



PROGRAMA DE DOCTORADO

PERSPECTIVA ACTUAL DE LAS CIENCIAS  
DE LA ACTIVIDAD FÍSICA Y DEL DEPORTE



Departamento de educación Física de la Universidad de Las  
Palmas de Gran Canaria

Universidad de Playa Ancha (Valparaíso)

Título de la Tesis:

ANÁLISIS DE LAS MODALIDADES DEPORTIVAS CÍCLICAS DESDE  
LA PERSPECTIVA DE LA COMPLEJIDAD:  
APLICACIÓN A LAS CARRERAS ATLÉTICAS

**TESIS DOCTORAL**

**Doctorando:** *Enrique Arriaza Ardiles*

**Directores:** *Doctor Juan Manuel García Manso*  
*Doctor Juan Manuel Martín González*

**Septiembre de 2006**

39/2006-07

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA  
UNIDAD DE TERCER CICLO Y POSTGRADO

Reunido el día de la fecha, el Tribunal nombrado por el Excmo. Sr. Rector Magfco. de esta Universidad, el/a aspirante expuso esta TESIS DOCTORAL.

Terminada la lectura y contestadas por el/a Doctorando/a las objeciones formuladas por los señores miembros del Tribunal, éste calificó dicho trabajo con la nota de SOBRESALIENTE CUM LAUDE (5 VOTOS)  
UNANIMIDAD

Las Palmas de Gran Canaria. a 16 de enero de 2007

El Presidente: Dr. D. Fernando Amador Ramírez,

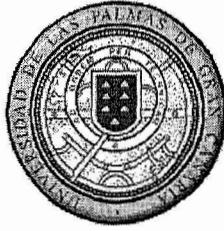
El Secretario: Dr. D. Jorge Dopico Calvo,

El Vocal: Dr. D. Hugo/Augusto Aranguiz Aburto,

El Vocal: Dr. D. Miguel Angel Delgado Noguera,

La Vocal: Dra. Dña. Cecilia Banamonde Pérez,

El Doctorando: D. Enrique Arriaza Ardiles,



PROGRAMA DE DOCTORADO

PESPECTIVA ACTUAL DE LAS CIENCIAS  
DE LA ACTIVIDAD FÍSICA Y DEL DEPORTE



**Departamento de educación Física de la Universidad de Las  
Palmas de Gran Canaria**

**Universidad de Playa Ancha (Valparaíso)**

**Título de la Tesis:**

**ANÁLISIS DE LAS MODALIDADES DEPORTIVAS CÍCLICAS DESDE  
LA PERSPECTIVA DE LA COMPLEJIDAD:  
APLICACIÓN A LAS CARRERAS ATLÉTICAS**

**TESIS DOCTORAL**

**Doctorando: Enrique Arriaza Ardiles**

**Directores: Doctor Juan Manuel García Manso  
Doctor Juan Manuel Martín González**

**Septiembre de 2006**

**DR. D. Antonio Ramos Gordillo, SECRETARIO DEL  
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN FÍSICA DE LA UNIVERSIDAD  
DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA,**

### **CERTIFICA**

*Que el Consejo de Doctores del Departamento en su sesión de fecha 20-11-2006 tomó el acuerdo de dar el consentimiento para su tramitación, a la tesis titulada: "Análisis de las modalidades deportivas cíclicas desde la perspectiva de la complejidad: Aplicación a las carreras atléticas" presentada por el doctorando D. Enrique Arriaza Artilas y dirigida por los Doctores D. Juan Manuel García Manso y D. Juan Manuel Martín González.*

*Y para que así conste, y a efectos de lo previsto por el Artículo 73.2 del Reglamento de Estudios de Doctorado de esta Universidad, firmo la presente en Las Palmas de Gran Canaria, a 20 de noviembre de dos mil seis*

**Departamento de educación Física de la Universidad de Las  
Palmas de Gran Canaria**

**Universidad de Playa Ancha (Valparaíso)**

**Programa de Doctorado:**

Perspectiva Actual de las Ciencias de la Actividad Física y el Deporte

**Título de la Tesis:**

**ANÁLISIS DE LAS MODALIDADES DEPORTIVAS CÍCLICAS DESDE  
LA PERSPECTIVA DE LA COMPLEJIDAD:  
APLICACIÓN A LAS CARRERAS ATLÉTICAS**

**Tesis Doctoral Presentada por:**

D. Enrique Ardiles Arriaza

**Dirigida por:**

Juan Manuel García Manso

Juan Manuel Martín González

*El Director*

*Dr. D. Juan. García Manso*

*El Director*

*Dr. D. Juan M. Martín González*

*El doctorando*

*D. Enrique Arriaza Ardiles*

**ANÁLISIS DE LAS MODALIDADES DEPORTIVAS CÍCLICAS DESDE LA  
PERSPECTIVA DE LA COMPLEJIDAD:  
APLICACIÓN A LAS CARRERAS ATLÉTICAS**

## AGRADECIMIENTOS

*El más profundo de mis agradecimientos para todos aquellos que incondicionalmente han mantenido el apoyo y el afecto, sólido piso de mi crecimiento.*

*Gracias Helga, Pablo, Alonso y Consuelo,*

*Gracias padres,*

*Gracias Norma, Maite y Amaia,*

*Gracias amigos.*

*Y muy especialmente a dos típicos ejemplos de aquellas personas que disfrutan con las pequeñas y sencillas cosas de la vida, mis maestros y amigos Juanma y Juan.*

## ÍNDICE

	Páginas
ÍNDICE DE FIGURAS	vi
ÍNDICE DE TABLAS	viii
ÍNDICE DE CUADROS	x
RESUMEN	xi
ABSTRACT	xii
INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO I	9
I. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA	9
I.1 Sistemas	13
I.2 Caos	18
I.3 Fractales	24
I.4 Complejidad	27
I.5 Criticalidad Autoorganizada (Soc)	39
I.5.1 Autoafinidad	45
I.6 Leyes de Escala (Power Laws).	49
I.6.1 Mecanismos para la Distribución de Power Laws	57
I.6.2 Zipf – Mandelbrot	64
I.6.3 Distribuciones Libres de Escala.	66
CAPÍTULO II	69
II. MATERIALES Y MÉTODOS	69
II.1 MUESTRA Y CRITERIOS DE SELECCIÓN	69
II.2 MÉTODOS	73
II.2.1 PROCEDIMIENTOS	73

CAPÍTULO III APLICACIONES PRÁCTICAS	82
III.1 Leyes de potencia y carreras de media y larga duración.	82
III.2 Índice de Rendimiento y Estructura Mutifractal de las Carreras Atléticas de Media y Larga Duración.	100
III.3 Existencia de Diferentes Leyes de Escala en el Comportamiento de la Velocidad en las Distintas Carreras Atléticas.	108
III.4 Aplicación de las Leyes de Potencia al Análisis Carreras Atléticas de Media y Larga Duración y Detección de Comportamientos Atípicos (Outlier).	117
III.5 Análisis de la Evolución de Marcas en las Carreras de Medio – Fondo y Fondo Organizadas por Grupos de Pruebas.	124
III.5.1 Distancias de Medio-Fondo	125
III.5.2 Carreras de Fondo	135
III.5.3 Carreras de Gran-Fondo	140
III.6 Aplicación de las Leyes de Potencia en la Predicción de Rendimientos	143
III.7 Estudio del Comportamiento de las Marcas Mediante Intervalos de Frecuencia: Comparación de Carreras con otras Modalidades Atléticas.	147
III.7.1 Mejores Marcas por Prueba (Carreras, Saltos y Lanzamientos).	155
III.7.2 Mejores Marcas por Atleta (Sólo Carreras)	159
III.7.2.1 Análisis de la Tabla: Función Zipf-Mandelbrot	165
III.7.3 Conclusiones	166
III.7.4 Análisis Ley de Zipf	169
 CAPITULO IV	 176
VI BIBLIOGRAFÍA	176

## ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA 1: Representación gráfica de la ecuación 2 ajustada, para algunos ejemplos concretos de rendimiento atlético (récord mundial, puestos 1º, 100º, 200º, 300º, 400º y 500º).	92
FIGURA 2: Log-log plot con las rectas de regresión para los puestos 1º, 100º, 200º, 300º, 400º y 500º del ranking mundial de todos los tiempos de las carreras atléticas entre 1500 metros y la maratón.	93
FIGURA 3: Evolución de los valores $\alpha(i)$ y $C(i)$ para todos los valores de $i$ considerados ( $i=1, \dots, 500$ ).	95
FIGURA 4: Barreras de evolución de rendimientos.	97
FIGURA 5: Cálculo de la dimensión fractal $D_0$ (box-counting).	101
FIGURA 6: Representación doblemente logarítmica (log-log) de los resultados obtenidos para el cálculo de las dimensiones box-counting en función de la partición.	103
FIGURA 7: Simulación para $m_0 = 0.8$ , $m_1 = 0.2$ junto a los resultados de CDF del Índice de Rendimiento (IR).	106
FIGURA 8: Puntos de corte entre pruebas de dependencia anaeróbicas frente a los de dependencia aeróbicas.	113
FIGURA 9: Comportamiento de diferentes niveles inferiores de rendimiento (nacional, regional provincial o local).	115
FIGURA 10: Box-Plot de las carreras atléticas.	118
FIGURA 11: Box plot del maratón (42.195 mtrs.).	122
FIGURA 12: Box plot de los 3000 metros.	127
FIGURA 13: Box plot de la prueba de 5.000 metros.	129
FIGURA 14: Box plot de los 1500 metros.	131
FIGURA 15: Box plot de los 10.000 metros.	137
FIGURA 16: Box plot del medio maratón.	139

FIGURA 17: Representación gráfica de las frecuencias normalizadas versus los intervalos de marcas.	148
FIGURA 18: Representación gráfica del ajuste logarítmico y las rectas de regresión de las frecuencias normalizadas y los intervalos de las marcas.	149
FIGURA 19: Aplicación de leyes de Zipf y Zipf-Mandelbrot a la distribución de las marcas de las pruebas de 1.500 mts., 10.000 mts., Media maratón y Maratón.	153
FIGURA 20: Variaciones del coeficiente $c_2$ y de exponente para leyes de Zipf y Zipf-Mandelbrot.	165
FIGURA 21: Comportamiento de ley de escala o función Zipf-Mandelbrot que siguen las pruebas examinadas.	167
FIGURA 22: Valores del coeficiente $a_3$ .	169
FIGURA 23: Valores del coeficiente $a_2$ .	170
FIGURA 24: Histograma de la distribución de datos (marcas) del maratón.	171
FIGURA 25: Evolución de los coeficientes $a_2$ para las diferentes pruebas y los bin (intervalo) 10, 20, 40 y 60.	172
FIGURA 26: Evolución de los coeficientes $a_3$ para las diferentes pruebas y los bin (intervalo) 10, 20, 40 y 60.	173

## ÍNDICE DE TABLAS

TABLA 1: Resultados numéricos para los valores obtenidos de PI (índice de rendimiento), pendiente $\alpha$ , Error Cuadrático Medio y $r^2$ , para los puestos 1 al 500 en intervalos de 100.	94
TABLA 2: Resultados numéricos obtenidos para algunos valores de q.	102
TABLA 3: Punto de corte entre pruebas anaeróbicas y aeróbicas.	111
TABLA 4: Valores de la Velocidad: (c) x ( $\alpha$ ), para diferentes niveles de rendimiento.	144
TABLA 5: Valores de velocidad y tiempo para las pruebas de 1.500 mts., 3.000 mts., 5.000 mts., 10.000 mts., ½ Maratón y Maratón según los niveles internacional, nacional, regional y local.	145
TABLA 6: Resultados del ajuste de la figura 13.	150
TABLA 7: Valores de c y $\alpha$ , junto con $r^2$ y error cuadrático medio para las pruebas desde 100 metros a maratón.	152
TABLA 10: Número de intervalos (bin) para la prueba de 100 metros correspondiente a las mejores marcas	155
TABLA 11: Número de intervalos (bin) para la prueba de 1500 metros correspondiente a las mejores marcas	155
TABLA 12: Número de intervalos (bin) para la prueba de maratón correspondiente a las mejores marcas.	156
TABLA 13: Número de intervalos (bin) para la prueba de lanzamiento de pesos correspondiente a las mejores marcas.	156
TABLA 14: Número de intervalos (bin) para la prueba de salto de longitud correspondiente a las mejores marcas	157
TABLA 15: Número de intervalos (bin) para la prueba de salto con pértiga correspondiente a las mejores marcas.	157
TABLA 16: Número de intervalos (bin) para la prueba de 100 metros correspondiente a las mejores marcas por atleta.	159

TABLA 17: Número de intervalos (bin) para la prueba de 200 metros correspondiente a las mejores marcas por atleta.	159
TABLA 18: Número de intervalos (bin) para la prueba de 400 metros correspondiente a las mejores marcas por atleta.	160
TABLA 19: Número de intervalos (bin) para la prueba de 800 metros correspondiente a las mejores marcas por atleta.	160
TABLA 20: Número de intervalos (bin) para la prueba de 1000 metros correspondiente a las mejores marcas por atleta.	161
TABLA 21: Número de intervalos (bin) para la prueba de 1500 metros correspondiente a las mejores marcas por atleta.	161
TABLA 22: Número de intervalos (bin) para la prueba de 3000 metros correspondiente a las mejores marcas por atleta.	162
TABLA 23: Número de intervalos (bin) para la prueba de 5000 metros correspondiente a las mejores marcas por atleta.	162
TABLA 24: Número de intervalos (bin) para la prueba de 10000 metros correspondiente a las mejores marcas por atleta.	163
TABLA 25: Número de intervalos (bin) para la prueba de media maratón correspondiente a las mejores marcas por atleta.	163
TABLA 26: Número de intervalos (bin) para la prueba del maratón correspondiente a las mejores marcas por atleta.	164

## ÍNDICE DE CUADROS

CUADRO 1: Mejores registros en la prueba de 3.000 metros.	128
CUADRO 2: Cuadro con el ranking de las mejores marcas para los 10.000 metros. (Fuente; International Association of Athletics Federation. IAAF 2005).	136

## RESUMEN

Las modernas teorías de sistemas complejos no-lineales podrían ser una herramienta eficaz que permita abrir una nueva perspectiva que facilite los procedimientos de evaluación, control y posteriormente aplicación de modelos de entrenamiento para ciertas modalidades deportivas.

En el caso de las pruebas atléticas, cuando se relaciona el tiempo (o la velocidad promedio) versus la distancia de las modalidades de media y larga distancia, se puede observar que se comportan de acuerdo a leyes de potencia, lo que podría sugerir la presencia de supuestos fenómenos críticos. Este comportamiento de acuerdo a la posición que ocupan los atletas en el ranking mundial de todos los tiempos, permite definir un Índice de Rendimiento que revela la existencia de probables estructuras multifractales asociados a barreras naturales hacia los que tienden los atletas en su persecución de los récords mundiales.

La explicación para estas leyes de potencia y las estructuras fractales del este sistema, o cercano a sus puntos críticos, podrían ser explicado a través de las nuevas teorías de fenómenos críticos autoorganizados.

Cuando se comparan estas pruebas con otras modalidades atléticas mediante el comportamiento de intervalos de frecuencia se demuestra que también se comportan de acuerdo a un patrón de ley de potencia.

**Palabras Claves:** Carreras de Media y Larga Distancia; Sistemas Complejos no Lineales; Leyes de Potencia; Criticalidad Auto-Organizada; Multifractales; Intervalos de Frecuencia; Entrenamiento Deportivo.

## ABSTRACT

The modern theories of non– linear complex systems could be an efficient tool to open a new perspective that would facilitate evaluation, and control procedures and using training models for certain sports specialties.

In the case of athletics races, when time (or average speed) is related to distance on middle and long distance races, you can see they behave according to power-laws what might suggest the presence of alleged critical phenomena. According to the place athletes have in the all - time world ranking, this behaviour allows us to outline a Performance Index that reveals the existence of possible multifractal structures associated to the natural barriers to the athletes tend in their pursuit of world records.

The explanation for these power-laws and multifractal structures in this system or near its critical points could be found in the new theories of self – organized critical phenomena.

When these tests are compared with other athletic specialties by means of frequency interval behaviour you can see they also work according to a power law pattern.

**Key terms:** Long and Middle Distance Races, Non – Linear Complex Systems, Power-Laws, Self – Organized Criticality, Multifractal, Frequency Intervals, Sports Training.

**ANÁLISIS DE LAS MODALIDADES DEPORTIVAS CÍCLICAS DESDE**  
**LA PERSPECTIVA DE LA COMPLEJIDAD:**  
**APLICACIÓN A LAS CARRERAS ATLÉTICAS**

**INTRODUCCIÓN**

Las carreras atléticas han constituido, junto a las acciones luctatorias, el eje central de las manifestaciones deportivas desde sus orígenes a la actualidad. Los principales eventos deportivos (Juegos Olímpicos, Juegos Panamericanos, Juegos Mediterráneos, etc.) apoyan una parte importante de su programa en el desarrollo de estas confrontaciones atléticas atendiendo, de esta forma, la demanda del público y a la realidad deportiva actual. Su elevada importancia se manifiesta en que sean estas especialidades deportivas las que han permitido crear durante las últimas décadas uno de los cuerpos de conocimientos más sólido y riguroso en los que se apoyan las ciencias aplicadas al deporte. La estadística, la biomecánica, la cinesiología, la bioquímica y, fundamentalmente, la fisiología del ejercicio, han sido, entre otras, las ramas de la ciencia que más han aportado durante los últimos años información sobre los distintos aspectos vinculados a las carreras atléticas.

Los protocolos que actualmente se emplean en la evaluación, seguimiento o control de las diferentes modalidades deportivas, pensamos que podrían ser complementadas con modelos matemáticos que fueran desarrollados a partir del comportamiento de variables biológicas, mecánicas

o numéricas ya conocidas y que de esta forma se facilitara una aplicación más sencilla para los profesionales del deporte y, muy particularmente, para los estudiosos de las carreras atléticas.

En este trabajo tratamos de analizar estas disciplinas a la luz de las nuevas teorías de los sistemas dinámicos complejos (no lineales). Es nuestra intención ver si esta perspectiva puede aportar nueva información sobre estas pruebas y, de esta forma, poder dar mayor racionalidad al cuerpo de conocimientos específico de las carreras, aplicarlo al desarrollo de modelos de entrenamiento o disponer de nuevas herramientas en la predicción de resultados atléticos.

Las modernas teorías de sistemas complejos no-lineales parecen jugar un rol importante en diferentes disciplinas como la biología, ecología, economía, etc., y entendemos que el deporte es una de las manifestaciones del ser humano que puede ser explicada objetivamente a la luz de las teorías basadas en los sistemas complejos.

Con frecuencia el análisis científico se concentra sobre porciones bien definidas del mundo llamadas *sistemas*. Podríamos decir que un sistema es una parte determinada del universo separada del resto por una frontera imaginaria. Los sistemas se consideran abiertos si intercambian energía, materia o información con su entorno (sistemas permeables), y cerrados (aislados o sistemas escasamente permeables) si no lo hacen. Dentro de la categoría de sistemas abiertos, están aquellos que son influidos

pasivamente por su entorno, llamados *no adaptativos*, y los que reaccionan y se adaptan al medio que les rodea, llamados *adaptativos*. Tal característica les permite modificar aspectos de su estructura (componentes) y/o de su funcionamiento (patrones o formas).

Uno de los hechos más asombrosos de la naturaleza es la *emergencia*. En muchos sistemas, existen patrones y formas que pueden ser consideradas como manifestaciones macroscópicas de la organización de los componentes del sistema. Patrones que pueden aparecer "espontáneamente" o como resultado del forzamiento por agentes externos, no existiendo una teoría general de la formación de estos. Hablamos entonces de sistema como un conjunto de unidades, *auto-organizadas* en varios niveles de jerarquía, que interaccionan entre sí de manera *no-lineal* mediante un cierto número de reglas, de manera que los cambios en alguna parte de este sistema se propagan a otras partes del mismo, y tal que el sistema en su globalidad exhibe un comportamiento y propiedades emergentes, que no pueden inferirse por el análisis de las unidades que lo componen.

A causa de la no linealidad de las interacciones, tales sistemas pueden manifestar *comportamientos caóticos* y, por tanto, cierto grado de impredecibilidad asociada a la alta sensibilidad a las condiciones iniciales de este tipo de sistemas. La *capacidad de autoorganización* y *propiedades emergentes* de estos sistemas, sintetizados en la conocida expresión "the

whole is more than the sum of its parts” (Holland, 1998), añade un nuevo tipo de impredecibilidad.

Debido de la complejidad que caracteriza cada organismo humano y teniendo presente la singularidad de los subsistemas que lo componen, cuando se trata de estudiar su manifestación a través de la actividad física, podemos observar cierta regularidad en los comportamientos. Esto hace que cuando estudiamos al ser humano, o alguna de sus manifestaciones (ejemplo: el deporte), aunque no podamos predecir con exactitud sus conductas, sí podamos establecer ciertas pautas que nos permitan aproximarnos a los aspectos fundamentales de su funcionamiento.

Así por ejemplo, cuando analizamos las carreras de medio fondo y fondo, vemos como la velocidad media con la que se puede recorrer una distancia dada, o el tiempo empleado en ella, se comporta de acuerdo a una *ley de potencia* (LP) del tipo

$$v = cd^{-\alpha} \text{ o su equivalente } \log v = \log c - \alpha \log d$$

Donde las constantes  $c$  y  $\alpha$  (exponente de escala) de la ecuación toman distintos valores según sea el nivel de rendimiento, y/o entrenamiento, del deportista. El valor de  $d$  representa la distancia recorrida en cada carrera que, en nuestro caso, son las distancias más populares entre los programas atléticos, pero poniendo especial interés en lo que se conocen como

carreras de medio-fondo y fondo: 1.500 m, 3.000 m, 5.000 m, 10.000 m, 21.097 m (media-maratón) y 42.195 m (maratón).

Entendemos que este tipo de comportamiento se da en cada grupo de deportista y es independiente de sus características individuales. Las LP son comportamientos muy comunes en la naturaleza, (terremotos, ecosistemas, distribución de la materia en el universo, etc.). Los fenómenos asociados a este tipo de funciones no tienen escalas características y la aparición de LP sugiere, aunque no siempre, la existencia de posibles fenómenos críticos asociados a algún tipo de transición de fase.

Es bien conocido (Binney et al., 1993; Solé et al., 1996) que un sistema puede sufrir fuertes cambios cualitativos (transición de fase) en sus propiedades macroscópicas, si se modifica adecuadamente algún parámetro de control apropiado. Cercano a los *puntos críticos* pueden aparecer de manera espontánea estructuras fractales, patrones de dinámica compleja, transferencia óptima de información.

Más recientemente se ha planteado la denominada *conjetura SOC* (P. Bak, 1987, 1997; Paczuski et al., 1996; Jensen, 1998), según la cual algunos sistemas que operan lejos del equilibrio son conducidos continuamente por su propia dinámica interna, y acaso las interacciones con el medio que las rodea, hacia un estado crítico, que, al igual que en el caso de las transiciones de fase, se caracterizan por ser libres de escala. Los sistemas

que muestran SOC parecen ser robustos y bien adaptados a perturbaciones externas.

Desde esta perspectiva, la interacción de los deportistas con los factores que intervienen y condicionan el rendimiento atlético en carreras de resistencia (nivel de entrenamiento, experiencia atlética, edad, características de las competiciones, incentivos sociales o económicos, universo de practicantes, etc..) podría autoconducirlos hacia este tipo de estados. De muchas maneras, el ser humano (no sólo los deportistas), explora continuamente los límites de su capacidad de rendimiento, físico, mental o de cualquier otra índole.

Para ello es necesario que se apliquen, de forma específica e individualizada, en una secuencia muy bien controlada los adecuados protocolos de intervención sobre el organismo del deportista. Para los atletas el estado de forma óptima que le permita acceder a su mejor registro personal o a otro que represente un récord en la modalidad, está asociado a un especial estado de funcionamiento interno, físico y mental, diferente al de un sujeto que simplemente se enfrenta a los requerimientos de la vida cotidiana. Las interconexiones e intercomunicaciones entre los diferentes órganos y sistemas funcionales le permiten atender, en estas extremas situaciones, a las especiales demandas de trabajo mediante una respuesta coherente, intensa y sinérgica de cada estructura de su organismo. Este complejo proceso funcional es similar al que se manifiesta en sistemas altamente disipativos que operan lejos del equilibrio termodinámico.

En resumen, a partir de lo mencionado, esta investigación se concreta en el estudio de los siguientes objetivos:

- Investigar si la máxima velocidad con la que se puede recorrer diferentes distancias de carrera se comportan de acuerdo a una LP.
- Comprobar la estructura multifractal subyacente en las pruebas de carrera de media y larga duración.
- Determinar la posible existencia de algún punto crítico en este comportamiento que nos indique la existencia de más de una LP cuando estudiamos el rendimiento en las distintas distancias de carrera.
- Estudiar si las LP resultantes en cada nivel de rendimiento pueden ser utilizadas como instrumento de predicción de rendimientos en diferentes distancias de carrera.
- Analizar desde la complejidad, por grupo de pruebas y de manera individualizada las distancias de 1.500, 3.000, 5.000, 10.000, 21.097 y 42.195 metros.
- Comparar los comportamientos de diferentes modalidades atléticas a partir de intervalos de rendimientos (individuales y totales) utilizando las leyes de Zipf y Zipf-Mandelbrot.

La validez de estos análisis aumenta cuanto más elevado es el número de atletas que realizan, en condiciones óptimas de competición, cada una de las distancias objeto de estudio. De esta manera, al disponer de un universo muestral grande podemos amortiguar al máximo las interferencias derivadas

de comportamientos individuales extremos o atípicos. La importancia de la muestra empleada se manifiesta cuando centramos el estudio entre los mejores deportistas de cada distancia atlética, especialmente cuando nos referimos a los valores que constituyen los récords mundiales de cada una de las pruebas utilizadas. En este trabajo se usa como muestra los rankings mundiales all-time en el que se relacionan sólo la mejor marca de cada uno de los atletas que han corrido las diferentes distancias. No obstante, algunos análisis requieren la utilización del ranking oficial de marcas en el que se refleja la totalidad de registros logrados por cualquier atleta dentro de un rango de nivel previamente establecido. Las marcas empleadas corresponden siempre a los registros oficialmente reconocidos por la IAAF como válidos poniendo como fecha tope para el estudio aquellas marcas obtenidas antes del 30 de octubre de 2003.

## CÁPITULO I

### FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA.

"Diez microsegundos después del big-bang el plasma de quark y gluones se expandió y al enfriarse dio lugar a la formación de hadrones y leptones, la dilatación posterior enfrió tanto la materia que estos se juntaron para formar átomos. En los hornos estelares los átomos ligeros dieron lugar a los mas pesados, y así sucesivamente hasta nuestros días".

Este ejemplo citado por Martín en la conferencia "Conciencia y Realidad: algunos aspectos científicos abiertos a comienzos del III milenio. Bases para un debate" (Martín, 2002) , para referirse a la creación de las estructuras de la naturaleza y posteriormente la vida, refleja con precisión meridiana la composición y la función que cumple cada elemento de una estructura superior con un plan determinado y la evolución en el tiempo.

Como podemos apreciar en esta historia los ingredientes en niveles inferiores se agrupan para dar lugar a los superiores y se forman todas las estructuras imaginables. La materia se organiza en niveles y escalas bien separados y distinguibles: Organización de los quarks, hadrones (neutrones y protones), átomos, etc., tal como sucede en el caso de las estructuración de las sociedades; familias, clanes, comunidades, ciudades, países. No hay organizaciones en escalas intermedias.

Sin embargo, la ciencia, clásicamente se ha basado en el reduccionismo, privilegiando el estudio de las partes en perjuicio de la totalidad. Esta manera de proceder viene avalada por los éxitos impresionantes de la ciencia moderna: mecánica cuántica y física de partículas, biología molecular, biotecnología, genética (genoma humano: lista ordenada de todas las bases nitrogenadas A,C,G,T que forman el ADN), por no mencionar los avances espectaculares en ingeniería, comunicaciones, etc. No obstante la extrapolación de resultados de un nivel de organización de la materia a los niveles superiores de organización de la misma no queda garantizada.

El cerebro humano, por ejemplo, es el asiento de las facultades mentales. Desde el descubrimiento por Cajal, a principios del siglo XX, de la neurona como la unidad estructural básica del sistema nervioso central, una colección de procesadores biológicos interconectados, procesando e intercambiando información debe de alguna manera dar lugar a las funciones superiores del sistema nervioso central (Martín, 2002). La imaginación, sentimientos, fantasías, etc., serán consecuencia del proceso de interacción de los agentes que componen el sistema, no de la naturaleza material de los mismos. Lo que pone en duda la concepción reduccionista.

La turbulencia en líquidos, por ejemplo, es independiente de la naturaleza material de los mismos. Hay propiedades emergentes que no dependen de la naturaleza microscópica del sistema y se puede entender el comportamiento del sistema sin tener que describir minuciosamente el comportamiento de cada uno de sus componentes.

En definitiva un concepto reduccionista, pretenderá descubrir la imagen de un puzzle analizando una de las partes constitutivas del mismo. Seguramente bajo este criterio, se obtendrá valiosa información sobre cuales son los materiales con los que se construyeron las piezas, los métodos y los elementos usados, quizás hasta el lugar de procedencia, pero definir a partir de esta información la imagen del puzzle parece imposible.

Toda la información obtenida a través de este método resulta un gran aporte a la ciencia, eso no queda a la discusión, lo que aquí se plantea es que lo verdaderamente relevante es el plan superior y las funciones desarrolladas por cada componente, las interconexiones entre estos y las propiedades que surgen de la esencia del sistema para cumplir el objetivo.

Parece entonces necesario buscar nuevas leyes que surjan de la globalidad del sistema y/o la organización de la Materia, y que no puedan deducirse a partir de las de sus componentes.

Durante muchos años los sistemas y modelos lineales, aquellos en los que la respuesta es proporcional al estímulo, se han utilizado sistemáticamente para describir y modelar la dinámica de muchos sistemas físicos, químicos, biológicos, económicos, etc. Para un sistema lineal el conocimiento del estado actual del mismo hace que se pueda conocer el estado en cualquier otro instante futuro o pasado. Esto significa, desde un punto de vista físico, que la respuesta a una suma de efectos es la suma de las respuestas a cada uno de ellos. La segunda

ley de Newton  $F = ma$  es un buen ejemplo. Este tipo de sistemas tiene la ventaja de que para ellos existen métodos matemáticos de resolución exacta.

Sin embargo, en los últimos años se ha probado que los sistemas no lineales pueden presentar dinámicas muy complejas que no pueden aproximarse mediante modelos lineales (Nicolis et alii. 1977; Marks-Tarlow, 1999). La gran variedad de dinámicas posibles en los sistemas no lineales hace que, en algunos casos, éstos se comporten de forma impredecible, a pesar de estar definidos por ecuaciones deterministas (*caos determinista*). La teoría de sistemas dinámicos estudia como estos sistemas evolucionan en el tiempo, y los describe bien mediante funciones iteradas, o mapas (sistemas discretos), o bien mediante ecuaciones diferenciales (sistemas continuos).

La teoría de los sistemas dinámicos no lineales (caóticos) está íntimamente ligada a la geometría fractal, ya que la región del espacio hacia la que tienden pueden tener estructura fractal (*atractores extraños*). Por tanto, la geometría fractal permite estudiar el soporte sobre el que se definen los sistemas dinámicos caóticos. Los objetos fractales tienen propiedades muy particulares, como la autosemjanza y la apariencia irregular, que permiten caracterizarlos basándose en medidas cuantitativas relativas a su grado de irregularidad (Mandelbrot, 1977).

## I.1 SISTEMAS

Los sistemas consisten en muchas partes individuales que interactúan con otras con el fin de alcanzar un objetivo concreto en común. Fundamentalmente presentan dos características sustantivas; en primer lugar, los elementos constituyentes ejercen, dada su interrelación, una influencia mutua con sus vecinos, lo que facilita que cualquier alteración o cambio de alguno de estos componentes estructurales afecte localmente al o los elementos más próximos; y en segundo lugar, que cualquier conjunto de elementos que no persiga un objetivo común, no forma de ninguna manera un sistema. En consecuencia, lo esencialmente importante es la interconexión y las relaciones entre los elementos que estructuran el sistema, así como las funciones particulares de estos.

Los sistemas se consideran abiertos si intercambian energía, materia o información con su entorno, y cerrados (aislados) si no lo hacen (Moriello, 2003). La mayoría de los sistemas son abiertos, aunque en algunos casos, como primera aproximación, se pueden suponer cerrados.

Algunos sistemas muestran sólo algún tipo de "orden estructural", como los cristales. Otros muestran una "organización funcional" que involucra tanto a la materia que los componen como a los flujos de energía, materia e información entre ellos y el exterior. Estos últimos son, sin duda, mucho más difíciles de estudiar debido a sus variaciones temporales y a la dependencia crítica entre sus componentes y el entorno (Almendo, 2000). Una célula,

cualquier ser vivo, un ecosistema, una ciudad, una empresa, etc. son todos ejemplos de sistemas de este tipo.

En economía, por ejemplo, muchos de sus agentes, tales como, consumidores, productores, gobierno, economistas, etc., toman decisiones de acuerdo a sus propios criterios para la consecución de su objetivo individual, el cual tiene sentido en la medida que permite un funcionamiento estable del sistema económico. Estas acciones afectan a cada agente involucrado y en consecuencia el comportamiento global.

En biología, un organismo individual interactúa con otro. Las acciones de un organismo afectan la supervivencia y el comportamiento de otros. Si una especie cambia en el tiempo por efecto de mutaciones, alguna otra especie miembro del sistema ecológico también se verá afectada.

Usualmente se estimaba que los sistemas permanecían en un estado de "quietud" o de equilibrio en el que pequeñas perturbaciones o "shocks", provocaban sólo pequeños disturbios que eventualmente eran disipados. En teoría, la respuesta del sistema se da en forma proporcional a la magnitud y al tamaño del impacto, por lo que el equilibrio del sistema es lineal. Grandes fluctuaciones o ruidos en el sistema pueden ocurrir sólo si muchos eventos casuales empujan en alguna dirección.

Cuando alguno de estos eventos sucede, el sistema está en condiciones de responder con alguna manifestación, comportamiento o

creación, que facilite la adaptación a la nueva estructura o al nuevo patrón, entonces surge una característica propia de los sistemas de la naturaleza, que es la emergencia (Martín, 2002). Esta es el resultado de la expresión de las estructuras y las reglas intrínsecas del mismo. Estas manifestaciones aparecen como consecuencia de la organización de los componentes del sistema y pueden generarse de manera natural o espontánea sin la intervención de agentes externos, o bien producto del forzamiento provocado por algún tipo de situación ajena al propio orden de la estructura o patrón de funcionamiento.

Esta permanente generación de fluctuaciones que provocan cambios de diferente magnitud, a su vez genera, y en la misma proporción, respuestas para que el sistema sea capaz de adaptarse, produciendo respuestas o expresiones de cambio. Esta movilidad del sistema o dicho de otra forma, la capacidad de este de evolucionar en el tiempo, es lo que lo define como sistema dinámico, el cual consta, básicamente, de dos partes: una noción de estado que recoge la información esencial sobre la condición del sistema en un instante y que dependerá de un conjunto de valores simultáneos de las variables del mismo (Lorenz, 1985), y una dinámica o regla de evolución, que tiene que ver con el comportamiento y la capacidad del sistema de adaptarse de acuerdo a ciertas normas intrínsecas de conducta (continua o discreta). El estado del sistema en el tiempo viene determinado por las variables, entendiendo estas como cualquier cosa que varíe con el tiempo (por ejemplo, la temperatura, el número de individuos de una población, la velocidad, el precio de un producto, el peso, el tamaño, etc.), pero elegidas de manera que

el conocimiento completo de todas ellas determine unívocamente el estado del sistema. Se dirá, entonces, que un sistema se encuentra en un estado de equilibrio si este permanece, al menos estadísticamente, sin cambiar con el paso del tiempo.

El conjunto de todos los posibles valores de las variables, o de todos los posibles estados del sistema es lo que se conoce como espacio de fases (de estados o de configuraciones), siendo el estado actual del sistema un punto en dicho espacio de fases. Con el tiempo, este punto se mueve o evoluciona en el espacio de fases, describiendo una trayectoria u órbita, que nos permite evaluar el estado del sistema en un tiempo posterior. Al estado inicial se le conoce como conjunto de condiciones iniciales.

El sistema, por consiguiente, estará condicionado en gran medida por el estado interno de los elementos constituyentes, pues existirá gran cantidad de variables que a cada instante estarán propiciando nuevos movimientos en el sistema, lo que provocará la pérdida de equilibrio y consecuentemente la no linealidad. Lejos de permanecer inmóviles y aislados los flujos de energía generados en el intercambio de información entre los elementos, permitirá que partes de la estructura adquieran nuevas propiedades, traduciéndose esto en características completamente nuevas y necesarias para comprender la dinámica de los sistemas (Almendra, 2002).

Esta nueva estructuración de los estados internos asegura la cohesión y la coherencia de los movimientos del sistema, dándole la posibilidad de

alcanzar otros múltiples estados y en consecuencia gran cantidad de "oportunidades" para mantener el flujo que le da vida al sistema.

El movimiento en estos sistemas no lineales tiende hacia una zona o patrón orbital que se ubica entre el desorden producido por una amplia gama de desplazamientos que vuelven el comportamiento en caótico y una región de poca o casi nula actividad espontánea regida por el orden. De modo que la fluctuación entre estos dos espacios corresponde a la permanente búsqueda del sistema por llegar a un lugar intermedio que le permita limitar con ambos y pendular entre ellos. Esta zona hacia la que se siente atraída el sistema se denomina atractor.

Un atractor es, por lo tanto, una región del espacio de fases a la que tiende o es atraído el comportamiento de un sistema. Algunos sistemas que no tienden al reposo a largo plazo, recorriendo periódicamente una sucesión de estados, se conocen como ciclos límite, mostrando curvas cerradas en el espacio de fases. La cuenca de atracción es el conjunto de puntos que evolucionan hacia un atractor.

## 1.2 CAOS

Cuando un sistema a nivel local cuenta con reglas muy simples y a pesar de ello globalmente exhibe un comportamiento altamente inesperado que no es predecible, estamos hablando de un sistema caótico (Prigogine, 1984).

Una de las características intrínsecas de estos sistemas es la gran sensibilidad de las condiciones iniciales, en las que una mínima e insignificante alteración puede provocar una catástrofe, su capacidad de propagación y amplificación exponencial a lo largo del sistema, es capaz de desencadenar un comportamiento posterior totalmente diferente (Prigogine, 1984). Es decir, aunque las condiciones iniciales hayan sido casi idénticas y el resto de las exposiciones o influencias a las que se encuentre sometido el sistema sean particularmente parecidas a las primeras, acaban transformándose en configuraciones finales completamente diferentes, razón por la cual resulta imposible hacer una precisión del estado final de estos sistemas.

No obstante, el caos, no es carencia absoluta de orden, o a la inversa, solamente desorden, sino es una mezcla de ambos estados, que aunque parezcan contar con parte de una evolución aleatoria y errática en su funcionamiento interno, tienen un cierto orden subyacente que le permite oscilar de un estado a otro sin que se pierdan o alteren las estrictas leyes naturales a las que obedece su dinámica.

Los sistemas conformados por una cantidad de elementos similares bajo interacción, exhiben una gama muy rica de conductas dinámicas complejas cuando se encuentran en las cercanías de una zona de transición entre estados ordenados y estados desordenados (transiciones de fase orden-desorden). Los sistemas demasiado desordenados (caóticos) o demasiado ordenados pueden que no sustenten, por mencionar un ejemplo, capacidades de procesamiento de información, que en el caso de una estructura social característica, resulta claramente esencial.

Una investigación sobre la organización del sistema social de las hormigas realizado por Miramontes (2000), y que ejemplifica claramente esta dinámica, se observa al estudiar el comportamiento dentro de las colonias de las hormigas del género *Leptothorax*.

Se señala que, contra lo normalmente esperado, los individuos de esta colonia pueden pasar hasta un 25% del tiempo inactiva, mientras las otras ejecutan "tareas de recolección". Esta conducta, según la investigación, parece apuntar al hecho de que aquellos sistemas en los que orden y desorden coexisten, presentan *"resultados más adecuados para dar sustento a los procesos informativos emergentes, lo que brinda mayor capacidad y flexibilidad adaptativa a dichos sistemas"* (Miramontes, 2000).

Por otra parte, el hecho de que el sistema se encuentre en permanente oscilación entre orden y desorden, facilita la participación de las propiedades intrínsecas tanto de un estado como de otro y asimismo la aparición de

nuevas propiedades emergentes, que en definitiva facilitan la adaptación y evolución del sistema a nuevas configuraciones o estados (Levinson, 1994).

En muchos otros fenómenos naturales no parece haber una relación clara entre causa y efecto (meteorología y sistemas climáticos, el flujo de un torrente, el resultado al tirar los dados, etc.), teniendo todos ellos aspectos impredecibles, y por tanto, las predicciones se realizan en términos de probabilidades, ya que parecen contener elementos aleatorios. Sin embargo, aunque los procesos estocásticos o aleatorios se han asociado siempre a sistemas con un número grande de grados de libertad (cada grado de libertad tiene que ver con cada una de las variables necesarias para la descripción del sistema), existen sistemas deterministas muy simples que pueden generar un comportamiento complejo de tipo aleatorio (Solé, 1996). Un sistema caótico es justamente esto, un sistema determinístico pero imposible de predecir. Aunque esté regido por una sola ecuación, puede generar dinámicas aparentemente aleatorias o erráticas que jamás se repiten, siendo, con todo, impredecible a largo plazo. De esta manera, tras fenómenos aparentemente complicados, puede subyacer un orden oculto.

El comportamiento caótico tiene cuatro características importantes (Almendo, 2000):

- El sistema es determinista, viene gobernado por un conjunto de ecuaciones (o reglas) que definen la evolución del sistema.

- El comportamiento está acotado. El sistema esta variando siempre dentro de unos límites.
- El comportamiento de las variables es aperiódico en el régimen caótico, sus valores no se repiten nunca.
- El comportamiento depende de forma muy sensible de las condiciones iniciales (efecto mariposa). Es decir, dos puntos o estados, en el espacio de fases, muy cercanos entre sí, eventualmente se separarán unos de otros.

Todos estos comportamientos hacen impredecible a este tipo de sistema, dada la imposibilidad de conocer exactamente el valor de todas las variables que determinan su estado en un momento dado. Basta una imprecisión mínima en nuestro conocimiento de las condiciones iniciales para que esta se propague exponencialmente hasta anular toda predicción.

Las predicciones, por tanto, deben basarse en propiedades estadísticas o geométricas, lo cual afecta al método científico tradicional, ya que el procedimiento para verificar una teoría es hacer predicciones y contrastarlas con datos experimentales. También afecta al reduccionismo, que pretende entender un sistema descomponiéndolo en sus partes, ya que un sistema puede tener un comportamiento complicado que emerge en virtud de simples interacciones no lineales entre algunos componentes. La sensibilidad a las condiciones iniciales implica, de alguna forma, la muerte del reduccionismo, cualquier pequeña incertidumbre en las condiciones iniciales crecerá

exponencialmente con el tiempo: por bien que sea conocido el punto inicial, no se puede predecir el futuro para siempre.

Los sistemas caóticos deben poseer estados de equilibrio que son necesariamente inestables (Levinson, 1994). Un sistema está en un estado de equilibrio estable si una ligera perturbación no produce un gran efecto subsiguiente, retornando el sistema a la misma posición de equilibrio pasado algún tiempo. Al contrario, un estado de equilibrio se denomina inestable si al perturbarlo ligeramente, termina por evolucionar enseguida a un estado diferente. Por ejemplo un lápiz puesto en pie, en estado vertical, cae al moverlo levemente, y caído, o sea en posición horizontal, se encuentra en un estado diferente (el resultado de una pequeña perturbación se amplifica). El equilibrio inestable tiene mucho en común con la dependencia sensible: ambos suponen la amplificación de pequeñas perturbaciones (Martín, 2002).

Un ejemplo de la estabilidad caótica es un arroyo turbulento, donde es imposible predecir la trayectoria de una partícula de agua, y aunque es un sistema continuamente cambiante es siempre estable (si se tira una piedra al agua el sistema no se desestabilizará). Otro puede ser la predicción climática, casi imposible de una semana a otra, pero los sucesos meteorológicos se suceden a lo largo de los años con gran parsimonia (Martín, 2002).

La naturaleza parece utilizar el caos de manera constructiva a través de la amplificación de pequeñas fluctuaciones de manera que puede facilitar a

los sistemas naturales el acceso a lo nuevo, por ello, una medida del caos es la entropía, que viene a constituir el promedio del ritmo al que el sistema crea o destruye información (Prigogine, 1984).

Caos, como ya se dijo, no significa desorden absoluto, sino un comportamiento regido por factores determinísticos, pero con un nivel significativo de incertidumbre en la evolución de su comportamiento.

En resumen, los sistemas no lineales, como el clima, son impredecibles, así lo son también los ecosistemas, las entidades económicas, los embriones en desarrollo y, sobre todo, el cerebro. Todos son ejemplos de una complejidad dinámica que desafía el análisis matemático y la simulación. De otro lado, se pueden observar sistemas con un comportamiento global determinístico, y un comportamiento local impredecible. Por ejemplo: se sabe que el ritmo cardíaco de una persona normal en reposo se puede encontrar entre 60 y 100 latidos por minuto, pero es imposible saber, con exactitud, cual será su frecuencia cardíaca un tiempo después de medir esta variable. Este tipo de comportamiento se observa también en sistemas que se encuentran influidos por el azar: factores externos aleatoriamente variables. Los sistemas caóticos operan bajo una amplia gama de condiciones y son adaptables y flexibles, permitiendo a los sistemas habérselas con las exigencias de un ambiente cambiante e impredecible. Muchas patologías del corazón muestran un comportamiento cada vez más periódico, perdiendo variabilidad. Caos aquí sería sinónimo de salud (García, 2003).

### I.3 FRACTALES

Aparecen en las matemáticas hacia finales del siglo XIX. Fue Benoit Mandelbrot quien le dio el nombre y popularizó la nueva geometría fractal, aunque en rigor, ya desde Cantor en adelante muchos científicos venían hablando de esta disciplina pero bajo otro nombre (Clark, 1999).

Vio Mandelbrot (Mandelbrot, 1977), la naturaleza a través de la geometría fractal y en esta, irregularidades e interrupciones que se describían con cierta similaridad, con independencia del tamaño de las estructuras observadas y de la escala utilizada para la imagen, las características generales del objeto observado presentaban autosimilaridad en sus formas.

Un detalle de la estructura que se observa presenta entonces semejanzas que facilitan la descripción del sistema. Una primera imagen puede entregar información y comprensión del resto, pues es una representación reducida pero pormenorizada del todo.

En principio eran curvas o superficies infinitamente plegadas, líneas infinitas compactificadas de forma regular en una superficie finita, superficies no derivables bajo ningún punto, conjuntos de puntos aislados isomorfos a la recta real, ejemplos de objetos no rectificables.

Son innumerables los objetos fractales que se pueden encontrar en todas las ramas del conocimiento, y no únicamente en las relacionadas con la física, las matemáticas o la biología. El mundo macroscópico, el orgánico pero también el inorgánico está repleto de objetos fractales.

Un fractal es una figura geométrica que no se hace más simple cuando se analiza en partes cada vez más pequeñas (Mandelbrot, 1984). A veces las partes reproducen la misma estructura que el todo, en este caso los fractales se denominan autosimilares (un ejemplo corriente sería el de una coliflor).

Las estructuras fractales tienen la característica de ser invariantes a escala, es decir, a todas las escalas a las que podamos observarlo las partes son semejantes al todo.

Así como existen estructuras con geometría fractal, existen fenómenos con características fractales, ya que poseen patrones de comportamiento que se repiten en diferentes escalas de tiempo. Estos fenómenos pueden ser caracterizados con ayuda de las herramientas matemáticas de la geometría fractal.

La naturaleza esta llena de fractales. Una montaña o un árbol. El cuerpo humano, un patrón de terremotos, el cielo un día nuboso, una costa, las ondas sobre la superficie del océano, patrones de vegetación, etc., presentan estructuras que no son más simples cuando las examinamos aumentándolas al "microscopio". En el cuerpo humano existen muchas estructuras con

geometría fractal, como la red vascular, el árbol bronquial, la red de neuronas, la mucosa intestinal, la disposición de las glándulas. La importancia de la geometría fractal en el organismo es, sobre todo, que permite optimizar la función de los sistemas ya que tienen una gran superficie de contacto sin ser órganos voluminosos. Lo mismo podemos decir de las raíces de los árboles, las cuencas de los ríos, etc.

La teoría fractal es, por lo tanto, una herramienta válida y útil para el estudio de fenómenos dinámicos, como los que ocurren, por ejemplo, en el cuerpo humano, y permite una aproximación más acorde con la complejidad y la no-linealidad de dichos procesos.

La Dimensión Fractal es un índice matemático con el que se pueden cuantificar las características de los objetos o fenómenos fractales (Mandelbrot, 1984). El término "dimensión", en geometría, se refiere generalmente a la dimensión euclidiana clásica en la que una línea tiene dimensión uno, dos dimensiones conforman un plano y tres dimensiones un volumen. Un punto tiene dimensión cero. Desde este punto de vista un objeto cualquiera, que podamos manipular, tendría dimensión 3. La dimensión fractal es un reflejo de la complejidad del sistema (Martín, 2002).

Sin embargo, los objetos fractales no tienen dimensiones enteras. Por ejemplo, los atractores extraños o caóticos, tienen una dimensión geométrica fractal menor que la del espacio total, donde son posibles todos los estados.

#### I.4 COMPLEJIDAD

A través del tiempo, la ciencia se ha planteado de donde proviene el orden del mundo que habitamos, un mundo que no es de componentes físicos que interaccionan al azar ni una mezcla desordenada de entidades, sino un medio donde la energía y la materia están dispuestas según una compleja y progresiva organización jerárquica, un mundo en movimiento y en evolución donde la materia aparece organizada a diferentes y variados niveles. La evolución cósmica se caracteriza por un creciente orden y organización: el primer orden a partir del big-bang, o caos original, quedó establecido con la dispersión de enormes cantidades de energía primigenia y la "creación" de las fuerzas primordiales que la gobiernan; luego vino el segundo nivel de orden, la transformación de energía en materia, y luego la aparición de las estrellas y las galaxias. Ya formado el planeta Tierra, apareció el orden de la química inorgánica primordial, que luego dio paso al orden de la química orgánica, y éste al orden de la biología, a la aparición de la materia viva. La vida evolucionó para dar lugar a la vida inteligente, y ésta a la conformación de organizaciones sociales, o sea al orden social, cuyo progreso en gran parte está determinado por la tecnología (Martín, 2002).

La noción de complejidad no está todavía bien delineada. Las ideas que hay bajo este concepto son muchas veces difusas y cambian según los autores. Los sistemas complejos ideales son básicamente biológicos o

sociales: cuerpos, agrupamientos, sociedades, culturas. De entre todas las posibles definiciones destacamos la siguiente:

*"Los sistemas complejos están formados por un conjunto grande de componentes individuales que interactúan entre sí y que pueden modificar sus estados internos como producto de tales interacciones. Tales sistemas pueden ser estructuralmente simples, aunque tal simplicidad no impide que exhiban comportamientos dinámicos diversos y no triviales. Los sistemas complejos pueden situarse en regímenes críticos caracterizados por la presencia de fluctuaciones espaciales y temporales en todas las escalas posibles. Esta situación de criticalidad puede alcanzarse de manera espontánea y sin la intervención de factores o fuerzas externas al sistema, se habla entonces de un proceso autoorganizado. El proceso de interacciones puede generar comportamientos colectivos y globales. Es decir, conductas que no están definidas en los elementos individuales; pero que emergen como un proceso colectivo y que no pueden ser reducidas ni explicadas tomando aisladamente a los elementos constituyentes" (Martín, 2002).*

Ejemplos: Una ciudad, una célula, la bolsa de valores, un grupo humano, los terremotos, un ecosistema, el corazón, etc.

Las propiedades más típicas y sus relaciones con otros conceptos son las siguientes (Jirsa, 2004):

1. Los sistemas complejos contienen muchos constituyentes que interactúan de manera no lineal.

Sin interacciones nada puede suceder en un sistema, ninguna estructura emerge, ni es posible proceso alguno. Las interacciones no lineales acoplan las dinámicas de cada componente del sistema tan fuertemente que la propia naturaleza de los componentes puede cambiar, o cuando menos, se hace muy difícil considerar cada componente como una entidad separada. De esta manera una perturbación en la dinámica de un componente, aunque sea pequeña, puede producir rápidamente un efecto dominó que se propaga a través de todo el sistema siendo difícil predecir como acabará, pudiendo dar lugar a cambios irreversibles. Así, incluso pequeños cambios en la organización o configuración del sistema pueden dar como resultado cambios profundos en las propiedades del mismo.

La no linealidad es necesaria para que se dé el fenómeno del caos, pero no todos los sistemas caóticos son complejos. El caos sucede con pocos constituyentes, la complejidad no. No debemos confundir caos y complejidad. Un objeto fractal obtenido matemáticamente, aunque sea elemental, puede parecer muy complejo, pero no es a este tipo de complejidad geométrica a lo que nos referimos aquí como sistema complejo. Caos y complejidad si tienen en común la propiedad de no linealidad. Todo sistema no lineal, en general, es caótico alguna vez, y por tanto, la complejidad implica la presencia de caos. La inversa no es cierta. En la complejidad hay muchas ideas que no tienen que ver con el caos. La teoría del caos tiene una base matemática bien establecida y su fenomenología está bien determinada. La complejidad no. No es una realidad matemática. Es más teórica o especulativa, más de

tipo físico, en ocasiones más cualitativa, aunque puede admitir tratamientos matemáticos, incluso se habla de la necesidad de nuevas herramientas matemáticas.

## 2. Sus constituyentes son interdependientes.

Si algún porcentaje de los constituyentes es extraído, probablemente lo que suceda a partir de allí no sea muy grave. La variación de algunos (o tal vez todos) de los parámetros desencadenará cambios consecutivos en el resto de los constituyentes, pero sólo cambiarán un poco, por lo que al final, lo que queda se parece mucho a lo que había originalmente. En este caso, a pesar de que son muchos los cambios, los mismos no son significativos para el sistema. Por el contrario, ese mismo porcentaje aplicado en los constituyentes para otros sistemas, puede provocar cambios mucho más espectaculares y definitivos que alteren la estructura y el funcionamiento del sistema.

## 3. Poseen una estructura que abarca varias escalas.

Si observamos la estructura de una sociedad, observaremos que esta tiene, casas, comunidades, poblados, ciudades, regiones, países, etc. Cada uno de estas partes de la estructura superior cumple un rol definido y específico dentro de la globalidad, y cada uno lo hace a escalas diferentes entre sí. A cada escala encontramos una estructura. Al elegir una escala para

estudiar un fenómeno, las interacciones subyacentes se promedian y no se manifiestan individualmente como tales, sino como un campo de fondo.

4. Un sistema complejo es capaz de producir comportamientos emergentes.

Cuando en algunas escalas, aparecen ciertos comportamientos que no se pueden interpretar ni estudiar de forma separada o aislando el comportamiento individual de cada uno de los constituyentes, se está frente a un fenómeno emergente.

Cada uno de estos elementos puede constituir un sistema complejo en sí, de modo que a una escala respectiva se pudiera comprobar dicha situación, pero si este, está siendo considerado como parte constituyente de otro sistema global superior, habrá de ser visto en la interacción con otros elementos constituyentes y la creación de nuevos fenómenos o emergencias. Hay propiedades emergentes que no dependen de la naturaleza microscópica del sistema y se puede entender el comportamiento del sistema sin tener que describir minuciosamente el comportamiento de cada uno de sus componentes. Una colonia de hormigas puede explorar su entorno, construir galerías, decidir la fuente de alimentos y otras tareas de gran complejidad. Consideradas una por una, ninguna puede acometer por si sola tales tareas. El comportamiento social del hormiguero emerge a partir de interacciones entre las hormigas, no siendo reducible a las propiedades de un individuo.

La combinación de estructuras y emergencia conduce a la autoorganización, proceso espontáneo de organización de elementos individuales en estructuras coherentes.

La autoorganización puede definirse como la tendencia constante y espontánea de un sistema a generar patrones de comportamiento globales a partir de las interacciones entre sus partes constituyentes y de las interacciones de estas con su entorno. Debido sólo al entendimiento mutuo entre las partes que conforman el sistema, estas realizan un trabajo conjunto y coherente.

Para tratar de acomodar los seres vivos se utiliza una clase especial de sistemas complejos: Los sistemas complejos adaptativos. Estos sistemas poseen la capacidad de, cambiándose a si mismos, adaptarse a los cambios ambientales. Y también cambiar el ambiente para acomodarlo a ellos mismos. Al evolucionar transforman su entorno, con lo que modifican las condiciones y reglas de cambio, retroalimentación funcional que pone de manifiesto su carácter adaptativo. Entre ellos, muchos se autoreproducen. De alguna manera saben nacer, crecer y morir. Podemos decir, por tanto, que los sistemas complejos adaptativos (no sólo biológicos, también los sociales), tienen una "complejidad adicional" debido a su capacidad de tomar decisiones de forma autónoma, supuestamente basada en la información disponible y a la influencia de factores externos o internos. Las decisiones autónomas son impredecibles excepto en un sentido estadístico.

Los humanos, como la mayoría de los animales, tienen la capacidad de aprender, de adquirir conocimientos sobre su ambiente físico y sobre sí mismos. Único en los humanos parece ser la capacidad de generar nuevo conocimiento, investigando y aplicándolo a la producción de bienes y servicios e innovaciones tecnológicas, que afectan profundamente a su calidad de vida.

5. Los sistemas complejos involucran o implican una interacción entre orden y caos.

Algunos autores mantienen que la complejidad ocurre o se sitúa en la frontera o al borde del caos. Para ello imaginemos una variable de cualquier sistema que tenga algún parámetro de control que puede cambiar dependiendo del ambiente (por ejemplo, la temperatura). La mayoría de los sistemas no lineales no muestran fenomenología caótica para todos los valores de dicho parámetro de control. La frontera del caos sería aquel valor preciso del parámetro de control para el que la naturaleza de la dinámica pasa de un comportamiento a otro. Es como un punto crítico en una transformación de fase, el punto donde las correlaciones de rango largo son más importantes.

Los sistemas complejos aparecen a medio camino entre el orden y el desorden. El orden es necesario para almacenar información y mantener la

estabilidad de las estructuras. Pero se necesita flexibilidad en la transmisión de información.

Parece como si los sistemas complejos, tales como los biológicos, actuaran modificando su ambiente para poder operar tanto como sea posible en ese lugar fronterizo entre el orden y el caos, lugar donde es más probable que ocurra la autoorganización ya que en este punto se dan fuertes correlaciones de largo alcance.

Hay multitud de ejemplos de este tipo de fenómenos: las colecciones de organismos sujetos a las leyes de la evolución, animales, tribus, sociedades, ciudades, estados, equipos deportivos, grandes corporaciones, entre otras.

Recientemente (J. Crutchfield, S. Kauffman, C Langton, en Bak, 1997) han mostrado que la complejidad aparece también en ciertas condiciones especiales, o puntos críticos, en los que tienen lugar transiciones de fase. En estos puntos críticos parece coexistir orden y desorden en los sistemas naturales, coexistencia que conlleva la aparición de estructuras fractales (o autosemejante), que se caracterizan por presentar el mismo aspecto básico a distintas escalas.

Es más, algunos fenómenos complejos como movimientos sísmicos, dinámica de montones de arena, macroevolución, etc., tienden de forma espontánea hacia algún punto crítico, exhibiendo propiedades comunes entre ellos a pesar de su distinta naturaleza. Parece haber elementos en

interacción que amplifican perturbaciones fortuitas, de manera que la amplificación de la perturbación inicial puede provocar grandes cambios: terremotos, avalanchas, etc. siendo los terremotos de poca intensidad, por ejemplo, mucho más frecuentes.

El comportamiento en el punto crítico sigue leyes de potencia. Donde se cumplan leyes potenciales se descubre también la existencia de propiedades fractales. Un ejemplo lo proporciona una selva tropical (Solé et al. 1996), donde las perturbaciones impiden que la competencia entre especies sea "sin cuartel", generándose nuevas oportunidades. La caída de un árbol es una perturbación endógena, que deja un claro en el bosque, por donde entra la luz, cambiando las condiciones de humedad y temperatura en el sitio. A veces la caída arrastra a otros árboles formándose claros de gran tamaño. La dinámica de claros contribuye al mantenimiento de la diversidad. La distribución de tamaño de claros es de tipo potencial, como corresponde a un sistema cerca del punto crítico. La información transmitida se hace máxima en el punto crítico. Para obtener un comportamiento global coherente es preciso, por tanto, que las interacciones entre individuos den lugar a correlaciones que abarquen el sistema entero. Las propiedades de los puntos críticos: no linealidad, emergencia, autosemejanza, se presentan en todos los sistemas complejos.

También la computación, o capacidad de un sistema complejo para captar y procesar información, aparece en la frontera del caos. Los sistemas complejos tienen capacidad para interactuar con su ambiente y procesar la

información recibida, para lo que se necesita cierto orden interno que permita almacenar la información. Es necesario, por otra parte, cierto grado de desorden (flexibilidad interna) para poder manipular dicha información.

Algunos autores creen que la evolución de las especies se desarrolla también en la frontera del caos. Si la vida se encuentra en zona crítica, es la dinámica natural del propio sistema la que impone que los seres vivos que existen no sean todos los imaginables, sino los viables bajo las leyes fisicoquímicas subyacentes a los seres vivos.

El cerebro se considera también un sistema complejo cercano al punto crítico. El estudio de ondas cerebrales parece indicar la existencia de caos determinista. Así, ciertos estados patológicos de la actividad cerebral muestran ondas muy ordenadas o muy desordenadas, mientras que en estados de normalidad convergen ambos aspectos: las ondas son aperiódicas pero permiten, al propagarse por la corteza, sincronizar miles de millones de neuronas de forma ordenada. Se cree que las transiciones de fase pueden desempeñar un papel muy importante en la dinámica del cerebro ( Haken et alli., 1995; Kelso et alli. 1997) que operaría cerca de puntos críticos donde posee la capacidad óptima de manejar y procesar información.

Algunos sicoterapeutas plantean que el inconsciente sería, al operar de modo más desordenado, responsable de capacidad creativa, y el consciente una especie de base de datos ordenada (Almendro, 2000).

En resumen, un sistema completamente ordenado no es capaz de guardar y procesar información. Por el contrario un sistema completamente aleatorio, como un gas, debido a su extrema volubilidad que le impide sustentar alguna estructura coherente, tampoco. Debe darse el orden suficiente para sustentar procesos con una dosis de desorden para poder explorar y adaptarse a situaciones novedosas.

6. Los sistemas complejos involucran o implican interacción entre cooperación y competición.

Muchas de las relaciones que se dan entre los constituyentes de un sistema, se fundamentan en la necesidad de estos de "asociarse" y a la vez competir por un espacio, por alimento o algún otro factor común.

Entendido esto como una interacción entre escalas, es decir, la competición a escala  $n$  es sostenida o alimentada por cooperación a escala  $n-1$ . Por ejemplo, familias que compiten con otras en lo económico, pero cooperan entre sus miembros (mejorando si sus miembros toman parte en las decisiones). Guerra entre naciones y patriotismo local, hormigas, termitas, abejas. Esta dicotomía cooperación-competición parece terminar con viejos conceptos en teoría de la evolución como supervivencia por adaptación, etc.

Un buen resumen se desprende de las palabras de Prigogine (Prigogine, 1984), quien sostiene que las leyes de la naturaleza, no están

todas "dadas" desde el principio, sino que evolucionan como lo hacen las especies. A medida que las cosas se complican, aparecen bifurcaciones, amplificaciones, fluctuaciones y emergen nuevas leyes. "Las raíces de lo biológico se hunden en la materia mucho antes de lo que hubiera podido imaginarse". El papel activo de la irreversibilidad, la creación de un orden por fluctuaciones, el carácter aleatorio de éstas, la historicidad - es decir el papel del pasado- introducido por el orden de sucesión de las bifurcaciones que conducen a una estructura, constituyen un conjunto de notables propiedades de la evolución, características de los sistemas alejados del equilibrio.

## I.5 CRITICALIDAD AUTOORGANIZADA (SOC)

Como se dijo, la complejidad es el problema central de la llamada ciencia de los sistemas complejos y está relacionada con las propiedades que emergen de las interacciones de varios elementos similares. Además, se relaciona con la generación espontánea de orden que se manifiesta en varias escalas temporales y espaciales diferentes a aquellas en las que ocurren las interacciones (Kelso, 1997, 1998, 2001). Se trata, pues, de un orden generado sin la intervención de un control central o de un plan determinado, ya sea en el diseño estructural de los elementos o codificado en los mecanismos de interacción.

Este nuevo orden se conoce con el nombre de autoorganización y se manifiesta generalmente como una ruptura espontánea de simetría, en la que existe formación de patrones donde antes no los había, y por la posibilidad de conductas colectivas altamente organizadas, aún en la ausencia de diseños prefijados.

Los sistemas de la naturaleza en general son ejemplos de un delicado equilibrio, donde orden y desorden coexisten. Es este el balance entre cierta aleatoriedad y autoorganización (Solé, 1993). La evolución es y será un ejemplo caracterizador de este fenómeno.

Fue Bak y colaboradores quien en el 1987 (Bak, 1987) introdujo el concepto de SOC a la paradoja de equilibrio y catástrofe que coexiste en la naturaleza. Propuso que es posible que algunos sistemas dinámicos lleguen

a arreglos dentro de si mismos de manera que siempre se encuentren en algún tipo de punto crítico, sin importar cual fue el estado de partida. Se dice que tales sistemas se "autoorganizan" hacia el punto crítico o que muestran "criticalidad autoorganizada".

Estos modelos se han aplicado en diversos fenómenos de la naturaleza (Haken, 1995 et allí; Haken, 1997, Jeldtoft), tales como, incendios, terremotos y avalanchas, y aunque probablemente no sea la ley universal que algunos han creído ver, parece ser un poderoso e intrigante concepto que potencialmente tiene aplicaciones en una amplia variedad de fenómenos.

La idea básica de los SOC es un gran sistema dinámico que se autoorganiza y es altamente interactivo en sus estados críticos, donde la menor perturbación puede provocar eventos, llamados avalanchas por todos sus lados y de todos los tamaños que ocurren entre eventos conectados causalmente, estos sistemas son autoorganizados, debido a que estas regularidades emergen sin interferencias externas. El sistema exhibe puntuaciones de comportamientos equilibrados, donde periodos de estabilidad son interrumpidos por intermitentes rupturas de su actividad cotidiana (Bak, 1987). Desde el momento en que estos sistemas se presentan como ruidosos por la alta variabilidad de sus comportamientos, los eventos actuales no pueden ser predichos; sin embargo, la distribución estadística de estos eventos si resulta predecible. Si la historia pudiera ser repetida con mínimas diferencias, los resultados serían completamente

diferentes. Algunos grandes sucesos catastróficos podrían ser evitados, pero otros indefectiblemente igual hubiesen ocurrido. No existe una solución instantánea que pueda estabilizar el sistema y prevenir las fluctuaciones. Si el cuadro es el correcto para el mundo real, deberíamos aceptar las fluctuaciones y cambios como inevitables. Ellos son intrínsecos a la dinámica de la biología, la historia y la economía entre otras.

Ocasionalmente se producen cambios radicales, donde perturbaciones pequeñas van creando "avalanchas" que se propagan entre los agentes interconectados desarrollando buena cantidad de reacciones en cadena.

SOC implica una universalidad de fenómenos complejos diversos, en la cual las interacciones entre agentes son las responsables del comportamiento complejo del sistema como un todo, manifestado en cambios puntuales, sistemas con memoria y regularidad estadística de las avalanchas.

SOC en la naturaleza ha sido de gran interés en la investigación en la última década y se ha usado para modelar fenómenos distintos: sistemas mecánicos, evolución de especies, fluctuación en fenómenos económicos de mercado, dispersión de fuegos en el bosque, también las características del crecimiento de escala libre de los sistemas autoorganizados se han observado en compañías manufactureras, poblaciones de pájaros, redes de actores de holywood, papers, etc. (Bak,1997; Neuman,2005) . Lo que todos estos fenómenos parecen tener en común es que las interacciones entre

agentes del sistema incluyen la competición y la cooperación y gobiernan el crecimiento preferencial de propiedades medibles de algunos agentes a expensas de otros.

En mercados financieros, por ejemplo, las típicas distribuciones no normales que caracterizan SOC son un producto de las conexiones económicas que producen incrementos en los retornos para la mayoría de los agentes bien conectados. Todos estos trabajos han conducido a la creencia de que SOC puede ser un principio general de los sistemas complejos en la naturaleza.

Pero el ejemplo arquetípico de un sistema SOC es el montoncito de arena (sandpile). Si se añade arena seca sobre otro montón, se formará un apilamiento que permanece con el mismo ángulo sobre todas sus caras. Después de alcanzar este punto crítico, aunque se continúe poniendo arena el ángulo del montoncito no cambia, sino que pequeñas reacciones en cadena ocurrirán entre granos las que tendrán un comportamiento de verdaderas avalanchas (Bak, 1993).

La pila de arena cuando esta caracterizada por estos deslizamientos intermitentes es un sistema SOC y como los hay de todos los tamaños, el sistema, se dice, muestra independencia de escala en términos de la actividad dinámica, lo que significa que no hay tamaño de avalancha típico. En efecto, mientras más tiempo pasemos viendo un sistema SOC, mayores posibilidades de que se produzcan avalanchas.

agentes del sistema incluyen la competición y la cooperación y gobiernan el crecimiento preferencial de propiedades medibles de algunos agentes a expensas de otros.

En mercados financieros, por ejemplo, las típicas distribuciones no normales que caracterizan SOC son un producto de las conexiones económicas que producen incrementos en los retornos para la mayoría de los agentes bien conectados. Todos estos trabajos han conducido a la creencia de que SOC puede ser un principio general de los sistemas complejos en la naturaleza.

Pero el ejemplo arquetípico de un sistema SOC es el montoncito de arena (sandpaille). Si se añade arena seca sobre otro montón, se formará un apilamiento que permanece con el mismo ángulo sobre todas sus caras. Después de alcanzar este punto crítico, aunque se continúe poniendo arena el ángulo del montoncito no cambia, sino que pequeñas reacciones en cadena ocurrirán entre granos las que tendrán un comportamiento de verdaderas avalanchas (Bak, 1993).

La pila de arena cuando esta caracterizada por estos deslizamientos intermitentes es un sistemas SOC y como los hay de todos los tamaños, el sistema, se dice, muestra independencia de escala en términos de la actividad dinámica, lo que significa que no hay tamaño de avalancha típico. En efecto, mientras más tiempo pasemos viendo un sistema SOC, mayores posibilidades de que se produzcan avalanchas.

Los sistemas SOC evolucionan hacia estados críticos complejos, esto es entre orden, donde el sistema es estable y caos, donde pequeños cambios pueden producir grandes avalanchas sin interferencias externas, en consecuencia, existen en un estado estable entre el régimen caótico y el régimen ordenado y cuando son perturbados regresan a este estado de estabilidad. Una montaña de arena justo en su comienzo es relativamente ancha y una perturbación no causa deslizamientos, solo cuando la pila alcanza un estado crítico uno o dos granos pueden producir un deslizamiento. Los deslizamientos reducen la pendiente de la pila conduciendo al sistema a un estado crítico. Es la interconectividad de los sistemas SOC la causa de las avalanchas de cambio. Un punto apilado a una unidad afecta a otras unidades. Por ejemplo quitar un granito en una pila de arena, provocará que otras caigan. Esta interconectividad conduce a SOC siendo ajustado finamente, por una "mano Invisible" hacia el punto donde las reacciones en cadena ocurren en todos los tamaños de escala.

Comparado a los Sistemas Complejos adaptativos, los fenómenos relacionados con SOC han sido todavía menos explorados. Aunque científicos de la complejidad han sugerido que tales fenómenos existen en sistemas socioculturales hay pocas observaciones documentadas de criticalidad o autoorganización en las ciencias del comportamiento, esto es principalmente a que los datos culturales son difíciles de cuantificar y recolectar (Martín, 2002).

Imaginemos un masivo atasco producido entre las miles de personas que quieren ingresar a un concierto o algún evento deportivo y para las cuales hay sólo unas pocas entradas de acceso. Todos los sujetos que están empujando son personas razonablemente inteligentes que se encuentran moviendo y buscando alternativas que les permitan llegar más rápidamente al sector de las acomodaciones. Cada uno de ellos tiene diferentes motivaciones e ideas propias, pero a pesar de todo este individualismo complejo para cada caso, el único comportamiento relevante por el cual superar el barullo es acceder al recinto y con ello al espectáculo. La complejidad del atasco surge desde el momento en que todos y cada una de las personas que quiere entrar intentan y reintentan por distintos medios y caminos acceder a la puerta de ingreso a la misma vez. Cada uno usará las normas de convivencia que estime más apropiadas para tales efectos, los unos respetarán la hilera, otros empujarán, quizás habrá quienes se salten los protocolos de ingreso y quieran saltar barreras, etc. pero en definitiva todos querrán cumplir con un mismo objetivo y el resultado será más que la suma de todas estas motivaciones.

Este es un sistema complejo, que surge de la interacción espontánea de miles de sujetos que desean entrar pero no quieren crear un atoramiento frente al ingreso. Esta es la naturaleza de un sistema complejo.

El SOC es un principio que gobierna la dinámica de los sistemas conduciéndolos a un estado complejo caracterizado por la presencia de fractales y distribuciones  $1/p$ . Este estado como veremos es crítico, en SOC la

propia dinámica del sistema es la que lo conduce a un estado libre de escala o autoorganizado (García et alii, 2003).

Aunque la idea de comportamiento complejo emergiendo de sistema de unidades elementales idénticas interactuando unas con otras es atractiva, los sistemas más reales están constituidos de conjuntos heterogéneos de elementos altamente especializados que interactúan unos con otros de manera complicada.

### 1.5.1 AUTOAFINIDAD

Una de las formas con que se puede ilustrar la implicación de una relación  $l_p$  en el tiempo, es el proceso de autoafinidad. Un ejemplo de estructura fractal es útil, una red del drenaje de los ríos sobre un paisaje es una de tales estructuras fractales. Los ríos pueden ser categorizados de acuerdo a su orden de caudal tal que cuando dos pequeños caudales de orden 0 se encuentran forman un caudal de orden 1 y dos caudales de primer orden se encuentran forman uno de primer orden. Muchas redes de ríos naturales el número de caudales de un orden dado se mantiene en una relación  $l_p$  a su longitud promedio. Estas estructuras fractales se dicen autosimilares o independientes en escala debido a que un zoom hacia escalas mas delgadas o gruesas parece estadísticamente el mismo (Flake, 1999). La autoafinidad puede ocurrir también en el tiempo, cuando una serie temporal de eventos muestra la misma frecuencia relativa de eventos grandes y pequeños. En sistema SOC la autoafinidad se demuestra por una

"power spectrum"  $1/f^D$  en los registros de actividad, significando que la magnitud de eventos versus frecuencia  $f$  de ocurrencia obedece a una lp. Para varios sistemas naturales el exponente  $D$  es a menudo cercano a 1. Un espectro de potencia tipo  $1/f^D$  significa simplemente que sucesos grandes son menos frecuentes en el sistema mientras que los pequeños dominan (Martín, 2002).

Algunos de los otros mecanismos con que pueden generar lp y que requieren mención son los conocidos como *highly optimized tolerance (HOT)*, *el ruido coherente* y *las Fragmentaciones*.

El primero (HOT), fue propuesto por Carlson y Doyle (1999) y a grandes rasgos supone la utilización óptima de los recursos para facilitar el funcionamiento del sistema, aprovechando y dándole sentido a ciertos efectos negativos propios del mismo.

El ejemplo característico, y que fue el que utilizaron los autores para crear este mecanismo, es el modelo de incendios forestales, el que se basa en los procesos de percolación. Se supone que un incendio aparece aleatoriamente en una parcela del bosque, pero ahora en cambio, se debe esperar que en vez de que aparezca el incendio de forma casual, los árboles son deliberadamente plantados por un experto en bosques que decide cual es la mejor distribución de estos para optimizar la cantidad de incendios producidos, sujetos a los incendios casuales que comenzarían en cualquier

lugar y momento y de este modo, manejar las distribuciones y evitar la quema indiscriminada, de gran parte o la totalidad, del bosque.

El modelo de *el ruido coherente* fue propuesto por Sneppen y Newman (en Newman, 2005), como un modelo biológico de extinción.

En este mecanismo, un número de agentes o especies está sujeto a presión por varias zonas y cada agente cuenta con umbrales de estrés que pueden soportar, sobre los cuales una nueva aplicación de este irá borrando un agente hasta que las especies llegan a extinguirse. Las especies extinguidas son reemplazadas por unas nuevas con umbrales escogidos aleatoriamente. El resultado final es que el sistema se autoorganiza hacia estados donde más de una especie sobrevive teniendo altos umbrales, pero la distribución exacta depende de la distribución de estrés de una manera muy similar a la relación entre parcelas y frecuencia de fuegos de la *Highly optimized tolerance (HOT)*.

Las Fragmentaciones corresponden a un modelo que se podría ejemplificar de la siguiente manera. Supongamos que se quiebra una barra en dos partes, con una posición que es una fracción aleatoria  $z$  a lo largo de la barra. Después de muchos quiebres, el largo de una de las piezas remanentes será  $\prod_i z_i$ , donde  $z_i$  es la posición de  $i$ th quiebres. Este es el producto de números aleatorios y por consiguiente el resultado de la distribución del largo de la barra sería una  $l_p$  sobre una porción de ese rango. Un mecanismo similar a este y común en la naturaleza sería, por

ejemplo, producir una distribución de  $l_p$  de meteoros y otros fragmentos de rocas interplanetarias, las cuales se rompen al colisionar unas con otras mostrando un comportamiento de ley de potencia (Newman, 2005).

## 1.6 LEYES DE ESCALA (POWER LAWS).

Muchas de las cosas que los científicos miden tienen una escala o tamaño típico, es decir, valor característico alrededor del cual las medidas individuales están centradas. La altura de las personas, la velocidad en km/hr de los autos, las temperaturas en determinadas zonas, etc. son ejemplos de estos valores cuyos histogramas muestran una campana de Gauss.

Pero no todas las cosas medidas tienen valores típicos. Algunos varían sobre una enorme dinámica de rangos, en muchos órdenes de magnitud. Un ejemplo clásico está dado por el tipo de comportamiento de los tamaños de las ciudades y sus poblaciones. Grandes ciudades con mucha población serán considerablemente menos que la gran cantidad de ciudades pequeñas con pocos habitantes.

La distribución de leyes de potencia ocurre en rangos extraordinariamente diversos de fenómenos. En efecto el ejemplo citado de las poblaciones de las ciudades, el tamaño de los temblores, los cráteres lunares, estallidos solares, archivos computacionales, guerras, la frecuencia de palabras usadas en el lenguaje humano, el número de artículos científicos escritos, el número de citas por artículo, el número de éxitos en las páginas web, las ventas de libros, y un amplio número de otras variables que efectivamente siguen una distribución de ley de potencia.

Identificar un comportamiento de  $lp$  en cualquier fenómeno de la naturaleza o en sistemas contruidos por el hombre puede ser difícil. La estrategia estandarizada para observar sus resultados es la siguiente: un histograma de un valor con una distribución de  $lp$  aparece como una línea recta cuando se gráfica como escala logarítmica.

Sin embargo, a veces, el histograma completo muestra que no toda la línea tiene el comportamiento de línea recta, por lo que la observación debe ser cuidadosa y minuciosa respecto de aquellos valores que se encuentran en la zona "ruidosa", con el objeto de no caer en el error de subvalorar todo lo que se encuentra allí contenido. En algunas situaciones específicas se podrá optar por eliminar aquellos datos, pero en otras la información contenida en ese segmento puede que contenga valor sustantivo respecto del comportamiento del sistema observado.

Una solución alternativa es variar el ancho de los intervalos en el histograma. Si se va a hacer esto, se debe normalizar el total de la muestra para ampliar los intervalos allí contenidos.

Se debe considerar también, que una distribución de datos acumulativa puede verse con una línea recta típica de  $lp$  o bien curva al final de la misma, lo que podría ser indicador de una distribución acumulativa con  $lp$  análogas de las llamadas ley de Zipf o ley de Pareto (Newman, 2005).

Anteriormente se habían mencionado una serie de ejemplos de distribuciones acumulativas que siguen un comportamiento de  $I_p$  para fenómenos de distinta índole, entre ellas, físicas, biológicos, tecnológicos, sistemas sociales de varios tipos, etc. El hecho de que los comportamientos en fenómenos tan diversos del mundo natural, se vean expresados a través de un único y simple mecanismo matemático como es la  $I_p$ , hace que se vincule a todos estos sistemas juntos, aunque para el entendimiento común sea inconexos.

En el caso de los sistemas SOC, estos se caracterizan por distribuciones  $I_p$  de eventos o de otras cantidades. Por ejemplo, una distribución  $I_p$  del tamaño de eventos o sucesos sobre un tiempo, significa que el histograma de estos por sus tamaños, no es la familiar curva normal, sino una distribución altamente torcida, tal que la frecuencia decrece rápida y monótonamente desde los eventos menores a los mayores. Como ya se ha mencionado, una cualidad especial de una  $I_p$  es que esta parece una línea recta sobre un gráfico cuando ambos ejes tienen escalas logarítmicas. Matemáticamente una  $I_p$  significa que cierta cantidad  $N$  puede ser expresada como proporcional a alguna potencia de otra cantidad  $r$ . Lo que queda de forma,  $N=C/r^d$  donde  $C$  es una constante y  $d$  el exponente, el que además puede ser un número fraccional.

Este tipo de función es a veces referido como una  $I_p$  debido al exponente alfa, pues cuando la dibujamos sobre una escala doblemente

logarítmica la resultante nos da una línea recta característica de pendiente alfa, de modo que la expresión anterior queda de la siguiente manera;

$$\log(N) = \log(C) - D * \log(r) ,$$

en la que la recta intersecta el eje de ordenadas en  $\log(C)$ . Es costumbre ajustar estas funciones mediante esta recta por el método de mínimos cuadrados (García, et al. 2003).

Las distribuciones  $l_p$  no son ni triviales ni ubicuas. La altura de las personas, el tiempo de vida de estas, el número de tiradas de una moneda, el costo del pan, etc. y todas esas cosas que se distribuyen de forma estadística normal no producen  $l_p$ , pero sí, en cambio se encuentran en muchos diferentes fenómenos tales como economía ecología y física. En la actualidad no hay una teoría universalmente aceptada de porqué ocurren, solo se sabe que SOC es una de las teorías que existen para esto.

Específicamente se observa una ley de potencia en los sistemas que se encuentran cerca de una transición de fase, lugar en que estos se hacen críticos no mostrando ninguna longitud característica y organizándose espontáneamente en fractales, obedecen, además a leyes de potencia cuyos exponentes se denominan exponentes críticos.

Experimentos durante los años '70 y '80 mostraron que exponentes críticos de materiales solo se dan con ciertos valores esenciales pudiendo ser agrupados los que tienen exponentes idénticos en clases. Este principio señala que todos los sistemas que sufren transición de fase caen en uno de

estos conjuntos de clase conocidos como universalidad. En esos años se realizaron trabajos experimentales midiéndose exponentes críticos de materiales: polímeros, metales, fluidos, gases, etc., se esperaba que a cada material correspondería un conjunto con diferencias en sus exponentes. En lugar de ello los materiales parecían agruparse asimismo en clase caracterizados en un único conjunto de exponentes críticos, puesto que estos describen la dinámica de un sistema cerca de una transición de fase continua. El hecho de que exista la clasificación mencionada prueba que comportamientos crítico arbitrario no son posibles. Sólo un número limitado de comportamientos existe en la naturaleza y se conocen como universales porque definen clase disjuntas llamadas, precisamente clase de universalidad.

Cerca de una transición de fase continua un sistema dado no es muy sensible a la naturaleza de las partículas que lo constituyen o los detalles de la interacción que existe entre ellos, en lugar de esto, depende de otras características más fundamentales del sistema, tales como el número de dimensiones de la muestra.

Desde un punto de vista teórico para estudiar un sistema físico, solo se ha de considerar el modelo matemático más simple posible de concebir en la misma clase de universalidad. Producirá el mismo exponente crítico que el sistema bajo estudio.

En este campo la idea intuitiva de que la descripción de un sistema depende de la cantidad de detalles puesto en juego no es cierta.

La transición de fase de agua a hielo es un ejemplo de transición de fase discontinua: la materia súbitamente pasa de un estado más desordenado a uno más organizado (el cambio súbito se acompaña por intercambio de calor latente), (Martín, 2002).

En nuestro estudio estamos interesados en sistemas algo diferentes, aquí los sistemas hacen transiciones entre dos fases diferentes pero lo hacen de una manera suave y continua (sin intercambiar calor latente), son las llamadas transiciones de fase continua.

Para revelar las formas  $1p$  de una distribución, es mejor dibujar el histograma sobre escalas logarítmicas y observar la característica línea recta de la distribución. No obstante, el dibujo no es muy bueno y puede suceder que la parte derecha de la distribución (caso  $D$  negativo), sea ruidosa debido a errores de muestreo, es decir, en esta región los intervalos (bins) en los que se divide la muestra para calcular el histograma contienen pocos valores de la muestra, si es que los hay. En esta región hay fluctuaciones que pueden ser grandes lo que aparece como ruido en la curva.

Como se señaló anteriormente, una manera de tratar con este problema es eliminar los datos de la cola de la curva, lo que no es aconsejable pues a menudo hay información útil en estos datos, pero existe otra alternativa que es variar la anchura de los datos en el histograma  $\alpha x$  y normalizar, es decir, el número de muestras en un intervalo de anchura  $\alpha x$  debe ser dividido  $\alpha x$  para obtener cuentas por unidad de intervalo. La muestra normalizada se hace independiente de la anchura. También puede hacerse un intervalo logarítmico.

Otra manera de plotear los datos es calcular su función de distribución acumulada (CDF o FDA). En vez de plotear un simple histograma de datos, aquí se hace un plot de la probabilidad  $P(x)$  en que  $x$  tenga un valor mayor o igual a  $x$ .

$$P(x) = \int_x^{\infty} p(x') dx'$$

El plot obtenido ya no es una simple representación de la distribución de los datos.

Si la distribución sigue una  $lp$   $p(x)=Cx^{-\alpha}$

$$P(x) = C \int_x^{\infty} x'^{-\alpha} dx' = \frac{C}{\alpha - 1} x^{-(\alpha-1)}$$

de manera que la función de distribución acumulada sigue también una ley de potencia pero con exponente  $(\alpha-1)$  y sobre escala doblemente logarítmica obtendremos nuevamente una recta.

La ventaja en este caso es que no se necesita intervalar los datos para calcular  $P(x)$ , que esta bien definida para cada valor de  $x$ . Esto evita todas las cuestiones acerca del tamaño de los intervalos.

A veces las distribuciones acumuladas se denominan rank/frequency plot, es decir distribuciones acumuladas con forma de  $lp$ , las que a veces se dice que siguen la ley de Zipf o la distribución de Pareto.

La ley de Zipf y la distribución de Pareto difieren una de otra en la manera en que la distribución acumulada es presentada o dibujada. Para Zipf,  $x$  esta en el eje horizontal y para Pareto al revés.

En la práctica debemos estimar  $\alpha$  desde los datos observados y el método más común es por ajuste de la línea recta aunque esto introduce algún sesgo en los valores del exponente.

Pocas distribuciones en el mundo real siguen una  $l_p$  en todo su rango y en particular este efecto es mayor para valores pequeños de las variables que se miden. Por otra parte para cualquier valor del exponente, la función  $P(x)$  diverge cuando  $x$  tiende a 0. Por esto en casos reales debe existir algún  $x_{\min}$ . De esta manera encontramos un cierto juego entre la elección del mínimo valor de  $x$  y por otra parte el problema de pocos datos en la cola final. Se ha de juzgar por tanto, el valor de  $x_{\min}$  sobre el cual la distribución sigue la  $l_p$  y una vez decidido se calcula  $\tilde{\alpha}$  (Martín, 2002).

Una distribución  $l_p$  también se conoce como distribución libre de escala. El perfil o la forma de la distribución es una curva que no depende de la escala sobre la cual nosotros medimos. Este hecho no es solo una curiosidad, hay sistemas que llegan a ser libres de escala para ciertos valores especiales de los parámetros que lo gobiernan. Los puntos definidos por tales valores especiales se conocen como "transición de fase continua" y en tales puntos las cantidades observables en el sistema adoptan una distribución  $l_p$  lo cual motiva el estudio. También hay otros mecanismos que producen comportamientos tipo  $l_p$  no necesariamente transformaciones de fase.

## I.6.1 MECANISMOS PARA LA DISTRIBUCIÓN DE POWER LAWS

a) combinación de exponenciales.

Una distribución bastante mas común que la lp es la exponencial, la cual puede provenir de muchas circunstancias, como por ejemplo, el tiempo de supervivencia para la descomposición nuclear atómica o también llamada distribución de Boltzman (Newman, 2005).

Esta supone que una cantidad  $y$  tiene una distribución exponencial

$$p(y) \approx e^{-ay}$$

La constante  $a$  puede ser tanto positiva como negativa. Si es positiva debe también producir un corte en la distribución – un límite sobre el máximo valor de  $y$  – la cual es normalizable.

Ahora, suponiendo que la cantidad real que nos interesa no es  $y$  pero si alguna otra cantidad  $x$ , la cual está exponencialmente relacionado a  $y$  donde:

$$x \approx e^{by},$$

con  $b$  como otra constante, también ambas positivas o negativas. La probabilidades de distribución de  $x$  es

$$p(x) = p(y) \frac{dy}{dx} \approx \frac{e^{-ay}}{be^{by}} = \frac{x^{-1+a/b}}{b},$$

la cual es una ley de potencia con exponente  $\alpha = 1 - a/b$ .

Una versión de estos mecanismos fue usada por Miller para explicar la distribución de leyes de potencia en la frecuencia de palabras. Este ejemplo supone que si se tipea aleatoriamente sobre el teclado, presionando el espacio bar con probabilidad  $q_s$  por trazo y cada letra con igual probabilidad  $q_l$  por trazo. Si son  $m$  letras en el alfabeto entonces  $q_l = (1 - q_s) / m$ . (en esta simple versión no se tipean puntuaciones, dígitos u otros símbolos no letras), entonces la frecuencia  $x$  con el cual una palabra en particular con  $y$  letras (seguida por un espacio) queda así

$$x = \left[ \frac{1 - q_s}{m} \right]^y q_s \approx e^{by},$$

donde  $b = \ln(1 - q_s) - \ln m$ . El número (o fracción) de diferentes posibles palabras con longitud entre  $y$  y  $y + dy$  queda exponencialmente como  $p(y) \approx m^y = e^{ay}$  con  $a = \ln m$ .

En consecuencia, siguiendo con este mismo argumento, la distribución de palabras toma la forma  $p(x) \approx x^{-\alpha}$  con

$$\alpha = 1 - \frac{a}{b} = \frac{2 \ln m - \ln(1 - q_s)}{\ln m - \ln(1 - q_s)}$$

Para este típico caso donde  $m$  es razonablemente grande y  $q_s$  totalmente pequeño, el resultado da  $\alpha \cong 2$ .

b) Inversa de cantidades.

Supongamos que una cantidad  $y$  tiene una distribución  $p(y)$  la cual pasa por 0, entonces tenemos ambos valores; positivo y negativo. Supongamos

luego que la cantidad que en realidad nos interesa es recíproco a  $x = 1/y$ , la que tendrá una distribución

$$p(x) = p(y) \frac{dy}{dx} = -\frac{p(y)}{x^2}$$

los valores grandes de  $x$ , están en la cola de la distribución, corresponden a valores pequeños de  $y$  cerrados a 0 y los grandes- $x$  de la cola están dados por

$$p(x) \approx x^{-2}$$

donde la constante de proporcionalidad es  $p(y = 0)$

Más generalmente, cualquier cantidad  $x = y^{-\gamma}$  para algunos  $\gamma$  tendrá una ley de potencia en la cola de la distribución  $p(x) \approx x^{-\alpha}$ , con  $\alpha = 1 + 1/\gamma$ .

Se podría argumentar que este mecanismo simplemente genera una lp cuando se asume que la relación lp entre  $x$  e  $y$  genera una distribución lp para  $x$ . Esto es correcto, pero el punto es que el mecanismo toma alguna lp física y la relaciona entre  $x$  e  $y$  - no es una distribución de probabilidad estocástica - desde la que genera una distribución de probabilidades de lp. Esto no es un resultado trivial (Bouchard, Jan et al. y Sornette en Newman, 2005).

### c) Caminos o paseos aleatorios.

Muchas propiedades de los caminos aleatorios son distribuciones de leyes de potencia, y explicarían algunas de las mismas observadas en la naturaleza. En particular, un proceso de fluctuación aleatorio experimenta la

llamada "ruina del jugador" (nombre que proviene de aquel juego de cartas en el que un jugador finaliza cuando queda con nada y no hay posibilidad de acceder a una línea de crédito), y que finaliza cuando este alcanza a cero, teniendo una distribución de  $I_p$  de posible vida.

Considerando un camino aleatorio en una dimensión, en el cual un caminante sigue aleatoriamente un único paso, una vía u otra a lo largo de una línea por cada unidad de tiempo. Supongamos que el caminante parte de la posición 0 sobre una línea y deja la interrogante de que la probabilidad para que el caminante retorne a la posición 0 por una primera vez al tiempo  $t$ . (exactamente después de  $t$  pasos). Esto es también llamado *retorno al primer tiempo* del caminante y representa la vida de un proceso de ruina del jugador.

Para ejemplificar esta aplicación, el camino aleatorio puede ser considerado un modelo simple para la vida de un sistema biológico. Un sistema es una rama de la evolución del árbol, un grupo de especies donde todas descienden por especialización repetida desde un ancestro común. El rango de la línea jerárquica - genes, familia, orden y lo que sigue- son un ejemplo de sistema. Si un sistema gana y pierde especies aleatoriamente durante el tiempo, el número de especies llevará a cabo un camino aleatorio, el sistema llegará a extinguirse cuando el número de especies llegue a cero por primera (y única) vez. (Este es un buen ejemplo de la "ruina del jugador"). Sin embargo, el tiempo en el cual el sistema subsiste, tendría la misma distribución que la vuelta a la primera vez del camino aleatorio.

En efecto, se considera que la distribución de vida generada en los registros de materia fósil sigue una ley de potencia. El más correcto de los datos disponibles coloca el valor del exponente como  $\alpha = 1.7 \pm 0,3$ , lo cual está de acuerdo con el simple modelo de caminos aleatorios.

#### d) Procesos de Yule.

Uno de los más convincentes y ampliamente usados mecanismos para generar leyes de potencia son los Procesos de Yule, los que fueron inventados, coincidentemente, inspirados en observaciones de estadística de sistemas biológicos, al igual que en el caso anteriormente referido de los caminos aleatorios.

En suma, habiendo una (posible) distribución de ley potencia de la vida, los sistemas biológicos también tienen una convincente distribución de ley de potencia. Esta es una distribución del número de especies en género, familia u orden por grupos taxonómicos, que aparecen siguiendo una lp completamente cerrada.

Este fenómeno fue reportado por primera vez por Willis y Yule en 1922 para ejemplificar las plantas florecientes. Tres años después, Yule ofreció una explicación usando un simple modelo que tenía una amplia aplicación en otras áreas. El modelo referido se puede ejemplificar de la siguiente manera:

Se debe suponer primero que nuevas especies aparecen pero nunca mueren, por lo tanto, las especies sólo crecen y nunca desaparecen. Ya esta perspectiva marca una diferencia entre este modelo aquel del camino aleatorio, y ciertamente de la realidad. Esto porque en la práctica todas las especies y todos los géneros llegarán a extinguirse, pero no obstante, nos permite perseverar; Esto sin embargo, le da mucho valor al modelo de Yule.

Las especies se suman al género por especialización, la división de una especie en dos, lo cual se sabe que pasa por diferentes mecanismos, incluyendo la competición por los recursos, separación espacial de poblaciones de cultivo y tendencia genética. Si asumimos que esto pasa en alguna velocidad estocástica constante, lo que sigue es que un gene con  $k$  especies tiene alguna oportunidad por unidad de tiempo de dividirse en dos. Permite entonces suponer que ocasionalmente, cada  $m$  eventos de especialización, se produce una nueva especie, por casualidad, suficientemente diferenciadas de los otros géneros, que son considerados los miembros fundadores de todo un nuevo género (Yule en Newman, 2005).

e) Transiciones de fase y fenómenos críticos.

Este mecanismo ha recibido gran atención las últimas décadas. Algunos sistemas tienen solo una única longitud de escala, tiempo de escala o tamaño de escala microscópica que los gobierna. Bajo ciertas circunstancias estas longitudes de escala pueden divergir dejando al sistema sin ninguna escala y por tanto libre de escala siguiendo por tanto la distribución de las

cantidades microscópicas una pl. Las circunstancias bajo las cuales se produce la divergencia son muy específicas y los parámetros del sistema han de ser ajustados de manera muy precisa para producir el comportamiento lp. Esto hace la divergencia de las longitudes de escala fenómenos muy improbables y por tanto no útiles como explicación para la generación de distribuciones lp. El punto preciso en el cual la longitud de escala en un sistema diverge es llamado punto crítico o transición de fase mas específicamente una transición de fase continua. Las cosas que sucedan en la vecindad de una transición de fase continua se conocen como fenómenos críticos.

## 1.6.2 ZIPF – MANDELBROT

En 1953, Benoit Mandelbrot, encuentra una expresión general de la ley de Zipf, la cual explica pequeñas diferencias entre ésta y los datos lingüísticos reales, que en su momento dieron origen a la ley de Zipf, fundamentalmente con aquellos datos que debían ser ajustados en el sector de la curva perteneciente a las palabras con menor frecuencia (Vogt, 2004). La ley de Mandelbrot es, por lo tanto, una generalización de la ley de Zipf, de forma que da cabida a leyes igualmente invariantes de escala pero más generales. Si el rango de un suceso es  $r$ , esta ley se puede escribir

$$f(r) = \frac{1}{(r + a)^n}$$

donde  $\alpha$  es una constante y  $n$  el exponente que caracteriza ley. En el caso de la ley de Zipf original,  $\alpha = 0$  y  $n = 1$ .

Este es un ejemplo sencillo y muy claro. Es quizá un poco menos evidente el estudio de autosimilaridad temporal, de las leyes de escala del tipo  $1/f^\beta$ .

El carácter universal de esta ley explica la gran cantidad de aplicaciones en diversos ámbitos y diferentes áreas de estudio, tales como; diversidad biológica, distribución de tamaños de las ciudades, distribución de terremotos, etc.

En el estudio de la mayoría de estos sistemas previamente citados, la ley de Zipf,  $N(x) = a/x^b$ , aparece naturalmente, por lo menos en parte de los análisis. En la ley de Zipf,  $a$  y  $b$  son constantes, y  $x$  es la variable independiente. Para dar un mejor ajuste a gran parte de los datos, y basados en la información teórica, Mandelbrot propuso  $N(x) = a/(c+x)^b$  como una generalización de la ley de Zipf, con  $a$ ,  $b$ , y  $c$ , siendo constantes.

La distribución Zipf-Mandelbrot también aparece en el contexto de una mecánica de generalización estadística propuesta tiempo atrás y reescrita así

$$N(x) = N_0 [1 - (1 - q)\lambda x]^{-\frac{1}{q}},$$

donde  $N_0$ ,  $\lambda$ , y  $q$  son parámetros reales.

En suma, esta función satisface cualquier anomalía de deterioro de la ecuación,

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{N(x)}{N_0} \right) = -\lambda \left( \frac{N(x)}{N_0} \right)^q$$

el parámetro  $q$  puede ser considerado como una medida de cómo se deteriora la anomalía. En particular, la ecuación se reduce al deterioro exponencial común,  $N(x) = N_0 \exp(-\lambda x)$  en el límite  $q \rightarrow 1$  (Malacarne, 2000).

### I.6.3 DISTRIBUCIONES LIBRES DE ESCALA.

Como se ha dicho, una distribución de  $lp$  es también llamada distribución libre de escala, fundamentalmente debido a que estas leyes de potencia no presentan escalas características, se puede decir entonces que cualquier escala la vemos como la misma.

Esto en términos matemáticos supone que si tenemos alguna probabilidad de distribución  $p(x)$  para una cantidad  $x$ , y suponemos también que descubrimos o por alguna razón deducimos que satisface la propiedad que

$$p(bx) = g(b)p(x),$$

para cualquier  $b$ . Esto es, si incrementamos la escala o las unidades para la medida  $x$  por un factor de  $b$ , la configuración de la distribución no cambia, excepto para una constante multiplicativa global.

Por ejemplo, podríamos encontrar que el archivo de una computadora de tamaño 2kB son  $\frac{1}{4}$  de veces tan comunes como los archivos de tamaño 1kB. Encendiendo a medidas del tamaño en megabytes también encontramos que el archivo de tamaño 2MB son  $\frac{1}{4}$  de veces tan común como los de archivo de tamaño 1MB. Por consiguiente, la configuración de la curva de distribución tamaño-archivo (menor para estos valores en particular), no depende de la escala sobre la cual medimos la relación tamaño-archivo.

Las propiedades libres de escala ciertamente no son verdaderas para más distribuciones. Esto no es correcto para el ejemplo de la distribución de exponentes. En efecto, como se ha dicho, sólo es verdadero para un tipo de distribuciones, las leyes de potencia.

Partiendo, entonces, de la ecuación anteriormente descrita  $p(bx)=g(b)p(x)$ ,

dando al primer dato  $x = 1$ , para  $p(b) = g(b)p(1)$ . Entonces  $g(b) = p(b)/p(1)$  y la ecuación puede escribirse como

$$p(bx) = \frac{p(b)p(x)}{p(1)}$$

Entonces la ecuación se supone que es verdadera para cualquier  $b$ , podemos diferenciar ambos tamaños con respecto a  $b$ , entonces

$$xp'(bx) = \frac{p'(b)p(x)}{p(1)}$$

donde  $p'$  indica la derivada de  $p$  con respecto con respecto al argumento.

Ahora vemos  $b = 1$  y entonces

$$x \frac{dp}{dx} = \frac{p'(1)}{p(1)} p(x)$$

Esta es una simple ecuación diferencial de primer orden, la cual tiene como solución

$$\ln p(x) = \frac{p(1)}{p'(1)} \ln x + \text{constant}$$

Dando a  $x = 1$  encontramos que la constante se simplifica  $\ln p(1)$ , y tomando exponenciales de ambos lados

$$p(x) = p(1)x^{-\alpha},$$

donde  $\alpha = -p(1)/p'(1)$ . En consecuencia, como se había dicho con anterioridad, la distribución de ley de potencia es solo una función que satisface los criterios de distribución libre de escala.

Esto resulta más que un hecho curioso. Algunos sistemas llegan a ser libres de escala para ciertos valores especiales de sus parámetros de gobierno. El punto que define para cada valor especial se llama "transición continua de fase" y los argumentos dados implican que en cada punto la cantidad observable del sistema adoptaría una distribución de  $1/p$ .

## CAPÍTULO II

### MATERIALES Y MÉTODOS

#### II.1 MUESTRA Y CRITERIOS DE SELECCIÓN

Los rankings han sido una de las herramientas más utilizadas en el deporte para establecer jerarquías de rendimiento y/o establecer resultados entre diferentes competiciones que no se celebran simultáneamente. Es tal la importancia que la elaboración de los mismos constituye una de las acciones básicas de las federaciones deportivas (especialmente las de los deportes individuales) y un elemento fundamental para sus estructuras técnicas (por ejemplo las secretarías técnicas).

Por este motivo, año tras año se publican, a nivel local, nacional o internacional, ranking cada vez más fiables y precisos, a los que poco a poco se les van añadiendo mayor cantidad de informaciones (velocidad del viento, altura topográfica, entre otras), las que enriquecen significativamente sus contenidos y permiten una comprensión mayor de las circunstancias en que afectaron en cada momento de obtención del registro. Esto nos permite disponer de marcas de referencia que han sido estandarizados por los reglamentos oficiales de la IAAF, excluyendo aquellos que presentaban dudas en cuanto a las condiciones en la que los mismos habían sido obtenidos (competición oficial, jueces oficiales, condiciones reglamentarias oficiales, cronometrajes electrónicos, etc.).

Todo ello nos proporciona una interesante base de datos con los que elaborar con gran fiabilidad los ranking necesarios (por marcas y/o por atletas) a los que aplicar los procedimientos metodológicos que han sido seleccionados para la elaboración de este estudio.

En consecuencia, la muestra de nuestro estudio surge del grupo de deportistas más relevantes del universo competitivo (practicantes) que configuran algunas de las disciplinas más tradicionales e importantes del atletismo. De entre ellos utilizamos únicamente la categoría masculina por ser la que mayor número de practicantes tiene, además de ser pruebas en las que estos prevalecen claramente en los registros por prueba y especialmente por ser la que antes se incorporó a la práctica sistematizada de actividades físico deportivas.

En este caso, se utilizaron los ranking mundiales all-time actualizados a 30 de octubre del 2003. Para ello, se elaboró en cada disciplina analizada un ranking lo más preciso posible tratando de abarcar el mayor número de deportistas con marcas realizadas dentro de las normas de competición emanadas de la Federación Internacional de Atletismo Amateur (IAAF). Dada la diferente difusión y popularidad de cada una de las distancias utilizadas se hizo preciso reducir el número de deportistas por prueba de acuerdo al criterio que marcaba la distancia con menor número de deportistas censados, aunque como se detalla más adelante, en algunos

casos fue preciso utilizar una marca por atleta y en otros sólo registros con independencia del dueño de esta.

Para nuestro estudio utilizamos las distancias más comunes entre las carreras atléticas que van desde los 60 mts hasta el maratón. Esto supone un total de 12 distancias, las cuales constituyen los calendarios atléticos oficiales al aire libre (8 pruebas), los calendarios indoor (6 pruebas), los campeonatos de ruta de media maratón y maratón y la prueba de 1.000 metros que cada vez es más habitual en meetings internacionales reconocidos por las federaciones oficiales (nacionales e internacionales).

Estos criterios hacen que la muestra analizada corresponda a un pequeño porcentaje del universo total de practicantes en cada una de estas distancias, a partir de cuando fueron incorporadas en los calendarios competitivos desde que conocemos el atletismo moderno, sin embargo, pese a su relativamente pequeño volumen (magnitud), representa con bastante precisión el perfil del deportista que queremos analizar en nuestro estudio.

No siempre se emplearon la totalidad de las marcas, ni totalidad de las pruebas seleccionadas. Así, en la elaboración de las leyes de potencia se utilizó el ranking de las 500 mejores marcas de las distancias de 1.000, 1.500, 3.000, 5.000, 10.000, media-maratón y maratón. Este mismo criterio se utilizó para el estudio de predicción de marcas. Para la determinación de los posibles fenómenos críticos que nos indicaran las diferentes distancias

que engloban a las distintas LP se le añadieron los 500 mejores registro de las pruebas de 400 y 800 metros.

Para el estudio del comportamiento fractal interno de las pruebas (fechas de registro) se utilizaron el mayor número de atletas disponibles en las distancias que van de los 1500 metros al maratón (500).

En tanto, en el análisis de la regularidad por ranking de individuos, se estimó conveniente ampliar el número de datos hasta el valor correspondiente a la posición 1000 del ranking, considerando que para efectos de comparar el comportamiento de pruebas entre aquellas con sólo las mejores marcas y las mismas con todos los registros, era necesario utilizar un mayor número de datos los que luego se proceden a normalizar. En este caso se añadieron los valores de otras disciplinas atléticas (100 metros, 1.500 metros, maratón, salto de longitud, el lanzamiento de peso y salto con pértiga).

Los criterios de aceptación de marca fueron la homologación oficial por parte de los organismos competentes (IAAF y/o Federación Nacional).

## II.2 MÉTODOS

### II.2.1 PROCEDIMIENTOS

El primer paso metodológico para la obtención de información precisa que permitiese contar con los registros de los atletas que participan de las pruebas atléticas en sus diversas modalidades, fue acudir a la página oficial de la Federación Internacional de Atletismo (IAAF).

Posteriormente, aquellos datos que tuviesen características de relevantes para la investigación y para los procedimientos matemáticos, fueron separados e ingresados a una página Excel desde donde ya filtrados normalizados se traspasaron a continuación al estadístico Matlab.

A partir de este momento aquellos valores correspondientes a la velocidad media de la carrera fueron relacionados frente a las distancias recorridas, correspondiendo estas, a las modalidades que van desde los 1.500 metros hasta los 42.195 metros, con independencia del nivel de rendimiento del sujeto (puesto en el ranking mundial). La primera información obtenida correspondió a una ley de escala del tipo:

$$V = cd^{\alpha}$$

en la que  $v$  corresponde a la velocidad media,  $d$  a la distancia y  $\alpha$  y  $C$  a constantes.

Una vez considerados, para este primer paso, sólo los mejores datos del ranking mundial, se procede a representar los logaritmos de estos valores y de este modo transformar la hipérbola decreciente, en línea recta, lo que indica el carácter de leyes de potencia que siguen este tipo de sistemas. Esta equivalencia se muestra de la siguiente manera;

$$\log v = \log c - \alpha \log d$$

Esta representación facilita la apreciación óptima de las diferencias de los datos del modelo además de ciertos agrupamientos.

Producto de esta aplicación, la recta resultante ( $C$ ) corta el eje de la variable velocidad media, lo que la transforma en un indicador de cómo esta decrece conforme baja la posición en el ranking. A partir de esto, se considera que el valor indicado o cortado por la recta sobre dicho eje, corresponderá al Índice de Rendimiento (IR).

El valor de  $C$  corresponde a la ecuación  $C=ai^{-\beta}$

Esta ecuación permite determinar el valor de  $C$  para los puestos  $i$ -ésimo en el ranking.

Para conocer el número relativo de individuos con un valor de IR mayor de  $C(i)$  dado, se intercambian los ejes con la ecuación. El valor se puede estimar a partir de la siguiente ecuación;

$$P(X>C) \approx C^{-u} \quad \text{con } u \sim \frac{1}{\beta}$$

El hecho que ciertas marcas se agrupen en torno a determinados registros, da un indicio de posible comportamiento fractal, lo cual se estima a través de la determinación de la dimensión box-counting. Esta cubre la dimensión fractal en cajas de diferentes tamaños, se utiliza el siguiente procedimiento. En primer lugar se determina un número mínimo de cajas de tamaño  $s$  o  $\varepsilon$ , en que,  $N(\varepsilon)$ ,  $N(\varepsilon) < N$ , para cubrir el set de cajas se reescalará del siguiente modo  $N(\varepsilon) \sim (1/\varepsilon)^D$ . La dimensión box-counting (o capacidad de dimensión) está dado por la ecuación

$$D_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}$$

en que  $D_0$  es la dimensión box-counting,  $\varepsilon$  el tamaño de la caja y  $N$  el número de las mismas.

En este caso el tamaño de  $s$  ( $\varepsilon$ )  $< 1/12$  y el valor de  $D_0$  es 1. Cuando el tamaño de las cajas  $s$  ( $\varepsilon$ )  $> 1/12$ , el valor de  $D_0$  deja de ser proporcional a 1.

En el caso del análisis multifractal  $D_q$ , particularmente para valores  $q < 0$  este resulta extremadamente sensible en regiones de baja densidad. En cambio,  $D_1$  resultó bastante robusta para estimarse en cantidades finitas de

datos. Del mismo modo, aparece  $D_q$  para valores de  $q > 1$ . En este caso se consideró para  $q = 1, 2, 7$ .

El comportamiento multifractal se hace evidente cuando se representan estos valores logarítmicamente y se muestra que  $D_1 > D_2 > D_7$ .

Para efectos de comprobar la aparición de barreras (Devil Staircase) en determinadas zonas de la curva y consecuentemente un proceso multiplicativo binomial, se utilizó el procedimiento matemático común para estos casos, cual es dividir la longitud  $l$  en dos partes iguales, una con probabilidad  $m_0$  y la otra con  $m_1 = 1 - m_0$ , y cada cual dividirla nuevamente, con lo que quedan cuatro segmentos de tamaño  $l/4$  con probabilidades  $m_0m_0, m_0m_1, m_1m_0, m_1m_1$ . Los resultados de la simulación son, para  $m_0 = 0.8$  y para  $m_1 = 0.2$ .

Para buscar las diferencias entre dos distintos tipos de leyes de escala, lo primero fue establecer las mismas entre las mejores marcas por prueba para las disciplinas que van desde los 400 metros hasta los 42.195 metros (maratón) y enseguida aplicar logaritmos a las variables comprometidas. Como resultado, se cruzan dos líneas rectas que se intersecan en un punto denominado de corte. Este punto de transición entre dos situaciones distintas quedan representadas por exponentes críticos diferentes [ $\alpha(an)$  anaeróbico] y [ $\alpha(ae)$  aeróbico]. De modo que,

$$v^1(\text{anaeróbico}) = c(an) d^{-\alpha(an)} ; \log(v^1(an)) = \log(c(an)) - \alpha(an) \log(d);$$

$$v^1(\text{aeróbico}) = c(ae) d^{-\alpha(ae)} ; \log(v^1(ae)) = \log(c(ae)) - \alpha(ae) \log(d);$$

Una vez ajustadas las rectas por el método de los mínimos cuadrados, los resultados son:

$$a(an) = -0.221; \log(c(an)) = 3.550 \quad c(an) = 34.822 \quad R^2 = 0.9995$$

$$a(ae) = -0.074; \log(c(ae)) = 2.523 \quad c(ae) = 12.467 \quad R^2 = 0.9979$$

siendo  $R^2$  el coeficiente de determinación, cuyo valor es muy próximo a 1, lo que indica la bondad del ajuste.

A continuación se hace lo mismo para los puestos 1, 10, 100, 200, 300, 400 y 500. Para cada puesto  $r=1, 10, 100, \text{etc.}$ , se tomaron logaritmos, y mediante el método de mínimos cuadrados, se calculó los valores de  $\alpha$  y  $c$  para cada caso, así como el valor de las coordenadas del punto de corte para cada valor del rango  $r$ .

Los puntos de corte se obtienen resolviendo el corte entre las ecuaciones

$$\log(T) = \log(c(an)) + \alpha(an) \log(d)$$

$$\log(T) = \log(c(ae)) + \alpha(ae) \log(d)$$

y luego haciendo  $y = \log(T)$ ;  $x = \log(d)$ ;  $c1 = \log(c(an))$ ;  $c2 = \log(c(ae))$ ;  
 $a1 = \alpha an$ ;  $a2 = \alpha(ae)$ ; lo que queda

$$y = c1 + a1 x; y = c2 + a2 x;$$

resolviendo para  $x$ , queda  $x = (c2 - c1) / (a1 - a2)$ ; a través de lo cual se puede calcular los de  $y$ .

Este procedimiento se repite para cada uno de los puestos  $r$ .

Para predecir aquellos valores que correspondan a marcas de bajo nivel de ranking, vale decir, 50.000 ó 400.000, por mencionar algunos registros al azar, lo que se hizo fue interpolar a través de un modelo del tipo  $T = c1 r^{g(r)}$ ; siendo  $g(r)$  la función siguiente:  $g(r) = c2 r^{c3}$ , es decir, se usó una función potencial cuya potencia es a su vez otra función potencial. Aquí  $T$  es el tiempo, es decir, los datos de las marcas o tiempos obtenidos, mientras que  $r$  es el rango u orden de calidad de dichas marcas.

La fórmula del modelo queda:

$$T = c1 r^{g(r)}; g(r) = c2 r^{c3}$$

Para ajustar estas ecuaciones a los datos, se ha empleado el método de Gauss-Newton, a través del cual se obtienen intervalos confianza, en este caso al 95%.

El error cuadrático medio (ECM) del ajuste para cada caso es

$$ECM = \sqrt{\frac{\sum(T_i - T_{pi})^2}{N}}$$

en que  $T_i$  son los datos temporales usados, y  $T_{pi}$  son los que nuestro modelo predice y  $N$  es el número de datos.

En lo que respecta a la determinación de valores de rendimiento que se comportan de manera anormal dentro de su nivel y/o prueba se utilizó la técnica de box-plot. Se calcularon, para ello, las diferencias del valor real de cada prueba a la ecuación que se obtuvo al ajustarla por mínimos cuadrados.

Para esto se toman las mejores marcas por prueba se aplica logaritmo para ajustar la recta a los datos y posteriormente se obtienen los errores. La diferencia entre el valor real y el que predice la ecuación de la recta es el valor teórico. En la medida que la prueba se acerca a 0 mejor ajustado queda al modelo.

Para el estudio y la determinación del comportamiento de las marcas, previamente normalizadas, mediante intervalos de frecuencia, en primer lugar se realizó un histograma con la variable número de sujetos versus la variable velocidad. Posteriormente, se divide el número de sujetos por el número de intervalos que interesa para la muestra (5, 10, 20, 40, 60).

Para comprobar a que tipo de ley de escala corresponde, se utiliza la siguiente ecuación,

$$Y = \frac{C_1}{(C_2 + x)^{C_3}}$$

en que  $C_3$  es el exponente, y  $C_1$  y  $C_2$ , son coeficientes mayores que 0.

De modo que si  $C_2 = 0$  corresponde a una ley de Zipf.

Posteriormente se varía  $C_2$  y  $C_1$ ,  $C_3$  se mantienen fijos.

$$y_0 = \frac{C_1}{x^{C_3}},$$

y se varía  $C_2$ ,

$$y_1 = \frac{C_1}{(C_2' + x)^{C_3}}$$

$$y_2 = \frac{C_1}{(C_2'' + x)^{C_3}},$$

al tomar log-log  $y_0$ , se transforma en recta e  $y_1$ ,  $y_2$  se curvan.

De modo que cuando

$$y = \frac{a_1}{x^{a_3}} \Leftrightarrow y = a_1 x^{-a_3},$$

es una recta, vale decir ley de Zipf pura y cuando;

$$y = \frac{a_1}{(a_2 + x)^{a_3}} \Leftrightarrow y = a_1 (a_2 + x)^{-a_3}$$

se curva al final, siendo una ley de Zipf-Mandelbrot.

De manera que  $a_1$  está relacionado con el valor máximo de la prueba. Al estar normalizado será próximo a 1, y consiguientemente mientras más cercano a 1 más Zipf.

## CAPÍTULO III: APLICACIONES PRÁCTICAS

### III.1 LEYES DE POTENCIA Y CARRERAS ATLÉTICAS DE MEDIA Y LARGA DURACIÓN

Kennelly (1906) fue el primero en utilizar las leyes de potencia para relacionar la variable distancia de carrera con el tiempo que se tarda en recorrer la misma, haciendo extensivas sus conclusiones, tanto a los seres humanos como a otras especies animales como es el caso de los caballos.

A partir de este primer intento han ido apareciendo en la bibliografía algunos trabajos de esta índole (Lietzke, 1954; Henry, 1955; López, 1979; Riegel, 1981; Peronnet y Thibault, 1989; Blest, 1996; Chatterjee y Laudato, 1996; Grubb, 1997; Katz y Katz, 1999; Savaglio y Carbone, 2002, entre otros) donde el análisis de las carreras y sus manifestaciones se realizan a partir de expresiones matemáticas similares o directamente derivadas de leyes de potencia.

Algunos de estos investigadores hicieron su estudio enfatizando la importancia de la utilización de leyes de potencia en aspectos fisiológicos. Tal es el caso de Peronnet y Thibault (1989), quienes desarrollan su investigación, a través de un modelo empírico que relaciona la capacidad de rendimiento con algunas características de la producción de energía de los procesos metabólicos. Lo hacen por medio de un análisis matemático en el que aplican un modelo que permite conocer la evolución de la capacidad de

metabolismo anaeróbico, la potencia aeróbica máxima y la reducción del peak de potencia aeróbico con el incremento natural propio de la duración de la carrera. En este estudio describen la cinética del metabolismo aeróbico y anaeróbico al comienzo del ejercicio, además de la reducción de la cantidad de energía proveniente del metabolismo anaeróbico al incrementarse el tiempo de carrera.

Aplican este modelo de  $I_p$  para analizar la evolución de estas variables y la progresión de los récords mundiales de hombres y mujeres a lo largo de periodos de tiempo que comienzan en la primera parte del siglo XX.

Un análisis en la evolución de los tiempos de carrera de los récords mundiales en diferentes disciplinas, tales como carrera, patinaje y natación, es la que en su estudio hacen Chatterjee y Laudato. En esta investigación se comparan los rendimientos entre mujeres y hombres y se observa la modificación que ha sufrido el ratio de la velocidad a lo largo de los años. Encuentran una mejora en la velocidad mayormente de las mujeres en los tres deportes. Si bien es cierto, las marcas expresan un rendimiento superior en los hombres, son las mujeres las que han conseguido un incremento en la mejora de la velocidad más importante. Suponen, asimismo, que la disparidad en los rendimientos disminuye a medida que las distancias crecen, probablemente debido a la mayor participación de las mujeres en todos los deportes desde los últimos treinta años, lo que según estos autores redundaría en que sea razón para observar el incremento en la mejora de la velocidad.

Quizás quienes más han investigado el comportamiento de eventos atléticos y algunas situaciones derivadas de esta, a través del análisis de leyes de potencia han sido Silvan y Leon Katz.

Un primer estudio de estos investigadores desarrollado en 1994, muestra los tiempos empleados por aquellos atletas varones que al año 1992 poseían los récords mundiales en pruebas que iban de los 100 metros a los 200 kilómetros, y los representan con precisión a través de la ecuación  $T=cD^n$ , donde  $T$  es el cálculo del tiempo récord para la distancia  $D$ , y  $c$  y  $n$  constantes positivas.

Posteriormente extienden este estudio en el periodo de 1925 a 1965 en intervalos de 10 y desde 1970 a 1995 en intervalos de 5 años para las distancias que van desde los 100 a los 10.000 metros. Los valores de  $n$  para todos los años considerados se hayan a lo largo de la línea recta con una pequeña curva negativa. Un análisis de la regresión da una ecuación para valores de  $n$  en los periodos comprendidos entre 1925 a 1995. Los valores de  $c$  desde 1925 a 1995 son ajustados a una ecuación cuadrática. Estas dos ecuaciones definen una superficie en un espacio de tres dimensiones [ $\log(T)$ ,  $\log(D)$ , datos] para todos los récords de las carreras en el periodo y las distancias mencionadas.

Demuestran que existe un patrón de comportamiento  $(t - T)/t$  que es una función de los datos que se mantiene constante a lo largo de los 70 años utilizados para este estudio.

En definitiva, sus investigaciones proponen que el estudio de las leyes de potencia puede ser una valiosa herramienta para el conocimiento y aprendizaje de la dinámica de los sistemas.

También Blest (1996) utiliza leyes de potencia en un modelo que considera varias distancias y en el cual define límites entre cada nivel de rendimiento. En este estudio el autor se apoya en el trabajo de Katz y Katz (1994) para realizar un trabajo que si bien es cierto es similar, difiere en la utilización de la variable metros en lugar de kilómetros lo que entrega una información algo más reducida. Para este análisis utiliza los tiempos de carrera (marcas) registrados en la IAAF desde el periodo comprendido entre 1913 hasta 1970 y para selección de los restantes valores rescata la información desde Almanagues Mundiales y Archivos de libros de Guinness. A grandes rasgos se puede decir que utiliza la información de los años 1925 a 1965 en intervalos de 10 años y los valores para 1930, 1940, 1950 y 1960 se obtienen por interpolación. Esto lo hace para demostrar la progresión general de las marcas en intervalos de 5 años.

Henry (1955), en tanto, utiliza un complicado modelo de varios exponenciales que le permite apreciar varios procesos fisiológicos en diferentes distancias, particularmente la transición entre pruebas de

velocidad media y larga distancia para lo cual utiliza un modelo altamente paramétrico de difícil interpretación, sin embargo en este análisis, la velocidad no es una variable apropiada dado que esta es un valor medio producto del resultado entre las distancias y los tiempos.

Riegel (1981), en tanto, considera un porcentaje de la velocidad de los récords del mundo como una medida de rendimiento. Propone que muchos atletas pueden correr al mismo porcentaje de velocidad del récord mundial en diversas distancias.

No obstante, ni los objetivos, ni la metodología, ni las disciplinas o distancias empleadas en cada caso son siempre las mismas en cada uno de estos estudios. Sin embargo, esto mismo demuestra las amplias posibilidades de utilización que tienen las lp en el deporte.

Esto se debe fundamentalmente porque este tipo de comportamiento se da independientemente del tipo de atleta y de sus características individuales.

Como se explicó en un apartado anterior, las lp son muy comunes en los fenómenos de la naturaleza y en otros ámbitos (Schroeder, 1991), terremotos, ecosistemas, distribución de la materia en el universo, población de las ciudades, frecuencia de palabras, citas de artículos de revistas científicas, son entre otros muchos más, algunos de los ejemplos característicos en este sentido. Estos fenómenos están asociados con algún

tipo de función libre de escala, en el sentido de que no presenta escalas características y no se altera el comportamiento básico del sistema a pesar de cambios importantes en algunos de sus componentes. Esto sugiere, aparentemente, la aparición de posibles fenómenos críticos asociados a algún tipo de transición de fase.

Se sabe bien (Binney et al., 1993; Solé et al., 1996) que cambios cualitativos en algunos de las propiedades macroscópicas del sistema se pueden registrar producto de modificaciones adecuadas en los parámetros de control. Estructuras fractales, patrones de dinámica compleja, transferencia óptima de información son algunas de las propiedades que pueden aparecer espontáneamente cerca de los puntos críticos.

Más recientemente, la hipótesis de la llamada Criticalidad Autoorganizada (SOC), ha sido desarrollada (Bak, 1987, 1997; Paczuski et al., 1996; Jensen, 1998), de acuerdo a la forma en que algunos sistemas que operan bajo equilibrio son continuamente llevados por su propia dinámica interna, y posibles interacciones con sus vecinos, hacia estados críticos los que se caracterizan por ser fenómenos libres de escala en alguna manera de transición de fase. Esta teoría provee una idea de la evolución de los sistemas complejos adaptativos. Los sistemas que muestran SOC parecen ser robustos y se adaptan bien a perturbaciones externas, patrones fractales y leyes de potencia son observados en sistemas complejos exactamente en estados críticos. Estos estados críticos son altamente sensitivos a pequeños eventos locales pudiendo provocar grandes

avalanchas de actividad que se propagan a través del sistema (Bak, 1993). Actualmente no está claro que los SOC sea el único posible origen de las distribuciones de leyes de potencia (PLD). Otros mecanismos que también producen PLD han sido encontrados, ambos en el estudio de procesos estocásticos que involucran ruido multiplicativo (Manrubia y Zanette, 1999) y en el conocido como highly optimized tolerance (HOT), el objeto de estudio se focaliza en sistemas que son optimizados por selección natural o por diseños de ingeniería (Carlson y Doyle, 1999; Newman, 2000).

Considerando estos mecanismos, nuestro punto de vista aborda el fenómeno SOC como la interacción de los atletas con diversos factores que afectan y condicionan el rendimiento atlético en carreras: nivel de entrenamiento, experiencia atlética, edad, tipo de competición, incentivos económicos y sociales, universo (número de personas involucradas en la actividad), etc., lo que podría autoconducirlos hacia este tipo de estado. De muchas maneras, el ser humano (y no solamente el deportista) continuamente explora el límite de sus capacidades, tanto físicas, mental o de cualquier otra índole.

Se intenta, por tanto, tratar de descubrir si algún tipo de punto crítico podría alcanzarse en los niveles de rendimiento deportivos como respuesta adaptativa a los adecuados estímulos que se utilizan en la preparación de los deportistas (cargas de entrenamiento, descanso, competición, incentivos, etc.). Para ello es necesario que se apliquen, de forma específica e individualizada, en una secuencia muy bien controlada los adecuados

protocolos de intervención sobre el organismo del deportista. Para los atletas el estado de forma óptima que le permita acceder a su mejor registro personal o a otro que represente un récord en la modalidad, está asociado a un especial estado de funcionamiento interno, físico y mental, diferente al de un sujeto que simplemente se enfrenta a los requerimientos físicos de la vida cotidiana. Las interconexiones e intercomunicaciones entre los diferentes órganos y sistemas funcionales le permiten atender, en estas extremas situaciones, a las especiales demandas de trabajo mediante una respuesta coherente, intensa y sinérgica de cada estructura de su organismo. Este complejo proceso funcional es similar al que se manifiesta en sistemas altamente disipativos que operan lejos del equilibrio termodinámico.

Al describir la muestra, como ya se señaló, la validez de los análisis aumenta cuanto más elevado es el número de atletas que realizan, en condiciones óptimas de competición, cada una de las distancias objeto de estudio. De esta manera, al disponer de un *universo* muestral (población) grande se puede amortiguar al máximo las interferencias derivadas de comportamientos individuales extremos o atípicos. La importancia del universo utilizado se manifiesta cuando hacemos el estudio sólo entre los mejores deportistas de cada distancia atlética, especialmente cuando nos referimos a los valores que constituyen los récords mundiales de cada una de las pruebas utilizadas.

En el presente trabajo se observa este comportamiento cuando sólo usamos como muestra las mejores marcas de los ranking mundiales all-time

en los que se relacionan sólo la mejor marca de cada uno de los atletas que han corrido la distancia.

Los datos presentados a partir de este momento corresponden a los análisis realizados en las pruebas atléticas de medio fondo, fondo y gran-fondo, utilizando para ello las principales distancias de carrera que suelen formar parte de los calendarios atléticos en competiciones oficiales (1500 metros, 3000 metros, 5000 metros, 10.000 metros, media-maratón y maratón). A partir de ahora y en este apartado el valor ( $d$ ) representará a una de estas seis disciplinas atléticas mencionadas. Cuando se relaciona la velocidad media de la carrera frente a las distancias recorridas, con independencia del nivel de rendimiento del sujeto (puesto en el ranking mundial), encontramos siempre el mismo tipo de ley de escala:

$$v(i) = C(i) d^{\alpha(i)} \quad (i = 1^{\circ}, 2^{\circ}, \dots, 100^{\circ}, \dots, \text{etc}) \quad (2)$$

En la que  $i$  representa el puesto que ocupa el deportista en ranking mundial *all-time*, mientras que  $C(i)$  y  $\alpha(i)$  son valores constantes para cada LP correspondiente a cada nivel de rendimiento  $i$ . Por su parte  $d$  representa, como hemos dicho, la distancia de carrera recorrida que en nuestro caso corresponden a las distancias oficiales que van desde los 1500 metros a la carrera maratón (42.195 metros)

Los datos más relevantes del estudio quedan mostrados en las figuras siguientes, mientras que los datos parciales de algunos de los puestos de

referencia que entendemos más relevantes quedan señalados y numéricamente expresados en la tabla que se presenta más adelante. Así, la figura 1 muestra la función y la representación gráfica de algunos ejemplos concretos de rendimiento atlético (para los puestos 1º, 100º, 200º, 300º, 400º y 500º del ranking mundial all-time). En la tabla 1 se dan los valores de  $C(i)$  y  $a(i)$ , resultantes de hacer los ajustes por mínimos cuadrados, para los valores de  $i$  señalados.

En ella podemos ver como los valores de  $d$  disminuyen significativamente conforme disminuye el nivel de rendimiento del deportista, mientras que  $e$ , aunque inicialmente disminuye, en los sujetos de menor nivel de la muestra analizada los valores tienden a estabilizarse. Este comportamiento de las variables mencionadas resulta especialmente relevante a la hora de entender el fenómeno desde la óptica de la complejidad, motivo por el que serán abordados de forma más específica en otro apartado de este estudio.

figura 1

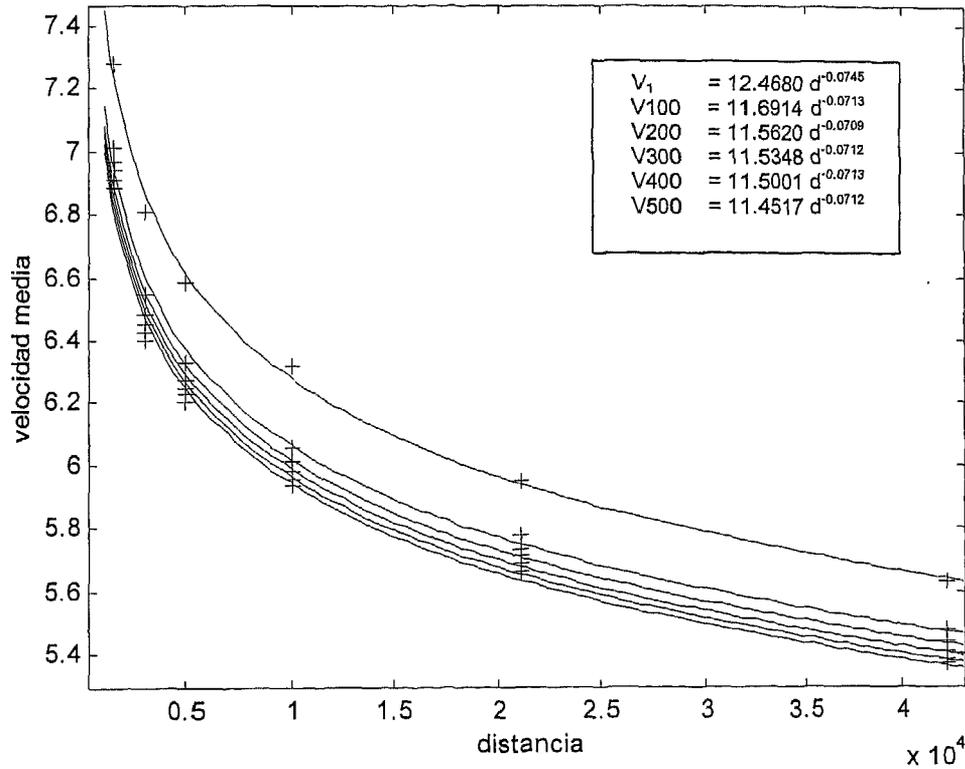
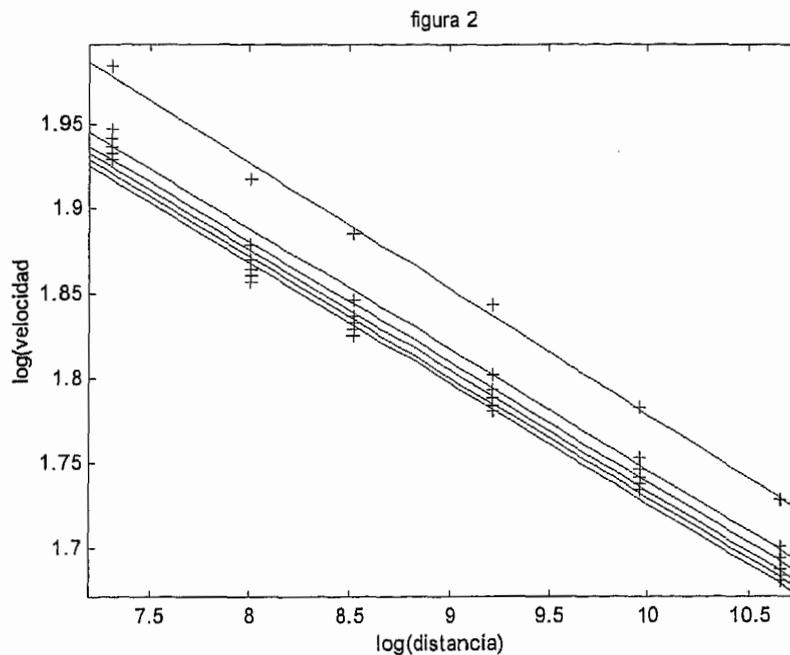


FIGURA 1

Representación gráfica de la ecuación 2 ajustada, para algunos ejemplos concretos de rendimiento atlético (récord mundial, puestos 1º, 100º, 200º, 300º, 400º y 500º).

Destaca también el hecho que la LP de las marcas correspondientes a los récords mundiales al momento de tomada la muestra, se distancian de manera significativa de la LP que corresponde a los registros de los deportistas que ocupaban el puesto número 100 en la misma fecha. Sin embargo, cuando se analizan el resto de registros en intervalos de 100 puestos (200º, 300º, 400º y 500º), las distancias de cada una de sus respectivas LP disminuyen drásticamente. A partir de este momento, podemos observar que las distancias entre cada una de ellas se reducen progresivamente.

La figura siguiente es una representación doblemente logarítmica de los resultados anteriores. Como vemos las diferentes funciones hiperbólicas o potenciales, se han transformado en rectas, apreciándose mejor las diferencias de los datos al modelo y ciertos agrupamientos característicos, que estudiaremos más adelante con técnicas box-plot.



**FIGURA 2**

*Log-log plot con las rectas de regresión para los puestos 1°, 100°, 200°, 300°, 400° y 500° del ranking mundial de todos los tiempos de las carreras atléticas entre 1500 metros y la maratón.*

La tabla siguiente presenta los resultados numéricos correspondientes a las gráficas antes descritas en la que los valores han sido obtenidos para las LP de  $C(i)$  y  $\alpha(i)$  en los puestos 1 a 500 con intervalos de 100. También se muestran los valores de  $r^2$  y el error cuadrático medio correspondiente a las rectas de regresión.

Nivel Ranking (r)	Performance Index (PI)	$\alpha$	Error Cuadrático Medio	$r^2$
1º	12.4680	-0.0745	0.0055	0.9958
100º	11.6914	-0.0713	0.0064	0.9938
200º	11.5620	-0.0709	0.0074	0.9916
300º	11.5348	-0.0712	0.0078	0.9907
400º	11.5001	-0.0713	0.0078	0.9909
500º	11.4517	-0.0712	0.0077	0.9910

TABLA 1

Resultados numéricos para los valores obtenidos de PI (índice de rendimiento), pendiente  $\alpha$ , Error Cuadrático Medio y  $r^2$ , para los puestos 1 al 500 en intervalos de 100.

Se observa como tanto los valores de  $r^2$ , cercanos a 1, como los del error cuadrático, cercanos a cero, indican que los datos están bien representados al ajustar una ley de potencia. Este fenómeno se repite en cada uno de los niveles de rendimientos los cuales representan el puesto que le correspondería en el ranking ( $i$ ).

La siguiente figura representa la evolución de los valores obtenidos para  $C(i)$  y  $\alpha(i)$ , después de ajustar las rectas de regresión en todos los casos considerados:  $i$  desde 1 a 500. Vemos que  $\alpha(i)$  puede ser considerado constante comenzando desde un cierto nivel de rendimiento estimado por nosotros entre los puestos 100º y 150º del ranking mundial. Esto indica que las rectas de regresión que unen los mismos niveles de rendimiento para las distancias analizadas (1500 metros a maratón) pueden considerarse paralelas entre sí, menos en el caso de los mejores resultados.

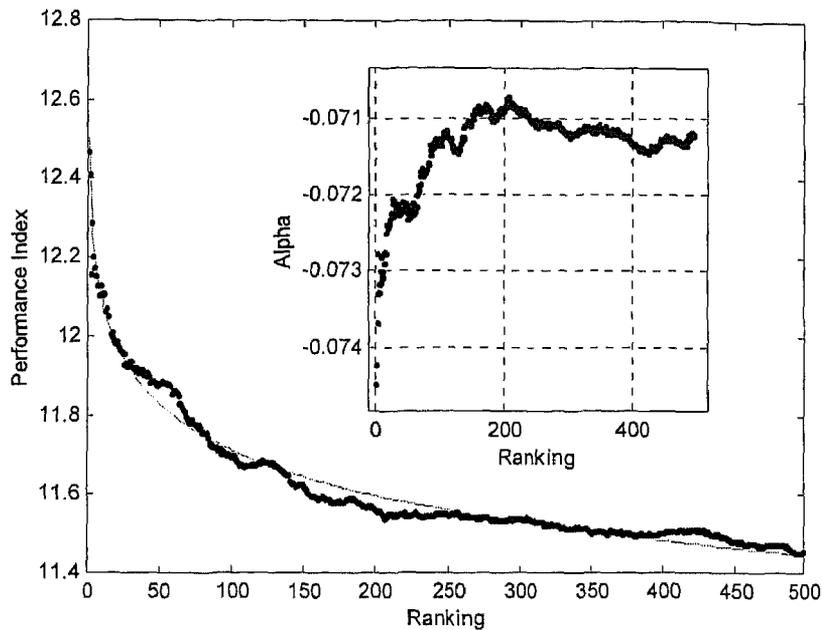


FIGURA 3

Muestra la evolución de los valores  $\alpha(i)$  y  $C(i)$  para todos los valores de  $i$  considerados ( $i=1, \dots, 500$ ).  $C(i)$  muestra también el comportamiento de una ley de escala.

La explicación de la dinámica que presenta el valor  $\alpha(i)$  es compleja y difícil de precisar. No obstante, debemos tener en cuenta que los primeros clasificados de cualquier ranking mundial representan la elite de la correspondiente modalidad deportiva y, por lo tanto, supone ocupar un puesto de privilegio sólo reservado a personas que salen del estereotipo normal del resto de los deportistas. Podríamos pensar que con el paso del tiempo, la utilización de nuevas tecnologías, la aparición de nuevos materiales, el perfeccionamiento de los sistemas de entrenamiento, los avances en las ciencias biológicas y, sin duda, el aumento de la muestra de personas que practican cada una de las modalidades atléticas, modifiquen el valor de  $\alpha(i)$  para las marcas que actualmente ocupan ese puesto, aunque

quizás muestren la misma tendencia al considerar sólo el criterio de puesto ocupado en el ranking.

En dicha figura podemos ver como  $C(i)$  sigue también una ley de potencia, donde la función ajustada a los valores de  $C(i)$  queda representada por el trazo continuo. Aquí  $C = ai^{-\beta}$ , presenta valores de  $a = 12.5564$  y  $\beta = 0.0143$ ; Como quiera que  $i$  es un rango, podemos considerar que la anterior ecuación sigue una Ley de Zipf.

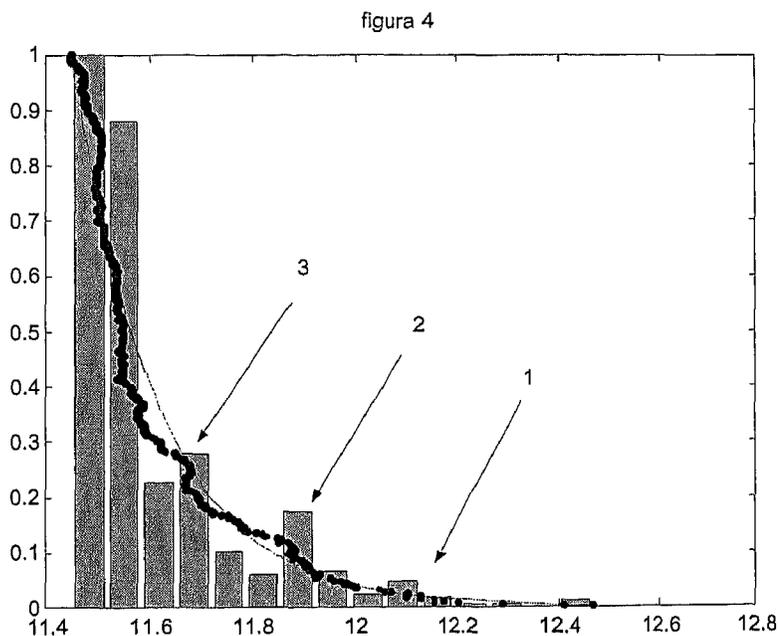
El valor  $\log(C(i))$  representa el punto de corte de la recta de regresión a cada nivel con el eje  $\log(v)$  y, de alguna manera, podíamos considerarlo un indicador de cómo la velocidad media de carrera decrece conforme baja la posición en el ranking mundial. Podríamos definir  $C(i)$  como un *Índice de rendimiento* IR (o PI Performance Index). Así podríamos decir que el valor IR muestra el comportamiento de una ley de escala. Estas ecuaciones nos permiten determinar el valor de  $C(i)$ , es decir, PI para el puesto  $i$ -ésimo en el ranking. Si intercambiamos los ejes en la ecuación  $C = ar^{-\beta}$  y normalizamos los datos, se obtiene una distribución de frecuencias acumulada. Es decir, nos indica cual sería el número relativo de individuos con un valor de IR mayor que uno de  $C(i)$  dado o prefijado, y este resultado adecuadamente estandarizado, se puede presentar como una función de distribución acumulativa (CDF).

En otras palabras, la probabilidad de encontrar un corredor cuya mejor marca  $X$ , en este caso IR, esté incluida entre los 500 mejores de todos los

tiempos, con un  $PI > C$  será aproximadamente proporcional a  $C^{-u}$ . Su valor podrá ser estimado a partir de la ecuación:

$$P(X > C) \approx C^{-u} \quad \text{con } u \sim \frac{1}{\beta}$$

Si dispusiéramos de más datos (>500 por prueba) del ranking, podríamos ser capaces de aumentar los valores de  $i$  para un mayor número de corredores. La figura siguiente muestra este resultado.



**FIGURA 4**

La figura representa, las barreras de evolución de los rendimientos (1, 2, 3), el ajuste (línea continua) y distribución de frecuencias (histograma) del conjunto de datos IR, convenientemente reescalados para permitir visualizarlos como un conjunto de valores relativos y comparados entre sí.

El histograma mostrado en la figura anterior, que es el histograma normalizado de los valores de IR, indica que los valores del Índice de

Rendimiento no se distribuyen siguiendo rigurosamente una ley de potencia (ver línea de puntos y línea continua), de forma que la densidad de puntos (puestos o marcas) no muestra el mismo patrón alrededor de cada punto. En la figura podemos distinguir claramente diferentes áreas (1, 2, 3) que corresponden a la aparición de barreras naturales en la evolución que siguen las marcas en cada una de las disciplinas atléticas de medio-fondo y fondo. Estos puntos podrían pertenecer a niveles de rendimiento determinados, o marcas significativas, hacia las cuales tienden los atletas en su evolución hacia el logro de mejores resultados y en la persecución de los récords.

En este comportamiento, el área señalada con el número 1 de la gráfica correspondería a aquellos atletas que aspiran a posiciones de medalla en las principales competiciones internacionales, o bien aquellos deportistas con serias aspiraciones para entrar en las finales de su prueba y ocupar puestos de privilegio en la misma.

El área 2 indica el Índice de Rendimiento (IR) que correspondería a la marca o barrera de rendimiento para aquellos atletas que podrían llegar ocasionalmente a finales importantes, tener muy serias opciones de entrar en semifinales y que con casi toda seguridad les permitiría entrar entre los 16 primeros de sus disciplina.

Por último, el área 3 de la gráfica representa el nivel de rendimiento de aquellos deportistas con marcas suficientes para participar regularmente en importantes eventos internacionales (marcas mínimas oficiales) como son

los Juegos Olímpicos, los Campeonatos Mundiales o competiciones similares.

El resto corresponde a registros de nivel internacional, no siempre garantizados, y con muchas dificultades para pasar de las primeras rondas en este tipo de competiciones. Un análisis más detallado nos permitiría detectar más barreras o áreas, incluyendo barreras específicas por distancia, las cuales nos permitirían diferenciar con claridad los distintos grupos o niveles de rendimiento en cada prueba.

Posiblemente, ésta dinámica de acumulación de marcas nos está indicando que cada disciplina atlética de medio-fondo y fondo tiene una estructura multifractal que se plasmaría en la aparición de más de una LP en cada prueba. Esto justificaría que al ajustar la correspondiente LP, existan zonas donde el ajuste pierde fuerza y dificulta el determinar los valores exactos de velocidad correspondientes a cada distancia. Especialmente relevante, resulta la situación de los valores más bajos de marcas en cada distancia, donde la LP tiende a sobrevalorar los mismos.

### III. 2 ÍNDICE DE RENDIMIENTO Y ESTRUCTURA MUTIFRACTAL DE LAS CARRERAS ATLÉTICAS DE MEDIA Y LARGA DURACIÓN.

La forma en que se configuran los valores de IR, en torno a determinadas marcas, nos hace pensar en la posible existencia de una estructura fractal subyacente, o incluso multifractal. Que los datos se distribuyan según una estructura fractal significaría que estos se organizan en estructuras autosimilares.

El cálculo de la dimensión fractal  $D_0$  (box-counting) se muestra en la siguiente figura. Aquí,  $s$  representa el tamaño de la caja, para cada partición. La gráfica muestra los valores de  $\log(s)$  contra los valores de  $\log(N(s))$ , donde  $N(s)$  es el número de cajas de tamaño  $s$  no están vacías, del conjunto de valores del IR. La figura muestra como para valores de  $s < 1/12$ , el valor de  $D_0$  es 1. Dado que el número de datos del conjunto es finito, a partir de ir contando cajas de tamaño  $s > 1/12$ , aparecerán cajas vacías, y  $D_0$  deja de ser proporcional a 1, apareciendo una tendencia cóncava en la gráfica. Hemos de decir que si los datos se distribuyeran exactamente siguiendo una ley de potencia, el comportamiento de  $D_0$  sería el mismo.

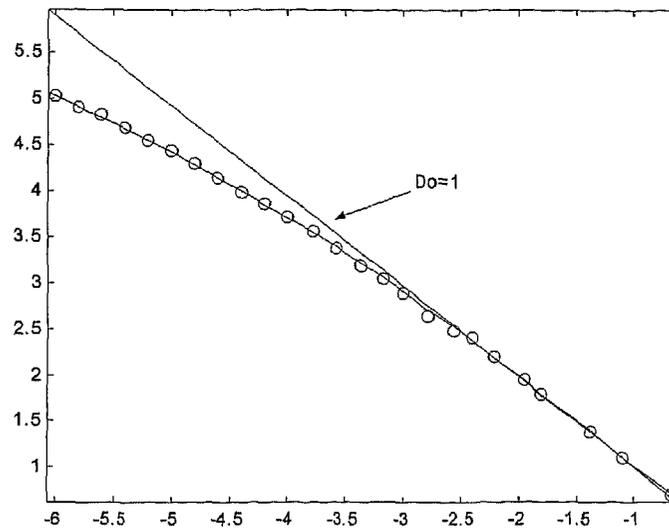


FIGURA 5

La figura 5 muestra el cálculo de la dimensión fractal  $D_0$  (box-counting). Se muestran los valores de  $\log(s)$  contra los valores de  $\log(N(s))$ , donde  $N(s)$  es el número de cajas de tamaño  $s$  del conjunto de valores del IR.

La figura muestra que la distribución es irregular alrededor de cada punto del conjunto, como se ve desde el histograma, y el análisis box-counting sólo reconoce la distribución en ley de potencia.

Un análisis multifractal puede ayudarnos a cuantificar las diferencias entre los comportamientos de los puntos en algunas áreas determinadas. Desafortunadamente, la estimación de la dimensión multifractal  $D_q$ , particularmente para valores de  $q < 0$ , es extraordinariamente sensible en regiones de baja densidad. Sin embargo, la dimensión de información  $D_1$  parece ser bastante robusta cuando es estimada con una cantidad finita de datos.

La dimensión generalizada  $D_q$ , para valores de  $q > 1$ , también aparece muy robusta en los datos que componen nuestro trabajo. En este caso solo consideramos los valores  $q = 1, 2$  y  $7$  para el estudio. La siguiente tabla muestra los resultados numéricos obtenidos para algunos valores de  $q$ ,  $q=1,2,7$  para valores de  $s < 1/12$ , y  $s > 1/12$ , ambos con valores para  $r^2$  y desviación típica (Std) obtenidos de la recta de regresión.

q	s (1/2, 1/12)	$R^2$	Std	s (1/12, 1/200)	$r^2$	Std
1	0.6926	0.994	0.028	0.8448	0.999	0.026
2	0.4918	0.991	0.024	0.8018	0.998	0.032
7	0.3182	0.990	0.016	0.7240	0.993	0.053

TABLA 2

La tabla 2 muestra los resultados numéricos obtenidos para algunos valores de  $q$ ,  $q=1,2,7$  para valores de  $s < 1/12$ , y  $s > 1/12$ , ambos con valores para  $r^2$  y desviación típica (Std) obtenidos de la recta de regresión.

En la próxima gráfica mostramos en una representación doblemente logarítmica (log-log) los resultados obtenidos para el cálculo de estas dimensiones en función de la partición. En ella es evidente la presencia de dos regímenes con una relación lineal y dos diferentes valores para cada  $D_q$ . Estos resultados muestran con claridad que  $D_1 > D_2 > D_7$ , lo cual es un potente indicador de comportamiento multifractal en el conjunto de valores IR analizado.

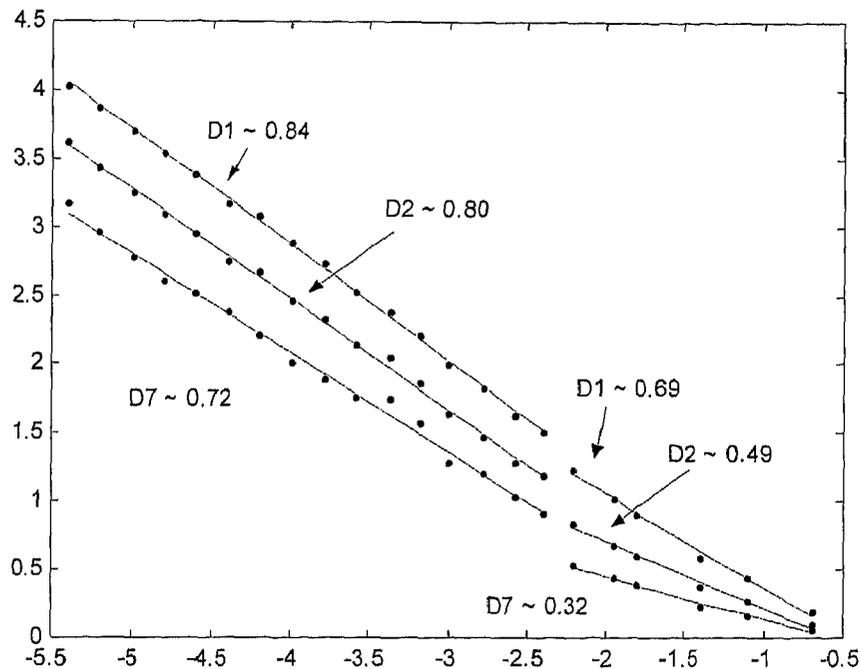


FIGURA 6

En la figura 6 se muestra la representación doblemente logarítmica (*log-log*) de los resultados obtenidos para el cálculo de las dimensiones *box-counting* en función de la partición. Estos resultados muestran los valores para  $D_1$ ,  $D_2$  y  $D_7$ .

Estos resultados nos dejan dos posibles mecanismos que puedan ser los responsables de la aparición de estas leyes de escala y/o estructuras fractales. Por un lado, nosotros podríamos pensar en la aparición esporádica de algunos sujetos capaces de obtener nuevos registros que son claramente superiores a las marcas existentes en una distancia determinada. Estos atletas, o mejor dicho, sus nuevas marcas, podrían definir nuevas barreras que a la larga actuarán como atractores o puntos de referencia para otros atletas. En consecuencia, cuando esto ocurre un nuevo grupo de elite para todas las distancias, quedará definido. Es decir habrá un conjunto de corredores, los nuevos “mejores” o números 1 en el ranking, para cada

distancia, que determinará una nueva ley de potencia, y por tanto un nuevo valor del índice IR.

Por lo que se vio anteriormente, los valores de  $C(i)$  (ver tabla) se van ajustando cada vez mejor a una ley de potencia ( $r^2$  más próximo a 1, y error cuadrático más próximo a cero). La aparición de nuevas marcas tiene, además, consecuencias en la aparición de particulares o novedosos tipos de entrenamiento, la aplicación de nuevas técnicas, la aparición de nuevos incentivos o la incorporación de nuevos conocimientos (información) con origen en otras ciencias relacionadas con el deporte (fisiología, nutrición, etc.).

Podrían estar funcionando como un sistema de avalanchas, produciendo pequeños o grandes *terremotos* en los medios deportivos y manteniendo el sistema en, o hacia, un estado crítico autoorganizado, como los que explicamos y detallamos en la fundamentación teórica. La superación de un récord importante siempre nos abre nuevas posibilidades. Sin embargo, son muy pocos los deportistas capacitados que pueden aspirar a marcas tan relevantes, aunque será toda la comunidad en torno al deporte que se trate (en nuestro caso carreras de medio-fondo y fondo) la que se verá beneficiada de estos resultados y, por lo tanto, las posibilidades de aproximarse o superar estas nuevas fronteras.

Esta forma de evolucionar de las marcas también puede hacerse efectiva en otros niveles de rendimiento, aunque la posibilidad de encontrar

estas barreras disminuirá en frecuencia conforme baja el nivel de rendimiento necesario para obtener una marca. Así, cuando el nivel es muy bajo estaríamos hablando, principalmente, de multitud de barreras individuales, en realidad tantas como personas quisieran afrontar la distancia. Las barreras que pudieran aparecer en estos casos, responderán a la existencia de potentes atractores que modificarán la tendencia y que, casi con toda seguridad, son intrínsecos a todos estos deportistas. Por ejemplo, en marcas extremadamente bajas, el someterse o no a un proceso de entrenamiento actuará como factor desencadenante de la aparición de una barrera. Si aumentamos de forma progresiva el valor de la marca, aspectos cada vez más finos serán los responsables de la aparición de las mismas.

Conforme aumenta el valor de la marca, la aparición de barreras debe ser más frecuente y las causas que la determinan ya no afectan a todos los deportistas, sino que quedan reservadas a grupos de personas con un perfil claramente definido. En estos casos, variables como las marcas mínimas para participar en determinado campeonato, las marcas con un fuerte peso psicológico (ejemplo: barrera de los cuatro minutos en la milla), los avances tecnológicos, los progresos en las ciencias aplicadas (fisiología, nutrición, genética, etc.) y, por supuesto, los récords (locales o mundiales), se convierten en factores determinantes de este comportamiento.

Una forma alternativa de analizar el problema es notando la similitud del comportamiento del IR con la conocida, en el mundo de los fractales,

como *Devil Staircase*. Esto nos hace pensar en un *proceso multiplicativo* subyacente. Veamos un ejemplo matemático que aclare este punto. Un proceso multiplicativo binomial se puede generar de esta manera: Supongamos que dividimos una longitud  $l$  en dos partes iguales. A cada parte se le asignan dos probabilidades diferentes  $m_0$  y  $m_1 = 1 - m_0$ . El proceso es nuevamente repetido por cada uno de los segmentos resultantes, quedándonos cuatro segmentos, de tamaño  $l/4$ , y probabilidades  $m_0m_0$ ,  $m_0m_1$ ,  $m_1m_0$ ,  $m_1m_1$ . De esta manera el proceso se puede repetir indefinidamente.

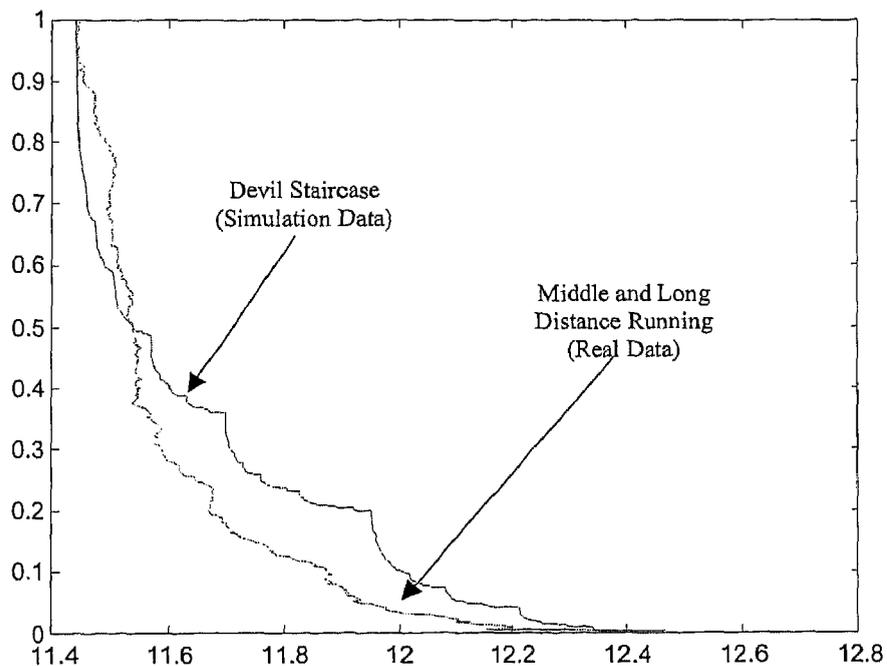


FIGURA 7

La figura anterior muestra los resultados generados en la simulación para  $m_0 = 0.8$ ,  $m_1 = 0.2$  junto a los resultados de CDF del Índice de Rendimiento (IR).

La suma acumulada de las frecuencias resultantes es conocida como una *Devil Staircase* para un *Proceso Multiplicativo Binomial* (Feder, 1988). La figura anterior muestra los resultados generados en la simulación para  $m_0 = 0.8$ ,  $m_1 = 0.2$  junto a los resultados de CDF del Índice de Rendimiento (IR). La semejanza con la función CDF del PI es evidente, particularmente en lo que hace referencia a la formación de las mencionadas barreras.

De una manera sencilla, en el caso de las marcas, el proceso multiplicativo binominal funcionaría más o menos así: En una competición, un corredor tiene una probabilidad  $m_0$  de superar una barrera, y  $m_1 = 1 - m_0$  de no hacerlo, y así podemos seguir construyendo una *Devil Staircase* análoga a la obtenida. Como vemos, es una manera estadística de obtener marcas y barreras. También es un hecho bien conocido (Feder, 1988, Halsey, 1986) que este tipo de procesos multiplicativos genera estructuras multifractales.

### III.3 EXISTENCIA DE DIFERENTES LEYES DE ESCALA EN EL COMPORTAMIENTO DE LA VELOCIDAD EN LAS DISTINTAS CARRERAS ATLÉTICAS.

De lo anteriormente expuesto se comprueba el comportamiento multifractal de las carreras de medio - fondo y fondo, incluso el comportamiento multifractal de cada distancia, pero no es suficiente para conocer el comportamiento global de todas las carreras, desde la más corta a la más larga. El fenómeno es bastante más complejo.

Pensamos que dada la existencia de muy diferentes factores determinantes de la velocidad en cada distancia, deberán existir LP claramente distintas en cada grupo de carreras (potencia, velocidad, resistencia a la velocidad, medio – fondo y fondo). Para comprobar esto, decidimos estudiar, el comportamiento de las carreras de los últimos tres grupos anteriormente mencionados.

Cuando analizamos las carreras de velocidad prolongada, medio fondo y fondo observamos que responden claramente a dos leyes de escala diferentes. Incluso podríamos hablar de una tercera ley de escala que agruparía a las pruebas de más larga duración. Sin embargo, como veremos más adelante, no se ha podido concretar con precisión ésta última, ya que la cantidad de pruebas incluidas en este grupo es pequeña y la diferencia de la LP resultante no es tan clara como las que podemos observar en las otras distancias.

De forma global, podemos organizar las distancias en dos grupos de pruebas diferentes con dependencias energéticas claramente distintas entre sí (pruebas de predominancia anaeróbica frente a pruebas de predominancia aeróbica).

Algunos autores (Savaglio y Carbone, 2002) comprobaron que las carreras atléticas responden a dos leyes de escala con diferentes exponentes críticos que sitúan el punto de inflexión o corte entre los 150"-170". De ser así, la prueba de 1000 metros sería la distancia que mejor caracterizaría este punto que podría ser interpretado como aquel en el que la distancia recorrida mantiene una dependencia equidistante entre ambos metabolismos energéticos (anaeróbico y aeróbico).

Sin embargo, desde un punto de vista teórico, de acuerdo a los valores que podemos encontrar en estudios fisiológicos, la energía total en una prueba de 1000 metros recorrida a ritmo de récord mundial masculino (Ngeny con 2.11.96) es predominantemente aeróbica. Si a esto le añadimos que en sujetos de bajo nivel de rendimiento la duración de la prueba es mayor, encontramos que la dependencia energética aeróbica debería ser aún más alta. No obstante, estos estudios no incluyen aspectos mecánicos que afectan a la velocidad de la carrera y, en consecuencia, a la duración de la misma y la forma en que el organismo utiliza sus aportes energéticos.

Apoyándonos en las propuestas de Arcelli (1976), di Pampero (1986) y Lacour (1990) es posible hacer aproximaciones teóricas sobre el coste energético total o la participación porcentual de cada metabolismo. Según esto, el coste energético de una carrera de 1000 metros corrida al ritmo de récord del mundo es de unos  $205 \text{ ml.kg}^{-1}$  de  $\text{O}_2$ , de los que aproximadamente un 35-40% son suministrados por el metabolismo anaeróbico mientras que el resto, algo más del 60% lo hace el aeróbico. Es decir, existe un mayor peso del segundo metabolismo pese a la elevada velocidad media con la que se realiza la prueba ( $7.58 \text{ ms}^{-1}$ ).

Cuando aplicamos una ley de potencia al estudio de los rendimientos en carreras atléticas vemos que en distancias de aproximadamente 1000 metros, se altera significativamente el comportamiento del resto de las pruebas. Esto podría estar explicado por la importante dependencia (atracción) que, habitualmente, tiene en estas distancias el metabolismo anaeróbico, algo que no ocurre con el resto de distancias atléticas hasta la carrera de maratón. Por esta circunstancia al analizar el comportamiento potencial de esta modalidad deportiva (comportamiento probabilístico) parece recomendable eliminar los valores de esta distancia salvo que estemos hablando de deportistas de muy bajo nivel de rendimiento, especialmente los que corresponden al sexo femenino (tiempos superiores a los 200 segundos).

Estudiando el punto de corte en la gráfica de los logaritmos velocidad-distancia de los dos grupos de pruebas (predominio anaeróbico frente a

predominio aeróbico), vemos que este oscila en función de las distancias que utilicemos como referencia. Tenemos que comprender que siempre estamos hablando de pruebas con dependencia mixta donde intervienen, en diferente proporción, cada una de las vías metabólicas predominantes (aeróbicas o anaeróbicas) de que dispone el organismo humano. En nuestro caso, el análisis lo realizamos enfrentando las distancias de 400 metros, 800 metros y 1000 metros contra el grupo de pruebas que van desde los 1500 metros a la carrera de maratón.

Punto de corte entre pruebas anaeróbicas y aeróbicas a nivel internacional

Nivel (Marca-1000 mts)	Velocidad (m.s <sup>-1</sup> )	Tiempo de Corte (segundos)	Distancia de Corte (metros)
2'14"73 <sub>/100</sub>	7.42	146.19	1085.07
2'19"95 <sub>/100</sub>	7.15	158.03	1129.24
2'21"47 <sub>/100</sub>	7.07	163.04	1152.51
2'22"19 <sub>/100</sub>	7.03	164.55	1157.25
2'22"70 <sub>/100</sub>	7.01	165.22	1157.83
2'23"10 <sub>/100</sub>	6.99	166.05	1160.38
2'23"40 <sub>/100</sub>	6.97	165.79	1156.09
2'23"78 <sub>/100</sub>	6.96	166.83	1160.38
2'24"06 <sub>/100</sub>	6.94	166.98	1159.10
2'24"31 <sub>/100</sub>	6.92	167.02	1157.36
2.27.70 <sub>/100</sub>	6.77	156.59	1060.19
2.32.66 <sub>/100</sub>	6.55	142.64	934.30
2.40.13 <sub>/100</sub>	6.25	128.53	802.72

TABLA 3

La tabla 3 muestra el Punto de corte entre pruebas anaeróbicas y aeróbicas a nivel internacional. Se expresa en nivel, velocidad tiempo y distancia.

Cuando hablamos de atletas de nivel internacional el tiempo de corte es similar al propuesto por Savaglio y Carbone (2002), con valores en nuestro estudio que oscilan entre los 145 y los 170 segundos, lo que equivale a recorrer 1080-1160 metros. A la luz de estos datos el punto de equilibrio energético entre ambos metabolismos responde a pruebas ligeramente superiores a los 1000 metros confirmando sólo parcialmente los porcentajes que se obtienen de forma teórica donde, a nuestro entender, se tiende a sobre valorar el papel del metabolismo aeróbico en el resultado final sobre estas distancias.

Es posible que si en los estudios de dependencia energética de la carrera se añadieran parámetros como las capacidades condicionales (ejemplo: fuerza, los comportamientos mecánicos de las estructuras afectadas (viscoelasticidad, rigidez, etc.), las causas que los pudieran alterar (temperatura, rozamientos, etc.), la movilidad articular, la capacidad de sufrimiento etc., los valores resultantes de estos estudios podrían verse modificados y aproximarse sus valores a los propuestos por los autores antes mencionados. De cualquier forma, esto no es más que una hipótesis que debe ser contrastada en estudios posteriores.

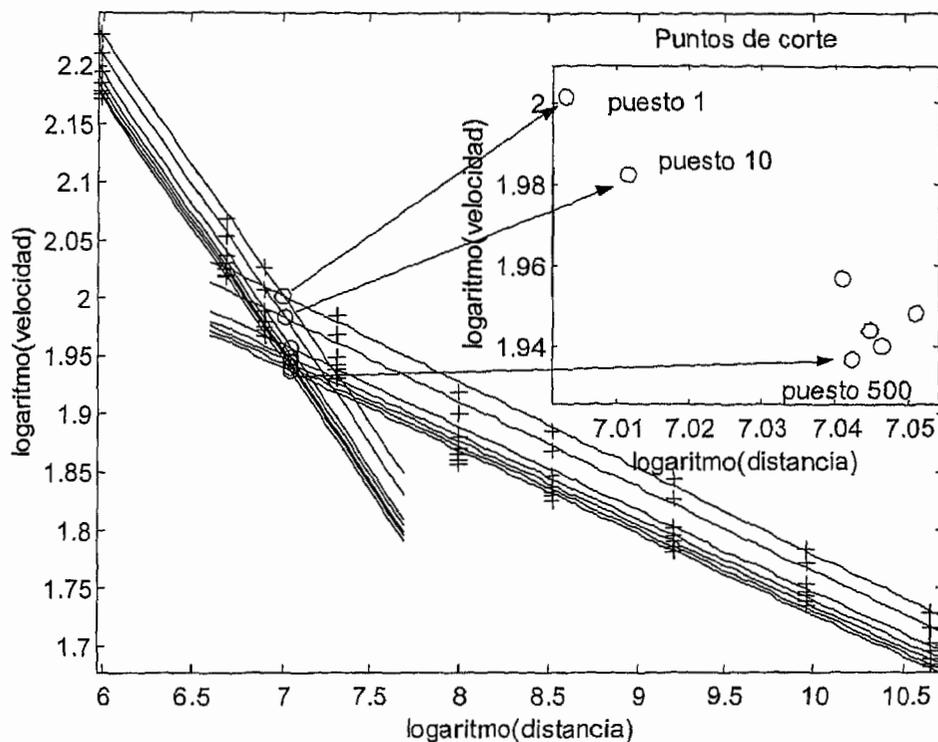


FIGURA 8

La figura 8 muestra las rectas que indican los puntos de corte entre pruebas que podemos considerar como de clara dependencia anaeróbica frente a los de clara dependencia aeróbica para atletas masculinos con marcas de diferente nivel.

Si ampliamos el análisis hasta niveles inferiores de rendimiento (nacional, regional o local) extrapolando, vemos que el punto que marca el equilibrio entre los dos metabolismos energéticos no sigue un comportamiento estable, dependiente entre otros factores del sujeto y de su nivel de rendimiento.

Para analizar el comportamiento de este punto (desplazamiento del punto de corte con el nivel de rendimiento), en primer lugar estimamos, a partir de los valores de que disponíamos del ranking mundial all-time, los valores teóricos de otros puestos más bajos del ranking. Para ello

determinamos, de acuerdo a cada posición teórica en el ranking (i) las marcas potenciales de los registros inferiores de las pruebas de 400, 800 y 1000 metros, siempre apoyándonos en los correspondientes valores de las constantes de su LP. Como referencia para las pruebas de velocidad resistencia (400 a 1000 metros) utilizamos las marcas de la prueba de 800 metros, dando unos valores de 1'50" para el nivel nacional, 1'58" para el regional y 2'07" para el local. Estos valores fueron determinados de forma empírica a partir de los protocolos ya existentes y de diferentes trabajos en los que se perfilan criterios de rendimiento por edades, sexo y/o niveles. El mismo procedimiento lo empleamos en las pruebas de claro predominio aeróbico, pero en este caso utilizamos como referencia la prueba de 1500 metros.

Naturalmente, este punto sufrirá ligeras oscilaciones en función de las pruebas utilizadas para determinar la correspondiente LP (200-400; 200-400-800; 400-800; 400-800-1000 ó 800-1000). Un análisis log-log de las correspondiente LP nos mostrará oscilaciones en la pendiente de la recta, que se manifestarán con valores más elevados de la misma cuanto más dependencia de la velocidad o la fuerza tengan las distancias utilizadas. Lógicamente estas variaciones afectarán al punto de corte.

Una vez realizados estas comprobaciones, se entiende que las distancias más adecuadas para caracterizar el grupo de resistencia a la velocidad deberían ser los 400, 800 y 1000 metros, por ser las que mejor responden a los LP aplicadas.

Analizando la gráfica (log – log) en la que se comparan las pruebas de velocidad resistencia con las de media y larga distancia, vemos que el punto de corte tiene un comportamiento distinto para los corredores de nivel internacional y los de niveles inferiores.

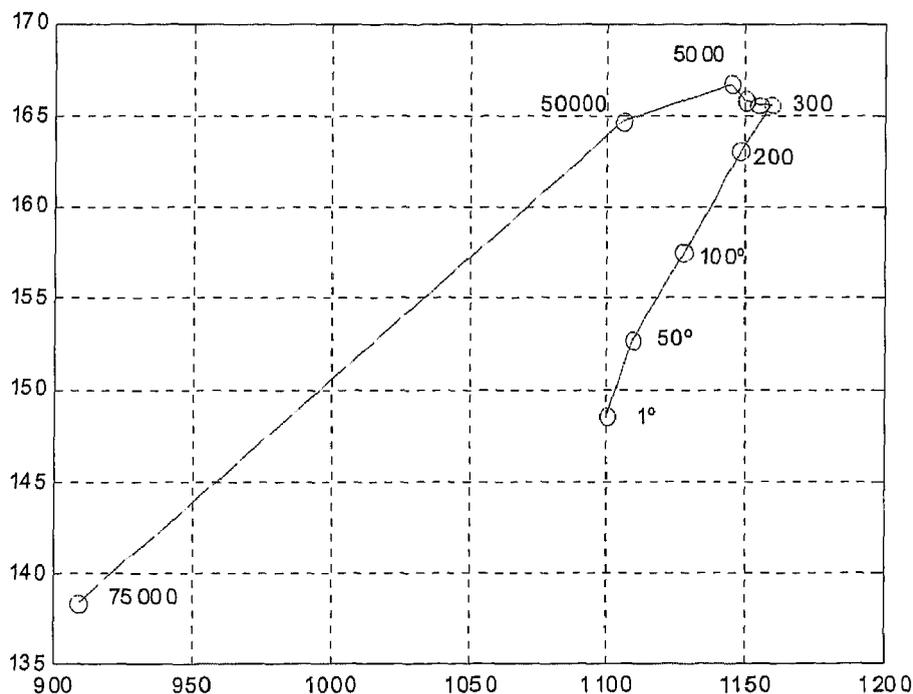


FIGURA 9

Figura que muestra el comportamiento de diferentes niveles inferiores de rendimiento (nacional, regional provincial o local) utilizando los datos de predicción calculados. Se observa la inestabilidad del punto de corte, de acuerdo conforma baja el nivel.

Si analizamos sólo el punto de corte de los niveles más bajos, vemos como se desplaza hacia la izquierda conforme baja el potencial atlético de la marca, lo que nos indica una mayor participación del metabolismo aeróbico sobre el total de energía utilizada sobre la distancia de una carrera de 1000

metros cuanto menor es el nivel de rendimiento del corredor. Esto es algo que ya ha sido demostrado por numerosos autores a partir de estudios fisiológicos de distribución energética. Así, Arcelli (1994) al estudiar la carrera de 800 metros señala que el porcentaje de trabajo anaeróbico láctico varía por cada nivel de rendimiento proponiendo que su participación es de un  $\approx 40\%$  para carreras en las que se emplearon 102" y de  $\approx 15\%$  cuando se tardaba unos 135".

De especial interés resulta el análisis del punto de inflexión entre los mejores especialistas en ambos tipos de pruebas (aeróbicas y anaeróbicas). En este caso, el punto de corte tiende a desplazarse inicialmente hacia la derecha para posteriormente estabilizarse e invertir suavemente su tendencia. Esto significaría que, aún aceptando las diferencias individuales que se pueden encontrar entre los especialistas de cada distancia, las pequeñas diferencias existentes entre los mejores especialistas de 1000 metros, se deben a un mejor aprovechamiento del metabolismo aeróbico.

Esto les debería permitir rendir a muy buen nivel sobre la distancia superior (1500 metros). Tal suposición se comprueba al analizar el ranking mundial all-time sobre la distancia de 1000 metros, donde encontramos entre sus mejores exponentes a corredores como Ngeny (2'11"96<sub>/100</sub> vs 3'28"12<sub>/100</sub>), Coe (2'12"18<sub>/100</sub> vs 3'29"77<sub>/100</sub>), Cram (2'12"88<sub>/100</sub> vs 3'29"67<sub>/100</sub>) o Morcelli (2'13"73<sub>/100</sub> vs 3'27"37<sub>/100</sub>) que son a la vez algunos de los mejores corredores mundiales en 1500 metros de todos los tiempos.

### III.4 APLICACIÓN DE LAS LEYES DE POTENCIA AL ANÁLISIS CARRERAS ATLÉTICAS DE MEDIA Y LARGA DURACIÓN Y DETECCIÓN DE COMPORTAMIENTOS ATÍPICOS (OUTLIER)

Esta parte de la tesis ha sido publicada por la revista *New Studies in Athletics* (2006) y como parte de un capítulo en el libro *Teoría del Entrenamiento Deportivo vista desde la Teoría de la Complejidad* (G<sup>a</sup>-Manso y Martín-González, 2005)

Para poder determinar aquellos valores de rendimiento que presentan un comportamiento anormal dentro de su nivel de rendimiento y/o prueba utilizamos la técnica gráfica conocida como box-plot. Haciendo un análisis pormenorizado de cada una de las pruebas, se comprueba que entre los mejores especialistas de cada uno de ellas suelen aparecer corredores que con sus registros presentan niveles de rendimiento que se escapan de la normalidad de datos estudiados. Esta situación no se da de la misma forma y en la misma proporción en cada una de las distancias estudiadas.

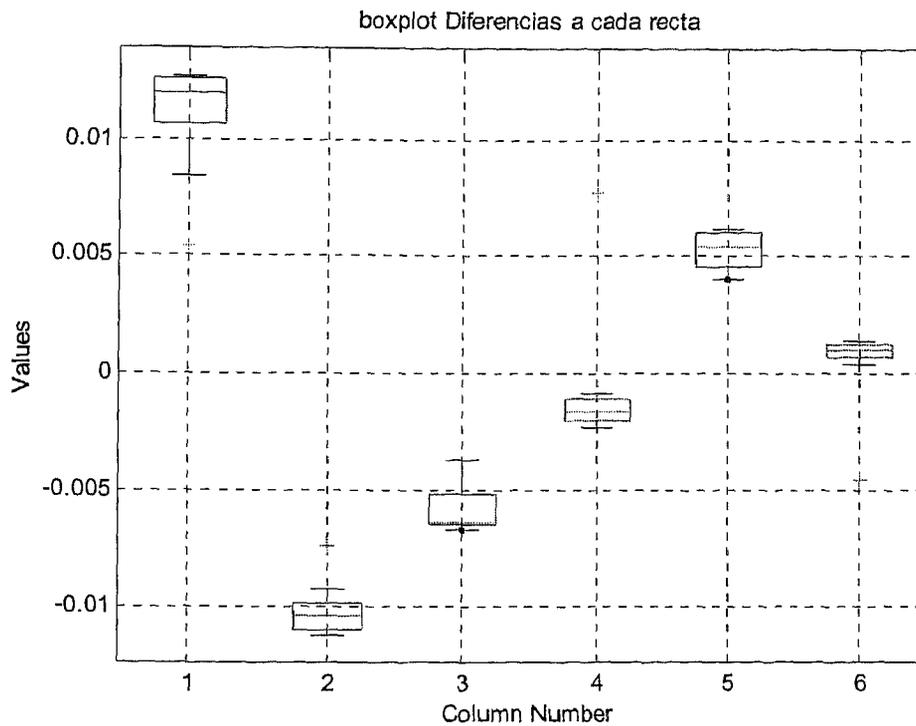


FIGURA 10

Box-Plot de las carreras atléticas. Donde las líneas superior e inferior de las cajas representan los percentiles 25th y 75th del ejemplo. Los límites entre ambos extremos representan el rango intercuartílico. La línea central representa la mediana que de no estar centrada muestra asimetría en los datos. Los outliers representan valores superiores en 1.5 veces el rango intercuartílico de la caja.

Para construir el anterior box-plot, calculamos las diferencias del valor real de cada prueba a la ecuación obtenida al ajustar por mínimos cuadrados. Es decir, tomamos los datos para los mejores en el ranking, por lo tanto  $i=1$ . Calculamos los logaritmos y ajustamos una recta a los datos. Obtenemos ahora los errores, es decir la diferencia entre el valor del dato real y el que predice la ecuación de la recta que representa el valor teórico. Si hay 500 registros habrá 500 valores de diferencias para cada distancia, y con ello construimos el box-plot que figura en la gráfica anterior. Cuanto más cercano a cero es el valor, mejor ajustado está el modelo, en este caso una

recta. De esta forma, aquellas cajas que más se alejan en la gráfica de la línea central (valor 0), serán aquellas en las que el valor real menos se parece al teórico, mientras que por el contrario aquellas que se acercan al centro de la gráfica más se asemejan.

En cada una de las cajas, también podemos observar que hay algunos corredores con marcas claramente diferentes que el resto de sus compañeros en cada distancia. De entre estos sujetos (outlier) a nosotros nos interesa de manera especial aquellos que representan los mejores registros mundiales. Debemos tener presente, como vimos en el apartado anterior, que la aparición de estos sujetos, así como la de otros atletas con niveles de rendimiento similares, permiten disponer de registros (marcas) que actúan como metas para el resto de deportistas convirtiéndose las mismas en atractores y/o barreras del comportamiento evolutivo de la prueba. La importancia de este es relevante en este caso, ya que posiblemente esos atractores sean los que estén llevando al sistema hacia un estado crítico.

Por ejemplo, en las distancias de 10.000 metros y maratón los récords (mejores marcas) se comportan como outliers respecto al resto de marcas que aparecen en el ranking utilizado (1º-500º). En el análisis box-plot un outlier corresponde a una marca cuyo valor es 1.5 veces mayor que el rango intercuartílico, tanto por arriba como por debajo de la caja.

En el caso de los 10.000 metros este outlier (diferencia: 0.0077) nos demuestra que el valor del récord mundial (26'22"75/100 en 10.000 metros) recogido en los valores de la muestra, es de una gran valía y representa, por hasta el momento, un registro difícil de lograr, a corto o medio plazo por la mayor parte de los especialistas en la distancia, factor al que debemos añadir la valía atlética del deportista que la consigue (Haile Gebrselassie). Desde un punto de vista teórico, sólo otro corredor con un perfil especialmente característico podrá superar este registro, Esto es algo que, durante la elaboración de este trabajo ya se ha producido y que, por lo tanto, queda fuera de los valores utilizados en la muestra. Su compatriota Keninisa Bekele se convierte el 8 de junio de 2004 en su sucesor al conseguir en Ostrava un registro de 26'20"31/100, lo que sin duda reforzará la posibilidad de convertir los registros sobre 26'20"00/100 en barreras para este tipo de pruebas.

Analizando el resto de marcas, podemos ver que tal y como se estimaba, el resto de corredores quedan lejos de estas, siendo la marca de Tergat (26'27"75/100) conseguida en 1997, la que más se aproxima a estos niveles de rendimiento. En cualquier caso, las dos últimas temporadas han aparecido nuevos jóvenes corredores capaces de hacer excelentes registros, como es el caso de sus compatriotas Ngera (26'30"74/100) y Sihine (26'34"69/100) nacidos en 1984 y 1983 respectivamente.

En ocasiones, aunque este no sea el caso, la experiencia nos muestra que estas extraordinarias marcas responden al efecto de variables ajenas al

propio deportista, bien por que las logra en situaciones muy favorables de competición (liebres de calidad, climatología ideal, importantes incentivos de competición, etc.) o por cualquier otra que no siempre se puede controlar (ocasionalmente el doping). Al margen de estas consideraciones, proximidad al ajuste y presencia de outlier, la prueba de 10.000 metros presenta un comportamiento bastante compacto, con una distribución normal de registros y dispersión baja de las marcas. Mostrando una evolución progresiva hacia los valores teóricos de referencia (LP).

En la carrera de maratón el comportamiento de las marcas es muy parecido al observado en la carrera de 10.000 metros. Es decir registros muy centrados y con baja dispersión, lo que nos da idea de la normalidad en el comportamiento global que actualmente presenta esta prueba. No obstante, contrariamente a lo que ocurría con los 10.000 metros, pensamos que el récord del mundo de Khalid Khannouchi (2h:05':38") no parece un registro especialmente sólido. En el box-plot aparece como un registro que se aleja claramente (distancia -0.0045) del comportamiento medio del resto de valores analizados en esta distancia (rango de distancias: 0.0007 a 0.0014). En este caso su valor podríamos considerarlo como de menor calidad relativa respecto al resto de marcas y, por consiguiente, susceptible de poder ser mejorado con cierta facilidad y a corto plazo por un número relativamente importante de especialistas. Tal sospecha se ha confirmado la pasada temporada con las marcas de Paul Tergat y Sammy Korir, ambas por debajo de 2h.05' (2.04.55 y 2.04.56 respectivamente), las cuales fueron realizadas pocas fechas después de cerrado el ranking de nuestro estudio.

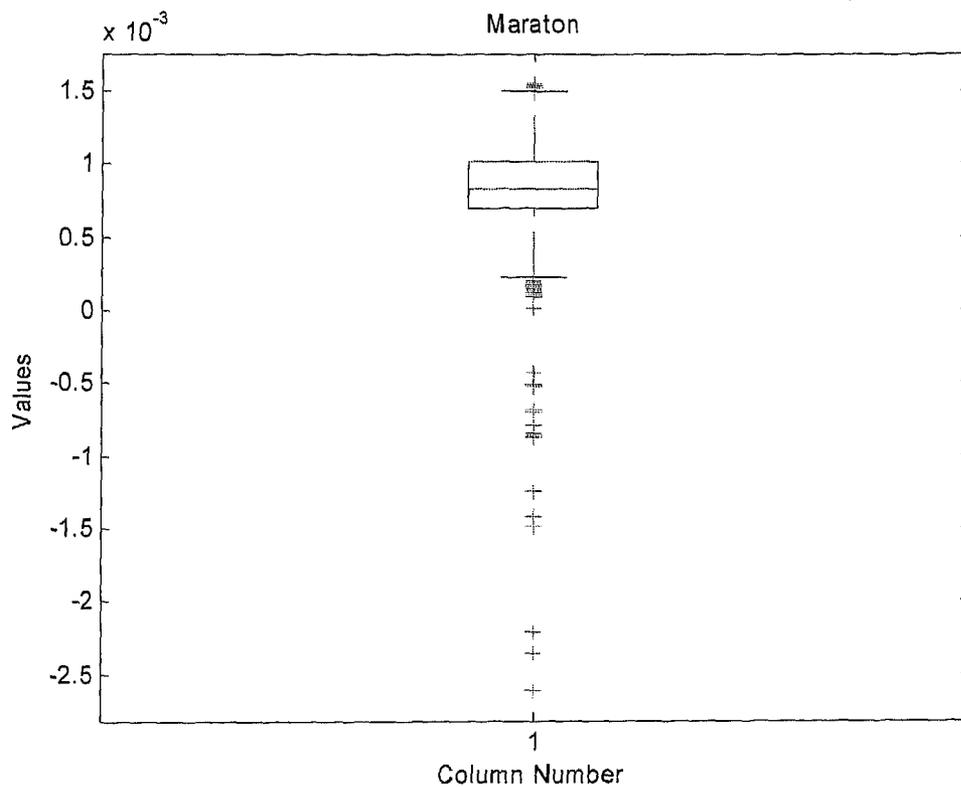


FIGURA 11

*El box muestra el comportamiento de una de las pruebas clásicas del atletismo, como es el maratón (42.195 mtrs.). En él se observa como un registro que se aleja claramente del comportamiento medio del resto de valores analizados en esta distancia (rango de distancias: 0.0007 a 0.0014).*

Cuando se observa el ranking all-time de la distancia, vemos que en las últimas temporadas son bastantes los atletas que han conseguido registros por debajo de los 2.07.00, lo que les lleva a ocupar en la actualidad los principales puestos del ranking mundial y confirma las hipótesis que planteamos. En ese sentido, las marcas de Rutto (2.05.50), Limo (2,06.14), Munji (2.06.15), Cheboror (2.06.23) y Riri (2.06.40), todas ellas marcas conseguidas en las dos últimas temporadas, les ha permitido acceder a los puestos de privilegio de esta modalidad atlética.

En el caso del comportamiento de la maratón en la categoría femenina cada vez es más parecido al que muestran los varones en la actualidad, aunque no ha ocurrido lo mismo hasta hace pocos años. Esto podría quedar explicado por el retraso, por su incorporación tardía a los calendarios oficiales, donde las pruebas de larga distancia han evidenciado notables cambios en la categoría femenina. Recientemente se ha logrado un récord mundial que rompe con la tendencia observada hasta el momento en la categoría arrastrando con fuerza la prueba hacia los valores teóricos esperados. Paula Radcliffe logra realizar en Londres, el 13 de abril del 2003, un registro de 2h:15':25", lo que supone una mejoría de 1'25" respecto al récord mundial anterior que ella misma poseía y de 4'01" en relación con la marca de la mejor especialista que le sigue en el ranking.

### III.5 ANÁLISIS DE LA EVOLUCIÓN DE MARCAS EN LAS CARRERAS DE MEDIO – FONDO Y FONDO ORGANIZADAS POR GRUPOS DE PRUEBAS.

En este caso también utilizaremos el box-plot para analizar cada una de las principales distancias de carreras de resistencia que corresponden al calendario oficial de pista (1.500 a 10.000 metros) y carretera (media-maratón y maratón) de la categoría masculina. El criterio que utilizamos para discriminar las pruebas de resistencia de las de velocidad será, además del punto de corte que proponen Savaglio y Carbone (2000) y que lo sitúan entre los 150"-170" (carreras de unos 1000-1200 metros), las observaciones por nosotros realizadas en el capítulo anterior.

Organizamos las pruebas de resistencia en tres categorías (medio-fondo, fondo y gran-fondo) que agrupan distancias similares en cuanto al tipo de corredor que las practica con éxito y que muestran claramente un comportamiento de LP particularizado. Ciertamente, cada una de estas categorías podría ser organizada por el perfil individual de sus practicantes pero no estimamos oportuno hacerlo en este análisis. En el grupo de pruebas de medio-fondo incluimos las distancias de 1.500 metros, 3.000 metros y 5.000 metros, en las de fondo se incluyen la de 10.000 metros y media-maratón, mientras que en las de gran-fondo incorporamos la de maratón.

### III.5.1 DISTANCIAS DE MEDIO-FONDO

Un caso muy interesante es el que refleja la situación actual de las carreras que tradicionalmente se conocen como de medio-fondo largo o simplemente de fondo corto. Es decir las distancias atléticas de 3000 y 5000 metros lisos.

Desde el punto de vista metabólico, las carreras de 3000 y 5000 metros presentan los máximos requerimientos de potencia aeróbica, los cuales corresponden a tiempos de aproximadamente 420 segundos (Peronnet & Thibault, 1989), 450-550 segundos (Alvarez-Ramirez, 2002) o 600 segundos (Morton & Billat, 1999).

Analizando la posición de estas pruebas en el box-plot, nos damos cuenta del bajo valor relativo de los registros que tienen las carreras de 3000 y 5000 metros con respecto al valor del ajuste y esta tendencia aumenta conforme disminuye el rendimiento deportivo de los corredores. Este comportamiento, aunque existente y claro, es menos acusado en la distancia superior (5000 metros) aunque debemos tener presente que es una distancia incorporada a los calendarios oficiales de los Juegos Olímpicos, Campeonatos del Mundo y Campeonatos Europeos desde que estos se iniciaron. Por el contrario, los 3000 metros es una distancia que está fuera de los programas de estos eventos oficiales excepto en las competiciones indoor o en los meeting al aire libre de las últimas décadas.

Esto nos hace pensar que los ranking all-time de estas dos distancias, muy especialmente los 3000 metros, podrían sufrir una importante modificación y un significativo progreso si se cambiaran las siguientes variables: aumento de universo de corredores con las características actuales de entrenamiento y/o incorporación de los 3000 metros en los programas de las principales competiciones outdoor. En la actualidad podríamos pensar que los récords mundiales sobre las dos distancias podrían mejorarse y situarse en marcas próximas a los 7'16"55<sub>/100</sub>, en el caso del 3000 metros, o los 12'36"55<sub>/100</sub>, en el caso de los 5000 metros, algo que ya ha logrado Gebrselassie con su récord del mundo conseguido el 13 de junio de 1998 en Helsinki (12'39"36<sub>/100</sub>) y el último record no incorporado en el estudio que fue logrado por el también etiope Kenenisa Bekele en Henguelo el 31 de mayo de 2004 (12'37"35<sub>/100</sub>).

Al margen de estas consideraciones, aún se pueden hacer algunas reflexiones sobre las dos anteriores distancias. Los 3000 metros presentan unos registros bastante homogéneos con un rango intercuartílico pequeño y baja dispersión. La marca de Daniel Komen (7'20"67<sub>/100</sub>), vigente record mundial, actúa de fuerte atractor de la prueba hacia la normalización de sus registros, aunque si consideramos la fecha en la que se consigue este registro (01.09.1996) y la distancia al resto de registros, nos damos cuenta que la vitalidad de la prueba sigue relativamente comprometida.

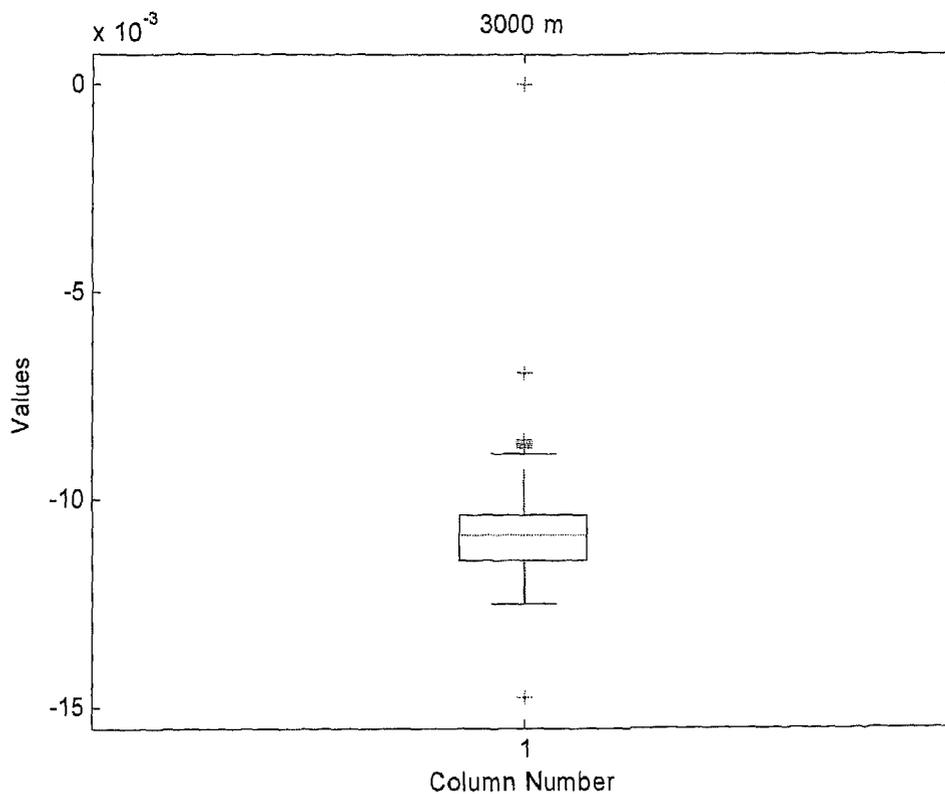


FIGURA 12

*Box plot que muestra el comportamiento de los 3000 metros. Se observan registros bastante homogéneos con un rango intercuartílico pequeño y baja dispersión. La marca de Daniel Komen (7'20"67/100), vigente record mundial, actúa de potente atractor de la prueba hacia la normalización de sus registros.*

Este planteamiento queda confirmado al analizar en detalle los mejores registros de la historia obtenidos en esta distancia (ver cuadro siguiente):

Marca	Atleta	País	Edad	Puesto	Ciudad	Fecha
7:20.67	<b>Daniel Komen</b>	KEN	17 05 1976	1	Rieti	01 09 1996
7:23.09	<b>Hicham El Guerrouj</b>	MAR	14 09 1974	1	Bruselas	03 09 1999
7:25.02	<b>Ali Saïdi-Sief</b>	ALG	15 03 1978	1	Monaco	18 08 2000
7:25.09	<b>Haile Gebrselassie</b>	ETH	18 04 1973	1	Bruselas	28 08 1998
7:25.11	<b>Noureddine Morceli</b>	ALG	28 02 1970	1	Monaco	02 08 1994
7:25.16	Daniel Komen			1	Monaco	10 08 1996
7:25.54	Haile Gebrselassie			1	Monaco	08 08 1998
7:25.87	Daniel Komen			1	Bruselas	23 08 1996
7:26.02	Haile Gebrselassie			1	Bruselas	22 08 1997
7:26.03	Haile Gebrselassie			1	Helsinki	10 06 1999
7:26.62	<b>Mohammed Mourhit</b>	BEL	10 10 1970	2	Monaco	18 08 2000
7:27.18	<b>Moses Kiptanui</b>	KEN	01 10 1970	1	Monaco	25 07 1995
7:27.42	Haile Gebrselassie			1	Oslo	09 07 1998
7:27.50	Noureddine Morceli			1	Bruselas	25 08 1995
7:27.59	<b>Luke Kipkosgei</b>	KEN	27 11 1975	2	Monaco	08 08 1998
7:27.67	Ali Saïdi-Sief			1	Paris Saint-Denis	23 06 2000
7:27.72	<b>Eliud Kipchoge</b>	KEN	05 11 1984	1	Bruselas	03 09 2004
7:27.75	<b>Tom Nyariki</b>	KEN	27 09 1971	2	Monaco	10 08 1996

#### CUADRO 1

Cuadro con los 18 mejores registros en la prueba de 3.000 metros. (Fuente; International Association of Athletics Federation. IAAF 2005).

Se puede observar como la diferencia en tiempo entre el registro personal del record mundial y el de los diez mejores atletas mundiales all-time es de hasta 7" y el número de registros por debajo de 7'28"00<sub>100</sub> es de sólo 18 corredores. Si a ello le añadimos que sólo un corredor ha sido capaz de bajar de esta marca en los últimos 5 años podemos afirmar con bastante rigurosidad, que la prueba, pese a los intentos institucionales, sigue adoleciendo del suficiente aliciente para los principales especialistas.

Por el contrario, los registros de la carrera de 5.000 metros no tienen el mismo comportamiento, ya que sus marcas presentan una mediana no centrada situada en el límite inferior de la caja (box), donde se encuentran los registros más bajos utilizados.

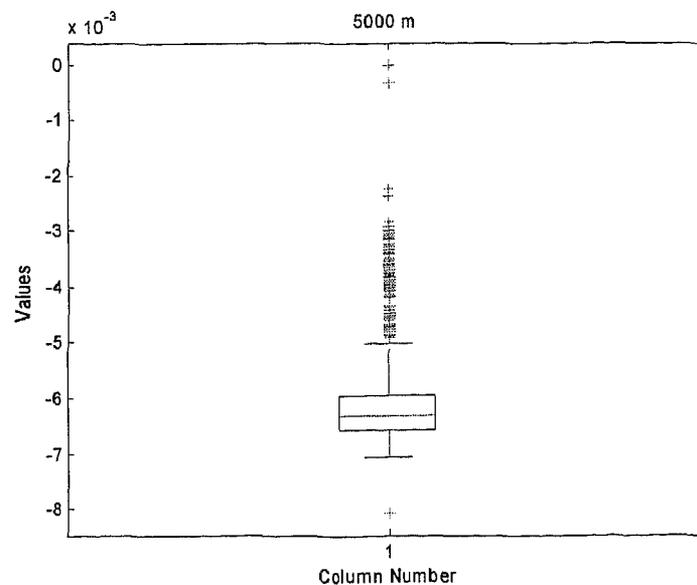


FIGURA 13

El box plot de la prueba de 5.000 metros muestra que los registros de esta tienen un comportamiento diferente dado que sus marcas presentan una mediana no centrada situada en el límite inferior de la caja (box), donde se encuentran los registros más bajos utilizados.

Esto nos indica que existe una clara diferencia entre los corredores capaces de obtener las mejores marcas mundiales de todos los tiempos (marcas < 13'00") y el resto de corredores de nivel mundial (marcas entre 13'20" y 13'25"). En esta dinámica de la prueba de 5.000 metros han tenido mucho que ver los corredores africanos procedentes de las zonas del magreb (Marruecos y Argelia) y nororiental (Kenia y Etiopía).

Además, el plot nos indica la enorme vitalidad de la prueba con gran cantidad de atletas que arrastran los registros hacia el promedio de la ley de potencia de las pruebas de media y larga duración (1500 metros a maratón). La marca de los 13'00" actuó a modo de barrera natural que ha venido siendo superada con cierta facilidad desde 1996. Hasta el final de la temporada de 2005, han sido 81 las ocasiones (51 atletas) en las que se ha superado esta marca durante las últimas 10 temporadas.

Un comportamiento muy diferente al de las dos anteriores distancias lo encontramos en la prueba de 1500 metros. Esta prueba de entrada tiene dos peculiaridades dignas de ser destacadas:

- representa una de las pruebas reinas del atletismo (universo elevado);
- se encuentra cerca de la frontera que separa las pruebas de resistencia (>1000 metros), de alto predominio aeróbico, de las pruebas de velocidad (<1000 metros), de importante dependencia anaeróbica.

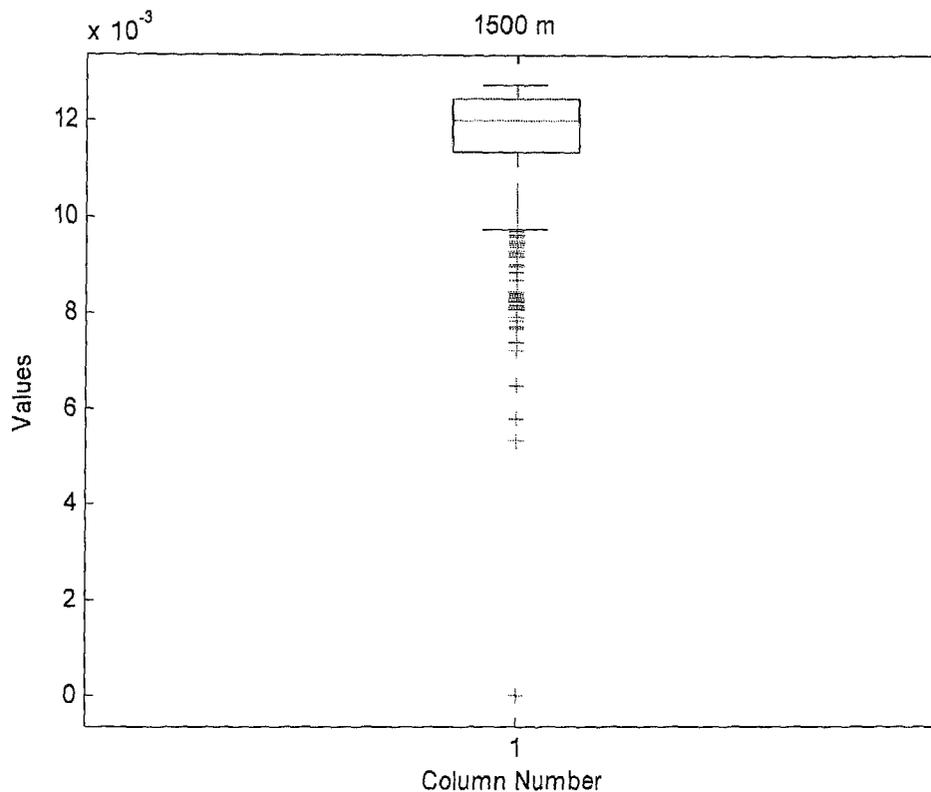


FIGURA 14

La figura 14 muestra el box de los 1500 metros donde se aprecia el buen comportamiento de los registros de la misma. Entre las más probables causas se encuentra el elevado número de participantes y la dependencia energética de la misma.

A la luz de los datos, comprobamos el elevado valor promedio de las marcas de 1500 metros respecto a la tendencia que presentan el resto de las pruebas analizadas. Aquí debemos destacar dos aspectos que pueden afectar a la posición que ocupa esta distancia: su dependencia energética y su universo de practicantes.

Realmente esta distancia tiene una importante dependencia del metabolismo aeróbico aunque su participación es significativamente diferente en cada caso según el corredor que la realiza, sus estructuras

musculares y características condicionales (físicas). Esta vía metabólica actúa es esta prueba como un importante atractor en el organismo de un especialista sobre esta distancia. También, aunque en diferente proporción, es determinante el aporte energético que realizan las vías anaeróbicas. En la mayoría de los estudios, se atribuye al metabolismo aeróbico una contribución entre el 50% y el 70%, lo que supone una enorme variabilidad interindividual sobre la que debemos reflexionar.

Es evidente que parte de estas diferencias pueda quedar explicada por las características de la muestra utilizada, pero indudablemente también debemos pensar en otros parámetros. La experiencia demuestra que entre los especialistas sobre la distancia existen tres prototipos de corredores de 1500 metros, a saber: los que corren bien esa distancia y las inferiores (800 metros y 1000 metros); los que corren bien los 1500 metros pero también obtienen buenos rendimientos en las distancias superiores (3000 metros y 5000 metros); los especialistas puros de la distancia. Esta realidad práctica podría explicar algunas de las causas que subyacen bajo esta enorme variabilidad del comportamiento energético, aunque no podemos descartar otras que puedan estar derivadas de los procedimientos de evaluación metabólica utilizada.

Existe diferente dependencia anaeróbica entre la marca y las características del corredor. A grandes rasgos, se podría estimar que los principales factores que limitan el rendimiento en pruebas de 1500 metros son la elevada depleción del CrP muscular, la alta acidosis metabólica que

se produce por una importante activación del metabolismo glucolítico y una insuficiente capacidad de producir suficiente energía por parte del metabolismo aeróbico. La importancia de cada uno de estos aspectos en el resultado de una carrera varía con el corredor, su perfil funcional y su tipo de entrenamiento.

Un caso individual especialmente interesante por la calidad de su registro es el que corresponde al actual récord mundial de la distancia (El Guerrouj: 3'26".89/100) . Su registro aparece a menor distancia del ajuste de la recta (distancia: 0.0054) que el resto de marcas (rango de distancia: 0.010 a 0.012) utilizadas en el estudio (hasta el 500º all-time). Esto nos hace pensar que este corredor podría ser integrado entre aquellos atletas pertenecientes al grupo de corredores capaces de rendir eficientemente en distancias superiores (2000, 3000 e incluso 5000 metros). Esta opinión queda potenciada cuando comprobamos su mejor registro sobre 3000 metros (7'.23".09/100) ó 5000 metros (12'.50".24/100) distancia esta última donde queda subcampeón del mundo en el 2003.

Si a la dependencia metabólica mixta le añadimos la enorme importancia histórica de esta disciplina y el elevado número de corredores que la han disputado durante el último siglo (universo de participantes), podemos esperar un comportamiento diferente a la del resto de pruebas de media y larga distancia utilizadas para determinar la ley de escala que proponemos en este estudio sobre las carreras atléticas. Observando la gráfica que representaba los valores del logaritmo de la velocidad frente al

logaritmo de la distancia, ( $\log(v)$  contra  $\log(d)$ ), para varios valores del ranking,  $i=1^\circ, 100^\circ, 200^\circ, 300^\circ, 400^\circ$ , comprobamos que a todos los niveles (puestos del  $1^\circ$  al  $500^\circ$ ) esta prueba muestra un comportamiento muy superior a la del resto de pruebas y muy especialmente a las dos distancias siguientes 3000 a 5000 metros que puede responder a los dos puntos antes analizados.

### III.5.2 CARRERAS DE FONDO

La distancia de 10.000 metros se comporta como una prueba sumamente estable sobre la que basculan el resto de distancias utilizadas en el análisis. No obstante, en ella se observan algunos detalles que a nuestro entender deben ser resaltados por su importancia y que hacen referencia a los mejores registros de la prueba (ver siguiente cuadro).

La marca ya mencionada de Gebrasselasie, que corresponde al anterior récord mundial de la prueba, así como otros importantes registros que podemos encontrar en el ranking mundial donde aparecen un significativo número de marcas logradas a finales del siglo pasado, hacen que la evolución de esta distancia atlética tenga un comportamiento especialmente interesante. Nos referimos a la evolución a tirones que se observa en los tres últimos lustros (1990-2005). En este período se bajó con cierta facilidad de la barrera de los 27'.00", y ello hizo que estos registros arrastren ligeramente de la prueba haciendo evolucionar la misma hacia los comportamientos teóricos de marcas esperados (posición en la LP). Sin embargo, en temporadas posteriores (finales de los 90) se observó cierto enfriamiento de la prueba que rápidamente se invirtió durante las últimas temporadas.

Marca	Atleta	Nacionalidad	Edad	Puesto	Ciudad	Fecha
26:17.53	<b>Kenenisa Bekele</b>	ETH	13 06 1982	1	Bruselas	26 08 2005
26:20.31	Kenenisa Bekele			1	Ostrava	08 06 2004
26:22.75	<b>Haile Gebrselassie</b>	ETH	18 04 1973	1	Hengelo	01 06 1998
26:27.85	<b>Paul Tergat</b>	KEN	17 06 1969	1	Bruselas	22 08 1997
26:28.72	Kenenisa Bekele			1	Hengelo	29 05 2005
26:29.22	Haile Gebrselassie			1	Bruselas	05 09 2003
26:30.03	<b>Nicholas Kemboi</b>	KEN	25 11 1983	2	Bruselas	05 09 2003
26:30.74	<b>Abebe Dinkesa Negera</b>	ETH	06 03 1984	2	Hengelo	29 05 2005
26:31.32	Haile Gebrselassie			1	Oslo	04 07 1997
26:36.26	<b>Paul Koech</b>	KEN	25 06 1969	2	Bruselas	22 08 1997
26:38.08	<b>Salah Hissou</b>	MAR	16 01 1972	1	Bruselas	23 08 1996
26:38.76	<b>Abdullah Ahmad Hassan</b>	QAT	04 04 1981	3	Bruselas	05 09 2003
26:39.69	<b>Sileshi Sihine</b>	ETH	29 01 1983	1	Hengelo	31 05 2004
26:39.77	<b>Boniface Kiprop</b>	UGA	12 10 1985	2	Bruselas	26 08 2005
26:41.58	Haile Gebrselassie			2	Hengelo	31 05 2004
26:41.75	<b>Samuel Wanjiru</b>	KEN	10 11 1986	3	Bruselas	26 08 2005
26:43.53	Haile Gebrselassie			1	Hengelo	05 06 1995
26:46.44	Paul Tergat			1	Bruselas	28 08 1998
26:47.89	Paul Koech			2	Bruselas	28 08 1998
26:49.38	<b>Sammy Kipketer</b>	KEN	29 09 1981	1	Bruselas Paris Saint-	30 08 2002
26:49.57	Kenenisa Bekele			1	Denis	24 08 2003
26:49.90	<b>Assefa Mezgebu</b>	ETH	19 06 1978	2	Bruselas	30 08 2002
26:50.20	<b>Richard Limo</b>	KEN	18 11 1980	3	Bruselas	30 08 2002
26:50.67	Abdullah Ahmad Hassan			4	Bruselas	30 08 2002
26:50.77	Haile Gebrselassie			2	Paris Saint- Denis	24 08 2003
26:51.49	<b>Charles Kamathi</b>	KEN	18 05 1978	1	Bruselas	03 09 1999
26:51.87	Nicholas Kemboi			4	Bruselas	26 08 2005
26:52.23	<b>William Sigei</b>	KEN	11 10 1969	1	Oslo	22 07 1994
26:52.30	<b>Mohammed Mourhit</b>	BEL	10 10 1970	2	Bruselas	03 09 1999
26:52.60	Sammy Kipketer			5	Bruselas	26 08 2005
26:52.87	<b>John Cheruiyot Korir</b>	KEN	13 12 1981	5	Bruselas	30 08 2002
26:52.93	<b>Mark Bett</b>	KEN	22 12 1976	6	Bruselas	26 08 2005
26:53.70	Kenenisa Bekele			1	Hengelo	01 06 2003
26:53.73	<b>Gebre-egziabher Gebremariam</b>	ETH	10 09 1984	2	Ostrava	08 06 2004
26:54.41	Paul Tergat			2	Bruselas	23 08 1996
26:54.58	Haile Gebrselassie			2	Hengelo	01 06 2003
26:56.63	Richard Limo			4	Bruselas	05 09 2003
26:56.78	Paul Koech			3	Bruselas	23 08 1996
26:57.27	<b>Sileshi Sihine</b>			1	Praha	27 06 2005
26:58.38	<b>Yobes Ondieki</b>	KEN	21 02 1961	1	Oslo	10 07 1993
27:02.62	<b>Abderrahim Goumri</b>	MAR	21 05 1976	3	Hengelo	29 05 2005

## CUADRO 2

Cuadro con el ranking de las mejores marcas para los 10.000 metros. (Fuente; International Association of Athletics Federation. IAAF 2005).

Este comportamiento a saltos que manifiesta la prueba es difícil de evaluar, ya que pensamos que existen ciertas circunstancias atípicas que, a modo de atractores anómalos, hacen que esta prueba tenga el peculiar comportamiento que describimos. Esto nos hace pensar que, salvo hechos

puntuales, la evolución de esta sea en los próximos años, aunque constante, no especialmente espectacular.

En su conjunto, los 10.000 metros se comportan como una prueba en progresión, con una distribución bastante homogénea y compacta de sus marcas y con clara tendencia a evolucionar en sus registros tal y como muestran los numerosos outliers que aparecen en la misma.

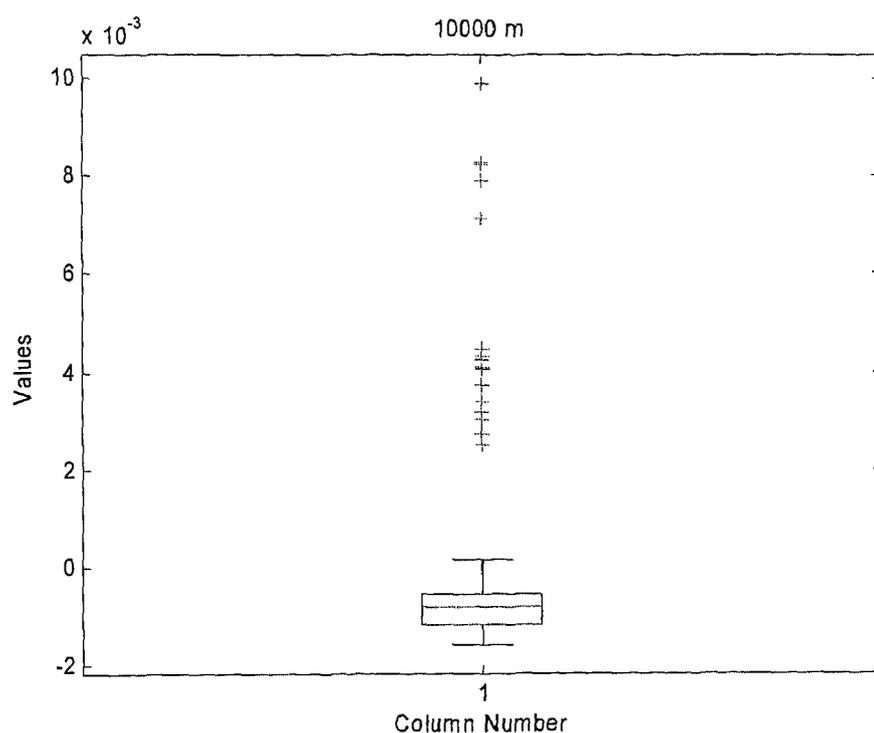


FIGURA 15

En el box de la figura 15 se observa el comportamiento de la prueba de 10.000 metros, la cual se muestra con una distribución bastante homogénea y compacta de sus marcas y con clara tendencia a evolucionar en sus registros tal y como muestran los numerosos outliers que aparecen en la misma.

Especialmente llamativo es el comportamiento de la prueba de media maratón. Analizando la figura ( $\log D$  vs  $\log V$ ) vemos que, con independencia del nivel que observemos (puestos 1º al 500º) los resultados se encuentran por encima del obtenido en pruebas adyacentes. Este comportamiento es curioso si tenemos en cuenta que esta distancia de carrera no forma parte de los calendarios oficiales (Juegos Olímpicos, Campeonatos Mundiales o Juegos Continentales). Su proliferación es muy reciente (últimas tres décadas) aunque debemos reconocer que con un grado de participación importante.

A la luz de los resultados obtenidos podríamos pensar que, entre deportistas de alto nivel, el rendimiento en media maratón se ve beneficiado por ser una distancia que está al alcance de las posibilidades de dos tipos de especialistas (corredores de 10.000 metros y de maratón), lo que mejora su prestación y favorece su evolución. Esta circunstancia no se puede ampliar a la prueba de maratón, donde parece estar claro que se necesita de un tipo de corredor muy especializado con necesidades concretas de entrenamiento y con una dependencia energética diferente a la de distancias inferiores.

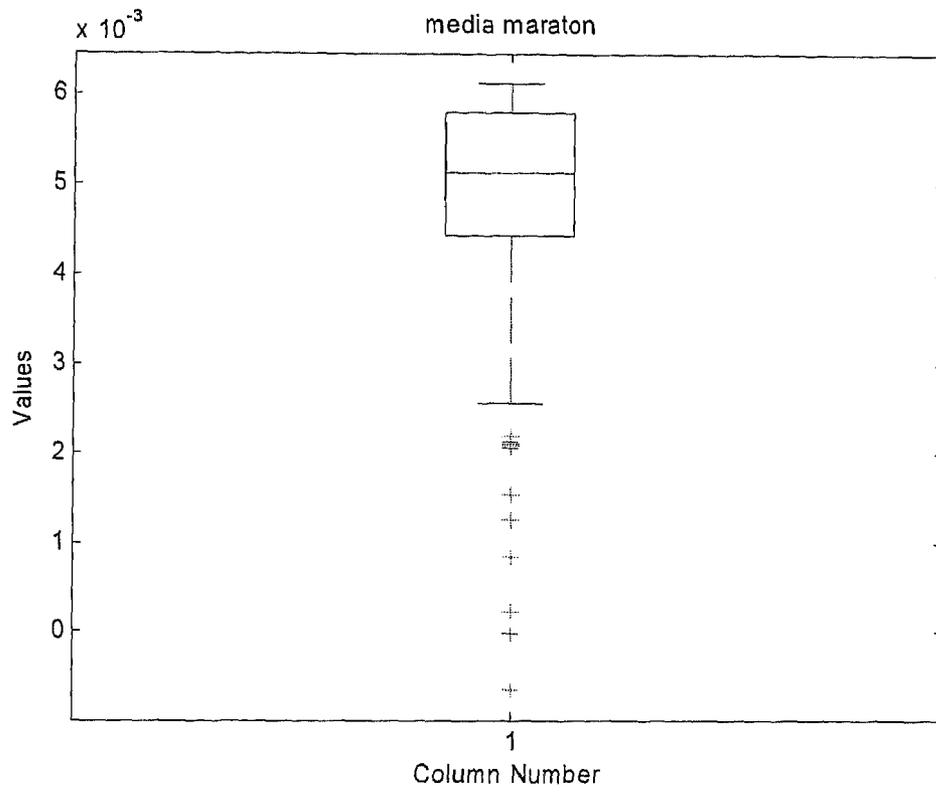


FIGURA 16

*Box plot de la prueba de media maratón. Se observan registros bastante poco homogéneos con un rango intercuartílico grande y mucha dispersión de las marca.*

### III.5.3 CARRERAS DE GRAN-FONDO

En este apartado sólo incluimos la prueba de maratón, ya que no existe ninguna otra prueba, lo suficientemente desarrollada, con características similares en duración o dependencia funcional o física que pudiéramos utilizar para incluirlas.

Desde el punto de vista metabólico se sabe que pruebas tan largas (superiores a las dos horas) aumentan de forma significativa la participación de las grasas en el metabolismo aeróbico (a través de la  $\beta$ -oxidación) en sustitución de las reservas de glucógeno que, por otro lado, es el combustible por excelencia en las pruebas de duración próxima a la hora (ejemplo: carreras de media-maratón) (Bergström & Hultman, 1967; Saltin & Larsson, 1971 (en Shepard, 1996); Costill *et al*, 1971<sup>a</sup> y 1973; Sherman *et al*, 1981 y Weltman, 1995 (en García Manso, 1999); Madsen *et al*, 1990; Sahlin *et al*, 1990;; Tsintzas *et al*, 1996<sup>a</sup>; Hawley *et al*, 1997). La dependencia energética que tiene un corredor de maratón de las grasas es próxima al 20% aunque la importancia de este sustrato aumentará con la distancia de carrera o duración de la prueba, pudiendo llegar al 60-70% en las carreras de 100 kilómetros (Newsholme *et al*, 1992 (en García Manso, 1999); Leiba & Terrados, 2002).

Este cambio de dependencia energética en las pruebas superiores a los 90'-120' posiblemente se podría ver expresado en una nueva ley de escala que permitiera encontrar el punto de inflexión entre estos tipos de

pruebas de resistencia de larga duración (fondo - gran fondo). Este punto de corte es posible que marque los límites entre los dos metabolismos aeróbicos antes descritos (hidratos de carbono y grasas). No obstante para ello deberíamos disponer de información suficiente de otras distancias de larga duración (ejemplo: carreras de 50 ó 100 kilómetros). Lamentablemente este tipo de pruebas está poco desarrollado siendo más habitual que sus posibles practicantes se orienten hacia disciplinas deportivas que gozan actualmente de más popularidad (ejemplo: triatlón). Hoy en día sólo existe una distancia atlética que tiene cierto arraigo competitivo (carrera de 100 kilómetros) pero con un número muy limitado de practicantes y con escasos especialistas. Esta circunstancia limita el universo de estudio, sesga el comportamiento sobre la distancia e impide ampliar el análisis de nuestro trabajo.

Las reservas energéticas de que disponga el corredor y la forma en que se utilicen serán unas de las principales bazas con que cuente un corredor en esta distancia. Ciertamente el glucógeno sigue siendo el sustrato energético más empleado entre los corredores de medio y alto nivel durante una carrera de maratón, pero su cantidad limitada condiciona el rendimiento y, en consecuencia, el resultado sobre esta distancia. Un corredor de estas características realiza un gasto energético que ronda una kilocaloría por kilogramo de peso y kilómetro recorrido, más o menos, lo que quiere decir unas 2.500-3.000 kilocalorías en el total de la prueba. Sin embargo, según el atleta y las condiciones iniciales de prueba, sólo se dispone de aproximadamente 1.300 kilocalorías a partir del glucógeno muscular, pudiendo

llegar a unas 1900 kilocalorías si incluimos el glucógeno hepático (O'Brein et al, 1994), por lo que el resto de energía que se precisa durante la prueba la obtendrá el corredor de maratón, principalmente, a partir de la utilización de las grasas disponible (ácidos grasos libres en sangre).

### III.6 APLICACIÓN DE LAS LEYES DE POTENCIA EN LA PREDICCIÓN DE RENDIMIENTOS

Una de las principales utilidades de este tipo de análisis es poder comparar con objetividad los niveles de rendimiento en cada distancia y, además, poder hacer predicciones fiables sobre otros niveles de rendimiento de los que no se dispone demasiada información (nivel nacional, regional o local), aunque siempre teniendo en cuenta que el comportamiento es multifractal y por lo tanto incluye más de una ley de potencia. Sin duda, esto hace que la predicción pueda perder alguna fuerza en ciertos niveles de rendimiento (*i*).

Determinar las ecuaciones correspondientes a leyes de escala resulta sencillo hasta determinados niveles de rendimiento en los que es posible obtener datos fiables contrastados por organismos oficiales (hasta aproximadamente la marca de los 1000 primeros atletas clasificados en el ranking).

Extrapolaremos o predeciremos los valores para cada distancia, a partir del ajuste de un modelo al conjunto completo de datos (todo el ranking disponible) para alguna distancia que consideramos conocida. Sin embargo, el valor de las marcas de estos atletas son todavía de un nivel internacional relativamente importante y, por lo tanto, correspondientes a registros que no está al alcance de un elevado número de atletas por temporada.

Cuando queremos hacer uso de estas técnicas de análisis para niveles de rendimiento inferiores (nacionales, regionales, locales, etc.) que son de interés para federaciones, instituciones o entrenadores, no es posible tener información fiable que permita hacer comparaciones objetivas entre pruebas. Para poder hacer predicciones válidas es necesario partir de datos previos que se dispongan sobre alguna distancia que actúe de referencia.

En nuestro caso utilizamos los datos de la carrera de 10.000 metros a partir de la cual hemos realizado extrapolaciones para caracterizar otros niveles de rendimiento (nivel internacional medio, nacional y regional), con independencia del desarrollo atlético del entorno o para el país en que se quiera aplicar. Decidimos utilizar como referencia la distancia de 10.000 metros por ser una prueba con un elevado universo de practicantes, un buen arraigo en los calendarios atléticos de cualquier país y, especialmente, por ajustarse perfectamente al comportamiento medio de las distancias para determinar la ley de potencia.

Nivel	Exponencial Coeficiente (c)	Alfa (a)
Internacional	11.5401	-0.0719
Nacional	11.2318	-0.0719
Regional	10.6261	-0.0719

**TABLA 4**

**La tabla 4 muestra los valores de la Velocidad: Exponencial Coeficiente (c) x Distancia<sup>alfa</sup> ( $\alpha$ ), para diferentes niveles de rendimiento.**

Para ello partimos de unos valores subjetivo sobre esta distancia que obtuvimos analizando de forma individualizada ranking y pospuestas de niveles emanadas de organismos internacionales y federaciones nacionales, similares a los utilizados en el trabajo de corte. Los valores utilizados fueron 28'01" para nivel internacional, 28'56" para en nivel nacional, 30'10" para el nivel regional y 32'05" para el nivel local. A partir de estos datos es posible determinar los valores teóricos, con independencia del país de referencia y/o desarrollo local de la prueba, para cada distancia de carrera.

Nivel	1500 mts	3000mts	5000 mts	10000 mts	½ Maratón	Maratón
Internacional	6.9124	6.4878	6.2528	5.9484	5.6371	5.3626
Velocidad y Tiempo	3.37.0	7.42.5	13.20.0	28.01.0	1.02.22	2.11.08
Nacional	6.6034	6.2820	6.0551	5.7603	5.4589	5.1931
Velocidad y Tiempo	3.45.0	7.57.5	13.45.5	28.56.0	1.04.24	2.15.25
Regional	6.3305	6.0224	5.8049	5.5223	5.2333	4.9785
Velocidad y Tiempo	3.55.0	8.18.0	14.21.0	30.10.0	1.07.11	2.21.15
Local	5.5933	5.6635	5.4590	5.1932	4.9215	4.6819
Velocidad y Tiempo	4.06.0	8.48.0	15.15.0	32.05.0	1.11.27	2.30.12

TABLA 5

La tabla 5 muestra los valores de velocidad y tiempo para las pruebas de 1.500 mts., 3.000 mts., 5.000 mts., 10.000 mts., ½ Maratón y Maratón según los niveles internacional, nacional, regional y local.

Si comprobamos los valores obtenidos con el ranking español de todos los tiempos cerrado a 31 de octubre del 2002, vemos que se ajustan bastante bien para las necesidades de un país bastante potente en pruebas medio-fondo y fondo y, muy especialmente, en las distancias de 1500 metros o la maratón. Utilizando los valores de nivel internacional sobre cada distancia de carrera, vemos que, en el ranking por nosotros utilizado para el estudio, aparecen 21 atletas con marcas iguales o mejores en la distancia de 1500 metros, 10 en la distancia de 3000 metros, 13 en los 5000 metros, 20 en los 10.000 metros, 12 en media maratón y 19 en maratón.

### III.7 ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DE LAS MARCAS MEDIANTE INTERVALOS DE FRECUENCIA: COMPARACIÓN DE CARRERAS CON OTRAS MODALIDADES ATLÉTICAS.

Para realizar el estudio se utilizó el ranking mundial all-time de marcas en las disciplinas de 100 metros, 1500 metros, maratón, lanzamiento de peso, salto de longitud y salto con pértiga. Es decir, consideramos todas las marcas oficialmente reconocidas sin tener en cuenta el atleta que la realizaba. Esto hace que en alguna de las pruebas pueda existir algún atleta que condicione el comportamiento general por aportar un número elevado de registros al ranking.

Para poder comparar el comportamiento de marcas cualitativamente tan dispares (tiempo, metros y utilización de implementos), lo primero que se hizo fue normalizar estos valores con el objeto de igualar el número de individuos o de marcas que caen en ciertos intervalos. Con este objetivo, elegimos la división en 10 intervalos de clase. Para ello, dividimos cada marca por su valor medio y las frecuencias en cada intervalo por el valor de la frecuencia máxima.

Los datos nos demuestran que las frecuencias decaen siempre y en todas las pruebas siguiendo un patrón de LP. Esto ya lo habíamos comprobado en las carreras de media y larga distancia, pero de esta forma podemos afirmar que el comportamiento es global para todas las disciplinas

atléticas con independencia de que sean pruebas de resistencia, pruebas de velocidad o concursos atléticos (saltos y lanzamientos).

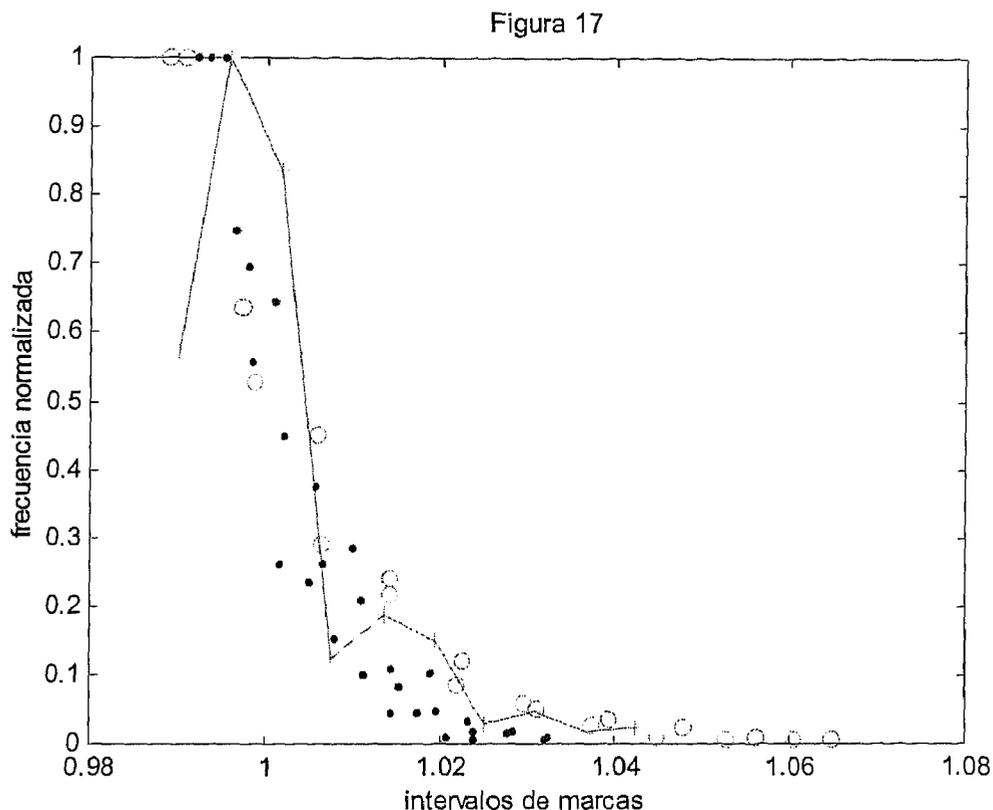


FIGURA 17

Representación gráfica de las frecuencias normalizadas versus los intervalos de marcas. Se observa que siguen un comportamiento de ley de potencia (PL).

En cualquier caso, al analizar la figura 17 observamos una prueba que muestra un comportamiento especialmente peculiar. Nos referimos a la prueba de salto con pértiga. Esta modalidad atlética ha sufrido en los últimos 25 años pocos cambios en relación con los materiales utilizados por los mejores saltadores del mundo, por lo que debemos olvidar la hipótesis de que sean los avances tecnológicos los que condicionan su evolución cuando nos referimos a las mejores marcas y debemos pensar en otras variables que expliquen el fenómeno. Quizás una de las más probables causas sea la

forma en la que se desarrolla la competición, ya que la misma transcurre con incrementos de altura que van por múltiplos de 5 centímetros. Es cierto que el reglamento no impide plantear otro tipo de incrementos, pero estos sólo ocurren cuando el listón alcanza alturas muy elevadas y/o cuando se intenta superar un récord determinado.

Que el comportamiento de las marcas sigue una LP, menos en el caso del salto con pértiga, es algo que queda ratificado en la figura 17 que muestra el comportamiento casi lineal típico de este tipo de funciones cuando se aplica logaritmo a las variables.

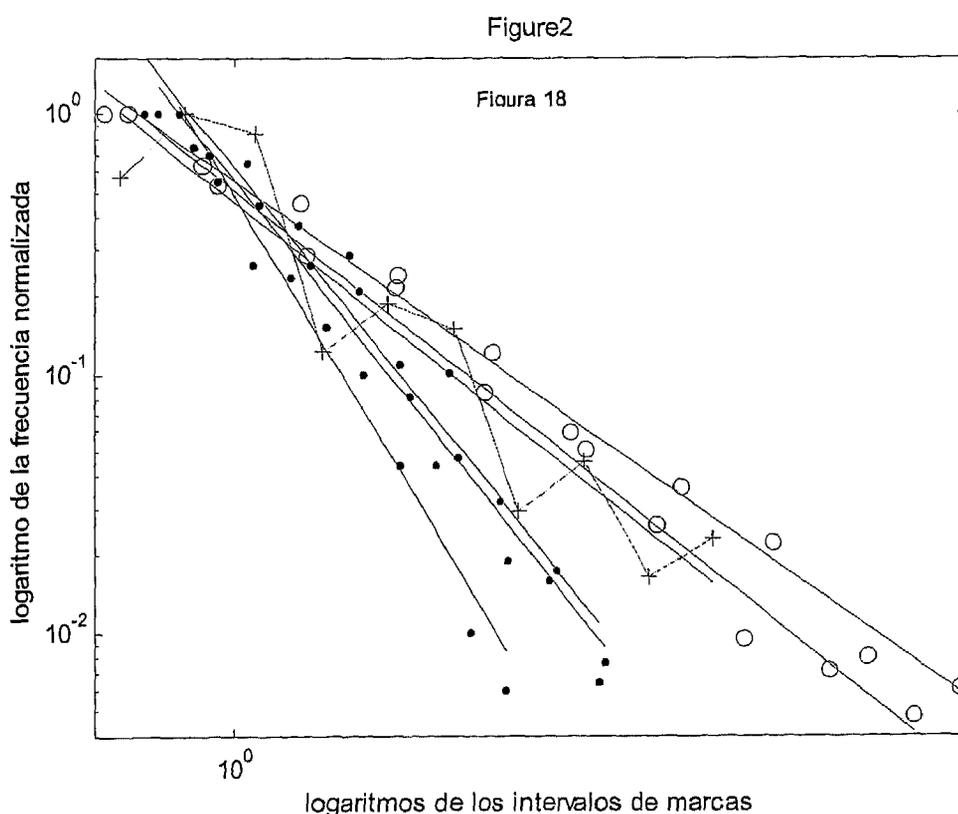


FIGURA 18

Representación gráfica del ajuste logarítmico y las rectas de regresión de las frecuencias normalizadas y los intervalos de las marcas

En esta figura 18, puede observarse como las pruebas señaladas con puntos, que corresponden en conjunto a las carreras, se agrupan entre sí y las de salto y lanzamiento, representadas en el gráfico con círculo, también lo hacen entre sí. La prueba de salto de pértiga muestra grandes oscilaciones debido al agrupamiento de los datos en torno a unas marcas concretas típicas de la prueba. Los puntos en esta disciplina atlética aparecen con signo + y unidos entre ellos por línea continua para separarlo de los otros.

Pruebas	$\alpha$	Valor de C	$R^2$	Error cuadrát. medio
100	- 190.120	0.485	0.94	0.39
1500	- 151.835	0.582	0.96	0.40
maratón	- 127.862	0.613	0.96	0.34
Longitud	- 81.278	0.515	0.99	0.18
peso	- 71.508	0.587	0.98	0.19
Pértiga	- 81.992	0.455	0.86	0.53

TABLA 6

En la tabla 6 se ven los resultados del ajuste de la figura 13, donde  $p = c \cdot m^\alpha$  o bien,  
 $y = \log p = \log (c) + \alpha \log m$ .

De los datos de la tabla 6, se desprende que las pruebas de salto y peso se ajustan algo mejor y tienen menos desviación que los de carrera. También se observan tres exponentes significativamente altos para las

pruebas de carrera y otros tres más bajo para las pruebas que corresponden a los concursos atléticos. Si utilizamos conjuntamente el box doblemente logarítmico y los valores de la tabla, se puede ver que cuanto mayor es la pendiente del ajuste, mayor será la cantidad de valores que se agrupan dentro de cada intervalo.

Los 100 metros es en este caso la prueba que presenta una mayor inclinación de entre todas las analizadas ( $\alpha = -190,120$ ). Los valores utilizados en esta distancia reflejan que la totalidad de las mismas se encuentran en un intervalo global muy pequeño proliferando los atletas que presentan el mismo registro (9.78 a 10.30 para las 1000 mejores marcas).

Por el contrario, aquellas pruebas que presentan un intervalo global más amplio, provocan que la distribución de los registros sea menor en cada intervalo y se muestre con una menor pendiente en el ajuste logarítmico (Peso:  $\alpha = -71,508$ ; Longitud:  $\alpha = -81,288$ ). Los rangos de marcas de estas dos pruebas fueron de 23.12 a 21.39 metros para los 1000 registros de lanzamiento de peso y de 8.95 a 8.30 metros para los 1000 registros de salto de longitud.

Para profundizar más en el tema, se decidió elaborar los correspondientes ranking all-time por deportistas. Es decir, utilizando sólo las mejores marcas de cada deportista para la elaboración del mismo.

Prueba	$\alpha$	C	R <sup>2</sup>	Error cuadrático medio
100	-103.695	0.585	0.94	0.312
200	- 96.978	0.554	0.99	0.119
400	- 89.866	0.490	0.92	0.419
800	- 111.588	0.587	0.91	0.519
1.000	- 89.908	0.651	0.94	0.390
1.500	- 101.022	0.614	0.94	0.420
3.000	- 82.129	0.529	0.98	0.210
5.000	- 78.39	0.560	0.97	0.230
10.000	- 83.674	0.516	0.97	0.270
m. marat.	- 102.409	0.642	0.93	0.380
maratón	- 99.153	0.583	0.93	0.360

TABLA 7

Valores de  $c$  y  $\alpha$ , junto con  $r^2$  y error cuadrático medio para las pruebas desde 100 metros a maratón.

El procedimiento siguiente, consistió en averiguar a que tipo de LP respondían las pruebas atléticas, tratando de averiguar si todas responden al mismo tipo de LP o si existen diferencias significativas en algunas de ellas. Para esto se aplicaron leyes de Zipf y Zipf-Mandelbrot a la distribución de las marcas. Esto queda representado en la figura 19.

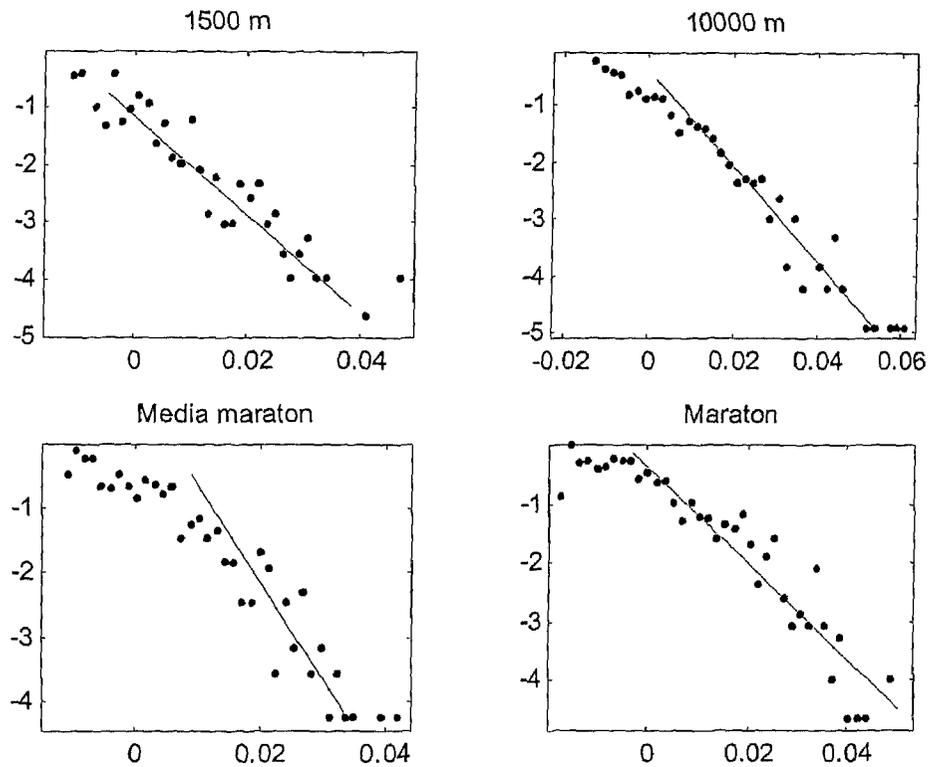


FIGURA 19

*Aplicación de leyes de Zipf y Zipf-Mandelbrot a la distribución de las marcas de las pruebas de 1.500 mts., 10.000 mts., Media maratón y Maratón.*

En ella vemos como en algunas situaciones la distribución de las marcas no sigue estrictamente una línea recta, como es el caso de lo que ocurre en las pruebas de los 10.000 metros, la media maratón y la maratón. Aparentemente, en estas distancias cuando las marcas empeoran la distribución tiende a curvarse, de forma que en casos como el maratón se acumulan gran cantidad de datos y las distribuciones tienden a aplanarse. Por el contrario, en la carrera de 1.500 metros este comportamiento no se da y las distribuciones tienden a ajustarse conforme lo hace una ley de potencia pura.

Esto podría deberse a que las marcas de la prueba presentan registros con tiempos más próximos entre cada una, existiendo diferencias mínimas entre un puesto del ranking y aquellos puestos que le suceden.

En el caso de las otras pruebas anteriormente mencionadas, por ser disciplinas de mayores recorridos, la amplitud de tiempos entre marca y marca se ven más distanciadas entre si.

Como es sabido Mandelbrot (Solé, 1996) propuso una generalización de la LP mediante la siguiente función conocida como ley de Zipf Mandelbrot (ZM) que tiene la forma

$$Y = \frac{C1}{(C2 + X)^{c3}}$$

El comportamiento de esta función ya fue vista en un capítulo anterior (1.6.2).

Con el objeto de estudiar mejor el problema, procedimos a calcular los parámetros obtenidos del ajuste de la función ZM a las probabilidades para todos los casos tratados y utilizando intervalos (bin) diferentes. Los resultados pueden verse las tablas 10 a la 26.

### III.7.1 MEJORES MARCAS POR PRUEBA (CARRERAS, SALTOS Y LANZAMIENTOS).

100 metros

bin Nº intervalos	a1	a2	a3	R <sup>2</sup>	desviación cuadrática media
10	0.9946	0.0149	0.0073	0.9832	0.0012
20	0.9948	0.0131	0.0067	0.9317	0.0024
40	0.9952	0.0185	0.0075	0.9661	0.0017
60	0.9951	0.0181	0.0076	0.9706	0.0016

TABLA 10: Número de intervalos (bin) para la prueba de 100 metros correspondiente a las mejores marcas. Contiene los coeficientes a1(LP), a2 (ZM), a3, R<sup>2</sup> y desviación cuadrática media.

1500 metros

bin Nº intervalos	a1	a2	a3	R <sup>2</sup>	desviación cuadrática media
10	0.9952	0.0064	0.0084	0.9874	0.0014
20	0.9945	0.0170	0.0094	0.9731	0.0020
40	0.9938	0.0240	0.0100	0.9541	0.0026
60	0.9937	0.0205	0.0096	0.9327	0.0031

TABLA 11: Número de intervalos (bin) para la prueba de 1500 metros correspondiente a las mejores marcas. Contiene los coeficientes a1(LP), a2 (ZM), a3, R<sup>2</sup> y desviación cuadrática media.

Se observa que la prueba de 1500 metros es más Zipf-Mandelbrot para bin grandes y sólo Zipf para bin pequeños.

## Maratón

bin Nº intervalos	a1	a2	a3	R <sup>2</sup>	desviación cuadrática media
10	0.9948	0.0411	0.0115	0.9814	0.0017
20	0.9943	0.0473	0.0120	0.9711	0.0021
40	0.9927	0.0627	0.0133	0.9463	0.0027
60	0.9913	0.0920	0.0150	0.9134	0.0033

TABLA 12: Número de intervalos (bin) para la prueba de maratón correspondiente a las mejores marcas. Contiene los coeficientes a1(LP), a2 (ZM), a3, R<sup>2</sup> y desviación cuadrática media.

Para la prueba del maratón bin 20 y bin 40 es más tipo Zipf-Mandelbrot, en tanto para valores mayores que 40 es ZM sobretodo en las colas de bajo rendimiento.

## Lanzamiento Peso

bin Nº intervalos	a1	a2	a3	R <sup>2</sup>	desviación cuadrática media
10	0.9916	0.0021	0.0144	0.9915	0.0022
20	0.9890	0.0028	0.0149	0.9704	0.0040
40	0.9880	0.0023	0.0147	0.9596	0.0047
60	0.9852	-0.0003	0.0143	0.9481	0.0051

TABLA 13: Número de intervalos (bin) para la prueba de lanzamiento de pesos correspondiente a las mejores marcas. Contiene los coeficientes a1(LP), a2 (ZM), a3, R<sup>2</sup> y desviación cuadrática media.

Para la prueba de lanzamiento de peso es bastante Zipf y poco Zipf-Mandelbrot para valores de bin mayores que 40 y es completamente Zipf el tercer coeficiente.

### Salto de Longitud

bin Nº intervalos	a1	a2	a3	R <sup>2</sup>	desviación cuadrática media
20	0.9860	0.0045	0.0140	0.9800	0.0029
40	0.9900	0.0000	0.0114	0.9300	0.0060
60	0.6800	0.0000	0.0132	0.9300	0.0049

TABLA 14: Número de intervalos (bin) para la prueba de salto de longitud correspondiente a las mejores marcas. Contiene los coeficientes a1(LP), a2 (ZM), a3, R<sup>2</sup> y desviación cuadrática media.

Para la prueba de salto de longitud, bin 20 es un poco Zipf-Mandelbrot en la cola y bastante Zipf pero muy dispersa en bin 40.

### Salto con Pértiga

bin Nº intervalos	a1	a2	a3	R <sup>2</sup>	desviación cuadrática media
10	0.9942	-0.0038	0.0101	0.8710	0.0060
20	0.9909	-0.0009	0.0083	0.5824	0.0112

TABLA 15: Número de intervalos (bin) para la prueba de salto con pértiga correspondiente a las mejores marcas. Contiene los coeficientes a1(LP), a2 (ZM), a3, R<sup>2</sup> y desviación cuadrática media.

Para la prueba de pértiga bin 20 es muy oscilante con gran desviación promedio y dispersión. Es muy Zipf. Esto se confirma para bin 10, para bin 40 es imposible calcular.

### III.7.2 MEJORES MARCAS POR ATLETA (SÓLO CARRERAS)

#### 100 metros

bin Nº intervalos	a1	a2	a3	R <sup>2</sup>	desviación cuadrática media
10	0.9913	0.0290	0.0139	0.9854	0.0018
20	0.9915	0.0177	0.0127	0.9503	0.0033
40	0.9891	0.0072	0.0113	0.8780	0.0050
60	0.9902	0.0300	0.0146	0.9449	0.0034

TABLA 16: Número de intervalos (bin) para la prueba de 100 metros correspondiente a las mejores marcas por atleta. Contiene los coeficientes a1, a2, a3, R<sup>2</sup> y desviación cuadrática media.

Para valores mayores que bin 40 se acentúa el segundo coeficiente.

#### 200 metros

bin Nº intervalos	a1	a2	a3	R <sup>2</sup>	desviación cuadrática media
10	0.9940	0.0050	0.0108	0.9651	0.0035
20	0.9912	0.0086	0.0117	0.9099	0.0052
40	0.9900	0.0101	0.0121	0.8935	0.0052
60	0.9901	-0.0001	0.0107	0.8818	0.0053

TABLA 17: Número de intervalos (bin) para la prueba de 200 metros correspondiente a las mejores marcas por atleta. Contiene los coeficientes a1, a2, a3, R<sup>2</sup> y desviación cuadrática media.

A partir del bin 50 se hace 0 el segundo coeficiente.

### 400 metros

bin Nº intervalos	a1	a2	a3	R <sup>2</sup>	desviación cuadrática media
10	0.9912	0.0564	0.0173	0.9588	0.0034
20	0.9885	0.0726	0.0193	0.9297	0.0044
40	0.9881	0.0617	0.0186	0.9065	0.0049
60	0.9867	0.0178	0.0148	0.8276	0.0063

TABLA 18: Número de intervalos (bin) para la prueba de 400 metros correspondiente a las mejores marcas por atleta. Contiene los coeficientes a1, a2, a3, R<sup>2</sup> y desviación cuadrática media.

Para bin mayores que 40 no se observan cambios en el segundo coeficiente.

### 800 metros

bin Nº intervalos	a1	a2	a3	R <sup>2</sup>	desviación cuadrática media
10	0.9923	0.0593	0.0160	0.9888	0.0016
20	0.9917	0.0300	0.0141	0.9657	0.0027
40	0.9916	0.0278	0.0133	0.8853	0.0047
60	0.9893	0.0114	0.0123	0.8202	0.0056

TABLA 19: Número de intervalos (bin) para la prueba de 800 metros correspondiente a las mejores marcas por atleta. Contiene los coeficientes a1, a2, a3, R<sup>2</sup> y desviación cuadrática media.

Para bin mayores que 40 no se observan cambios en el segundo coeficiente.

## 1000 metros

bin Nº intervalos	a1	a2	a3	R <sup>2</sup>	desviación cuadrática media
10	0.9955	0.0362	0.0144	0.9533	0.0037
20	0.9908	0.0129	0.0132	0.9009	0.0052
40	0.9870	0.0073	0.0125	0.8654	0.0060
60	0.9890	-0.0047	0.0118	0.8386	0.0064

*TABLA 20: Número de intervalos (bin) para la prueba de 1000 metros correspondiente a las mejores marcas por atleta. Contiene los coeficientes a1, a2, a3, R<sup>2</sup> y desviación cuadrática media.*

## 1500 metros

bin Nº intervalos	a1	a2	a3	R <sup>2</sup>	desviación cuadrática media
10	0.9920	0.0194	0.0134	0.9734	0.0028
20	0.9920	0.0194	0.0134	0.9734	0.0028
40	0.9882	-0.0016	0.0113	0.8974	0.0053
60	0.9890	-0.0047	0.0118	0.8386	0.0064

*TABLA 21: Número de intervalos (bin) para la prueba de 1500 metros correspondiente a las mejores marcas por atleta. Contiene los coeficientes a1, a2, a3, R<sup>2</sup> y desviación cuadrática media.*

### 3000 metros

bin Nº intervalos	a1	a2	a3	R <sup>2</sup>	desviación cuadrática media
10	0.9927	0.0281	0.0164	0.9787	0.0028
20	0.9908	0.0164	0.0156	0.9576	0.0039
40	0.9908	0.1277	0.0216	0.6890	0.0100
60	0.9881	0.0729	0.0187	0.6977	0.0094

TABLA 22: Número de intervalos (bin) para la prueba de 3000 metros correspondiente a las mejores marcas por atleta. Contiene los coeficientes a1, a2, a3, R<sup>2</sup> y desviación cuadrática media.

Destacan los malos resultados de la desviación cuadrática media de bin 40.

### 5000 metros

bin Nº intervalos	a1	a2	a3	R <sup>2</sup>	desviación cuadrática media
10	0.9907	0.0244	0.0165	0.9845	0.0025
20	0.9887	0.0105	0.0155	0.9761	0.0029
40	0.9858	0.0137	0.0161	0.9275	0.0048
60	0.9861	0.0206	0.0166	0.8911	0.0056

TABLA 23: Número de intervalos (bin) para la prueba de 5000 metros correspondiente a las mejores marcas por atleta. Contiene los coeficientes a1, a2, a3, R<sup>2</sup> y desviación cuadrática media.

## 10000 metros

bin Nº intervalos	a1	a2	a3	R <sup>2</sup>	desviación cuadrática media
10	0.9906	0.0177	0.0167	0.9771	0.0034
20	0.9878	0.0197	0.0176	0.9605	0.0045
40	0.9870	0.0083	0.0160	0.9649	0.0042
60	0.9875	0.0053	0.0157	0.9421	0.0051

TABLA 24: Número de intervalos (bin) para la prueba de 10000 metros correspondiente a las mejores marcas por atleta. Contiene los coeficientes a1, a2, a3, R<sup>2</sup> y desviación cuadrática media.

## Media maratón

bin Nº intervalos	a1	a2	a3	R <sup>2</sup>	desviación cuadrática media
10	0.9924	0.0677	0.0177	0.9898	0.0017
20	0.9922	0.0616	0.0171	0.9796	0.0023
40	0.9895	0.0725	0.0182	0.9352	0.0040
60	0.9879	0.0566	0.0172	0.9060	0.0046

TABLA 25: Número de intervalos (bin) para la prueba de media maratón correspondiente a las mejores marcas por atleta. Contiene los coeficientes a1, a2, a3, R<sup>2</sup> y desviación cuadrática media.

## Maratón

bin Nº intervalos	a1	a2	a3	R <sup>2</sup>	desviación cuadrática media
10	0.9964	0.1951	0.0299	0.9836	0.0025
20	0.9954	0.1945	0.0298	0.9615	0.0039
40	0.9882	0.1173	0.0260	0.9185	0.0054
60	0.9893	0.0983	0.0235	0.8563	0.0069

*TABLA 26: Número de intervalos (bin) para la prueba del maratón correspondiente a las mejores marcas por atleta. Contiene los coeficientes a1, a2, a3, R<sup>2</sup> y desviación cuadrática media.*

### III.7.2.1 ANÁLISIS DE LAS TABLAS: Función Zipf-Mandelbrot ( $y=a1/(a2+x)^{a3}$ )

El análisis de los datos de las tablas, respecto a el coeficiente  $c2$ , indica el parecido o alejamiento de la función ZM con la ley de potencia pura, es decir, cuanto más próximo a 0 menor curvatura tiene la función cuando se representa en papel doblemente logarítmico.

Un aumento en este coeficiente aumenta la divergencia de la recta cuando la variable independiente ( $x$ ) disminuye. Por otra parte el parámetro  $a3$  representaría la pendiente cuando es una recta. En todo caso  $a3$  es el exponente de la función.

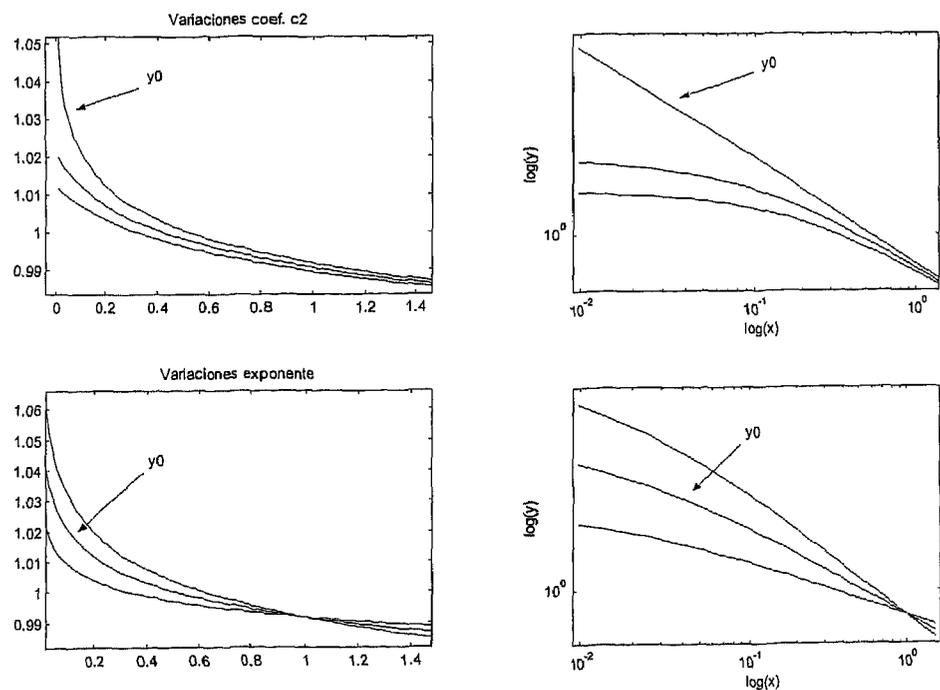


FIGURA 20

Variaciones del coeficiente  $c2$  y de exponente para leyes de Zipf y Zipf-Mandelbrot

### III.7.3 CONCLUSIONES

Se puede comprobar que en general la consecución de las marcas, con independencia del año en que fueron obtenidas, se ordenan siguiendo un patrón o regularidad común a todas las pruebas examinadas. Este patrón indica que siguen con bastante exactitud leyes de escala, o en algunos casos la función de ZM.

Esto es bastante significativo para elecciones de un número alto de intervalos (*bin* menor que 20), a medida que aumentamos el número de intervalos aumenta en algunos casos, notablemente la dispersión en torno a esta función, aunque no afecta demasiado a los resultados del ajuste.

Este fenómeno parece estar asociado al hecho de que los deportistas persiguen la consecución especialmente de marcas específicas. Una mirada en detalle nos permite comprobar esta situación (figura 21).

Como se señaló en el capítulo referido a rendimiento (Aplicaciones Prácticas), los valores parecen agruparse en torno a marcas específicas lo cual nos hace pensar que el conjunto podría tener una estructura multifractal subyacente. Esta es una cuestión que permanece abierta estando en este momento en estudio por nuestro grupo.

Hay ciertas diferencias entre los resultados obtenidos para todas las mejores marcas y para las mejores marcas por sujeto.

En el caso de la prueba de 100 metros hay una diferencia notable entre los exponentes. Por ejemplo en esta prueba el valor es de 0.0067 frente a 0.0127, es decir un factor casi de 2.

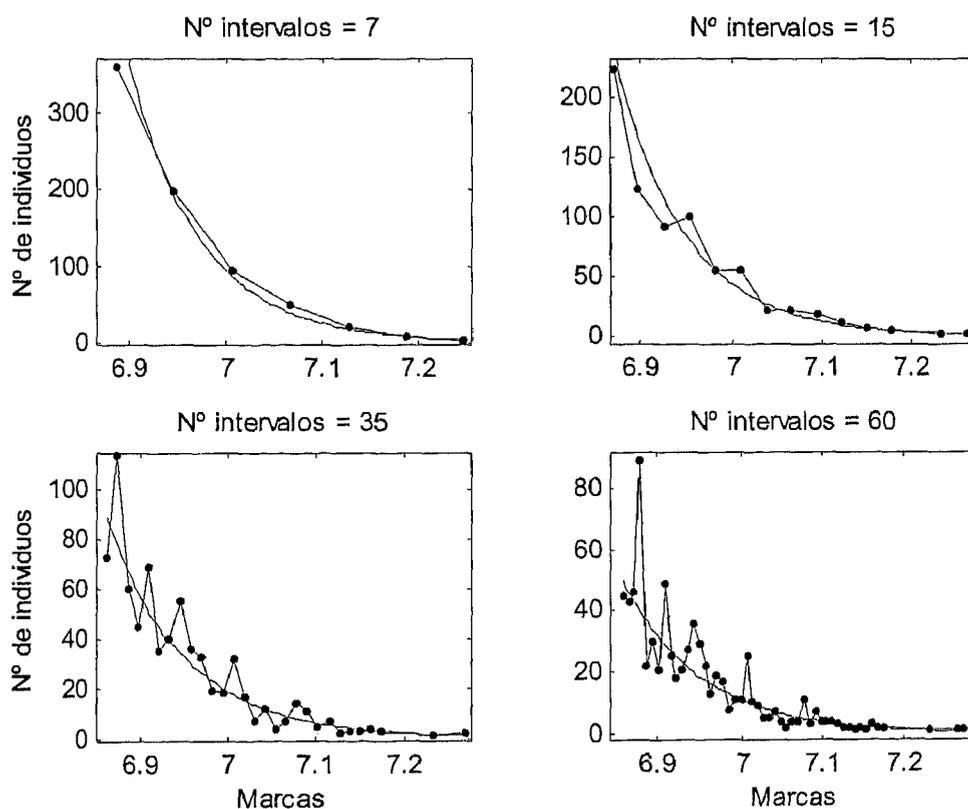


FIGURA 21

En la figura 21 se comprueba el comportamiento de ley de escala o función Zipf-Mandelbrot que siguen las pruebas examinadas, independientemente de la fecha de consecución de la misma.

En el caso de 1500 metros el factor es  $\frac{0.0127}{0.0097} \cong 1.4$

Mientras que para la maratón es  $\frac{0.0298}{0.012} \cong 2.5$ , es decir más del doble.

En el caso de la maratón además, el efecto de curvatura es mucho mayor en el caso de ranking por sujetos (0,047 en el caso de todas las marcas y 0,194 para marcas por atleta). También son diferentes los valores de dispersión, los cuales son mayores en el segundo caso para las tres pruebas mencionadas.

Las pruebas tanto de peso como de longitud y pértiga tiene coeficiente  $c_2$  muy pequeños lo que indica que las frecuencias siguen una ley de potencia pura con bastante exactitud, lo que las diferencia de las pruebas de 100 mts., 1500 mts. y maratón en las que la curvatura es algo mayor. En todo caso, cuando consideramos todas las marcas, las pruebas parecen seguir este tipo de distribución. Lo mismo se puede decir en general de las mejores marcas por atleta, aunque en este caso sólo consideremos pruebas de carrera.

### III.7.4 ANÁLISIS LEY DE ZIPF

En el caso de las pruebas de peso y longitud son mucho más Zipf puras con coeficiente  $a_2$  por debajo en general de 0,003 y con mayores valores de la pendiente. La pértiga es un caso específico. Se aprecia en salto de longitud que en bin 40 hay mucha dispersión aunque es un Zipf puro y en bin 60 ya la dispersión es menor siendo también un Z puro. En general las pruebas por marcas tienen valores de la pendiente entre 0,006 y 0,015, y dispersión pequeña entre 0,02 y 0,04 (analizando sólo bin 20).

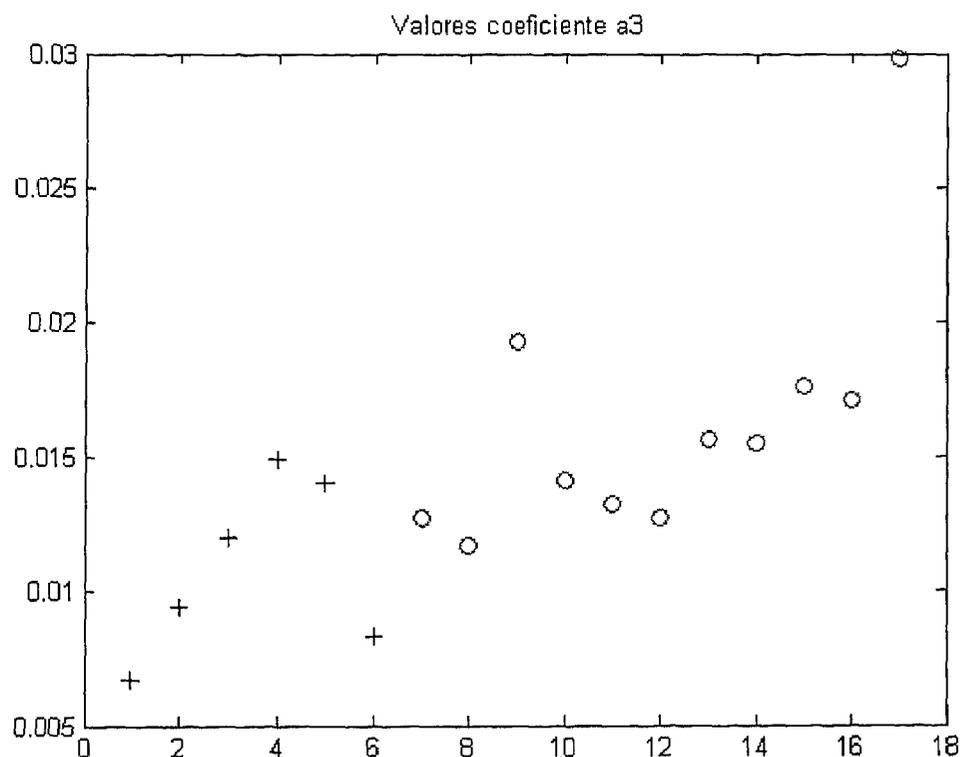


FIGURA 22

Se presentan los valores del coeficiente  $a_3$ . Con signo + las pruebas por marca y con círculo las marcas por afeta en el orden en que se encuentran en la tabla de datos. Se muestra la variación de valores del coeficiente  $a_3$  para todas las pruebas con bin 20.

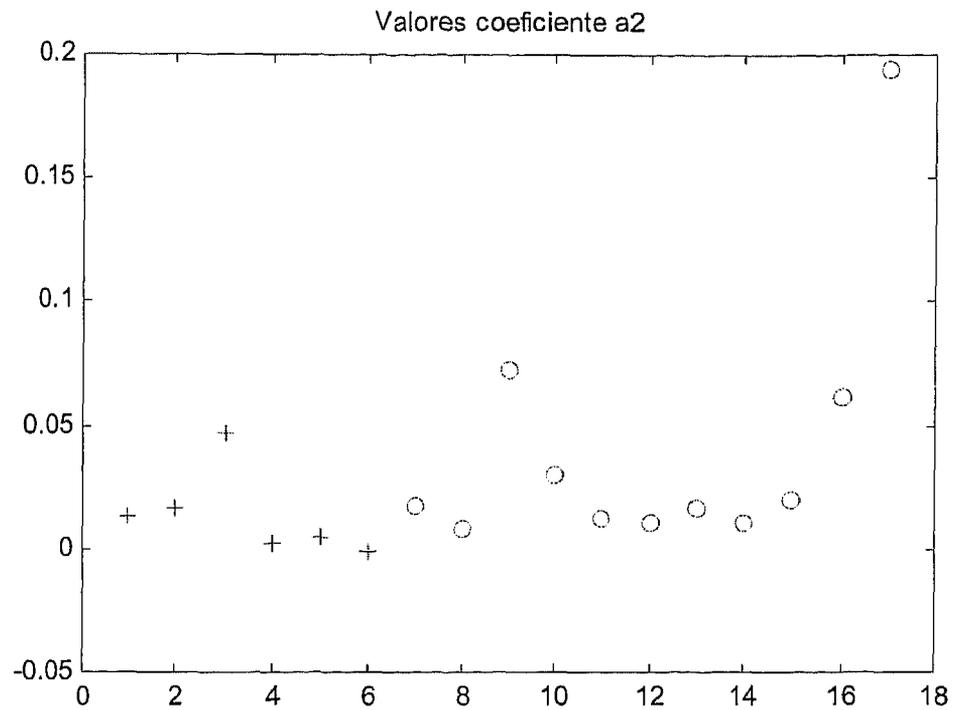


FIGURA 23

Se presentan los valores del coeficiente  $a_2$ . Con signo + las pruebas por marca y con círculo las marcas por atleta en el orden en que se encuentran en la tabla de datos.

Se debe recordar que los valores bajos o cercanos a 0 de este coeficiente implican la cercanía al modelo Z, es decir, log-log próximo a recta pura. Valores altos por el contrario muestran curvatura más cercana al modelo ZM.

Se resalta también, que la maratón es la prueba más atípica en todos los casos y la menos Z. Un análisis más detallado de la maratón (figura 23) sugiere que los últimos datos, a partir del 400 hacia atrás, tienden a distribuirse normalmente.

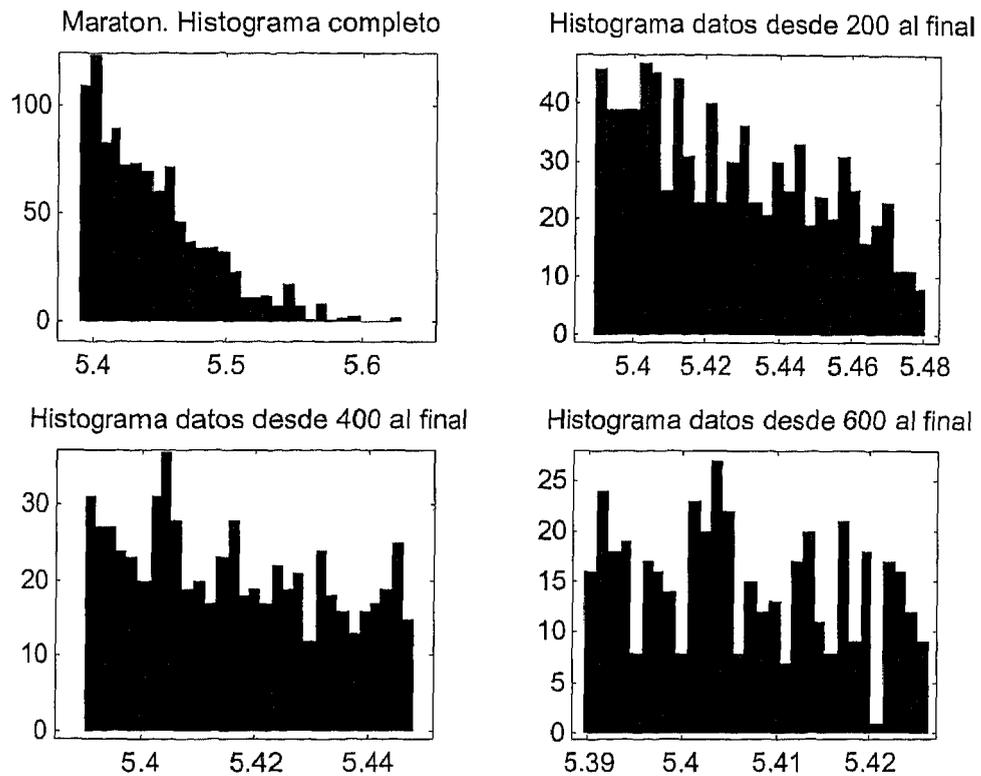


FIGURA 24

*Histograma de la distribución de datos (marcas) de la maratón. Se observa un comportamiento atípico. Los datos, a partir del 400 hacia atrás, tienden a distribuirse normalmente.*

Como se muestra en el análisis detallado del maratón (figura 24), la distribución de los datos a partir del puesto 400, tiende a comportarse con mayor regularidad y menos pendiente. Esto se puede deber a que las marcas en este nivel cuentan con un gran número de exponentes, los que presentan registros similares en casi todos los rangos de tiempo, provocando diferencias mínimas entre una marca y otra, cosa que no sucede a medida que se mejora el puesto del ranking, debido fundamentalmente, a

que hay menos exponentes conforme mejora la marca y consecuentemente registros de tiempo más espaciados.

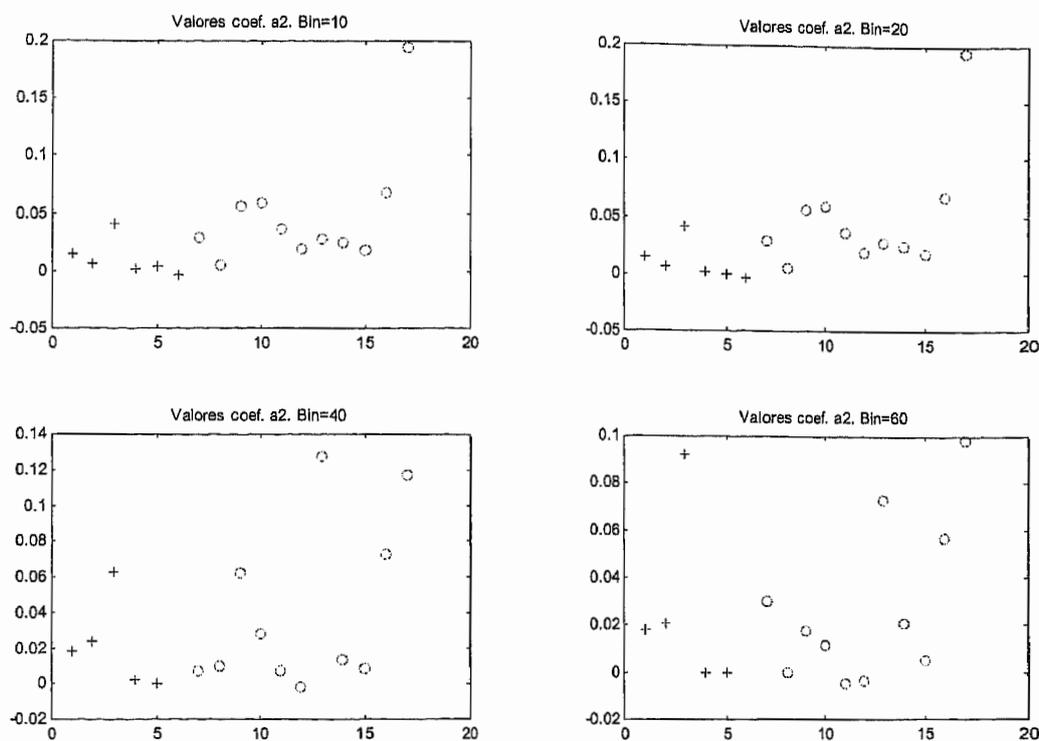


FIGURA 25

*Evolución de los coeficientes  $a_2$  o bien  $c_2$  para las diferentes pruebas y los bin (intervalo) 10, 20, 40 y 60.*

En el caso de los valores signados con (+), es decir, pruebas de mejores marcas el coeficiente  $a_2$  agrupa las carreras de 100 y 1500 para todos los bin considerados. La maratón se separa claramente. Las tres pruebas no cíclicas también se agrupan (recordar que la prueba de pértiga y la de salto fallan en algunos casos).

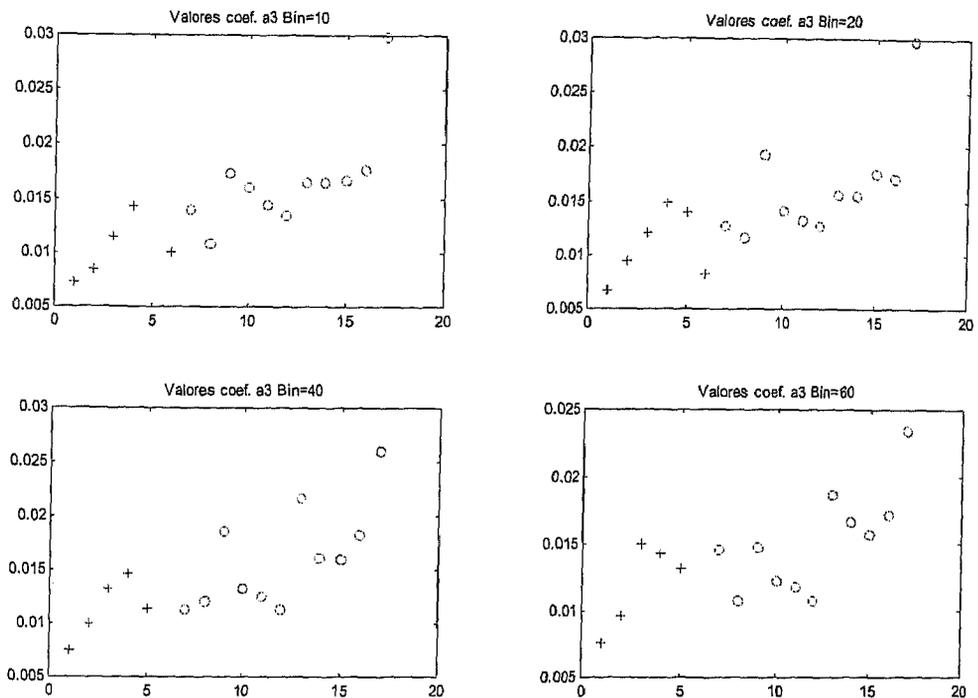


FIGURA 26

*Evolución de los coeficientes  $a_3$  o bien  $c_3$  para las diferentes pruebas y los bin (intervalo) 10, 20, 40 y 60.*

En cuanto a las pruebas ordenadas por el mejor resultado por atleta (con círculo) parecen agruparse las de 100 y 200 por una parte, 400, 800 y 1000 como intermedio, otro grupo con 1500, 3000, 5000, 10000 y una separación clara de medio maratón y maratón, esto para bin 10 y bin 20. En tanto para bin mayores, la prueba de 3000 se separa claramente, así como media maratón y maratón. Para bin grandes (cuando las marcas se acentúan más o más estructura multifractal) al parecer se agrupan 400 y 800; 1000 y 1500 mientras que 3000 se aleja; 5000 y 10000 se acercan y media maratón y maratón siguen su tendencia a alejarse.

Queda claro que independientemente del nivel de rendimiento y el número de intervalos (bin) que se escoja para el análisis, este comportamiento siempre sigue una ley de escala y los agrupamientos entre pruebas e íter pruebas estará provocado por una serie de circunstancias propias del deporte y específicamente de la especialidad.

Se sabe que cada vez que un conjunto de elementos comienza a "conservarse", se abre un espacio para que todo el resto de los elementos del sistema cambien en torno a aquello que se conserva. Aparecen consecuentemente nuevas características y nuevos estados que arrastrarán los comportamientos posteriores.

En este apartado, igualmente, se observa que la estructura general se mantiene, pero las circunstancias cambian provocando la adaptación del sistema que debe conservarse. Ello explica en cierta forma el agrupamiento de pruebas como 100, 200 y 400 metros y su alejamiento de otro grupo de pruebas tales como media maratón y maratón, dejando en un estado intermedio al grupo de pruebas con predominancia metabólica de características más mixtas. Si bien es cierto, el comportamiento al interior de la prueba puede variar (aunque no sustantivamente), su relación con el resto de las pruebas del sistema provocará algún otro mecanismo tendiente a favorecer la adaptación del mismo.

La dinámica relacional entre los elementos que conforman el sistema, también se conserva, aunque existen variaciones que son absorbidas por el proceso de adaptación del mismo la coherencia de las relaciones entre estas circunstancias es lo que se conserva.

En este contexto, el análisis pormenorizado bajo diferentes intervalos, muestra que el comportamiento de las pruebas tiende sistemáticamente a reagruparse en torno a barreras naturales, para luego, una vez superadas las mismas, arrastrar al resto de las marcas. Este comportamiento analizado en un capítulo anterior se confirma al observar detalladamente las pruebas. Si bien es cierto cada disciplina presenta un agrupamiento propio de las características individuales de los exponentes y de las disciplinas, el sistema pruebas atléticas analizada en este apartado del estudio, presenta un comportamiento bastante definido y una evolución constante hacia estados críticos.

#### IV BIBLIOGRAFÍA

- Almendro, M. (2000). **El Significado de las Teorías del Caos en Psicoterapia**. Tesis doctoral. Facultad de Psicología. Universidad Autónoma de Madrid. Madrid.
- Bak, P. (1993). In: Stein W., Varela, J. (Eds), **Thinking About Biology**. Santa Fe Institute, Addison-Wesley, Reading, MA.
- Bak, P. (1997). **How Nature Works: The Science of Self-Organized Criticality**. Oxford University Press, Oxford.
- Bak, P. Tang, C. Wiesenfeld, K., (1987). **Self-organized criticality. An Explanation of 1/f noise**. Phys. Rev. Lett. 59
- Bergstrom and Huetmann, (1967). **The Muscle glycogen synthesis after exercise an enhancing factor localized to the muscle cell in man**. Nature 210, 309 – 310.
- Binney, J.J, Dowrick, N. W., Fisher, A.J., Newman, M.E.J., (1993). **Theory of Critical Phenomena**. Clarendon Press, Oxford.
- Blest, D.C., (1996). **Lower Bound for athletic performance**. Statistician 45, 243-253
- Bunde, A., Havlin, S. (Eds.), (1994). **Fractals in Science**. Springer, Berlin.
- Carlson, J.M., Doyle, J., (1999). **Highly optimized tolerance: a mechanism for power laws in designed systems**. Phys. Rev. E 60 (2).
- Chatterjee, S., Laudato, M., (1996). **An analysis of word record times of men and women in running, skating and swimming**. J. Strength Conditioning Res. 104 (4), 274-278.

- Clark, P. (1999). **Discurso**, University of St. Andrews.  
[www.groups.dcs.st.and.ac.uk/~history/mathematicians/Mandelbrot.html](http://www.groups.dcs.st.and.ac.uk/~history/mathematicians/Mandelbrot.html).  
[Consulta: 31 Diciembre, 2005]
- Costill, D. L.; Gollnik, P. D.; Jansson, E.; Saltin, B.; Stein, E.M. (1971 – 1973a). **Glycogen depletion patterns in human muscle fibers during distance running**. Acta Physiologica Scandinavica. 89. 374 - 383
- Feder, J., (1998). **Fractals**. Plenum Press, New York.
- Flake, G.W. **The Computational Beauty Nature**. MIT. Press.
- García-Manso, J.M. (1999). **Alto Rendimiento. La Adaptación y la Excelencia Deportiva**. GYMNOS. Madrid
- García-Manso y Martín-Glez, (2005). **Teoría del Entrenamiento Deportivo vista desde la Teoría de la Complejidad**.
- García – Manso, J.M.; Martín – González, J.M.; Dávila, Nancy; Arriaza Ardiles, E. (2004). **Middle and long distance athletics races viewed from the perspective of complexity**. Ed. Journal of Theoretical Biology. ELSEVIER.
- Grubb, H.J. (1997). **Models for Comparing Athletics Performances**. Departament of Applied Statistics. University of Reading. United Kingnston
- Haken, Hermann (Foreword); Kelso, J.A.Scott. (1995). **Dynamic Patterns: Self-organization of Brain and Behavior (Complex Adaptive Systems)**. Cambridge: MIT Press.
- Haken, Hermann (1977). **Synergetics**. An Introduction. Berlín, Springer.  
Halsey, T.C., Jensen, M.H., Kadanoff, L.P., Procaccia, I., Shraiman, B.I.,

- (1986). **Fractal measures and their singularities; the characterisation of strange sets**. Phys. Rev.A 33, 1141.
- Hawley, J. A.; Hopkins, W.G. 1995. **Aerobics glycolytic and aerobic lipolytic power system**. Sports Medicine 19, 240 - 250
  - Henty, F.M., (1995). **Prediction of worlds records in running sixty yards to twenty-six miles**. Res Q. 26, 147-158
  - Holland, J.H., (1995). **Hidden Order: How adaptation Build Complexity**. Addison-Wesley Publishing Co., New York.
  - Holland, J.H., (1998). **Emergence, From Chaos to Order**. Addison-Wesley, Reading, MA.
  - Jeldtoft Jensen, Henrik. **Self-Organized Criticality: Emergent Complex Behaviour in Physical and Biological Systems**, Cambridge Lecture Notes in Physics 10, Cambridge University Press.
  - Jensen, H.J., (1998). **Self-Organised Criticality**. Cambridge University Press, Cambridge.
  - Jirsa, Viktor K. (Editor), J.A.Scott Kelso (Editor). (2004). **Coordination Dynamics: Issues and Trends (Understanding Complex Systems S.)** Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co.
  - Katz, J.S., Katz, L., (1994). **Fractal (power laws) analysis of athletic performance**. Sport Medicine, Training and Rehabilitation, 5, 95 - 105.
  - Katz, J.S., Katz, L., (1999). **Power laws and athletic performance**. J. Sport Sci. 17, 467-476.
  - Kelso, J.A.S. (1997). **Dynamic Patterns: The Self Organization of Brain and Behavior**. Cambridge: MIT Press.

- Kelso, Scott, J.A. (1997). **Dynamic Patterns: The Self Organization of Brain and Behavior (Complex Adaptive Systems)** The MIT Press.
- Kelso J.A. S. (1998). **Dynamic Patterns in Complex Systems**. World scientific Publishing
- Kelso, J.A.S. (2001) **Self-organizing dynamical systems**. In Smelser, N.J. & Baltes, P.B., (Eds. in Chief) International Encyclopaedia of Social and Behavioral Sciences. Amsterdam; Pergamon.
- Kenelly, A. E., (1906). **An approximate law of fatigue in the speeds of Racing animals**. Proc. Am. Acad. Arts Sci 42, 273, 331.
- Levinson, E.A. (1994). **The uses of disorder: Chaos theory and psychoanalysis**. Contemporary Psychoanalysis, 30(1), 5-24.
- Lietzke, M.H., (1954). **An analytical study of world and Olympic racing Records**. Science 119, 333, 336.
- López, J.R., (1979). **Ecuación para evaluar carreras**. Bol. Científico Técnico 2,5-20.
- Malacarne, L. C.; Mendes, R. S., (2000). **Regularities in football goal distributions**. Ed. Journal Physica; Statistical Mechanics and its Applications. ELSEVIER.
- Manrubia, S.C., Zanette, D.H., (1999). Phys. Rev. E 59,4945.
- Mandelbrot, B. B. (1977). **The Fractal Geometrics of Nature**. New York: W. H. Freeman.
- Marks-Tarlow, T. (1999). **The self as a dynamical system**. **Nonlinear Dynamics**, Psychology, and Life Sciences, 3, 311-345.

- Martín, J.M. (2002). Conferencia "**Conciencia y Realidad: algunos aspectos científicos abiertos a comienzos del III milenio. Bases para un debate**". Universidad de Tenerife.
- Miramontes, O., (2000). **Orden y caos en la organización social de las hormigas**. Ciencias. Departamento de Sistemas Complejos. México.
- Moriello. S., (2003). **Sistemas complejos, caos y vida artificial**. <http://www.redcientifica.com>. [Consulta: 19 Noviembre, 2003]
- Newman, N., (2000). **The power of design**. Nature 405, 412, 413.
- Newman, M. E. J., (2005). **Power laws, Pareto distributions and Zipf's law**.
- Newsholme, E. A.; Blorstrand, E.; McAndrew, N.; Parry-Billings, M. (1992). **Biochemical causes of fatigue and overtraining**. In **Endurance in sport**. Ed. Shepard, R.J.; Astrand, P.O. London: Blackwell Scientific.
- Nicolis Gregoire and Prigogine Ilya. (1977). **Self-Organization in Non-Equilibrium**. Systems, Wiley.
- Paczuski, M., Maslow, S., Bak P., (1996). Phys, Rev.E 53, 414. Peronnet, F., Thibault, G., 1989. **Mathematical analysis of running Performance and world running records**. J. Appl. Physiol. 67. 453-65.
- Prigogine, I. and I. Stengers (1984). **Order Out of Chaos: Man's New Dialogue with Nature**. Toronto: Bantam Books.
- Riegel, P.S. (1981). **Athletic records and human endurance**. Am. Sci. 69 985-990.

- Sahlin, K.; Katz, A.; Broberg, S. 1990. **Tricarboxilic acid cycle intermediates in human muscle during prolonged exercise.** American Journal of Physiology. 259. 834 – 841.
- Savaglio, S., Carbone, V., (2000). **Scaling in athletic worlds records.** Nature 404, 244.
- Schroeder, M., (1991). **Fractal, Chaos, Power Laws.** W.H. Freeman, New York.
- Shephard, R.J.; Astrand, P.O. (1996). **La Resistencia en el Deporte.** Ed. Paidotribo. Barcelona.
- Solé, R.V., Goodwin, B.C., (2001). **Signs of Life: How Complexity Pervades Biology.** Perseus Books. New York.
- Solé, R.V., Manrubia, S.C., Suque B., Delgado, J. Bascompte, J. (1996). **Phase transitions and complex systems.** Complexity 1,13,26
- Solé, R.V., Manrubia, S.C., (1996). **Orden y caos en sistemas complejos.** Ediciones UPC. Barcelona.
- Solé, R.V., Bascompte, J.; Delgado, J.; Luque, B.; Manrubia, S.C., (1996). **Complejidad en la frontera del caos.** Investigación y Ciencia. Barcelona.
- Takayasu, H., (1992). **Fractals in the Physical Sciences.** Wiley, Chichester, Uk.
- Vogt, P. (2004). **Minimum cost and the emergence of the Zipf-Mandelbrot law.** Artificial Life IX Proceeding of the Ninth International Conference on the Simulation and Synthesis of Living Systems.
- West, B.J., (1990). **Fractals Physiology and Chaos in Medicine.** World Scientific, Singapore.