right| \tag{3.56}$$

donde § es la pendiente significativa, definida como el cociente entre la raiz media cuadrática de las elevaciones de la superficie libre y la longitud de onda de la componente frecuencial asociada al pico espectral, L_p. Es decir,

$$\S = \frac{\left(\overline{\eta^2}\right)^{1/2}}{L_p} = \frac{\sqrt{m_0}}{L_p} = \frac{2\pi\sqrt{m_0}}{k_p} \tag{3.57}$$

haciendo uso de la relación de dispersión para aguas profundas

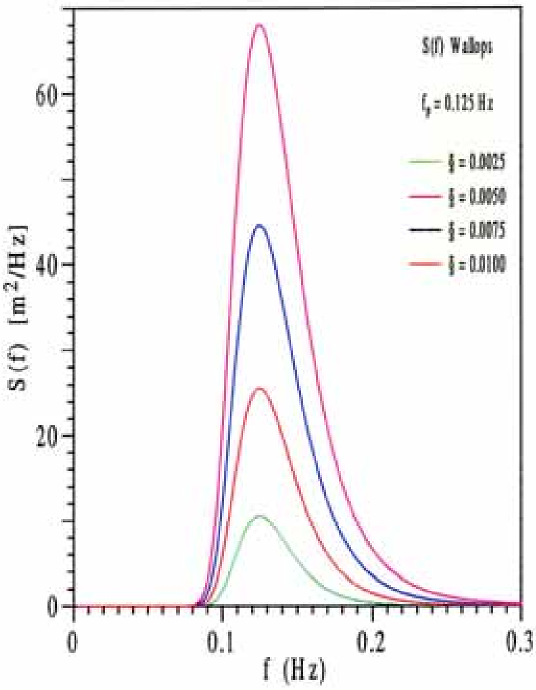

Figura 3.13: Variación del espectro Wallops en función §

$$\omega_p^2 = gk_p = \frac{2\pi g}{L_p} \tag{3.58}$$

la pendiente significativa puede ser expresada en términos del momento espectral de orden cero y la frecuencia de pico. Es decir,

$$\S = \frac{2\pi f_p^2 \sqrt{m_0}}{g} \tag{3.59}$$

Por otro lado, es posible demostrar que el parámetro β, equivalente a la constante α en el espectro de Phillips, puede ser expresado como

$$\beta = \alpha = (2\pi\S)^2 \left[\frac{n^{(n-1)/4}}{4^{(n-5)/4}}\right] \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{4}\right)} \tag{3.60}$$

En la figura 3.13 se ilustra la variación del espectro Wallops en función de la pendiente significativa.

Es interesante notar que, en particular, para $n = 5$ el parámetro del rango de saturación adopta la expresión

$$\alpha = 5(2\pi\S)^2 = \left[\frac{5(2\pi)^4}{g^2}\right] m_0 f_p^4 \tag{3.61}$$

En tal caso, el espectro Wallops se transforma en el espectro PM. Por otro lado, para $n = 4$,

$$\alpha = \frac{4}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}(2\pi\S)^2 \tag{3.62}$$

De lo anterior resulta obvio que α no es una constante universal, sino un parámetro que depende del grado de desarrollo del oleaje.

En la figura 3.14 se muestra la variación de α en función de § para valores de n en el rango $3 \leq n \leq 6$. De dicha gráfica resulta evidente que, para un valor dado de n, el valor de α aumenta con la pendiente significativa, o lo que es equivalente, con el grado de desarrollo del oleaje, puesto que § es equivalente al peralte del oleaje. Además, α también aumenta con n para un valor dado de §.

En dicha figura se muestran conjuntamente con los valores teóricos, derivados de la expresión 3.60, los valores experimentales de α obtenidos por diferentes autores en función de las condiciones de desarrollo del oleaje. Entre estos datos se encuentran los observados durante el JONSWAP (datos obtenidos de Müller, 1976). Aunque no se observa una relación bien definida entre ambos parámetros, para un n dado, es interesante observar que los valores tienden a disponerse entorno a valores de n entre $4 < n < 4.5$, aproximadamente. Además, a medida que aumenta el valor de § éstos parecen tender a valores más próximos a $n = 5$, hecho que apoya la existencia de una transición en el rango de equilibrio discutido anteriormente. Por otro lado, estos resultados sustentan aún más el hecho de que α no es un valor constante.

En definitiva, los parámetros de los que depende este modelo espectral son función de las condiciones del estado del mar, en lugar de las condiciones de viento. Es decir, el modelo depende de parámetros internos del campo de oleaje y no de parámetros externos al mismo . Por tanto, su validez no está limitada a oleajes total o parcialmente desarrollados, sino que puede aplicarse en cualquiera de estas condiciones.

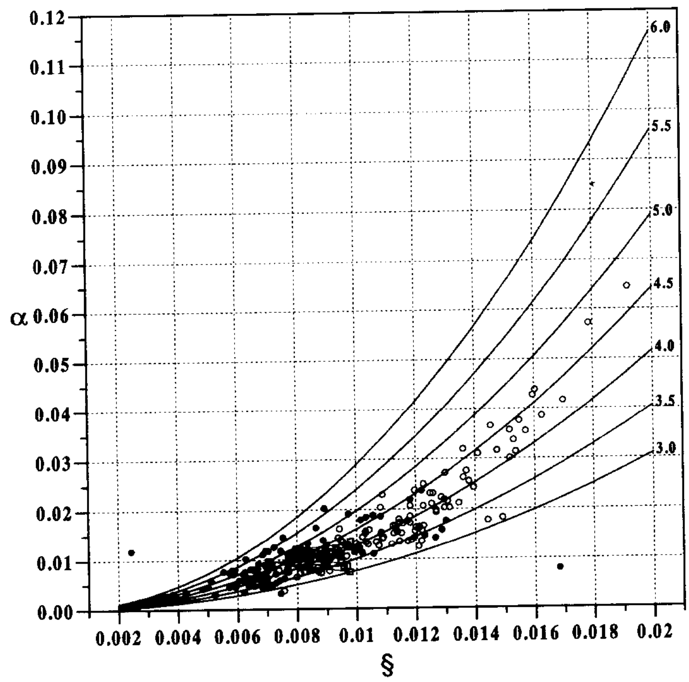

Figura 3.14: Variación del parámetro del rango de equilibrio α en función de la pendiente significativa § y la pendiente del rango de equilibrio n, según la ecuación (3.60) (lineas continuas). Valores experimentales de α en función de §, (puntos).

Espectro GLERL

Liu (1983), propuso un modelo espectral obtenido de forma totalmente empírica y cuya expresión analítica es

$$S(f) = C_1 \left(\frac{m_0}{f_p}\right) \left(\frac{f}{f_p}\right)^{-C_2} \exp\left[-C_3 \left(\frac{f}{f_p}\right)^{-C_2/C_3}\right] \tag{3.63}$$

donde C_1, C_2, C_3 son coeficientes adimensionales que pueden ser determinados a partir de parámetros espectrales dados, m_0, f_p, $S(f_p)$, y la frecuencia media de cruces por cero f_z. No obstante, mientras los parámetros espectrales, m_0 y f_p son fácilmente determinados o dados, $S(f_p)$ y f_z deben ser estimados a partir del espectro observado o a partir de relaciones empíricas.

Nótese que en este modelo, al igual que en el Wallops, el exponente de la potencia que controla el rango de equilibrio es considerado como un parámetro libre. No obstante, aunque ambos modelos presentan cierta similitud estructural, en el espectro Wallops se fija empíricamente un valor del exponente de la parte exponencial de la formulación, es decir, del término que controla la zona de bajas frecuencias, mientras en el modelo GLERL este exponente no es fijado a priori, si bién es cierto que entre ambos exponentes existe una dependencia funcional explícita. Además, aunque en ambos casos los parámetros libres se estiman a partir de parámetros derivados del registro de oleaje examinado, los procedimientos de estimación son sustancialmente diferentes.

Así, haciendo $f = f_p$, se tiene que

$$C_1 = \frac{S(f_p) f_p}{m_0} \exp(C_3) \tag{3.64}$$

Además, de la definición de m_0 y usando la función gamma con las ecuaciones (3.63) y (3.64), se obtiene una expresión que relaciona C_2 y C_3. Esto es,

$$\frac{m_0}{S(f_p) f_p} = \exp\left[C_3 + \left(1 - C_3 + \frac{C_3}{C_2}\right) \ln C_3\right] \frac{\Gamma\left(C_3 - \frac{C_3}{C_2}\right)}{C_2} \tag{3.65}$$

Adicionalmente, empleando la definición de frecuencia media de cruces por cero, definida por

$$f_z = \left[\frac{\int_0^\infty f^2 S(f) df}{\int_0^\infty S(f) df}\right]^{1/2} \tag{3.66}$$

sustituyendo en ella la expresión de $S(f)$ y empleando la función gamma se obtiene una nueva relación entre C_2 y C_3, dada por

$$\left(\frac{f_z}{f_p}\right)^2 = \exp\left[\frac{2C_3 \ln C_3}{C_2}\right] \frac{\Gamma\left(C_3 - \frac{3C_3}{C_2}\right)}{\Gamma\left(C_3 - \frac{C_3}{C_2}\right)} \tag{3.67}$$

De este modo, conociendo los parámetros $m_0, f_p, S(f_p)$ y f_z, es posible obtener C_2 y C_3 resolviendo el sistema de ecuaciones constituido por (3.65) y (3.67), para finalmente determinar C_1 con la ecuación (3.64). No obstante, la metodología para estimar C_2 y C_3 no es simple. Liu (1983) presentó un procedimiento de prueba-error que no resulta eficiente. Posteriormente, Liu (1984) plantea la resolución de dicho sistema en la sección de problemas y soluciones de la revista SIAM review, que es respondida por Fullerton (1984), proponiendo una aproximación más eficiente basada en un procedimiento iterativo empleando el método de Newton para resolver la ecuación (3.65) para C_3 con un valor inicial de C_2. Este valor es entonces sustituido en la siguiente ecuación, que resulta de combinar las ecuaciones (3.65) y (3.67),

$$C_2 = \exp\left[C_3 + \left(1 - C_3 + \frac{3C_3}{C_2}\ln C_3\right)\right]\frac{\Gamma\left(C_3 - \frac{3C_3}{C_2}\right)}{D} \tag{3.68}$$

donde D es

$$D = \frac{\left(f_z/f_p\right)^2 m_0}{S(f_p)f_p} \tag{3.69}$$

La C_2 es calculada de forma iterativa a partir de (3.68) hasta alcanzar la convergencia.

Tras analizar más de 2000 espectros medidos experimentalmente en el Lago Superior, con alturas de ola desde 0.2 hasta 8 metros aproximadamente, Liu (1983) derivó las siguientes relaciones empíricas para aguas profundas

$$f_z = 0.82(f_p)^{0.74} \tag{3.70}$$

$$S(f_p) = 17.0(m_0)^{1.13} \tag{3.71}$$

Es importante notar que, independientemente de su validez, estas relaciones no son dimensionalmente homogéneas.

Espectro Generalizado

La expresión de todos los espectros comentados previamente puede ser derivada a partir de una expresión estándar del tipo

$$S(f) = Af^{-n}\exp\left[-Bf^{-m}\right] \tag{3.72}$$

donde A, B, n y m son parámetros libres, y cuya integral incluye una función gamma. Así, el area total bajo dicho espectro viene dado por

$$m_0 = \int_0^\infty \left[A f^{-n} \exp\left[-B f^{-m} \right] \right] df = \frac{A}{m} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{m}\right)}{B^{\left(\frac{n-1}{m}\right)}} \tag{3.73}$$

Por consiguiente, admitiendo la hipótesis de anchura de banda espectral estrecha, se tiene que $H_s = 4\sqrt{m_0}$. Es decir

$$H_s = 4\sqrt{\frac{A}{m} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{m}\right)}{B^{\left(\frac{n-1}{m}\right)}}} \tag{3.74}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que la primera derivada de dicho espectro, dada por,

$$\frac{\partial S(f)}{\partial f} = \left\{ -Anf^{(-n-1)} \exp\left[-Bf^{-m} \right] \right\} + \left\{ ABmf^{(-n-m-1)} \exp\left[-Bf^{-m} \right] \right\} \tag{3.75}$$

debe ser nula para $f = f_p$, se obtiene que

$$B = \frac{n}{m} f_p^m \tag{3.76}$$

de modo que,

$$A = m_0 m \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{\left(\frac{n-1}{m}\right)}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{m}\right)} f_p^{n-1} \tag{3.77}$$

por lo que el espectro resultante puede ser expresado como

$$S(f) = m_0 m \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{\left(\frac{n-1}{m}\right)}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{m}\right)} f_p^{n-1} f^{-n} \exp\left[-\frac{n}{m} \left(\frac{f}{f_p} \right)^{-m} \right] \tag{3.78}$$

Nótese que, haciendo $n = m + 1$, el espectro dado por (3.72) adopta la expresión

$$S(f) = m_0 \left\{ (m+1) f_p^m f^{-(m+1)} \exp\left[-\left(\frac{m+1}{m} \right) \left(\frac{f}{f_p} \right)^{-m} \right] \right\} \tag{3.79}$$

de donde, haciendo $l = m + 1$, se tiene

$$S(f) = m_0 \left\{ \frac{l}{f_p} \left(\frac{f}{f_p} \right)^{-l} \exp\left[-\left(\frac{l}{l-1} \right) \left(\frac{f}{f_p} \right)^{1-l} \right] \right\} \tag{3.80}$$

Es decir, el espectro resultante es el espectro $S_\Gamma(f)$, dado por (3.54). Este espectro que ha sido empleado por Davidan (1966) con $l = 6$,

$$S(f) = \frac{6m_0}{f_p}\left(\frac{f}{f_p}\right)^{-6} \exp\left[-\left(\frac{6}{5}\right)\left(\frac{f}{f_p}\right)^{-5}\right] \tag{3.81}$$

para caracterizar oleajes de fondo, obteniendo resultados adecuados para registros experimentales de oleaje en los cuales $\bar{H}/g\bar{T} \leq 0.00125$.

En general, los momentos espectrales de orden r, para el modelo (3.72) vienen dados por

$$m_r = \int_0^\infty f^r S(f)df = \frac{A}{m}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1-r}{m}\right)}{B^{\left(\frac{n-1-r}{m}\right)}} \tag{3.82}$$

De esta expresión se derivan las siguientes igualdades para los periodos característicos $T_e = T_{-1,0}$, $\bar{T} = T_{0,1}$, $T_z = T_{0,2}$, y $T_c = T_{2,4}$,

$$T_{-1,0} = \frac{m_{-1}}{m_0} = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{m}\right)}\left(\frac{m}{n}\right)^{1/m} T_p \tag{3.83}$$

$$T_{0,1} = \frac{m_0}{m_1} = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{m}\right)}\left(\frac{m}{n}\right)^{1/m} T_p \tag{3.84}$$

$$T_{0,2} = \left(\frac{m_0}{m_2}\right)^{1/2} = \left[\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-3}{m}\right)}\right]^{1/2}\left(\frac{m}{n}\right)^{1/m} T_p \tag{3.85}$$

$$T_{2,4} = \left(\frac{m_2}{m_4}\right)^{1/2} = \left[\frac{\Gamma\left(\frac{n-3}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-5}{m}\right)}\right]^{1/2}\left(\frac{m}{n}\right)^{1/m} T_p \tag{3.86}$$

Es decir, en general, los periodos característicos del oleaje con este tipo de espectro pueden ser expresados como

$$T_{i,j} = \left(\frac{m_i}{m_j}\right)^{1/(j-i)} = \left[\frac{\Gamma\left(\frac{n-(i+1)}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-(j+1)}{m}\right)}\right]^{1/(j-i)}\left(\frac{m}{n}\right)^{1/m} T_p \tag{3.87}$$

donde el periodo del pico espectral viene dado por

$$T_p = \left(\frac{n}{mB}\right)^{1/m} \tag{3.88}$$

En el caso particular de $n = 5$ y $m = 4$, los momentos espectrales más usuales $(r = 0, 1, 2)$ vienen dados por

$$\begin{aligned} m_0 &= \tfrac{A}{4B} \\ m_1 &= \tfrac{A}{4B^{3/4}}\Gamma\left(\tfrac{3}{4}\right) \\ m_2 &= \tfrac{A}{4}\sqrt{\tfrac{\pi}{B}} \end{aligned} \tag{3.89}$$

Nótese que para m_4, que físicamente representa la aceleración media cuadrática de las elevaciones de la superficie libre en un punto dado, aparecen problemas analíticos,

$$m_4 = \frac{A}{4}\Gamma(0) \tag{3.90}$$

puesto que la función $\Gamma(x)$ no esta definida en $x = 0, -1, -2, \cdots$. Para aliviar este problema, este momento espectral es evaluado introduciendo una frecuencia de corte superior f_c, de forma que

$$m_4 = \int_0^{f_c} f^4 S(f) df \tag{3.91}$$

donde $f_c = k f_p$, siendo k una constante tomada como $k > 3$.

Combinando los momentos espectrales de orden 0, 1 y 2, se obtienen las siguientes expresiones para la frecuencia media, $\bar{f}$, y la frecuencia media de pasos por cero, f_z,

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \tfrac{m_1}{m_0} = \Gamma\left(\tfrac{3}{4}\right) B^{1/4} \\ f_z &= \sqrt{\tfrac{m_2}{m_0}} = (\pi B)^{1/4} \end{aligned} \tag{3.92}$$

Procediendo como en (3.75). Es decir, haciendo $dS(f)/df = 0$ se obtiene la frecuencia del pico espectral como

$$f_p = \left(\frac{4B}{5}\right)^{1/4} \tag{3.93}$$

Espectro de Bretschneider

A diferencia de los modelos espectrales considerados previamente el espectro derivado por Bretschneider (1959, 1963) no preasume una forma espectral determinada. Este espectro fue obtenido partiendo estrictamente de consideraciones energéticas y de las propiedades estadísticas del oleaje. En particular, se consideran las siguientes variables normalizadas

$$\eta = \frac{H}{\bar{H}} \quad ; \quad \tau = \frac{T}{\bar{T}} \quad ; \quad \lambda = \frac{L}{\bar{L}} \tag{3.94}$$

donde H, T y L son la altura, el periodo y la longitud de onda, definidos mediante el criterio de pasos ascendentes por cero, y $\bar{H}, \bar{T}, \bar{L}$ los correspondientes valores medios. Se admite que las alturas de ola siguen una distribución de Rayleigh. Es decir,

$$p(\eta) = \frac{\pi}{2}\eta \exp\left[-\frac{\pi}{4}\eta^2\right] \tag{3.95}$$

Además, el autor demuestra experimentalmente que las longitudes de onda pueden ser caracterizadas también mediante una distribución de Rayleigh. Es decir,

$$p(\lambda) = \frac{\pi}{2}\lambda \exp\left[-\frac{\pi}{4}\lambda^2\right] \tag{3.96}$$

Haciendo uso de la relación de dispersión para ondas gravitatorias en aguas profundas, según la cual

$$\lambda \propto \tau^2 \tag{3.97}$$

admite una distribución de Rayleigh para los periodos al cuadrado, de forma que

$$p(\tau) = 2.7\tau^3 \exp\left[-0.675\tau^4\right] \tag{3.98}$$

Por otro lado, dado que en ese momento no existía modelo alguno para caracterizar la distribución conjunta de alturas y longitudes de onda (o periodos) y teniendo en cuenta que entre ambas variables existe una cierta dependencia, expresa dicha distribución conjunta como

$$p(\eta, \lambda) = p(\eta)p_\eta(\lambda) \tag{3.99}$$

donde $p_\eta(\lambda)$ es la función de densidad de probabilidad condicionada de λ, dada η. Puesto que la probabilidad condicionada $p_\eta(\lambda)$ era desconocida, observa que el coeficiente de correlación entre ambas variables adopta la siguiente expresión

$$r(\eta, \lambda) = \frac{\overline{\eta\lambda} - 1}{\left[\left(\overline{\eta^2} - 1\right)\left(\overline{\lambda^2} - 1\right)\right]^{1/2}} \tag{3.100}$$

En el caso particular en que $r = 0$ se tiene que

$$p(\eta, \lambda) = p(\eta)p(\lambda) \tag{3.101}$$

Es decir,

$$p(\eta, \lambda) = \frac{\pi^2}{4}\eta \exp\left[-\frac{\pi}{4}\eta^2\right]\lambda \exp\left[-\frac{\pi}{4}\lambda^2\right] \tag{3.102}$$

o, en términos de η y τ,

$$p(\eta, \tau) = 1.35\pi \exp\left[-\frac{\pi}{4}\eta^2\right]\tau^3 \exp\left[-0.675\tau^4\right] \tag{3.103}$$

A partir de esta última distribución, y teniendo en cuenta que, por definición, la función de densidad espectral representa la esperanza matemática del contenido energético (varianza) en un intervalo infinitesimal $(\lambda, \lambda + d\lambda)$

$$E[\eta^2]_\tau = \int_0^\infty \eta^2 p(\eta, \tau)d\eta = p(\tau)\int_0^\infty \eta^2 p_\tau(\eta)d\eta \tag{3.104}$$

de donde es posible obtener la siguiente expresión para el espectro de frecuencias

$$S(f) = \frac{3.434\overline{H}^2}{\overline{T}^4} f^{-5} \exp\left[-0.675\left(\frac{1}{\overline{T}f}\right)^4\right] \tag{3.105}$$

Este modelo espectral puede ser expresado en términos de la altura de ola significativa y de la frecuencia de pico. Sin embargo, para ello es necesario tener en mente que el area bajo el espectro es ocho veces el correspondiente a un espectro definido del modo usual para el oleaje y que el periodo medio, $\overline{T}$, ha sido definido a partir de un espectro de periodos, de forma que su valor no es igual a $1/\bar{f}$ con $\bar{f}$ definido de la forma usual a partir de un espectro de frecuencias

$$\overline{T}_T = \frac{\int_0^\infty T S(T) dT}{\int_0^\infty S(T) dT} \neq \overline{T}_f = \frac{\int_0^\infty f S(f) df}{\int_0^\infty S(f) df} \tag{3.106}$$

No obstante, modificando el área y el periodo medio para tener en cuenta estos hechos, el espectro de Bretschneider puede expresarse como

$$S(f) = 0.278 \frac{\bar{f}^4}{f^5} \overline{H}^2 \exp\left[-0.437 \left(\frac{\bar{f}}{f}\right)^4\right] \tag{3.107}$$

de donde, teniendo en cuenta las relaciones del periodo y altura medios con la altura de ola significativa y el periodo de pico para un espectro de banda estrecha, dadas por

$$\bar{f} = 1.3 f_p \qquad ; \qquad \overline{H} = 0.625 H_s \tag{3.108}$$

el espectro de Bretschneider adquiere la expresión

$$S_B(f) = \frac{5}{16} \frac{f_p^4}{f^5} H_s^2 \exp\left[-\frac{5}{4} \left(\frac{f_p}{f}\right)^4\right] \tag{3.109}$$

Es interesante notar que este espectro es equivalente al espectro PM, pero que esta equivalencia es fortuita y consecuencia de haber asumido una correlación nula entre las alturas y los periodos del oleaje y una distribución de Rayleigh para los periodos, hipótesis razonables en su momento pero no apoyadas por los resultados experimentales posteriores. Otros nombres que recibe este espectro son los de espectro de Pierson-Moskowitz modificado o de Pierson-Moskowitz Generalizado, aunque este fué propuesto con anterioridad al espectro original de Pierson y Moskowitz (1964). Nótese que el espectro PM y el de Bretschneider son iguales haciendo

$$\alpha = \left(\frac{5(2\pi)^4}{16\, g}\right) f_p^4 H_s^2 \tag{3.110}$$

Es digno de destacar que el modelo espectral de Bretschneider permite caracterizar adecuadamente el espectro de oleaje bajo numerosas condiciones y es bastante utilizado en el diseño de estructuras marinas. Además, empleando ésta formulación espectral es posible generar familias de espectros conteniendo multiples espectros posibles para una severidad del mar, en términos de H_s, específica.

Krylov (1966) obtuvo un modelo espectral equivalente al propuesto por Bretschneider empleando una metodología similar, es decir, sin recurrir a la teoría de la semejanza y sin imponer una forma específica para el rango de altas frecuencias. Sin embargo, a diferencia de Bretschneider, que tomó como punto de partida la distribución conjunta de alturas y periodos, Krylov consideró unicamente una distribución de periodos dada por

$$p(T) = 4\Gamma^4\left(\frac{5}{4}\right)\frac{1}{\overline{\overline{T}}}\left(\frac{T}{\overline{\overline{T}}}\right)^3 \exp\left[-\Gamma^4\left(\frac{5}{4}\right)\left(\frac{T}{\overline{\overline{T}}}\right)^4\right] \tag{3.111}$$

Puesto que el periodo y la frecuencia poseen una dependencia funcional, se tendrá que

$$p(T)dT = p(f)df \tag{3.112}$$

de modo que la función de densidad de probabilidad para la frecuencia adopta la forma

$$p(f) = 4\Gamma^4\left(\frac{5}{4}\right)\bar{f}^4 f^{-5} \exp\left[-\Gamma^4\left(\frac{5}{4}\right)\left(\frac{\bar{f}}{f}\right)^4\right] \tag{3.113}$$

Así, admitiendo que para un proceso de banda estrecha la función de densidad de probabilidad puede ser interpretada como un espectro de frecuencias, normalizada con respecto a la varianza, esto es

$$p(f) = \frac{S(f)}{m_0} \tag{3.114}$$

se tiene que

$$S(f) = m_0\, 4\Gamma^4\left(\frac{5}{4}\right)\bar{f}^4 f^{-5} \exp\left[-\Gamma^4\left(\frac{5}{4}\right)\left(\frac{\bar{f}}{f}\right)^4\right] \tag{3.115}$$

Haciendo nula la primera derivada de $S(f)$ se obtiene que la frecuencia del pico espectral es

$$f_p = \left(\frac{4}{5}\right)^{1/4} \Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \bar{f} \qquad (3.116)$$

de modo que

$$S(f) = 5\, m_0 f_p^4 f^{-5} \exp\left[-\frac{5}{4}\left(\frac{f_p}{f}\right)^4\right] \qquad (3.117)$$

En consecuencia, haciendo $m_0 = H_s^2/16$, se obtiene exactamente el mismo espectro que el sugerido por Bretschneider, dado por la ecuación (3.109).

En definitiva, desde comienzos de los años 1950 hasta la actualidad se han propuesto diferentes formulaciones espectrales para el oleaje de viento en aguas profundas, siguiendo diferentes procedimientos, pero que presentan la misma forma básica, expresando la función de densidad espectral como el producto de una potencia de la frecuencia y un término exponencial, en el que la frecuencia también está afectada por una potencia. Así, de forma genérica, todos estos modelos pueden ser expresados mediante la ecuación

$$S(f) = A f^{-n} \exp\left[-B f^{-m}\right] \qquad (3.118)$$

No obstante, la principal diferencia existente entre los diferentes modelos reside en los valores asignados a los coeficientes y a los exponentes A, B, m y n. En este sentido, los diferentes modelos espectrales muestran una variabilidad considerable, tal como se refleja en la tabla 3.3 , en la cual se dan los valores de dichos coeficientes para los modelos examinados en esta sección, así como para otros no tratados que pueden ser consultados en las referencias citadas en la tabla.

Es de destacar que las comentadas variabilidad e incertidumbre, en relación a los valores de los coeficientes y los exponentes, queda patente en la existencia de modelos en los cuales algunos de éstos, o todos, son considerados como parámetros libres, como el modelo Wallops, el GLERL, y el Ochi-Hubble, que no ha sido comentado en esta sección por haber sido propuesto específicamente para caracterizar oleajes bimodales, y que será analizado en detalle en el próximo capítulo.

Tabla 3.3: Coeficientes de modelos espectrales de oleaje de viento según el modelo generalizado (3.118)

Modelo	A	B	n	m
Pierson y Moskowitz (*ref.[169]*)	$0.0081(2\pi)^{-4}g^2$	$-0.74(2\pi U_{19.5}/g)^{-4}$	5	4
Bretschneider (*ref.[21]*)	$(5/16)f_p^4 H_s^2$	$(5/4)f_p^4$	5	4
Neumann (*ref.[148]*)	$0.39(2\pi)^{-1}H_s^2\overline{T}^{-5}$	$1.767\overline{T}^{-2}$	6	2
JONSWAP (*ref.[66]*)	$(\alpha g^2/(2\pi)^4)\gamma^{\exp[(f/f_p-1)/2\sigma^2]}$	$(5/4)f_p^4$	5	4
Donelan (*ref.[38]*)	$(\alpha g^2/(2\pi)^4 f_p)\gamma^{\exp[(f/f_p-1)/2\sigma^2]}$	f_p^4	4	4
Ochi-Hubble (*ref.[151]*)	$H_s^2[((4\lambda+1)/4)f_p^4]^\lambda/4\Gamma(\lambda)$	$((4\lambda+1)/4)f_p^4$	$4\lambda+1$	4
Wallops (*ref.[72]*)	$\beta g^2/(2\pi)^4 f_p^{n-5}$	$(n/4)f_p^4$	n	4
GLERL (*ref.[109]*)	$C_1 m_0 f_p^{C_2-1}$	$C_3 f_p^{C_2/C_3}$	C_2	C_2/C_3
Gamma (*ref.[121]*)	$m_0 n f_p^{n-1}$	$(n/(n-1))f_p^{n-1}$	n	$1-n$
Krylov (*ref.[100]*)	$5m_0 f_p^4$	$(5/4)f_p^4$	7	4
Davidan (*ref.[35]*)	$6.5m_0 f_p^{5.5}$	$1.18f_p^{5.5}$	6.5	5.5

3.1.4 Caracterización de la función de autocorrelación

La inmensa mayoría de los estudios de oleaje abordan el estudio de dicho fenómeno examinando sus propiedades en el dominio temporal y mediante su transformación al dominio frecuencial, para analizar las características de la función de densidad espectral. Sin embargo, ya se ha comentado en capítulos anteriores que el análisis de este proceso en el dominio de los desfases permite obtener información relevante sobre su estructura, que difícilmente puede deducirse en los dominios temporal o frecuencial. En particular, la función de autocorrelación resulta de gran interés para examinar las características del fenómeno que tienen que ver con su "memoria", tales como el fenómeno del agrupamiento. Además, gran parte de la información obtenida a partir del espectro de frecuencias puede ser obtenida también mediante la función de autocorrelación, dado que, tal como se vió en la sección [2.1] existe una relación funcional entre ambas, dada por el teorema de Wiener-Kintchine (2.46).

La función de autocorrelación representa la dependencia existente entre valores del proceso separados por un intervalo temporal, o desfase, τ. Este hecho se deduce inmediatamente de su definición estricta que, para un proceso estacionario de media nula, viene dada por

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\eta(t)\eta(t+\tau))\, p\left(\eta(t), \eta(t+\tau); \tau\right) d\eta_t d\eta_{t+\tau} \tag{3.119}$$

donde, para un proceso Gaussiano, la función de densidad de probabilidad bidimensional de la ecuación anterior adopta la siguiente expresión

$$\begin{aligned} p\left(\eta(t), \eta(t+\tau); \tau\right) \ = \ & \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2(\tau)}} \\ & \exp\left\{\frac{-1}{2\sigma^2(1-\rho^2(\tau))}\left[\eta(t)^2 - 2\rho(\tau)\eta(t)\eta(t+\tau) + \eta(t+\tau)^2\right]\right\} \end{aligned} \tag{3.120}$$

donde $\rho(\tau) = R(\tau)/\sigma^2$.

En el caso particular de una señal sinusoidal con fase aleatoria, uniformemente distribuida en $(0-2\pi)$,

$$x_k(t) = A \operatorname{sen}(2\pi f_0 t + \phi_k) \tag{3.121}$$

donde

$$p(\phi) = \frac{1}{2\pi} \quad ; \qquad 0 < \phi < 2\pi \tag{3.122}$$

la función de autocorrelación (FAC) viene dada por

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(2\pi f_0 t + \phi) \operatorname{sen}(2\pi f_0 (t+\tau) + \phi)\, d\phi \tag{3.123}$$

Evaluando la integral se tiene que

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) \tag{3.124}$$

Es decir, la FAC de una señal sinusoidal es una señal cosenoidal con amplitud equivalente a la amplitud de la señal al cuadrado.

Considerando el modelo de oleaje lineal Gaussiano empleado en este trabajo (1.79), es decir,

$$\eta(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(2\pi f_n t + \phi_n) \tag{3.125}$$

Resulta inmediato demostrar que la FAC correspondiente vendrá dada por

$$R(\tau) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\overline{a_n^2}}{2} \cos(2\pi f_n t) \tag{3.126}$$

de donde se deduce que para un proceso de anchura de banda espectral arbitraria, la estructura de esta función será tanto más irregular cuanto mayor sea el ancho de banda. Además, dado que esta función proporciona una medida de la correlación existente entre valores separados por un cierto desfase, ésta se atenuará tanto más rápido cuanto más amplio sea el ancho de banda espectral. En particular, para un ruido blanco, la FAC será

$$R(\tau) = \frac{a}{2}\delta(\tau) \tag{3.127}$$

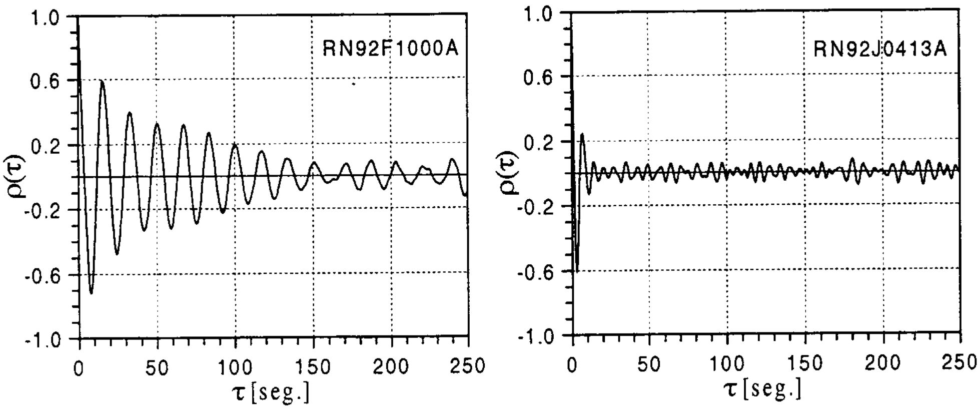

Figura 3.15: Funciones de autocorrelación correspondientes a un oleaje de fondo (a) y a un oleaje de viento (b)

Es decir, para un ruido blanco, la FAC sólo toma el valor $a/2$ en $\tau = 0$ y se hace cero para los restantes valores. En la situación contraria, es decir, en el caso de una señal puramente periódica, tal como se observó anteriormente, la FAC no se atenúa nunca.

En función de lo anteriormente comentado resulta evidente que en el caso del oleaje, la FAC presentará una evolución más irregular y se atenuará más rápidamente para un oleaje de viento que para un oleje de fondo. Este hecho se observa claramente en la figura 3.15, en la cual se muestran las funciones de autocorrelación correspondientes a un oleaje de fondo (a) y a un oleaje de viento (b).

Teniendo en cuenta el teorema de Wiener-Kintchine (2.46), resulta obvio que la FAC de un proceso dado puede ser obtenida a pertir de su función de densidad espectral. En consecuencia, también es posible obtener la expresión analítica correspondiente a un modelo espectral teórico dado (McCormick, 1983). Así, partiendo de la expresión genérica introducida en la sección anterior para los modelos espectrales de oleaje, dada por

$$S(\omega) = A\omega^{-a} \exp\left[-B\omega^{-b}\right] \tag{3.128}$$

donde A, B, a y b son parámetros y constantes cuyas expresiones y valores, se dan en la tabla 3.3, para diferentes modelos espectrales.

Haciendo uso del teorema de Wiener-Kintchine, la función de autocorrelación asociada a una formulación espectral dada puede ser obtenida como

$$R(\tau) = \int_0^\infty S(\omega)\cos(\omega\tau)d\omega \tag{3.129}$$

de modo que

$$R(\tau) = \int_0^\infty A\omega^{-a}\exp\left[-B\omega^{-b}\right]\cos(\omega\tau)d\omega \tag{3.130}$$

Sin embargo, esta integral no resulta simple de evaluar debido a que la función $\cos(\omega\tau)$ tiene un mal comportamiento en $\omega = \infty$, mientras que la expresión del espectro del oleaje presenta una singularidad esencial en $\omega = 0$. Para evitar estos problemas, la integral puede ser separada en dos partes, tal como sigue

$$\begin{aligned} R(\tau) &= A\left\{\int_0^1 \omega^{-a}\exp\left[-B\omega^{-b}\right]\cos(\omega\tau)d\omega + \int_1^\infty \omega^{-a}\exp\left[-B\omega^{-b}\right]\cos(\omega\tau)d\omega\right\} \\ &= A\left(I_1 + I_2\right) \end{aligned} \tag{3.131}$$

donde I_1 e I_2 representan a la primera y segunda integral, respectivamente.

La resolución de estas dos integrales puede lograrse empleando un desarrollo del término coseno, para I_1, y de la función exponencial, para I_2. Así, para I_1,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \omega^{-a}\exp\left[-B\omega^{-b}\right]\cos(\omega\tau)d\omega \\ &= \int_0^1 \omega^{-a}\exp\left[-B\omega^{-b}\right]\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}(\omega\tau)^{2m}\right]d\omega \\ &= \int_0^1 \exp\left[-B\omega^{-b}\right]\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}\tau^{2m}\omega^{2m-a}\right]d\omega \end{aligned} \tag{3.132}$$

haciendo el cambio

$$\omega = (B/\xi)^{1/b} \tag{3.133}$$

la integral I_1 adopta la forma

$$I_1 = \frac{B^{(1-a)/b}}{b} \int_B^\infty e^{-\xi} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \left(\tau B^{1/b}\right)^{2m} \xi^{(a-b-2m-1)/b} \right] d\xi \qquad (3.134)$$

El resultado de la integración de la ecuación (3.134) depende de los valores de a y b.

A continuación se consideran los casos en los que ($a = 6, b = 2$) y ($a = 5, b = 4$), es decir, el espectro de Neumann y aquellos como el de Bretschneider, PM, etc.

Caso 1: $a = 6$, $b = 2$

En esta situación, la ecuación (3.134) adopta la forma

$$\begin{aligned} I_1 &= \tfrac{1}{2B^{5/2}} \int_B^\infty e^{-\xi} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^m}{(2m)!} \left(\tau B^{1/2}\right)^{2m} \xi^{(3-2m)/2} \right] d\xi \\ &= \tfrac{1}{2B^{5/2}} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^m}{(2m)!} \left(\tau B^{1/2}\right)^{2m} \Gamma\left(\tfrac{5}{2} - m, B\right) \right] \end{aligned} \qquad (3.135)$$

donde $\Gamma(5/2 - m, B)$ es una función gamma incompleta.

Caso 2: $a = 5$, $b = 4$

En este caso, se tiene que

$$\begin{aligned} I_1 &= \tfrac{1}{4B} \int_B^\infty e^{-\xi} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^m}{(2m)!} \left(\tau B^{1/4}\right)^{2m} \xi^{-m/2} \right] d\xi \\ &= \tfrac{1}{4B} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^m}{(2m)!} \left(\tau B^{1/4}\right)^{2m} \Gamma\left(1 - \tfrac{m}{2}, B\right) \right] \end{aligned} \qquad (3.136)$$

En la integral I_2 de la ecuación (3.131) el término exponencial puede ser desarrollado para obtener

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_1^\infty \omega^{-a} \exp\left[-B\omega^{-b}\right] \cos(\omega\tau) d\omega \\ &= \int_1^\infty \left[\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^n}{n!} B^n \omega^{-(a+bn)} \right] \cos(\omega\tau) d\omega \\ &= \tau^{a-1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^n}{n!} B^n C\left(\tau, 1 - a - bn\right) \right] \end{aligned} \qquad (3.137)$$

donde $C(\quad)$ es una integral de Fresnel generalizada.

Aplicando nuevamente la transformación (3.133) a los dos casos considerados previamente se obtiene

Caso 1: $a = 6$, $b = 2$

$$I_2 = \tau^5 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B^n C\left(\tau, -5-2n\right) \right] \tag{3.138}$$

Caso 2: $a = 5$, $b = 4$

$$I_2 = \tau^4 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B^n C\left(\tau, -4-4n\right) \right] \tag{3.139}$$

En consecuencia, combinando las ecuaciones (3.131), (3.135) y (3.138) se tiene la siguiente expresión para la función de autocorrelación asociada al espectro de Neumann,

$$\begin{aligned} R(\tau) \;=\; A \Bigg\{ & \tfrac{1}{2B^{5/2}} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^m}{(2m)!} \left(\tau B^{1/2}\right)^{2m} \Gamma\left(\tfrac{5}{2} - m, B\right) \right] \\ & + \tau^5 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^n}{n!} B^n C\left(\tau, -5-2n\right) \right] \Bigg\} \end{aligned} \tag{3.140}$$

Del mismo modo, combinando las ecuaciones (3.131), (3.136) y (3.139) se obtiene la expresión de la función de autocorrelación asociada a los espectros del tipo PM, dada por

$$\begin{aligned} R(\tau) \;=\; A \Bigg\{ & \tfrac{1}{4B} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^m}{(2m)!} \left(\tau B^{1/4}\right)^{2m} \Gamma\left(1 - \tfrac{m}{2}, B\right) \right] \\ & + \tau^4 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^n}{n!} B^n C\left(\tau, -4-4n\right) \right] \Bigg\} \end{aligned} \tag{3.141}$$

La evaluación de estos modelos teóricos requiere calcular la función Gamma incompleta, cuya expresión es

$$\Gamma(p,q) = \int_q^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx \tag{3.142}$$

y la integral de Fresnel generalizada, dada por

$$C(p,q) = \int_{p}^{\infty} x^{q-1}\cos(x)dx \tag{3.143}$$

Estas integrales pueden ser evaluadas numéricamente (e.g., Abramowitz y Stegun, 1970).

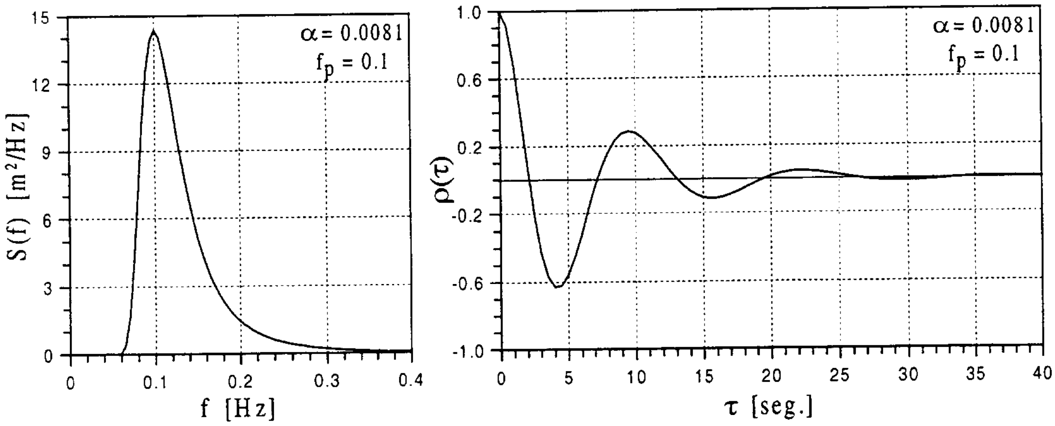

Figura 3.16: Espectro PM y su función de autocorrelación evaluada analíticamente

En la figura 3.16 se muestran, a modo de ejemplo, el espectro y la FAC correspondientes al modelo PM, respectivamente.

Con el fin de poder realizar un estudio comparativo, las características específicas de la FAC de los campos de oleaje de viento y de fondo serán examinadas en detalle en el capítulo [5], de forma conjunta con las correspondientes a los campos de oleaje resultantes de la combinación de un sistema de oleaje de viento y otro de fondo.

3.2 Caracterización del oleaje de fondo

Tal como se comentó en la sección [1.3], la acción del viento sobre la superficie del océano genera una amplia gama de ondas con diferentes frecuencias y amplitudes, dando lugar a una estructura enormemente compleja de olas con crestas cortas, propagándose en diferentes direcciones dentro del área de generación, y con alturas y periodos sustancialmente variables. Sin embargo, las ondas más cortas poseen un abanico más amplio de direcciones que el que presentan las ondas más largas, las cuales están más alineadas con la velocidad media del viento. Así, para un periodo, o frecuencia, dado hay una dirección que contiene las olas más altas. En consecuencia, a un punto situado fuera de la zona de generación pero aproximadamente alineado con el eje del fetch podrán llegar prácticamente ondas de todos los periodos, incluyendo las más altas y largas. Por el contrario, a un punto que forme un ángulo considerable con esta alineación llegará una mayor proporción de ondas de periodo corto, pero apenas llegarán ondas de periodo largo.

En el frente del fetch la concentración de energía por unidad de área es notablemente alta. Sin embargo, en este punto las ondas poseen multitud de direcciones de propagación, de modo que una vez fuera de la zona de generación, cada una de ellas continuará propagándose en la misma dirección que tenía inicialmente, produciéndose una considerable dispersión direccional de la energía. Estas ondas siguen trayectorias fundalmente radiales desde el fetch, en realidad la energía se propaga siguiendo círculos máximos. En consecuencia, a un punto sustancialmente alejado del fetch sólo llegarán ondas cuya dirección está contenida dentro de un pequeño rango de direcciones, tal como se muestra en la figura 3.17. Además, las ondas que llegan a ese punto se alinean cada vez más entre sí, dando lugar a un campo de oleaje con crestas mucho más largas que dentro de la zona de generación. Naturalmente, esta alineación de los frentes de onda es mayor cuanto más alejado se encuentre el punto de observación. No obstante, para distancias mayores que dos o tres veces el ancho del fetch, la alineación es tal que la reducción del abanico de direcciones que se propagan en esa dirección es extremadamente pequeña. Además de este efecto, de la figura 3.17 también resulta evidente que la cantidad de energía

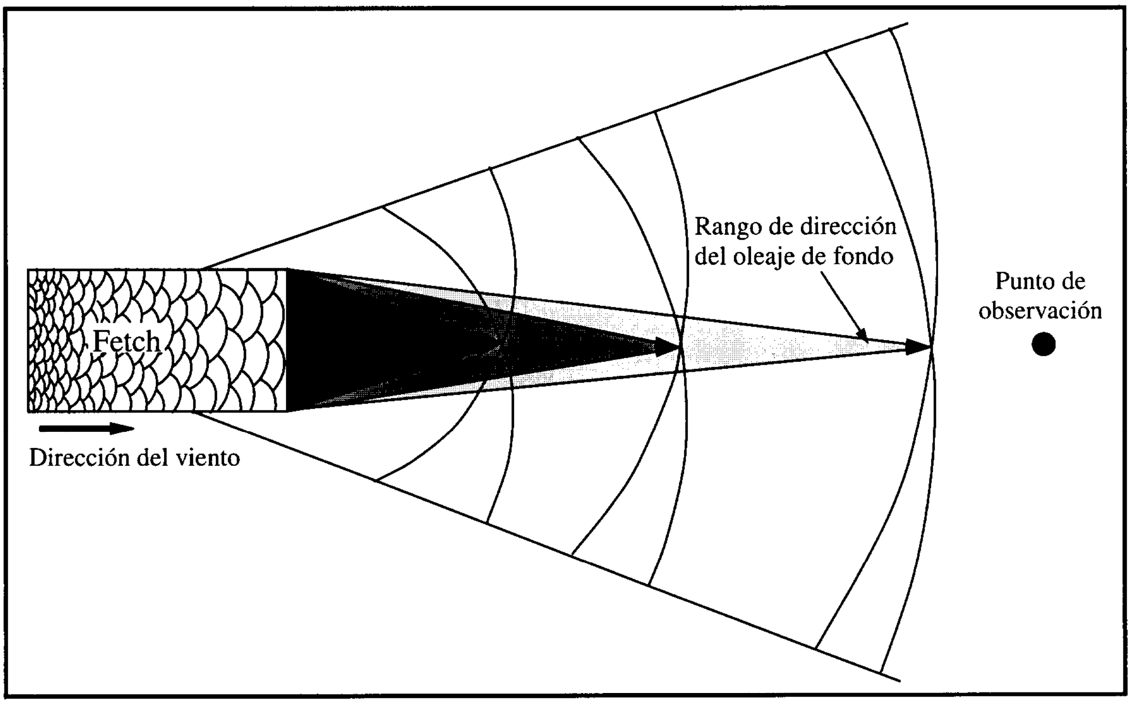

Figura 3.17: Ilustración esquemática de los procesos de dispersión y filtrado direccional del swell

por unidad de frente de onda disminuye respecto a la existente en el frente del fetch, tanto más cuanto más se alejan los mismos de dicha zona.

Por otro lado, a medida que el oleaje se propaga fuera del fetch, las diferentes componentes tienden a segregarse en función de su longitud de onda, dadas sus características dispersivas de la propagación del oleaje en aguas profundas, de modo que las de mayor longitud de onda se adelantan al grueso del tren de oleaje y las más cortas quedan rezagadas. Así, después de atravesar una zona de transición, el oleaje presenta una apariencia más "regular", o menos caótica, con frentes de onda progresivamente más largos, a pesar de contener aún un amplio rango de frecuencias, que disminuye progresivamente a medida que aumenta la distancia sobre la que se propaga el oleaje. En consecuencia, el espectro del oleaje al propagarse fuera de la zona de generación sufre un estrechamiento progresivo en el rango direccional, debido al fenómeno de dispersión direccional antes comentado e ilustrado en la figura 3.17, además de un estrechamiento en el rango de frecuencias, debido al fenómeno de dispersión frecuencial, que también se acentúa con la distancia al punto de observación. Además, este efecto es considerablemente más importante para las ondas cortas que para las larga, dado que las ondas cortas se propagan más lentamente, en función de la relación de dispersión, y también se ven más afectadas por procesos disipativos como las viscosidades molecular y turbulenta, de modo que éstas terminan por desaparacer.

En consecuencia, debido a los fenómenos de dispersión direccional y frecuencial, el oleaje a medida que se propaga como una onda libre fuera de la zona de generación sufre progresivamente una reducción de la altura y un aumento del periodo. Adicionalmente, el swell adquiere un aspecto cada vez menos irregular con los frentes de ondas dispuestos cada vez más paralelos, soldándose entre sí, haciendo que con el transcurrir del tiempo los frentes de onda sean más y más largos, y con muy pocas ondas cortas superpuestas sobre las componentes más largas.

Adicionalmente, tal como se comentó anteriormente el swell se propaga siguiendo círculos máximos. La explicación de este hecho reside en que los efectos de la fuerza de Coriolis (los efectos de la rotación terrestre) sobre el oleaje son despreciables dado que, por un lado la frecuencia de este fenómeno es muy superior a la de la rotación terrestre y, por otra parte, la propagación del oleaje involucra un transporte de masa muy pequeño, de modo que es más que razonable admitir que el oleaje se desplaza a lo largo de *círculos máximos* sobre la superficie del océano, desde la zona de generación, tal como se ilustra en la figura 3.18, de modo que si no fuese por la presencia de las masas continentales volverían al punto de partida.

En relación a su atenuación, después de ser generado por una tormenta, el oleaje puede propagarse sobre grandes distancias sobre la superficie del océano sin que su propagación se vea notablemente alterada hasta que llega a las costas donde rompe y disipa su energía. Los estudios basados en observaciones experimentales realizados por autores como Barber y Ursell (1948), Munk et al. (1963) y Snodgrass et al. (1966) han demostrado que el oleaje generado por el viento puede viajar fuera de su zona de propagación sobre distancias tan largas como la mitad del globo terrestre con muy poca atenuación. De este modo, la disipación por viscosidad molecular es completamente despreciable, y el nivel de turbulencia en el océano no parece

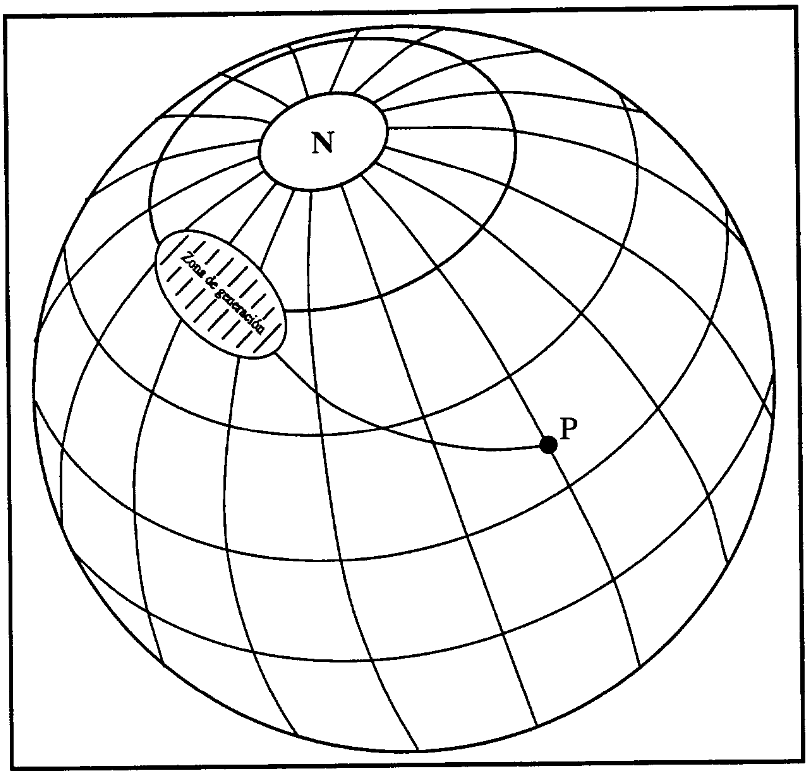

Figura 3.18: Definición esquemática de la zona de generación y círculo máximo que une el fetch con el punto de observación

afectar de forma apreciable al oleaje (Phillips, 1959). Además, el oleaje no parece ser afectado al propagarse a través de zonas de fuertes vientos, tales como el cinturón de los vientos alisios. Por otro lado, según Hasselmann (1963), las interacciones no lineales no parecen ser importantes en la redistribución de energía del oleaje fuera de la zona de generación activa para distancias más alla de unos pocos diámetros de la tormenta. Finalmente, la conversión de la energía del oleaje en energía asociada a ondas internas mediante interacciones onda-onda no parece ser importante en el balance de energía del oleaje (Kenyon, 1968).

En realidad, para la propagación sobre grandes distancias, el oleaje parece obedecer la teoría de ondas lineales en relación a la propagación a partir de una perturbación inicial de intensidad limitada. Esta teoría considera la elevación de la superficie libre a distancias considerables y después de un periodo sustancial de haberse generado una perturbación, limitada en el espacio y en el tiempo, que además ha ocurrido sobre un océano en reposo. De este modo, es posible admitir que la velocidad con la que se propaga la energía corresponde a la velocidad de grupo. Así, en la práctica, es posible predecir el momento en que el oleaje llegará a la costa usando la velocidad de grupo y conociendo la posición y el instante en que se produce la tormenta. Alternativamente, es posible estimar la distancia y el momento en que se originó la tormenta midiendo el tiempo de llegada de los frentes de onda a la costa, y teniendo en cuenta su dirección, haciendo uso de la teoría de propagación lineal. Lo que se observa en la costa como resultado de una única tormenta de corta duración es que primero llegan ondas de baja frecuencia seguidas por ondas de frecuencia cada vez más alta al transcurrir el tiempo, lo cual es de esperar debido a que la velocidad de grupo disminuye al aumentar la frecuencia, de acuerdo con la relación de dispersión. La razón con la que aumenta la frecuencia con el tiempo en la costa es inversamente proporcional a la distancia de la tormenta.

En términos de lo anteriormente comentado, si se admite que en un punto dado se registra un oleaje de fondo de periodo considerablemente alto, generado a una gran distancia de dicho punto, de modo que la zona de generación puede ser considerada como una fuente puntual, espacial y temporalmente. La naturaleza dispersiva del oleaje en aguas profundas implica que la energía de las olas generadas por una tormenta viajará a diferentes velocidades, dependiendo del periodo de la ola. Cuanto mayor es el periodo de las ondas, mayor sera la velocidad con la que se propaga, llegando antes al punto de observación. Para un observador en una posición fija, el periodo de las ondas dominantes será más corto a medida que transcurre el tiempo, es decir, entre un registro y otro, dado que a esa posición van llegando de forma progresiva diferentes partes del espectro.

Es decir, la energía del oleaje viaja siguiendo círculos máximos con una velocidad de grupo, dependiente de la frecuencia, dada por

$$c_g = \frac{g}{4\pi f} \tag{3.144}$$

Entonces, el swell generado en un instante t_0 llegará al punto de observación, situado a una distancia d del fetch, en un tiempo t_a, dado por

$$t_a = t_0 + \frac{d}{c_g} \tag{3.145}$$

de donde, diferenciando, se tiene que

$$\frac{dt_a}{df} = \frac{4\pi d}{g} \approx \frac{t_2 - t_1}{f_2 - f_1} \tag{3.146}$$

donde t_1 y t_2 son los tiempos de llegada al punto de observación de la energía de las componentes con frecuencia f_1 y f_2, respectivamente.

Debido al caracter dispersivo de la propagación del swell, la diferencia en los tiempos de llegada de la energía al punto de observación para diferentes frecuencias puede ser empleada para estimar la distancia recorrida por el oleaje desde la zona de generación. De forma similar, si la distancia recorrida y el tiempo invertido en ello son conocidos, la ecuación (3.146) puede ser utilizada para evaluar el momento en que se generó la tormenta.

3.2.1 Propiedades estadísticas

Los estudios específicos sobre las propiedades estadísticas de los parámetros de este tipo de oleaje son considerablemente menos numerosos que los realizados para el oleaje de viento. Obviamente, ello es debido a que los factores que hacen que prácticamente todos los modelos desarrollados para intentar caracterizar las propiedades estadísticas del oleaje de viento presenten limitaciones, es decir anchura de banda espectral amplia y no linealidades, no son en absoluto frecuentes en el oleaje de fondo. Tal como ya se ha comentado, en el oleaje de fondo los efectos no lineales son despreciables y, además, tal como se comentará posteriormente, este tipo de oleaje presenta generalmente una estructura espectral de banda bastante estrecha. En consecuencia, los modelos estadísticos comentados en la sección anterior, y los que se emplearán en el capítulo [6], resultan mucho más eficientes para caracterizar el comportamiento estadístico de los parámetros característicos del oleaje de fondo que para el oleaje de viento.

Para poder comparar las propiedades de los registros de oleaje de fondo con las de los correspondientes a los de oleaje de viento, en la tabla 3.4 se muestran los valores de los coeficientes de correlación entre alturas de ola sucesivas, separadas por diferente número de olas, o periodos, entre 1 y 5. Estos resultados corresponden a dos estudios realizados por Goda (1983), en la zona de Costa Rica, y Thomas et al. (1986), en la zona Sur de la India. En ambos casos el oleaje de fondo había recorrido grandes distancias, de modo que había estado sometido a un proceso de filtrado considerable, mostrando por tanto un ancho de banda espectral bastante bajo.

Comparando los resultados de la tabla 3.4 con los correspondientes a oleajes de viento, dados en la tabla 3.1, resulta inmediata la diferencia sustancial en la correlación entre valores sucesivos de $r_{hh}(n)$. Es decir, la correlación entre alturas de ola sucesivas es sustancialmente superior en el oleaje de fondo que en el oleaje de viento, cuyos valores para dos olas inmediantamente consecutivas, $r_{hh}(1)$, en general es inferior a 0.5. Nótese que el valor de 0.75 obtenido por Sobey (1996) corresponde a un espectro JONSWAP con $\gamma = 7$, es decir, un espectro fuertemente apuntado y que, tal como se comentará posteriormente, Goda (1983) ha sugerido emplear un espectro de este tipo con parámetros de apuntamiento de este orden para caracterizar oleajes de fondo. Además, es interesante notar que los valores dados por Sobey (1996) corresponden a resultados de estudios con simulación numérica empleando el método DSA. Aún más interesante es notar que para un espectro PM, este autor obtiene un valor mayor que el encontrado por Rodríguez y Guedes-Soares (1999), empleando la técnica NSA. Al comparar ambos resultados con los obtenidos a partir de medidas experimentales, en particular con los presentados por Arhan y Ezraty (1978) para espectros del tipo PM, se observa que los resultados de Sobey (1996) sobrepredicen considerablemente estos resultados. Esta sobrepredicción se hace aún más notable en el caso de $\gamma = 3.3$.

Además, en estos trabajos se pone de manifiesto, como era de esperar, la adecuada caracterización del comportamiento estadístico de los parámetros característicos del oleaje empleando los modelos teóricos desarrollados utilizando la hipótesis de ancho de banda espectral finita. En particular, la distribución de las alturas de ola y la distribución conjunta de alturas y periodos es correctamente descrita por los modelos propuestos por Longuet-Higgins (1952, 1983).

Tabla 3.4: Valores de $r_{hh,k}$ observados para oleajes de fondo

Autor/es	$r_{hh,1}$	$r_{hh,2}$	$r_{hh,3}$	$r_{hh,4}$	$r_{hh,5}$
Goda (1983)	0.649	0.351	0.178	0.070	–
Thomas et al. (1986)	0.566	0.427	0.370	0.370	0.266

3.2.2 Propiedades espectrales

Considerando los comentarios realizados anteriormente, resulta evidente que el contenido energético y la distribución frecuencial del mismo en el swell depende fuertemente de su historia. Es decir, del tiempo durante el cual ha viajado desde la zona de generación y de la distancia recorrida hasta el punto de observación, así como de las posibles modificaciones a las que se haya podido ver sometido por factores diferentes de los de dispersión frecuencial y radial.

Así, mientras el espectro del oleaje de viento puede ser caracterizado atendiendo a los fenómenos físicos involucrados en su generación y disipación, tal como se explicó en la sección [1.2.2], y que dan lugar a una estructura espectral auto-semejante, esto no es posible en el caso del oleaje de fondo. Es decir, en el oleaje de fondo no es posible establecer un equilibrio entre la entrada de energía desde el viento, la disipación por rotura y las interacciones no lineales, puesto que todos estos procesos son prácticamente despreciables en este tipo de oleaje. En consecuencia, los modelos propuestos hasta la fecha para caracterizar el espectro del oleaje de fondo estan basados en fundamentos puramente empíricos.

Entre las características más comunes del espectro del oleaje de fondo destacan su estrecho ancho de banda, su fuerte apuntamiento y las fuertes pendientes presentes tanto en su cara trasera como en la delantera, donde obviamente no existe una caida del tipo propuesto por Phillips o Toba (ver sec. [3.1.2]), debido a los procesos de dispersión que caracterizan la propagación del swell. Así, por ejemplo, Goda (1983) al analizar los espectros del oleaje de fondo registrado en Costa Rica despues de haber viajado sobre distancias entre 7000 y 9000 kilómetros, desde el suroeste del Pacífico, en las proximidades de Nueva Zelanda, hasta Costa Rica, durante periodos entre 5 y 7 días, sugirió emplear un modelo espectral JONSWAP con valores del parámetro de apuntamiento del pico espectral elevado ($\gamma \approx 7 - 10$). Por otro lado, al examinar la pendiente en la zona de frecuencias inmediatamente superiores a la frecuencia de pico ($fp < f < 1.8 f_p$), observa comportamientos en esta zona del espectro del tipo f^{-n}, con valores entre f^{-7} y f^{-11}.

3.2.3 Modelos espectrales

A la vista de lo anteriormente comentado, es evidente que la forma detallada del espectro del swell es aún un tema de discusión y que el progreso en este sentido debe estar basado en el análisis de muchos más datos de campo. No obstante, existen algunas formulaciones espectrales, completamente empíricas, que han sido sugeridas específicamente para modelizar la estructura del espectro del oleaje de fondo, y que son descritas a continuación.

Espectro de Davidan

Davidan (1969) propuso un espectro para el swell dado por

$$S(\omega) = 6 m_0 \omega_p^{-1} \left(\frac{\omega}{\omega_p} \right)^{-6} \exp \left[-1.2 \left(\frac{\omega}{\omega_p} \right)^{-5} \right] \tag{3.147}$$

o en términos de la frecuencia lineal

$$S(f) = \frac{6 m_0}{f_p} \left(\frac{f}{f_p} \right)^{-6} \exp \left[-1.2 \left(\frac{f}{f_p} \right)^{-5} \right] \tag{3.148}$$

Según el autor, este espectro proporciona una descripción adecuada de espectros experimentales de swell cuando $\frac{\bar{H}}{g\bar{T}^2} \leq 0.00125$. En la figura 3.19 se muestra la variación de este modelo espectral en función de la frecuencia de pico, pudiéndose observar el aumento del apuntamiento frente al descenso de f_p.

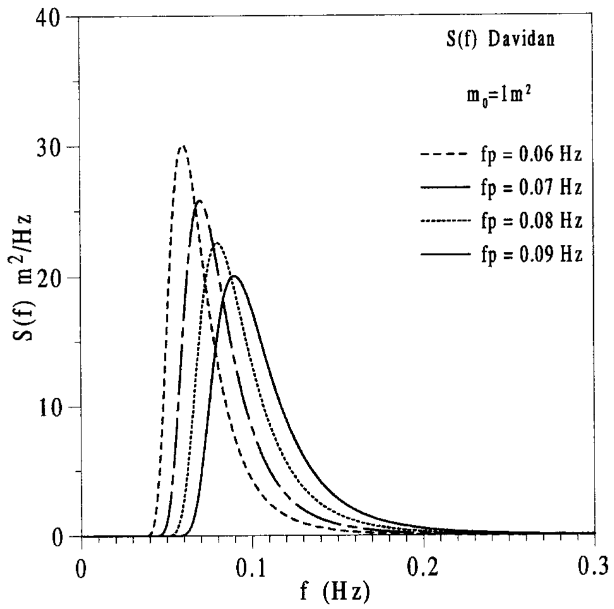

Figura 3.19: Variación del modelo espectral de Davidan (1969) en función de f_p.

Espectro de Ewing

Otro espectro representativo de un swell, más que de un oleaje de viento activo, es el espectro simétrico Gaussiano propuesto por Ewing (1973) para el estudio de las longitudes medias de las rachas de olas altas en un registro, cuya expresión analítica viene dada por

$$S(f) = \frac{1}{\tilde{\nu}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(f-f_p)^2}{2\tilde{\nu}^2}\right] \tag{3.149}$$

donde $\tilde{\nu}$ es una medida del ancho de banda espectral, relacionado con la frecuencia del máximo espectral a través del momento espectral de segundo orden respecto del origen, m_2, y del momento central de igual orden, μ_2, del siguiente modo

$$\frac{m_2}{\mu_2} = \frac{\tilde{\nu}^2 + f_p^2}{\tilde{\nu}^2} \tag{3.150}$$

Teniendo en cuenta que

$$\mu_2 = m_2 - \frac{m_1^2}{m_0} \tag{3.151}$$

Es posible demostrar que $\tilde{\nu}$ está directamente relacionado con el parámetro de anchura de banda espectral propuesto por Longuet-Higgins (1975). Es decir,

$$\tilde{\nu} = \left(\frac{m_0 m_2}{m_1^2} - 1\right)^{1/2} f_p = \nu f_p \tag{3.152}$$

En consecuencia, la ecuación (3.149) puede ser reescrita como

$$S(f) = \frac{1}{\nu\sqrt{2\pi} f_p} \exp\left[-\frac{(f - f_p)^2}{2\nu^2 f_p^2}\right] \tag{3.153}$$

Esta expresión, mostrada en la figura 3.20 para diferentes valores de ν, ha sido empleada recientemente por Massel y Sobey (2000) para generar registros de oleaje sintéticos. Sin embargo, la expresión dada por estos autores es

$$S(\omega) = \frac{m_0}{\nu \omega_p \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\left(\frac{\omega}{\omega_p} - 1\right)^2}{2\nu^2}\right] \tag{3.154}$$

que en términos de la frecuencia lineal adopta la forma

$$S(f) = \frac{m_0}{\nu\sqrt{2\pi} f_p} \exp\left[-\frac{(f - f_p)^2}{2\nu^2 f_p^2}\right] \tag{3.155}$$

Es importante notar que, aunque dichos autores emplean la expresión anterior como la sugerida por Ewing (1973), ésta difiere de la original en que la función del tipo distribución normal propuesta inicialmente es multiplicada por la varianza del proceso, m_0, de forma que presente una dependencia directa con su energía.

Este modelo proporciona una estimación empírica de las condiciones de swell empleando valores de ν del orden 0.15, tal como se observa en la naturaleza para oleajes de fondo bien filtrados y puros.

Espectro de Longuet-Higgins

Una formulación espectral alternativa para caracterizar la estructura frecuencial del swell es la introducida por Longuet-Higgins (1984), en el contexto de las propiedades estadísticas de los grupos de olas.

Considerando que para un oleaje de fondo, los valores de típicos de ν están comprendidos entre 0.05 y 0.15, y que para el oleaje de viento dicho parámetro tiene

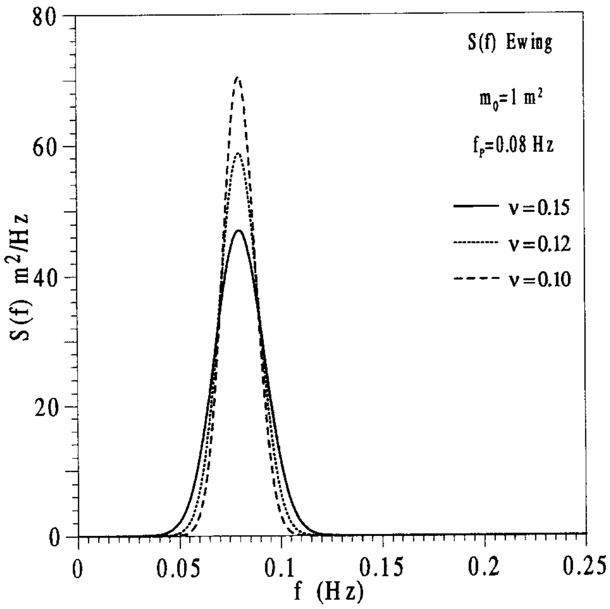

Figura 3.20: Variación del modelo espectral de Ewing (1973) en función de ν.

una cota inferior próxima a 0.35, este autor admite que una expresión conveniente para el espectro de un swell que posee un corte suave en frecuencias es

$$S(\omega) = \frac{\alpha_s}{\sqrt{\omega}} \exp\left\{-\frac{n}{2}\left[\beta\omega + \frac{1}{\beta\omega}\right]\right\} \tag{3.156}$$

o de forma equivalente

$$S(f) = \sqrt{2\pi}\alpha_s f^{-1/2} \exp\left\{-\frac{n}{2}\left[\beta 2\pi f + \frac{1}{\beta 2\pi f}\right]\right\} \tag{3.157}$$

donde α_s, β y n son constantes. Para dicho espectro es posible demostrar que

$$\left.\begin{aligned} m_0 &= \frac{2\alpha_s\sqrt{\pi/\beta}}{ne^n} \\ \bar{\omega} &= \frac{1+\frac{1}{n}}{\beta} \\ \nu &= \frac{\sqrt{n+2}}{n+1} \end{aligned}\right\} \tag{3.158}$$

de donde

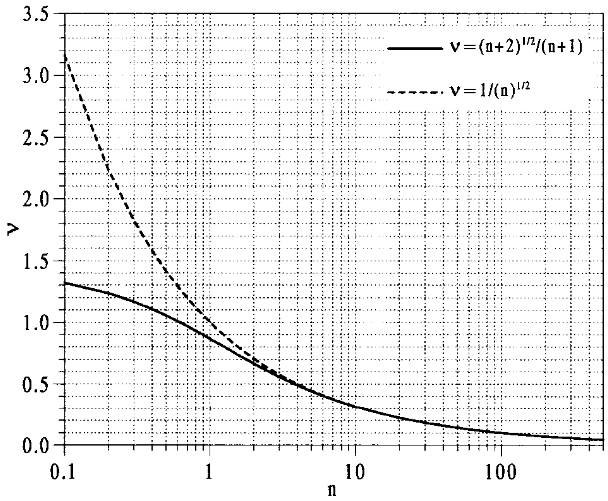

Figura 3.21: Variaciones de ν y su aproximación en función de n.

$$\beta = \left(\frac{n+1}{2\pi n}\right)\frac{m_0}{m_1} \tag{3.159}$$

$$\alpha_s = \sqrt{\beta}\left(\frac{ne^n}{2\sqrt{\pi}}\right)m_0 \tag{3.160}$$

Además, para valores altos de n, se observa que

$$\nu \approx n^{-1/2} \qquad \text{para} \quad n > 50 \tag{3.161}$$

Por tanto, admitiendo que $0.05 \leq \nu \leq 0.15$, los valores útiles de n para caracterizar el espectro de un swell caerán en el rango entre 50 y 500, aproximadamente, tal como se observa en la figura 3.21, en la que se ilustra la variación de ν en términos de n, así como la variación correspondiente a su expresión aproximada. Obsérvese que ambas expresiones pueden ser consideradas equivalentes para $n > 10$, de modo que la expresión aproximada resulta válida dentro de todo el rango de n adecuado para caracterizar el espectro del swell.

En la tabla 3.5 se dan algunos valores de ν obtenidos mediante la ecuación (3.158) y su expresión aproximada (3.161), denotada por ν^*, en función de n, así como los valores de α_s y β para $H_{m_0} = 2\text{m}$ ($m_0 = 0.25$) y $\bar{f} = 0.08$ Hz ($m_1 = 0.02$). La evolución del espectro (3.157) en términos de ν se muestra en la figura 3.22.

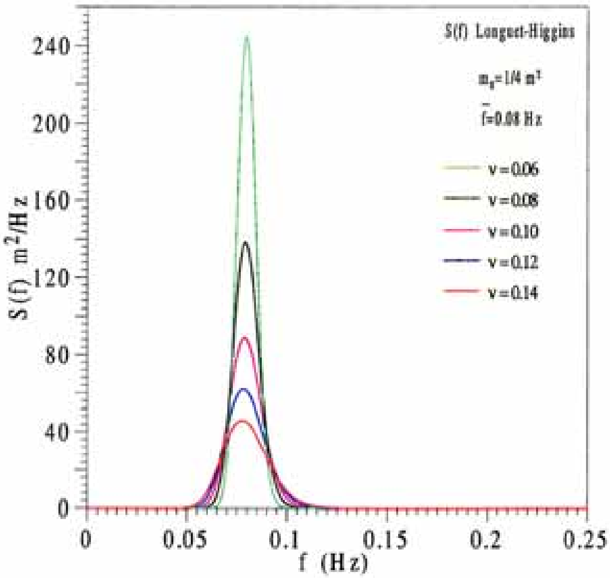

Figura 3.22: Variación del modelo espectral de Longuet-Higgins en función de ν.

Tabla 3.5: Parámetros del espectro de Longuet-Higgins en función de n.

n	ν	ν^*	α_s	β
44.4	0.15004	0.15008	8.562×10^{19}	2.034
51.0	0.14000	0.14003	7.219×10^{22}	2.028
59.1	0.13006	0.13008	2.753×10^{26}	2.023
69.4	0.12003	0.12004	9.598×10^{30}	2.018
82.6	0.11002	0.11003	6.166×10^{36}	2.013
100.0	0.10000	0.10000	2.687×10^{44}	2.009
123.4	0.09002	0.09002	4.816×10^{54}	2.006
156.2	0.08001	0.08001	1.070×10^{69}	2.002
204.1	0.07000	0.07000	8.874×10^{89}	1.999
277.8	0.06000	0.06000	1.228×10^{122}	1.997
400.0	0.05000	0.05000	2.080×10^{175}	1.994

Capítulo 4

Caracterización frecuencial de estados de mar mixtos

En los capítulos anteriores se ha comentado en varias ocasiones que, en la naturaleza las condiciones de viento soplando uniformemente sobre un mar en reposo para generar un oleaje de viento puro son muy poco frecuentes, y que, en general, los campos de oleaje de viento locales se desarrollan en presencia de un oleaje de fondo que ha sido irradiado desde tormentas localizadas lejos del punto de observación. En ocasiones, pueden observarse espectros de oleaje que exhiben hasta tres picos claramente definidos, uno asociado al campo de oleaje local, y otros dos correspondientes a oleajes de fondo con diferentes historias energéticas.

En este capítulo se presentan en primer lugar los modelos espectrales empleados más frecuentemente para caracterizar la estructura frecuencial de registros de oleaje resultantes de la combinación de dos sistemas de oleaje individuales. Posteriormente se discute la validez relativa de los mismos para tal fin, considerando las observaciones realizadas por diferentes autores y los resultados obtenidos en el presente trabajo. Como resultado de esta discusión, se propone un nuevo modelo espectral para caracterizar espectros bimodales que elimina, al menos, parcialmente las inconsistencias y limitaciones observadas en los modelos empleados actualmente. Además, se sugiere una metodología general para la caracterización de los espectros, unimodales o multimodales, del oleaje. Seguidamente se analiza el problema de la detección experimental de la presencia de más de un sistema de oleaje en un registro de elevaciones de la superficie del mar, comentando algunas de las las metodologías empleadas para ello y examinando en detalle la empleada en el presente trabajo. Así mismo, se introducen las técnicas empleadas para ajustar el espectro teórico propuesto, comparando los resultados obtenidos con el mismo y con el modelo espectral más ampliamente empleado en la práctica. Por último, se discuten los resultados ofrecidos por la metodología general para el ajuste de espectros aquí sugerida.

4.1 Estructura espectral de oleajes combinados

Tal como se comentó en la sección anterior, con bastante frecuencia los espectros de oleaje observados en el océano presentan dos picos, uno en la zona de bajas frecuencias y otro asociado a la zona de frecuencias relativamente altas. También se ha comentado que los espectros multimodales son generados normalmente por diferentes sistemas meteorológicos y su modelización resulta sustancialmente más complicada que la de los espectros con un solo pico. En concreto, ninguno de los modelos espectrales presentados en la sección [3.1.3] resulta adecuado para caracterizar correctamente este tipo de espectro.

La dificultad que en general existe para caracterizar la estructura frecuencial del oleaje no sólo se presenta en el caso en que el espectro presenta dos picos claramente discernibles. Con frecuencia, incluso para espectros con un único pico, resulta dificil caracterizar la estructura espectral completa mediante una única formulación espectral unimodal. Así, es frecuente encontrar situaciones en las que el espectro de oleaje presenta un único máximo, pero que en la zona de altas frecuencias exhibe una meseta que se prolonga mucho más allá del pico espectral, con una atenuación muy pequeña al aumentar la frecuencia, tal como en el ejemplo mostrado en la figura 4.1. Naturalmente, esta estructura no puede ser descrita mediante un modelo espectral simple en el que la densidad espectral en la cola de altas frecuencias decrece según una potencia dada de la frecuencia.

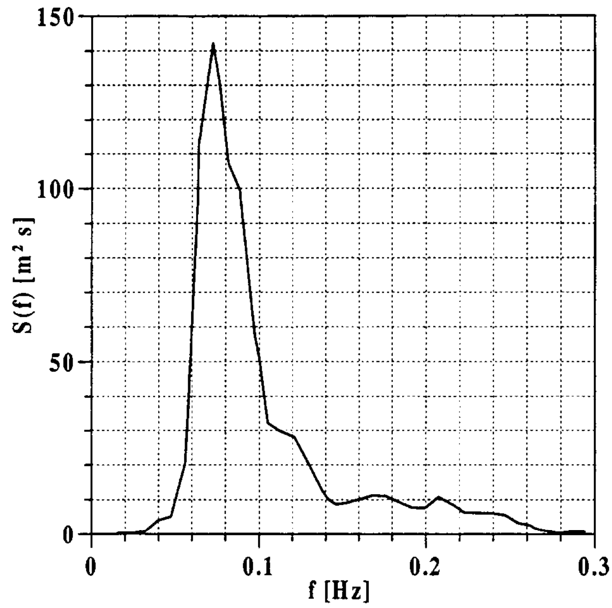

Figura 4.1: Espectro registrado en el Atlantico Norte (Reproducido de Ochi, 1982)

4.1.1 Modelos teóricos de espectros bimodales

Todas las formulaciones espectrales propuestas hasta la fecha para representar espectros bimodales están basadas en la idea de descomponer el espectro en dos partes, una asociada a al espectro en la zona de bajas frecuencias y otra para las frecuencias superiores, o lo que es equivalente, caracterizar los espectros bimodales mediante la superposición lineal de dos espectros unimodales. Es decir,

$$S(f) = S(f)_{sw} + S(f)_{ws} \tag{4.1}$$

donde $S(f)_{sw}$ indica el espectro correspondiente a la banda de bajas frecuencias (swell) y $S(f)_{ws}$ representa el espectro asociado al sistema de oleaje de altas frecuencias (wind-sea).

La idea original de caracterizar los espectros resultantes de la combinación de dos sistemas de oleaje mediante la superposición de dos formulaciones espectrales unimodales suele ser atribuida a Strekalov y Massel (1971). No obstante, es justo señalar que la idea de la superposición de dos espectros parciales para modelizar un espectro bimodal fué previamente descrita por Bretschneider (1963,1964) quien, al examinar la estructura espectral del oleaje generado por huracanes observó que en este tipo de sistemas meteorológicos el complejo movimiento del viento da lugar a un espectro bimodal.

En concreto, Bretschneider (1964) sugiere que en el caso de oleajes mixtos la distribución de probabilidades de los periodos del oleaje puede ser expresada como

$$p(T)dT = \left[2A_1T^3 \exp\left(-B_1T^4\right)\right] dT + \left[2A_2T^3 \exp\left(-B_2T^4\right)\right] dT \tag{4.2}$$

donde A_1 y B_1 incluyen el periodo medio del swell y A_2 y B_2 el periodo medio del oleaje de viento. En consecuencia, teniendo en cuenta lo comentado en la sección [3.1.3] con relación al modelo espectral propuesto por Bretschneider (3.109), la función de densidad espectral correspondiente debería adoptar la forma

$$S(f) = \left[a_1f^{-5} \exp\left(-b_1f^{-4}\right)\right] + \left[a_2f^{-5} \exp\left(-b_2f^{-4}\right)\right] \tag{4.3}$$

donde a_i y b_i son las constantes apropiadas.

Espectro de Strekalov y Massel

Strekalov y Massel (1971) proponen la siguiente descomposición del espectro del oleaje

$$\frac{S(f)f_p}{m_0} = S_l\left(\frac{f}{f_p}\right) + S_h\left(\frac{f}{f_p}\right) \tag{4.4}$$

donde S_l y S_h representan los espectro de los sistemas de oleaje de bajas y altas frecuencias, respectivamente. Las expresiones de ambos subespectros vienen dadas por

$$S_l\left(\frac{f}{f_p}\right) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}\,r}\left(\frac{f_p}{f}\right) \exp\left[-\left(\frac{f_p}{f}\right)^2 \frac{\left(\frac{f}{f_p}-1\right)^2}{2r^2}\right] \tag{4.5}$$

y

$$S_h\left(\frac{f}{f_p}\right) = B\left(\frac{f_p}{f}\right)^{1-n}\left(\frac{f}{f_p}\right)^{-n} \exp\left[-q\left(\frac{f_p}{f}\right)^{-m}\left(\frac{f}{f_p}\right)^{-m}\right] \tag{4.6}$$

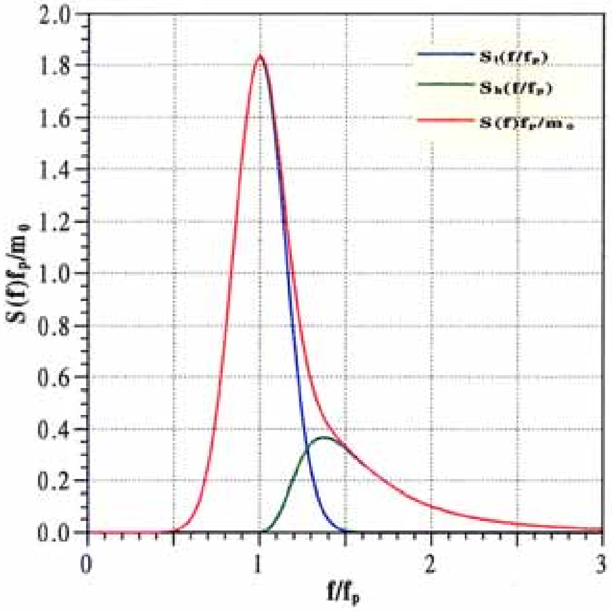

Figura 4.2: Descomposición de un espectro bimodal según Strekalov y Massel

La figura 4.2 muestra un ejemplo de la formulación espectral dada por (4.4), para los parámetros $A = 0.69$, $B = 1.38$, $n = 5$, $m = 8$, $r = 0.12$, $q = 1.34$. En general, la relación $f_p/\bar{f}$ es una función del fetch y la duración adimensionales. En el ejemplo de la figura el valor empleado es $f_p/\bar{f} \approx 0.8$.

Krilov et al. (1986) tras combinar aproximadamente 200 espectros adimensionalizados, publicados por diferentes autores, obtienen un valor para el término $S(f_p)f_p/m_0 \approx 1.80$. El valor de dicho término en el ejemplo mostrado en la figura 4.2 es 1.84.

Espectro de Ochi y Hubble

Con el fin de poder caracterizar adecuadamente el mayor número posible de espectros observados en el mar, incluyendo aquellos que contienen dos picos, Ochi y Hubble (1976) propusieron un modelo espectral que depende de tres parámetros. La suma de dos de estos espectros triparamétricos permite obtener una representación de los espectros correspondientes a estados de mar resultantes de la superposición de dos campos de oleaje diferentes.

Al igual que la mayoría de los modelos espectrales de dos parámetros comentados previamente, el modelo de Ochi y Hubble de tres parámetros tiene como punto de partida la expresión genérica dada por la ecuación (3.118). Recuérdese que considerando los valores más usuales de $n = 5$ y $m = 4$ dicha expresión adopta la forma

$$S(f) = Af^{-5} \exp\left[-Bf^{-4}\right]$$

Sin embargo, en lugar de recurrir a métodos empíricos para determinar los coeficientes, estos autores hacen uso de métodos analíticos para tal fin. Así, admitiendo como hipótesis de partida que el espectro es de banda estrecha, resulta razonable asumir que las alturas de ola siguen una distribución de Rayleigh. Además, teniendo en cuenta que el momento espectral de orden cero para una función de densidad espectral del tipo anterior viene dado por

$$m_0 = \int_0^{\infty} S(f)df = \int_0^{\infty} Af^{-5} \exp\left[-Bf^{-4}\right] df = \frac{A}{4B} \tag{4.7}$$

dividiendo $S(f)$ por $m_0 = A/4B$ se obtiene un espectro de área unidad

$$\hat{S}(f) = 4Bf^{-5} \exp\left[-Bf^{-4}\right] \tag{4.8}$$

El espectro de área unitaria $\hat{S}(f)$ satisface todas las condiciones para poder ser considerado como una función de densidad de probabilidad. De hecho, recordando que la función de densidad de probabilidad exponencial de parámetro b tiene la expresión (2.149), dada por

$$f(x; b) = b \exp(-bx)$$

es posible demostrar que haciendo $x = 1/f^4$ en la *fdp* exponencial se obtiene el espectro $\hat{S}(f)$.

Por otra parte, la función de densidad de probabilidad Gamma de parámetros a y b tiene la expresión

$$f(x; a, b) = \frac{1}{\Gamma(a)} b^a x^{a-1} \exp(-bx) \tag{4.9}$$

de modo que para $a = 1$ la función de probabilidad Gamma se transforma en una distribución exponencial.

En consecuencia, es posible generalizar el espectro $\hat{S}(f)$ para que adopte la forma de una *fdp* Gamma con un parámetro adicional λ que controle la forma de la función de densidad. Es decir,

$$\hat{S}(f) = \frac{4}{\Gamma(\lambda)} \frac{B^\lambda}{f^{4\lambda+1}} \exp\left[-Bf^{-4}\right] \tag{4.10}$$

Puesto que se ha admitido la hipótesis de anchura de banda espectral estrecha, este espectro puede ser transformado en un espectro con area $(H_s/4)^2$ cuya expresión analítica adopta la siguiente forma

$$S(f) = \frac{1}{4} \frac{B^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \frac{H_s^2}{f^{4\lambda+1}} \exp\left[-Bf^{-4}\right] \tag{4.11}$$

La constante B puede ser estimada teniendo en cuenta que para $f = f_p$ la derivada de $S(f)$ respecto a f ha de ser nula. Así, haciendo

$$\frac{d}{df} S(f) = \left[\frac{B^\lambda}{4\Gamma(\lambda)} H_s^2 \frac{\exp\left[-Bf_p^{-4}\right]}{f_p^{4\lambda+1}}\right] \left[-\frac{4\lambda+1}{f_p} + \frac{4B}{f_p^5}\right] = 0 \tag{4.12}$$

se obtiene que

$$B = \left(\frac{4\lambda+1}{4}\right) f_p^4 \tag{4.13}$$

Sustituyendo este valor de B en (4.11) se obtiene el siguiente modelo espectral

$$S_{OH}(f) = \frac{\left(\frac{4\lambda+1}{4} f_p^4\right)^\lambda}{4\Gamma(\lambda)} \frac{H_s^2}{f^{4\lambda+1}} \exp\left[-\frac{4\lambda+1}{4} \left(\frac{f_p}{f}\right)^4\right] \tag{4.14}$$

que recibe el nombre de modelo espectral de Ochi-Hubble de tres parámetros. Siendo f_p la frecuencia del pico espectral, H_s la altura de ola significativa, y λ un parámetro de forma. Nótese que para $\lambda = 1$ el espectro Ochi-Hubble se reduce al espectro

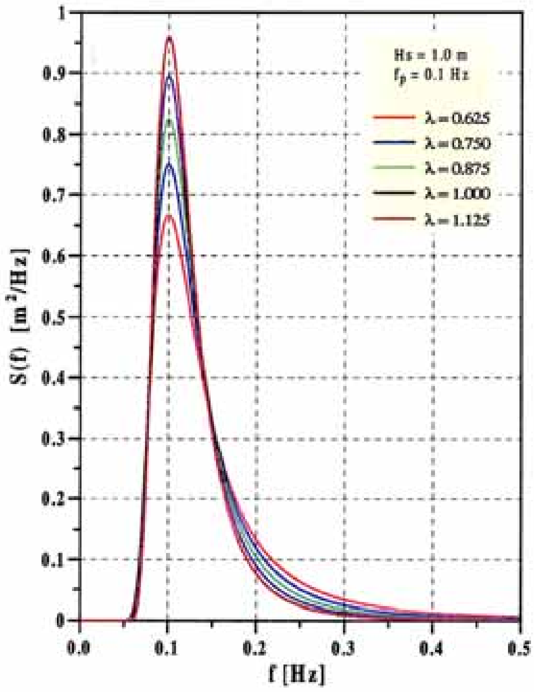

Figura 4.3: Variación del espectro OH en función λ

de Bretschneider dado por (3.109). En la figura 4.3 se ilustra la variación de la estructura de este modelo espectral en términos del parámetro de forma.

En consecuencia, el espectro sugerido por Ochi y Hubble constituye una modificación del espectro biparamétrico de Bretschneider, incluyendo un parámetro de forma λ que permite intensificar la energía asignada a la banda de frecuencias localizada entorno a la frecuencia de pico. De este modo, el espectro resultante permite caracterizar oleajes en desarrollo o totalmente desarrollados, además de ofrecer una mayor flexibilidad para poder ajustar de forma adecuada la densidad espectral correspondiente a un oleaje de fondo.

No obstante, dado que el objetivo final de estos autores era poder caracterizar el mayor número posible de formas espectrales observadas en el océano, incluyendo los espectros bimodales, éstos sugieren combinar dos modelos unimodales para obtener un espectro que permita caracterizar espectros con dos picos. De este modo, la formulación espectral resultante adquiere la siguiente expresión

$$S(f) = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{2} \frac{\left(\frac{4\lambda_j+1}{4} f_{p_j}^4\right)^{\lambda_j}}{\Gamma(\lambda_j)} \frac{H_{s_j}}{f^{4\lambda_j+1}} \exp\left[-\frac{4\lambda_j+1}{4}\left(\frac{f_{p_j}}{f}\right)^4\right] \tag{4.15}$$

donde los parámetros con subíndice $j = 1$ corresponden al espectro parcial que representa las componentes de baja frecuencia, mientras que aquellos con subíndice $j = 2$ son los correspondientes al espectro de altas frecuencias.

El modelo espectral propuesto por Ochi y Hubble, que en adelante será denotado como espectro OH, depende de seis parámetros. No obstante, empleando la misma base de datos experimentales utilizada por Pierson y Moskowitz (1964), pero analizando todos los registros (más de 800), incluidos los correspondientes a estados de mar parcialmente desarrollado y aquellos con estructura bimodal, estos autores logran establecer una relación funcional entre cada uno de los seis parámetros con la altura de ola significativa total del registro de oleaje.

Agrupando los diferentes espectros observados en función de la altura de ola significativa y realizando un análisis estadístico de los mismos, derivan una familia de espectros que contiene once miembros para una altura de ola significativa dada con un nivel de confianza del 95%, uno de los cuales es el espectro más probable para las condiciones de oleaje con la H_s considerada.

En la tabla 4.1 se presentan las relaciones paramétricas correspondientes a cada uno de los seis parámetros del espectro en función de H_s, para el espectro más probable (MPS) y para los diez miembros restantes de la familia de espectros dentro de los intervalos de confianza del 95%.

Así mismo, en las figuras 4.4a-c se ilustran las variaciones de cada uno de los parámetros espectrales en función de H_s. De la figura 4.4a se desprende que, al aumentar la severidad del estado del mar, las alturas de ola significativas asociadas a ambos sistemas de oleaje, bajas frecuencia (swell), H_{s_1}, y altas frecuencias (oleaje de viento), H_{s_2}, aumentan de forma lineal, con un incremento superior en la altura de ola significativa correspondiente al oleaje de fondo. Por el contrario, frente a un aumento de H_s, las frecuencias de pico correspondientes a ambos sistemas de oleaje muestran una pauta similar de decrecimiento, tal como se observa en la figura 4.4b. Sin embargo, los parámetros de forma correspondientes al oleaje de bajas y

Tabla 4.1: Valores de los seis parámetros del espectro OH en función de H_s para el espectro más probable y para los otros diez espectros dentro de los límites de confianza del 95%, (Ochi y Hubble, 1976).

	H_{s_1}	H_{s_2}	f_{p1}	f_{p2}	λ_1	λ_2
MPS	$0.84H_s$	$0.54H_s$	$0.11\exp(-0.046H_s)$	$0.24\exp(-0.039H_s)$	3.00	$1.54\exp(-0.062H_s)$
1	$0.95H_s$	$0.31H_s$	$0.11\exp(-0.046H_s)$	$0.24\exp(-0.046H_s)$	1.35	$2.48\exp(-0.102H_s)$
2	$0.65H_s$	$0.76H_s$	$0.10\exp(-0.039H_s)$	$0.15\exp(-0.036H_s)$	4.95	$2.48\exp(-0.102H_s)$
3	$0.84H_s$	$0.54H_s$	$0.15\exp(-0.056H_s)$	$0.24\exp(-0.046H_s)$	3.00	$2.77\exp(-0.112H_s)$
4	$0.84H_s$	$0.54H_s$	$0.06\exp(-0.016H_s)$	$0.14\exp(-0.026H_s)$	2.55	$1.82\exp(-0.089H_s)$
5	$0.90H_s$	$0.44H_s$	$0.13\exp(-0.052H_s)$	$0.25\exp(-0.033H_s)$	1.80	$2.95\exp(-0.105H_s)$
6	$0.77H_s$	$0.64H_s$	$0.09\exp(-0.039H_s)$	0.10	4.50	$1.95\exp(-0.082H_s)$
7	$0.73H_s$	$0.68H_s$	$0.11\exp(-0.046H_s)$	$0.16\exp(-0.039H_s)$	6.40	$1.78\exp(-0.069H_s)$
8	$0.92H_s$	$0.39H_s$	$0.11\exp(-0.046H_s)$	$0.22\exp(-0.039H_s)$	0.70	$1.78\exp(-0.069H_s)$
9	$0.84H_s$	$0.54H_s$	$0.12\exp(-0.052H_s)$	$0.21\exp(-0.039H_s)$	2.65	$3.90\exp(-0.085H_s)$
10	$0.84H_s$	$0.54H_s$	$0.10\exp(-0.039H_s)$	$0.16\exp(-0.030H_s)$	2.60	$0.53\exp(-0.069H_s)$

altas frecuencias presentan patrones de variación sustancialmente diferentes. Así, mientras el parámetro asociado al oleaje de viento disminuye al incrementarse la altura de ola significativa, el correspondiente al oleaje de fondo permanece constante (figura 4.4c).

En las figuras 4.5 y 4.6 se muestran los espectros más probables para los rangos de altura de ola significativa entre 1 y 5 metros y entre 6 y 10 metros, respectivamente. Así mismo, en la figura 4.7 se muestran el espectro más probable y los restantes diez miembros de la familia de espectros dentro de los límites de confianza del 95% para $H_s = 3$ m.

Es importante destacar que el espectro OH es el modelo más empleado para la caracterización de la estructura frecuencial en oleajes mixtos, bien para ajustar espectros registrados experimentalmente (e.g., Rodríguez y Jiménez, 1994), o como espectro objetivo en estudios basados en simulación numérica (e.g., Rodríguez et al., 2003). En consecuencia, esta formulación espectral será considerada en secciones posteriores como modelo de referencia.

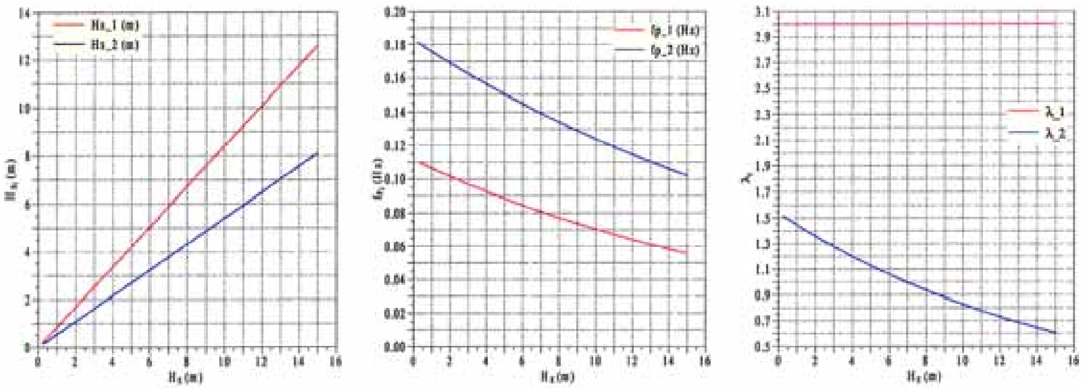

Figura 4.4: Variaciones de H_{s_i}, f_{p_i} y λ_i en función de Hs para el espectro más probable.

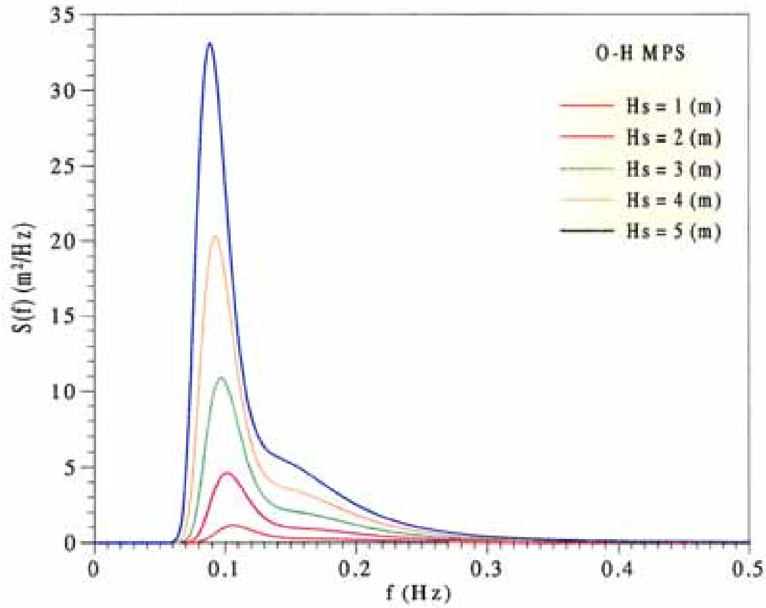

Figura 4.5: Espectros OH más probables para $H_s = 1 - 5$ m.

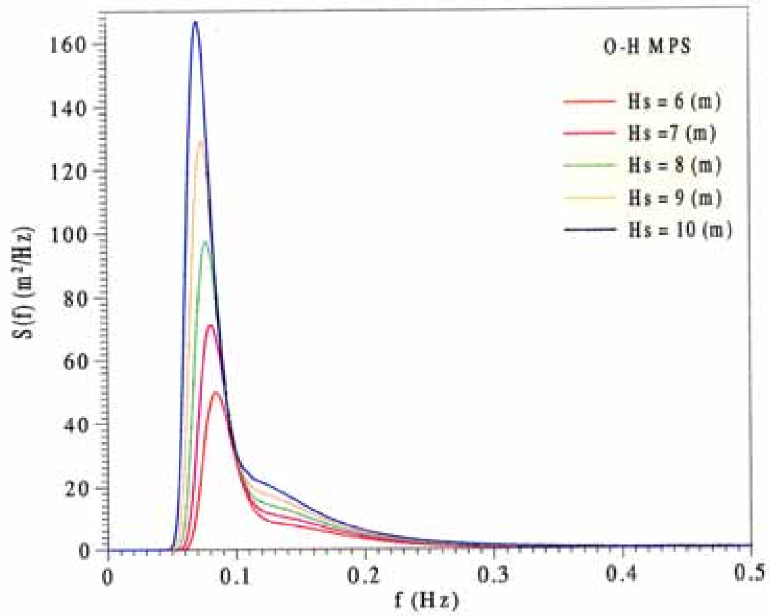

Figura 4.6: Espectros OH más probables para $H_s = 6 - 10$ m.

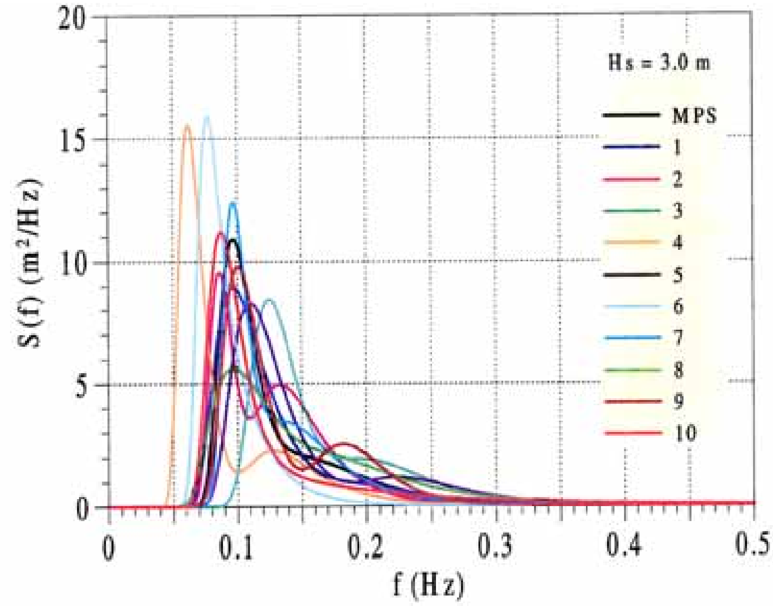

Figura 4.7: Espectro OH más probable y familia de espectros con un 95% de nivel de confianza para $H_s = 3$ m

Espectro de Guedes-Soares

Considerando que tanto un oleaje de fondo como uno de viento podían ser caracterizados satisfactoriamente mediante un JONSWAP medio, modificado en función del espectro sugerido por la ISSC (Warnsinck et al., 1964), Guedes-Soares (1983) propuso representar los espectros de dos picos mediante el siguiente modelo espectral bimodal,

$$S(f) = \sum_{i=1}^{2} S_i(f)_{ISSC}(3.3)^{q_i} \tag{4.16}$$

donde el espectro PM modificado por la ISSC adopta la expresión

$$S_i(f)_{ISSC} = 0.11 H_i^2 T_i (T_i f)^{-5} \exp\left[-0.44(T_i f)^{-4}\right] \tag{4.17}$$

y el exponente q adquiere la siguiente forma,

$$q_i = \exp\left[-\frac{(1.296 T_i f - 1)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{4.18}$$

con

$$\begin{aligned} \sigma_a &= 0.07 \quad \text{para} \quad f \leq \tfrac{1}{1.296T} \\ \sigma_b &= 0.09 \quad \text{para} \quad f > \tfrac{1}{1.296T} \end{aligned} \tag{4.19}$$

En las expresiones anteriores, T y H denotan el periodo medio y la altura de ola significativa definidos respectivamente como

$$\bar{T} = T_{01} = \frac{m_0}{m_1} \tag{4.20}$$

y

$$H_s = H_{m_0} = 4\sqrt{m_0} \tag{4.21}$$

y corregidos mediante los factores F_1 y F_2. La introducción de estos factores de corrección es debida a que el espectro JONSWAP no fué definido en términos del periodo medio, ni de la altura significativa. Así, para poder expresar dicho espectro en términos de estos parámetros espectrales, Ewing (Hobgen et al., 1976) estimó

Tabla 4.2: Relaciones entre m_0 y m_1 para los espectros PM y J en función de γ.

γ	$F_1 = \frac{m_{0_J}}{m_{0_{PM}}}$	$F_2 = \frac{(m_1/m_0)_J}{(m_1/m_0)_{PM}}$
1.0	1.00	1.00
2.0	1.24	0.95
3.0	1.46	0.93
3.3	1.52	0.92
4.0	1.66	0.91
5.0	1.86	0.90
6.0	2.04	0.89

numéricamente los momentos espectrales de orden cero y uno para el espectro PM y el JONSWAP en función del parámetro de apuntamiento del pico espectral, γ, considerando los valores medios de σ en el rango $(0.5f_p - 10f_p)$, obteniendo los resultados mostrados en la tabla 4.2. De este modo, T_i y H_i vienen dados por

$$T_i = \frac{\bar{T}_i}{F_2} \tag{4.22}$$

y

$$H_i = \frac{H_{s_i}}{\sqrt{F_1}} \tag{4.23}$$

Considerando que los momentos espectrales del espectro bimodal son iguales a la suma de los momentos espectrales de cada sistema de oleaje

$$\begin{aligned} m_0 &= m_{0_s} + m_{0_w} \\ m_1 &= m_{1_s} + m_{1_w} \end{aligned} \tag{4.24}$$

Sustituyendo las expresiones de H_s y $\bar{T}$ en las igualdades anteriores es posible obtener las alturas de ola significativa y los periodos medios correspondientes a cada sistema de oleaje en términos de los valores asociados al oleaje resultante de la combinación de los mismos. Esto es,

$$H_{s_s} = \sqrt{\frac{H_R^2}{1+H_R^2}} H_s \tag{4.25}$$

$$H_{s_w} = \sqrt{\frac{1}{1+H_R^2}} H_s \tag{4.26}$$

$$\bar{T}_s = \left(\frac{T_R + H_R^2 T_R}{1+H_R^2} \right) \bar{T} \tag{4.27}$$

$$\bar{T}_w = \left(\frac{1 + \frac{H_R^2}{T_R}}{1+H_R^2} \right) \bar{T} \tag{4.28}$$

donde H_R y T_R representan los cocientes de las alturas significativas y los periodos medios de los sistemas de oleaje individuales, es decir

$$H_R = \frac{H_{s_s}}{H_{s_w}} \tag{4.29}$$

$$\bar{T} = \frac{\bar{T}_s}{\bar{T}_w} \tag{4.30}$$

Por otro lado, anulando la primera derivada de $S_i(f)$ se puede obtener la siguiente relación entre las densidades espectrales máximas de cada sistema de oleaje

$$S_R = \frac{S_s(f_p)}{S_w(f_p)} = \frac{H_{s_s}^2 T_{p_s}}{H_{s_w}^2 T_{p_w}} = H_R^2 T_R \tag{4.31}$$

Nótese que en la expresión anterior T_R es la relación entre los periodos de pico y no entre los periodos medios.

La obtención de las frecuencias de pico y las densidades espectrales correspondientes a partir de los espectros estimados resulta relativamente simple. De este modo, la determinación de los valores de S_R y T_R resulta inmediata y, a partir de éstos, la de H_R, que conjuntamente con T_R, H_s y $\bar{T}$, son los 4 parámetros necesarios para definir completamente el modelo espectral dado por la ecuación (4.16).

Puesto que la determinación de los periodos medios a partir de los espectros estimados no resulta tan simple como la estimación directa de los periodos de pico, y que las relaciones entre ambos periodos son púramente empíricas, parece razonable emplear únicamente el periodo de pico. Así, Guedes-Soares y Henriques (1998) modifican ligeramente el modelo espectral anterior, introduciendo como periodo único periodo espectral el correspondiente al máximo de la densidad espectral de cada sistema de oleaje. De esta forma el modelo espectral adopta la siguiente formulación

$$S(f) = \sum_{i=1}^{2} \left\{ 0.3125 H_{s_i}^2 T_{p_i} (T_{p_i} f)^{-5} \exp\left[-1.25 (T_{p_i} f)^{-4}\right] (3.3)^{\exp\left[-\frac{(T_{p_i} f - 1)^2}{2\sigma^2}\right]} \right\} \quad (4.32)$$

Este modelo espectral queda definido por cuatro parámetros, H_{s_s}, H_{s_w}, T_{p_s}, T_{p_w}, que pueden ser obtenidos de forma aproximada a partir de las relaciones entre los periodos de pico, T_R, las densidades espectrales máximas, S_R, y las alturas de ola significativas, H_R, correspondientes a cada sistema individual de oleaje, dadas por

$$T_R = \frac{T_{p_s}}{T_{p_w}} \quad (4.33)$$

$$S_R = \frac{S(f_p)_s}{S(f_p)_w} \quad (4.34)$$

$$H_R = \frac{H_{s_s}}{H_{s_w}} \sqrt{\frac{S_R}{T_R}} \quad (4.35)$$

Es interesante notar que la expresión de H_R es obtenida admitiendo la relación

$$\frac{m_{0_s}}{m_{0_w}} = \frac{S_s(f_p) f_{p_s}}{S_w(f_p) f_{p_w}} \quad (4.36)$$

que en realidad sólo puede ser admitida como una simple primera aproximación. Además, es importante resaltar que, si bien su ajuste a un espectro observado resulta relativamente sencillo, este modelo espectral no resulta especialmente eficiente para ajustar los espectros observados en el mar, debido al apuntamiento y anchuras fijas asignadas a los picos espectrales de los dos sistemas de oleaje superpuestos.

Espectro de Hawkes et al.

Un procedimiento semejante al usado por Guedes-Soares ha sido empleado por Hawkes et al. (1997) para estudiar las condiciones de oleaje en forma de swell y bimodal en las costas de Inglaterra y Gales. El modelo empleado en este caso consiste en la superposición de dos espectros JONSWAP medio y adopta la siguiente expresión

$$S(f) = \sum_{i=1}^{2} \left[\alpha H_{m0_i}^2 f_{p_i}^4\right] f^{-5} \exp\left[-\frac{5}{4}\left(\frac{f}{f_{p_i}}\right)^{-4}\right] \gamma^{\exp\left[-\frac{(f-f_{p_i})^2}{2\sigma^2 f_{p_i}^2}\right]} \tag{4.37}$$

donde

$$\alpha = 0.032 \left(\frac{f_p U}{g}\right)^{2/3} \tag{4.38}$$

siendo U la velocidad del viento a la altura estándar de 10 m sobre el nivel medio del mar. Además, $\sigma_a = 0.07$, $\sigma_b = 0.09$ y $\gamma = 3.3$.

Espectro de Thorsethaugen

Partiendo del análisis de una gran base de datos registrados en las costas de Noruega, Torsethaugen (1993, 1996), propone un modelo espectral para caracterizar estados de mar bimodales, en el cual cada pico del espectro es descrito mediante un espectro JONSWAP generalizado. En este modelo cada estado de mar es clasificado como dominado por el swell, o dominado por el oleaje de viento, de acuerdo con el siguiente criterio

$$\begin{cases} \text{Swell dominante} & \text{si} \quad T_p > T_f \\ \text{Wind-sea dominante} & \text{si} \quad T_p \leq T_f \end{cases} \qquad \text{donde} \quad T_f = a_f H_{m0}^{1/3} \tag{4.39}$$

donde T_p es el periodo de pico y a_f una constante que, para los resultados del experimento JONSWAP, toma el valor $a_f = 6.6$.

El modelo espectral básico utilizado para caracterizar cada parte del espectro adopta la siguiente expresión

$$S(f) = \frac{H_{m_0}^2}{16 f_p} G_0 A_\gamma \Gamma_s(f_n; N, M) \gamma_F(f_n; \gamma, \sigma) \tag{4.40}$$

donde $f_n = f/f_p$ es la frecuencia normalizada. El término Γ_s adopta la expresión

$$\Gamma_s(f_n) = f_n^{-N} \exp\left[-(N/M) f_n^{-M}\right] \tag{4.41}$$

$$\gamma_F(f_n) = \gamma^{\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(f_n^{-1})^2\right]} \tag{4.42}$$

donde

$$\begin{aligned} \sigma &= 0.07 \quad \text{para} \quad f_n < 1 \\ \sigma &= 0.09 \quad \text{para} \quad f_n \geq 1 \end{aligned} \tag{4.43}$$

El factor de normalización G_0 está relacionado con la formulación PM (3.40) y adquiere la expresión

$$G_0 = \left[\left(\frac{1}{M}\right)\left(\frac{N}{M}\right)^{-(N-1)/M} \Gamma\left(\frac{N-1}{M}\right)\right]^{-1} \tag{4.44}$$

donde Γ es la función gamma, N representa el exponente de la frecuencia en el rango de altas frecuencias del espectro y M es el exponente de la frecuencia en la función de forma del espectro PM (3.41). El factor A_γ es una función del parámetro de intensificación del pico espectral γ, de N y M. El valor de dicho factor debe ser obtenido mediante integración numérica del espectro para diferentes valores de γ, N y M. Torsethaugen (1993) obtiene, mediante análisis de regresión con los datos experimentales antes mencionados, la siguiente expresión aproximada para este factor

$$A_\gamma \gamma - 1 = f_1(N, M)(\ln \gamma)^{f_2(N,M)} \tag{4.45}$$

donde las funciones f_1 y f_2 son obtenidas mediante relaciones empíricas, en función de M y N.

Con el fin de simplificar el complicado procedimiento requerido para estimar los parámetros del modelo, Torsethaugen (1993) considera los valores $M = 4$ y $N = 4$, para los cuales, en cuyo caso

$$A_\gamma \gamma - 1 = 4.1(N + 2.35)^{-0.71}[\ln \gamma]^{0.59N^{0.45}+0.87} \tag{4.46}$$

Naturalmente, la aplicación de este modelo, además de considerablemente dificultosa, requiere la estimación de varios factores empíricos. Por ello su uso debe estar precedido de la evaluación de dichos factores en cada localización específica donde se desee emplear.

En consecuencia, de acuerdo con Bitner-Gregersen y Hagen (2002), el uso de modelos con varios parámetros libres, como el modelo OH, permitirá un mejor ajuste a los espectros obtenidos experimentalmente que el ofrecido por este modelo. Además, debe notarse que éste fija las constantes M y N, y asume la hipótesis de ancho de banda espectral estrecha al admitir la relación $H_{m_0} = 4\sqrt{m_0}$.

Espectro Gamma bimodal

Recientemente Lupatoukhin et al. (2002) sugieren emplear el espectro Gamma (3.54), $S_\Gamma(f)$, para caracterizar oleajes multimodales. En particular, para oleajes bimodales, sugieren la superposición de dos espectros de este tipo. Es decir

$$S(f) = \sum_{i=1}^{2} S_\Gamma(f)_i = \sum_{i=1}^{2} m_{0_i} \frac{n_i}{f_{p_i}} \left(\frac{f}{f_{p_i}}\right)^{-n_i} \exp\left[-\left(\frac{n_i}{n_i - 1}\right)\left(\frac{f}{f_{p_i}}\right)^{1-n_i}\right] \tag{4.47}$$

Tal como se comentó en la sección [3.1.3], es importante notar que en este modelo espectral tanto el comportamiento asintótico en la cola de altas frecuencias como el apuntamiento del espectro y la pendiente en la cara trasera del espectro, son controlados por el valor del parámetro n. En consecuencia, la estructura del espectro bimodal resultante de la superposición de dos de estos espectros depende fundamentalmente de los valores de éste parámetro para cada subespectro. Además, debe notarse que el valor de éste parámetro fija el valor del exponente de la frecuencia y el de la constante multiplicadora correspondientes a la función de forma.

Espectros Gaussiano Mixto y Rectangular

Algunos trabajos han empleado para caracterizar espectros bimodales una combinación de espectros con la estructura de una función de densidad de probabilidad Gaussiana. Así, por ejemplo, Lindgren y Rychlik (1982) emplean la siguiente formulación espectral para estudiar la distribución conjunta de alturas y periodos en condiciones de oleaje con espectro bimodal

$$S(f) = c_1 \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma_1} \exp\left[-\frac{2\pi^2(f - f_{p_1})^2}{\sigma_1^2}\right] + c_2 \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma_2} \exp\left[-\frac{2\pi^2(f - f_{p_2})^2}{\sigma_2^2}\right] \qquad (4.48)$$

donde σ_1^2 y σ_2^2 representan las varianzas correspondientes a cada uno de los términos del espectro. C_1 y C_2 son constantes que definen la relación entre las energías totales asociadas a cada uno de los subespectros, de modo que

$$C_1 + C_2 = 1$$

La figura 4.8 muestra un ejemplo del modelo espectral dado por (4.48). Naturalmente, aunque puede resultar válido para realizar estudios aproximados sobre el efecto de una estructura espectral bimodal en determinadas propiedades estadísticas del oleaje aplicando técnicas de simulación numérica, en general, este modelo no resultará adecuado para caracterizar los espectros bimodales observados en la naturaleza. Nótese que la estructura espectral dada por este modelo no está basada en ningún fundamento teórico, o al menos experimental, sobre la estructura espectral del oleaje, de modo que en él no se incorpora ninguno de los aspectos característicos del espectro del oleaje, tales como el comportamiento el rango de altas frecuencias.

En este sentido, en estudios basados en simulación numérica, también es frecuente el uso de un espectro bimodal constituido por dos espectros rectangulares, o espectros de ruido blanco de banda limitada. En el caso unimodal este tipo de espectro está definido por

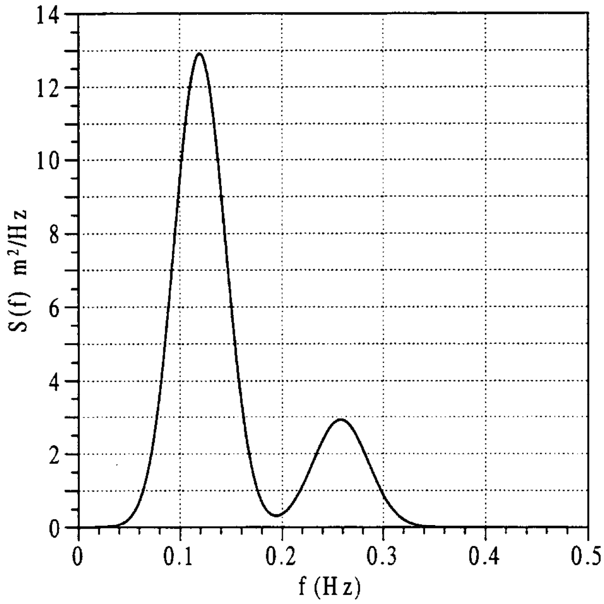

Figura 4.8: Espectro bimodal de tipo Gaussiano

$$S(f) = \begin{cases} S_0 & f_l \leq f \leq f_u \\ \\ 0 & f_l > f > f_u \end{cases} \tag{4.49}$$

donde S_0 es un valor constante, f_l y f_u son los límites inferior y superior de la banda de frecuencias con densidad espectral no nula, tal como se ilustra en la figura 4.9.

Denotando por δ_x el ancho de banda frecuencial, es decir

$$\delta_x = f_u - f_l \tag{4.50}$$

es posible definir una frecuencia central, f_c, como

$$f_c = f_l + \frac{1}{2}(f_u - f_l) = f_l + \frac{1}{2}\delta_x \tag{4.51}$$

Además, teniendo en cuenta que la relación entre el número de puntos de la serie temporal, N, y el incremento temporal entre puntos sucesivos, Δt, estan relacionados con el incremento frecuencial, Δf, del espectro discreto mediante la expresión

$$\Delta f = \frac{1}{N\Delta t} \tag{4.52}$$

se tiene que el número de lineas o componentes frecuenciales del espectro discreto viene dado por

$$N = \frac{\delta_x}{\Delta f} \tag{4.53}$$

mientras la varianza del proceso queda definida por

$$m_0 = \sum_{n=0}^{\infty} S(f_n)\Delta f = S_0\delta_x \tag{4.54}$$

Siguiendo la metodología anterior, en el caso de un espectro bimodal, la función de densidad espectral puede ser expresada mediante la expresión genérica (4.1), donde los espectro correspondiente a bajas, $S_s(f)$, y altas frecuencias, $S_w(f)$, adoptan las expresiones

$$S_s(f) = \begin{cases} S_{0s} & f_{ls} \leq f \leq f_{us} \\ \\ 0 & f_{ls} > f > f_{us} \end{cases} \tag{4.55}$$

$$S_w(f) = \begin{cases} S_{0w} & f_{lw} \leq f \leq f_{uw} \\ \\ 0 & f_{lw} > f > f_{uw} \end{cases} \tag{4.56}$$

con $f_{us} < f_{lw}$. El significado de cada uno de los parámetros incluidos en las expresiones anteriores se ilustra en la figura 4.9.

El ancho de banda de frecuencial correspondiente al espectro de bajas frecuencias vendrá dado por

$$\delta_s = f_{us} - f_{ls} \tag{4.57}$$

mientras que el asociado al espectro de altas frecuencias será

$$\delta_w = f_{uw} - f_{lw} \tag{4.58}$$

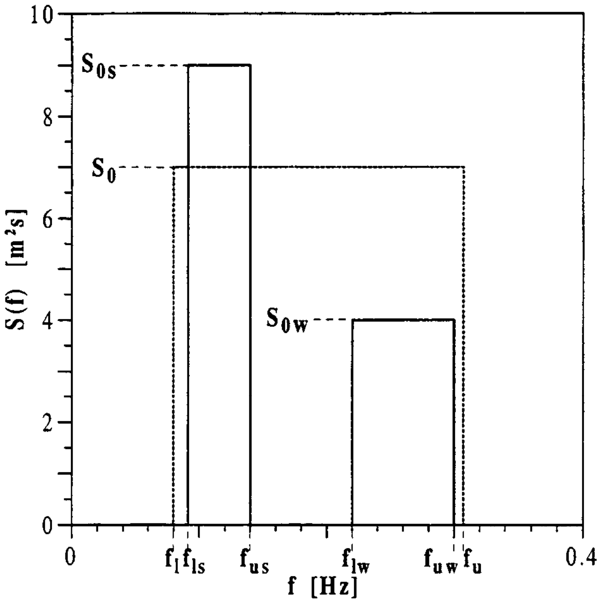

Figura 4.9: Espectro rectangular unimodal (línea discontínua) y espectro rectangular bimodal (línea contínua).

4.1.2 Rango de equilibrio espectral

En los modelos comentados anteriormente, sugeridos para caracterizar espectros bimodales, se admite un valor constante del exponente que gobierna el comportamiento del espectro en el rango de altas frecuencias. Sin embargo, ya en el capítulo anterior se puso de manifiesto la enorme variabilidad presentada por dicho exponente y la incertidumbre existente en relación a su valor más acecuado, si es que existe un único valor. En esta sección se añadirán aún más evidencias en relación con este problema, con el fin de justificar la conveniencia de mantener dicho parámetro como parámetro libre a la hora de intentar ajustar un determinado modelo espectral a los espectros registrados de forma rutinaria.

Tal como se desprende de los comentarios realizados en la sección [3.1.2], la mayor parte de los estudios sobre este aspecto del oleaje están basados en observaciones experimentales obtenidas durante experimentos realizados durante periodos con condiciones de viento idóneas en grandes Lagos, Golfos o mares semicerrados en los que la presencia del swell pueda ser descartada. Sin embargo, resulta obvio que éstas no son las condiciones encontradas generalmente en el mar. No obstante, incluso en experimentos de este tipo se han confirmado las mencionadas variabilidad e incertidumbre. Así, por ejemplo, Liu (1989) analiza el comportamiento del espectro en el rango de altas frecuencias examinando 2260 espectros correspondientes a oleajes bien desarrollados registrados en los grandes lagos de Estados Unidos. Para realizar el ajuste de los rangos de altas frecuencias de los espectros observados a diferentes valores del exponente sugiere emplear la siguiente expresión para caracterizar el rango de equilibrio

$$S(f) = \alpha_n (2\pi)^{-n+1} g^{n-3} u_*^{5-n} f^{-n} \tag{4.59}$$

de modo que, si un valor dado de n es el exponente correcto, la normalización

$$S(f)(2\pi)^{n-1} g^{-n+3} u_*^{-5+n} f^{n} \tag{4.60}$$

debe ser constante e independiente de la frecuencia en la zona de altas frecuencias. Los resultados del análisis de la cola de altas frecuencias empleando esta metodología revelan que, incluzo en zonas como los grandes lagos y bajo condiciones de oleajes bien desarrollados, existe una elevada variabilidad en los valores del exponente que controla la pendiente en esta zona del espectro, tal como se muestra en la figura 4.10. En consecuencia, dicho autor concluye que, aunque sugiere que para aplicaciones prácticas una representación del tipo f^{-4} podría ser útil, el valor de este exponente, si es que exíste un único valor correcto, continúa siendo desconocido.

Por otro lado, Violante-Carvalho et al. (2001) analizan un conjunto de 5807 espectros registrados en *Campos Basin*, costa este de Brasil, frente a Rio de Janeiro. El conjunto de datos corresponde a un periodo de 26 meses, comprendidos entre marzo de 1991 y marzo de 1993. El análisis de los datos muestra que sólo un 25%, aproximadamente, de los espectros son unimodales, mientras que la inmensa mayoría presenta dos o más picos.

Para examinar el comportamiento en la cola de altas frecuencias, dichos autores seleccionan únicamente 243 espectros correspondientes a campos de oleaje de viento, eliminando todos aquellos en los que, supuestamente existe swell. Sin embargo, aún

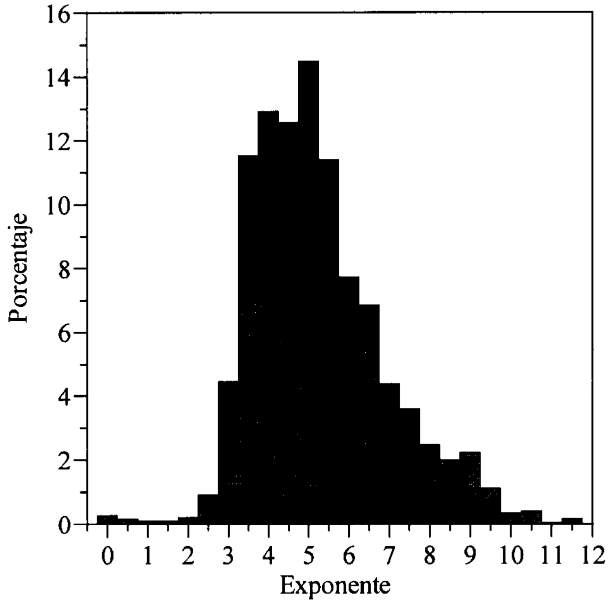

Figura 4.10: Frecuencia de presentación en porcentaje de los exponentes n obtenidos ajustando el rango de altas frecuencias de los espectros observados a una recta logarítmica del tipo f^{-n} (Liu, 1989).

eliminando todos aquellos espectros en los que aparece claramente oleaje de fondo, los resultados revelan que, aunque para un porcentaje significativo de los valores del exponente se encuentran entre -4 y -6, no existe un valor del exponente que pueda ser considerado como predominante, sino que estos varían desde -1, hasta valores inferiores a-10, tal como se muestra en el histograma de la figura 4.11, en el cual los valores de n inferiores a -10 han sido agrupados conjuntamente en el intervalo con esta marca de clase.

Partiendo de datos empíricos procedentes de diferentes fuentes y admiendo que un campo de oleaje de viento evoluciona rápidamente hacia un equilibrio local, Toba (1972), con base en fundamentos de análisis dimensional y de semejanza para el oleaje de viento, propuso la siguiente relación

$$H^* = BT^{*^{3/2}} \tag{4.61}$$

donde B es una constante ($B = 0.062$), mientras que H^* y T^* denotan la altura y

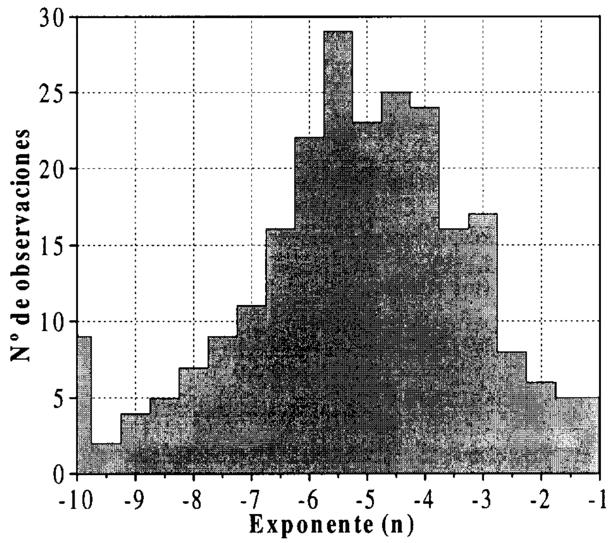

Figura 4.11: Frecuencia de presentación absoluta del exponente n obtenido para 243 casos seleccionados de oleaje de viento (Violante-Carvalho et al., 2001).

el periodo significativos adimensionales, cuyas expresiones son

$$H^* = \frac{gH_s}{u_*^2} \quad ; \quad T^* = \frac{gT_s}{u_*} \tag{4.62}$$

siendo H_s y T_s la altura y el periodo significativos, respectivamente. La expresión (4.61) recibe el nombre de ley de la potencia 3/2.

Posteriormente, Toba (1973) admite que para el oleaje de viento puro existe semejanza, es decir que si la función de densidad espectral, $S(f)$, es normalizada con su valor máximo, $S(f_p)$, y la frecuencia, f, con la frecuencia asociada al pico espectral, f_p, los espectros de oleaje de viento adquieren la misma forma. Asumiendo este concepto y combinándolo con la ley de la potencia 3/2, este autor propone la ley de potencias dada por la ecuación (3.26) para el rango de equilibrio del oleaje de viento. En consecuencia, se debe notar que, aunque la ley de la potencia 3/2 describe un equilibrio entre el viento y el oleaje de viento a partir de parámetros característicos de todo el campo de oleaje, ésta es consistente con la ley de potencias f^{-4} sugerida para caracterizar el equilibrio en el rango de altas frecuencias.

Haciendo uso de la relación (4.61), Ebuchi et al. (1992) examinan la existencia de un equilibrio entre el viento y el oleaje analizando registros experimentales obtenidos mediante cuatro boyas instaladas en aguas próximas a Japón. Para ello, admiten que para que se verifique la condición de equilibrio, el coeficiente de la ley de los 3/2, debe estár limitado dentro de un rango de ±20%. Es decir,

$$B = \frac{H^*}{T^{*3/2}} = 0.062 \pm 0.012 \tag{4.63}$$

El número total de espectros examinados es de 19.921, distribuidos de forma prácticamente equitativa entre las cuatro estaciones de medida empleadas, y correspondientes al periodo entre 1987 y 1989. Representando los resultados en un diagrama $H^* - T^*$, si un par de valores dado corresponde a un campo de oleaje en equilibrio con el viento local, el punto correspondiente debería caer dentro de la zona definida por la ecuación (4.63). Por el contrario, si la condición de equilibrio (4.63) no es satisfecha, se situará fuera de élla. En particular, si existe un oleaje de fondo, éste no estará en equilibrio con el viento local y, en consecuencia, el periodo T_s observado será mayor que el predicho a partir del valor de H_s asumiendo un oleaje de viento puro. En tal caso, el punto estará localizado por debajo de la línea de la ley de los 3/2, tal como se ilustra de forma esquemática en la figura 4.12.

Los resultados obtenidos por Ebuchi et al. (1992) revelan que en la mayoría de los casos los valores de B son menores que el límite inferior del criterio (4.63), poniendo de manifiesto la presencia de oleajes de fondo dominantes sobre el oleaje de viento. Es decir, a lo largo del año, el swell es más dominante que el oleaje de viento en los mares próximos a Japón. Según los resultados de estos autores, en los mares entorno a Japón, sólo el 6%, aproximadamente, de las condiciones de oleaje a lo largo de año pueden ser consideradas como oleaje de viento puro.

Por otro lado, la clasificación de los registros en función de la altura de ola revela que sólo para estados de mar con $H_s > 4$ m se satisface adecuadamente el criterio de equilibrio local. En estas condiciones el oleaje de viento llega a ser dominante. En este sentido es importante resaltar que, aunque bajo estas condiciones de vientos fuertes, las menos frecuentes, la condición de equilibrio dada por (4.63) sea satisfecha, ello no implica que el swell no esté presente, sino que el oleaje de viento es mucho más energético que éste.

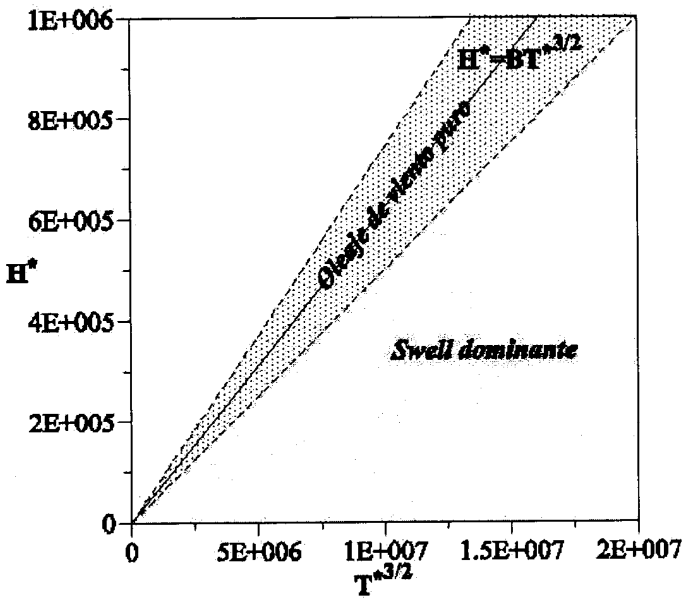

Figura 4.12: Ilustración esquemática de los rangos de oleaje de viento puro y swell dominante, en relación a la ley de los 3/2.

En la figura 4.13 se muestra el histograma correspondiente a los valores del exponente de la frecuencia en el rango de altas frecuencias estimado mediante el análisis de 11.359 espectros correspondientes a las boyas LP-I y LP-II, durante 1996. Es importante indicar que con el objeto de obtener las pendientes reales observadas en la naturaleza, no se ha discernido sobre espectros unimodales o multimodales. En dicha figura se observa que, si bien existe una tendencia de los valores del exponente, n, a concentrarse entorno al rango entre 3 y 4, existe una dispersión sustancial, con un valor medio de 3.38 y, aproximadamente, el 50% de las observaciones comprendidas entre 3 y 4. Los valores del sesgo y la curtosis, dados en la tabla 4.3, reflejan una tendencia a la presentación de valores notablemente más altos que la media y un fuerte apuntamiento de la distribución. El valor del sesgo positivo indica la existencia de pendientes considerablemente altas, con valores que llegan hasta 12, y pone de manifiesto la existencia de condiciones de oleaje de fondo prácticamente puros en la zona de estudio, puesto que en estos casos la cola de altas frecuencias del espectro cae más rapidamente que en el caso del oleaje de viento.

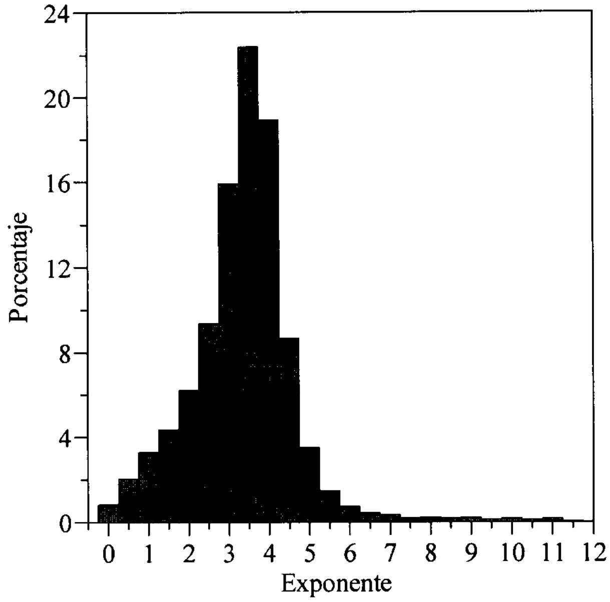

Figura 4.13: Frecuencia de presentación en porcentaje de los exponentes n obtenidos ajustando el rango de altas frecuencias de los espectros observados en las boyas LP-I y LP-II a una recta logarítmica del tipo f^{-n}.

Por otro lado, los valores de n menores que 4 sugieren la presencia de estados de mar combinados con predominio del oleaje de fondo. En estos casos la pendiente estimada es menor por superponerse un oleaje de viento en la zona de altas frecuencias, mientras la frecuencia de pico corresponde al swell. Es interesante notar que estos resultados están en concordancia con los observados en los trabajos anteriormente comentados. Sin embargo, aunque la tendencia central y la dispersión son similares, se observa que la asimetría de la distribución mostrada en la figura 4.13 es inversa a la de los histogramas representados en las figuras 4.10 y 4.11. Obviamente, este hecho se debe a que en dichos trabajos la presencia del oleaje de fondo no era significativa. En particular, los resultados de Liu (1989) corresponden a medidas realizadas en los Grandes Lagos (figura 4.10), donde el oleaje de fondo es prácticamente inexistente. Por el contrario, los resultados obtenidos por Violante-Carvalho et al. (2001), corresponden a medidas en mar abierto en una zona donde el swell suele ser dominante, pero debe recordarse que en dicho estudio se eliminaron

Tabla 4.3: Estadísticos de las distribuciones empíricas para el exponente n obtenidos a partir de las observaciones de las boyas LP-I y LP-II durante 1996, individual y conjuntamente.

Boya	Nº datos	$\bar{n}$	n_{mod}	n_{med}	Q_1	Q_3	λ_3	λ_4
LP-I + LP-II	11.359	3.38	3.50	3.44	2.72	4.01	1.12	5.82
LP-I	6.116	3.24	3.50	3.30	2.69	3.77	0.80	5.98
LP-II	5.243	3.55	4.00	3.69	2.78	4.20	1.04	4.37

todos aquellos registros en los que la existencia del oleaje de fondo era evidente. De este modo se elimina en gran medida la posibilidad de que un swell dominante se encuentre combinado con un oleaje de viento de menor intensidad.

Las figuras 4.14 y 4.15, muestran los resultados correspondientes únicamente a los registros de la boya LP-I, al norte de Gran Canaria, mientras que las figuras 4.16 y 4.17 ilustran los correspondientes a la boya LP-II, localizada al noreste de la isla. Las figuras 4.14 y 4.16 representan los histogramas, en forma de porcentaje, para cada una de las boyas, y las figuras 4.15 y 4.17 muestran los valores obtenidos para el exponente en forma cronológica.

En este momento es interesante recordar los comentarios realizados en la sección [2.3], según los cuales, el efecto del oleaje de fondo es mucho más intenso en la boya LP-I que en la LP-II, debido a que ésta última se encuentra notablemente protegida del swell procedente del NNW, especialmente durante los meses de invierno, mientras que el oleaje de viento afecta de modo similar en ambas zonas.

En consecuencia, la distribución de los valores del exponente n en LP-I presenta su valor modal situado en 3.5, mientras que en la distribución correspondiente a LP-II éste se sitúa en 4. Es decir, las condiciones de oleaje de viento con perturbación nula, o escasa, por presencia de oleaje de fondo son más frecuentes en la zona noreste. Además, las figuras 4.16 y 4.17 reflejan con bastante claridad la mayor dispersión de los valores de n, respecto al valor medio, en la boya LP-II, hecho que se manifiesta en el mayor apuntamiento presentado por la distribución de LP-I (ver tabla 4.3), y

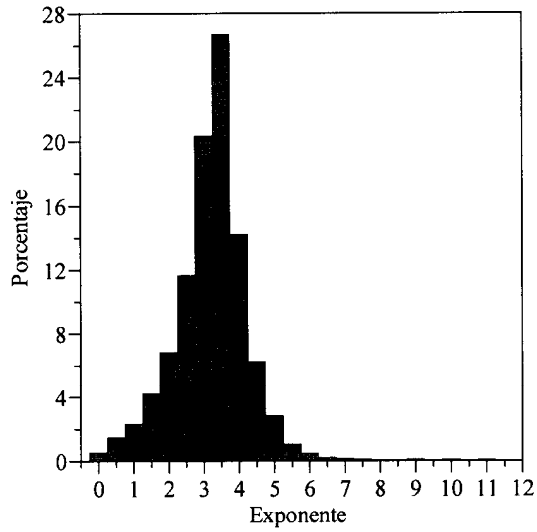

Figura 4.14: Frecuencia de presentación en porcentaje de los exponentes n obtenidos ajustando el rango de altas frecuencias de los espectros observados en la boya LP-I a una recta logarítmica del tipo f^{-n}.

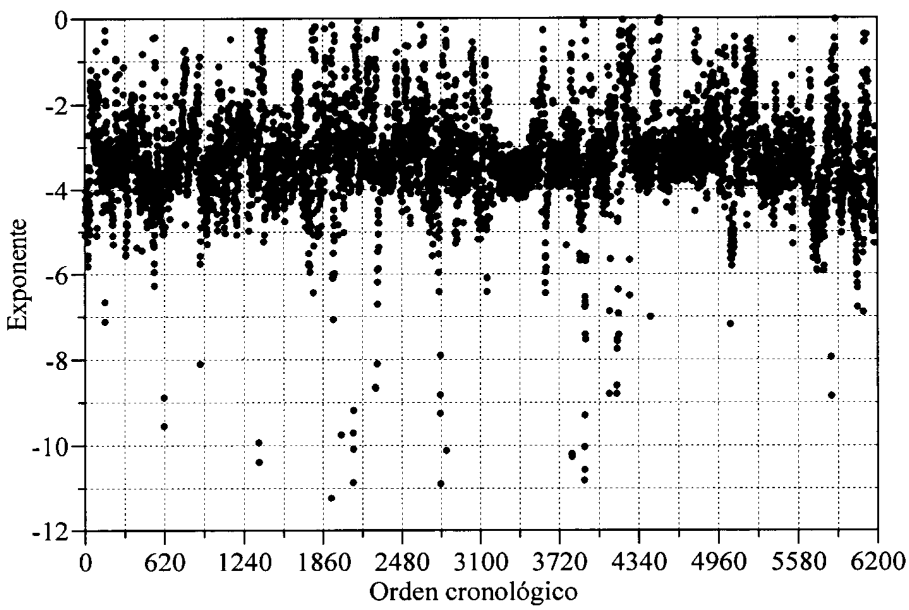

Figura 4.15: Secuencia de valores del exponente n obtenidos ajustando el rango de altas frecuencias de los espectros observados en la boya LP-I durante 1996 a una recta logarítmica del tipo f^{-n}.

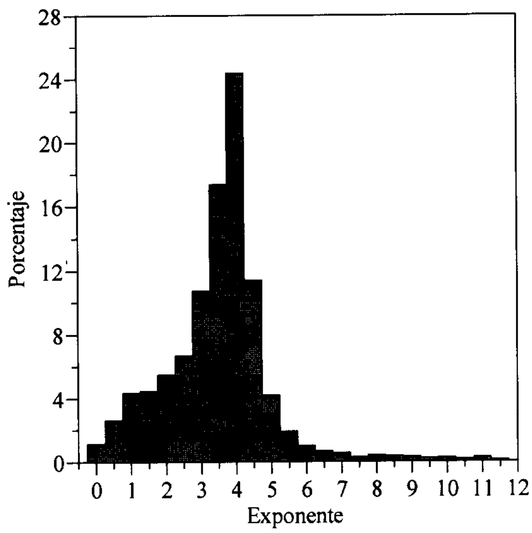

Figura 4.16: Frecuencia de presentación en porcentaje de los exponentes n obtenidos ajustando el rango de altas frecuencias de los espectros observados en la boya LP-II a una recta logarítmica del tipo f^{-n}.

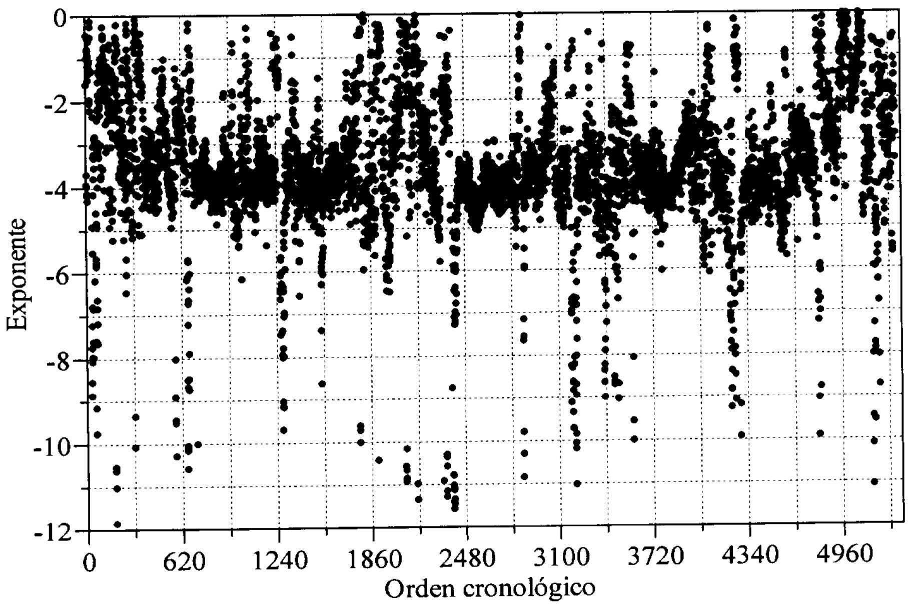

Figura 4.17: Secuencia de valores del exponente n obtenidos ajustando el rango de altas frecuencias de los espectros observados en la boya LP-II durante 1996 a una recta logarítmica del tipo f^{-n}.

en la mayor distancia intercuartílica ($\Delta Q = Q_3 - Q_2$) en la distribución de LP-II. Nótese que tanto el valor medio como la mediana son superiores en LP-II, con valores más próximos a los valores esperados en condiciones de oleaje de viento puro ($n \approx 4 - 5$). También el sesgo de la distribución es mayor en esta última boya que en LP-I, lo cual indica una menor preponderancia del oleaje de fondo en la zona noreste, tal como era de esperar.

En definitiva, los valores del exponente de la frecuencia para el rango de altas frecuencias parecen poner de manifiesto un elevado porcentaje de situaciones en las que el oleaje existente está compuesto por más de un sistema de oleaje individual, especialmente en el norte de la isla, donde el oleaje de fondo es especialmente dominante. No obstante, estos comentarios serán avalados con los resultados de otros análisis presentados posteriormente.

4.1.3 Estructura del espectro en el rango de bajas frecuencias

Tal como se ha comentado previamente, el espectro del oleaje de viento se caracteriza por presentar, en general, una caida proporcional a una potencia negativa de la frecuencia ($n \approx 4 - 5$) en el rango de frecuencias sustancialmente superiores a la frecuencia de pico, y una subida brusca en la zona de bajas frecuencias. Sin embargo, mientras la pendiente del espectro en el rango de altas frecuencias ha sido bastante estudiada, no ocurre lo mismo con la correspondiente a la zona de bajas frecuencias.

La pendiente del espectro en la zona de frecuencias menores a la frecuencia del pico espectral está gobernada por el exponente que afecta a la frecuencia en el término exponencial, o función de forma, dado por

$$S(f) = \exp\left[-C\left(\frac{f}{f_p}\right)^{-m}\right] \qquad ; \quad f \leq f_p$$

En la inmensa mayoría de los modelos espectrales propuestos hasta la fecha, este exponente toma el valor $m = 4$. En particular, los modelos de Bretschneider, Pierson-Moskowitz y JONSWAP, los más empleados en la práctica durante los últimos cincuenta años, caracterizan la estructura del espectro en la cara anterior del pico espectral mediante la expresión

$$S(f) = \psi_{PM}\left(\frac{f}{f_p}\right) = \exp\left[-\frac{5}{4}\left(\frac{f}{f_p}\right)^{-4}\right] \quad ; \quad f \leq f_p$$

En la figura 4.18 se representa la variación de dicho término exponencial en función del valor del exponente. Resulta evidente que un incremento del exponente provoca un crecimiento más rápido del contenido energético. La ampliación de la zona correspondiente a valores de la frecuencia menores que la frecuencia de pico permite observar con mayor claridad tal efecto.

Por otro lado, estos modelos fijan el valor de la constante C en $5/4$. No obstante, resulta interesante observar que algunos de los modelos espectrales comentados anteriormente, tales como el Wallops y el Ochi-Hubble, dejan este parámetro parcialmente libre, aunque dependiente del exponente del rango de altas frecuencias, mientras mantienen constante el exponente del término exponencial. Aunque, evidentemente, el efecto de la variación de la constante C es simplemente producir un desplazamiento de la función en el eje de frecuencias, tal como se muestra en la figura 4.19a, en la práctica este desplazamiento implica una modificación de la posición ocupada por la frecuencia del pico espectral y una intensificación del contenido energético en esta zona, tal como se ilustra en la figura 4.19b. Nótese que la disminución de esta constante, en relación al valor estándar $5/4$, produce un desplazamiento de la posición del pico espectral hacia bajas frecuencias y un incremento del contenido energético en esa banda de frecuencias. Por el contrario, el aumento de dicha constante desplaza hacia frecuencias más altas la posición del máximo espectral y provoca un descenso en el contenido energético.

A partir del análisis de registros de oleaje de larga duración obtenidos en el Mar del Norte, durante ocho tormentas con altura de ola significativa superior a 8 metros, Arhan (1979) encontró una gran dificultad para ajustar correctamente un espectro JONSWAP a los espectros calculados. Dicho autor observó que, en general, resultaba imposible obtener al mismo tiempo un buen ajuste del rango de altas frecuencias, una posición correcta de la frecuencia de pico, y ajustar la zona

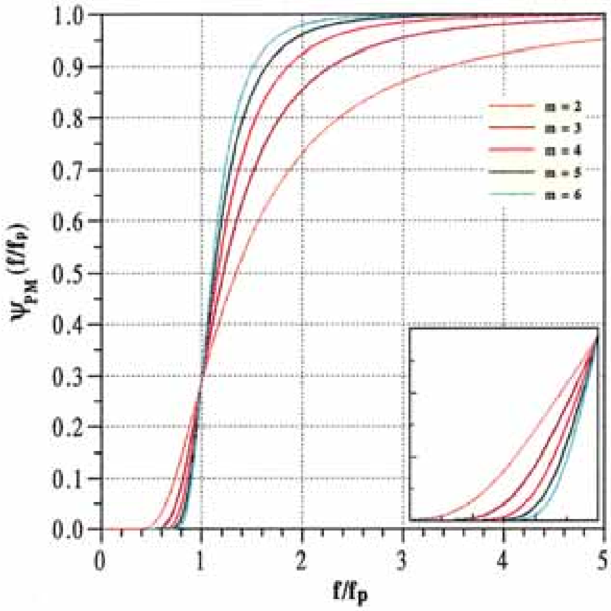

Figura 4.18: Evolución de la pendiente del espectro en el rango de bajas frecuencias en función del valor del exponente m.

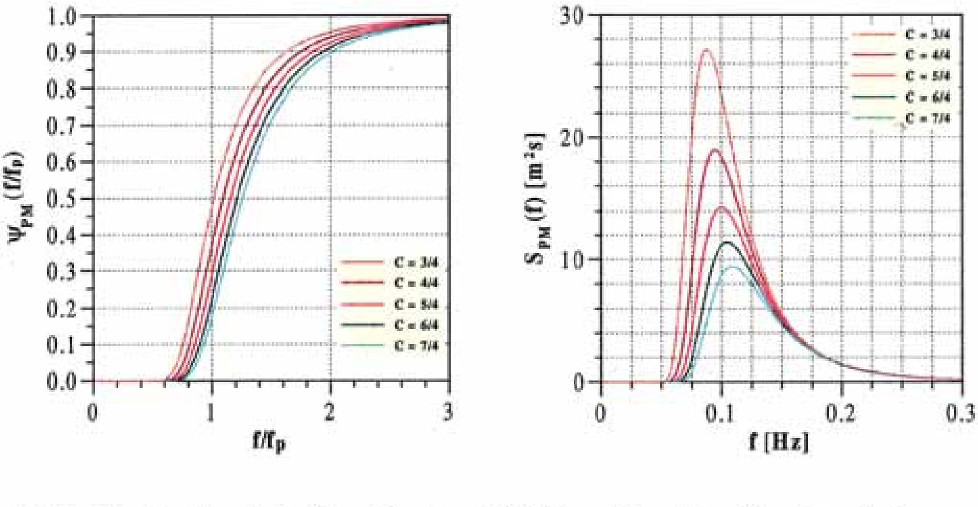

Figura 4.19: Evolución de la función $\psi_{PM}(f/f_p)$ en función del valor de la constante C (a). Desplazamiento de la posición del máximo de la densidad espectral y variación del contenido espectral en dicho área en función de C, para un espectro PM con $\alpha = 0.0081$ y $f_p = 0.1$ Hz (b).

de bajas frecuencias con una dependencia del tipo $S(f) \propto \exp(f^{-4})$. En concreto, observó que empleando los valores estimados de f_p y del parámetro α, que controla el contenido energético en la zona de frecuencias superiores a f_p, el espectro P-M ($\gamma = 1$) resultante sobrepredice sustancialmente la energía asociada a frecuencias bajas, tal como se ilustra en el ejemplo de la figura 4.20. En dicha figura también se observa una infraestimación del contenido energético asociado al pico espectral, debido al haber empleado un valor del parámetro de intensificación del pico igual a la unidad. No obstante, se debe señalar que la incorporación de un valor de γ mayor eliminaría parte de esta infravaloración, pero no modificaría la pendiente ni la posición de la zona trasera del espectro, tal como se puede observar en la figura 3.12 [sec. 3.1.3].

Para aliviar este problema, Arhan empleó una modificación del modelo espectral JONSWAP. En realidad el modelo propuesto sólo difiere de aquel por la introducción de un sexto parámetro variable k, que permite lograr una mayor pendiente en la parte del espectro correspondiente a bajas frecuencias. La expresión resultante viene dada por

$$S(f) = \frac{\alpha g^2}{(2\pi)^4} f^{-5} \exp\left[-\frac{5}{4}\left(\frac{f}{f_p}\right)^{-4k}\right] \exp\left\{\left[\exp\left(-\frac{(f-f_p)^2}{2\sigma^2 f_p^2}\right)\right] \ln\gamma\right\} \tag{4.64}$$

donde

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_a & \text{y} \quad k \geq 1 \quad \text{para} \quad f < f_p \\ \sigma = \sigma_b & \text{y} \quad k = 1 \quad \text{para} \quad f \geq f_p \end{cases}$$

Es importante tener en cuenta que la introducción de un valor de k mayor que la unidad implica un cambio en el ancho de la banda anterior del pico espectral. En consecuencia, el parámetro σ_a no será equivalente al correspondiente al espectro JONSWAP. Además, el valor de k debe ser igual o mayor que la unidad para mantener el pico espectral en f_p.

Por otro lado, la discontinuidad del parámetro k en el pico espectral produce una discontinuidad en la primera derivada de la función de densidad espectral, tal como

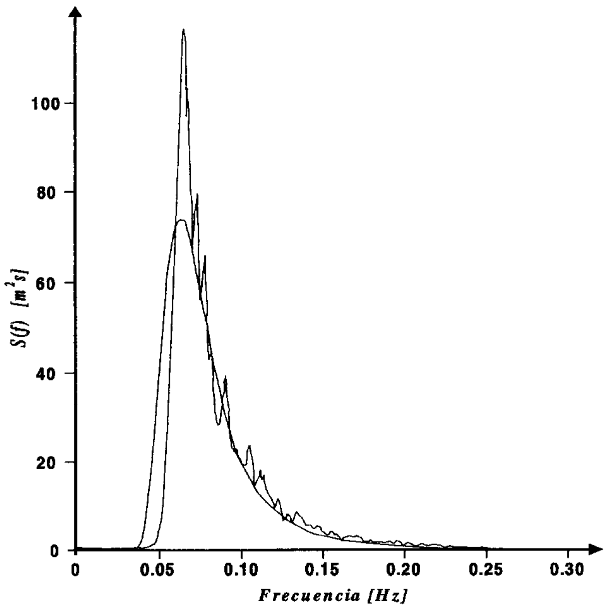

Figura 4.20: Ejemplo de sobreestimación de la energía asociada a la zona de bajas frecuencias del espectro (adaptada de Arhan et al., 1976).

se observa en la figura 4.21. En dicha figura se ilustra la variación de la pendiente del espectro en la cara anterior (bajas frecuencias) al aumentar el valor de k, para un espectro tipo JONSWAP medio. Además, en esta figura se aprecia claramente el estrechamiento del pico espectral en la zona de bajas frecuencias al aumentar el valor de k, dando como resultado la citada variación de σ_a.

Al ajustar los espectros observados al modelo dado por (4.64), este autor obtiene un valor medio para k próximo a 1.5. Esto implica que en promedio, para el conjunto de datos analizados, la pendiente de la cara trasera del espectro queda descrita por una expresión del tipo $S(f) \propto \exp(f^{-6})$. Es decir, una pendiente sustancialmente mayor que la empleada por prácticamente todos los modelos espectrales. El valor máximo observado para dicho parámetro fue $k = 2.51$.

Es importante señalar que, mientras en el modelo dado por (4.64) se modifica el exponente del término exponencial que gobierna la estructura del espectro en el lado de bajas frecuencias, respecto a la frecuencia del pico espectral, se mantiene constante, e igual a -5, el exponente del rango de equilibrio. Sin embargo, el

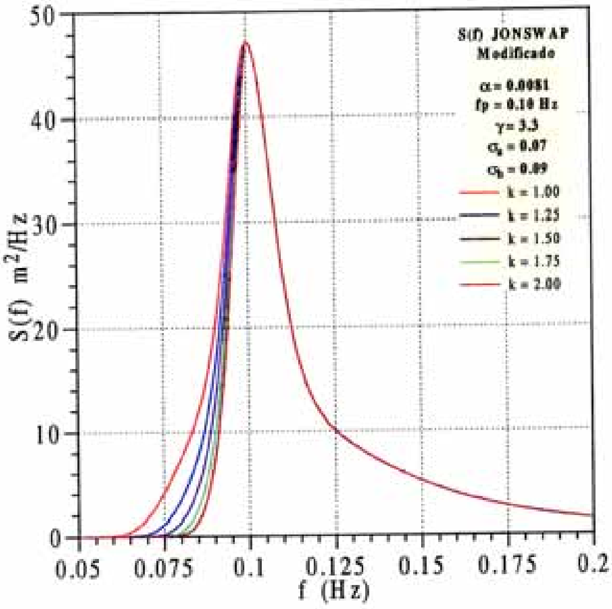

Figura 4.21: Influencia del parámetro k en la zona de bajas frecuencias del espectro JONSWAP.

análisis realizado por Arhan et al. (1976) sobre el conjunto de datos citado revela una considerable variabilidad de dicho exponente, tal como se muestra en la figura 4.22. En concreto, dicho autor obtuvo, para todo el conjunto de datos, un valor medio de n igual a -4.4, y una desviación estándar de 0.49.

En la figura 4.22 (Arhan et al., 1976) se muestra la evolución de f_p, γ, k y n durante una tormenta. La inspección de dichas figuras revela la tendencia de n a tomar valores entre 4 y 5 al aumentar la frecuencia de pico, hecho que resulta razonable, atendiendo a lo comentado anteriormente. El aumento de f_p denota el predominio cada vez más claro del oleaje de viento a medida que aumenta la intensidad de la tormenta. El reanalisis de los datos de la figura 4.22, ha permitido examinar con más detalle las relaciones existentes entre éstos. En particular, no parece existir una clara correlación entre γ y k, tal como se observa en la figura 4.23 (izquierda). Sin embargo, de esta misma figura (4.23, derecha) se desprende fácilmente la tendencia de k a aumentar frente a un descenso de f_p. Es decir, cuanto más dominante es el oleaje de fondo, más rápida es la subida del espectro en la zona de bajas frecuencias.

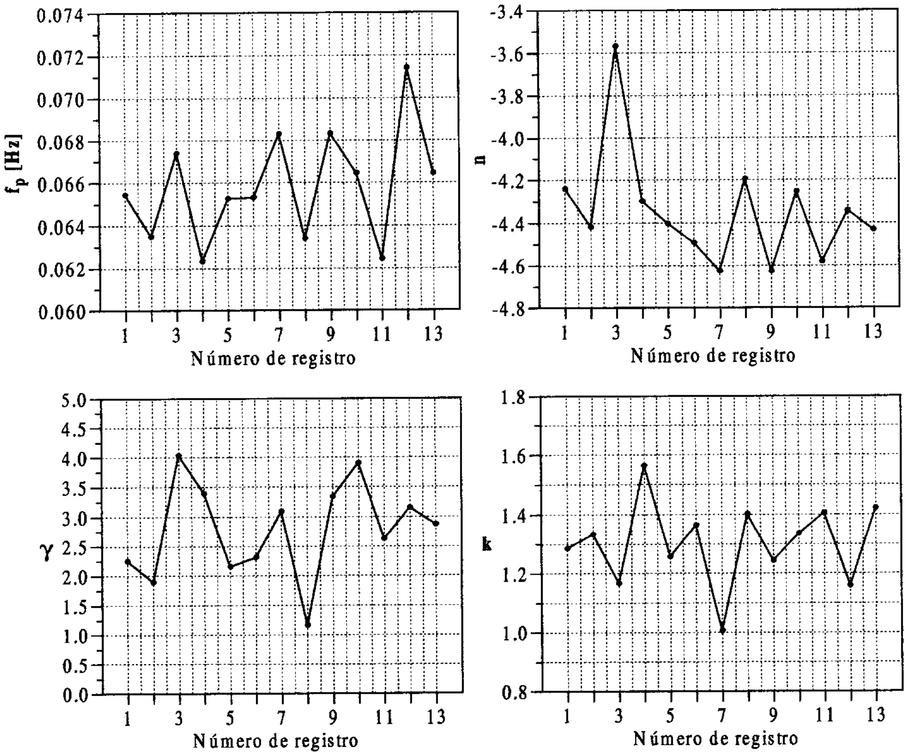

Figura 4.22: Evolución de f_p, γ, k y n para una secuencia de segmentos estacionarios durante una tormenta.

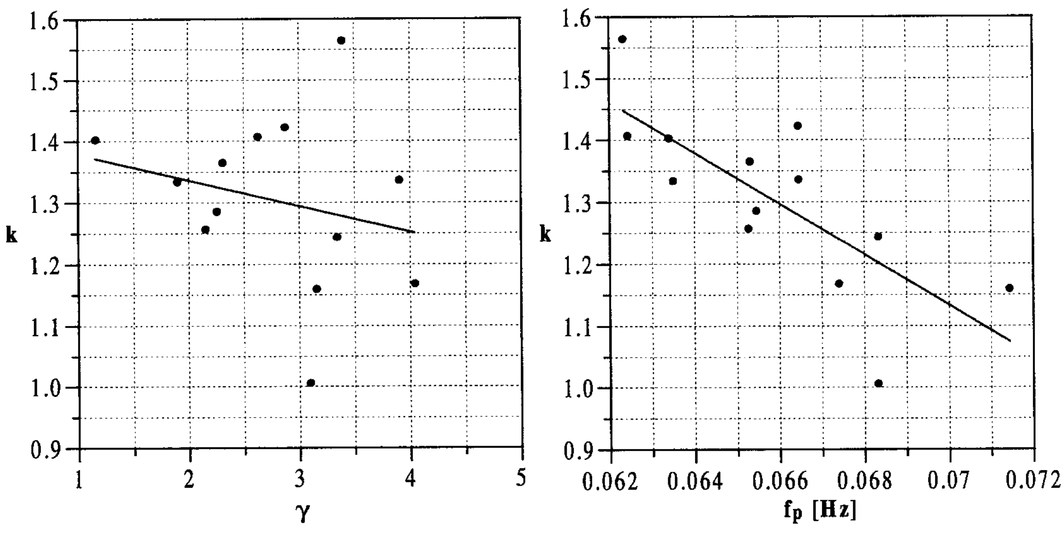

Figura 4.23: Variación de k en función de γ (izquierda) y en función de f_p (derecha) durante una tormenta.

4.1.4 Modelo espectral GLERL2

Todos los modelos espectrales bimodales descritos en la sección [4.1.1] hacen uso de la idea de la descomposición del espectro en dos partes, una asociada a al espectro en la zona de bajas frecuencias, $S_{sw}(f)$, y otra para las frecuencias superiores $S_{ws}(f)$. Así, haciendo uso de la formulación general de los espectros unimodales dada por (3.118), estas expresiones podrían ser representadas como

$$\begin{aligned} S(f) &= S_{sw}(f) + S_{ws}(f) \\ &= \{A_{sw} f^{-n_{sw}} \exp\left[-B_{sw} f^{-m_{sw}}\right]\} + \{A_{ws} f^{-n_{ws}} \exp\left[-B_{ws} f^{-m_{ws}}\right]\} \end{aligned} \tag{4.65}$$

Entre estos modelos, algunos fijan los valores de las constantes multiplicadoras incluidas en los términos A y B (ver tabla 3.3) y, además, se predefinen los valores de los exponentes n y m, admitiendo también que cada uno de ellos es igual para cada una de las partes del espectro. Dentro de este grupo se encuentran los modelos de Guedes Soares (1983, 1998), dado por (4.16, 4.32), y el de Hawkes et al. (1997), dado por (4.37). Por otro lado, en el caso particular del modelo Gamma bimodal (Lupatoukhin et al., 2002), estos parámetros se admiten libres, pero dependientes todos de una única constante, n, de modo que en gran medida estos parámetros son fijos.

En el modelo de Torsethaugen (1993, 1996), no son prefijados inicialmente. Sin embargo, debido a la dificultad que presenta la metodología para estimar los diferentes factores, los exponentes n y m son fijados. Además, las relaciones paramétricas derivadas para estimar los parámetros libres son función de las condiciones locales del oleaje, de modo que éstas son específicamente válidas sólo para la zona en la que se registraron los datos empleados por dicho autor. Por otro lado, en el modelo de Strekalov y Massel (1971), dado por (4.4-4.6), aunque en el espectro correspondiente a la parte de altas frecuencias los parámetros se admiten todos libres, ésta es expresada en términos de la relación entre la frecuencia del máximo absoluto del espectro, no la de cada una de las partes, y la frecuencia media, $(f_p/\bar{f})$. Además, para la parte de bajas frecuencias se admite una forma Gaussiana, con su máximo localizado en una frecuencia que queda determinada también por la relación $f_p/\bar{f}$.

Tal como se comentó anteriormente, el modelo más ampliamente utilizado para caracterizar espectros bimodales es el sugerido por Ochi y Hubble (1976), dado por (4.15). La aceptación que ha tenido este modelo se debe en gran medida a su flexibilidad para poder ajustar espectros con estructuras notablemente distintas. Sin embargo, en este modelo, al igual que en el Gamma bimodal, la mayor parte de los parámetros dependen de un sólo valor, en este caso del parámetro de forma λ. Además, en este modelo se fija el exponente de la función de forma, m.

Según resultados y comentarios presentados en el capítulo [3] y en las secciones [4.1.2], [4.1.3], resulta evidente que no existe razón alguna para fijar ninguno de los coeficientes. Así, el valor del parámetro $A \equiv \alpha$, que controla el nivel de energía en la zona de altas frecuencias se observó que en realidad era una función del grado de crecimiento del oleaje. El parámetro B, que gobierna la posición del rango de bajas frecuencias y del pico espectral, no debería ser fijado, puesto que en tal caso resulta muy difícil ajustar la posición de éstos, para un exponente m dado. Este último tampoco debe ser fijo puesto que no existe ningún criterio con fundamento físico para conocer la pendiente que presenta el espectro en la cara de bajas frecuencias.

Entre los modelos espectrales unimodales comentados en el capítulo anterior y resumidos en la tabla 3.3, sólo existe uno que considere como libres tódos los parámetros anteriormente comentados. Este es el modelo GLERL, propuesto por Liu (1983) (ver tabla 3.3). Tal como se comentó en la sección [3.1.3], la formulación espectral GLERL (Liu, 1983) incluye como parámetros libres el exponente que controla la forma del espectro en el rango de altas frecuencias, C_2, y el término que gobierna el contenido energético en dicha región, C_1. Por otra parte, al igual que la mayoría de los modelos espectrales unimodales propuestos, adopta una estructura de tipo exponencial para caracterizar la densidad espectral en la cara anterior del espectro pero, por el contrario, deja como parámetros libres el exponente que afecta a la frecuencia en dicho término, C_2/C_3, y el coeficiente multiplicador C_3. De este modo, el modelo espectral resultante posee la siguiente expresión analítica

$$S(f) = C_1 \left(\frac{m_0}{f_p}\right) \left(\frac{f}{f_p}\right)^{-C_2} \exp\left[-C_3 \left(\frac{f}{f_p}\right)^{-C_2/C_3}\right]$$

En función de los comentarios y análisis realizados anteriormente sobre la variabilidad observada en los espectros estimados a partir de registros experimentales, tanto en la cola de altas frecuencias como en la cara anterior del espectro, y teniendo en cuenta la flexibilidad que en este sentido presenta el modelo espectral GLERL, en el presente trabajo se propone una combinación de dos de estos espectros unimodales para caracterizar los espectros resultantes de la superposición de dos campos de oleaje. Es decir, se propone un modelo espectral bimodal, que en adelante será denominado como GLERL2, cuya expresión analítica viene dada por

$$S(f) = \sum_{j=1}^{2} C_{1_j} \left(\frac{m_{0_j}}{f_{p_j}}\right) \left(\frac{f}{f_{p_j}}\right)^{-C_{2_j}} \exp\left[-C_{3_j} \left(\frac{f}{f_{p_j}}\right)^{-C_{2_j}/C_{3_j}}\right] \tag{4.66}$$

donde el subíndice $j = 1$ denóta los parámetros correspondientes al subespectro asociado al campo de oleaje de bajas frecuencias, mientras $j = 2$ representa a los parámetros del subespectro asociado al oleaje de viento.

En consecuencia, se obtiene un modelo espectral con seis parámetros libres C_{ij}, donde i varía de 1 a 3 y j toma los valores 1 y 2. En la figura 4.24 se muestra la variación del espectro bimodal dado por la expresión (4.66), en términos de los parámetros correspondientes a los espectros de bajas y altas frecuencias $(C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}, C_{31}, C_{32})$.

La validez relativa de éste modelo será examinada al final de esta sección, despues de haber comentado los criterios para realizar la separación entre un campo de oleaje de viento y otro de fondo en situaciones de estados de mar combinados, así como las técnicas empleadas para detectar la presencia de un oleaje bimodal a partir de un registro experimental.

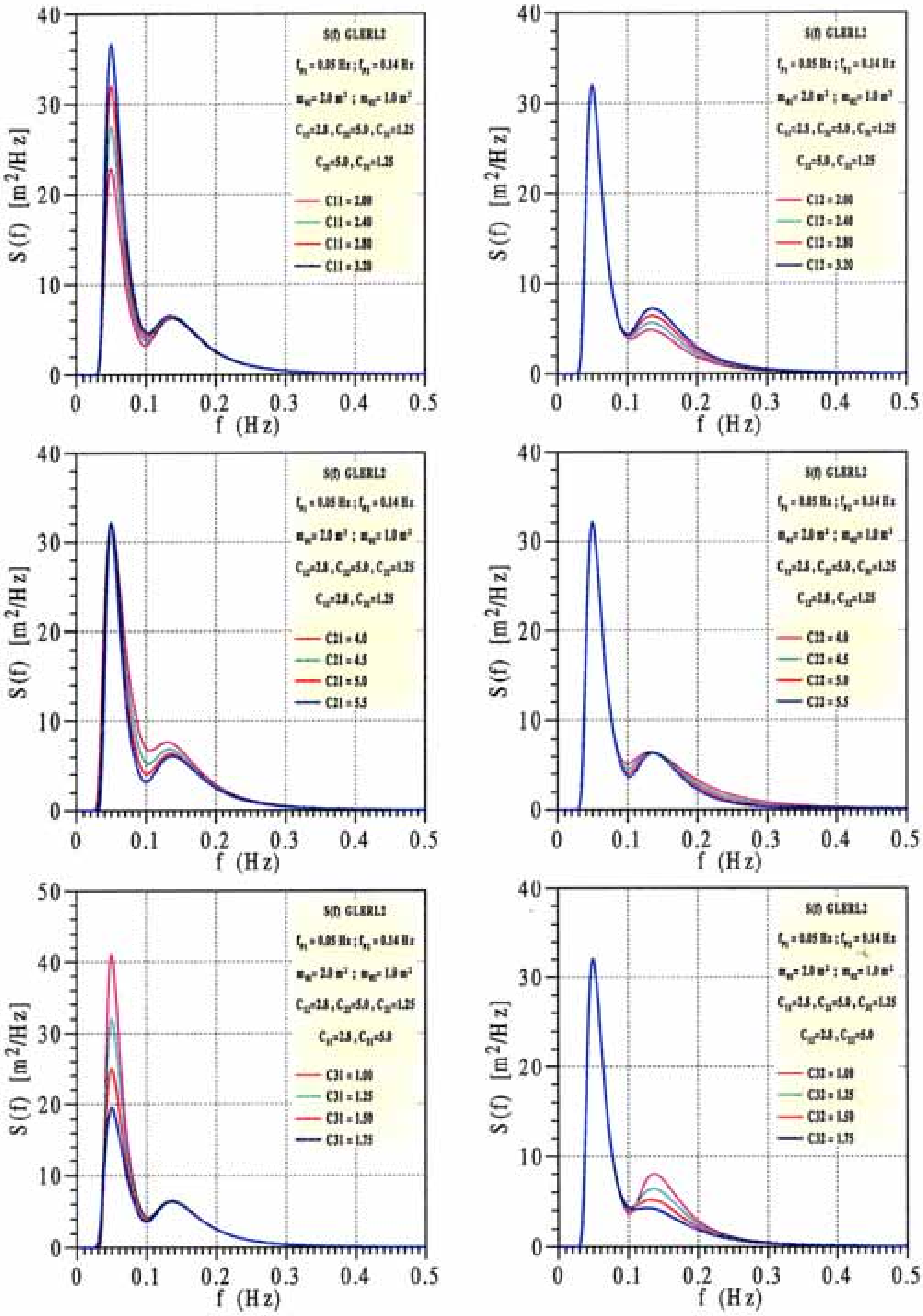

Figura 4.24: Variación del modelo espectral GLERL2 en función de los parámetros asociados a los subespectros de bajas y altas frecuencias, C_{11} (a), C_{12} (b), C_{21} (c), C_{22} (d), C_{31} (e), C_{32} (f).

4.2 Detección de espectros bimodales

Cuando se obtiene un registro experimental de un campo de oleaje compuesto por más de un sistema individual de oleaje, no resulta en absoluto sencillo identificar este hecho mediante la inspección visual directa de dicho registro. El procedimiento estándar para poder discernir si el campo de oleaje medido ha sido generado por uno o varios sistemas de oleaje, consiste en transformar el registro al dominio de la frecuencia para examinar su composición frecuencial.

En aquellos casos en los que existe más de un sistema de oleaje presente y éstos tienen composiciones frecuenciales sustancialmente diferentes, este procedimiento resulta adecuado. Así, en general, se suele aceptar que el oleaje de fondo y el oleaje de viento poseen frecuencias de pico bien separadas. Además, también se admite que, normalmente, el oleaje de fondo incidente en la zona de observación procede de una dirección diferente de la del viento predominante y, por tanto, de la del oleaje de viento existente en el momento de la observación. En estas condiciones no resulta complicado distinguir ambos sistemas de oleaje mediante el espectro frecuencial, y mucho menos haciendo uso del espectro direccional, tal como se muestra en las figuras 4.25 y 4.26, en las que se ilustran ejemplos de un espectro frecuencial correspondiente a un oleaje bimodal con los dos sistemas presentando frecuencias de pico bien separadas (figura 4.25) y el espectro direccional de un campo de oleaje mixto, en el que el oleaje de fondo y el de viento muestran contenidos frecuenciales y direccionales claramente diferentes (figura 4.26).

Sin embargo, con bastante asiduidad, las bandas de frecuencias del oleaje de fondo y de viento no estan bien separadas, presentando un importante solapamiento. En tales condiciones, resulta bastante dificil, o incluso imposible, discernir entre ambos sistemas a partir del espectro frecuencial. Por ello, Lupatoukhin et al. (2002) sugieren que, en tales casos, el espectro direccional permite eliminar las incertidumbres al respecto, admitiendo que en la mayoría de los casos las direcciones de propagación son claramente diferentes. Si bien es cierto que en bastantes ocasiones esta diferencia en direcciones de ambos sistemas de oleaje resulta clara, los resultados mostrados por algunos autores evidencian que estas situaciones no

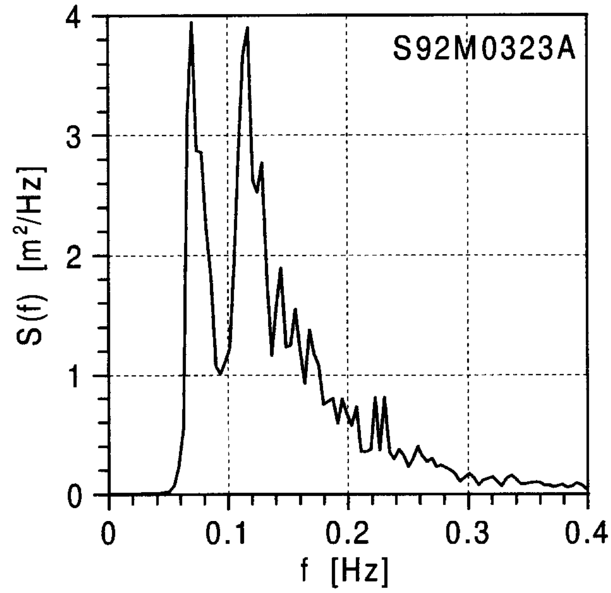

Figura 4.25: Espectro frecuencial de un oleaje mixto con el oleaje de viento y el de fondo ocupando bandas de frecuencia bien separadas.

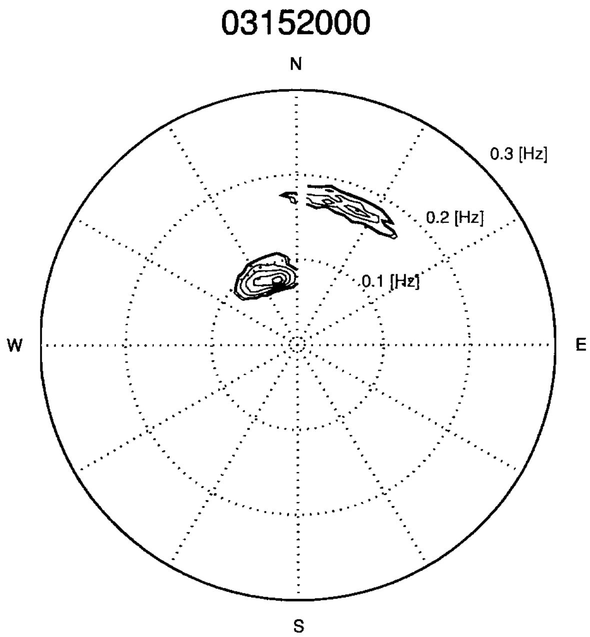

Figura 4.26: Espectro direccional de oleaje compuesto por dos sistemas de oleaje individuales de contenido frecuencial y direccional bien diferenciados.

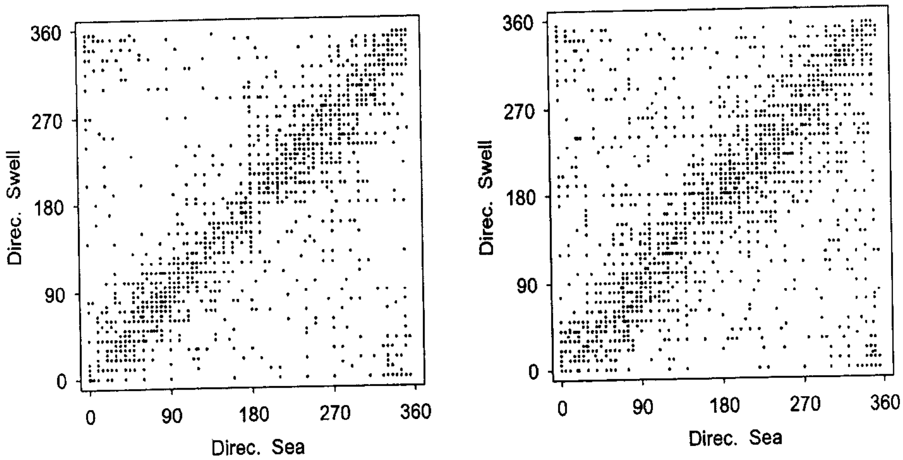

Figura 4.27: Diagramas de puntos de direcciones de propagación del sea y el swell observadas por dos destructores en el periodo entre 1967-1975 (adaptada de Ando, 1999).

siempre son las más frecuentes, siendo bastante común encontrar campos de oleaje mixtos en los que los sistemas de oleaje de viento y de fondo viajan en la misma dirección o en direcciones muy similares. Así, por ejemplo, Ando (1999) realizó un estudio sobre las direcciones del sea y el swell observados conjuntamente. Para ello empleó las observaciones realizadas por dos barcos de la armada canadiense. Las observaciones se realizaron cada cuatro horas durante un periodo de siete años (1969-1975), mientras los barcos operaban en áreas entre America del Norte y Europa, incluyendo el Mar del Norte y el Mediterraneo. Los dos barcos pertenecían a dos grupos operativos diferentes, y operaban separadamente, tanto espacial como temporalmente, durante ese periodo. En las figuras 4.27 y 4.28, se muestran los resultados del estudio realizado por Ando (1999)

En las figuras 4.27a y 4.27b se muestran los diagramas de puntos de las direcciones medias del sea y el swell observadas por ambos barcos. En ellas se puede apreciar claramente una considerable correlación entre las direcciones de propagación de ambos sistemas de oleaje. En concreto, los coeficientes de correlación para los datos proporcionados por cada barco son 0.65 y 0.58, respectivamente.

En las figuras 4.28a y 4.28b se muestran los histogramas del valor del ángulo

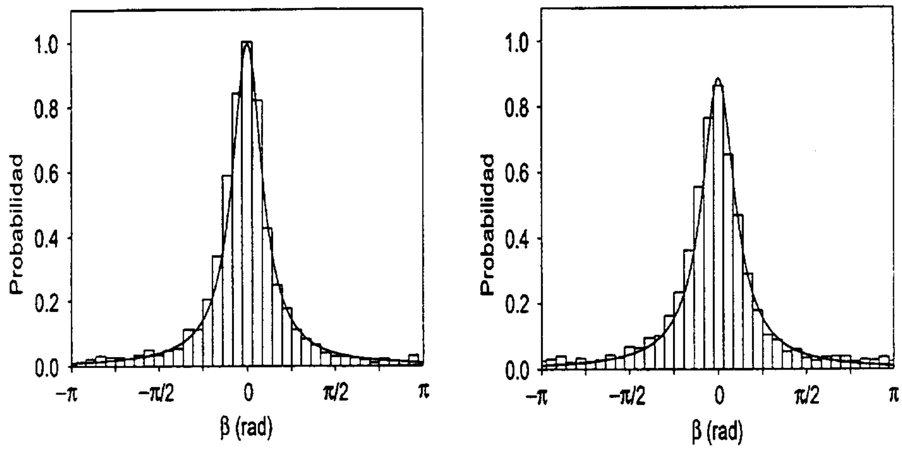

Figura 4.28: Densidades de probabilidad de ángulos relativos entre direcciones de propagación del sea y el swell observadas por dos destructores en el periodo entre 1967-1975 (adaptada de Ando, 1999).

entre las direcciones de propagación relativas de cada uno de los sistemas de oleaje obtenidos de las observaciones realizadas por cada uno de los barcos. En estas figuras se aprecia claramente el considerable apuntamiento de los histogramas entorno al valor cero. Conjuntamente con los histogramas se muestran las funciones de densidad de probabilidad de Cauchy truncadas ajustadas a los datos experimentales.

De estos resultados se desprende que las situaciones en las que tanto el oleaje de viento como el de fondo viajan en la misma dirección, o en direcciones muy próximas, son bastante frecuentes. Naturalmente, en tales casos, la disposición de información sobre la dirección de propagación del oleaje no aporta información relevante para poder detectar la presencia de ambos campos de oleaje mediante el espectro direccional.

4.2.1 Procedimientos de detección, Separación Sea-Swell

A partir de los comentarios anteriores, resulta evidente la dificultad implícita al procedimiento de separación entre oleaje de viento y oleaje de fondo, en un registro de oleaje correspondiente a un estado de mar mixto, especialmente cuando sólo se dispone de información de las elevaciones verticales de la superficie libre, tal como ocurre en la mayoría de las ocasiones y, en particular, en el presente trabajo.

La elección de una frecuencia de separación, f_s, entre oleaje de viento y de fondo a partir del espectro frecuencial no resulta demasiado complicada cuando las bandas de frecuencias de ambos sistemas de oleaje están bien separadas. Sin embargo, la dificultad crece extraordinariamente a medida que el solapamiento entre éstas aumenta. Por este motivo, existen distintos criterios para intentar determinar una f_s que permita discernir entre oleaje de viento y swell. Generalmente, estos criterios han sido propuestos atendiendo a las propiedades cinemáticas o geométricas del oleaje, o bien en base a relaciones entre éste y el viento. Así, por ejemplo, Earle (1984) propone como frecuencia de separación

$$f_s = \frac{A}{U} \tag{4.67}$$

donde U es la velocidad del viento y A es una constante empírica.

Relaciones similares han sido propuestas por diversos autores. Por ejemplo, Ewing (1980) sugiere realizar la separación entre el sea y el swell emleando como criterio el valor de la frecuencia de pico adimensional, de forma que el valor de separación es

$$\nu_s = \frac{U f_s}{g} = 0.13 \tag{4.68}$$

Es decir,

$$\begin{array}{ll} f_s < \frac{0.13g}{U} & \text{Swell} \\ f_s > \frac{0.13g}{U} & \text{Sea} \end{array} \tag{4.69}$$

Por otro lado, existen autores cuyos criterios para la elección de una frecuencia de separación se basa en que, en general, el oleaje en la zona de generación está más peraltado que el que se propaga como una onda libre, sin forzamiento desde el viento. Además, tal como se comentó anteriormente, a medida que el oleaje de fondo de propaga sobre distancias mayores, su altura de ola disminuye y el periodo aumenta, o lo que es equivalente, su longitud de onda se incrementa.

Así, Thompson et al. (1984) proponen una división entre oleaje de viento, *swell joven*, *swell maduro* y *swell viejo*, en términos del peralte significativo, H_s/L_p, donde

Tabla 4.4: Clasificación de tipos de oleaje según el peralte significativo (Thompson et al. (1984)

Tipo de oleaje	Rango de δ_s
Oleaje de viento	$\delta_s > 0.025$
Swell joven	$0.025 > \delta_s > 0.001$
Swell maduro	$0.001 > \delta_s > 0.004$
Swell viejo	$\delta_s < 0.004$

H_s es la altura de ola significativa que, tal como se ha visto anteriormente, para un proceso de banda estrecha, viene dada por

$$H_s = H_{m_0} = 4\sqrt{m_0} = 4\int_0^\infty S(f)df \tag{4.70}$$

mientras, L_p, es la longitud de onda asociada a la componente de frcuencia f_p. En consecuencia, admitiendo como válida la teoría lineal de ondas, se tiene que

$$\delta_s = \frac{H_s}{L_p} = \frac{H_s}{\frac{g}{2\pi}T_p^2} \tag{4.71}$$

En términos de este parámetro, los citados autores definen los cuatro tipos de oleaje dados en la tabla 4.4.

Donelan et al. (1985) sugieren un criterio basado en la edad del oleaje, admitiendo que el límite entre el oleaje de viento y el oleaje de fondo se encuentra en el valor dado por $U_{10}/c_p = 0.83$. Es decir,

$$\begin{array}{ll} \frac{U_{10}}{c_p} < 0.83 & \text{Swell} \\ \frac{U_{10}}{c_p} > 0.83 & \text{Sea} \end{array} \tag{4.72}$$

Rao y Baba (1996), a partir de datos experimentales obtienen una relación entre el peralte significativo y la edad del oleaje del siguiente tipo

$$\log\left(\frac{H_s}{L_p}\right) = -0.53\log\left(\frac{c_p}{U_{10}}\right) - 1.385 \tag{4.73}$$

Sin embargo, es importante señalar que existía una dispersión sustancial de los puntos experimentales entorno a dicha recta. Resultados similares fueron presentados por Wilson (1959), en los que se aprecia un descenso del peralte ante una disminución del término $2\pi f_p U/g$, aunque con una considerable dispersión en los datos. No obstante, parece razonable la existencia de algún tipo de relación entre el peralte del oleaje y la edad del mismo.

Recientemente, Wang y Hwang (2001) proponen un método basado en el peralte del oleaje, pero empleando una metodología sustancialmente más complicada. Estos autores definen una función de peralte para estimar el peralte medio de las componentes de frecuencia superior a una dada, f_*. Esta función es definida como

$$\alpha(f_*) = \frac{H_*}{L_*} \tag{4.74}$$

donde H_* y L_* son la altura de ola y la longitud de onda representativas de aquellas componentes de frecuencia superior a f_*. La función resultante tiene por expresión

$$\alpha(f_*) = \frac{8\pi \left[\int\limits_{f_*}^{f_{max}} f^2 S(f) df \right]}{g \left[\int\limits_{f_*}^{f_{max}} S(f) df \right]^{1/2}} \tag{4.75}$$

siendo f_{max} la frecuencia superior de $S(f)$. De este modo, variando el valor del límite de integración inferior, f_*, se obtiene una función, cuyo máximo está asociado a la frecuencia, f_m. Por otro lado, admitiendo una relación entre esta frecuencia y la velocidad del viento del tipo

$$U = a\,(f_m)^b \tag{4.76}$$

donde $a = 0.379$ y $b = -1.746$ son dos constantes empíricas determinadas mediante análisis de regresión, empleando resultados de simulación con el espectro PM. Adicionalmente, considerando que el oleaje generado por el viento debería tener una velocidad de propagación inferior a la velocidad del viento, la frecuencia de separación es definida como

$$f_s = \frac{g}{2\pi U} \tag{4.77}$$

y sustituyendo (4.77) en (4.76) se tiene una relación entre la frecuencia del máximo de la función de peralte y la frecuencia de separación dada por

$$f_s = A\,(f_m)^B \tag{4.78}$$

donde $A = 4.112$ y $B = 1.746$. De este modo la frecuencia de separación puede ser estimada sin necesidad de información sobre la velocidad del viento.

En definitiva, según lo antes expuesto, la clasificación del oleaje en sea y en swell puede ser realizada en términos del peralte del oleaje o de la edad del oleaje, factores que de un modo u otro están interrelacionados. No obstante, es necesario indicar que la clasificación en términos de la edad del oleaje presenta una limitación importante, al ser función de la velocidad del viento, la clasificación en función de éste factor resultará adecuada bajo condiciones especiales en las cuales el viento permanezca estacionario durante un largo periodo de tiempo y actuándo sobre un fetch ilimitado. Las observaciones de campo revelan que en muchos casos existe una variación del viento muy rápida, de modo que, en tales casos, no es de esperar que la separación basada en la velocidad del viento predominante sea satisfactoria.

Por otro lado, asumiendo que el peralte del oleaje es una función de su edad, Sverdrup y Munk (1947) examinaron dicha relación con los datos disponibles y llegaron a la conclusión de que δ alcanza un valor máximo próximo a 0.1 para una edad del oleaje (definida de forma inversa, es decir, c/U) entorno a 0.4, y disminuye para oleaje de fondo joven, pero disminuye rápidamente para oleaje de fondo viejo. De este modo, el peralte presenta dificultades para descernir entre diferentes tipos de swell.

En relación con lo anterior, se debe notar que, independientemente de la bondad de los resultados ofrecidos por los métodos propuestos para definir una frecuencia de separación entre el oleaje de viento y el de fondo, todos ellos presentan problemas cuando existen más de dos tipos de oleaje combinados en un registro dado.

A partir de un espectro frecuencial estimado a partir de un registro experimental, el primer paso para su caracterización debe ser la identificación del tipo de espectro del que se trata, distinguiendo entre espectros unimodales, bimodales, etc. En la práctica, debido a las fluctuaciones aleatorias presentes en un espectro estimado a partir de un registro de longitud finita, esta identificación es una tarea bastante complicada, resultando difícil decidir si un pico espectral corresponde a la existencia de un sistema de oleaje con esa frecuencia dominante, o si el pico es debido a una fluctuación aleatoria en el espectro estimado.

Con el fin de poder decidir cuales de los picos presentes en un espectro corresponden a sistemas de oleaje presentes en el punto de medida en el momento de la obtención del registro analizado, se han propuesto distintos criterios y procedimientos para la detección de picos espectrales representativos de distintos sistemas de oleaje en un registro, más que para definir una frecuencia de separación. En general, estos procedimientos están basados en factores como la separación frecuencial entre máximos locales presentes en el espectro, amplitud de los mismos en relación al máximo absoluto, o a los intervalos de confianza del espectro, etc. Así, por ejemplo, Houmb y Due (1978), Guedes Soares (1984) y Guedes Soares y Nolasco (1992) sugieren diferentes métodos basados en la amplitud de los picos del espectro, en relación a los intervalos de confianza del mismo.

Tal como se comentó en la sección [2.1.3], las estimaciones directas de la función de densidad espectral a partir de un registro de longitud finita presentan una elevada varianza, y para su uso eficiente es necesario reducir esta variabilidad mediante técnicas de suavizado. En concreto, para un proceso estacionario y Gaussiano, las estimaciones del periodograma fluctúan respecto a su valor "verdadero" siguiendo una distribución χ^2_ν con $\nu = 2$ grados de libertad (e.g., Percival y Walden, 1993). Aplicando técnicas como la de Welch (ver sec. [2.1.3]) se consige reducir la varianza de las estimaciones, es decir, aumentar el número de grados de libertad de las estimaciones, a costa de una disminución en la resolución frecuencial. En consecuecia las estimaciones espectrales constituyen una variable aleatoria que puede variar dentro de unos ciertos intervalos de confianza. Los límites de confianza para las estimaciones espectrales con ν grados de libertad vienen dados por

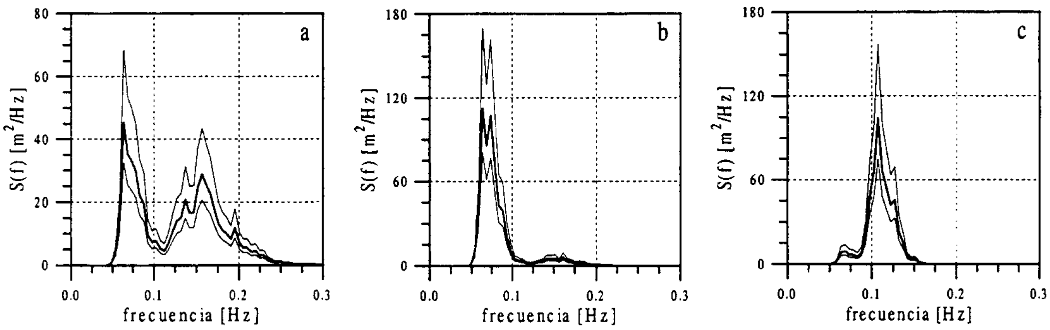

Figura 4.29: Densidades espectrales de registros de oleaje (líneas gruesas) y sus límites de confianza (líneas finas) para $\nu = 30$ y $\alpha = 0.1$.

$$\left(\frac{\nu}{\chi^2_{\nu;\alpha/2}}\right)\hat{S}(f) \leq S(f) \leq \left(\frac{\nu}{\chi^2_{\nu;1-\alpha/2}}\right)\hat{S}(f) \quad . \tag{4.79}$$

donde α es el nivel de confianza, $\chi^2_{\nu;\alpha/2}$ y $\chi^2_{\nu;1-\alpha/2}$ denotan los percentiles $100(\alpha/2)$ y $100(1-\alpha/2)$, para una variable aleatoria χ^2 con ν grados de libertad, y $\hat{S}(f)$ es una estimación del "verdadero" valor de $S(f)$.

Desafortunadamente, el ancho de los intervalos de confianza para $S(f)$ dados por la expresión (4.79) es proporcional a $\hat{S}(f)$, variando de una frecuencia a otra. Esto hace bastante difícil decidir si un pico espectral es "verdadero" o no, simplemente observando un gráfico de $\hat{S}(f)$ frente a f, tal como en los ejemplos que se muestran en la figura 4.29, o la aplicación de un algoritmo basado en las estimaciones y sus intervalos de confianza.

No obstante, el procedimiento puede ser notablemente simplificado realizando una simple transformación logarítmica del espectro (Rodríguez y Guedes Soares, 1999). Este tipo de transformación es normalmente sugerida como forma de estabilizar la varianza de las estimaciones (e.g., Wei, 1990). Así, tomando logaritmos en la expresión (4.79), los límites del intervalo de confianza del $100(1-\alpha)\%$ para $\ln S(f)$ vendrán dados por

$$\ln \hat{S}(f) + \ln\left(\frac{\nu}{\chi^2_{\nu;\alpha/2}}\right) \leq \ln S(f) \leq \ln \hat{S}(f) + \ln\left(\frac{\nu}{\chi^2_{\nu;1-\alpha/2}}\right) \tag{4.80}$$

expresión que puede ser interpretada como que existe una probabilidad del 90% de que $\ln S(f)$ esté localizado entre los límites

$$\ln \hat{S}(f) + \ln\left(\frac{\nu}{\chi^2_{\nu;\alpha/2}}\right) \quad ; \quad \ln \hat{S}(f) + \ln\left(\frac{\nu}{\chi^2_{\nu;1-\alpha/2}}\right) \tag{4.81}$$

Es importante notar que, al contrario que el ancho del intervalo de confianza de $S(f)$ que es proporcional a $S\hat{(f)}$ y, por tanto, varía con la frecuencia, el ancho del intervalo de confianza dado por (4.80) puede ser expresado como

$$\ln\left(\frac{\nu}{\chi^2_{\nu;1-\alpha/2}}\right) - \ln\left(\frac{\nu}{\chi^2_{\nu;\alpha/2}}\right) = \ln\left(\frac{\chi^2_{\nu;\alpha/2}}{\chi^2_{\nu;1-\alpha/2}}\right) \tag{4.82}$$

que para valores dados de α y ν es constante e independiente de f, de forma que puede ser representado como una simple barra vertical conjuntamente con el espectro representado en escala logarítmica, tal como se muestra en la figura 4.30. Es esta figura se ilustran los intervalos de confianza correspondientes al espectro de la figura 4.29a, para diferentes valores de ν. Para un adecuado funcionamiento del algoritmo, Rodríguez y Guedes Soares (1999) recomiendan emplear un número de grados de libertad entorno a $\nu \approx 40$, como adecuado en términos de suavizado y sesgo.

En el presente trabajo se han suavizado las densidades espectrales empleando el método de método de Welch, para obtener estimaciones de la densidad espectral con $\nu = 38$. Nótese que de este modo resulta bastante simple determinar si una pico espectral es estadísticamente significativo, es decir, mayor que el ancho del intervalo de confianza, o no.

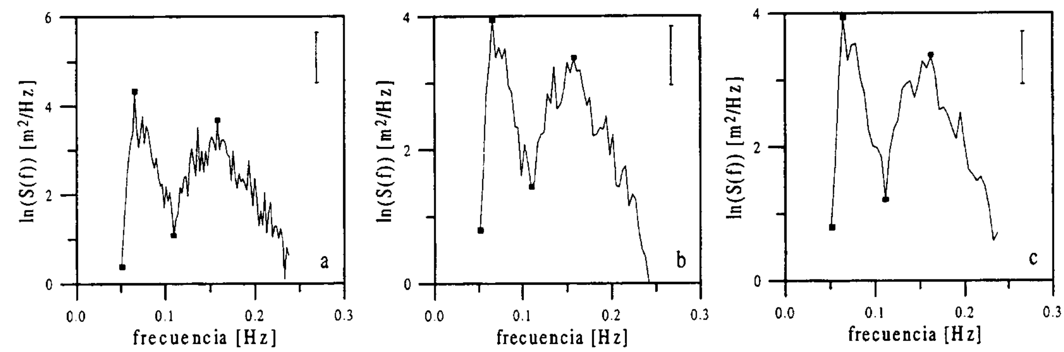

Figura 4.30: Transformación logarítmica de la densidad espectral mostrada en la figura 4.29a, para $\alpha = 0.1$ y $\nu = 18$ (a), $\nu = 30$ (b), $\nu = 38$ (c).

4.3 Ajuste de espectros bimodales

En general, los espectros de oleaje son ajustados a modelos teóricos, que representan funciones multiparamétricas no lineales, empleando métodos de ajuste "a trozos". Es decir, ajustando cada parámetro por separado (e.g., Günther, 1981; Battjes et al., 1987). En este trabajo se ha empleado como alternativa un procedimiento de ajuste de funciones a datos experimentales basada en las técnicas de ajuste mediante mínimos cuadrados no lineales. Las particularidades de esta técnica aplicada a los modelos OH y GLERL2 son descritas a continuación.

4.3.1 Ajuste del espectro Ochi-Hubble

El modelo espectral de Ochi-Hubble, modelo de 6 parámetros, tiene por expresión

$$S_{OH}(f) = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{2} \frac{\left(\frac{4\lambda_j+1}{4} f_{p_j}^4\right)^{\lambda_j}}{\Gamma(\lambda_j)} \frac{H_{s_j}}{f^{4\lambda_j+1}} \exp\left[-\frac{4\lambda_j+1}{4}\left(\frac{f_{p_j}}{f}\right)^4\right] \tag{4.83}$$

Resulta obvio que la expresión anterior es un modelo no lineal de los parámetros H_s^2, f_p y λ. El ajuste de este modelo espectral se realizó aplicando un algoritmo iterativo de ajuste por mínimos cuadrados no lineales. Todos los métodos de optimización no lineal son sensibles a la elección de los valores iniciales escogidos

$$A = \left\{ \left[\ln\left(4(4\lambda+1)\pi^4 f_p^4\right) + \frac{4\lambda}{4\lambda+1} \right] - \left[\frac{\Gamma'(\lambda)}{\Gamma(\lambda)} \right] - \left[4\ln(2\pi f)\right] - \left(\frac{f_p}{f}\right)^4 \right\}$$

siendo $\Gamma'(x)$ la derivada de la función $\Gamma(x)$, que está relacionada con ésta mediante la función digamma, $\psi(x)$, del siguiente modo

$$\psi(x) = \frac{d}{dx}\ln\Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{x+n}\right)$$

con $\gamma \approx 0.5772156649$ (constante de Euler). La cual verifica la relación

$$\psi(x+1) = \psi(x) + \frac{1}{x}$$

La elección de los valores iniciales de los parámetros iniciales se ha realizado empleando los siguientes criterios. Admitiendo que las dos partes del espectro son de banda estrecha, se puede aceptar que

$$H_s = H_{m_0} = \sqrt{H_{m_{0s}} + H_{m_{0w}}} \tag{4.85}$$

donde $H_{m_{0s}}$ y $H_{m_{0w}}$ son evaluados como

$$H_{m_{0s}} = 4\left[\int_{f_l}^{f_s} S(f)df\right]^{1/2} \tag{4.86}$$

$$H_{m_{0w}} = 4\left[\int_{f_s}^{f_h} S(f)df\right]^{1/2} \tag{4.87}$$

siendo f_l y f_h las frecuencias mínima y máxima para las que se ha estimado el espectro, mientras que f_s es la frecuencia de separación entre el oleaje de viento y el de fondo, cuya selección constituye otro problema, tal como se ha visto en la sección precedente. No obstante, normalmente, la elección de f_s como el valor intermedio entre las frecuencias superior e inferior suele proporcionar resultados adecuados.

La estimación de las frecuencias de pico correspondientes a cada sistema de oleaje se realiza directamente, localizando las frecuencias asociadas a los máximos de cada sistema de oleaje en el espectro calculado. Sin embargo, la estimación de los valores iniciales del parámetro de forma resulta más complicada. En este trabajo se ha utilizado la metodología propuesta por Borgman (1991), y empleada en Rodríguez y Jiménez (1994). Esto és, derivando respecto a f el modelo OH (4.83) e igualando a cero, para determinar el valor de f para el cual $S(f)$ es máxima, f_p, se obtiene la siguiente función

$$G(\lambda_i) = \frac{S(f_{p_i}) f_{p_i}}{H^2_{m_{o_i}}} = \frac{\left(\frac{4\lambda_i+1}{4} f^4_{p_i}\right)^{\lambda_i} \exp\left[-\frac{4\lambda_i+1}{4}\right]}{4\Gamma(\lambda_i)} \tag{4.88}$$

Expresión que puede ser evaluada mediante el método de Newton-Raphson, para obtener el valor de λ_i, dados $S(f_{p_i})$, f_{p_i} y $H_{m_{o_i}}$.

4.3.2 Ajuste espectro GLERL2

El procedimiento empleado en este trabajo para ajustar los espectros obtenidos experimentalmente al modelo GLERL2 está basado en un procedimiento similar al descrito anteriormente. En concreto, se comienza por obtener unas estimaciones adecuadas de los momentos espectrales de orden cero y las frecuencias de pico asociados a cada sistema individual de oleaje, para posteriormente aplicar el mismo procedimiento de ajuste no lineal que el empleado para realizar el ajuste del modelo OH.

Así, considerendo la expresión del modelo GLERL2

$$S(f) = S_s(f) + S_w(f) = \sum_i C_{1i} \left(\frac{m_{0i}}{f_{pi}}\right) \left(\frac{f}{f_{pi}}\right)^{-C_{2i}} exp\left[-C_{3i}\left(\frac{f}{f_{pi}}\right)^{-C_{2i}/C_{3i}}\right] \tag{4.89}$$

Dado el espectro bimodal estimado $S(f)$, se obtienen el momento de orden cero, m_0, la frecuencia media, $\bar{f}$, la frecuencia de los dos picos espectrales, f_{ps} y f_{pw}, y las densidades espectrales correspondientes, $S(f_{ps})$ y $S(f_{pw})$. A partir de estos datos es posible obtener estimaciones para los momentos de orden cero, m_{0s} , m_{0w}, y las frecuencias medias, $\bar{f}_s$, $\bar{f}_w$, asociadas a cada uno de los sistemas de oleaje constituyentes.

Así, considerando las siguientes relaciones entre los momentos espectrales individuales y global

$$m_0 = m_{0s} + m_{0w} \tag{4.90}$$

$$m_1 = m_{1s} + m_{1w} \tag{4.91}$$

y admitiendo que el contenido energético de cada uno de los sistemas de oleaje está concentrado en una estrecha banda de frecuencias, entorno a su frecuencia modal, es posible admitir la siguiente relación entre las densidades espectrales máximas y los momentos de orden cero de ambos,

$$S_R = \frac{S_s(f_{ps})}{S_w(f_{pw})} \cong \frac{m_{0s}}{m_{0w}} \tag{4.92}$$

Combinando las expresiones (4.90) y (4.92) se tiene que

$$m_{0w} = \left(\frac{1}{S_R + 1}\right) m_0 \tag{4.93}$$

$$m_{0s} = \left(\frac{S_R}{S_R + 1}\right) m_0 \tag{4.94}$$

Por otro lado, admitiendo que la relación entre las frecuencias de pico del espectro bimodal es aproximadamente igual a la relación entre las frecuencias medias

$$f_R = \frac{f_{ps}}{f_{pw}} \cong \frac{\bar{f}_s}{\bar{f}_w} \tag{4.95}$$

donde

$$\bar{f} = \frac{m_1}{m_0} \tag{4.96}$$

Operando con las ecuaciones (4.90-4.96) se pueden obtener las siguientes expresiones de las frecuencias medias para cada componente del espectro

$$\bar{f}_s = \left[\frac{f_R(S_R + 1)}{f_R^2 S_R + 1}\right] \bar{f} \tag{4.97}$$

$$\bar{f}_w = \left[\frac{(S_R + 1)}{f_R^2 S_R^2 + 1}\right] \bar{f} \tag{4.98}$$

Nótese que este procedimiento sólo es necesario para obtener los valores de m_{0s} y m_{0w}, puesto que los valores de f_{ps} y f_{pw} son obtenidos directamente del espectro estimado. No obstante, en algunos casos, la detección de uno de los picos espectrales no resulta sencilla. En tales casos se emplea la metodología anterior para obtener la frecuencia media aproximada de cada sistema y, a partir de ella la frecuencia de pico correspondiente.

Una vez determinados los momentos de orden cero y las frecuencias de pico de cada sistema, se hace uso de la técnica de ajuste no lineal comentada para el caso del ajuste del espectro OH, utilizando las derivadas parciales correspondientes al modelo GLERL, respecto a los parámetros libres, dadas por

$$\frac{\partial S_G(f)}{\partial C_1} = \frac{m_0}{f_p}\left(\frac{f}{f_p}\right)^{-C_2} exp\left[-C_3\left(\frac{f}{f_p}\right)^{-C_2/C_3}\right]$$

$$\frac{\partial S_G(f)}{\partial C_2} = \frac{C_1 m_0}{f_p}\ln\left(\frac{f}{f_p}\right) exp\left[-C_3\left(\frac{f}{f_p}\right)^{-C_2/C_3}\right]\left\{-\left(\frac{f}{f_p}\right)^{-C_2} + \left(\frac{f}{f_p}\right)^{-\frac{C_2(C_3+1)}{C_3}}\right\}$$

$$\frac{\partial S_G(f)}{\partial C_3} = -\frac{C_1 m_0}{f_p C_3} exp\left[-C_3\left(\frac{f}{f_p}\right)^{-C_2/C_3}\right]\left(\frac{f}{f_p}\right)^{-\frac{C_2(C_3+1)}{C_3}}\left[C_3 + C_2\ln\left(\frac{f}{f_p}\right)\right]$$

La estimación de los parámetros iniciales C_1, C_2, y C_3 se realiza atendiendo al significado que dichos parámetros tienen en el espectro del oleaje. Es decir, C_1 es un factor con un significado similar a α en el espectro de Bretschneider (3.109), C_2 es la pendiente en el rango de altas frecuencias, equivalente a n, y C_3 es la constante multiplicadora en la función de forma. Así, teniendo en cuenta las relaciones entre el modelo de Bretschneider y el GLERL dadas en la tabla 3.3, se obtienen los valores iniciales de los parámetros libres.

4.3.3 Evaluación de la bondad de los ajustes

Para cuantificar la bondad de los ajustes de los modelos espectrales a los espectros observados se emplea el denominado índice de desviación, DI, propuesto por Liu (1983) y cuya expresión viene dada por

$$DI = \sum_{i=1}^{Ns} \left[\frac{|S(f_i) - S_o(f_i)|}{S(f_i)} \times 100 \right] \left[\frac{S(f_i)\Delta f}{m_0} \right] \tag{4.99}$$

donde N_s es el número de estimaciones espectrales obtenidas al estimar el espectro experimental, denotado por $S(f)$, y $S_0(f)$, representa el modelo espectral que se pretende ajustar. Nótese que este índice representa la suma de los porcentajes de las desviaciones relativas entre el espectro observado y el ajustado. Además, el término en el segundo corchete de la ecuación (4.99) representa el contenido energético correspondiente a cada banda de frecuencias de ancho Δf, relativo a la energía total del espectro. En consecuencia, este término pondera las desviaciones relativas observadas para cada frecuencia en función del contenido energético asociado a la misma. De este modo, las desviaciones encontradas en la zona del pico espectral tienen una mayor contribución al valor de DI que aquellas observadas en zonas del espectro con un contenido energético pequeño en relación a la energía total del espectro.

Resulta obvio que el valor de DI crece al aumentar las desviaciones entre el espectro observado y el ajustado. Es decir, la bondad del ajuste mejora a medida que disminuye el valor de DI, valor que debe ser nulo en el caso de un ajuste perfecto. No obstante, no existe un criterio estricto para decidir cual es el valor umbral de DI por debajo del cual se puede admitir que el ajuste de un modelo espectral dado es adecuado.

Según Liu (1983), al ajustar un conjunto de 234 espectros al modelo GLERL obtiene un valor medio $D.I. = 25.25 \pm 8.87$. Este mismo autor (Liu, 1984) ajustó los espectros de un conjunto de más de 2000 registros de oleaje, obtenidos en el Lago Superior, mediante el mismo modelo y obtuvo un valor medio $D.I. = 30.875 \pm 8.756$.

Un procedimiento más adecuado que obtener el valor medio de los $D.I.$ resultantes del ajuste de numerosos espectros experimentales, fué empleado por Pires Silva (1988), quién relacionó el valor de $D.I.$ con la variabilidad estadística de las estimaciones espectrales. Así, empleando los intervalos de confianza del 90% como referencia obtuvo un valor de dicho parámetro próximo a 70. Es decir, si $D.I. \leq 70$ se admite que el espectro ajustado se encuentra dentro de los intervalos de confianza del 90% del espectro experimental y, en consecuencia, el ajuste puede ser considerado como válido con dicho nivel de confianza.

Ajuste de espectros de oleaje con el modelo GLERL2

Para evaluar la eficiencia del modelo GLERL2, se ha realizado un estudio comparativo entre los resultados obtenidos con dicho modelo y los logrados mediante el modelo OH, que tal como se comentó previamente, es el modelo más empleado en la práctica para caracterizar espectro bimodales.

Para realizar dicho estudio, en primer lugar, los espectros se han clasificado en 5 tipos diferentes. Por un lado, los espectros con un único pico han sido clasificados en espectros de oleaje de viento puros (Wind-sea, WS), y espectros de oleaje de fondo puros (Swell, SW). Por otra parte, los espectros bimodales se han agrupado en 3 subclases, en términos del parámetro adimensional SSER (Rodríguez y Guedes Soares, 1999), que representa la relación entre la energía asociada al oleaje de viento y la correspondiente al oleaje de fondo. Es decir,

$$SSER = \left(\frac{m_{0_{ws}}}{m_{0_{sw}}} \right) \tag{4.100}$$

Así, aquellos campos de oleaje que tienen un valor de SSER menor que uno representan un estado de mar dominado por el oleaje de fondo y los que presentan un valor de SSER mayor que uno corresponden a la categoría de aquellos en los que domina el oleaje de viento. Si el valor de SSER es próximo a uno, entonces están incluidos en la categoría de estados de mar con dos picos espectrales de energía equivalente. Estas tres categorías se han denotado con los códigos *BS*, *BW* y *BE*, respectivamente.

En las figuras 4.31, 4.32 y 4.33, se presentan, a modo de ejemplo, los ajustes de ambos modelos a espectros bimodales obtenidos del análisis de registros experimentales correspondientes a la boya LP-I. En dichas figuras se muestran conjuntamente el espectro estimado y el mejor ajuste obtenido con cada modelo, empleando las metodologías explicadas anteriormente. En particular, en la figura 4.31 se muestran 9 ejemplos de ajustes de espectros dominados por el oleaje de viento ($SSER > 1$), o BW, mientras que los 9 ejemplos mostrados en la figura 4.32 corresponden a casos de oleajes dominados por el oleaje de fondo ($SSER < 1$), o BS. En la figura 4.33 se presentan los ejemplos correspondientes al caso de oleajes bimodales con oleaje de viento y de fondo de contenido energético similar ($SSER \approx 1$), oBE.

Tal como era de esperar, de estas figuras se desprende claramente el mejor comportamiento en el ajuste presentado por el modelo GLERL2, en todos los casos. Si bien existen casos en que ambos modelos proporcionan ajustes similares, el obtenido con el modelo GLERL es siempre superior al logrado con el modelo OH. Además, se dan numerosos casos, en los que el modelo propuesto proporciona ajustes execelentes, mientras los obtenidos con el OH resulta totalmente inadecuado.

Naturalmente, esta diferencia de comportamiento radica en que, tal como se ha comentado anteriormente, el modelo OH mantiene constante el exponente correspondiente a la función de forma, término exponencial, que controla el comportamiento del espectro en la zona de bajas frecuencias. Además, fijadas la energía total, $H_s \equiv m_0$, y la frecuencia de pico, tanto la pendiente en la zona de altas frecuencias, como el término que gobierna el contenido energético en dicha zona, y el término de localización del pico espectral, están controladas únicamente por el parámetro de forma λ. Por el contrario, en el modelo GLERL, todos estos factores están controlados por tres parámetros libres que, una vez fijadas la energía y la frecuencia de pico correspondientes a cada parte del espectro, permiten que este se adapte con mucha más facilidad al espectro observado.

Como consecuencia, mientras el modelo GLERL2 permite ajustar adecuadamente los dos picos de los espectros bimodales, el modelo OH tiende a ajustar correctamente sólo uno de los picos, especialmente en aquellos casos en que ambos picos están muy próximos entre sí, o cuando uno de ellos es muy estrecho. Cuando ambas condiciones se dan conjuntamente, como en el caso 92A2600, de la figura 4.32, el ajuste que se obtiene con el modelo OH no resulta en absoluto adecuado.

El examen de la bondad del modelo sugerido se ha llevado a cabo empleando los espectros estimados a partir de los registros de elvaciones obtenidos durante el año 1992 en la boya LP-I. Es decir, un total de 7772 registros, que superaron el control

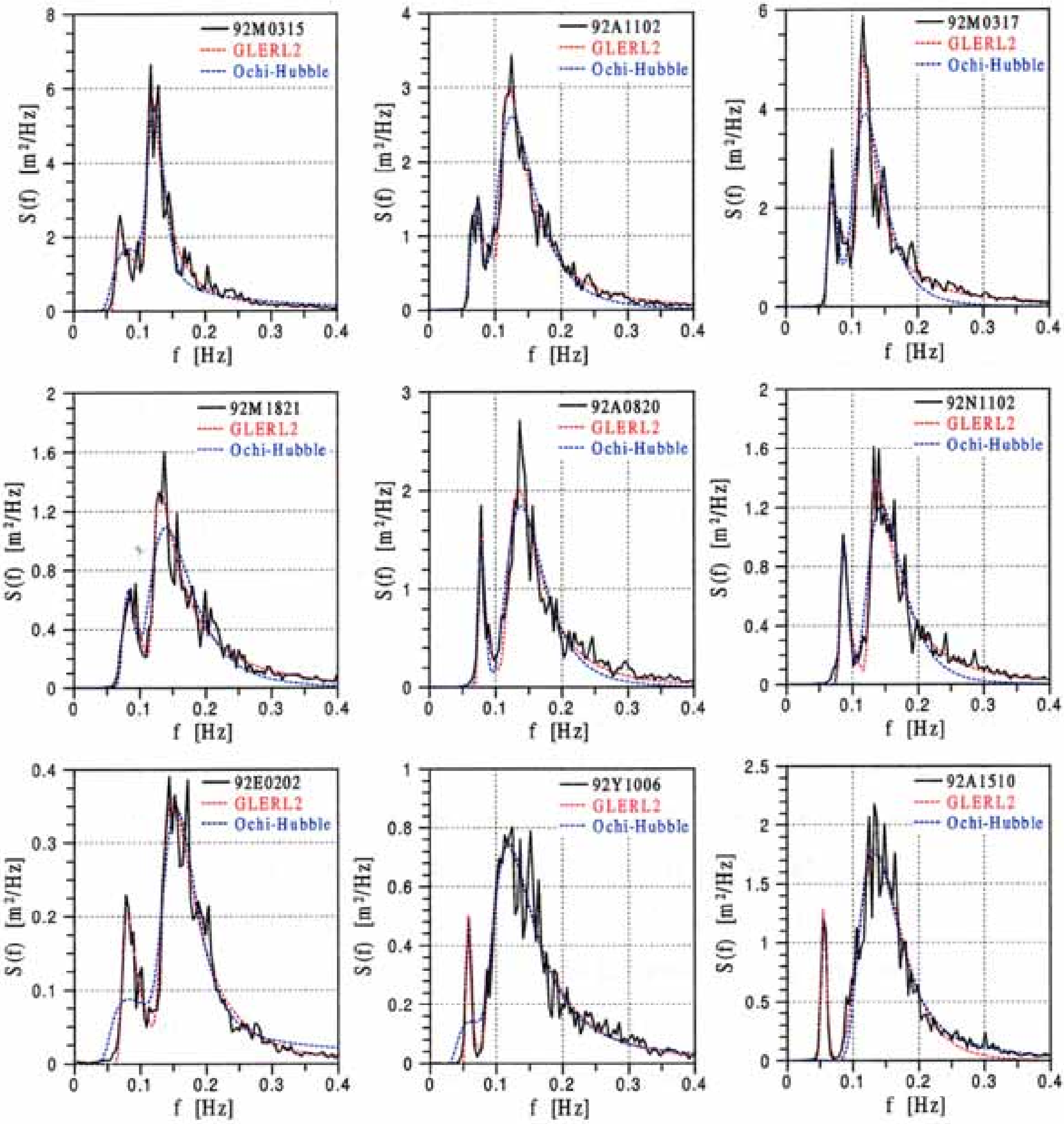

Figura 4.31: Ejemplos de ajuste de espectros bimodales con predominio del oleaje de viento mediante los modelos OH y GLERL2.

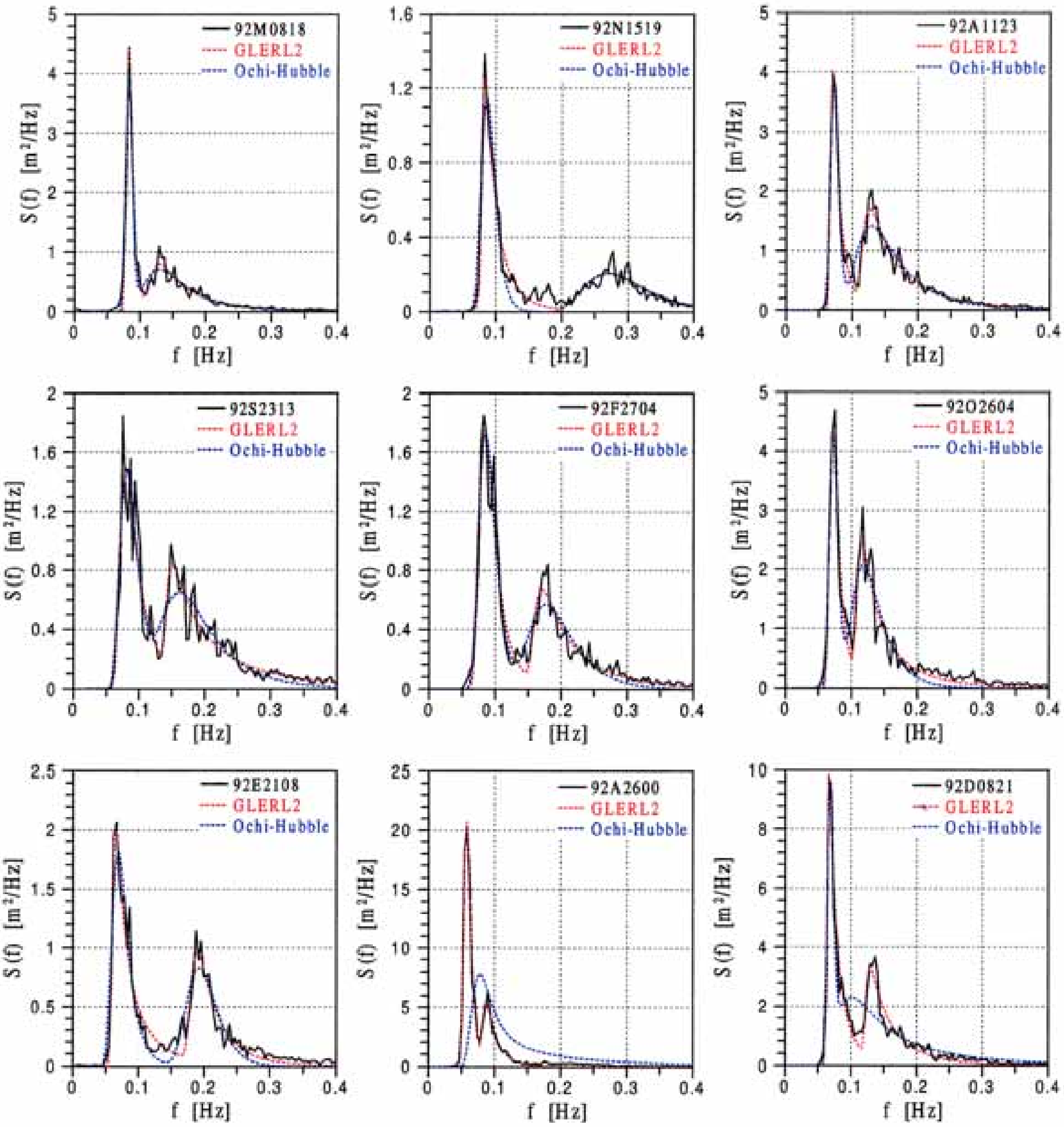

Figura 4.32: Ejemplos de ajuste de espectros bimodales con predominio del oleaje de fondo mediante los modelos OH y GLERL2.

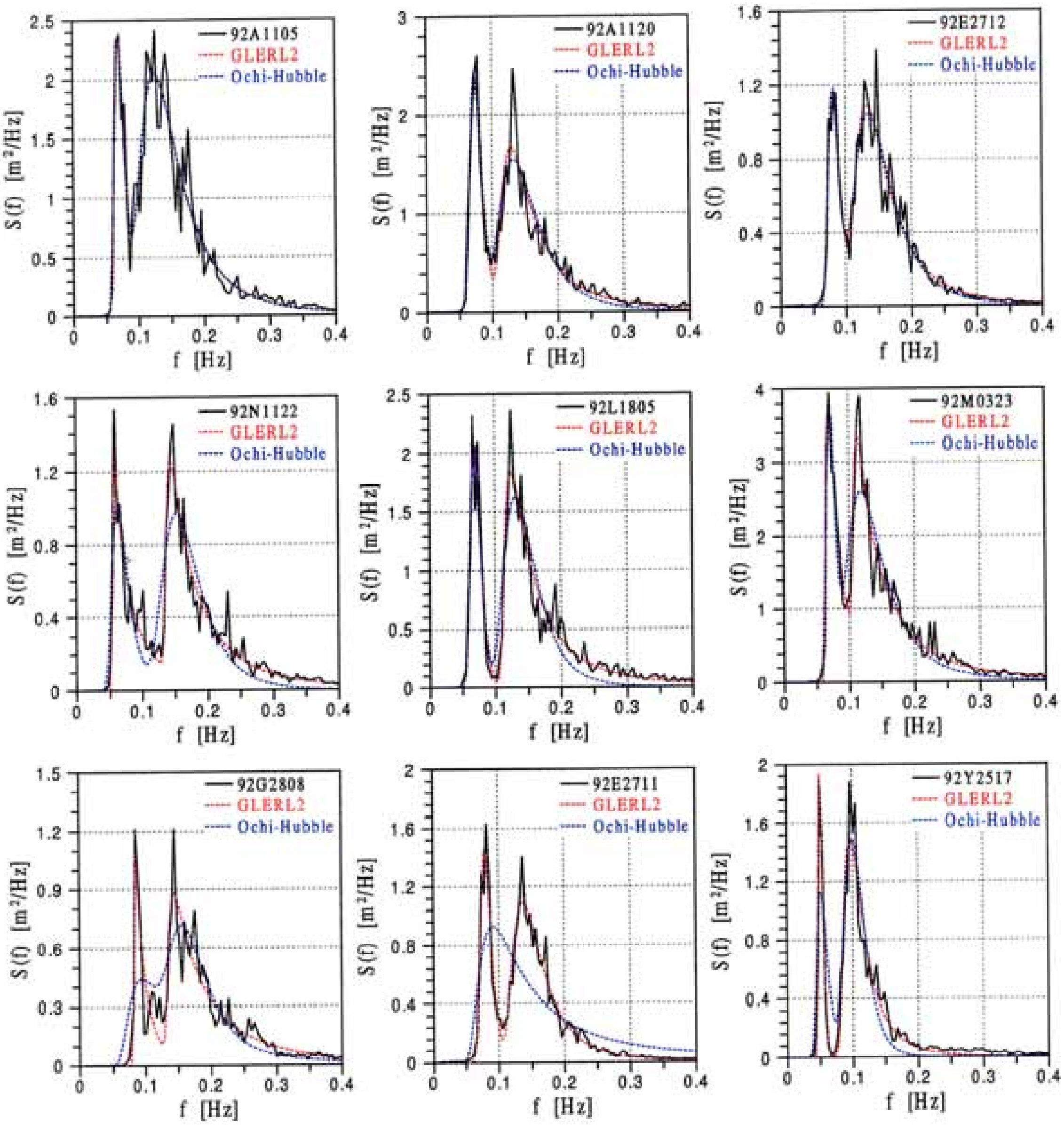

Figura 4.33: Ejemplos de ajuste de espectros bimodales con oleaje de viento y de fondo de contenido energético equivalente mediante los modelos OH y GLERL2.

de calidad descrito en la sección [2.1.1], durante el cual se rechazó algo menos del 3% del total inicial (7952 registros). Debe notarse que el hecho de haber optado por contrastar la validez relativa del modelo espectral propuesto haciendo uso de un año de registros correspondientes a la boya LP-I, y no de la boya LP-II, se debe a que tal como se demostró en la sección [4.1.2], los registros de la primera de las boyas (al norte de Gran Canaria) están más afectados por la presencia de oleaje de fondo, de modo que el porcentaje de espectros bimodales en ésta es bastante superior al encontrado en LP-II.

En la figura 4.34 se muestran los resultados globales, en términos de la frecuencia relativa del índice de desviación, del ajuste de ambos modelos al conjunto de registros antes citado. De dicha figura se desprende el mejor ajuste obtenido en todos los casos con el modelo GLERL2. Nótese que en el caso de los oleajes bimodales dominados por el oleaje de viento (BW), el D.I. no superó en ningún caso el valor de 50 para el modelo GLERL2, mientras que para el OH éste alcanzo valores de 70.

Teniendo en cuenta los resultados de Liu (1983, 1984), se ha considerado adecuado imponer el límite del criterio de aceptación, o rechazo, en el valor $D.I. = 30$. No obstante, se debe señalar que, aunque en general el valor de dicho índice da una información coherente con los resultados de las inspecciones visuales, la imposición de un límite tan estricto no es del todo correcta, puesto que en ocasiones se observan ajustes bastante adecuados en los que el valor de D.I. supera este umbral. Sin embargo, los resultados son elocuentes. El porcentaje de valores de D.I. superiores a 30 es muy bajo, siempre inferior al 5%, en el ajuste del modelo GLERL2, para los tres tipos de espectros bimodales. Por el contrario, el ajuste del modelo OH da lugar a excedencias del $20-30\%$ del valor crítico para los tres tipos de espectros. En particular, en los oleajes tipo BS y BE se llegan a alcanzar valores superiores a 100.

En las figuras 4.35, 4.36 y 4.37, se presentan los histogramas de los valores de los coeficientes C_{ij} obtenidos del ajuste del modelo GLERL2 a los espectros antes comentados, para los diferentes tipos de espectros bimodales clasificados según su valor de SSER. En primer lugar es necesario contrastar la coherencia de los valores obtenidos, para ello se han comparado los rangos de valores resultantes en

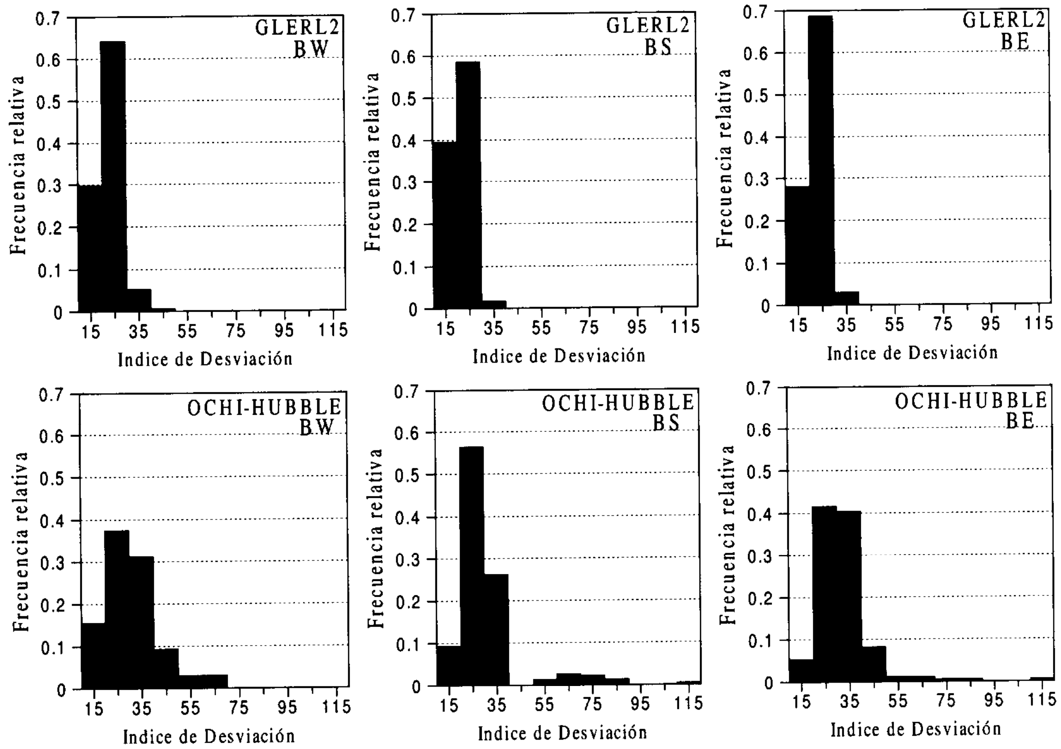

Figura 4.34: Histogramas de D.I. correspondientes a los ajustes de espectros bimodales mediante los modelos OH y GLERL2.

este estudio con los presentados por Liu (1983), observando que los valores de los coeficientes mostrados en estas figuras siempre se encuentran claramente dentro de los rangos encontrados por dicho autor, aún cuando el mismo sólo empleó su modelo (GLERL) para caracterizar espectros unimodales correspondientes a oleajes de viento medidos en los Grandes Lagos. En la figura 4.38 (Liu, 1983), se muestran los rangos de valores obtenidos por dicho autor para los coeficientes C_1, C_2 y C_3, en función de la edad del oleaje, tras analizar un conjunto de 234 series de oleaje registradas en los Grandes Lagos.

Al examinar los rangos de valores obtenidos para los cieficientes C_{1j} ($j =$ sw, ws), mostrados en las figuras 4.35-4.37, se observa que estos coeficientes adoptan valores generalmente inferiores a 30, estado sus valores modales siempre en el intervalo entre 2 y 6, aproximadamente. No obstante, existen algunos casos, para los tres tipos de oleaje considerados, en los que los valores de los coeficientes se apartan

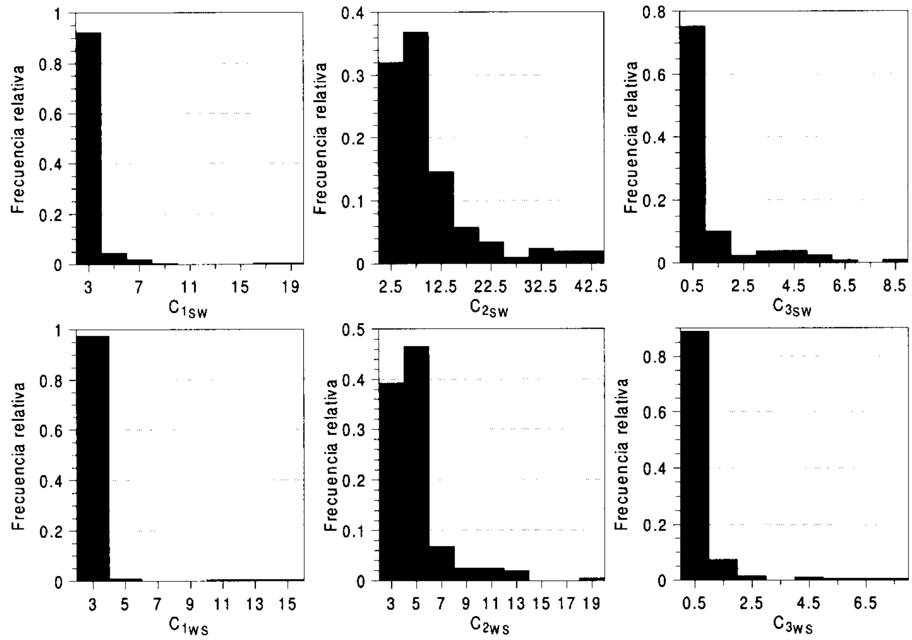

Figura 4.35: Histogramas de los valores de los coeficientes C_{ij} obtenidos del ajuste de espectros bimodales, con dominancia del oleaje de viento, con el modelo GLERL2.

considerablemente del comportamiento medio. Sin embargo, estos valores siempre están muy por debajo de los valores máximos observados por Liu para el coeficiente C_1 que, tal como se muestra en la figura 4.38, aunque normalmente toma valores cercanos al intervalo antes citado, llega a alcanzar valores del orden 10^4.

Por otro lado, los coeficientes C_{2ws}, que representan las pendientes del rango de alta frecuencia para el oleaje de viento muestra valores siempre del rango esperado, en función de los resultados mostrados en la sección [4.1.2], a excepción de unos pocos valores relativamente altos, entorno a 40, en el caso de los espectros del tipo *BE*, pero siempre por debajo del límite superior observado en los resultados de Liu (figura 4.38) donde se alcanzan valores superiores a 100. Nótese, además, que en todos los casos el valor modal de este coeficiente está cercano a los valores 4 y 5, predichos por la teoría en condiciones de oleaje de viento puro. Este hecho también se verifica para el coeficiente C_{2sw}, pero en este caso aparece una dispersión de los valores muy superior a la observada para el coeficiente correspondiente al oleaje de viento. Obsérvese que, aunque con una frecuencia relativa muy baja, en este caso

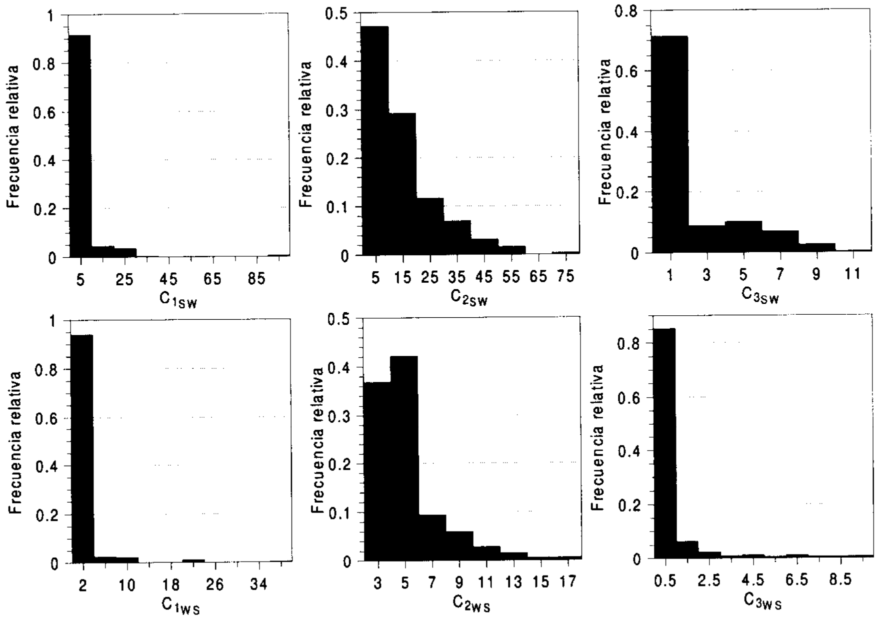

Figura 4.36: Histogramas de los valores de los coeficientes C_{ij} obtenidos del ajuste de espectros bimodales, con dominancia del oleaje de fondo, con el modelo GLERL2.

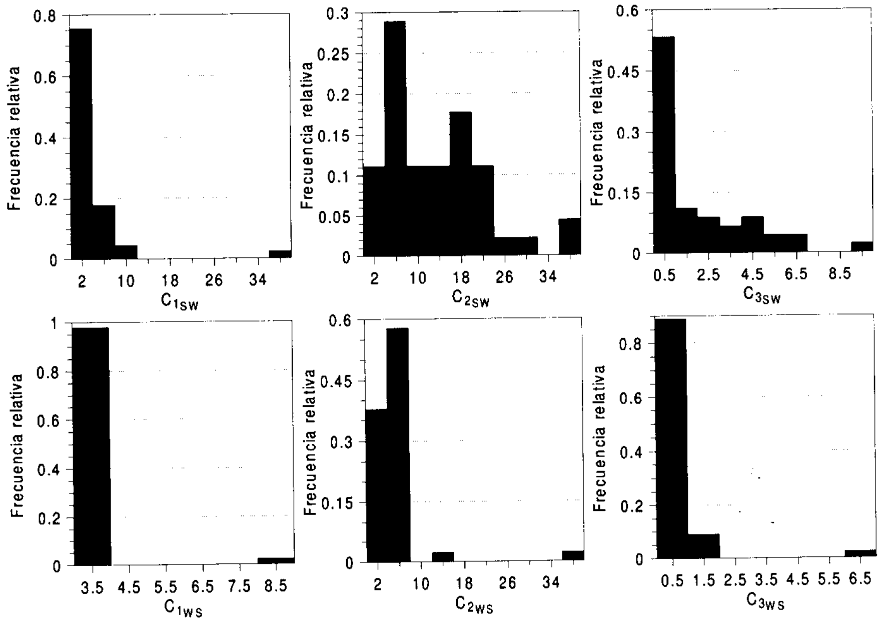

Figura 4.37: Histogramas de los valores de los coeficientes C_{ij} obtenidos del ajuste de espectros bimodales, con oleaje de viento y de fondo de contenido energético equivalente, con el modelo GLERL2.

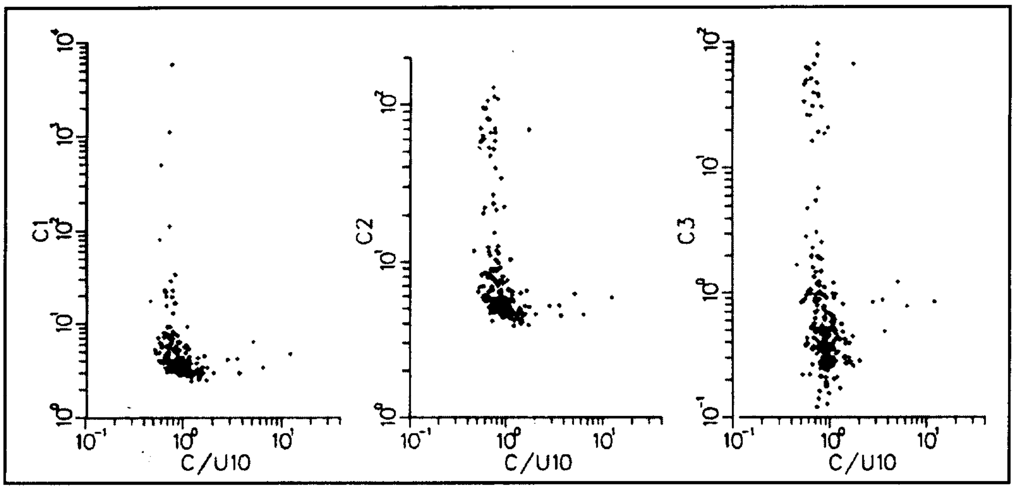

Figura 4.38: Rango de valores de los coeficientes C_i obtenidos por Liu (1983) mediante el ajuste del modelo GLERL a espectros unimodales de oleaje de viento registrado en los Grandes Lagos.

el coeficiente llega a alcanzar valores de hasta 80. Este resultado no debe resultar extraño dado que una característica del oleaje de fondo es la de presentar un valor muy alto de la pendiente en su rango de altas frecuencias, debido a que durante su propagación ha perdido la mayor parte de su contenido energético asociado a componentes de alta frecuencia que por efectos de dispersión quedan rezagadas y son fuertemente afectadas por los procesos de disipación.

Por otra parte, el comportamiento del coeficiente C_{3j}, que representa el factor que controla la pendiente con la que sube el espectro en la cara trasera al pico espectral, así como la ubicación del mismo, presenta siempre valores superiores para el sistema de oleaje de fondo, tal como es de esperar, dado que también por efectos de dispersión durante su propagación, el swell muestra un espectro nuy apuntado, con una fuerte pendiente en la cara trasera. Nótese, además, que las diferencias entre C_{3sw} y C_{3ws} son más marcadas en el caso de oleajes mixtos dominados por oleajes de fondo, disminuyendo al pasar a la situación de oleajes con contenido energético similar y, aún más, en el caso de campos dominados por el oleaje de viento. Es interesante observar que en todos los casos, el valor modal de estos coeficientes está próximo al valor 5/4 empleado en la mayoría de los modelos espectrales. Además, los valores encontrados en este trabajo se encuentran concentrados entorno al mismo rango que aquellos observados por Liu (figura 4.38), es decir con valores entre 0.1 y 10, aproximadamente, si bién dicho autor obtiene algunos valores superiores a 100.

Por último, consideramos interesante comentar que, aunque no se muestran los resultados detallados, por no entrar dentro de los objetivos del presente trabajo, el ajuste de los espectros unimodales, tanto de viento como de fondo puros, mediante el modelo GLERL2 dió lugar a ajustes notablemente adecuados y, en la mayoría de los casos, superiores a los ajustes realizados con el modelo GLERL. Este hecho tiene su explicación en lo comentado al comienzo del presente capítulo (ver figura 4.1), donde se indicó que en muchas ocasiones aparecen espectros que son clasificados como espectros unimodales por presentar un único pico discernible, pero que no pueden ser caracterizados adecuadamente mediante un espectro unimodal debido a la presencia de una meseta de energía en la zona de altas frecuencias que se prolonga bastante más alla de la zona del pico espectral. Este hecho también ocurre en los casos en los que el único pico espectral discernible aparece acompañado por una protuberencia en la parte trasera en la que no se puede llegar a distinguir un pico, pero que perturba el comportamiento esperado para un espectro de oleaje de viento o de fondo puro. En las figuras 4.39 y 4.40 se muestran, a modo ilustrativo, un ejemplo de cada uno de estos casos.

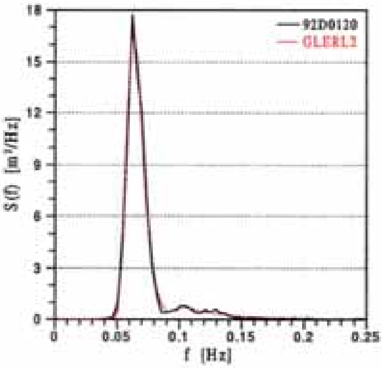

Figura 4.39: Ejemplo de espectro unimodal con contenido energético considerable en el rango de altas frecuencias, ajustado adecuadamente por el modelo GLERL2.

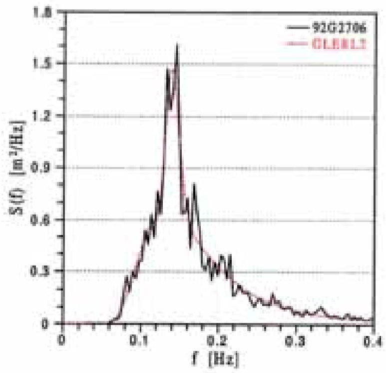

Figura 4.40: Ejemplo de espectro unimodal con estructura irregular en la zona trasera del pico espectral, ajustado adecuadamente por el modelo GLERL2.

4.3.4 Caracterización del espectro mediante una suma de exponenciales

A pesar de los excelentes resultados obtenidos en el ajuste de espectros tanto unimodales como bimodales con el modelo GLERL2, consideramos importante hacer algunos comentarios y reflexiones respecto a la metodología general empleada para caracterizar el espectro del oleaje.

En primer lugar, la teoría de la semejanza de Kitaigorodskii (1962), indica que el espectro del oleaje debe ser una función de factores como la velocidad del viento, la longitud del fetch, y la duración del viento, pero en ningún momento establece que tipo de función es la que relaciona estos factores con el contenido energético del oleaje, en un punto e instante dados. En realidad, dicho autor sólo llegó a la conclusión de que ésta función debía ser obtenida a partir de datos experimentales y empleando técnicas de ajuste adecuadas. No obstante, todos lo modelos espectrales comentados anteriormente, incluido el modelo GLERL, admiten que el espectro del oleaje de viento puede ser caracterizado como el producto de una potencia de la frecuencia por un término exponencial. Nótese que incluso los modelos de Bretschneider (1959, 1963) y Krilov (1966), que no toman como punto de partida la función general dada por (3.118), llegan al mismo tipo de estructura, pero que este resultado se debe a la admisión de una función de tipo exponencial tanto para las alturas de ola como para los periodos, en el caso de Bretscheneider, y para los periodos, en el caso de Krilov. En realidad, no existe justificación alguna para admitir que la estructura energética del oleaje en el dominio frecuencial tenga una forma funcional resultante del producto de una potencia por una exponencial, tal como correctamente comentan Huang et al. (1990).

Por otro lado, esta forma funcional también se adopta en todos los modelos espectrales presentados en la sección [3.2.3] para describir la estructura frecuencial del oleaje de fondo. En este caso, no existe si quiera un fundamento sólido para establecer el tipo de modelo que debe ser empleado en la caracterización del espectro. Nótese que, mientras en el caso del oleaje de viento existe un fuerte acoplamiento entre la entrada de energía desde la atmósfera, la disipación de ésta por rotura y las interacciones no lineales resonantes entre diferentes componentes frecuenciales, en el caso del swell no existe la posibilidad de establecer una ley de semejanza, dado que éste se propaga fuera de la zona de generación de forma básicamente independiente de factores externos como el viento, la longitud del fetch, etc. Su estructura energética se construye en función de su historia de propagación desde el fetch hasta la zona de observación, en base, fundamentalmente, a los fenómenos de dispersión frecuencial y direccional.

Adicionalmente, en un punto dado del océano puede registrase un campo de oleaje que sea el resultado de uno, dos, o más, sistemas de oleaje individuales. Es decir, el oleaje observado puede ser un oleaje de viento puro, un oleaje de fondo puro, la combinación de estos dos, de dos oleajes de fondo sólamente, de dos oleajes de fondo y otro de viento, etc. En otras palabras, pueden coexistir un oleaje de viento y varios oleajes de fondo de diferente edad (distancia o tiempo de propagación), direcciones, etc. En algunos trabajos encontrados en la literatura, aunque bastante escasos, se cita el porcentaje de espectros trimodales observados. Así, por ejemplo, Violante-Carvalho et al. (2001) observan un porcentaje superior al 30% de espectros con 3 o más picos. En este sentido, Davidan et al. (1985) propusieron una formulación para espectros trimodales, siguiendo el procedimiento de la superposición de espectros unimodales. De este modo, una formulación general requeriría admitir como válida una expresión del tipo

$$S(f) = S_1(f) + S_2(f) + S_3(f) + \cdots$$

En este contexto, y aunque desde el punto de vista práctico no resulte trascendente, es también importante resaltar que una formulación de este tipo asume que el espectro resultante es simplemente la superposición lineal de los distintos espectros individuales. Es decir, se admite que no existen interacciones entre los diferentes sistemas de oleaje coincidentes en un punto dado. En consecuencia, estos modelos sólo son estrictamente correctos si se admite que las interacciones entre los distintos sistemas de oleaje que se combinan para generar el oleaje resultante son nulas, o suficientemente débiles como para poder ser despreciadas. Sólo en tal caso es posible aplicar el principio de superposición para descomponer el campo de oleaje resultante en subcampos independientes procedentes de cada sistema de tormenta. No obstante, ya se ha comentado que las interacciones entre un oleaje de fondo y un oleaje de viento pueden ser significativas si las frecuencias de pico no están excesivamente separadas entre sí. Además, también se ha señalado que uno de los efectos de las interacciones entre estos tipos de sistemas de oleaje es el de transmitir energía fundamentalmente hacia el pico de bajas frecuencias, haciendo que finalmente la estructura del espectro presente un único pico.

Por otra parte, anteriormente se comentó que, para aplicar la metodología de superposición de espectros individuales es necesario emplear técnicas de detección de los diferentes sistemas de oleaje. Proceso que, en general, no suele resultar sencillo.

En consecuencia, en este trabajo se considera como posible metodología para resolver el problema de caracterizar la estructura espectral del oleaje de forma genérica, el uso de una aproximación que no asume el principio de superposición, ni ninguna estructura funcional predefinida para los diferentes rangos de frecuencia, resulta válida para caracterizar la estructura resultante de la combinación de cualquier número de sistemas de oleaje individuales, y no requiere de la detección de los diferentes sistemas de oleaje constituyentes. Esta metodología consiste en caracterizar el espectro completo como una suma de exponenciales.

Es decir, se sugiere el siguiente modelo para caracterizar, de forma general, la estructura espectral del oleaje

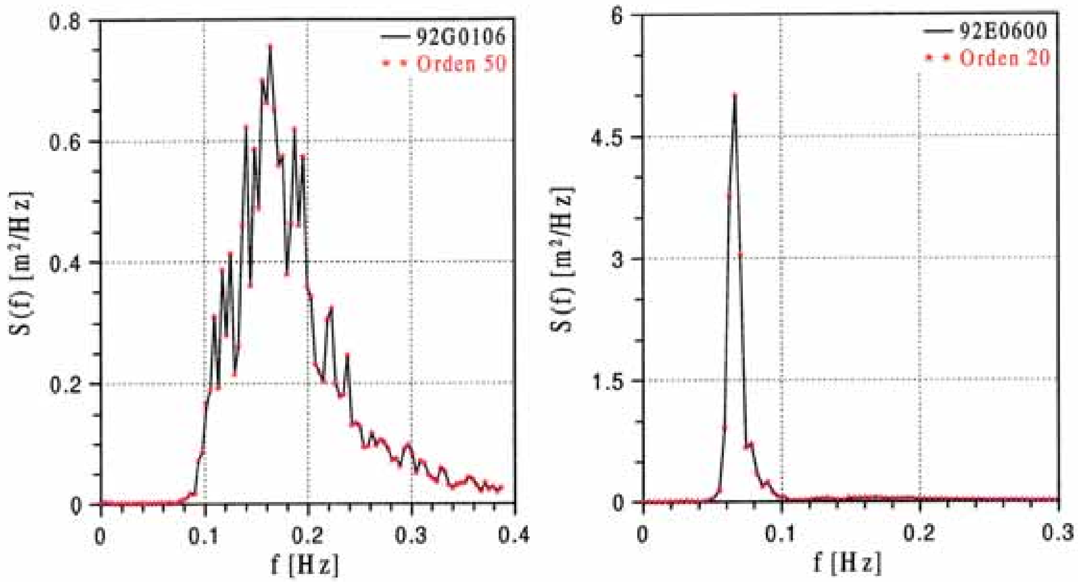

Figura 4.41: Ejemplos de ajustes de espectros de oleaje de viento (izquierda) y oleaje de fondo (derecha) con el método de Prony modificado.

$$\tilde{S}(f) = \sum_{k=1}^{N} a_k e^{\lambda_k f} \tag{4.101}$$

donde N es el número de exponenciales que se deben considerar para ajustar adecuadamente el espectro observado, a_k y λ_k son coeficientes complejos que deben ser estimados mediante algún método eficiente. En este trabajo se sugiere utilizar la metodología basada en el procedimiento propuesto inicialmente por Prony (1795). No obstante, debido a que ésta metodología no es eficiente y resulta extremadamente sensible a la presencia de ruido en la señal que se analiza, se emplea la mejora realizada recientemente, sobre la idea original de Prony, por Osborne y Smyth (1991, 1995). Este método será descrito, conjuntamente con otra versión del mismo conocida como método de la covarianza (e.g., Marple, 1987), en el próximo capítulo, donde se hará uso de ellos para caracterizar la función de autocorrelación del oleaje.

En la figura 4.41 se muestran sendos ejemplos del ajuste de espectros unimodales, de oleaje de viento y de fondo mediante esta metodología. Adicionalmente, en la figura 4.42 se muestran dos ejemplos de espectros trimodales observados en la boya LP-I. Nótese que en todos los casos éste método permite

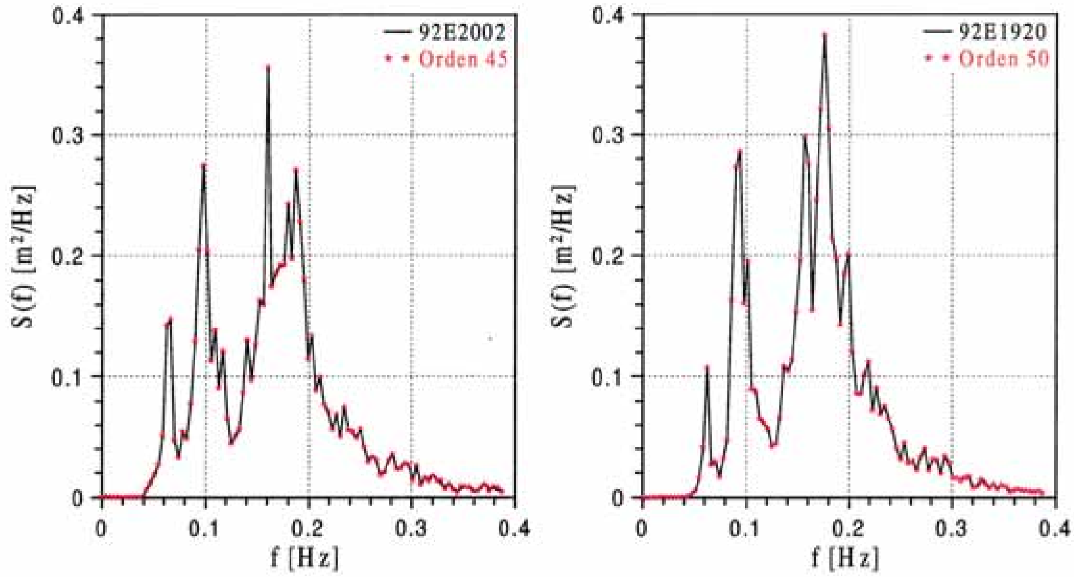

Figura 4.42: Ejemplos de ajuste de espectros trimodales con el método de Prony modificado.

ajustar perfectamente el espectro estimado, mediante la selección adecuada del orden del modelo (número de exponenciales), incluso cuando el nivel de ruido (variabilidad aleatoria de las estimaciones espectrales) es sustancial, tal como ocurre en los espectros de oleaje de viento y en los trimodales. La simple observación de la figura 4.42 revela que difícilmente estos espectros podrían ser caracterizados mediante una superposición de modelos espectrales unimodales. Naturalmente, un mayor suavizado de las estimaciones espectrales permite reducir considerablemente el orden necesario para que el modelo ajuste perfectamente el espectro estimado, tal como se observa en el caso de oleaje de fondo, en el cual, a pesar de su gran apuntamiento, el orden del modelo requerido para el ajuste perfecto es notablemente inferior, menos de la mitad, al necesario para los restantes casos.

En la figura 4.43 se muestran algunos ejemplos de ajustes de espectros de oleaje de viento empleando el método de Prony modificado (Osborne y Smyth, 1991, 1995). En dicha figura se han incluido seis ejemplos en orden creciente, de izquierda a derecha, y de arriba a bajo, de las irregularidades aleatorias presentes en la función de densidad espectral estimada. Nótese que, aunque todos los espectros han sido estimados con el mismo número de grados de libertad, $\nu = 38$, la irregularidad es manifiestamente variable entre los diferentes espectros. Naturalmente, las diferencias en el grado de variabilidad en los espectros son debidas, por un lado a la variación del ancho de banda espectral del registro de oleaje correspondiente, tal como se aprecia claramente en la figura, y por otro lado a la naturaleza intrínsecamente aleatoria, tanto del proceso como de las estimaciones. En consecuencia, en principio, parece razonable admitir que el orden del modelo necesario para ajustar adecuadamente un espectro dado será indicativo de aspectos tales como el ancho de banda del proceso.

Sin embargo, si se observan los ejemplos de ajustes mediante esta técnica mostrados en la figura 4.44, para el caso de espectros de oleaje de fondo, se puede apreciar que también en este caso, el orden del modelo necesario aumenta en la figura desde un valor de $N = 15$ hasta $N = 50$. En este sentido es interesante notar que mientras los espectros mostrados en la primera fila de dicha figura tienen órdenes entre 15 y 25, los de la segunda fila, que aparentemente tienen una estructura muy similar, presentan un orden N entre 40 y 50. Para poder entender este hecho es necesario considerar lo siguiente. Si bien los espectros de la primera fila y la segunda parecen tener una estructura frecuencial similar, al observar con detalle la zona de frecuencias altas se percibe claramente la presencia de un ligero contenido energético en esta zona, en la que las existe una gran variabilidad, aunque las fluctuaciones sean de pequeña magnitud. Claramente, la presencia de estas zonas de altas frecuencias con escaso contenido energético pero con elevada variabilidad hacen aumentar considerablemente el orden del modelo. En consecuencia, en los casos en que sólo sea necesario ajustar la zona del espectro de mayor contenido, será posible reducir sustancialmente el orden del modelo simplemente no considerando las frecuencias muy altas en el ajuste.

Es necesario señalar que los ejemplos incluidos en las figuras 4.43 y 4.44 han sido seleccionados de forma explícita para poder explicar, al menos parcialmente, el efecto de la estructura espectral sobre el orden del modelo necesario para alcanzar un buen ajuste. Sin embargo, en general, mientras el oleaje de viento requiere un orden notablemente alto, dada su elevada variabilidad natural, comentada en

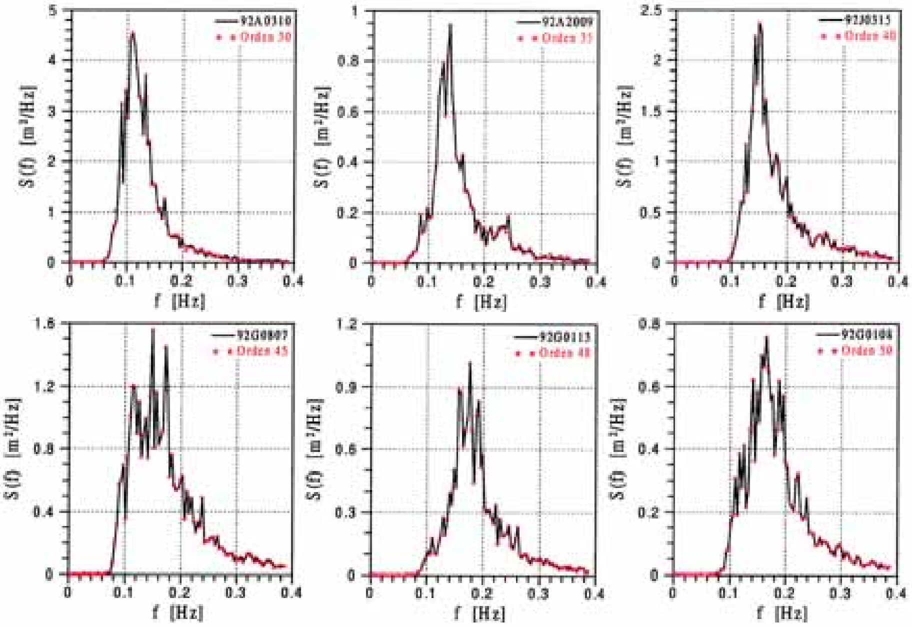

Figura 4.43: Ejemplos de espectros de oleaje de viento ajustados mediante el método de Prony modificado.

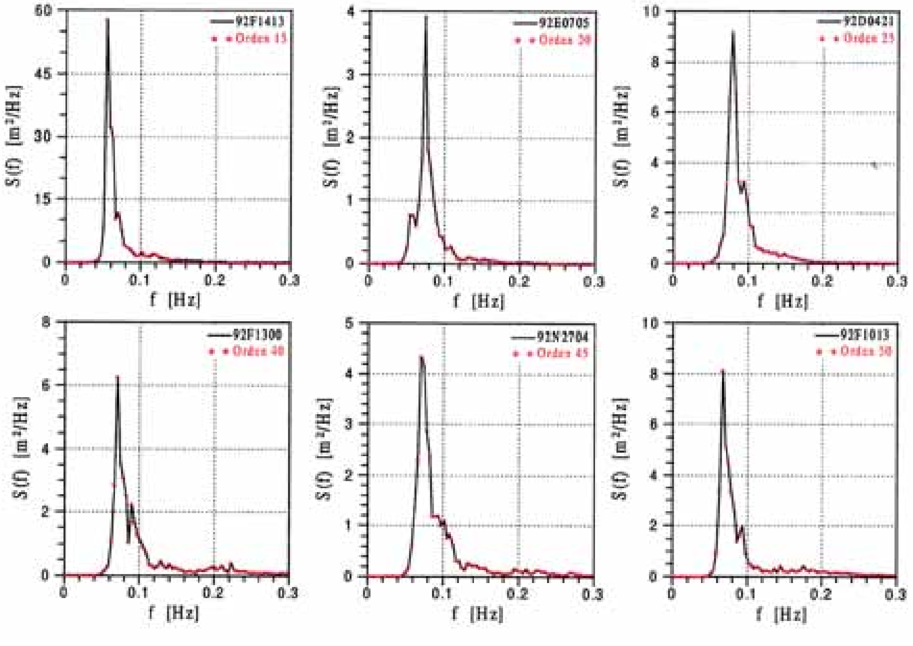

Figura 4.44: Ejemplos de espectros de oleaje de fondo ajustados mediante el método de Prony modificado.

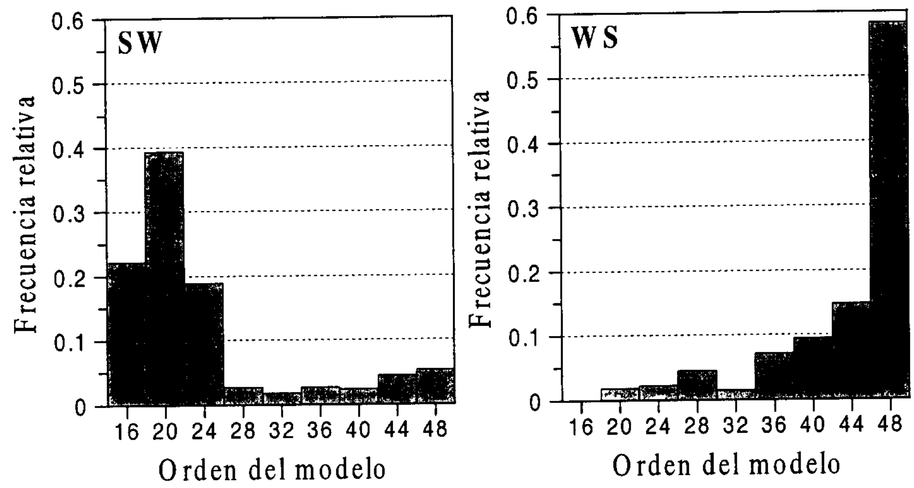

Figura 4.45: Histogramas de los órdenes del modelo requeridos para ajustar los espectros de oleaje unimodales mediante el método de Prony modificado.

capítulos previos, el oleaje de fondo suele presentar buenos ajustes con órdenes mucho más bajos. Así, tal como se observa en la figura 4.45, en la que se presentan los histogramas del orden del modelo empleado para ajustar los espectros de fondo (SW) y de viento (WS) obtenidos de los registros de la boya LP-I, prácticamente el 80% de los espectros de oleaje de fondo se ajustaron adecuadamente con $N < 26$. Por el contrario, para el 80%, aproximadamente, de los registros de oleaje de viento fué necesario emplear órdenes superiores a 38, para lograr un buen ajuste. Además, en todos los casos de oleaje de viento examinados el orden empleado fue superior a 20, mientras que con este orden se logró un ajuste adecuado para más del 60% de los espectros de oleaje de fondo.

En las figuras 4.46, 4.47 y 4.48 se muestran los resultados del ajuste con el método de Prony modificado de los espectros bimodales con predominio del oleaje de viento, del oleaje de fondo, y con ambos tipos de oleaje conteniendo un nivel energético similar, respectivamente. De estas figuras se desprende que el método modificado de Prony es capaz de ajustar cualquier tipo de oleaje, independientemente del numero de picos espectrales y de la irregularidad que presente la densidad espectral estimada. En los ejemplos mostrados en estas figuras se aprecia como el orden del modelo necesario para obtener un buen ajuste aumenta,

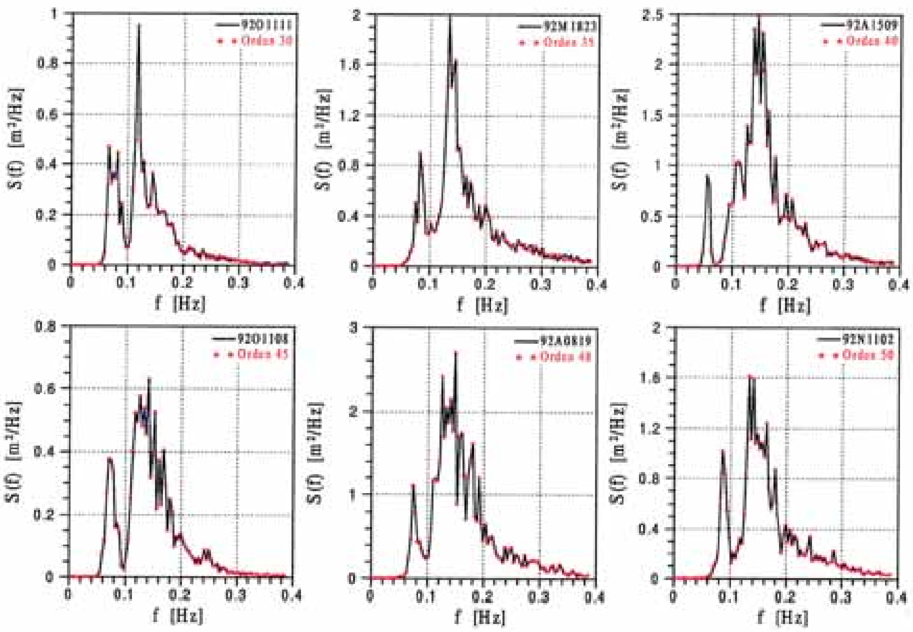

Figura 4.46: Ejemplos de espectros bimodales con predominio del oleaje de viento ajustados mediante el método de Prony modificado.

en general, al incrementarse el ancho de banda del registro analizado. Al examinar los histogramas del orden empleado para ajustar los diferentes tipos de espectros, mostrados en la figura 4.49, podría parecer contradictorio el que los órdenes del modelo más altos sean los requeridos para ajustar los espectros bimodales con predominio de oleaje de fondo. Sin embargo, tal como se observa en la figura 4.47, en este tipo de espectro suele aparecer un pico en bajas frecuencias, correspondiente al swell, muy apuntado y sin demasiado ruido. En consecuencia, según lo comentado anteriormente, este hecho debería dar lugar a justes adecuados empleando órdenes más bajos que los encontrados en los otros tipos de oleajes bimodales (figuras 4.46 y 4.48). Un análisis más preciso de la estructura de este tipo de espectros revela que, si bien el pico correspondiente al oleaje de fondo suele ser bastante apuntado y presentar pocas fluctuaciones aleatorias, el orden del modelo necesario aumenta considerablemente, con respecto al primer ejemplo de la figura, al aumentar el ancho de banda del espectro total por efecto del oleaje de viento que, además presenta una elevada irregularidad.

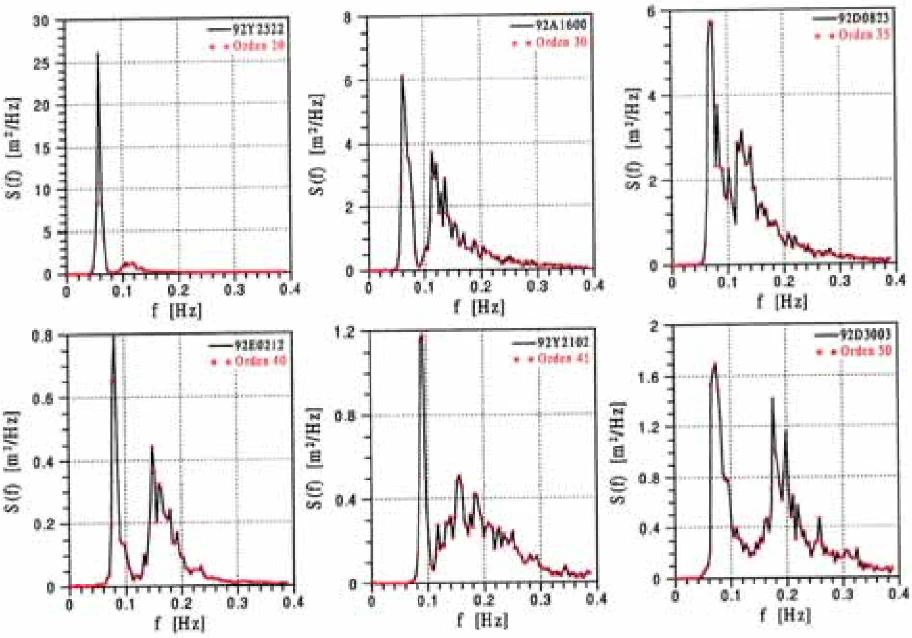

Figura 4.47: Ejemplos de espectros bimodales con predominio del oleaje de fondo ajustados mediante el método de Prony modificado.

Es importante señalar que ésta es la situación más comúnmente encontrada en los espectros de este tipo de oleaje bimodal, es decir, un espectro de bajas frecuencias con poca variabilidad y de banda bastante estrecha, acompañado por un espectro de altas frecuencias, correspondiente al oleaje de viento, con el contenido energético disperso sobre un amplio rango de frecuencias y mostrando una importante variabilidad entre estimaciones adyacentes. Por este motivo, la caracterización adecuada de este tipo de espectro requiere, en general, un orden del modelo superior al de los otros dos tipos de espectros de oleaje bimodal. Así, resulta evidente que cuando el oleaje de fondo esta combinado con un oleaje de viento poco energético, tal como en el primer ejemplo de la figura 4.47, el orden del modelo requerido resulta considerablemente menor que el promedio observado en la figura 4.49. En cualquier caso, los espectros bimodales observados se ajustaron de forma eficiente con órdenes del modelo comprendidos entre 18 y 50, en el 100% de los casos.

En principio, a pesar de los excelentes resultados obtenidos con el método modificado de Prony (Osborne y Smyth, 1991, 1995), desde un punto de vista pragmático se podría cuestionar la utilidad de la caracterización de los espectros de oleaje mediante esta metodología, frente al uso de modelos, tales como el Ochi-Hubble o el GLERL2, que emplean unos pocos parámetros con un determinado significado para describir la estructura de los espectros de oleaje bimodales. Sin embargo, además de los motivos expuestos al comienzo de esta sección, resulta evidente que este procedimiento permite ajustar con mucha mayor precisión los espectros experimentales. En este sentido se debe indicar que en el ajuste de todos los espectros estimados a partir de los registros de la boya LP-I para el año 1992 completo, los valores del índice de desviación siempre fueron sustancialmente menores que 1. Esto equivale a decir que los ajustes pueden ser considerados como prácticamente perfectos, y extraordinariamente más adecuados que los ofrecidos por los métodos convencionales. Además, esta metodología permite ajustar adecuadamente cualquier tipo de espectro, independientemente del número de campos de oleaje individuales que se combinen en la zona de observación. Por otro lado, debido a las variaciones que experimenta el tipo de oleaje que llega a una zona determinada a lo largo del año, este método permitiría obtener espectros promedios tanto anuales como estacionales, de forma simple y bastante exacta, lo cual reviste una enorme importancia práctica.

Desde un punto de vista práctico, mediante el uso de esta técnica sería posible almacenar en las grandes bases de datos sólo un número limitado de coeficientes, a partir de los cuales es posible reproducir perfectamente la estructura del espectro ajustado, sin necesidad de almacenar todos los valores de las densidades espectrales estimadas.

En el siguiente capítulo se comprobará que el empleo de esta metodología para caracterizar la función de autocorrelación del oleaje aporta beneficios adicionales, frente al uso de los modelos espectrales convencionales. Entre otros, la posibilidad de almacenar sólo un pequeño número de coeficientes necesarios para ajustar dicha función, que por si sóla ofrece información relevante sobre las características del oleaje, y la de poder obtener con una gran precisión el espectro a partir de este reducido número de coeficientes.

Capítulo 5

Caracterización en el dominio de los desfases temporales

La simple consideración del teorema de Wiener-Khintchine (2.46) revela la estrecha relación existente entre la función de densidad espectral y la función de autocorrelación de un proceso aleatorio dado. Según dicho teorema ambas funciones constituyen un par transformado de Fourier, es decir cada una es la transformada de Fourier de la otra. En consecuencia, la única diferencia que existe entre ambas funciones, desde el punto de vista del análisis de la información contenida en un registro experimental de datos, es el dominio en el que se muestra la información. Así, para una serie temporal de elevaciones de la superficie del mar, inducidas por el oleaje, la información contenida en la función de autocorrelación y la inmersa en la función de densidad espectral son exactamente las mismas, la unica diferencia estriba en que, en el primer caso la información temporal ha sido traspasada al dominio de los desfases temporales, mientras en el segundo, ésta se encuentra en el dominio frecuencial.

A pesar de esta evidente relación entre ambas técnicas de análisis, desde la introducción del concepto de densidad espectral en los estudios de oleaje (Pierson, 1952), prácticamente todos los esfuerzos por mejorar el conocimiento de dicho fenómeno han estado basados, de una u otra manera, en el uso del análisis espectral como herramienta de análisis básica, olvidando cási por completo la existencia de la función de autocorrelación. Sin embargo, es necesario señalar que, paradójicamente, hasta bien entrados los años 80 la metodología más ampliamente utilizada para obtener el espectro era la propuesta por Blackman y Tukey (1958), en la cual se obtiene la función de densidad espectral a partir de la función de autocorrelación.

El uso casi exclusivo de la función de densidad espectral para analizar las características de los registros de oleaje se debe, en gran medida, a que muchos de los rasgos característicos de este fenómeno, tales como la presencia de componentes dominantes, el ancho de banda del proceso, etc., se pueden apreciar e interpretar con mayor facilidad en el dominio frecuencial que en el dominio de los desfases. No obstante, existen otras características del oleaje que resultan más fácilmente discernibles en en dominio de los desfases temporales. En particular, todos aquellos aspectos relacionados con la "memoria" del proceso, es decir, de la dependencia entre los valores de la variable analizada en distintos instantes de tiempo, pueden ser observados con mayor facilidad en la función de autocorrelación (en adelante FAC) que en el espectro. En este sentido, la FAC proporciona una medida del grado de confianza que se puede tener al predecir las condiciones futuras en función de observaciones pasadas, motivo por el cual esta función desempeña un papel fundamental en el desarrollo de modelos predictivos de fenómenos aleatorios como el oleaje. Además, el hecho de que la FAC represente una medida estadística de la dependencia lineal entre términos de una serie temporal ha sido explotado por algunos autores (e.g., Sherif y Dear, 1995) para examinar la calidad de los generadores de números aleatorios.

En relación con la información sobre la dependencia entre valores del proceso observados en diferentes instantes de tiempo proporcionada por la función de autocorrelación, algunos autores (e.g., Rye y Lervik, 1981) han sugerido la existencia de una relación entre la estructura de dicha función y el nivel de agrupamiento del oleaje.

Desde un punto de vista aún más práctico, existen aplicaciones, tales como la identificación de de la ocurrencia de fallos en las estructuras de los barcos (Zubaydi et al., 2000), en las que el conocimiento de la estructura de la FAC resulta fundamental.

5.1 Modelización de la función de autocorrelación del oleaje

En la sección [3.1.4] se obtuvieron las expresiones analíticas correspondientes a las funciones de autocorrelación asociadas a los modelos espectrales teóricos dados por la expresión genérica (3.118). En este sentido es importante notar que, aunque los modelos teóricos obtenidos para la función de autocorrelación en la sección [3.1.4] correspondían a modelos espectrales unimodales, su aplicación a la FAC asociada a los modelos espectrales bimodales es inmediata, puestos que estos están construidos como la suma de dos espectros unimodales. Es decir, las expresiones de las funciones de autocorrelación asociadas a espectros bimodales teóricos se obtendrán como la suma de las correspondientes a cada uno de los espectros individuales superpuestos para obtener la formulación bimodal.

Resulta óbvio que el uso de estos modelos teóricos para caracterizar las FAC obtenidas experimentalmente requiere, en primer lugar, estimar el espectro y ajustar un modelo apropiado. Una vez obtenidos los coeficientes del modelo espectral, que proporcionan el ajuste adecuado del espectro observado, es necesario evaluar numéricamente las expresiones correspondientes a la función de autocorrelación. En consecuencia, este procedimiento no resulta en absoluto eficiente, máxime si se tiene en cuenta que, en general, el ajuste de los modelos espectrales del tipo dado por la ecuación (3.118) a los espectros observados presenta desviaciones notables.

En función de lo anteriormente comentado, parece razonable intentar desarrollar modelos que permitan ajustar de forma apropiada la FAC del oleaje, sin necesidad de recurrir a la transformación de los modelos propuestos para caracterizar el espectro del oleaje. En la siguiente sección se analizan algunos modelos simples propuestos en la literatura para caracterizar la FAC de diferentes tipos de señales aleatorias y, en particular, una de las pocas aplicaciones que de éste tipo de modelos se ha realizado en el campo del oleaje. Posteriormente se abordará el problema de la caracterización de la FAC del oleaje mediante el procedimiento, ya empleado en el capítulo anterior para ajustar los espectros de oleaje, de suma de exponenciales sugerido inicialmente por Prony (1795).

5.1.1 Caracterización de la FAC del oleaje mediante modelos simples

En general, la FAC de una señal de ancho de banda espectral arbitrario depende de la frecuencia central , β, y de su ancho de banda espectral B (e.g., Bendat y Piersol, 1986). Es decir,

$$R(\tau) = \varpi e^{-B\tau} \cos(\beta\tau) \tag{5.1}$$

donde ϖ es el valor medio cuadrático de la señal

En particular, para un ruido de banda ancha, con ancho de banda α, ésta adopta una estructura del tipo

$$R(\tau) = \varpi e^{-\alpha\tau} \tag{5.2}$$

mientras que para un ruido de banda estrecha, cuyo contenido energético está centrado entorno a $2\pi f = \beta$, siendo en ancho de banda α, su expresión será

$$R(\tau) = \varpi e^{-\alpha\tau} \cos(\beta\tau) \tag{5.3}$$

Partiendo de esta base, es decir, considerando el oleaje como un proceso de banda estrecha, cuyo contenido energético se encuentra concentrado entorno a la frecuencia de pico, Narasimhan y Deo (1979), intentan caracterizar la FAC de éste proceso aleatorio mediante el siguiente modelo

$$R(\tau) = R(0) e^{-\alpha\tau} \cos(\beta\tau) \tag{5.4}$$

donde, tal como se comprobó en la sección [3.1.4], $R(0)$ representa la varianza del proceso, o el área de la función de densidad espectral, α, es una medida del ancho de banda espectral, y β representa la frecuencia dominante del proceso, es decir, $\beta = \omega_p = 2\pi f_p$. Para ajustar dicho modelo a la FAC de un registro de oleaje, dichos autores parten de unos valores iniciales estimados de forma aproximada, y posteriormente emplean el método de Newton-Raphson para, de forma iterativa, minimizar las diferencias entre el modelo y la función experimental.

Tal como era de esperar, al intentar caracterizar la FAC del oleaje con un modelo tan simple, dichos autores observan que, en general, el comportamiento del modelo no resulta adecuado. En realidad, el modelo sólo funciona de forma aproximadamente razonable para los primeros valores del desfase en el caso de oleajes con espectro muy apuntado y de banda muy estrecha.

En las figuras 5.1 y 5.2 se muestran ejemplos de aplicación de este modelo simple para la caracterización de la FAC correspondiente a espectros teóricos de oleaje con diferente estructura frecuencial. La parte superior de la figura 5.1, muestra la FAC correspondiente al espectro mostrado a la derecha de dicha figura. Resulta evidente, y lógico, que el modelo sólo es capaz de ajustar la función de autocorrelación derivada del espectro de forma aproximada. Además, incluso reduciendo el ancho de banda espectral, el comportamiento del modelo sigue siendo notoriamente inadecuado, tal como se muestra en el ejemplo ilustrado en la parte inferior de la figura 5.1.

En la figura 5.2, se observa que, tal como era de esperar, al aumentar la complejidad de la estructura de la función de densidad espectral, el modelo se adecúa mucho menos a la FAC correspondiente. Nótese que en el ejemplo de la parte superior de dicha figura, en el que el espectro posee una estructura bimodal y un ancho de banda amplio, el modelo, aunque intenta ajustarse a la FAC, se desvía rápidamente de la misma. Del mismo modo, en el segundo de los ejemplos, en el que la estructura espectral también es bimodal, pero el ancho de banda es sustancialmente menor, el modelo presenta desviaciones significativas incluso desde los primeros desfases.

En relación a los ejemplos presentados en estas figuras es necesario señalar que, aunque los resultados parecen mostrar una cierta validez relativa, esto es debido al hecho de haber empleado, a conciencia, funciones de autocorrelación derivadas analíticamente de espectros teóricos, de modo que éstas no presentan irregularidades importantes. En realidad, el modelo numérico empleado para implementar este procedimiento de ajuste de la FAC mostró un comportamiento altamente incoherente al ser aplicado con registros de oleaje real, a excepción de unos pocos casos de swell puro con ancho de banda espectral considerablemente estrecho.

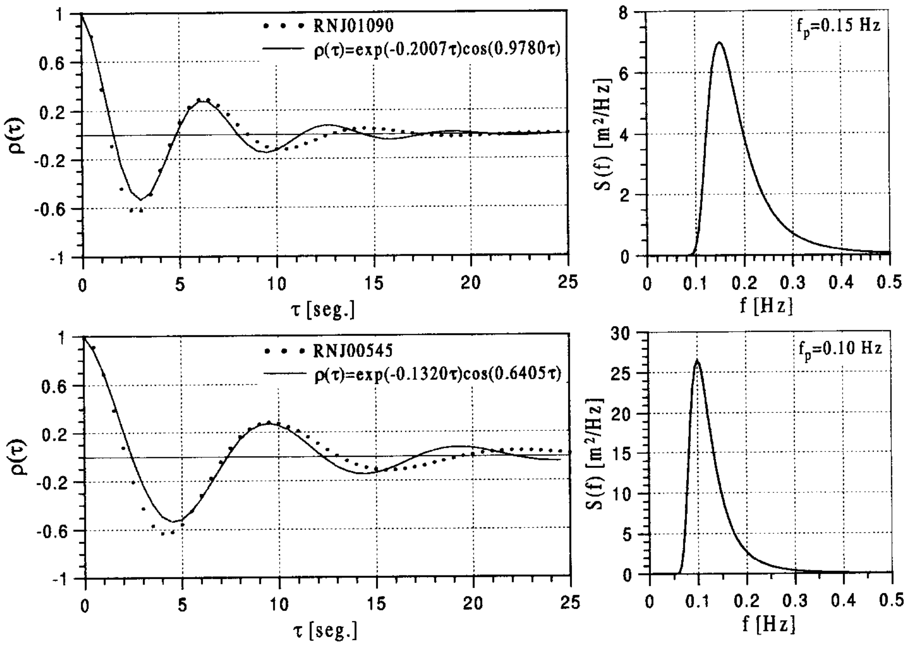

Figura 5.1: Ejemplos de aplicación de un modelo simple (5.4) para caracterizar la FAC asociada a espectros de oleaje unimodal.

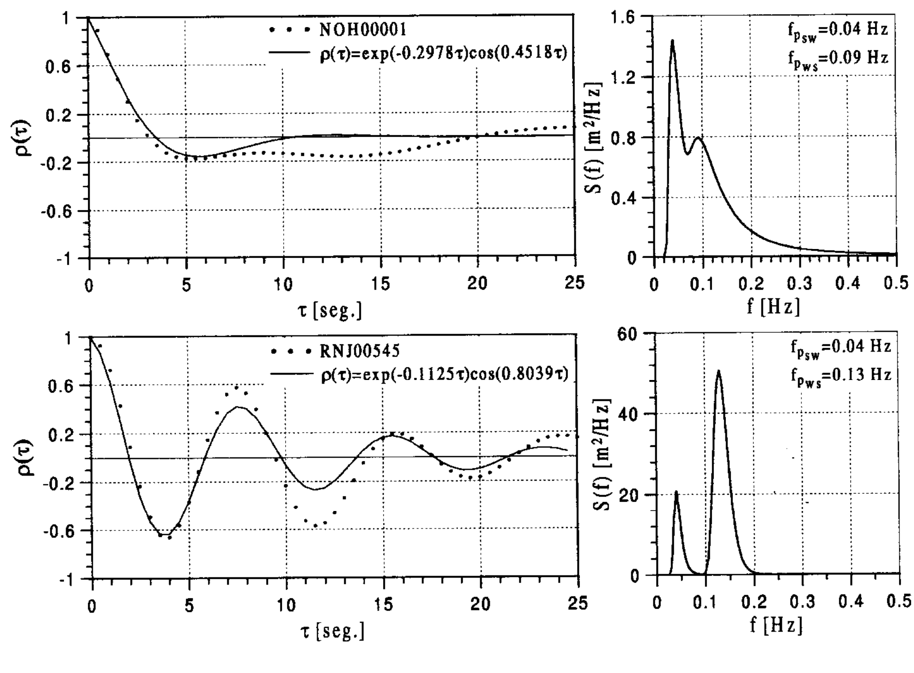

Figura 5.2: Ejemplos de aplicación de un modelo simple (5.4) para caracterizar la FAC asociada a espectros de oleaje bimodal.

5.1.2 Caracterización la FAC mediante suma de exponenciales complejas

Tal como se demostró en la sección [3.1.4] la FAC correspondiente al modelo de oleaje lineal Gaussiano viene dada por la expresión

$$R(\tau) = \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n^2}{2} \cos(2\pi f_n \tau) \tag{5.5}$$

Dada la estructura de dicha función, parece razonable intentar aproximar dicha función mediante alguna de las múltiples técnicas desarrolladas a partir de la idea original de Prony (1795) de ajustar una función experimental dada mediante una suma de funciones exponenciales. Por ello, a continuación se presenta de forma resumida esta metodología, que puede ser encontrada desarrollada de forma extensa en diferentes textos, tales como Marple (1987), en el cual se presenta una excelente exposición del tema, en la cual está basada la siguiente síntesis.

Aproximación mediante suma de exponenciales complejas: Método de Prony

El problema del ajuste de una función mediante una combinación lineal de funciones exponenciales, reales o complejas y atenuadas o no, a señales con ruido Gaussiano aditivo posee una larga e interesante historia.

Básicamente, el problema consiste en, dada una serie de medidas experimentales $(t_n, x_n), n = 1, \cdots, N$, aproximar la curva definida por las observaciones mediante una función del tipo

$$x(t) \approx \sum_{k=1}^{p} a_k \exp(-\lambda_k t) \tag{5.6}$$

Es decir, el problema consiste en determinar los parámetros $a_1, \cdots, a_p$ y $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ y el número de términos p, en el modelo anterior, de modo que las diferencias sean mínimas. Esto es, empleando un criterio de minimos cuadrados, por ejemplo, que los valores de los parámetros y el número de términos hagan mínima una expresión del tipo

$$F(a,\lambda) = \sum_{j}^{n} (x(t) - x_j)^2 \tag{5.7}$$

La primera y probablemente la más conocida de las contribuciones en este área es la debida al Barón de Prony (1795), quien consideró el problema de ajustar de forma exacta una curva resultante de $2p$ observaciones experimentales, $x(t)$, mediante la suma de p funciones exponenciales. Así, admitiendo que $x(t)$ está constituida por puntos de coordenadas $(t_0, x_0), (t_1, x_1), \cdots, (t_{2p}, x_{2p})$, que están equidistanciados, es decir $(t_n = t_0 + n\Delta t)$, el problema consistía en aproximar $x(t)$ como

$$x(t) \approx a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + a_p e^{\lambda_p t} = \sum_{k=1}^{p} a_k e^{\lambda_k t} \tag{5.8}$$

En general, considerando una muestra de N datos complejos, $x[1], x[2], \cdots, x[N]$, el método de Prony estima $x[n]$ mediante un modelo de exponenciales complejas de p términos. Es decir,

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=1}^{p} A_k \exp\left[(\alpha_k + i2\pi f_k)(n-1)\Delta t + i\theta_k\right] \qquad 1 \leq n \leq N \tag{5.9}$$

donde $\hat{x}[n]$ denota una aproximación, Δt es el intervalo de muestreo en segundos, A_k es la amplitud de la exponencial compleja, α_k es el factor de atenuación en s^{-1}, f_k es la frecuencia en Hz, y θ_k es la fase inicial en radianes.

En el caso concreto de datos experimentales reales, las exponenciales complejas deben aparecer en forma de pares conjugados complejos de igual amplitud, reduciéndose así la representación exponencial a

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=1}^{p/2} 2A_k \exp\left[\alpha_k(n-1)\Delta t\right] \cos\left[2\pi f_k(n-1)\Delta t + \theta_k\right] \qquad 1 \leq n \leq N \tag{5.10}$$

La función de p términos exponenciales en tiempo discreto dada por la ecuación (5.9) puede ser expresada de forma más compacta como

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=1}^{p} h_k z_k^{n-1} \tag{5.11}$$

donde las constantes complejas h_k y z_k son definidas como

$$h_k = A_k \exp(i\theta_k) \tag{5.12}$$

$$z_k = \exp[(\alpha_k + i2\pi f_k)T] \tag{5.13}$$

Nótese que h_k es una amplitud compleja que representa un parámetro independiente del tiempo, mientras que z_k es un exponente complejo que representa un parámetro dependiente del tiempo.

Idealmente, sería deseable minimizar el error cuadrático sobre los N valores observados

$$\rho = \sum_{n=1}^{N} |\epsilon[n]|^2 \tag{5.14}$$

donde

$$\epsilon[n] = x[n] - \hat{x}[n] = x[n] - \sum_{k=1}^{p} h_k z_k^{n-1} \tag{5.15}$$

con respecto a los h_k parámetros, los z_k parámetros, y el número de exponentes p simultáneamente. Sin embargo, éste constituye un problema no lineal sin solución analítica cuya resolución resulta considerablemente complicada, incluso si el valor de p es conocido.

El éxito del método sugerido por Prony (1795) reside en observar que la determinación de los parámetros h_k y z_k puede ser desacoplada y que éstos pueden ser determinados resolviendo dos sistemas de ecuaciones lineales y hallando las raices de un polinomio. En concreto, escribiendo

$$x[n] = \sum_{k=1}^{p} h_k z_k^{n-1} \qquad 1 \leq n \leq p \tag{5.16}$$

donde se ha empleado $x[n]$, y no $\hat{x}[n]$, puesto que se emplean exactamente $2p$ muestras complejas $x[1], \cdots, x[2p]$ para ajustar un modelo exponencial exacto a los $2p$ parámetros complejos $h_1, \cdots, h_p, z_1, \cdots, z_p$. Las p ecuaciones representadas por la ecuación (5.16) pueden ser expresadas en forma matricial tal como sigue

$$\begin{pmatrix} z_1^0 & z_2^0 & \cdots & z_p^0 \\ z_1^1 & z_2^1 & \cdots & z_p^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_1^{p-1} & z_2^{p-1} & \cdots & z_p^{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[p] \end{pmatrix} \tag{5.17}$$

donde la matriz de elementos dependientes del tiempo, z, tiene una estructura de Vandermonde. Si dispusiese de un método para determinar separadamente los elementos z, entonces la ecuación (5.17) representaría un sistema de ecuaciones lineales simultáneas que podría ser resuelto para estimar el vector de amplitudes complejas. La contribución de Prony fué el desarrollo de un método para ello.

La clave para la separación de los parámetros z_k y h_k es notar que la ecuación (5.16) es la solución de determinadas ecuaciones en diferencias lineales homogéneas de coeficientes constantes (e.g., Oppenheim y Schafer, 2000). Para encontrar la forma de esta ecuación en diferencias, primero se define el polinómio $\phi(z)$ que tiene los exponentes z_k como raices,

$$\phi(z) = \prod_{k=1}^{p} (z - z_k) \tag{5.18}$$

Desarrollando los productos de la ecuación (5.18) en series de potencias, el polinómio puede ser expresado como un sumatorio,

$$\phi(z) = \sum_{m=0}^{p} a[m] z^{p-m} \tag{5.19}$$

con coeficientes complejos $a[m]$ tal que $a[0] = 1$. Desplazando el índice de la ecuación (5.16) de n a $n - m$ y multiplicando por los parámetros $a[m]$ se tiene

$$a[m]x[n-m] = a[m] \sum_{k=1}^{p} h_k z_k^{n-m-1} \tag{5.20}$$

Formando productos semejantes $a[0]x[n], \cdots, a[m-1]x[n-m+1]$ y sumando

$$\sum_{m=0}^{p} a[m]x[n-m] = \sum_{i=0}^{p} h_i \sum_{m=0}^{p} a[m] z_i^{n-m-1} \tag{5.21}$$

expresión válida para $p + 1 \leq n \leq 2p$.

Haciendo la sustitución $z_i^{n-m-1} = z_i^{n-p} z_i^{p-m-1}$, entonces

$$\sum_{m=0}^{p} a[m]x[n-m] = \sum_{i=0}^{p} h_i z_i^{n-p} \sum_{m=0}^{p} a[m] z_i^{p-m-1} = 0 \tag{5.22}$$

donde el segundo sumatorio de la derecha es el polinómio definido por la ecuación (5.19) evaluado en cada una de sus raices z_i, dando cero como resultado.

La ecuación (5.22) es la ecuación lineal en diferencias cuya solución homogénea viene dada por la ecuación (5.16). El polinómio (5.19) es la ecuación característica asociada con esta ecuación lineal en diferencias.

Las p ecuaciones que representan los valores válidos de $a[n]$ que satisfacen la ecuación (5.22) pueden ser expresadas como una matriz $p \times p$

$$\begin{pmatrix} x[p] & x[p-1] & \cdots & x[1] \\ x[p+1] & x[p] & \cdots & x[2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x[2p-1] & x[2p-2] & \cdots & x[p] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a[1] \\ a[2] \\ \vdots \\ a[p] \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x[p+1] \\ x[p+2] \\ \vdots \\ x[2p] \end{pmatrix} \tag{5.23}$$

La ecuación (5.23) demuestra que, con $2p$ datos complejos, es posible desacoplar los parámetros h_k y z_k.

Los coeficientes polinómicos complejos $a[1], \cdots, a[p]$, que son funciones sólo de los parámetros dependientes del tiempo z_k del modelo exponencial, constituyen una relación predictiva lineal entre las muestras temporales.

Nótese que la matriz de la ecuación (5.23) tiene una estructura de Toeplitz, de modo que su solución puede obtenerse eficientemente mediante algoritmos especificos desarrollados al efecto.

En consecuencia, el procedimiento de Prony para ajustar p exponenciales a una secuencia de $2p$ datos puede ser resumido en tres pasos:

1. Obtener los coeficientes $a[m]$ del polinómio (5.19) resolviendo el sistema de ecuaciones (5.23).

2. Calcular las raices z_i del polinómio (5.19)

3. Emplear estas raices para construir los elementos de la matriz (5.17) y resolver ésta para obtener los p parámetros complejos $h[1], \cdots, h[p]$

Una vez obtenidas las raices z_i, es posible obtener los factores de atenuación α_i y las frecuencias f_i empleando las relaciones

$$\alpha_i = \frac{\ln |z_i|}{T} \quad \mathrm{s}^{-1} \tag{5.24}$$

$$f_i = \frac{\tan^{-1}\left[\frac{\Im\{z_i\}}{\Re\{z_i\}}\right]}{2\pi T} \quad \mathrm{Hz} \tag{5.25}$$

Del mismo modo, una vez obtenidos los parámetros complejos h_i, pueden estimarse las amplitudes A_i y las fases iniciales θ_i mediante las relaciones

$$A_i = |h_i| \tag{5.26}$$

$$\theta_i = \tan^{-1}\left[\frac{\Im\{h_i\}}{\Re\{h_i\}}\right] \tag{5.27}$$

Tal como se ha comentado previamente, en el método original de Prony se intentan determinar los parámetros del número de exponenciales atenuadas necesarias para que el modelo resultante pase a través de los N puntos que constituyen el conjunto de datos experimentales sin error. En consecuencia, existen dos problemas obvios en esta metodología. En primer lugar, el orden del modelo (es decir, el número de exponenciales) no está limitado. En segundo lugar, se admite que los datos experimentales están libres de ruido.

Versiones posteriores del método de Prony (e.g., McDonough y Huggins, 1968) eliminan el problema de la no restricción en el número de exponenciales utilizadas para que el modelo ajuste exactamente las observaciones. En general, el número de exponenciales empleadas es considerablemente inferior al número de datos disponibles. Además, se admite que las series de observaciones están contaminadas por ruido. De este modo, se tiene que el problema está sobre-especificado y es posible emplear los métodos de mínimos cuadrados. Por otro lado, algunas versiones modificadas del método de Prony, que reciben el nombre de versiones generalizadas, se contempla la posibilidad de incluir sinusoides atenuadas.

Desafortunadamente, el método de Prony y algunas versiones derivadas de éste no suelen resultar eficientes en las aplicaciones prácticas debido a su baja capacidad para considerar adecuadamente el ruido aditivo. Así, cuando el método es aplicado en situaciones en las que la proporción de ruido aditivo es significativa, las estimaciones de los términos atenuados suelen estar positivamente sesgadas hacia valores mucho más elevados que los valores reales. Naturalmente, el aumento del número de exponenciales empleadas en el modelo facilita la consideración del ruido y mejora el ajuste, pero las exponenciales adicionales no poseen significado físico.

Con el objetivo de eliminar las deficiencias de los modelos previamente citados se han propuesto algoritmos basados en modelos de ruido Gaussiano aditivo más sofisticados (e.g., Kumaresan y Tufts, 1982). Estos algoritmos abordan problemas que son realmente variantes del problema general de las sinusoides atenuadas, en el cual parámetros como la frecuencia pueden corresponder realmente a diferentes parámetros físicos tales como el ángulo de aproximación de ondas planas. Estos algoritmos suelen funcionar adecuadamente en situaciones donde las relaciones señal-ruido es moderada o buena. En estas cirscunstancias, estos métodos ofrecen resultados próximos a los de máxima verosimilitud.

El problema de la estimación de los parámetros de múltiples sinusoides atenuadas inmersas en ruido aditivo en condiciones de señal-ruido más severas ha sido abordado en numerosos trabajos. Entre las aportaciones en este campo se encuentran el algoritmo de Kumaresan-Tufts (1982) y el trabajo estrechamente relacionado con éste último desarrollado por Bresler y Macovski (1986). Estos métodos están basados en la obtención de soluciones mediante técnicas de mínimos cuadrados no lineales, busqueda de raices polinomiales y factorización, y la manipulación de grandes matrices, por lo que, en general, resultan computacionalmente costosos.

Quizás los procedimientos más interesantes desde un punto de vista estadístico han sido propuestos recientemente por Papadopoulos y Nikias (1990), Ruiz et al. (1995). Estos procedimientos hacen uso de estadísticos de tercer y cuarto orden de la señal observada. En teoría, si el ruido no es Gaussiano, y por tanto los estadísticos de orden superior no son nulos, estos algoritmos puede hacer uso de ellos.

Tal como se comentó al comienzo de esta sección, debido al enorme interés que presenta el problema de la aproximación de datos experimentales mediante exponenciales, el número de procedimientos propuestos es bastante elevado. En este trabajo, la atención se centra en dos técnicas de uso bastante extendido en la práctica.

Por un lado, se hace uso de la solución sub-óptima, normalmente denominada *método de Prony extendido* (ver Marple, 1987), en el cual se tiene en cuenta que en la práctica el número de datos N normalmente excede el número mínimo necesario para ajustar un modelo de p exponenciales, es decir, existe una sobredeterminación, de modo que la secuencia de datos sólo puede ser aproximada mediante una secuencia exponencial

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=1}^{p} h_k z_k^{n-1} \qquad 1 \leq n \leq N \tag{5.28}$$

donde el error de la aproximación es denotado por

$$\epsilon[n] = x[n] - \hat{x}[n] \tag{5.29}$$

Este procedimiento está basado en la sustitución de procedimientos de mínimos cuadrados lineales apropiados en los pasos primero y tercero del método de Prony descritos anteriormente. En este caso, la ecuación lineal en diferencias (5.22) debe ser modificada por

$$\sum_{m=1}^{p} a[m]x[n-m] = e[n] \qquad p+1 \leq n \leq N \tag{5.30}$$

donde el término $e[n]$ representa el error en la aproximación mediante predicción lineal, en contraste con el error $\epsilon[n]$, que representa el error en la aproximación exponencial. En este sentido, es interesante indicar que la expresión (5.30) es idéntica a la ecuación del error de predicción lineal directa, haciendo cada término $a[m]$ un parámetro de predicción lineal (e.g., Kay, 1988). En lugar de la ecuación (5.22), los parámetros $a[m]$ deben ser seleccionados como aquellos que minimizan el error cuadrático de predicción lineal

$$\sum_{n=p+1}^{N} |e[n]|^2 \tag{5.31}$$

en lugar del error cuadrático de la aproximación exponencial ρ dado por la ecuación (5.14). Este importante notar que este procedimiento coincide con el método de predicción lineal de la covarianza, motivo por el que también suele recibir el nombre de *método de la covarianza.* No obstante, este método es más conocido como método de los mínimos cuadrados (e.g. Marple, 1987), por lo que en adelante será denominado como método de Prony de los mínimos cuadrados y denotado como *LS-Prony.*

Por otro lado, teniendo en cuenta que el método de la covarianza, o de los mínimos cuadrados de Prony, constituye una versión inconsistente para caracterizar sinusoides atenuadas o exponenciales (Kahn et al., 1992), se emplea un *algoritmo de Prony modificado* que es equivalente a la estimación de máxima verosimilitud para ruido Gaussiano, desarrollada por Osborne (1975). Esta metodología, inicialmente propuesta para funciones exponenciales, fué posteriormente generalizada por Osborne y Smyth (1991), para proporcionar un ajuste de mínimos cuadrados de cualquier función que satisface una ecuación en diferencias con coeficientes lineales y homogéneos en los parámetros. En concreto, el algoritmo modificado de Prony para ajuste mediante funciones exponenciales estima, para un valor fijo de p, cualquier función $x(t)$ que satisface una ecuación diferencial de coeficientes constantes

$$\sum_{k=1}^{p+1} \xi_k D^{k-1} \mu(t) = 0 \qquad \forall\ t \tag{5.32}$$

donde D es el operador diferencial y ξ_k son los coeficientes a determinar.

Las observaciones experimentales, $x(t_i)$, son consideradas inmersas en ruido Gaussiano aditivo, $\epsilon(t_i)$, independiente, de media nula y varianza σ^2. Es decir,

$$x(t_i) = \mu(t_i) + \epsilon(t_i) \tag{5.33}$$

y realizadas en intervalos equiespaciados $(t_i, i = 1, \cdots, n)$. La solución de (5.32)

incluye exponenciales complejas, sinusoides atenuadas o no, y exponenciales reales, dependiendo de la raices de la ecuación polinómica con coeficientes ξ_k.
Así, una solución típica de (5.32) es una suma de exponenciales del tipo

$$\mu(t) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \exp(\beta_j t) \tag{5.34}$$

donde β_j son constantes de atenuación y α_j son amplitudes. Otro tipo de solución típica para (5.32) es una suma de sinusoides,

$$\mu(t) = \sum_{j=1}^{p/2} \alpha_j \operatorname{sen}(\beta_j t + \phi_j) \tag{5.35}$$

Esta solución es persistente y periódica y, obviamente es adecuada para sistemas físicos cuya dinámica es controlada por fuerzas persistentes de caracter oscilatorio. Un tercer tipo de solución común para (5.32) es la constituida por sinusoides atenuadas, es decir

$$\mu(t) = \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \exp(\beta_j t) \operatorname{sen}(\omega_j t) \tag{5.36}$$

El algoritmo modificado de Prony presenta la ventaja práctica de que puede estimar cualquiera de estas funciones para obtener el mejor ajuste a las observaciones disponibles. Osborne y Smyth (1991, 1995), demuestran que cuando la ecuación polinómica

$$p_\xi(z) = \sum_{k=1}^{p+1} \xi_k z^{k-1} \tag{5.37}$$

tiene raices reales distintas la solución a (5.32) es una suma de funciones exponenciales reales del tipo (5.34).

Tal como se ha comentado previamente, la estimación de los coeficientes α_j y β_j mediante el método de Prony y algunas de sus variantes extendidas, presenta dificultades numéricas importantes, las cuales pueden ser debidas, entre otros motivos (Kahn et al., 1992), a dificultades en la elección de los valores iniciales, o a un comportamiento inadecuado del método cuando dos o más valores de β_j están próximos entre sí. El algoritmo modificado de Prony (Osborne y Smith, 1991, 1995), es relativamente insensible a la elección de los valores iniciales y elimina el problema del mal comportamiento cuando algunos valores de β_j están proximos, al menos en lo que respecta a la convergencia del algoritmo. Una revisión actual del algoritmo modificado de Prony, que será denotada por O&S95, es presentada por Smyth (2000).

Modelización de la función de autocorrelación del oleaje

A continuación se presentan los resultados del ajuste de la función de autocorrelación para diferentes tipos de oleaje, obtenidos mediante los métodos de los mínimos cuadrados de Prony (LS-Prony) y el método de Prony modificado (O&S95). En la figura 5.3 se muestran algunos ejemplos del ajuste a oleajes de viento mediante los dos algoritmos, mientras en la figura 5.4 se muestran algunos ejemplos correspondientes al ajuste de oleajes de fondo. De estas figuras se desprende que si bien el método de los mínimos cuadrados permite obtener ajustes mucho más adecuados que los obtenidos con el modelo simple dado por la ecuación (5.4), con bastante frecuencia éste método no llega a lograr un buen ajuste perdiéndose la convergencia cuando es necesario aumentar el orden del modelo para ello. Por el contrario, el método modificado de O&S95 permite aumentar el orden del modelo hasta que las diferencias entre la FAC obtenida empíricamente y el modelo presentan diferencias mínimas. Nótese que este hecho es especialmente evidente cuando la FAC presenta una estructura complicada, en la cual la función no refleja una estructura oscilatoria que se atenúa con el tiempo, tal como ocurre en varios de los casos mostrados para el oleaje de viento. No obstante, incluso en el caso del oleaje de fondo, en el que el comportamiento de la FAC es mucho más regular, éste método no es siempre capaz de ajustar adecuadamente la función empírica.

Los números entre paréntesis mostrados en las leyendas de las figuras corresponden al orden del modelo necesario para obtener un ajuste adecuado, cuando ésto fue posible, o el orden máximo alcanzado antes de que el modelo se hiciese inestable. En los ejemplos mostrados se observa que, normalmente, el algoritmo LS-Prony se hizo inestable antes de alcanzar el grado de ajuste requerido, mientras que con el método O&S95 se pudo continuar aumentando el orden del modelo hasta alcanzar un buen ajuste. Por otro lado, cuando el método LS-Prony logró ajustar de forma adecuada la FAC observada, el algoritmo O&S95 logró la convergencia de forma más adecuada y con un orden siempre inferior. Obviamente, las limitaciones del método LS-Prony se hacen manifiestamente más claras en el caso del oleaje de viento que en caso del oleaje de fondo, debido a que en el primer tipo de oleaje, con ancho de banda notablemente más amplio, puede admitirse que la señal constituida por la FAC presenta un nivel de ruido superior a la FAC asociada al oleaje de fondo.

En las figuras 5.5 y 5.6 se ilustran las frecuencias relativas de los órdenes del modelo empleados para obtener un ajuste adecuado a las FAC obtenidas experimentales correspondientes al oleaje de viento y de fondo, respectivamente. En este sentido, es importante señalar, que los órdenes del modelo representados en el histograma de la figura 5.5 no representa, en general, el orden con el que se logró un ajuste adecuado, sino el orden alcanzado antes de que el algoritmo se volviese numéricamente inestable, sin que en tales casos se hubiese logrado el grado de ajuste requerido.

De dichas figuras se desprende claramente que independiente del método empleado, el orden del modelo requerido para un ajuste adecuado fué generalmente superior en el oleaje de viento que en el oleaje de fondo. Así, en el caso del oleaje de fondo, el algoritmo O&S95 permitió lograr un ajuste adecuado de la FAC con un orden inferior a 4 en el 85% de los casos analizados, es decir, aquellos correspondientes a la boya LP-I, durante el año 1992, mientras que el 100% de los casos pudo ser ajustado con un orden del modelo inferior a 12. Sin embargo, en el caso del oleaje de viento, para lograr el ajuste del 100% de las FAC observadas fué necesario aumentar el orden del modelo hasta 40.

En definitiva, el método O&S95 mostró una clara superioridad frente al método LS-Prony, permitiendo el ajuste de todas las FAC observadas. Además, siempre que el método LS-Prony alcanzó la convergencia, el modelo O&S95 requirió un orden notablemente inferior para lograr mejores ajustes que el primero.

Las deficiencias del modelo LS-Prony y la necesidad de un aumento del orden del modelo para lograr ajustes de la FAC adecuados mediante los algoritmos considerados en el presente trabajo se puso de manifiesto aún mas claramente en

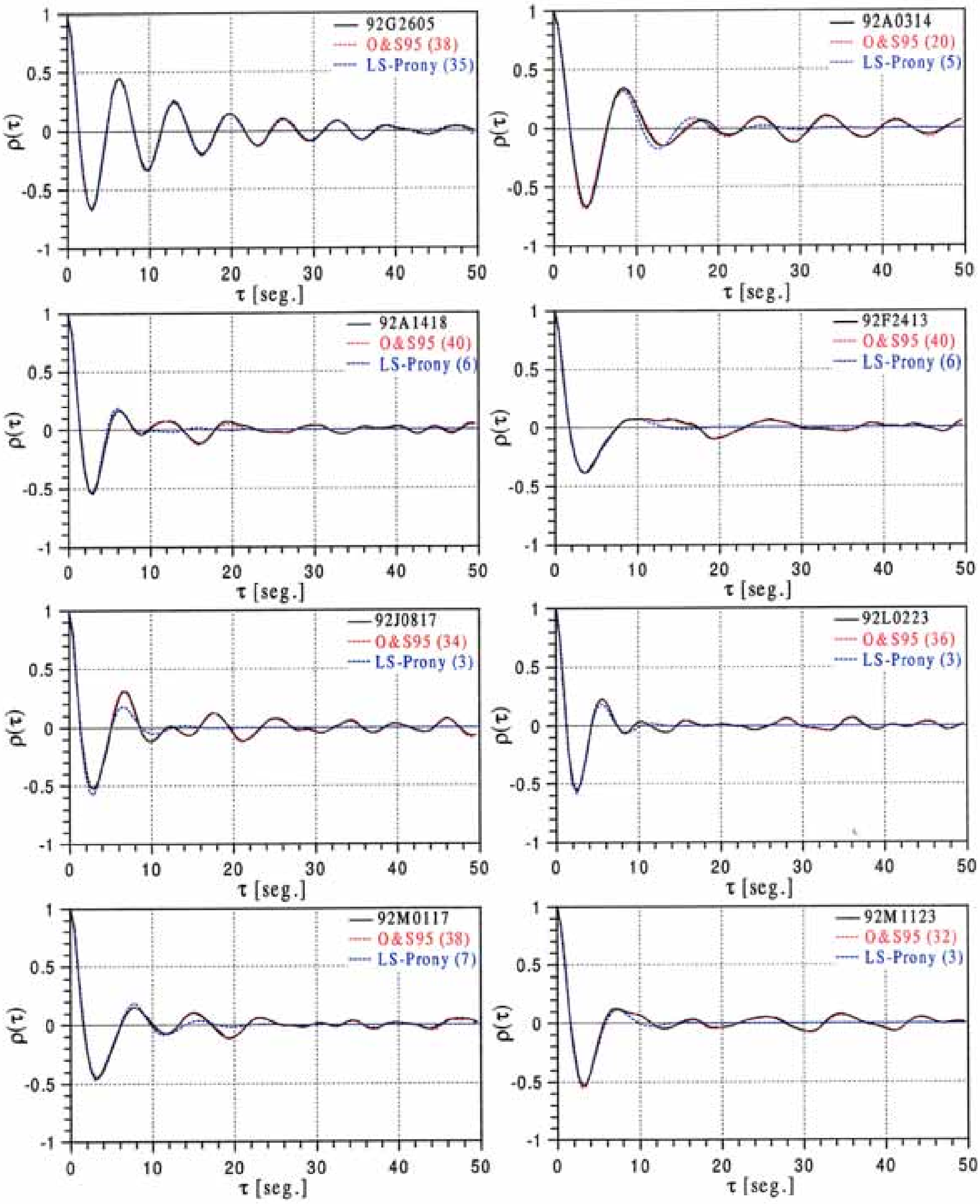

Figura 5.3: Ejemplos de ajustes de la FAC asociada a registros de oleaje de viento mediante los algoritmos LS-Prony y O&S95.

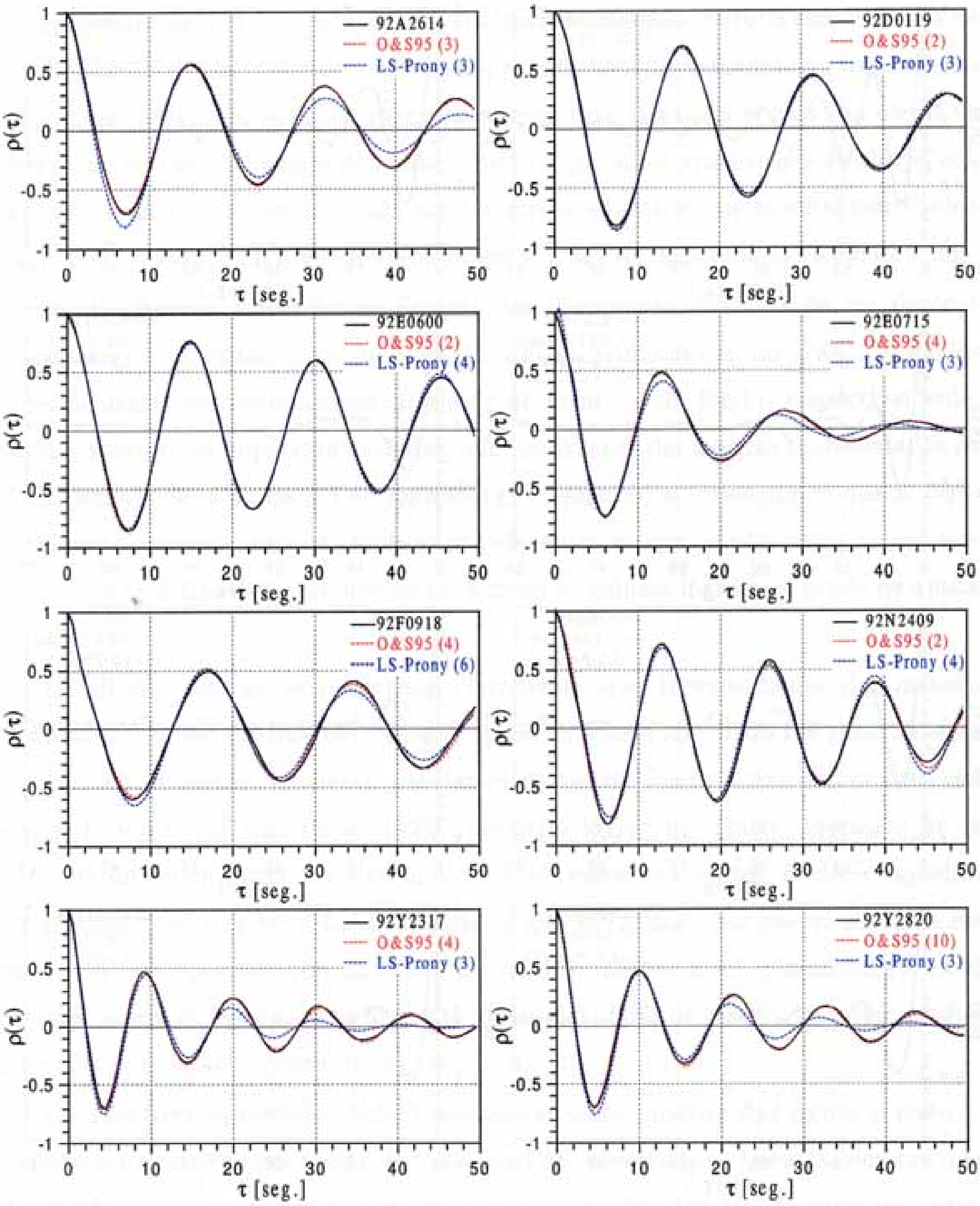

Figura 5.4: Ejemplos de ajustes de la FAC asociada a registros de oleaje de fondo mediante los algoritmos LS-Prony y O&S95.

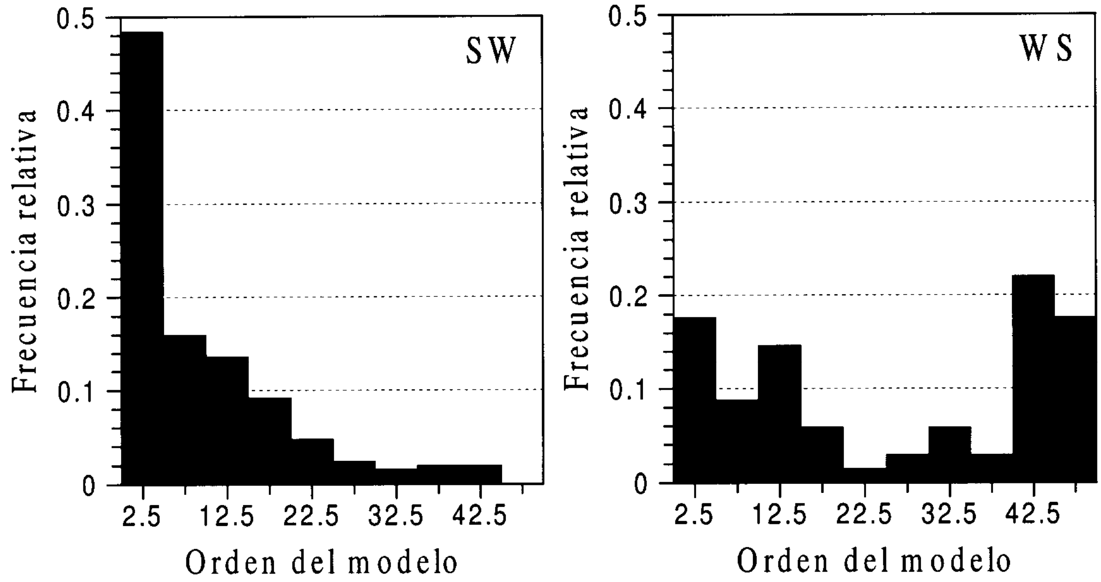

Figura 5.5: Frecuencias relativas de los órdenes del modelo LS-Prony para el ajuste de las FAC asociadas a estados de mar unimodales del tipo WS y SW.

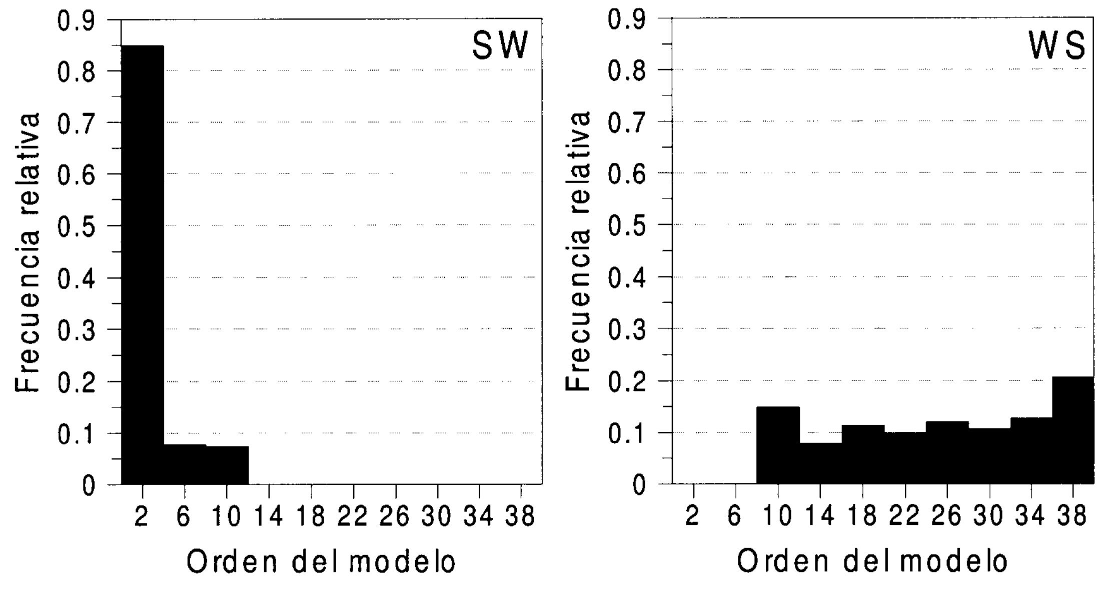

Figura 5.6: Frecuencias relativas de los órdenes del modelo O&S95 para el ajuste de las FAC asociadas a estados de mar unimodales del tipo WS y SW.

el caso de las FAC correspondientes a oleajes bimodales, tal como se ilustra en las figuras 5.7, 5.8 y 5.9, para los oleajes bimodales dominados por el oleaje de viento, con predominio del oleaje de fondo, y con sistemas individuales de oleaje con contenido energético equivalente, respectivamente.

Es interesante destacar que, independientemente de que uno u otro modelo permitiese ajustar adecuadamente, o no, la FAC observada, así como el orden del modelo requerido por cada uno de los algoritmos empleados, la observación de las figuras antes citadas pone de manifiesto un claro aumento de la complejidad en la estructura de la FAC asociada a espectros bimodales, en comparación con la correspondiente a registros de oleaje unimodal. Nótese que muchos de los casos mostrados en las figuras, especialmente para las situaciones en las que un oleaje de fondo dominante se superpone a un oleaje de viento (figura 5.8) y en aquellas en que se combinan un oleaje de viento y otro de fondo con contenido energético similar (figura 5.9), la FAC muestra una estructura notablemente complicada. En este sentido es interesante observar que con frecuencia, el primer máximo, para un desfase no nulo, no es el máximo absoluto. Del mismo modo, en ocasiones, el primer mínimo no coincide con el máximo absoluto de la FAC.

Naturalmente, este aumento de complejidad en la estructura de la FAC se ve reflejado en la capacidad de ambos modelos para caracterizar adecuadamente dicha función y en el orden del modelo necesario para ello. Así, mientras en las figuras 5.7, 5.8 y 5.9 se muestran algunos ejemplos del ajuste logrado con ambos métodos a los diferentes tipos de FAC observados, en las figuras 5.10 y 5.11 se muestran los resultados generales en forma de histograma.

Al igual que ocurrió en el caso de la FAC asociada a espectros unimodales, el modelo O&S95 mostró siempre un mejor comportamiento que el algoritmo LS-Prony, que en numerosas ocasiones no fué capaz de permitir un ajuste adecuado antes de hacerse inestable, y que siempre que lo permitió requirió un orden superior al empleado con O&S95. El número de casos en los que este método no permitió un buen ajuste fué considerablemente alto en el caso de oleajes mixtos con contenido energético equivalente, motivo por el cual, el histograma correspondiente, mostrado en la figura 5.10, aparece con bastantes intervalos vacios. De las figuras 5.10 y

5.11, se desprende el mejor comportamiento del método O&S95, aún cuando, al igual que en la figura 5.5, el orden del modelo mostrado en la figura 5.10 para los distintos tipos de oleaje bimodal no representa, en general, el orden con el que se logró un ajuste adecuado, sino el orden alcanzado antes de que el algoritmo se volviese numéricamente inestable, sin que en tales casos se hubiese logrado el grado de ajuste requerido. Con relación al método O&S95, es interesante destacar que, en general, la presencia de un oleaje de fondo, dominante o no, permitió disminuir el orden del modelo máximo necesario para lograr un ajuste adecuado, en comparación con el orden máximo necesario en el caso de las FAC asociadas a oleajes de viento puro. Nótese que en el caso de oleajes bimodales éste se redujo a 30, frente al valor máximo de 40 requerido en el oleaje de viento. No obstante, este continuó siendo sustancialmente superior al necesario para ajustar la FAC correspondiente a los oleajes de fondo puros.

En definitiva, dado que el objetivo del presente trabajo no consiste en valorar la mayor eficacia de un método frente a otro, ni los motivos que dan lugar a las diferencias de eficiencia existentes entre éstos, sino la de obtener un método de ajuste que permita obtener resultados adecuados en la mayoría de las condiciones, con el orden del modelo más bajo posible, podemos concluir que los resultados mostrados en esta sección, ponen de manifiesto un comportamiento claramente superior, en este sentido, del método propuesto por Osborne y Smyth (1991, 1995), el cuál además, tal como se demostró en el capítulo anterior, posee una excelente capacidad para ajustar los espectros asociados a las funciones de autocorrelación aquí analizadas.

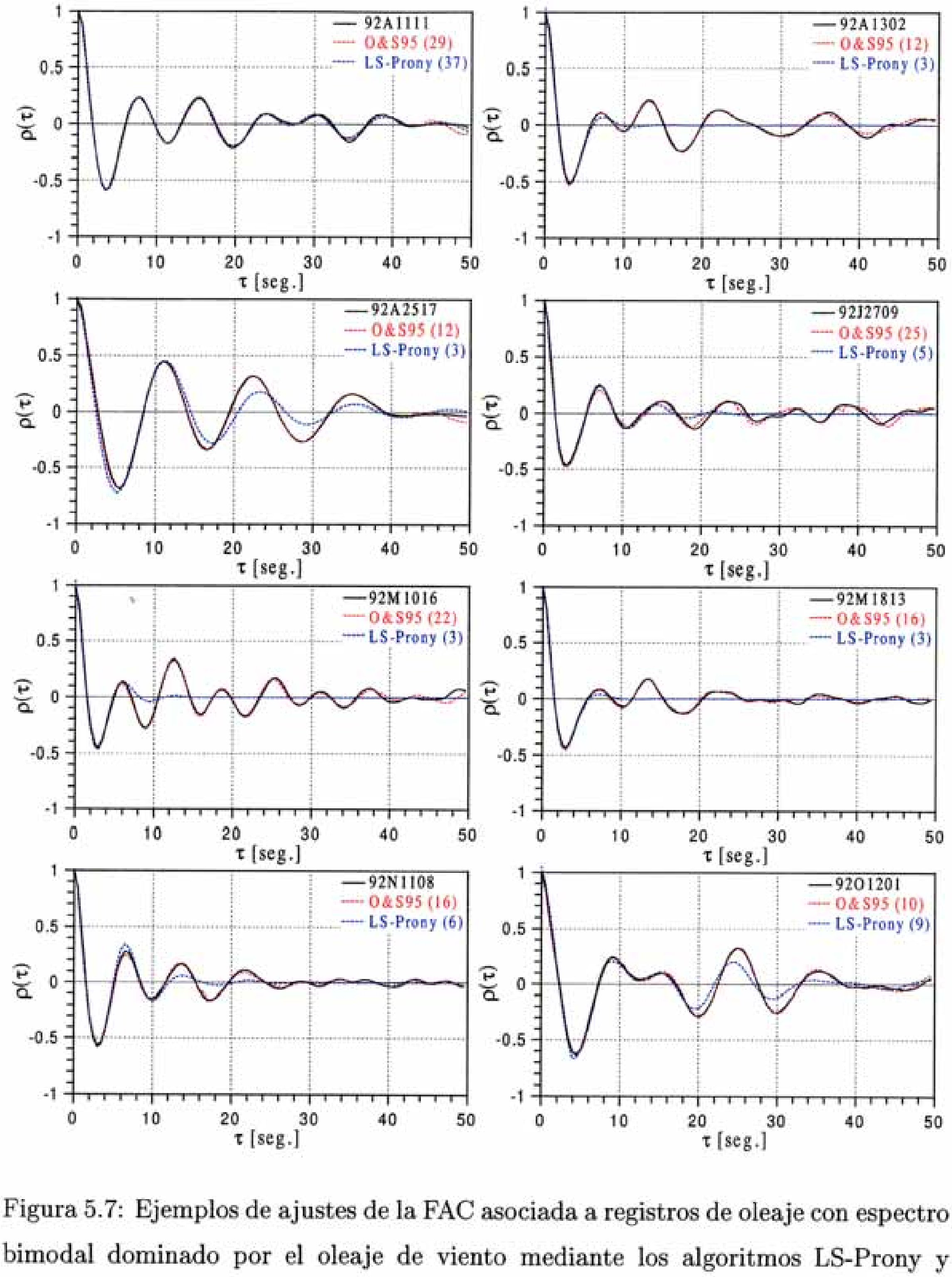

Figura 5.7: Ejemplos de ajustes de la FAC asociada a registros de oleaje con espectro bimodal dominado por el oleaje de viento mediante los algoritmos LS-Prony y O&S95.

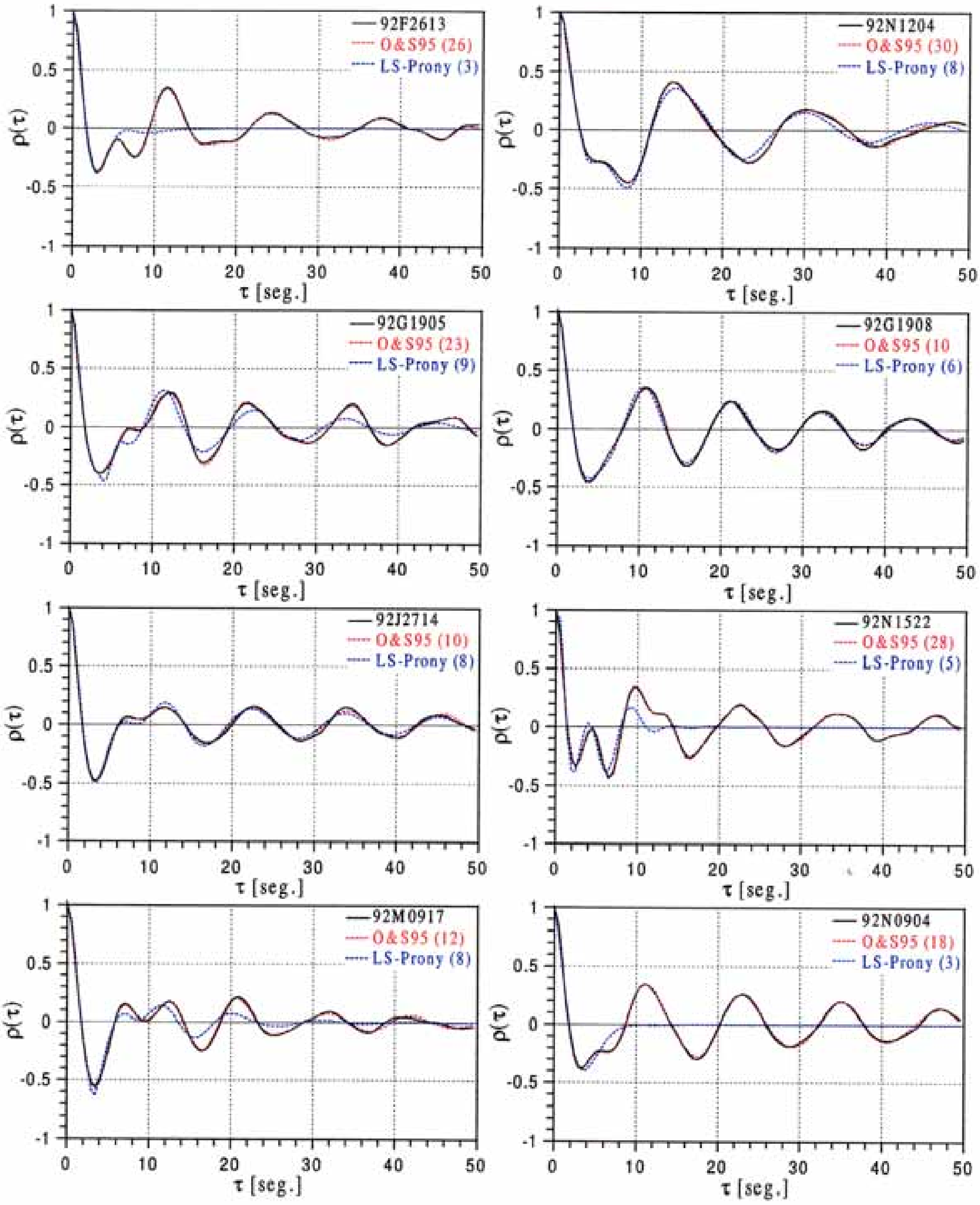

Figura 5.8: Ejemplos de ajustes de la FAC asociada a registros de oleaje con espectro bimodal dominado por el oleaje de fondo mediante los algoritmos LS-Prony y O&S95.

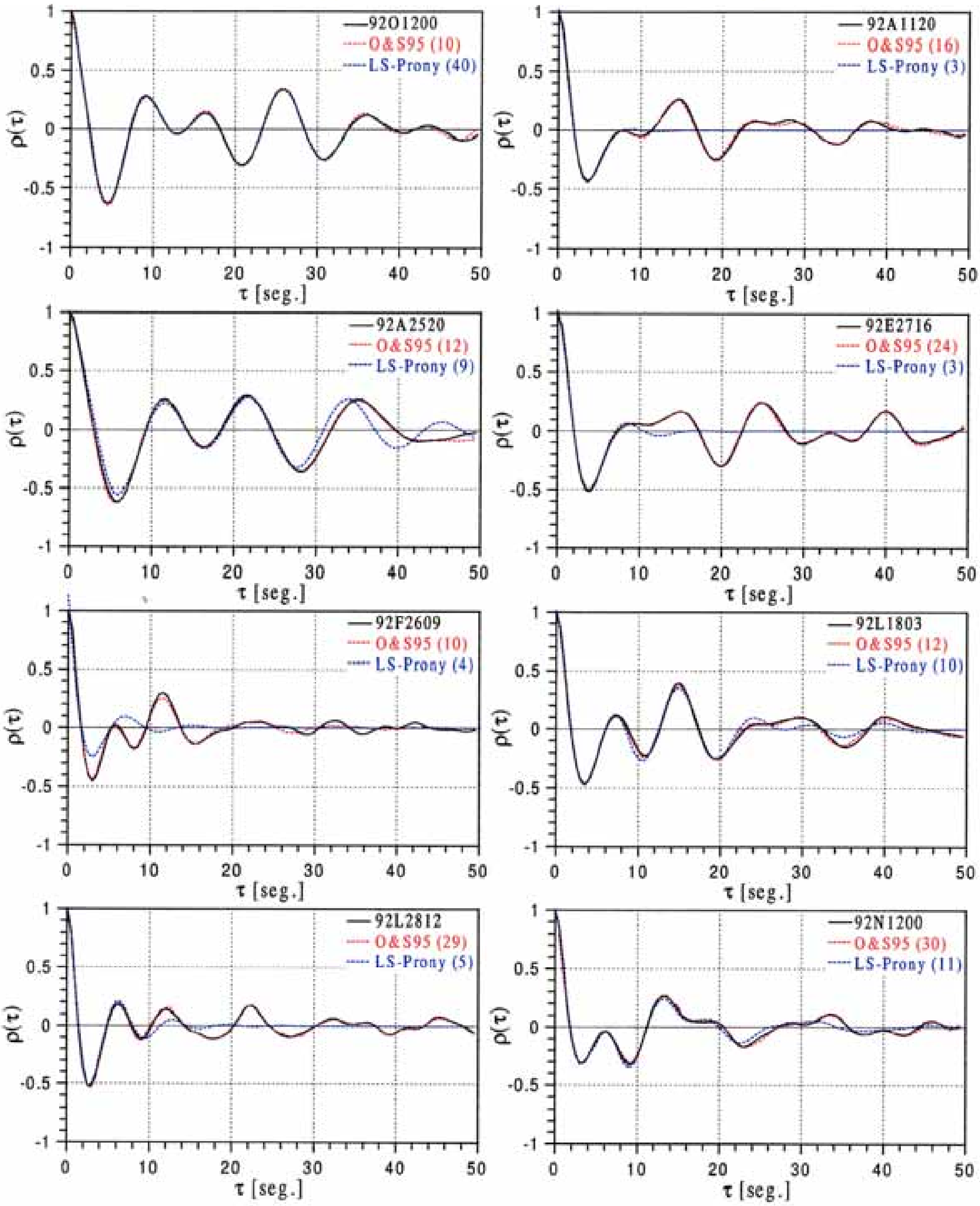

Figura 5.9: Ejemplos de ajustes de la FAC asociada a registros de oleaje con espectro bimodal del tipo BE mediante los algoritmos LS-Prony y O&S95.

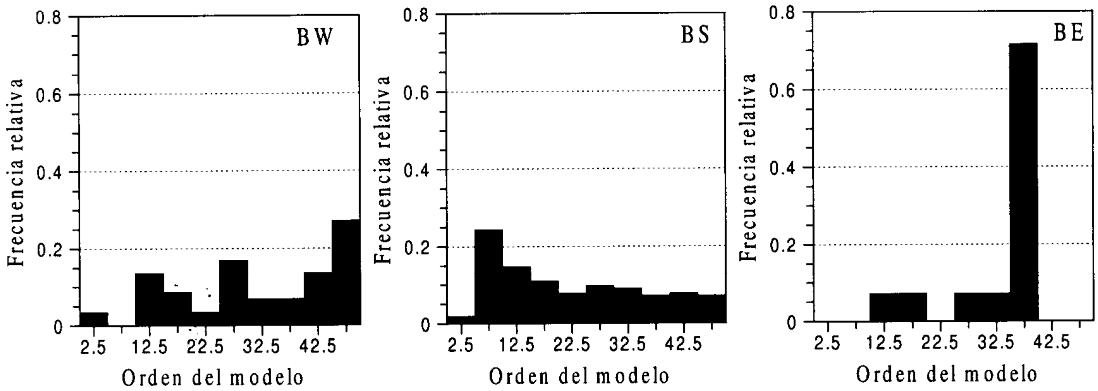

Figura 5.10: Frecuencias relativas de los órdenes del modelo de LS-Prony para el ajuste de las FAC asociadas a estados de mar bimodales del tipo BW, BS y BE.

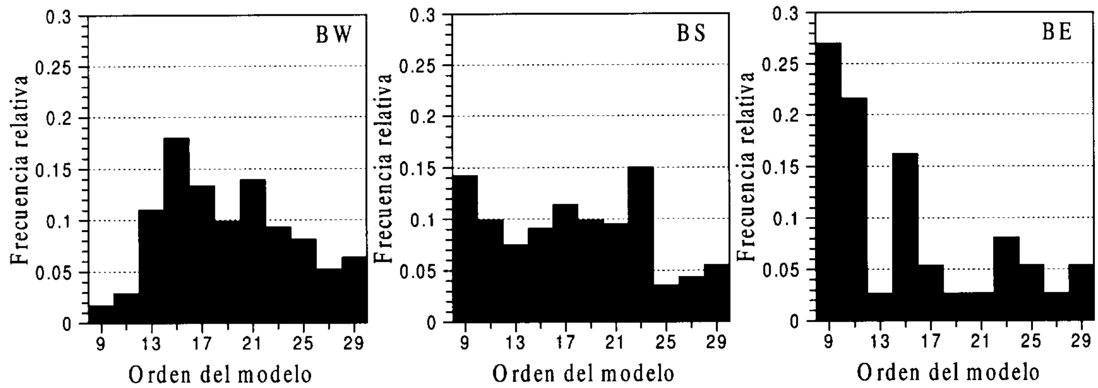

Figura 5.11: Frecuencias relativas de los órdenes del modelo O&S95 para el ajuste de las FAC asociadas a estados de mar bimodales del tipo BW, BS y BE.

En función de lo anteriormente expuesto, la FAC puesde ser caracterizada mediante una expresión del tipo

$$\tilde{R}(\tau) = \sum_{n=1}^{N} a_n \mathrm{e}^{\lambda_n \tau} \tag{5.38}$$

expresión en la que, tal como se ha visto, N es el número de exponenciales y a_n, λ_n son coeficientes complejos a estimar. Además, siguiendo el procedimiento anteriormente descrito, la expresión (5.38) puede ser expresada como sigue

$$\tilde{R}(k\Delta t) = \sum_{n=1}^{N} a_n \mathrm{e}^{\lambda_n k\Delta t} = \sum_{n=1}^{N} a_n \vartheta_n^k \qquad (k = 0, 1, \cdots, K) \tag{5.39}$$

donde

$$\vartheta_n = \mathrm{e}^{\lambda_n \Delta t} \qquad (n = 1, \cdots, N) \tag{5.40}$$

de modo que, las variables a determinar mediante las modificaciones antes comentadas del método de Prony son las a_n y las ϑ_n.

Una vez estimados los valores de los coeficientes del modelo, es interesante observar que, haciendo uso del teorema de Wiener-Khintchine, dado por (2.46), se tiene que

$$S(f) = 4 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos(2\pi f \tau) d\tau \tag{5.41}$$

de donde, teniendo en cuenta que

$$\cos(2\pi f \tau) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi f \tau} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi f \tau}}{2} \tag{5.42}$$

se tiene que,

$$S(f) = 2 \left\{ \int_0^{\infty} R(\tau) \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi f \tau} d\tau + \int_0^{\infty} R(\tau) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi f \tau} d\tau \right\} \tag{5.43}$$

Entonces, sustituyendo (5.38) en (5.43) resulta que

$$\tilde{S}(f) = 2 \left\{ \int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} a_n \mathrm{e}^{\lambda_n \tau} \right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi f \tau} d\tau + \int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} a_n \mathrm{e}^{\lambda_n \tau} \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi f \tau} d\tau \right\} \tag{5.44}$$

intercambiando el orden de las sumatorias y las integrales

$$\tilde{S}(f) = 2\sum_{n=1}^{N} a_n \left\{ \int_0^{\infty} e^{(\lambda_n + i2\pi f)\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{(\lambda_n - i2\pi f)\tau} d\tau \right\} \tag{5.45}$$

de donde,

$$\tilde{S}(f) = 4 \left| \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n \lambda_n}{\lambda_n^2 + (2\pi f)^2} \right| \tag{5.46}$$

Es decir, el espectro puede ser estimado a partir de los coeficientes complejos utilizados para ajustar la función de autocorrelación. Naturalmente, el proceso puede aplicarse en sentido inverso, es decir, habiendo ajustado el espectro como una suma de exponenciales, tal como se hizo en el capítulo anterior, se puede determinar la función de autocorrelación correspondiente mediante los coeficientes complejos obtenidos del ajuste.

Por otro lado, resulta interesante notar que este tipo de aproximación de la función de autocorrelación, y de la densidad espectral, constituye la base de la técnica de simulación se señales Gaussianas con un espectro, o FAC, dado (e.g., Cacko et al., 1988), mediante el uso de ecuaciones recurrentes en diferencias, del tipo

$$x(n) = \sum_{k=0}^{L} a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{M} b_k \xi(n-k) \tag{5.47}$$

5.2 Envolvente de la función de autocorrelación del oleaje

Considerando que la función de autocorrelación del oleaje presenta una atenuación de tipo aproximadamente exponencial cuando su ancho de banda espectral es estrecho, tal como se muestra en la figura 5.20, resulta interesante examinar la estructura de su envolvente para los diferentes tipos de oleajes. Es decir, para registros de oleaje simples, mar de viento y mar de fondo, y para las combinaciones de estos dos tipos de oleaje examinadas en este trabajo. Además, el uso de la envolvente de la FAC facilitará considerablemente la estimación de determinados parámetros, que serán introducidos en la siguiente sección, y que dan cuenta de la rapidez con que ésta se atenúa.

Envolvente de la Función de autocorrelación

La envolvente de una función que varía lentamente con el tiempo puede ser estimada de forma relativamente sencilla mediante el uso de la transformada de Hilbert. En particular, la transformada de Hilbert permite obtener de forma bastante simple la envolvente de la función de autocorrelación, mediante la definición de una señal analítica en términos de $R(\tau)$.

En concreto, para un proceso aleatorio estacionario $x(t)$ de media nula, con función de autocorrelación $R_{xx}(\tau)$ y función de densidad espectral bilateral $S_{xx}(f)$, la transformada de Hilbert será

$$\tilde{x}(t) = \mathcal{H}\left[x(t)\right] \tag{5.48}$$

Puesto que la transformada de Hilbert es una operación lineal, $\tilde{x}(t)$ también será un proceso estacionario. Además, al igual que para $x(t)$, es posible definir una función de autocorrelación y una función de densidad espectral asociadas a $\tilde{x}(t)$. Esto es,

$$R_{\tilde{x}\tilde{x}}(\tau) = E\left[\tilde{x}(t)\tilde{x}(t+\tau)\right] \tag{5.49}$$

y su transformada de Fourier

$$S_{\tilde{x}\tilde{x}}(f) = \mathcal{F}\left[R_{\tilde{x}}(\tau)\right] \tag{5.50}$$

De forma equivalente, excepto en un factor de escala que carece de importancia en el desarrollo teórico, puesto que aparece en ambos lados de la expresión y se cancela, la expresión anterior puede ser escrita como

$$S_{\tilde{x}\tilde{x}}(f) = E\left[\tilde{X}^*(f)\tilde{X}(f)\right] = E\left[\left|\tilde{X}(f)\right|^2\right] \tag{5.51}$$

Teniendo en cuenta las definiciones de $R_{xx}(\tau)$ y $S_{xx}(f)$ resulta inmediato demostrar que

$$R_{\tilde{x}\tilde{x}}(\tau) = R_{xx}(\tau) \tag{5.52}$$

$$S_{\tilde{x}\tilde{x}}(f) = S_{xx}(f) \tag{5.53}$$

En consecuencia, dado que $R_{xx}(\tau)$ es una función par de τ, se verificará que

$$R_{\tilde{x}\tilde{x}}(\tau) = R_{\tilde{x}\tilde{x}}(-\tau) \tag{5.54}$$

Así mismo, también se verificará la siguiente equivalencia entre las varianzas y las funciones de autocorrelación para un desfase nulo,

$$\sigma_{\tilde{x}}^2 = R_{\tilde{x}\tilde{x}}(0) = R_{xx}(0) = \sigma_x^2 \tag{5.55}$$

Adicionalmente, combinando $x(t)$ y su transformada de Hilbert se tiene que

$$R_{x\tilde{x}}(\tau) = E\left[x(t)\tilde{x}(t+\tau)\right] \tag{5.56}$$

$$R_{\tilde{x}x}(\tau) = E\left[\tilde{x}(t)x(t+\tau)\right] \tag{5.57}$$

de donde se deduce inmediatamente que

$$R_{x\tilde{x}}(\tau) = -R_{\tilde{x}x}(\tau) \tag{5.58}$$

De igual modo, las funciones de densidad espectral respectivas, dadas por

$$S_{x\tilde{x}}(f) = \mathcal{F}\left[R_{x\tilde{x}}(\tau)\right] \tag{5.59}$$

$$S_{\tilde{x}x}(f) = \mathcal{F}\left[R_{\tilde{x}x}(\tau)\right] \tag{5.60}$$

o de forma equivalente

$$S_{x\tilde{x}}(f) = E\left[X^*(f)\tilde{X}(f)\right] \tag{5.61}$$

$$S_{\tilde{x}x}(f) = E\left[\tilde{X}^*(f)X(f)\right] \tag{5.62}$$

verifican la relación

$$S_{x\tilde{x}}(f) = -S_{\tilde{x}x}(f) \tag{5.63}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta las propiedades de la transformada de Hilbert, resulta simple demostrar que

$$\mathcal{H}\left[R_{xx}(\tau)\right] = \tilde{R}_{xx}(\tau) = R_{x\tilde{x}}(\tau) \tag{5.64}$$

Es decir, la transformada de Hilbert de $R_{xx}(\tau)$ es igual a la función de correlación cruzada entre $x(t)$ y su transformada de Hilbert $\tilde{x}(t)$.

Además, dado que $R_{xx}(\tau)$ es una función par de τ, su transformada de Hilbert $\tilde{R}_{xx}(\tau)$ es una función impar de τ. En consecuencia,

$$\tilde{R}_{xx}(0) = R_{x\tilde{x}}(0) = R_{\tilde{x}x}(0) = 0 \tag{5.65}$$

Es decir, mientras $R_{xx}(\tau)$ presenta un máximo en $\tau = 0$, su transformada de Hilbert $\tilde{R}_{xx}(\tau)$ muestra un cruce ascencente por el nivel cero para $\tau = 0$. Esto es,

$$\tilde{R}_{xx}(0-) < 0 \qquad \text{y} \qquad \tilde{R}_{xx}(0+) > 0 \tag{5.66}$$

De modo análogo, dado que la función de densidad espectral $S_{xx}(f)$ es una función par de f, su transformada de Hilbert es una función impar de la frecuencia,

$$\mathcal{F}\left[\tilde{R}_{xx}(\tau)\right] = \tilde{S}_{xx}(f) = S_{x\tilde{x}}(f) \tag{5.67}$$

En consecuencia, haciendo uso de la definición de envolvente de una señal, la función envolvente de $R_{xx}(\tau)$ es definida en términos de su transformada de Hilbert, tal como sigue

$$A_{xx}(\tau) = \left[R_{xx}^2(\tau) + \tilde{R}_{xx}^2(\tau)\right]^{1/2} \tag{5.68}$$

Una forma más elegante de obtener estos resultados es haciendo uso de la señal analítica. La señal analítica $z_x(t)$ correspondiente a un registro aleatorio estacionario $x(t)$ es definida como

$$z_x(t) = x(t) + i\tilde{x}(t) \tag{5.69}$$

La función de autocorrelación correspondiente a dicha señal es una función compleja definida por

$$\begin{aligned} R_{z_x z_x}(\tau) &= E\left[z_x^*(t) z_x(t+\tau)\right] \\ &= E\left[\{x(t) - i\tilde{x}(t)\}\{x(t+\tau) + i\tilde{x}(t+\tau)\}\right] \\ &= R_{xx}(\tau) + R_{\tilde{x}\tilde{x}}(\tau) + i\left[R_{x\tilde{x}}(\tau) - R_{\tilde{x}x}(\tau)\right] \end{aligned} \tag{5.70}$$

Haciendo uso de las ecuaciones (5.52) y (5.58) se tiene que

$$R_{z_x z_x}(\tau) = 2\left[R_{xx}(\tau) + iR_{x\tilde{x}}(\tau)\right] = 2\left[R_{xx}(\tau) + i\tilde{R}_{xx}(\tau)\right] \tag{5.71}$$

expresión que demuestra que

$$\frac{R_{z_x z_x}(\tau)}{2} = R_{xx}(\tau) + i\tilde{R}_{xx}(\tau) \tag{5.72}$$

es la señal analítica de $R_{xx}(\tau)$.

La transformada de Fourier de $R_{xx}(\tau)$ proporciona la función de densidad espectral

$$\begin{aligned} S_{z_x z_x}(f) &= \mathcal{F}\left[R_{z_x z_x}(\tau)\right] = 2\left[S_{xx}(f) + i\tilde{S}_{xx}(f)\right] \\ &= 2\left[1 + \operatorname{sgn}(f)\right] S_{xx}(f) \end{aligned} \tag{5.73}$$

Por tanto, la función de densidad autoespectral será

$$S_{z_x z_x}(f) = \begin{cases} 4S_{xx}(f) & \text{para} \quad f > 0 \\ \\ 0 & \text{para} \quad f < 0 \end{cases} \tag{5.74}$$

De la ecuación (5.72) se tiene que

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{S_{z_x z_x}(f)}{2}\right] = R_{xx}(\tau) + i\tilde{R}_{xx}(\tau) \tag{5.75}$$

De forma que las funciones de autocorrelación de $x(t)$ y $\tilde{x}(t)$ pueden ser expresadas en términos del autoespectro de $x(t)$. Es decir,

$$\begin{aligned} R_{xx}(\tau) &= 2\int_0^\infty S_{xx}(f)\cos(2\pi f\tau)df \\ \tilde{R}_{xx}(\tau) &= 2\int_0^\infty S_{xx}(f)\operatorname{sen}(2\pi f\tau)df \end{aligned} \tag{5.76}$$

De este modo, es posible obtener la envolvente de la función de autocorrelación $R_{xx}(\tau)$ a partir de la función de densidad espectral correspondiente.

Para ello, en la práctica, es necesario aumentar la longitud, N, de la serie temporal $\{x(n\Delta t)\}$ con N ceros, obteniendo una nueva serie de longitud $2N$. Los coeficientes de Fourier complejos vienen dados por

$$X(k\Delta f) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t)\exp\left(-i\frac{\pi k n}{N}\right) \tag{5.77}$$

y el espectro unilateral, $G_{xx}(f)$, es

$$G_{xx}(k\Delta f) = \frac{2}{N\Delta t}\left[X^*(k\Delta f)X(k\Delta f)\right] = \frac{2}{N\Delta t}\left|X(k\Delta f)\right|^2 \tag{5.78}$$

donde

$$\Delta f = \frac{1}{2N\Delta t} \qquad \text{para} \quad k = 0, 1, 2, \cdots, N$$

y

$$r = 0, 1, 2, \cdots, (N-1)$$

De modo que,

$$R_{xx}(r\Delta t) = \left(\frac{N\Delta f}{N-r}\right) \sum_{k=0}^{N} G_{xx}(k\Delta f) \cos\left(\frac{\pi k r}{N}\right) \tag{5.79}$$

$$\tilde{R}_{xx}(r\Delta t) = \left(\frac{N\Delta f}{N-r}\right) \sum_{k=0}^{N} G_{xx}(k\Delta f) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi k r}{N}\right) \tag{5.80}$$

Entonces, la envolvente de la función de autocorrelación $R_{xx}(\tau)$ puede ser estimada mediante

$$A(\tau) = A_{xx}(r\Delta t) = \left[R_{xx}^2(r\Delta t) + \tilde{R}_{xx}^2(r\Delta t)\right]^{1/2} \tag{5.81}$$

En las figuras 5.12 y 5.13 se muestran algunos ejemplos de envolventes correspondientes a oleajes unimodales de viento y de fondo, respectivamente. Nótese que el desfase aparece normalizado respecto al periodo de pico obtenido como inversa de la frecuencia de pico de Delft, dada por la ecuación (5.107). Conjuntamente con la FAC y la envolvente se muestran los espectros correspondientes. De estas figuras se deriva que la FAC del oleaje de viento se atenúa mucho más rapidamente que la correspondiente al oleaje de fondo. Este hecho resulta totalmente coherente con las estructuras de los espectros correspondientes. Así, mientras en el ejemplo de oleaje de fondo mostrado en la parte superior de la figura 5.13 la FAC se atenúa muy lentamente, un pequeño aumento en el ancho de banda espectral provoca una atenuación mayor en la FAC, tal como se observa en el ejemplo mostrado en la parte inferior de dicha figura. Además, en este último ejemplo se observa como la FAC después de atenuarse tiende a sufrir un ligero aumento. Este hecho se aprecia más claramente en los ejemplo correspondientes a oleaje de viento (figura 5.12). En este caso, el ejemplo en la parte inferior de la figura posse un ancho de banda más estrecho

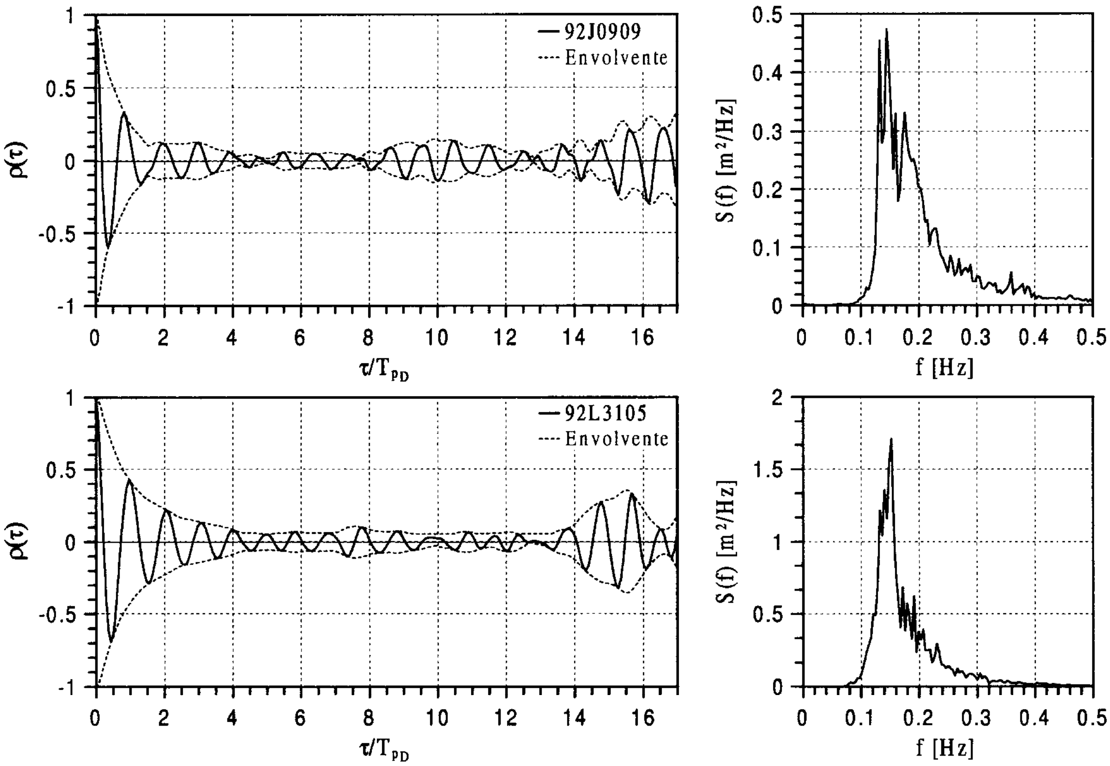

Figura 5.12: Ejemplos de envolvente de la FAC asociada a registros de oleaje de viento.

y, por ello, la FAC se atenúa más lentamente que en el ejemplo de la parte superior de la figura. Si embargo, en ambos casos, las funciones de autocorrelación tienden a presentar zonas en las que su amplitud aumenta, después de haber descendido hacia valores muy pequeños. Este hecho ha sido considerado por varios autores (e.g., Sobey y Read, 1984) como un reflejo del agrupamiento del oleaje, es decir, de la tendencia de las olas altas a aparecer agrupadas.

En las figuras 5.14, 5.15 y 5.16 se muestran ejemplos de envolventes correspondientes a las FAC de registros de oleaje con espectros bimodales dominados por el viento, por el oleaje de fondo y con contenido energético similar, respectivamente. Tal como se observó en la sección anterior, en situaciones de oleaje bimodal la estructura de la FAC es notablemente más irregular, hecho que se observa claramente en los ejemplos mostrados en las figuras citadas y que, tal

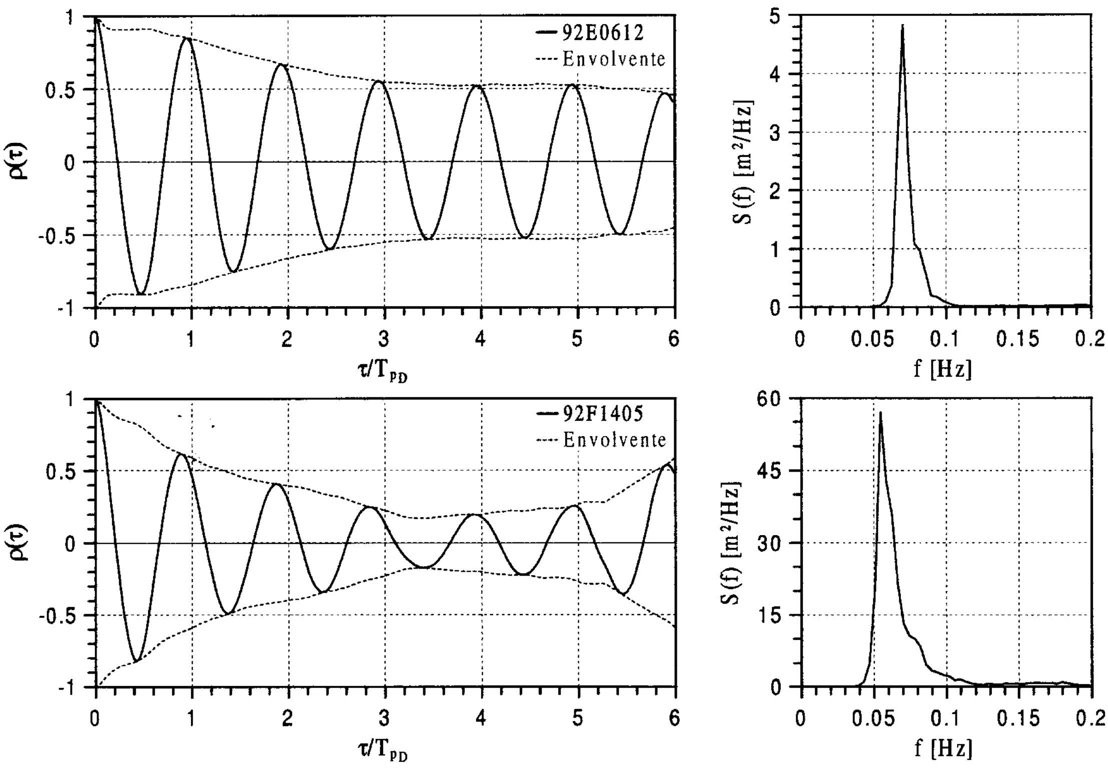

Figura 5.13: Ejemplos de envolvente de la FAC asociada a registros de oleaje de fondo.

como se observa en las mismas, se ve reflejado en la estructura de la envolvente, presentando en estos casos una evolución menos suave que la observada para las envolventes asociadas a oleajes unimodales. Esta irregularidad de la envolvente de la FAC es claramente notoria en los casos de oleajes mixtos dominados por el swell (figura 5.15) y en aquellos en los que éste y el oleaje de fondo possen un contenido energético equivalente (figura 5.16). Nótese que en éste último caso la envolvente muestra pequeñas fluctuaciones entre máximos sucesivos de la FAC, reflejando el comportamiento irregular de la misma.

Resulta interesante notar que la tendencia de la FAC a sufrir una ligera amplificación después de haberse atenuado es más clara en el caso del oleaje dominado por el viento que en los restantes casos de oleajes bimodales, poniendo de manifiesto el importante efecto que la superposición de un oleaje de fondo poco energético, pero bien separado en frecuencias tiene sobre la estructura del oleaje, tal como ha sido puesto de manifiesto por Rodríguez et al. (2000), al estudiar el agrupamiento del oleaje en mares mixtos.

Por otro lado, es interesante observar que mientras en el oleaje mixto dominado por el oleaje de fondo la FAC tiende a mostrar únicamente un ciclo por cada periodo de pico, este aumenta a dos ciclos de amplitud generalmente decreciente en el oleaje mixto dominado por el oleaje de viento, y tiende a mantenerse en ese valor para oleajes mixtos sin predominio del oleaje de viento o de fondo, pero ahora mostrando primero un máximo de menor amplitud y posteriormente un pico más intenso.

De lo anterior se desprende que la superposición de dos campos de oleaje tiene un efecto considerable sobre la dependencia entre valores de la elevación de la superficie separados un cierto tiempo. En otras palabras, la combinación de dos campos de oleaje tiene un efecto importante sobre la autosemejanza en la estructura de la señal. En este sentido, es importante señalar que, mientras este efecto se puede apreciar claramente al examinar la estructura de la FAC, no es posible apreciarlo en la estructura del espectro, que proporciona información sobre las frecuencias componentes que predominan en la serie analizada.

El estudio de la envolvente de la FAC frente al de dicha función directamente muestra dos ventajas claras. Por un lado la envolvente permite eliminar las oscilaciones presentes en la FAC, evolucionando de forma más suave, y por otro lado, la envolvente es una función positiva, lo cuál permite su representación en escala logarítmica, haciendo más sencillo detectar estas pequeñas fluctuaciones presentes en la señal original.

Este hecho se pone de manifiesto en las figuras 5.17 y 5.18, en las que se muestran las envolventes de las FAC correspondientes a oleajes unimodales (figura 5.17) y bimodales (figura 5.18), representadas en escala logarítmica, conjuntamente con el ajuste a una función exponencial en la zona de los desfases iniciales. En dichas figuras se observa más claramente la persistencia existente entre valores de la serie. Nótese como mientras para el oleaje de fondo la FAC presenta una atenuación muy lenta, dando lugar a intervalos de correlación considerablemente largos, y con una atenuación de tipo exponencial durante un número considerable de desfases, la atenuación es mucho más rápida en el oleaje de viento, mostrando un comportamiento exponencial durante un periodo sustancialmente menor. Además, en esta representación se observa como el comportamiento de la FAC para desfases grandes es mucho más irregular que para el oleaje de fondo.

Al analizar las envolventes correspondientes a oleajes bimodales, mostradas en escala logarítmica en la figura 5.18, conjuntamente con el ajuste de una función exponencial en los primeros desfases, se observa claramente el aumento en la variabilidad, en términos de la FAC y por tanto de correlación entre valores del registro de oleaje correspondiente. Nótese que en condiciones de oleaje bimodal la estructura de la FAC es mucho más compleja que en condiciones de oleaje unimodal. Así, mientras en oleajes mixtos dominados por el oleaje de viento la correlación decrece rápidamente para luego presentar fluctuaciones importantes. En esta situación es importante notar que la atenuación de la FAC es considerablemente menor que en el caso del oleaje de viento.

En el caso de oleajes mixtos dominados por el oleaje de fondo, la correlación disminuye más lentamente que en caso en que predomina el oleaje de viento, y presenta fluctuaciones desde valores del desfase notablemente pequeños. No obstante, el comportamiento más irregular se observa en el caso de oleajes mixtos con sistemas de oleaje de viento y de fondo con contenidos energéticos similares. Nótese que en tales casos se produce inicialmente un descenso drástico de la correlación, haciéndose práticamente nula, posteriormente ésta vuelve a aumentar rápidamente para luego sufrir un nuevo descenso brusco y así sucesivamente.

En definitiva, de estos resultados, e independientemente del comportamiento particular de la FAC en cada tipo de oleaje, que será analizado en detalle en trabajos futuros, resulta obvio que un análisis detallado de esta función permite obtener una gran cantidad de información que, de ningún modo puede ser extraida a partir de la función de densidad espectral asociada. Además, tal como se podrá observar en la siguiente sección, a partir de esta función pueden definirse parámetros característicos que presentan una clara relación con otros definidos a partir del espectro.

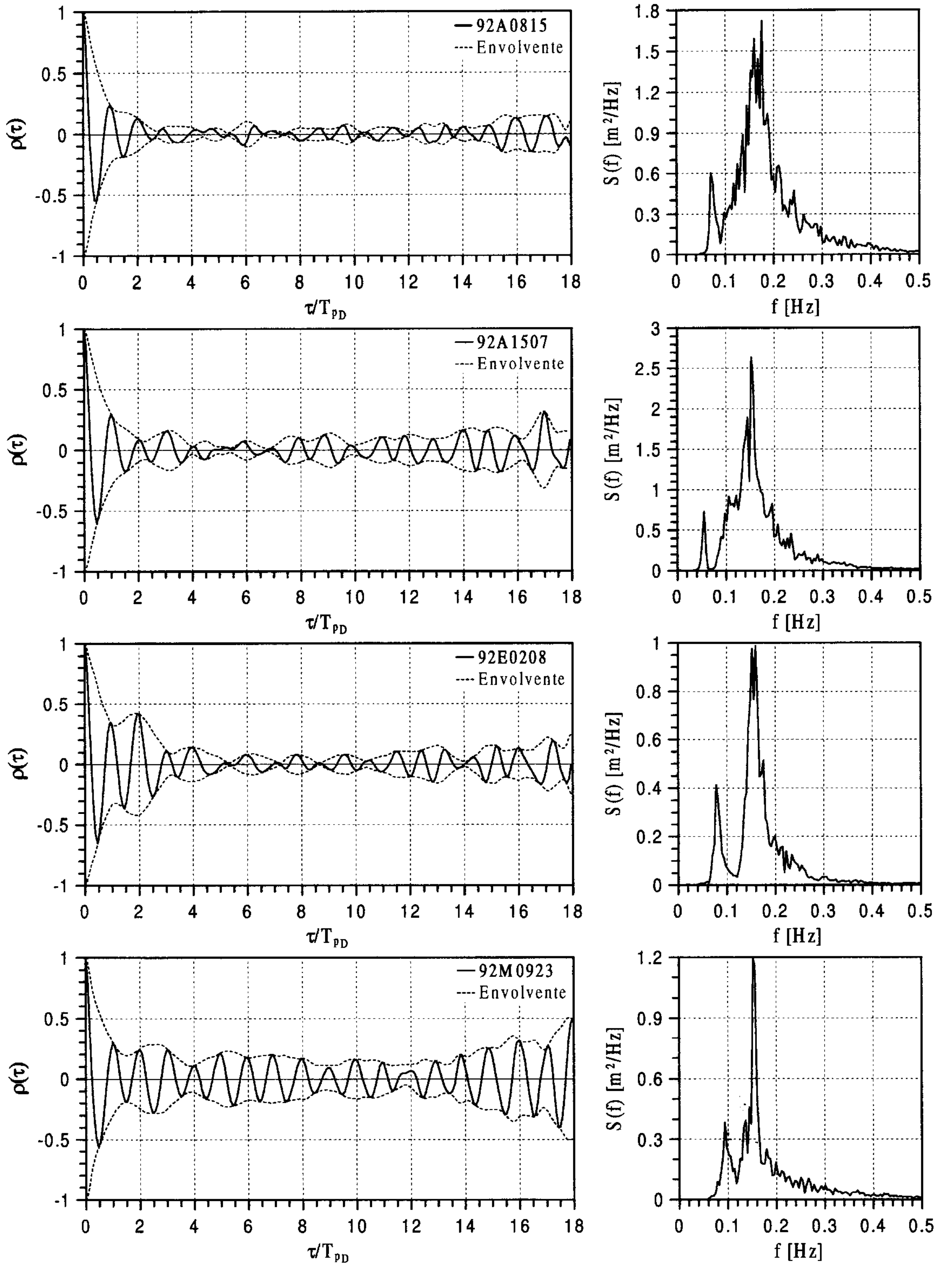

Figura 5.14: Ejemplos de envolvente de la FAC asociada a registros de oleaje con espectro bimodal con predominio del oleaje de viento.

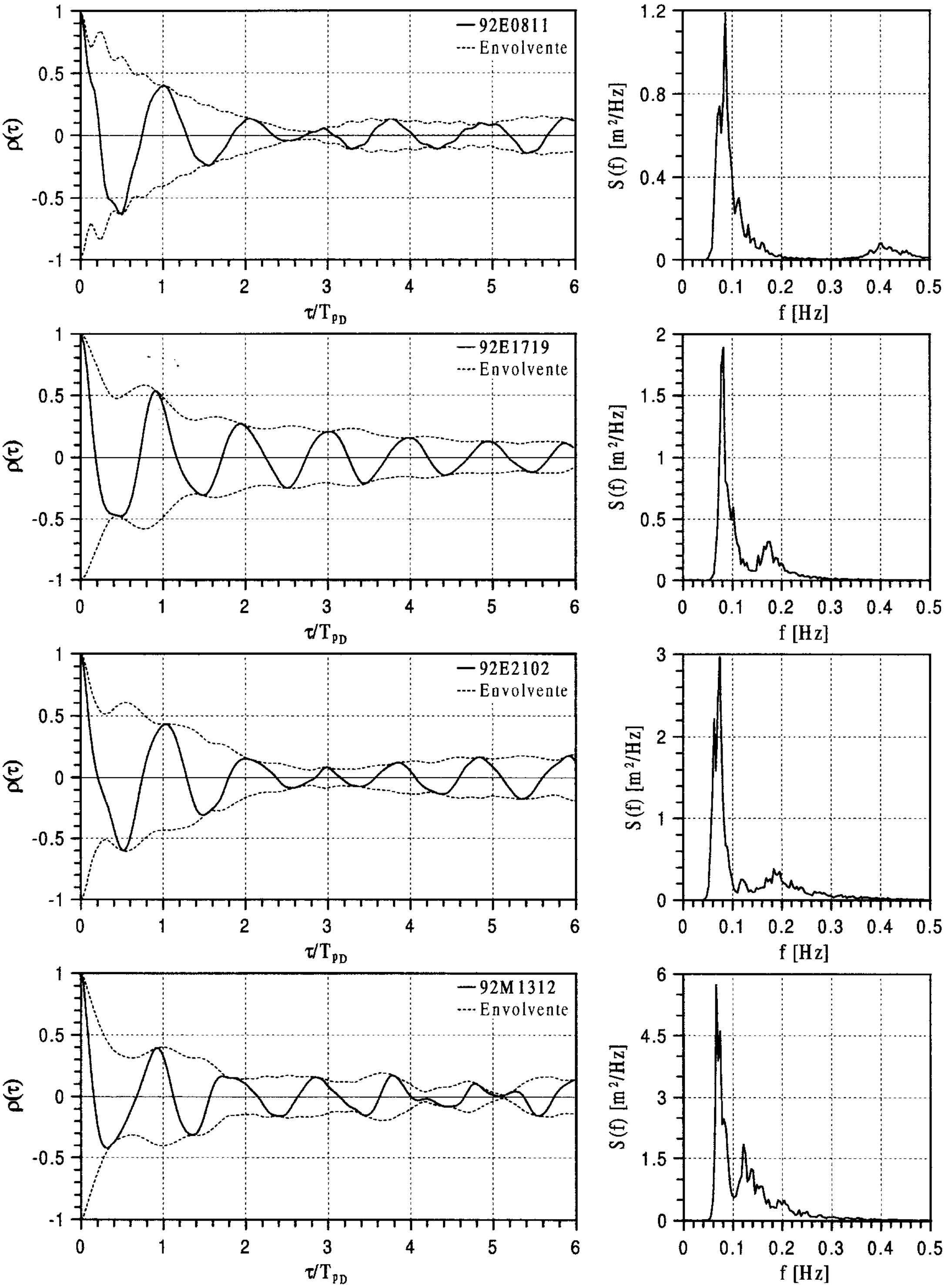

Figura 5.15: Ejemplos de envolvente de la FAC asociada a registros de oleaje con espectro bimodal con predominio del oleaje de fondo.

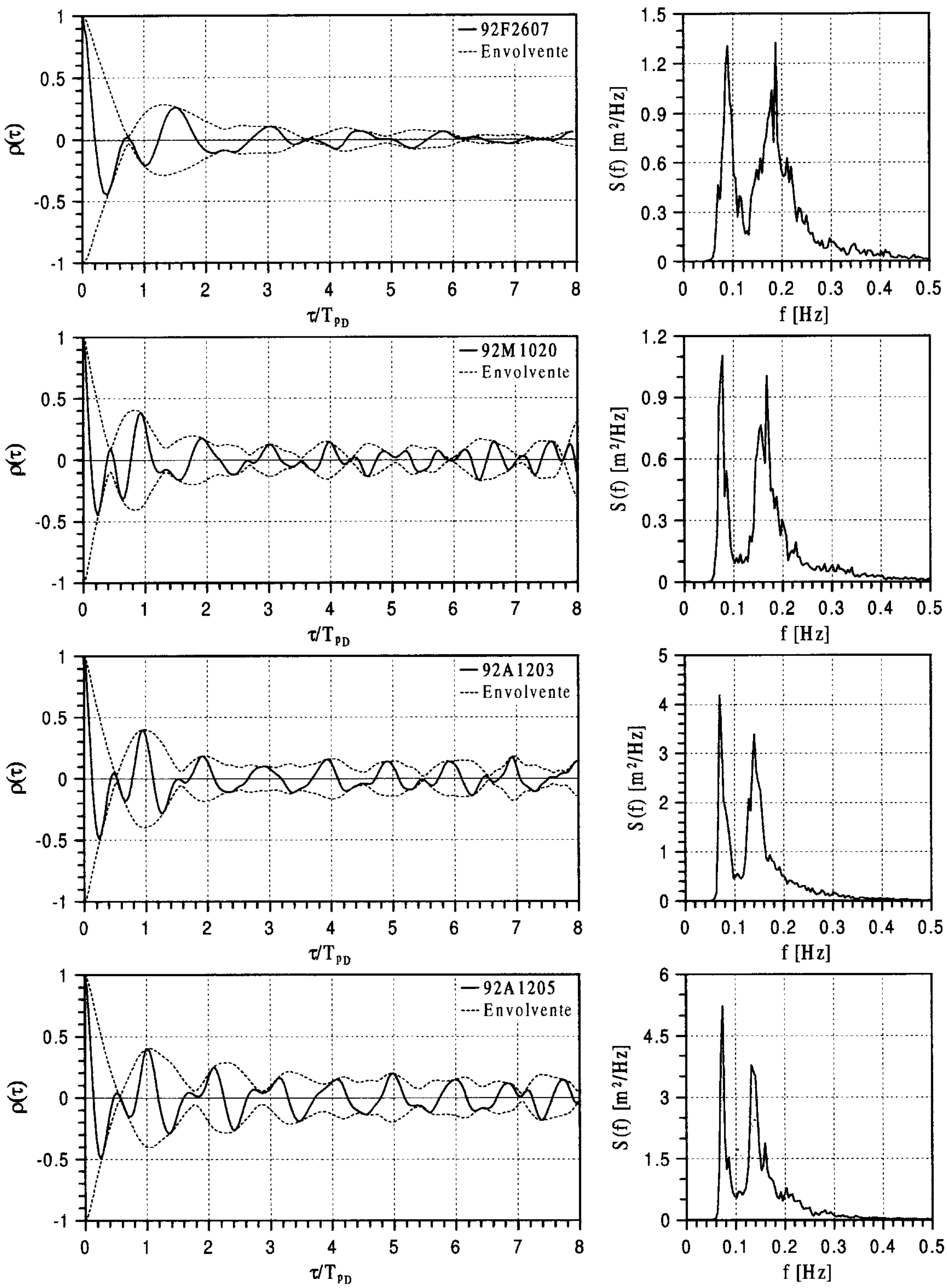

Figura 5.16: Ejemplos de envolvente de la FAC asociada a registros de oleaje con espectro bimodal en los que el oleaje de viento y swell poseen un contenido energético equivalente.

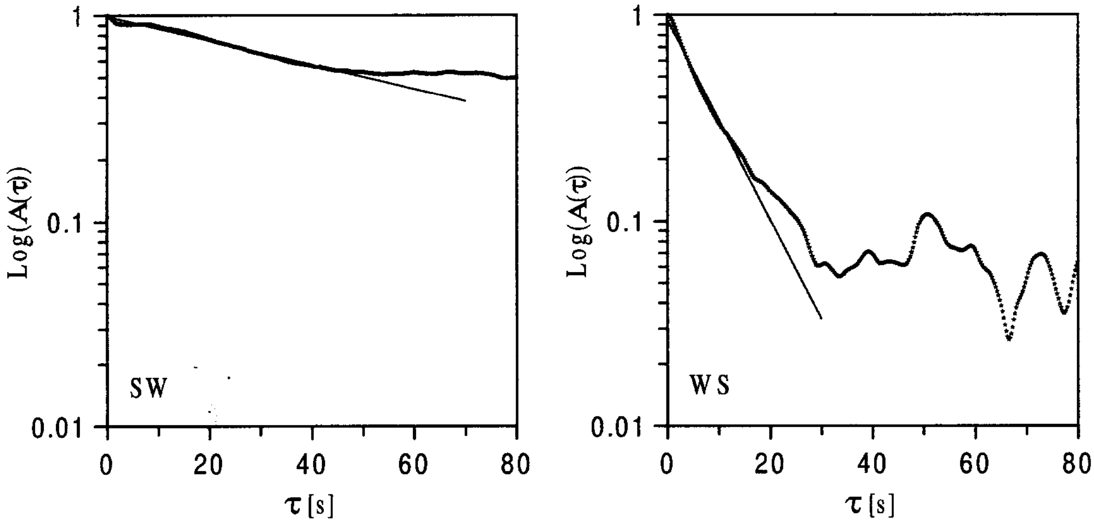

Figura 5.17: Ejemplos de envolvente de la FAC asociada a registros de oleaje con espectro unimodal, oleaje de fondo y de viento, en escala logarítmica, mostrando el ajuste a una función exponencial para los primeros desfases.

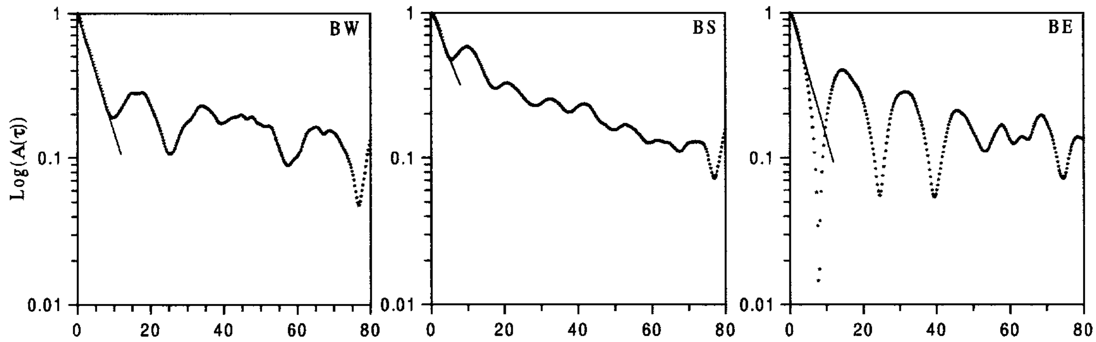

Figura 5.18: Ejemplos de envolvente de la FAC asociada a registros de oleaje con espectro bimodal dominado por oleaje de viento, por oleaje de fondo, y espectros en los que el oleaje de viento y swell poseen un contenido energético equivalente, en escala logarítmica, mostrando el ajuste a una función exponencial para los primeros desfases.

5.3 Relación entre parámetros espectrales y de la FAC

Dado que la función de densidad espectral y la FAC de un proceso aleatorio estacionario poseen la misma información, aunque en diferentes dominios, parece razonable intentar buscar relaciones entre parámetros característicos de $S(f)$ y de $R(\tau)$. Este es el objetivo de la presente sección. Para ello, inicialmente se definen algunos parámetros de interés. Así, por ejemplo, Se definen el *ancho de banda espectral efectivo* como (Bendat, 1981)

$$B_e = \frac{\int_0^\infty S(f)df}{S(f)_{max}} = \frac{m_0}{S(f_p)} = \frac{R(0)}{S(f_p)} \tag{5.82}$$

y la *duración de correlación efectiva* como

$$\tau_{ef} = 2\int_0^\infty \frac{|R(\tau)|}{R(\tau)_{max}}d\tau = \frac{2}{R(0)}\int_0^\infty |R(\tau)|d\tau \tag{5.83}$$

A partir de estas definiciones se deduce fácilmente que

$$B_e\tau_{ef} = 2\frac{\int_0^\infty |R(\tau)|d\tau}{S(f_p)} \tag{5.84}$$

La estimación de este producto conduce a la denominada *relación de incertidumbre*: para una función de autocorrelación dada, $R(\tau)$, y su función de densidad espectral asociada, $S(f)$, el producto de B_e y τ_{ef} satisface la desigualdad

$$B_e\tau_{ef} \geq \frac{1}{2} \tag{5.85}$$

Por tanto, según esta relación, también conocida como *principio de incertidumbre de Grenander* (Grenander, 1951, quien notó la similitud entre este hecho y el principio de Heisenberg en mecánica cuántica: resolución y fiabilidad son antagonistas), se debe esperar que el ancho de banda espectral sea pequeño si la función de autocorrelación decae lentamente. Por el contrario, si la FAC se atenúa rápidamente, el ancho de banda espectral será elevado. En consecuencia, en principio, la información sobre la tasa de atenuación de $R(\tau)$, o $\rho(\tau)$, y la información sobre el ancho de banda espectral son equivalentes.

La duración de correlación efectiva puede ser expresada en forma discreta como

$$\tau_{ef} = \frac{2}{R(0)} \sum_{0}^{\infty} |R(\tau)| \Delta t = 2 \sum_{0}^{\infty} |\rho(\tau)| \Delta t \tag{5.86}$$

expresión que en la práctica ha de ser evaluada desde cero hasta el número máximo de *lags* empleados para estimar $R(\tau)$.

En la figura 5.19 se muestran los resultados obtenidos para la relación (5.84) considerando todos los registros obtenidos en la boya LP-I durante el año 1992, sin hacer distinción entre registros con espectros unimodales o bimodales. De ella se observa inmediatamente que en todos los casos se satisface la relación de incertidumbre, tal como era de esperar. En dicha figura se han representado como referencia la curva $y = 1/(2x)$, que representa la condición límite dada por la igualdad en la expresión (5.85). Resulta evidente que los resultados experimentales ponen de manifiesto la existencia de una clara relación entre ambos parámetros, de forma que un incremento en el ancho de banda implica una disminución en la duración de correlación.

Es interesante señalar que la duración de correlación efectiva, puede ser encontrada en la literatura bajo nombres muy variados, tales como escala de correlación, longitud, distancia, intervalo, o tiempo de correlación, o también, escala integral de tiempo. Además, si bién en el fondo todas tienen básicamente el mismo significado, es posible encontrar diferentes definiciones analíticas. Así, por ejemplo, Robert y Spanos (1990) la denominan escala integral de tiempo y la definen como

$$\tau_{ef} = \frac{1}{R(0)} \int_{0}^{\infty} \tau R(\tau) d\tau \tag{5.87}$$

y señalan que, si τ_{ef} es pequeño la serie analizada corresponde a un proceso de banda ancha, mientras que si τ_{ef} es grande el proceso es de banda estrecha, siendo un caso idealizado aquel en el que $\tau_{ef} = 0$; lo cual indica la existencia de un proceso completamente incorrelacionado, normalmente referenciado como ruido blanco.

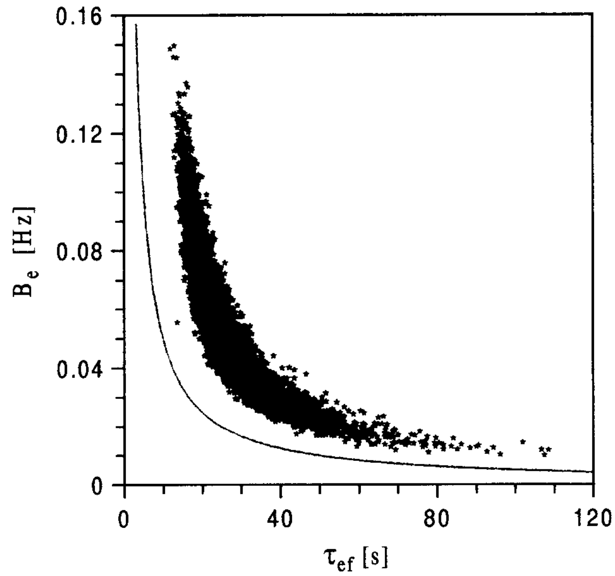

Figura 5.19: Relación de incertidumbre estimada para los registros de oleaje correspondientes a la boya LP-I durante el año 1992.

En otros casos (e.g., Kundu, 1990), dicho parámetro es definido simplemente como

$$\tau_{ef} = \int_0^\infty R(\tau) d\tau \tag{5.88}$$

En realidad, todas estas definiciones denotan una medida de la rapidez con la que $R(\tau) \to 0$, al crecer τ. Por ello, varios autores se limitan a definir dicho parámetro como el intervalo de tiempo necesario para que el valor de la función de autocorrelación sea despreciable, o menor que una cierta cantidad pequeña ϵ, de forma que para $\tau > \tau_{ef}$, $R(\tau) \leq \epsilon$. Sin embargo, el valor de ϵ también varía entre autores. Así, algunos autores (e.g., Cacko et al., 1988) establecen como valor crítico el 5% del valor máximo, es decir $\epsilon = 0.05R(0)$, mientras otros (e.g., Naidu, 1996) admiten un valor de $\epsilon = 0.1R(0)$. Adicionalmente, algunos autores (e.g., Massel, 1996) consideran como valor crítico $\epsilon = (1/e)$, partiendo de la base de que la FAC para un proceso de Markov puede expresarse como

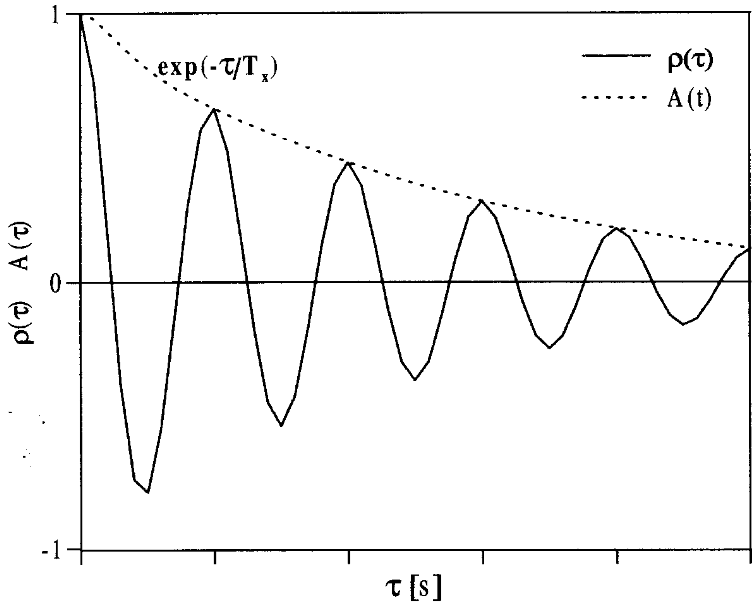

Figura 5.20: Ilustración esquemática de la atenuación exponencial de la envolvente de la función de autocorrelación para un oleaje de banda estrecha.

$$R(\tau) = R(0)\mathrm{e}^{\left(-\frac{|\tau|}{\tau_e}\right)} \tag{5.89}$$

Por tanto, para $\tau = \tau_e$,

$$\frac{R(\tau_e)}{R(0)} = \frac{1}{\mathrm{e}} \approx 0.368 \tag{5.90}$$

En este sentido, es interesante notar que, tal como se ha señalado anteriormente, para un proceso de banda estrecha, es de esperar que la envolvente de la función de autocorrelación se atenúe de forma exponencial, tal como se observa en la figura 5.20, donde T_x es un periodo característico arbitrario del oleaje, tal como el periodo τ_e, es decir

$$A(\tau) \propto \mathrm{e}^{(-\tau/\tau_e)}$$

Por ello, en este trabajo se ha optado por estimar la duración de correlación de 3 formas diferentes. Por un lado, siguiendo la definición dada por (5.86), y por otro lado, a partir de la envolvente de la FAC normalizada, $\rho(\tau)$, estimando el intervalo de tiempo que ésta requiere para alcanzar un valor igual o inferior al 10% de su valor en $\rho(0)$ de forma permanente, y el intervalo necesario para que llegue a ser menor que 1/e y permanezca por debajo de dicho umbral. Esto es,

$$\begin{cases} \tau_{ef} = 2\sum_{0}^{\infty} |\rho(\tau)|\Delta t \\ \\ \tau_{1/e} = \tau \quad \Longleftrightarrow \quad A(\tau) \leq \frac{1}{\mathrm{e}} \quad \forall\, \tau \geq \tau_{1/e} \\ \\ \tau_{1/10} = \tau \quad \Longleftrightarrow \quad A(\tau) \leq \frac{1}{10} \quad \forall\, \tau \geq \tau_{1/10} \end{cases} \tag{5.91}$$

Es necesario indicar que la decisión de adoptar tres criterios diferentes para estimar la duración de correlación no ha sido casual, sino que está tomada en base a dos motivos. Por un lado, la primera de las definiciones, τ_{ef}, proporciona un valor del desfase a partir del cual se pueda admitir que la correlación es prácticamente nula, obtenido mediante la integración de la FAC sobre todo su rango de definición, sin establecer un valor crítico. Por otra parte, las otras dos definiciones si que establecen un valor crítico de τ, pero en ambos casos el valor umbral es notablemente diferente, siendo más estricto el criterio del 10% que el del 37%.

Así, teniendo en cuenta que, tal como se ha observado anteriormente, para determinadas combinaciones de oleajes de fondo y de viento existe la posibilidad de que la FAC decrezca inicialmente para luego volver a crecer y posteriormente tender asintóticamente a cero, resulta evidente que, mientras que con $\tau_{1/e}$ es posible que la FAC llegue a tomar valores inferiores a 0.368 para un desfase dado y posteriormente adopte valores superiores a dicho umbral para desfases mayores, este hecho resulta menos probable, aunque no imposible, en el caso de $\tau_{1/10}$.

Naturalmente, estos dos últimos parámetros pueden ser estimados fácilmente a partir de la envolvente de la FAC, mediante una transformación logarítmica de la misma. De este modo, resulta notablemente sencillo obtener los valores de τ para los cuales la envolvente, o de forma equivalente la FAC, alcanza los valores $\tau_{1/e}$ y $\tau_{1/10}$, y se mantiene por debajo de ellos, tal como se puede comprobar observando las figuras 5.17 y 5.18.

5.3.1 Parámetros característicos de la FAC

Tal como ya se ha comentado, dado que la función de densidad espectral y la FAC constituyen un par transformado de Fourier, éstas contienen en principio la misma información. En particular, los momentos espectrales pueden ser derivados a partir de la FAC. Así, teniendo en cuenta la formulación admitida para caracterizar las fluctuaciones de la superficie libre del mar, como un proceso lineal Gaussiano

$$\eta(t) = \sum_{n=1}^{N} A_n \operatorname{sen}(2\pi f_n t + \phi_n) \tag{5.92}$$

y la definición de la función de la FAC, como el promedio de los productos de $\eta(t)$ desfasados en una cantidad τ,

$$R(\tau) = \overline{\eta(t)\eta(t+\tau)} \tag{5.93}$$

Realizando el promedio del producto definido por (5.93) y eliminando los términos de media nula se tiene que

$$R(\tau) = \sum_{n=1}^{N} A_n^2 \cos(2\pi f_n \tau) = \int_0^{\infty} S(f)\cos(2\pi f\tau)df \tag{5.94}$$

donde las amplitudes y la densidad espectral están relacionadas mediante

$$A_i = \sqrt{2S(f)\Delta f} \tag{5.95}$$

Desarrollando en serie de potencias el término $\eta(t+\tau)$ entorno a t,

$$\eta(t+\tau) = \eta(t) + \frac{d\eta(t)}{dt}\tau + \frac{1}{2}\frac{d^2\eta(t)}{dt^2}\tau^2 + \cdots \tag{5.96}$$

y sustituyendo (5.96) en (5.93) se puede observar que

$$\overline{\eta(t)\frac{d^n\eta(t)}{dt^n}} = \begin{cases} (-1)^{n/2} m_n & \text{para} \quad n = 0, 2, 4, \cdots \\ \\ 0 & \text{para} \quad n = 1, 3, 5, \cdots \end{cases} \tag{5.97}$$

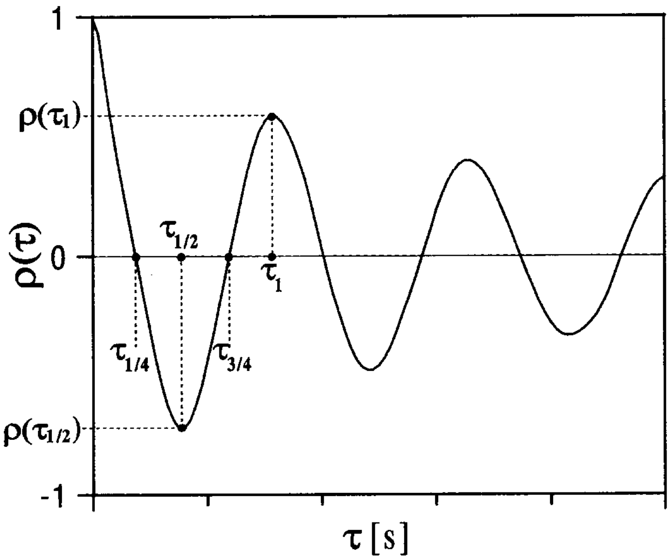

Figura 5.21: Definición de parámetros característicos de la función de autocorrelación.

donde m_n es el momento espectral de orden n. Sustituyendo (5.97) en (5.93) se obtiene la función de autocorrelación expresada en términos de los momentos espectrales. Es decir,

$$R(\tau) = m_0 - \frac{1}{2}m_2\tau^2 + \frac{1}{24}m_4\tau^4 - \cdots \tag{5.98}$$

En consecuencia, la función de autocorrelación puede ser vista como una especie de función generatriz de los momentos espectrales. Formalmente,

$$m_n = (-1)^{n/2}\frac{d^nR(\tau)}{d\tau^n}\bigg|_{\tau=0} \qquad n = 0, 2, 4, \cdots \tag{5.99}$$

Como primera aproximación, si $R(\tau) = 0$ en $\tau_{1/4}$, tal como se muestra en la figura 5.21, entonces de (5.98) se tendrá que

$$\tau_{1/4} \approx \sqrt{2}\left(\frac{m_o}{m_2}\right)^{1/2} = \sqrt{2}\,T_{02} \tag{5.100}$$

Sin embargo, esta aproximación no es adecuada como para ser empleada en la práctica (Gran, 1992). Una aproximación alternativa para espectros unimodales y de ancho de banda estrecho puede obtenerse mediante el siguiente procedimiento. Si se desarrolla el término $\cos(2\pi f\tau)$ en (5.94) mediante series de Taylor entorno a un valor Ω de la frecuencia, localizado en la zona de mayor contenido energético del espectro, y se realiza la integración, se puede obtener $R(\tau)$ en términos de los momentos espectrales. Esto es,

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \left[\cos(\Omega\tau) + \Omega\tau \operatorname{sen}(\Omega\tau) - \tfrac{1}{2}(\Omega\tau)^2\cos(\Omega\tau)\right] m_0 \\ &+ \left[-\tau \operatorname{sen}(\Omega\tau) + \Omega\tau^2\cos(\Omega\tau)\right] m_1 \\ &- \left[\tfrac{1}{2}\tau^2\cos(\Omega\tau)\right] m_2 \end{aligned} \tag{5.101}$$

Entonces, haciendo $\Omega\tau_{1/4} = \pi/2$, se tendrá que

$$R(\tau_{1/4}) = \frac{\pi}{2}m_0 - \tau_{1/4}2\pi m_1 = 0 \tag{5.102}$$

de donde

$$\tau_{1/4} = \frac{1}{4}\frac{m_0}{m_1} = \frac{1}{4}T_{01} \tag{5.103}$$

Es decir, en primera aproximación, debe existir una relación lineal entre el primer paso descendente por cero de la FAC y el periodo medio del oleaje. En la figura 5.22 se muestran los valores de dichos parámetros obtenidos para los registros de la boya LP-I durante el año 1992. De dicha figura se desprende que efectivamente, dicha relación existe. Nótese que la derivación de la expresión (5.103) está basada en la suposición de proceso de banda estrecha, mientras que en la figura 5.22 se han incluido los valores de los parámetros correspondientes a todos los registros obtenidos durante el periodo mencionado. Es decir, el conjunto de datos representado incluye tanto oleajes con espectros unimodales, de viento y de fondo, y bimodales de los tres tipos examinados en secciones anteriores.

Por otro lado, haciendo $\Omega\tau_{1/2} = \pi$, se tiene que

$$\tau_{1/2} = \frac{1}{2}\frac{m_1}{m_2} \tag{5.104}$$

de modo que

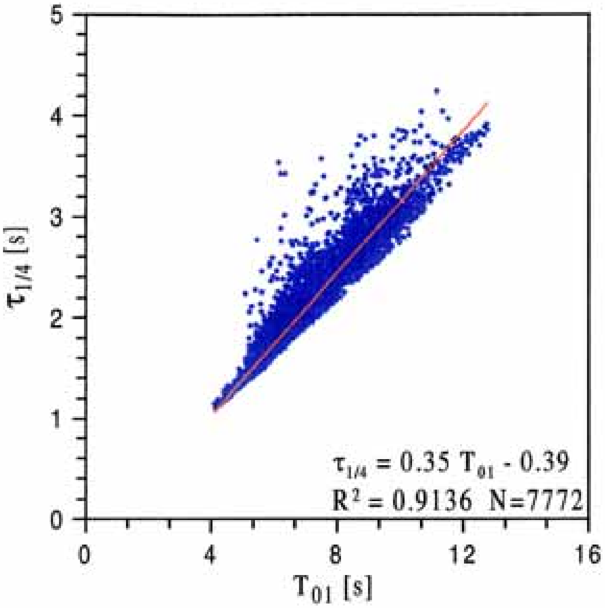

Figura 5.22: Relación entre $\tau_{1/4}$ y T_{01} estimada para los registros de oleaje correspondientes a la boya LP-I durante el año 1992.

$$\tau_{1/4}\tau_{1/2} = \frac{1}{8}\frac{m_0}{m_2} \tag{5.105}$$

Por tanto,

$$T_{02} = \left(\frac{m_0}{m_2}\right)^{1/2} = 2\sqrt{2}\left(\tau_{1/4}\tau_{1/2}\right)^{1/2} \tag{5.106}$$

Es decir, bajo la hipótesis de banda estrecha, debería existir una relación entre el periodo medio de pasos ascendentes por cero, T_{02}, y el producto del instante del primer paso por cero en sentido descendente de la FAC, $\tau_{1/4}$ y el correspondiente al momento en que la misma alcanza su primer mínimo, $\tau_{1/2}$. En la figura 5.23 se muestra la relación observada entre los valores experimentales de T_{02} y $\left(\tau_{1/4}\tau_{1/2}\right)^{1/2}$ obtenidos en la boya LP-I a partir de los registros correspondientes a 1992. De dicha figura se deriva que mientras entre ambos parámetros existe una cierta correlación, esta disminuye notablemente en comparación con la dada por la expresión (5.103) y mostrada en la figura 5.22. Nótese que los resultados de la figura 5.23 muestran una dispersión notablemente superior a la observada en la

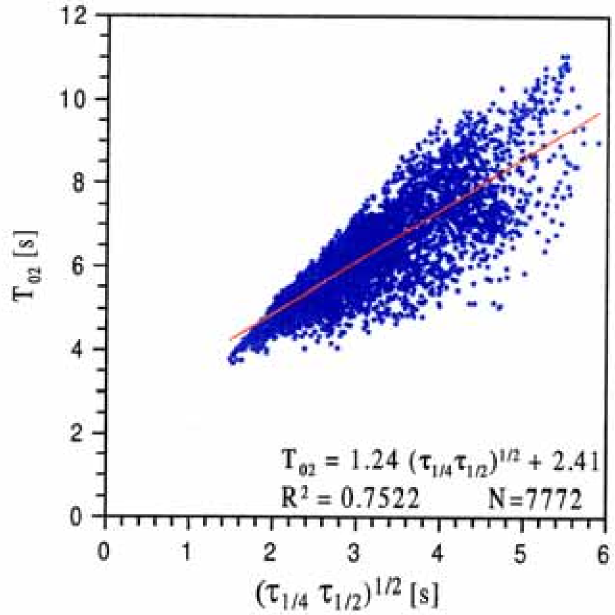

Figura 5.23: Relación entre T_{01} y $\tau_{1/4}\tau_{1/2}$ estimada para los registros de oleaje correspondientes a la boya LP-I durante el año 1992.

figura 5.22. Naturalmente, en esta relación se están añadiendo las variabilidades presentadas por los dos parámetros característicos de la FAC $\tau_{1/4}$ y $\tau_{1/2}$. Además, es necesario tener en cuenta la dependencia del periodo medio de pasos ascendentes por cero con el momento espectral de orden 2, que dada su dependencia con la frecuencia al cuadrado presenta una mayor variabilidad que m_1 frente a las variaciones de la estructura del espectro, especialmente en la zona de frecuencias altas.

En este sentido, es interesante notar que existen autores (e.g., Massel, 1996) que, con buen criterio a nuestro juicio, consideran que, en principio, debería existir una relación entre el valor de $\tau_{1/4}$ y el periodo de pico, T_p, asociado a la frecuencia del pico espectral, dado que la mayor parte de la energía del proceso se concentra entorno a éste. Sin embargo, la relación observada para dichos parámetros, mostrada en la figura 5.24, es notablemente inferior a la encontrada en el caso de los periodos medios. La justificación a este hecho resulta simple. Mientras los periodos medios son definidos en términos de los momentos espectrales, estadísticos integrales, el periodo de pico es definido como la inversa de la frecuencia de pico. En consecuencia,

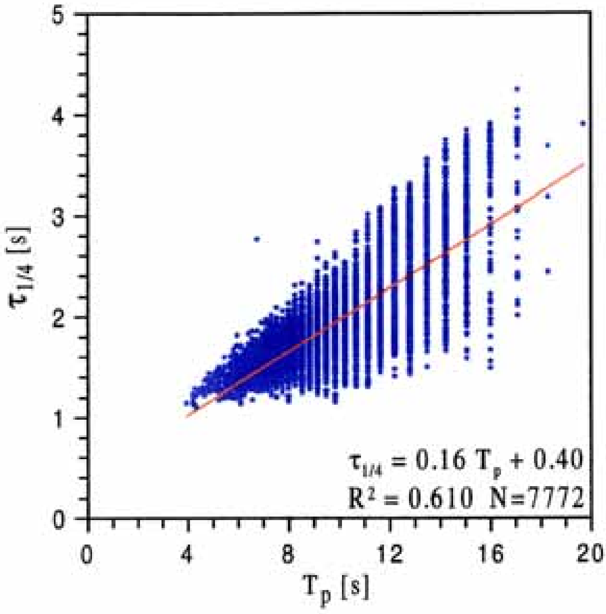

Figura 5.24: Relación entre $\tau_{1/4}$ y T_p estimada para los registros de oleaje correspondientes a la boya LP-I durante el año 1992.

al estar definido mediante el valor de una única estimación espectral, presenta una variabilidad mucho más alta que los otros periodos. También debe indicarse que, el periodo de pico puede ser definido de forma que se elimine parcialmente esta variabilidad. Así, empleado la definición del periodo de pico de Delft, tal como sugiere la IAHR (1986), definida como

$$f_{p_D} = \frac{\int_{f_1}^{f_2} f S(f) df}{\int_{f_1}^{f_2} S(f) df} \tag{5.107}$$

donde f_1 y f_2 son las frecuencias inferior y superior a f_p asociadas a los valores de $S(f)$ en los que éste es igual a $0.8S(f)$. Es decir, mediante esta definición, la frecuencia de pico es obtenida como el centroide de la banda más energética del espectro. Sin embargo, la variabilidad del periodo de pico definido como la inversa de la f_{p_D} sigue siendo mucho más alta que la de los periodos T_{01} y T_{02}, especialmente en los casos en los que el pico espectral es muy apuntado, tal como suele suceder en el caso del swell, situación que se da con bastante frecuencia en los espectros registrados en la boya LP-I.

Relación entre parámetros de la FAC y el ancho de banda espectral

En esta sección se examina la relación existente entre algunos parámetros característicos de la FAC y diferentes parámetros definidos con el fin de cuantificar el ancho de banda espectral, o lo que es equivalente, el grado de apuntamiento del espectro.

Así, considerando la definición de ancho de banda espectral dada por Longuet-Higgins (1975), en términos de los momentos espectrales, dada por

$$\nu_{LH} = \left(\frac{m_0 m_2}{m_1^2} - 1 \right)^{1/2} \tag{5.108}$$

y haciendo uso de las relaciones (5.103) y (5.104), resulta inmediato que

$$\nu_{LH}^2 = 2\frac{\tau_{1/4}}{\tau_{1/2}} - 1 \tag{5.109}$$

mientras que, empleando la definición dada por Vanmarcke (1972),

$$\nu_V = \left(1 - \frac{m_1^2}{m_0 m_2} \right)^{1/2} \tag{5.110}$$

se tiene que

$$\nu_V^2 = 1 - \frac{1}{2}\frac{\tau_{1/2}}{\tau_{1/4}} \tag{5.111}$$

En las figuras 5.25 y 5.26 se muestran las relaciones correspondientes a las ecuaciones (5.109) y (5.111) obtenidas representando los valores de los parámetros involucrados en las mismas obtenidos a partir del análisis de los registros experimentales correspondientes a la boya LP-I, durante el año 1992. Estas figuras revelan la existencia de las relaciones antes citadas, si bién la dispersión de los datos experimentales es considerablemente elevada, hecho que refleja claramente que la hipótesis de banda estrecha es raramente satisfecha por los registros experimentales.

Un parámetro característico de la FAC de gran importancia en la estimación del ancho de banda espectral de los registros de oleaje es el valor de τ para el cual la función de autocorrelación alcanza su primer mínimo se obtiene que, en el caso de un espectro unimodal de banda estrecha, (Gran, 1992),

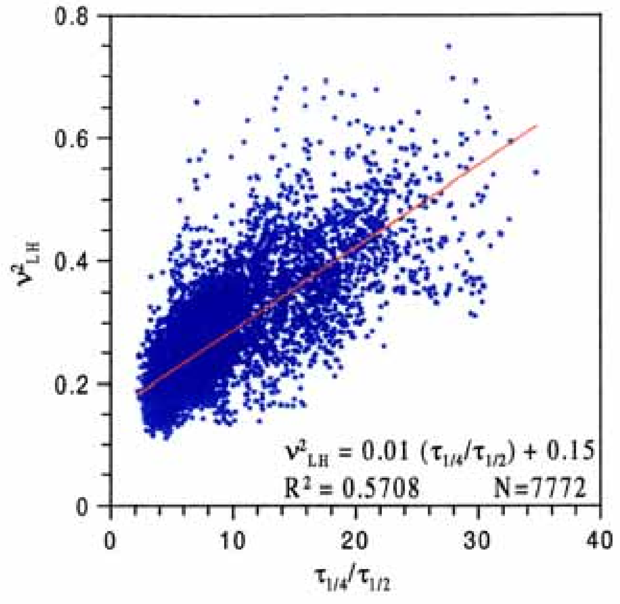

Figura 5.25: Relación entre $\tau_{1/4}/\tau_{1/2}$ y ν^2_{LH} estimada para los registros de oleaje correspondientes a la boya LP-I durante el año 1992.

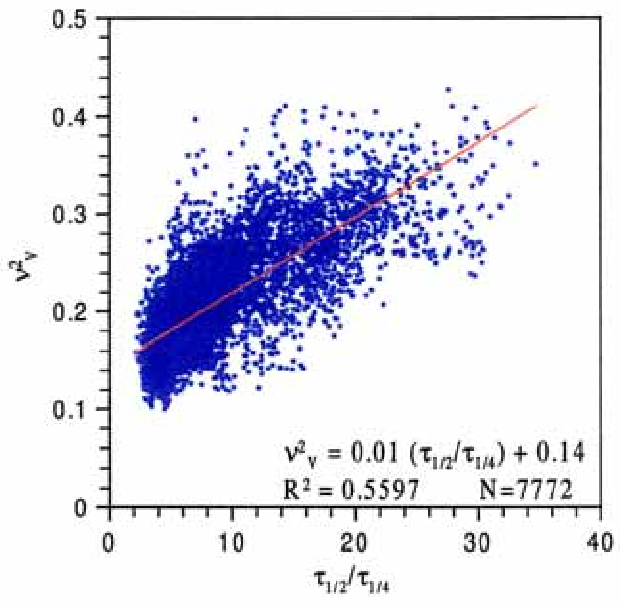

Figura 5.26: Relación entre $\tau_{1/2}/\tau_{1/4}$ y ν^2_V estimada para los registros de oleaje correspondientes a la boya LP-I durante el año 1992.

$$\rho(\tau_{1/2}) = -1 + \frac{\pi^2}{2}\nu_V^2 \tag{5.112}$$

expresión de la que se deduce que para un proceso de banda estrecha $\nu \to 0$, $\rho(\tau_{1/2}) \to -1$. Esta relación fué utilizada por Naess (1985) para expresar la función de distribución de probabilidad de las alturas de ola en un proceso de banda estrecha en términos del valor de primer mínimo de $\rho(\tau)$. Naturalmente, la expresión (5.112) sólo es válida en el caso de un proceso de banda estrecha. Nótese que para $\nu_V = 0$, $\rho(\tau_{1/2}) = -1$, sin embargo, para valores de ν_V superiores a $2/\pi$, $\rho(\tau_{1/2}) > 1$, lo cual no tiene sentido alguno, dado que $\rho(\tau)$ está acotado entre -1 y 1.

Obviamente, debido a la importancia que presenta la adecuada cuantificación del ancho de banda espectral de un proceso dado, además de los ya comentados, existe un elevado número de parámetros adimensionales que han sido propuesto para dicho fin. Entre estos cabe destacar los siguientes. El parámetro de anchura de banda espectral introducido por Cartwright y Longuet-Higgins (1956) (2.104),

$$\epsilon = \left(1 - \frac{m_2^2}{m_0 m_4}\right)^{1/2} \tag{5.113}$$

el parámetro espectral de correlación lineal entre alturas de olas sucesivas (Battjes, 1974) (3.15)

$$\kappa^2 = \frac{1}{m_0^2}\left\{\left[\int_0^\infty S(f)cos\,(2\pi f\tau)\,df\right]^2 + \left[\int_0^\infty S(f)sen\,(2\pi f\tau)\,df\right]^2\right\} \tag{5.114}$$

el parámetro de apuntamiento espectral (Goda, 1970),

$$Q_p = \frac{2}{m_0^2}\int_0^\infty fS(f)^2 df \tag{5.115}$$

y el de igual nombre propuesto por Medina y Hudspeth (1987),

$$Q_e = \frac{2m_1}{m_0^3}\int_0^\infty fS(f)^2 df \tag{5.116}$$

Es interesante indicar que según Longuet-Higgins (1984), para un proceso de banda estrecha, existe una relación aproximada entre el parámetro de Goda Q_p y

ν_{LH}, dada por $\kappa^2 \approx 1 - 4\pi^2\nu_{LH}^2$. Es decir, para $\nu_{LH} = 0$, Q_p será igual a 1, y para valores crecientes de ν_{LH}, Q_p aumenta rápidamente hasta 38.5, aproximadamente, en el caso límite de un proceso de $\nu_{LH} = 1$.

En la figura 5.27 se muestran las relaciones entre $\rho(\tau_{1/2})$ y los parámetros de anchura de banda espectral citados previamente, obtenidas a partir del análisis de los registros experimentales correspondientes a la boya LP-I, durante el año 1992. De dicha figura se desprende que existe una evidente relación entre el valor de $\rho(\tau_{1/2})$ y el ancho de banda espectral del proceso. No obstante, se observa que las mejores relaciones mostradas por dicho parámetro se dan con los parámetros Q_p y κ, de modo que al aumentar el valor de los mismos, es decir, al disminuir el ancho de banda espectral, $\rho(\tau_{1/2})$ tiende a un valor próximo a -0.9. Nótese que las mejores relaciones se obtienen con aquellos parámetros que únicamente dependen del momento de orden cero, y que la correlación disminuye para aquellos parámetros espectrales dependientes de momentos espectrales de orden superior. Además, es interesante notar que los valores de $\rho(\tau_{1/2})$ llegan a tomar valores próximos a cero, indicando la presencia de procesos de ancho de banda espectral sustancialmente elevado. En este contexto resulta interesante analizar la relación existente entre $\rho(\tau_{1/2})$ y $\rho(\tau_1)$. Nótese que para un proceso de banda infinitamente estrecha, el valor del primer mínimo debe tender a -1, mientras que el valor del primer máximo, diferente de $\rho(0)$, debe aproximarse a un valor cercano a 1. Es decir, resulta razonable esperar que entre estos dos parámetros exista una fuerte correlación, almenos para registros de oleaje con ancho de banda espectral estrecho. La figura 5.28 muestra conjuntamente los valores experimentales de ambos parámetros. De esta figura se desprende la existencia de una evidente correlación entre estos dos parámetros, de modo que a medida que el valor de $\rho(\tau/2)$ tiende a -1, $\rho(\tau)$ tiende a 1. No obstante, es importante observar que cuando el valor de $\rho(\tau/2)$ llega a ser muy pequeño, próximo a cero, $\rho(\tau)$ alcanza valores negativos, es decir, el primer máximo local de la FAC se hace negativo, tal como se observó en la sección anterior al examinar la estructura de la FAC correspondiente a registros de oleaje bimodal (ver figuras 5.8 y 5.9).

Por otra parte, teniendo en cuenta la relación observada entre $\rho(\tau_{1/2})$ y los parámetros de anchura de banda espectral empleados en la práctica para cuantificar

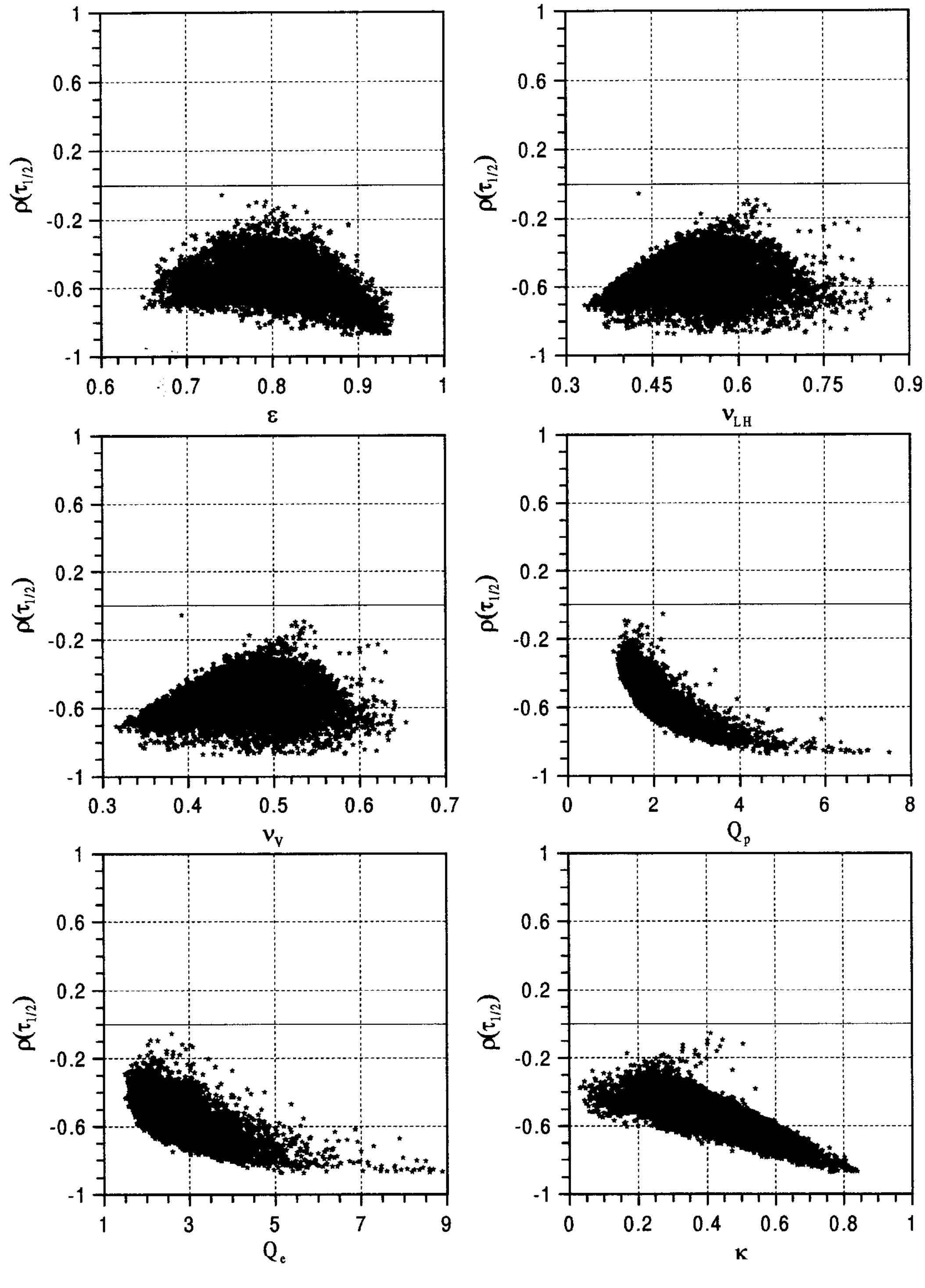

Figura 5.27: Relación entre $\rho(\tau_{1/2})$ y los parámetros de ancho de banda espectral ϵ, ν_{LH}, ν_V, Q_p, Q_e, κ; (boya LP-I, 1992).

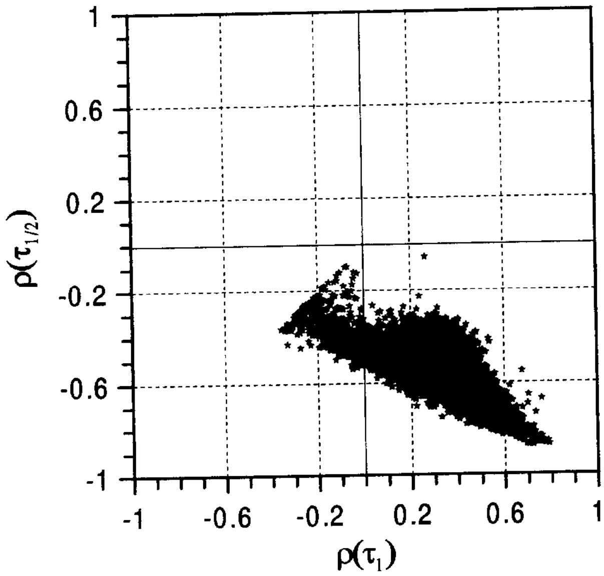

Figura 5.28: Relación entre $\rho(\tau_{1/2})$ y $\rho(\tau_1)$ resultante del análisis de los registros de oleaje correspondientes a la boya LP-I, durante 1992.

el rango de frecuencias sobre el que se distribuye la energía que contribuye de modo importante a la energía total del proceso, parece razonable esperar que exista una clara relación entre $\rho(\tau_{1/2})$ y el ancho de banda espectral efectivo, B_e, que si bien representa una medida análoga a los parámetros antes citados, en general, no resulta eficiente a la hora de cuentificar el ancho de banda espectral en registros reales. Del mismo modo, teniendo encuenta la relación de incertidumbre, dada por (5.84), también cabe esperar la existencia de una relación, aunque inversa a la anterior, entre el $\rho(\tau_{1/2})$ y la duración de correlación efectiva τ_{ef}. En la figura 5.29 se muestran las relaciones obtenidas entre dichos parámetros, observándose que efectivamente, tal como era de esperar, a medida que B_e disminuye, $\rho(\tau_{1/2})$ tiende a un valor próximo a -1, mientras la tendencia de $\rho(\tau_{1/2})$ hacia -1 implica un aumento de τ_{ef}.

En relación con la información suministrada por $\rho(\tau_{1/2})$ a cerca del proceso analizado, es interesante examinar la relación existente entre dicho parámetro y el contenido energético total del mismo, dada por m_0, o, de forma equivalente, por $R(0)$. En la figura 5.30, se muestran las relaciones entre $\rho(\tau_{1/2})$ y m_0, así como la observada entre $\rho(\tau_1)$ y m_0. En dichas figuras se observa que al aumentar el

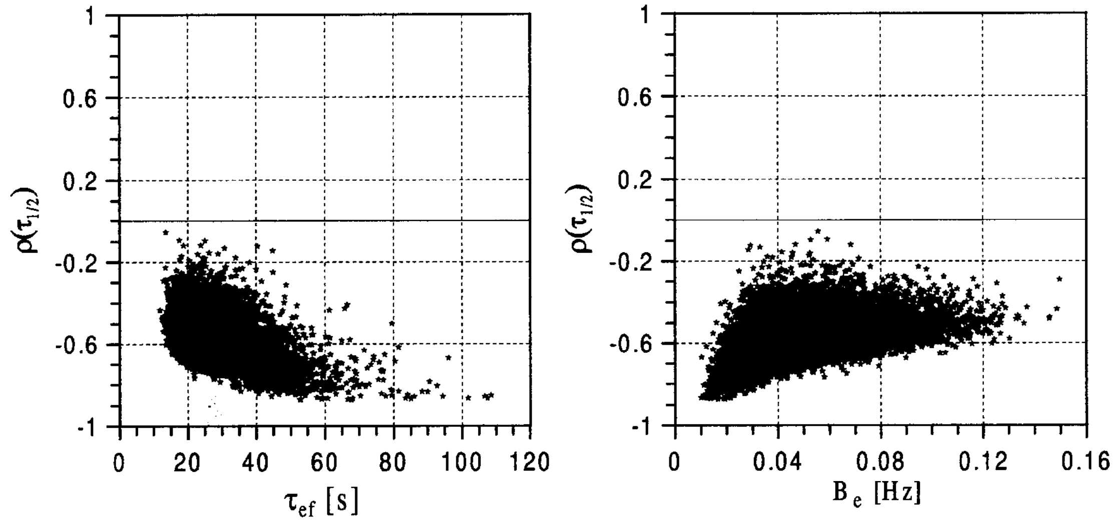

Figura 5.29: Relaciones entre $\rho(\tau_{1/2})$ y τ_{ef} (izquierda) y entre $\rho(\tau_{1/2})$ y B_e (derecha) resultante del análisis de los registros de oleaje correspondientes a la boya LP-I, durante 1992.

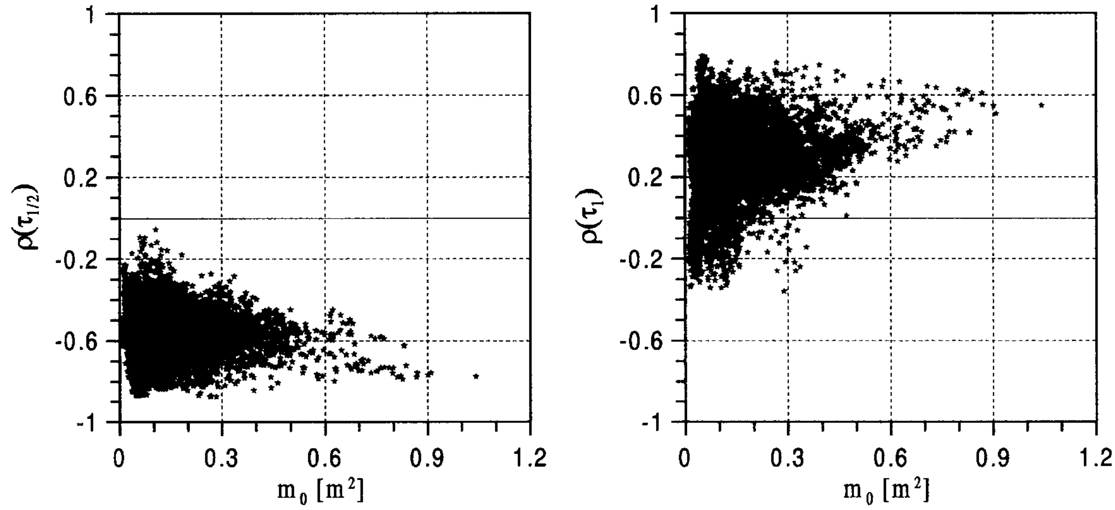

Figura 5.30: Relaciones entre m_0 y $\rho(\tau_{1/2})$ (izquierda) y $\rho(\tau_1)$ (derecha), resultante del análisis de los registros de oleaje correspondientes a la boya LP-I, durante 1992.

contenido energético del proceso, el valor de $\rho(\tau_{1/2})$ tiende a adoptar un valor entre 0.70 y 0.80. En este sentido, Naess (1985) observa que para oleajes medidos durante tormentas en el Golfo de Mexico y en el Mar del Norte, $\rho(\tau_{1/2})$ toma valores próximos a -0.71, mientras que el valor teórico correspondiente a un espectro JONSWAP con parámetro de apuntamiento $\gamma = 7$ es de 0.80, de modo que los resultados obtenidos en el presente estudio parecen estar completamente de acuerdo con las conclusiones de dicho autor. Por otro lado, en la misma figura 5.30 se observa que al aumentar m_0, $\rho(\tau_1)$ tiende a un valor próximo a 0.6.

Relación entre parámetros de la FAC y los periodos espectrales

Por último, es esta sección se analizan las relaciones observadas entre algunos parámetros característicos de la FAC y los periodos del oleaje derivados a partir de los momentos espectrales. En particular, en la figura 5.31 se muestran, en forma de diagramas de puntos, los valores de $\rho(\tau_{1/2})$ frente a los valores de diferentes periodos definidos mediante momentos espectrales. Estos son, el periodo medio, $\bar{T} = T_{01}$, el periodo medio de pasos ascendentes por cero, $T_z = T_{02}$, el periodo medio de crestas $T_c = T_{24}$, y el periodo de energía del oleaje, $T_e = T_{-1,0}$. Todos ellos fueron definidos en la sección [3.1.3], en las ecuaciones (3.83-86), y pueden expresarse de forma genérica como

$$T_{ij} = \left(\frac{m_i}{m_j}\right)^{1/(j-i)} \tag{5.117}$$

Esta figura revela la existencia de una clara relación entre $\rho(\tau_{1/2})$ y los periodos definidos espectralmente, de modo que todos tienden a aumentar a medida que $\rho(\tau_{1/2})$ tiende a -1, poniendo de manifiesto un descenso de las frecuencias correspondientes al disminuir el ancho de banda espectral. Es decir, a medida que el oleaje tiende a un oleaje de fondo puro. Nótese que la relación entre $\rho(\tau_{1/2})$ y los periodos espectrales es especialmente relevante con aquellos cuya definición involucra momentos espectrales de orden bajo, de modo que la peor correlación se observa para el caso del periodo medio de crestas, T_{24}, en cuya definición interviene el momento de orden cuarto. En este sentido también es de destacar que, tal como en principio cabría esperar, la mejor correlación no se observa para el caso del periodo de energía, T_e, definido en términos de los momentos m_0 y m_1. La justificación de este hecho reside en que el momento de orden -1 es notablemente sensible a la presencia de energía en bajas frecuencias, es decir, a la presencia de swell, hecho que, tal como se ha comprobado, se da con gran frecuencia en los registros de oleaje obtenidos en la boya LP-I.

La diferencia entre las correlaciones observadas entre los periodos espectrales antes considerados y los parámetros de duración de la correlación definidos previamente, τ_{ef}, $\tau_{1/e}$ y $\tau_{1/10}$, mostrados en las figuras 5.32, 5.33, y 5.34, pueden justificarse atendiendo a los mismos fenómenos. Es decir, las correlaciones entre los diferentes periodos y cada uno de los parámetros cuantificadores de la duración de correlación resulta siempre menor para el periodo T_{24} y a continuación para el periodo de energía, siendo normalmente mayores para el periodo medio T_{01}. No obstante, es interesante observar que la correlación entre cada uno de los periodos espectrales y los diferentes parámetros de duración de correlación se degrada al pasar de τ_{ef}, a $\tau_{1/e}$ y a $\tau_{1/10}$. Naturalmente, este hecho se debe a que, tal como se comentó, anteriormente, τ_{ef} es estimado considerando todos los valores de $\rho(\tau)$, es decir, como un parámetro integral, de modo que su variabilidad es mucho menor que la asociada a los otros dos parámetros, que son determinados identificando un único valor de la FAC, a partir del cuál, dicha función queda por debajo de un valor dado. Naturalmente, dicha variabilidad aumenta al considerar puntos cada vez más alejados del origen, tal como ocurre con $\tau_{1/10}$.

Como resultado de todo lo anterior, es posible afirmar que la FAC proporciona información relevante sobre la estructura de un registro de oleaje, tanto en términos del ancho de banda como de la duración de correlación del proceso, y que ésta puede ser relacionada con diferentes parámetros característicos del espectro, empleando parámetros que resultan muy sencillos de definir a partir de la función de autocorrelación, que además presentan la característica general de ser parámetros definidos localmente, y no como parámetros integrales, a excepción de τ_{ef}. En consecuencia, parece razonable admitir que las correlaciones aquí presentadas pueden mejorar sustancialmente definiendo parámetros integrales de la FAC.

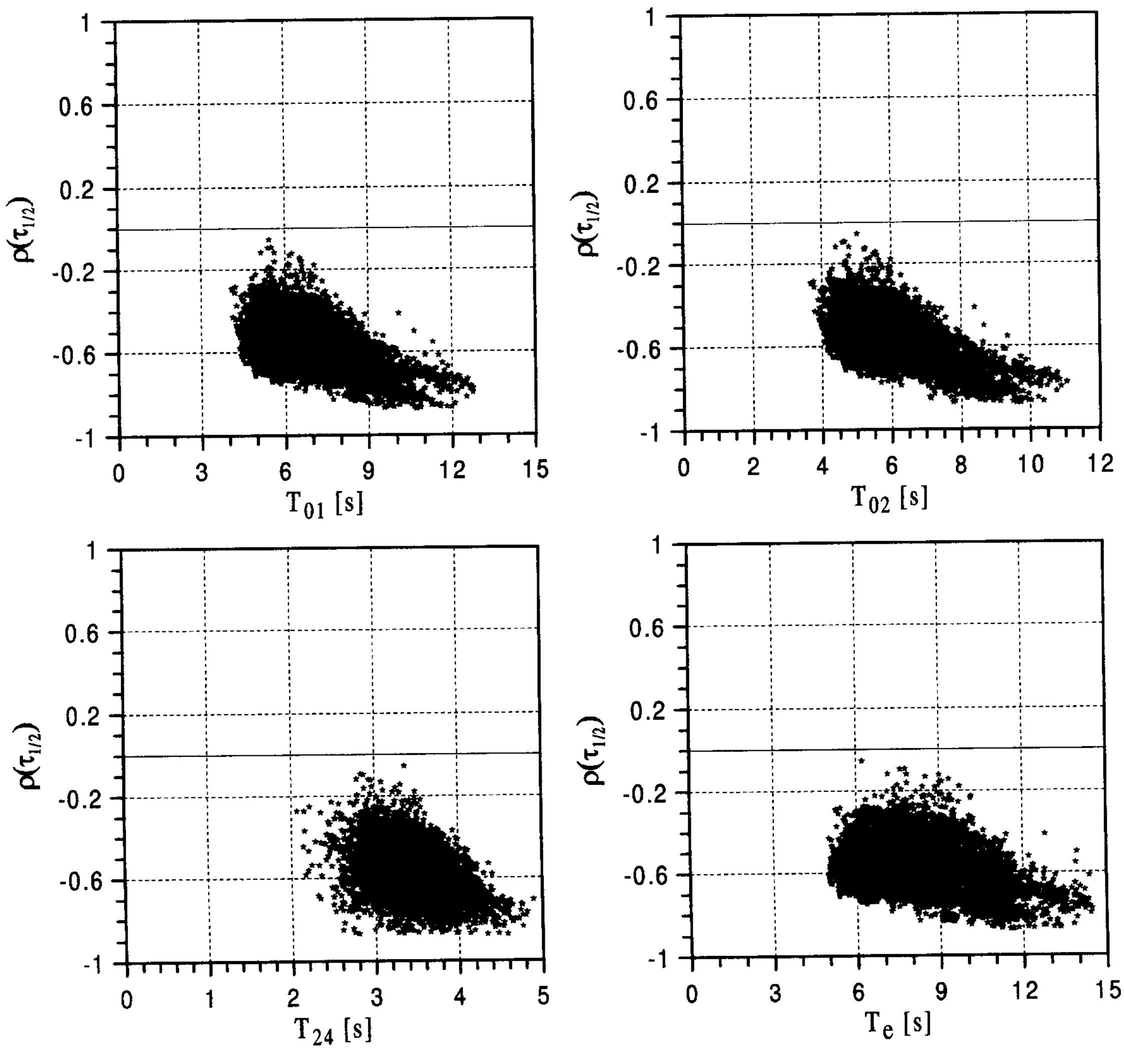

Figura 5.31: Relación entre $\rho(\tau_{1/2})$ y los periodos espectrales T_{01}, T_{02}, T_{24}, T_e; (boya LP-I, 1992).

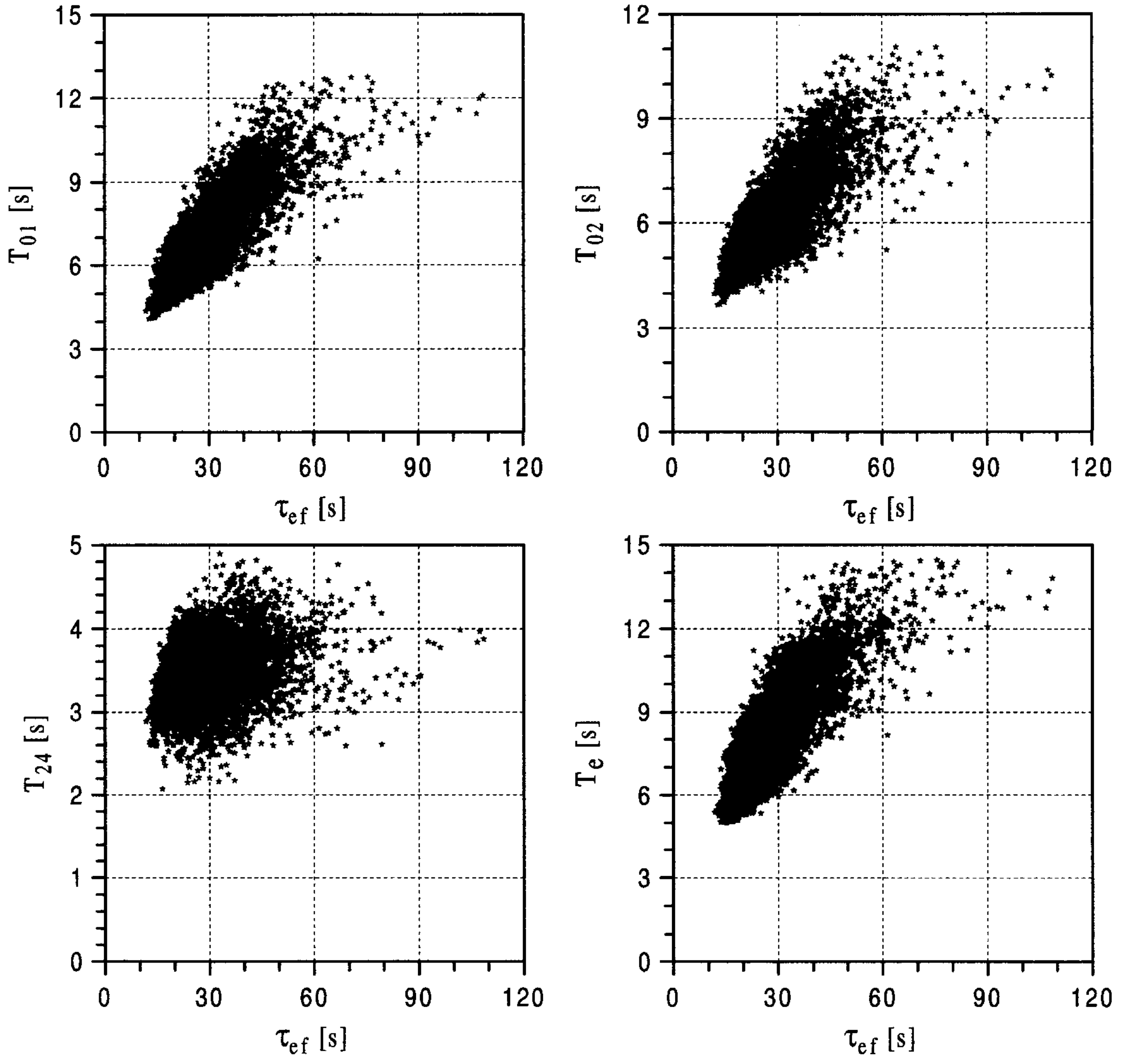

Figura 5.32: Relación entre τ_{ef} y los periodos espectrales T_{01}, T_{02}, T_{24}, T_e; (boya LP-I, 1992).

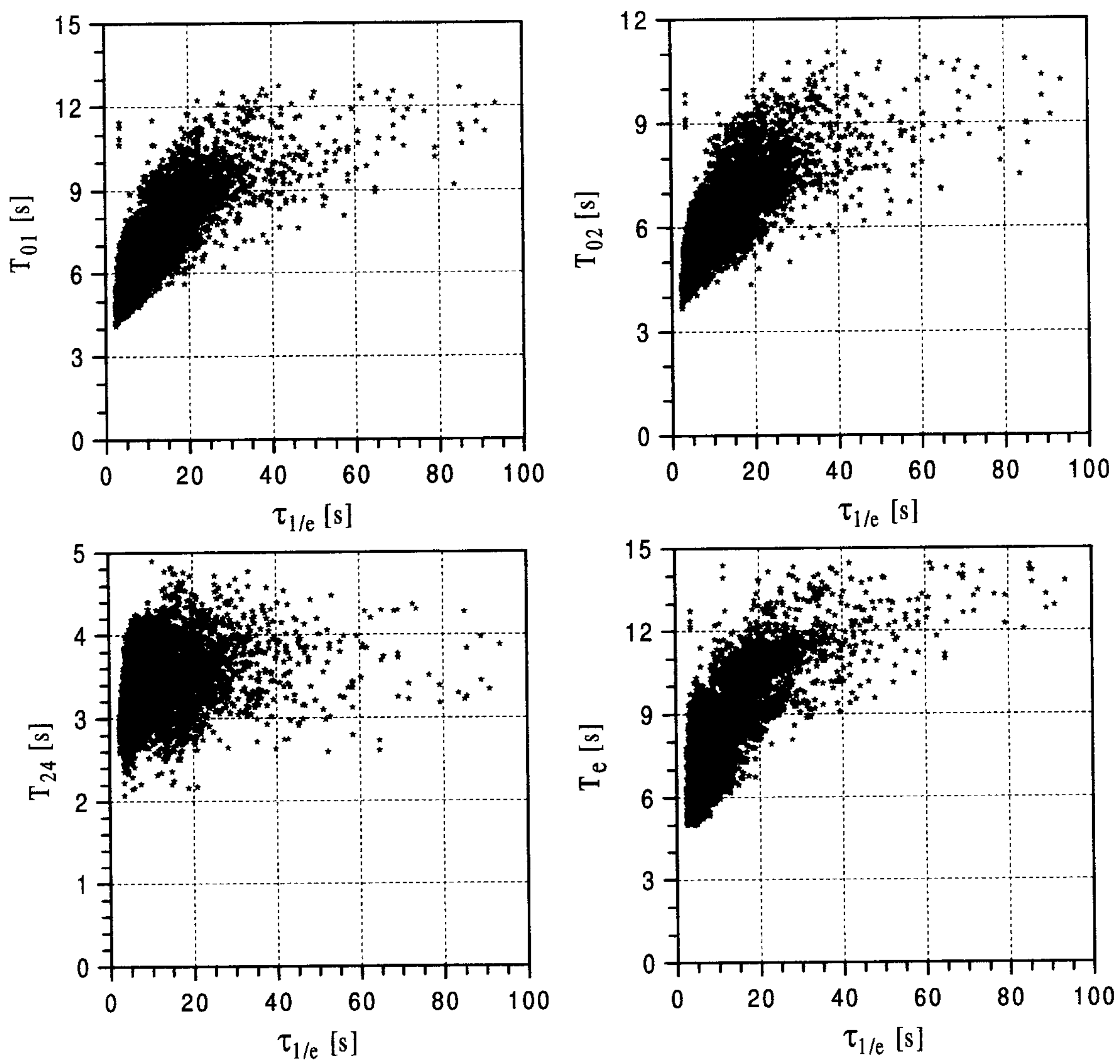

Figura 5.33: Relación entre $\tau_{1/e}$ y los periodos espectrales T_{01}, T_{02}, T_{24}, T_e; (boya LP-I, 1992).

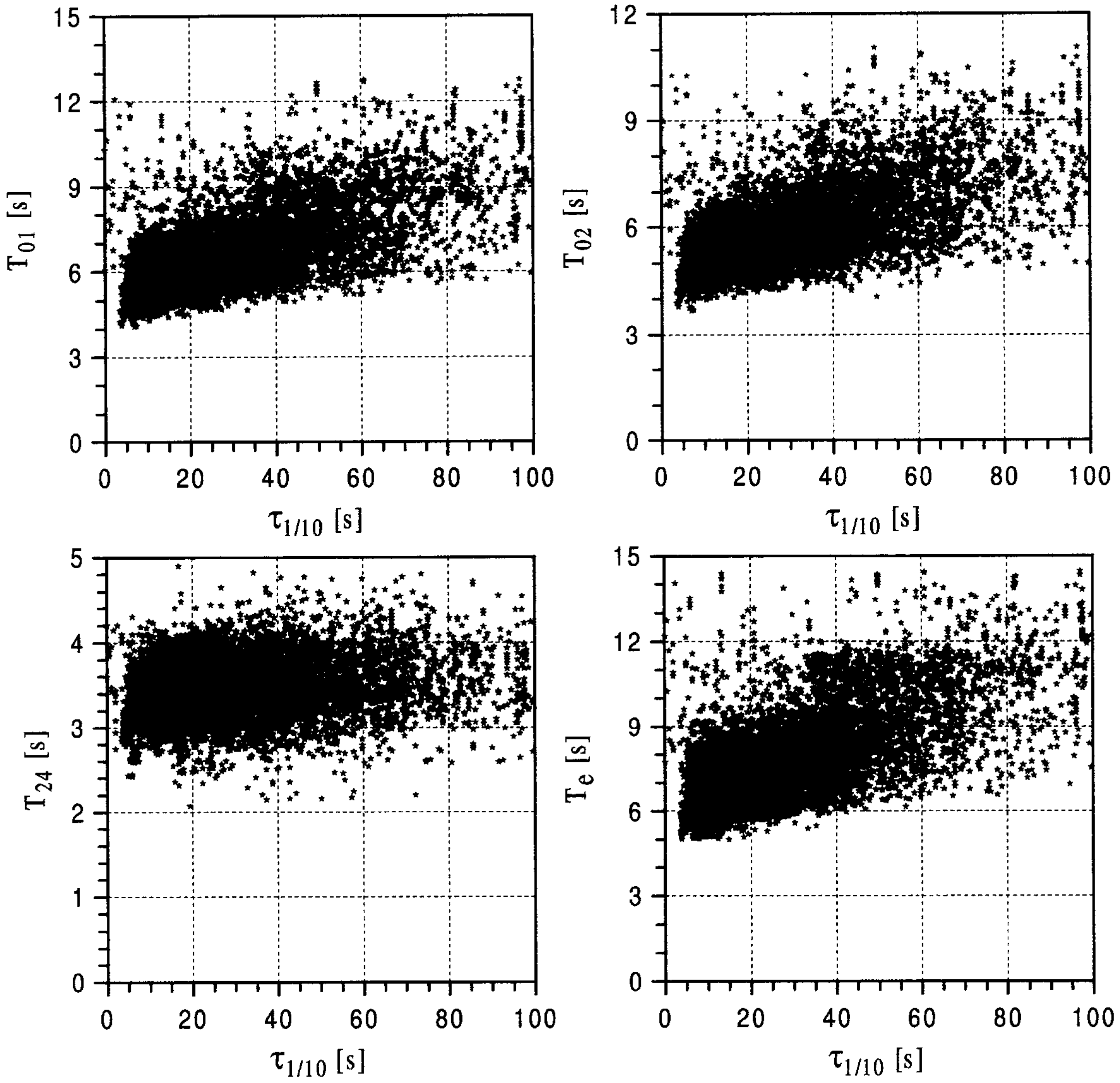

Figura 5.34: Relación entre $\tau_{1/10}$ y los periodos espectrales T_{01}, T_{02}, T_{24}, T_e; (boya LP-I, 1992).

Capítulo 6

Distribución de alturas y periodos de ola en mares mixtos

En este capítulo se examina el comportamiento estadístico de los dos parámetros del oleaje de mayor interés práctico, es decir, las alturas de ola y los periodos, definidos en la sección [2.1.2]. Tal como se comentó en dicha sección, estos parámetros suministran información sobre el contenido energético del oleaje y su distribución en el tiempo, de modo que el conocimiento de su distribución estadística resulta vital en cualquier tipo de aplicación práctica en campos como la Ingeniería de Costas.

En particular, la distribución probabilística de la alturas de ola juega un papel fundamental en todas las aplicaciones de ingeniería de costas, debido a su importancia en cuestiones como el estudio de la estabilidad de las estructuras, la evaluación del transporte de sedimentos en playas y plataformas costeras, la dispersión de contaminantes, etc. Del mismo modo, en dichas aplicaciones no suele ser suficiente con conocer los esfuerzos a los que se ve sometida una estructura determinada, sino que resulta de enorme interés conocer la periodicidad con la que se ejercen tales esfuerzos y, de forma muy especial, si los mismos tienen una periodicidad próxima al periodo natural de oscilación del sistema, o a alguno de sus multiplos o submultiplos, de forma que la estructura pueda verse sometida a un fenómeno de resonancia, con las consecuentes repercusiones que ello puede acarrear.

Tal como se ha comentado en capítulos anteriores, la estructura probabilística de los distintos parámetros característicos del oleaje, especialmente la altura y el periodo de ola, correspondientes a sistemas de oleaje simple o unimodal, han sido ámpliamente estudiadas y son relativamente bien conocidas, principalmente en el caso de registros de oleaje con anchura de banda espectral estrecha. Sin embargo, ya se ha comentado sobradamente en capítulos anteriores que no todos los estados de mar presentan sólo un pico y una anchura de banda espectral estrecha o finita, sino que, con bastante frecuencia, un estado de mar es debido a la coexistencia de varios sistemas de oleaje. En particular, el oleaje generado localmente por el viento suele desarrollarse en presencia de un oleaje de fondo de baja frecuencia procedente de tormentas distantes.

En contraste con el conocimiento relativamente adecuado que existe en relación con las características probabilísticas de los campos de oleaje con espectro unimodal, las propiedades estadísticas de los estados de mar mixtos todavía no han sido investigadas en profundidad y, en consecuencia, su conocimiento dista considerablemente del nivel deseable. Por ello, en este capítulo se analizan los comportamientos probabilísticos de las alturas y los periodos del oleaje en estados de mar resultantes de la combinación de un oleaje de viento y un swell.

Naturalmente, para la caracterización adecuada del comportamiento estadístico de estos parámetros se requiere disponer de registros de duración elevada, de modo que en los mismos exista un número considerablemente alto de alturas y periodos, con el fin de poder obtener distribuciones empíricas adecuadas. Sin embargo, por otro lado, dichos registros deben satisfacer la condición de estacionariedad, de modo que debido a la variabilidad natural de las condiciones climáticas, su duración está limitada, generalmente, a unas pocas horas. En consecuencia, en la naturaleza resulta prácticamente imposible obtener registros que satisfagan los dos requerimientos antes citados. Por ello, en este estudio se ha optado por recurrir al único procedimiento alternativo para satisfacer conjuntamente dichas condiciones, es decir, la simulación. En particular, se hace uso de las técnicas de simulación numérica descritas en la sección [2.2] y, en concreto, de la metodología de las amplitudes espectrales no deterministas (NSA).

6.1 Simulación y análisis de datos

La metodología NSA permite generar registros de oleaje sintéticos de gran longitud, que satisfacen las condiciones de Gaussianidad y estacionariedad. Mediante este procedimiento se han obtenido 100 realizaciones a partir de cada espectro objetivo, con series de $N = 8192$ datos con un intervalo de muestreo de $\Delta t = 0.5s$. De esta forma, cada serie tiene una duración de $T_d = 4096s \approx 68.3min$.

Además, los registros pueden ser sintetizados a partir de cualquier espectro inicial, u objetivo, tanto definido teóricamente como obtenido experimentalmente. En este estudio se ha empleado como espectro objetivo el modelo espectral más utilizado en la actualidad, desde el punto de vista práctico, para caracterizar el espectro de estados de mar mixtos, es decir, el modelo propuesto por Ochi & Hubble (1976) con seis parámetros libres, descrito en la sección [4.1.1], y dado por (4.15).

Los seis parámetros libres de este modelo son la altura de ola significativa, H_s, la frecuencia de pico, f_p, y el parámetro de forma espectral, λ, cada uno de éstos asociados con cada una de las dos bandas de frecuencia correspondientes a los sistemas de oleaje de baja y alta frecuencia.

Eligiendo de forma adecuada estos seis parámatros se han generado nueve espectros objetivo con diferente estructura bimodal. Los valores de dichos parámetros seleccionados para obtener los nueve espectros objetivos se muestran en la tabla 6.1.

Los nueve estados de mar caracterizados por estos espectros se han agrupado en tres categorias en términos de dos parámetros adimensionales. Uno de estos parámetros es la relación entre la energía asociada a cada sistema de oleaje o *Sea-Swell Energy Ratio* (SSER), introducido por Rodríguez & Guedes Soares (1999) y definido anteriormente por (4.100), y que puede expresarse como la relación entre el momentro espectral de orden cero (equivalente a la varianza o a la energía) de la banda de frecuencia del oleaje de viento y el momento de orden cero de la parte del espectro correspondiente a un campo de oleaje de fondo, es decir,

Tabla 6.1: Parámetros libres seleccionados para representar los sistemas de oleaje de viento y de fondo en un estado de mar bimodal mediante un model espectral de Ochi-Hubble.

Estado de mar Clase	$H_{s_{sw}}$ (m)	$H_{s_{ws}}$ (m)	$f_{p_{sw}}$ (Hz)	$f_{p_{ws}}$ (Hz)	λ_{sw}	λ_{ws}
Ia	5.5	3.5	0.070	0.110	3.0	6.5
IIa	6.5	2.0	0.070	0.150	3.5	4.0
IIIa	5.5	3.5	0.045	0.155	3.0	6.0
Ib	2.0	6.5	0.070	0.110	3.0	6.5
IIb	2.0	6.5	0.070	0.150	4.0	3.5
IIIb	2.0	6.5	0.045	0.155	2.0	7.0
Ic	4.1	5.0	0.070	0.110	2.1	2.5
IIc	4.1	5.0	0.070	0.150	2.1	2.5
IIIc	4.1	5.0	0.045	0.155	2.1	2.5

$$SSER = \left(\frac{m_{0_{ws}}}{m_{0_{sw}}}\right) \tag{6.1}$$

donde los subíndices sw y ws se refieren a los parámetros del oleaje de fondo y de viento, respectivamente.

Nótese que, teóricamente, dicho parámetro puede tomar valores entre 0 e infinito. Así, en función de dicho parámetro, aquellos campos de oleaje que tienen un valor de SSER menor que uno representan un estado de mar dominado por el oleaje de fondo y los que presentan un valor de SSER mayor que uno corresponden a la categoría de aquellos en los que domina el oleaje de viento. Si el valor de SSER es próximo a uno entonces están incluidos en la categoría de estados de mar con dos picos espectrales de energía equivalente. Estas tres categorías se han denotado con las letras a, b y c, respectivamente, tal como se muestra en la columna 2 de la tabla 6.2.

El otro parámetro adimensional utilizado representa la frecuencia de separación entre las frecuencias de los picos espectrales, f_p, correspondientes al oleaje de fondo y de viento, denominada Distancia Intermodal (ID) (Rodríguez & Guedes Soares, 1999), cuya expresión viene dada por

$$ID = \left(\frac{f_{p_{ws}} - f_{p_{sw}}}{f_{p_{ws}} + f_{p_{sw}}} \right) \tag{6.2}$$

Este parametro tiene un rango de variación entre 0 y 1. Así, en función de este parámetro, cada uno de los tres tipos de estado de mar antes citados puede dividirse en otras tres subcategorías o grupos. Aquellos campos de oleaje con valores de ID próximos a cero corresponden a estados de mar en los que los picos espectrales del oleaje de fondo y de viento están muy próximos, si el valor de ID toma un valor próximo a uno, representa estados de mar en los que los sistemas de oleaje de fondo y de viento presentan picos espectrales en zonas muy diferentes de frecuencia, es decir, están considerablemente separados. Por último, aquellos campos de oleaje que presentan valores de ID intermedios se incluyen en el grupo de estados de mar con dos picos cuyas frecuencias espectrales modales están moderadamente separadas. Estos tres grupos se denotan con I, II, y III respectivamente tal y como se indica en la columna 3 de la tabla 6.2.

De este modo, la combinación de las características de los campos de oleaje descritas con anterioridad en función de ID y de SSER da lugar a nueve clases de estados de mar los cuales son representativos de un gran porcentaje de los espectros bimodales que pueden observarse en el mar. Los espectros de estos nueve tipos de estados de mar se muestran en la figura 6.1 y sus correspondientes valores de ID y SSER se dan en la tabla 6.2. En dicha tabla se muestran, además de los valores de estos parámetros, los valores medios de los parámetros de anchura de banda espectral, ϵ y ν, el valor del primer mínimo de la función de autocorrelación normalizada de la elevación de la superfie del mar, ρ, y el parámetro de correlación entre dos amplitudes consecutivas de la envolvente del registro de oleaje, κ, correspondiente a cada grupo de 100 registros simulados para cada tipo de estado de mar. Nótese que ambos parámetros de anchura de banda espectral aumentan con la distancia intermodal, pero no se observa una relación directa con los demás parámetros.

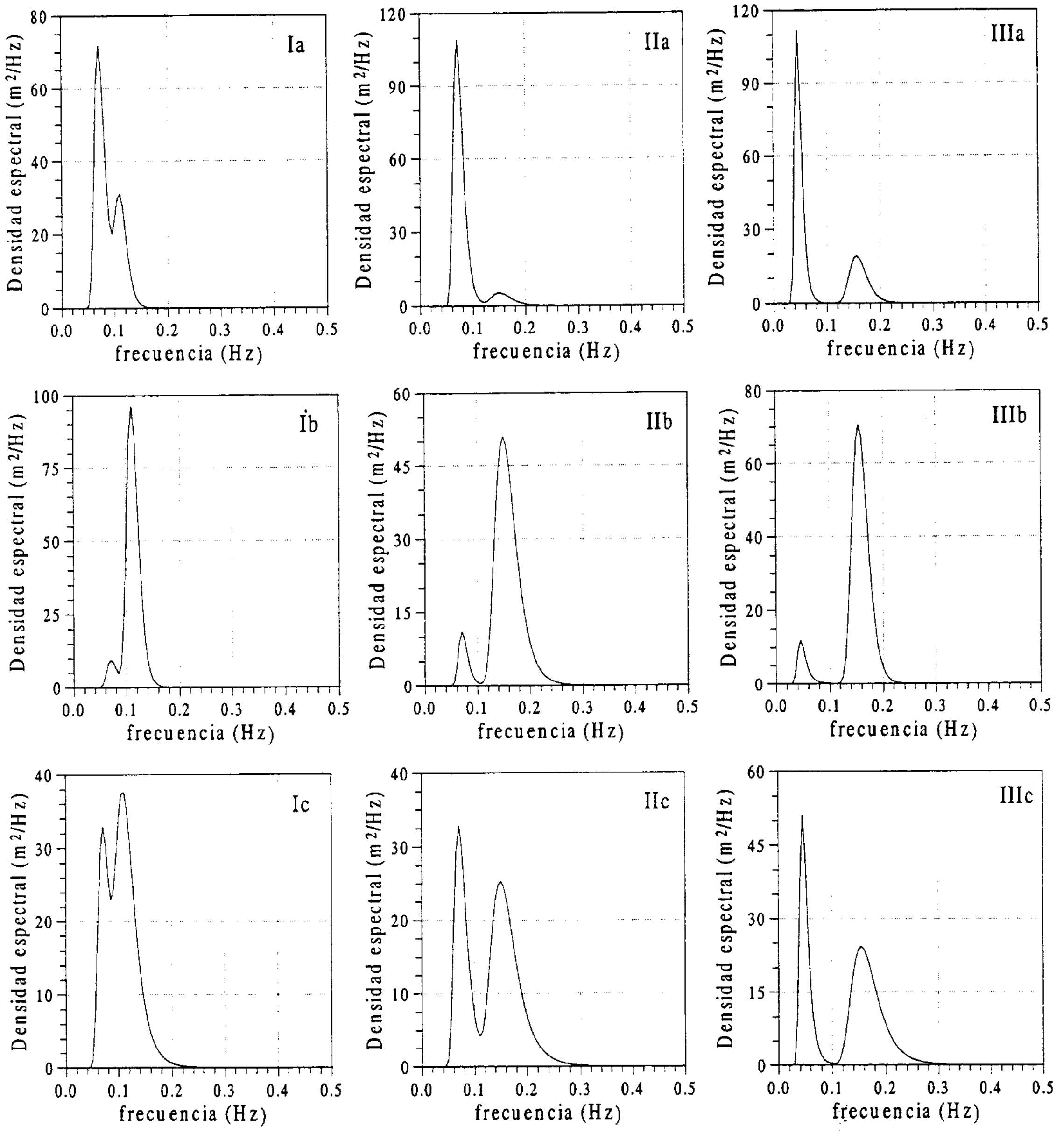

Figura 6.1: Espectros objetivos asociados con cada uno de los nueve grupos de estados de mar utilizados para examinar las distribuciones de probabilidad de alturas y periodos de ola. Los parámetros libres de cada espectro se muestran en la tabla 6.1.

Tabla 6.2: Parámetros de forma utilizados para caracterizar los estados de mar con espectros bimodales, y valores medios de los parámetros de anchura de banda espectral de los registros simulados para cada espectro objetivo.

Estado de mar Categoría		Estado de mar Grupo	ID	SSER	ϵ	ν	ρ	κ
Estado de mar		I	0.220	0.800	0.45	0.24	-0.74	0.75
dominado por	a	II	0.364	0.555	0.65	0.32	-0.76	0.78
oleaje de fondo		III	0.550	0.800	0.77	0.65	-0.80*	0.49
Estado de mar		I	0.220	1.800	0.27	0.15	-0.90	0.91
dominado por	b	II	0.364	1.800	0.37	0.22	-0.80	0.81
oleaje de viento		III	0.550	1.800	0.32	0.23	-0.82	0.82
Sistema mixto		I	0.220	1.100	0.50	0.28	-0.70	0.71
energía	c	II	0.364	1.220	0.58	0.38	-0.50	0.51
equivalente		III	0.550	1.100	0.62	0.52	-0.27	0.22

*Mínimo absoluto en lugar del primer mínimo

Para poder realizar una estimación de la distribución de probabilidad empírica estadísticamente fiable, se han simulado 100 realizaciones a partir de cada espectro objetivo. Los registros resultantes para cada uno de los 9 tipos de estados de mar considerados han sido analizados empleando el criterio de pasos ascendentes por cero para definir las alturas y los periodos de ola individuales. De esta forma se han obtenido más de 10000 olas para cada uno de los nueve tipos estados de mar. En consecuencia, el tamaño de la muestra resulta apropiado para llevar a cabo una comparación estadística con modelos teóricos.

Las distribuciones empíricas correspondientes a cada tipo de oleaje bimodal se han generado agrupando en un único histograma todas las alturas obtenidas a partir de los registros generados para cada clase de estado de mar. Procediendo de forma análoga con los periodos se han obtenido nueve histogramas experimentales de dicho parámetro. Una vez obtenidas las distribuciones de probabilidad empíricas, se ha procedido a examinar de forma detallada la estructura de cada una de ellas, y a realizar una comparación con los modelos teóricos propuestos por diversos autores para caracterizar la estructura probabilística de dichos parámetros en condiciones de oleajes unimodales, con el fin de conocer la validez relativa de los mismos para caracterizar las distribución estadística correspondiente a cada uno de los parámetros examinados.

En las siguientes secciones se introducen, de forma breve, los modelos teóricos de mayor interés práctico propuestos por diferentes autores para caracterizar la estructura estadística de las alturas y los periodos del oleaje.

6.2 Modelos probabilísticos de alturas y periodos de ola

6.2.1 Modelos probabilísticos de alturas de ola

Hasta el momento, se han propuesto varios modelos teóricos y empíricos para caracterizar la distribución de probabilidad de las alturas de ola. A continuación se introducen los modelos más relevantes, basados en el criterio de altura de ola de paso ascendente, y se examina su utilidad para predecir la distribución de altura de ola en estados de mar mixtos.

Longuet-Higgins (1952) estableció que en un proceso estacionario, Gaussiano y de anchura de banda espectral muy pequeña, la altura de ola se puede considerar como el doble de la amplitud de la envolvente, y que estas alturas se distribuyen de acuerdo con una distribución de probabilidad de Rayleigh. Es decir,

$$P(\xi > \xi_0) = \exp\left(-\frac{\xi_0^2}{8m_0}\right) \tag{6.3}$$

donde las alturas de ola están normalizadas de la forma

$$\xi = \frac{H}{\sqrt{m_0}} \tag{6.4}$$

La anchura de banda espectral del proceso se define mediante el parámetro, denotado en el capítulo anterior como ν_{LH}, es decir,

$$\nu = \left(\frac{m_0 m_2}{m_1^2} - 1\right)^{1/2} \tag{6.5}$$

Sin embargo, incluso para un proceso de banda estrecha ($\nu \to 0$) la suposición de que la altura de ola es el doble de la amplitud de la envolvente, no es totalmente exacta, debido a la estructura modulada del proceso de banda estrecha y al tiempo de desfase entre una cresta y el seno adyacente. Varios autores han sugerido que las alturas de ola se ajustan de una forma más adecuada a otras leyes probabilísticas tales coma la distribución de Weibull, la cual, para la altura de ola normalizada, se puede expresar como

$$P(\xi > \xi_0) = \exp\left(-\frac{\xi_0^\alpha}{\beta m_0}\right) \tag{6.6}$$

donde α y β son parámetros a determinar usando algún procedimiento de ajuste de datos empíricos. Forristall (1978) utilizó datos registrados en el Golfo de Méjico durante huracanes y obtuvo una buena correlación entre la distribución de Weibull y los datos observados para $\alpha = 2.126$ y $\beta = 8.42$.

Posteriormente, Longuet-Higgins (1980) mostró que los datos examinados por Forristall (1978) podían ajustarse mejor introduciendo el efecto de la anchura de banda espectral finita en la relación entre la raiz cuadrática media de la amplitud y el momento de orden cero. De esta forma la distribución de la probabilidad de excedencia adopta la forma

$$P(\xi > \xi_0) = \exp\left[-\frac{\xi_0^2}{8(1 - 0.734\nu^2)}\right] \tag{6.7}$$

Esta distribución mejora las predicciones dadas por la distribución de Rayleigh. Sin embargo, esta mejora no es tan relevante, por ello no se ha incluido en el estudio comparativo.

Naess (1985) obtuvo una expresión para la altura de ola según el criterio de criterio de crestas y senos para un tren de ondas estacionario, Gaussiano y de banda estrecha dada por

$$P(\xi > \xi_0) = \exp\left[-\frac{\xi_0^2}{4(1-\rho(\tau/2))m_0}\right] \tag{6.8}$$

donde, tal como se ha visto previamente, $\rho(\tau/2)$ representa el valor del primer mínimo de la función de autocorrelación normalizada de la elevación de la superficie del mar, de manera que

$$\rho(\tau/2) = \frac{R(\tau/2)}{R(0)} \tag{6.9}$$

Los valores medios de ρ correspondiente a cada grupo de 100 registros de oleaje simulados para cada tipo de estado de mar se da en la tabla 6.2. Nótese que en el límite, cuando la anchura de banda espectral tiende a cero, esta distribución converge a una distribución de Rayleigh. Vinje (1989) reaizó una modificación adicional de la distribución de Rayleigh introduciendo una expansión asintótica de la distribución de probabilidad de alturas de ola cuya expresión es equivalente a la dada por Naess (1985), pero multiplicada por el siguiente factor de corrección

$$\gamma = \left(\frac{1+\rho}{2\rho}\right)^{1/2} \tag{6.10}$$

De esta forma, la distribución de probabilidad de excedendia viene dada por

$$P(\xi > \xi_0) = \gamma \exp\left[-\frac{\xi_0^2}{4(1-\rho(\tau/2))m_0}\right] \tag{6.11}$$

Es importante resaltar que este modelo tiene la desventaja de asignar probabilidades mayores que 1 para alturas de ola normalizadas pequeñas.

En una serie de trabajos Tayfun (1981, 1983) abordó el problema de la distribución de altura de ola teniendo en cuenta el hecho de que la cresta y el seno de una ola no ocurren al mismo tiempo. En lugar de la suposición convencional de que la altura de ola es el doble de la amplitud de la envolvente, consideró que en el caso de un espectro cuya anchura de banda no fuera estrecha, la altura de ola definida como la distáncia vertical entre crestas y senos consecutivos venía dada por la suma de los valores de la envolvente separados por la mitad del periodo, aproximadamente. Sin embargo, la evaluación de la distribución de probabilidad teórica resultante requiere ser evaluada numéricamente, motivo por el cual ésta no ha sido adoptada entre las distribuciones empleadas en la práctica.

Tayfun (1990) desarrolló una aproximación asintótica para obtener expresiones cerradas más fáciles de evaluar y de utilizar en aplicaciones prácticas, aunque su utilidad está restringida a las alturas de ola mayores que la altura de ola media. Dicho autor obtuvo dos aproximaciones que representan los límites superior e inferior de la distribución teórica original en el rango de las alturas de ola mayores que la altura de ola media. La expansión asintótica para la probabilidad de excedencia representa el promedio algebraico de estos límites, dado por

$$P(\xi > \xi_0) = \left(1 + \frac{1-\kappa^2}{4\kappa\xi_0^2}\right)\left(\frac{1+\kappa}{2\kappa}\right)\exp\left[-\frac{\xi_0^2}{4(1+\kappa}\right] \tag{6.12}$$

donde, tal como se ha visto en capítulos anteriores,

$$\kappa = \frac{1}{m_0}\left[\left(\int_0^\infty S(f)cos(2\pi f)df\right)^2 + \left(\int_0^\infty S(f)sen(2\pi f)df\right)^2\right]^{1/2} \tag{6.13}$$

es un parámetro que cuantifica la correlación entre dos amplitudes consecutivas de la envolvente del registro de oleaje, asumiendo que están separadas temporalmente por la mitad del periodo medio de pasos ascendentes por cero, es decir, $\tau \approx T_{02}/2 = 1/2(m_0/m_2)^{1/2}$. Los valores medios de κ correspondientes a cada uno de los grupos de 100 registros simulados para cada estado de mar se muestran en la tabla 6.2. Es importante señalar que un modelo teórico propuesto por Lindgren y Rychlik (1982) ha sido utilizado para caracterizar la distribución conjunta de alturas y periodos de ola (Rodríguez y Guedes Soares, 1999), sin embargo la distribución marginal correspondiente no ha sido utilizada en el estudio comparativo debido a la complejidad de su evaluación, hecho por el cual dicho modelo no resulta útil para usos prácticos, como en el caso de la distribución original propuesta por Tayfun (1981).

6.2.2 Modelos probabilísticos de periodos de ola

La función de densidad de probabilidad de las alturas de ola ha recibido tradicionalmente más interés que la de los periodos. Esto es debido a la dificultad intrínseca de determinar las distribuciones de los periodos de ola, incluso aún asumiendo un oleaje lineal con un esprectro de banda estrecha.

Bretschneider (1959) basándose en la suposición de que el cuadrado de los periodos sigue una ley de distribución de Rayleigh, sugirió la siguiente función de densidad de probabilidad adimensional, que en adelante denotaremos como B59,

$$p(\tau) = 4\tau^3 \exp(-\tau^4) \tag{6.14}$$

donde τ es el periodo normalizado con la raiz cuadrada de la raiz cuadrática media de T^2.

El procedimiento más común para obtener la densidad de probabilidad de los periodos de ola es considerándola como la distribución marginal de la distribución conjunta de alturas y periodos. Este método fue presentado por Longuet-Higgins (1975), partiendo de la suposición de anchura de banda espectral estrecha. La expresión de la distribución marginal de periodos de ola dada por este autor, a partir de ahora denotada como LH75, viene dada por,

$$p(\tau) = \frac{\nu^2}{2[\nu^2 + (\tau - 1)^2]^{3/2}} \tag{6.15}$$

siendo ν el parámetro de anchura de banda espectral definido en (6.7). Los periodos han sido normalizados como

$$\tau = \frac{Tm_1}{m_0} \tag{6.16}$$

Cavanie et al. (1976) obtuvieron otra expresión para la distribución de los periodos de ola, que denotaremos como CAE76. Estos autores utilizaron como punto de partida la distribución de alturas de crestas de ola para deducir la distribución conjunta de alturas y periodos de ola. La distribución marginal teórica de los periodos de ola dada por estos autores tiene la siguiente expresión

$$p(\tau) = \frac{\alpha^3\beta^2\tau}{\left[(\tau^2 - \alpha^2)^2 + \alpha^4\beta^2\right]^{3/2}} \tag{6.17}$$

donde

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1-\epsilon^2}\right)$$
$$\beta = \frac{\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$$

y, tal como se vió en el capítulo anterior,

$$\epsilon = \left(1 - \frac{m_2^2}{m_0 m_4}\right)^{1/2} \tag{6.18}$$

es el parámetro de anchura de banda espectral. Nótese que el periodo adimensional viene dado por

$$\hat{\tau} = \bar{\zeta}\tau = \bar{\zeta}\frac{T m_1}{m_0} \tag{6.19}$$

donde $\bar{\zeta}$ es una función que depende de el parámetro de anchura de banda espectral ϵ, que toma valores próximos a 1 para valores de ϵ entre 0 y 0.95, por lo que resulta razonable admitir la aproximación $\bar{\zeta} = 1$.

El modelo LH75 muestra una simetria de los periodos con respecto al periodo medio de paso ascendente por cero, lo cual implica la no existencia de correlación entre las alturas y los periodos de ola individuales. Sin embargo, la experiencia demuestra que la distribución conjunta de alturas y periodos de un registro de oleaje con anchura de banda espectral finita presenta una clara asimetría en torno a este periodo, principalmente para valores pequeños de altura. Para eliminar esta inconsistencia, Longuet-Higgins (1983) revisó su modelo y presentó una aproximación alternativa a partir de la cual se obtiene la siguiente distribución marginal para los periodos de ola, que en adelante denotaremos por LH83,

$$p(\tau) = \left(1 + \frac{\nu^2}{4}\right)\frac{1}{2\nu\tau^2}\left[1 + \left(1 - \frac{1}{\tau}\right)^2 \frac{1}{\nu^2}\right]^{-3/2} \tag{6.20}$$

Goda (1978) examinó registros de oleaje experimentales clasificándolos en función del coeficiente de correlación entre alturas y periodos de ola individuales, r_{HT} y comparó la distribución de probabilidad observada para los periodos con los modelos teóricos LH75 y CAE76. Este autor observó que los dos modelos daban resultados notablemente adecuados para valores del parámetro de anchura de banda espectral pequeños. Sin embargo, al aumentar este parámetro, los valores de la distribución observada se desviaban gradualmente de lo modelos teóricos. Por otro lado, de acuerdo con los resultados experimentales presentados por Shum y Melville (1984) el modelo LH83 parece proporcionar un ajuste adecuado.

Otros modelos teóricos interesantes para la distribución de periodos de ola obtenido a partir de la distribución conjunta de alturas y periodos son los propuestos por Lidgren y Rychlik (1982) y por Tayfun (1993). Sin embargo, el modelo de Lindgren y Rychlik no está basado en el criterio de paso ascendente por cero para determinar los periodos de ola. Además, su evaluación debe ser realizada numéricamente, tal como se comentó anteriormente, mientras que la distribución de Tayfun solamente es válida para periodos asociados a olas con una altura de ola mayor que la altura de ola media.

Myrhaugh y Slaattelid (1999), basándose en el comportamiento de la distribución experimental de los periodos de ola representada en escala de Weibull presentado por Myrhaugh y Rue (1998), proponen una función de distribución de Weibull biparamétrica, que denotaremos en adelante por MS99, y que tiene la expresión

$$P_1(\tau) = 1 - exp\left[-\left(\frac{\tau}{\alpha}\right)^{\beta}\right] \quad ; \quad 0 \leq \tau \leq \tau_c \tag{6.21}$$

$$P_2(\tau) = 1 - exp\left[-\left(\frac{\tau}{\alpha}\right)^{\kappa}\right] \quad ; \quad \tau > \tau_c \tag{6.22}$$

donde α, β y κ son los parámetros de Weibull, y τ_c es el punto de intersección entre $P_1(\tau)$ y $P_2(\tau)$, dado por

$$\tau_c = \left(\frac{\alpha^{\beta}}{\rho^{\kappa}}\right)^{\frac{1}{\beta-\kappa}} \tag{6.23}$$

Myrhaug y Rue (1998) compararon registros de oleaje observados con los modelos B59, LH75, LH83, y CAE76, y obtuvieron que la distribución que presentaba un mejor ajuste con los datos experimentales era la B59.

6.3 Análisis de las distribuciones empíricas

6.3.1 Distribuciones de alturas de ola

En la figura 6.2 se muestran las distribuciones de probabilidad de excedencia empíricas correspondientes a estados de mar dominados por el oleaje de fondo, SSER< 1, con los valores de ID aumentando de izquierda a derecha. Conjuntamente con ésta se muestran los modelos teóricos para las alturas de ola comentados anteriormente. Como puede observarse, la distribución de Rayleigh presenta valores superiores a la distribución experimental para alturas de ola mayores que la altura de ola media ($\langle\xi\rangle \approx 2.5$), esto ocurre incluso en el caso en el que el valor de la anchura de banda espectral es más pequeño (Ia). Para esta clase de estado de mar, los modelos de Naess y Vinje y la expansión asintótica de Tayfun dan mejores ajustes con la probabilidad obtenida empíricamente, mientras que la distribución de Weibull muestra una pequeña desviación que aumenta con la altura, infraestimando los valores observados.

Para valores intermedios de ID (IIa) todos los modelos excepto el de Rayleigh presentan un buen ajuste para alturas de ola menores que el doble de la altura de ola media. Sin embargo, para valores superiores, en general, todos los modelos sobrepredicen considerablemente la altura de ola. Cuando el valor de ID aumenta (IIIa) prácticamente todos los modelos asignan valores a la probabilidad mayores que las observadas, incluso para alturas de ola por debajo de la altura de ola media. No obstante, la expansión asintótica de Tayfun tiende a presentar un mejor ajuste para valores relativamente altos de la altura de ola, aunque esta tendencia disminuye para los valores muy altos de ésta.

Es importante resaltar que la notable desviación observada para los modelos de Naess y Tayfun en este caso es debida a los valores tan bajos de ρ. El valor dado en la tabla 6.2 (-0.8) aparece marcado con un asterisco ya que no corresponde al primer mínimo de ρ sino al mínimo absoluto, en este caso el primer mínimo tiene un valor de +0.06 y los resultados obtenidos con éste dan lugar a resultados muy pobres, motivo por el cual no han sido mostrados. Al utilizar el valor del mínimo absoluto, los resultados de estas distribuciones mejoran considerablemente, pero las

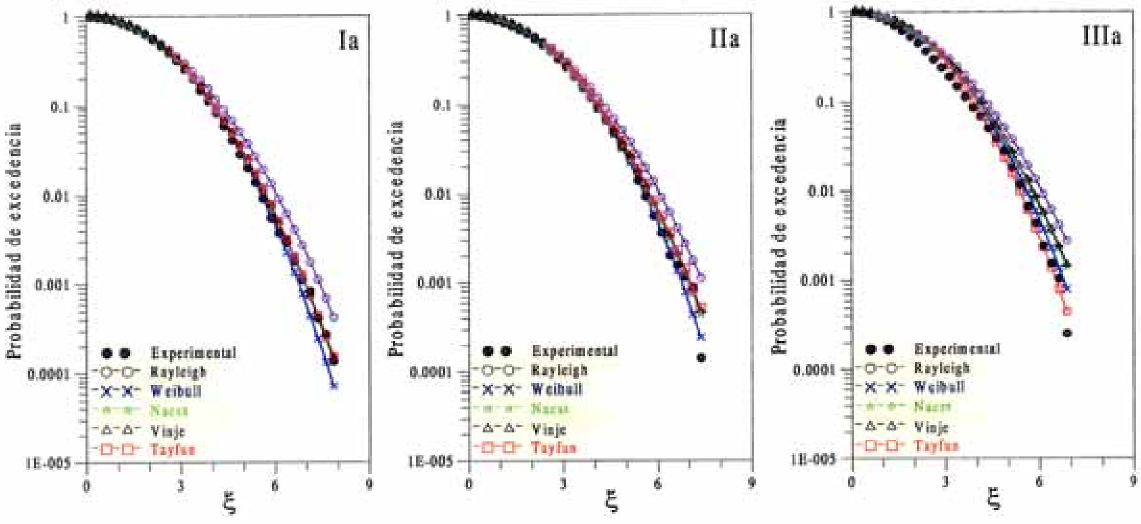

Figura 6.2: Probabilidad de excedencia observada para estados de mar dominados por un oleaje de fondo y probabilidades predichas por los modelos de Rayleigh, Weibull, Naess, Vinje y Tayfun.

desviaciones son todavía significativas.

Los resultados obtenidos para valores bajos e intermedios de ID están de acuerdo con los presentados por Rodríguez (1992) para registros de oleaje medidos en las Islas Canarias. En ese caso, la expansión asintótica de Tayfun no fue utilizada pero los modelos de Naess y Vinje mostraron una buena predicción de las probabilidades observadas.

Para los valores mayores de SSER y el valor de ID es pequeño como en el caso Ib, resulta evidente que ninguno de los modelos es apropiado para caracterizar la probabilidad observada en todo el rango de alturas de ola, tal y como se muestra en la figura 6.3. En la figura se puede observar que mientras que la distribución de Weibull estima valores más bajos para las alturas de ola mayores que el doble de la altura de ola media, los modelos de Naess, Vinje y Tayfun proporcionan resultados mucho mejores para las alturas de ola pequeñas e intermedias. De manera sorprendente, las discrepancias más bajas para las mayores alturas de ola se obtienen con la distribución de Rayleigh, aunque presenta valores ligeramente más altos para las alturas de ola mayores. Es necesario tener en cuenta que en este caso la anchura de

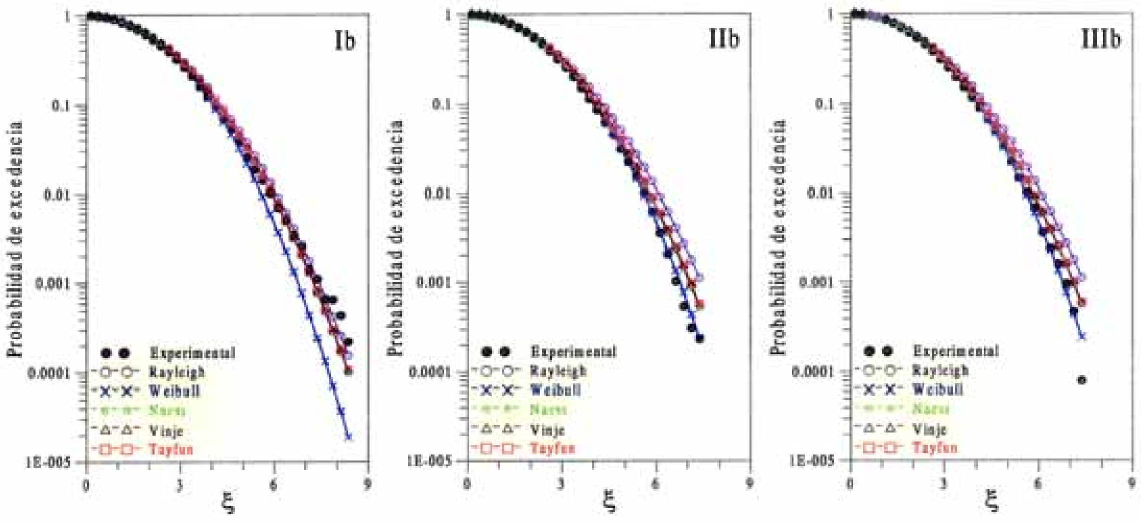

Figura 6.3: Probabilidad de excedencia observada para estados de mar dominados por un oleaje de viento y probabilidades predichas por los modelos de Rayleigh, Weibull, Naess, Vinje y Tayfun.

banda espectral es muy pequeña, correspondiéndose con los mayores valores de ρ y κ.

Estos resultados están de acuerdo con los presentados en diferentes trabajos a partir de medidas experimentales (Goda, 1974) y de simulaciones numéricas (Goda, 1970). De acuerdo con este autor, la aplicabilidad de la distribución de Rayleigh no se ve afectada por la superposición de campos de oleaje de fondo y generados localmente por el viento. A la vista de las figuras presentadas por este autor parece ser que obtuvo esta conclusión a partir del análisis de estados de mar con un oleaje de viento dominante superpuesto a un oleaje de fondo de poca intensidad y de frecuencia muy próxima, como ocurre en este caso. Sin embargo, debe notarse el aumento de la probabilidad en las alturas de ola mayores, infraestimada por todos los modelos a pesar de tener valores de la anchura de banda espectral pequeños.

El aumento de ID da lugar a la sobrestimación observada generalmente para las alturas de ola mayores de la distribución de Rayleigh. Para el caso de valores intermedios de ID (IIb), los otros modelos se ajustan adecuadamente para valores de la altura de ola bajos e intermedios. Sin embargo, cuando aumenta la altura de ola, la distribución de Weibull es la única capaz de ajustar correctamente las probabilidades observadas, excepto para alturas de ola muy grandes, cuya probabilidad de excedencia sufre un rápido descenso y los resultados de todos los modelos sobrestiman los valores observados. Un comportamiento similar puede observarse cuando ID tiene los valores más altos (IIIb). En este caso la distribución de Weibull es capaz de predecir los valores observados para la mayoría de los valores de alturas de ola, aunque el efecto de la disminución de la probabilidad para los valores mas grandes de la altura de ola se intensifica en esta clase de estado de mar.

Los resultados de la superposición de un oleaje de viento con un oleaje de fondo, ambos con un contenido energético equivalente (SSER$\approx$ 1) se muestran en la figura 6.4. Para valores de ID pequeños (Ic) la distribución de Weibull, los modelos propuestos por Naess y Vinje y la expansión asintótica de Tayfun describen de forma oportuna las distribuciones de las alturas de ola observadas en, prácticamente, todo el rango de valores de esta variable, aunque producen estimaciones mayores para el caso de las alturas de ola más altas. Sin embargo la distribución de Rayleigh produce sobrestimaciones significativas que aumentan con el valor de ID, como puede observarse en los casos IIc y IIIc.

En el caso de valores intermedios de ID (IIc), todos los modelos tienden a sobrepredecir la probabilidad de excedencia observada para las alturas de ola para mayores del doble de la media. Por debajo de la media de altura de ola normalizada, la expansión asintótica de Tayfun y los modelos de Vinje y Naess muestran ajustes aceptables pero con ligeras desviaciones de los valores observados. En particular, el modelo de Naess da una estimación un poco menor incluso para las alturas de olas más pequeñas, mientras que el modelo de Vinje toma valores significativamente mayores que 1 en este rango de alturas. Estos efectos se acentuan al aumentar el valor de ID (IIIc), intensificándose también la sobrestimación dada por las distribuciones de Rayleigh y de Weibull. Sin embargo es interesante hacer notar que mientras que la expansión asintótica de Tayfun y el modelo de Vinje producen ajustes bastante aceptables en el rango de las alturas de ola intermedias y altas, éstos y el modelo de Naess tienden a ajustar de forma adecuada la parte superior de la distribución empírica de alturas de ola.

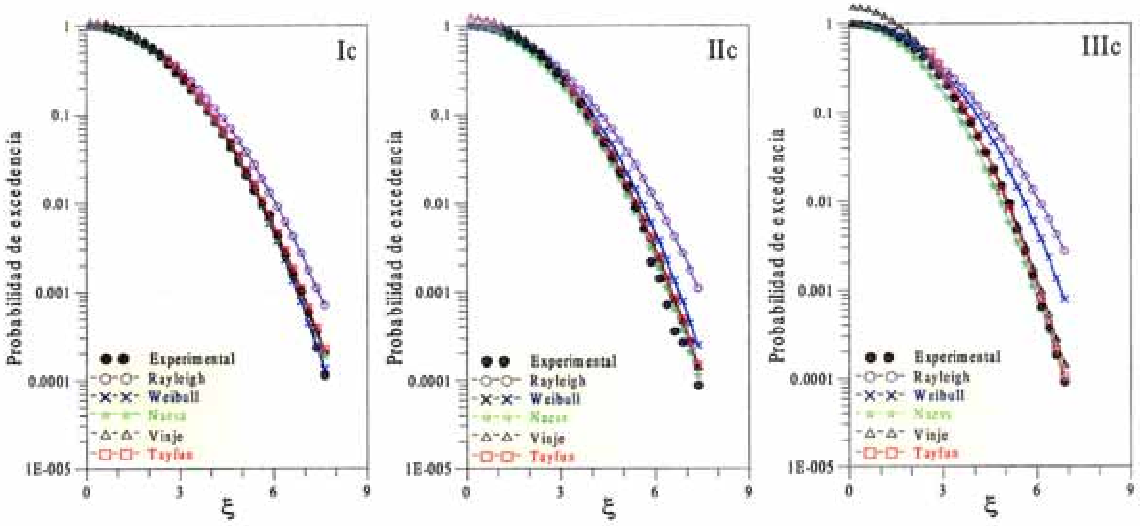

Figura 6.4: Probabilidad de excedencia observada para estados de mar con oleajes de viento y de fondo de energía equivalente y probabilidades predichas por los modelos de Rayleigh, Weibull, Naess, Vinje y Tayfun.

Para poder entender el comportamiento anómalo de los modelos de Naess y Vinje en los casos (IIIa), (IIc) y (IIIc) es necesario tener en cuenta los valores tan bajos que toma ρ en estas clases de estados de mar. Hay que recordar que el primer mínimo de ρ en (IIIa) se substituyó por el mínimo absoluto. En los casos (IIc) y (IIIc) ρ toma valores muy pequeños, mientras que la anchura de banda espectral aumenta y κ disminuye, tomando un valor muy pequño (0.22) en el último caso.

Es importante recordar que los parámetros ρ y κ fueron introducidos para el estudio de oleajes generados por el viento en estados de mar unimodales. Naess (1985) mostró que los valores de ρ para un espectro de oleaje típicamente unimodal estaban comprendidos entre 0.65 y 0.8 aproximadamente. Por otro lado, Forristall (1984) analizó datos registrados durante huracanes en el Golfo de Méjico, probablemente correspondientes a oleajes en generación que podrían tener o no una componente energética de oleaje de fondo (Forristall, 1978), y observó que los valores del parámetro de correlación κ estaban comprendidos en el rango 0.5-0.85 aproximadamente. Así, en estos casos, los valores de ρ y κ están claramente fuera o en los límites de los rangos esperados para un estado de mar con un espectro unimodal.

Examinando los valores de ν, ρ y κ dados en la tabla 6.2, resulta evidente que los inesperados valores de ρ y κ no tienen un efecto directo sobre la anchura de banda espectral. Sin embargo, lo que si tiene un efecto claro sobre estos parámetros es el aumento de ID para estados de mar mixtos con una componente de oleaje de fondo muy energética, pero no para aquellos con una componente menos energética. Es decir, la superposición de un oleaje de fondo con un bajo contenido energético con un oleaje de viento dominante da lugar a un aumento en la correlación entre crestas y senos consecutivos, mientras que el efecto contrario se observa en estados de mar en los que la componente de oleaje de fondo es mucho más energética que la del oleaje de viento, especialmente cuando la diferencia entre las frecuencias de pico de ambos campos de oleaje aumenta. Rodríguez y Guedes Soares (2001) han observado este mismo efecto en la distribución conjunta de alturas y periodos.

En definitiva, los resultados muestran que la superposición de un oleaje de fondo con un bajo contenido energético con un oleaje de viento dominante no tiene un efecto importante sobre la distribución de las alturas de ola, al menos cuando se usa el criterio de paso ascendente por cero. Sin embargo, la combinación de un oleaje de viento poco energético con un oleaje de fondo dominante produce un efecto significativo sobre las probabilidades observadas, dando lugar a un aumento de las alturas de ola pequeñas y grandes y a una disminución para los valores intermedios. No obstante, es importante hacer hincapié en el caso especial en el que un estado de mar dominado por un oleaje de viento coexiste con un oleaje de fondo poco energético pero con frecuencias de pico muy próximas. En este caso, hay un aumento de las alturas de ola mayores que exceden las predicciones de los modelos analizados en este estudio.

Por otro lado, la superposición de dos campos de oleaje con diferentes frecuencias dominantes pero con un contenido energético similar, produce una disminución en la probabilidad de las alturas de ola mayores que la altura de ola media y este efecto se acentua más conforme aumenta la distancia intermodal.

Estos resultados están de acuerdo con los publicados por Rodríguez y Guedes Soares (1999, 2001) con respecto a la distribución bimodal de alturas y periodos y a la distribución conjunta de alturas de ola sucesivas en estados de mar mixtos. En el primer caso, las grandes desviaciones de las distribuciones bivariades de alturas y periodos fueron observadas también en estados de mar dominados por el oleaje de fondo y en aquellos que presentaban un oleaje de viento y de fondo con un contenido energético similar. En lo referente al comportamiento estadístico de alturas de olas sucesivas observaron que la combinación de un oleaje de viento dominante con un oleaje de fondo de menor relavancia mejoraba la correlación entre alturas de olas consecutivas.

Con respecto a la utilidad relativa de los modelos teóricos utilizados en la práctica para obtener la probabilidad de excedencia de las alturas de ola, ninguno de los modelos examinados en este trabajo es capaz de caracterizar de forma adecuada la distribución observada para todas las clases de estado de mar. La distribución de Rayleigh da lugar a una sobrestimación sistemática con respecto a la alturas de ola observadas. Este modelo, que es el más utilizado en la práctica, es capaz de reproducir la distribución de probabilidad observada sólamente en el caso de un estado de mar dominado por el oleaje de viento y con valores pequeños de la distancia intermodal. La distribución de Weibull resulta útil para ajustar las probabilidades observadas para un estado de mar dominado por el oleaje de viento, excepto en el caso de valores grandes de alturas de ola, para valores de la distancia intermodal altos y moderados. En general los mejores ajustes se obtienen aplicando las probabilidades predichas por los modelos de Naess y Vinje y la expansión asintótica de Tayfun. Sin embargo es necesario remarcar que este último está limitado a la alturas de ola mayores que la altura de ola media y que el modelo de Vinje da lugar a valores no deseados de probabilidad mayores que 1 para valores de la altura de ola pequeños.

6.3.2 Distribuciones de periodos de ola

En las figuras 6.5 y 6.6 se muestran las distribuciones empíricas de los periodos determinadas a partir de los datos simulados. En la figura 6.5 se muestran las distribuciones agrupadas por valores de SSER, es decir, las distribuciones de estados de mar dominados por el oleaje de fondo (a), las de estados de mar dominados por

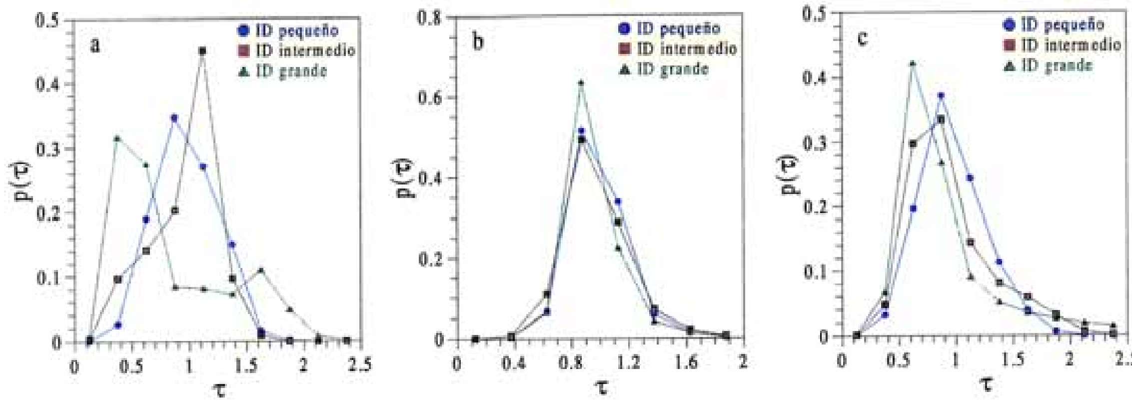

Figura 6.5: Distribuciones empíricas de los periodos de ola para los registros simulados: (a)estado de mar dominado por el oleaje de fondo, (b) estado de mar dominado por el oleaje de viento, (c) estado de mar en el que los oleajes de fondo y de viento tienen un contenido energético equivalente.

el oleaje de viento (b) y las de estados de mar con una cantidad de energía similar para ambos tipos de oleaje (c).

En el caso de los estados de mar dominados por el oleaje de fondo, figura 6.5(a), la distribución presenta un buen comportamiento, con una estructura casi simétrica en el caso de distancias intermodales pequeñas. Sin embargo, conforme aumenta la distancia estre los dos picos espectrales pierde claramente esta simetría y tiende a presentar un comportamiento bimodal para los valores mayores de la distancia intermodal.

En el caso del estado de mar dominado por un oleaje de viento, figura 6.5(b), la forma de la distribución es más regular. En el caso en que ambos sistemas de oleaje presentan un contenido energético equivalente, figura 6.5(c), el efecto de la distancia intermodal se refleja en la traslación de la moda de la distribución hacia periodos más bajos y en un aumento de la asimetría, pero la apariencia de la distribución sigue siendo todavía bastante regular.

La figura 6.6 muestra las mismas distribuciones empíricas, pero en este caso agrupadas según el valor de la distancia intermodal. Para valores pequeños de la distancia intermodal (I), las distribuciones presentan una forma bastante regular y

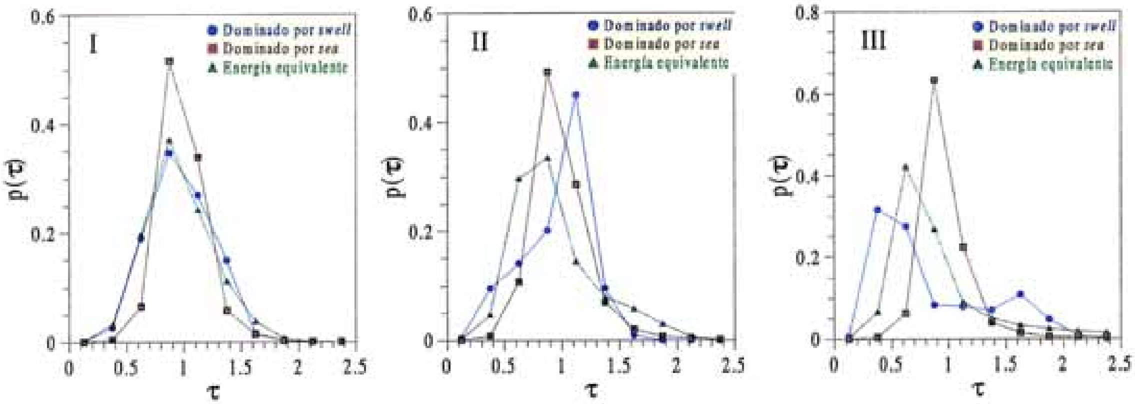

Figura 6.6: Distribuciones empíricas de los periodos de ola para los registros simulados para estados de mar con un valor de la distancia intermodal (a) pequeño, (b) intermedio, (c) grande.

tienden a ensancharse ante la presencia del oleaje de fondo. Cuando la distancia intermodal toma valores intermedios (II) o los más altos (III) sólo la distribución correspondiente al estado de mar dominado por el oleaje de viento presenta una forma regular.

La función de distribución de los periodos de ola dada por los modelos teóricos CAE76 y LH83 que son los más usados en la práctica, ha sido evaluada para cada uno de los nueve grupos de registros de oleaje, usando los valores medios de los parámetros de anchura de banda espectral dados en la tabla 6.2.

Las distribuciones de densidad de probabilidad de los periodos de ola correspondientes a estados de mar dominados por el oleaje de fondo (SSER$<$ 1) se muestran en la figura 6.7 junto con los modelos teóricos CAE76 y LH83, en la que los valores de ID aumentan de izquierda a derecha. Como se puede observar en la figura, ninguno de estos modelos es capaz de caracterizar la distribución de probabilidad de periodos de ola observada. La desviación entre los modelos teóricos y los valores observados aumenta con el valor de la distancia intermodal.

Es interesante resaltar que al aumentar ID la distribución observada tiende a adoptar una estructura bimodal. Esto es debido al hecho de que en estados de mar dominados por el oleaje de fondo las olas de periodo corto y altura pequeña

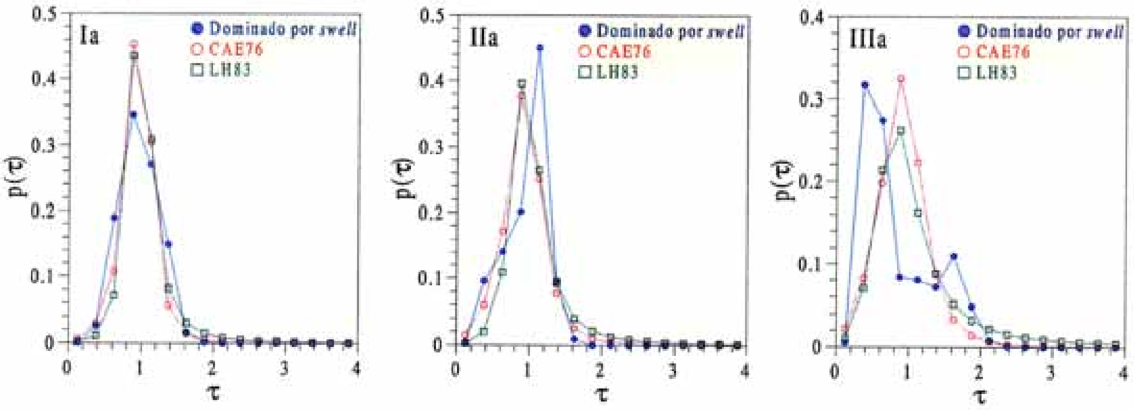

Figura 6.7: Distribución de probabilidad para un estado de mar dominado por el oleaje de fondo y probabilidades predichas por los modelos CAE78 y LH83.

se superponen con olas de periodos más largos y de mayor altura. En este caso la altura del oleaje de fondo se ve amplificada si la cresta y el seno de las olas cortas coinciden con la cresta y el seno de las olas más largas respectivamente.

Por el contrario, la altura de las olas del oleaje de fondo puede verse reducida si sus cresta y senos se oponen a los de las olas más cortas. De esta forma, el criterio de paso ascendente por cero hace que un gran número de olas cortas que se encuentran superpuestas sobre las más largas no crucen el nivel medio del registro mientras que estén próximas a la cresta o el seno de una ola larga.

Sin embargo, cuando una ola larga cruza el nivel medio, el número de olas de paso ascendente por cero aumenta debido a la presencia de las olas pequeñas superpuestas. Como consecuencia de esta situación, el número de periodos pequeños y grandes aumenta y el de periodos intermedios disminuye. Luego, en un estado de mar dominado por el oleaje de fondo, la probabilidad de olas cortas y largas aumenta con el valor de ID, mientras que la probabilidad de olas con periodos intermedios disminuye.

Como se puede observar, los modelos teóricos subestiman la probabilidad de periodos intermedios y sobrestiman las probabilidades de olas de periodos pequeños y grandes, además, este efecto se acentúa al aumentar el valor de ID.

Las densidades de probabilidad del periodo de ola observado para los registros

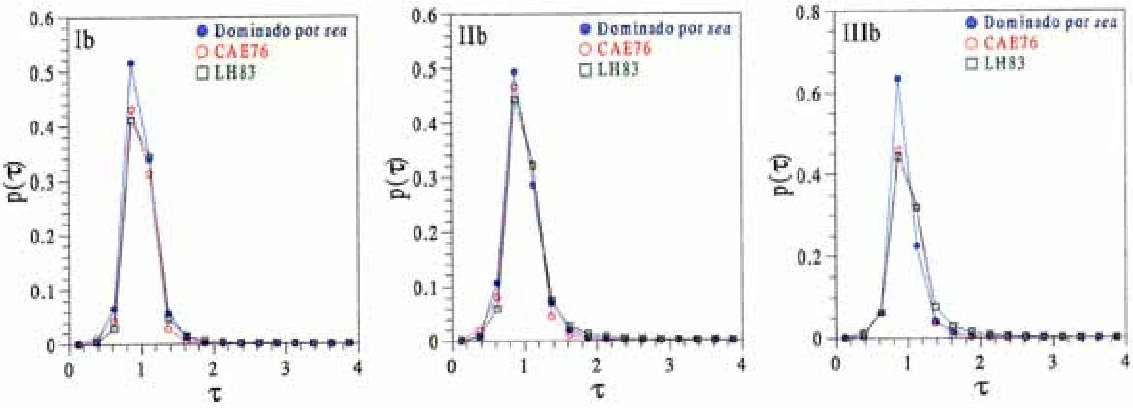

Figura 6.8: Distribución de probabilidad para un estado de mar dominado por el oleaje de viento y probabilidades predichas por los modelos CAE78 y LH83.

correspondientes a estados de mar dominados por el oleaje de viento (SSER> 1) se muestran en la figura 6.8. En este caso las distribuciones empíricas presentan una simetría considerable con respecto al periodo medio, la cual es reproducida de forma adecuada por los modelos teóricos. Sin embargo, estos modelos tienden a subestimar la probabilidad de los periodos de ola intermedios significativamente. En este caso las ola altas de periodo corto se superponen a la ola más pequeñas y de periodo largo, de manera que la probabilidad de los periodos pequeños y grandes disminuye mientras que la probabilidad de los periodos intermedios aumenta, debido a la disminución de olas de largo periodo y pequeña altura, debido a que las olas de periodo más corto producen cruces por cero intermedios.

En estados de mar que resultan de la combinación de un campo de oleaje de viento y otro de fondo con contenidos energéticos equivalentes (SSER≈ 1), el aumento de ID produce un aumento considerable en la asimetría de la distribución de los periodos de ola en torno al periodo medio, tal y como se puede observar en la figura 6.9. La figura también muestra como al aumentar la distancia intermodal también lo hace la moda de la distribución empírica, trasladándose hacia periodos más bajos. Este efecto está acompañado por un ligero incremento de las olas de pequeña altura y periodo largo y una disminución de las olas con un periodo intermedio. Esto es debido al aumento del rango de periodos de ola. Obsérvese

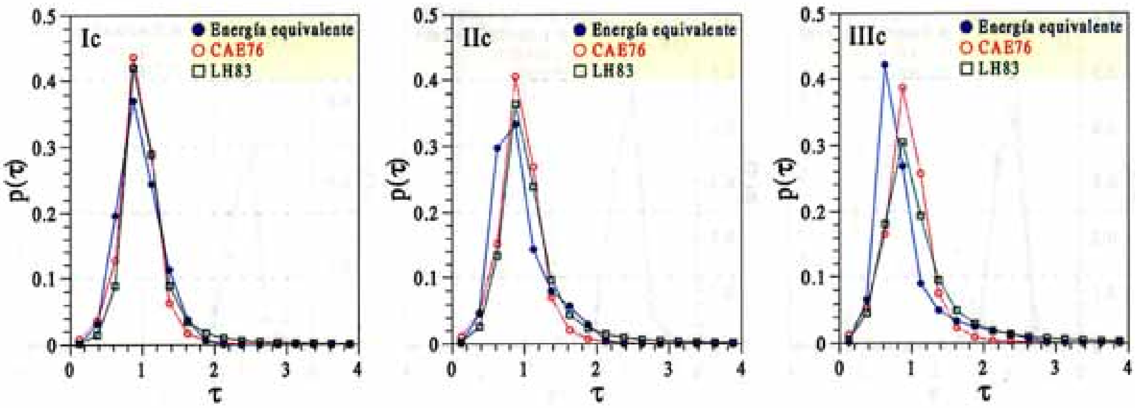

Figura 6.9: Distribución de probabilidad para un estado de mar con contenido energético equivalente para el oleaje de fondo y de viento, y probabilidades predichas por los modelos CAE78 y LH83.

que en este tipo de estado de mar mixto los modelos teóricos no son capaces de caracterizar adecuadamente las distribuciones empíricas de periodos de ola y las desviaciones aumentan al hacerlo la distancia intermodal.

En la figura 6.10 se muestra la función de distribución de probabilidad de los periodos de ola correspondiente a cada uno de los nueve grupos de registros de oleaje simulados representados en escala Weibull junto con los resultados del modelo MS99. Como se puede observar en la figura, las distribuciones de los periodos de ola se pueden representar de forma adecuada mediante la distribución de Weibull biparamétrica sugerida por Myrhaug y Slaatteelid (1999). Además, se observa que para estados de mar cuya estructura espectral se aproxima más a una estructura unimodal, con un valor bajo de ID, la distribución de los periodos de ola se puede describir de forma apropiada mediante una distribución de Weibull biparamétrica. Al aumentar ID la existencia de un comportamiento diferente para los periodos pequeños y grandes se hace más patente.

En definitiva, se observa que, en general, la superposición de dos sistemas de oleaje en diferentes bandas de frecuencias tiene un efecto significativo sobre la distribución de densidad de probabilidad de los periodos de ola. Las distribuciones observadas difieren considerablemente de los resultados dados por los modelos

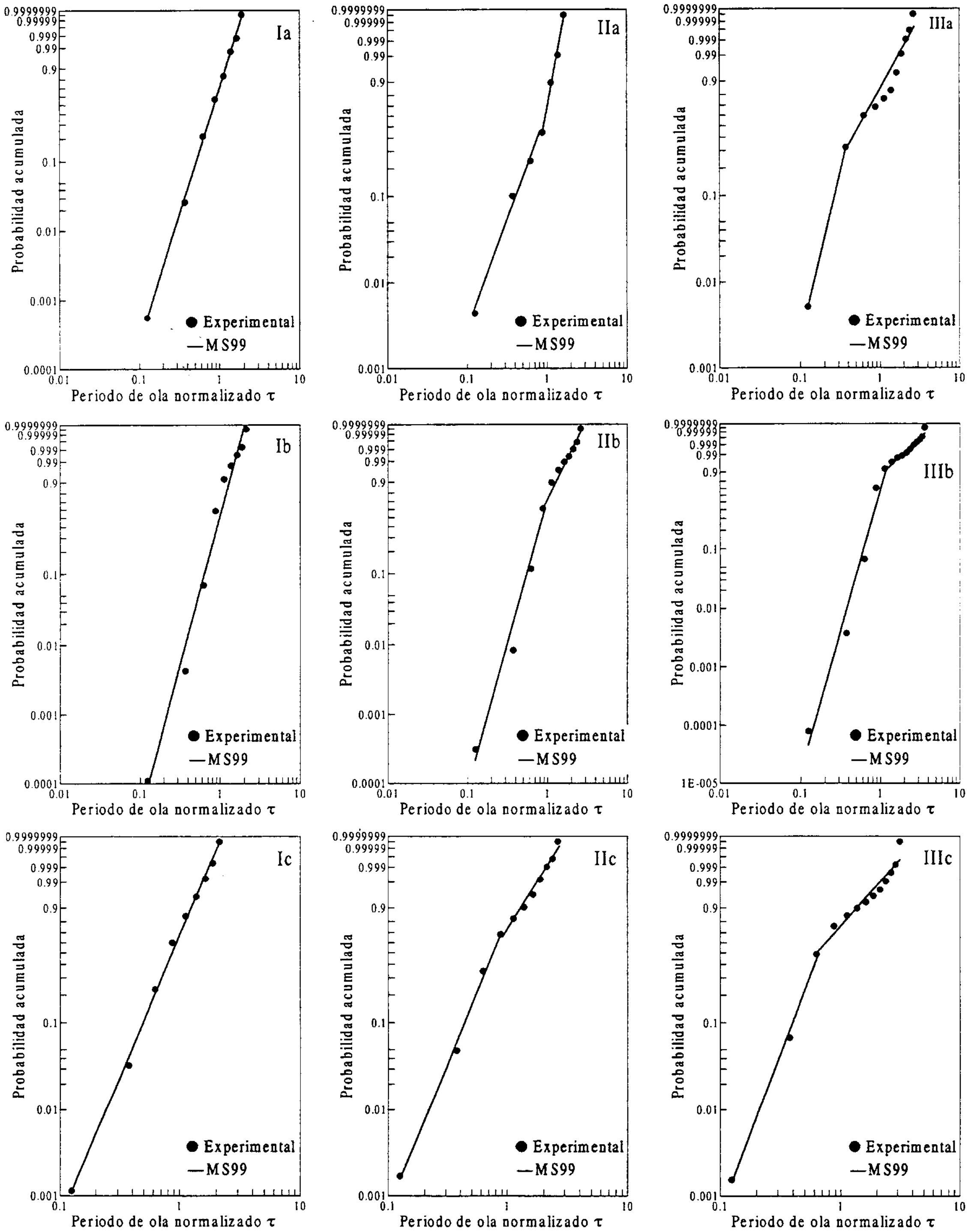

Figura 6.10: Distribución de probabilidad de los periodos normalizados y modelo MS99 para cada tipo de estado de mar.

teóricos sugeridos para caracterizar el comportamiento estadístico de esta variable aleatoria en un sistema de oleaje simple, en particular los modelos propuestos por Cavanie et al. (1976) y por Longuet-Higgins (1983).

Las distribuciones teóricas que se han comparado con las distribuciones observadas parecen ser útiles para predecir las distribuciones de periodos de ola obtenidas, al menos de forma aproximada, sólamente en el caso de estados de mar mixtos dominados por un oleaje de viento. Sin embargo, incluso en estos casos los modelos dan lugar una infraestimación sistemática de la probabilidad de los periodos de ola intermedios, principalmente para valores altos de la distancia intermodal. Otro caso en el cual los modelos teóricos parecen reproducir aproximadamente las distribuciones observadas es aquel en el que el oleaje de viento y el de fondo tienen un contenido energético equivalente y además sus frecuencias de pico están muy próximas.

Las mayores desviaciones entre la probabilidad observada y las distribuciones de probabilidad esperadas se da en los estados de mar dominados por el oleaje de fondo, donde ninguno de los modelos utilizados es capaz de caracterizar de forma apropiada la distribución de probabilidad observada. La desviación entre los modelos teóricos y las distribuciones observadas aumenta con el valor de ID. Una característica importante observada en estos casos es el carácter bimodal mostrado por la distribución de los periodos de ola principalmente para las mayores distancias intermodales. Este comportamiento, que nunca ha sido mencionado hasta el momento, es consistente con la estructura bimodal observada en las distribuciones conjuntas de alturas y periodos para este tipo de estados de mar mixtos (Rodríguez & Guedes Soares, 1999).

La distribución de los periodos de ola se puede representar adecuadamente mediante el modelo propuesto por Myrhaug y Slaattelid (1999), constituido por la combinación de dos distribuciones de Weibull biparamétricas. Para estados de mar con una estructura espectral aproximadamente unimodal, es decir con valores de ID pequeños, la distribución de los periodos de ola se puede describir apropiadamente mediante una única distribución de Weibull biparamétrica, mientras que al aumentar los valores de ID los periodos pequeños y grandes tienden a presentar un comportamiento diferente.

Myrhaug y Slaattelid (1999) examinaron dos conjuntos diferentes de medidas experimentales en las que existían tanto oleaje de viento como oleaje de fondo, y observaron la diferencia de comportamiento observada en el presente trabajo para los periodos pequeños y grandes. Estos autores consideraron razonable atribuir esta diferencia de comportamiento a la existencia del oleaje de viento y de fondo en ambos conjuntos de datos. Sin embargo, no pudieron confirmar este hecho ya que no realizaron una separación de los conjuntos de datos en términos de estados de mar dominados por el oleaje de viento y dominados por el oleaje de fondo.

Tal como se había sospechado, los resultados aquí presentados confirman que el comportamiento diferente de los periodos cortos y largos es debido a la coexistencia de oleaje de fondo y de viento en un estado de mar dado con una distancia intermodal significativa.

Capítulo 7

Conclusiones y líneas de trabajo futuras

En este último capítulo se presentan los principales resultados y conclusiones que se han alcanzado en el trabajo realizado, expuesto en los capítulos previos. También se indican las posibles lineas de trabajo a seguir, como consecuencia de los resultados obtenidos en este estudio, de las cuestiones que han surgido a lo largo de su ejecución y de las que quedan abiertas.

Presentamos a continuación un resumen de los resultados y conclusiones más destacables:

7.1 Principales conclusiones y aportaciones

1. Se considera la estructura funcional básica para el espectro del oleaje de viento obtenida como el producto de una potencia de la frecuencia y de una función exponencial de la misma, en la que la estructura específica queda determinada por un conjunto de coeficientes y exponentes. El análisis de los distintos rasgos del espectro controlados por estos coeficientes y exponentes muestra una elevada variabilidad e incertidumbre en relación con los valores que deben adoptar los mismos. En particular, el análisis de la pendiente del espectro en el rango de altas frecuencias haciendo uso de registros de oleaje

experimentales, obtenidos en una zona típicamente dominada por el oleaje de fondo, revela la enorme variabilidad de dicha pendiente. En consecuencia, y teniendo en cuenta la limitación de los conocimientos existentes sobre la estructura espectral del oleaje de fondo, se concluye que la caracterización del espectro asociado a oleajes resultantes de la combinación de un oleaje de viento y otro de fondo debería realizarse empleando modelos que mantengan libres los parámetros cuyos valores correctos, si existen, están sometidos a una notable incertidumbre.

2. Como consecuencia de lo expresado en el punto anterior, se propone un modelo para caracterizar espectros bimodales, que mantiene la estructura funcional básica (potencia por exponencial), pero que mantiene libres los parámetros que gobiernan la pendiente y el contenido energético en la zona de altas frecuencias del espectro asociado a cada sistema de oleaje individual, así como el exponente que controla la pendiente de la cara trasera del espectro, y el coeficiente que localiza la posición de la misma. En particular, se propone un modelo espectral resultante de la superposición de dos espectros unimodales GLERL, denominado como GLERL2.

3. El estudio comparativo de la eficiencia relativa de dicho modelo para ajustar espectros obtenidos experimentalmente, mediante una metodología de ajuste basada en un procedimiento de mínimos cuadrados no lineales, pone de manifiesto la superioridad de dicho modelo frente al modelo estándar empleado para realizar el ajuste de espectros bimodales.

4. Por otra parte, se propone una metodología para caracterizar de forma genérica el espectro del oleaje como una suma de exponenciales, empleando un procedimiento modificado del método de Prony, que resulta bastante eficiente en condiciones de relaciones señal-ruido considerables. Esta metodología proporciona resultados excepcionalmente adecuados para el ajuste de cualquier tipo de espectro del oleaje, y además:

   (a) Permite caracterizar adecuadamente la estructura espectral resultante de la combinación de cualquier número de sistemas de oleaje individuales.

(b) No asume el principio de superposición para generar modelos espectrales multimodales.

(c) No asume una estructura funcional predefinida para el espectro del oleaje.

(d) No requiere el uso de técnicas de detección de distintos sistemas de oleaje constituyentes y de frecuencias de separación entre los mismos.

5. Se observa que la función de autocorrelación del oleaje, en particular la asociada a espectro de oleaje bimodales muestra una estructura considerablemente irregular. En consecuencia, se observa que los procedimientos simples sugeridos por algunos autores para caracterizar la estructura de dicha función no resultan adecuados y se sugiere la metodología citada en el punto anterior (suma de exponenciales) para caracterizar la FAC del oleaje.

6. Se analiza la envolvente de la FAC para distintos tipos de oleaje unimodal y bimodal y se pone de manifiesto la utilidad de la misma para determinar determinados parámetros característicos de la misma, así como su potencialidad para extraer información sobre el proceso y, en particular, para detectar diferentes tipos de oleajes sin necesidad de recurrir al espectro frecuencial, mediante un estudio más detallado de la misma.

   Se demuestra que la FAC puede proporcionar una gran cantidad de información sobre las características del proceso físico subyacente (el oleaje), una parte de la cual puede ser extraida también del espectro, pero no aquella relacionada con el nivel de dependencia entre valores del proceso que tienen lugar en diferentes instantes de tiempo, es decir, aquellos relacionados con la memoria del proceso. En particular, del análisis de datos experimentales se deriva que:

   (a) El duración de correlación efectiva proporciona información sobre el ancho de banda espectral del proceso, además de indicar el intervalo de tiempo durante el cual persiste un nivel de correlación no nulo entre valores de la elevación del mar observados en un instante dado.

(b) Existen ciertos parámetros característicos de la FAC, de definición notablemente simple, que muestran una considerable correlación con determinados parámetros espectrales definidos para evaluar el ancho de banda espectral, y con periodos medios definidos espectralmente.

7. El estudio de la propiedades probabilísticas de la altura y el periodo del oleaje en distintos tipos de mares mixtos, empleando técnicas de simulación numérica, revela que:

   (a) La superposición de un oleaje de fondo con un bajo contenido energético con un oleaje de viento dominante no tiene un efecto importante sobre la distribución de las alturas de ola. Por el contrario, la combinación de un oleaje de viento poco energético con un oleaje de fondo dominante produce un efecto significativo sobre las probabilidades observadas y las predichas por los modelos teóricos sugeridos para estados de mar unimodales de banda estrecha.

   (b) En un estado de mar dominado por un oleaje de viento y coexistente con un oleaje de fondo poco energético, ambos con frecuencias de pico muy próximas, se produce un aumento de las alturas de ola mayores, excediéndose las predicciones de los modelos teóricos analizados.

   (c) La superposición de dos campos de oleaje con diferentes frecuencias dominantes pero contenido energético similar, produce una disminución en la probabilidad de las alturas de ola mayores que la altura de ola media, efecto que se acentúa al aumentar la distancia intermodal.

   (d) Ninguno los modelos teóricos examinados es capaz de caracterizar de forma adecuada la distribución de alturas de ola observada para todas las clases de estado de mar mixto consideradas.

   (e) La superposición de dos sistemas de oleaje localizados en diferentes bandas de frecuencias tiene un efecto significativo sobre la distribución de densidad de probabilidad de los periodos de ola. Las distribuciones observadas difieren considerablemente de los resultados dados por los modelos teóricos examinados. Las mayores desviaciones entre la probabilidad observada y las distribuciones de probabilidad esperadas se observan en los estados de mar dominados por el oleaje de fondo, aumentando la desviación entre las predicciones de los modelos teóricos y las distribuciones empíricas al aumentar ID. En este tipo de oleaje bimodal, la distribución de periodos de ola presenta un carácter bimodal especialmente al aumentar la ID.

(f) La distribución de los periodos de ola se puede representar adecuadamente mediante un modelo constituido por la combinación de dos distribuciones de Weibull biparamétricas.

7.2 Lineas de desarrollo futuro

En función de los resultados anteriormente comentados, y de las cuestiones que quedan abiertas, sugerimos abordar aspectos como:

- Analizar los efectos de las no linealidades débiles sobre las propiedades estadísticas de los registros de oleaje bimodal, mediante simulación numérica.
- Incluir los efectos de la direccionalidad de los diferentes sistemas de oleaje combinados.
- Profundizar en el estudio de las relaciones existentes entre diferentes parámetros espectrales y de la función de autocorrelación.
- Estudiar en detalle las características de la envolvente de la FAC asociada a distintos tipos de espectros bimodales para extraer información de distintos aspectos de este tipo de oleaje aún poco conocidos.
- Examinar la utilidad de algunos parámetros, que pueden ser definidos a partir del espectro o de la FAC, para cuantificar el contenido energético correspondiente al oleaje de fondo en un espectro bimodal.
- Estudiar el comportamiento de la estructura espectral y de las distribuciones probabilísticas de diferentes parámetros del oleaje, haciendo uso de resultados experimentales obtenidos en laboratorio. En particular, mediante experimentos realizados en grandes canales de oleaje.

Bibliografía

[1] **Abramowitz, M., Stegun, I. A. (1965).** *Handbook of Mathematical Functions*, *Dover Publications, New York.*

[2] **Akaike, H. (1964).** *Statistical measurement of frequency response function*, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **3**, *Suppl., 5–17.*

[3] **Arhan, M. F., (1979).** *Analysis of the variability of spectral estimates using long continuous wave records*, Sea Climatology Conference, Technip, París, *27–49.*

[4] **Arhan, M. F., Ezraty, R., (1978).** *Statistical relations between successive wave heights*, Oceanologica Acta, **1(2)**, *151–158.*

[5] **Arhan, M. F., Cavanie, A., Ezraty, R., (1976).** *Relation statistique entre houteur et periode des vagues de tempote*, *C. R. Acad. Sc. Paris t 283,* **Serie B(189).**

[6] **Barber, N. F., Ursell, F., (1948).** *The generation and propagations of ocean waves and swell*, *Phil. Trans. R. Soc. A,* **240**, *527–560.*

[7] **Barnett, T. P., Wilkerson, J. C., (1967).** *On the generation of ocean wind waves as inferred from airbone radar measurements of fetch limited spectra*, *J. Marine Research*, **25**, *292–321.*

[8] **Bartlett, M. S., (1948)** *Smoothing periodograms from time series with continuous spectra*, *Nature,* **161**, *686–687.*

[9] **Battjes, J. A., (1974).** *Computation of set-up, longshore currents, run-up and overtopping due to wind generated waves*, Tesis doctoral, Delf Univ. of Tech.

[10] **Battjes, J. A., Zitman, T. J., Holthuijsen, L. H., (1987).** *A re-analysis of the spectra observed in JONSWAP*, J. Physical Oceanography, **17**, *1288–1295.*

[11] **Bendat, J. S., (1981).** *Spectral bandwidth, correlation duration, and uncertainty relation*, J. of Sound and Vibration, **76**, *146–149.*

[12] **Bendat, J. S., (1985).** *The Hilbert Transform and applications to correlation measurements, Brüel & Kjær., Denmark, 1985.*

[13] **Bendat, J. S., Piersol, A. G., (1971).** *Random Data: Analysis and Measurement Procedures, Wiley & Sons, New York.*

[14] **Bendat, J. S., Piersol, A. G., (1986).** *Random Data, (2nd ed.), Wiley & Sons, New York.*

[15] **Bitner-Gregersen, E. M., Hagen, O., (2002).** *Directional spreading in two-peak spectrum at the Norwegian Continental Shelf*, Int. Conf. on Offshore Mechanics and Arctic Eng., **24469**.

[16] **Blackman, R. B. and Tukey, J. W., (1958).** *The measurement of power spectra, Dover Publications, Inc., New York.*

[17] **Borgman, L. E., (1969).** *Ocean waves simulation for engineering design, J. Waterways and Harbors Division,* **95**, *557–583.*

[18] **Borgman, L.E., (1991).** *Irregular ocean waves: Kinematics and forces, Ocean Engineering Science, The Sea,* **9(4)**, *121–168.*

[19] **Box, G. E. P., Muller, M. E., (1958).** *A note on the Generation of Normal Deviates, Annals Mathematical Statistics,* **29(2)**, *610–611.*

[20] **Bracewell, R. N., (1978)**. *The Fourier Transform and its Applications, McGraw-Hill, Singapore.*

[21] **Bresler, Y., Macovski, A., (1986)**. *Exact maximum likelihood parameter of superimposed exponential signals in noise*, Transactions on Acoustics, Speech, *and Signal Processing*, **34**, *1081–1089.*

[22] **Bretschneider, C. L., (1959)**. *Wave variability and wave spectra for wind-generated gravity waves, Coastal Eng. Res. Center Tech. Memo* **18**, *U.S. Army Corps of Engineers, Washington, D.C.*

[23] **Bretschneider, C. L., (1963)**. *Wave spectra from hurricane Donna, Proc. Int. Conf. on Ocean Waves Spectra, Prentice Hall Inc Englewood Cliff, 267–272*

[24] **Bretschneider, C. L., (1964)**. *Investigation of the statistics of wave heights (Discussion to GoodKnight and Russel (1963))*, J. Waterways and harbors *divison*, **WW1**, *153–166*

[25] **Burg, P., (1967)**. *Maximum Entropy spectral analysis, Proc. 37th Meeting of the society of exploration Geophysicists.*

[26] **Burg, P., (1968)**. *A new analysis technique for time series analysis, NATO advanced study Inst. on signal processing with emphasis on Underwater Acoustics, Enschede, The Netherlands.*

[27] **Burling, R. W., (1955)**. *Wind generation of waves on water, PhD thesis, University of London.*

[28] **Burling, R. W., (1959)**. *The spectrum of waves at short fetches, Dt. Hydrogr. Z.*, **12**, *45–64, 96–117.*

[29] **Cacko, J., Matej, B., Bukoveczky, J., (1988)**. *Random Processes: Measurement, Analysis and Simulation, Elsevier, Amsterdam.*

[30] **Cartwright, D. E., Longuet-Higgins, M. S., (1956)**. *The statistical distribution of the maxima of a random function*, Proceedings of the Royal Society, *A.*, **237**, *212–232.*

[31] **Cavanie, A., Arhan, M., Ezraty, R., (1976)**. *A statistical relationship between individual heights and periods of storm waves*, Proc. Int. Conf. on Behaviour of Offshore Structures, *354–363.*

[32] **Charnock, H., (1955)**. *Wind stress on a water surface*, Quart, J. R. Met. Soc., **81**, *639–640.*

[33] **Cooley, J. W., Tukey, J. W., (1965)**. *An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series*, Math. Comput., **19**, *297–301.*

[34] **Cramer, H., (1966)**. *On the intersections between the trajectories of a normal stationary stochastic process and a high level*, Arkiv. Mat., **6**, *297–301.*

[35] **Daniell (1946)**. *Discussion of: On the theoretical specification and sampling properties of autocorrelated time series*, J. Roy. Stat. Soc., **Ser. B**, **8**, *88–90.*

[36] **Dattatri, J., Jothi Shankar, N., Raman, H., (1977)**. *Comparison of Scott spectra with ocean wave spectra*, J. Waterways, Port, Coastal and Ocean Eng. *(ASCE)*, **103**, *375–378.*

[37] **Davies, J. L., (1972)**. *Geographical variation in coastal development*, Oliver & Boyd, Edinburgh.

[38] **Davidan, I. N., (1969)**. *Model of spectral structure of wind waves and its comparison with experimental data*, Trudy Koord. Soveshchaniy po Gidrotekhnike, **50**, *139–157.*

[39] **Davidan, I. N., Lopatukhin, L. I., Rozhkov, W. A., (1985)**. *Wind Waves in the Ocean*, Gidrometeoizdat, Leningrad, *256.*

[40] **Donelan, M. A., (1987)**. *The effect of swell on the growth of wind waves*, Johns Hopkins APL Technical Digest, **8(1)**, *18–23.*

[41] **Donelan, M., Hamilton, J., Hui, W., (1985).** *Directional spectra of wind generated waves, Phil. Trans. Royal Soc. London,* **Ser.A, 315,** *509–562.*

[42] **Earle, M. D., (1984).** *Development of algorithms for separation of sea and swell, National Data Buoy Center, Tech. Report MEC-87-1, 53.*

[43] **Ebuchi, N., Toba, Y., Kawamura, H., (1992).** *Statistical study on the local equilibrium between wind and wind waves, J. Oceanography,* **48,** *77–92.*

[44] **Ewans, K. C., Kibblewhite, A. C., (1990).** *An examination of fetch-limited wave growth off the west coast of New Zealand by comparison with the JONSWAP results, J. Physical Oceanography,* **20,** *1278–1296.*

[45] **Ewing, J. A. (1973).** *Mean length of runs of high waves, J. Geophys. Res.,* **78(12),** *1933-1936.*

[46] **Ewing, J. A. (1980).** *Observations of wind-waves and swell at an exposed coastal location. In: Estuarine and Coastal Marine Science,* Academic Press, *London, 543–554.*

[47] **Forristall, G. Z., (1978).** *On the statistical distribution of wave heigths and periods of storm waves, J. Geophys. Res.,* **83,** *2353–2358.*

[48] **Forristall, G. Z., (1981).** *Measurements of a saturated reange in ocean wave spectra, J. Geophys. Res.,* **89(C9),** *8075–8084.*

[49] **Forristall, G. Z., (1984).** *The distribution of measured and simulated wave heights as a function of spectral shape, J. Geophys. Res.,* **89(C6),** *10547–10552.*

[50] **Fullerton, L. W., (1984).** *Solution to an iteration problem, SIAM* review, **26,** *279–281.*

[51] **Gammel, B. M., (1998).** *Hurst's rescaled range statistical analysis for pseudorandom number generators used in physical simulations,* Physical *Review E,* **58(2),** *2586–2597.*

[52] **Gelci, R., Cazalé, J., Vassal, J., (1956).** *Utilisation des diagrammes de propagation à la provision énergique de la houle, Bull. Inf. Comité Cent. Oceanogr. Etud. Côtes,* **8**, *169–187.*

[53] **Goda, Y., (1970).** *Numerical experiments on wave statistics with spectral simulation, Rep. Port and Harbour Res. Inst.,* **9(3)**.

[54] **Goda, Y., (1974).** *Estimation of wave statistics from spectral information, Proc. Int. Conf. on Ocean Wave Measurements and Analysis., ASCE, New Orleans, 320–337.*

[55] **Goda, Y., (1978).** *The observed joint distribution of periods and heights of sea waves, Proc. 16th Int. Conf. on Coastal Eng., ASCE, Sydney, Australia, 227–246.*

[56] **Goda, Y., (1983).** *Analysis of wave grouping and spectra of long-traveled swell, Rep. Port Harbor Res. Inst.,* **22(1)**, *3–41.*

[57] **Gran, S., (1992).** *A course in ocean engineering, Elsevier, Amsterdam.*

[58] **Grenander, U., (1951).** *On spectral analysis of spectral of stochastic processes, Ark. Mathemat.,* **1**, *503–531.*

[59] **Guedes Soares, C., (1984).** *Representation of Double-Peaked Sea Wave Spectra, Ocean Engineering,* **11, 185–207**.

[60] **Guedes Soares, C., Nolasco, M. C., (1992).** *Spectral Modelling of Sea States With Multiple Wave Systems, J. Offshore Mechanics and Arctic Eng.,* **114**, *278–284.*

[61] **Guedes Soares, C., Henriques, A. C., (1998).** *Fitting a double peak spectral model to measured wave spectra, OMAE98-1491.*

[62] **Gunther, H., (1981).** *A parametric surface wave model and statistics of the prediction parameters, Hamburg,*

[63] **Hansen, C., Katsaros, K. B., Kitaigorodskii, S. A., Larsen, S. E., (1990)**. *The dissipation range of wind-wave spectra observed on a lake, J. Physical Oceanography,* **20**, *1264–1277.*

[64] **Hasselmann, K., (1960)**. *Grundgleichungen der Seegangsvorhersage, Schiffstechnik,* **7**, *191–195.*

[65] **Hasselmann, K., (1962)**. *On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum. Part 1: General theory, J. Fluid Mech.,* **12**, *481–500.*

[66] **Hasselmann, K., (1963)**. *On the non-linear energy transfer in a gravity wave spectrum. Part 2: Conservation theorems, wave-particle analogy, irreversibility, J. Fluid Mech.,* **15**, *273–281.*

[67] **Hasselmann, K., (1963)**. *On the non-linear energy transfer in a gravity wave spectrum. Part 3: Evaluation of the energy flux and swell-sea interaction for a Neumann spectrum, J. Fluid Mech.,* **15**, *385–398.*

[68] **Hasselmann, K., (1974)**. *On the spectral dissipation of ocean waves due to white capping, Boundary-Layer Meteorology,* **6**, *107–127.*

[69] **Hasselmann, K. et al., (1973)**, *Measurements of Wind-Wave growth and Swell Decay During the Joint North Sea Wave Project (JONSWAP),* Deutsche *Hydrogr. Zeitschrift,* **Reihe A(8), 12**.

[70] **Haver, S., (1983)**. *On the short term description of sea states, NHL Report No. 183190, 81 pp.*

[71] **Hawkes, P. J., Bagenholm, C., Gouldby, B. P., Ewin, J., (1997)**. *Swell and Bi-modal wave climate around the coast of England and Wales, HR Wallingford, Report SR 409, 26 pp + apéndices.*

[72] **Hellekalek, P., (1998)**. *Good random number generators are (not so) easy to find, Mathematics and computers in simulations,* **46**, *485–505.*

[73] **Hess, G. D., Hidy, G. M., Plate, E. J., (1969)**. *Comparison between wind waves at sea and in the laboratory, J. Mar. Res.,* **27**, *216–225.*

[74] **Hogben, N. et al., (1976).** *Environmental Conditions*, Report of committee I.1., 6th Int. Ships Structures Congress, Boston.

[75] **Houmb, O. G., Due, E., (1978).** *On the occurrence of wave spectra with more than one peak. Report.*, The Norewegian Institute of Technology, 1–23.

[76] **Huang, N.E., S.R. Long, C.C. Tung, Y. Yuan and L.F. Bliven, (1981).** *A unfied two-parameter wave spectral model for a general sea state*, J. Fluid Mech., **122**, 203–244.

[77] **Huang, N. E., Tung, C. C., Long, S. R., (1990).** *The probability structure of the ocean surface*, The Sea: Ocean Engineering Science, **9(2)**, 335–366.

[78] **Huang, N. E., Tung, C. C., Long, S. R., (1990).** *Wave spectra. In: The Sea: Ocean Engineering Science*, John Wiley & Sons, Inc., 197–237.

[79] **Hudspeth, R. T., Borgman, L. E., (1979).** *Efficient FFT simulation of digital time sequences*, J. of the engineering mechanics division, **105(EM2)**, 223–235.

[80] **Hurst, H. E., (1951).** *Long-term storage capacity of reservoirs*, Trans. Am. Soc. Civil Engineers, **116**, 770– 799.

[81] **IAHR (1986).** *List of Sea State Parameters*, Intl. Assoc. Hydr. Res., Suppl. to Bull., **52**, Brussels.

[82] **Janssen, P. A. E. M., (1989).** *Wave-induced stress and the drag of air flow over sea waves*, J. Physical Oceanography **19, 745–754**.

[83] **Janssen, P. A. E. M., (1991).** *Quasi-linear theory of wind wave generation applied to wave forecasting*, J. Physical Oceanography **21, 1631–1642**.

[84] **Jaynes, E. T. (1957).** *Information theory and Statistical Mechanics*, Physics, Rev., **106(4)**, 620–630.

[85] **Jenkins, G. M., Watts, D. G, (1968)**, *Spectral Analysis and its Applications*, Holden-Day, San Francisco, California.

[86] **Kahma, K., (1981)**. *A study of the growth of the wave spectrum with fetch, J. Physical Oceanography,* **11**, *1503–1515.*

[87] **Kahma, K., Calkoen, C. J., (1992)**. *Reconciling discrepancies in the observed growth of wind-generated waves, J. Physical Oceanography,* **22**, *1389–1405.*

[88] **Kalmykov, V. A., (1989)**. *Numerical calculation of nonlinear interaction between two systems of waves on a change in wind direction, Oceanology,* **29**, *167.*

[89] **Kahn, M., Mackisack, M. S., Osborne, M. R., Smyth, G. K., (1992)**. *On the consistency of Prony's method and related algorithms, Journal of Computational and Graphical Statistics,* **1**, *329–349.*

[90] **Kay, S. M., (1988)**. *Modern Spectral Estimation: Theory and Application, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.*

[91] **Kawai, S., Okada, K., Toba, Y., (1977)**. *Field data support of the three-seconds power law and* $gu_*\sigma^{-4}$ *spectral form for growing wind waves, J. Oceanog. Society of Japan,* **33 (3)**, *137–150.*

[92] **Kenion, K. E., (1968)**. *J. Mar. Res.,* **26**, *208–231.*

[93] **Khintchine, A. J., (1934)**. **Korrelationstheorie der Stationären Stochastschen Prozesse**, *Math. Ann.,* **109**, *604–615.*

[94] **Kinsman, B., (1960)**. *Surface waves at short fetches and low wind speed - a field study. Chesapeake Bay, Inst. Tech. Rep.,* **19**.

[95] **Kinsman, B., (1965)**. *Wind Waves: Their Generation and Propagation on the Ocean Surface, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.*

[96] **Kitaigorodskii, S. A., (1961)**. *Applications of the theory of similarity to the analysis of wind-generated wave motion as a stochastic process, Izv. Geopys. Ser., (Physics of the sea and the atmosphere), No 1, 105–117.*

[97] **Kitaigorodskii, S. A., (1962).** *Aplications of the theory of similarity to the analysis of wind-generated wave motion as stochastic process, Bull. Acad. Sci. URSS. Geophys. Ser,* **1.73** *URSS.*

[98] **Kitaigorodskii, S. A., (1983).** *On the theory of the equilibrium range in the spectrum of wind-generated gravity waves, J. Physical Oceanography,* **13**, *816–827.*

[99] **Kitaigorodskii, S. A., Krasitskii, V. P., and Zaslavskii, M. M. (1975).** *On Phillips' theory of equilibrium range in the spectra of wind-generated gravity waves, J. Physical Oceanography,* **5**, *410–420.*

[100] **Knuth, D. E., (1998).** *The art of computer programming, volume 2: Seminumerical algorithms, Third ed. Reading, Mass.: Addison Wesley.*

[101] **Komen, G. J., Hasselmann, S., Hasselmann, K., (1984).** *On the existence of a fully developed wind-sea spectrum, J. Physical Oceanography,* **14**, *1271–1285.*

[102] **Komen, G.C., Cavaleri, L., Donelan, M., Hasselmann, K.,Hasselmann, S., Janssen, P., (1994).** *Dynamics and Modelling of Ocean Waves, Cambridge University Press*

[103] **Krylov, Y. M., (1966).** *Spectral Methods of Studying and Predicting of Wind Waves, Gidrometeoizdat, Leningrad, 256*

[104] **Krylov, Y. M. (Editor), Duginov, B. A., Galenin, B. G., Krivitskii, S. W., Podmogilnyj, I. A., Polyakov, J. P., Popkov, R. A., Strekalov, S. S., (1986).** *Wind, Waves and Marine Harbors, Gidrometeoizdat, Leningrad, 264*

[105] **Kumaresan, R., Tufts, D. W., (1982).** *Estimating the Parameters of Exponentially Damped Sinusoids and Pole-Zero Modeling in Noise, IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing,* **30(6)**, *833–840.*

[106] **Kundu, P. K., (1990).** *Fluid Mechanics, Academic Press, Inc., New York.*

[107] **Lamberti, A., Rossi, V., (1993).** *Wave grouping and sequential correlation, field studies in Italian coastal areas*, Coastal Engineering, **21**, *271–300.*

[108] **Law, A. M., Kelton, W. D., (2000).** *Simulation modeling and analysis, Third ed. New York: McGraw-Hill.*

[109] **L'Ecuyer, P., (2001).** *Random Number Generators, in Encyclopedia of Operations Research and Management Science*, Second Edition, *Gass, S. I., Harris, C. M., (Eds.), Kluwer Academic* Publishers, *695–702*

[110] **LeBlond, P. H., Mysack, L. A., (1978).** *Waves in the ocean*, Amsterdam, *Elsevier, 602 pp.*

[111] **Lindgren, G., Rychlik, I., (1982).** *Wave characteristic distributions for Gaussian waves–Wavelenght amplitude and steepness*, Ocean Engineering, **9(5)**, *411–432.*

[112] **Liu, P. C. (1971).** *Normalized and Equilibrium Spectra of Wind-Wave in Lake Michigan, J. Phys. Ocean.*, **1(4)**, *249–257.*

[113] **Liu, P. C. (1983).** *A Representation for the Frequency Spectrum of the Wind-Generated Waves*, Ocean Engineering, **10(6)**, *429–441.*

[114] **Liu, P. C. (1984).** *On a design wave spectrum*, International Conference on *Coastal Engineering, 362–369.*

[115] **Liu, P., (1989).** *On the slope of the equilibrium range in the frequency spectrum of wind waves, J. Geophys. Res.*, **94**, *5017–5023.*

[116] **Longuet-Higgins, M. S., (1952).** *On the statistical distribution of the wave heights of sea waves, J. Mar. Res.*, **2**, *245–266.*

[117] **Longuet-Higgins, M. S., (1957).** *The statistical analysis of a random moving surface, Proc. Royal Society of London,* **Ser.A, 249**, *321–387.*

[118] **Longuet-Higgins, M. S., (1969).** *On wave breaking and the equilibrium spectrum of wind-generated waves, Proc. Royal Society of London,* **Ser.A, 310**, *151–159.*

[119] **Longuet-Higgins, M. S., (1975).** *On the joint distribution of the periods and amplitudes of sea waves, J. Geophys. Res.,* **80(18)**, *2688–2694.*

[120] **Longuet-Higgins, M. S., (1980).** *On the distribution of the heigths of sea waves: some effects of nonlinearity and finite band width, J. Geophys. Res.,* **85(C3)**, *1519–1523.*

[121] **Longuet-Higgins, M. S., (1983).** *On the joint distribution of wave periods and amplitudes in a random wave field, Proc. Royal Society of London,* **Ser. A, 389**, *241–258.*

[122] **Longuet-Higgins, M. S., (1984).** *Statistical properties of wave groups in a random sea state, Phil. Trans. Royal Society of London,* **Ser. A, 312**, *219–250.*

[123] **Longuet-Higgins, M. S., (1994).** *A fractal approach to breaking waves, J. Physical Oceanography,* **24**, *1834–1838.*

[124] **Longuet-Higgins, M. S., Phillips, O. M., (1994).** *Phase velocity effects in tertiary waves interactions, J. Fluid Mech.,* **12**, *333-336.*

[125] **Lopatoukhin, L. J., Rozhkov, V. A., Boukhanovsky, A. V., Degtyarev, A., Saskov, K., Athanassoulis, G., Stefanakos, C., Krogstad, H. E., (2002).** *The spectral wave climate in the Barents Sea, 21 Int. Conf. on Offshore Mechanics and Arctic Engineering,* **paper 28397**, *7* pp.

[126] **Marple, S. L., (1987).** *Digital Espectral Analysis: with applications,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

[127] **Marsaglia, G., (1985).** *A current view of random number generators, Computer Science and Statistics, Sixteenth Symposium on the Interface, 3–10, North-Holland, Amsterdam. Elsevier Science Publishers.*

[128] **Marsaglia, G., Zaman, A., (1994).** *Some portable very-long-period random number generators*, Computers in Physics, **8(1)**, *117–121.*

[129] **Massel, S. R., (1996).** *On the largest wave height in water of constant depth*, Ocean engineering, **23(7)**, *553–573.*

[130] **Massel, S. R., Sobey, R. J., (2000).** *Distribution of the highest wave in a record*, Coastal Engineering, **42(2)**, *153–173.*

[131] **Masson, D., (1993).** *A On the nonlinear coupling between swell and wind waves*, J. Physical Oceanography, **23**, *1249–1258.*

[132] **Matsumoto, M., Kurita, Y., (1992).** *Twisted GFSR Generatots*, ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation, **2**, *179–194.*

[133] **Matsumoto, M., Kurita, Y., (1994).** *Twisted GFSR Generatots II*, ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation, **4**, *254–266.*

[134] **Matsumoto, M., Nishimura, T., (1998).** *Marsenne Twister: A 623-dimensionally equidistributed uniform pseudorandom number generator*, ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation, **8**, *3–30.*

[135] **McCormick, M. E., (1983).** *On the correlation functions associated with deep water wave spectra. Internal Report EW-23-83*, U.S. Naval Academy Engineering, Annapolis, Maryland.

[136] **McDonough, R. N., Huggins, W. H., (1968).** *Best least-squares representation of signals by exponentials*, IEEE Trans. Automat. Contr. **AC-13**, *408–412.*

[137] **Medina, J. R., Hudspeth, R. T., (1987).** *Sea states defined by wave height and period functions*, Proc. IAHRR seminar wave analysis and generation in laboratory basins, 22nd IAHR Congress, *249–259.*

[138] **Miles, J. W., (1957).** *On the generation of surface waves by shear flows*, J. Fluid Mechanics, **3**, *185–204.*

[139] **Miles, J. W., Funke, E. R., (1988).** *Numerical comparison of wave synthesis methods*, *International on Coastal Engineering Conference*, ????, *91–105.*

[140] **Mitsuyasu, H., (1968).** *On the growth of the spectrum of wind-generated waves. 1*, *Rep. Res. Inst. Appl. Mech., Kyushu Univ.* **16, 251–264.**

[141] **Mitsuyasu, H., (1969).** *On the growth of the spectrum of wind-generated waves. 2*, *Rep. Res. Inst. Appl. Mech., Kyushu Univ.* **17**, *235–243.*

[142] **Mitsuyasu, H., Tasai, F., Suhara, T., Mizuno, S., Ohkusu, M., Honda, T., Rikiishi, K., (1980).** *Observations of the power spectrum of waves using a cloverleaf buoy*, *J. Physical Oceanography*, **10**, *286–296.*

[143] **Monin, A. S., (1958).** *The structure of atmospheric turbulence*, Theory of *probability and its applicaions*, **3(3).**

[144] **Muller, P., (1976).** *Parametrization of one dimensional wind wave spectra and their dependence on the state development*, Hamburger *Geophys. Einz.*, **31.**

[145] **Munk, W. H., Miller, G. R., Snodgrass, F. E., Barber, N. F., (1963).** *Directional recording of swell from distants storms*, *Phil. Trans. R. Soc.* **A 255, 505–584.**

[146] **Myrhaug, D., Rue, H., (1998).** *Joint distribution of successive wave periods revisited*, *J. Ship Research*, **42(3)**, *199–206.*

[147] **Myrhaug, D., Slaattelid, O. H., (1999).** *Statistical properties of successive wave periods*, *J. Offshore Mechanics and Arctic Eng.*, **121(3)**, *166–171.*

[148] **Næss, A., (1985).** *On the distribution of crest-to-trough wave heights*, *Ocean Engineering*, **12(3)**, *221–234.*

[149] **Naidu, P. S., (1996).** *Modern Spectrum Analysis of Time Series*, *CRC Press Inc., USA.*

[150] **Narasimhan, S., Deo, M. C., (1979)**. *Spectral analysis of ocean waves, Civil Engineering in the Oceans IV, San Fransisco,* **II**, *877–892.*

[151] **Naylor, T., (1971)**. *Pseudorandom. In: computer simulation experiments with models of economic systems. Wiley, J., Sons, Inc., (Eds.), 381–395.*

[152] **Neumann, G., (1953)**. *On ocean wave spectra and a new method of forecasting wind-generated sea.* Report, University of New York.

[153] **Ochi, M. K., (1990)**. *Stochastic description of offshore environment. In: Water Wave Kinematics. Torum, A., Gudmestad, O.T. (Eds.), 31–56,* Kluwer Academic Publishers.

[154] **Ochi, M., (1998)**, *Ocean Waves: The stochastic approach,* Cambridge *University Press, Cambridge, U.K..*

[155] **Ochi, M., Hubble, E., (1976)**. *On six-parameter wave spectra, Proc 15th Int. Conf. Coastal Eng., 301–328.*

[156] **Oppenheim, A. V., Schafer, R. W., (2000)**. *Discrete Time Signal Processing, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.*

[157] **Otnes,R. K., Enochson, L., (1978)**. *Applied Time Series Analysis, Wiley & Sons, New York.*

[158] **Osborne, M. R. (1975)**. *Some special nonlinear least squares problems,* SIAM Journal of Numerical Analysis, **12**, *571–592.*

[159] **Osborne, A. R., (1982)**. *The simulation and measurement of random ocean wave statistics,* Topics in Ocean Physics, A.R. Osborne and P.M. Rizzoli, eds., North Holland, Amsterdam, *472–550.*

[160] **Osborne, M. R., Smyth, G. K., (1991)**. *A modified Prony algorithm for exponential function fitting, SIAM J. Sci. Statist. Comput.,* **16**, *119–138.*

[161] **Osborne, M. R., Smyth, G. K. (1995)**. *A modified Prony algorithm for fitting sums of exponential functions*, SIAM Journal of Scientific Computing, **16**, *119–138*.

[162] **Papadopoulus, C. K., Nikias, C. L., (1990)**. *Parameter estimation of exponentially damped sinusoids using higher order statistics*, IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, **38**, *1424–1436*.

[163] **Papoulis, A., (1984)**. *Probability, Random Variables and Stochastic Processes, (2nd. Ed.), McGraw-Hill, Inc., Singapore.*

[164] **Percival, D. B., Walden, A. T., (1993)**. *Spectral Analysis for Physical Applications: Multitaper and Conventional Univariate Techniques*, Cambridge University Press.

[165] **Phillips, O. M., (1957)**. *On the generation of waves by turbulent wind*, J. Fluid Mech., **2**, *417–445*.

[166] **Phillips, O. M., (1958)**. *The equilibrium range in the spectrum of wind-generated ocean waves*, J. Fluid Mech., **4**, *426–434*.

[167] **Phillips, O. M., (1959)**. *The scattering of gravity waves by turbulence*, J. Fluid Mech., **2**, *417–445*.

[168] **Phillips, O. M., (1960)**. *On the dynamics of unsteady gravity waves of finite amplitude: Part 1: The elementary interactions*, J. Fluid Mech., **9**, *193–217*.

[169] **Phillips, O. M., (1981)**. *Wave interactions - the evolution of an idea*, J. Fluid Mech., **106**, *215–227*.

[170] **Phillips, O. M., (1985)**. *Spectral and statistical properties of the equilibrium range in wind-generated gravity waves*, J. Fluid Mech., **156**, *505–531*.

[171] **Pierson, W. J., (1955)**. *Wind generated gravity waves*, Adv. Geophys., **2**, *93–177*.

[172] **Pierson, W. J., Marks, W., (1952)**. *The power spectrum analysis of ocean wave records, Trans. Amer. Geophys. Union,* **33(6)**, *834–844.*

[173] **Pierson, W. J., Moskowitz, L., (1964)**. *A proposed spectral form for fully developed wind seas based on the similarity theory of S.A. Kitaigorodsky, J. Geophys. Res.,* **69**, *5181–5190.*

[174] **Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T. (1992)**. *Numerical Recipes in Fortran, The Art of Scientific Computing, 2nd ed., Cambridge University Press, New York.*

[175] **Prevosto, M., Krogstad, H. E., Barstow, S. F., Soares, C. G., (1996)**. *Observations of the high-frequency range of the wave spectrum, J. Offshore Mechanics and Arctic Eng.,* **118**, *89–95.*

[176] **Price, W. G., Bishop, R. E. D., (1974)**. *Probabilistic Theory of Ship Dynamics, Chapman and Hall, London.*

[177] **Proakis, J. G., Manolakis, D. G., (1988)**. *Introduction to Digital Signal Processing, Mcmillan Publishing Com., New York.*

[178] **Prony, Baron G. R., (1795)**. *Essai éxperimental et analytique: sur les lois de la dilatabilité de fluides élastique et sur celles de la force expansive de la vapeur de l'alkool, à différentes températures, Journal de l'École Polytechnique,* **1(22)**, *24–76.*

[179] **Rao, C., Baba, M., (1996)**. *Observed wave characteristics during growth and decay: a case study, Continental shelf research,* **16(12)**, *1509–1520.*

[180] **Rice, S. O., (1944)**. *Mathematical analysis of ramdon noise, Bell System Tech. J.,* **23**, *288–332.*

[181] **Rice, S. O., (1945)**. *Mathematical analysis of ramdon noise, Bell System Tech. J.,* **24**, *46–156.*

[182] **Rice, S. O., (1954)**. *Selected Papers on Noise and Stochastic processes, Dover Publications Inc., New York.*

[183] **Roberts, J. B., Spanos, P. D., (1990).** *Random vibration and statistical linearization, Chichester (England); New York: Wiley.*

[184] **Rodríguez, G. R., (1992).** *Spectral and statistical characteristics of wind waves off Canary Islands, Proc. Civil Engrg. in the Oceans V, Texas, 622–636.*

[185] **Rodríguez, G., (1993).** *Métodos de análisis espectral (oleaje escalar), Conv. Colab. CEDEX-ULPGC-FULP, 397 pp*

[186] **Rodríguez, G. (1995).** *Análisis de las ondas gravitatorias generadas por el viento en aguas profundas*, Tesis Doctoral, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.

[187] **Rodríguez, G. R., Jiménez, J., (1994).** *About the range of validity of different spectral models for wind generated gravity waves, Proc. Coastal Dynamics '94, 755–769.*

[188] **Rodríguez, G. R., Rubio, F., (1998).** *Unification of fourth inverse power law models for the wave spectrum high frequency range*, Anales de Física, *41–46.*

[189] **Rodríguez, G. R., Guedes Soares, C., (1999).** *The Bivariate Distribution of Wave Heights and Periods in Mixed Sea States, J. Offshore Mechanics and Artic Eng.*, **121**, *102–108.*

[190] **Rodríguez, G. R., Guedes Soares, C., (1999).** *A criterion of the automatic identification of multimodal sea wave spectra, Appl. Ocean Res.*, **21**, *329–333.*

[191] **Rodríguez, G. R., et al (2003).** *En desarrollo.*

[192] **Rodríguez, G. R., Guedes Soares, C., Ferrer, L., (2000).** *Wave Group Statistics of numerically simulated mixed sea states, J. Offshore Mechanics and Artic Eng.*, **122**, *282–288.*

[193] **Rubinstein, R. Y., (1981).** *Simulation and the Monte Carlo method, John Wiley & Sons*

[194] **Ruiz, D. P., Carrión, M. C., Gallego, A., Medouri, A., (1995).** *Parameter estimation of exponentially damped sinusoids using a higher order correlation-based approach*, IEEE Transactions on Signal Processing, **43(11)**, *2665–2677.*

[195] **Rye, H., (1974).** *Wave group formation among storm waves*, International Conference on Coastal Engineering, *164–183.*

[196] **Rye, H., Lervik, E., (1981).** *Wave grouping studied by means of correlation techniques*, *Proc. Int. Symp. of Hydrodyn. in Ocean Eng., Trondheim, Norway.*

[197] **Sand, S. E., Mansard, E. P. (1986).** *Reproduction of Higher Harmonics in irregular waves*, Ocean Engineering, **13**, *57–83.*

[198] **Shannon, C. E., (1948).** *A mathematical theory of communication*, Bell Syst. Tech. J., **27**, *379–423.*

[199] **Sherif, Y. S., Dear, R. G., (1995).** *An efficient algorithm for testing the quality of the output of random number generators*, Advances in Engineering Software, **22**, *69–77.*

[200] **Shum, K. T., Melville, W. K., (1984).** *Estimates of the Joint Statistics of Amplitudes and Periods of ocean waves using an integral transform technique*, J. Geophys. Res., **89(4)**, *6467–6476.*

[201] **Silva, A. A. Pires, (1988).** *Spectral Description of the Wind Waves in the West Coast of Portugal (empirical approach), (In Portuguese)*, MSc Thesis, Technical University of Lisbon, Instituto Superior Técnico.

[202] **Snodgrass, F. E, Groves, G. W., Hasselmann, K., Miller, G. R., Munk, W. H., Powers, W. M., (1966).** *Propagation of ocean swell across the Pacific*, Philos Trans. Roy. Soc. London, **A249**.

[203] **Snyder, R. L., (1965).** *The wind generation of ocean waves*, PhD Dissertation, *University of California, San Diego.*

[204] **Snyder, R. L., Cox, C. S., (1966).** *A Field Study of the Wind Generation of Ocean Waves, J. Mar. Res.,* **24**, *141–178.*

[205] **Snyder, R. L., Dobson, F. W., Elliot, J. A., Long, R. B., (1981).** *Array measurements of atmospheric pressure fluctuations above surface gravity waves, J. Fluid Mech.,* **102**, *1–59.*

[206] **Smyth, G. K., (2000).** *AEmploying symmetry constrains for improved frequency estimation by eigeanalysis methods, Technometrics,* **42**, *277–289.*

[207] **Sobey, R. J., (1986).** *Wind-wave prediction, Ann. review of fluid mechanics,* **18**, *149–172.*

[208] **Sobey, R. J., (1996).** *Correlation between individual waves in a real sea state, Coastal Engineering,* **27**, *223–242.*

[209] **Sobey, R. J., Read, W. W., (1984).** *Wave groups in the frequency and time domains, Proc. Int. Conf. Coastal Eng., 695–707.*

[210] **Strekalov, S., Massel, S., (1971).** *Niektore zagadnienia widmowej analizy falowania wiatrowego, Arch. Hydrot,* **28**, *457–485.*

[211] **Strekalov, S. S., Tsyploukhin, V. P., Massel, S. T., (1972).** *Structure of Sea Wave frequency Spectrum, Proceedings of the 13th Coastal Engineering Conference, ASCE,* **1**, *307–314.*

[212] **Su, M-Y., Bergin, M. T., Bales, S. L., (1972).** *Characteristics of wave groups in storm seas, Proc. Ocean Structural Dynamics Symposium, 118–133.*

[213] **Sverdrup, H. U., Munk, W. H., (1947).** *Wind, Sea and Swell: Theory of Relations for Forecasting, U.S. Navy Hydro. Office, Publication No. 601.*

[214] **Tayfun, A., (1981).** *Distribution of crest-to-trough wave heights, Proc. ASCE J. Waterway, Port, Coast. Ocean Division,* **107(WW3)**, *149–158.*

[215] **Tayfun, A., (1983).** *Non-linear effects on the distribution of crest to trough wave heights, Ocean Engineering,* **10(2)**, *97–106.*

[216] **Tayfun, A., (1990)** *Distribution of Large Wave Heights*, J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng., ASCE, **116(6)**, *686–707*

[217] **Tayfun, A., (1993)**. *Sampling-rate errors in statistics of wave heights and periods*, J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng., **119(2)**, *172–192.*

[218] **The specialist comittee on waves, (2002)**. *Final Report and Recommendations to the 23rd ITTC*, Proceedings of the 23rd International Towing Tank Cpnference, **II**.

[219] **Thomas, K. V., Baba, M., Harish, C. M., (1986)**. *Wave groupiness in long-travelled swell*, J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng., **112(4)**, *498–511.*

[220] **Thompson, W. C., Nelson, A. R., Sedivy, D. G., (1984)**. *Wave group anatomy of ocean wave spectra*, International Conference on Coastal Engineering, *661–677.*

[221] **Titov, L. F., (1971)**. *Wind-Driven Waves*, Gidrometeorologicheskoe Izdatel'stro, Leningrad.

[222] **Toba, Y., (1972)**. *Local balance in the air-sea boundary processes, I, On the growth process of wind waves*, J. Oceanogr. Soc. Japan, **28**, *109–121.*

[223] **Toba, Y., (1973)**. *Local balance in the air-sea boundary processes, III, On the spectrum of wind waves*, J. Oceanogr. Soc. Japan, **28**, *209–220.*

[224] **Toba, Y., Iida, N., Kawamura, H., Ebuchi, N., Jones, I., (1990)**. *The wave dependence of sea-surface wind stress*, J. Physical Oceanography, **20**, *705–721.*

[225] **Torsethaugen, K., (1993)**. *A two peak wave spectrum model*, International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, **2**, *175–180.*

[226] **Torsethaugen, K., (1996)**. *Model for a doubly peaked wave spectrum*, SINTEF Report STF22 A9E204.

[227] **Tuah, M., Hudspeth, R. T., (1982)**. *Comparisons of numerical random sea simulations*, *J. Waterways, Port, Coastal and Ocean Eng.*, **108(4)**, *569–584.*

[228] **Tucker, M. J., Challenor, P. G., Carter, D. J., (1984)**. *Numerical simulation of a random sea: a common error and its effect upon wave group statistics*, *Applied Ocean Research*, **6(2)**, *118–122.*

[229] **Uhlenbeck, G. E., (1943)**. *Theory of random processes*, *MIT Radiation Lab. Rep. 454.*

[230] **Van den Eynde, D., Monbaliu, J. (1989)**. *On the introduction of refraction effects in a wave prediction model*, *Progress in Belgian Oceanographic Research, ed. G. Pichot, 111–128.*

[231] **Van den Eynde, D., Wolf, P., (1990)**. *Deiningsprediktie aan de Belgische kust*, *Water*, **52**, *163–167.*

[232] **Vanmarcke, E. H., (1972)**. *Properties of spectral moments with applications to random vibration*, *J. Engineering Mechanics Division*, **98(EM2)**, *425–445.*

[233] **Van Vledder, G., (1990)**. *Directional response of wind waves to turning winds*, *Ph.D. thesis, Delft University of Technology, also in Communications on Hydraulic and Geotechnical Engineering*, **90(2)**, *Delft University of Technology, Faculty of Civil Engineering.*

[234] **Van Vledder, G., (1999a)**. *Source term investigation SWAM*, *ALKYON report A162.*

[235] **Vinje, T., (1989)**. *The statistical distribution of crest-to-trough wave heigths*, *Ocean Engineering*, **12(3)**, *221–234.*

[236] **Violante-Carvalho, N., Parente, C. E., Robinson, I. S., Nunes, L. M., (2001)**. *On the growth of wind generated waves in a sewll dominated region in the South Atlantic*, *OMAE 2001, OMAE2001/S & R-2132.*

[237] **Wang, D. W., Hwang, P. A ., (2001)**. *An operational method for separating wind sea and swell from ocean wave spectra*, J. Atmospheric and Oceanic Technology, **18**, *2052-2062.*

[238] **Warnsinck, W. H. et al. (1968)**. *Environmental Conditions*, Report of committee 1, Proc. of the 2nd Int. Ship Structures Congress, Oslo, Norway.

[239] **Wei, W. S., (1990)**. *Time Series Analysis*, Addison Wesley.

[240] **Welch, P. D., (1967)**. *The use of Fast Fourier Transform for the Estimation of Power Spectra: A method based on time averaging over short, modified periodograms.*, IEEE Trans. Audio and Electroacoust., **AU-15**, *70–73.*

[241] **Weller, R. A., Donelan, M. A., Briscoe, M. G., Huang, N. E., (1991)**. *Riding the crest: A tale of two wave experiments*, Bull. Amer. Meteor. Soc., **32**, *163–183.*

[242] **Wiener, N., (1930)**. *Generalized Harmonic Analysis*, Acta Math., **55**, *117–258.*

[243] **Wilson, B. W., (1965)**. *Numerical prediction of ocean waves in the North Atlantic for December, 1959*, Dt. Hydrogr. Z., **18**, *114–130.*

[244] **Wold, H., (1938)**. *A study in the analysis of stationary time series*, Thesis, Univ. of Stockholm.

[245] **Wu, J. (1982)**. *Wind-stress coefficients over sea surface from breeze to hurricane*, J. Geophys. Res., **87**, *9704–9706.*

[246] **Young, I. R., Hasselmann, S., Hasselmann, K., (1985)**. *Calculation of the non-linear wave-wave interaction in cross seas*, Hamburger Geophys. Einzel., **74**, *50.*

[247] **Yuen, C. K., Fraser, D., (1978)**. *Digital Spectral Analysis*, Pitman Publ., London.

[248] **Zakharov, V. E., (1968**. *Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of deep fluid*, J. Appl. Mech. Tech. Phys., **2**, *190–194*.

[249] **Zubaydi, A., Haddara, M. R., Swamidas, A. S. J., (2000)**. *On the use of the autocorrelation function to identify the damage in the side shell of a ship's hull*, Marine Structures, **13**, *537–551*.