UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA

DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA Y SISTEMAS

TESIS DOCTORAL

COMPUTACIÓN PARALELA Y DISTRIBUÍDA: RELACIONES ESTRUCTURA-FUNCIÓN EN RETINAS. REDES DE NEWTON, TRANSFORMADAS DE HERMITE, COMPLITUD, COOPERACIÓN Y ÓPTIMOS

ROBERTO MORENO DÍAZ

Las Palmas de Gran Canaria, 1993

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA

DOCTORADO EN INFORMÁTICA

DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA Y SISTEMAS

PROGRAMA DE PERCEPCIÓN ARTIFICIAL Y APLICACIONES

COMPUTACIÓN PARALELA Y DISTRIBUIDA: RELACIONES ESTRUCTURA-FUNCIÓN EN RETINAS.

Redes de Newton, Transformadas de Hermite, Complitud, Cooperación y Óptimos.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Tesis Doctoral presentada por D. Roberto Moreno-Díaz jr.

Dirigida por los doctores Dr. D. Roberto Moreno-Díaz y Dr. D. José Antonio Muñoz Blanco.

Los Directores, El Doctorando,

Las Palmas de Gran Canaria, a 30 de Abril de 1993.

Agradecimientos.

Quisiera empezar expresando mi sincero y profundo agradecimiento a los Profesores Drs. Roberto Moreno-Díaz y José Antonio Muñoz-Blanco, codirectores de este trabajo, cuya guía científica y profesional ha sido, y es, decisiva en mi formación. Su categoría, tanto científica como humana, su constante apoyo y sus consejos son pilares sobre los que se construyó la presente Tesis.

No puedo olvidar, pues cimentó mi conocimiento científico en el campo experimental, al Prof. Dr. K. Nicholas Leibovic del Departamento de Biofísica de la Universidad del Estado de Nueva York en Buffalo, USA.

También me gustaría agradecer la colaboración, disponibilidad y ánimos que he recibido de mis compañeros del Departamento de Informática y Sistemas, particularmente de la Profesora Dra. Olenka Bolívar Toledo, cuyas reflexiones y comentarios han acabado de perfilar el presente documento.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

A
Arminda Díaz Delgado
y
Roberto Moreno Díaz,

dos condiciones sine qua non.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

INDICE

Preliminares: Teoría retinal y Computación paralela.

1.-Visión Natural y Visión artificial. 1

2.- Estructura de la Retina. 3

3.- Campos receptivos. 6

4.- Organización por capas. 9

5.- Bases de una Teoría Retinal. 12

5.1.- El proceso de información en la Retina. 12

5.1.1.- El papel de las capas plexiformes. 13

6.- El Esquema General de la Tesis y su Resumen 15

PARTE I: Filtros y Redes de Newton y Transformaciones de Hermite.

1.1.- Del Cálculo de Diferencias Finitas al concepto de Filtro. 17

1.1.1.- Sobre predicción de un evento en una secuencia. 20

1.1.2.- Filtros de Newton. 24

1.1.3.- Microprocesos y estructura retinal. 29

1.2.- Filtros generalizados de Newton. 30

1.2.1.- Generalización de Filtros de Newton. 30

1.2.2.- Teoremas de equivalencia. 31

1.2.3.- Expansión de funciones en microprocesos de Newton. 34

1.3.- Transformaciones de Newton y Complitud. 39

1.3.1.- Transformaciones de tipo convolución. 39

1.3.2.- Agujeros en Redes de Newton. 43

1.3.3.- Transformaciones causales. 44

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

1.4.- Transformaciones Globales.. 49
1.4.1.- Complitud: Matrices de Newton. 49
1.4.2.- Muestreo Generalizado. Implicaciones en Teoria Neuronal. 55
1.4.3.-Estructuras 3-D para Filtros de Newton. 60

1.5.- El paso al contínuo: Análisis de Hermite. 64
1.5.1.- Funciones de Hermite.. 64
1.5.2.- Análisis monocanal de Hermite. 68
1.5.3.- Extensión bidimensional. 69
1.5.4.- Sistemas causales de Hermite. 70
1.5.5.- Sistemas espacio-temporales de Hermite. 71
1.5.6.- Un nuevo enfoque del proceso retinal. 71

1.6.- Ilustraciones en Proceso de Imagen. 74

PARTE II: Sobre la Complitud y Cooperación en Retinas Bidimensionales.

2.1.- Transformaciones por capas. 78
2.2.- Convergencia y divergencia. Complitud de Transformaciones. 83
2.3.- Extensión de Retinas y Complitud. 84
2.4.- Implicaciones en Teoría Retinal. 92
2.4.1.- Un esquema cooperativo que garantiza complitud frente a fallos . . .93
2.5.- Computación distribuida y complitud. 94

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

PARTE III: Estructura y función desde la Neurofisiología.

3.1.- Introducción. 98

3.2.- Fuentes de ruido en fotorreceptores. 103

3.3.- Criterio de óptimo. 105

3.4.- Aplicación del criterio según las diversas especies. 107

3.5.- Otros factores que influyen en la dimensión de los bastones. 111

3.6.- Efecto de la variación de parámetros. 112

3.7.- Conclusiones. 113

Apéndice. Método Experimental. 122

Conclusiones y principales aportaciones. 125

Referencias. 129

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

PRELIMINARES

TEORIA RETINAL Y COMPUTACION PARALELA

Plan general de la Tesis.

1.- Visión Natural y Visión Artificial.

La vista es el sentido más importante en animales superiores, por supuesto en el hombre. El 80% de la información que obtenemos del mundo exterior nos llega a través de los ojos, de los cuales salen más fibras nerviosas que de cualquier otro órgano sensorial con destino al cerebro. Gran parte de nuestro proceso mental, incluida la memoria, basa su actuación fundamentalmente en la visión. En los últimos años ha habido un gran desarrollo tanto en nuestro conocimiento de las bases biológicas de la visión como en la formulación de teorías computacionales que encierren principios de su funcionamiento y los hagan aplicables en contextos no naturales, en creaciones humanas en un doble esfuerzo por comprender los sistemas biológicos y construir eficientes sistemas artificiales. Sin embargo, las diferencias en implementación son obvias. La retina humana, por ejemplo, no opera según los mismos principios que rigen el funcionamiento de una cámara de estado sólido, si bien los objetivos finales de una cierta tarea visual pueden ser especificados de forma similar tanto en una máquina como en un sistema natural. Hasta ahora, los esfuerzos de entender el flujo de datos y las representaciones de información en sistemas biológicos usando ideas y conceptos prestados de la Ingeniería e Informática han tenido un éxito muy limitado.

A pesar de las enormes diferencias, ambas disciplinas, visión natural y visión

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

artificial, pueden influenciarse y ayudarse mutuamente. Al fin y al cabo, el objetivo final de ambos tipos de sistemas es el mismo: extraer información útil para quien ve (ya sea un robot o una rana) a partir de las imagenes que recibe. Esto implica dos cosas: la existencia de un Sistema que engloba al visual y cuyos fines sirve y la reducción de la información total contenida originalmente en las imagenes junto con una especificación del grado de relevancia de la información para el Sistema global. En los sistemas artificiales dichas especificaciones son definidas por el diseñador. En los sistemas naturales, las especificaciones no son conocidas y por tanto son objeto de estudio (en unos pocos se ha llegado a tener un conjunto muy elegante de especificaciones que explique el funcionamiento del sistema visual en relación al Sistema global).

La construcción de modelos de los sistemas biológicos puede seguir diversos caminos, si bien todos los simulacros, las copias más o menos detalladas de los sistemas naturales se han revelado lejos de ser útiles para aplicaciones artificiales. No hay duda, la brecha entre sistemas naturales y artificiales se hace día a día más estrecha según se van aclarando los misterios que encierra la compleja estructura multicapa de la visión natural, pero esa brecha todavía existe. La modelización, pues, podría consistir más bien en el desarrollo de una teoría efectiva de cómo se construye la representación visual invariante del mundo exterior, sabiendo que la percepción está fundamentalmente influida, según las ideas de Marr, por aquello que se necesita conocer [1], la visión es un proceso determinado por los datos.

Por otro lado, como han puntualizado Mira y Moreno-Díaz [2], siendo la función neuronal subyacente al proceso visual un fenómeno realmente complejo, se requieren planteamientos muy cuidadosos a la hora de explicar dicha función. La teorización sobre el sistema nervioso en general viene limitada a priori por las herramientas conceptuales y formales usadas en la construcción del modelo.

BIBLIOTECA GENERAL

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

2.- Estructura de la Retina.

El Camino Visual, la vía por la que discurre la información que en forma de patrón luminoso llega a la retina y en la que es recodificada, transmitida y analizada, es uno de los caminos más concurridos de la Ciencia de los últimos años. Fisiólogos, biólogos, bioquímicos, ingenieros e informáticos tratan, cada uno desde su punto de vista, de romper todos los secretos que encierra, desde el comportamiento molecular de neurotransmisores hasta la extracción de características de la imagen incidente en la retina, construyendo modelos que en mayor o menor medida se aproximan a lo que se conoce de la realidad del sistema. El efecto de estudiar un tema tan apasionante es como el de beber agua salada cuando se está sediento: se provoca más sed sin estar nunca saciado.

Aún a riesgo de caer en la monotonía, es necesario revisar aquí las bases estructurales de la retina, muchas veces llamada "ventana del cerebro" dada su accesibilidad para el estudio científico. En la Figura 0 se aprecia la representación esquemática del ojo humano.

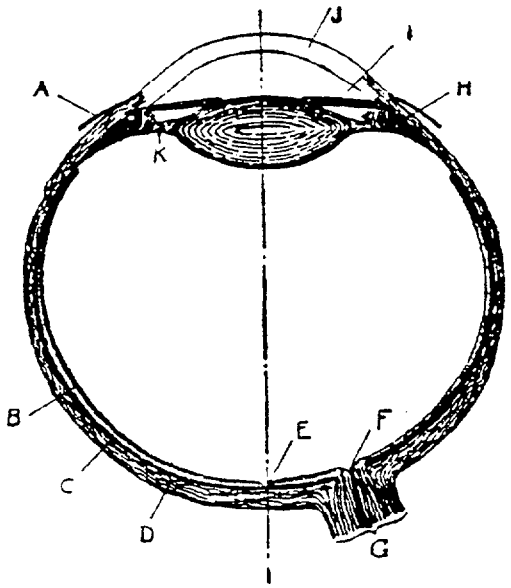


Figura 0: Las principales partes del ojo humano.
A, Conjuntiva; B, Retina; C, Coroide; D, Esclera;E, Fóvea
F, Punto Ciego;G, Nervio óptico;H, músculo ciliar;I, iris;J, córnea; K, ligamento.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

La luz que llega al ojo, antes de ser absorbida por los fotorreceptores, ha de atravesar las capas de células de la retina en sentido inverso al que a continuación seguirá la información hacia el cerebro. Para evitar distorsiones de la luz, la retina ha de ser, pues, un tejido muy delgado y transparente. Partiendo desde la zona más interior, la retina se compone de varias capas de células. La luz es "atrapada" por los fotorreceptores, conos y bastones, que contienen moléculas de pigmentos fotosensibles que se isomerizan al ser golpeadas por un fotón, dando lugar a una cascada de acontecimientos bioquímicos que en definitiva hacen variar la permeabilidad eléctrica de sus membranas produciendo un potencial lento. Los fotorreceptores son, pues, transductores que traducen una señal luminosa en una señal eléctrica cuya duración y amplitud dependen de la intensidad y longitud de onda de la luz incidente. Tradicionalmente se identifica la acción de los bastones con la detección de niveles escotópicos de iluminación y la de los conos con niveles fotópicos y discriminación cromática. Ya a este nivel la Naturaleza presenta gran variedad de diseños: desde retinas con ambos tipos de células como la humana, hasta retinas que presentan sólo un tipo de ellas, como la Raja Erinicea (sólo bastones) o ciertas especies de tortugas (sólo conos) [3].

Tras esta primera capa somática nos encontramos la primera capa plexiforme (capa plexiforme externa) en la que se sitúan las conexiones sinápticas de fotorreceptores con células bipolares y horizontales y tras ella la capa somática interna con los cuerpos celulares de bipolares, horizontales e interplexiformes. Las células horizontales reciben información de los fotorreceptores y envían su salida tanto a fotorreceptores como bipolares. Las bipolares, por su parte, transportan la información aferente entre las dos capas plexiformes, es decir, sus salidas alimentan las conexiones con las células amacrinas y las ganglionares (conexiones que forman la capa plexiforme interna), cuyos cuerpos celulares forman la capa

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

somática más externa de la retina. Los axones de las ganglionares forman el nervio óptico que abandona el ojo a través del punto ciego y lleva la salida de estas células al cuerpo geniculado lateral (ver Figura 1). El número de células en cada capa somática varía de especie a especie. En las ranas, por ejemplo, un millón de fotorreceptores converge en medio millón de células ganglionares. En el hombre, la imagen retiniana es muestreada por unos 125 millones de fotorreceptores, y el nervio óptico consta, por contra, de un millón de líneas [4], [5].

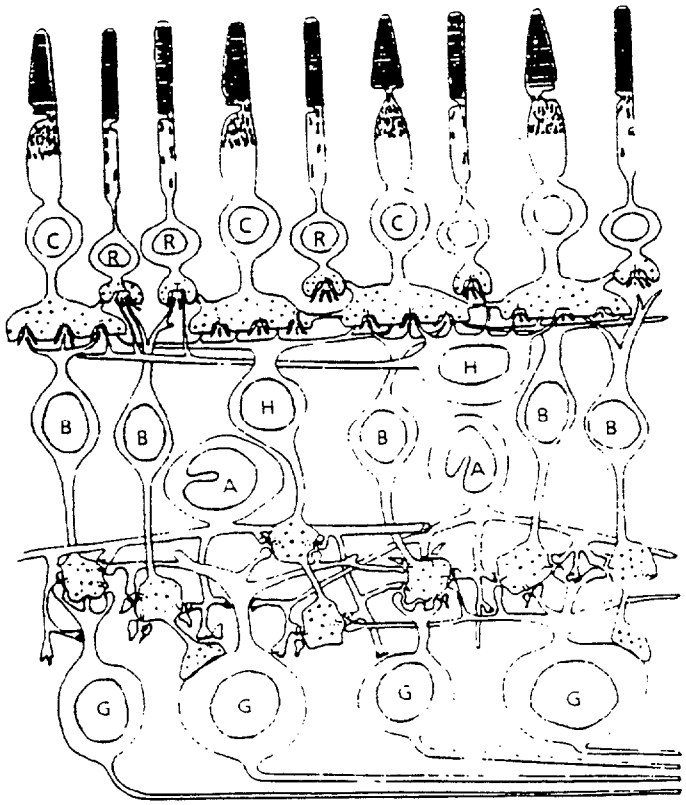


Figura 1: Una representación clásica de las conexiones celulares en retina. C, conos; R, bastones; B, células bipolares, H, células horizontales; A, células amacrinas;G, ganglionares.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

En la retina, como en los otros tejidos neuronales, las células se comunican entre sí a través de sinapsis, de las cuales existen dos tipos: eléctricas y químicas. Las sinapsis químicas, que representan la principal forma de comunicación interneuronal, incluyen la liberación de sustancias neurotransmisoras por las células presinápticas y su detección por receptores especializados en las postsinápticas. Fotorreceptores y bipolares parecen usar glutamato como principal neurotransmisor, si bien se han descrito otras sustancias presentes actuando como transmisores, así la serotonina, la dopamina y la glicina [6].

Las retinas de muchas especies presentan una región central o fóvea donde la agudeza visual presenta un máximo. En esta región, la población de fotorreceptores es más densa que en otras zonas retinales y las células están desplazadas lateralmente, de forma que la luz incida lo más directamente posible sobre los fotorreceptores.

3.- Campos Receptivos.

La función, el comportamiento, de las células bipolares se ha venido describiendo desde los años 40 y desde entonces se han discriminado diversos tipos de estas células dependiendo de la respuesta presentada a diversos estímulos. Para dar cuenta de aquellos resultados apareció el concepto de Campo Receptivo (originalmente aplicado a células ganglionares, más tarde ampliado a todo el Sistema Nervioso). El Campo Receptivo (C.R.)(y su versión artificial, el Campo de Datos [7,8]) de una célula en una capa determinada es el conjunto de células de la capa anterior que le envían señales. Intrínsecamente unido al concepto de C.R. se encuentra el de Proceso por Capas, hoy en día adoptado por informáticos y que originalmente proviene de la estructura observada en sistemas nerviosos.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Los campos receptivos de células bipolares y ganglionares tienen una forma aproximadamente circular y están divididos en dos zonas, centro y periferia, con propiedades antagonistas: para lograr una respuesta máxima en la célula, centro y periferia han de estar diferentemente iluminados, es decir, el centro más que la periferia (células ON) o viceversa (células OFF). La mayoría de los sistemas sensoriales usan este mecanismo centro-periferia como filtro espacial para aumentar el contraste. El resultado básico es que puntos pequeños de luz producen respuestas más fuertes y sostenidas que una luz difusa de la misma intensidad. Debido a la existencia de estos dos tipos funcionales de bipolares, se suele hablar de la existencia de dos canales de proceso en esta capa: canal ON y canal OFF (ver Figura 2).

El funcionamiento de las células horizontales está directamente unido a la acción de la periferia en bipolares [9]. Las horizontales realizan una sumación espacial a lo largo de todo su campo receptivo, alimentado por fotorreceptores, campo receptivo que suele ser mucho más grande que el de las bipolares con los fotorreceptores.

Las células bipolares conectan sus terminales en la retina interna a las células amacrinas. Estas son neuronas sin axón y representan el grupo más variado de células en la retina. Basando la clasificación en su morfología y en el tipo de neurotransmisor que contienen, se han descrito cerca de 30 clases diferentes de amacrinas. La función de estas células está ligada a la función de las ganglionares de una manera similar a cómo las horizontales se relacionan con las bipolares: las hay excitadoras e inhibidoras y parecen regular la direccionalidad que presentan algunas células ganglionares [9].

Las células ganglionares forman la última capa somática de la retina. Sus axones

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

transportan la información visual procesada al Núcleo Lateral Geniculado, y de aquí procede al cortex visual primario. Area 17 o V1, situado en la región occipital. Dichos axones, empaquetados en un cable, conforman el nervio óptico. Dependiendo del tipo de actividad que presentan, las ganglionares han sido divididas tradicionalmente, para especies como el gato, en tres tipos: ganglionares X, Y y W. Las ganglionares X presentan respuestas sostenidas lineales tanto espacial como temporalmente (anatómicamente se conocen como células beta, tienen campos dendríticos pequeños y se presentan en grupos densos). Las células Y, por otro lado, presentan respuestas transitorias que responden no linealmente a estímulos luminosos. La velocidad de conducción en el axón es mayor que la de las X (anatómicamente son las células alfa, presentando ramificaciones dendríticas mayores que las células beta). El tercer grupo, ganglionares W, tienen grandes campos receptivos y velocidades de conducción axonal muy bajas (anatómicamente son las células gamma). Se ha sugerido que la "acción procesadora" de las ganglionares se divide en tres funciones: visión de patrones de alta resolución, proceso de movimiento y visión ambiente, correlacionando estas tres funciones con las células X,Y y W respectivamente [10]. Esta clasificación de células ganglionares se hizo originalmente en la retina del gato [11]. En otras retinas, como la de la rana, se han descrito grupos celulares similares morfológicamente pero con funciones y tipos de respuestas diferentes, mostrando una mayor especialización a la hora de detectar y computar parámetros específicos de la imagen de entrada [12]. Este último punto, el del estudio de la función neuronal a partir de la actividad celular, presenta serias dificultades a la hora de elegir qué técnica es la más adecuada, cómo ha de aplicarse y una vez hecho el experimento, cómo han de interpretarse los resultados [13,14]. Actualmente existen seis tipos de técnicas usadas en neurociencia: anatómicas, bioquímicas, de lesiones, de estímulo, registros y análisis de comportamiento. El tipo de interpretación que se le da

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

a la función neuronal depende en gran medida de la técnica usada en su estudio, dándose el caso de interpretaciones a veces contradictorias del mismo sistema dependiendo del modo de ver la función.

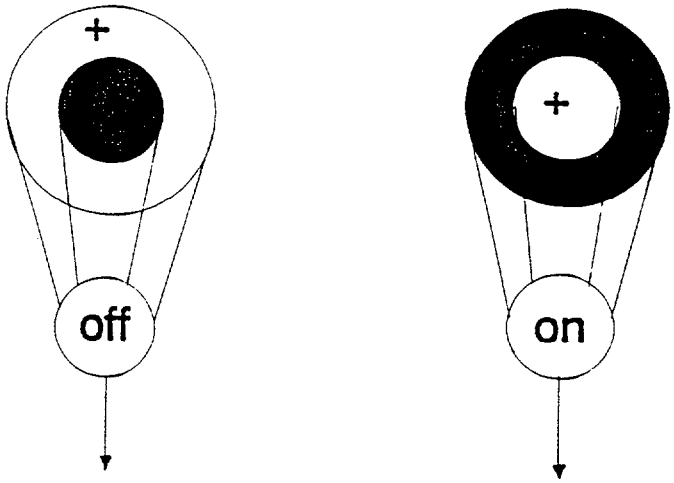


Figura 2: Representación funcional clásica de los dos tipos de campos receptivos ganglionares: de centro OFF y de centro ON.

4.- Organización por capas. Convergencia y Divergencia.

La estructura por capas que hemos visto existe en retina es omnipresente a lo largo de todos los Sistemas Nerviosos de especies vertebradas. La información es procesada en estas capas tanto longitudinalmente (fotorreceptores-bipolares-ganglionares) como transversalmente (horizontales y amacrinas), no sólo en los subsistemas sensoriales, también en corteza. Cada sistema sensorial requiere tres o cuatro capas de células conectadas secuencialmente antes de que la información llegue al Cortex (así, el sistema somatosensorial

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

tiene tres y el auditivo, cuatro). La naturaleza de las señales dentro de cada capa es homogénea si bien de una capa a otra puede variar el tipo de codificación de la información (de respuestas graduales en fotorreceptores y bipolares se pasa a trenes de pulsos en ganglionares) tanto como el significado de la información que está siendo transmitida [21]. A su vez, el número de células que procesan la información y el tipo y tamaño de los campos receptivos varía de capa a capa, existiendo una contínua "contracción" y "expansión" de los lugares en donde es procesada la información. Así, en el hombre por ejemplo, existen 125 millones de células receptoras en la retina, y 1 millón de ganglionares [15]; en el macaco, 102 millones de receptores proyectan en 1.1 millones de ganglionares que a su vez conectan a 2 millones de células en el Núcleo Lateral Geniculado y de ahí la información se expande a cerca de 65-70 millones de células en la capa IV de la corteza visual primaria V1 [16]. En cada capa se observa un altísimo grado de solape entre campos receptivos vecinos, lo que unido a la convergencia y divergencia de información entre capas, ha dado lugar a la formulación de diversos modelos de localización y detección de estímulos [17,18], preservación de información (y su relación con la complitud de las transformaciones llevadas a cabo por las neuronas vistas como procesadores)[17,19], percepción de movimiento [18] y funcionamiento de ganglionares en retinas de anfibios [20].

En este esquema de computación por capas es esperable que conforme la información progresa en su camino hacia zonas más centrales del cerebro, el significado de la actividad neuronal se incremente dramáticamente. A medida que nos movemos desde los sensores, el grado de complejidad semántica aumenta y se hace más difícil descifrar la función neuronal atendiendo sólo al registro de su actividad eléctrica . Es aquí donde un análisis tanto de la cooperatividad neuronal como de su morfogénesis se hace necesario si se pretende llegar a

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

un entendimiento de la función nerviosa [21,22]. Este aumento de la semántica de la actividad celular se observa también entre niveles neuronales equivalentes de especies diferentes. Así, en anfibios las señales que abandonan la retina están fuertemente relacionadas con estímulos específicos y las ganglionares realizan una operación más elaborada y especializada que las de las retinas de gatos y monos, donde no se encuentra tal especificidad.

Un concepto íntimamente ligado a la computación o proceso por capas es el de computación paralela. Dentro de cada capa existen, como hemos visto, multitud de células (procesadores) trabajando sobre los datos de sus campos receptivos a la vez, en paralelo. Como queda apuntado, las células de una capa determinada no hacen todas ellas lo mismo ni son sensibles a exactamente los mismos tipos de estímulos sobre su campo receptivo. Este paralelismo en el proceso implica, pues, una extracción de características diferentes de la información de entrada. El proceso en paralelo dentro de una capa se complica conforme la información llega al cerebro, donde existen diversos caminos de bifurcación y la computación en paralelo ha de verse no sólo dentro de una capa sino entre capas diferentes: áreas paralelas diferentes tienen funciones independientes. El análisis apropiado de los procesos retinales, pues, ha de basarse en los conceptos de computación por capas, contenidos en germen en los escritos de McCulloch y Pitts [23].

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

5.- Bases de una Teoría Retinal.

5.1.- El proceso de información en la Retina.

La retina de los vertebrados en un amplio espectro de especies desde peces, anfibios, reptiles y aves hasta mamíferos [24], presenta, como hemos visto, una estructura anatómica por capas de células que tiene un evidente sentido funcional . Esta estructura operativa en capas ha sido también encontrada en vías más altas del sistema visual, como por ejemplo en la bien definida estructura de 4 capas de proceso en el téctum de la rana.

En las especies carentes de corteza (o con corteza muy rudimentaria, especies inferiores) el téctum es el centro visual dominante. Las descargas que conduce el nervio óptico están más fuertemente relacionadas con determinadas formas del estímulo visual y no proporcionan un mapa detallado de la iluminación sobre la retina, como ocurre en especies superiores. Así, en la rana, las ganglionares son complejas en su mayor parte y realizan una operación más elaborada y especializada que en el gato o en el mono, donde son fundamentalmente simples. Los campos receptivos retinales, estudiados en un número considerable de especies, pueden clasificarse en dos grandes grupos: aquellos que son selectivos para alguna característica espacial o temporal del estímulo y aquellos que no parecen presentar selectividad. Esta mayor especificidad y eficiencia en la forma de codificar la información está correlacionada inversamente con una buena discriminación de formas, la cual está mucho más desarrollada en primates (casi carentes de campos selectivos) y menos en aves y anfibios (cuyos campos son selectivos). En los vertebrados superiores, la selectividad aparece retrasada al nivel cortical. Una posible explicación es que la selectividad

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

implica una pérdida de generalidad. [25]

Puede decirse entonces que a medida que se desciende en la escala biológica las funciones de corteza son realizadas por capas de proceso inferiores, a la vez que pierden versatilidad y calidad e incluso la retina participa en mayor grado en estas tareas. Las distintas ganglionares de los anfibios y las aves muestran una arborización dendrítica que recoge información de estratos bien definidos de la capa plexiforme interna. En casi todas las especies, junto a algunas células de procesos difusos, existen otras (la mayor parte) cuyas arborizaciones terminan en capas determinadas de la retina donde encuentran las señales que a su vez van a procesar.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

5.1.1.- El papel de las capas plexiformes.

La Capa Plexiforme Interna (CPI) es muy compleja y su papel parece ser bastante relevante. Ya han sido descritas los diferentes tipos de células ganglionares, tanto desde el punto de vista morfológico como funcional. Cada clase de ganglionar, sin embargo, no tiene un grupo específico de bipolares, células cuya salida es compartida por diferentes clases de ganglionares. Esto lleva a pensar que las peculiaridades diferenciales son debidas a operaciones realizadas en la CPI o en el mismo cuerpo de la ganglionar.

Las capas externas de la retina deben, entoces, proporcionar a las ganglionares el mínimo conjunto de señales que les permita construir sus respuestas especializadas. Este mínimo conjunto de operaciones puede consistir en la extracción de propiedades locales (abrillantamiento local, oscurecimiento, contraste). Para esta extracción, las capas exteriores

ofrecen dispersión local de la señal puntual, retrasos en las cadenas que implican varias células e interacciones laterales entre sus procesos. Estos niveles de señales son entregados a la Capa Plexiforme Interna. La CPI es un lugar en principio adecuado para la extracción de propiedades de los estímulos que caen en la retina ya que la información espacial está todavía presente, antes de su posterior integración por las ganglionares, y porque esta capa está interconectada en horizontal profusamente. Esta capa parece ser la candidata perfecta a lugar donde ocurre la especialización. [26]

Consideremos ahora la Capa Plexiforme Externa y las capas nucleares externa e interna, en donde tiene lugar el preproceso de la imagen retiniana. Ya a nivel de bipolares se registran campos receptivos organizados antagónicamente centro-periferia, con respuestas de potenciales lentos, diferenciándose de las descargas impulsivas ON u OFF de las ganglionares simples. En la literatura del área se pueden encontrar trabajos en los que se hace notar el esparcimiento horizontal de estimulación que se da ya a nivel de contactos entre las bases de los fotorreceptores, así como su mutua interacción. El papel fundamental de este traslado de la información es juzgado por las células horizontales. En principio, este esparcimiento debe ser isótropo, ya que en los vertebrados superiores las células ganglionares anisótropas son la excepción.

El fenómeno de adaptación al estímulo luminoso es debido a los umbrales de estas capas, umbrales que deben ser función de las señales sobre grandes zonas de la retina, lo que introduce fenómenos no lineales. Este resultado es sugerido también por las ganglionares desprovistas de actividad espontánea, pues en ellas no están presentes los resultados negativos de las operaciones de preproceso, indicando que al menos las señales son recortadas por el

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

umbral adaptivo.

De esta manera, las capas exteriores de la retina poseen la estructura anatómico-fisiológica necesaria para la realización de un conjunto mínimo de operaciones de preproceso. Al menos pueden estar presentes señales de abrillantamiento y oscurecimiento local, lo que depende de la estructura retinal concreta en cada especie.

6.- Esquema general de la Tesis.

Esta Tesis trata de estructuras y funciones visuales de bajo nivel. Se mueve en la "tierra de nadie", que Norbert Wiener calificó de muy fecunda, existente entre la Teoría de la Computación y la Neurofisiología. En ella, se expondrán las bases microprocesales de una nueva familia de filtros (mundo de lo artificial) cuya construcción está inspirada directamente en la microestructura sináptica de las neuronas (mundo natural). Las propiedades matemáticas investigadas en estos filtros, llamados Filtros de Newton, recogen muchas de las propiedades descritas en los campos receptivos ganglionares. Estas propiedades, en su contrapartida artificial, son resultado de la *estructura* del sistema.

El análisis de estos nuevos filtros incluye tanto la generalización de los mismos y su equivalencia a cualquier otra clase de filtros discretos de naturaleza convolutoria como la investigación de características como la complitud y sus implicaciones en Teoría Neuronal y Retinal.

La formulación en el contínuo de estos filtros da lugar a las funciones de Hermite, conjunto ortogonal y completo de funciones obtenidas a partir de las sucesivas derivadas de una gaussiana. Estas funciones, vistas como kérnels de una Transformación, nos van a ir

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

dando las formas de los descriptores bidimensionales más usados en visión artificial. La detección de contraste y bordes (la *función*) surge, así, como consecuencia inmediata del constructo realizado previamente (la *estructura*). En una primera proposición, se sugiere que el Análisis de Hermite ofrece más contrapartidas naturales que otros admitidos clásicamente como el Análisis de Fourier. La formulación se completa con la extensión temporal de estas transformaciones, introduciendo los conceptos de Transformaciones Causales de Hermite y Núcleos Espacio-temporales de Hermite.

Una revisión de resultados anteriores debidos a Candela, Bolívar y Muñoz-Blanco referentes a complitud en retinas bidimensionales nos lleva a un replanteamiento del concepto de descriptor y de la capacidad de cómputo en paralelo en estructuras por capas. Se propone, en este apartado, un mecanismo neuronal cooperativo (una *estructura*) que garantiza la complitud de la operación (la *función*) llevada a cabo por el sistema frente a fallos de los procesadores.

En el último capítulo se presenta un ejemplo, investigado directamente en el mundo natural, que ilustra la estrecha relación función-estructura, ya apuntada en la primera parte de la obra, que subyace en las redes neuronales. Para ello se ha elegido la frontera sensible del sistema visual: los fotorreceptores, mostrándose cómo un principio de actividad óptima parece estar detrás de su estructura morfológica en un número de especies animales investigadas.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

PARTE I

FILTROS Y REDES DE NEWTON Y TRANSFORMACIONES DE HERMITE

Una nueva familia de transformaciones y funcionales con soporte en microestructuras.

1.1.- Del Cálculo de Diferencias Finitas al concepto de Filtro.

El Cálculo de Diferencias Finitas ocupa, en Matemáticas, una posición intermedia entre el Algebra y el Cálculo Diferencial. Su origen tal y como hoy se conoce, se encuentra en el *Methodus Incrementorum* , un tratado publicado entre 1715 y 1717 por el matemático inglés Brook Taylor, al que debemos el Teorema que lleva su nombre [27]. En las ciencias experimentales se usan a veces nociones de este cálculo, con el objeto de hallar fórmulas empíricas o de interpolar valores. Newton y Leibnitz llegaron al Cálculo Diferencial a partir del cálculo de diferencias. Para una función de una variable, Y(i), una ecuación diferencial como dY/di=F(i) se puede escribir para saltos finitos (saltos "unitarios" en la variable i) como ecuación en diferencias:

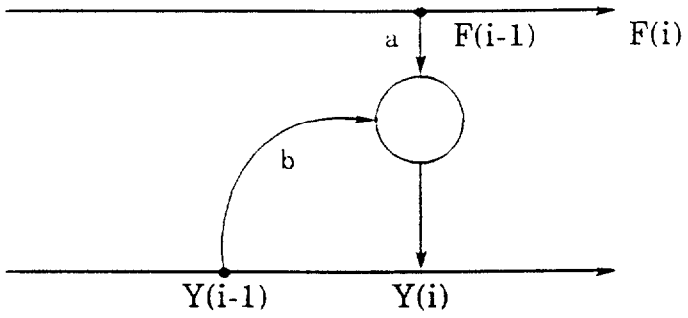
$$Y(i+1) - Y(i) = F(i) \qquad \text{o bien}$$

$$Y(i) - Y(i-1) = F(i-1)$$

Y se podría, asímismo, construir una máquina hipotética, similar a una neurona artificial, que resolviese esa ecuación, tal y como se muestra en la siguiente figura para a=1

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

y b=1 (siendo a y b los pesos):



Una máquina modular que computa la solución
de una ecuación diferencial de primer orden.

cuyo funcionamiento es fácil de ver. Se arranca la máquina a la izquierda y provista con la condición inicial Y(0) se va imprimiendo el valor de Y(i), la solución. La generalización obvia e inmediata es la "máquina lineal de 1 lugar de memoria":

$$Y(i) = aF(i-1) + bY(i-1)$$

o de más lugares de memoria, que puede, y da, lugar a toda una interesante representación de la operación de sistemas lineales y no lineales, borrosos e incluso simbólicos [28,29] y desembocar, por otro lado, en los conceptos de filtro y transformación. Sin embargo, el camino que se sigue aquí es diferente.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Newton empleó un procedimiento de cálculo de diferencias para lo que él llamaba "rebajar la dignidad de un polinomio" y realizar en esencia lo que hoy conoceríamos por interpolación. Funcionaba, este "rebajamiento de la dignidad", de la siguiente manera. Supongamos que tengo un conjunto de números que sé son el resultado de sustituir los valores 0, 1, 2... en un polinomio que yo desconozco y que me gustaría encontrar.Sea así, por ejemplo, la secuencia:

-1 4 15 32

Rebajar la dignidad del polinomio consiste en generar una segunda fila de números tales que cada uno es la diferencia de dos consecutivos de la original. Es decir, en nuestro ejemplo:

5 11 17

Si sigo rebajando:

6 6

obtengo que la diferencia entre dos consecutivos es constante. A partir de este hecho, puedo obtener un polinomio que genere los cuatro números originales: el grado del polinomio sería igual al número de "rebajamientos" necesario para obtener una diferencia constante. En nuestro caso, 2. El coeficiente de x^2 en nuestro ejemplo es la mitad de esa diferencia constante: 3. El término independiente es fácil de ver: el primer número de la serie original: -1. Y el coeficiente de x es el primer número de la segunda fila menos la mitad del valor de

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

la diferencia constante: 5-3=2. El polinomio buscado es $3x^2+2x-1$ y en efecto genera la secuencia -1,4,15,32 al sustituir x por 0,1,2,3. Vemos que, de la misma forma, se podría "predecir" el siguiente número de la secuencia original (en caso de no conocer el polinomio) sin más que tomar como fija la cantidad 6 de la última fila y reconstruir el árbol hacia arriba (es decir, sumando en vez de restando los coeficientes en cada fila). En lenguaje más moderno (aunque no necesariamente más transparente) las derivadas de orden superior a n+1 de un polinomio de grado n son nulas, y viceversa. Esto nos lleva al primer punto interesante del presente trabajo.

1.1.1.- Sobre predicción de un evento en una secuencia.

Sea una secuencia de eventos x_0, x_1, x_2..., x_n y dos reglas, que llamaremos R y S, tales que:

$R(x_{i+1},x_i)=x'_i$ y

$S(x_i,x'_i)=x_{i+1}$

La predicción del evento x_{n+1} en la secuencia se puede llevar a cabo con las citadas reglas y la hipótesis de que a partir de la n-ésima reducción (aplicación de la regla R a la secuencia), el valor reducido es constante o cambia de acuerdo con una ley conocida.

En el Cálculo de Diferencias de Newton, la regla R es la diferencia y la regla S es la suma, o bien, para exponenciales, el cociente y el producto.

Supongamos, como ilustración, una secuencia genérica como la de la Figura 1a, donde la regla R es la adición y la S la sustracción. Aplicando la regla R hasta el límite

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

posible y suponiendo el resultado en el límite como constante, el siguiente término puede ser predicho (Figura 1b).

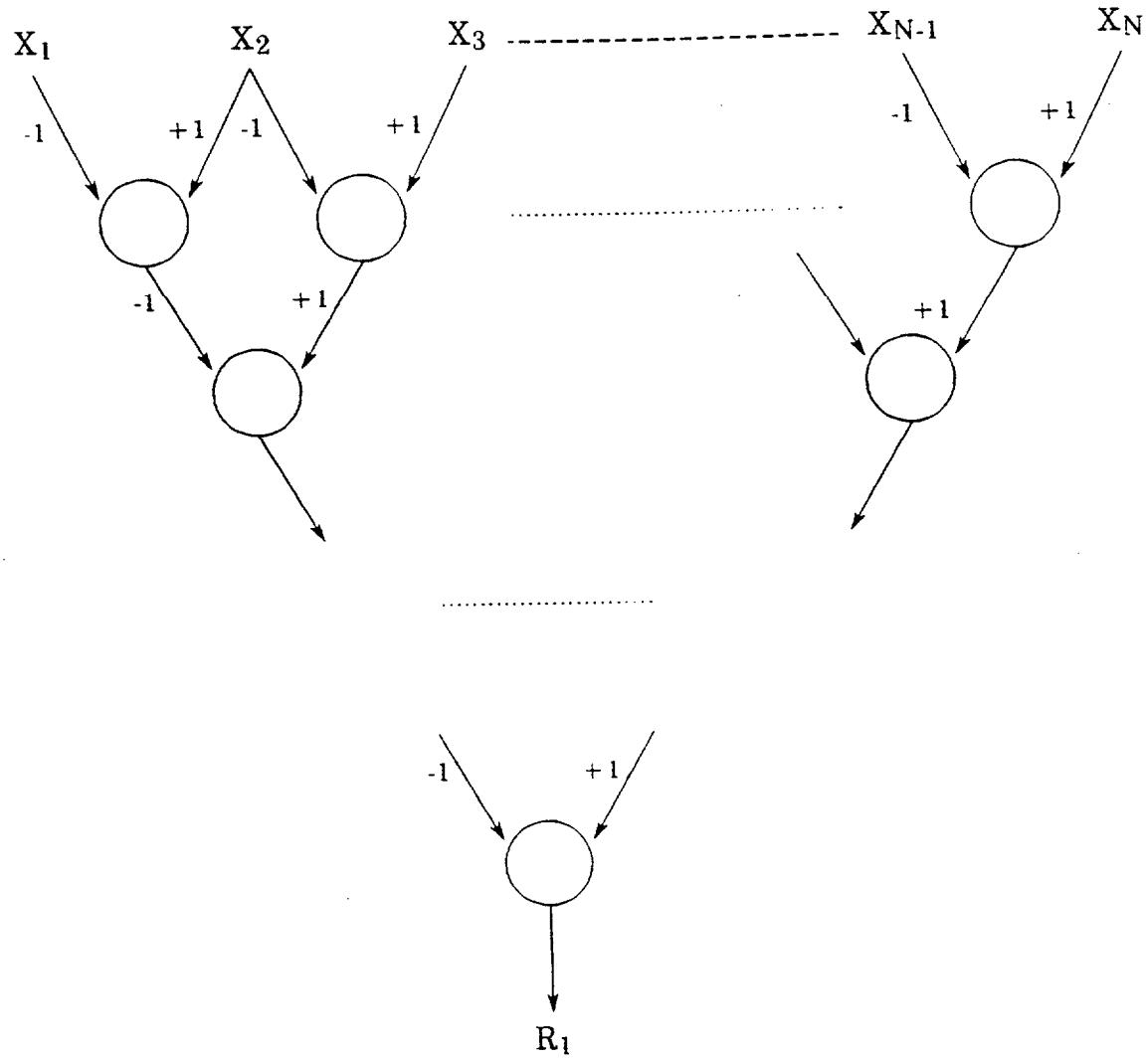


Figura 1.a: Un árbol genérico construido sobre una secuencia de eventos x_i.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

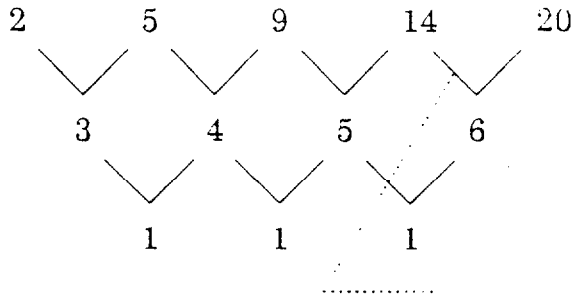


Figura 1.b: A partir de la secuencia original y suponiendo la segunda reducción como constante, se puede reconstruir "hacia arriba" el árbol y predecir que el siguiente evento de la secuencia es 20. La zona recuadrada es la reconstruida.

Ahora bien, ¿cuáles son los pesos globales con los que influye cada elemento de la secuencia en el resultado R_1? Es decir, ¿cómo se pasa de la fila n a la primera? Por desarrollo directo, es fácil ver que los pesos coinciden con los coeficientes del desarrollo del binomio de Newton, es decir el coeficiente en lugar k de la fila n es:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

es decir, los pesos de la n-ésima fila son las componentes de la n-ésima fila del Triángulo de Pascal.

Por otro lado, si hacemos que R sea una diferencia y S una adición, obtenemos los coeficientes pero con signos alternantes, como se aprecia en la Figura 2. Es decir, que una red en n-capas con la estructura de la de la figura, tiene unos pesos dados por:

$$(-1)^{n+k} \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

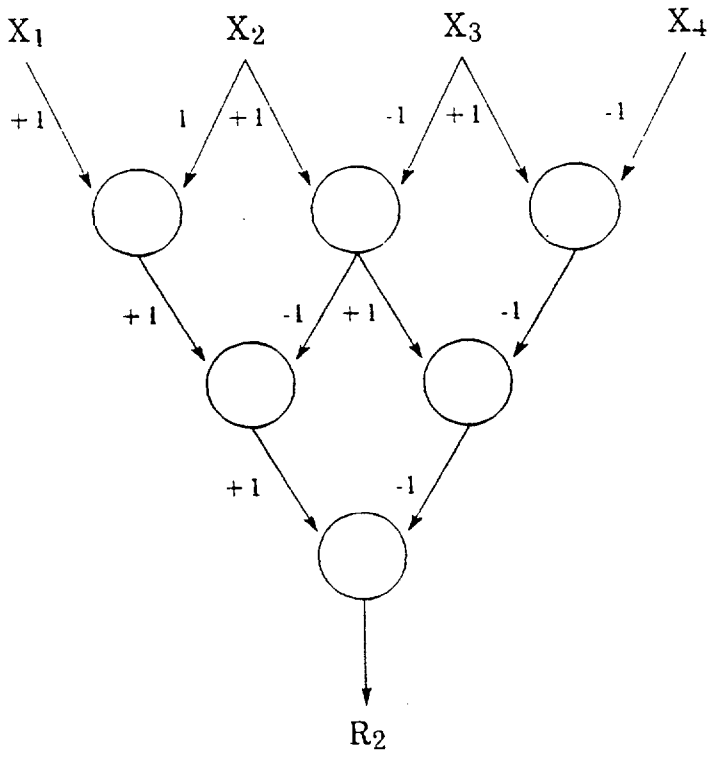
(en la posición k (k=0..n))

estructura de la que no es complicado ver su posible naturaleza de filtro discreto

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

monodimensional. En este último caso general es fácil comprobar que la suma de los coeficientes:

$$\sum_k c_{nk} = 0$$



$$R_2 = X_1 - X_2 - X_2 + X_3 - X_2 + X_3 + X_3 - X_4 = X_1 - 3X_2 + 3X_3 - X_4$$

$$= (X_1, X_2, X_3, X_4) \cdot (1, -3, 3, -1)$$

Figura 2: Un ejemplo de cascada de procesos R(-) y S(+) sobre una secuencia de 4 elementos, en la que se calcula el valor global de los pesos que actúan sobre cada elemento, siendo el resultado el explicado en el texto.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

1.1.2.- Filtros de Newton.

Definición: Un Filtro de Newton es el resultado de una cascada de procesos S(+) y R(-) que se denotan por N(Am,Dn,...) donde "m" es el orden del proceso aditivo (número de filas suma) y "n" es el orden de la diferencia (número de filas diferencia).

Por ejemplo, el filtro N(A2,D2) se obtiene por la aplicación de las reglas sencillas:

	1
A1	1 1
A2	1 2 1
D1	1 1 -1 -1
D2	1 0 -2 0 1

De la misma forma se puede obtener, por ejemplo, el N(A10, D2), filtro de pesos:

1 8 26 40 15 -48 -84 -48 15 40 26 8 1

que pueden ser normalizados para que los números caigan dentro de un determinado margen de valores.

En general, se puede demostrar fácilmente sin más que construir los correspondientes filtros que para dos números naturales n y m:

a) $N(Am,Dn)=N(Dn,Am)$

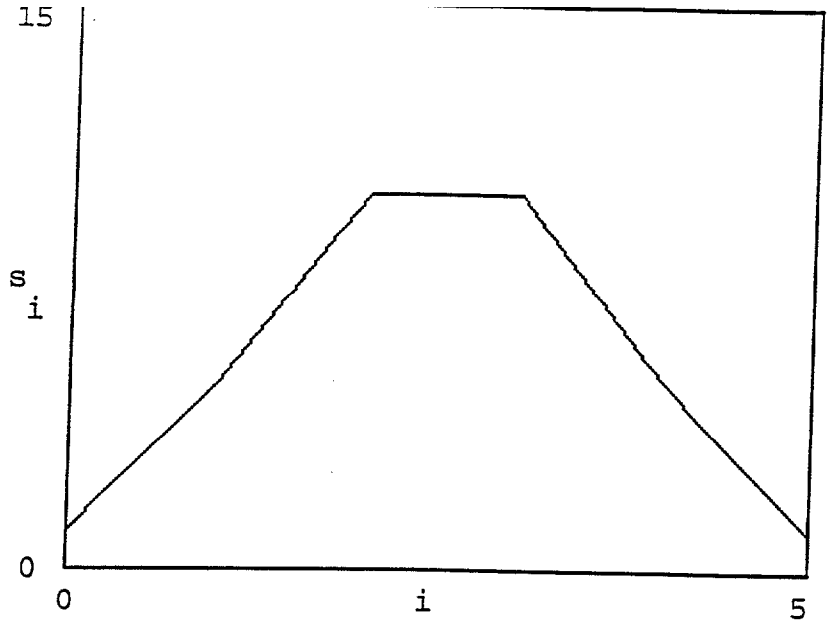
b) $N(Am_1,Am_2,\ldots,Am_j,Dn_1,Dn_2,\ldots,Dn_i)=N(A(m_1+\ldots+m_j),D(n_1+\ldots+n_i))$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

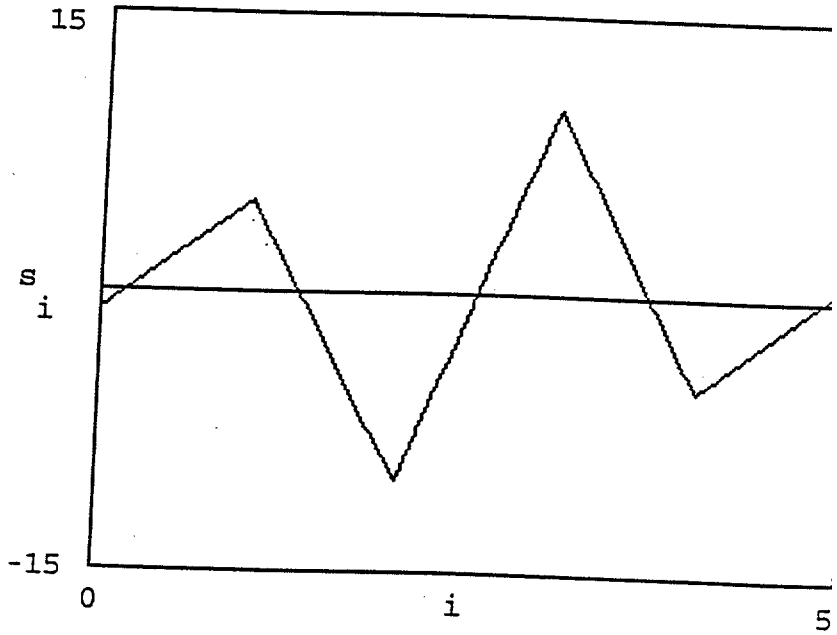
Las Figuras 3a. b. c. d y e muestran una gráfica de varios Filtros Newton para diversos valores de m y n. y los respectivos valores de los pesos.

Volvamos al problema de la predicción de un evento en una secuencia de éstos. En la Figura 4 tenemos representados los eventos I_i (i=1..m+n+1), conocidos. y sobre los cuales actúa una estructura del tipo de los filtros que nos ocupan. es decir. un genérico N(An.Dm). Entonces. partiendo del centro. es decir. del procesador que computa el resultado de aplicar el filtro a la secuencia. hacia la periferia se puede predecir el evento en el lugar m+n+2 si hacemos alguna hipótesis acerca de lo que dice el procesador vecino (por ejemplo. suponer que "dice" lo mismo o que es una función conocida de lo que "dice" la anterior). Esta reconstrucción de la microestructura de los procesos es posible si conocemos los valores de la línea anterior a la incógnita. lo que equivale a saber todo lo que han "dicho" los procesadores anteriores y a dar tantas condiciones iniciales como el orden del filtro requiera. Este esquema de predicción puede ser "afinado" usando cualquiera de los procedimientos de "aprendizaje" supervisado o no que tan en boga están en el mundo de las Redes Neuronales: si el evento predicho I_{m+n+2} no es satisfactorio. puede compararse con el valor esperado y generar un nuevo filtro de mayor anchura o una nueva función de lo calculado por la neurona anterior.

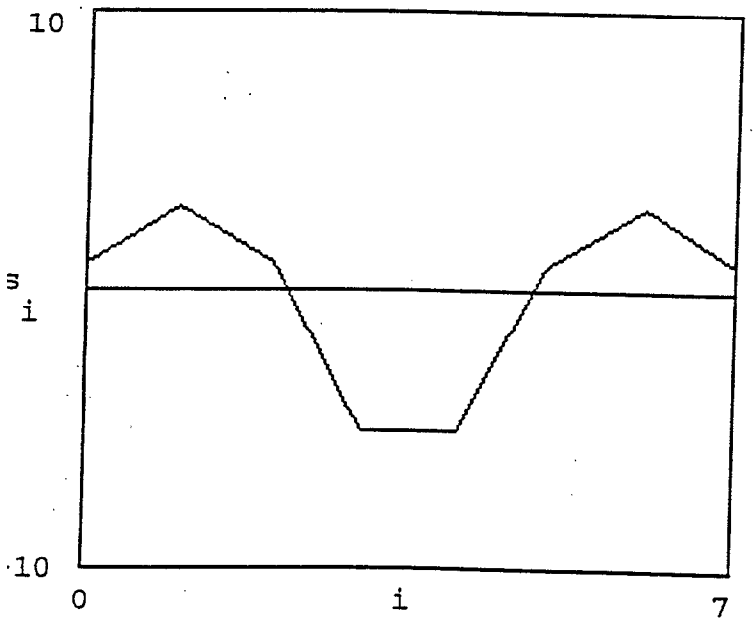
© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004



3.a



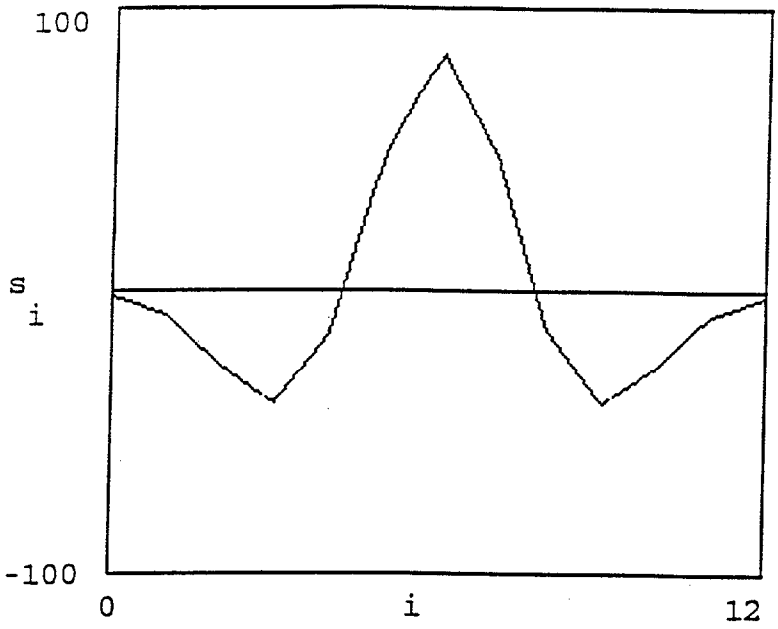
3.b



3.c

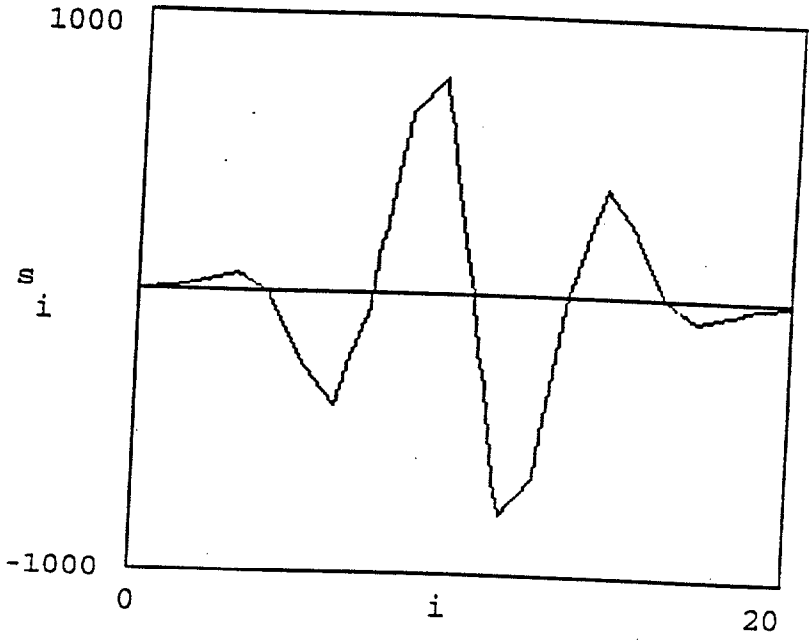
Figuras 3a, b y c: Tres ejemplos de distribución de pesos de tres Filtros de Newton. De arriba a abajo, N(A5), N(D5), N(A5,D2).

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004



3.d

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004



3.e

Figuras 3d y e: Otros dos Filtros de Newton:
-N(A10,D2) y N(A15,D5). La complejidad de la gráfica aumentará conforme crezca el número de capas D.

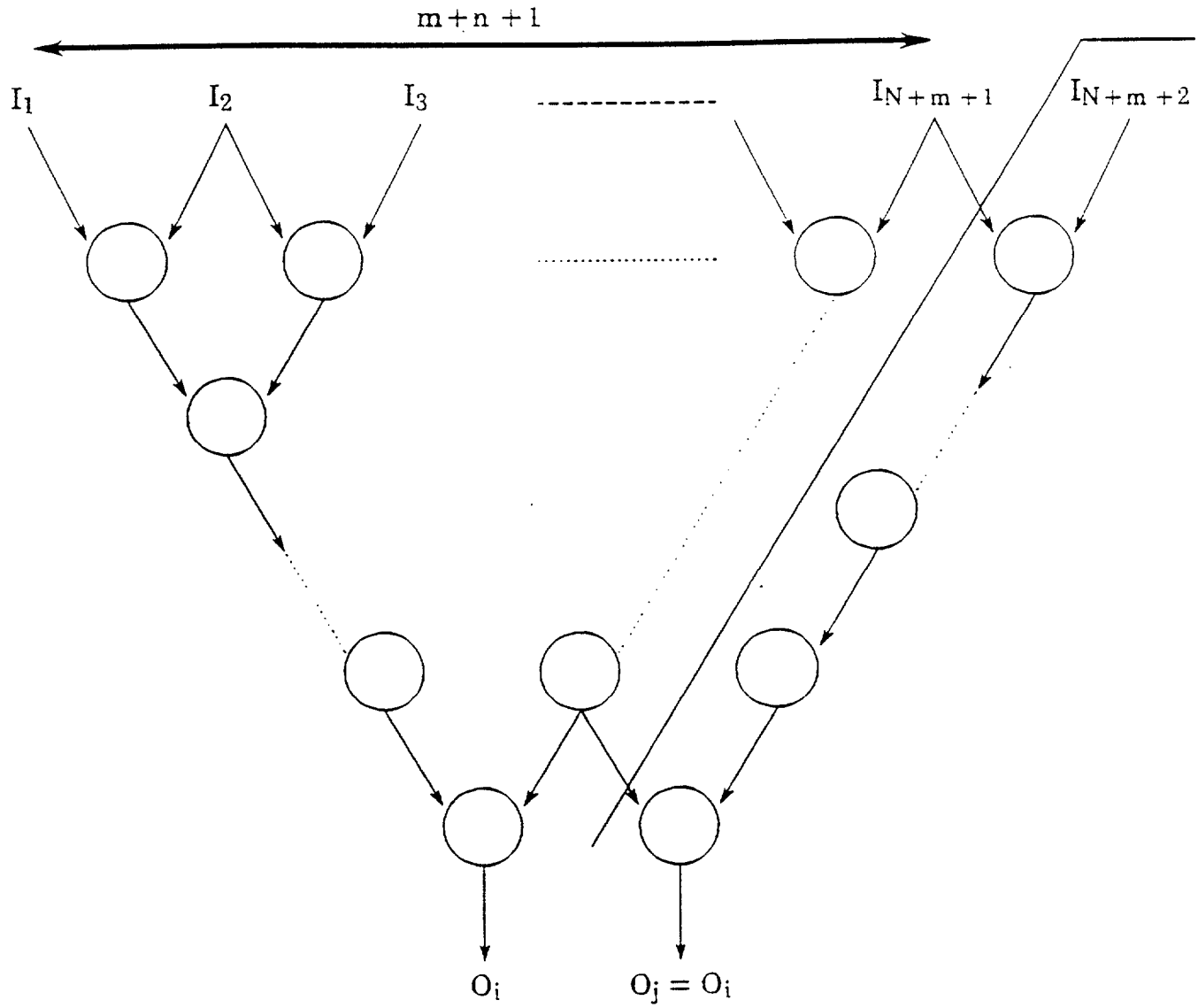


Figura 4: Un Filtro de Newton genérico usado como "predictor" del evento I_{n+m+2}: con la hipótesis de que las salidas de los procesadores i y j son iguales se reconstruye el árbol hasta llegar al dato predicho. En la Figura, la parte reconstruida es la separada con una raya.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

1.1.3.- Microprocesos y estructura retinal.

El paralelismo de esta estructura computacional teórica con la estructura de los campos receptivos retinales e incluso las arborizaciones dendríticas de las neuronas retinales es casi inmediata. Las dendritas son extensiones del cuerpo celular que permiten a la célula aumentar el área de la cual recibe información de otras células. El número de dendritas no es fijo, varía de neurona a neurona, y cada dendrita, a su vez, puede subdividirse de forma compleja dando lugar a una típica estructura de arborización [30]. En nuestro modelo, la estructura del filtro da la estructura de la arborización, siéndo ésta más compleja cuanto más ancho es el filtro, aumentando la complejidad de la computación. Es decir, existe una relación directa entre la complicación estructural de la célula y su complicación funcional, que queda reflejada en el modelo.

Por otro lado, a partir de infinidad de estudios experimentales, se ha justificado la existencia de ciertas funciones de pesos equivalentes a una gaussiana o una diferencia de dos gaussianas (para aproximar la estructura centro-periferia de los campos receptivos). De la misma forma, la aparición, de vez en cuando, de campos receptivos más complejos, con varias zonas concéntricas, o dispuestas paralelamente, alternativamente excitadoras e inhibidoras, o bien no era tenida en cuenta por irrelevante o se usaba para justificar la idea del Camino Visual como analizador de Fourier. Construyendo una máquina granular con la estructura de un Filtro Newton, podemos obtener la discretización de una gaussiana como resultado de la microestructura de la máquina, o en otras palabras, de la complejidad dendrítica de la célula, no de la existencia de unos pesos cuyo valor se ha fijado previamente de un modo difícil de explicar. En el modelo, todos los "contactos sinápticos" tienen un peso unidad en valor absoluto y es a partir de la contribución de cada microproceso de donde se

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

obtiene una distribución de pesos global que replica la encontrada en sistemas naturales. En cualquier caso, un Filtro de Newton es en esencia, visto desde el prisma de la computación, una máquina paralela definida en capas.

1.2.- Filtros Generalizados de Newton.

1.2.1.- Generalización de Filtros de Newton.

Veamos qué ocurre ahora si en un árbol con la estructura de un Filtro de Newton cambiamos los pesos de los microprocesos locales, que hasta ahora eran parejas del tipo (1,1) o (1,-1), por dos valores genéricos (a,b). Sea entonces la estructura de Newton de la Figura 5, en la que los pesos de cada capa de microprocesos se especifican como (a_i,b_i) $(i=1..n)$.

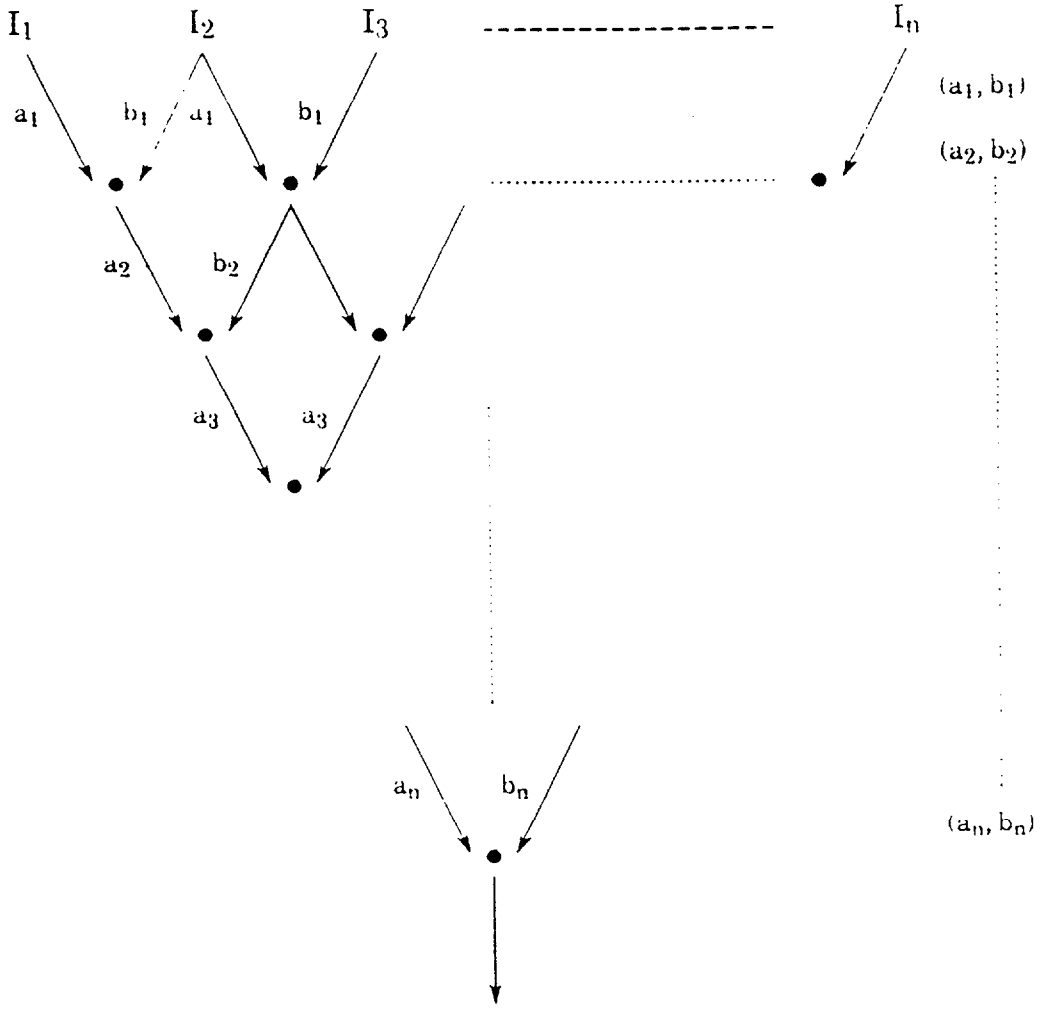


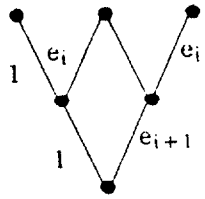
Figura 5: Un Filtro de Newton Generalizado, especificado por pares (a_i,b_i).

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Tomando como regla R la usada hasta ahora en todo el desarrollo anterior, tenemos:

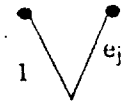
$$x'_i = a_i x_i + b_i x_{i+1} = a_i (x_i + b_i x_{i+1}/a_i) = a_i (x_i + e_i x_{i+1})$$

y tomando como pesos locales los pares $(1,e_i)$, al ser cada capa atravesada sólo una vez en cada contribución al peso global, el resultado final de cada grupo de microprocesos en cada capa vendrá multiplicado por a_i. De esta forma, se define un Filtro Generalizado de Newton como un filtro cuya estructura de microprocesos es de la forma:



..... $(1, e_i)\, a_i$

..... $(1, e_{i+1})\, a_{i+1}$



..... $(1, e_j)\, a_j$

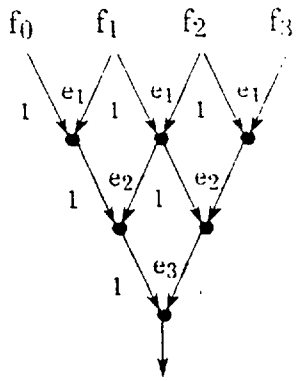
Con pesos de la forma $a_i(1,e_i)$. Diremos que el Filtro Generalizado de Newton está o es normalizado si $a_i = 1$.

1.2.2.- Teoremas de equivalencia entre filtros discretos arbitrarios y Filtros de Newton Generalizados.

Es ilustrativo, llegados a este punto, desarrollar un ejemplo "a mano" para ver cómo podemos construir los pesos globales de un Filtro Generalizado de Newton, es decir, cómo pasamos de la primera capa de microprocesos a la última. Tengamos, pues un Campo de Datos de cuatro elementos, f_0, f_1, f_2, f_3 sobre el que actúa un F.G. de N. normalizado y

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

caracterizado por los pares $(1,e_1)$, $(1,e_2)$, $(1,e_3)$ respectivamente para cada capa. En la siguiente figura queda esbozada la estructura:



Calculando el resultado de cada microproceso en cada nodo obtenemos,

para la primera capa de microprocesos:

$f_0+e_1f_1 \qquad f_1+e_1f_2 \qquad f_2+e_1f_3$

para la segunda:

$f_0+e_1f_1+e_2(f_1+e_1f_2) \qquad f_1+e_1f_2+e_2(f_2+e_1f_3)$

y para la tercera:

$$f_0+e_1f_1+e_2(f_1+e_1f_2)+e_3(f_1+e_1f_2+e_2(f_2+e_1f_3)) =$$

$$= f_0+f_1(e_1+e_2+e_3)+f_2(e_1e_2+e_1e_3+e_2e_3)+f_3(e_1e_2e_3)$$

Es decir, los pesos globales de este filtro serían la suma de los productos de las combinaciones de los valores $e_1,\ldots,e_i$ tomados de 0 en 0, de 1 en 1, de 2 en 2, ..., de n en n. En intenso, el peso k vendrá dado por:

$$W_k = \sum_{n} \Pi\,(C_k^n\,(e_1,\ldots,e_n)),\ \text{con } k=0\ldots n. \quad \{1\}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

y por lo tanto hemos establecido el siguiente

Teorema de Análisis: Todo Filtro Generalizado de Newton normalizado caracterizado por los microprocesos $(e_1,\ldots,e_n)$ es equivalente a un filtro global de pesos dados por la Ecuación {1}.

Análogamente podríamos considerar el siguiente:

Teorema de Síntesis: Un filtro discreto arbitrario de pesos $(w_0,\ldots,w_n)$ tales que $w_0 \# 0$, es equivalente a un Filtro Generalizado de Newton.

Demostración: En efecto, sea el filtro discreto de pesos $(w_0, w_1, \ldots, w_n)$ y construyamos una normalización de sus valores dividiéndolos por el primer peso, w_0:

$$(1, w_1/w_0, w_2/w_0, \ldots, w_n/w_0)$$

De esta manera, los pesos de los microprocesos del F.G. de Newton equivalente serían las soluciones del conjunto de ecuaciones desgajadas de la expresión {1}:

$$w_1/w_0 = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$$

$$w_2/w_0 = e_1e_2 + e_1e_3 + \ldots + e_2e_3 + e_2e_4 + \ldots\ldots + e_{n-1}e_n$$

$$w_3/w_0 = e_1e_2e_3 + e_1e_2e_4 + \ldots\ldots + e_{n-2}e_{n-1}e_n$$

$$\ldots$$

$$w_n/w_0 = e_1e_2e_3\ldots e_n. \blacksquare$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Las soluciones del último sistema de ecuaciones no lineales, en general, no tienen por qué ser reales. Aún así, el Teorema nos garantiza que ambos filtros son equivalentes. De hecho, por las propiedades de las raices de un polinomio de grado n, los valores $e_1, e_2, \ldots e_n$ son precisamente las raices del polinomio:

$$P_n(x) = x^n - (w_1/w_0)x^{n-1} + (w_2/w_0)x^{n-2} - \ldots (-1)^n w_n/w_0 = 0$$

con lo que la puesta en práctica del teorema de síntesis para un filtro de pesos arbitrarios se reduce al equivalente de hallar las raices de un polinomio.

1.2.3.- Expansión de una función arbitraria en microprocesos de Newton. Implicaciones en Computación Paralela.

Definimos una función de datos restringida o D-función restringida como aquella función de datos de la forma:

$$F_0, F_1, F_2, \ldots, F_{N-n}, 0, 0, 0 \ldots 0$$

tal que el tamaño total del campo de datos es N. Una D-función será normalizada cuando $F_0 = 1$.

Sea una D-función arbitraria de n+1 lugares de memoria, $F_0, \ldots, F_n$. Haciendo uso del Teorema de Síntesis, podemos encontrar una expansión equivalente de F en microprocesos de Newton, $f_1, \ldots, f_n$, siendo los valores de éstos ultimos el resultado de resolver:

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

$$F_k/F_0 = \sum_{n} \Pi\,(C_n^k(f_1,\ldots,f_n)) \qquad \{2\}$$

con $F_0 \neq 0$; vemos que $f = (f_1,\ldots,f_n)$ se puede considerar como una representación de F, y escribimos $f=N(F)$, de forma que a partir de la ecuación {2} podemos establecer que $N^{-1}(f)=F$.

Según lo ya dicho para filtros arbitrarios, las f_i se pueden obtener como las raíces de:

$$x^n - F_1x^{n-1} + F_2\,x^{n-2} - \ldots.(-1)^nF_n=0 \qquad \{3\}$$

Llegados a este punto, comprobamos que los filtros A y D de Newton, empleados al principio de la exposición, se convierten en casos particulares. Efectivamente, si tomamos $f=(1,1,1,\ldots,1)$ y calculamos su $N^{-1}(f)$ como queda establecido obtenemos

$$F_k = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

que es un filtro A de Newton.

De idéntica forma, si $f=(-1,-1,\ldots,-1)$, obtendremos el filtro D de Newton:

$$F_k=(-1)^n\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

Por otro lado, si $f=N(F)$ donde F es una D-función normalizada, y siendo k una constante arbitraria, tenemos la siguiente propiedad:

Proposición: Sea $f=N(F)$, F D- función normalizada, y sea k una constante arbitraria. Se cumple que:

$$N^{-1}(kf)=(F_0,kF_1,\ldots,k^iF_i,\ldots,k^nF_n).$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Demostración: En efecto, si $f=(f_1,\ldots,f_n)$ son los valores característicos de los microprocesos, la D-función arbitraria normalizada se puede escribir como:

$$F_0=1$$

$$F_1=f_1+f_2+f_3+\ldots+f_n$$

$$F_2=f_1f_2+f_1f_3+\ldots+f_1f_n+f_2f_3+\ldots..+f_{n-1}f_n$$

$$\ldots$$

$$Fn=f_1f_2f_3\ldots f_n$$

y si calculamos $kf=(kf_1,kf_2,\ldots,kf_n)$ entonces la D-función correspondiente, F', queda:

$$F'_0=1$$

$$F'_1=kf_1+\ldots+kf_n=k(f_1+\ldots+f_n)=kF_1$$

$$F'_2=kf_1kf_2+\ldots..+kf_1kf_n+kf_2kf_3+\ldots.+kf_{n-1}kf_n=$$

$$= k^2(f_1f_2+\ldots.+f_{n-1}f_n)=k^2F_2$$

$$\ldots$$

$$F'_n=kf_1kf_2\ldots kf_n=k^n(f_1f_2\ldots f_n)=k^nF_n$$

o sea, $N^{-1}(kf)=(F_0,kF_1,\ldots,k^nF_n)$. ■

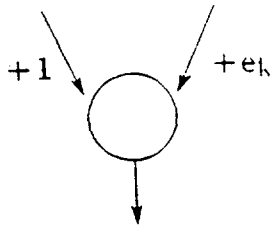
Es más, dado que las F_i se calculan a partir de todas las posibles combinaciones de los valores de los microprocesos f_i, un cambio de orden de los microprocesos no variará la respresentación de F: cualquier ordenación de los valores de f seguirá representando univocamente a F. La representación de F, pues, no es única en el sentido de que venga determinada por el orden de los elementos de f, sino que es única en cuanto al conjunto de valores formado por los f_i.

En otras palabras, los microprocesos se pueden localizar en cualquier capa del Filtro Generalizado de Newton: no influye el orden en el resultado.

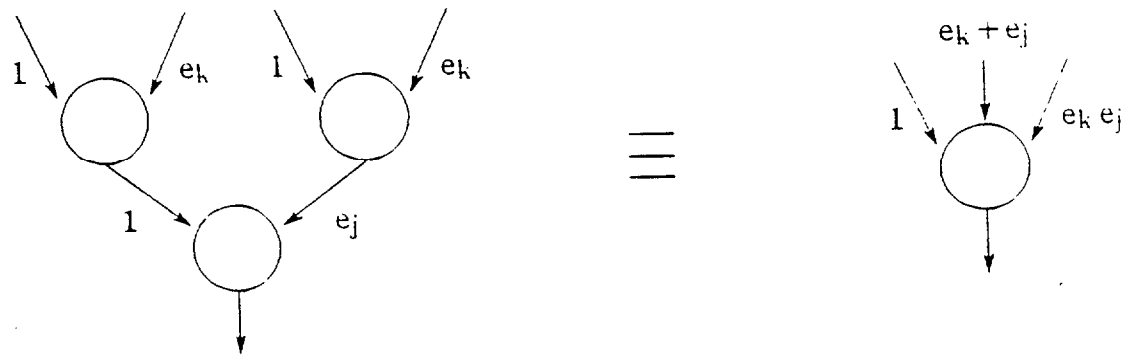
© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Parece lógico, por otro lado, que los "grados de libertad" y por consiguiente la "cantidad de información" o el "grado de redundancia" de una F se mida en el espacio f, y que venga dado por el número de raíces f_i distintas. Según ésto, la función F más redundante, la que contiene menos información, es la gaussiana, cuyas raíces son todas igual a 1 (f=1,1,1..1).

Una consecuencia interesante fruto del Teorema de Síntesis para microprocesos y de la intercambiabilidad de raíces vista en este apartado es que un proceso lineal global arbitrario puede descomponerse en un "computador por capas" donde cada capa está formada por computadores lineales idénticos, de dos entradas cada uno:



donde los e_k son las raíces f_k en el anterior desarrollo. Este computador por capas tiene dos curiosas propiedades: por un lado, las capas pueden permutarse arbitrariamente: por otro, las reglas de composición de capas consecutivas (las reglas por las que podemos "suprimir" capas en el computador) son inmediatas:



© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Es interesante notar que en una D-función (por ejemplo, un "patrón" en un campo de datos) el orden y la contiguidad de los datos son esenciales. Sin embargo, en la representación de la D-función en término de los microprocesos e_i (en mismo número total si la representación ha de ser completa, es decir, con los mismos grados de libertad), la ordenación es irrelevante, es decir, no es preciso conocer la dirección en memoria de los mismos, ni ninguna otra etiqueta adicional (como se requerirían, por ejemplo, en cualquier representación alternativa convencional de funciones). Este hecho tiene consecuencias importantes en código, transmisión y representación de patrones, y puede tenerlas asímismo en la generación de espacios de descriptores para el reconocimiento.

Por último, introduzcamos el concepto de proceso local de orden n frente al de proceso global usado hasta ahora: un proceso local de orden n es aquel que implica los valores correspondientes a n lugares consecutivos de memoria y que se desplaza a lo largo del Campo de Datos. En otras palabras, es la generalización de un convolución local. Usando este concepto mostraremos en la siguiente sección la equivalencia entre convoluciones discretas y capas de procesos locales de orden 2.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

1.3.- Transformaciones de Newton y complitud.

1.3.1.- Transformaciones tipo convolución.

De todo lo expuesto anteriormente, es clara la naturaleza de convolución que subyace en los Filtros de Newton. Así, para un Campo de Datos monodimensional de anchura N y un campo receptivo de anchura $n < N$, podemos definir una Convolución Discreta de Newton del tipo A mediante la transformación:

$$F_m = \sum_{\mathbf{k}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \; f_{k+m}$$

donde $f_0,\ldots,f_N$ son los valores de cada uno de los lugares del Campo de Datos. El número de valores del funcional es N-n.

De la misma forma, una Convolución Generalizada de Newton vendría definida por una expresión similar a la anterior, donde el valor de los coeficientes de la transformación sería el del correspondiente filtro.

Recordamos que una función de datos restringida o D-función restringida es aquella función de datos de la forma:

$f_0 \; f_1 \; f_2 \ldots f_{N-n} \; 0 \; 0 \; 0 \ldots 0$

tal que el tamaño total del Campo de Datos es N.

Con esto en mente no es difícil probar el siguiente

Teorema: La aplicación de una Convolución Discreta de Newton del tipo A a una función de datos restringida es una transformación completa.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Prueba: En efecto, para una D-función restringida:

$$F_0 = \sum C_{nk}\ f_k$$

$$F_1 = \sum C_{nk}\ f_{k+1}$$

$$F_2 = \sum C_{nk}\ f_{k+2}$$

...

$$F_{N-n-2} = f_{N-n-2} + n\ f_{N-n-1}$$

$$F_{N-n-1} = f_{N-n-1}$$

(donde los C_{nk} son los correspondientes valores de $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$).

y de aquí, partiendo de este último valor de F_{N-n-1}, siguiendo el proceso inverso, todas las f_k pueden calcularse. ■

De la misma manera, puede demostrarse que el resultado de una Convolución Generalizada de Newton sobre una función de datos restringida es completa. Lo único que variaría respecto de la demostración anterior sería la forma de calcular los C_{nk}, que ahora serían los valores del Filtro de Newton adecuado.

La unión de convoluciones y procesos locales se puede ver del siguiente modo. Recordamos que un proceso local de orden 2 es aquel que implica los valores de dos lugares consecutivos en una D-función y que se desplaza. Además, una convolución discreta es un proceso del tipo:

$$O(n) = \sum W(j)\ I(n+j)$$

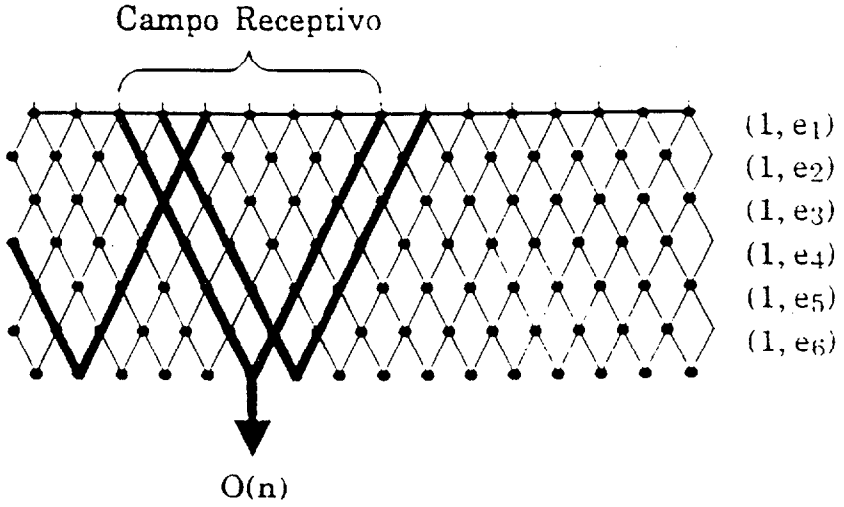
donde I(i) son los contenidos de los lugares de memoria de los que existen n en total y W(j) los pesos de la convolución. Así, para cada n la convolución podría ser considerada un filtro de 2a-1 pesos donde $2a-1 = N+1$. Numerándolos $W(-a) = W_0$, $W(-a+1) = W_1$, ..., $W(a-1) = W_N$, podemos establecer el siguiente:

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Teorema para Convoluciones: Toda convolución discreta de pesos W(-a),...W(a-1) es equivalente a 2a-2=N capas de procesos locales de orden 2, donde cada capa computa según las raíces de la Ecuación {3} reescrita del modo:

$$x^N - (W(-a+1)/W(-a))x^{N-1} + \ldots (-1)^N W(a-1)/W(-a) = 0.$$

La estructura computacional general para una transformación de tipo convolutorio es la "Red de Newton" (que hemos llamado F-Net o Disktion, del griego *δικτυοη* , red) que se presenta en la página a continuación. En la figura, la F-Net consta de seis capas de microprocesos (las cuales pueden ser reducidas según las reglas ya explicadas) y se especifican los Campos Receptivos de dos de los procesadores consecutivos (líneas gruesas) junto con la salida de uno de ellos.



F-Net, Disktion o Red de Newton: una arquitectura neuronal paralela basada en microprocesos, que implementa una Transformación Generalizada de Newton de tipo convolutorio. El orden de los e_i es irrelevante.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

De esta manera, podemos **definir** una **Transformación Disktion** como aquella transformación sobre una función discreta F_i de n lugares, $\Delta(F_i)$,que la asocia con un conjunto de valores $(e_1,\ldots e_n)$ obtenidos como raices del polinomio:

$$x^n - (F_1/F_0)x^{n-1} + \ldots (-1)^n (F_n/F_0) = 0$$

y tal que la transformación inversa, $\Delta^{-1}(e_i)$, viene dada por la ecuación:

$$F_k = \sum \prod (C_{kn}(e_1,\ldots,e_n)) \qquad \text{con } k=0\ldots n.$$

Otra forma de expresar lo anterior es la siguiente: sea una función discreta representada por F_n (con n=0..N). Una vez formado el polinomio:

$$P(x) = \sum_{n} F_n (-1)^n x^{N-n} = x^N \sum_{n} F_n \cos(n\pi)\, x^{-n} \qquad \{3\}$$

la transformación vendrá dada por el conjunto de sus raíces.

$$\Delta(F_n) = (e_1,\ldots,e_n)$$

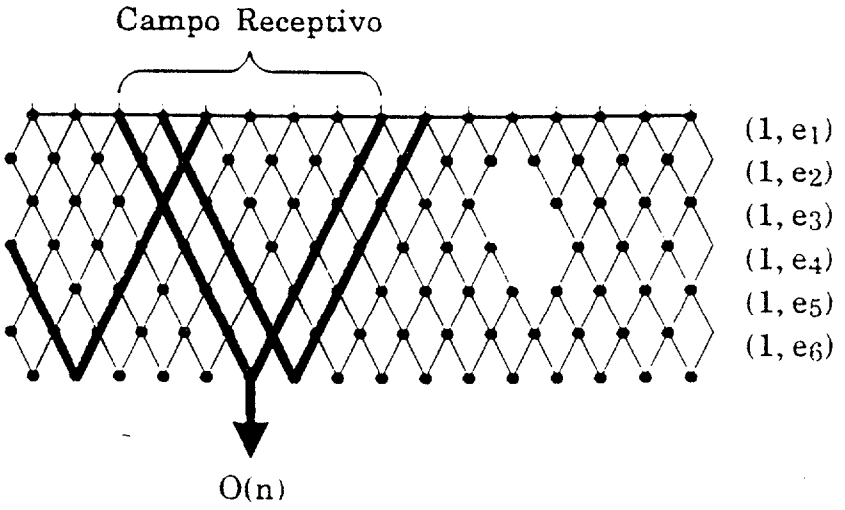
Para una función g(x) contínua en un intervalo (a,b) el problema de hallar su Transformada Disktion consistiría en dividir el intervalo (a,b) en N partes, obtener la correspondiente expresión {3} y resolverla en x. La transformada inversa, pues, me daría una función discreta (los valores muestreados de g(x)) y no tendría más que interpolar para obtener una aproximación a la g(x) contínua. Obviamente, dicha representación será más exacta cuanto mayor sea el valor de N.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

1.3.2.- Un comentario sobre agujeros en redes de pescador.

Una de las grandes virtudes del tejido nervioso, sobre todo del Sistema Nervioso Central, es la de reaccionar y recuperarse, al menos en parte, de los agujeros (en sentido estritcto) que se realizan en su estructura, de tal forma que en general dichos agujeros provocan escotomas parcialmente recuperables si la lesión es periférica y sólo pérdida de resolución si la lesión es más central.

Desde el punto de vista computacional, uno de tales escotomas se podría producir en la estructura de una Red de Newton "cortando" algunas de las líneas del entramado, lo que se muestra en la siguiente figura:



La Red de Newton anterior con agujeros.

El estudio del efecto que sobre la funcionalidad de la estructura tiene este tipo de escotomas no se lleva a cabo en el presente trabajo, indicándose simplemente que de aquí

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

puede derivar toda una línea de investigación sobre fiabilidad de estos sistemas con posibles contrapartidas en estructuras neurofisiológicas.

1.3.3.- Transformaciones Causales.

Empecemos con la siguiente:

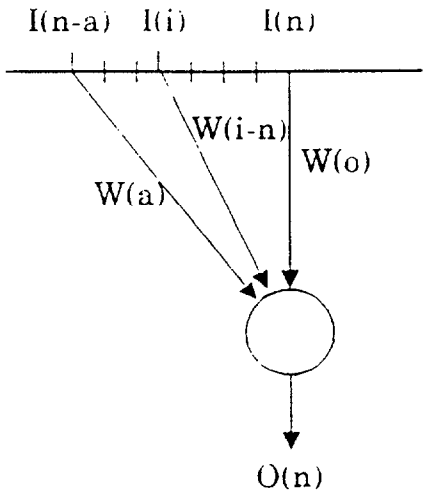
Definición: Una Convolución causal sobre un campo de datos I(i) es aquella de la forma:

$$O(n) = \sum_{j} w(j)\, I(n+j)$$

o bien, renombrando i=n+j,

$$O(n) = \sum_{i} w(i-n)\, I(i)$$

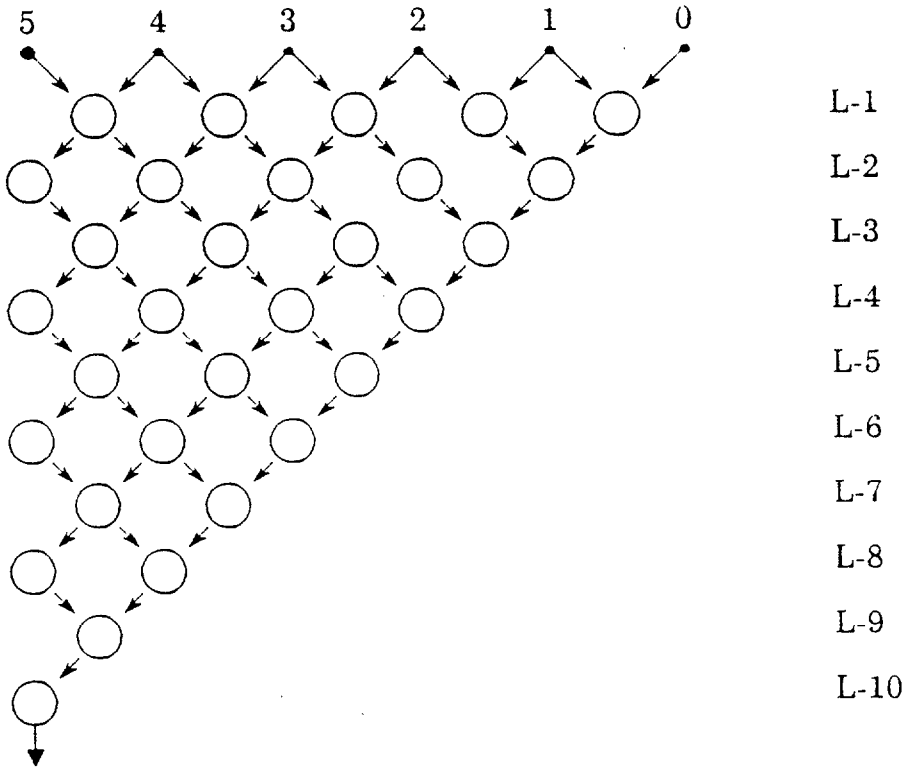
y vendrá esquematizada por la estructura computacional siguiente:



© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Recordamos que en la generación de los triángulos base de los Filtros de Newton se aplicaba un proceso de Newton R (o S) en los dos sentidos (derecha e izquierda) por cada fila, completando en uno de los extremos para continuar el proceso. Con esto en mente, definimos:

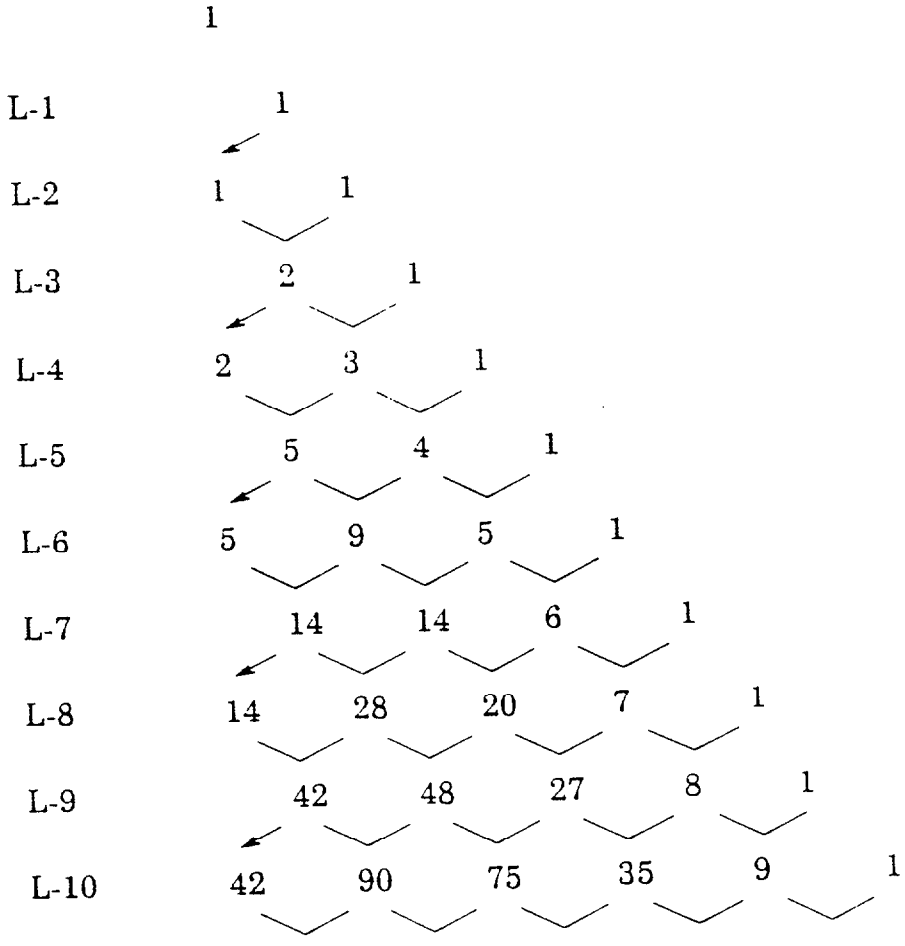
Definición: Un proceso asimétrico de Newton consiste en una arquitectura asimétrica de microprocesos de Newton que crece sólo en un sentido (derecha o izquierda), lo que vemos representado de esta manera:



Un proceso asimétrico de Newton: nos da la estructura de los Filtros Causales de Newton.

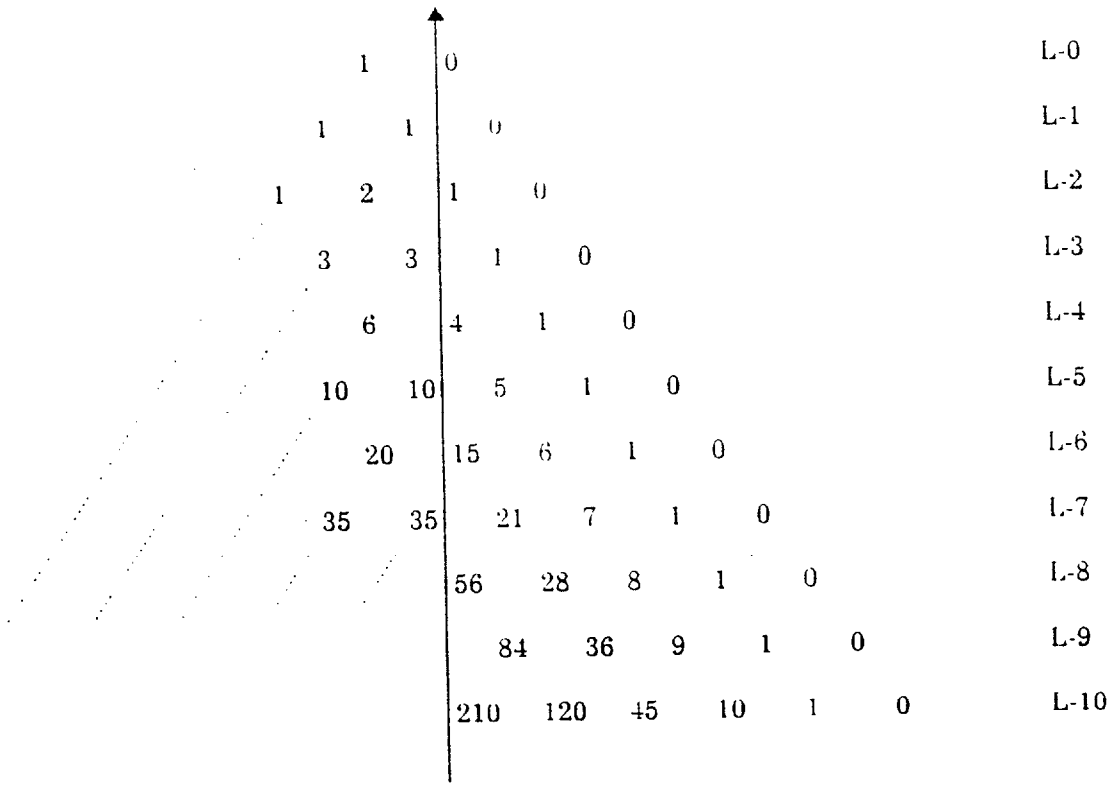
© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Procedamos ahora del mismo modo que en los triángulos simétricos de Newton, y supongamos los microprocesos R(+) (es decir, los pesos son $+1, +1$). ¿Cuál es el vector de pesos para un campo de n datos (2n capas), para un proceso asimétrico de Newton? Desarrollemos un ejemplo a mano. Así, la forma triangular de obtenerlos es:



donde la flecha significa "desplazar" y el vértice, "sumar". Este triángulo resulta de extraer, en el proceso simétrico, los "caminos" que se han eliminado, cuyo número viene dado por otro triángulo desplazado en dirección contraria a la del crecimiento (a la izquierda de la flecha en la siguiente ilustración):

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004



© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Es decir, que el término (peso) del lugar k-ésimo para el proceso (+) asimétrico de un campo de n datos (2n capas), en la última capa es:

$$\begin{bmatrix} 2n \\ k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2n \\ k-1 \end{bmatrix}$$

con

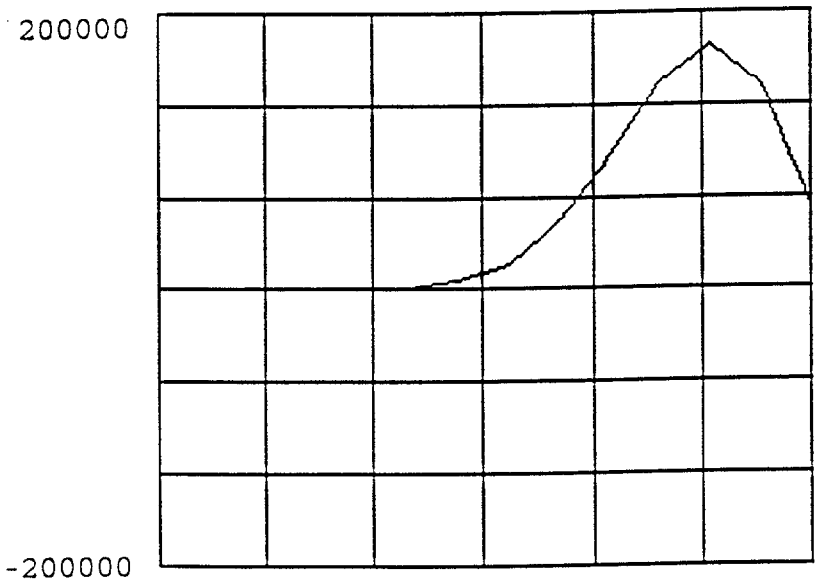
$$\begin{bmatrix} m \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

Nótese que el proceso asimétrico es redundante (doble de capas que de datos) y por consiguiente de los posibles valores de n (0.5,1,1.5,..) se pueden tomar sólo los enteros y generar pesos de capas pares. Es natural ya, pues, la siguiente:

Definición: Un Filtro Aditivo Asimétrico de Newton N(AAn) es uno de anchura n y pesos dados por:

$$\begin{bmatrix} 2n \\ k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2n \\ k-1 \end{bmatrix}$$

En la ilustración siguiente se muestra, como ejemplo, el filtro N(AA11).



Perfil de los pesos de un Filtro Aditivo Asimétrico de Newton:
un filtro causal en la variable n.

Los filtros asimétricos de Newton se corresponden a filtros causales, puesto que no se usan datos que pertenezcan al "futuro", representado por la parte que falta en el triángulo. Se aplican cuando la variable independiente n del campo de datos es el tiempo. Por otro lado,

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

un Filtro Causal puede verse como una Red de pescador agujereada, de las que algo indicamos con anterioridad, en la que el "agujero" es realmente dramático: toda una mitad de la red desaparece.

1.4.- Transformaciones Globales.

Una clase interesante de transformaciones, por las propiedades matemáticas que se derivan de ellas y su implicación inmediata en Teoría Retinal, son las transformaciones globales generadas a partir de Filtros de Newton de anchura fija. El desarrollo matemático que sigue a continuación supondrá un Filtro de Newton de pesos unidad en valor absoluto.

1.4.1.- Complitud en Transformaciones Globales: Matrices de Newton.

Comencemos definiendo un concepto, por otro lado intuitivo:

Definición: Anchura de un filtro de Newton, N(An,Dm), es el número total de componentes del filtro: $n+m+1$. Lo denotaremos por $W(N(An,Dm))=n+m+1$.

Proposición: Dado un número natural $L \geq 1$, existen L Filtros de Newton de anchura L.

Demostración: Sea $L=j+1$. Por definición de anchura de un Filtro de Newton: $W(N(Aj))=j+1=L$ y de idéntica forma,

$$W(N(Dj))=j+1=L.$$

y asímismo podemos formar los filtros cuya anchura:

$$W(N(Aj\text{-}1,D1))=j\text{-}1+1+1=j+1=L$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

$$W(N(Aj-2,D2))=j-2+2+1=j+1=L$$

....

$$W(N(A1,Dj-1))=1+j-1+1=j+1=L$$

y simplemente contando los filtros que hemos construido, tenemos en total $j-1+2=j+1=L$ filtros de longitud L. ■

Veamos ahora el conjunto de Filtros de Newton de una cierta anchura determinada, L, como un conjunto de vectores L-dimensionales que denotaremos por:

$$N_1 = N(An)$$

$$N_2 = N(An-1,D1)$$

...

$$N_{L-1} = N(A1,Dn-1)$$

$$N_L = N(Dn)$$

de donde es claro ver que $L=n+1$. Las componentes de esos vectores podemos expresarlas en modo intenso, así:

$$N_1 = \left(\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} \right)$$

para el primer vector. Para el segundo, la componente k-ésima vendrá dada por:

$$\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$$

con k=0...n-1, obtenemos los primeros n elementos. El elemento n+1 es $(-1)^{2+1} = -1$.

Convenimos en que

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

si $b<0$ o si $b>a$. De esta forma, para el tercer vector:

$$\begin{bmatrix} n-2 \\ k \end{bmatrix} \quad -2 \quad \begin{bmatrix} n-2 \\ k-1 \end{bmatrix} \quad + \quad \begin{bmatrix} n-2 \\ k-2 \end{bmatrix}$$

donde $k=0...n-1$ con las convenciones anteriores y el último elemento $(-1)^{3+1}= 1$. Y la k-ésima componente del vector i queda:

$$\sum \quad (-1)^j \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} L-i \\ k-j \end{bmatrix}$$

con $k=0...n-1$, las convenciones anteriores, donde la última componente del vector es $(-1)^{i+1}$ e i#L. Para el último vector tendremos:

$$(-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

con $k=0...n$.

Ejemplos:

1.- Para $L=2$ formamos los filtros N(A1) y N(D1):

$N_1 = N(A1) = (1,1)$

$N_2 = N(D1) = (1,-1)$

2.- Para $L=3$, tenemos:

$N_1 = N(A2) = (1,2,1)$

$N_2 = N(A1,D1) = (1,0,-1)$

$N_3 = N(D2) = (1,-2,1)$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

3.- Para L=4 los vectores correspondientes a los filtros serían:

$$N_1 = N(A3) = (1,3,3,1)$$

$$N_2 = N(A2,D1) = (1,1,-1,-1)$$

$$N_3 = N(A1,D2) = (1,-1,-1,1)$$

$$N_4 = N(D3) = (1,-3,3,-1).$$

Viendo los anteriores ejemplos es natural entonces formar las matrices cuyas filas son los correspondientes vectores de pesos de los Filtros de Newton. Dichas matrices son cuadradas y las llamaremos Matrices de Newton. De esta forma, siguiendo con los ejemplos, la Matriz de Newton de orden 2 es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

y la de orden 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

y así sucesivamente.

Por inducción se puede demostrar la siguiente propiedad de estas matrices:

Lema (propiedad de las Matrices de Newton): Si A es la Matriz de Newton de orden L, entonces:

$$A \cdot A = 2^{L-1} I \ , \ \text{con } L \geq 1$$

donde I es la matriz identidad.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Prueba: Procedemos tomando en primer lugar la Matriz de Newton de orden 2 y elevándola al cuadrado para obtener:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

La de orden tres al cuadrado:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

La de orden 4 al cuadrado:

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

y así sucesivamente. ■

Teorema: El conjunto de vectores formado por los Filtros de Newton de una anchura determinada L es linealmente independiente.

Demostración: Sean los filtros de Newton de anchura L escritos como vectores: N_1, N_2, ..., N_L y formemos la correspondiente Matriz de Newton de dimensión LxL:

$$A = \begin{matrix} N_1 \\ N_2 \\ \cdots \\ N_L \end{matrix}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Por el lema anterior sabemos que $A \cdot A = 2^{L-1} I$ con lo que por propiedades de los determinantes [31]:

$\det(A \cdot A) = \det(A)\ \det(A) = (2^{L-1})^L$ y de ahí:

$|\det(A)| = 2^{(L-1)L/2}$

lo cual es distinto de cero para todos los posibles valores de L. De esta forma, si el det(A) es distinto de cero, sus vectores componentes son linealmente independientes. ■

Si ahora consideramos la Matriz de Newton, A, como la expresión de una transformación sobre un Campo de Datos f_j (j=0...n) de anchura L=n+1 es casi inmediato probar que dicha transformación es completa, es decir, que a partir de los datos transformados, que llamaremos F_j (j=0...n), se pueden obtener los datos originales.

En efecto, sea $f = (f_0, f_1, \ldots, f_n)$ la información de los L lugares de memoria, es decir, el Campo de Datos. Los datos transformados, F_j, vienen dados por:

$$A \cdot f = \begin{bmatrix} a_{11} & & a_{1L} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ a_{L1} & & a_{LL} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ . \\ f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ \ldots \\ F_n \end{bmatrix} = F$$

El hecho de que det(A)#0 nos asegura que existe inversa, y por la propiedad de las matrices de Newton tenemos:

$$A \cdot A = 2^{L-1} I \Leftrightarrow A^{-1} = 2^{1-L} A$$

y de ahí, conocido F: $A \cdot f = F$

$$A^{-1} \cdot A \cdot f = f = A^{-1} \cdot F \text{ , es decir:}$$

$$f = 2^{1-L} A \cdot F$$

y queda así demostrado el siguiente

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Teorema: La transformada global definida por los Filtros de Newton de igual anchura es completa.

1.4.2.- Muestreo Generalizado. Implicaciones en Teoría Neuronal.

Basándonos en este último Teorema y en la forma de construir los L Filtros de Newton de longitud L, se puede diseñar un "Muestreador Generalizado" [32]. En el Muestreo Generalizado, una muestra es una transformación. El esquema original del Muestreo Generalizado (Rovaris, 1992) se puede ver en la Figura 6. Sobre el Campo de Datos va a actuar un grupo de transformaciones que va a dar origen al Campo de Datos muestreado. Existen una serie de criterios o reglas para elegir el tipo de transformaciones adecuado y es aquí donde la estructura de las transformaciones globales explicadas encaja, de esta manera: supongamos que tenemos un filtro de una longitud dada, que es la longitud del Campo de Datos. Si todos los pesos son +1, sabemos que el resultado de la computación es F_0. Dado que los filtros N(Am,Dn) son aditivos y conmutativos para A y D, cambiando en n filas cualesquiera los coeficientes de las parejas de conexiones de los microprocesos (+1,+1) por (+1,-1) vamos obteniendo los filtros N_i (i=2..L). Si realizamos este proceso "en orden", es decir, empezando desde la última capa hacia arriba, obtendremos también secuencialmente los valores de F_1, F_2, ...F_n. Supongamos que el cambio de coeficientes en las capas viene gobernado por una unidad de control (externa o interna a la propia "célula" o procesador) que necesita τ unidades de tiempo por cambio. Para obtener todos los F_i, los datos f_j (j=0...n) deberían permanecer sobre el Campo Lτ unidades de tiempo y con ello garantizar su posible recuperación a partir de F. Es decir, el tiempo necesario para muestrear el Campo de Datos y garantizar la complitud es directamente proporcional al tamaño del

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Campo Receptivo. Una vez calculados y guardados los F_i, por ejemplo en un registro desplazamiento (ver Figura 7), para calcular la inversa no hay más que diseñar una red idéntica a la usada para generar F. Es decir, la estructura del "Recuperador Generalizado" sería la misma que la del "Muestreador", y tras esperar otras $L\tau$ unidades de tiempo, tendríamos de vuelta los datos.

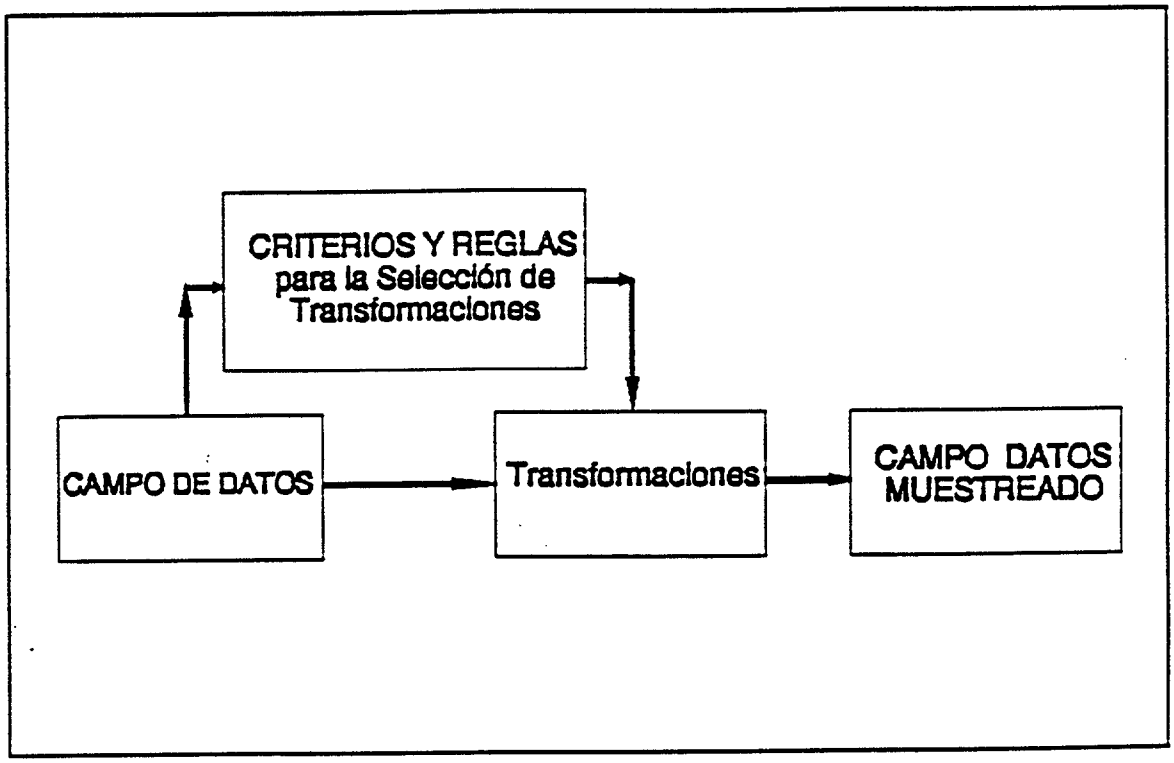
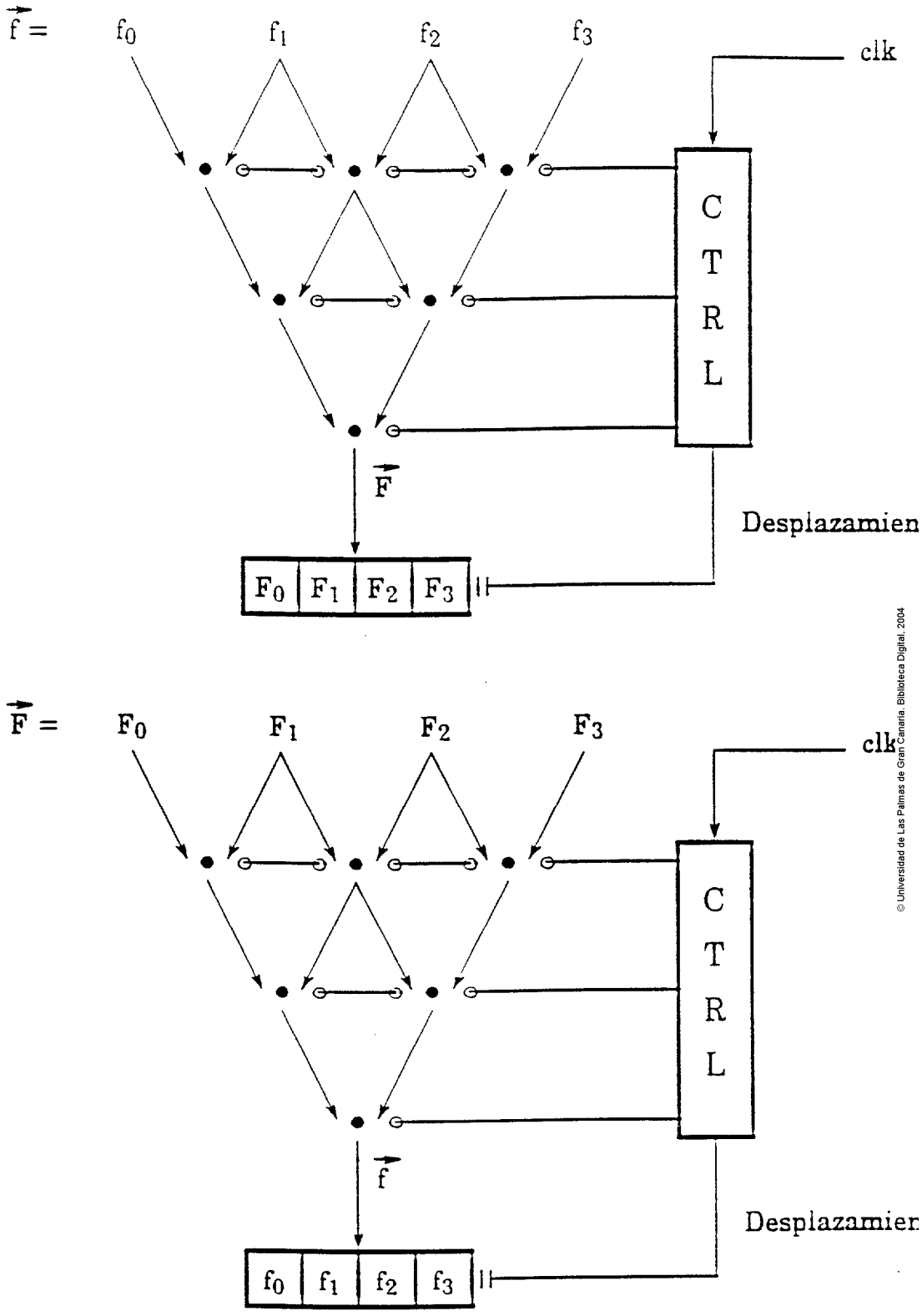


Figura 6: Esquema del Muestreador Generalizado, tomado de [32].

En resumen, según este constructo, si una señal $f=(f_0,f_1,\ldots f_n)$ permanece al menos $L\tau$ unidades temporales sobre el Campo sin presentar variaciones, entonces esa señal es absolutamente recuperable por estar la transformación definida por una matriz de Newton, A, que posee inversa.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004



© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Figura 7: Esquema de un Muestreador que computa los coeficientes de una Transformación Global de Newton. Los círculos huecos son líneas de control que cambian el signo de los pesos alternativamente en sincronía con la señal de reloj. El resultado se almacenaen un registro desplazamiento de donde es tomado por una estructura idéntica para calcular la Transformación inversa.

Si la señal f cambia muy rápidamente, es decir, existen una o varias posiciones de memoria, f_i, que cambian su contenido dentro del periodo $L\tau$, entonces F no puede ser unívocamente determinada a partir de los datos transformados. Es decir, que si uno de los requerimientos de un sistema basado en Filtros de Newton como los explicados es la complitud, para funciones f de cambio rápido es aconsejable diseñar procesadores ("células") con un $L\tau$ pequeño, o sea, un L pequeño y τ mediano o pequeño, o un L mediano y un τ pequeño, donde el significado de los términos "mediano" y "pequeño" dependen de las características del sistema. Del mismo modo, para f de cambio lento sirven $L\tau$ medianos.

Siguiendo con este razonamiento, vemos que lo que es significativo de la respuesta del procesador (de la "célula") que calcula los F_i no es la respuesta en un instante determinado, sino en un intervalo de tiempo de longitud $L\tau$, y en ese intervalo van codificados no uno sino varios "resultados" de aplicar L filtros a la función de entrada: tenemos una respuesta de significado múltiple, un "multiple meaning" del que hablaba Lettvin hace casi veinte años [33]. Así, las "células" pueden codificar propiedades generales de iluminación en el Campo Receptivo (el cómputo de F_0) junto con otras propiedades locales (que corresponderían a los demás F_i). El esquema presentado aquí proporciona un marco de microprocesos que pueden explicar la idea de Lettvin.

Existe otra característica de este tipo de estructuras que resulta interesante para analizar la fiabilidad de los procesadores frente a fallos. Supongamos que, por cualquier motivo, se produce una rotura (un "escotoma") de algunas de las líneas que conectan los lugares de memoria con la primera capa de microprocesos, según se esquematiza en la Figura 8. El resultado es que el Campo Receptivo del procesador se divide en dos partes inconexas (este tipo de campos receptivos fueron introducidos en [32] pero no desarrollados): se produce un Campo Receptivo Inconexo. A todos los efectos, los microprocesadores "cortan"

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

las contribuciones de las posiciones de memoria que malfuncionan, manteniendo aquellas que provienen de las líneas "sanas". Un simple cálculo nos permite comprobar, sin embargo, que los pesos globales que afectan a los datos no dañados permanecen inalterables: la forma del filtro se mantiene excepto en aquellos lugares en los que se produce el fallo. Un malfuncionamiento de parte del sistema no afecta a todo el sistema. Por otro lado, si la funcionalidad temporal del procesador no se ve modificada, se puede pensar que una desconexión de las líneas de entrada provocará la generación de información redundante (si el requisito de complitud sigue siendo restrictivo a la hora del diseño del sistema). Es decir, se generarán más F_i de los estrictamente necesarios para la recuperación de los contenidos de los lugares de memoria. En realidad todos los F_i siguen siendo vitales para la recuperación puntual de los datos fiables.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

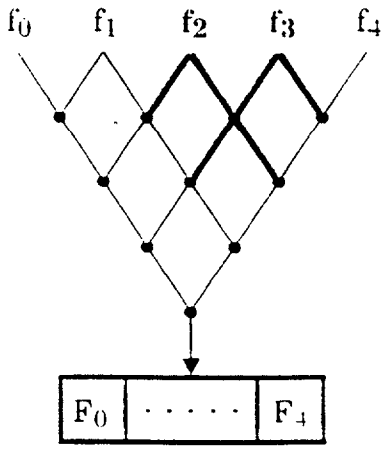


Figura 8: El fallo de las líneas de entrada de f_2 y f_3 produce un escotoma, una "rotura funcional", de las líneas de trazo grueso. Sin embargo, los pesos globales del filtro no se ven modificados. Los datos en negrilla no serán recuperados.

1.4.3.- Esbozo de una estructura tridimensional para Filtros de Newton.

Al intentar aplicar un Filtro de Newton a una retina bidimensional, obtendremos una estructura computacional en tres dimensiones (al igual que en el caso monodimensional, obteníamos la estructura 2-D de microprocesos). Las "V" de los procesos 2-D se convertirán ahora en pirámides, según puede verse en la Figura 9. En cada una de estas pirámides de cómputo se tendrá que definir el tipo de Filtro 2-D que actúa, es decir, los pesos de dicho filtro. La forma general del filtro dependerá claramente de esta definición. Cada capa de microprocesos, pues, es ahora bidimensional y el tamaño (en número de microprocesadores) va disminuyendo desde la primera hasta la última capa. A la estructura la hemos llamado Pirámide de Pascal.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

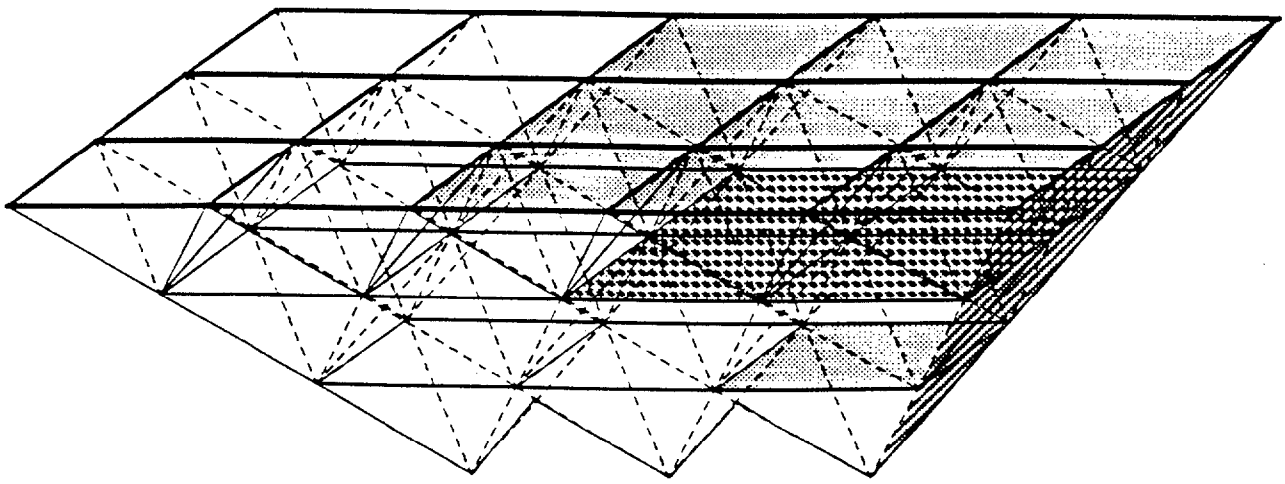


Figura 9: Una estructura 3-D de Newton para retinas bidimensionales: una Pirámide de Pascal.

En lo referente a la funcionalidad y estructura de los pesos de estos filtros 3-D, como en los casos anteriores, es muy ilustrativo desarrollar un ejemplo "a mano". Sea pues una estructura 3-D aditiva (donde todos los pesos son 1) actuando sobre una retina de dimensión 3x3, lo que simbolizamos matemáticamente por $N^3(A2)$, donde A2 significa que tenemos dos capas de microprocesos de tipo adición y el superíndice 3 hace referencia a la tridimensionalidad del constructo.

Los contenidos de los lugares de memoria de la retina quedan especificados por la matriz:

$$\begin{matrix} f_{0,0} & f_{0,1} & f_{0,2} \\ f_{1,0} & f_{1,1} & f_{1,2} \\ f_{2,0} & f_{2,1} & f_{2,2} \end{matrix}$$

La primera capa de pirámides de cómputo dividiría a esta pequeña retina en cuatro cajas, y teniendo en cuenta que los microprocesos son aditivos, el primer resultado parcial de la estructura sería:

$$\begin{matrix} f_{0,0}+f_{0,1}+f_{1,0}+f_{1,1} & f_{0,1}+f_{0,2}+f_{1,1}+f_{1,2} \\ f_{1,0}+f_{1,1}+f_{2,0}+f_{2,1} & f_{1,1}+f_{1,2}+f_{2,1}+f_{2,2} \end{matrix}$$

Y por último, la salida de la estructura vendría dada por la suma de las cuatro componentes anteriores. Si expresamos los pesos globales que influyen en dicha salida en forma de matriz, nos quedaría:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

lo cual recuerda una discretización no normalizada de una Gaussiana 2-D.

Todo esto se complica cuando intentamos considerar capas-diferencia. Efectivamente,

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

para cada pirámide de cómputo, y sin salir de los pesos unidad en valor absoluto, tenemos como posibilidades estructurales todas las combinaciones de dos signos (+ y -) tomados de cuatro en cuatro menos la posibilidad de que los cuatro signos sean iguales y positivos o negativos (que equivaldría al caso aditivo desarrollado anteriormente, y al mismo con todos los signos cambiados). Es decir, en nuestra retina 3x3 para una pirámide de una capa de procesos diferencia tendríamos 16-2=14 posibilidades de difinición y cada una de ellas nos configuraría una matriz global de pesos diferente. Pero para darle significado de derivada al cálculo, hemos de imponer la condición de que la suma de los pesos sea 0, con lo cual en realidad sólo tenemos cuatro posibilidades distintas.

Como ilustración, en la retina anterior se ha incluido una capa D tras la primera adición en la que los signos con los que actúa la pirámide sobre los lugares de memoria correspondiente son, vistos "desde arriba":

\+ -

\+ -

Y los pesos globales quedan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Una diferencia fundamental con los Filtros sobre retinas monodimensionales es que, ahora, el orden en el que coloquemos las capas de procesos aditivos y en diferencias SI va a influir en el resultado global. De esta forma, si en el ejemplo que nos ocupa situamos primero la capa de procesos diferencia con la estructura ya dicha y a continuación la capa aditiva, la matriz de pesos globales se nos transforma en:

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Como puede observarse, el desarrollo formal matemático de las estructuras de Newton en 3 Dimensiones es a la par sugestivo e interesante y probablemente encierre propiedades curiosas de las cuales sirve lo anterior como esbozo. Queda pues pendiente para trabajos futuros la investigación en esta línea (incluyendo la formalización, definición de transformaciones y convoluciones a partir de estas estructuras, estudio de su complitud y aplicación en proceso de señales) que aquí no se continúa por comenzar a apartarse del análisis original del presente trabajo.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

1.5.- El paso al contínuo. Análisis de Hermite.

1.5.1.- Funciones de Hermite.

Volvamos al principio por un momento, y recordemos la forma que tenían los pesos de nuestro Filtro de Newton inicial, An:

$$N(An) = \begin{bmatrix} n \\ x \end{bmatrix} \quad \{1\}$$

con $0 \leq x \leq n$. Si normalizamos esos pesos multiplicándolos, para cada n, por:

$$\begin{bmatrix} n \\ n/2 \end{bmatrix}^{-1}$$

a partir de valores de n lo suficientemente grandes y con x variando desde n/2 hasta n, los Teoremas de Límite [34] nos conducen a que la distribución binomial dada por la expresión:

$$\begin{bmatrix} n \\ n/2 \end{bmatrix}^{-1} \quad \begin{bmatrix} n \\ x \end{bmatrix}$$

tiende a una distribución normal dada por:

$$f(x) = e^{-x2}$$

De la misma forma, si partimos del Filtro N(An,D1), en el límite, al ser n lo suficientemente grande, pasa de ser la primera diferencia (D1) a la primera derivada:

$$f'(x) = -2x\, e^{-x2}.$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

De ahí, formando todos los filtros N(An,Dj) para j=2....m y si seguimos tomando el paso al límite cuando n es muy grande, iremos obteniendo las sucesivas derivadas de f(x):

$$f''(x)=(4x^2-2)\ e^{-x2}$$

...

$$f^m(x)=d^m\ e^{-x2}/dx^m$$

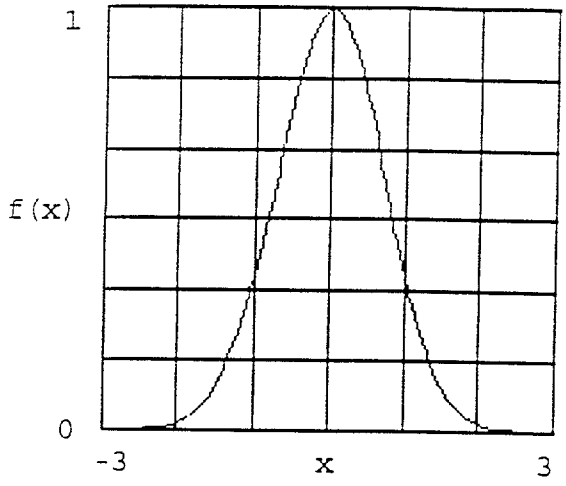
Lo que hemos obtenido, en realidad, en este paso al contínuo son las funciones de Hermite multiplicadas por un factor $(-1)^n$. Los polinomios que acompañan como factores de la gaussiana e^{-x2} son los Polinomios de Hermite, de nuevo multiplicados por $(-1)^n$, cuya ecuación generatriz es:

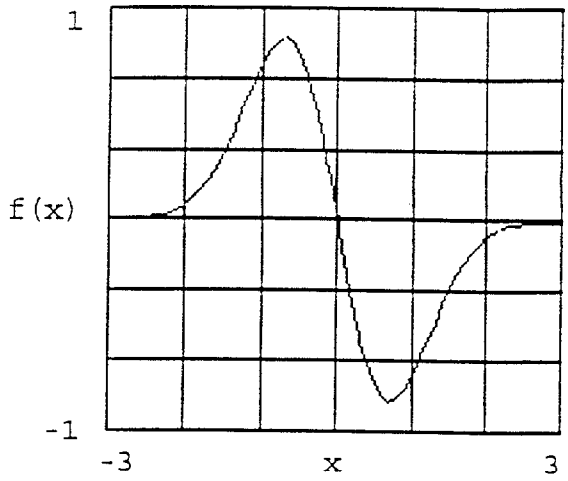
$$H_n(x)=(-1)^n\ e^{x2}\ d^n\ (e^{-x2})/dx^n$$

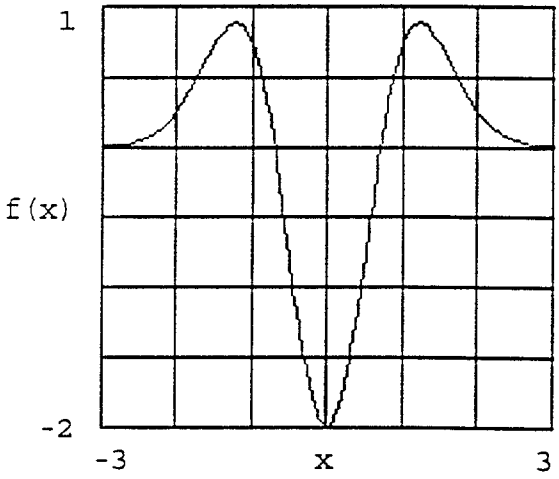
En las Gráficas 1.1 a 1.5 vemos la representación de las funciones $H_0(x)e^{-x2}$, $-H_1(x)e^{-x2}$, $H_2(x)e^{-x2}$, $-H_3(x)e^{-x2}$, y $H_4(x)e^{-x2}$, las cinco primeras funciones obtenidas en el paso al límite. Salta a la vista el notable parecido de estas funciones con la estructura funcional que la neurofisiología ha venido describiendo para diversos tipos de campos receptivos de neuronas. Tenemos, tanto estructuras ON-OFF de tipo centro-periferia como estructuras con zonas alternantemente ON y OFF. Estas correspondencias las veremos con más detalle un poco más adelante.

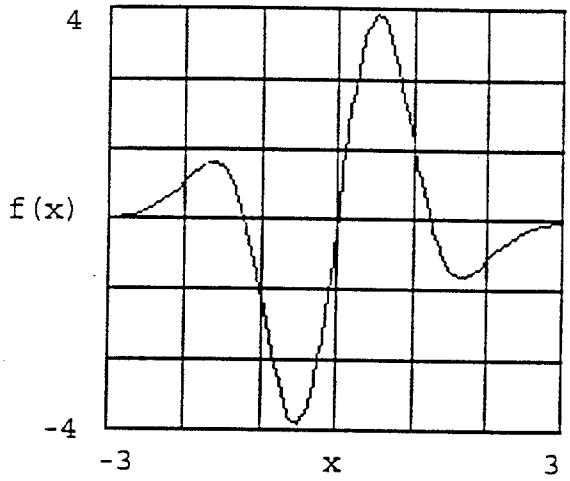
Las propiedades matemáticas de los Polinomios de Hermite han sido largamente estudiadas (ver [35,36]). Aquí mencionaremos algunas de ellas.

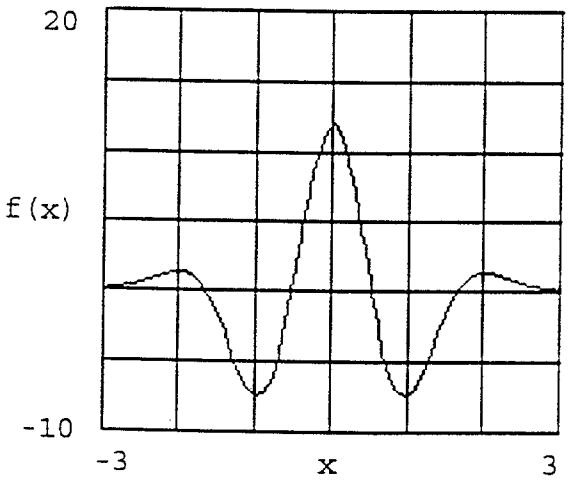
© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004











Gráficas 1.1 a 1.5: Las cinco primeras funciones de Hermite.
De arriba a abajo y de izquierda a derecha, ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Por un lado, el hecho de su ortogonalidad, es decir:

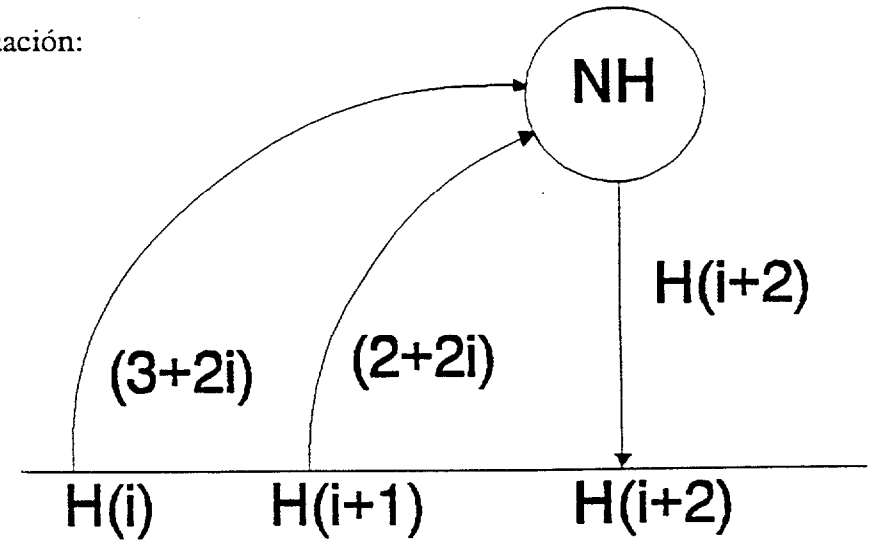
$$\int H_m(x)H_n(x)e^{-x2}\,dx = 0 \quad \text{si } m\#n.$$

$$\int H_n(x)H_n(x)\,e^{-x2}\,dx = 2^n\,n!\,\pi^{1/2}$$

Además, la ecuación diferencial cuyas soluciones son los Polinomios se escribe:

$$H''_n(x) - 2x\,H'_n(x) + 2n\,H_n(x) = 0$$

y puede ser resuelta como ecuación en diferencias por la máquina modular que se muestra a continuación:



El conjunto de funciones ortonormales de Hermite:

$$\phi_n(x)=H_n(x)e^{-x2/2}\,/\,(2^n\,n!\,\pi^{1/2})^{1/2} \qquad n=0,1,2,\ldots$$

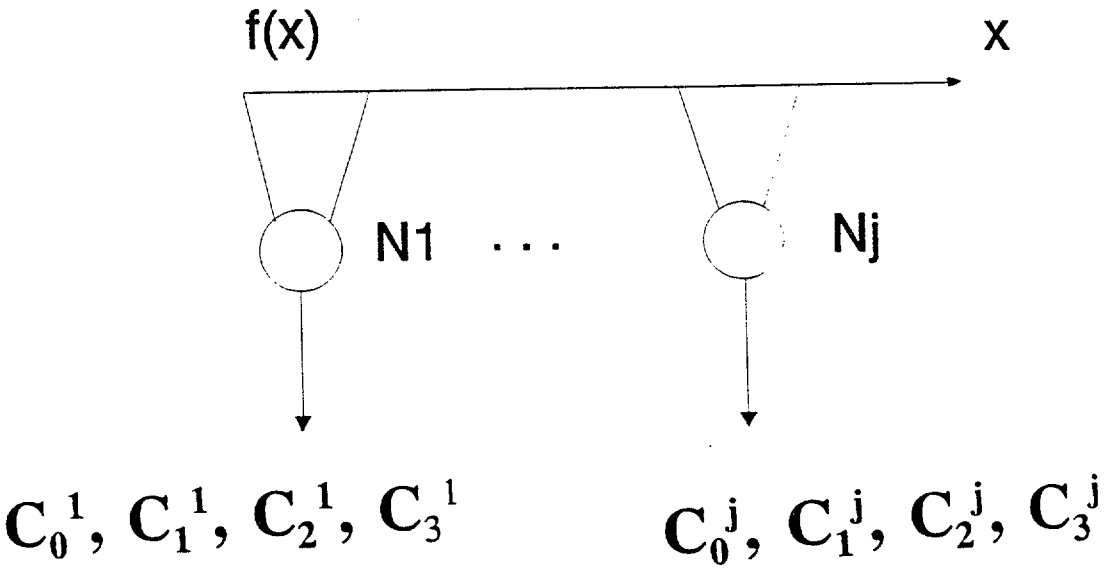
es completo: cualquier función f(x) contínua a trozos y de cuadrado integrable puede ser aproximada como combinación lineal de funciones de ese conjunto. En otras palabras, se puede caracterizar unívocamente a una cierta función de entrada a partir de los coeficientes [37]:

$$C_n=\int f(x)\phi(x)\,dx$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

1.5.2.- Análisis monocanal de Hermite.

Construyamos una retina monodimensional dividida en campos de datos sobre los que los correspondientes procesadores extraen los primeros coeficientes de la expansión de Hermite de la función de entrada siguiendo la misma sucesión de operaciones (estamos formando un canal de proceso), según se muestra en la figura:



Eligiendo el solapamiento adecuado, toda esta estructura tiene naturaleza de convolución espacial. Por la forma de los sucesivos núcleos de la convolución (que no son otros sino los dibujados en las gráficas 1.1 a 1.4) vemos que los cómputos llevados a cabo son, por este orden: un suavizado gaussiano, una detección de bordes, un laplaciano monodimensional (detección de contrastes tipo centro-periferia) y un cálculo de tipo zonas antagonistas complejo.

A partir de esos C_i^j podríamos reconstruir el fragmento de la función de entrada muestreado por la neurona j gracias a la propiedad de complitud de la familia de funciones de Hermite, con lo que:

$$g_j(x) = \sum_n C_n \phi_n(x)$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

representa una primera aproximación para recuperar $f_j(x)$.

En resumen, hemos obtenido los cuatro descriptores básicos útiles [38] para un análisis subsecuente de la "imagen monodimensional" que cae sobre la retina, más la posibilidad de recuperar dicha imagen con un cierto grado de bondad.

1.5.3.- Extensión bidimensional.

Para poder aplicar el análisis de Hermite a una imagen (que es una señal bidimensional) debemos extender los resultados anteriores a dos dimensiones. De esta forma, sean $\phi_n(x)$ y $\phi_m(y)$ dos núcleos ortonormales de Hermite, cada uno de ellos en una variable espacial distinta, x e y. Construyamos el núcleo bidimensional:

$$\Phi_{nm}(x,y) = \phi_n(x)\phi_m(y) = H_n(x)\, e^{-x2}\, H_m(y)\, e^{-y2} = H_n(x)\, H_m(y)\, e^{-x2-y2}$$

De esta manera, los coeficientes transformados C_{nm} de una función bidimensional f(x,y) vendrán dados por:

$$C_{nm} = \int f(x,y)\, \Phi_{nm}(x,y)\, dx\, dy$$

y una vez calculados para todos los valores de n y m, podremos reconstruir la función f(x,y) a partir de los coeficientes, de forma que:

$$f(x,y) = \sum_{n} \sum_{m} C_{nm}\Phi_{nm}(x,y)$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Se ha de notar que la transformación de Hermite así presentada es contínua en las variables x e y pero es discreta en las "variables" (índices de los coeficientes) n y m.

1.5.4.- Sistemas Causales de Hermite.

Del mismo modo como "cortamos" los filtros de Newton, en la formulación discreta, para obtener los sistemas de Newton causales, un sistema causal contínuo de Hermite sería aquel en el "cortamos" el valor del límite de integración:

Sustituyendo la variable espacial por el tiempo en el análisis anterior y tomando un intervalo de integración $(-\infty, t]$ podemos definir los sistemas causales de Hermite como aquellos que realizan cómputos del tipo:

$$O(t) = \int \phi_n(t-t')F(t')\,dt'$$

donde $\phi_n(t-t')$ es una función de Hermite. Vemos que el sistema realiza un cálculo de tipo convolutorio en el tiempo. El paso al contínuo de los Filtros de Newton Asimétricos para generar los Sistemas Causales de Hermite nos plantea la pregunta de a qué tiende la serie truncada de pesos del N(AA2n). El proceso diferencia de un triángulo de Pascal desplazado 1 lugar nos da la primera diferencia del filtro N(Am), es decir:

$$N(AA2n) = N(A2n,D1)$$

y por consiguiente los factores de peso del N(AAm) son la mitad izquierda del

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

N(Am.D1). Pasado al contínuo lo anterior, la serie del Filtro Asimétrico de Newton tiende a la mitad positiva de la primera derivada de la curva de Gauss. Parece, pues, que el un Sistema Causal de Hermite lo que hace es calcular una primera derivada en el tiempo y rectificar en media onda.

1.5.5.- Sistemas espacio-temporales de Hermite.

Sea ahora un sistema con un núcleo de la forma

$$\phi_n(x-x')\ \phi_m(t-t')$$

donde ambas ϕ_i son funciones de Hermite, una dependiente de una variable espacial y la otra de una temporal. Extendiendo la discusión de apartados anteriores, podemos ver un sistema espacio-temporal de Hermite como aquel cuya función se describe mediante:

$$O(x,t)=\int\int \phi_n(x-x')\phi_m(t-t')\ dx'\ dt'$$

1.5.6.- Análisis de Hermite: un nuevo enfoque del proceso retinal.

Hemos resaltado ya las similitudes entre las gráficas de las diferentes funciones de Hermite y las estructuras de los campos receptivos descritos en neurofisiología. En la Figura 10 vemos algunas de estas estructuras naturales.

La potencialidad de las funciones de Hermite en el análisis de la función retinal proviene del hecho de que son obtenidas como resultado de un conjunto de microprocesos sencillos cuya complejidad es resultado del tipo de conexión empleada: de la forma del árbol dendrítico de la célula. El soporte neuroanatómico es clave en todo este desarrollo. La idea

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

de esta conexión entre estructura dendrítica y diferencias funcionales en el campo receptivo de diversas neuronas ya fué descrita en 1961 [39] en relación a la retina de diversos anfibios.

En nuestro análisis, la complejidad de los microprocesos (en el caso discreto, el número de capas D) determina qué función de Hermite es utilizada como núcleo en cada caso. Es esperable, pues, que un sistema basado en este tipo de microprocesadores realice un análisis de Hermite de la función de entrada. Los parámetros calculados formarían el conjunto de componentes de Hermite de dicha función.

Como conjetura, podríamos proponer que, si un sistema de proceso retinal dado es un sistema de Hermite, éste realiza las funciones de calibre más bajo, es decir, utiliza las primeras funciones de Hermite como núcleo: ϕ_0, ϕ_1 , ϕ_2, y ϕ_3, dada las formas de campo conocidas a través de los registros neurofisiológicos.

El uso del Análisis de Hermite como herramienta matemática de simulación y explicación de características retinales lleva consigo ciertas consecuencias útiles a la hora de sugerir interpretaciones en experimentación neurofisiológica, como la de analizar los registros celulares a la luz del espectro de energía de Hermite.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

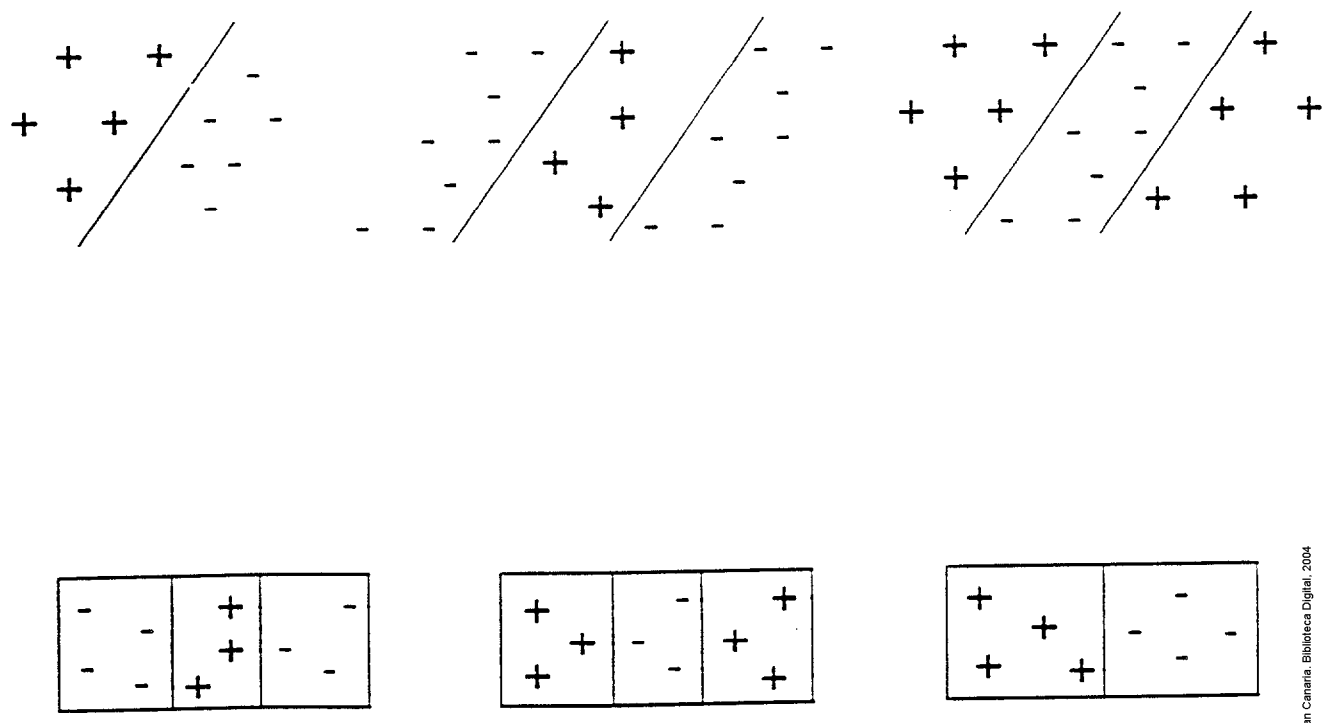


Figura 10: Representación esquemática de algunos campos receptivos encontrados en corteza en el gato para células simples (arriba) e hipercomplejas (abajo). Los signos + y - denotan respuestas excitadoras e inhibidoras respectivamente. Existe evidencia de que las respuestas son mayores hacia el centro del campo que en la periferia.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

1.6.- Ilustraciones y aplicaciones en Proceso de Imágenes.

1.6.1.- Transformaciones Globales de Newton.

Para ilustrar la complitud de las Transformaciones discretas Globales de Newton (vistas en el punto 3.4 de este trabajo) se tomaron, por conveniencia para el cálculo, los 10 Filtros de Newton de longitud 10 y se aplicaron a un imagen generada por software de tamaño 10x10 y 256 niveles de gris, donde el 0 codifica al negro y el 255 al blanco brillante.

Los filtros de longitud 10 fueron ordenados, según queda explicado en la base teórica, para formar la matriz A de la transformación:

1	9	36	84	126	126	84	36	9	1
1	7	20	28	14	-14	-28	-20	-7	-1
1	5	8	0	-14	-14	0	8	5	1
1	3	0	-8	-6	6	8	0	-3	-1
1	1	-4	-4	6	6	-4	-4	1	1
1	-1	-4	4	6	-6	-4	4	1	-1
1	-3	0	8	-6	-6	8	0	-3	1
1	-5	8	0	-14	14	0	-8	5	-1
1	-7	20	-28	14	14	-28	20	-7	1
1	-9	36	-84	126	-126	84	-36	9	-1

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Los coeficientes de la transformación, en total 100, se obtuvieron como producto de las matrices A y la matriz imagen P, C= AP.

Una vez obtenida C, se procedió a calcular la transformación inversa, que según queda dicho, no es más que el producto de A por C y por 2^{-9}:

$$2^{-9} AC = P.$$

Los resultados los apreciamos en las Fotos 1, 2 y 3.

La Foto1 es la imagen original 10x10 (en la que se ha variado el tamaño de los pixels para facilitar la presentación). La Foto2 es la transformada (es decir, C) reescalada para poder ser presentada como imagen en el rango de grises de 0 a 255. La Foto3 es la imagen recuperada, que es idéntica a Foto1. Una resta de Foto1 y Foto3 da una imagen negra, como cabe esperar.

A pesar de ser un ejemplo bidimensional, éste ilustra la Transformación monodimensional de Newton, pues en realidad el grupo de filtros de longitud fija se aplican todos ellos a cada columna de la imagen, no a la imagen total.

Una segunda ilustración del método, con la misma matriz de transformación es presentada en las Fotos 4, 5 y 6. Respectivamente, la imagen original extendida, la transformada y la recuperada.

1.6.2.- Transformaciones de tipo convolución.

Adquirimos una imagen de tamaño 512x512 pixels y 256 niveles de gris (la mostrada en la Foto 7) y se efectuaron sobre ella varias convoluciones utilizando diversos núcleos de

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Hermite. Las máscaras de convolución, de tamaño 5x5, se obtuvieron por muestreo de las funciones contínuas bidimensionales de Hermite explicadas anteriormente. Las imágenes resultado debieron posteriormente ser reescaladas dentro de los valores límite 0 y 255 para poder ser visualizadas.

La Foto 8 es la imagen original tras una convolución con el kernel $\phi_{0,0}$, es decir, un filtro gaussiano clásico. Las Fotos 9a y 9b son el resultado de las convoluciones con los núcleos $\phi_{1,0}$ y $\phi_{0,1}$ respectivamente, dos buenos detectores de bordes verticales y horizontales. Por último, las Fotos 9c y 9d muestran dos tímidos detectores de contrastes: los núcleos $\phi_{2,0}$ y $\phi_{0,2}$ respectivamente. En general, aplicar convoluciones con valores altos en los subíndices de los kernels conduce a imágenes muy poco nítidas, en las que el reescalado las difumina. Como ejemplo, valga la Foto 9e, en la que se muestra el resultado de usar el kernel $\phi_{0,3}$.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

1.6.3.- Transformada global de Hermite.

Para ilustrar este apartado se utilizó una imagen de 256x256 pixels y 256 niveles de gris y se calculó un grupo de coeficientes de la Transformada de Hermite. Para ello se usaron núcleos de Hermite de la forma $\phi_n(x)\phi_m(y)$ aplicados sobre la imagen y se integraron en los límites de ella. De esta forma se obtuvieron los coeficientes $C_{n,m}$.

De cada uno de estos cálculos se obtienen dos imágenes como ilustración: el resultado del producto de la imagen original por la máscara de Hermite pixel a pixel (tras un reescalado) y una "imagen de fases" en la que se guarda el signo codificado como blanco si es positivo y negro si es negativo.

Diversos ejemplos son los siguientes:

La Foto 10 muestra la imagen original.

La Foto 11a es el resultado del producto de $\phi_0(x)\phi_0(y)$ y la imagen original. La Foto 11b es la "imagen de fases" de la 11a. El coeficiente $C_{0,0}$ sería la suma de todos los resultados parciales del producto del kernel dicho con la imagen.

Idéntico comentario acompañaría a las Fotos 12a y 12b. El coeficiente en cuestión sería $C_{0,4}$.

Para las Fotos 13a y b, el coeficiente calculado sería $C_{3,1}$.

Para las 14 a y b, $C_{6,4}$.

Y para finalizar, las Fotos 15a y 15b son las correspondientes a $C_{8,8}$.

La complitud de la Transformación Global de Hermite implica el cálculo, en el caso que nos ocupa, de 256x256 coeficientes. Esto conlleva claros problemas de optimización del tiempo de computación. Una reconstrucción aproximada de la imagen se podría realizar en base al cómputo de sólo un subgrupo de coeficientes. En cualquier caso, para obtener una transformación inversa fiable necesitaríamos un número de coeficientes lo suficientemente alto como para alargar interminablemente la computación (no olvidemos que, por ejemplo, el cómputo del coeficiente $C_{10,15}$ implica cálculos utilizando dos polinomios, uno de grado 10 y el otro de grado 15). Además, la discretización del kernel y la implementación discreta de la integral en el programa influyen en la bondad del valor final del coeficiente. El método sería, en principio, más exacto conforme mayor fuese la imagen a transformar. Pero a mayores imágenes, si bien la fiabilidad del valor de los coeficientes aumenta, el tiempo de cálculo se dispara.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

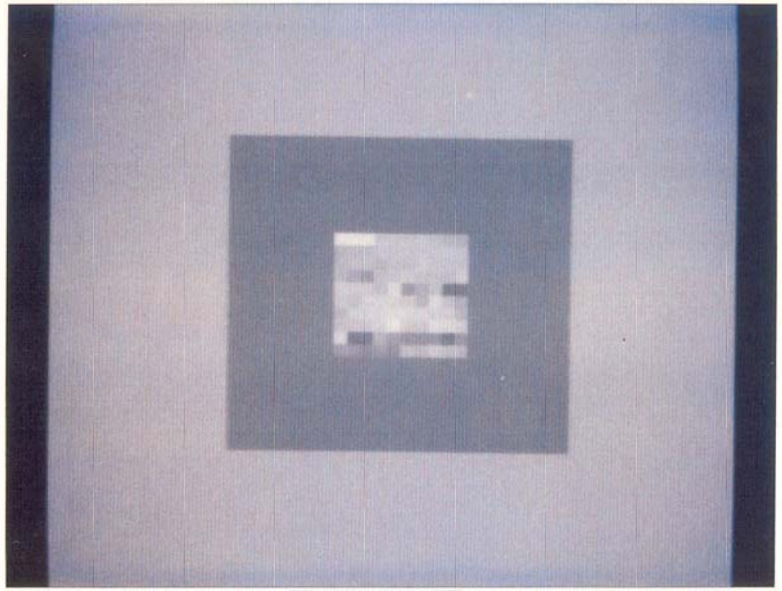


Foto 1

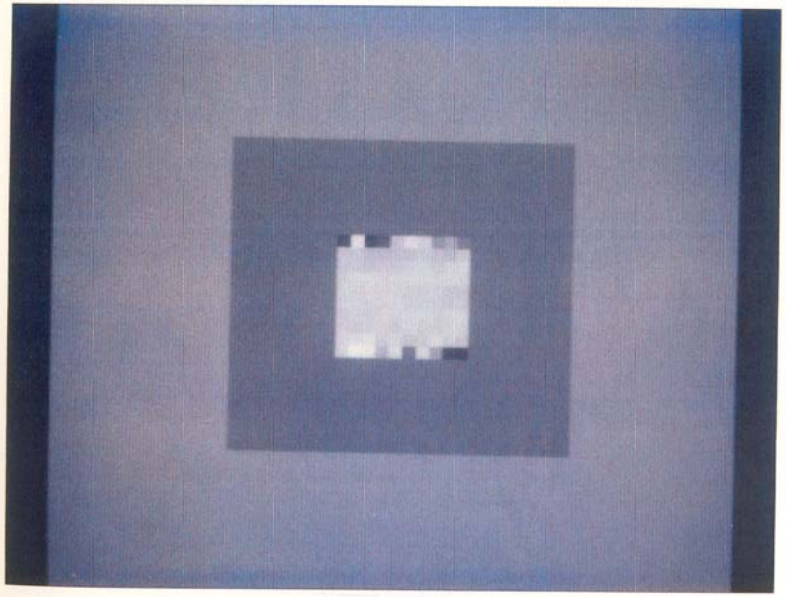


Foto 2

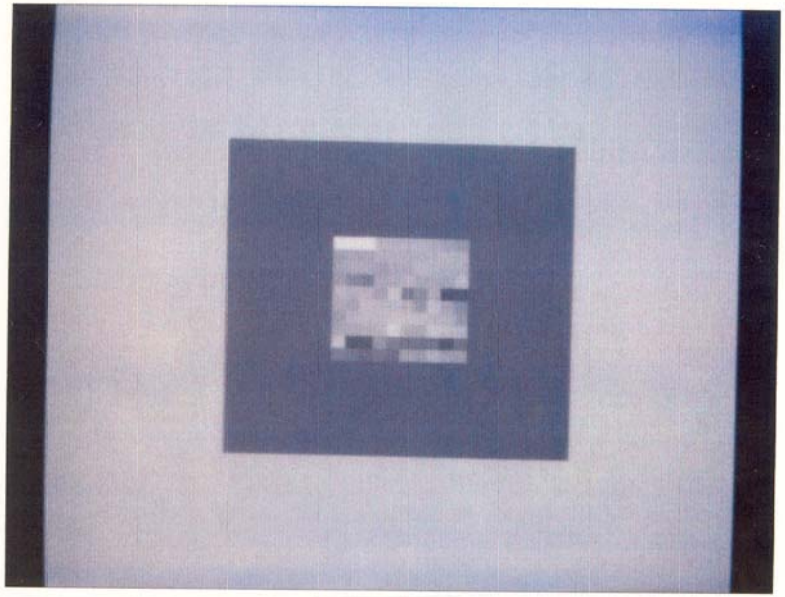


Foto 3

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

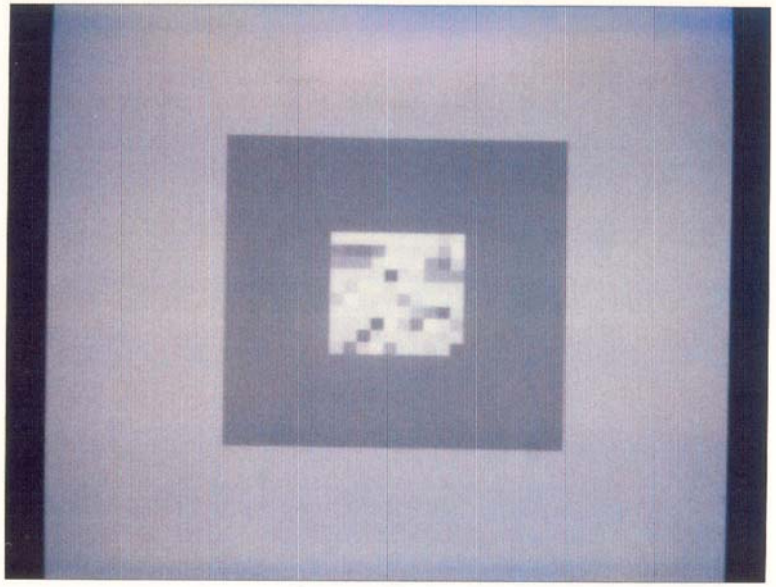


Foto 4

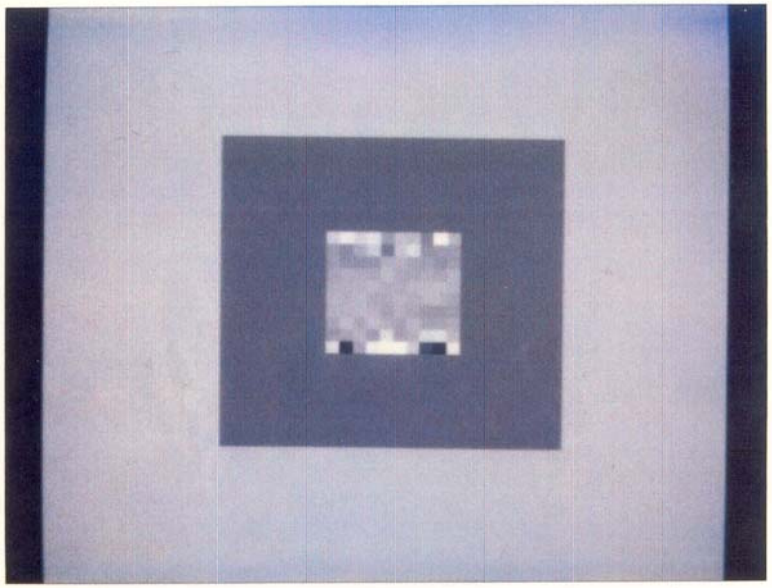


Foto 5

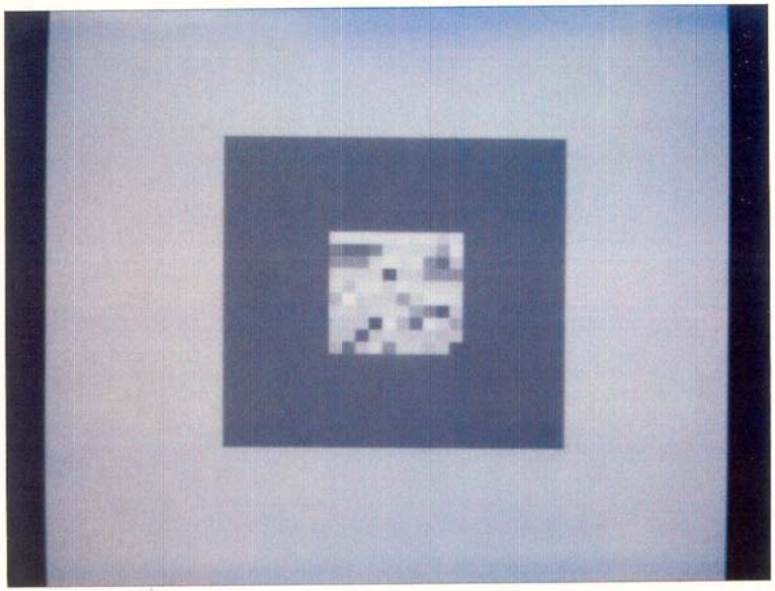


Foto 6

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Foto 7

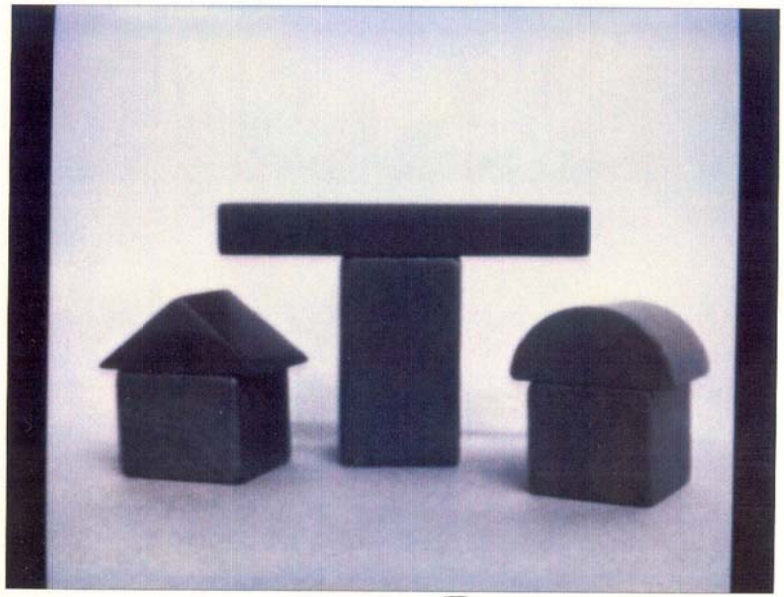


Foto 8

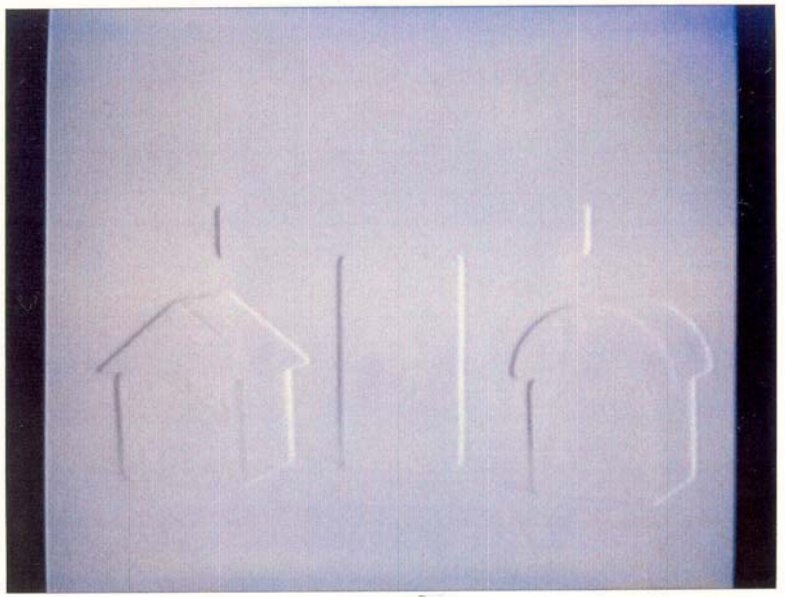


Foto 9a

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

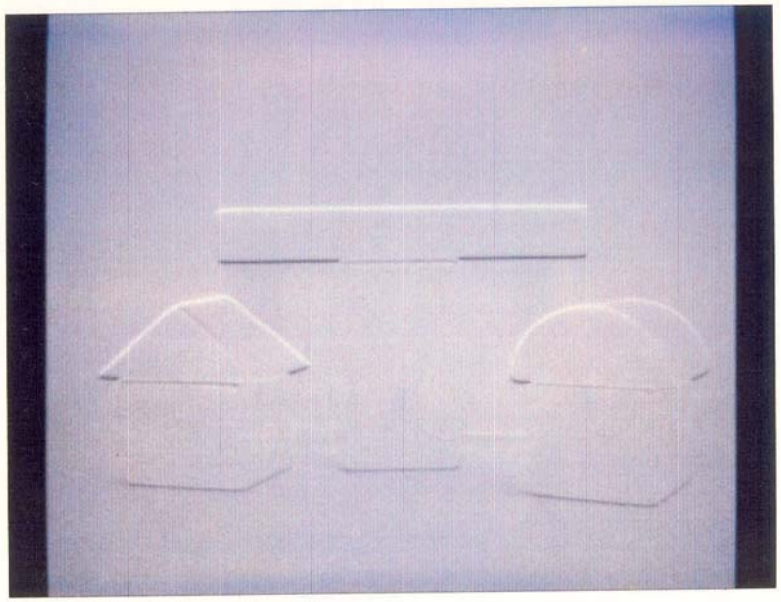


Foto 9b

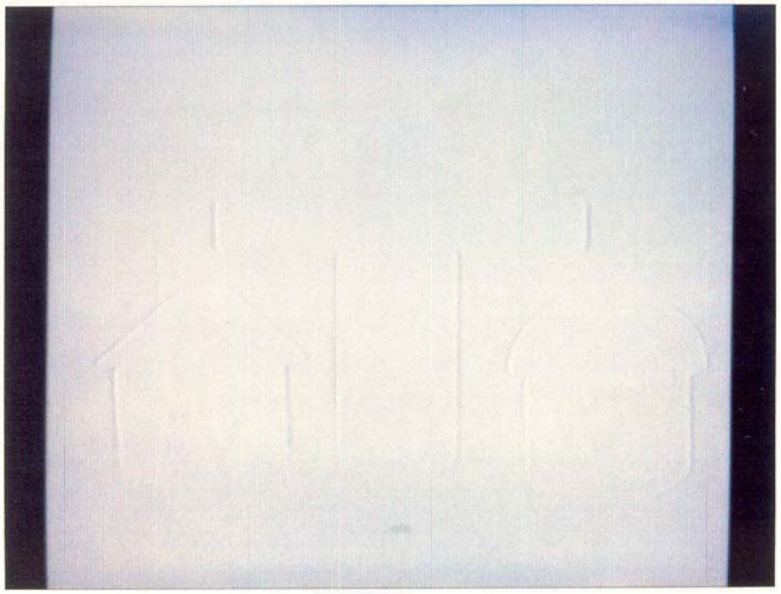


Foto 9c

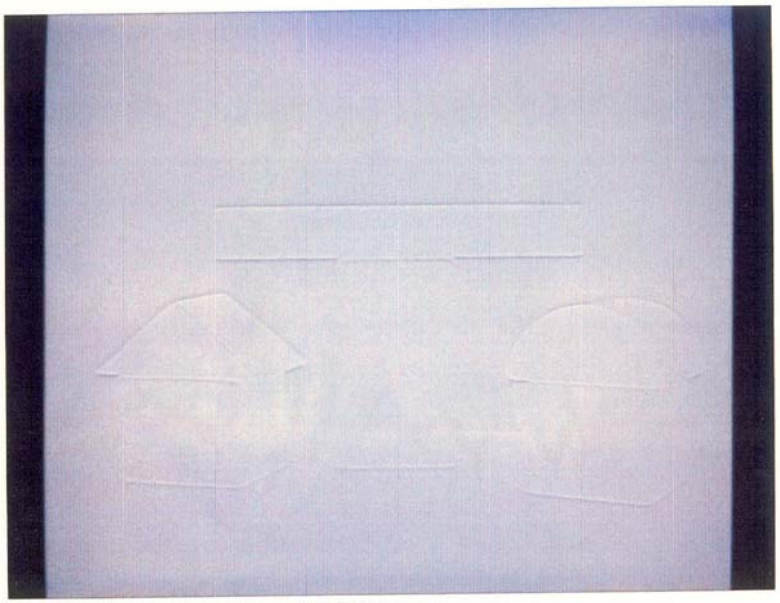


Foto 9d

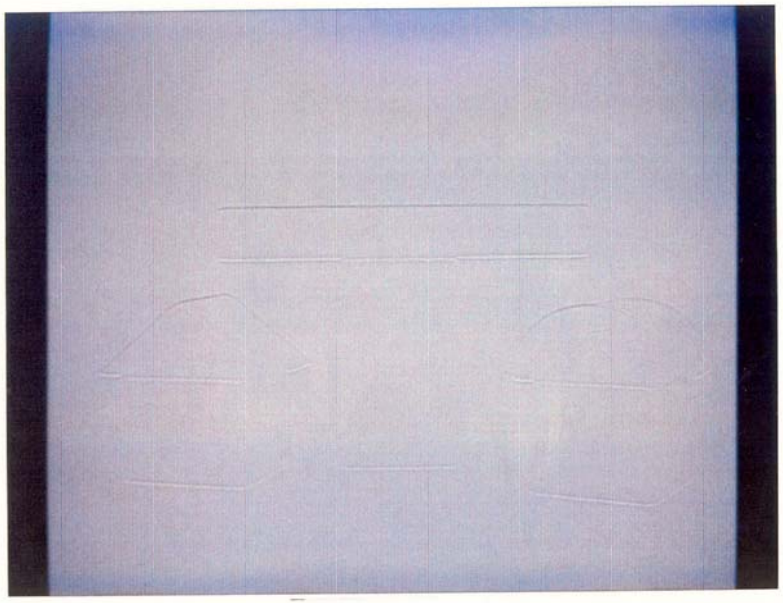


Foto 9e

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

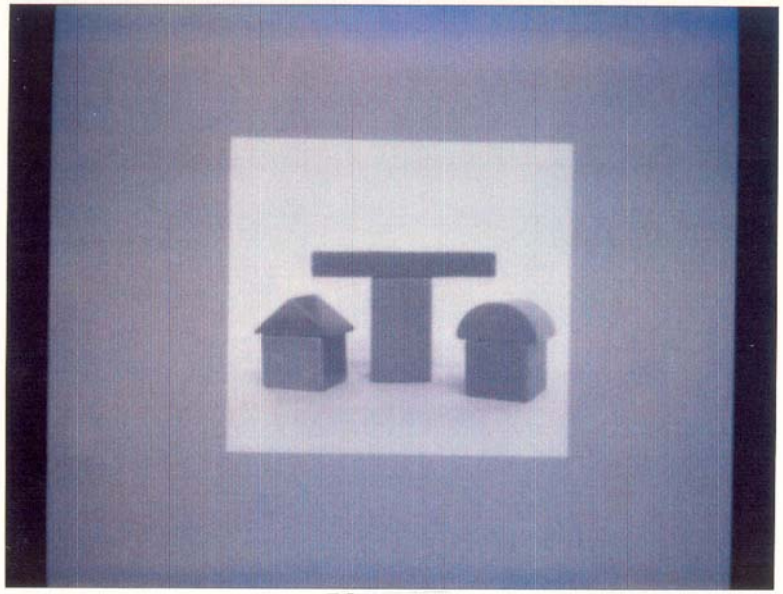


Foto 10

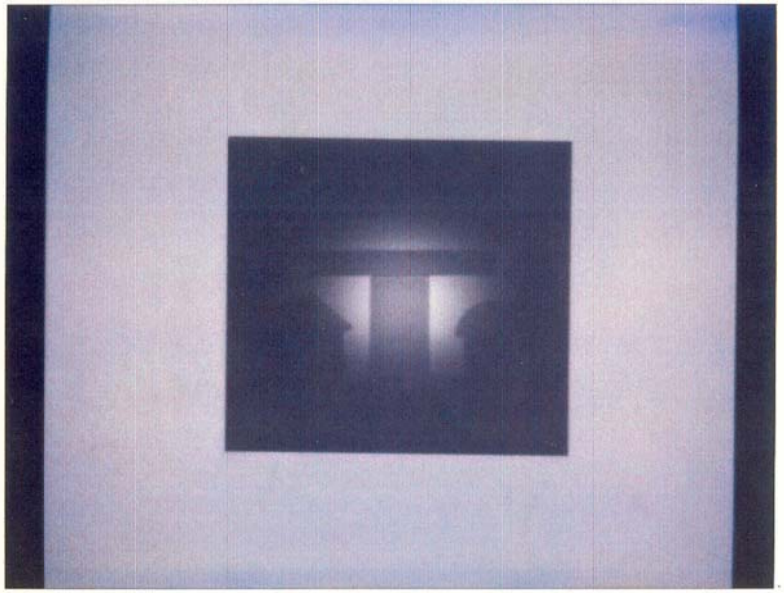


Foto 11a

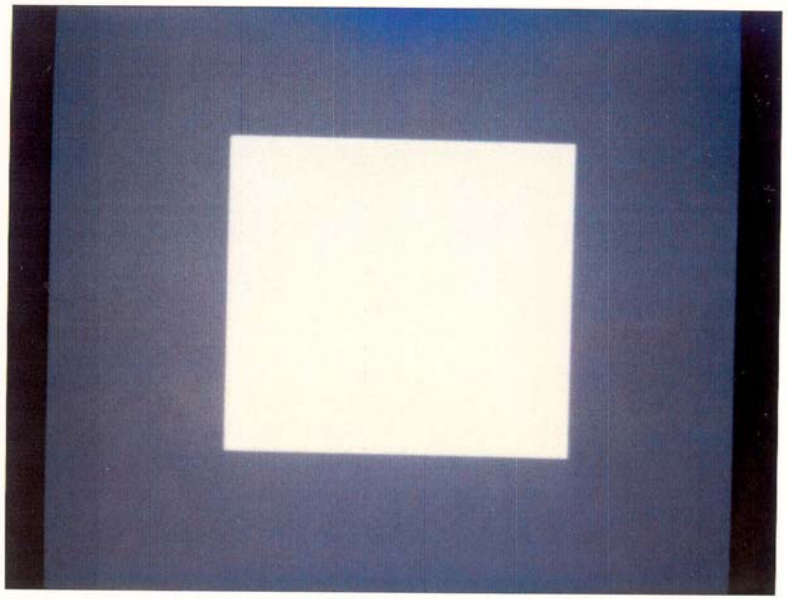


Foto 11b

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

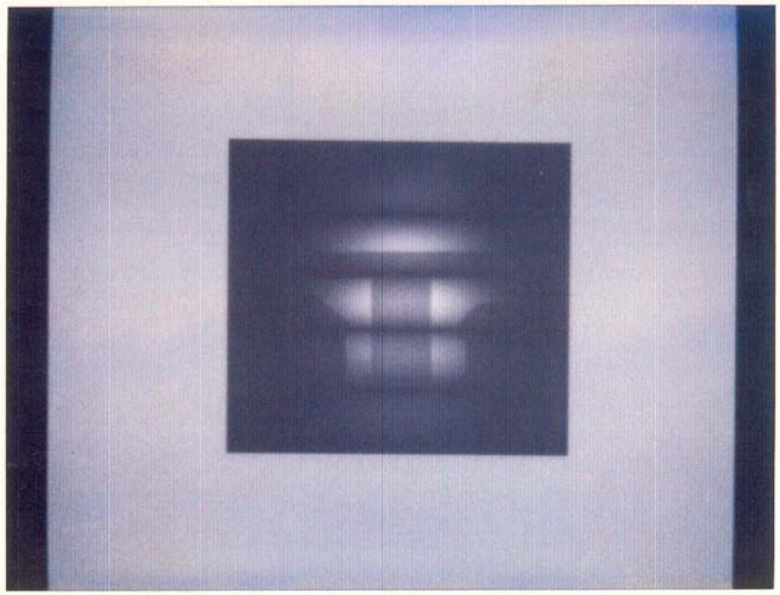


Foto 12a

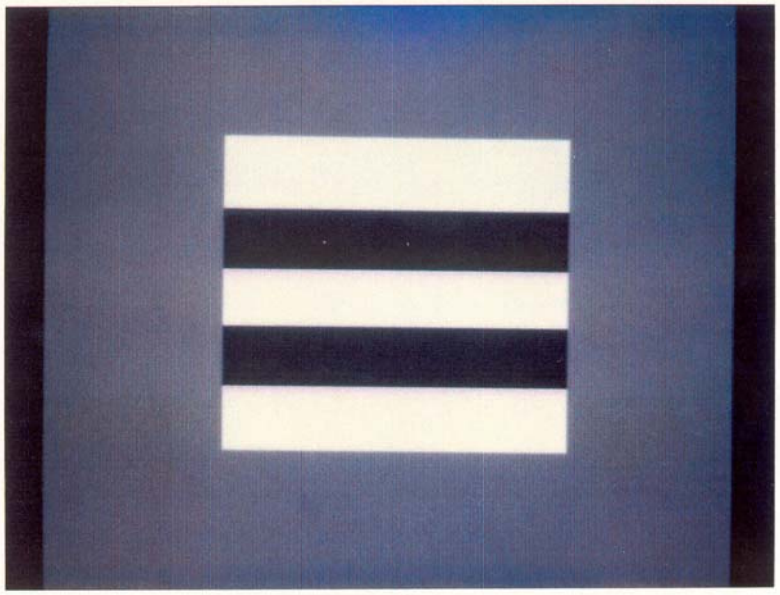


Foto 12b

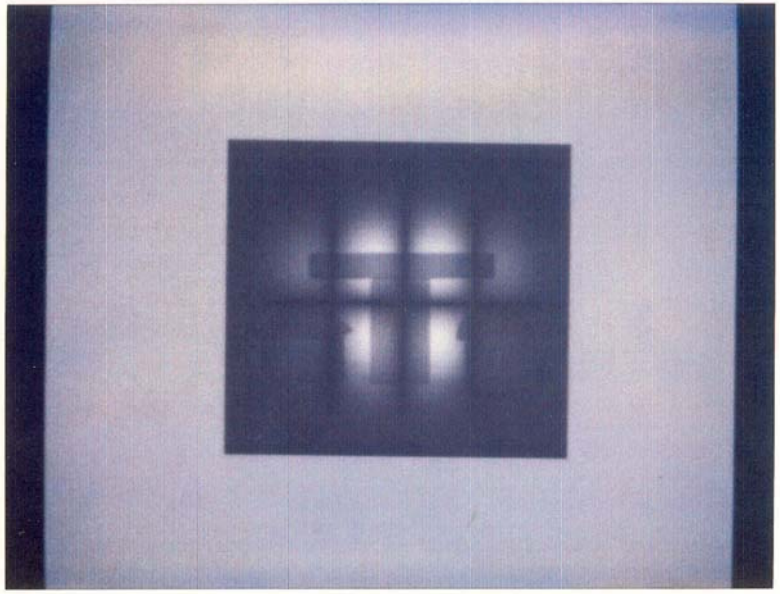


Foto 13a

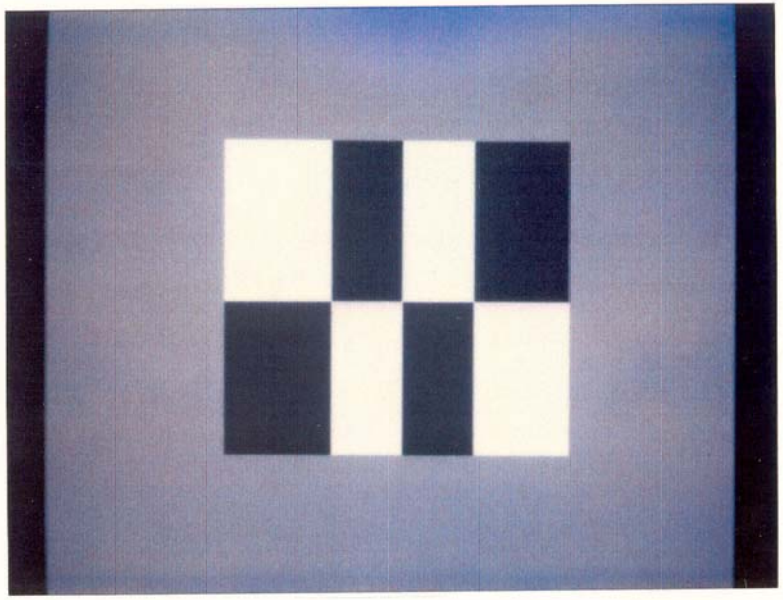


Foto 13b

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

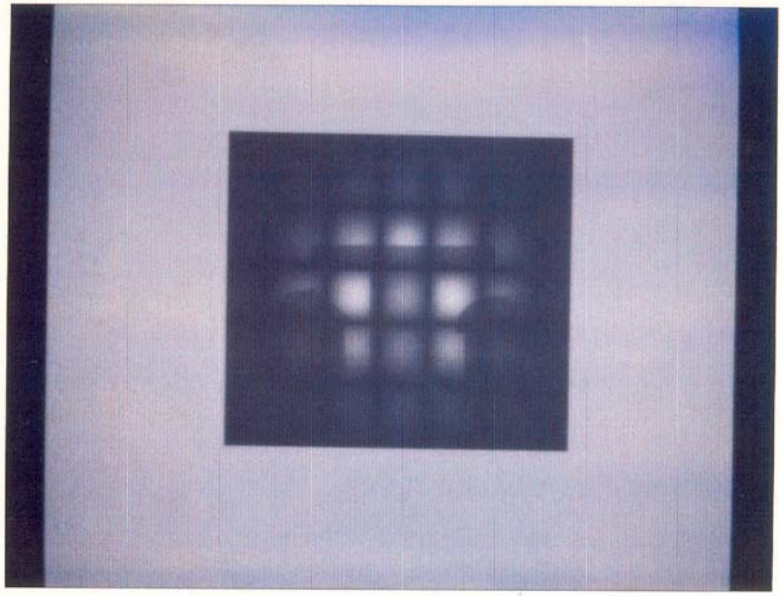


Foto 14a

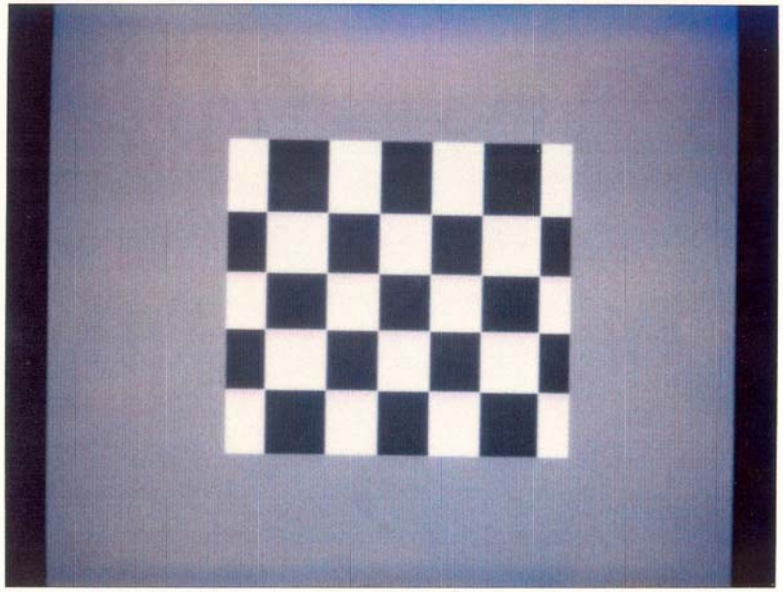


Foto 14b

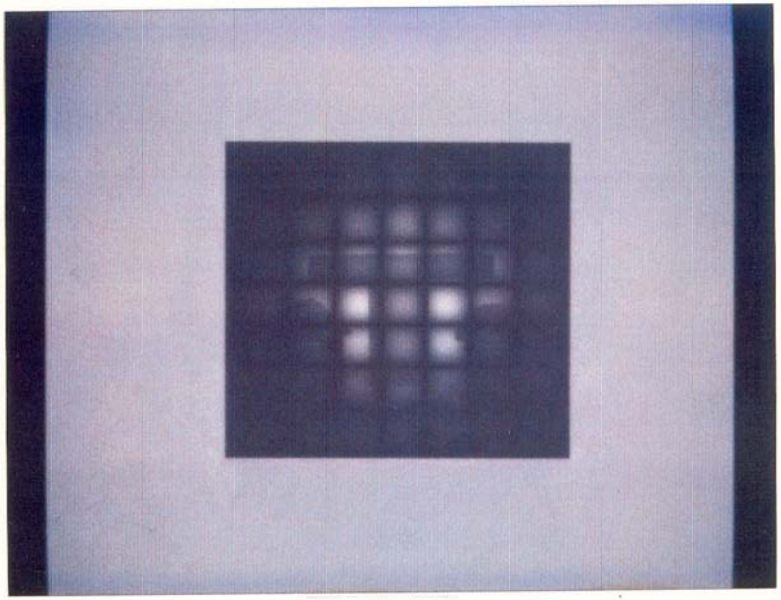


Foto 15a

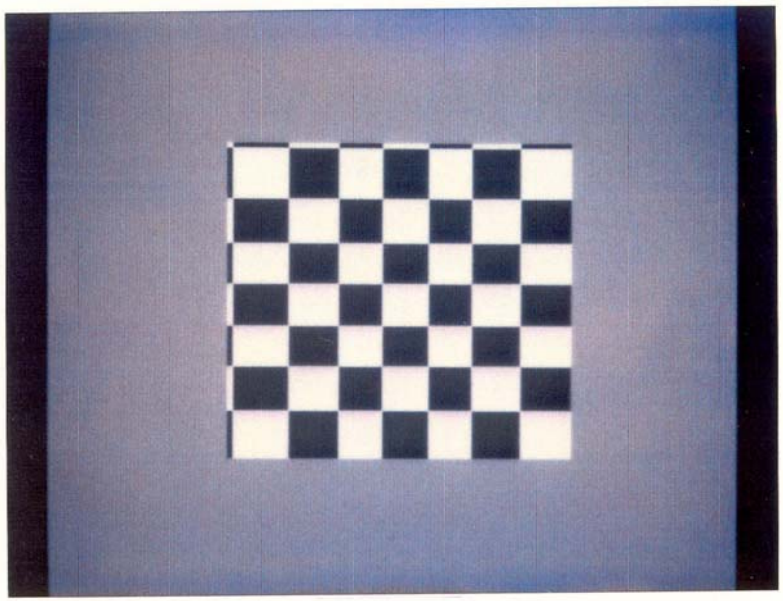


Foto 15b

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

PARTE II

SOBRE LA COMPLITUD Y COOPERACION EN RETINAS BIDIMENSIONALES

Mecanismos cooperativos de partición de campos (estructura) y funcionales (función) para garantizar la seguridad de una descripción completa.

2.1.- Transformaciones por capas.

La retina, y la corteza, son desde el punto de vista computacional, computadores por capas. Lo siguiente es una posible formalización-resumen de un concepto, extraido de trabajos anteriores, que ayuda a converger en el tema de esta Parte II.

Una Capa de Proceso (CP) dentro del Sistema Nervioso ha de definirse concretando su espacio de entrada, su espacio de salida y la estructura relacional que los une. La naturaleza de la Capa y las técnicas experimentales de registro de actividad determinan los espacios de entrada y salida. La estructura relacional define el nivel de descripción y la función de la Capa [2].

El espacio de entradas es un espacio multidimensional de aquellas características independientes que se consideran relevantes dada la naturaleza de la Capa o Sistema en estudio. Por ejemplo, en el proceso de datos visuales en retina el espacio de entrada vendría dado por la naturaleza de los estímulos incidentes en los fotorreceptores: espacio físico tridimensional, tiempo y longitud de onda de los fotones incidentes, es decir, el espacio de entrada sería pentadimensional (es de notar que en un tratamiento simplificado del Sistema, esas cinco dimensiones pueden ser truncadas, así, considerando imágenes monocromáticas bidimensionales estacionarias el resultado sería un espacio de entradas de tres dimensiones). Si la Capa considerada no está enfrentada directamente a un medio físico externo (por

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

ejemplo, al estudiar la acción cortical) la definición del espacio de entradas es muy difícil y se basa casi por completo en nuestras preconcepciones sobre la función de las estructuras conectadas a la Capa en estudio. Al estudiar, pues, el téctum de la rana, por poner un ejemplo, hemos de conocer cuál ha sido la codificación retinal que es transmitida por el nervio óptico.

El espacio de salidas de una Capa neuronal entendida como un procesador de símbolos ha de tener siempre un número de dimensiones menor que su espacio de entradas. La naturaleza del espacio de salidas viene determinada por el tipo de descripción que se hace de la Capa, es decir, del tipo de herramienta formal que se usa para la caracterización de la Capa. Esta reducción del número de dimensiones no implica a priori una pérdida de información por la acción de la Capa de procesadores [2].

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

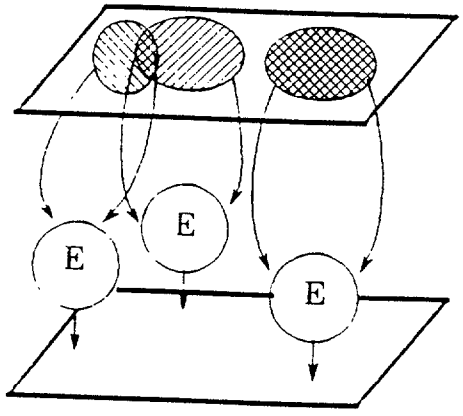


Figura 1: Esquema de estructura relacional bidimensional. Los elementos computacionales E se alimentan del espacio de entradas produciendo el de salidas.

La unión entre los espacios de entrada y salida se realiza por medio de una expresión relacional cuya estructura depende del lenguaje de descripción elegido. La sencillez en la descripción de un fenómeno es una propiedad del lenguaje usado y del fenómeno en sí. Esta expresión o estructura relacional puede presentar realimentación si toma datos no sólo del espacio de entradas sino también del de salidas. Como vemos representado gráficamente en la Figura 1, la estructura relacional está formada por un conjunto de elementos computacionales (que serían las neuronas de la Capa) E1, E2... que se alimentan del espacio de entradas y producen el espacio de salidas. En el caso de considerar la dimensión tiempo, los espacios de entrada y salida se convierten en volúmenes de entrada y salida, como es fácil de ver en la Figura 2. De ambas figuras es fácil deducir qué se entiende por Campo Receptivo.

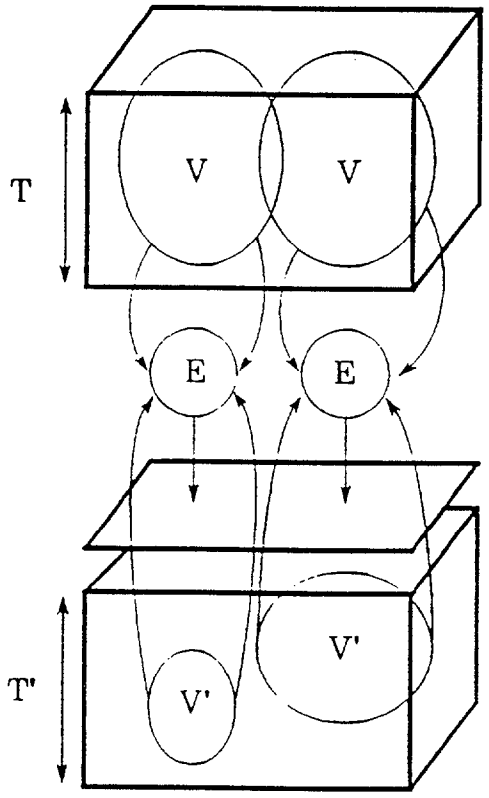


Figura 2: Esquema funcional tridimensional del proceso neuronal por capas.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Se define una Transformación realizada por una Capa de Proceso al especificar un espacio de entradas, un espacio de salidas y una estructura relacional entre ambos. Dependiendo de la elección de un lenguaje integral o algorítmico en la definición de la estructura relacional tendremos Transformaciones lineales o no lineales. De la misma forma, atendiendo al conjunto de datos del espacio de entradas que intervienen en el cálculo de un elemento del espacio de salida tendremos tres tipos más de Transformaciones: puntuales, locales y globales, cuyas estructuras están gráficamente representadas en la Figura 3. Los filtros y transformaciones que puedan implementarse mediante convoluciones están incluidas en las transformaciones locales. Transformaciones como las de Fourier y Hadamard o las de Newton y Hermite introducidas en la primera parte de este trabajo caen dentro de las globales.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

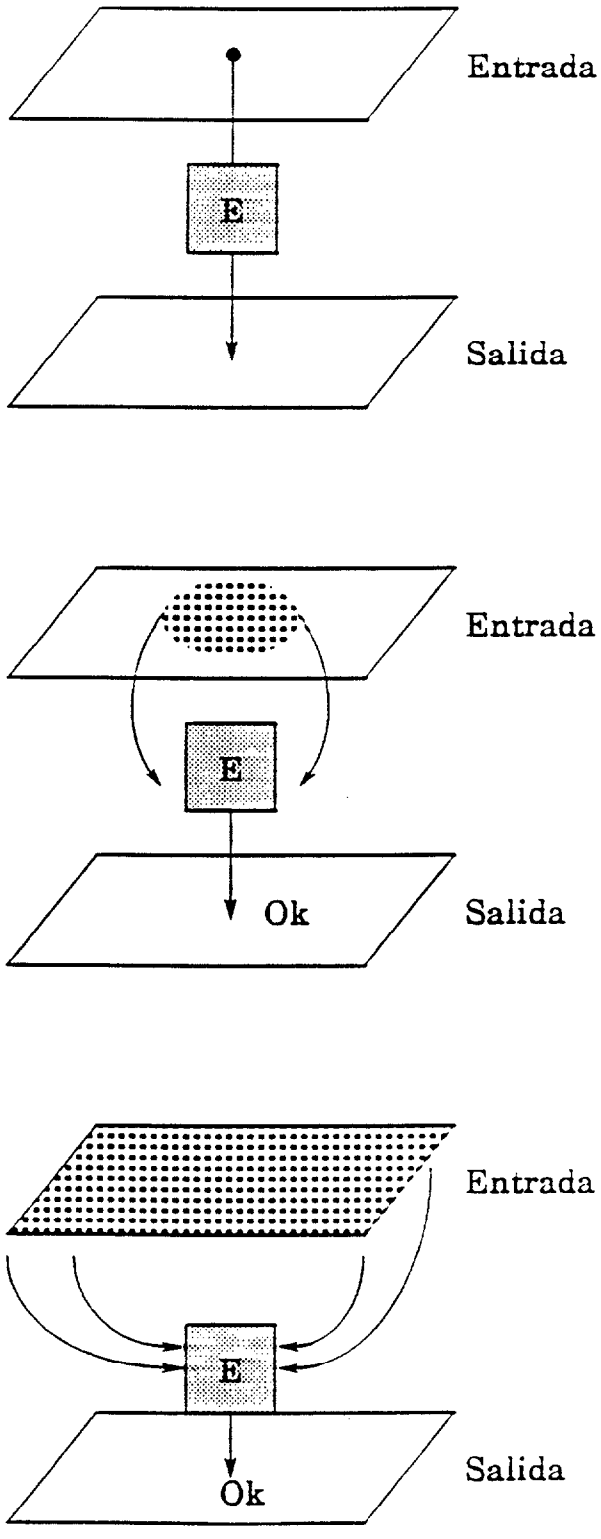


Figura 3: Esquema de los tres tipos de Transformaciones atendiendo a la estructura del espacio de entradas: de arriba a bajo, transformaciones puntuales, locales y globales.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

2.2.- Convergencia y divergencia. Complitud de Transformaciones.

Una de las más importantes características de los Sistemas Nerviosos, y en general de los sistemas de procesamiento de información en paralelo, es el enorme grado de convergencia y divergencia de señales y caminos que pueden encontrarse [40]. Por convergencia se entiende la confluencia de un cierto número de entradas o líneas en un procesador (célula) determinado. Así, el campo receptivo de una célula es su "campo de convergencia". Por divergencia entendemos la "expansión" de información desde una célula (procesador) dada a un conjunto de otras en la capa subsiguiente. Un ejemplo clásico lo encontramos en retina, donde un fotorreceptor envía su señal a un conjunto de células bipolares. Otro ejemplo claro, esta vez en una estructura artificial, los vimos en las F-Nets o Redes de Newton de la Parte I.

El rol funcional de la convergencia, divergencia y del solapamiento de campos receptivos ha sido extensamente discutido , desarrollándose modelos en los que convergencia y divergencia jugaban un papel fundamental en la localización de estímulos y en la fiabilidad de la transmisión de información entre capas de proceso.

Otro concepto básico en proceso de imágenes y en visión es el de Descripción o Transformación completa [17]. Una descripción se admite que es completa en su entorno visual, si contiene todos los datos y propiedades de los datos necesarios para cubrir unos objetivos. Desde el punto de vista analítico, la descripción completa requiere la conservación del número de grados de libertad o del número de propiedades independientes del entorno visual. Diversos autores [41,42] han analizado la relación entre complitud, campos receptivos

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

y descriptores (o funciones) computados por los procesadores. Así, es un clásico resultado el que para una retina de N grados de libertad en la que se definen B campos receptivos independientes en el sentido de que el solape de dos de ellos no sea absoluto, se necesitan en media A=N/B descriptores o funcionales linealmente independientes para asegurar la complitud de la descripción sobre la imagen. Los autores citados llevaron a cabo el análisis de la complitud a nivel analítico en una sola dimensión, hablando de "descriptores en media" y no de número absoluto de descriptores. A continuación se realizará una extensión de dicho trabajo a dos dimensiones y se analizará la incidencia de estas ideas en la fiabilidad funcional de grupos de procesadores (neuronas).

2.3.- Extensión de retinas y complitud.

En este análisis teórico se considerará una retina bidimensional de NxN receptores (o pixels) que contiene A campos receptivos de dimensión mxm que presentan cierto grado de solape homogéneo que se especificará en cada caso. Estos campos receptivos en ningún caso cubrirán más área que la definida por los bordes de la retina, no pudiendo, pues, producirse desbordamiento de los campos. Otro requisito es que sean linealmente independientes, es decir, que dos de ellos no cubran exactamente la misma área. Cada campo receptivo es el campo de datos sobre el cual una célula (procesador) realizará cierta operación/es que llamaremos descriptor/es. Estos descriptores pueden ser, por ejemplo, operaciones centro-periferia, operaciones de detección de bordes o un cálculo de la media de la intensidad luminosa sobre el campo. Si una célula lleva a cabo más de un cómputo, éstos han de ser linealmente independientes. Nuestro objetivo es que las A células computantes deriven una descripción completa a bajo nivel de la imagen que cae en la retina,

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

es decir, que toda la información contenida en los NxN receptores se pueda, si fuese necesario, recuperar en un estado siguiente de proceso.

Lema 1: En las condiciones descritas, se necesita un número máximo de descriptores linealmente independientes que cada célula ha de computar. Dicho número viene dado por:

$$Lm = int(NxN/A) + 1 \quad \{1\}$$

donde int significa "parte entera de".

Demostración: Si Lm fuese menor que lo expresado en {1}, la descripción nunca podría ser completa pues el sistema de ecuaciones resultante tendría más variables que ecuaciones. ■

Lema 2: Si todas las A células computasen Lm descriptores independientes, se generaría información redundante.

Demostración: Es fácil ver que si nuestros grados de libertad (o variables) son NxN, dado que A células computan Lm descriptores, obtendríamos tantas ecuaciones como queda expresado a continuación, haciendo uso de {1}:

$$A\ Lm = A\ (int(NxN/A)+1) > NxN$$

Al ser A Lm > NxN, existe información redundante, pues tenemos más ecuaciones

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

que variables. ■

Teorema 1: Existe un número mínimo de células, n, que ha de computar Lm descriptores, computando las restantes Lm-1, para garantizar la complitud de la descripción.

Demostración: Sean n las células que han de computar Lm descriptores linealmente independientes. Así, A-n habrían de computar Lm-1 descriptores según las condiciones del teorema. Para garantizar la complitud a nivel analítico se ha de verificar la relación:

$$n\,Lm + (Lm-1)\,(A-n) = NxN$$

de donde se puede extraer que:

$$n = NxN - (Lm-1)\,A \qquad \{2\} \quad .\blacksquare$$

Esta expresión nos da el mínimo número, n, de células. Estas n células se pueden elegir libremente dentro de la capa.

Teorema 2: Sea b un número mayor que el número n del teorema anterior. Si se eligen b células que computen Lm descriptores, siempre se podrá diseñar una retina cuyas células computen menos de Lm-1 descriptores.

Demostración: Como es fácil de ver, la restricción general que afecta al sistema en estudio es del tipo:

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

$$n_1 Lm + n_2 (Lm-1) + n_3 (Lm-2) + \ldots + n_i (Lm-i+1) = NxN$$

con:

$$\sum_{j=1}^{i} n_j = A$$

de forma que se puede elegir un vector de números enteros $(n_1,\ldots,n_n)$ que lo cumpla haciendo $n_1 = b > n$. Así, extraigo un subconjunto de neuronas que generan más ecuaciones de las necesarias, con lo que puedo definir otro subconjunto de cardinal n_2 que genere menos de las que les corresponderían. Aplicando este mismo procedimiento a n_2, podría calcular un número n_3 de células que calculasen aún menos descriptores, y así sucesivamente hasta n_i.

■

Ejemplo 1: Sea una retina de 50x50 receptores cubierta con campos receptivos de tamaño 2x2 con solape máximo (ver Figura 4.a). La retina contendrá, pues, 2401 campos receptivos y dado que NxN=2500, el número de descriptores linealmente independientes será Lm=int(2500/2401)+1=2. Necesitaremos, pues, dos descriptores (por ejemplo, la media y un cálculo centro-periferia). No todas las células han de efectuar ambas operaciones. De hecho, sólo n=2500-2401=99 han de trabajar más, el resto, que incluye a la gran mayoría de células, calculan un solo descriptor.

Ejemplo 2: La misma retina, esta vez cubierta con un mosaico de campos receptivos 3x3 con solape máximo (ver Figura 4.b). En este caso, A=2304 células (o campos), Lm=2 y n=196 células. Hemos incrementado el tamaño de los campos, obteniendo una disminución en el número total de células pero un incremento en el número de células que han de calcular dos

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

descriptores.

Ejemplo 3: En la siguiente Tabla podemos ver los resultados para una retina 50x50 cubierta con campos de 4x4 y dos tipos de solapamiento (Figuras 4.c y d). La primera columna incluye màximo solapamiento, la segunda un solape del 50% con los campos vecinos:

	1	2
NxN	2500	2500
A	2209	576
Lm	2	5
n	291	196

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Decrementar el grado de solape implica dos cambios dramáticos en el diseño: necesitamos muchas menos células (procesadores), de hecho 576 en lugar de 2209, pero se han de computar más descriptores por célula, lo que aumenta la complejidad del proceso. Como uno puede esperar, existen menos células que computen todos los descriptores en la columna 2, pero el resto habría de calcular 4 en lugar de 1. Veamos un último ejemplo:

Ejemplo 4: La misma retina de 50x50 con campos receptivos de 5x5 y diverso solapamiento, según vemos en la Figura 4.e. La primera columna incluye máximo solape y la última

ausencia total de solapamiento.

	1	2	3
NxN	2500	2500	2500
A	2116	256	100
Lm	2	10	26
n	384	196	0

Se puede hacer el mismo tipo de análisis de estos resultados que en el ejemplo anterior, incluyendo que en la columna 3 los datos deben leerse como sigue: el hecho de no haber solapamiento implica que 0 células computen 26 descriptores, lo que implica que todas (las 100) han de computar 26-1=25 funciones linealmente independientes. Esto es obviamente esperable pues 100x25=2500.

Ejemplo 5: Este ejemplo ilustra el teorema 2. Sea la retina de 50x50 cubierta con campos 4x4 con solapamiento del 50% con respecto a los vecinos, vista en la columna 2 del Ejemplo 3. Teníamos que Lm=5 y n=196. Tomando un b=200, según el Teorema 2, podemos tener células que en vez de computar 4 descriptores, calculen sólo 3. En efecto, de esas 200 células obtenemos 200x5=1000 descriptores. Si q células calculan 4 y p células calculan 3, es fácil derivar del teorema 2:

$$p + q = 576 - 200 = 376 \qquad y$$

$$3p + 4q = 1500$$

de donde p=4 y q=372.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

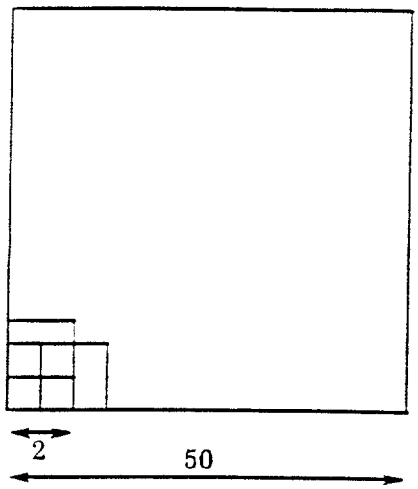


Figura 4.a: Una retina cubierta con Campos Receptivos de pequeño tamaño con máximo solapamiento.

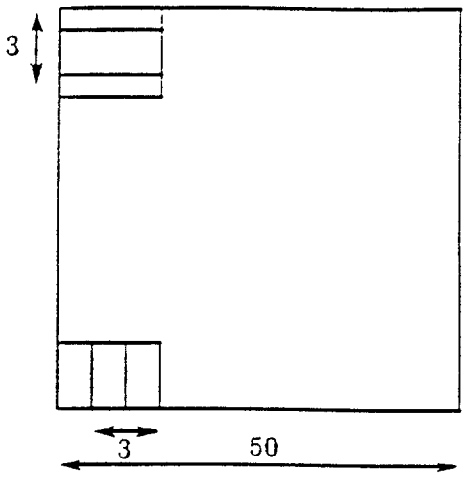
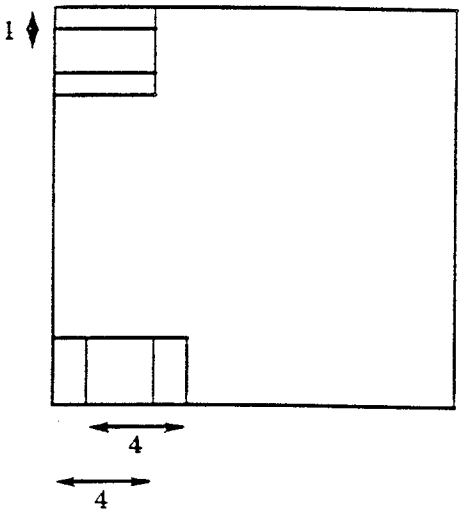
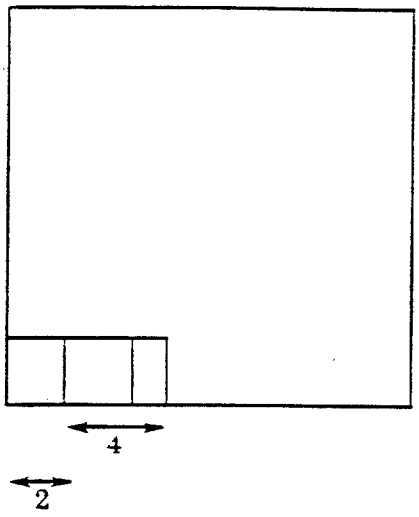


Figura 4.b: La misma retina de 4.a con campos algo mayores. El efecto de este aumento del tamaño se explica en el texto.





Figuras 4.c y 4.d: Sobre la misma retina se sitúan mosaicos de Campos Receptivos iguales con dos tipos distintos de solapamiento: se computan más descriptores por procesador si bien disminuye el número de procesadores necesario para mantener la complitud.

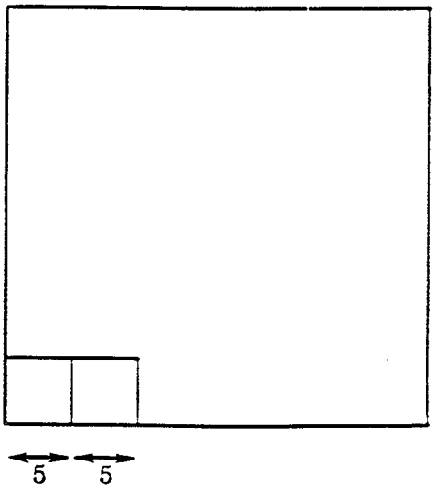


Figura 4.e: Ausencia total de solapamiento en una retina de 50x50 con Campos Receptivos de 5x5 elementos.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Un tratamiento más general puede incluir la consideración de retinas mixtas. Por retinas mixtas entendemos aquellas que presentan campos receptivos de dos o más tamaños diferentes, es decir, existen dos mosaicos superpuestos de campos receptivos, sobre cada uno de los cuales se lleva a cabo el análisis anterior. Un ejemplo puede clarificar esta idea:

Ejemplo de retina mixta: Sea otra vez nuestra retina de 50x50 pixels o receptores, cubierta ahora por dos mosaicos superpuestos, uno de campos de tamaño 4x4 con solape máximo y el otro compuesto por campos 5x5 solapados según se ve en la Figura 5. Es fácil comprobar que el número total de campos receptivos es $A=2465=2209+256$. Así, $Lm=2$ y $n=35$. Este nuevo diseño, si bien requiere más células que cada mosaico por separado, ahorra en descriptores y en el número de células que deben calcular Lm. En efecto, el mosaico de campos 5x5 exclusivamente, requeriría 256 campos y 196 células calculando 10 descriptores. El de 4x4 requeriría 2209 campos con 291 células calculando 2 descriptores. La combinación de ambos nos permite que sólo 35 de las células calculen 2 descriptores y el resto, 2430, computen sólo 1. Necesitamos más procesadores pero menos complejidad en su función.

Se debe notar que en las retinas mixtas, cuando un campo receptivo grande engloba a varios pequeños, el descriptor/es que éste calcula deben no ser combinación lineal de el/los calculados por los pequeños, pues se generarían inconsistencias que destruirían la complitud de la descripción.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

2.4.- Implicaciones en Teoría Retinal.

Prácticamente desde los primeros experimentos neurofisiológicos, se ha llevado a cabo una clasificación celular de neuronas retinales atendiendo a aspectos morfo-funcionales de las mismas. Así, desde siempre, se conocen las células X, las células Y, y las células W (diferentes ganglionares en la retina de los gatos), sus diferentes tipos de respuesta, el tamaño de sus campos receptivos. Para retinas más simples, como la de la rana, se han unido todas estas características, junto con la velocidad de conducción axonal y el grado de complejidad funcional, para recrear modelos más complejos que unen el mundo visual del animal con el significado de la señal que se transmite a través del nervio óptico, algo de lo que en otros animales aún se está lejos de explicar.

En el desarrollo teórico anterior, en el que se parte de la necesidad de preservar los grados de libertad del sistema, requisito realmente restrictivo desde el punto de vista de los sistemas naturales, queda, sin embargo, clara la unión que subyace entre tamaño del campo receptivo, complejidad de funcionamiento del procesador (o de la célula), número de procesadores y solapamiento de campos receptivos (en otras palabras, grado de convergencia y divergencia de la información). Se podría decir que cuantas menos células tengamos, mayor complejidad necesitaremos en nuestro proceso para garantizar el mantenimiento de los grados de libertad iniciales del sistema. En las células que computan más de un descriptor es esperable un aumento de la dificultad a la hora de descifrar su acción, dado que su respuesta puede transmitir varios mensajes: un significado múltiple resultado de múltiples descriptores. Aumentando el número de células disminuimos el de descriptores y hacemos más fácil la función a costa de aumentar la cantidad de procesadores.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Por otro lado, si algunos de los procesadores (o células) se pierden (se producen escotomas en el sistema), variará tanto el número de campos receptivos como el de líneas de entrada (se pueden producir puntos ciegos). Esto implica que para mantener la costosa restricción de complitud a bajo nivel algunos procesadores habrán de retomar el trabajo de los averiados: crecerá el número máximo de descriptores necesario y el número mínimo de células que computen dichos descriptores. Esta cierta tolerancia a fallos, que en sistemas naturales está descrita, por razones de diseño experimental, a un nivel de funcionamiento más elevado que el tratado aquí, tiene un límite en el hecho de que cuando el escotoma es grande (las células perdidas son muchas) los descriptores a calcular son tantos que ningún procesador sea capaz de computarlos. Este límite es, en realidad, fundamentalmente práctico. En el peor de los casos, en donde una sola célula quedase funcionando, el número de descriptores coincidiría con el tamaño (grados de libertad) de su campo receptivo.

2.4.1.- Un esquema cooperativo que garantiza complitud frente a fallos.

En este último caso, no es muy difícil ver cómo se apunta hacia un sistema de cooperación entre procesadores para mantener el funcionamiento requerido del sistema total. Cada procesador, aparte de realizar su propio trabajo, tendría parte de la información sobre el trabajo de los procesadores vecinos (tipo de funcionales que éstan computan) y líneas de entrada que señalasen el buen o mal funcionamiento de dichos vecinos. En caso de malfuncionamiento o destrucción, los procesadores (células) vecinos verían alterado su cómputo para hacer frente a la posible pérdida de grados de libertad. Esto se esquematiza en la Figura 5, junto con un posible algoritmo de funcionamiento de esta red cooperante hipotética.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

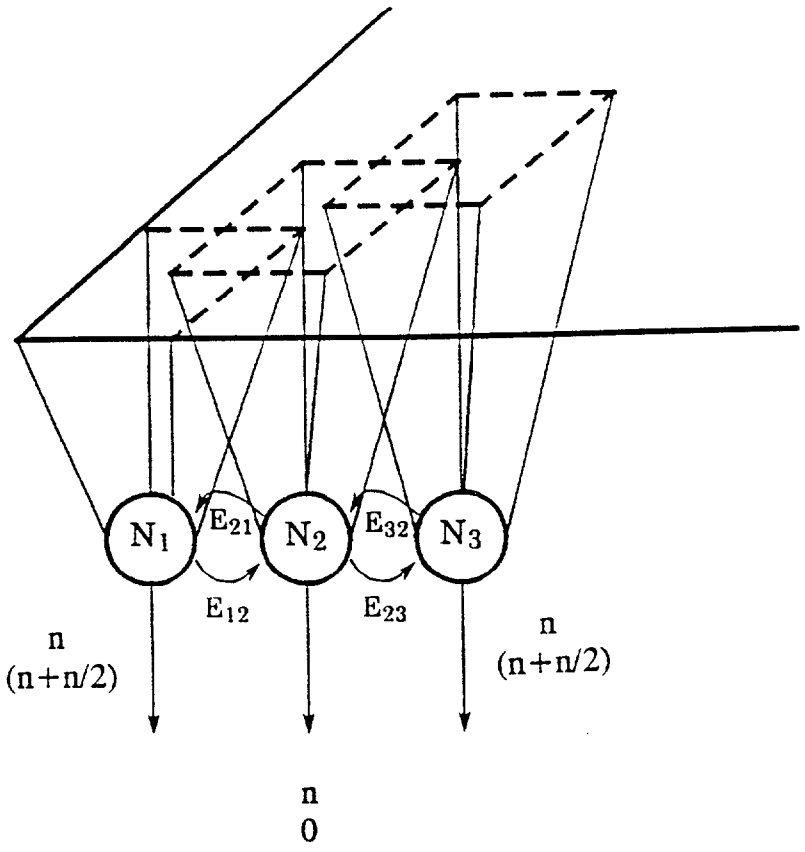


Figura 5: Una red cooperativa que mantiene la complitud frente a fallos.

Los números representan los descriptores calculados antes y después (entre paréntesis) de fallar la N_2.

2.5.- Computación distribuida y complitud.

El constructo cooperativo que se ha esbozado en el apartado anterior se puede formalizar para procesadores sin mucha complicación, estableciendo las siguientes:

Definición 1: Llamaremos unidad computacional de tipo cooperativo a aquel procesador cuya función depende de la actividad de otro procesador.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Definición 2: Una capa de computación distribuida es un conjunto de unidades computacionales de tipo cooperativo.

Teorema 3: Dado un Campo de Datos de dimensión NxN, existe una capa de computación distribuida que, tomando datos de dicho campo con máximo solapamiento, garantiza la complitud frente a fallos de los procesadores.

Demostración: La demostración de este Teorema es de tipo constructivo: a partir del Campo de Datos de dimensión NxN, construiremos una capa de unidades computacionales cooperativas que garantice el mantenimiento de la información frente a desconexiones (fallos) de algunas de dichas unidades.

Por los teoremas anteriores sabemos que en una retina bidimensional de NxN grados de libertad dividida en A campos receptivos con solape tenemos:

$$n = NxN - (Lm-1)\ A$$

procesadores libremente elegidos que computan Lm descriptores, y todos los demas computan Lm-1. Supongamos procesadores cooperativos interconectados entre sí y cuya estructura funcional es de tipo algorítmico:

repetir

computar B

hasta error neurona vecina

computar B

computar B'

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

donde car(B)=β es el cardinal del conjunto de descriptores B y lo mismo para β'. Si el procesador B_j falla y car(B_j)=β_j, y envía la señal de error a los vecinos que estén conectados con él, la condición de complitud en el número total de descriptores se seguirá cumpliendo siempre que elijamos cardinales que cumplan la condición:

$$\sum \beta_i' = \beta_j \qquad \{1\}$$

donde la suma está extendida a los procesadores vecinos del que malfunciona. La elección de los valores de β_k y β'_k es arbitraria siempre que se cumpla {1}.■

El hecho de que los campos receptivos presenten el máximo solapamiento garantiza la complitud. En casos en los que los campos receptivos no estén suficientemente solapados se pueden producir "puntos ciegos" en el Campo de Datos, como lo muestra el diagrama de la Figura 6.

Por último, cabe decir que complicando la estructura algorítmica del procesador se puede hacer frente a la eventualidad de que más de un procesador de la red falle.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

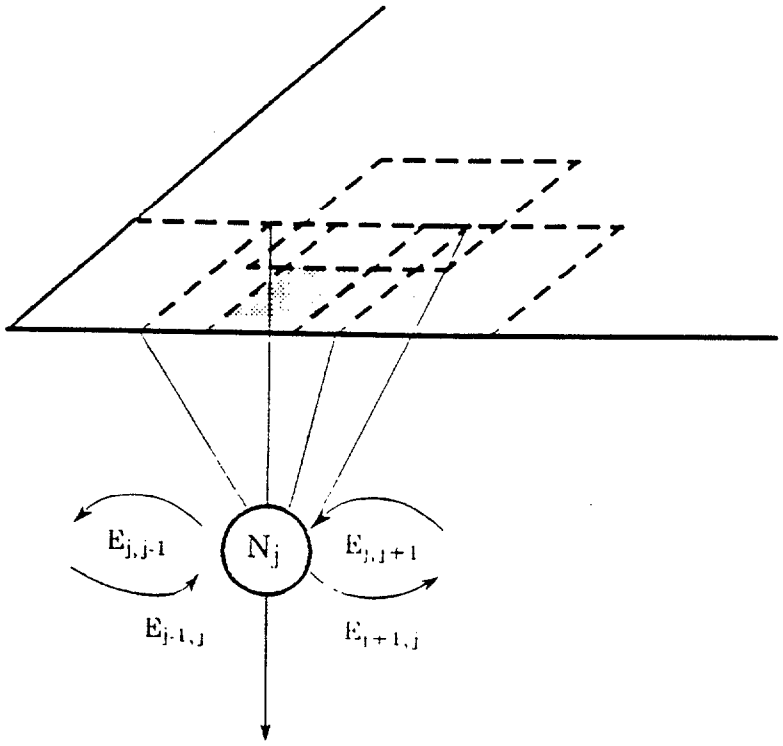


Figura 6: Sin suficiente solapamiento pueden producirse escotomas. En caso de fallo de la N_j, toda la información en la zona sombreada se perdería.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

PARTE III

ESTRUCTURA Y FUNCION DESDE LA NEUROFISIOLOGIA

El diseño natural de la maquinaria visual.

3.1.-Introducción. Morfología de los bastones retinales.

Como quedó apuntado anteriormente, el principal método de descifrar funciones asociadas con estructuras neuronales ha sido, tradicionalmente, el registro eléctrico de su actividad, intentar determinar qué mensajes envían las neuronas y cómo los codifican. A partir de los fotorreceptores, el grado de complejidad semántica tanto del espacio de entrada como del espacio de salidas se incrementa. La función se vuelve difusa para el observador. Este capítulo desarrollará una metodología alternativa de estudio de la función a partir de la estructura conocida, basada en un criterio de óptimo. Se mostrará asímismo su utilidad para la clasificación de células retinales en diversas especies vertebradas. La aplicación estricta del criterio de óptimo es sólo posible en estructuras neuronales de bajo contenido semántico, lo que en la Curva de Representación Simbólica de Complejidad Semántica de Mira y Moreno-Díaz correspondería al extremo izquierdo: si en un eje representamos la hipotética complejidad semántica en distintos subsistemas del Sistema Nervioso frente a su situación más o menos central nos resulta la Curva que se muestra en la Figura 0.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

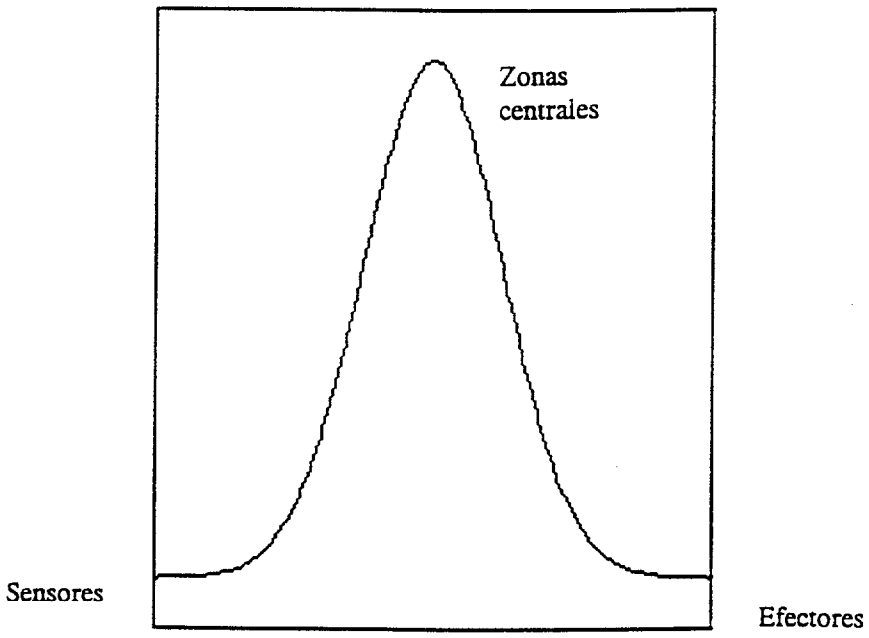


Figura 0: Representación simbólica de la complejidad semántica de diversas estructuras más o menos centrales en Sistemas Nerviosos.

Un viejo axioma dice que, en la Naturaleza, la estructura está unida perfectamente a la función. En el caso del mosaico retinal de fotorreceptores (conos y bastones) esta idea estimuló la investigación referente al diámetro de fotorreceptores y su relación con los límites ópticos de difracción, agudeza visual, resolución de patrones en rejilla y aliasing [43]. Son éstas propiedades debidas al arreglo estructural del mosaico de receptores en la superficie sensible de la retina.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

En las Figuras 1 y 2 podemos ver un esquema representando a un bastón retinal tal y como son conocidos desde Ramón y Cajal [44]. Son células alargadas que presentan dos zonas o Segmentos: el interno y el externo. En el Segmento Interno está encerrados los orgánulos celulares, nutrientes y la maquinaria vital de la célula. En el Segmento Externo se encuentra cierto número de discos en los cuales se insertan moléculas de rodopsina, el pigmento fotosensible encargado de "capturar" los fotones. La luz, en su camino, atraviesa longitudinalmente la célula, es decir, todos los discos con rodopsina. La transducción de la señal luminosa implica una cascada de eventos bioquímicos que resulta en un cambio de la conductividad eléctrica de la membrana celular, provocando una señal eléctrica. La intensidad y duración de dicha señal depende de la intensidad de la luz incidente y de su longitud de onda. En la Figura 3 [45] podemos ver diversas respuestas de un bastón a flashes de luz de diferente intensidad (3a). Los bastones son células particularmente sensibles, pues son capaces de detectar incluso la débil señal producida por un sólo fotón aislado (3b). Es esta característica de sensibilidad límite la que nos va a dar la base para explicar su estructura.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

La probabilidad de que un fotón sea absorbido al atravesar un medio físico viene expresada por la Ley de Beer-Lambert:

$$P_a = 1 - \exp(- a\ s) \qquad \{1\}$$

siendo Pa la probabilidad de absorción, "a" la densidad óptica del medio por micra y s el espesor del medio que el fotón ha de atravesar (en nuestro caso, s va a ser la longitud de Segmento Externo). Obviamente, cuanto más largo sea el Segmento Externo, mayor será la probabilidad de absorber un fotón. Pero existen otras consideraciones a tener en cuenta.

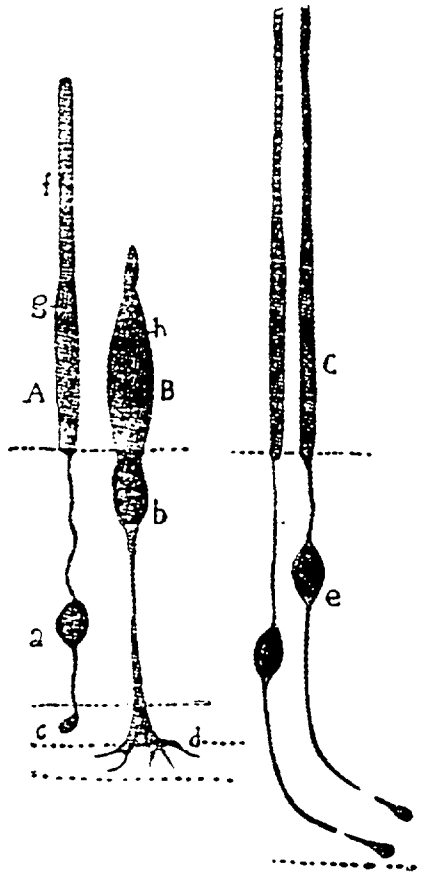


Figura 1: Células visuales del hombre (un bastón a la derecha y un cono a la izquierda y dos bastones largos) según aparecen en las obras de Ramón y Cajal.

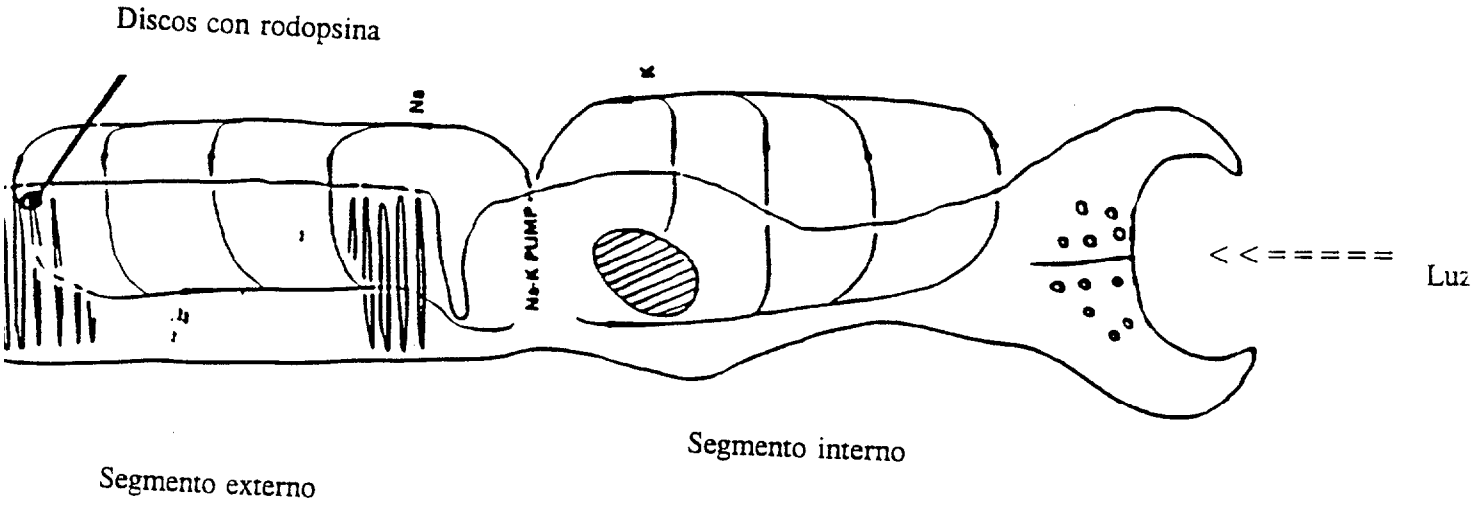


Figura 2: Estructura de un bastón retinal. Se ve claramente la división entre el segmento externo (donde tiene lugar la transducción de la luz) y el interno, donde se encuentra la maquinaria vital de la célula. La flecha señala la dirección en la que viaja la luz.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

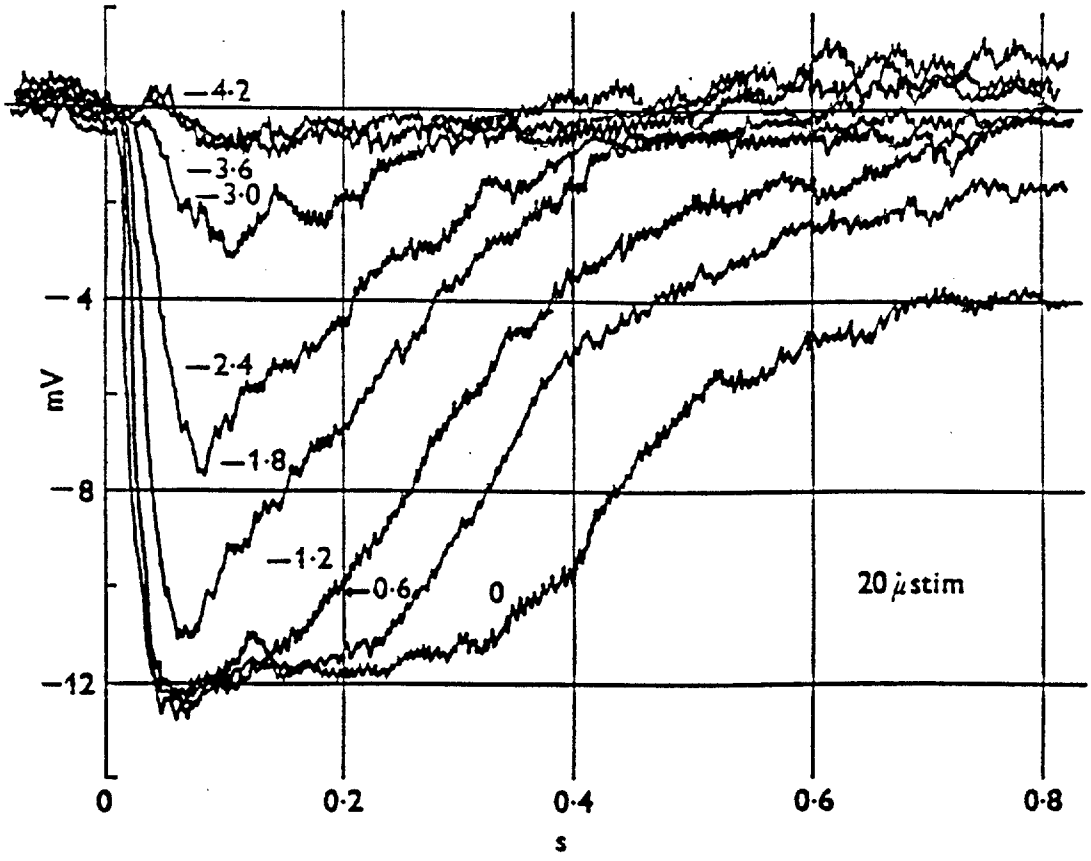


Figura 3a: Respuestas de bastón a flashes de luz de creciente intensidad (denotada por lo números sobre cada curva).

BIBLIOTECA GENERAL

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Absorción del fotón.

Figura 3b: Registro de la respuesta de un bastón ante la absorción de un fotón aislado.

3.2.-Fuentes de ruido.

La transducción de la señal luminosa se lleva a cabo en un ambiente ruidoso. Dicho ruido puede ser separado en tres componentes: la producida por la maquinaria de bioquímica de la célula; otra, de la isomerización espontánea de las moléculas de rodopsina y la tercera de fluctuaciones en los estados de los canales iónicos en la membrana celular [46]. Esta última es despreciable en comparación con las dos primeras.

La maquinaria vital de la célula da lugar a una componente contínua en la corriente que atraviesa a la célula en la oscuridad. Esta componente tiene un valor medio muy cercano a cero y una desviación stantard diferente de cero. Este ruido, que nosotros representaremos por la letra N (medido en picoamperios y referido a una longitud L de Segmento Externo), representa un ruido de fondo que ha de ser sobrepasado por una señal para poder ser fiable. Así, para una longitud s de S.E., el ruido contínuo sería:

$$Ns/L \qquad \{2\}$$

Por otro lado, la rodopsina, con ser una molécula bastante estable, no lo es absolutamente. Variaciones en las condiciones de presión y temperatura hacen que, espontáneamente, se isomerice, es decir, se comporte como si hubiese absorbido un fotón, disparando todo el proceso de transducción y provocando una señal en la célula, una señal que, obviamente, es una falsa alarma. Este comportamiento es indistinguible del producido

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

por la absorción real de un fotón. Experimentos cuidadosos en los que se midió el comportamiento de los bastones en la oscuridad [47] han establecido la duración de estas señales (por otro lado idénticas a las producidas por fotones aislados) y la frecuencia de aparición. Llamaremos D a dicha duración en segundos, y T al periodo de isomerizaciones espontáneas también en segundos, ambos referidos a una longitud de Segmento Externo L (en otras palabras, D segundos de cada T están ocupados por una falsa alarma). La amplitud de la señal será A, en picoamperios, coincidiendo su valor con el de la señal producida por la absorción de un fotón aislado. De aquí, la probabilidad de que, dada una respuesta, ésta no sea debida a una isomerización espontánea vendrá dada por:

$$(1 - Ds/TL) \qquad \{3\}$$

para una longitud genérica s de Segmento Externo.

De todo lo expuesto, podemos deducir que existen dos requisitos para poder diseñar una célula que funcione bien. Por un lado, cuanto más largo es el S.E., la Ley de Beer-Lambert nos asegura que la probabilidad de absorber fotones aumenta y esto es deseable en un sistema que ha de transmitir lo más fielmente posible el patrón luminoso que incide sobre él. Pero, al aumentar la longitud, aumenta también el contenido de rodopsina y la maquinaria bioquímica de soporte celular y la maquinaria de transducción, lo que implica el aumento

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

de las dos componentes de ruido ya explicadas. Hemos, pues, de llegar a un compromiso entre la absorción de fotones y el control del ruido para que las respuestas celulares sean fiables. En las figuras 4a y 4b se presentan gráficas de la dependencia de las diferentes fuentes de ruido con la longitud del segmento externo (datos del sapo tropical *Bufo marinus*).

3.3.- Criterio de óptimo.

Definamos la Señal de Respuesta Util, función R, como sigue:

$$R=g(1-\exp(-as))(1-Ds/TL)A- Ns/L \qquad \{4\}$$

donde s, longitud del S.E. se considera la variable, el primer paréntesis a la derecha es la expresión {1}, el segundo excluye la posibilidad de falsas alarmas dada una respuesta, estando ambos multiplicados por A, la amplitud de la señal producida por un solo fotón. La letra g representa la eficiencia de isomerización, la probabilidad de que la rodopsina se isomerice al ser "golpeada" por un fotón incidente. De este primer término sustraemos {2}, el nivel de ruido contínuo que ha de ser sobrepasado por una señal fiable. La longitud de S.E., s, es optimizada al maximizar la expresión de R, es decir:

$$dR/ds = 0 \qquad \{5\}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

De ahí, despejando s obtenemos las longitudes óptimas teóricas de S.E. Cuanto más se acerquen al valor real, que viene dado por L, mayor será la bondad del criterio. En la figura 4c se observa la gráfica de la función R como dependiente de s, longitud de segmento externo tomando datos del *Bufo marinus*. Los valores de todos los parámetros que aparecen en la expresión de R son experimentales, y han sido establecidos tanto por experimentos propios como tomados de la literaura del área. En la siguiente sección se puede encontrar una lista detallada de las fuentes.

En la construcción de la ecuación {4} hemos tenido en cuenta sólamente el comportamiento de los bastones a fotones aislados. Para absorción de múltiples fotones se puede extender el análisis como sigue:

La probabilidad de absorción es independiente del número de fotones incidentes, con lo que la Ley de Beer-Lambert no varía su expresión en {4}. Asímismo, podemos considerar que la probabilidad de que dos moléculas de rodopsina se isomericen espontáneamente a la vez es despreciable y también se puede asumir que es independiente del número de fotones incidentes al menos a bajas intensidades. También permanece, pues, sin cambios. El ruido contínuo N es asímismo independiente de la intensidad luminosa cuando el número de fotones es pequeño. No así el valor de la amplitud de la respuesta, A. Empíricamente, A para j fotones puede ser estimada de la siguiente expresión [48a]

$$A_j = A_M I_j / (I_j + I_{1/2}) \quad \{6\}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

donde A_j es la amplitud máxima de respuesta para j fotones absorbidos, A_M es la amplitud de saturación, I_j es la intensidad del flash e $I_{1/2}$ la intensidad del flash que produce una repuesta de amplitud $A_M/2$. Este tipo de ecuaciones han sido usadas largamente para describir resultados experimentales. En la práctica, si I viene dada en fotones/bastón, $I_{1/2}$ es aproximadamente 20 para casi todas las especies bajo experimentación. Así, tomando ese valor en {6}, substituyendo I_j por j y haciendo j=1 obtenemos que $A_M=21\ A_1$ y la expresión para A_j resulta:

$$A_j/A_1 = 21j / (20+j) \qquad \{7\}$$

Cuando el flujo de fotones no es muy alto, estamos cerca del régimen de trabajo lineal. De esta forma, para la absorción de j fotones, la expresión {4} ha de ser variada substituyendo A por A_j. La optimización sigue invariante.

3.4.- Aplicación del criterio a diversas especies.

Los resultados de aplicar el criterio de optimización explicado a diversas especies animales están mostrados en la Tabla 1. Aquí hemos supuesto un valor de g=1 y la absorción de fotones aislados. Los valores de los distintos parámetros experimentales provienen de:

a) Ambystoma tigrinum (salamandra tigre), Necturus maculosus y Macaca fascicularis (macaco). Literatura especializada [48b, 49, 50, 51, 52, 53].

b) Rana pipiens (rana leopardo) y Bufo marinus (sapo tropical). Literatura [54, 55] y experimentación propia.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

c)Raja erinicea (manta raya). Literatura [56] y comunicación personal con G. Matthews de SUNY/Stony Brook.

d)Oryctolagus cuniculus (conejo). Literatura [57].

TABLA 1: Valores de los diferentes parámetros usados en el Criterio de Optimo y longitudes teóricas óptimas para diversas especies.

	A.T. (adulto)	A.T. (larva)	Nect.	Raja
$L(\mu)$	31.100	26.200	28.000	28.700
$d(\mu)$	9.800	11.900	9.700	3.400
$a(\mu)^{-1}$	0.0177	0.012	0.0128	0.016
D(s)	2.000	2.000	2.000	1.500
T(s)	33.200	29.11	36.550	325.50
A(pA)	0.500	0.500	0.500	1
N(pA)	0.223	0.249	0.210	0.075
$s_{opt}(\mu)$	16.650	0.00	3.850	97.700

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

TABLA 1:Continuación.

	Bufo (Rojos)	Bufo (Verdes)	Rana	Oryctol.
$L(\mu)$	60.000	33.000	58.000	20.000
(μ)	6.000	9.300	6.900	1.750
$a(\mu)^{-1}$	0.016	0.014	0.016	0.013
D(s)	6.000	6.000	3.000	0.400
T(s)	50.000	38.000	39.110	271.000
A(pA)	0.98	0.98	0.8	0.6
N(pA)	0.190	0.219	0.214	0.136
$s_{opt}(\mu)$	65.200	30.500	59.850	21.500

	Macaco (a)	Macaco(b)
$L(\mu)$	25.000	25.000
$d(\mu)$	2.000	2.000
$a(\mu)$	0.0127	0.012
D(s)	0.500	0.500
T(s)	166.000	166.000
A(pA)	0.700	0.700
N(pA)	0.173	0.173
$s_{opt}(\mu)$	29.700	27.750

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

En la Tabla 1:

A.T.: Ambystoma tigrinum. Adulto: fase terrestre. Larva: fase acuática.

Nect: Necturus maculosus.

Bufo: Bufo marinus. Rojos: bastones rojos. Verdes: bastones verdes.

Raja: Raja erinicea.

Rana: Rana pipiens con concentración de rodopsina igual a la de la salamandra.

Macaco (a): valor de "a" tomado de Baylor et al 1984.

Macaco (b): valor de a para el ser humano tomado de Alpen y Pugh, 1974 [52].

Vemos que para varias de las especies testeadas, el criterio da una muy buena aproximación al valor real de la longitud de los bastones. Esto ocurre en aquellas especies con retinas duplex (que presentan tanto conos como bastones) en las que la visión escotópica domina en el rango de unas pocas isomerizaciones por célula. Así el mono (Macaca), ranas (R. pipiens), sapos (Bufo marinus) y conejo (Oryctolagus cuniculus). Por otra parte, en aquellas especies que usan los bastones no sólo en condiciones escotópicas sino en niveles de intensidad luminosa más altos (niveles que en otras especies están comprendidos en el rango de funcionamiento de los conos) el criterio no es de utilidad. Este es el caso de la retina de la manta raya (Raja erinicea) que sólo presenta bastones. Para intensidades luminosas altas las falsas alarmas y el nivel de ruido eléctrico contínuo son insignificantes comparados con la respuesta de la célula. En medios fóticos de condiciones ruidosas, por otro lado, es más importante reforzar la respuesta no a la absorción de un solo fotón sino a la detección de dos o más. Este es el caso de la salamandra y el "mudpuppy" (Necturus maculosus). Para estas dos especies, el criterio es más acertado si en vez de aplicarlo para

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

fotones aislados, se realiza la extensión para dos o más fotones. Así, para la salamandra, al aplicar dicha variación, obtenemos una longitud óptima de bastón de aprox. 40 micras, lo cual está mucho más cercano a la realidad que el valor dado en la Tabla 1.

Este criterio puede servir como método para la clasificación de diferentes bastones en diferentes especies e incluso dentro de una misma retina, donde las dimensiones de las células y sus parámetros operativos pueden variar.

3.5.- Otros factores que influyen en la dimensión de los bastones.

Hasta ahora hemos utilizado, en nuestro análisis del diseño de los bastones, sólo dos ideas básicas: el control del ruido y la absorción de luz. Es posible que existan otro tipo de factores, que pueden ser de muy diversa índole, influyendo en aspectos del diseño. Muchos de estos factores son difíciles de cuantificar, así el nivel de ruido fótico (no eléctrico) del medio en el que vive la especie. Otros, como el papel que la edad ejerce en los discos con rodopsina, que emigran con el tiempo de la base del Segmento externo al final de la célula a la vez que ocurren cambios de composición de la membrana que pueden ser un factor importante en la sensibilidad del fotopigmento, están aún bajo estudio [58]. Otros aún, no presentan una influencia muy marcada si bien se sabe que influyen, es el caso de la existencia de un gradiente longitudinal de concentración de sodio en el Segmento Externo, creciendo de la base a la punta de forma que en el extremo la concentración es cercana a la interior de la célula, convirtiendo esa zona del bastón en prácticamente inútil a efectos de transducción.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

A priori, se puede pensar en otros criterios distintos del expresado en las ecuaciones {4} y {5}. El hecho de que el criterio utilizado de como resultado valores muy cercanos a los reales le confiere validez biológica.

3.6.- Efecto de la variación de parámetros en la respuesta a fotones aislados.

Para terminar y completar el estudio de la optimización de la estructura de estas células, veamos cómo afecta la variación del valor de los diferentes parámetros en el cálculo de s_{opt}. El papel funcional de los fotorreceptores, así como sus dimensiones, son diferentes en diferentes zonas de la misma retina, por lo cual es interesante ver cómo la variación de los parámetros de trabajo afecta a la longitud óptima teórica. Este estudio se ha llevado a cabo en función de la variación de los cocientes A/N, que podríamos interpretar como un control del ruido (relación señal/ruido), y D/T.

Los resultados pueden verse en las Gráficas 1 a 7 (dispuestas al final del capítulo), donde en tres dimensiones se ve la variación del óptimo. Es claro que s_{opt} crece, en las especies representadas, con el cociente señal/ruido y con la disminución de D/T. Para poder interpretar correctamente estas variaciones sería deseable contar con resultados de investigaciones directas sobre células en las zonas parafoveales y de la retina periférica, donde las condiciones de trabajo de los fotorreceptores son diferentes de las de zonas más centrales. Así, se sabe que en el hombre y la mayoría de los vertebrados, la longitud de estas células disminuye con la lejanía de las zonas foveales. En nuestro modelo, esto significaría, para un valor de D/T dado, la disminución del cociente señal/ruido, implicando una disminución en la fiabilidad de la detección, fiabilidad que podría ser restaurada jugando con

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

una disminución del cociente D/T, relación entre la duración de las falsas alarmas y su frecuencia de aparición.

3.7.- Conclusiones.

Si bien las células visuales de las retinas de casi todos los animales mantienen una estructura morfológica muy parecida, existen diferencias obvias en cuanto al tamaño, longitud y diámetro de las mismas. El criterio expuesto en este capítulo relaciona la estructura con la función de estas células y los requisitos ecológicos del ser vivo. Los casos vistos en los que el criterio no se aplica son tan interesantes como aquellos para los que funciona. En la manta raya tenemos que $s > L$ lo que sugiere que las células en esta especie no están diseñadas para alcanzar la sensibilidad extrema de otras. Esto es fácil de comprender a la luz del hecho de que estos animales no presentan conos en sus retinas, y los bastones han de funcionar en todo el rango fisiológico de intensidades luminosas. En la salamandra, tenemos que $s < L$ y ésto unido al mayor diámetro de las células sugiere un énfasis en la capacidad de captura de fotones, tal y como puede ser esperado de especies que viven en un ambiente ruidoso fóticamente. Así, el criterio aquí presentado puede servir como método de clasificación de diversos bastones en especies animales diferentes e incluso dentro de una misma retina, donde tanto las dimensiones como los parámetros de operación pueden variar.

A lo largo de la Historia Evolutiva la Naturaleza ha diseñado estos sensibles transductores en los cuales la forma está optimizada para desempeñar la función. Por otro lado, el principio de que las estructuras biológicas están optimizadas para su función debe ser aplicable a otros niveles del proceso de información visual, en donde el nivel de

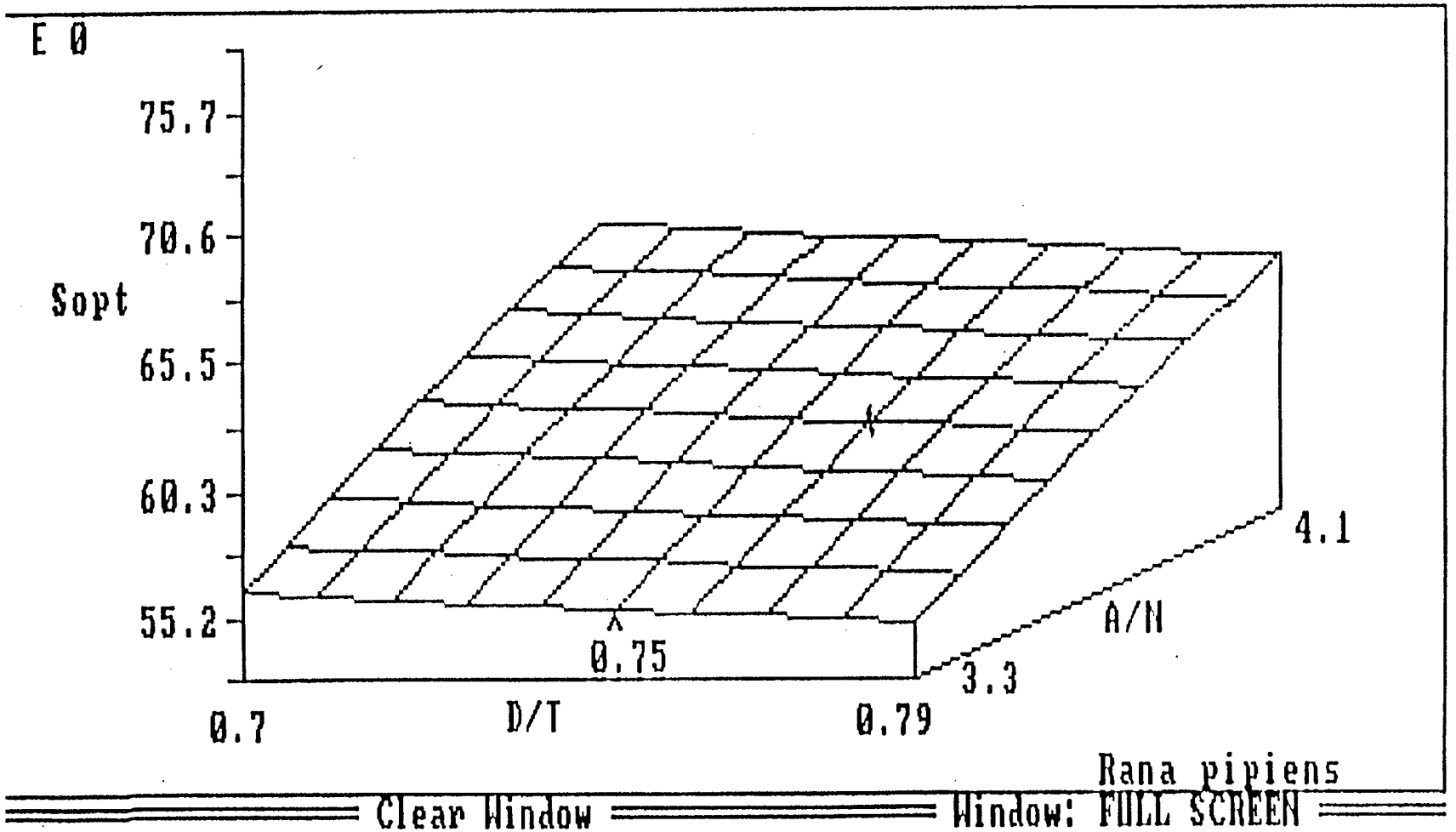
© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

complejidad semántica aumenta. Con una apropiada definición de problemas este principio puede ser un complemento a las técnicas habituales de estudio de la función en Sistemas Nerviosos, en concreto en el Camino Visual.

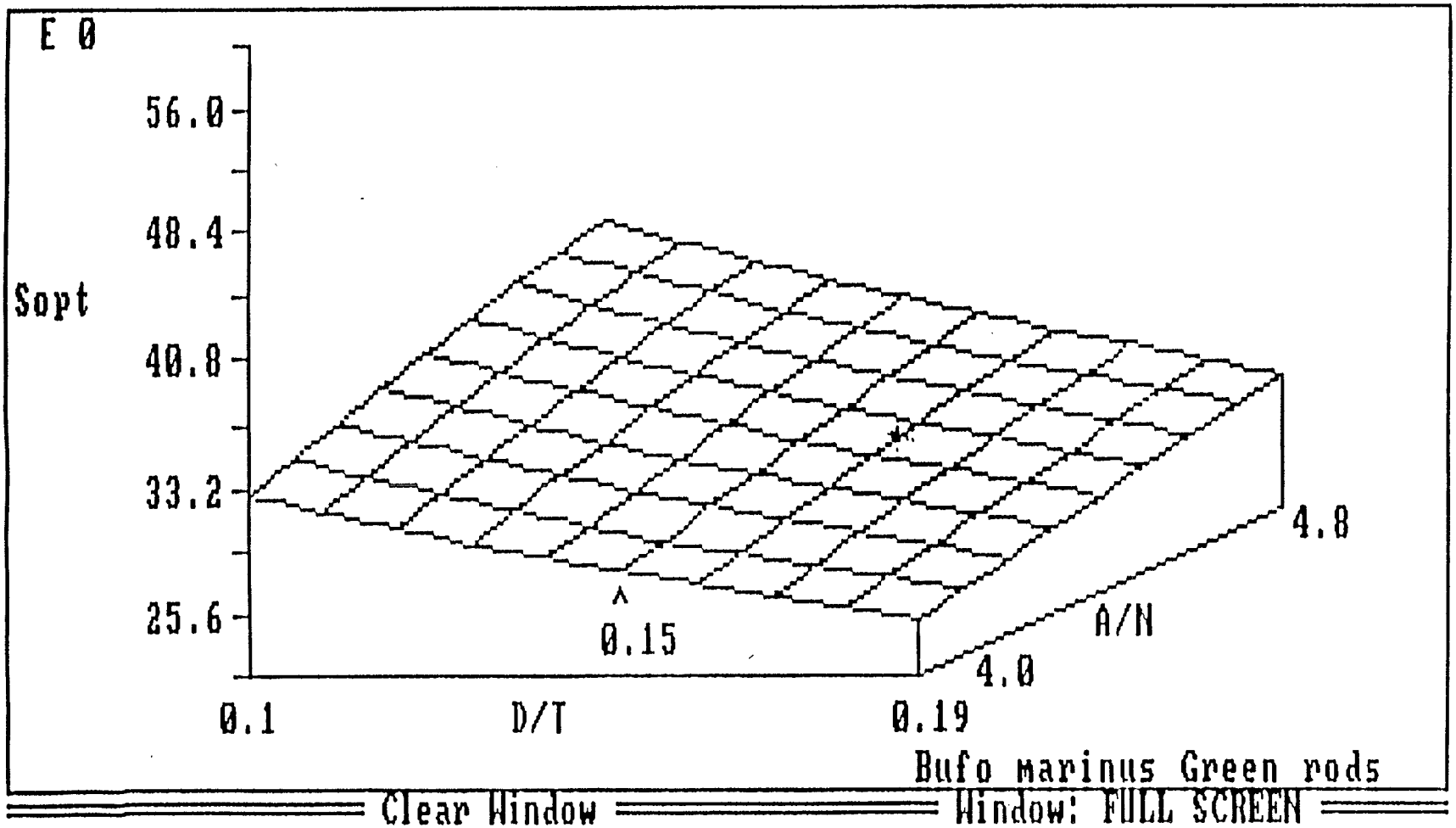
Por último, cabe señalar que la validez de este y otros criterios posibles reside en su adecuación a los resultados de experimentos, experimentos que en muchos casos aún están por realizar, como todos los referentes a control de ruido y dimensiones óptimas de fotorreceptores en zonas retinales periféricas, como ya quedó apuntado más arriba.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

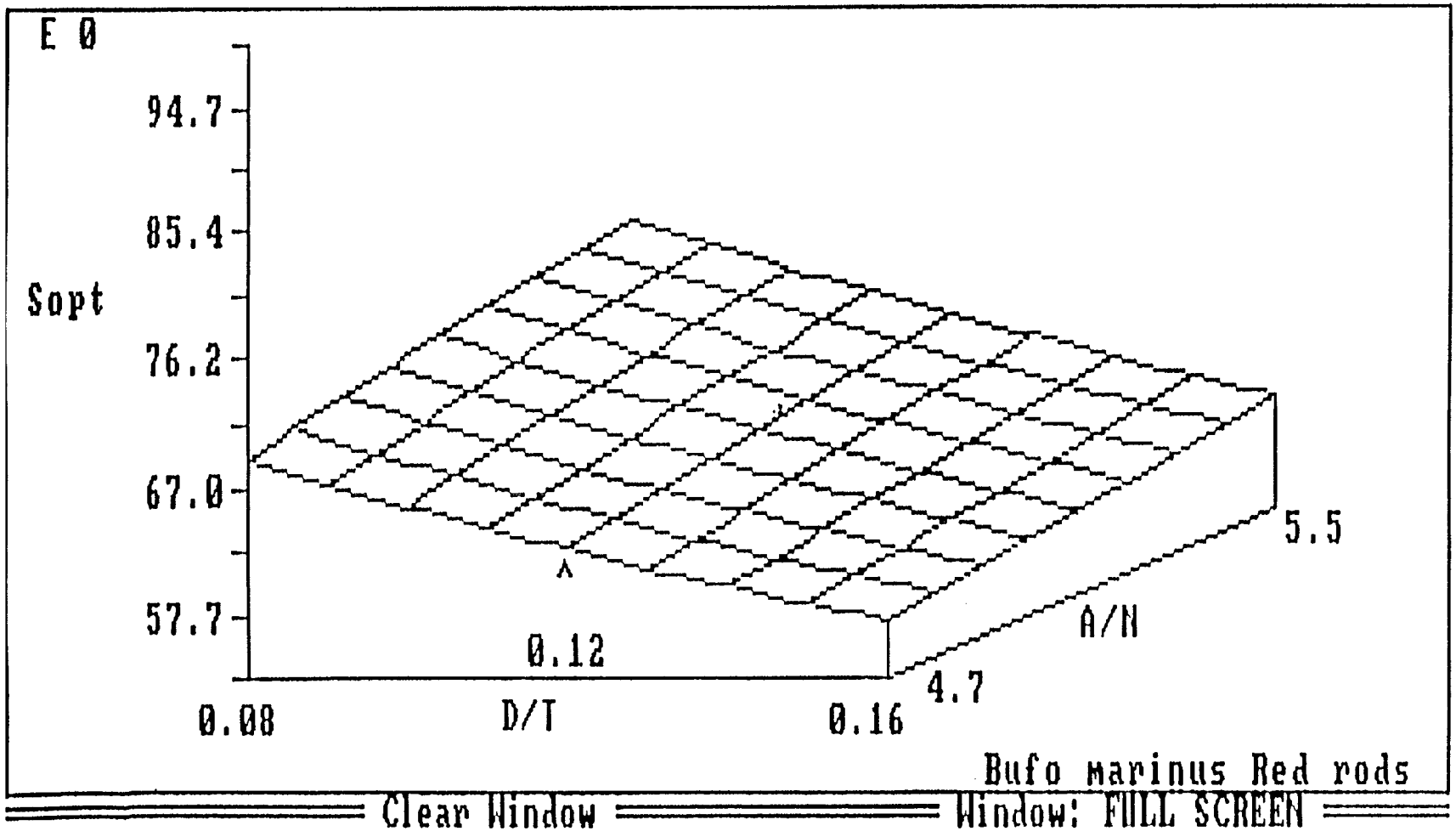
En las gráficas presentadas a continuación se puede ver el efecto que dos parámetros significativos del criterio de óptimo, el cociente señal/ruido (A/N) y duración/Período de aparición de falsas alarmas, ejercen sobre la longitud óptima teórica. Para cada especie está señalado el punto de partida del estudio. En la correspondiente a la *Raja erinicea* se representan dos intervalos diferentes de valores de A/N.



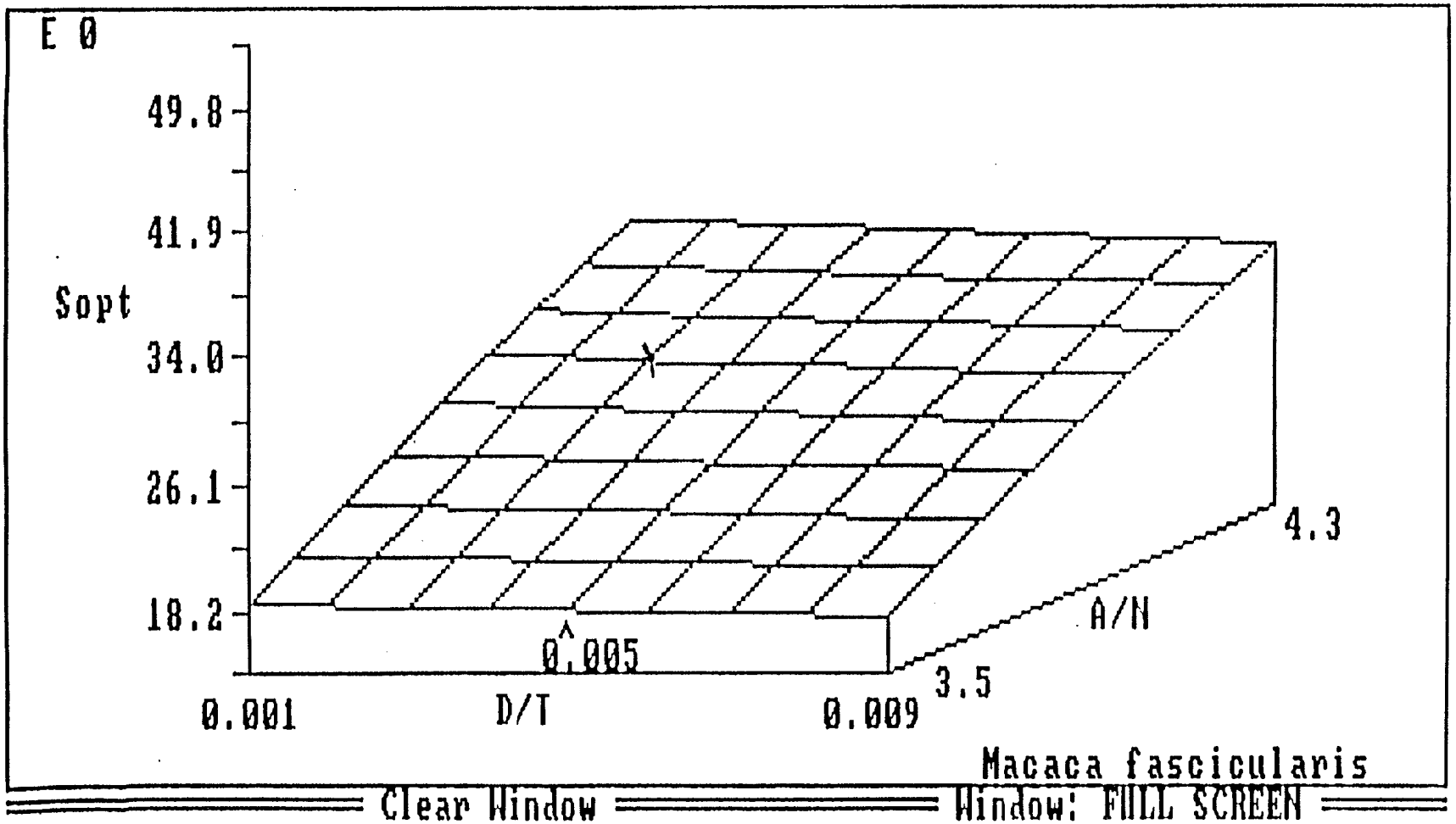
© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004



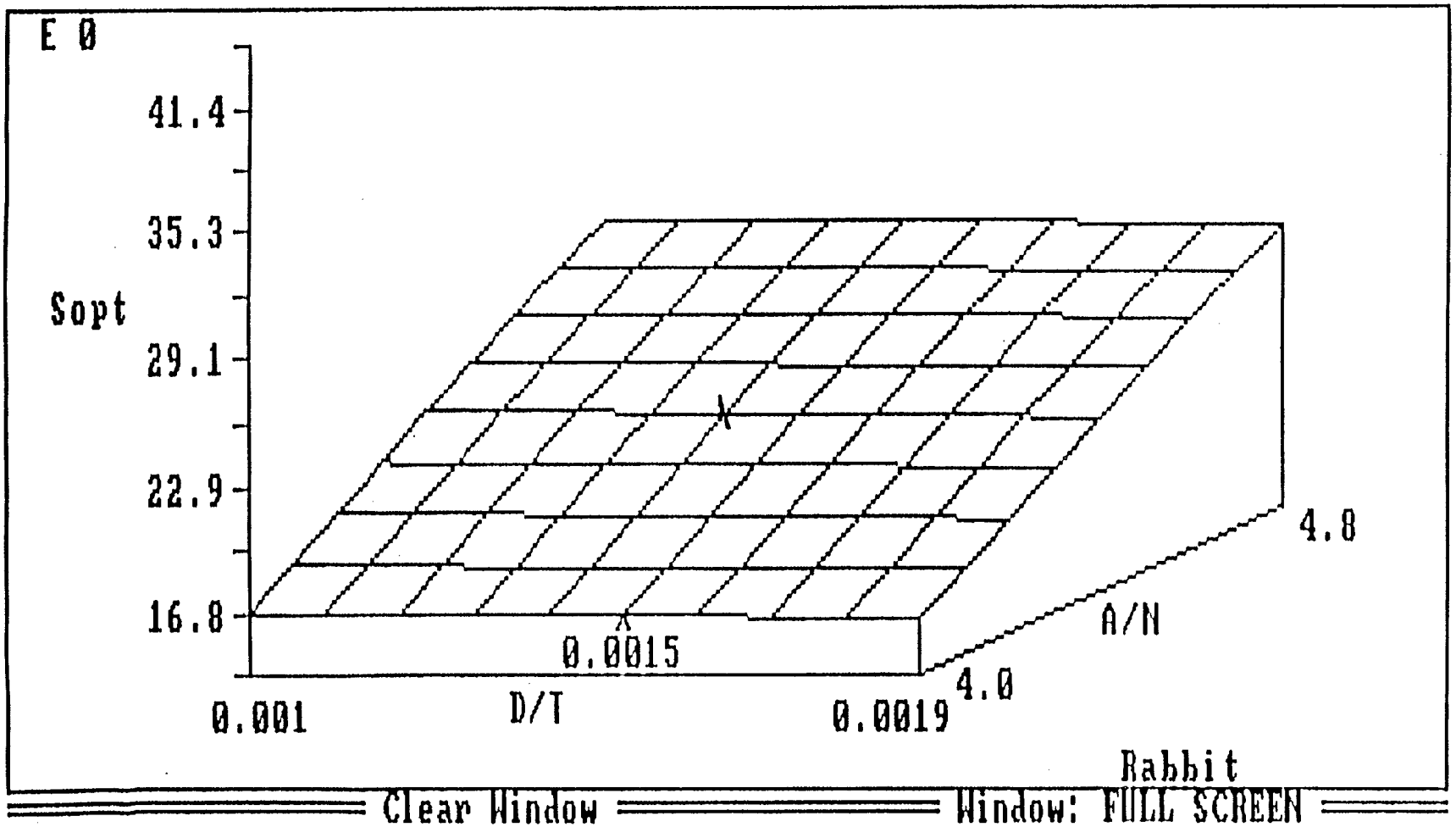
© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004



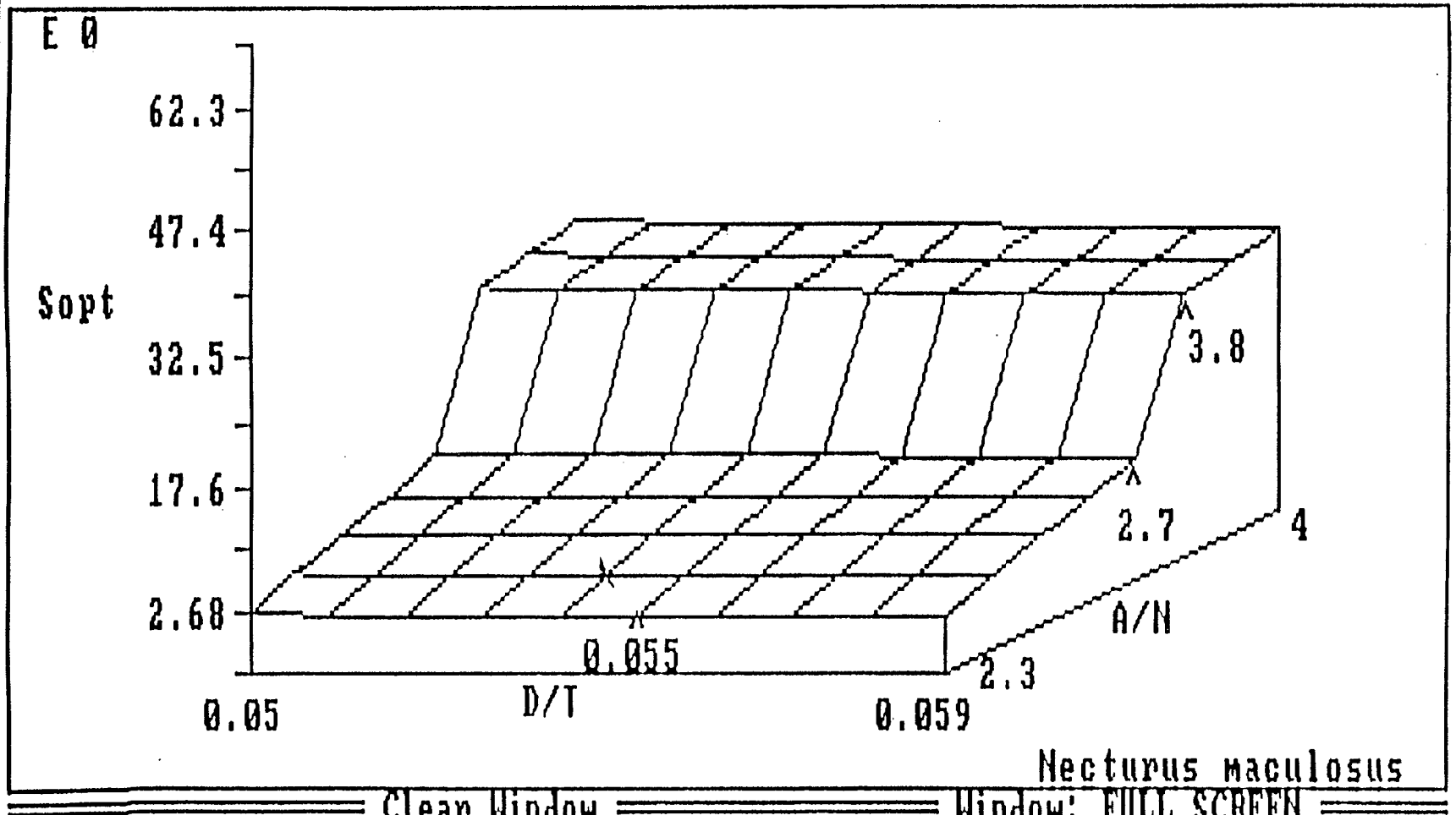
© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004



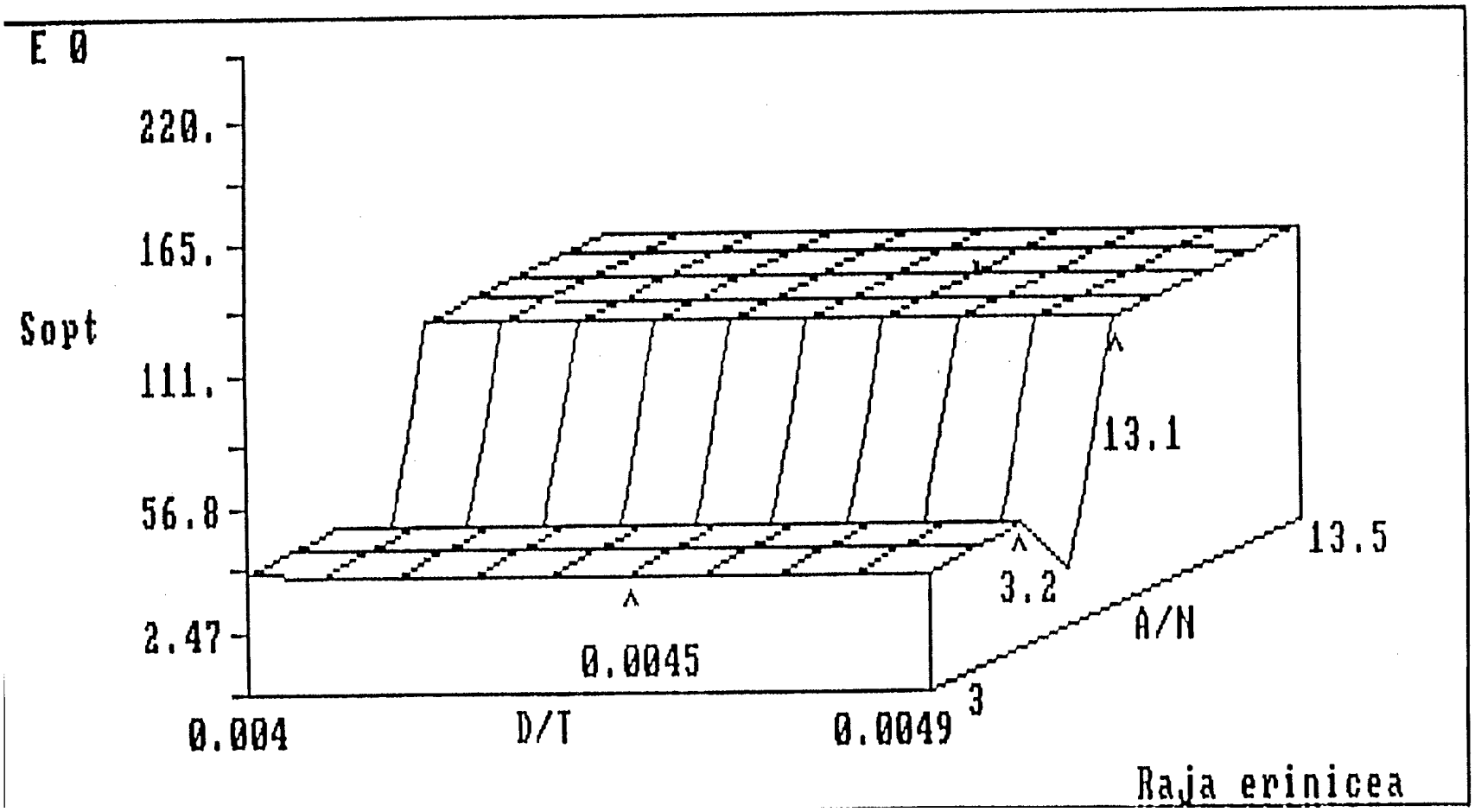
© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004



© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004



© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004



© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

APENDICE

Método experimental en la Parte III.

1.- Materiales.

En la parte experimental del presente trabajo, la relacionada con la estructura funcional de los fotorreceptores en diversas especies animales, se llevaron a cabo los experimentos sobre dos especies de anfibios muy extendidas en América: el sapo tropical (*Bufo marinus*) y la rana leopardo (*Rana pipiens*). Ejemplares de ambas especies fueron comprados al abastecedor habitual del Departamento de Biofísica de la Universidad del Estado de Nueva York en Buffalo, donde se llevaron a cabo las pruebas, y mantenidos vivos en el Laboratorio.

La instrumentación electrofisiológica y el sistema de estímulo luminoso utilizados fueron los standard en este tipo de experimentos. Las respuestas celulares, registradas a través de un electrodo de succión, se mostraban en un osciloscopio a la vez que quedaban grabadas en una cinta magnética y dibujadas en papel milimetrado. El sistema óptico constaba de dos caminos en los cuales se interponían filtros de calor y de interferencia de 505 nanometros. Uno de los caminos se usaba para proyectar un fondo constante sobre la retina y el otro para lanzar flashes de diversa intensidad y duración que servían como estímulo. El tipo de respuestas obtenidas es el que se puede ver en las Figuras 3.a y 3.b de la Parte III del presente trabajo. Tanto el sistema óptico como la preparación celular se encontraban dispuestas en el interior de una jaula de Faraday en la que se incluía un microscopio con salida a un monitor de video en donde se veía, amplificado, el contenido del portaobjeto: las celulas retinales.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

2.- Métodos.

El ejemplar de *Bufo* o *Rana* era adaptado a la oscuridad durante las tres horas previas a la disección, la cual tenía lugar bajo luz roja de muy poca intensidad para evitar isomerizaciones no deseadas del pigmento fotosensible de las células visuales. Tras la decapitación, los ojos eran enucleados y la porción anterior (lentes y humor vítreo) separada y desechada y la porción posterior seccionada, de la cual se separaba la retina del epitelio pigmentoso. Una vez libre del epitelio, la retina se dividía en pequeñas porciones que se sumergían en un medio nutritivo (desarrollado en el Laboratorio como una variación de la solución de Ringer y llamado medio KNL [59]) en el que las células duraban vivas y en condiciones de experimentación hasta dos semanas. Uno de los fragmentos retinianos se disponía sobre un portaobjeto con fondo conteniendo medio KNL con la cara de fotorreceptores hacia arriba. El portaobjeto se conectaba a un electrodo a tierra. Sobre el portaobjeto se situaba el objetivo de un microscopio y la salida del sistema óptico.

Un electrodo de succión diseñado en el Laboratorio, rellenado con medio KNL y operado mediante microsistemas hidráulicos se usaba para, una vez elegida una célula e introducido su segmento externo por completo en el electrodo, registrar la actividad neuronal. Las células eran primero medidas (longitud y diámetro) y testeadas para comprobar si habían muerto o malfuncionaban debido al proceso de disección y se elegían aquellas que presentaban intactos tanto su segmento externo como el interno, que generalmente aparecían en conglomerados junto con bipolares enanas y algunas ganglionares.

Tras estas primeras pruebas se realizaba el experimento en sí, en el que flashes de luz de intensidad creciente se proyectaban sobre el portaobjeto produciendo actividad eléctrica en la célula elegida. Tras cada estímulo se dejaba un cierto periodo de recuperación a la célula. En una variación del experimento, se dejaba en completa oscuridad toda la

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

preparación y se registraba la actividad en ausencia de estímulo. Cada experimento completo (obtener una serie de respuestas para intensidades luminosas crecientes hasta saturación en diez o más células) podía durar ocho horas. En la Foto A1 se muestran unas células tal y como se ven amplificadas en el monitor.

3.- Tratamiento de los datos.

Existen varias fuentes de variación en los datos registrados. Por supuesto, dos células diferentes no dan exactamente las mismas respuestas y, de hecho, la respuesta de una misma célula a dos estímulos iguales puede variar en el transcurso del experimento (puede aumentar debido a recuperación o disminuir debido al deterioro vital de la célula). La duración y amplitud de las respuestas registradas eran promediadas para intensidades iguales de estímulo y normalizadas, comprobando una vez más la validez de la Ley de Weber para intensidades altas y la de Rose para bajas. Sin embargo, a efectos del presente trabajo, sólo los datos relativos a las dimensiones físicas de las células y a su comportamiento en total oscuridad son relevantes. En los experimentos realizados se verificaron los datos de [47].

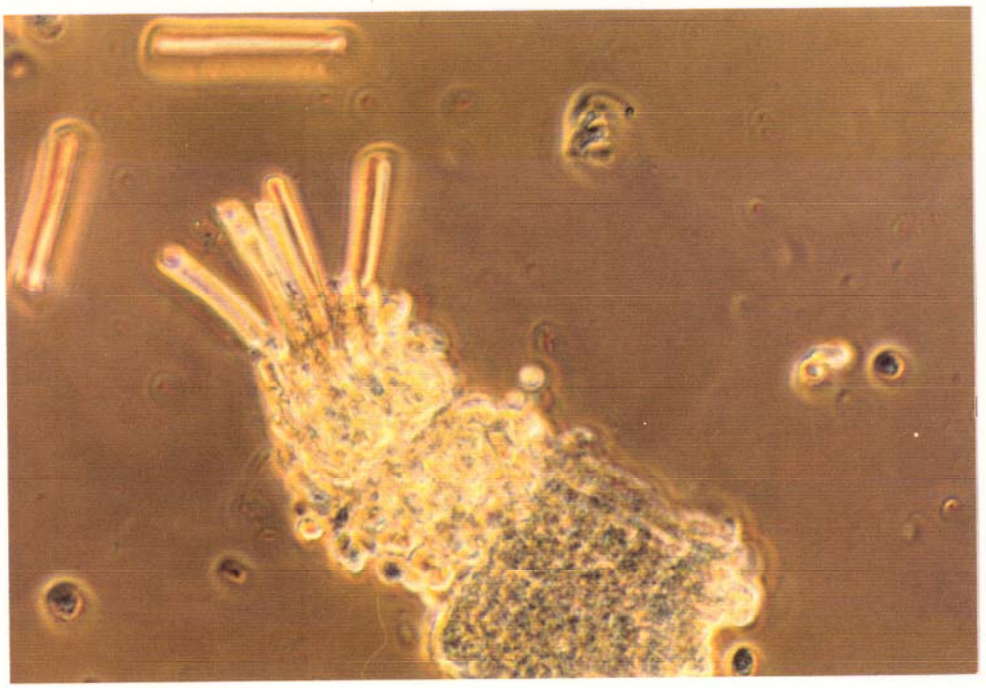


Foto A1: Aspecto que presenta un conjunto de células retinales de *Bufo marinus* al microscopio. Las estructuras alargadas son los segmentos externos de los bastones.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

CONCLUSIONES Y

PRINCIPALES APORTACIONES.

Como se indicó en los Preliminares, esta Tesis se ha desarrollado entre dos campos científicos: las Ciencias de la Computación y la Neurofisiología, pisando más fuerte en la Computación.. En estas "zonas de choque" entre cuerpos científicos suelen producirse frutos interesantes como resultado del interjuego entre ellos. Los hallazgos en relación al *modus computandis* del tejido nervioso sugieren inmediatas arquitecturas teóricas de posible aplicación en el mundo de lo artificial. Por otro lado, las propiedades formales de ciertos cuerpos matemáticos dan luz a la interpretación que debe hacerse de los resultados en la investigación del mundo natural.

Se considera, en esta línea, que las conclusiones y principales aportaciones de este estudio son:

1.- El desarrollo de la Teoría Matemática relativa a una nueva clase de filtros discretos: los **Filtros de Newton**. La estructura de estos filtros, inspirada en las gráficas usadas por Newton y Pascal, con una correspondencia que ahora se ve en el conexionado y el árbol dendrítico neuronal, lleva implícita la importante propiedad de ser equivalentes a *cualquier filtro discreto con una distribución de pesos arbitraria.*

2.- A partir de ellos puede definirse una nueva transfomación sobre Campos de Datos: las **Transformaciones Disktion** computadas a partir de las **Redes de Newton**. A su vez, estas nuevas Transformaciones son de tal naturaleza que el orden de los coeficientes transformados *es indiferente a la hora de representar los datos iniciales de forma unívoca*, propiedad que las distingue de otros tipos de transformaciones discretas y las hace singulares

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

y especialmente prácticas en temas relacionados con Teoría de la Codificación. Consideramos que ésta es la contribución más potente de la Tesis, aunque es verdad que es la que menos tiempo ha costado desarrollar.

3.- También, el estudio de las **Transformaciones Globales de Newton** nos permite diseñar un Recuperador Generalizado con una *estructura formalmente equivalente a la del correspondiente muestreador.* Es decir, el sistema de procesadores cuya tarea fuese realizar la inversa de una de estas Transformaciones Globales tendría físicamente la misma estructura que el sistema que calcula la Transformación.

4.- En el paso al contínuo de estos filtros discretos, nos aparecen las Funciones de Hermite. El hecho de que estas funciones se obtengan como resultado de un conjunto de microprocesos sencillos cuya complejidad es resultado del tipo de conexión empleada, y que se asemejen tremendamente a la forma descrita hasta ahora para los campos receptivos de las neuronas del camino visual les imprime un fuerte interés en el análisis de la función retinal. La estructura nos da la funcionalidad. El soporte estructural neuroanatómico es clave en todo el desarrollo, y como consecuencia inmediata:

5.- *Se desprende la sugerencia de reinterpretar la función celular neuronal de bajo nivel a la luz del espectro de energía de Hermite.*

6.- El estudio de los Sistemas Causales de Hermite también trae conceptos nuevos en cuanto al papel que el tiempo juega en la función neuronal, efectuando una primera derivada y rectificando en media onda.

7.- La estructura real estudiada en retinas en relación con la divergencia y convergencia de líneas y el solapamiento de campos receptivos, nos lleva a unir su significado funcional con el de descriptor: *computación y estructura computacional están intrínsecamente unidas,* como confirmación de una conjetura de dualidad ya avanzada en

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

[17], esto es, un "aumento" de la complicación estructural lleva a una "disminución" de la funcionalidad requerida y viceversa.

8.- Siguiendo en la línea de unir función observada con estructura computacional, se propone un esquema neuronal **cooperativo** basado en **computación distribuida** que garantiza dos de las propiedades funcionales largamente estudiadas y deseadas para estos sistemas: la complitud de la descripción y la fiabilidad global del sistemas frente a fallos.

9.- Aunque temporalmente es anterior a los resultados ya descritos, como ejemplo natural de las relaciones estructura-función, sirve el estudio de la morfología y funcionamiento de las células visuales de cierto número de especies, llegándose a la conclusión de que el diseño de estas células es óptimo para ejecutar su función: *servir de fiables detectores de la más pequeña cantidad de luz posible (un fotón) en presencia de ruido*. Es un ejemplo real de lo estrecha que, en sistemas neuronales, es la separación entre procesador y función.

A dónde se va desde aquí ha quedado apuntado, en cada caso, en los comentarios, tanto a los formalismos (teoremas y lemas) como en las discusiones sobre incidencias en teoría de retinas naturales y artificiales. Caben destacar, sin embargo:

10a.- La continuación en el estudio de las Transformadas Disktion, que constituyen uno de los pocos casos de transformaciones altamente no lineales procedurales y constructivas.

10b.- El desarrollo de las consecuencias que, respecto a la funcionalidad de las Redes de Newton, tendrían la creación de agujeros en la estructura computacional. Es decir, desprender de este análisis toda una teoría sobre escotomas.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

10c.- El análisis y estudio, desde los puntos de vista estrictamente matemático y de aplicación, de los sistemas 3-D de Newton, que quedan esbozados en la Primera Parte.

10d.- El desarrollo práctico en Proceso de Imagen de las Transformadas de Hermite, con sus posibles aplicaciones.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

REFERENCIAS

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

[1] Marr D (1980) Vision. WH Freeman, New York.

[2] Mira J. Moreno-Díaz R. (1984) Un marco teórico para interpretar la función neuronal a altos niveles. En "Biocibernética", Siglo XXI Eds. Madrid.

[3] Leibovic KN, (1990). Vertebrate photoreceptors. En KN Leibovic Ed. "Science of Vision". Springer Verlag, New York.

[4] Leibovic KN. (1972) Nervous Systems Theory: an introductory study. Academic Press, New York.

[5] Truex, Carpenter, (1965) Human Neuroanatomy. Williams and Wilkins, New York.

[6] Slaughter M, (1990). The vertebrate retina. En KN Leibovic Ed. "Science of Vision". Springer Verlag, New York.

[7] Kuffler SW,(1953) Discharge pattern and funcional organization of mammalian retina. J. Neurophysiology 16, 37-68.

[8] Moreno-Díaz et al.(1990) Transformaciones en Campos de Datos. Aplicaciones. Servicio de ediciones del Departamento de Informática y Sistemas, ULPGC.

[9] Bourne GH, (1969) The structure and function of nervous tissue. V-III. Academic Press, New York.

[10] Stone T (1983) Parallel processing in the Visual System. Plenum, New York.

[11] Boycott, Wassle (1974) The morphological types of ganglion cells of the domestic cat's retina. J. Physiology, London. 240:397-419.

[12] Lettvin JY, Maturana HR, McCulloch WS, Pitts WH. What the frog's eye tells the frog's brain. En WS McCulloch Embodiments of Mind, MIT Press 1990.

[13] Kolb B, Whishaw IQ, (1990) Human neuropsychology. Freeman and Co. New York.

[14] Jung R. (1973) Visual Perception and Neurophysiology. En "Handbook of Sensory Physiology", VA. Springer Verlag, New York.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

[15] Snyder M. (1973) The evolution of Mammalian Visual mechanisms. En "Handbook of Sensory Physiology", VA, Springer Verlag, New York.

[16] Leibovic KN. (1992) Brain mechanisms for perceptual representation. Conferencia en el Cognitive Science Group, SUNY at Buffalo, New York.

[17] Bolívar Toledo O. (1989) Hacia una teoría de las transformaciones en Campos Receptivos y Campos de Datos. Tesis Doctoral, ULPGC.

[18] Grüsser OJ et al. (1973) Neuronal mechanisms of visual movement perception and some psychophysical and behavioral correlations. En Hdbk of Sensory Physiol. Parte A. Springer Verlag, New York.

[19] Moreno-Díaz R. Rubio E. (1979) A theoretical model for layered visual processing. Int. J. of Biomed. Computing. V10:231-243.

[20] Moreno-Díaz R. (1965) An Analytical Model of the Group 2 Ganglion Cell in the Frog's retina. Informe de Trabajo, Instrumentation Laboratory, MIT, Mass, USA.

[21] Maturana H, Varela F. (1990) El árbol del conocimiento. Ed. Debate, Madrid.

[22] Mira, J. Comunicación personal.

[23] McCulloch WS, Pitts W. How we know universals. En WS McCulloch, Embodiments of mind. MIT Press, Cambridge Mass, USA, 1990.

[24] Moreno-Díaz et al.(1981) Towards a theory of Visual Processing in Vertebrate Retina. Procs of the Int. Cong. on Applied Systems Research and Cybernetics.

[25] Moreno-Díaz et al. (1984) Bases de una teoría del proceso de datos en la retina. En "Biocibernética". Ed. Siglo XXI, Madrid.

[26] Moreno-Díaz et al. (1981) Un enfoque intuitivo de los procesos no lineales: aplicación a modelos neurofisiológicos. Act. I. Simp. Nac. Bioingeniería,pp123-127, Madrid.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

[27] Gardner M (1975). Nuevos pasatiempos matemáticos. Alianza Editorial. Madrid.

[28] Delgado A, Moreno-Díaz R, Mira J (1993) Qualitative computations with Neural Nets: Differential Equations like Examples. En Procs. de EUROCAST'93, Las Palmas, Febrero 1993.

[29] Moreno-Díaz R. (1992) Redes Neuronales. Conferencia pronunciada en el departamento de Informática, Universidad de Oviedo.

[30] McLennan H. (1970) Synaptic Transmission. W.B. Sanders Company. Philadelphia, USA.

[31] Nomizu K. (1979) Fundamentals of Linear Algebra. Chelsea Pub. Comp. New York.

[32] Rovaris F. (1992). Imágenes, muestreo y computación distribuida de tipo neuronal: Hacia un enfoque unificado. Tesis Doctoral, Departamento de Informática, ULPGC.

[33] Lettvin JY (1965) Quarterly Progress Report No 73. Research Lab. of Electronics, MIT, Cambridge Mass. pp199-208.

[34] Fisz M. (1963) Probability Theory and Mathematical Statistics. Wiley and Sons, New York.

[35] Morse P, Feshbach H (1953). Methods of Theoretical Physics. Vols I-II. McGraw-Hill, New York.

[36] Courant R, Hilbert D. (1953). Methods of Mathematical Physics. Vol I. Interscience Publishers, Inc. New York.

[37] Menzel, DH (1960). Fundamental Formulas of Physics. Vol I. Dover Pub. Comp. Inc. New York.

[38] González RC, Wintz P. (1987) Digital Image Processing. Addison Wesley Pub. Comp. Reading, Mass.

[39] Lettvin et al (1961) en "Sensory Communication". MIT Press, Cambridge, Mass, USA.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

[40] Leibovic KN, (1981). Principles of Brain Function: information processing in convergent and divergent pathways. En Pichler y Trappl Eds, "Progress in Cybernetics and Systems", Vol VI, Hemisphere Publ. Washington DC.

[41] Candela Solá, S. (1987) Transformaciones de Campo Receptivo variable en Proceso de Imágenes y Visión Artificial. Tesis Doctoral. Departamento de Informática y Sistemas, ULPGC.

[42] Muñoz Blanco, JA (1987) Jerarquización de estructuras de bajo y medio nivel para reconocimiento visual. Tesis Doctoral. Departamento de Informática y Sistemas, ULPGC.

[43] Pugh, EN (1988) Vision: physics and retinal physiology. In: Stevens' handbook of experimental psychology, vol 1, 2nd ed. Wiley, New York.

[44] Ramón y Cajal, P. Histologie du Système Nerveux de l'homme et des vertébrés. Republicado por el Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid, 1955.

[45] Leibovic, KN (1978) Response waveforms of Vertebrate Photoreceptors: What are the underlying mechanisms?, Biol. Cybernetics 31, 125-135.

[46] Mathews G, (1986) Comparison of the light sensitive and cGMP sensitive conductances of rod photoreceptors: Noise characteristics. J. of Neuroscience, 6 (9): 2521-2526.

[47] Baylor DA, Matthews G, Yau KW (1980) Two components of electrical dark noise in toad retinal rod outer segments. J. Physiology 309:591-621.

[48a] Leibovic KN, Moreno-Díaz Jr. R.(1992) Rod outer segments are designed for optimum photon detection. Biol. Cybernetics, 66 301-306.

[48b] Leibovic KN, Moreno-Díaz Jr. R. (1991-92) Experimentación propia, datos no publicados.

[49] Harosi FI (1975). Absorption spectra and linear dichroism of some amphibian photoreceptors. J. Gen. Physiology 66:357-382.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

[50] Attwell D, Wilson M (1980) Behaviour of the rod network in the tiger salamander retina mediated by membrane properties of individual rods. J. Physiology 309:287-315.

[51] Baylor DA, Nunn BJ, Schnapf JR. (1984) The photocurrent, noise and spectral sensitivity of rods of the monkey Macaca fascicularis. J. of Physiology 357:186-216.

[52] Alpern M, Pugh EN (1974) The density of photosensitivity of human rhodopsin in the living retina. J. of Physiology 237:341-370.

[53] Baylor DA, Nunn BJ (1986) Electrical properties of the light sensitive conductance of rods of the salamander Ambystoma Tigrinum. J. of Physiology 371:115-145.

[54] Rosenkranz J (1977) New aspects of the ultrastructure of frog rod outer segments. Int. Rev. Cytol. 50:26-158.

[55] Bodoia RD, Dettwiler PB (1984) Patch clamp recordings of the light sensitive dark noise in the retinal rods from the lizard and frog. J. of Physiology 367:183-216 (Fig. 7).

[56] Cornwall MC, Ripps H, Chappell RL, Jones GJ (1989) Membrane current responses of skate photoreceptors. J. of General Physiology 94:633-647.

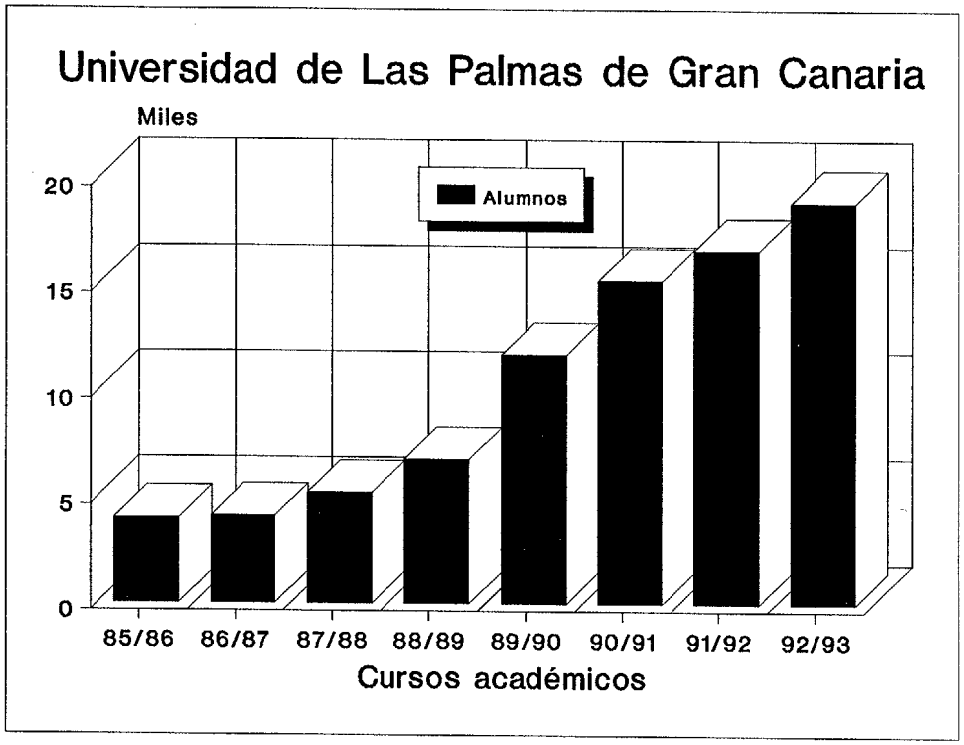
[57] Nakatani K, Tamura N, Yau KW (1991) Light adaptation in retinal rods of the rabbit and two other nonprimate mammals. J. General Physiology 97:413-435.

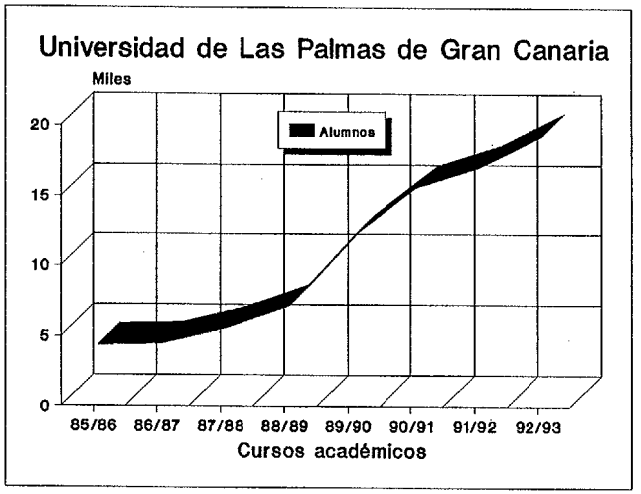
[58] Boesze-Battaglia K, Albert AD (1990) Cholesterol modulation of photoreceptor function in bovine retinal rod outer segments. J. Biol. Chem. 265 (34) 20727-20730.

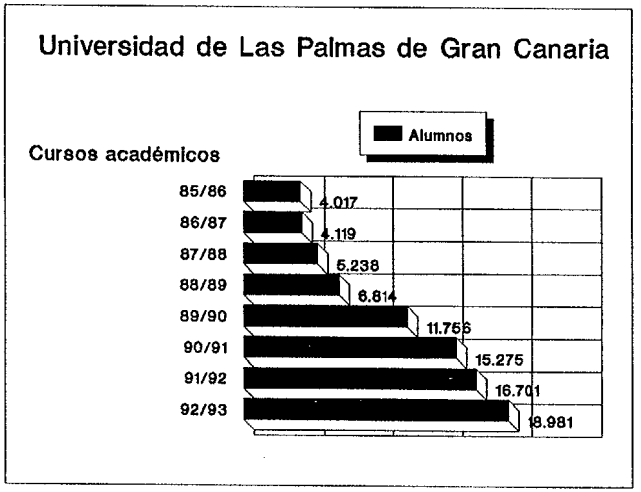
[59] Leibovic KN, (1986) A new method of nonenzymatic dissociation of the Bufo retina. Journal of Neuroscience Methods 15:301-306.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

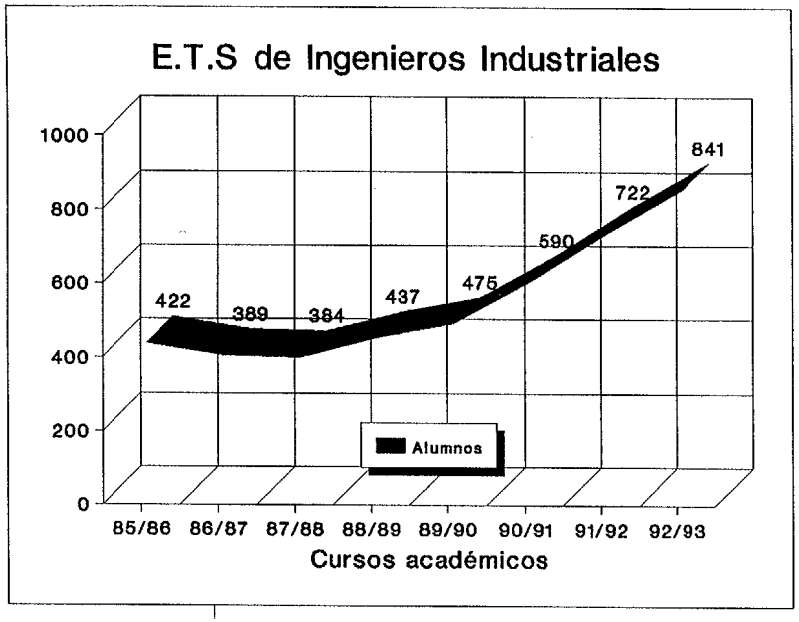
© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

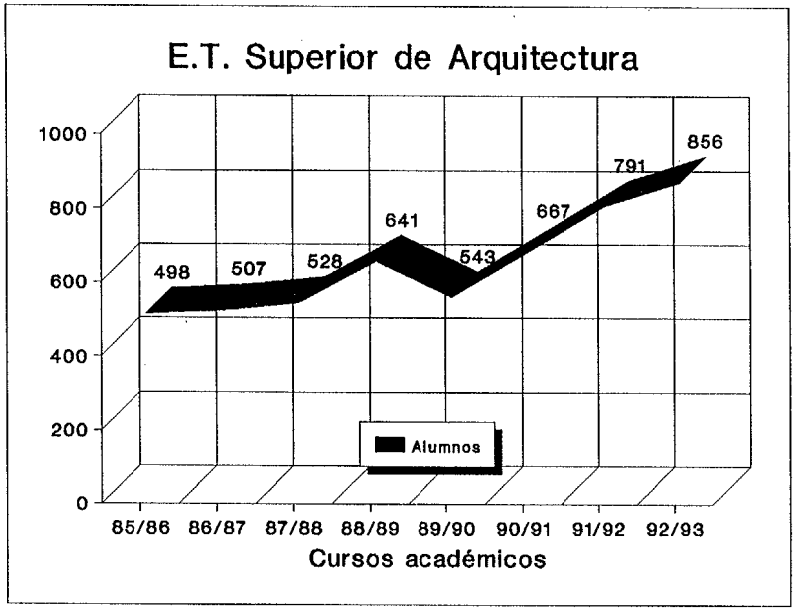


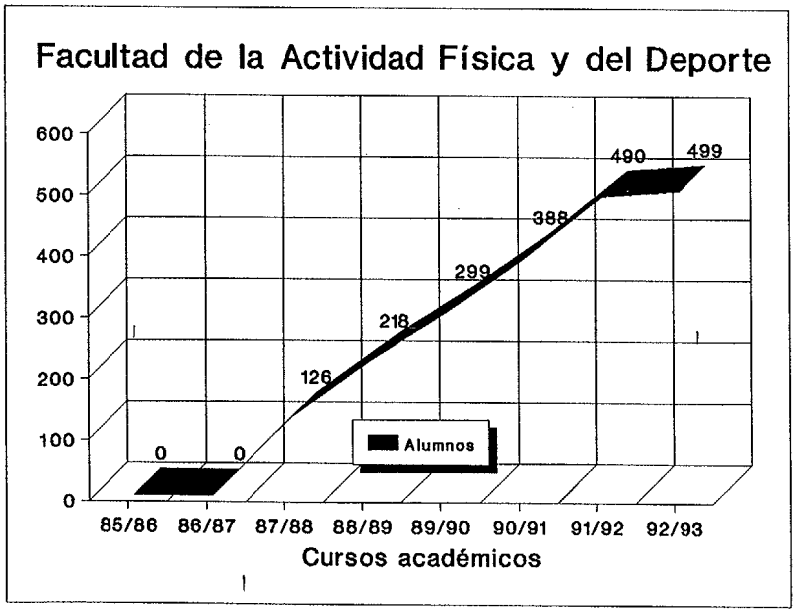


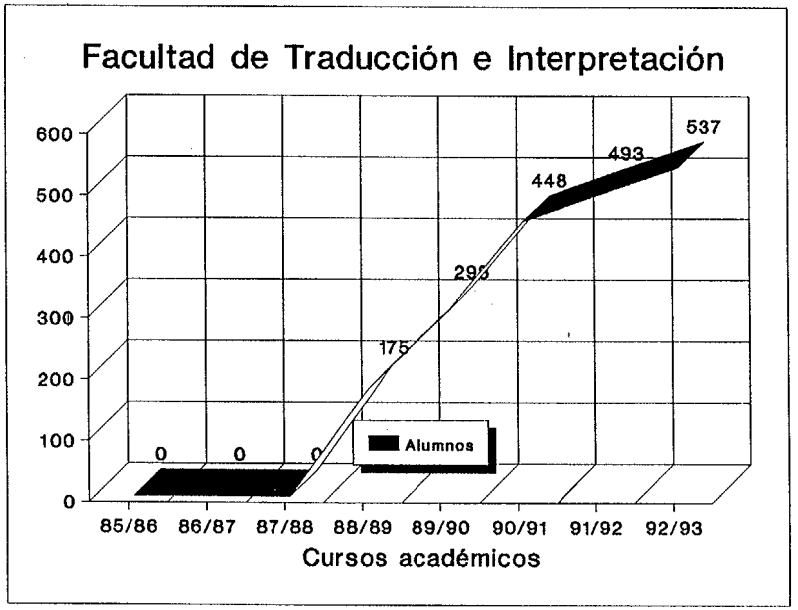


© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

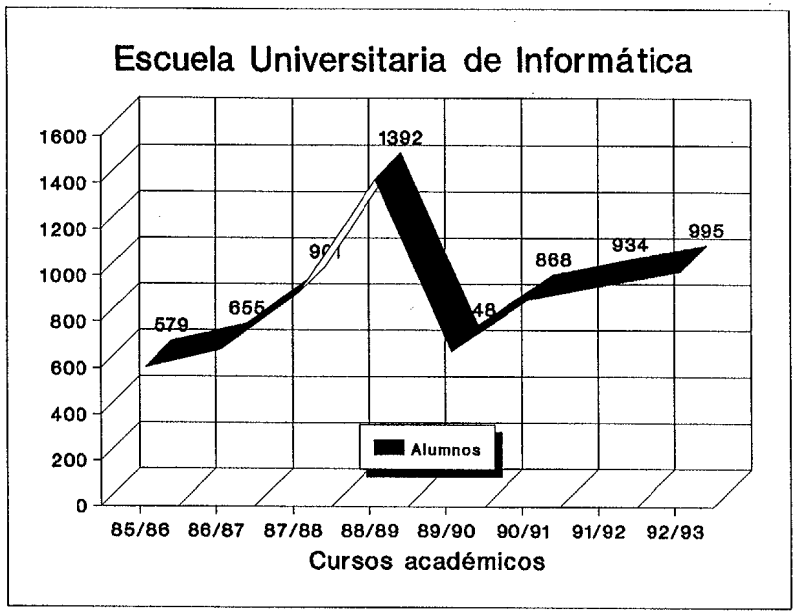


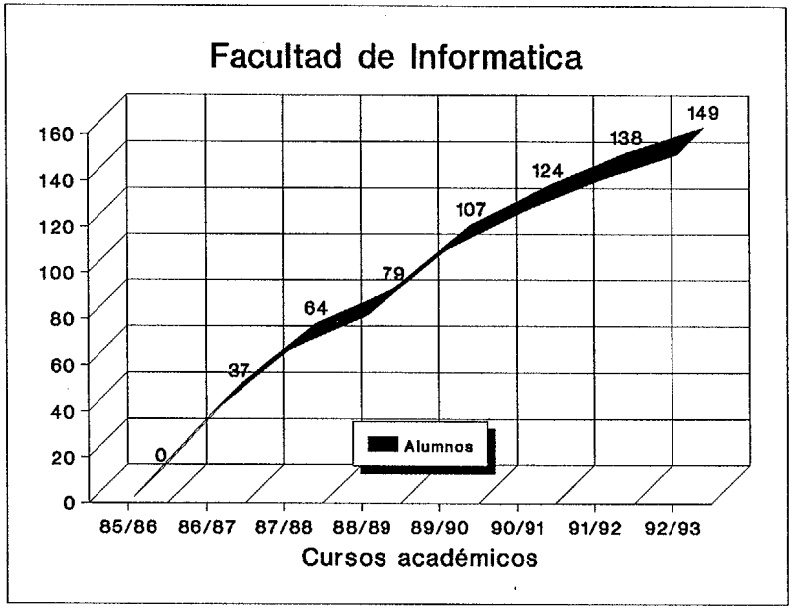


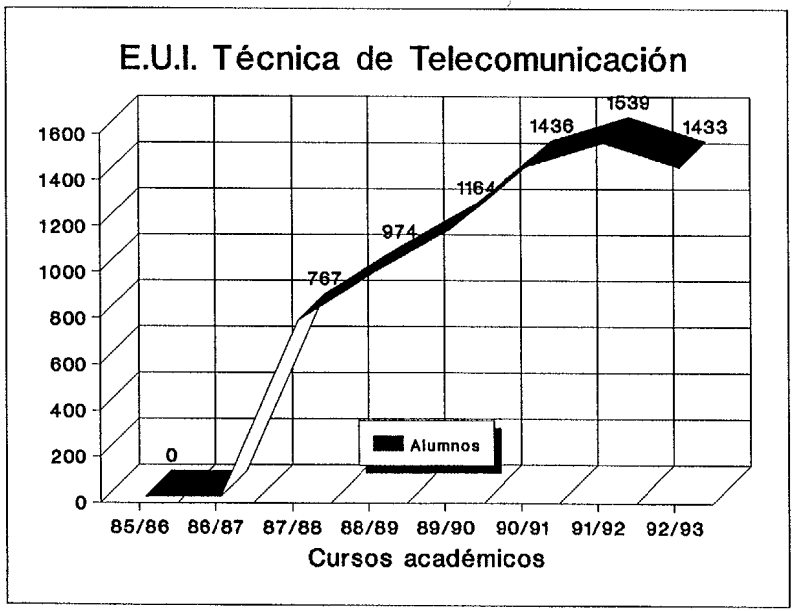


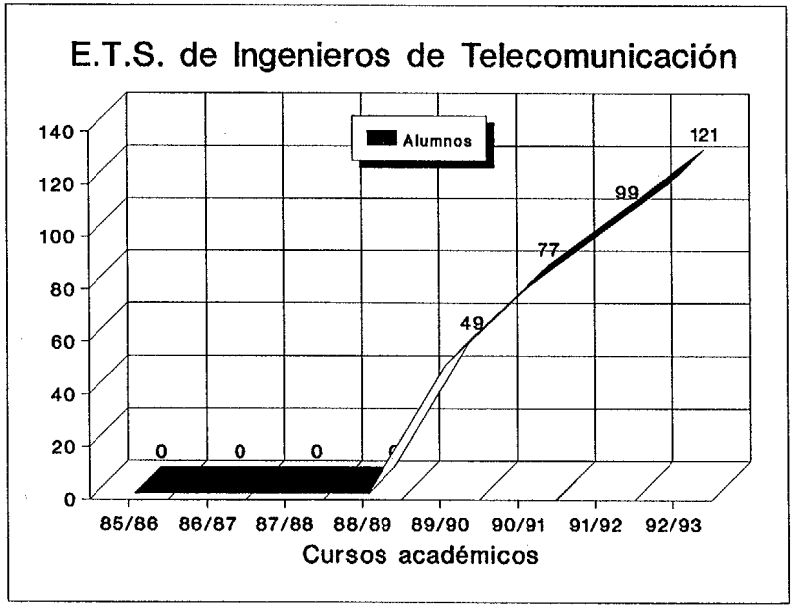


© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

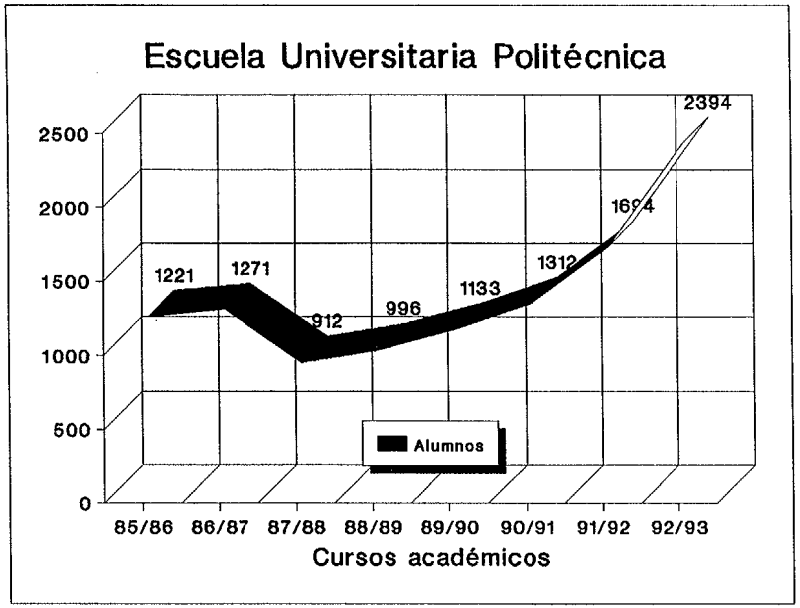


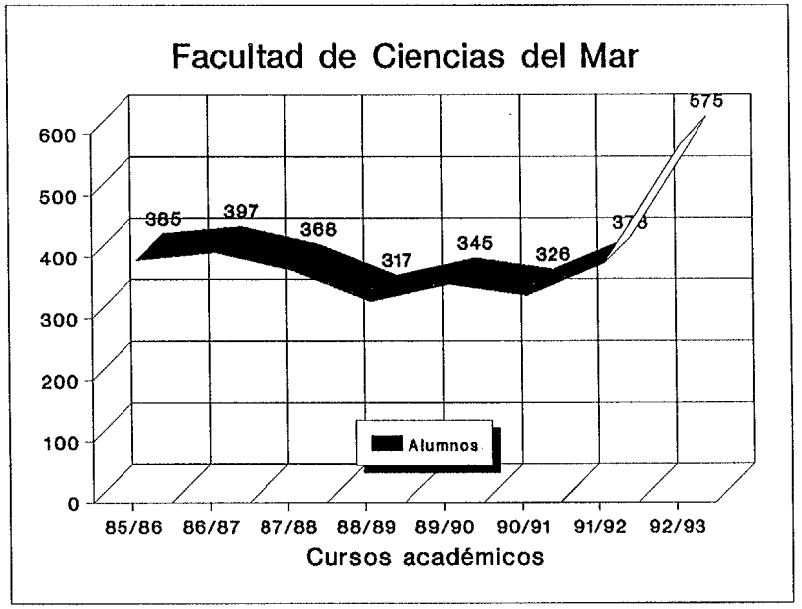


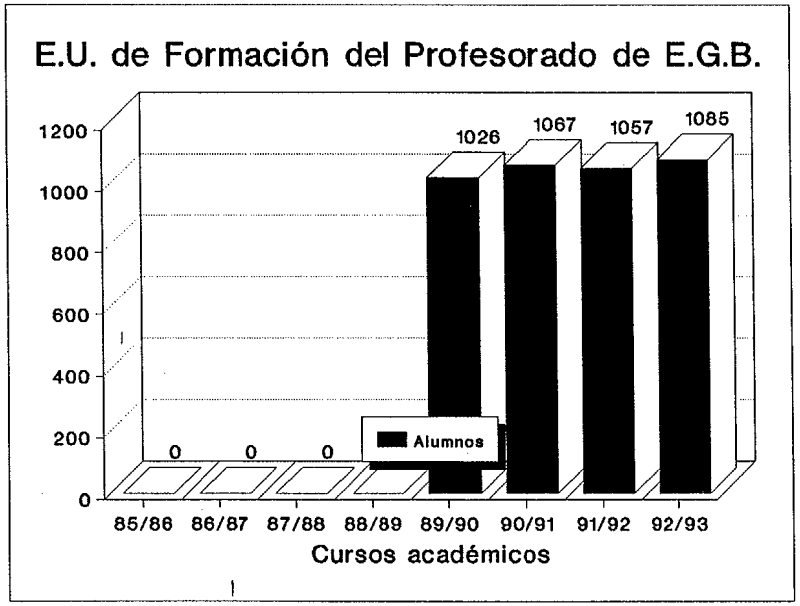


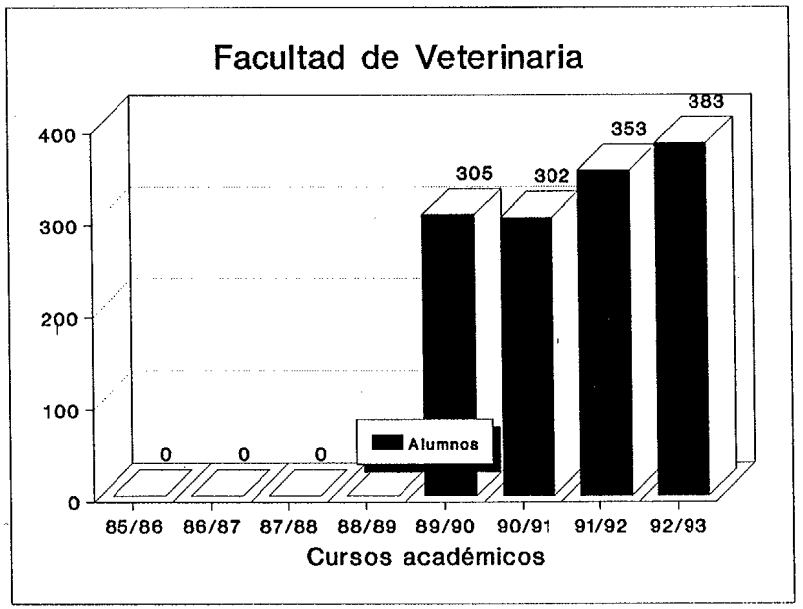


© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

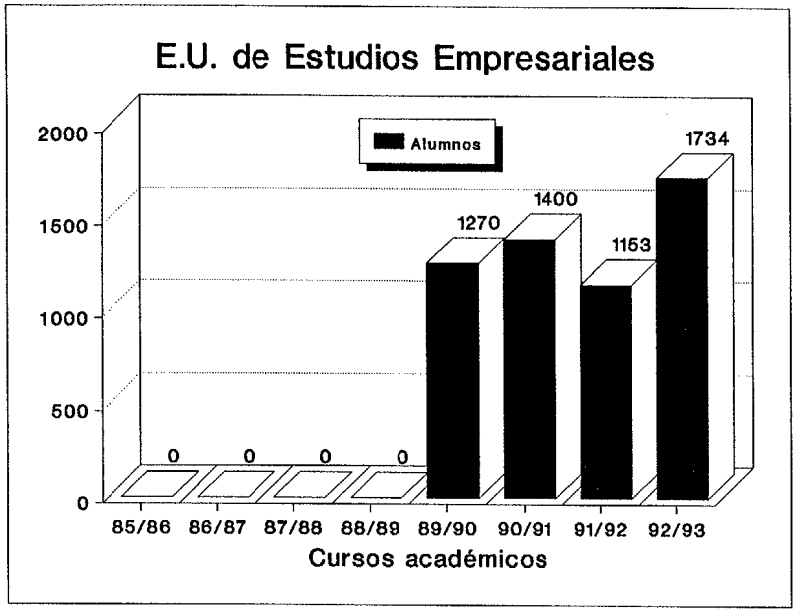


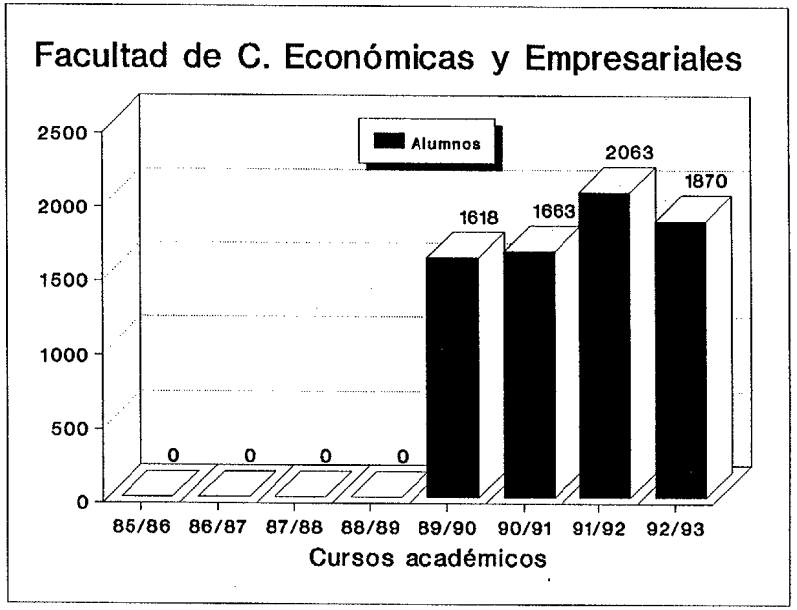


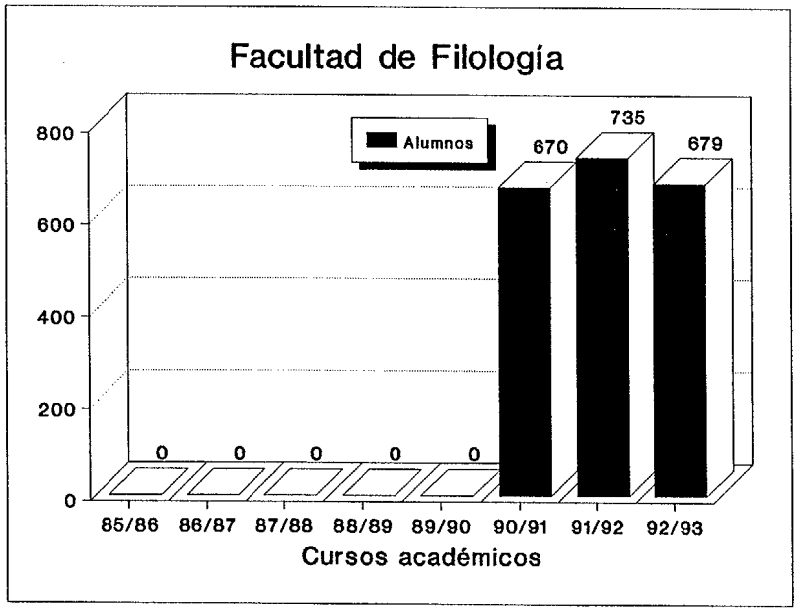


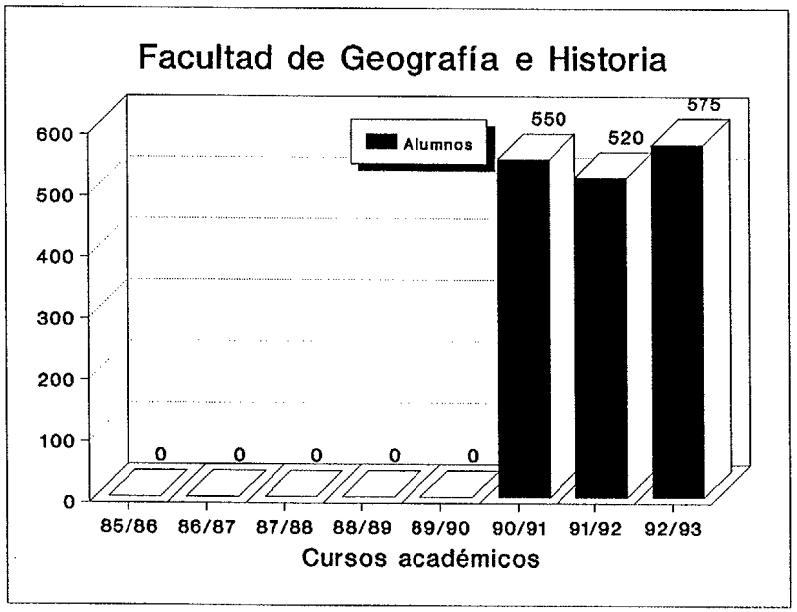


© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

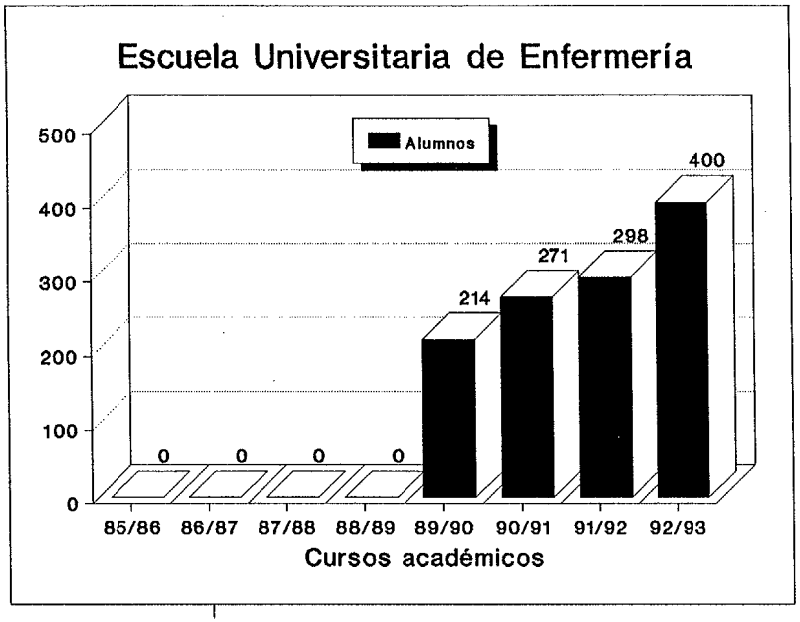


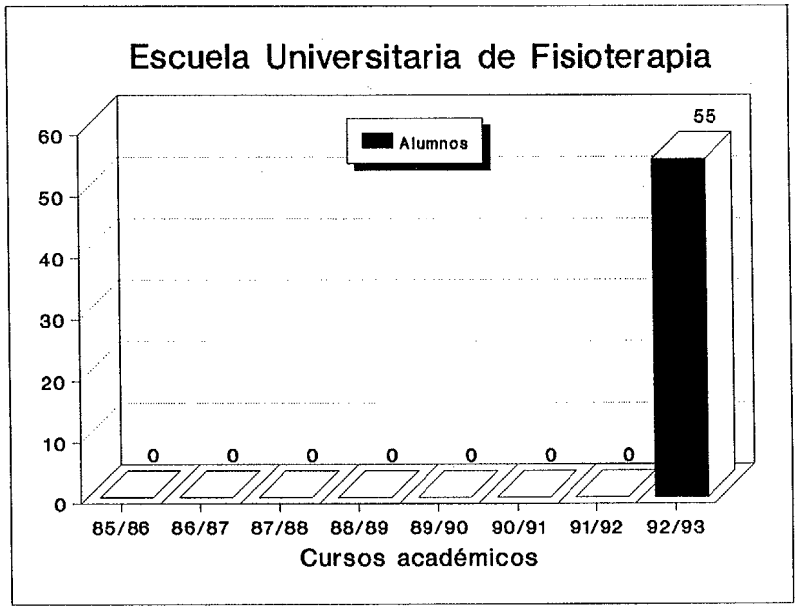


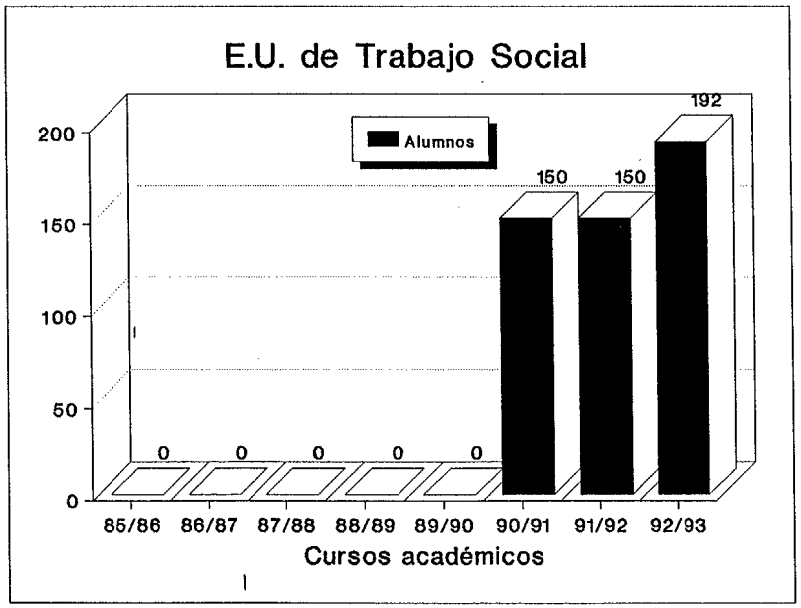


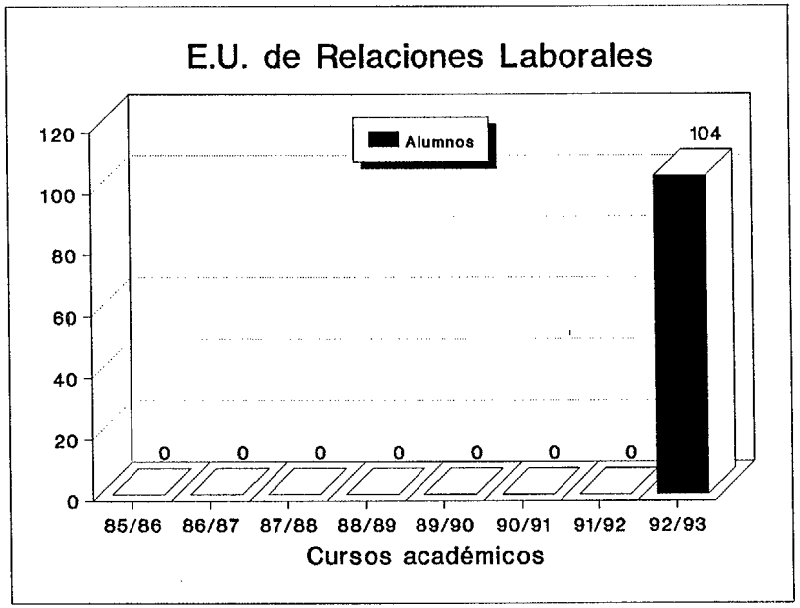


© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

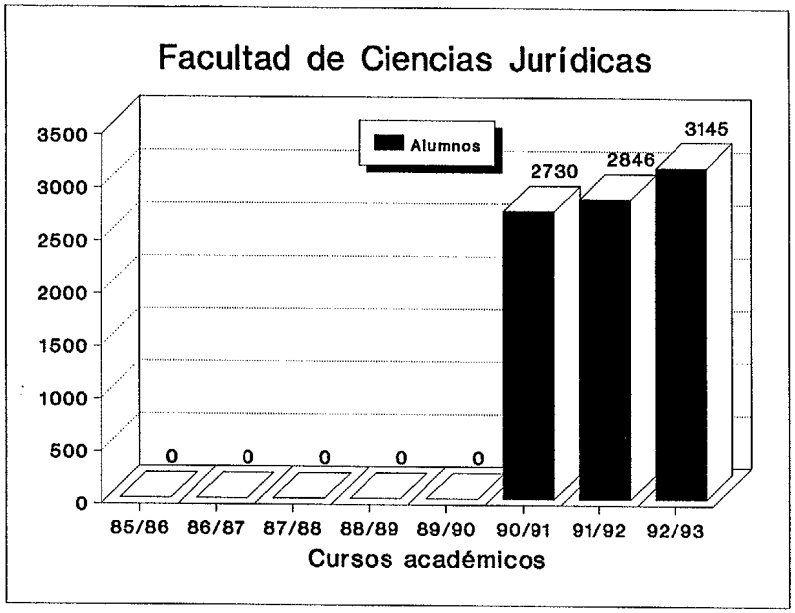


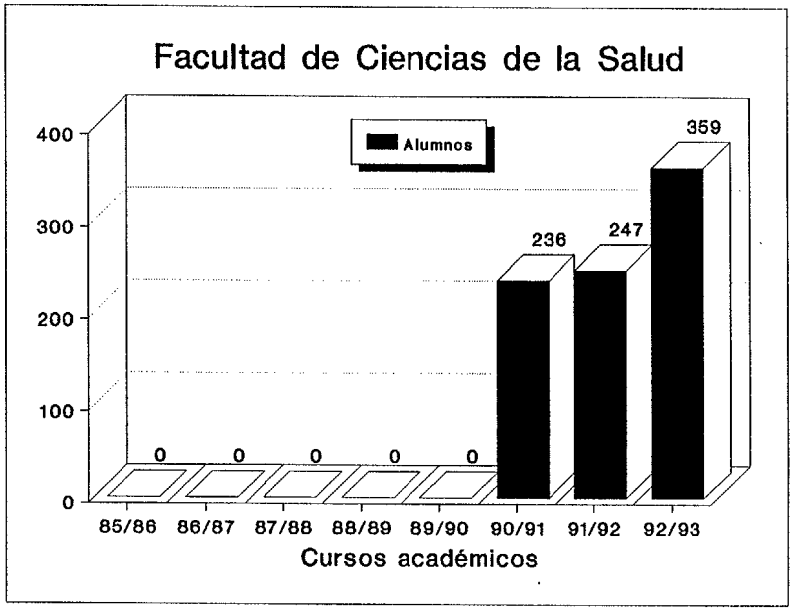


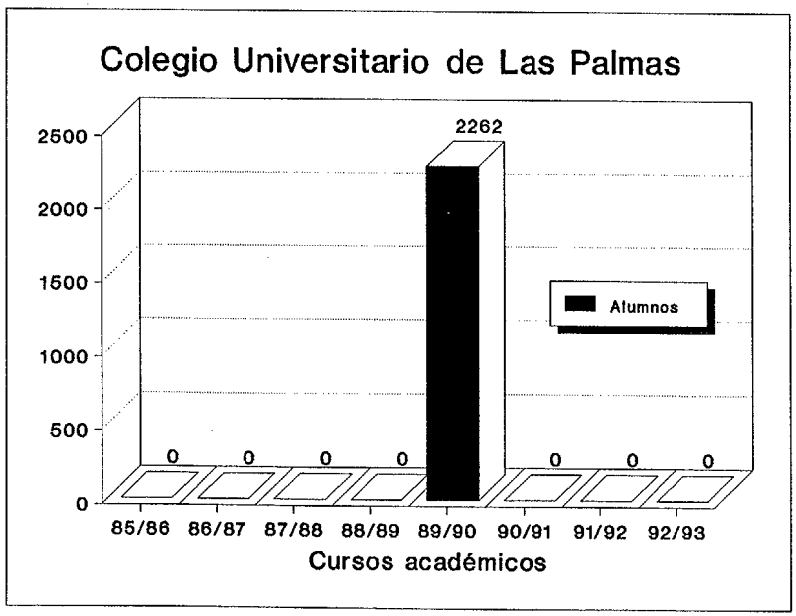




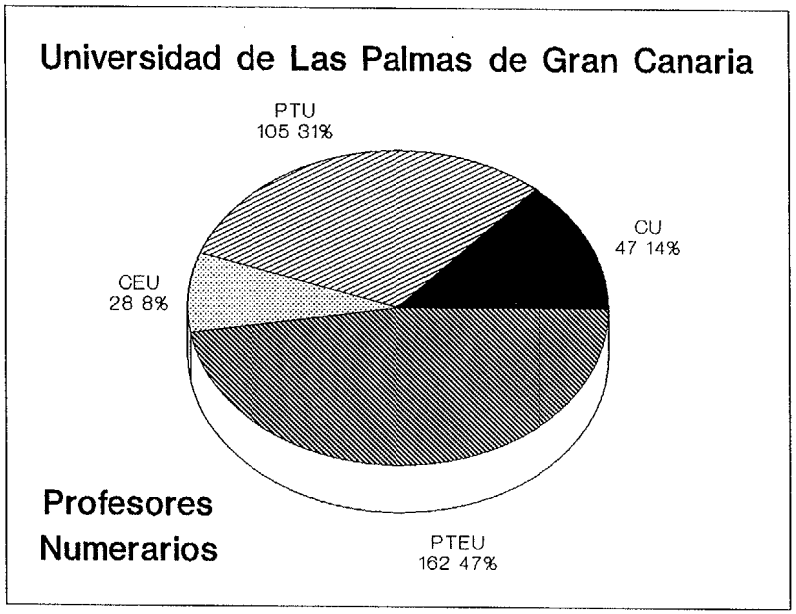
© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

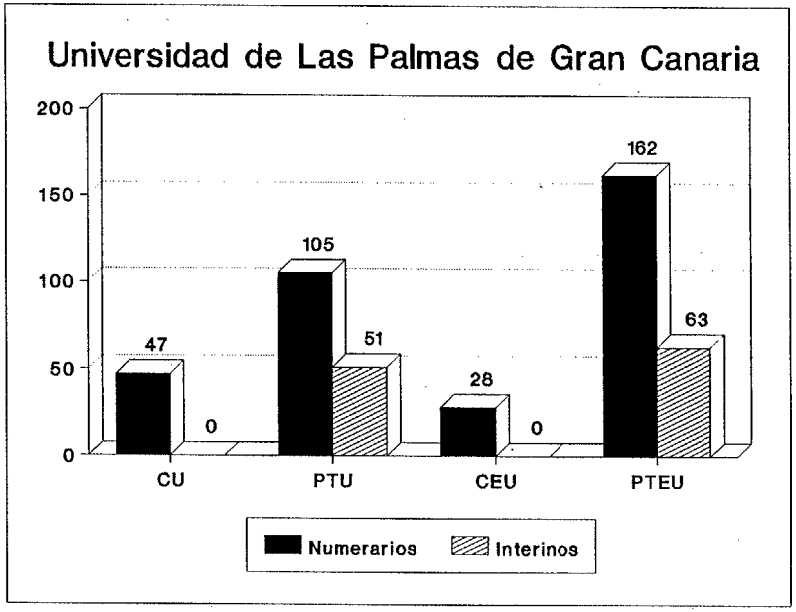


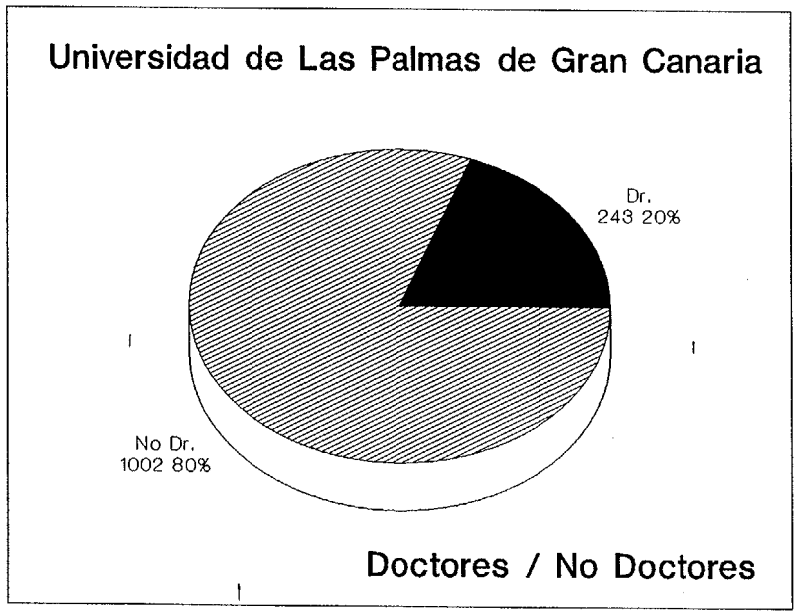


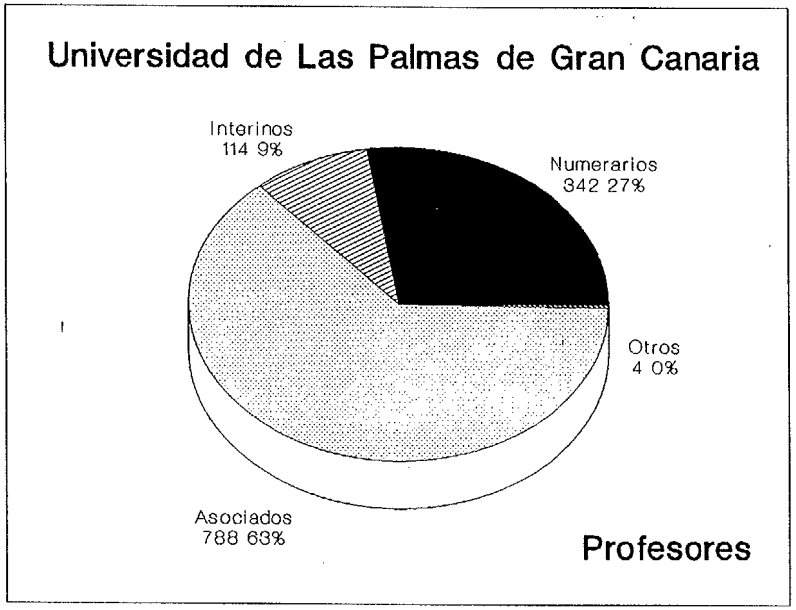


© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004









© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

- No del campo. Otros expertos. Métodos en n y su mejora.
- La claridad, orden y metodología seguida. Seguridad, rigor, madurez.
- Felicita al candidato

Grupo de Lin. fin. — 74º / 7 calid

Prof. Michavila (Ferragut) y Oñate.

1º Mat.

- animarles a seguir en esa línea.

→ Tratamiento ~~Proceso~~ de imágenes. ⇒ Rec. Caract.

¿Cómo se aplica a fenómenos de mesoescala? Eddies

CIRCULACIÓN

(2D)

* Difusión de manchas / dispersión

Mallado

Nodos?

capa superficial

Tipos.

Criterios de desrefinamiento

(1)

(2) [Costes en CPU] frente a métodos tradicionales

* efecto isla.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004