

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA DE PROCESOS



TESIS DOCTORAL

**SIMULACIÓN DEL FLUJO NO ESTACIONARIO EN LOS
COLECTORES DE ADMISIÓN Y ESCAPE DE UN MOTOR
POLICILÍNDRICO**

LUIS GONZALO CONDE CID

Las Palmas de Gran Canaria, Marzo de 1998

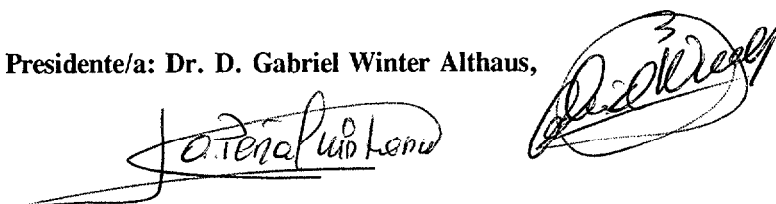
+

53/1997-98
UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA
UNIDAD DE TERCER CICLO Y POSTGRADO

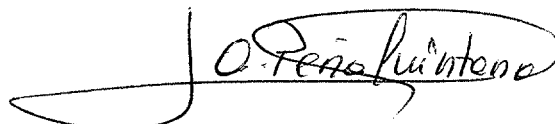
Reunido el día de la fecha, el Tribunal nombrado por el Excmo. Sr. Rector Magfco. de esta Universidad, el/a aspirante expuso esta TESIS DOCTORAL.

Terminada la lectura y contestadas por el/a Doctorando/a las objeciones formuladas por los señores miembros del Tribunal, éste calificó dicho trabajo con la nota de SOBRES. CUM LAUDE Las Palmas de Gran Canaria a 2 de junio de 1998.

El/a Presidente/a: Dr. D. Gabriel Winter Althaus,



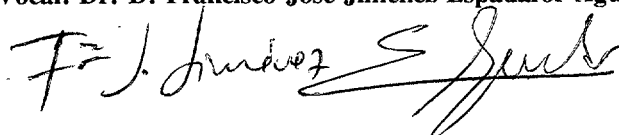
El/a Secretario/a: Dr. D. Juan Antonio Peña Quintana,



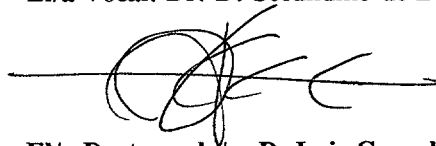
El/a Vocal: Dr. D. Antonio Muñoz Blanco,



El/a Vocal: Dr. D. Francisco José Jiménez Espadafor Aguilar,



El/a Vocal: Dr. D. Secundino de León Pérez,



El/a Doctorando/a: D. Luis Gonzalo Conde Cid,



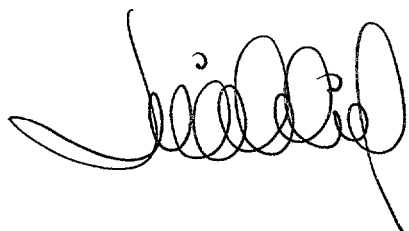
UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA DE PROCESOS

TESIS

**SIMULACION DEL FLUJO NO ESTACIONARIO EN LOS
COLECTORES DE ADMISION Y ESCAPE DE UN MOTOR
POLICILINDRICO**

**AUTOR:
D. Luis Conde Cid**

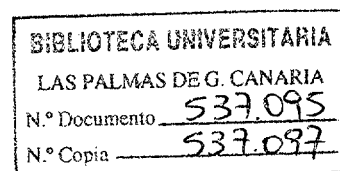


**DIRECTOR:
Dr. D. Tomás Sánchez Lencero**



**ESCUELA TECNICA SUPERIOR
DE INGENIEROS INDUSTRIALES**

Las Palmas de G. C., Marzo de 1998



Durante la elaboración de este trabajo han sido muchas las personas que me han apoyado. De entre ellas me permito destacar al Profesor Dr. D.Tomás Sánchez Lencero, por su estímulo, paciencia y labor de dirección. A sus colaboradores los Drs. Antonio Muñoz, Francisco Jimenez y Juan Marin por la ayuda material y humana prestada para la validación experimental. Con todos ellos he establecido a lo largo del tiempo una relación distinta de la académica y mas cercana a la amistad.

Al prof. Dr. D Juan Ortega Saavedra, tutor de ésta Tesis por depositar en mi su confianza.

Al Prof. Dr. D. Gabriel Winter del Departamento de Matemáticas por su colaboración sincera.

A todos ellos y a los compañeros del Departamento que me han demostrado su apoyo y alegría por la finalización de este trabajo, mi mas sincero agradecimiento.

INDICE

CAPITULO I:

REVISION BIBLIOGRAFICA Y CONTENIDO.

1.1.- INTRODUCCION.

1.2.- REVISION BIBLIOGRAFICA.

1.2.1.- FLUJOS HOMENTROPICO Y NO HOMENTROPICO.

1.2.2.- METODOS PARA LA SOLUCION DE LAS ECUACIONES DE LA DINAMICA DE GASES DE FLUJO COMPRESIBLE NO ESTACIONARIO.

1.2.2.1.- METODO DE LAS CARACTERISTICAS.

1.2.2.2.- TECNICAS EN DIFERENCIAS FINITAS.

1.2.3.- APLICACION DE LAS TECNICAS EN DIFERENCIAS FINITAS PARA RESOLVER EL FLUJO EN LOS MCI.

1.3.- PLANTEAMIENTO Y CONTENIDO DE LA TESIS.

CAPITULO II:

ONDAS DE PRESION Y MOTORES ALTERNATIVOS.

2.1.- INTRODUCCION.

2.2.- VACIADO IDEAL NO ESTACIONARIO.

2.3.- LLENADO NO ESTACIONARIO.

2.4.- VACIADO O LLENADO NO ESTACIONARIO EN CONDUCTOS DE GEOMETRIA FINITA.

2.5.- EFECTOS DE LA PRESION DINAMICA EN LA ADMISION.

2.5.1.- MOTORES MONOCILINDRICOS DE CUATRO TIEMPOS.

2.5.2.- MOTORES POLICILINDRICOS DE CUATRO TIEMPOS.

2.5.3.- RENDIMIENTO VOLUMETRICO.

2.6.- BARRIDO POR ONDAS DE PRESION.

2.6.1.- BARRIDO EN MOTORES MONOCILINDRICOS.

2.6.2.- BARRIDO EN MOTORES POLICILINDRICOS.

CAPITULO III:

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA. SOLUCION ADOPTADA.

3.1.- INTRODUCCION.

3.2.- ECUACIONES BASICAS.

3.2.1.- SOLUCION ADOPTADA.

3.3.- REVISION DE LA TEORIA DE LAS SOLUCIONES DEBILES DE LAS LEYES DE CONSERVACION.

3.3.1.- CLASIFICACION DE LAS SOLUCIONES DEBILES.

3.3.2.- SOLUCIONES DEBILES DE LAS ECUACIONES DE LA DINAMICA DE GASES.

3.4.- RESOLUCIONES NUMERICAS DEL SISTEMA DE ECUACIONES. METODO DE GLIMM.

3.4.1.- INTRODUCCION TEORICA DEL METODO DE GLIMM.

3.4.2.- ELECCION DE LA SECUENCIA DE VARIABLES ALEATORIAS.

3.4.3.- CONSISTENCIA, ESTABILIDAD Y CONVERGENCIA DEL METODO DE GLIMM.

3.4.4.- IMPLEMENTACION DEL METODO DE GLIMM.

3.4.4.1.- SOLUCION DEL PROBLEMA DE RIEMANN. METODO ITERATIVO DE GODUNOV.

3.4.4.2.- ECUACIONES PARA LA IMPLEMENTACION DEL METODO DE GLIMM.

3.5.- RESOLUCION NUMERICA DEL SISTEMA DE ECUACIONES NO HOMOGENEO.

CAPITULO IV:

VALIDACION DEL METODO DE SIMULACION NUMERICA ADOPTADO.

4.1.- INTRODUCCION.

4.2.- ANALISIS DEL EFECTO PRODUCIDO POR LA ELECCION DEL PROCEDIMIENTO DE MUESTREO SOBRE LA EXACTITUD DEL METODO DE GLIMM.

4.2.1.- COMPARACION CON OTROS METODOS.

4.3.- APLICACION DEL METODO DE GLIMM GENERALIZADO AL FLUJO NO ESTACIONARIO EN CONDUCTOS DE SECCION VARIABLE CON FRICCION Y TRANSFERENCIA DE CALOR.

4.3.1.- COMPARACION DE METODOS PARA FLUJO HOMENTROPICO.

4.3.2.- ANALISIS DE LOS RESULTADOS PARA FLUJO NO HOMENTROPICO EN
CONDUCTOS DE SECCION VARIABLE.

4.4.- RECAPITULACION.

CAPITULO V:

CONDICIONES DE CONTORNO EN LOS MCI ALTERNATIVOS.

5.1.- INTRODUCCION.

5.2.- ACOPLAMIENTO DE LOS METODOS DE LAS CARACTERISTICAS Y DE GLIMM EN
LOS EXTREMOS DE LOS CONDUCTOS DE LOS MCI.

5.3.- CONDICIONES PARA FLUJO ENTRANTE O SALIENTE.

5.4.- EXTREMO CERRADO.

5.5.- EXTREMO ABIERTO.

5.6.- CONDICIONES DE CONTORNO EN LAS VALVULAS.

5.7.- CONDICIONES DE CONTORNO EN LA UNION RAMIFICACION DE CONDUCTOS.

5.8.- CONDICIONES DE CONTORNO EN EL CILINDRO.

CAPITULO VI:

**MODELADO DEL PROCESO DE RENOVACION DE CARGA EN LOS MCI.
ALTERNATIVOS. VALIDACION EXPERIMENTAL. APLICACIONES.**

6.1.- INTRODUCCION.

6.2.- VALIDACION EXPERIMENTAL.

6.2.1.- DATOS INICIALES Y CALCULOS PRELIMINARES.

6.2.1.1.- DEFINICION DEL MODELO DE CALCULO PARA LOS SISTEMAS DE
ADMISION Y ESCAPE.

6.2.1.2.- CALCULOS DE LOS COEFICIENTES DE FLUJO.

6.2.2.- VALIDACION DEL MODELO POR COMPARACION CON LOS RESULTADOS
EXPERIMENTALES.

6.3.- APLICACION DEL MODELO DE SIMULACION A UN SISTEMA DE INDUCCION DE
GEOMETRIA VARIABLE (SIGV).

6.4.- RECAPITULACION.

CAPITULO VII:

CONCLUSIONES.

7.1.- CONCLUSIONES.

7.2.- DESARROLLOS FUTUROS.

REFERENCIAS.

APENDICES.

CAPITULO I

REVISION BIBLIOGRAFICA Y CONTENIDO

1.1.- INTRODUCCION

La naturaleza pulsante del flujo en un motor de combustión interna (MCI) alternativo, crea significativos efectos dinámicos en el movimiento del gas en los sistemas de admisión y escape, que influyen en gran medida en el rendimiento volumétrico, y por lo tanto en las prestaciones del mismo en todo su rango de operación, ya que la renovación de la carga es altamente dependiente de su velocidad de giro. Esto es debido a que la impedancia de los colectores es una función de los pulsos que entran en ellos.

Esta situación permite la posibilidad de obtener una evolución favorable de la presión media efectiva (o el par) en el rango de regímenes de vueltas deseado, actuando sobre los parámetros de diseño geométrico que influyen sobre los fenómenos no estacionarios del flujo en los sistemas de admisión y escape. Entre ellos se incluyen principalmente la longitud y área de la sección de los conductos, el volumen y localización de los "*plenum*" y uniones donde se juntan varios de estos, la forma de las lumbreras o pipas de admisión, el número de cilindros y su desplazamiento, así como el reglaje de la distribución y levantamiento de válvulas.

Esta practica se conoce como “*sintonización*” de colectores y se encamina a lograr los objetivos que se persiguen en los motores de automoción actuales, que son:

- **Alto rendimiento volumétrico a regímenes medio y bajo con pérdidas mínimas a velocidades altas.**
- **Distribución uniforme de la carga de aire-combustible y gases recirculados entre los cilindros.**
- **Mínima dilución con los gases residuales al ralentí y en operación a baja carga.**

Aunque a través de ensayos en un banco de flujo estacionario se puede intuir el funcionamiento de un diseño específico de los colectores, la influencia significativa de los efectos dinámicos del flujo limita su utilidad. Obviamente, un modelo capaz de predecir acertadamente la influencia de los parámetros anteriormente mencionados sobre el comportamiento global del motor, sería sin duda una herramienta eficaz para el diseñador de motores, por lo que el uso de simulaciones a través de computadoras de los procesos no estacionarios que tienen lugar en los mismos, se hace cada día más relevante como ayuda al diseño de los elementos que forman los sistemas de admisión y escape.

El modelo para el diseño de los sistemas mencionados es susceptible de realizarse de varias maneras. Para los motores aspirados el más adecuado es aquel que considera las variaciones espaciales que sobre el flujo y la presión produce el movimiento de las ondas en los conductos, por ser ésta la única manera de tener en cuenta el gran efecto que el proceso de flujo no estacionario tiene sobre el rendimiento volumétrico. Tales métodos son conocidos como de “*acción de onda*”.

Se pueden utilizar técnicas más simples con motores sobrealimentados, ya que el compresor y la turbina actúan como filtros que amortiguan los efectos de las ondas a su paso por éstos. Estos motores son menos sensibles a tales efectos, denominándose a las técnicas o modelos que no los tienen en cuenta como de "*filling and emptying*", ya que se consideran a los colectores y cilindros como una serie de volúmenes de control finitos interconectados, donde la masa del gas en estado uniforme, puede incrementar o disminuir con el tiempo a través de sus contornos, a saber: válvulas, compresor y turbina. Una descripción detallada de las técnicas utilizadas para analizar los procesos que tienen lugar en los motores de combustión interna alternativos la han llevado a cabo Horlock y Winterbone [1], y una excelente descripción cualitativa de los factores que afectan al flujo en dichos motores Annand y Roe [2].

Una simulación completa de los sistemas de admisión o escape, requiere un modelado tridimensional de las ecuaciones de la dinámica de fluidos que incluya algún modelo del nivel de turbulencia en el fluido [3]. Además como los flujos turbulentos se caracterizan por una dispar variación en espacio y tiempo, y debido a la alta sensibilidad que muestran ante las condiciones iniciales y de contorno, para una solución directa se hace necesario una muy fina discretización multidimensional.

Con la llegada de potentes supercomputadoras y eficientes generadores de malla, el cálculo en la dinámica de fluidos está alcanzando una etapa donde se espera que el análisis numérico de los procesos de flujo y combustión de los gases en los motores de combustión interna, sea una herramienta que ofrezca un coste efectivo que la haga ser una alternativa válida a los métodos experimentales tradicionales usados en la investigación y desarrollo de los motores [4], aunque la validación experimental de los cálculos multidimensionales es todavía inadecuada y requiere de una promoción continua. En este contexto se han publicado una serie de trabajos, en los que parte de los colectores [5,6] o el flujo a través de válvulas [7,8], han sido tratados de forma tridimensional, basándose en el programa general de turbulencia "Phoenix" [9].

Estos estudios muestran que varios componentes de los sistemas que intervienen en la renovación de la carga de los MCI pueden ser tratados en detalle, pero el análisis se limita a flujo cuasi-estacionario, por lo que no pueden calcularse los efectos dinámicos, mientras que Chapman [10] empleando un modelo bidimensional considera flujo no estacionario en los conductos, aunque sus predicciones no fueron comprobadas con alguna medida que validase el modelo. Tosa, Shimoda y Oikawa [11] han publicado un cálculo similar en el que aplican análisis bidimensional a las uniones de los conductos y monodimensional al resto. Un método tridimensional capaz de simular el flujo de un gas en la totalidad de los colectores de los MCI, denominado FVFLIC, fue desarrollado por Zhao y Winterbone [12]. Los resultados que predice este código, son buenos según los autores [13], pero no se ha realizado diseño ni optimización alguna que lo confirme.

De todo lo expuesto hasta ahora, se deduce que hay progresos hacia el cálculo multidimensional del flujo en los colectores de los MCI.

Sin embargo los métodos que están siendo usados en la industria para el diseño de los sistemas de admisión y escape son, en general, formulaciones monodimensionales de las ecuaciones de la dinámica de fluidos compresibles, aplicadas al estudio de las características dinámicas globales del flujo en los conductos de los motores. Ello permite una reducción sustancial en la complejidad de los programas para computadora (propia de las formulaciones multidimensionales), con la consiguiente reducción de costo en tiempo de ejecución, rentabilizándose esta opción a pesar de la utilización de algo de empiricismo y pérdida de definición en los campos de flujo [14]. Aun así, los modelos que tienen en cuenta la propagación de ondas en los conductos, son actualmente un instrumento de fundamental importancia para el dimensionamiento y diseño de los mismos y para definir la ley de distribución [15].

Como ejemplo, mencionar los trabajos de Boretti, Lisbona y Nebuloni [16], en los que, empleando un método numérico desarrollado en el Imperial College de Londres y por la Joint Research Commitee of European Car Manufacturers, simulan el flujo en el interior de los cilindros por medio de un modelo tridimensional, utilizando un generador automático de mallas para la definición paramétrica de las geometrías en el interior del cilindro. Pero, en el modelado del ciclo abierto, debido a la dificultad en simular el flujo no estacionario de manera tridimensional, los cálculos en el interior del cilindro se reducen a flujo estacionario (como se mencionó anteriormente) en el período de tiempo en que las válvulas de admisión ó escape se encuentren abiertas, con la necesidad de suministrar condiciones iniciales adecuadas en el momento del cierre de la válvula de admisión.

A esta simplificación hay que añadir que para la obtención de la presión, temperatura y composición de la mezcla de gases durante las carreras de admisión y expansión, se recurre a un modelo cero-dimensional [17,18] para la solución de las ecuaciones de conservación de masa, energía y especies, acoplado a un análisis monodimensional del movimiento de las ondas en el interior de los conductos [19] ya que se requieren valores no estacionarios de presión y temperatura para poder optimizar la resonancia de los sistemas de admisión y escape [20], con el fin de obtener un rendimiento volumétrico alto.

1.2.- REVISION BIBLIOGRAFICA

Las ecuaciones básicas que describen el flujo no estacionario de un gas compresible de manera unidimensional son:

Continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} = -\rho u \frac{d \ln A}{dx}$$

Momento

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -g$$

Energía

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} \frac{1}{k-1} \right) \rho A dx \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} \frac{1}{k-1} \right) \right] dx = q \rho A dx$$

Estas ecuaciones que son hiperbólicas no lineales, forman un sistema generalmente sin solución analítica sino se consigue su linealización, y tienen como característica la capacidad de transmisión por medio de ondas a través del fluido, de los efectos que cualquier perturbación cause en el flujo de un gas compresible. Su solución nos mostrará de que manera la onda ha transportado la perturbación a través de todos los puntos de su recorrido.

En el interior de los conductos de un MCI, esta perturbación se transforma en variaciones de presión con respecto al nivel local de la misma, debido a los procesos de compresión o expansión generados por el paso de las ondas (generalmente de gran amplitud) a través de estos conductos.

1.2.1.- FLUJOS HOMENTROPICO Y NO-HOMENTROPICO.

El sistema de ecuaciones anteriormente reseñado contempla en su solución general la variación de entropía en todo el campo de flujo debido a las irreversibilidades, que en el caso de los MCI se producen por el paso del flujo a través de las válvulas, por la variación de la sección de los conductos, por la transferencia de calor, y por la fricción. El flujo asociado a tal solución se conoce como no-homentropico.

Si asumimos que los procesos de expansión o compresión causados por el paso de las ondas son isentropicos, significará que todos los puntos del fluido en el régimen de flujo considerado están a la misma entropía, estado que se conoce como flujo homentropico, solo alcanzable en condiciones ideales de flujo adiabatico, sin fricción, sin transferencia de calor y con composición constante del fluido.

La suposición anterior junto a la de considerar despreciables los cambios de área de la sección de los conductos, permite introducir la simplificación de que la ecuación de la energía del sistema anterior pueda ser reemplazada por una relación isentrópica simple, quedando dicho sistema, para el caso en que se considere flujo homentrópico reducido a las ecuaciones siguientes:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\alpha^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \quad \text{y} \quad \frac{p}{p_{ref}} = \left(\frac{\alpha}{\alpha_A} \right)^{\frac{2K}{K-1}}$$

1.2.2.-METODOS PARA LA RESOLUCION DE LAS ECUACIONES DE LA DINAMICA DE GASES PARA FLUJO NO-ESTACIONARIO

Ya se ha visto que las ondas se producen en los colectores de los motores debido a la naturaleza periódica de los procesos de inducción y escape. En algunos casos la magnitud de la onda de presión es pequeña en comparación con el nivel de la presión local, permitiendo que las ondas de este tipo sean tratadas matemáticamente como lineales, lo que significa que en la superposición de ondas la amplitud combinada de estas es simplemente la suma de las amplitudes individuales, este efecto puede ser usado como método para el diseño de los colectores de la admisión, pero no son útiles para el estudio del flujo en los colectores de escape, donde la intensidad de las ondas es lo suficientemente grande para que la suposición anterior deje de ser valida. De hecho Lighthill [21], describe varias de las técnicas que se han desarrollado para tratar este tipo de ondas y su propagación en tubos de área constante, así como el efecto que bifurcaciones, cavidades, extremos abiertos ó cerrados y la fricción causan en dicha propagación.

Una aportación interesante de la teoría lineal de ondas, ha sido la combinación conducto-deposito conocido con el nombre de "resonador de Helmholtz". La teoría asociada a él fue aplicada al diseño de los colectores de admisión en motores diesel por Cser [22].

Como se ha dicho, es posible aplicar en algún caso técnicas lineales al diseño del sistema de admisión, pero no son aplicables de ninguna manera a las ondas de presión que ocurren en el escape. Las ondas en los motores son generalmente no lineales y requieren métodos de calculo mas complejos para resolver el sistema de ecuaciones que define el flujo no-estacionario de un fluido compresible, y como se señalo anteriormente, la única manera de lograrlo es conseguir su linealización.

Una vez se haya logrado esto, el método mas apropiado para evaluar las características de dicho flujo en los conductos de admisión y escape, es aquel que sea capaz de resolver paso a paso las ecuaciones resultantes de la linealización para flujo no-homentropico.

Dos tipos de métodos han sido usados ampliamente para resolver estas ecuaciones:

- **Método de las Características**
- **Técnicas en Diferencias Finitas**

La aproximación numérica que se consigue con dichos métodos es de primer orden en espacio y tiempo para el de las características, y de orden superior para el de diferencias, por lo que en una primera aproximación parece más eficiente este ultimo.

1.2.2.1.- METODO DE LAS CARACTERISTICAS.

A través de este método, ampliamente usado para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales hiperbólicas, se identifican unas curvas especiales en el plano $x-t$, llamadas "*curvas características*", a lo largo de las cuales la solución de las ecuaciones hiperbólicas se reduce a la integración de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Este proceso, demuestra de manera clara y definida, que la información necesaria para evaluar las condiciones del flujo en cualquier punto en espacio y tiempo, se propaga por medio de ondas. Estas se desplazan a la velocidad del sonido, en la dirección del flujo ó en oposición al mismo. Es por esto, que el método de las características da una visión del fenómeno de flujo no-estacionario, que no consigue ningún otro desarrollo.

En este caso particular las ecuaciones se preparan de tal forma, que contengan solamente las velocidades locales del sonido "a" y del fluido "u", y su solución se hizo en principio de manera gráfica en la forma propuesta por Riemann [23], (introdutor del método de las características en 1885). De Haller [24] y Jenny [25] fueron los primeros en aplicarlos a los MCI, resultando un proceso extremadamente largo y tedioso.

Los ordenadores de alta velocidad y capacidad de calculo han hecho posible que se pueda utilizar el método gráfico usando coordenadas simples para la representación de los puntos de cruce de las ondas [26]. Sin embargo la necesidad de almacenar gran cantidad de datos de onda en una red irregular con el consiguiente aumento en el tamaño del programa y en tiempo de ejecución del mismo, hace poco practica esta solución.

El análisis numérico es mucho más efectivo al poder reducir el problema a una estructura de malla rectangular en las direcciones x y t, de manera que el sistema de admisión ó escape se divide en secciones de conductos individuales los cuales están conectados en las "uniones", asignado a cada conducto una malla entre sus extremos o contornos. De esta manera y a partir de valores iniciales en cada nodo de la red en el instante $t=0$ y considerando un incremento de tiempo determinado se calculan las variables de Riemann para cada uno de los puntos de la malla.

La primera aplicación de este método a los MCI (conocido como "de malla"), la hicieron Benson, Garg y Woollant en 1964 [27], convirtiéndose a partir de aquí, posiblemente en la técnica mas usada para el estudio de los problemas de flujo no-estacionario en los motores alternativos [28 a 34].

No obstante, hay que tener en cuenta que la formación de ondas de choque en flujo no estacionario, es una importante área de estudio. La solución numérica del método de las características no alcanza a tratar este tipo de ondas, aunque en la

mayor parte de los MCI estas no llegan a desarrollarse, excepto en el escape de los motores de dos tiempos.

1.2.2.2.-TECNICAS EN DIFERENCIAS FINITAS

De los métodos de aproximación numérica disponibles para la resolución de las ecuaciones diferenciales hiperbólicas, los que emplean "diferencias finitas", son los que de manera más frecuente y universal se emplean en este cometido.

El método de las características es en realidad una técnica en diferencias finitas, pero difiere de las mas usualmente conocidas con este nombre, porque calcula los valores de las variables de Riemann en todos los puntos conociendo la naturaleza ondulatoria del flujo. Las técnicas en diferencias normales, contribuyen a calcular los valores de los parámetros del flujo sin imponer realmente el fenómeno de la propagación en la solución.

Las ecuaciones hiperbólicas tienen su origen en problemas de vibración o en problemas donde las discontinuidades pueden persistir en el tiempo. Este es el caso de las ondas de choque, a través de las cuales se producen discontinuidades en velocidad, presión y densidad. En muchos problemas de la dinámica de fluidos, tales frentes de onda y discontinuidades son la principal característica de la situación física, dando lugar a soluciones no regulares o discontinuas. Desde el punto de vista numérico, los grandes gradientes asociados con estas soluciones hacen que sean extremadamente difíciles de tratar al producirse amplificación o amortiguamiento de la discontinuidad con el tiempo. Desgraciadamente las soluciones obtenidas por diferencias finitas tienen todas estas deficiencias, a saber, difusión numérica (amortiguamiento) y dispersión (cambio de fase), ó ambas a la vez debido al error de truncamiento. Ello ha dado lugar al desarrollo de numerosos algoritmos para subsanarlas, con el fin de

proporcionar al esquema en diferencias que se vaya a emplear, consistencia, estabilidad y convergencia en la solución alcanzada.

Una revisión de los métodos en diferencias más utilizados para la solución de los sistemas de leyes de conservación hiperbólicas no lineales, propios de la dinámica de gases, fue hecha por Sod [35]. Desde un punto de vista puramente matemático, comparo los métodos de Godunov [36], Lax-Wendroff [37], Hyman [38], MacCormack [39], un esquema "upwind" [40], y el esquema híbrido de Harten y Zwas [41] con el método de "elección aleatoria" (**Random Choice Method**) de Glimm [42,43]. Aunque este último utiliza un mallado para el cálculo, no es un método en diferencias en sentido estricto, porque en vez de llegar al valor de la solución en cada punto de la red a través de una suma ponderada, lo hace muestreando valores de una solución explícita de la onda.

Todos estos métodos son de malla fija con una misma estructura. Requieren aproximadamente la misma cantidad de almacenamiento, y todos son aproximaciones finitas de las derivadas resultantes de las leyes de conservación, pudiendo tratarse en principio un sistema arbitrario de las mismas, aunque con distinto grado de resolución a la hora de representar las interacciones de una familia de ondas.

Así, la mayor parte de los métodos en diferencias, cuando se aplican a problemas con discontinuidades, necesitan la adición de un término de "*viscosidad artificial*" (desarrollado por Von Newman y Richtmyer [44]) para reducir las oscilaciones producidas detrás de las ondas de choque. Su efecto será despreciable en las regiones de flujo uniforme. Cualquier otra forma de viscosidad artificial, es una variación de la mencionada anteriormente, tal como la de Lapidus [45], usada por Sod para hacer su informe con los métodos de Godunov, MacCormack y Lax-Wendroff de dos pasos, o los métodos aparecidos posteriormente, como el "de antidifusión" de Boris y Book [46], o el de "compresión artificial" de Harten [47], diseñado para acentuar los resultados en regiones con choques y discontinuidades. Tienen además la

ventaja de añadirse fácilmente a un esquema ya existente manteniendo el orden de aproximación del mismo, excepto con los métodos de muy alto orden, tal como el de Harten y Zwas, que al ser de sexto orden y el término de viscosidad artificial de Lapidus de tercero, las ventajas de la utilización de un método de este tipo se pierden.

La comparación de todos estos métodos se llevó a cabo utilizando el problema monodimensional del "tubo de choque", que es el caso más simple del "problema del valor inicial", en el cual los valores iniciales son constantes a cada lado del origen de la discontinuidad, y, para este caso, la velocidad del fluido en los extremos igual a cero. Las conclusiones a que llegó Sod fueron:

De todos los esquemas en diferencias probados sin el uso de procedimientos correctores, los métodos que produjeron mejores resultados fueron los de Godunov y Hyman, mientras que el de Glimm o RCM dio la mejor resolución en los choques y discontinuidades de contacto, (aunque debido a lo aleatorio del método su posición no era exacta, pero si en promedio), realizando perfectamente los estados constantes.

En cuanto a la utilización de procedimientos correctores con esquemas conocidos, generalmente mejora la resolución de los mismos, sin embargo están restringidos en su uso. Así el método híbrido de Harten y Zwas combina esquemas de primer orden con otros de orden superior de tal manera que aprovecha las mejores características de cada uno. El método de compresión artificial es utilizable solamente en esquemas de primer orden, pero utilizado con esquemas híbridos mejora los resultados del método de antidifusión de Boris y Book, pero este requiere algo más de memoria de almacenamiento para retener la información necesaria para cálculos intermedios.

La desventaja mayor en la utilización de estos procedimientos, es que se hace necesaria la elección de una determinada cantidad de parámetros cuyo número depende del problema dado. En el caso del método de antidifusión, hay que estimar el

valor del coeficiente difusión/antidifusión, y su elección puede afectar enormemente los resultados. En el esquema híbrido se debe elegir la tolerancia permitida en la variación de los valores de la entropía y densidad, para conocer hasta que punto se puede considerar despreciable dicha variación. Por último si se utiliza el método de compresión artificial, se debe incluir un test para localizar las zonas de flujo uniforme, que no siempre funciona correctamente.

En lo que se refiere a tiempo de ejecución, la única diferencia sustancial esta entre el método de Glimm y el resto de los esquemas, pues el primero requiere entre dos y tres veces mas que cualquiera de ellos. Pero puede dar la misma resolución con una malla con menor cantidad de puntos, por lo que en este sentido el método de Glimm puede resultar mucho más rápido.

Aun así, la ventaja central del método de Glimm con la ayuda del esquema de Godunov para resolver el problema de Riemann, es que tiene la simplicidad y estabilidad de un método de primer orden, con sustancialmente menos difusión numérica de la que usualmente tienen estos métodos.

1.2.3.- APLICACION DE LAS TECNICAS EN DIFERENCIAS FINITAS PARA RESOLVER EL FLUJO EN LOS CONDUCTOS DE LOS MCI.

De todos los métodos descritos y comparados anteriormente de manera estrictamente matemática, y a tenor de la literatura existente, se puede señalar al grupo de esquemas en diferencias de Lax-Wendroff de uno y dos pasos y a sus distintas variantes, como el mas comúnmente usado para el estudio del flujo comprensible no estacionario que tiene lugar en los sistemas de admisión y escape de los motores de combustión interna, utilizando un modelo de los denominados de "*acción de onda*".

Este método y el de las características se han convertido ambos en "*clásicos*" para su utilización en la solución de los problemas de flujo en los conductos de los MCI, siendo frecuente su utilización conjunta, puesto que una de las dificultades del esquema de Lax-Wendroff y de los métodos en diferencias, es que solo pueden aplicarse en puntos interiores de los conductos, por lo que se hace necesario otra técnica para incorporar las condiciones de contorno a la solución, mostrándose el método de las características como el adecuado para transmitir la información entre dos nodos.

La comparación entre ambos métodos al ser los mas ampliamente utilizados se ha hecho inevitable, por lo que las publicaciones en este sentido son numerosas. Poloni, Winterbone y Nichols [48] lo hicieron de manera directa utilizando un proceso simple de "*blowdown*", llegando a la conclusión que para flujo homentrópico en conductos simples el método de las características es más rápido, físicamente más simple y pedagógicamente más conveniente. En cuanto a flujo no homentrópico, especialmente en motores policilíndricos, se pueden considerar adecuados ambos métodos con resultados muy similares, aunque el esquema de dos pasos de Lax-Wendroff, es más rápido y satisface mejor la ecuación de continuidad, además de ser más fácil su implementación.

Takizawa et al [49], emplearon la técnica de usar Lax-Wendroff de dos pasos en el interior de los conductos y características para resolver los contornos en la simulación de la renovación de carga de un motor de automoción policilíndrico, y posteriormente compararon los resultados con los obtenidos utilizando solo el método de las características, poniendo énfasis en cuanto a conservación de la masa y energía del flujo, llegando a la conclusión que el esquema de Lax-Wendroff, da mejores resultados en este sentido.

A resultados parecidos llegaron Azuma et al [50], que emplearon la misma forma de comparación anterior en la simulación de un motor marino medio, sobre el

que tuvieron dificultades para calcular el flujo másico de aire con exactitud a través de las características, pero las variaciones de presión en los conductos se consiguieron con precisión aceptable, por lo que no parece que exista una superioridad absoluta de un método sobre el otro.

No cabe duda que el método de las características o cualquiera de las técnicas de Lax-Wendroff debido a su gran utilización, se encuentran perfectamente definidos y con una gran experiencia asociada a ellos lo que les permite ofrecer mejores puntos de partida que cualquier otro método que se utilice para evaluar el movimiento de las ondas en los conductos de los motores de combustión interna. No obstante existe un buen número de trabajos publicados en que se utilizan métodos diferentes de los dos anteriores, mas o menos rigurosos, pero con características propias.

Así para la integración de ecuaciones de flujo donde hay ondas en dos direcciones, Meisner y Sorensen [51] usaron el método de McCormack, obteniéndose un buen acuerdo en la frecuencia básica de las ondas en los colectores, pero diferencias sustanciales al evaluar la amplitud de la presión.

Chapman desarrollo un algoritmo denominado FRAM [52] para limitar la difusión numérica, permitiendo el uso de esquemas de diferencias finitas en regiones donde el flujo es uniforme, introduciendo una mínima cantidad de disipación en aquellas en que un algoritmo de grado alto produciría oscilaciones. Este algoritmo lo usaron Chapman, Novak y Stein [53] para modelar los flujos de admisión y escape de un motor de cuatro tiempos policilíndrico, y Walter y Chapman [54] el flujo de escape de un motor de dos tiempos, en los que se consiguió buena aproximación entre los valores calculados del rendimiento volumétrico y presión, con los obtenidos experimentalmente en el primer caso, y de la evolución de la presión en el segundo. Una ventaja de estos modelos comparados con otros similares en la literatura, es el uso de un único esquema en diferencias para cualquier tipo de flujo. Lo que hace de este desarrollo, según los autores, una herramienta efectiva en el diseño y

optimización de configuraciones practicas de los sistemas de admisión y escape de los motores.

Corberán y Gascón [55,56] adaptaron esquemas en diferencias finitas del tipo TVD (total variation diminishing) introducidas por Harten [57] al calculo del flujo no estacionario en conductos de sección variable. La idea básica es la formulación de los esquemas en función del flujo en vez de las variables conservativas para poder incluir correctamente el termino concerniente a la variación del área.

Una característica novedosa para modelar las uniones de los conductos llevada a cabo por Takeyama et al. [58], fue la utilización de un método que permite la introducción de cierto grado de bidimensionalidad en dicha región de cálculo, denominado FLIC (fluid in cell)[59], reduciendo la necesidad de utilizar coeficientes empíricos para considerar las perdidas de presión, para lo cual dicho método se mostró efectivo, usándose en conjunción con los esquemas de Lax-Wendroff u otro método unidimensional en el resto de las regiones de flujo.

El método de mas reciente aparición en comparación con el tiempo que llevan usándose los métodos en diferencias finitas, para la solución de los problemas del flujo no estacionario, es el ya mencionado RCM (random choice method) ó método de Glimm, desarrollado en principio por Chorin [42,60], como un método numérico efectivo en la dinámica de gases.

Desde ese tiempo, ha sido usado para calcular el flujo comprensible radialmente simétrico, de geometrías esféricas o cilíndricas [61,62], y en aplicaciones a algunos problemas de Ingenieria petrolífera [63]. Posteriormente Iwamoto y Deckker [64,65], con el propósito de aprovechar las ventajas de este método (definidas en un apartado anterior al compararlo con otros métodos) y su posible utilidad en el análisis del flujo en los sistemas de admisión y escape de los motores de pistón, lo aplicaron al estudio del flujo pulsante en un conducto recto y de sección

constante, producido por una válvula rotativa, teniendo en cuenta para el cálculo numérico la transferencia de calor y la fricción en la pared.

El buen acuerdo entre los resultados obtenidos experimentalmente y los calculados, sugieren que el método de Glimm es útil para este tipo de cálculos, aunque no existen todavía trabajos publicados con aplicación directa de este método a los conductos de admisión o escape de un motor alternativo que lo confirmen.

1.3-. PLANTEAMIENTO Y CONTENIDO DE LA TESIS

De todo lo visto, se pone de manifiesto que para la solución de las ecuaciones de conservación asociadas a los problemas de flujo compresible en los motores de combustión interna, los métodos que han impuesto su superioridad sobre el resto, en cuanto al número de veces utilizados, son, el método de las características y el de Lax-Wendroff en cualquiera de sus variantes. Actualmente se está generalizando el uso de esquemas en diferencias finitas del tipo FLIC (fluid in cell) y TVD (total variation diminishing) en detrimento de los anteriormente mencionados. No obstante, el método de las características mantiene su primacía en el tratamiento de las condiciones de contorno.

En contraposición a esto el método de Glimm no ha sido utilizado en este sentido, pero se presenta como una herramienta adecuada para hacerlo, ya que el poder de esta técnica radica en que las soluciones teóricas locales muestreadas contienen información extensiva sobre el fenómeno de interacción elemental de ondas, y el muestreo estadístico evita la aparición de la viscosidad numérica típica de los métodos en diferencias finitas. En particular, este método permite el tratamiento automático de la formación espontánea y la evolución de discontinuidades propias de sistemas hiperbólicos no lineales.

La toma en consideración de lo expuesto hasta ahora, fija como objetivo de esta tesis, desarrollar un modelo matemático unidimensional de los denominados de "*acción de onda*", que contribuya a mejorar el conocimiento del fenómeno del flujo no estacionario en los elementos que intervienen en la renovación de la carga de los MCI alternativos, ayudando al diseño de los mismos.

Elegimos el método de Glimm para resolver la parte homogénea del sistema asociado a las ecuaciones de conservación que nos define el flujo que estamos considerando, junto con el método de Godunov para la solución del problema de Riemann de dicho sistema. Como condición inicial se utilizara la solución estacionaria, obtenida al resolver la correspondiente parte no homogénea del sistema.

En el capítulo II se describen y analizan los fundamentos del proceso del flujo no estacionario de un fluido comprensible. Se examinan en primer lugar los procesos de llenado y vaciado no estacionarios que tienen lugar durante el tiempo de apertura o cierre del extremo de un conducto, y los efectos que sobre estos procesos tiene la geometría de los extremos del mismo.

Posteriormente se estudia la propagación en un conducto de las ondas asociadas a la apertura y cierre de válvulas. Proceso fundamental para lograr la "*sintonización*" de los de los sistemas de admisión y escape de los motores alternativos con el fin de sobrealimentar la carga de aire o aire-combustible por efecto de la presión dinámica durante la inducción, y, ayudar al barrido del contenido del cilindro durante el escape. Se mejora de esta forma el rendimiento volumétrico.

En el capítulo III se describe el método utilizado para resolver el sistema hiperbólico de leyes de conservación que definen la evolución del flujo no homentropico y no estacionario, propio de los colectores de los MCI, incidiendo solo en la parte matemática que analiza físicamente el comportamiento de las ondas en los conductos.

La eficacia del método desarrollado se valora en el capítulo IV a través de la experimentación numérica llevada a cabo con los problemas de flujo clásicos (tubo de choque, test de De Haller etc.), comparando los resultados obtenidos con los de otros métodos ya contrastados en la resolución de este tipo de problemas.

En el capítulo V se aborda la forma en que se trata el flujo en los contornos. Se resuelve la conexión entre el método de Glimm desarrollado y las ecuaciones que definen las diferentes condiciones de contorno, necesarias en un modelo que simule totalmente la evolución del flujo en el proceso de renovación de la carga en los MCI alternativos.

La descripción de dicho modelo y su validación experimental se lleva a cabo en el capítulo VI. Como complemento se realiza un estudio paramétrico aplicando el modelo a un sistema de inducción variable de un motor de cuatro tiempos y seis cilindros.

Por último, en el capítulo VII, se extraen las conclusiones y aportaciones más relevantes de la presente tesis, y se aportan ideas para las posibles líneas de desarrollo de este trabajo en el amplio campo de investigación que constituyen los subsistemas de los motores de combustión interna alternativos.

CAPITULO II

ONDAS DE PRESIÓN Y MOTORES ALTERNATIVOS

2.1.- INTRODUCCION

La utilización de ondas de presión en los colectores de los motores alternativos para sobrealimentar la carga de aire o de aire-combustible y para aumentar el barrido del contenido del cilindro representa una de las más tempranas aplicaciones del flujo no estacionario de un gas. La atracción de tal uso descansa en la simplicidad del equipo involucrado. Un diseño adecuado de los conductos de admisión y escape es todo lo necesario. Su importancia en el funcionamiento de un motor, queda resumido por Sir Harry Ricardo, uno de los pioneros en la investigación y desarrollo de los MCI, cuando escribió hace 70 años: *“No es una exageración decir que, en el diseño de un motor, los conductos deben ser lo primero en disponerse y el resto del motor ponerlo donde haya sitio”*.

Ya que cualquier efecto unidimensional de acción de onda puede concebirse fundamentalmente como procesos de llenado y vaciado, los requerimientos ideales para la máxima utilización de las ondas de presión en motores alternativos, serían tanto para motores de cuatro como de dos tiempos, los que cumplen lo siguiente:

1º Una relación adimensional del tiempo de apertura/cierre de válvulas o lumbreras muy pequeña $Z_{ac} \ll 1$, (Z_{ac} es la relación entre el tiempo t_{ac} tomado en abrir

o cerrar la válvula, suponiendo tiempos iguales de apertura/cierre, y el tomado por la onda de sonido en viajar la distancia efectiva de un conducto de admisión o escape, en un determinado estado de referencia).

2° Utilización en toda su extensión del área de la sección del conducto cuando las válvulas están totalmente abiertas, esto es $\phi_{max}=1$ (ϕ_{max} es la relación entre el área de flujo efectiva máxima de la válvula $(A_{v,ef})_{max}$ y el área de la sección transversal del conducto A_c).

3° Reglaje óptimo de la distribución de las válvulas con respecto a la acción de onda.

El último requerimiento no es problema, ya que puede ser cumplido por la sincronización de las válvulas con un diseño apropiado de las levas. Sin embargo, una correcta regulación sólo sería permanente en motores de una sola velocidad de giro, un cierto grado de tolerancia es necesario en motores que operan en un rango amplio de velocidades. Con respecto a los dos primeros requerimientos, los valores prácticos de Z_{ac} , usualmente, no son menores de 2 y ϕ_{max} no supera valores de 0,4 en cuatro tiempos, pero en dos puede exceder de 0,8. (De aquí la importancia relativamente mayor de los efectos de onda en motores de dos tiempos).

En general no puede conseguirse una utilización total de los efectos de onda. No obstante, el efecto de presión dinámica en el proceso de inducción, es suficiente para producir un rendimiento volumétrico superior al 100% en muchos casos, y, es bien conocido el alto rendimiento de los motores modernos de dos tiempos debido a la efectividad del barrido por ondas de presión producidas en el sistema de escape.

2.2.- VACIADO IDEAL NO ESTACIONARIO

Si un conducto, conteniendo un gas a presión p_{HO} más alta que el medio circundante, es abierto rápidamente, se propaga un onda de expansión en el conducto impeliendo el gas al exterior. En el caso ideal el conducto se abre instantáneamente y, en el estado de apertura total, el área efectiva de flujo es igual al área de la sección del conducto. Se asume que el conducto es sin fricción, adiabático y de sección constante. En el diagrama de onda (representación de la propagación de la onda en espacio y tiempo) de la fig. 2.1, la onda de expansión parece desplegarse en abanico desde el momento que el conducto se abre a la atmósfera.

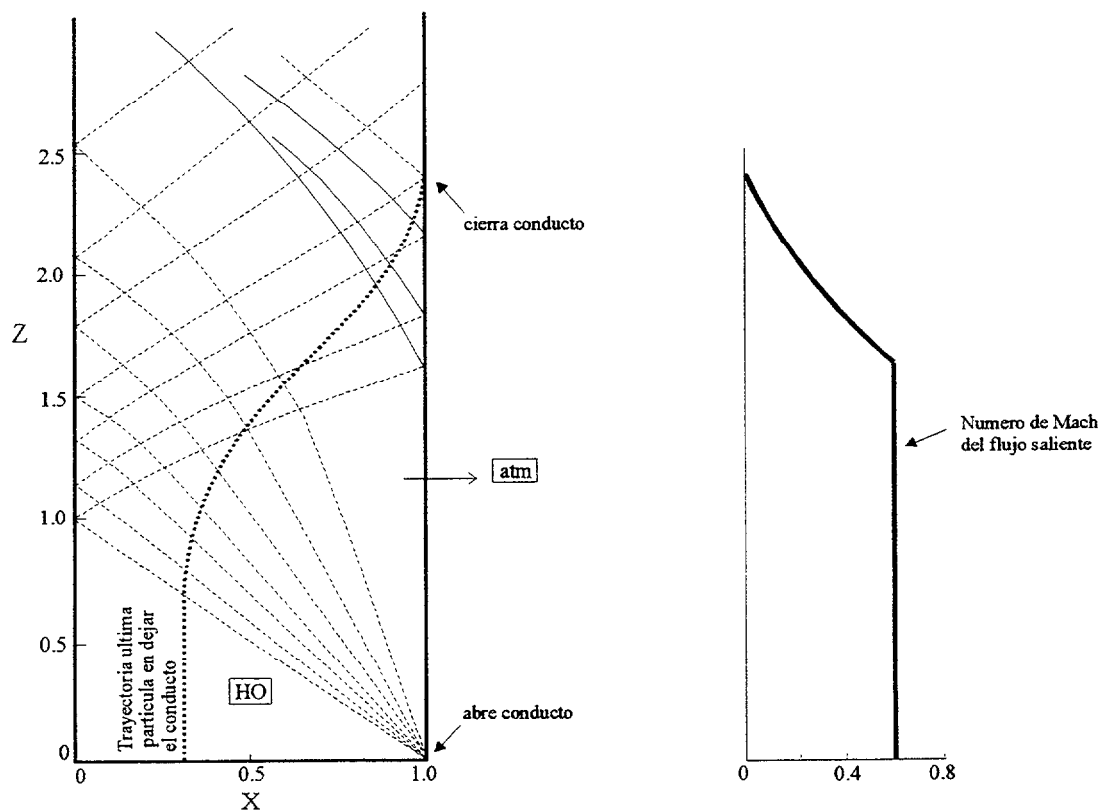


Figura 2.1 Diagrama de onda para un proceso de llenado optimo, $Z_{ac}=0$.

(—) Línea de expansión; (....) trayectoria de la partícula; (---) línea de compresión.

El vaciado óptimo del conducto se corresponde con el vaciado que descarga la fracción máxima posible de la masa inicial del gas en el conducto, en la primera etapa del proceso. Para que esto suceda, el conducto debe cerrarse antes de que ocurra reflujo en el extremo abierto. La presión residual de parada en el tubo p_{LO} está entonces a su valor más bajo posible, siempre menor que la presión atmosférica p_{atm} . La cantidad a la cual p_{LO} cae por debajo del p_{atm} es la medida de la calidad de vaciado.

El funcionamiento óptimo de vaciado lo concibió Spalding [66] y lo desarrolló Jonsson [67] usando un método de cálculo híbrido para integrar las ecuaciones diferenciales del flujo no estacionario monodimensional.

Se usaron varios valores de la relación inicial de presiones p_{HO}/p_{atm} para el aire, suponiendo que las condiciones iniciales del conducto y las condiciones atmosféricas están isentrópicamente relacionadas.

La relación p_{LO}/p_{atm} se obtuvo directamente para varios valores de Z_{fc} con el fin de obtener el valor mínimo correspondiente al vaciado óptimo ($Z_{fc} = a_{ref} t_{fc}/L$, donde a_{ref} es la velocidad del sonido referida a la p_{atm} después de una expansión isentrópica desde el estado inicial del gas en el conducto, t_{fc} el tiempo final de cierre del conducto, y L la longitud del mismo).

Analíticamente, el valor de la relación residual de presiones se puede determinar aplicando la 1ª ley de la Termodinámica a un sistema que incluya el gas originalmente contenido en el conducto

$$m_{HO} C_V T_{HO} = m_{atm} C_V T_{atm} + m_{LO} C_V T_{LO} + (m_{atm} / \rho_{atm}) p_{atm} + (m_{atm} \bar{u}_{sal}^2) / 2$$

donde m_{atm} es la masa descargada a la atmósfera, T_{atm} y p_{atm} la temperatura y densidad del gas saliente a presión atmosférica después de una expansión isentrópica desde el estado inicial del gas en el conducto, y $\bar{u}_{sal}$ la velocidad media de salida calculada sobre el tiempo t_{fc} .

La ecuación puede reescribirse como

$$p_{LO} / p_{atm} = (p_{HO} / p_{atm}) - \gamma \bar{M}_{sal} Z_{fc} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \bar{M}_{sal}^2 \right)$$

donde $\overline{M}_{sal} = \overline{u}_{sal} / a_{ref} = m_{atm} / \rho_{atm} A_c a_{ref} t_{fc}$, es el número de Mach medio del flujo saliente sobre el tiempo adimensional Z_{fc} , determinado a partir del diagrama de ondas, y A_c área de la sección transversal del conducto.

La relación óptima de presión residual corresponde al valor de Z_{fc} que está asociada con la última partícula que deje el conducto.

En un proceso de vaciado cuasi-estacionario, el flujo de salida tendría lugar a través de un pequeño agujero al final del conducto de tal forma que el estado del gas sería uniforme todo el tiempo y $p_{LO}/p_{atm}=1$.

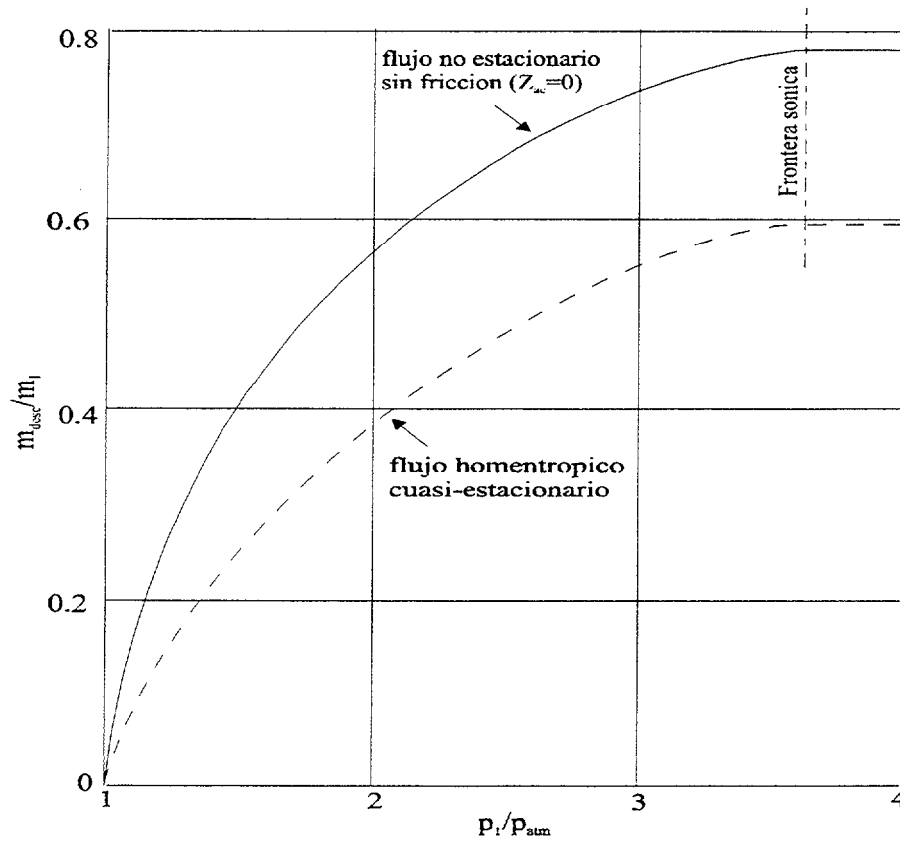


Figura 2.2 Descarga máxima para flujo homentrópico no estacionario

La fig. 2.2 muestra la descarga máxima para aire ($\gamma = 1,4$) bajo condiciones de flujo homentrópico cuasi-estacionario no estacionario sin fricción, en la que se observa un promedio del 38% más de masa descargada bajo condiciones no estacionarias.

2.3.- LLENADO IDEAL NO ESTACIONARIO

Si un conducto, que contiene un gas a presión más baja que el medio atmosférico circundante, se abre repentinamente, una onda de compresión se propaga por el conducto delante del gas atmosférico entrante. En el caso ideal el conducto se abre instantáneamente, el flujo a la entrada es isentrópico, y el área de flujo efectiva en el extremo del conducto es igual al área de la sección transversal. Se asume que el conducto es sin fricción, adiabático y de sección constante.

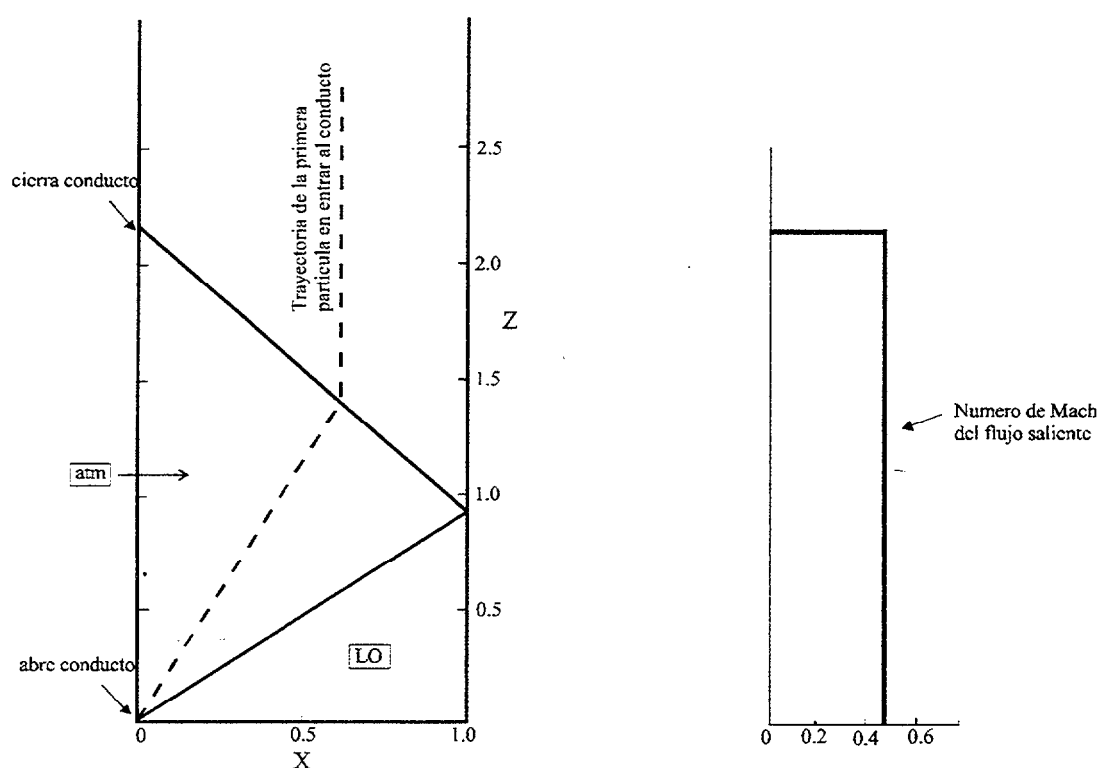


Figura 2.3 Diagrama de onda para un proceso de llenado óptimo, $Z_{ac}=0$.

(....) trayectoria de la partícula; (—) onda de choque.

En el diagrama de la fig. 2.3 se ve que la onda de compresión se establece instantáneamente como una onda de choque ya que se considera que el tiempo de apertura del conducto es infinitamente pequeño. El llenado óptimo se corresponde con el mejor funcionamiento y se define como el llenado en el cual es atrapada la cantidad máxima posible de aire atmosférico en el conducto, comprimiendo el gas

inicial del conducto a una presión óptima. Para que esto suceda, el conducto debe estar totalmente cerrado en el instante en que la onda de choque reflejada en el extremo cerrado alcance el extremo abierto (más allá de este instante, la onda de choque se reflejaría en el extremo abierto y comenzaría el vaciado del conducto). La presión residual de parada del conducto p_{HO} es siempre mayor que p_{atm} , y el grado en que p_{HO} excede a p_{atm} es una medida de llenado del conducto.

Las condiciones de llenado óptimo se obtuvieron del mismo programa que para el vaciado, usando varios valores de la relación inicial de presiones p_{atm}/p_{LO} para un conducto inicialmente lleno de aire que se expande desde el estado atmosférico, para encontrar el valor óptimo de la relación residual de presiones p_{HO}/p_{atm} . En el proceso de flujo entrante con el conducto parcialmente abierto se asumió recuperación de la presión estática corriente abajo de la garganta.

Analíticamente, con el uso de los resultados del diagrama de onda se puede obtener la relación residual de presiones aplicando la primera ley de la termodinámica a un sistema que contenga el aire que finalmente ocupe el conducto.

$$m_{HO} C_V T_{HO} = m_{atm} C_V T_{atm} + m_{LO} C_V T_{LO} + m_{atm} p_{atm} v_{atm}$$

donde m_{atm} es la masa inducida al conducto desde las condiciones atmosféricas.

Esta ecuación se puede reescribir como

$$p_{HO}/p_{atm} = (p_{LO}/p_{atm}) + \gamma \bar{M}_{en} Z_{fc}$$

Donde $\bar{M}_{en} = \bar{u}_{en} / a_{ref} = m_{atm} / \rho_{atm} A_c a_{atm} t_{fc}$ es un pseudo-número de Mach medio, ya que es referido al estado de parada del aire en las condiciones atmosféricas, $\bar{u}_{en}$ la velocidad media del flujo entrante, estimada a partir del valor adimensional $Z_{fc} = a_{atm} t_{fc} / L$ determinado por el diagrama de onda.

En un llenado cuasi-estático, el flujo de entrada tendría lugar a través de un pequeño agujero en el extremo del conducto, de tal forma que el estado del gas en el conducto fuese uniforme en todo momento, en ese caso $p_{HO}/p_{atm}=1$

La fig. 2.4 muestra una gráfica de p_{atm}/p_{LO} versus $(p_{HO}/p_{atm})_{\text{óptima}}$ para el llenado y p_{HO}/p_{atm} contra $(p_{LO}/p_{atm})_{\text{óptima}}$ para el vaciado. En ambos casos se indica el umbral en el que el flujo se haría sónico.

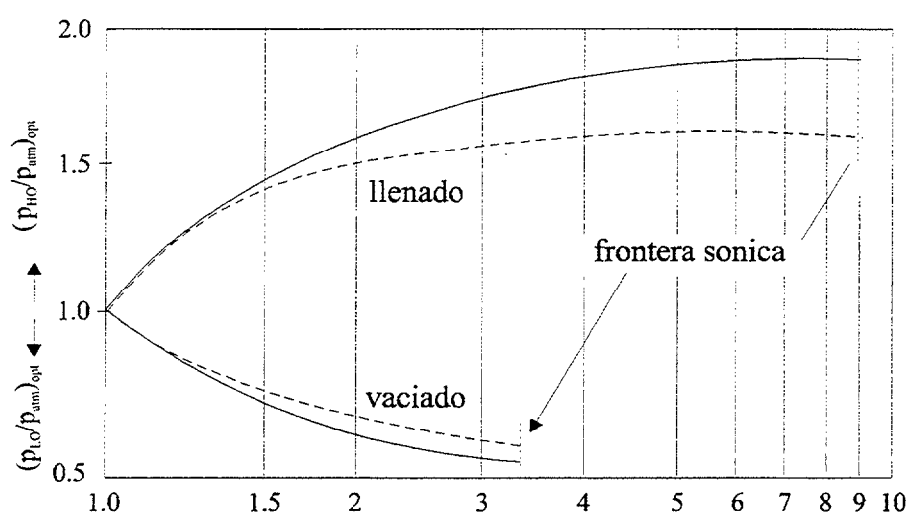


Figura 2.4 Funcionamiento óptimo de llenado y vaciado.

(—) Sin fricción; (---) con fricción.

Se muestran también las curvas de valores de la relación residual de presiones extrapoladas de los resultado obtenidos por Cotter [68] usando tubos rectangulares de acero con un mecanismo de apertura rápida. La diferencia entre las curvas se atribuye a la fricción del conducto, a las contracciones del flujo durante las operaciones de apertura o cierre, y al hecho de que el test se realizó con el contenido del tubo a temperatura atmosférica.

2.4.- VACIADO O LLENADO NO ESTACIONARIOS EN CONDUCTOS DE GEOMETRIA FINITA.

En la práctica la duración del tiempo de apertura o cierre del conducto es finita. El valor adimensional considerado para este tiempo es Z_{ac} y es definido como la relación entre el tiempo tomado en abrir o cerrar el conducto (t_{ac}) y el tiempo que tarda en recorrer la onda generada la longitud del conducto, tomando como estado de referencia las condiciones atmosféricas para el llenado, y el correspondiente a la expansión isentrópica del gas saliente, para el vaciado.

La geometría del extremo del conducto se determinará para una tobera real o equivalente cuyo área efectiva A_{ef} en cualquier instante de tiempo vendrá dada por una porción del área de la sección transversal del conducto A_p . Así $\phi = A_{ef}/A_p$ tendrá un valor máximo que se corresponderá con el caso en que la tobera está totalmente expuesta al flujo.

En el análisis computerizado de los efectos de Z_{ac} y ϕ_{max} en un funcionamiento óptimo de llenado asociado, se utilizarán distintos valores de P_{HO}/P_{atm} , Z_{ac} y ϕ_{max} y se asumió como en los casos anteriores, que las condiciones iniciales del conducto y las atmosféricas están isentrópicamente relacionadas, y que el conducto es sin fricción adiabático y de sección constante.

La figura [2.5] muestra resultados de funcionamiento óptimo para $\phi_{max}=1$ y para valores de Z_{ac} de 0 a 12. Se observa claramente que la duración finita del tiempo de apertura/cierre empeora el proceso, debido a que la forma de la onda es más ancha causando más irreversibilidad.

La caída en la efectividad del proceso es inicialmente muy rápida siendo aproximadamente el 50% desde $Z_{ac}=0$ a $Z_{ac}=2,5$ para el vaciado y de $Z_{ac}=0$ a $Z_{ac}=1,5$ para el llenado.

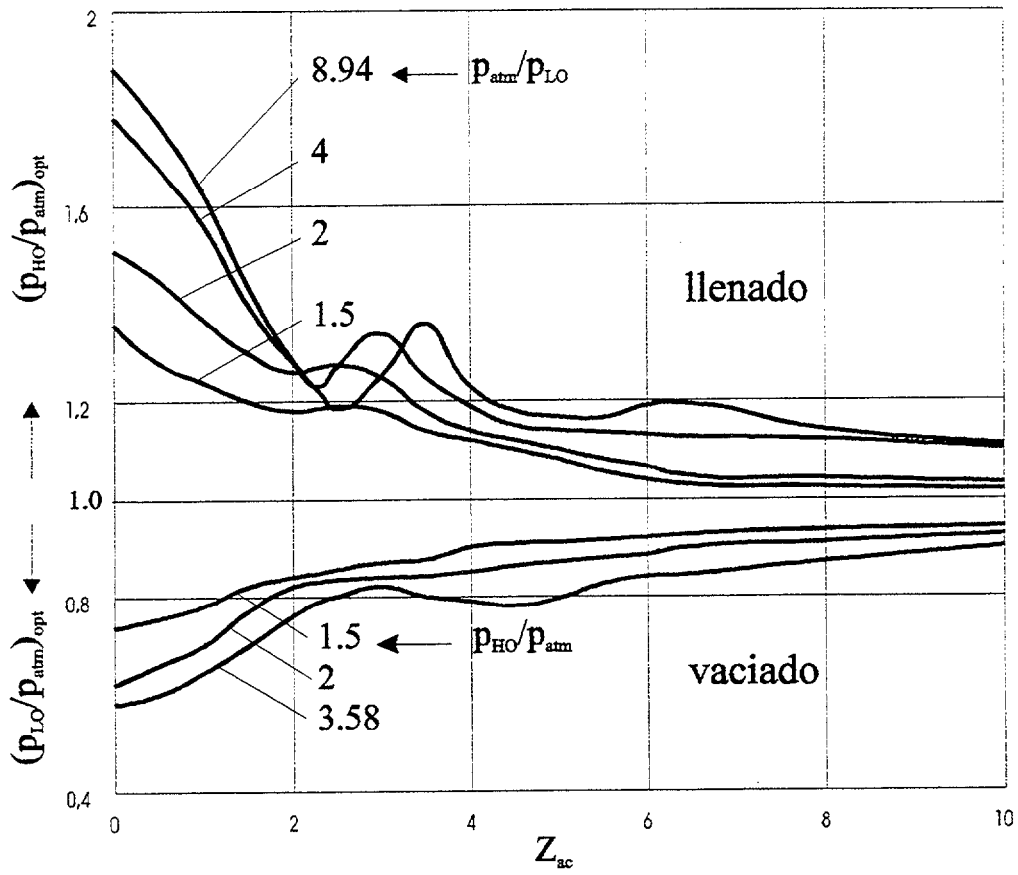


Figura 2.5 Efecto del tiempo de apertura del conducto sobre el llenado o vaciado optimo, $\phi_{max}=1$.

El empeoramiento producido por la disminución de los valores de ϕ_{max} se muestran en la fig. [2.6] al retardar los procesos de llenado o vaciado, aumentando el grado de irreversibilidad y reduciendo por tanto la cantidad de gas inicial que se descargaría en el vaciado, o de gas entrante en el llenado.

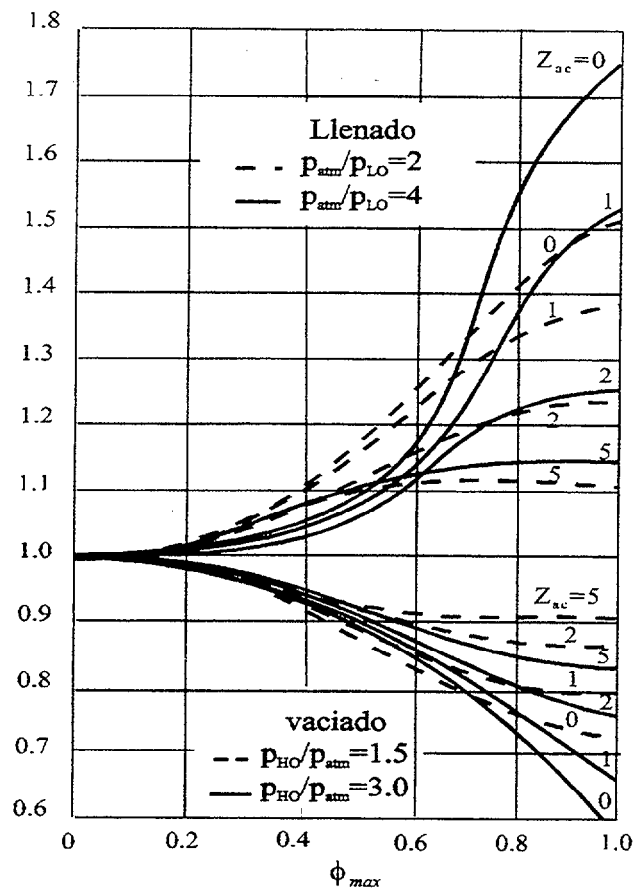


Figura 2.6 Efecto de ϕ_{max} sobre el funcionamiento de llenado o vaciado óptimos

Las conclusiones que se derivan de todo lo visto tanto para llenado como vaciado son las siguientes:

1° El efecto de un tiempo finito de apertura/cierre de un conducto (Z_{ac}) es deteriorar el proceso óptimo, produciéndose en mayor grado en el intervalo $0 < Z_{ac} < 2$. Por lo que, para aprovechar totalmente los efectos de acción de onda, Z_{ac} debe ser tan pequeño como sea posible.

2° El efecto de la restricción del área de salida o entrada atenúa el llenado o vaciado del conducto, por lo que serían convenientes valores de ϕ_{max} muy próximos a la unidad.

3° En todos los casos, un reglaje de apertura y cierre ajustado a la acción de onda, es un requisito indispensable para un funcionamiento óptimo.

2.5.- EFECTOS DE LA PRESION DINAMICA EN LA ADMISION.

La presión dinámica debido a la acción de las ondas que se generan en el sistema colector/cilindro de un motor alternativo, produce una sobrealimentación del cilindro. En el caso de motores de cuatro tiempos donde el solape efectivo de válvulas es pequeño, los efectos del sistema de escape sobre la presión dinámica en la admisión es escaso por lo que puede tratarse separadamente. Con solapes grandes, como en el caso de los motores de dos tiempos, el sistema de escape puede tener una influencia considerable en el consumo de aire, por lo que los procesos de inducción y barrido por ondas de presión se deben considerar simultáneamente.

El proceso de inducción de un cilindro puede concebirse como un proceso de llenado de un conducto corto de longitud variable (cilindro), desde otro largo de longitud fija (colector), a través de un orificio de área variable $A_{v,ef}$ (área efectiva de la válvula) de tal forma que la acción de onda en el segundo conducto, aumenta el llenado del primer conducto dentro del tiempo en que la válvula permanece abierta.

La figura 2.7 muestra un diagrama simplificado de los procesos básicos de formación de ondas en el conducto de admisión, suponiendo apertura instantánea de la válvula y sin efectos residuales de onda.

En general la acción de onda en el cilindro es menos importante que en el conducto porque el valor de Z_{ac} respecto a la longitud del cilindro es relativamente grande. El movimiento descendente del pistón provoca el llenado del cilindro a la vez que genera la onda de expansión I en el conducto que viaja hasta el extremo abierto y es reflejada como una onda de compresión II. Esta onda es la que produce la presión dinámica que sobrealimenta el contenido del cilindro con el gas del conducto. Se refleja en el extremo de la válvula como la onda de compresión III, y a su vez vuelve del extremo abierto como la onda de expansión IV. Idealmente el efecto de inducción

dinámico permanece hasta la llegada de la onda V, por lo que para el llenado óptimo, el cierre de la válvula debiera de coincidir con la llegada de esta onda. Claramente el tiempo correspondiente a la apertura de la válvula es equivalente al periodo de oscilación natural del conducto, suponiendo ondas acústicas. (En la práctica, con tiempo de apertura/cierre finitas, solamente las ondas I y II estarían involucradas en el proceso de inducción óptimo).

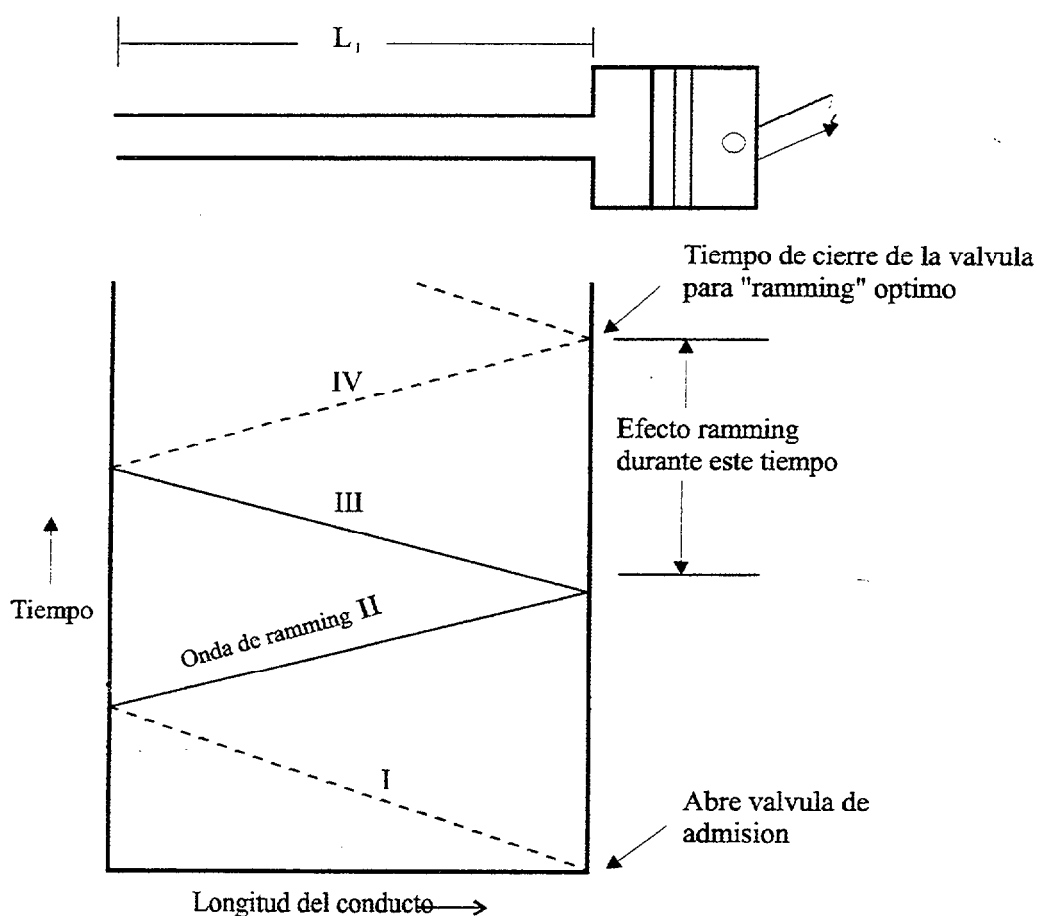


Figura 2.7 Proceso básico de onda en admisión por "*ramming*".

(—) Onda de compresión; (---) onda de expansión.

Este resultado no es aplicable a un cilindro determinado de un motor policilíndrico, excepto en el caso en que cada cilindro este conectado a un conducto individual. Los conductos de admisión en estos motores son comúnmente agrupados y

conectados a un conducto común relativamente grande o a una cámara “*plenum*”, en los cuales se disipa una parte del efecto de la presión dinámica. Esto junto con la posible interferencia de las ondas de presión provenientes de otros cilindros, justifica la caída en el rendimiento de la inducción por medio de ondas, cuando se compara con el caso de un motor monocilíndrico.

En general la acción de onda en el lado de la admisión es mucho más simple de analizar que en el del escape, principalmente porque las amplitudes de las ondas son relativamente pequeñas y la aproximación a ondas acústicas esta justificada.

Teorías tales como la del resonador de Helmholtz, han sido sugeridas para ayudar al diseñador a elegir la longitud adecuada del sistema de admisión para motores de dos o cuatro tiempos, mono o policilíndricos.

Tendencias recientes en la configuración de los colectores de admisión, es el uso de geometrías variables para motores policilíndricos para mejorar las prestaciones del motor a bajo régimen, así como el interés de utilizar programas de simulación del motor por computadores para optimizar los colectores de admisión y el reglaje de las válvulas o lumbreras para mejorar las características del flujo de carga.

2.5.1.- MOTOR MONOCILINDRICO DE CUATRO TIEMPOS.

El proceso de inducción en un motor de 4T monocilíndrico sin solape de válvulas, puede depender grandemente de la carrera de admisión y la inducción por ondas sirve para fortalecer este efecto. Consideremos el sistema de admisión de un motor aspirado bajo condiciones de plena carga, suponiendo primero que la velocidad del motor es lo suficientemente baja para que los efectos de onda no sean significativos. En vista de esto, la presión del cilindro es la atmosférica al comienzo de la carrera de admisión (en PMS).

Asumiendo que la válvula comienza a abrirse en esta posición, el movimiento hacia abajo del pistón produce una cierta depresión en el cilindro. Esta depresión es más grande cuando el pistón está a su máxima velocidad, hacia la mitad de la carrera. Si la válvula de admisión permanece abierta lo suficiente para que el cilindro se llene completamente la presión en el cilindro sería otra vez la atmosférica al final de la carrera (en la posición del PMS). *La forma exacta de la curva la definirá el desfase de la válvula de admisión con respecto al movimiento del pistón y la variación del área efectiva de la válvula y de la velocidad del pistón.*

Con el incremento de la velocidad del motor, los efectos de onda se hacen sentir aun más en el sistema de admisión. La aceleración de bajada del pistón genera una serie de pequeñas ondas de expansión con la consiguiente depresión, que produce la entrada del flujo desde el conducto de admisión al cilindro en virtud de la onda de expansión I (Fig. 2.7).

Al mismo tiempo, el llenado gradual del cilindro ocurre como resultado de un tren de ondas de compresión que viajan hacia el pistón. En la última fase del movimiento del pistón, la deceleración del mismo produce una serie de ondas de presión que refuerza el proceso de llenado. La onda de expansión I se reflejara en el extremo abierto del conducto como una onda de compresión II, de tal manera que el sintonizado óptimo del conducto se alcanzaría si se aprovechara en su totalidad el efecto de esta onda en incrementar el llenado del cilindro, esto es, que la cola de la onda alcanzase el extremo de la válvula en el momento que esta cierra. El tiempo correspondiente es, como para el caso de $Z_{ac} = 0$, equivalente al periodo de oscilación natural del tubo, asumiendo otra vez la aproximación acústica.

Siguiendo el criterio del aprovechamiento óptimo de la presión dinámica en la admisión, el tiempo adimensional de apertura de la válvula bajo condiciones de sintonizado Z_{it} es igual al periodo adimensional de oscilación natural del conducto T_n ($T_n = a_i t_n / L_i$, donde a_i es la velocidad media de propagación de las ondas de presión

en el conducto de admisión, y t_n el periodo de oscilación natural del conducto), cumpliéndose

$$Z_{it} = T_n = 4$$

Suponiendo el caso ideal de que el tiempo de apertura de la válvula es igual al tiempo tomado por el pistón en su carrera, se puede obtener una expresión de la longitud de sintonizado L_{it} de la definición de Z_{it}

$$Z_{it} = 4 = \frac{a_i t_{vi}}{L_{it}} = a_i \frac{\theta_i}{360} \frac{60}{NL_{it}} = \frac{a_i \theta_i}{6NL_{it}}$$

de donde

$$L_{it} = \frac{7,5 a_i}{N}$$

a_i está en m/s, t_{vi} es el tiempo de apertura de la válvula en segundos, $\theta = 180^\circ$ el tiempo de apertura de la válvula en grados de giro del cigüeñal, y N la velocidad del motor en r.p.m. Así

$$L_{it} = 7,5 a_i / N \quad \text{metros} \quad (2.1)$$

Como el valor de a_i es sustancialmente constante, el valor de L_{it} variará inversamente con N , siempre que el valor óptimo de la distribución se mantenga. (Idealmente para un motor dado bajo esta condición, el aprovechamiento óptimo de los efectos de la presión dinámica permanecería constante). Así con el incremento de la velocidad del motor, el sintonizado ocurre con valores progresivamente menores de L_{it} . Con la distribución fija, como es el caso en la práctica, el sintonizado será máximo a una cierta velocidad de resonancia, disminuyendo para valores más bajos de L_{it} a velocidades más altas y con valores altos de L_{it} a velocidades más bajas.

Varios investigadores han determinado experimentalmente el valor de la cte. en la ecuación (2.1) para el cual el funcionamiento de la inducción alcanza el máximo para un motor monocilíndrico de 4T. Para motores funcionando con régimen variable los valores recomendados están entre 6,7 y 7,5. Para motores funcionando a régimen constante de 9,2 a 10.

Kastner [69] da la regla aproximada siguiente para el valor mínimo de diámetro del conducto de admisión sólo a efectos de la fricción.

$$(d_i)_{min} = \left(\frac{D^4 S^2 N}{12,7} 10^5 \right)^{1/5} \quad \text{en cm.} \quad (2.2)$$

Engelman [70] se dio cuenta a través de datos empíricos tomados de diversas fuentes, que el sintonizado óptimo ocurre a una velocidad de inducción media de aproximadamente $u_{i,av}=60$ m/s. Esta es la velocidad promedio de un volumen de carga igual al volumen desplazado por el pistón y que entra al cilindro durante media vuelta del cigüeñal.

$$u_{i,av} = \frac{NV_d}{3000A_p}$$

Con $u_{i,av} = 60$ m/s el diámetro del tubo sería

$$d_i = \frac{(NV_d)^{1/2}}{376} \quad \text{cm} \quad (2.2b)$$

En un desarrollo riguroso, el valor correcto de d_i debe tener en cuenta los efectos de fricción y de onda. A efectos de la fricción serían favorables diámetros grandes, pero con respecto a los de onda, incrementar los valores de d_i , no significaría disminución de los valores de ϕ_{max} .

Ejemplos de cómo varía la presión en el cilindro y en el conducto de admisión de un motor bajo condiciones de aprovechamiento máximo de los efectos dinámicos

se aprecian a través de las curvas B y C en la fig. 2.8 para un motor de 1.500 cc monocilíndrico probado por Kastner [69] . La curva C es obtenida a la entrada del conducto de admisión ($\varnothing$ 53,2 mm L = 1820 mm) aproximadamente a 76 mm de la válvula de admisión. La magnitud de la presión del cilindro por encima de la p atmosférica en el momento que cierra la válvula de admisión es una medida del efecto de la presión dinámica (ramming).

Cabe señalar que la presión inicial del cilindro en el PMS, la cual puede estar influenciada apreciablemente por la acción de onda en el escape en el caso de un valor grande de solape, está un poco por encima de la atmosférica, pero incluso con valores más bajos de la presión, el acoplamiento de la distribución de las válvulas al proceso de onda puede proporcionar un alto grado de sobrealimentación. Con una distribución fija no se podrían obtener estos resultados.

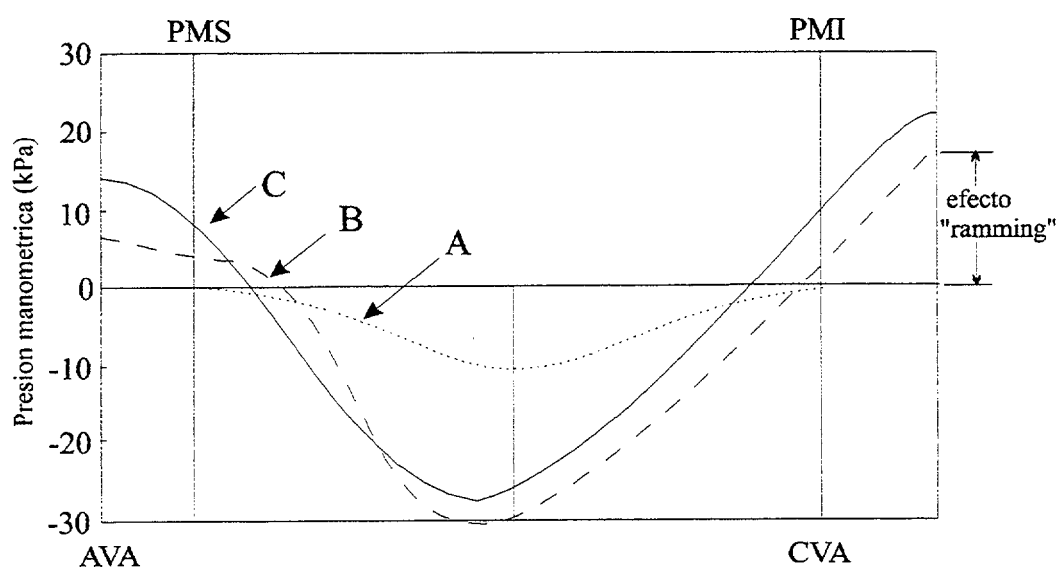


Figura 2.8 Variación de la presión en el sistema de admisión de un motor monocilíndrico de cuatro tiempos. (A) Variación hipotética de la presión sin efecto de onda; (B) variación de la presión del cilindro con "ramming"; (C) variación de la presión en la pipa de admisión con "ramming".

Incrementar la velocidad del motor mejora potencialmente el aprovechamiento de los efectos de la presión dinámica en dos maneras:

1° Reduce el valor de Z_{ac} y de esta manera intensifica la acción de la onda. Beneficios totales se pueden obtener sólo si el reglaje de las válvulas es correcto con respecto a las modificaciones del proceso de ondas.

2° La intensidad de la onda de expansión, (o depresión en el cilindro) que resulta de la aceleración del pistón cuando desciende hacia el PMI, se incrementa. Se ha encontrado que la amplitud de la onda de expansión varía aproximadamente con el cuadrado de la velocidad del motor [2]. También la intensidad de la onda de compresión, generada durante la deceleración del pistón moviéndose hacia el PMI y durante la aceleración del mismo poco antes del cierre total de la válvula de admisión, incrementa con el aumento de la velocidad. Las pruebas comparativas a diferentes regímenes de giro se llevan a cabo con distribución fija, por lo que los resultados pueden ser contrarios a lo esperado.

2.5.2.- MOTORES POLICILINDRICOS DE CUATRO TIEMPOS

Se pueden utilizar relaciones simples, tales como la ecuación (2.1), para calcular la longitud requerida de un conducto sintonizado en un motor monocilíndrico, principalmente porque las amplitudes de onda son generalmente pequeñas y por lo tanto es válida la aproximación a ondas acústicas. En el caso de motores policilíndricos, la acción de onda puede no ser el único criterio para el diseño de los colectores de admisión. En motores con carburador o monoinyección que usan combustible líquido, la distribución correcta del combustible a los cilindros y un valor satisfactorio del rendimiento volumétrico, resultante del aprovechamiento de la presión dinámica, dictan la forma y el tamaño del sistema de admisión, en el que se habrá alcanzado una solución de compromiso entre ambos efectos.

Con motores de inyección multipunto la distribución uniforme del combustible deja de ser un problema y el diseño de los colectores puede basarse solamente en la acción de ondas. El mejor diseño sería aquel en que cada cilindro usase un colector individual abierto a la atmósfera, o, como segunda elección a un depósito relativamente grande. La desventaja de este diseño es el incremento de la masa y costo del sistema de admisión. Normalmente al usar un estrangulador, los conductos de admisión son agrupados y conducidos a una cámara impelente que está abierta a la atmósfera vía un conducto de alimentación.

La acción de onda en el sistema de admisión de un motor policilíndrico es generalmente más compleja que en un monocilíndrico. Como resultado, un determinado número de investigadores han propuesto teorías simples para determinar la longitud correcta de sintonizado de cada conducto, asumiendo que la distribución correcta del combustible no está involucrada en el diseño.

La teoría que quizás haya recibido mayor atención es la llamada teoría del resonador de Helmholtz [70,71]. Un resonador es simplemente un volumen cerrado con paredes rígidas, y con una pequeña abertura de área A y longitud L conectada a un espacio mucho mayor (normalmente la atmósfera).

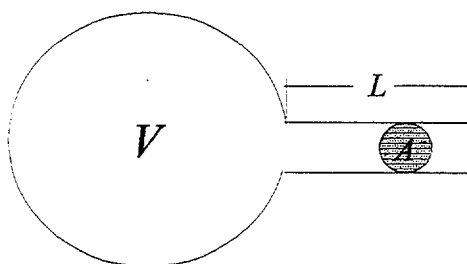


Figura 2.9 Resonador de Helmholtz

Se asume que cualquier perturbación de la presión en el interior de la cavidad se propaga bajo condiciones adiabáticas y reversibles, y que el correspondiente movimiento del gas en el cuello del resonador ocurre sin pérdidas y de manera similar al de un pistón de masa constante entrando y saliendo de la cavidad. Los cambios de presión en el interior de la cavidad se pueden considerar uniformes a condición de que

las dimensiones del resonador sean pequeñas comparadas con la longitud de onda de la perturbación.

Existe analogía entre el modelo mecánico de un grado de libertad resorte-masa y las variaciones de presión en el cuello del resonador debidas a las vibraciones producidas en la cavidad cuando el gas de su interior es excitado. Refiriendo esta analogía a un sistema de admisión, la masa sería equivalente al de una embolada de gas en el conducto de admisión, y el resorte correspondería al gas del cilindro en el cual la masa oscila (un colector de admisión en el cual todos los conductos aspiran de un “plenum” conectado a la atmósfera, puede ser considerado como un sistema con un grado de libertad). La fuente de excitación es, en este caso, el movimiento de bajada del pistón durante la carrera de admisión.

La aplicación de la condición de isentropía a los cambios de presión dentro de la cavidad del resonador, junto con la ecuación del movimiento para el pistón de gas en el cuello, bajo la acción de la fuerza resultante, muestra que, para una variación senoidal de la presión acústica fuera del resonador, ésta se hace teóricamente infinita en la cavidad a la frecuencia dada por

$$f = \frac{a}{2\pi} \left(\frac{A}{LV} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.3)$$

Esto, por lo tanto, representa la frecuencia fundamental de resonancia del resonador de Helmholtz, y es esencialmente análoga a la frecuencia de sintonizado del motor de forma sólo cualitativa, ya que la suposición de considerar flujo reversible y adiabático en cuello y cavidad no se cumplen. Sin embargo, el modelo de resonador de Helmholtz predice las condiciones de sintonizado de manera razonable, acomodándose a motores policilíndricos.

Aplicando la ecuación (2.3)] a un motor de un solo cilindro, o a un sistema múltiple de un grado de libertad, se considera que ocurre el sintonizado cuando la

frecuencia de resonancia es aproximadamente dos veces la frecuencia del pistón, y V debe ser reemplazado por el volumen efectivo del cilindro a mitad de carrera V_{ef}

$$V_{ef} = \frac{V_d}{2} \left(\frac{r_c + 1}{r_c - 1} \right)$$

Thompson añadió una cte K para tener en cuenta las variaciones en el reglaje de válvulas (K igual a 2 para la mayor parte de los motores, pero se puede variar de 2 a 2,5)

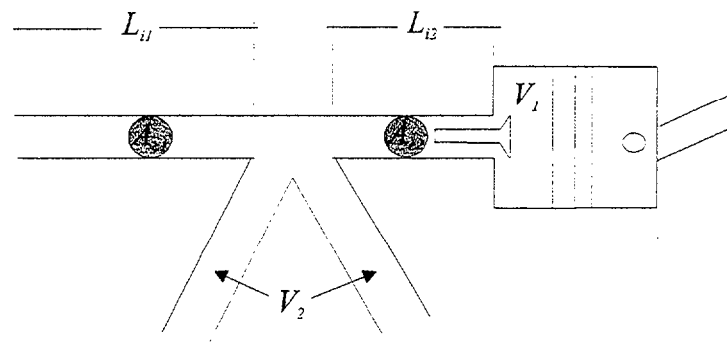
La ecuación final modificada para la longitud efectiva de sintonizado del sistema de admisión es

$$L_{it} = \frac{A_p}{V_{ef}} \left(95,5 \frac{a_i}{KN} \right)^2 \quad A_p \text{ en } cm^2 \text{ y } V_{ef} \text{ en } cm^3. \quad (2.4)$$

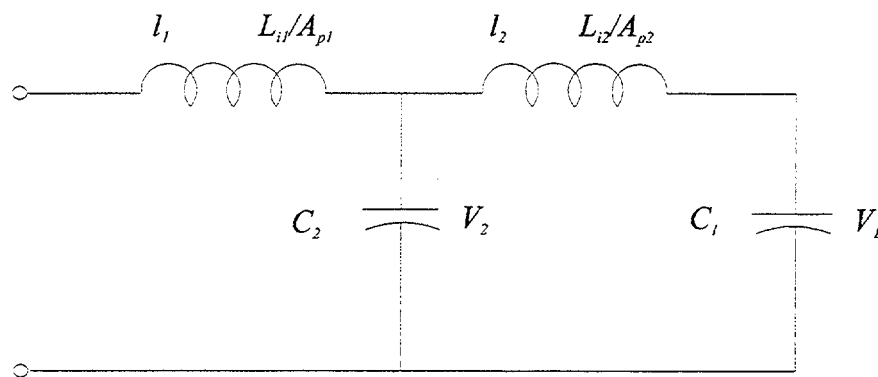
En el caso de que el conducto esté compuesto de tramos de diferente sección, Thompson propuso que

$$\left(\frac{L}{A} \right)_{ef} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{L}{A} \right)_i$$

En el tratamiento de motores policilíndricos por medio de la teoría del resonador de Helmholtz, los conductos no involucrados en el proceso de inducción, se tratan como un volumen adicional. La fig. 2.10 muestra un modelo acústico de un colector de tres cilindros, con V_1 como volumen efectivo activo del cilindro y L_{i1} y A_p , son la correspondiente longitud del conducto hasta el punto de ramificación y el área transversal respectivamente. El volumen inactivo es V_2 y actúa como una cámara impelente en el punto de unión de los conductos, el tubo de alimentación es de longitud L_{i2} y área transversal A_{p2} . (El carburador formaría parte del tubo de alimentación en el caso de un motor de gasolina).



(a)



(b)

Figura 2.10 Resonador de Helmholtz para tres cilindros: (a) modelo acústico; (b) analogía eléctrica.

Si extendemos la analogía resorte-masa a este caso, una disposición de dos conductos (L_{i1} , A_{p1} , y L_{i2} , A_{p2}) y dos volúmenes (V_1 , V_2) forman un modelo con dos grados de libertad (lo máximo para un sistema distribuidor ramificado) y dos frecuencias de resonancia. Engelman usó la semejanza eléctrica, en la cual dos condensadores son análogos a los volúmenes y las bobinas a los conductos para determinar estas frecuencias. La analogía es válida siempre que el solape no exista o sea pequeño y no haya interferencias en los periodos de las válvulas, lo que significa que el sistema de escape no toma parte en el proceso de inducción (fig. 2.10).

Las frecuencias de resonancia se obtienen sobre la base de resonancia en serie, con lo que el voltaje a través de la fuente de corriente es cero. La ecuación característica del circuito serie

$$\alpha \beta l_1 C_1 f^4 - (\alpha \beta + \alpha + 1) l_1 C_1 f^2 + 1 = 0$$

con

$$\alpha = l_2/l_1, \beta = C_2/C_1, C_1 = V_1, C_2 = V_2, l_1 = L_{i1}/A_{p1}, l_2 = L_{i2}/A_{p2} \text{ y } V_1 = V_{ef}.$$

Las dos frecuencias de resonancia a las cuales el colector estaría sintonizado (una más alta y otra más baja que la frecuencia de resonancia f_p de $\varphi_l C_l$ como sistema aislado) esta dado por Engelman [70] como

$$f_{\mp} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{(\alpha \beta + \alpha + 1) \mp [(\alpha \beta + \alpha + 1)^2 - 4\alpha \beta]^{1/2}}{2\alpha \beta l_1 C_1} \right\}^{1/2}$$

Los signos - y + se corresponden con las frecuencias baja y alta respectivamente. A la frecuencia de resonancia más baja, las presiones en el cilindro y en el punto de ramificación están en fase, y la mayor parte de la inducción es proporcionada por el conducto de alimentación L_{i2} . A la frecuencia más alta las presiones no están en fase y los conductos de admisión L_{i1} son los dominantes en el efecto de inducción dinámica.

Alternativamente, un modelo mecánico muelle-masa se puede usar para calcular N^- y N^+ , en el cual el muelle es la compresibilidad del aire en el cilindro y la masa es análoga a la de la columna de aire en el correspondiente conducto de admisión.

La fig. 2.11 muestra un esquema del colector de admisión de un motor de tres cilindros, junto con el modelo análogo muelle-masa de dos grados de libertad, siendo

las masas $M_A = \rho_a A_{p1} L_{i1}$ y $M_B = \rho_a A_{p2} L_{i2}$ y ρ_a la densidad de carga. Las constantes de los muelles A y B son las siguientes

$$K_A = \delta \frac{\gamma A_{p1}^2 P_{amb}}{V_1} \quad K_{B-} = \frac{\gamma A_{p2}^2 P_{amb}}{V_2} \quad \text{y} \quad K_{B+} = \frac{\gamma A_{p1}^2 P_{amb}}{V_2}$$

K_{B+} y K_{B-} son las constantes del resorte correspondientes a N_+ y N_- , γ la relación de capacidades caloríficas de las cargas, y δ el coeficiente de compensación. Aquí V_2 es la suma del volumen del plenum y de los conductos en reposo.

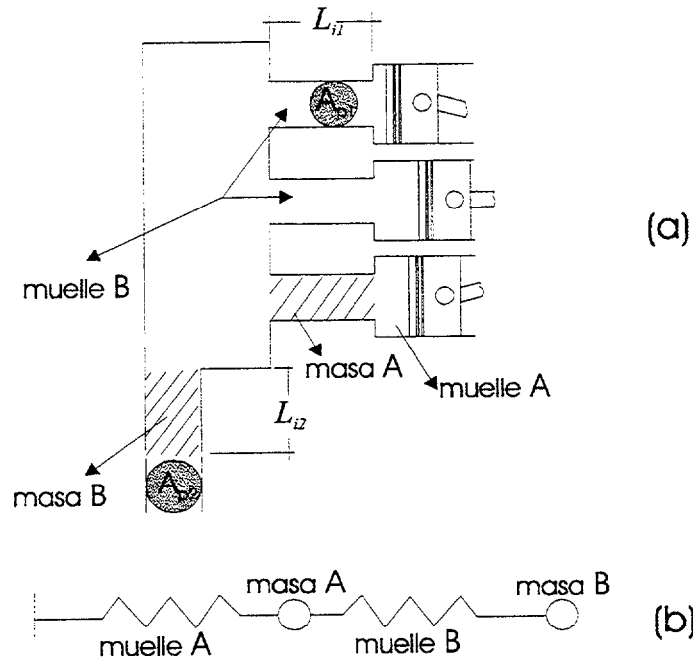


Figura 2.11 Resonador de Helmholtz para tres cilindros: (a) modelo acústico; (b) analogía mecánica.

El modelo resorte-masa análogo es el clásico sistema de vibraciones forzadas sin amortiguación de dos grados de libertad cuyas frecuencias de resonancia alta y baja se pueden obtener usando las ecuaciones del movimiento de dos masas. Hatamura [72] calculó ambas frecuencias en términos de las velocidades de giro del

motor más alta y más baja en rpm como:

$$N_{\mp} = \frac{20}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{k_A + k_{B_+}}{M_A} + \frac{k_{B_+}}{M_B} \right) \mp \sqrt{\left(\left(\frac{k_A + k_{B_+}}{M_A} + \frac{k_{B_+}}{M_B} \right)^2 - 4 \frac{k_A k_{B_+}}{M_A M_B} \right)} \right] \right\}^{1/2} \quad (2.5)$$

En lo que se refiere a los diámetros de los conductos Vorun [73] estableció que en un resonador de Helmholtz de dos grados de libertad, la velocidad media adecuada de inducción ($u_{i1,av}$) en el conducto de admisión a N_+ es de 75 m/s, y la correspondiente velocidad ($u_{i2,av}$) en el conducto de alimentación a N_- es 40 m/s, y son definidas por las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} u_{i1,av} &= \frac{N_+ V_d}{3000 A_p} \quad m/s \\ u_{i2,av} &= \frac{N_- (0.14 V_2 + V_d)}{3000 A_{p2}} \quad m/s \end{aligned} \quad (2.6)$$

El término 0,14 V_2 en la ecuación (2.6), debido a Engelman [70], tiene en cuenta el cambio en el volumen del conducto (en reposo inactivo) correspondiente al flujo adicional en el conducto alimentador requerido para presurizar V_2 . Engelman asume que este flujo adicional aumenta la presión en V_2 en un 20%, considerando que el proceso de inducción forzada es isentrópico. Usando los valores recomendados de $u_{i1,av}$ y $u_{i2,av}$, las relaciones para obtener los diámetros de los conductos d_{i1} y d_{i2} serían

$$d_{i1} = \frac{(N_+ + V_d)^{1/2}}{420} \quad cm.$$

y

$$d_{i2} = \frac{[N_- (0.14 V_2 + V_d)]^{1/2}}{307} \quad cm.$$

Según Bingham[74] , los conductos de admisión en la práctica moderna son dimensionados para obtener una velocidad de al menos 60-75 m/s a par máximo, mientras se limite el volumen del colector a menos del 50% de la cilindrada del motor.

El procedimiento del resonador de Helmholtz para la sintonización de un sistema de inducción como el descrito es válido para colectores de hasta cuatro cilindros, o grupos de cuatro en motores de aspiración natural o sobrealimentados.

Sin embargo, los motores policilíndricos que se adaptan mejor a un sistema de admisión resonante son los de tres y seis cilindros, ya que las frecuencias de resonancia pueden adaptarse a los periodos de las válvulas y orden de encendido de grupos de 3 cilindros.

2.5.3.- RENDIMIENTO VOLUMETRICO.

Los métodos descritos anteriormente permiten el cálculo de las frecuencias a las cuales se consigue el sintonizado, pero no definen exactamente el rendimiento volumétrico que se puede conseguir debido a la dinámica de la válvula de admisión y del cilindro. El cálculo de la frecuencia de sintonizado es mucho más fácil que el cálculo del rendimiento volumétrico, porque éste requiere conocer las características de la válvulas y del cilindro. Taylor [75] mostró como el rendimiento volumétrico puede relacionarse con el nº de Mach Z , cuando se utilizan conductos cortos; el resultado es

$$\eta_v = 0.58 \left(\frac{\alpha_{ic} - \alpha_{io}}{\pi} \right) 1/Z$$

En esta ecuación, $(\alpha_{ic} - \alpha_{io})$ es la duración de la apertura de la válvula de admisión, siendo

$$Z = \text{índice de Mach} = \frac{A_p}{A_i} \frac{\bar{u}_p}{a}$$

con

$$\bar{A}_i = \frac{1}{\alpha_{ic} - \alpha_{io}} \int C_{di} A_i d\alpha$$

donde C_{di} es el coeficiente de descarga instantáneo de la válvula, $\bar{A}_i$ el área de la sección transversal del conducto de admisión, A_p área del pistón, $\bar{u}_p$ la velocidad lineal media del pistón y a la velocidad del sonido en las condiciones de presión y temperatura inmediatamente aguas arriba de la válvula.

El índice de Mach no es un parámetro de una velocidad real, pero caracteriza la velocidad media del gas que tendría que haber en la válvula para llenar el cilindro a una velocidad particular del pistón.

Fukutani y Watanabe [76] propusieron reemplazar el índice de Mach Z por un número de Mach medio, M_{im} , el cual da más importancia al periodo en que la válvula de admisión está abierta, y es definido como

$$M_{im} = \frac{u_{im}}{a}$$

u_{im} es la velocidad media del gas durante el tiempo de apertura de la válvula de admisión, y su valor es:

$$u_{im} = \frac{V_d \eta_v}{100 A_t}$$

siendo A_t el área efectiva de admisión durante el tiempo $\alpha_{ic} - \alpha_{io}$

$$A_t = \int_{\alpha_{io}}^{\alpha_{ic}} C_{di} A_i d\alpha = \frac{\alpha_{ic} - \alpha_{io}}{6N} A_i$$

donde N es la velocidad del motor en rpm.

De estas ecuaciones podemos determinar la relación entre M_{im} y Z

$$M_{im} = \frac{180\eta_v}{100(\alpha_{ic} - \alpha_{io})} Z$$

Cuando se diseñan pipas y válvulas de admisión es necesario asegurar que haya una relación *área válvula / tiempo de apertura* lo suficientemente grande para limitar el valor del índice de Mach Z , o el numero de Mach medio M_{im} .

Idealmente, valores altos del η_v se pueden mantener a lo largo de un rango amplio de regímenes del motor a condición de que el sistema de admisión permita un acoplamiento con las ondas generadas a cada régimen por medio de una distribución variable de las válvulas, o por variación en la longitud del conducto con la velocidad del motor. Otra posible opción es variar el área del conducto resonante. A todo esto se le conoce como sistemas de inducción de geometría variable “SIGV”, que aplicado a motores policilíndricos con un orden de encendido uniforme y simétrico mejoran su potencia a regímenes bajo y medio. El concepto básico del sistema es fácilmente explicable con el uso de la ecuación (2.5) aplicada a un motor de 6 cilindros con la opción de longitud variable, opción que se ha probado la más efectiva.

Si los cilindros se disponen de acuerdo al orden de encendido en dos grupos de tres y no hay solape de las carreras de admisión entre cilindros de cada grupo (los cilindros operan a 240° de desfase), el motor se puede considerar análogo a un par de modelos simétricos masa-resorte con dos grados de libertad. La dinámica de ambos modelos será por tanto idéntica.

Considerando cualquiera de los modelos , para una geometría fija del conducto (L_{i1} , A_{p1} , M_a), dando valores de V_1 y V_2 (K_{A1} , K_B), y fijando áreas iguales del conducto de alimentación (A_{p1} , K_B) se puede demostrar con la ecuación (2.5) que un incremento en el valor de L_{i2} (M_B), conduce a una disminución en el valor de N y viceversa.

Por lo tanto, el conducto de alimentación de un colector de admisión sería relativamente largo en un régimen de velocidad bajo, y relativamente corto en régimen alto.

En la práctica, el cambio de un modo de operación a otro se realiza colocando adosadas las cámaras de cada grupo de cilindros, con una o varias válvulas controladas por el régimen del motor interpuestas entre ambas cámaras (fig. 2.12).

Con la válvula abierta, las dos cámaras se comportan como una, distribuyendo la carga a todos los cilindros a través de conductos de admisión individuales. La longitud del conducto de alimentación (L_{i2}), en la distancia entre la válvula de control y cada cámara y es relativamente corta. Cuando la válvula está cerrada, el sistema se convierte a una doble de 3 cilindros. En ese caso, la longitud del conducto alimentador desde la entrada a cada cámara hasta el filtro de aire y es relativamente largo.

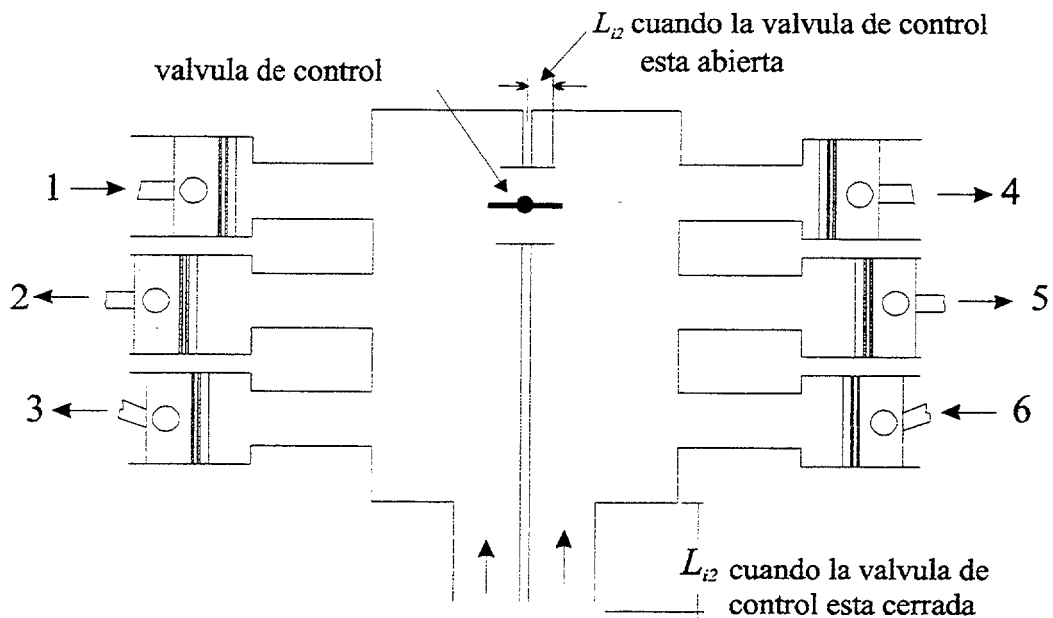


Figura 2.12 Esquema del sistema de admisión de un motor de seis cilindros con geometría variable

2.6.- BARRIDO POR ONDAS DE PRESION.

El barrido por ondas de presión es el proceso de mejora de la descarga de los gases de un cilindro por medio de la acción de onda en el sistema *cilindro-conducto de escape*. El efecto máximo de la onda ocurre durante el periodo de la caída brusca de la presión (*blowdown*). El posterior fenómeno de onda debido a la carrera de escape es usualmente débil porque la velocidad media del pistón es relativamente baja comparada con la velocidad local media del sonido en el contenido del cilindro, por lo que el proceso de barrido por ondas de presión es afectado en menor extensión por la velocidad de giro que en el proceso de inducción (*ramming*).

En la fig. 2.13 se muestra una descripción a grandes rasgos del proceso básico de onda en un tubo de escape de un motor de cuatro tiempos monocilíndrico, suponiendo acción instantánea en las válvulas, sin efectos residuales, y sin diferencia de temperatura en la interfase entre dos flujos.

La liberación de gases desde el cilindro genera una onda de expansión que se mueve en el contenido del cilindro, y una onda de compresión (I) que penetra en el conducto de escape.

Esta onda es reflejada como una onda de expansión (II) en el extremo abierto del conducto. Si la longitud del conducto se elige de tal forma que esta onda alcance el cilindro durante el periodo de escape, ejercería un efecto de succión sobre el contenido del cilindro y mejoraría el efecto de barrido (si la onda llegase durante el periodo de solape, o durante el periodo de barrido en el caso de motores de dos tiempos, ayudaría al proceso de inducción).

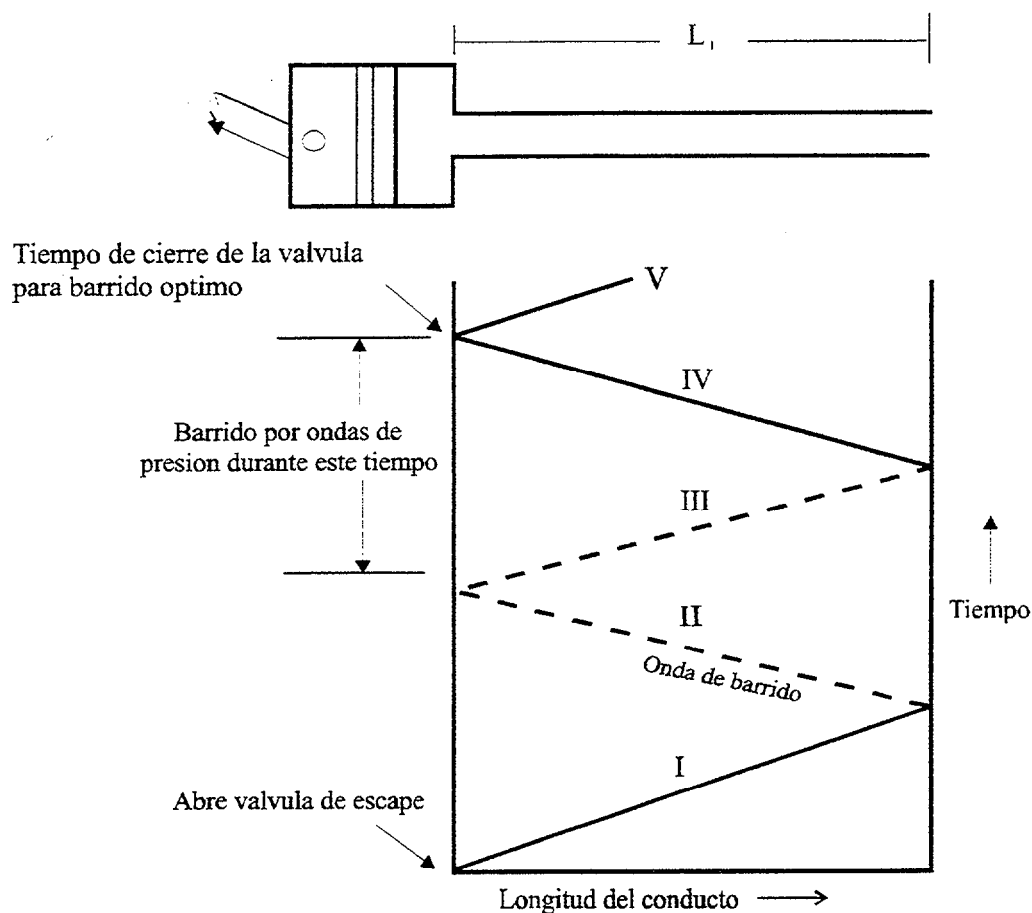


Figura 2.13 Proceso de onda simplificado en el barrido por ondas de presión.
 (—) Onda de expansión; (---) onda de compresión.

La onda II es reflejada como onda de expansión III en el extremo de la válvula, y posteriormente es reflejada como onda de compresión IV en el extremo abierto, suponiendo que la válvula de escape está abierta durante este tiempo. El barrido óptimo se correspondería con el cierre de la válvula en el momento en que llegase la onda IV, permitiendo así la salida máxima de gases del cilindro. El conducto estaría sintonizado.

Idealmente, si se asumen ondas acústicas, el tiempo de apertura de la válvula para el sintonizado es equivalente al periodo de oscilación natural del conducto. Sin embargo, a diferencia de la presión dinámica en la admisión, la relación entre la presión inicial en el escape durante el *blowdown* y la presión atmosférica es,

comúnmente, relativamente alta, del orden de 4 en motores de aspiración natural a pleno carga, resultando ondas finitas de gran amplitud. Aún más, la diferencia significativa de temperatura entre el gas inicial en el conducto y el gas del cilindro provoca trayectorias complejas de las ondas como resultado de repetitivas reflexiones y transmisiones entre ellas.

Esta es la causa de que la teoría del resonador de Helmholtz no de buenos resultados como herramienta en el sintonizado de los conductos de escape como en el caso del proceso de admisión, por lo que son necesarios modelos analíticos más rigurosos para tal fin.

La fig. 2.14 da una descripción más realista del fenómeno involucrado en el barrido por ondas de presión, a través de un diagrama de un proceso de descarga sin fricción para un modelo de un motor diesel monocilíndrico de cuatro tiempos a 450 rpm, con una presión inicial del cilindro de 4,4 cuatro veces la presión atmosférica, $\phi_{max} \cong 0,7$, $Z_{cl} \cong 2.8$ y sin discontinuidades significativas en la temperatura. El estado inicial en el conducto se toma como referencia, $a_{ref} = 320$ m/s a p_{atm} . Las ondas están numeradas para corresponderse con los de la fig (2.13).

Del perfil de la curva de presión se ve que durante la etapa inicial de la descarga, se produce un aumento de presión en el conducto provocado por la cabeza de la onda de compresión I, posteriormente la onda III suprimirá esta sobrepresión.

La onda II es la “onda de barrido” que genera un efecto de succión en cilindro y conducto, ayudando al barrido del contenido del mismo. La onda de compresión IV tiene un frente de gran pendiente, que causa una entrada rápida de aire desde el medio circundante y reflujo en el cilindro, y su cola llega cuando el cilindro está otra vez lleno cerca del punto de cierre de la válvula. La onda de compresión reflejada V aumenta de nuevo la presión en el conducto por encima del valor atmosférico.

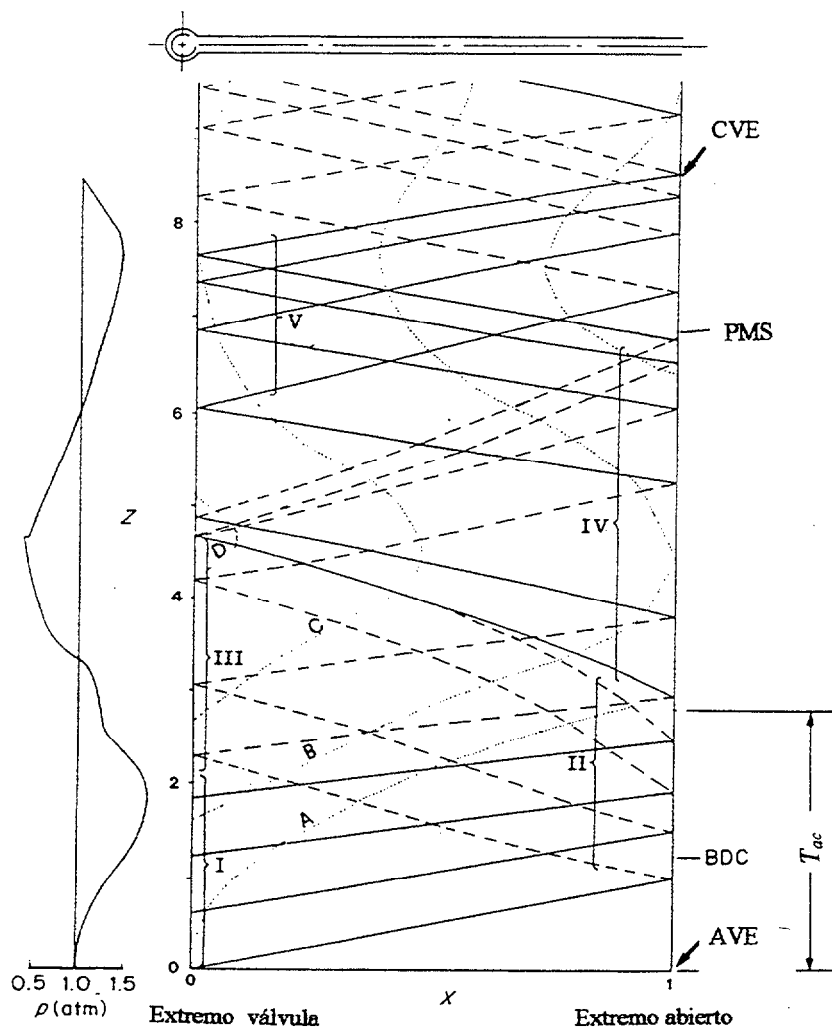


Figura 2.14 Diagrama de onda para la descarga sin fricción desde un cilindro de un motor de cuatro tiempos a través de un conducto. (—) Línea de compresión; (---) línea de expansión; (....) trayectoria de las partículas.

El cierre de la válvula podría ocurrir antes, es decir a $Z=6$ sin que al proceso de barrido se viese afectado adversamente. De esta manera, la sobrepresión establecida durante las etapas finales del cierre de la válvula podría ser la manera apropiada de “obtención” de la válvula de escape referente al flujo de partículas. La primera partícula en dejar el cilindro está indicada como A y es acelerada por las ondas I y II. Las ondas III y IV tienen un efecto retardador sobre el flujo. La partícula B es la primera que se ve forzada a regresar hacia el cilindro, y la C está entre las

primeras en entrar al mismo. Partículas a la izquierda de C, tales como la A, habrían entrado previamente al cilindro.

En el caso de motores policilíndricos, se debe evitar que dos o más cilindros que estén en fase acaben conectados a un mismo conducto o “*plenum*”, pues en caso contrario el escape de un cilindro interferiría con el de los otros.

2.6.1.- BARRIDO EN MOTORES MONOCILÍNDRICOS

En general, los motores aspirados de cuatro tiempos monocilíndricos no son muy sensibles a las variaciones en el diseño del colector de escape siempre que el solape de válvulas sea pequeño (o no efectivo). Las razones para ello son que el valor de ϕ_{max} es usualmente pequeño (<4) y el proceso de barrido depende en parte de la carrera de escape del pistón.

El sintonizado del conducto no sólo mejora este proceso sino que también reduce el trabajo del pistón en expeler los gases, minimiza la cantidad de gas residual en el cilindro, y disminuye la cantidad de dicho gas que puede retornar al conducto de admisión durante el periodo de solape. El sistema de escape más simple consiste en tubo instalado directamente en el cilindro. Aunque este dispositivo no es comercialmente factible debido al excesivo ruido que produce, es de interés desde el punto de vista de comparación con otros sistemas sin silenciador. En la fig. 2.14, la reflexión en el extremo abierto de la onda de compresión I, está acompañado por una pérdida en la energía cinética de descarga. (Esto contrasta con la reflexión de la onda de expansión I en el proceso de inducción, resultando una aceleración en la entrada del gas al conducto, utilizando la onda de presión en este caso más eficazmente). Si al final del conducto se dispone del difusor adecuado la onda de compresión se reflejaría parcialmente como onda de expansión, y el resto, se transmitiría reduciendo sustancialmente la pérdida de energía cinética en la descarga, con lo que la parte salvada mejoraría el proceso de barrido.

Valores recomendados para el ángulo del difusor y para la relación entre la longitud del difusor L_d y la distancia entre la sección de entrada del difusor y el vértice del cono que lo produce son $\theta = 6^\circ - 8^\circ$ y $L_d/D = 1,4-1,8$. Un valor negativo de la presión coincidiendo con el periodo de solape de válvulas es beneficioso para el proceso de inducción. En general, la duración de la presión negativa aumenta con el incremento en los valores de L_d/D y la correspondiente amplitud de onda disminuye.

Para un sistema de escape de un motor monocilíndrico, la relación para el cálculo de la longitud de sintonizado L_{et} es la misma que para L_{it} dada por ecuación (2.4), pero el volumen efectivo (V_{ef}) se tomará como el volumen máximo del cilindro dado por

$$V_{max} = V_d \left(\frac{r_c}{r_c - 1} \right)$$

En el caso de sección variable, se sugiere que el diámetro medio se use para calcular el área de la sección. El diámetro del cilindro se calcula según la ecuación (2.2b).

2.6.2.- BARRIDO EN MOTORES POLICILÍNDRICOS

En la mayoría de los motores de aspiración natural no sobrealimentados, los conductos de escape se ramifican en sistemas con una o dos salidas. Se debe evitar que cilindros separados descarguen simultáneamente en el mismo conducto, ya que daría lugar a un incremento en las pérdidas de flujo. Sin embargo es razonable tener dos o tres cilindros que no estén en fase conectados al final en un mismo conducto.

Motores de cuatro cilindros usan frecuentemente una conexión 2 en 1 en la primera unión, con una segunda unión opcional.

Es posible una disposición cuatro en uno, pero debido a que la longitud efectiva de los conductos es más corta, los beneficios que se pueden obtener de las interacciones de las ondas de presión, se alcanzan a velocidades de giro más altas. Similarmente los motores de seis cilindros usan una conexión 3 en 1 en la primera unión, con o sin segunda unión, y así sucesivamente. En todos los casos, la configuración del colector dependerá del orden de encendido y de la disposición de los cilindros.

Un aspecto importante del flujo en los colectores de escape es el efecto de diferentes uniones sobre las ondas y, por ello ha estado sujeto a investigaciones a través de modelos que van desde el de acción de onda unidimensional [1,27] hasta desarrollos usando esquemas numéricos tridimensionales [5,6].

En la fig. 2.15 se da una imagen cualitativa del efecto producido por una unión T sobre una onda de compresión que incide en dicha unión (que es el tipo de onda que se propaga en escape después del *blowdown*) según Adachi [81].

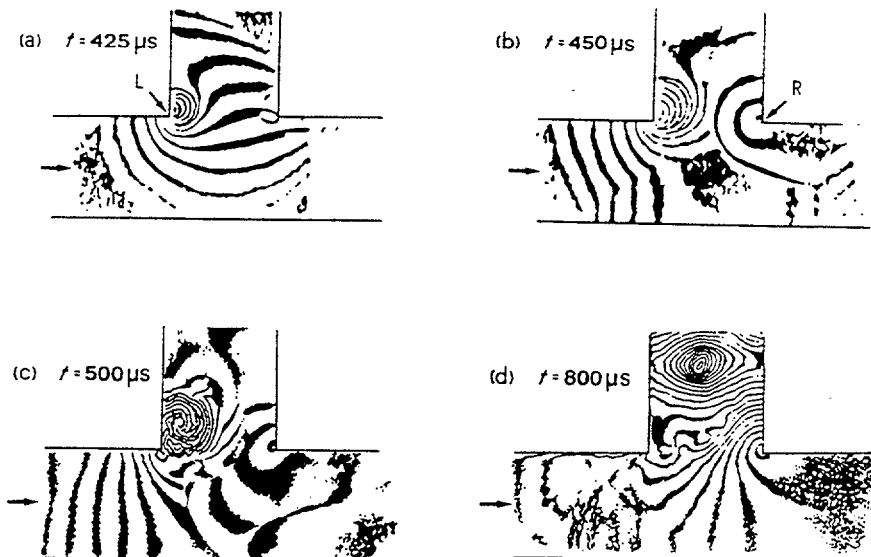


Figura 2.15 Efecto de una unión T sobre una onda incidente de compresión

La onda de compresión original avanza por las ramificaciones horizontal y vertical de la unión. El rápido incremento de flujo en la sección produce una onda de expansión en forma de torbellino que se propaga desde la esquina izquierda aguas arriba por el conducto horizontal y a través del conducto vertical.

Posteriormente, la onda de compresión se refleja en arcos circulares como un segunda onda de compresión en la esquina derecha de la unión, propagándose aguas arriba en el conducto de entrada, interfiriendo con la onda de expansión en L de manera compleja, sufriendo reflexiones sucesivas debido a la fricción en la superficie inferior de la unión. Al mismo tiempo la onda de expansión arremolinada se propaga por el conducto vertical como si fuera un torbellino de Van Karman. La onda de expansión inicial tiene las características de la onda II de la fig. 2.13, esto es, ayuda en el proceso de barrido durante la parte final del periodo de escape.

Debe tenerse por lo tanto especial cuidado al seleccionar la longitud de los conductos para evitar que se cancelen unas ondas con otras y perder de esta manera la utilidad de las ondas de expansión y compresión.

CAPITULO III

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA. SOLUCIÓN ADOPTADA

3.1.- INTRODUCCIÓN.

El problema que motiva este estudio es encontrar soluciones numéricas aproximadas dependientes del tiempo, a las discontinuidades que se producen en el flujo unidimensional no estacionario de un fluido compresible asociado a los conductos de un MCI. Son tres los criterios que tales soluciones deben satisfacer simultáneamente.

1. Las soluciones aproximadas deben ser razonablemente precisas en regiones donde el flujo es uniforme. Las ondas deben moverse a la velocidad correcta, tener la forma correcta, concentrarse o dispersarse en la proporción correcta.

2. Las discontinuidades transportadas a lo largo de las características deben ser modeladas por la solución aproximada a través de saltos precisos transportados a la velocidad correcta. Ejemplos de tales discontinuidades son: discontinuidades de contacto (a través del cual la densidad y temperatura varían mientras que la presión y la velocidad permanecen constantes); la interfase entre dos materiales diferentes, o entre dos fases termodinámicas diferentes del mismo material; líneas o superficies a través de las cuales la solución es continua, pero alguna derivada no lo es.

3. Las discontinuidades no lineales deben ser calculadas con estabilidad y precisión. Estas ocurren, por ejemplo, cuando hay transporte de masa a través de la discontinuidad, como en el caso de un frente de choque en un gas ideal.

El principal método usado para calcular tales soluciones ha sido resolver un conjunto de ecuaciones en diferencias finitas que aproximen las ecuaciones diferenciales del movimiento. Sin embargo, es difícil construir métodos en diferencias que satisfagan los tres criterios expuestos anteriormente de forma simultánea. Por ejemplo, un método en diferencias finitas de orden alto puede generar oscilaciones detrás de una onda de choque. Un método de primer orden, tratará generalmente el mismo choque de forma correcta, pero la difusión numérica provocará resultados de baja resolución en zonas donde el flujo es continuo ó uniforme.

Para el cálculo de las soluciones aproximadas se utilizara el método de Glimm, también conocido como “*random choice*”, ó método de muestreo por tramos, el cual, según lo establecido en el Capítulo I, parece ser superior a cualquier método en diferencias para cumplir los tres criterios anteriores.

3.2.- ECUACIONES BÁSICAS.

Las ecuaciones que describen la evolución del flujo en régimen no estacionario a través de los colectores de un MCI, considerando transmisión de calor y fricción entre fluido y paredes de los conductos, así como cambios de sección de los mismos, se pueden obtener a partir de las ecuaciones fundamentales de la dinámica de fluidos. Teniendo en cuenta la unidimensionalidad del fenómeno, el área $A = A(x)$ es solamente función de la distancia, por lo que las ecuaciones serán:

Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} = -\rho u \frac{d \ln A}{dx} \quad (3.1)$$

Ecuación del momento:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -g \quad (3.2)$$

donde $g = \frac{4fu^2}{2D|u|}$, f es el coeficiente de fricción, D el diámetro del conducto y el

termino $\frac{u}{|u|}$ asegura que la fricción en las paredes se opone al movimiento.

Ecuación de la energía:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho k-1} \right) \rho A dx \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho k-1} \right) \right] dx = q \rho A dx \quad (3.3)$$

Las ecuaciones (3.1) a (3.3) forman un sistema de ecuaciones hiperbólicas no lineales que no puede ser resuelto de forma analítica. Para la solución numérica del problema por diferencias finitas, es conveniente sustituir la ecuación del momento (ya que esta no puede ponerse en forma de ley conservativa), por la resultante de combinar (3.1) y (3.2), obteniéndose la denominada **ecuación de impulso**:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) = -\rho u^2 \frac{d \ln A}{dx} - g\rho \quad (3.2a)$$

Según Richtmyer y Morton, el sistema formado por (3.1), (3.2a) y (3.3) se puede disponer de la forma siguiente.

Introduciendo primero la función vectorial simbólica $\mathbf{W}$, donde:

$$\mathbf{W}(x,t) = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho \frac{u^2}{2} + \frac{p}{k-1} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

la función vectorial simbólica $\mathbf{F}$ cuya expresión es

$$\mathbf{F}(\mathbf{W}) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u \left(\rho \frac{u^2}{2} + p \frac{k}{k-1} \right) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

y por ultimo la función vectorial simbólica $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C}(\mathbf{W}) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 \\ u \left(\rho \frac{u^2}{2} + p \frac{k}{k-1} \right) \end{bmatrix} \frac{d \ln A}{dx} + \begin{bmatrix} 0 \\ g\rho \\ -q\rho \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Con lo cual se obtiene un sistema hiperbólico no lineal de leyes conservativas, que escrito en forma vectorial se reduce a la ecuación:

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = -\mathbf{C} \quad (3.7)$$

en la que se desea encontrar la solución del vector $\mathbf{W}$, siendo $\mathbf{F}(\mathbf{W})$ una “**densidad de flujo**” y $\mathbf{C}(\mathbf{W})$ un “**término fuente**” que describe el flujo, (en este caso flujo en conductos de sección variable con fricción y transferencia de calor) provocando que el sistema sea no homogéneo.

Este término fuente provoca ondas de intensidad variable, y la velocidad con que se propagan dependerá de la intensidad de las mismas. Por ello las trayectorias de las ondas sónicas o de choque no son líneas rectas en el plano espacio-tiempo, sino que sus trayectorias se curvaran con el avance del tiempo.

Para el sistema descrito por (3.7) hay un acoplamiento no lineal de los modos de propagación, de tal forma que una onda de choque emitida en un modo determinado cambia emitiendo señales que se propagan en otros modos dando lugar a ondas secundarias. La velocidad e intensidad de las ondas, incluidas las secundarias, dependen de los términos fuente de primer orden en t , mientras que la posición de la onda dependerá solo de los términos fuente de segundo orden en t .

3.2.1.- SOLUCION ADOPTADA

El procedimiento que se va a utilizar para tratar el sistema hiperbólico no homogéneo de leyes de conservación, consiste en una sencilla generalización utilizando una técnica de desdoblamiento de dos pasos (*operator splitting*).

En el primer paso se resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias resultante de eliminar el término variable con el tiempo en (3.7).

$$\frac{d\mathbf{F}(W)}{dx} = -\mathbf{C}(x, W) \quad (3.7a)$$

La solución obtenida representará el estado estacionario del flujo en el cual solo hay variación en espacio

En el segundo paso el término no homogéneo se suprime, y la ecuación resultante

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0 \quad (3.7b)$$

que representa el sistema de ecuaciones unidimensionales de la dinámica de gases en coordenadas cartesianas para flujo no viscoso y sin transferencia de calor, puede ser resuelta por el método de Glimm (el cual, como se demostrará, modela de forma precisa las ondas de choque y las discontinuidades de contacto), utilizando como condiciones iniciales las soluciones del sistema (3.7a).

3.3.- REVISIÓN DE LA TEORÍA DE LAS SOLUCIONES DÉBILES DE LAS LEYES DE CONSERVACIÓN.

Consideremos una ecuación no lineal escrita en la forma siguiente

$$\partial_t w + \partial_x F(w) = 0 \quad (3.8)$$

tal ecuación se dice que esta en forma conservativa. Una ecuación diferencial que pueda ser escrita en forma conservativa es una ley de conservación.

Por ejemplo, en la ecuación de Burger

$$\partial_t w + w \partial_x w = 0$$

si la solución de w es uniforme, esta ecuación puede ser escrita en forma de ley de conservación como (3.8), donde $F(w) = \frac{1}{2} w^2$, esto es

$$\partial_t w + \partial_x \left(\frac{1}{2} w^2 \right) = 0$$

Una ley de conservación establece que la variación con el tiempo de la cantidad total de una sustancia contenida en una región, por ejemplo en el intervalo cerrado $[a, b]$, es igual al flujo de esa sustancia a través del contorno de dicha región.

Supongamos que $w(x, t)$ es la densidad de la sustancia en el punto (x, t) . La cantidad total de la sustancia en $[a, b]$ es la integral

$$\int_a^b w(x, t) dx$$

Si $F(w)$ indica el flujo, el flujo total a través del contorno de $[a, b]$ es $-F(w(x, t)) \Big|_a^b$ y la ley de conservación se puede escribir de la forma

$$\int_a^b \partial_t w(x, t) dx = -F(w(x, t)) \Big|_a^b$$

Como

$$-F(w(x, t)) \Big|_a^b = \int_a^b \partial_x F(w) dx$$

la forma integral de la ley de conservación será:

$$\int_a^b (\partial_t w + \partial_x F(w)) dx = 0 \quad (3.9)$$

En todo punto donde existan las derivadas parciales de w y $F(w)$, se obtendrá la forma diferencial de la ley de conservación.

Si diferenciamos (3.8) con respecto a x obtendremos la ecuación

$$\partial_t w + a(w) \partial_x w = 0$$

donde $a(w) = \partial F / \partial w$. La ecuación anterior es genuinamente no lineal siempre que a no sea una función constante de w , esto es, $\partial a / \partial w \neq 0$

La curva característica esta dada por la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = a(w)$$

de manera que w es constante a lo largo de la característica, lo que implica que $a(w)$ también lo es. En este caso las características son rectas cuya pendiente depende de la solución de w , y por lo tanto, pueden cruzarse.

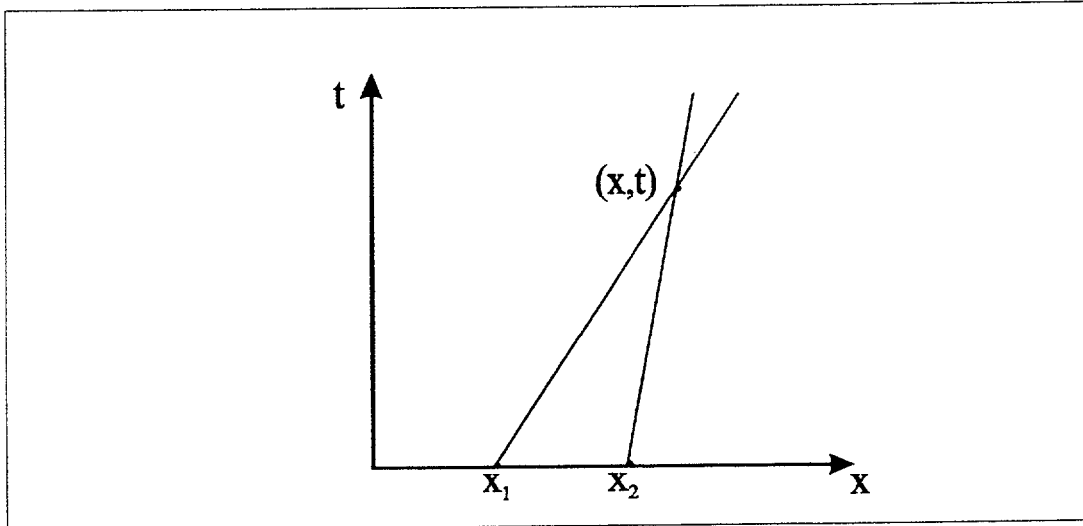


Figura 3.1

Consideremos la ecuación (3.8) con la condición inicial $w(x,0)=f(x)$ y supongamos que x_1 y x_2 son dos puntos de la línea inicial. Las pendientes de las características en esos puntos son $a_1=a[w(x_1,0)]$ y $a_2=a[w(x_2,0)]$. Si ambas características se cruzan en un mismo punto (x,t) , la solución de w en ese punto debe ser igual para $w(x_1,0)$ y $w(x_2,0)$.

Como se ve en la figura (3.1) esto no se cumple y la solución tiene valores múltiples, lo que significa que la forma diferencial de la ley de conservación (3.8) deja de ser válida. La experiencia ha demostrado que una solución discontinua aparece fuera del punto (x,t) con el tiempo, y para entender este tipo de soluciones se definen las llamadas “*soluciones débiles*”.

Definiendo el operador $\nabla \equiv (\partial_t, \partial_x)$ y el vector $\mathbf{V}w \equiv [w, F(w)]$ con lo que la ecuación (3.9) puede escribirse de la forma

$$\nabla \cdot \mathbf{V}w = 0$$

Si $\phi(x,t)$ es una función escalar uniforme que se desvanece para $|x|$ suficientemente grande, entonces $\phi \nabla \cdot \mathbf{V}w = 0$ e integrando sobre $-\infty < x < +\infty$ y $t \geq 0$

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \phi \nabla \cdot \mathbf{V}w dx dt = 0$$

y usando el teorema de la divergencia

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} (\nabla \phi) \cdot \mathbf{V} w dx dy + \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \phi (x,0) f(x) dx = 0 \quad (3.10)$$

Esta ecuación es llamada la *forma débil de la ley de conservación*. Cualquier función $\mathbf{V}_w$ que satisfaga dicha ecuación para toda función uniforme ϕ (su derivada no varía de forma importante) que se desvanezca para $|x|$ suficientemente grande, será una *solución débil* de la ley de conservación. Si $\mathbf{V}_w$ es también uniforme, se le llamará *solución fuerte*

Consideremos la solución débil V_w de (3.10), la cual es discontinua en algún punto a lo largo de la línea L cuya ecuación es $x = \varphi(t)$ en el plano (x, t) como V_w es solución débil de (3.10) se cumple

$$\iint_D (\nabla \phi) \cdot V_w dx dt = \iint_{D_I} (\nabla \phi) \cdot V_w dx dt + \iint_{D_D} (\nabla \phi) \cdot V_w dx dt \quad (3.11)$$

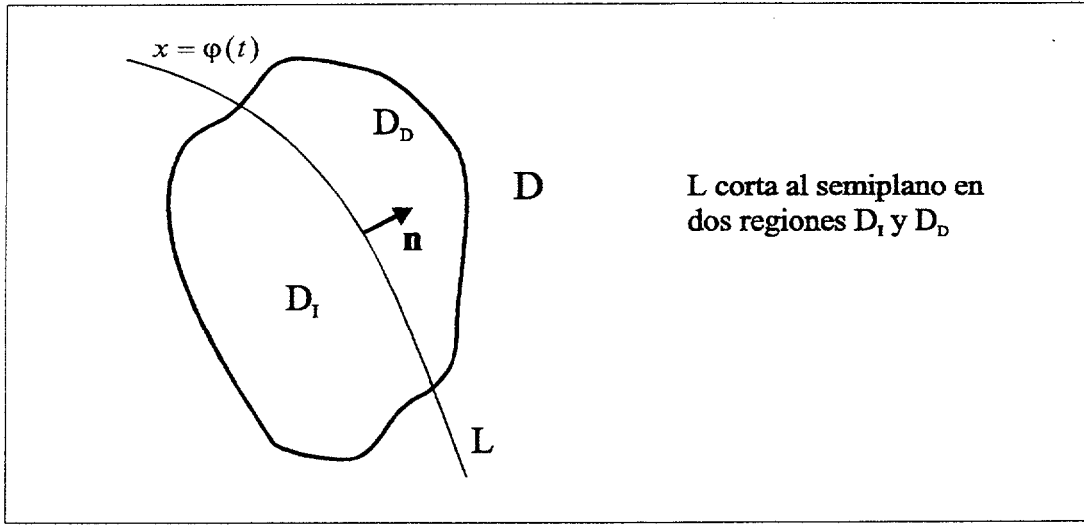


figura 3.2

ϕ puede ser cualquier función uniforme, por lo tanto la elegimos que se desvanezca en todo el contorno de D_I y D_D excepto en la línea L . Si aplicamos el teorema de la divergencia a la 1ª integral de la izquierda de (3.11)

$$\begin{aligned} \iint_{D_I} (\nabla \phi) \cdot V_w dx dt &= \iint_{D_I} \nabla \cdot (\phi V_w) dx dt - \iint_{D_I} \phi (\nabla \cdot V_w) dx dt \\ &= \int_{L_I} \phi V_w \cdot n ds - \iint_{D_I} \phi (\nabla \cdot V_w) dx dt \end{aligned}$$

n es un vector unidad normal a L con la orientación de la fig.(3.2), y V_w es uniforme en D_I por lo que $\nabla \cdot V_w = 0$ y

$$\iint_{D_I} \phi (\nabla \cdot V_w) dx dt = 0$$

con lo que

$$\iint_{D_I} (\nabla \phi) \cdot \mathbf{V}_w dx dt = \int_{L_I} \phi \mathbf{V}_w \cdot \mathbf{n} ds$$

y efectuando las mismas operaciones con la 2ª integral de la derecha de (3.11)

$$\iint_{D_D} (\nabla \phi) \cdot \mathbf{V}_w dx dt = - \int ds$$

donde el signo negativo es el resultado de la orientación del vector unidad $\mathbf{n}$.

Sustituyendo estas dos últimas ecuaciones en (3.11), obtendremos la condición a través de la discontinuidad a lo largo de la línea L

$$\int_{L_I} \phi \mathbf{V}_w \cdot \mathbf{n} ds - \int_{L_D} \phi \mathbf{V}_w \cdot \mathbf{n} ds = 0$$

Como esto ocurre para cualquier función uniforme ϕ

$$(\mathbf{V}_w|_I - \mathbf{V}_w|_D) \cdot \mathbf{n} = 0$$

ó bien

$$[\mathbf{V}_w \cdot \mathbf{n}] = 0$$

expresión que denota el salto de la cantidad entre corchetes a través de la superficie de la discontinuidad, conocida como *condición de salto de Rankine-Hugoniot* (H-G), por ejemplo:

$$[f(w)] = f(w_I) - f(w_D)$$

Si s es la velocidad de propagación de la discontinuidad, entonces $s = d\phi/dt$, y el vector normal $\mathbf{n}$ tiene de componentes $\mathbf{n} = (-\frac{d\phi}{dt}, 1) = (-s, 1)$. Pero entonces la condición R-H se convierte en

$$s[w] = [f(w)]$$

a través de la discontinuidad, o bien

$$s(w_D - w_I) = F(w_D) - F(w_I)$$

donde w_L y w_R son los estados a derecha e izquierda de la discontinuidad (Fig. 3.3).

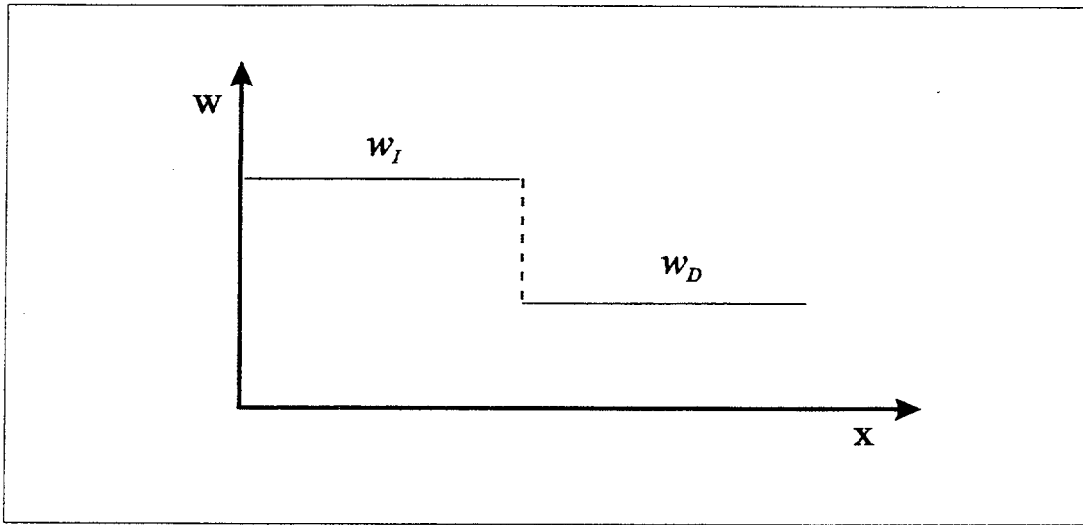


Figura 3.3. Perfil de w para un tiempo dado

3.3.1- CLASIFICACIÓN DE LAS SOLUCIONES DÉBILES.

La clasificación de las soluciones débiles de la forma débil de las leyes de conservación, es amplia en el sentido de que no hay unicidad en general. Es por tanto necesario un principio adicional para determinar una solución físicamente relevante. Oleinick [77] caracterizó una solución débil admisible (o discontinuidad) dada por dos estados w_I y w_D , y por su velocidad de propagación s de la forma siguiente:

$$\frac{F(w) - F(w_I)}{w - w_I} \geq S \geq \frac{F(w) - F(w_D)}{w - w_D} \quad (3.12)$$

Esta expresión conocida como “*condición de entropía*” debe ser satisfecha para todo w entre w_I y w_D . Toda solución débil que satisfaga dicha condición es determinada por los datos iniciales.

Una discontinuidad es llamada “*shock*” si la desigualdad de signos en (3.12) se mantiene estrictamente para todo w entre w_I y w_D .

Si los signos se mantienen iguales en el mismo intervalo, la discontinuidad recibe el nombre de “*discontinuidad de contacto*”, y en este caso se obtiene para w entre w_I y w_D

$$F(w) = s(w - w_D) + f(w_D)$$

la cual es lineal. Así la ley de conservación (3.8) es lineal en el rango de w entre w_I y w_D . Si definimos $a(w)$ como:

$$a(w_I) = \frac{\partial F}{\partial w}(w_I) = \lim_{w \rightarrow w_I} \frac{F(w) - f(w_I)}{w - w_I}$$

y

$$a(w_D) = \frac{\partial F}{\partial w}(w_D) = \lim_{w \rightarrow w_D} \frac{F(w) - f(w_D)}{w - w_D}$$

obtendremos por la condición de entropía

$$a(w_I) \geq s \geq a(w_D)$$

Consideremos la ley de conservación (3.8) con las condiciones iniciales dadas por la función

$$w(x,0) = f(x) = \begin{cases} w_I & x < 0 \\ w_D & x > 0 \end{cases}$$

con valores constantes a cada lado del origen, donde existe una discontinuidad de salto. *Este es el problema más simple del valor inicial para el cual aparecen las discontinuidades y es conocido como problema de Riemann.*

La solución de este problema es autosemejante, esto es $w(x,t) = h(x/t)$, donde h es una función continua por tramos, y aditiva, si $w(\xi, t\xi) = w_M$, entonces la función

$$w_1(x,t) = \begin{cases} w(x,t) & x/t < \xi \\ w_M & x/t > \xi \end{cases}$$

es la solución al problema de Riemann para (3.8) junto con la condición inicial

$$w_1(x,0) = \begin{cases} w_I & x < 0 \\ w_M & x > 0 \end{cases}$$

de igual forma, la función

$$w_2(x,t) = \begin{cases} w_M & x/t < \xi \\ w(x,t) & x/t > \xi \end{cases}$$

es la solución con la condición inicial

$$w_2(x,0) = \begin{cases} w_M & x < 0 \\ w_D & x > 0 \end{cases}$$

Geométricamente, significa que las soluciones w_1 , w_2 se unen para formar la solución w del problema de Riemann original. (Fig. 3.4)

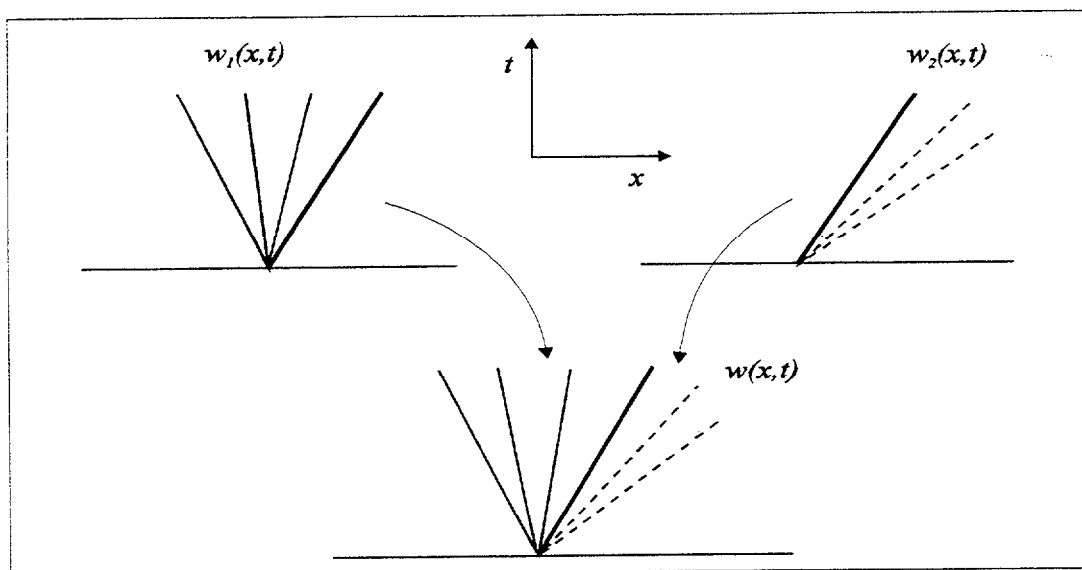


Figura 3.4. Propiedad aditiva del problema de Riemann

Si s esta dada por

$$s = \frac{F(w_D) - F(w_I)}{w_D - w_I}$$

la solución w será una “*onda de choque*”, propagándose con velocidad s si

$$w(x,t) = f(x-st) = \begin{cases} w_I & x/t < s \\ w_D & x/t > s \end{cases} \quad (3.13)$$

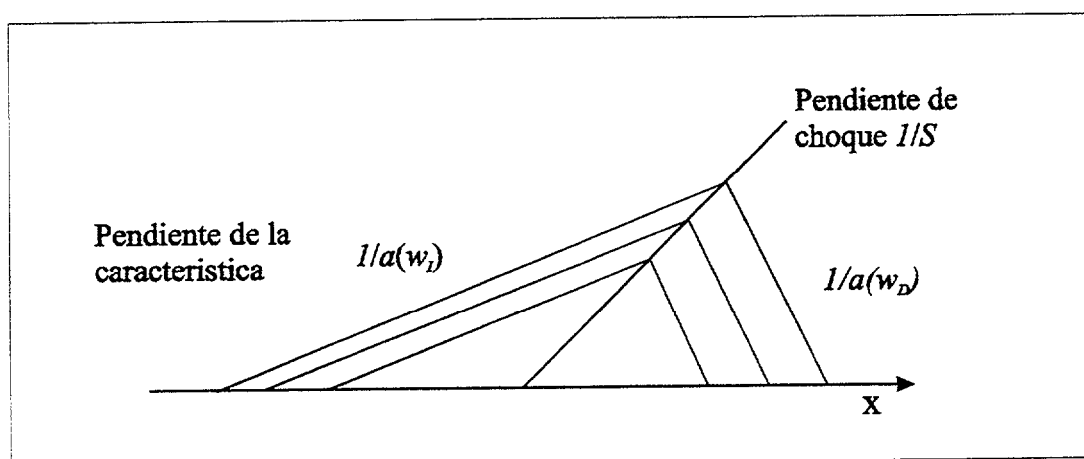


Figura 3.5. Onda de choque

Supongamos que w_I y w_D son dos estados que violan la condición de entropía, esto es $a(w_I) < a(w_D)$, y por lo tanto (3.13) es una solución débil que viola dicha condición. En este caso la solución es una “*onda de expansión ó rarefacción*”, y tiene la forma general

$$w(x,t) = v(x/t) = \begin{cases} w_I & x/t \leq a(w_I) \\ h(x/t) & a(w_I) \leq x/t \leq a(w_D) \\ w_D & x/t \geq a(w_D) \end{cases} \quad (3.14)$$

donde h es una función tal que $a(h(z))=z$. Si a es una función creciente de w ($da/dw \geq 0$) para cada w entre w_I y w_D , la solución anterior es continua en todo $t \geq 0$

La zona comprendida entre $a(w_I) \leq x/t \leq a(w_D)$ es denominada “*fan*”

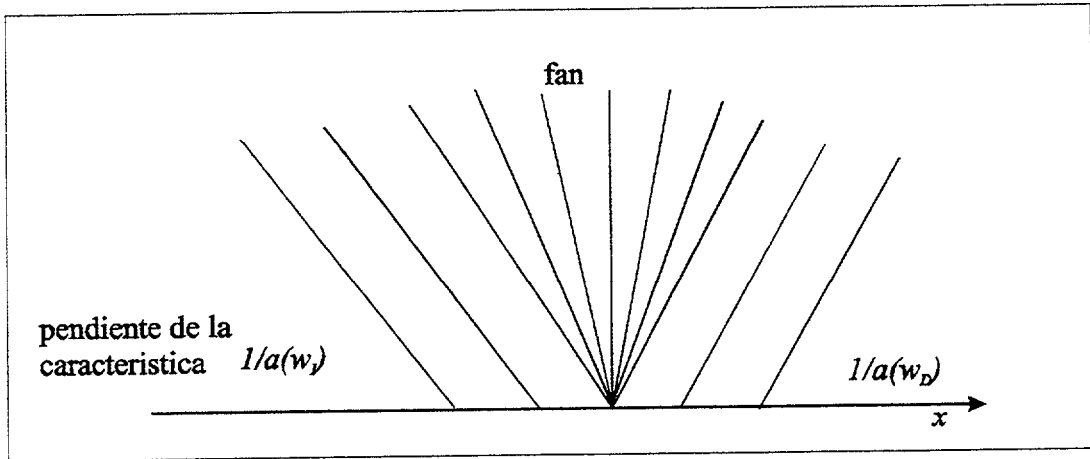


Figura 3.6. Onda de rarefacción

3.3.2.- SOLUCIONES DÉBILES DE LAS ECUACIONES DE LA DINÁMICA DE GASES.

Todo lo visto en el apartado anterior lo aplicamos a la solución de la ecuación vectorial (3.7b), que representa un sistema de primer orden hiperbólico de leyes de conservación, es decir, que la matriz 3×3 $A(W)$, jacobiano de F , tiene tres eigenvalores reales distintos

$$\lambda_1(W) = u - c, \quad \lambda_2(W) = u, \quad \lambda_3(W) = u + c$$

$c = \sqrt{\gamma p / \rho}$ es la velocidad adiabática del sonido y λ_i , $i = 1, 2, 3$ son las velocidades características asociadas con los tres modos de propagación de onda para (3.7b).

Puesto que estamos con soluciones débiles por trozos, interpretamos la ecuación (3.7b) en el sentido de distribuciones. Esto es, si $W(x, t)$ es discontinua a lo largo de una curva por tramos $(l(t), t)$, entonces $dl/dt = s(t)$ debe satisfacer la condición de salto de R-H

$$s(t) (W_I(l(t), t) - W_D(l(t), t)) = F(W_I(l(t), t)) - F(W_D(l(t), t))$$

donde

$$W_{I,D}(l(t), t) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0, \varepsilon \uparrow 0} W(l(t) \pm \varepsilon, t)$$

La discontinuidad debe satisfacer también la condición de entropía, lo cual se cumple si satisface la condición anterior.

Consideremos por tanto el problema de valor inicial con datos iniciales constantes a cada lado del origen, en el que hay una discontinuidad de salto, que como ya sabemos es conocido como problema de Riemann

$$\phi(x) = \begin{cases} W_I & x < 0 \\ W_D & x > 0 \end{cases} \quad W_I, W_D \in R^3$$

donde de forma euleriana

$$\mathbf{W}_{I,D} = \begin{pmatrix} \rho_{I,D} \\ m_{I,D} \\ e_{I,D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{I,D} \\ \rho_{I,D} u_{I,D} \\ p_{I,D}/(\gamma - 1) + \frac{1}{2} \rho_{I,D} u_{I,D}^2 \end{pmatrix}$$

siendo su solución (discutida ampliamente por Chorin [42], Godunov [36] y Sod [35]) un componente fundamental del método de Glimm. Instrucciones detalladas para construir soluciones numéricas de este problema se darán posteriormente, a continuación se describirá solo cualitativamente la estructura de la solución, apoyándonos en el caso especial en que $u_I = u_D = 0$, llamado el problema del “*tubo de choque*”

Como se vio anteriormente, la solución del problema de Riemann tiene las propiedades de adición y autosemejanza, por lo que dichas soluciones se podrán construir juntando ondas elementales. En el caso de la dinámica de gases hay tres familias de ondas elementales:

a). *Ondas de rarefacción*. Son soluciones uniformes (suaves) de las leyes de conservación. Hay de dos tipos, progresiva y regresiva (correspondiendo al signo + o - de las ecuaciones que se describen a continuación).

En el plano $x-t$ una rarefacción es una cuña separando dos estados constantes w_D y w_I . En la mitad de la cuña el gas satisface las siguientes ecuaciones siguiendo la línea con pendiente $dx/dt = u \pm c$ donde $c = (\gamma p/\rho)^{1/2}$ es la velocidad del sonido:

$$u_D - u \pm \frac{1}{\gamma} c_D \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{p}{p_D} \right)^{(\gamma-1)/2\gamma} - 1 \right] = 0 \quad (3.15)$$

$$\frac{\rho}{\rho_D} = \left(\frac{p}{p_D} \right)^{1/\gamma} \quad (3.16)$$

La primera ecuación establece que las invariantes de Riemann a izquierda y derecha $r_{\mp} = \frac{1}{2}u \mp c / (\gamma - 1)$ son constantes a lo largo de las líneas de rarefacción a y derecha e izquierda respectivamente. La segunda ecuación establece que la entropía termodinámica del gas es constante a través de la rarefacción. Para que la cola de la rarefacción no alcance la cabeza se hace necesario que $p_I \leq p_D$

b). **Ondas de choque.** Son soluciones discontinuas (débiles) de las leyes de conservación. Son también de dos tipos, progresiva y regresiva. En el plano $x-t$ un shock es una discontinuidad a lo largo de la línea con pendiente

$$dx/dt = u_D \pm c_D \left[1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \left(\frac{p_I}{p_D} - 1 \right) \right]^{1/2}$$

que separa dos estados constantes w_D y w_I relacionados por las ecuaciones

$$u_R - u_I \pm \frac{1}{\gamma} c_D \frac{\frac{p_I}{p_D} - 1}{\left[1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \left(\frac{p_I}{p_D} - 1 \right) \right]^{1/2}} = 0 \quad (3.17)$$

y

$$\frac{\rho_I}{\rho_D} = \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{p_I}{p_D} + 1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} + \frac{p_I}{p_D}} \quad (3.18)$$

Para que la entropía total de la solución no disminuya es necesario que $p_I \leq p_D$

c). **Discontinuidades de contacto.** Son también soluciones discontinuas (débiles) de las leyes de conservación pero solo de un tipo. En el plano $x-t$ una discontinuidad de contacto es una discontinuidad a lo largo de la línea con pendiente $dx/dt = u$ separando dos estados constantes que tienen la misma velocidad del fluido u y la misma presión p , pero diferentes densidades de masa ρ_I y ρ_D .

Para ver de que forma se agrupan estas ondas para formar la solución al problema de Riemann dividimos el plano (x,t) en cuatro regiones, I, II, III, IV, donde $W(x,t)$ es constante (Fig. 3.7).

Estas cuatro regiones están conectadas por tres ondas, cada una asociada con una velocidad característica de propagación. Estas son de manera general:

- Una onda sónica de frente regresivo, asociada con $\lambda_1(W) = u - c$, entre $l_{1,r}$ y $l_{2,r}$
- Una discontinuidad de contacto, asociada con $\lambda_2(W) = u$, a través de l_s
- Una onda sónica de frente progresivo, asociada con $\lambda_3(W) = u + c$, entre $l_{2,p}$ y $l_{1,p}$

La presión y la velocidad son continuas a través de l_{es} e iguales a unos valores fijos p^* y u^* en II y III. Solamente cambia la densidad a través de la línea $l_s(t) = u^*t$, desde ρ_I a ρ_D .

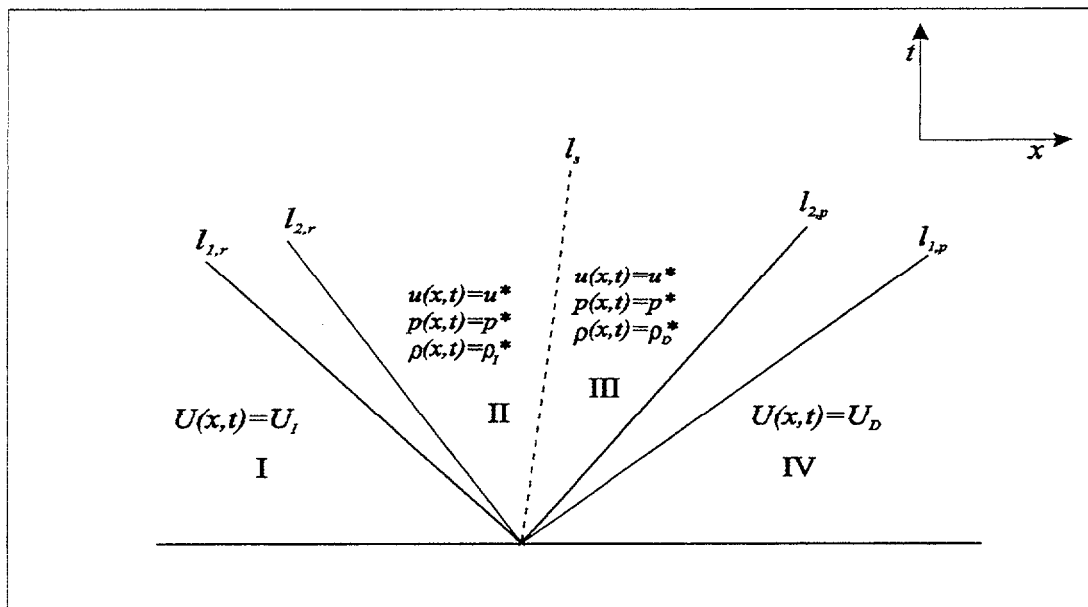


Figura 3.7. El problema de Riemann para la dinámica de gases

Como estableció Courant [81], las ondas hidrodinámicas se determinan conociendo el estado del gas en un lado de la onda, y la presión en el otro. Así por ejemplo, para un frente de onda regresivo hay dos posibilidades:

1. Si $p^* > p_1$, entonces, $u^* < u_1$, $\rho^* > \rho_1$, $l_{1,r} = l_{2,r}$ y la onda es de choque asociada con la velocidad característica $u-c$.
2. Si $p^* < p_1$, la onda es de rarefacción asociada a la velocidad característica $-u$, con $l_{1,r} < l_{2,r}$. $p(x,t)$ y $\rho(x,t)$ son funciones monótonas de x/t estrictamente decrecientes, y $u(x,t)$ estrictamente creciente, para todo (x,t) entre $l_{1,r}$ y $l_{2,r}$.

La descripción para un frente de onda progresivo es la misma, sin mas que reemplazar U_1 , u y $u+c$ por U_D , $-u$ y $u-c$.

A través del problema del tubo de choque vamos a comprobar en que forma se desarrollan las tres familias de ondas elementales mencionadas para la dinámica de gases.

La fig. 3.8 representa las condiciones iniciales en un tubo de choque, en el que un diafragma en x_0 separa dos regiones de gas en reposo $u_1 = u_5 = 0$, con diferente densidad y presión $\rho_1 > \rho_5$ y $p_1 > p_5$. Las dos regiones están en estado constante.

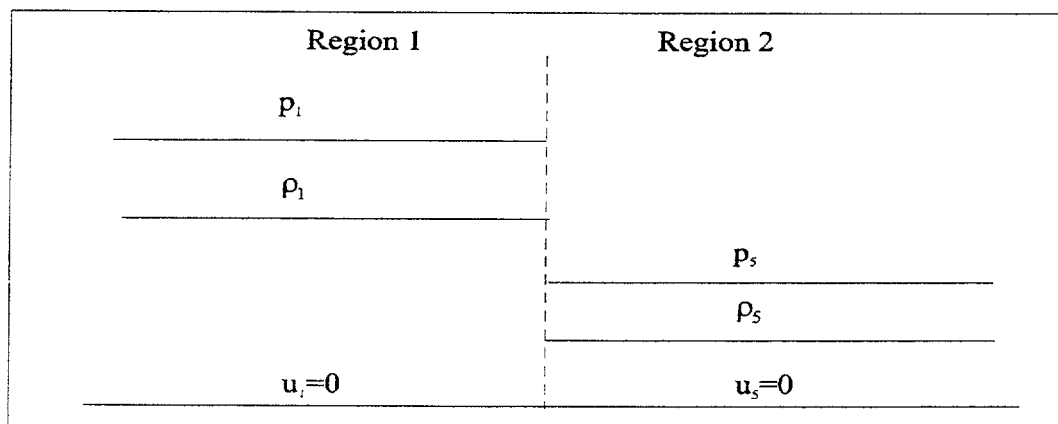


Figura 3.8. Condiciones del tubo de choque para $t=0$

Para $t > 0$ el diafragma se ha roto y consideramos el caso en que ninguna onda ha alcanzado los contornos izquierdo o derecho (fig. 3.9). Los puntos x_1 y x_2 representan la localización de la cabeza y la cola de la onda de rarefacción moviéndose hacia la izquierda. La solución es continua en esta región, pero alguna de las derivadas de las cantidades del fluido puede no serlo.

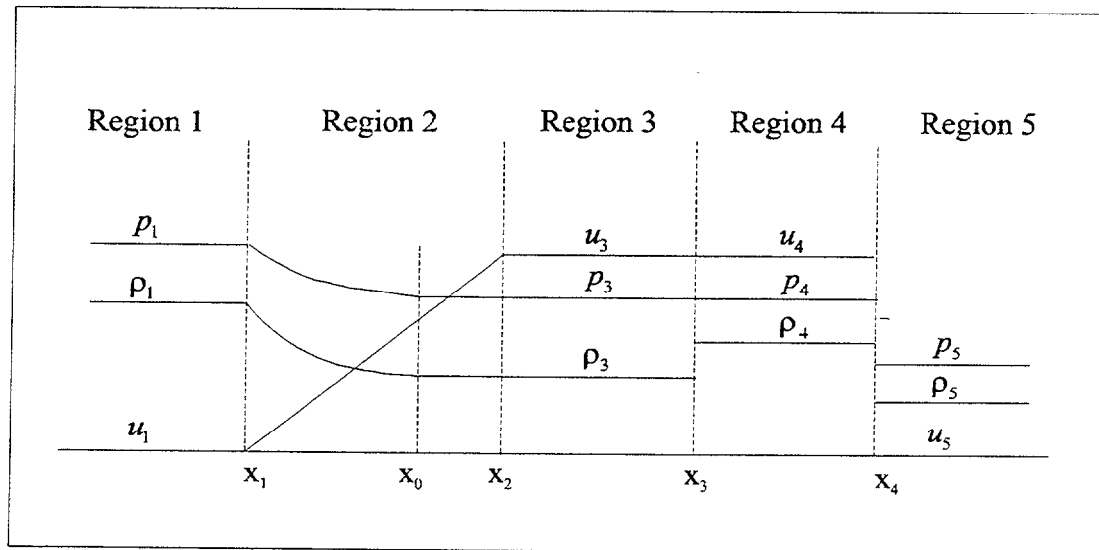


Figura 3.9. Condiciones del tubo de choque para $t > 0$

El punto x_3 es la posición que ha alcanzado un elemento de fluido, inicialmente en reposo en x_0 después de transcurrido el tiempo t . Este punto es una discontinuidad de contacto donde la presión y la velocidad son continuas, no así la densidad ni la energía específica. El punto x_4 es la localización de una onda de choque moviéndose hacia la derecha. A través de ella todas las cantidades son en general discontinuas.

En resumen, la solución al problema de Riemann (con dos estados constantes separados por una discontinuidad como datos iniciales) consiste, en una onda regresiva de rarefacción o choque a la izquierda, una onda progresiva de choque o rarefacción a la derecha y una discontinuidad de contacto entre ambas.

3.4.- RESOLUCIÓN NUMÉRICA DEL SISTEMA DE ECUACIONES HOMOGENEO. METODO DE GLIMM.

La ecuación (3.7b) puede ponerse en forma euleriana introduciendo las variables dependientes m y e definidas por:

$$m = \rho u \quad e = \rho(\varepsilon + \frac{1}{2}u^2)$$

donde ρ , m y e , son la densidad, momento y energía total por unidad de volumen del gas, y ε su energía interna por unidad de masa.

Los vectores (en sentido matemático) $\mathbf{W}$ y $\mathbf{F}(\mathbf{W})$ quedarán definidos como

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \rho \\ m \\ e \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}(\mathbf{W}) = \begin{bmatrix} m \\ (m^2/\rho) + p \\ (e + p)m/\rho \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

donde la presión está dada por la ecuación de estado

$$p = f(\varepsilon, \rho) = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$$

Se trata por tanto de construir soluciones aproximadas al problema del valor inicial para las ecuaciones de Euler que describen el movimiento de un gas compresible y sin fricción con la ecuación politrópica de estado, bajo la hipótesis de unidimensionalidad del fenómeno. El movimiento de este fluido ideal es caracterizado por líneas o curvas en el plano $x-t$ en el que ciertas cantidades son discontinuas con valores límites a cada lado. (Incluso en zonas de flujo uniforme se pueden desarrollar discontinuidades a partir de un tiempo finito, después del cual existen soluciones simples no uniformes del sistema (3.7b)). Ejemplos de estas discontinuidades, como ya se ha visto son, una interfase, una discontinuidad de contacto (ρ y ε son discontinuas, p y u continuas), un frente de choque (p , u , ρ y ε discontinuas) y la cabecera de una onda de rarefacción (solo ciertas variables son discontinuas).

En tales discontinuidades, las ecuaciones diferenciales deben de sustituirse por “*condiciones de salto*”, que sirvan como condición de contorno interna para hacer única la solución.

Para una interfase, una discontinuidad de contacto, o la cabecera de rarefacción, las únicas condiciones de salto necesarias son la continuidad de ciertas variables, no requiriendo por tanto modificar el sistema de diferencias finitas. Pero cuando están presentes choques, es necesario la modificación de las ecuaciones en la forma que se describe a continuación

Establecemos las condiciones de salto para simetría plana, en la que x es la coordenada de un elemento de fluido a $t = 0$, y, $X = X(x, t)$ la coordenada del mismo elemento del fluido en un tiempo t . Si damos la posición del choque por $x = \zeta(t)$, la masa de fluido desplazado por el frente de la onda de choque en la unidad de tiempo por unidad de área es

$$m = \rho_0 \frac{d\zeta}{dt}$$

siendo ρ_0 una constante con dimensiones de una densidad. Cuando $x \rightarrow \zeta$ los subíndices 1 y 2 señalan los límites izquierdo y derecho tal que $u_1, p_1, \rho_1, \varepsilon_1$ describen las condiciones inmediatamente detrás de la discontinuidad, y $u_2, p_2, \rho_2, \varepsilon_2$ inmediatamente delante, si el frente se mueve en la dirección $+x$, y al revés si el movimiento es en la dirección $-x$.

La *conservación de la masa* es expresada por la continuidad de $X(x, t)$ a través del choque, así que su derivada a lo largo de la línea $x = \zeta(t)$, esto es

$$\frac{\delta X}{\delta x} dx + \frac{\delta X}{\delta t} \quad \text{con} \quad dx = \frac{d\zeta}{dt} \quad (3.20)$$

debe ser la misma en ambos lados, por lo tanto como

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \rho_0 V \quad \text{y} \quad \frac{\partial X}{\partial t} = u$$

con V como volumen específico, sustituyendo en (3.20)

$$\rho_0 V \frac{d\zeta}{dt} + u = \text{cte}$$

o bien

$$mV_1 + u_1 = mV_2 + u_2 \quad (3.21)$$

La **conservación del momento** establece que el incremento del momento del volumen desplazado en la unidad de tiempo es igual a la diferencia de presiones

$$m(u_1 - u_2) = p_1 - p_2 \quad (3.22)$$

La **conservación de energía** requiere que el incremento de energía de ese fluido sea igual al trabajo neto hecho en la unidad de tiempo

$$m\left(\varepsilon_1 + \frac{u_1^2}{2} - \varepsilon_2 - \frac{u_2^2}{2}\right) = p_1 u_1 - p_2 u_2 \quad (3.23)$$

Las ecuaciones (3.22) a (3.23) se pueden combinar de varias maneras de las cuales una es:

$$\begin{aligned} m &= \sqrt{\frac{p_1 - p_2}{V_2 - V_1}} \\ u_1 - u_2 &= \sqrt{(p_1 - p_2)(V_2 - V_1)} \\ \varepsilon_1 - \varepsilon_2 &= \frac{p_1 - p_2}{2} (V_1 + V_2) \end{aligned} \quad (3.24)$$

conocidas como las **ecuaciones de salto de Rankine-Hugoniot** necesarias para la resolución de las discontinuidades en la dinámica de fluidos con estados constantes a cada lado.

3.4.1.- METODO DE GLIMM. INTRODUCCION TEORICA.

El método de elección aleatoria (*random choice method*, en adelante *RCM*) introducido por Glimm [43], es una técnica para el cálculo de soluciones discontinuas de los sistemas hiperbólicos no lineales de leyes de conservación. Consiste en aproximar la solución en cada paso a un estado constante por tramos, avanzando hasta el paso siguiente resolviendo el problema del valor inicial de Riemann, formado por los estados constantes entre dos celdas espaciales adyacentes. La solución exacta se determina por medio de un muestreo estadístico, en un punto elegido aleatoriamente, de las soluciones teóricas del problema de Riemann dentro de cada intervalo espacial. El RCM fue empleado como un efectivo método numérico para la dinámica de gases por Chorin [42,57] y posteriormente desarrollado por Concus [60], Sod [58,59], Colella [79,80] y Glimm [81].

Se analizarán dos versiones del RCM. En ambas se utiliza un método de dos pasos, la primera utilizando una malla escalonada, y la segunda una malla simple.

Consideremos una vez mas el sistema hiperbólico no lineal de leyes de conservación

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0 \quad (2.7a)$$

con $\mathbf{W}$ y $\mathbf{F}(\mathbf{W})$ definidos por (3.5) describiendo en este caso el flujo monodimensional de un gas en conductos de sección constante y sin fricción, sujeto a las condiciones iniciales

$$\mathbf{W}(x,0) = \mathbf{f}(x) \begin{cases} \mathbf{w}_I & x < 0 \\ \mathbf{w}_D & x > 0 \end{cases} \quad -\infty < x < +\infty$$

Supongamos que $\mathbf{w}_i^n$ y $\mathbf{w}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ denotan aproximaciones a $\mathbf{w}(ih, nk)$ y $\mathbf{w}((i+\frac{1}{2})h, (n+\frac{1}{2})k)$ respectivamente, donde $h=\Delta x$ y $k=\Delta t$. Más que considerar

puntos discretos en el espacio, asumimos que la solución es constante en intervalos de longitud h , esto es, constante por tramos. El objetivo es construir las soluciones $\mathbf{w}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ conocidos $\mathbf{w}_i^n$ y $\mathbf{w}_{i+1}^n$, para encontrar la solución $\mathbf{w}_i^{n+1}$ a partir de $\mathbf{w}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ y $\mathbf{w}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$, y así definir el algoritmo.

Para calcular $\mathbf{w}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ lo haremos a partir de la ecuación (3.7b) junto con la condición inicial constante por tramos

$$\mathbf{W}(x, nk) = \mathbf{w}_i^n \quad (i - \frac{1}{2})h < x < (i + \frac{1}{2})h \quad (3.25)$$

que sobre el intervalo $ih < x < (i+1)h$ representa una función de paso

$$\mathbf{W}(x, nk) = \begin{cases} \mathbf{w}_i^n = \text{cte} & x < (i + \frac{1}{2})h \\ \mathbf{w}_{i+1}^n = \text{cte} & x > (i + \frac{1}{2})h \end{cases}$$

y si $\mathbf{w}_i^n \neq \mathbf{w}_{i+1}^n$, una discontinuidad. Esta discontinuidad, considerada como una onda, se propaga con velocidad c . Si $\Delta t = k$ es lo suficientemente pequeño y cumple con la condición de Courant-Friedrichs-Levy (en adelante CFL)

$$|c|k/h \leq 1$$

las discontinuidades generadas por cada problema de Riemann individual, no se propagaran mas allá del intervalo $[ih, (i+1)h]$ para cada entero i , por lo tanto, la solución se puede combinar por superposición de las soluciones teóricas locales en una solución exacta única $\mathbf{W}^e(x, t)$ para $nk \leq t \leq (n + \frac{1}{2})k$. (fig. 3.10)

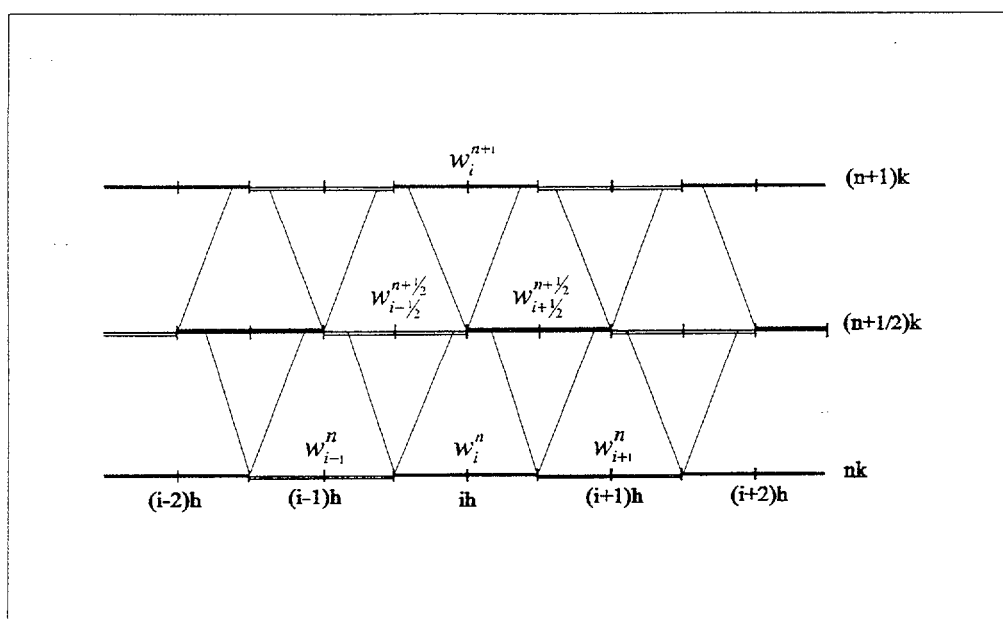


Figura 3.10. Secuencia para la solución al problema de Riemann para la versión de dos pasos con malla escalonada del RCM

La construcción de la solución numérica para $t = (n + \frac{1}{2})k$, es decir el cálculo de los valores w que se asignaran a cada nodo $x = (i + \frac{1}{2})h$, se realizara por medio de un muestreo estadístico de la solución teórica en cada intervalo $[ih, (i+1)h]$. Esto significa tomar como solución

$$w_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = w^e((i + \frac{1}{2} + \xi_n)h, k/2)$$

donde ξ_n es una variable aleatoria uniformemente distribuida en el intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, esto es, ξ_n tiene una función de densidad de probabilidad de valor uno en $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ y cero fuera de el. (fig. 3.11)

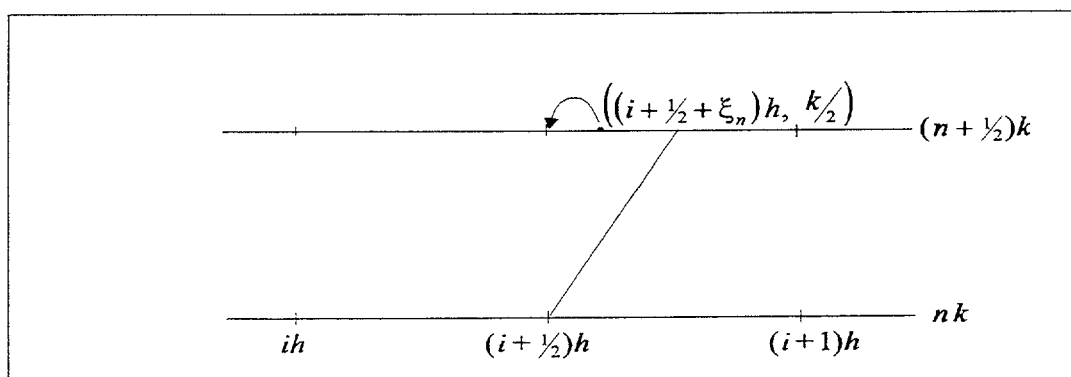


Figura 3.11. Procedimiento de muestreo para la versión de dos pasos del RCM

La solución $w(x, t)$ es constante a lo largo de la característica $x + ct = cte$. Si seguimos la característica que pasa por el punto $[(i + \frac{1}{2} + \xi_n)h, (n + \frac{1}{2})k]$ y por $(\bar{x}, nk)$, intersección con la línea $t = nk$, obtenemos

$$\bar{x} = \frac{ck}{2} + (i + \frac{1}{2} + \xi_n)h$$

Si el punto $(\bar{x}, nk)$ esta a la izquierda del punto $((i + \frac{1}{2})h, nk)$, esto es $\bar{x} < (i + \frac{1}{2})h$, entonces, $w_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = w_i^n$ y si el punto $(\bar{x}, nk)$ esta a la derecha de $((i + \frac{1}{2})h, nk)$, es decir $\bar{x} > (i + \frac{1}{2})h$, entonces $w_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = w_{i+1}^n$. Esto se resume en

$$w_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \begin{cases} w_i^n & \text{si } \xi_n h < -ck/2 \\ w_{i+1}^n & \text{si } \xi_n h > -ck/2 \end{cases} \quad (3.26)$$

De forma similar, para encontrar la solución de w_i^{n+1} se avanza la solución desde $t = (n + \frac{1}{2})k$ hasta $t = nk$, centrándose nuevamente la solución numérica en nodos con índice entero, partiendo de la condición inicial constante por tramos

$$W(x, (n + \frac{1}{2})k) = w_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \quad ih < x < (i+1)h$$

se obtiene la solución $w^e(x, t)$ para $(n + \frac{1}{2})k \leq t \leq (n+1)k$

$$w_i^{n+1} = w^e((i + \xi_{n+\frac{1}{2}})h, k/2)$$

siendo $\xi_{n+\frac{1}{2}}$ una variable aleatoria uniformemente distribuida en el intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Se obtiene así una solución en el tiempo $n+1$ que depende de la secuencia $\bar{\xi} = \xi_1, \xi_2, \dots$, de manera que su elección determinara la conducta de la solución como se comprobara en el apartado siguiente.

La segunda versión del RCM trata de encontrar en un proceso de dos pasos el valor de w_i^{n+1} dados w_{i-1}^n, w_i^n y w_{i+1}^n , pero utilizando una malla simple a partir de la

secuencia de problemas de Riemann originados por la ecuación (3.7b) con la condición inicial constante por tramos (3.25).

La solución de $\mathbf{w}_i^{n+1}$ se basa en resolver dos problemas de Riemann con condiciones

$$\mathbf{w}_{i-}(x, nk) = \begin{cases} \mathbf{w}_{i-1}^n & x \in (i - \frac{1}{2})h \\ \mathbf{w}_i^n & x \in (i - \frac{1}{2})h \end{cases} \quad (3.27)$$

y

$$\mathbf{w}_{i+}(x, nk) = \begin{cases} \mathbf{w}_i^n & x \in (i + \frac{1}{2})h \\ \mathbf{w}_{i+1}^n & x \in (i + \frac{1}{2})h \end{cases}$$

Para este caso la condición de CFL se hace

$$\frac{|c|k}{2h} \leq 1$$

en la que el factor $\frac{1}{2}$ viene de reemplazar k por $k/2$ en (3.27).

Si la condición de CFL se cumple, las discontinuidades (ondas) en cada uno de los intervalos $[ih, (i+1)h]$ permanecerán en su respectivo intervalo, por lo que la solución se podrá combinar por superposición en solución exacta única $\mathbf{w}^e(x, t)$ para $nk < t < (n+1)k$.

Si ξ_n es una variable aleatoria uniformemente distribuida en el intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, muestreando los problemas de Riemann asociados con (3.27) obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= \mathbf{w}^e((i - \frac{1}{2} + \xi_n)h, \frac{k}{2}) \\ \mathbf{w}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= \mathbf{w}^e((i + \frac{1}{2} + \xi_n)h, \frac{k}{2}) \end{aligned}$$

El segundo paso es (fig. 3.12)

$$w_i^{n+1} = \begin{cases} w_{i-1/2}^{n+1/2} \xi_n > 0 \\ w_{i+1/2}^{n+1/2} \xi_n < 0 \end{cases}$$

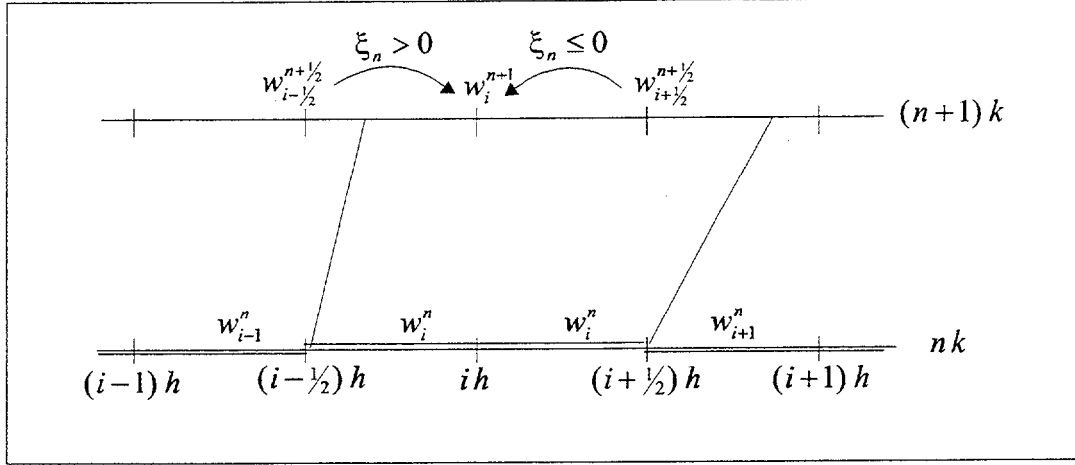


Figura 3.12. Procedimiento de muestreo para el RCM en malla simple.

3.4.2. ELECCION DE LA SECUENCIA DE VARIABLES ALEATORIAS.

Una elección apropiada del procedimiento de muestreo es crucial para el éxito del RCM. Si la solución al problema de Riemann dado por (3.26) se evalúa en el punto $[(i + \frac{1}{2} + \xi_n)h, (n + \frac{1}{2})k]$ según Glimm, la elección de ξ_n determinará la conducta de la solución. Supongamos que ξ_n es próxima a $-\frac{1}{2}$, entonces el valor del estado izquierdo w_i^n se propagará a la derecha una distancia $h/2$. Si ξ_n se elige próxima a $\frac{1}{2}$, el valor del estado derecho w_{i+1}^n se propagará a su izquierda una distancia $h/2$. Si se elige una nueva ξ_n para cada i (en espacio) y n (en tiempo), hay una probabilidad finita que un estado determinado se propague en ambas direcciones, creando un falso estado constante. Para eliminar esto se elige solo una variable aleatoria por cada incremento de tiempo (de aquí el subíndice n en ξ_n).

La secuencia $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ se puede obtener por medio de números pseudoaleatorios generados por ordenador. Una mejora introducida por Chorin consiste en lograr que la secuencia de variables aleatorias ξ_n alcance una distribución uniforme de la forma más rápida posible en el intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, con lo que la varianza de la solución puede reducirse

Dados dos números primos enteros m_1 y m_2 con $m_1 < m_2$ consideremos la secuencia de enteros

$$k_{n+1} = (m_1 + k_n)(\text{mod } m_2) \quad (3.28)$$

con $k_0 < m_2$. Esto producirá una serie de enteros pseudoaleatorios entre 0 y m_2 . El intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ se divide en m_2 subintervalos y a través de la técnica de muestreo estratificado se elige una variable aleatoria de cada subintervalo una vez cada m_2 variables aleatorias. Esto se hace como sigue:

Si $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ es una secuencia distribuida uniformemente en $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, la secuencia estratificada vendrá dada por

$$\xi'_n = \frac{k_n + \xi_n + \frac{1}{2}}{m_2} - \frac{1}{2} \quad (3.29)$$

Liu [82] demostró que no es necesario usar números aleatorios, requiriéndose solamente que la secuencia este distribuida uniformemente. Tal afirmación se basa en el mecanismo por el cual se modela la propagación de la onda y que se desarrolla a continuación.

Supongamos que w_I y w_D sean los estados izquierdo y derecho de un problema de Riemann cuya solución consiste en una discontinuidad simple propagándose a velocidad $c > 0$. La solución exacta para este problema es

$$w_{(x,t)} = \begin{cases} w_D & x < ct \\ w_I & x > ct \end{cases}$$

Resolviendo este problema por Glimm, es obvio que para cualquier incremento de tiempo n , si $x(n)$ es la localización del shock en la solución aproximada, hay un valor $x(n) = j_{0-1/2}$ con j_0 entero tal que

$$w_j^n = \begin{cases} w_I & j < x(n) \\ w_D & j > x(n) \end{cases}$$

y además satisface

$$x(n+1) = \begin{cases} x(n) \xi_{n+1} & \text{si } x(n) \xi_{n+1} > \lambda c \\ x(n+1) \xi_{n+1} & \text{si } x(n+1) \xi_{n+1} < \lambda c \end{cases} \quad \text{con } \lambda = k/h \text{ y } x(0) = 1/2$$

por lo que

$$x(n) = x(0) + N$$

siendo $N = \sum_{j=1}^n \xi_j$ con ξ_j perteneciendo al intervalo $[0, \lambda c)$, si $N = \sum_{n_1+1}^{n_2} \xi_j$ con ξ_j perteneciendo a un intervalo I , será el número de j , $n_1 < j \leq n_2$, tal que ξ_j esta contenida en I . Como una secuencia $\bar{\xi}$ es equidistribuida si la proporción de veces que ξ_j esta contenida en I es asintoticamente igual a $|I|$, la longitud I . Por tanto, si definimos el error E que produce la elección de n_1 , n_2 e I sobre $\bar{\xi}$ como

$$\frac{N}{n_2 - n_1} - |I| \equiv E(\bar{\xi}, n_1, n_2, I)$$

$\bar{\xi}$ será uniformemente distribuida si $\lim_{n \rightarrow \infty} E(\bar{\xi}, n_1, n_2, I) = 0$ para n e I fijos. Con esta notación, el desplazamiento de la onda (shock o rarefacción) después de n incrementos de tiempo se puede poner en la forma

$$\begin{aligned} x(n) \Delta x &= x(0) \Delta x + \lambda c n \Delta x + E n \Delta x \\ &= x(0) \Delta x + n \Delta t \left(1 + \frac{1}{\lambda} E\right) \end{aligned}$$

Si ξ es equidistribuida, entonces, $x(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} ct$. Así la onda en la solución aproximada en cada incremento de tiempo o se mueve una distancia Δx o no se mueve nada. Después de un incremento t , el desplazamiento acumulado será próximo a la solución exacta. en general, un flujo continuo por tramos estará representado por un numero de ondas de orden $O(1/\Delta x)$ con intensidad $O(\Delta x)$, y todas con velocidad diferente y con un numero de discontinuidades de orden $O(1)$. Además, la velocidad e intensidad de las mismas, cambiara de forma continua por tramos en función del tiempo.

Para modelar este flujo de forma correcta a través del mecanismo descrito, es necesario elegir la secuencia ξ tal que el error E sea lo más pequeño posible, uniforme en I , n_l para $n_2 - n_l$ relativamente grande con respecto a 1, pero $(n_2 - n_l)\Delta t$ relativamente pequeño con respecto al tiempo característico en el cual la onda cambia de velocidad. El procedimiento de muestreo que se describe a continuación parece ser el optimo desde el punto de vista de estos requerimientos según se demuestra por los resultados obtenidos y que se exponen en el apartado siguiente.

La forma más simple de esta secuencia de muestreo no aleatoria es debido a Van der Corput [83] . Así, considerando la representación binaria de un entero

$$n = \sum_{k=0}^m i_k 2^k \quad i_k = 0,1$$

la secuencia de Van der Corput esta dada por

$$\xi_n = \sum_{k=0}^m i_k 2^{-(k+1)} \quad (3.30)$$

donde los valores de i_k y m para $k=0, \dots, m$ están determinados por la representación binaria de n . los primeros elementos de esta secuencia serian:

$1=1_2$	$\xi_1=0.5$
$2=10_2$	$\xi_2=0.25$
$3=11_2$	$\xi_3=0.75$
$4=100_2$	$\xi_4=0.125$
$5=101_2$	$\xi_5=0.625$
$6=110_2$	$\xi_6=0.375$
$7=111_2$	$\xi_7=0.875$
$8=1000_2$	$\xi_8=0.0625$

de tal forma que

$$\xi_i \begin{cases} < 0.5 & \text{si } i = \text{par} \\ > 0.5 & \text{si } i = \text{impar} \end{cases}$$

3.4.3.- CONSISTENCIA, ESTABILIDAD Y CONVERGENCIA DEL METODO DE GLIMM.

El error global de un método numérico resulta de la superposición de dos tipos de errores: el error producido al discretizar la ecuación diferencial y truncar la serie, y el error de redondeo introducido al resolver la ecuación en diferencias y que es debido al numero limitado de cifras significativas con las que opera el ordenador.

El planteamiento correcto de un método numérico en diferencias finitas exige que este satisfaga simultáneamente las condiciones de consistencia, convergencia y estabilidad. Sin entrar en detalles se describen a continuación estas tres propiedades.

Se dice que un esquema en diferencias finitas es *consistente* cuando al hacer tender a cero los parámetros de discretización (h,k) , el valor de la ecuación diferencial y el de la ecuación en diferencias se hacen equivalentes, con independencia de la forma en que tiendan a cero dichos parámetros.

El concepto de *estabilidad* está relacionado con la influencia de los errores cometidos en cada paso del algoritmo sobre la solución en pasos posteriores, es decir que si las diferencias entre las soluciones teóricas y numéricas de la ecuación discretizada, no se incrementan al progresar el proceso de cálculo sino que permanecen acotadas y eventualmente desaparecen, el método es estable.

Un esquema en diferencias será *condicionalmente estable* si hay unos límites a los valores de h y k de forma que por encima de ellos la solución numérica es inestable, siendo estable para valores de h y k inferiores a dichos límites. Un esquema es *incondicionalmente estable* si no existen dichos límites.

Posiblemente, la estabilidad sea el problema más acuciante para cualquier algoritmo numérico ya que normalmente es una condición necesaria para la convergencia del mismo. Como ya sabemos, el método de Glimm no es un esquema en diferencias aunque las soluciones se calculan sobre una malla, pero como en la práctica la condición de estabilidad se exige previamente a cualquier desarrollo informático del mismo, recurriendo al *teorema de Lax* que establece que *la consistencia y estabilidad son las condiciones necesarias y suficientes para que se verifique la convergencia*, vamos a demostrar que el método de Glimm es consistente e incondicionalmente estable.

Consideremos la ecuación (3.7a) con la condición inicial $W(x,0)=f(x)$ dada por la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

la solución según (3.26) es

$$w(x, t) = f(x + t) = \begin{cases} 0 & x < -ct \\ 1 & x > +ct \end{cases}$$

La solución a este problema del valor inicial, como tal problema de Riemann, usando el método de Glimm solo tiene tres posibles combinaciones de los valores de los estados a derecha e izquierda:

a) w_i^n y w_{i+1}^n son cero, por lo que en vez de una función de salto, la condición inicial es un estado constante simple de valor cero, por lo que el valor muestreado para $w_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ solo puede ser cero.

b) w_i^n y w_{i+1}^n son iguales a uno, la condición inicial es por tanto un estado constante simple de valor uno. El valor muestreado para $w_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ solo puede ser uno.

c) $w_i^n = 0$ y $w_{i+1}^n = 1$ lo cual es una discontinuidad. Si el valor muestreado satisface $\xi_n h < -c h/2$, entonces $w_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = 0$, con lo que la discontinuidad inicial se mueve una distancia $h/2$ a la derecha. Si el valor muestreado cumple $\xi_n h > -c h/2$, $w_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = 1$, la discontinuidad se mueve una distancia $h/2$ a la izquierda. De esta manera la discontinuidad se propaga sin deformación. Su posición fluctúa alrededor de su posición real.

El RCM no tiene por tanto dispersión numérica ni produce atenuación a diferencia de los métodos numéricos dependientes de la malla de discretización tal como las diferencias finitas.

Aun más, de acuerdo a la solución teórica del problema, cualquier discontinuidad inicial se desplazara luego de un tiempo T , una distancia $l = cT$ respecto

a su posición inicial sin deformarse. La correspondiente distancia l_n calculada por Glimm puede expresarse como

$$l_n = \sum_{j=1}^{2n} \xi_j \quad n = T/k$$

con $\xi_j = \xi_j(t)$ variables aleatorias independientes pero idénticamente distribuidas, con una densidad de probabilidad que de acuerdo a la figura (3.13) será

$$\text{Prob}[\xi_j = -h/2] = \frac{h-ct}{2h}$$

$$\text{Prob}[\xi_j = h/2] = \frac{h+ct}{2h}$$

El valor esperado, el momento y la varianza de ξ_j serán

$$E[\xi_j] = \frac{h+ck}{2h} \left(-\frac{h}{2}\right) + \frac{h-ck}{2h} \left(\frac{h}{2}\right) = -\frac{ck}{2}$$

$$E[\xi_j^2] = \frac{h+ck}{2h} \left(-\frac{h}{2}\right)^2 + \frac{h-ck}{2h} \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{h^2}{4}$$

$$\text{Var}[\xi_j] = E[\xi_j^2] - E[\xi_j]^2 = \frac{h^2}{4} - \frac{(ck)^2}{4} = \frac{h^2 - c^2 k^2}{4}$$

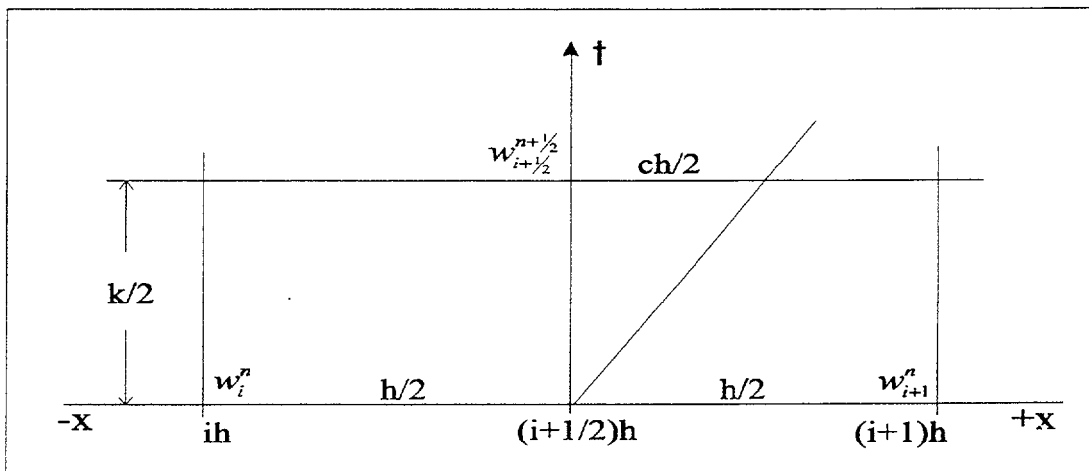


Figura 3.13.- Solución al problema de Riemann para la ecuación (3.7b)

de lo cual se concluye

$$E[l] = \sum_{j=1}^{2n} E[\xi_j] = 2n \left(-\frac{ck}{2} \right) = -cT$$

$$Var[l] = \sum_{j=1}^{2n} Var[\xi_j] = \left(\frac{h^2 - (ck)^2}{4} \right) 2n = \frac{k}{2} \left[\left(\frac{h}{k} \right)^2 - c^2 \right] T$$

Se observa que el valor esperado coincide exactamente con la solución teórica. Si la relación h/k se mantiene constante para un T fijo, $Var[\xi]$ tiende a cero para k tendiendo a cero, *lo cual prueba la convergencia del método*.

3.4.4.- IMPLEMENTACION DEL METODO DE GLIMM

El éxito de la aplicación del método de Glimm depende de la posibilidad de resolver de manera fácil y eficiente el problema de Riemann causado en nuestro caso por el problema del valor inicial en las ecuaciones que rigen el flujo monodimensional de un gas compresible no viscoso, descritas en forma conservativa por

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{W} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(\mathbf{W}) = 0$$

3.4.4.1.- SOLUCION DEL PROBLEMA DE RIEMANN. METODO ITERATIVO DE GODUNOV.

El método desarrollado por Godunov [36,40], consiste en que conocidos $\mathbf{W}_i^n$ para todo i , se calculan en primer lugar valores aproximados de $\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ para posteriormente obtener los valores de $\mathbf{W}_i^{n+1}$ por la formula centrada

$$\mathbf{W}_i^{n+1} - \mathbf{W}_i^n = \frac{h}{k} \left(\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right)$$

De acuerdo con la ecuación (3.19) solo es necesario calcular valores aproximados de u y p a través de un modelo físico en el cual u , p , ρ y E a $t=nh$ tienen valores constantes en cada intervalo $[(i-\frac{1}{2})h, (i+\frac{1}{2})h]$. Para un tiempo de orden $k/2c$, la conducta exacta de este modelo se describió en el apartado (3.3.2) con la conclusión de que la solución general a los problemas de Riemann consiste en dos ondas de rarefacción, dos ondas de choque, o una de rarefacción y otra de choque. Una de estas ondas se mueve en la dirección $-x$, y la otra en la dirección $+x$, y una discontinuidad de contacto entre ambas (ver fig. 3.5) donde u y p son constantes en

espacio y tiempo (hasta que las ondas de las discontinuidades vecinas la alcancen), mientras ρ y E tienen saltos, los valores de u y p entre las ondas los tomamos como

$$p_{i+1/2}^{n+1/2} \quad y \quad u_{i+1/2}^{n+1/2}$$

Como estos valores no dependen de k , el error será de orden $O(h)$, porque la magnitud de cada discontinuidad es proporcional a h en la región donde el flujo es uniforme. El error puede también expresarse como $O(k)$, porque k/h se asume constante durante el refinamiento de la malla. A pesar de ser de primer orden, el método de Godunov tiene la virtud de tratar cualquier discontinuidad contenida en un flujo de manera mas realista que los métodos que utilizan viscosidad artificial.

Para desarrollar de forma adecuada las formulas para la resolución de una discontinuidad en dinámica de fluidos con estados constantes a cada lado asumiendo la ecuación de estado de un gas perfecto, tomamos los valores desconocidos $p_{i+1/2}^{n+1/2}$ y $u_{i+1/2}^{n+1/2}$ temporalmente como p^* y ρ^* . Si la onda que se mueve hacia la derecha desde el punto $x=(i+1/2)h$ es de choque, el salto en el valor de la velocidad del fluido esta relacionado con el salto de la presión por la ecuación del momento (3.22), que aquí toma la forma

$$M^+(u^* - u_{i+1}^n) = p^* - p_{i+1}^n \quad (3.30)$$

donde M^+ es la masa de fluido barrida por la onda de choque en la unidad de tiempo por unidad de área, siendo su valor

$$M^+ = \left(\frac{(\gamma + 1)p^* + (\gamma - 1)p_{i+1}^n}{2/\rho_{i+1}^n} \right)^{1/2} \quad (3.31)$$

que se obtiene de (3.24) junto con la ecuación de estado asumida.

Si la onda que se mueve hacia la derecha es de rarefacción se obtiene una expresión similar a (3.30) pero con M^+ definida por la ecuación

$$M^+ = \frac{\Delta p}{\Delta u} = \frac{\gamma - 1}{2\sqrt{\gamma} p_{i+1}^n / \rho_{i+1}^n} \frac{p_{i+1}^n - p^*}{\left(1 - p^* / p_{i+1}^n\right)^{\gamma-1/2\gamma}} \quad (3.32)$$

combinando (3.31), usada para $p^* > p_{i+1}^n$, con la ecuación (3.32) utilizada si $p^* < p_{i+1}^n$ tenemos que

$$M^+ = \sqrt{p_{i+1}^n \rho_{i+1}^n} \varphi(p^* / p_{i+1}^n) \quad (3.33)$$

donde

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\gamma+1}{2} \omega + \frac{\gamma-1}{2}} & \text{si } \omega > 1 \\ \frac{\gamma-1}{2\sqrt{\gamma}} \frac{1-\omega}{1-\omega^{(\gamma-1)/2\gamma}} & \text{si } \omega \leq 1 \end{cases}$$

Para la onda moviéndose hacia la izquierda obtenemos de forma similar

$$-M^-(u^* - u_i^n) = p^* - p_i^n \quad (3.34)$$

con

$$-M^- = \sqrt{p_i^n \rho_i^n} \varphi(p^* / p_i^n) \quad (3.35)$$

Las ecuaciones (3.31) y (3.34), con M^+ y M^- expresadas en términos de la función $\varphi(\cdot)$, determinan p^* y u^* . Debido a la complejidad con que p^* entra en $\varphi(\cdot)$, las ecuaciones se resuelven por un procedimiento iterativo: cuando se conocen valores aproximados de M^+ y M^- (obtenidos de una iteración anterior, o en el caso de la primera iteración de un incremento de tiempo anterior), se calcula un valor de p^* a través de la ecuación

$$\frac{p^* - p_i^n}{M^-} + \frac{p^* - p_{i+1}^n}{M^+} + u_{i+1}^n - u_j^n = 0$$

que resulta de eliminar u^* de (3.31) y (3.34). Este valor de p^* se sustituye en (3.33) y (3.35) para mejorar los valores de M_D y M_I . Se repite la operación hasta que después de un número j de iteraciones se cumple

$$\max \left(\left| M_D^j - M_D^{j-1} \right|, \left| M_I^j - M_I^{j-1} \right| \right) \leq \varepsilon_2 \quad (\text{usualmente } \varepsilon_2 = 10^{-6})$$

u^* se obtiene de la ecuación

$$M^+(u^* - u_{i+1}^n) + M^-(u^* + u_i^n) = p_i^n - p_{i+1}^n$$

procedente de eliminar u^* de (3.30) y (3.34), con lo cual la solución al problema de Riemann se determina usando las condiciones de salto para las ondas de choque y la ley isentrópica, con la constancia de los invariantes de Riemann para las ondas de rarefacción.

Mejores resultados se obtienen tomando como valor inicial

$$p^{*0} = \frac{p_i + p_{i+1}}{2}$$

y para evitar que falle la iteración en presencia de una fuerte rarefacción, se emplea

$$p^{*(j)} = \alpha_l \max(\varepsilon, p^{*(j-1)}) + (1 - \alpha_l) p^{*(j-1)}$$

si la convergencia no se ha alcanzado después de $l \cdot L$ iteraciones (en la práctica $L < 20$, y $l \leq 2$) con $\alpha_l = \alpha_{l-1} / 2$ y $\alpha_1 = 1/2$.

Todo el proceso iterativo descrito para la resolución del problema de Riemann queda reflejado a modo de subrutina en el programa desarrollado para este trabajo.

3.4.4.2.-ECUACIONES PARA LA IMPLEMENTACION DEL METODO DE GLIMM.-

Una vez conocida la solución al problema de Riemann en el punto de muestreo $(\xi h, k/2)$, se puede llevar a cabo la construcción del método de Glimm para la obtención de la solución del sistema hiperbólico no lineal a que da lugar la forma euleriana de las ecuaciones monodimensionales de la dinámica de gases en coordenadas cartesianas para el flujo de un fluido sin fricción y sin transferencia de calor.

Consideremos que el fluido esta transportando una cantidad pasiva ψ , esto es, si $\psi_t + (u\psi)_x = 0$. Añadida al sistema (3.17) sabemos que

$$\psi_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \psi_i^n & \xi_n h < u^* k \\ \psi_{i+1}^n & \xi_n h \geq u^* k \end{cases}$$

en las regiones en las que $\psi \neq 0$ permanecerá claramente definida, si lo esta inicialmente. Las ondas de choque se mantendrán por tanto claramente definidas. En general si ψ es una función de paso en $t=0$, permanecerá de igual para todo t , con lo que se establece que el método no tiene viscosidad numérica. No obstante la conducta de la solución la determinara la elección de ξ .

En la fig. 3.7, se observa que los estados iniciales del fluido (ρ_L, p_L, u_L) en $x \leq 0$ y (ρ_D, p_D, u_D) en $x > 0$, están separados por la linea móvil l_x cuya pendiente es $dx/dt = u^*$. Por tanto, hemos de considerar los casos siguientes:

I.- El punto de muestreo $(\xi_n h, k/2)$ esta a la izquierda de la línea l_x ($\xi_n h < u^* k/2$)

(A) Si $p^* > p_L$, la onda de la izquierda es de choque, y puede ocurrir:

(1) si $\xi_n h$ esta a la izquierda de la línea de choque $dx/dt = U_L$, tenemos

$$\rho = \rho_L, p = p_L, u = u_L$$

(2) Si $\xi_n h$ esta a la derecha de la línea de choque $dx/dt=U_I$, entonces

$$\rho=\rho^*, p=p^*, u=u^*$$

obteniéndose ρ^* de la ecuación (3.30)

$$\rho^*=M_I/(U_I-u^*) \quad (3.36)$$

(B) Si $p^* \leq p_I$, la onda de la izquierda es de rarefacción. Esta onda esta delimitada por la izquierda por la línea definida por $dx/dt=u_I-c_I$, con, $c=(\gamma p_I/\rho_I)^{1/2}$ y a la derecha por la línea $dx/dt=u^*-c^*$, donde $c=(\gamma p^*/\rho^*)^{1/2}$. En las regiones de flujo uniforme, este es adiabatico, por lo que en esta región $A(S)$ en la ecuación politropica $p=A(S)\rho^\gamma$, seria constante, obteniéndose

$$p^*/(\rho^*)^\gamma = p_I/\rho_I^\gamma = A \quad \text{con lo que} \quad \rho^* = \left(p^*/A \right)^{1/\gamma} \quad (3.37)$$

y podría ocurrir que:

(1) Si $\xi_n h$ esta a la izquierda de la línea de rarefacción, entonces

$$\rho=\rho_I, p=p_I, u=u_I$$

(2) Si $\xi_n h$ esta en la línea de rarefacción, equiparamos la pendiente de la característica $dx/dt=u-c$ con la pendiente de la línea que pasa por el origen y por el punto $(\xi_n h, k/2)$, obteniéndose

$$u-c=2\xi_n h/k \quad (3.38)$$

Como la entropía la consideramos constante a todo lo largo del flujo, la cantidad $\int \frac{1}{\rho c} dp \pm u$ (conocida como invariante de Riemann), es constante a lo largo de las características delantera o trasera respectivamente, así con la definición de c obtenemos

$$\frac{2c}{(\gamma-1)} + u = \frac{2c_I}{(\gamma-1)} + u_I \quad (3.40)$$

Usando la ley isentrópica obtenemos p

$$p = p_I \rho_I^{-\gamma} \rho^\gamma = A \rho^\gamma \quad (3.41)$$

y para obtener u y ρ despejando c en el invariante obtenemos

$$c = c_I + \frac{\gamma-1}{2}(u_I - u) \quad (3.42)$$

que sustituido en (3.38), nos da u por la expresión

$$u = \frac{2}{\gamma+1} \left(\frac{2\xi_n h}{k} + c_I + \frac{\gamma-1}{2} u_I \right) \quad (3.43)$$

La sustitución de (3.43) en (3.42) nos el valor de c , con lo que calculamos ρ por

$$\rho = \left(\frac{c^2}{\gamma A} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (3.44)$$

(3) Si $\xi_n h$ esta a la derecha de la línea de rarefacción, obtenemos

$$\rho = \rho^*, p = p^*, u = u^*$$

II.- El punto de muestreo $(\xi_n h, k/2)$ esta a la derecha de la línea l , $(\xi_n h \geq u^* k/2)$

(A) Si $p^* > p_D$, la onda de la derecha es de choque, y puede suceder que

(1) si $\xi_n h$ esta a la izquierda de la línea de choque $dx/dt = U_D$ tenemos

$$\rho = \rho^*, p = p^*, u = u^*$$

obteniéndose ρ^* de (3.34)

$$\rho^* = -M_D / (u^* - U_D) \quad (3.45)$$

(2) Si $\xi_n h$ esta a la derecha de la línea de choque $dx/dt = U_D$, entonces

$$\rho = \rho_D, p = p_D, u = u_D$$

(B) Si $p^* \leq p_D$, la onda de la derecha es de rarefacción. Esta onda la limitan a la izquierda la línea definida por $dx/dt = u^* + c^*$, donde $c^* = (\gamma p^* / \rho^*)^{1/2}$ con $\rho^* = (p^* / A)^{1/\gamma}$, y a la derecha por la línea $dx/dt = u_D + c_D$, con $c_D = (\gamma p_D / \rho_D)^{1/2}$, con lo que puede suceder:

(1) Si $\xi_n h$ esta a la izquierda de la línea de rarefacción, entonces

$$\rho = \rho^*, p = p^*, u = u^*$$

(2) Si $\xi_n h$ esta en la línea de rarefacción, equiparamos la pendiente de la característica $dx/dt = u + c$ con la pendiente de la línea que pasa por el origen y por el punto $(\xi_n h, k/2)$, obteniéndose

$$u + c = 2\xi_n h / k \quad (3.46)$$

y con la constancia del invariante de Riemann

$$\frac{2c}{(\gamma-1)} - u = \frac{2c_D}{(\gamma-1)} - u_D$$

la ley isentrópica, y la definición de c , obtenemos de forma similar al caso anterior los valores de u , ρ y p según las ecuaciones

$$u = \frac{2}{\gamma+1} \left(\frac{2\xi_n h}{k} + c_D + \frac{\gamma-1}{2} u_D \right) \quad (3.47)$$

$$\rho = \left(\frac{c^2}{\gamma A} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (3.48)$$

$$p = p_D \rho_D^{-\gamma} \rho^\gamma = A \rho^\gamma \quad (3.49)$$

siendo c

$$c = c_D + \frac{\gamma-1}{2} (u - u_D) \quad (3.50)$$

(3) Si $\xi_n h$ esta a la derecha de la línea de rarefacción, obtenemos

$$\rho = \rho_D, p = p_D, u = u_D$$

Las ecuaciones (3.36) a (3.50) son las utilizadas para la programación del método de Glimm.

3.5.- RESOLUCION NUMERICA DEL SISTEMA DE ECUACIONES NO HOMOGENEO

Como se indico el apartado 3.2.1, para llevar a cabo la generalizacion del metodo de Glimm, y que sea posible su aplicación a sistemas hiperbolicos no lineales de leyes de conservacion, es necesario conocer la solucion estacionaria del sistema de ecuaciones (3.7). Se ha de resolver por tanto la ecuacion vectorial siguiente:

$$\frac{dF(W)}{dx} = -C(W) \quad (3.7b)$$

con las condiciones iniciales

$$W_I(i\Delta x) = w_1^n \quad y \quad W_D((i+1)\Delta x) = w_{i+1}^n$$

siendo

$$F(W) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u \left(\rho \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1} \right) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

y

$$C(W) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 \\ u \left(\rho \frac{u^2}{2} + p \frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) \end{bmatrix} \frac{d \ln A}{dx} + \begin{bmatrix} 0 \\ g\rho \\ -q\rho \end{bmatrix} \quad (3.6)$$



Así, las ecuaciones que nos darán los valores estacionarios de las variables del flujo p , u y ρ , son, según (2.4), (2.6) y (2.7b).

$$\frac{d(\rho u)}{dx} = -\rho u \frac{d \ln A}{dx}$$

$$\frac{d(\rho u^2 + p)}{dx} = -\rho u^2 \frac{d \ln A}{dx} - g\rho \quad (3.51)$$

$$\frac{d \left[u \left(\rho \frac{u^2}{2} + p \frac{\gamma}{(\gamma-1)} \right) \right]}{dx} = -u \left(\rho \frac{u^2}{2} + p \frac{\gamma}{(\gamma-1)} \right) \frac{d \ln A}{dx} + q\rho$$

Para ello aproximamos la solución del sistema (3.7b) por el esquema en diferencias

$$\frac{\mathbf{F}_{i+1}^n - \mathbf{F}_i^n}{\Delta x} = -\mathbf{C}_i$$

por tanto

$$\mathbf{F}_{i+1}^n = \mathbf{F}_i^n - \mathbf{C}_i \Delta x$$

Este es el esquema básico de Cauchy-Euler cuya precisión es de primer orden. No hay razón para utilizar un método de orden superior, puesto que el esquema básico de Glimm es como mucho de primer orden.

Tomando como valores iniciales $(p, \rho, u) = (p_0, \rho_0, u_0)$ en $x=x_0$, operando y simplificando, obtenemos la solución de (3.51), que es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones no lineales siguiente:

$$\begin{aligned}\rho u &= \rho_0 u_0 F_x \\ \rho u^2 + p &= \rho_0 u_0 (F_x - F_f) + p_0\end{aligned}\tag{3.52}$$

$$u \left(\rho \frac{u^2}{2} + p \frac{\gamma}{\gamma+1} \right) = u_0 \left(\rho_0 \frac{u_0^2}{2} + p_0 \frac{\gamma}{\gamma+1} \right) F_x + F_q$$

F_x , F_f y F_q , representan la influencia que sobre el flujo tienen la variación de sección en el conducto, la fricción y la transferencia de calor respectivamente. Su valor viene dado por:

$$F_x = 1 - \frac{d \ln A}{dx} \Delta x \quad F_f = 2f \frac{\Delta x}{D} \quad F_q = q \rho \Delta x$$

f es el coeficiente de fricción, D el diámetro del conducto. q es el flujo de calor transferido entre las paredes de los conductos que están a una temperatura T_c y la unidad de masa del gas que circula por ellos a temperatura T_g .

En este trabajo la única forma de transmisión de calor considerada es la convección, siendo en el proceso de escape donde su efecto se deja sentir en mayor medida, pues debido a las altas velocidades y temperaturas del gas durante este proceso y sobre todo en el *blowdown*, una cantidad sustancial de calor se transfiere por convección hacia válvulas, pipas y colectores, con la consiguiente influencia sobre las emisiones, el funcionamiento de catalizadores y turbocompresores y sobre los requerimientos de refrigeración del motor.

En el sistema de admisión, la transferencia por convección se utiliza para el calentamiento del gas entrante. Dada la complejidad del proceso al estar involucrado combustible líquido, consideramos despreciable su efecto durante la admisión. Por lo tanto q vendrá determinada por la expresión

$$q = h_c A (T_g - T_c)$$

A , es el área de un elemento del conducto de escape de longitud Δx y diámetro D , h_c es el coeficiente de transmisión de calor y su calculo se hará a través de

$$h_c = \frac{N_u \lambda}{D_j} \quad \lambda = \text{conductividad termica}$$

en donde N_u es el numero de Nusselt y utilizando las relaciones definidas en la tabla 2.1. El calculo de las propiedades de transporte del gas de escape, esto es la viscosidad μ y la conductividad térmica λ , se realiza a través de la subrutina desarrolladas por Ferguson [84] e integrada al programa principal de nuestro modelo.

TABLA 2.1

Lumbrera escape	$N_u = 0.0158 R_e^{0.8}$	
	$L_v/D_v \leq 0.02$ $R_e = \frac{v D_v}{\nu}$	$L_v/D_v > 0.02$ $R_e = \frac{v D_p}{\nu}$
Conducto escape	$R_e = v D / \nu < 2000$	$N_u = 0.0483 R_e^{0.783}$
	$R_e = v D / \nu > 2000$	$N_u = 0.0242 R_e^{0.783}$

Correlaciones para el calculo del coeficiente de transmisión de calor por convección en lumbreras y conductos de escape de los MCI [85,86]. D_v , D_p , D diámetros de válvula, lumbrera y conducto; v velocidad del gas; $\nu = \mu/\rho$ viscosidad cinemática

Es conveniente poner el sistema (3.52) en funcion de la velocidad del sonido $c = (\gamma p / \rho)^{1/2}$ y del numero de Mach $M = u/c$. Despues de operar y simplificar obtenemos en terminos de M , c y p

$$M \frac{\left(\frac{M^2}{2} - \frac{1}{\gamma - 1} \right)}{(1 + \gamma M^2)^2} = F_x \frac{\left(\frac{M_0^2}{2} - \frac{1}{\gamma - 1} \right)}{(1 + \gamma M_0^2 (F_x - F_f))^2} F_x + F_q \quad (3.53)$$

$$c^2 \left(\frac{M^2}{2} + \frac{1}{\gamma + 1} \right) = c_0^2 \left(\frac{M_0^2}{2} + \frac{1}{\gamma + 1} \right) F_x + F_q \quad (3.54)$$

$$\frac{M p}{c} = \frac{M_0 p_0}{c_0} F_x \quad (3.55)$$

La solucion de las ecuaciones del estado estacionario se reduce al siguiente procedimiento:

Se resuelve la ecuación (3.53) para M por un proceso iterativo. Usamos la ecuación (3.54) para obtener c y la (3.55) para p . Finalmente, usamos las relaciones $c = (\gamma p / \rho)^{1/2}$ y $M = u/c$ para obtener ρ y u .

CAPITULO IV

VALIDACION DEL METODO DE SIMULACION NUMERICA ADOPTADO.

4.1.- INTRODUCCION

El desdoblamiento del sistema de ecuaciones (3.7) en la forma desarrollada en el capitulo anterior, permite la solución del problema de Riemann para flujo de gases no estacionarios influenciados por geometrias curvas, tales como conductos de sección variable, o flujos en que la fricción y la transferencia de calor están presentes, siendo esta solución la base para la generalización del método de Glimm.

El método ha sido probado y comparado con otros métodos en la forma siguiente:

En primer lugar se comprueba la mejora obtenida en la eliminación de las fluctuaciones causadas por el muestreo aleatorio basado en una elección correcta del generador a través del problema del tubo de choque.

La comparación entre los resultados obtenidos bajo las consideraciones de flujo homentropico y no homentropico, se hace sometiendo el método al test de descarga de De Haller [24] , analizando el comportamiento transitorio del flujo.

Para analizar comportamiento del método ante flujos no estacionarios en conductos con sección transversal variable se aplicó el método al problema del flujo de gas a través de una tobera convergente-divergente hasta un alcanzar el estado estacionario cuya solución se conoce y que nos sirve de comparación.

4.2.- ANÁLISIS DEL EFECTO PRODUCIDO POR LA ELECCIÓN DEL PROCEDIMIENTO DE MUESTREO SOBRE LA EXACTITUD DEL MÉTODO DE GLIMM.

Se analizan a continuación los errores introducidos por la interacción del muestreo y las variaciones con el tiempo de la velocidad de propagación de las ondas, en el caso del flujo unidimensional de un fluido compresible no viscoso a través del siguiente tipo de test.

Los datos iniciales consisten en dos discontinuidades localizadas en x_I y x_D separados por estados constantes

$$\mathbf{w}(x,0) = \begin{cases} \mathbf{w}_I & x < x_I \\ \mathbf{w}_M & x_I < x < x_M \\ \mathbf{w}_D & x > x_D \end{cases}$$

con

$$\mathbf{w}_{I,M,D} = \begin{pmatrix} \rho_{I,M,D} \\ \rho_{I,M,D} u_{I,M,D} \\ \rho_{I,M,D} / (\gamma - 1) + \frac{1}{2} \rho_{I,M,D} u_{I,M,D}^2 \end{pmatrix}$$

y el valor de los mismos los de la siguiente tabla para $\gamma=1.4$. Los datos sombreados se eligieron arbitrariamente. Los demás se calcularon de tal forma que $\mathbf{w}_I$ y $\mathbf{w}_M$ se conecten por una onda de choque de frente progresivo, por lo que tienen que cumplir con las ecuaciones (3.17) (3.18), y que $\mathbf{w}_M$ y $\mathbf{w}_D$ lo estén por una onda de rarefacción, según las ecuaciones (3.15) y (3.16).

	$x_I < 0.4$	$0.4 < x_M < 0.8$	$x_D > 0.8$
ρ	0.7	0.145	0.6
u	0.0181	-12.0	-5.98
p	28.68	1.4	10.0

Todos los cálculos los hemos hecho en el intervalo espacial $[0,1]$, utilizando el método de Glimm de malla simple con lo que hemos disminuido el tiempo de ejecución sin perder precisión, suponiendo unas condiciones de contorno en 0 y 1 de la forma $\left(\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x}\right)_{x=0,1} = 0$, usando respectivamente:

1º) Una secuencia de muestreo aleatoria obtenida a través de un generador que emplea una relación recurrente del tipo

$$\xi_n = (K_1 \xi_{n-1} + C) \bmod N$$

en la que el numero matriz ξ_0 debe estar entre 0 y N . Los parámetros C y K_1 son enteros entre 0 y $N-1$. Para la implementación de esta formula recursiva [83] se eligió para N el mayor numero que puede almacenar un ordenador, esto es, $N=2^{31}-1$, normalizándose los números obtenidos al intervalo $(0,1)$ dividiéndolos entre N . El valor elegido para K fue $7^5=16807$, y para C cero. La desviación uniforme a un intervalo (A,B) , en nuestro caso a $(-1/2, 1/2)$, se obtiene por medio de la transformación

$$\xi'_n = \xi_n B + (1 - \xi_n)A$$

2º) Un muestreo aleatorio estratificado partiendo del generador anterior, y modificando su varianza a través de (3.28) y (3.29 eligiendo $k_0=2$, $m_1=7$, y $m_2=11$, con lo que la secuencia $k_i, i=1, 11$ será 9,5,1,8,4,0,7,3,10,6,2.

3º) La secuencia de muestreo binaria de Van der Corput (3.30)

Los resultados que hemos obtenido de la evolución con el tiempo de la presión, velocidad y densidad provocada por las ondas generadas inicialmente en este test se representan en la fig. 4.1. Para $t>0.09$ se produce la interacción de las ondas de choque y rarefacción debilitándose ambas (fig.4.1(A)). El acoplamiento no lineal de los modos de propagación produce una onda de compresión (fig. 4.1 (B)). y otra de gran densidad (fig. 4.1 (C)). detrás del choque y alejándose de este.

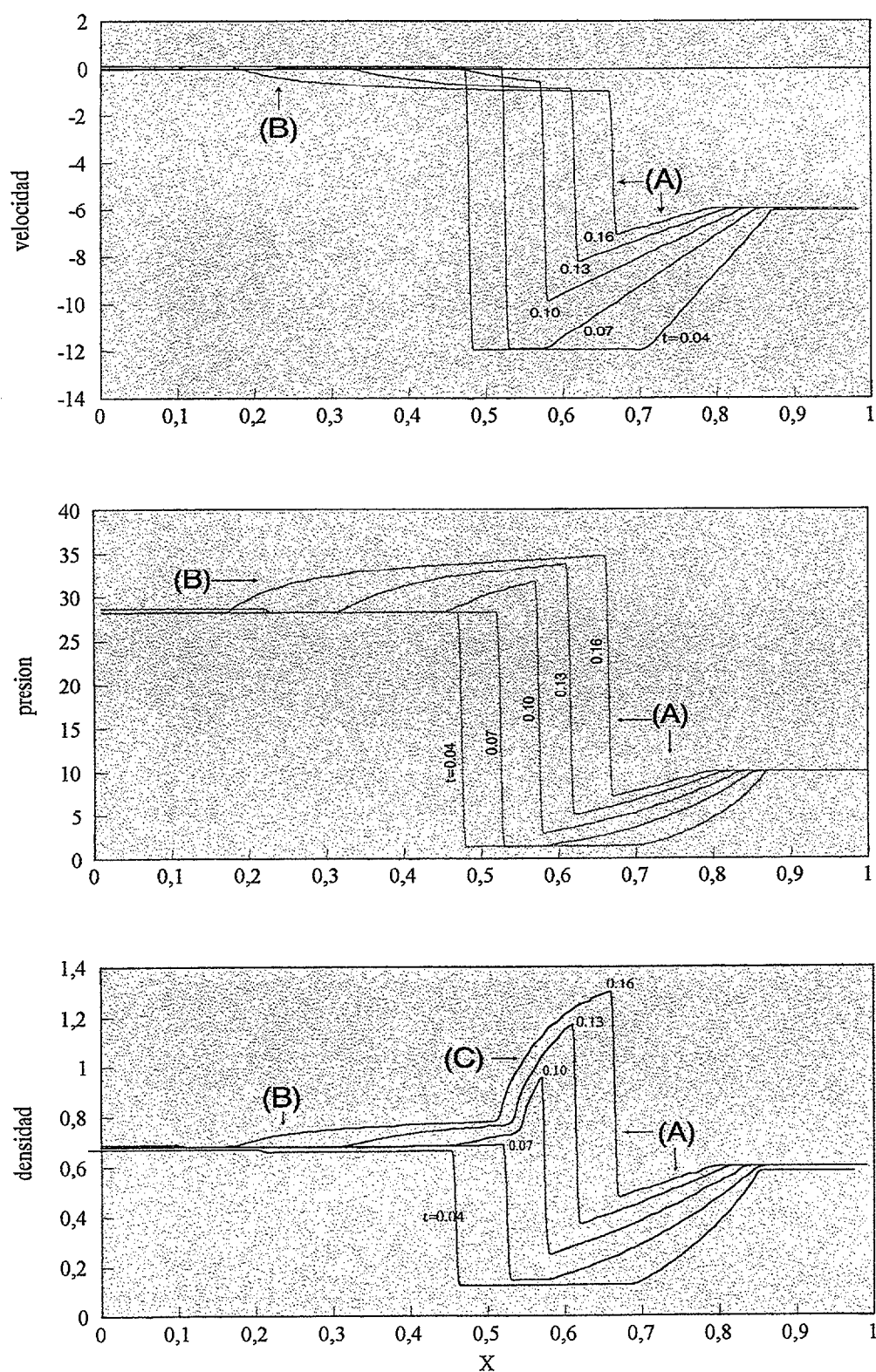


Figura 4.1 Perfiles de la evolución de la velocidad, presión y densidad obtenidos con el método de Glimm de malla fija $\Delta x=0.0025$ y muestreo de van der Corput

Para comparar los resultados que hemos obtenido con los diferentes tipos de muestreo mencionados, tomamos como solución exacta la calculada utilizando van der Corput con $\Delta x=0.0025$. Contrastada con la obtenida con $\Delta x=0.005$ difieren en menos de un 5%. (fig. 4.2), de modo que el método ha convergido para $\Delta x=0.0025$.

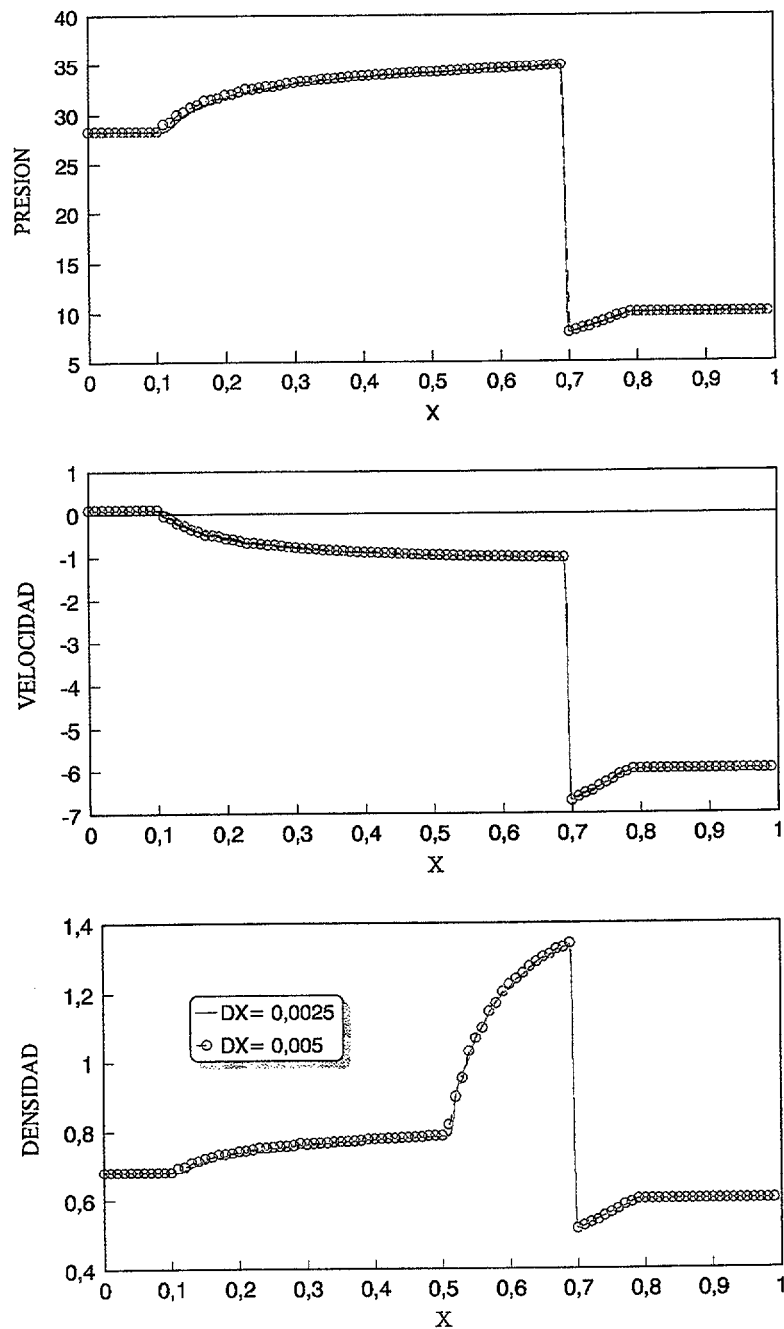


Figura 4.2 Comparación de las soluciones calculadas con el muestreo de Van de Corput para $t=0.20$

Las soluciones calculadas con $\Delta x=0.01$ para los tres diferentes métodos de muestreo, se comparan en las gráficas siguientes (círculos) con la solución exacta (línea continua) obtenida con Van der Corput y $\Delta x=0.0025$.

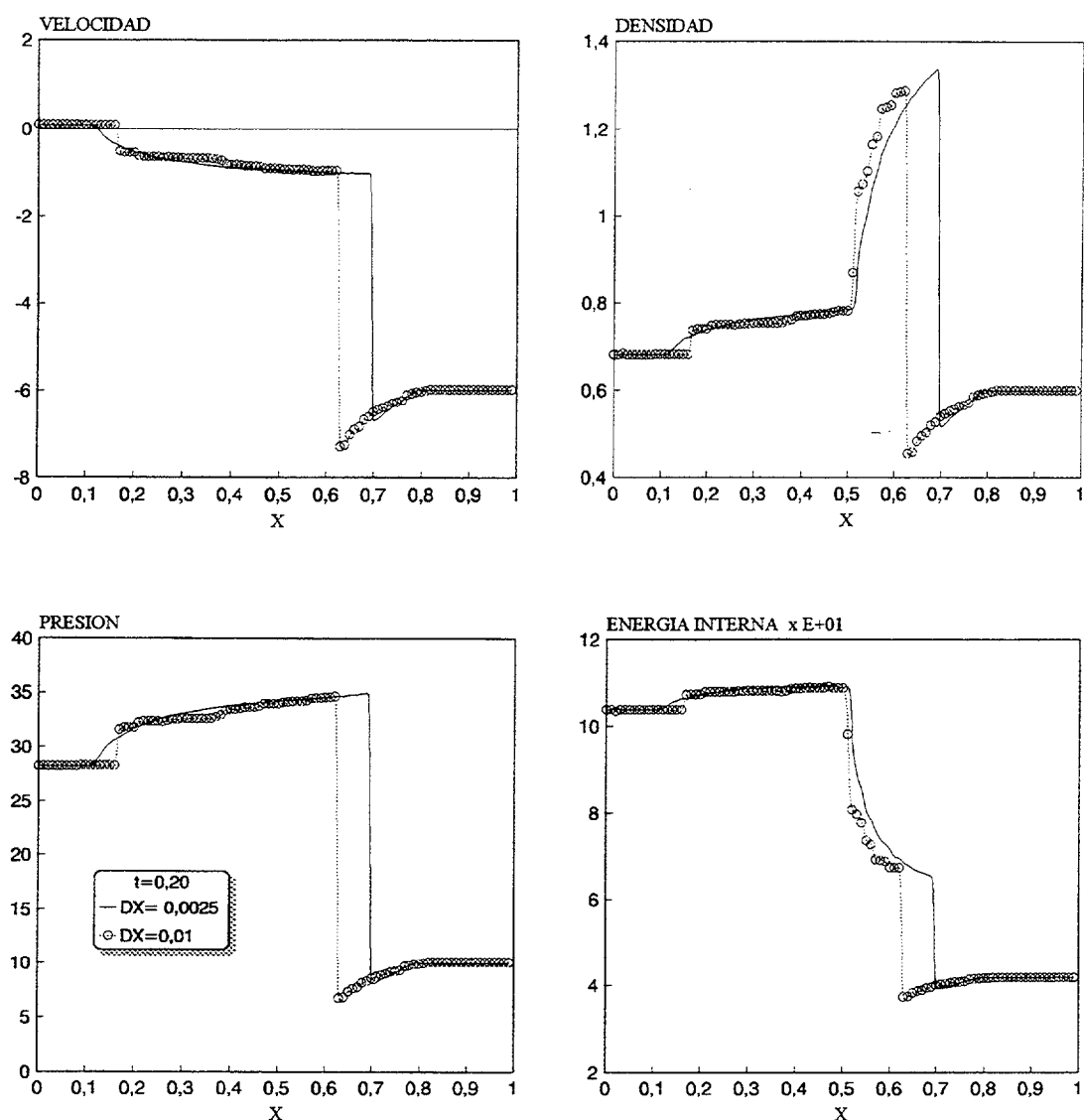


Figura 4.3.- Solución calculada con muestreo aleatorio. $\Delta x=0.01$

Como se aprecia en las gráficas (figs. 4.1-4.3), el tipo de muestreo que se utilice en la resolución del problema test por el método de Glimm, gobernara la forma en que las ondas de choque y rarefacción se influyen mutuamente para formar ondas de otras familias. Así, la pérdida de información observada en la solución muestreada

aleatoriamente (fig. 4.2), es el resultado de las fluctuaciones en la velocidad de interacción entre el choque y la rarefacción para producir las ondas.

El uso del muestreo aleatorio estratificado (fig. 4.3), produce perfiles mas uniformes que los obtenidos con la secuencia aleatoria sin modificar, pero hay una desviación apreciable en el perfil de la densidad, lo que implica un fallo en la conservación de la masa.

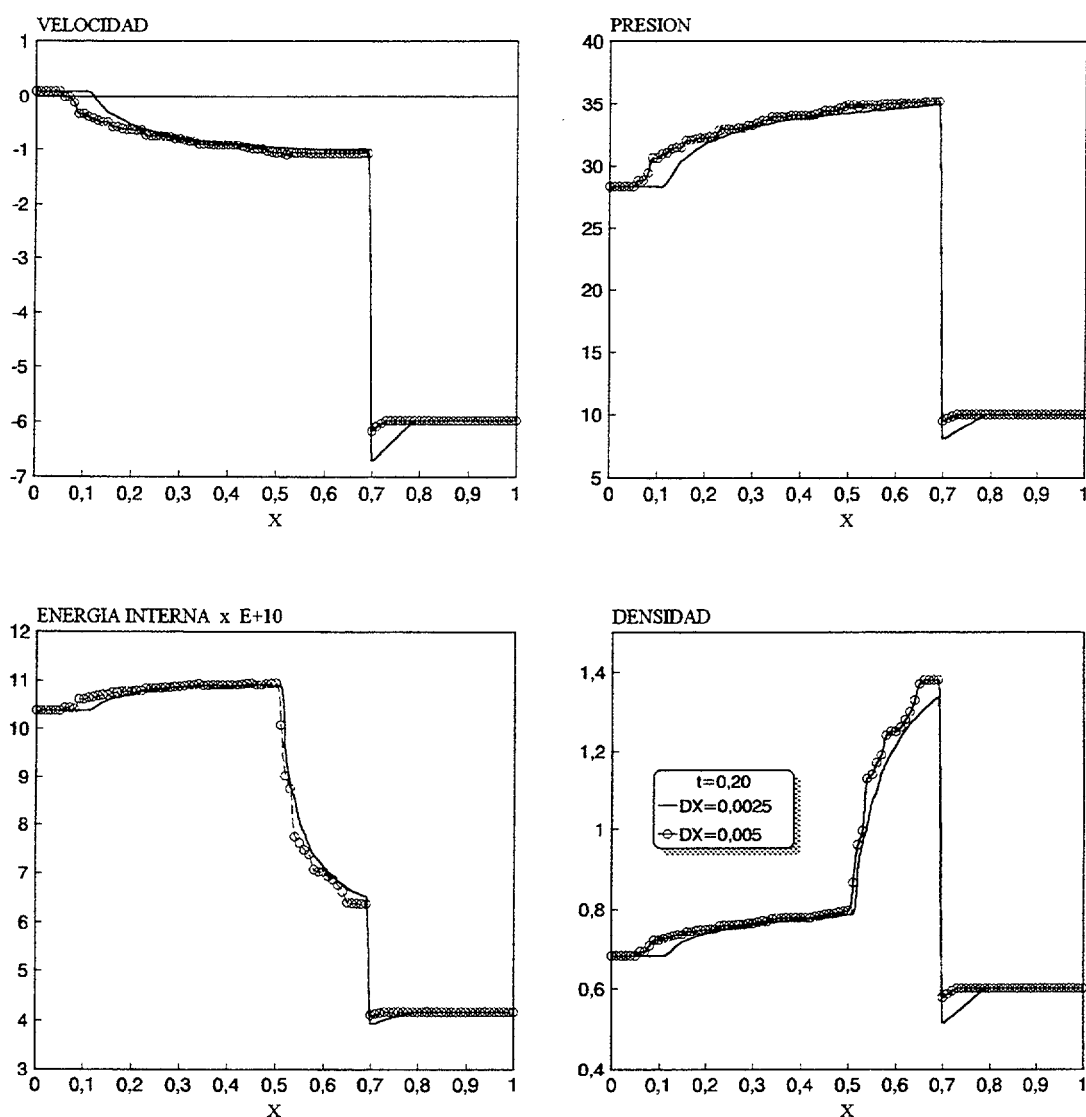


Figura 4.4.- Solución calculada con muestreo aleatorio estratificado. $\Delta x=0.01$

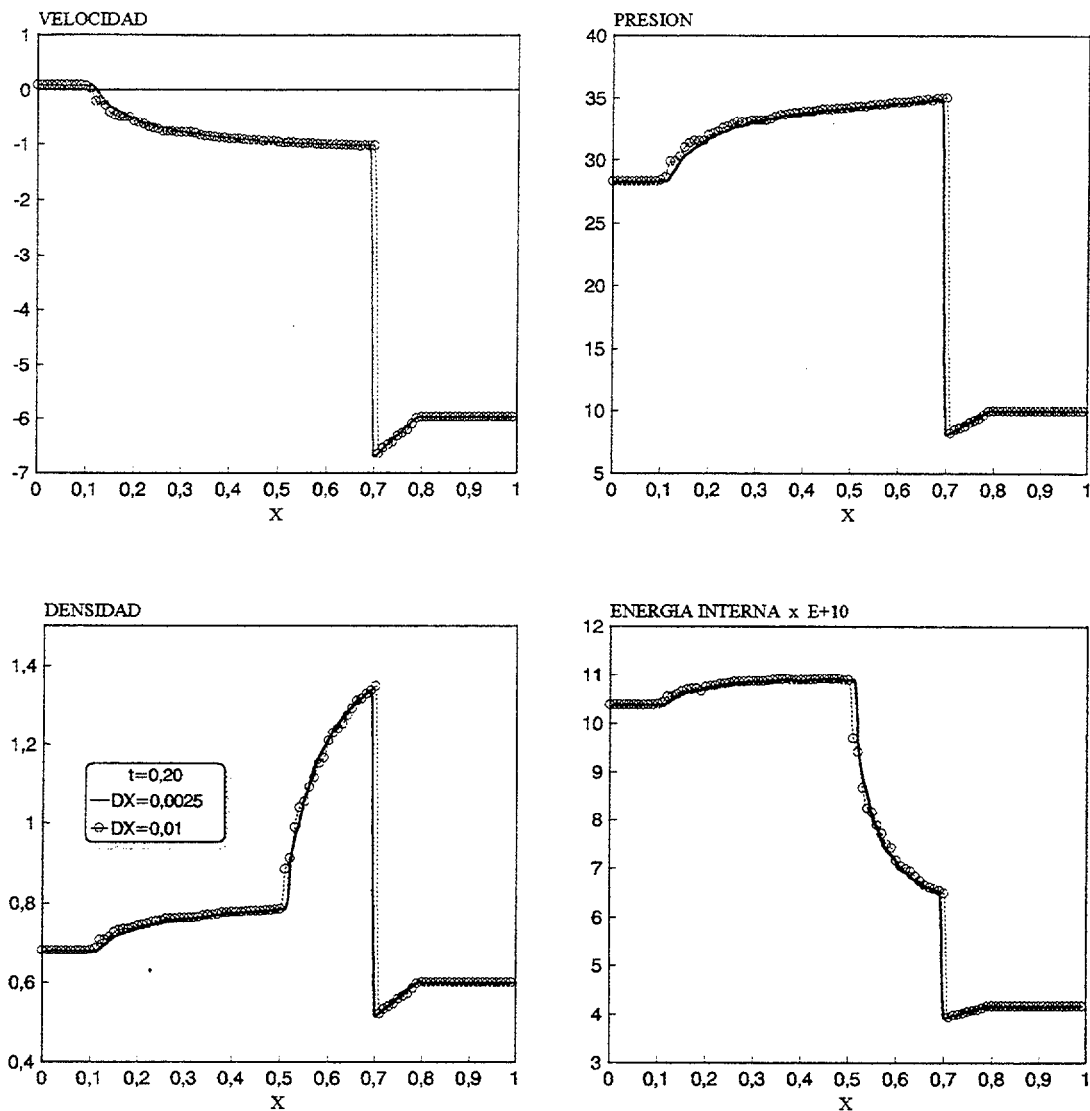


Figura 4.5.- Solución calculada con la secuencia de muestreo de distribución uniforme no aleatoria de van der Corput. $\Delta x=0.01$

El perfil obtenido utilizando el muestreo de Van der Corput (fig. 4.5) está mucho más de acuerdo con los resultados obtenidos con $\Delta x=0.0025$, la velocidad de formación de las ondas está modelada mucho mejor que en los dos casos anteriores. De hecho, usando el muestreo de Van der Corput, se puede utilizar una malla con un número de celdas menor y todavía se obtienen buenos resultados para este problema.

En la fig. 4.6 se presentan los resultados calculados con Van der Corput y $\Delta x=1/30$. La localización absoluta de las ondas, y la situación relativa de unas con respecto a otras son correctas dentro del valor de Δx elegido. Aun más importante es que, el tamaño y forma de las ondas que son más sensibles al error acumulativo introducido por el muestreo, están en acuerdo con los resultados obtenidos para $\Delta x=0.0025$.

En todos los cálculos la onda de choque esta perfectamente contorneada como garantiza el método de Glimm.

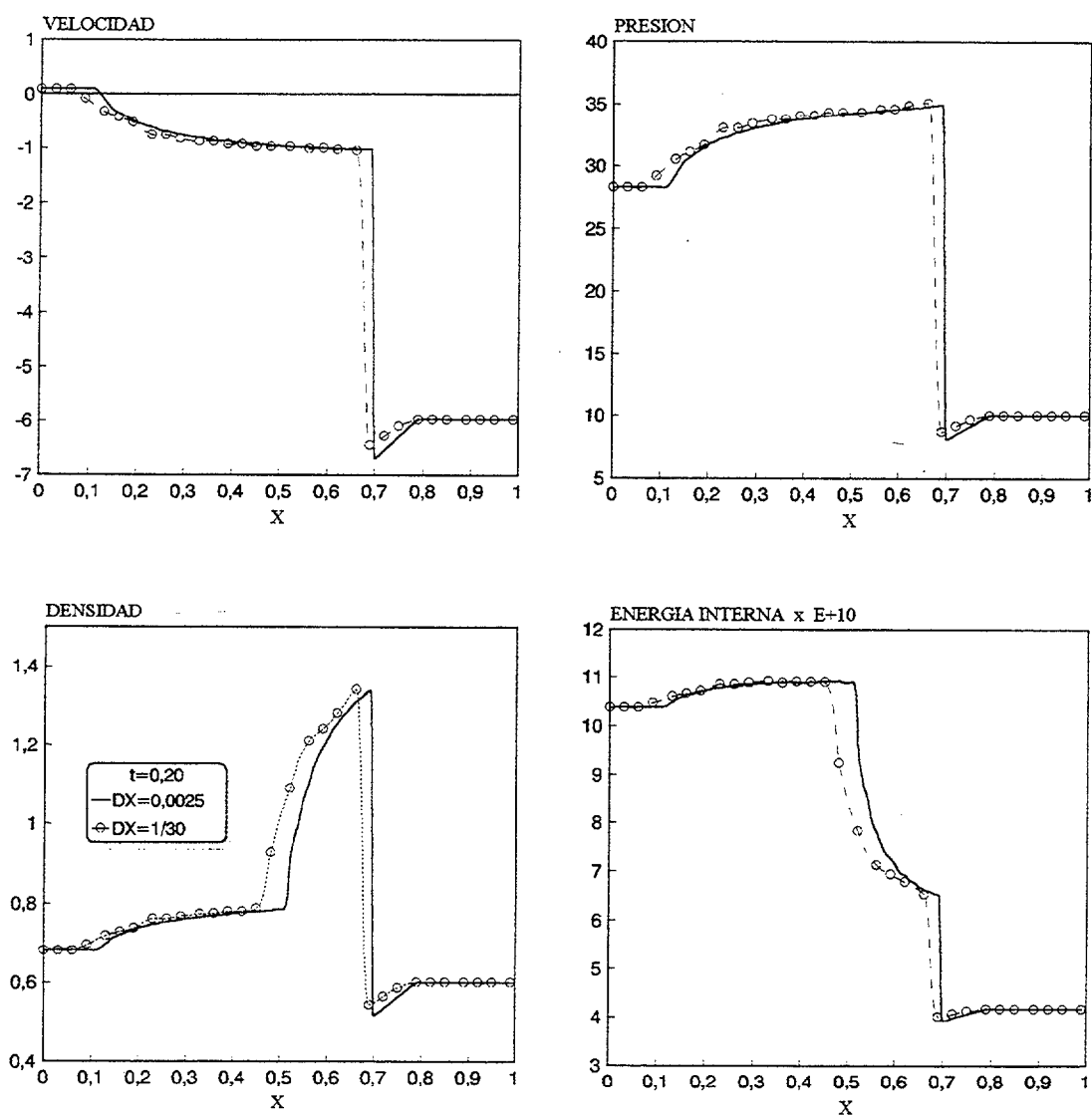


Figura 4.6.- Solución calculada con la secuencia de muestreo de Van der Corput y $\Delta x=1/30$

4.2.1.- COMPARACIÓN CON OTROS MÉTODOS.

Una forma clásica de comparar los métodos en diferencias es estudiar el comportamiento de estos en presencia de discontinuidades.

Sod [35] hizo tal comparación para diferentes esquemas entre los que incluyo el método de Glimm utilizando para ello el problema unidimensional del tubo de choque dividiendo un conducto de longitud unidad en dos regiones con estados constantes dados por

<u>región izquierda</u>	<u>región derecha</u>
$\rho_I=1.0$	$\rho_D=0.125$
$p_I=1.0$	$p_D=0.1$
$u_I=0.0$	$u_D=0.0$

empleando para todos los cálculos $\Delta x=0.01$ y $\gamma=1.4$.

De todos los esquemas probados sin usar procedimientos correctivos los de Godunov [36] y Hyman [38] produjeron los mejores resultados, aunque de forma general, todos ellos, o bien aumentan el espacio en el que se produce la transición de la discontinuidad entre seis y diez zonas, (con el numero de estas incrementando en función del tiempo) o introducen substanciales oscilaciones en el entorno de la misma. Respecto al método de Glimm es este el que mejor resolución da para las ondas de choque y para las discontinuidades de contacto. Los estados constantes y los extremos de la onda de rarefacción están perfectamente contorneados. No obstante y debido al uso de un muestreo aleatorio estratificado, las posiciones de las ondas no son exactas, y por la misma razón la onda de rarefacción no es uniforme, aunque si próxima a la solución exacta.

En cuanto al tiempo de calculo empleado por todos los métodos probados por Sod sobre una malla de 100 puntos, el método de Glimm requirió entre dos y tres veces mas tiempo que cualquier otro. Pero como hemos demostrado en el apartado

anterior, podemos obtener la misma resolución con una malla de menor tamaño si utilizamos Glimm, por lo que este puede ser mucho más rápido. Aun mas, si utilizamos malla fija en lugar de la variable o de dos pasos, el tiempo de calculo disminuirá de nuevo en la medida que solo es necesario muestrear la solución una vez. Sod empleó Glimm de dos pasos.

En la fig 4.7 se presentan los cálculos hechos con el método de Glimm empleando malla fija y el procedimiento de muestreo de Van der Corput, que como hemos demostrado es superior al muestreo estratificado empleado por Sod.

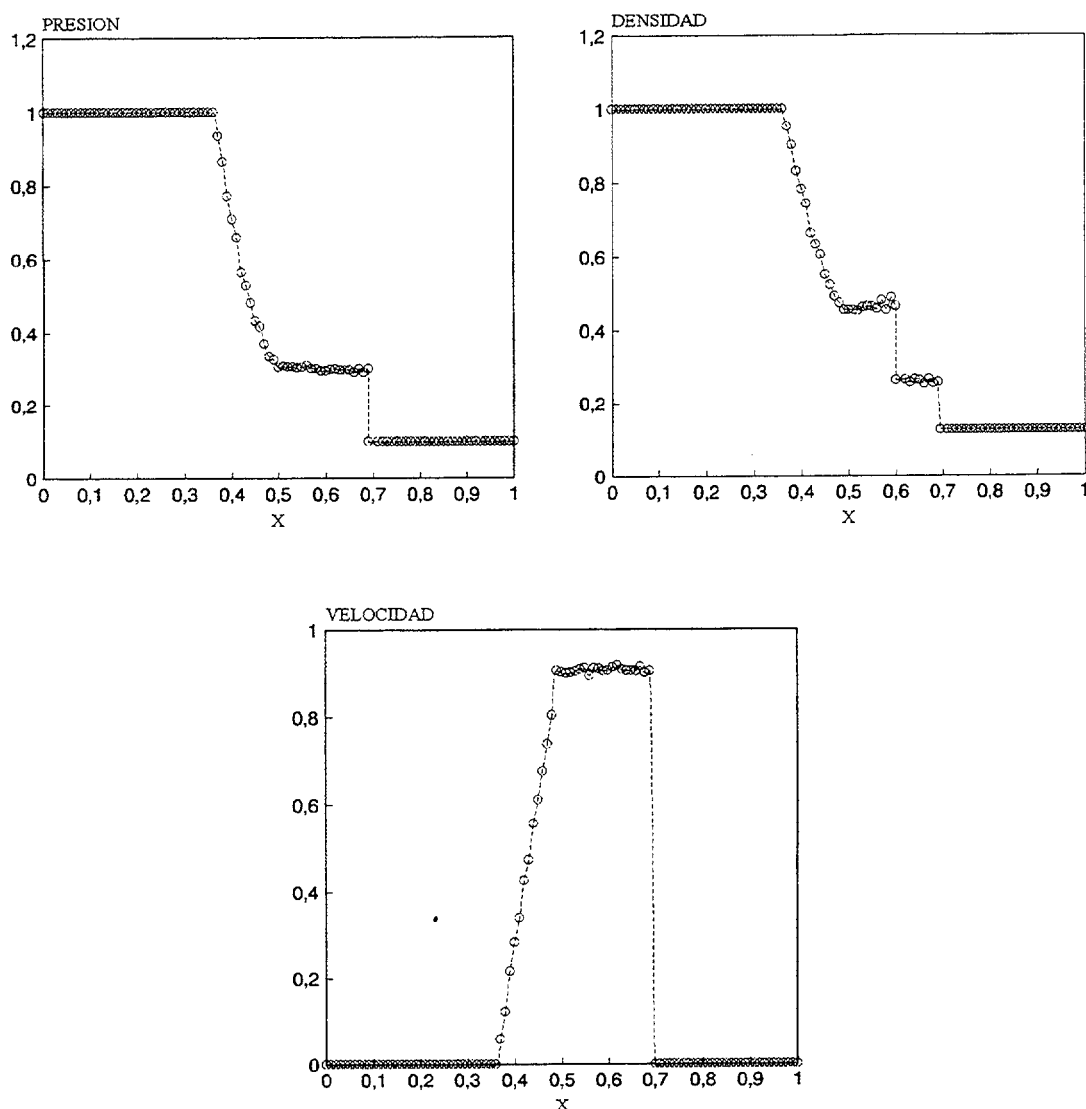


Figura 4.7.- Solucion al problema del tubo de choque por el metodo de Glimm con van der Corput y malla fija.

El resultado obtenido aquí es completamente superior a cualquiera de los obtenidos en [35]. Se mejora la uniformidad de la onda de rarefacción y la posición de las ondas, evidentemente debido a la elección del tipo de muestreo.

Sobre el mismo problema del tubo de choque Zhao y Winterbone [12], con el propósito de estudiar el grado de aproximación o el nivel del error de truncamiento del método FVFLIC (finite volume fluid-in-cell), desarrollado por ambos para el estudio de flujo tridimensional, compararon este, con el método de primer orden de Rusanov y con el clásico método de dos pasos de Lax-Wendroff.

Los resultados obtenidos con el método FLIC son mejores que los del esquema de primer orden de Rusanov, pero menos exactos que los obtenidos con el de segundo orden de L-W con factor de viscosidad artificial. Este último, tiene una ligera distorsión en la discontinuidad de contacto, pero en el choque la magnitud de la distorsión es mucho mayor. La onda de rarefacción está bien modelada con un ligero redondeo en los extremos de la misma, mientras que la transición de la onda de choque ocupa tres o cuatro zonas, y la discontinuidad de contacto alrededor de cinco. Se comprueba que, los resultados presentados en la fig. 4.7 siguen siendo superiores a cualquiera de los obtenidos con los métodos comparados en [35].

Independientemente de lo visto hasta ahora no conviene olvidar que el método de Glimm tiene como parte esencial de su éxito la resolución del problema de Riemann de forma eficaz. El procedimiento iterativo de Godunov utilizado para tal fin resuelve el problema por una superposición, (controlada por el tipo de muestreo), de soluciones elementales similares, localmente exactas. Es por esto que comparar los resultados obtenidos por el método de Glimm en el tubo de choque, con los obtenidos a través de otros métodos en diferencias no es del todo correcto.

Comparamos por tanto el método de Glimm con otros métodos en diferencias en un problema de interacción entre una onda de choque y otra de rarefacción, tal como el empleado en el apartado anterior para comprobar la eficacia del muestreo elegido, pero con ondas de un orden de magnitud superior según la siguiente tabla:

$\gamma=1.4$	$x_I < 0.3$	$0.3 < x_M < 0.9$	$x_D > 0.9$
ρ	23.27	3.93	100
u	6.0	-4.0	-1.18
p	473.9	1.077	100.0

Estos valores fueron los empleados por Colella [80] para obtener los resultados de la fig. 4.8 utilizando el código MUSCL escrito por Woodward basado en el esquema de van Leer [87], que en el *estado del arte* es representativo de los métodos más exactos en diferencias finitas de primer orden.

En la fig. 4.9 presentamos los resultados del problema obtenidos usando el método de Glimm. Como en el caso del apartado anterior, se tomó como respuesta exacta los valores calculados con $\Delta x = 0.0025$. La solución tiene las mismas características que en el caso de ondas mas débiles, excepto que la onda regresiva de compresión ha alcanzado la pendiente de una onda de choque en el instante en que se comparan las soluciones.

En ambos casos se obtienen buenos resultados para los perfiles de la presión y velocidad, y en el ancho de la zona de transición de la onda de choque. Sin embargo el método en diferencias no da el valor correcto para el pico que forma la densidad ni en

altura ni en anchura. El método de Glimm en virtud de que simula directamente la interacción de las ondas sin promedios, da el valor correcto.

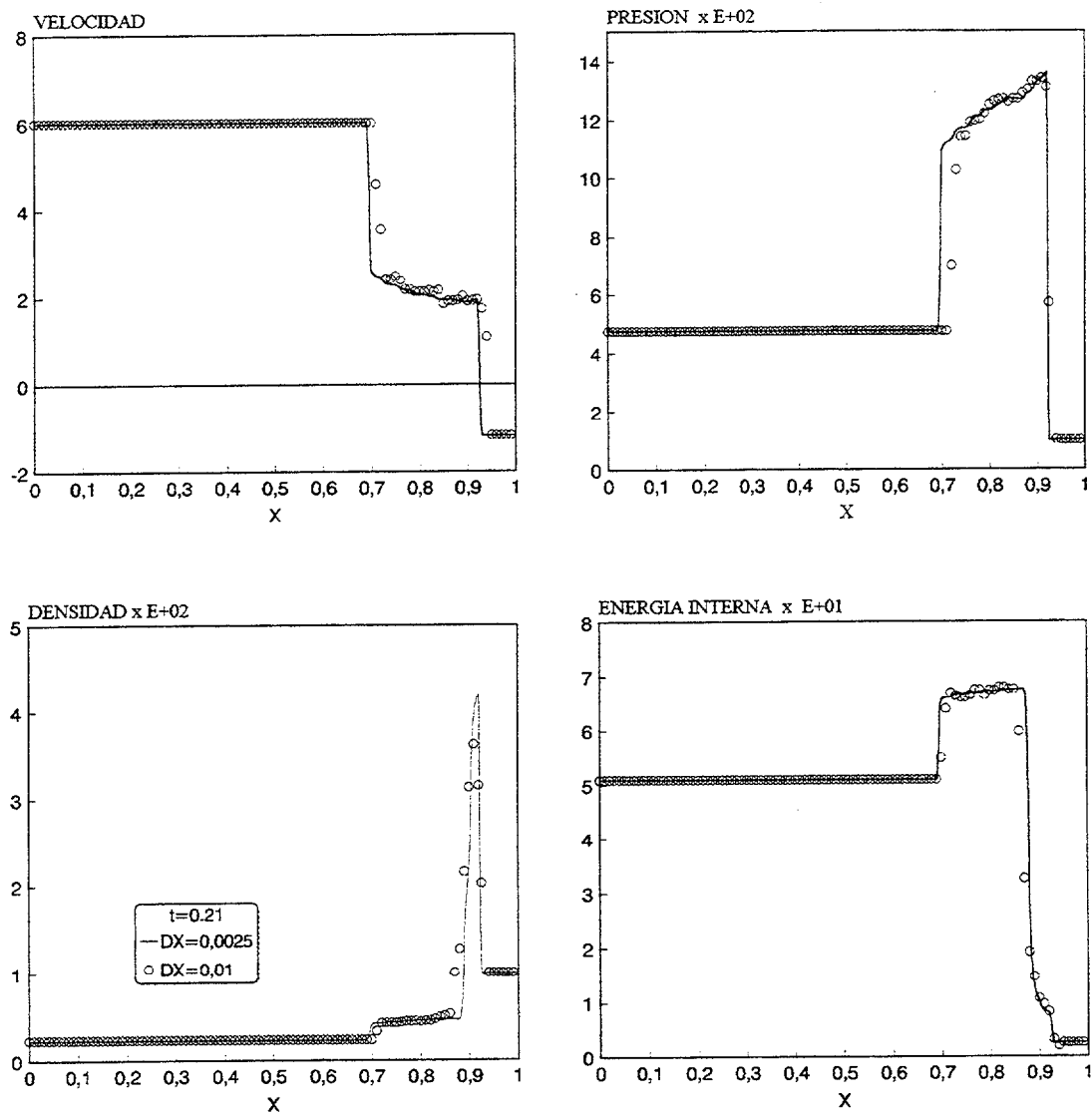


Figura 4.8.- Solución al problema unidimensional de interacción de ondas, calculado usando el código MUSCL.

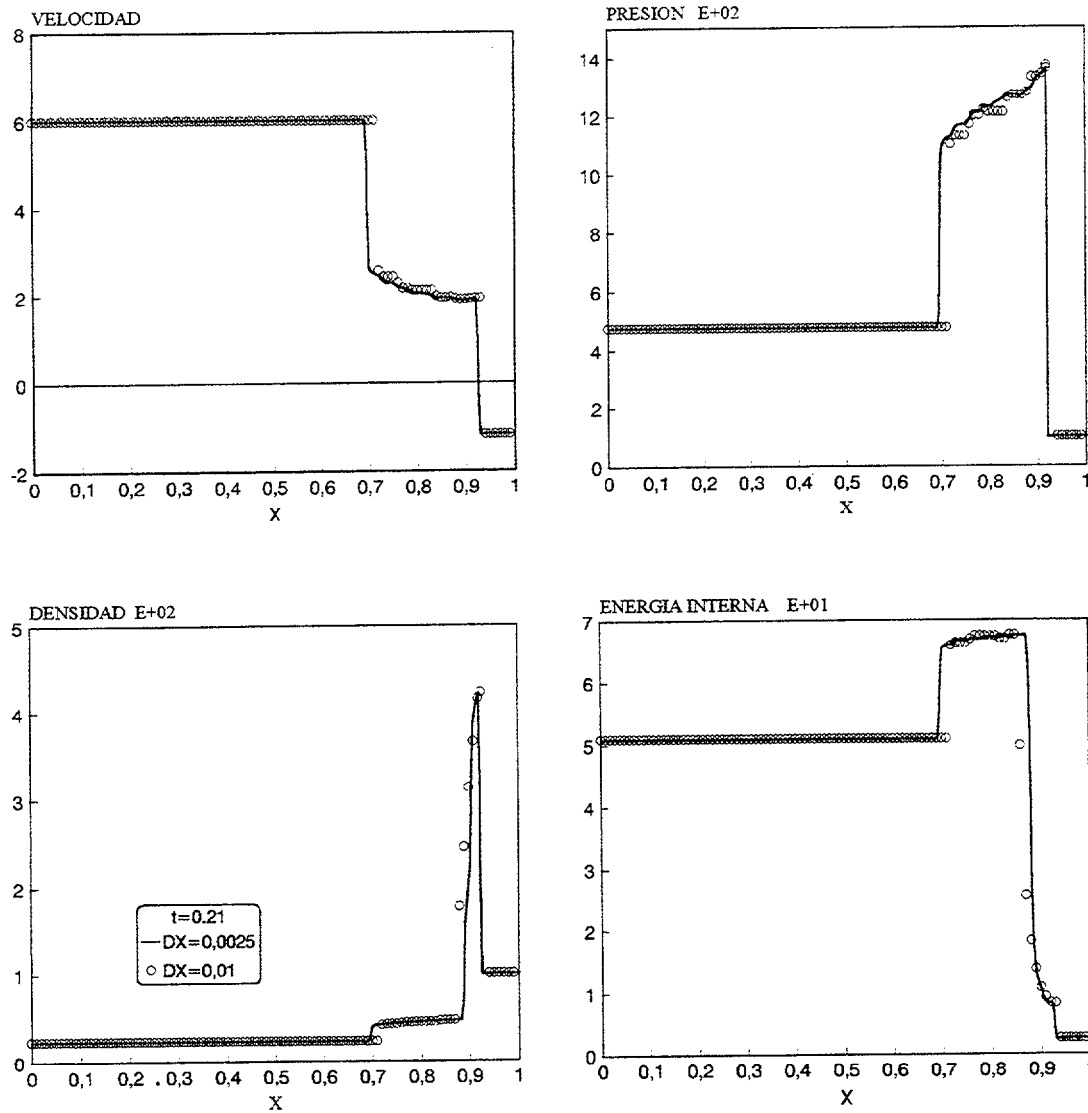


Figura 4.9.- Valores obtenidos para el problema unidimensional de interacción de ondas de gran intensidad, a través del método de Glimm con malla fija y muestreo de van der Corput.

El hecho que las soluciones al problema de Riemann que usamos en este esquema numérico, satisfagan exactamente las leyes de conservación, no es probablemente tan esencial en la exactitud del método de Glimm (se pierde parte de la información en el muestreo), como que, la solución muestreada se forme dentro de ondas físicamente correctas moviéndose con una velocidad razonablemente precisa. Esta característica viene determinada por la forma de muestreo elegida.

Como hemos comprobado el método de Glimm con el muestreo de van der Corput , modela de manera efectiva la interacción de discontinuidades con zonas de flujo uniforme sin introducir errores inaceptables en este. Es factible por tanto tratar de modelar flujos de otros gases que no sean ideales, es decir, la dinámica de gases con términos fuente como los que aparecen en las ecuaciones que definen el flujo de los MCI alternativos, tal como se demuestra en el apartado siguiente.

4.3.- APLICACIÓN DEL METODO DE GLIMM GENERALIZADO AL FLUJO NO ESTACIONARIO DE UN GAS EN CONDUCTOS DE SECCION VARIABLE CON FRICCION Y TRANSFERENCIA DE CALOR.

El objetivo del trabajo que se expone en este apartado es demostrar el buen comportamiento del método de Glimm generalizado y las mejoras obtenidas con respecto a otras técnicas en diferencias, cuando se aplica a sistemas de ecuaciones hiperbólicos no homogéneos de leyes conservativas, es decir cuando aparecen términos fuente necesarios para la definición de un determinado tipo de flujo. En nuestro caso estos términos fuente serian los necesarios para describir el flujo en conductos de sección variable con fricción y transferencia de calor. Fenómenos propios de los sistemas de admisión y escape de los MCI.

4.3.1.- COMPARACION DE METODOS PARA FLUJO HOMENTROPICO.

Para analizar la diferencia entre considerar flujo homentropico o no homentropico, hemos considerado necesario un análisis previo del comportamiento del método de Glimm en condiciones de flujo no estacionario de un gas politropico, en un conducto de sección constante sin fricción.

Para ello, utilizamos el test de De Haller [24], consistente en la descarga de un recipiente a unas condiciones p_o, T_o a través de un conducto hasta unas condiciones de referencia p, T . El estado inicial de calculo en el conducto es el mismo que el estado de parada desde el cual se producirá la descarga. El extremo derecho del tubo esta cerrado, abriéndose instantáneamente para $t=0+\Delta t$, pudiéndose llevar a cabo el estudio de la etapa transitoria del flujo no estacionario hasta alcanzar la condición de flujo estacionario.

Las condiciones iniciales que utilizamos en el calculo fueron:

Longitud del conducto (l)	1 m.
Diámetro del conducto (d)	0.05 m.
Presión de referencia (p_{ref})	1 bar.
Presión del recipiente (p_o)	1.5 bar.
Temperatura recipiente (T_o)	300 K.
Numero de celdas (m)	50.

Los resultados que hemos obtenido con la aplicación de nuestro modelo basado en el método de Glimm y los obtenidos también por nuestra parte con el método de las características, los comparamos con los obtenidos por Poloni [48] para el mismo ejemplo con el método de Lax-Wendroff. Como referencia tomamos la solución gráfica a este problema calculada por Benson [1], por ser el método más rápido y preciso para flujo homentropico en un conducto simple. Desdichadamente esta ventaja desaparece para flujo no homentropico, ya que la fricción y transferencia de calor complican enormemente los cálculos, sobre todo en un motor policilíndrico

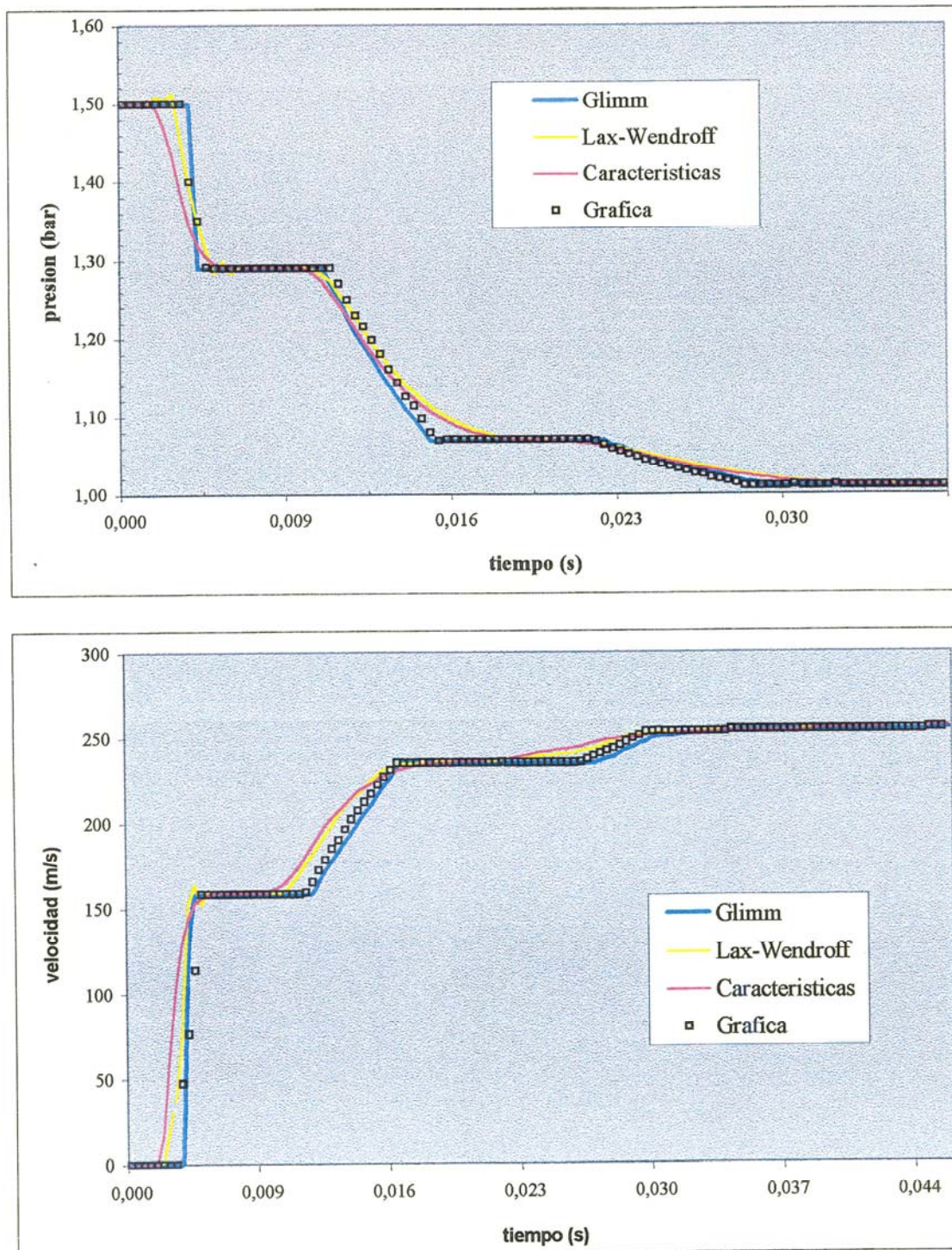


Figura 4.10 Comparación de métodos para flujo homentropico. Valores de presión y velocidad a 2 cm. del extremo izquierdo del conducto.

En la figura 4.10 se comparan los resultados obtenidos en el extremo derecho del tubo para la presión y velocidad. Del análisis de las mismas podemos observar que:

La solución gráfica marca perfectamente el contorno de los estados estacionarios distinguiéndolos de las regiones de ondas de presión, también definidas de forma clara.

La solución calculada por el método de las características tiene la tendencia a redondear la forma de las curvas, debido a la interpolación en cada punto de cálculo.

El método de Lax-Wendroff presenta oscilaciones en los valores de los puntos próximos a un cambio rápido de presión.

El método de Glimm marca perfectamente la situación y perfil de los dos estados sin ningún tipo de oscilación.

En la figura 4.11 se aprecia una mayor diferencia entre los resultados obtenidos para la presión en el centro del conducto con todos los métodos mencionados, tanto en el valor, como en la situación de los pulsos producidos por la reflexión de las ondas en los extremos de los conductos. Esto es debido a que las condiciones de contorno se calcularon para todos ellos con el método de las características, por lo que la influencia de dicho cálculo en el centro del conducto es menor que en los extremos, donde es menor la diferencia entre los resultados obtenidos por cualquiera de los métodos utilizados.

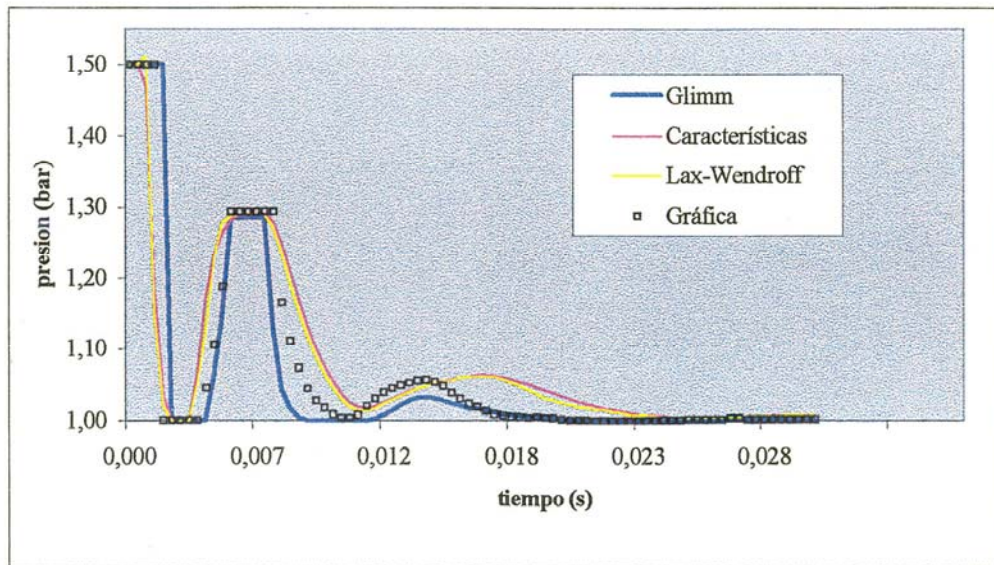


Figura 4.11 Comparación de métodos para flujo homentropico. Valores de la presión en el centro del conducto.

4.3.2.- ANALISIS DE LOS RESULTADOS PARA FLUJO NO HOMENTROPICO EN CONDUCTOS DE SECCION VARIABLE.

La solución al flujo no estacionario bajo condiciones homentropicas se puede usar para una optimización aproximada de un sistema de admisión, especialmente si los conductos son cortos con lo que la influencia de la fricción se puede despreciar. Sin embargo, se obtendrán mejores resultados si consideramos el flujo como adiabático, esto es sin transferencia de calor ($q=0$) pero con fricción ($g\neq 0$). Para el calculo de los procesos de renovación de carga en los que se tiene en cuenta tanto el flujo en la admisión como en el escape, es necesario calcularlo bajo la consideración de no homentropico ($q\neq 0$, $g\neq 0$) y no estacionario.

Si añadimos a esto que cada vez es más común el sintonizado de los colectores como principio de diseño de motores alternativos, jugara un papel importante en el mismo las pequeñas secciones de paso que producen amplitudes de onda amplias, y las variaciones de sección que adaptan los beneficios del sintonizado a un rango más amplio de velocidad de giro del motor.

Vamos a demostrar que la generalización del método de Glimm permite el tratamiento de tales problemas. Lo haremos estudiando primero, los efectos de la variación de sección sobre el flujo, y posteriormente los producidos por la fricción y la transferencia de calor.

Para el primer caso presentamos los resultados del test numérico utilizando el método de Glimm generalizado para calcular la solución al flujo transitorio de un gas politrópico y sin fricción hasta alcanzar un estado estacionario conocido a través de una tobera convergente-divergente con una sección transversal que varía según las ecuaciones

$$\begin{aligned} A(x) &= 1 + (A_E - 1)(1 - x/0.5L)^2 & x \leq 0.5L \\ A(x) &= 1 + (A_S - 1)[(x - 0.5L)(x_S - 0.5L)]^2 & x > 0.5L \end{aligned}$$

donde A_E es el área de entrada, A_S la de salida y L la longitud de la tobera.

Presentamos dos series de experimentos numéricos. En la primera serie consideramos las condiciones de entrada y salida de la tobera de tal forma que el flujo transitorio del gas alcance un estado de flujo estacionario totalmente subsónico. Así para los resultados que se muestran en la fig. 4.12 la presión a la entrada de la tobera se tomó 1 bar y a la salida 0.9 bar, la temperatura para ambos lados 300 K.

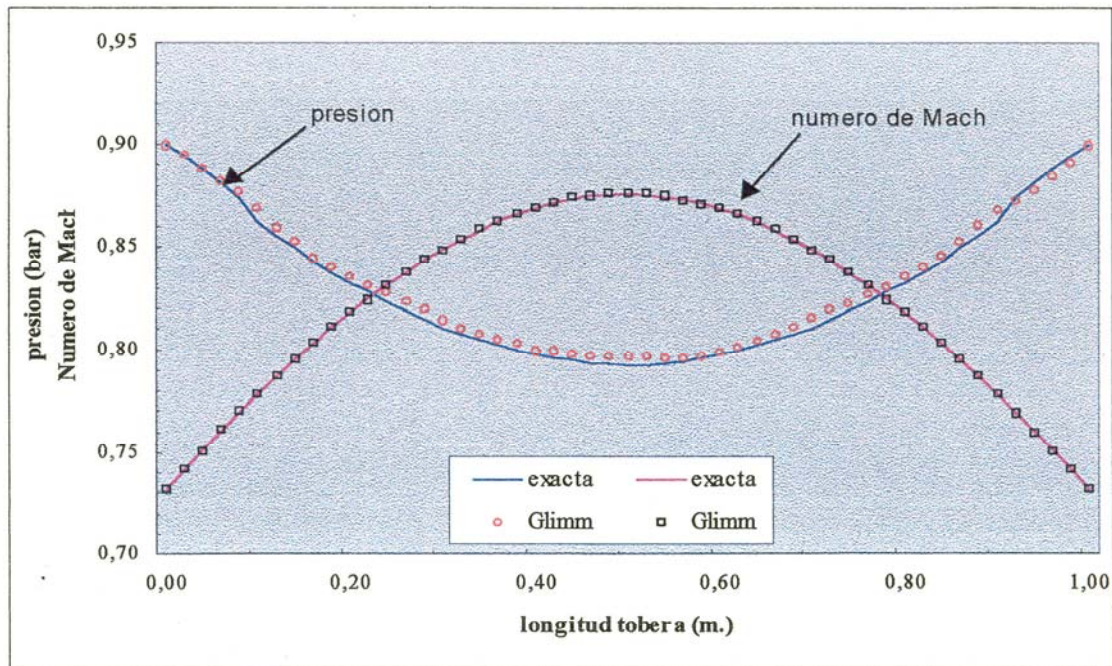


Figura 4.12 Variación de los valores de la presión y del numero de Mach a lo largo de la tobera, a $t=25$ ms. calculados con el método generalizado de Glimm, y superpuestos a la solución exacta.

En la segunda serie de experimentos numéricos se trata de simular las condiciones del inicio de una descarga supersónica. Una región de alta presión ocupa toda la tobera excepto una parte de la sección de salida donde existe una zona de baja presión. La solución a este problema consiste en un flujo transitorio que tiende hacia un estado estacionario con flujo subsónico a la entrada de la tobera, condiciones sónicas en la garganta, y la formación de una onda de choque aguas abajo de la garganta.

La fig. 4.13 presenta la solución para $t=100$ ms., obtenida con una malla de 30 nodos utilizando el método generalizado de Glimm, superpuesta a la solución estacionaria calculada por Shapiro [88] considerada como la exacta.

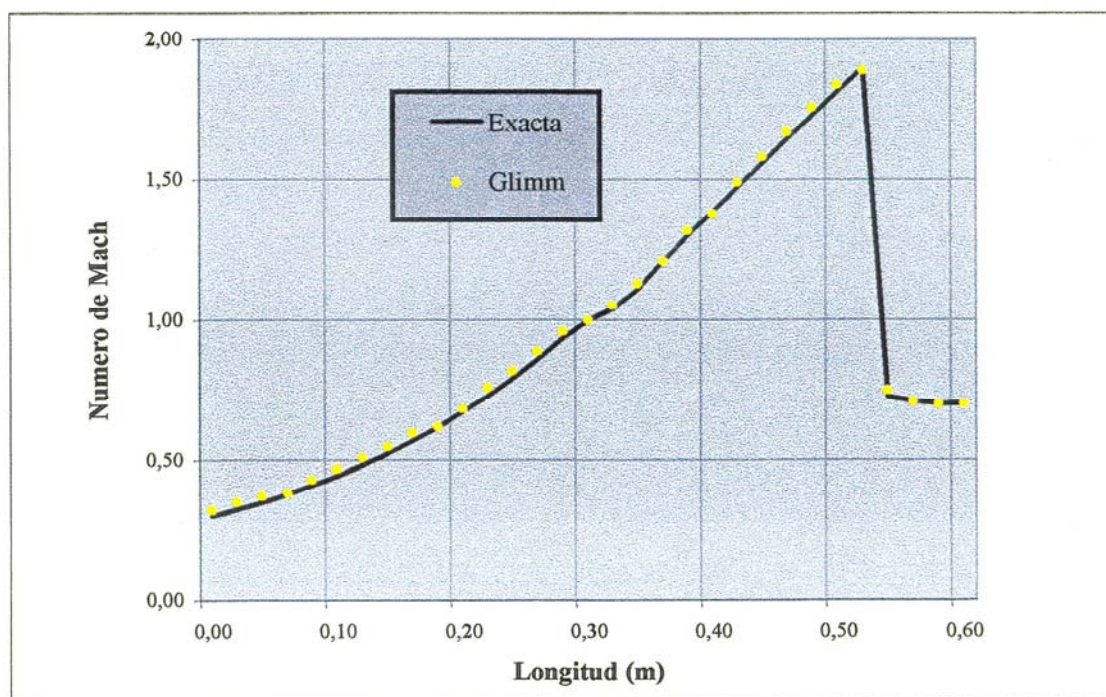
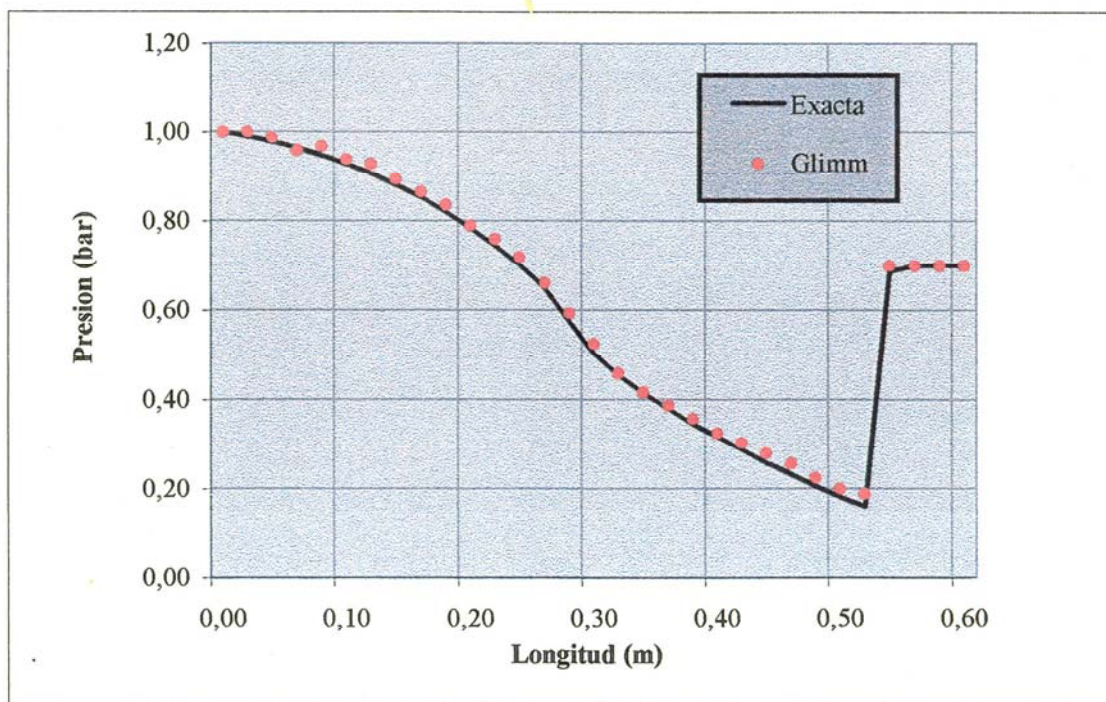


Figura 4.13.- Variación de la presión y el numero de Mach a lo largo de la tobera para $t=100$ ms. obtenida con el método de Glimm generalizado, superpuesta a la solución estacionaria exacta.

Como puede verse, el método de Glimm (empleado con las particularidades que hemos desarrollado en este trabajo) resuelve perfectamente el choque, sin que exista prácticamente fluctuación alguna debida al muestreo aleatorio, de forma que la ligera discrepancia entre ambas soluciones aguas arriba de la garganta, es debida a que en esa zona no han sido alcanzadas las condiciones estacionarias.

Se muestran a continuación los diagramas de presión y velocidad para diferentes tipos de flujo no estacionario no homentropico en un conducto de sección constante, siguiendo con el test de De Haller. Los datos de entrada utilizados en el calculo son los siguientes:

Longitud del conducto (l)	1 m.
Diámetro del conducto (d)	0.04 m.
Presión de referencia (p_{ref})	0.8 bar.
Presión del recipiente (p_o)	1.0 bar.
Temperatura recipiente (T_o)	300 K.
Numero de celdas (m)	50.

Además, para el coeficiente de fricción f y para la temperatura de la pared T_w , se tomaron los valores de la tabla siguiente en función del tipo de flujo estudiado.

Tipo de flujo	f	T_w
Homentropico ($g=0, q=0$)	0.000	500 K
adiabático ($q=0$)	0.004	500 K
No homentropico, con calentamiento del gas	0.004	600 K
No homentropico, con enfriamiento del gas	0.004	400 K

En la figura 4.14 se puede ver la evolución en el tiempo de la presión y velocidad del fluido bajo la consideración de flujo adiabático en el punto medio del conducto, comparada con la obtenida para flujo homentropico. Se aprecia como con

las condiciones de flujo subsónico, la fricción incrementa la velocidad del fluido, con el consiguiente descenso de la presión. Lo contrario ocurriría, como se sabe, si el flujo de entrada en el conducto fuese supersónico.

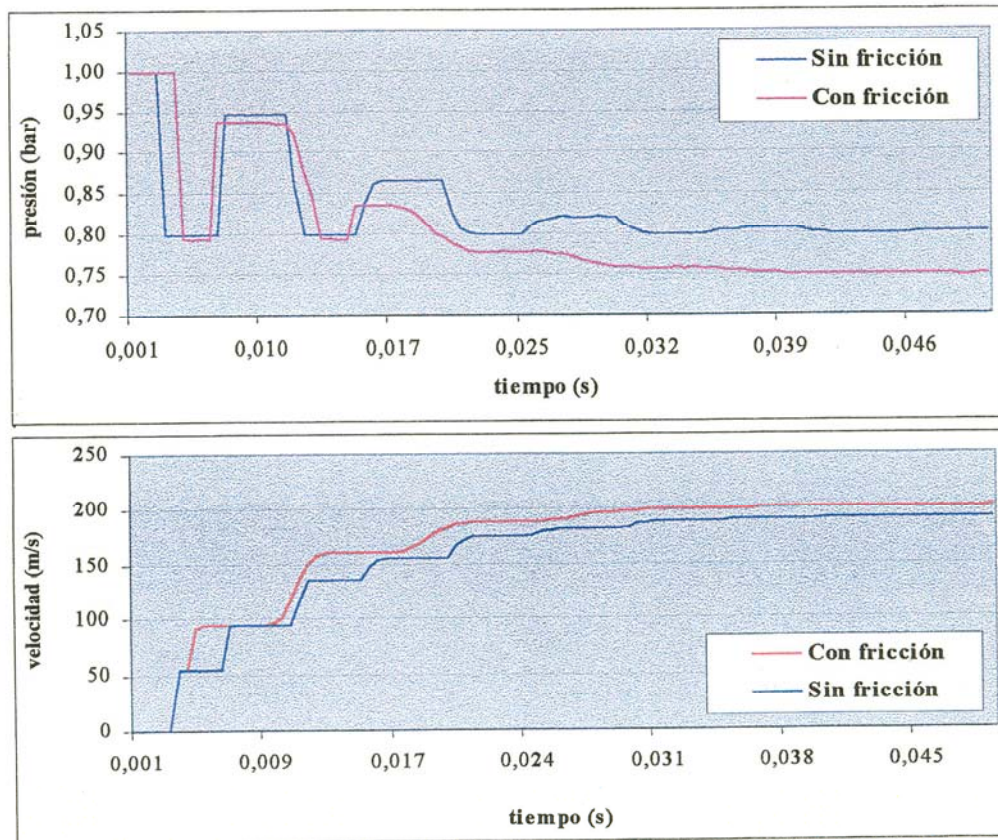


Figura 4.14.- Comparación de la evolución de la presión y velocidad en el punto medio del conducto para flujo homentropico y adiabático.

La consideración de flujo adiabático nos permite para unas condiciones dadas (subsónicas o supersónicas) en la sección inicial de un conducto, conocer la longitud máxima que se puede emplear sin introducir discontinuidades en el flujo (ondas de choque). Esta sería aquella para la cual se alcanza en la salida un número de Mach igual a la unidad.

En la figura 4.15 se comparan la presión, velocidad y número de Mach obtenidos con nuestro método para flujos adiabático y homentropico, una vez

alcanzado en ambos casos el estado estacionario, con la solución estacionaria exacta para flujo adiabático, según Shapiro [88].

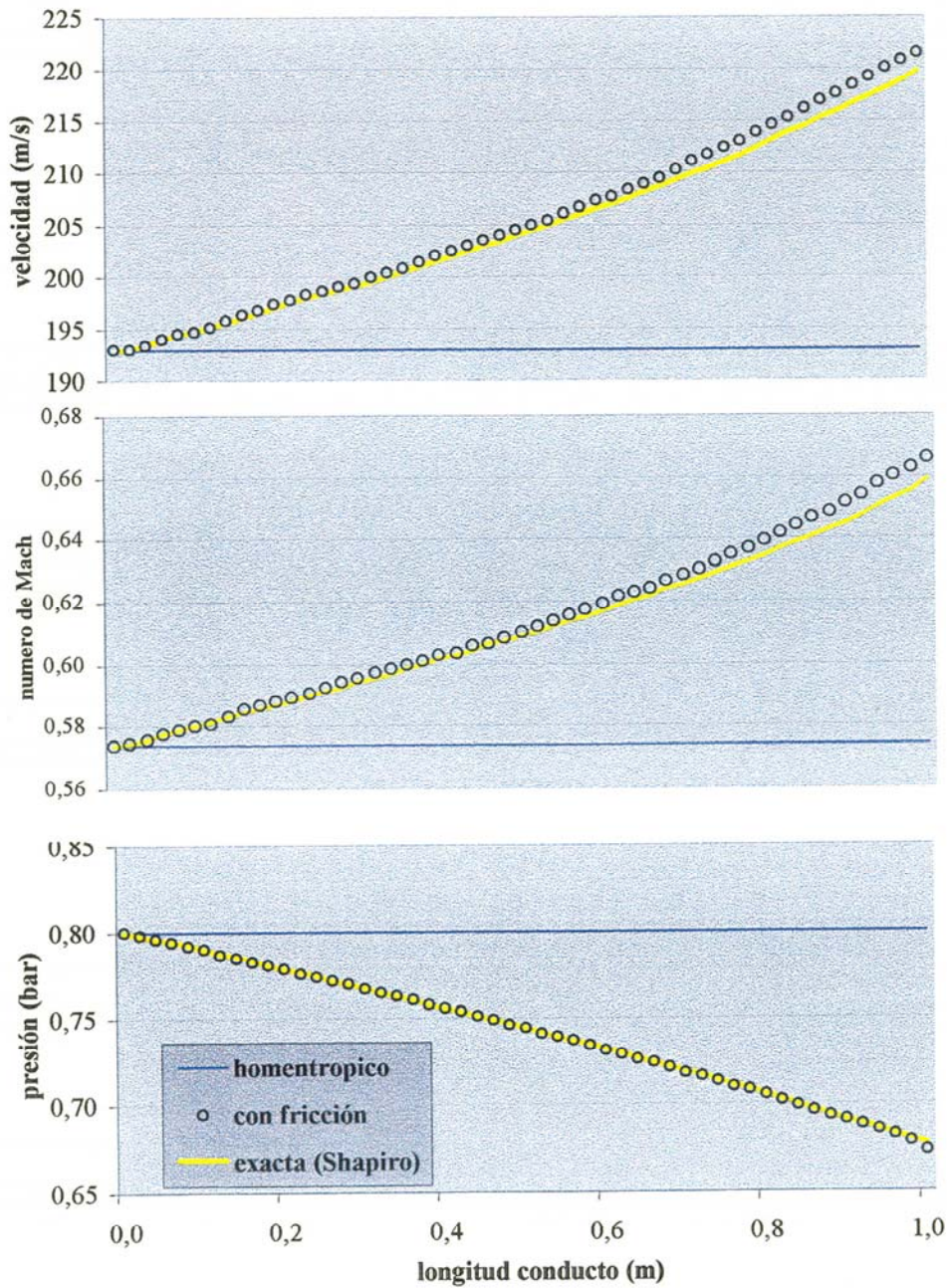


Figura 4.15.- Valores de la presión, velocidad y numero de Mach calculados por el método de Glimm para el estado estacionario para flujo adiabático, comparados con la solución estacionaria exacta

La coincidencia en los resultados obtenidos es prácticamente total, salvo una ligera desviación en el calculo de la velocidad a la salida del conducto, subsanable con un mallado más fino. El método de Glimm generalizado es por tanto adecuado para el estudio de flujos no homentropicos.

En la figura 4.16 se muestra la variación de la presión y velocidad del gas a lo largo de un conducto de sección constante, a través de los resultados obtenidos para diferentes tipos de flujo considerando fricción y transferencia de calor (cesión o adición) entre el gas y la pared del conducto para $t=0.015$ s., tiempo en el que todavía el flujo no ha alcanzado la condición de estacionario.

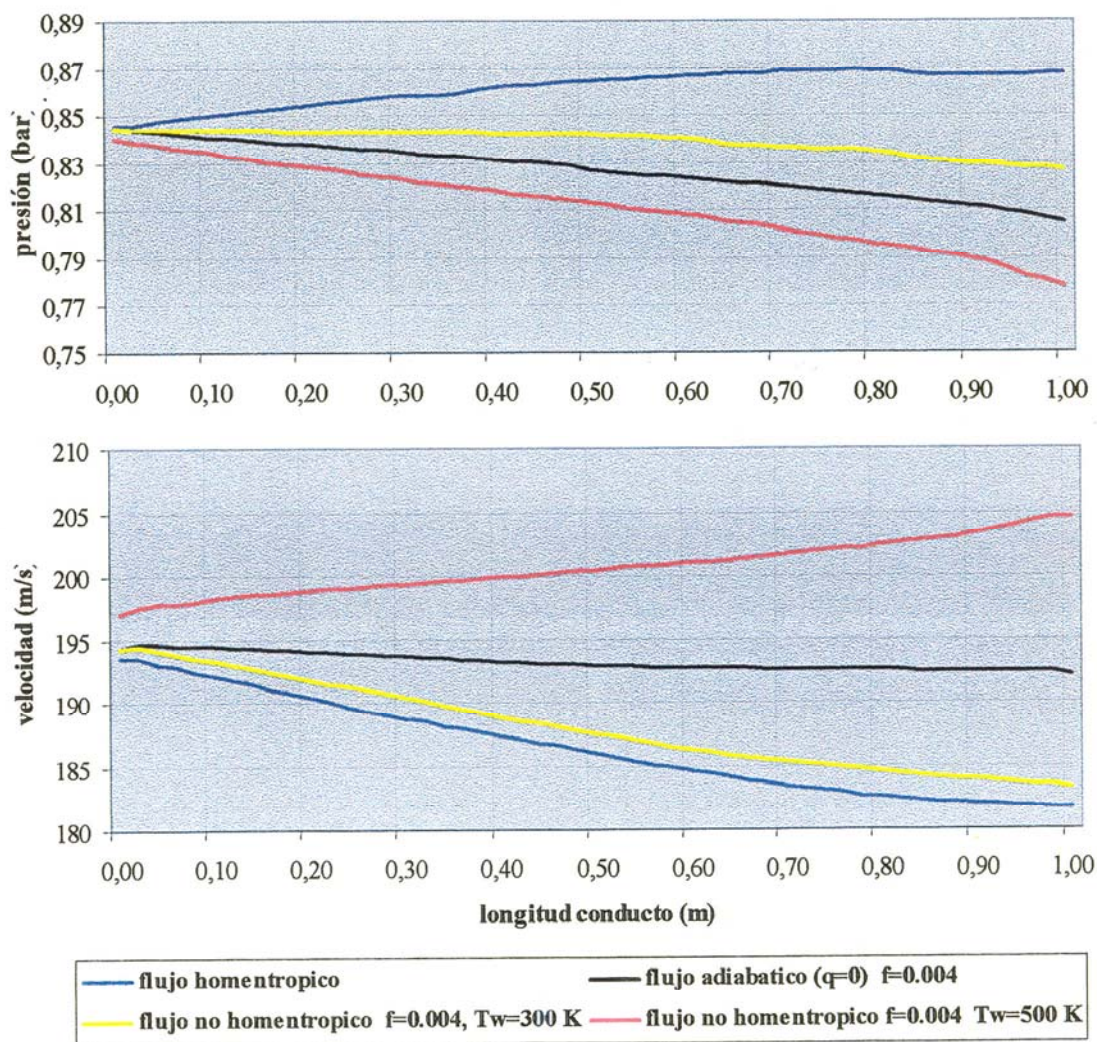


Figura 4.16.- Comparación de resultados obtenidos cuando $t=15$ ms., para diferentes tipos de flujo en un conducto de sección constante.

En la figura 4.17 se representa la influencia sobre la presión y velocidad del gas al considerar una variación de sección en el conducto tal como la de la imagen, para el caso de flujo no homentropico con adición de calor al gas.

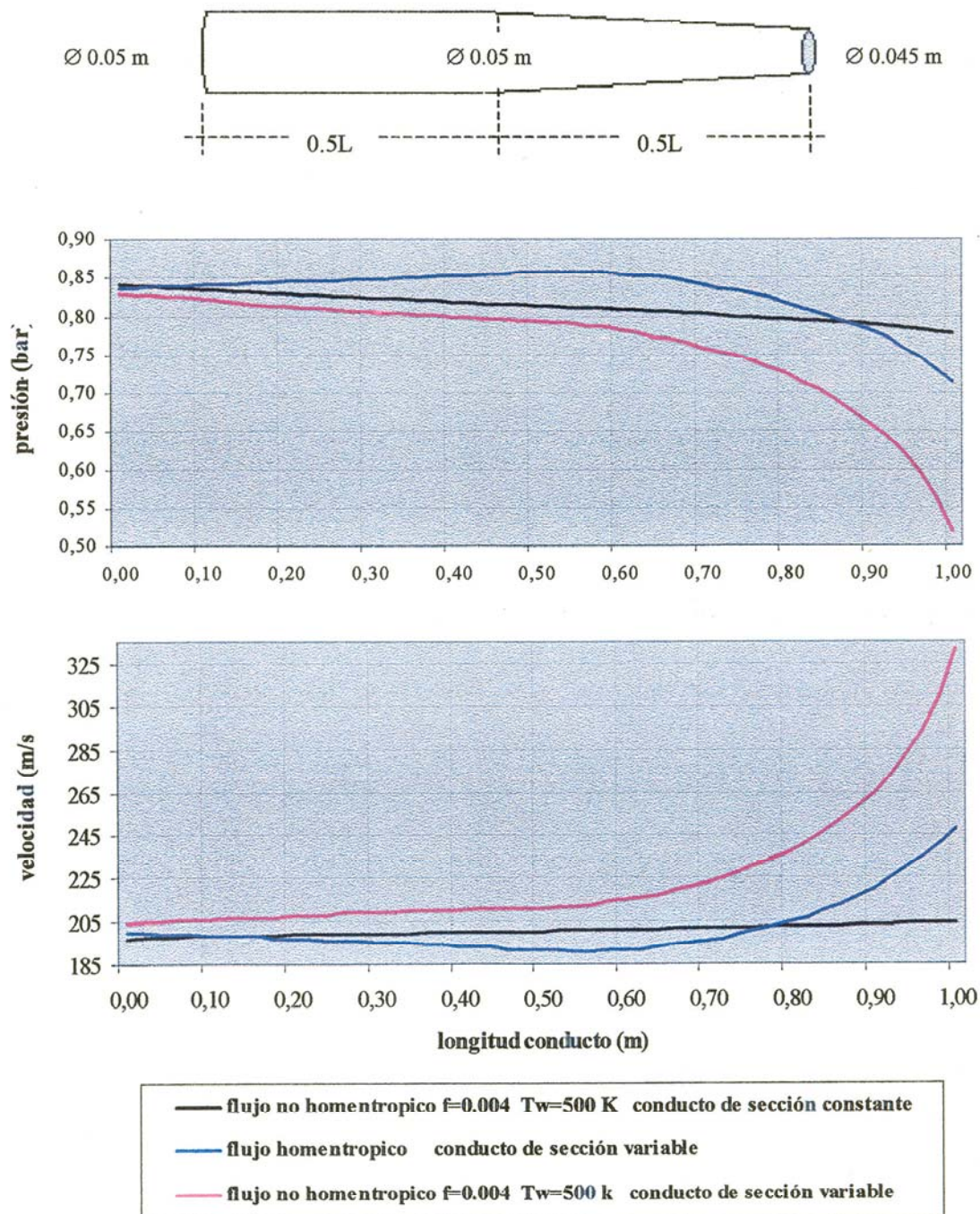


Figura 4.17.- Influencia de la variación de sección de un conducto sobre la evolución de la velocidad y presión para diferentes tipos de flujo

4.4. - RECAPITULACION.

Se ha comprobado que la generalización del método de Glimm, en la forma que proponemos, aplicada a flujo no estacionario no homentropico en conductos de sección variable, describe de forma correcta y sustancialmente mejor que otros métodos en diferencias u otras formas de métodos de muestreo aleatorio, cualquier combinación de condiciones de flujo y geometría de conductos.

Dicha generalización mantiene las ventajas de la forma original del método, esto es, alta resolución en las discontinuidades de contacto, choque o rarefacción y ausencia de oscilaciones, mientras se reduce de forma apreciable la fluctuación causada por el muestreo aleatorio. Todo ello debido a la correcta elección del tipo de muestreo, y a que la solución se aproxima por estados estacionarios por tramos en vez de estados constantes por tramos.

Este esquema será la base del modelo que se describe y valida experimentalmente en el capítulo VI, para el calculo de las condiciones del flujo en los sistemas de admisión y escape de los MCI alternativos, utilizando como condiciones de contorno las definidas en el capítulo siguiente.

CAPITULO V

CONDICIONES DE CONTORNO EN LOS MCI ALTERNATIVOS

5.1.- INTRODUCCION.

Una de las dificultades de cualquier método en diferencias finitas utilizado para resolver las ecuaciones que definen el movimiento de ondas en el seno de un fluido que atraviesa un conducto, es que solo se puede aplicar a nodos interiores de la malla de discretización en que se divide el conducto. Se requiere otra técnica para obtener los valores correspondientes a los nodos de los contornos.

Cada conducto tiene asociados dos extremos, y por lo tanto dos contornos iguales o diferentes, y estos deben simularse de forma satisfactoria. En los modelos de acción de onda, la forma segura de tratar las condiciones de contorno es hacerlo a través del método de las características. Esto es así porque el flujo debe obedecer las condiciones físicas de contorno en los extremos en cualquier momento, y la única manera de alcanzar el final del conducto de forma lógica es hacerlo a través de una onda, las ecuaciones que definen el flujo en conductos obtenidas a través del método de las características producen ondas capaces de transmitir información entre dos nodos. Esto ha sido contrastado por Azuma [50] y Poloni y Winterbone [48,89].

5.2.- ACOPLAMIENTO DE LOS METODOS DE LAS CARACTERISTICAS Y DE GLIMM EN LOS EXTREMOS DE LOS CONDUCTOS DE LOS MCI.

El comportamiento de las ondas en los conductos longitudinales viene determinada de forma total por las condiciones de contorno existentes en sus extremos, dependiendo estas de la geometría (cerrado, total o parcialmente abierto), del sentido del flujo (entrante o saliente del conducto), y de la magnitud del mismo (subsónico o sónico). Hay nueve condiciones de contorno comunes como resultado de combinar los supuestos anteriores. Las ecuaciones que las definen y su procedencia las establecieron Shapiro [88], Foa [90], y Rudinger [91]. La aplicación de estas a los MCI y la forma de tratarlas por el método de las características han sido descritas por Benson [1], y, a partir de aquí ampliamente utilizadas y desarrolladas [92]. Nos limitaremos por tanto en esta sección a definir la técnica general empleada para conectar los valores calculados en el interior de los conductos a través del método de Glimm con los obtenidos en los contornos utilizando el de las características, y en apartados siguientes, a enumerar para cada condición de contorno utilizada en este trabajo, las ecuaciones que la definen.

Consideraremos flujo homentropico para el calculo de las condiciones de contorno por el método de las características. Esto es, las compresiones y rarefacciones del gas son isentropicas, y todo el campo de flujo se halla a la misma entropía. Nos parece razonable esta consideración ya que los efectos producidos por los cambios de sección, la fricción y la transferencia de calor sobre la transferencia de energía a lo largo de los conductos, se tiene en cuenta en nuestro caso, a través de la resolución de la ecuación (3.7b) resultado de aplicar el operador divisor a las ecuaciones (3.7). Evitamos por tanto la complejidad de considerar flujo no homentropico, con lo que se disminuye el tiempo de calculo, (el tratamiento de las condiciones de contorno absorbe la mayor parte del mismo) particularmente si el numero de celdas de la malla usada es pequeño. La utilización de mallas de tamaño

reducido sin pérdida de precisión, es una de las ventajas de emplear el método de Glimm para calcular las condiciones del flujo en el interior del conducto.

Por tanto, para calcular las condiciones de flujo en los extremos por el método de las características es necesario hallar la solución de las ecuaciones resumidas en la tabla siguiente:

Tipo de característica	Condición de dirección	Condición de compatibilidad
λ	$\frac{dx}{dt} = U + A = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} \lambda - \frac{3-\gamma}{2(\gamma-1)} \beta$	$\lambda = A + \frac{\gamma-1}{2} U = \text{cte}$
β	$\frac{dx}{dt} = U - A = \frac{3-\gamma}{2(\gamma-1)} \lambda - \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} \beta$	$\beta = A - \frac{\gamma-1}{2} U = \text{cte}$

donde $A=a/a_{ref}$ y $U=u/a_{ref}$, con u y a las velocidades del fluido y sonido respectivamente, y $a_{ref} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s^{1/2} = \left(\frac{\gamma p_{ref}}{\rho} \right)^{1/2} = \gamma RT_{ref}$ la velocidad del sonido a una temperatura o presión de referencia

La solución numérica de estas ecuaciones se lleva a cabo sobre una malla rectangular en el plano $x-t$ (fig.5.1) que divide a cada conducto en un número de celdas de igual longitud con incrementos verticales correspondientes al incremento de tiempo. Para asegurar la estabilidad del método se impone en todos los puntos de malla que para cualquier incremento de tiempo se cumpla al igual que para el método de Glimm la condición de estabilidad de CFL

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{1}{a + |u|}$$

de esta forma todos los cálculos se mantendrán dentro de la zona de dependencia. El valor absoluto de u hace que la relación sea válida cualquiera que sea la dirección del flujo.

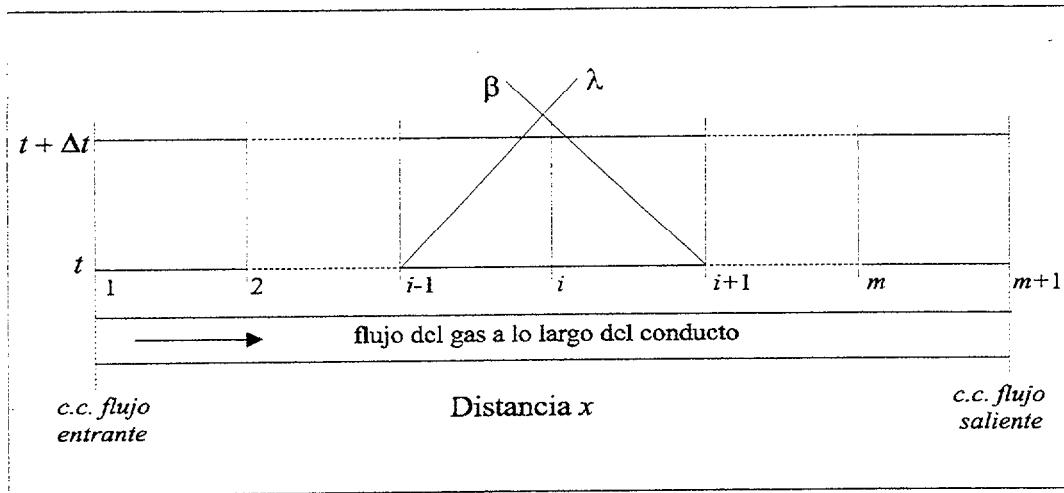


Figura 5.1.- Cálculo de las características λ y β

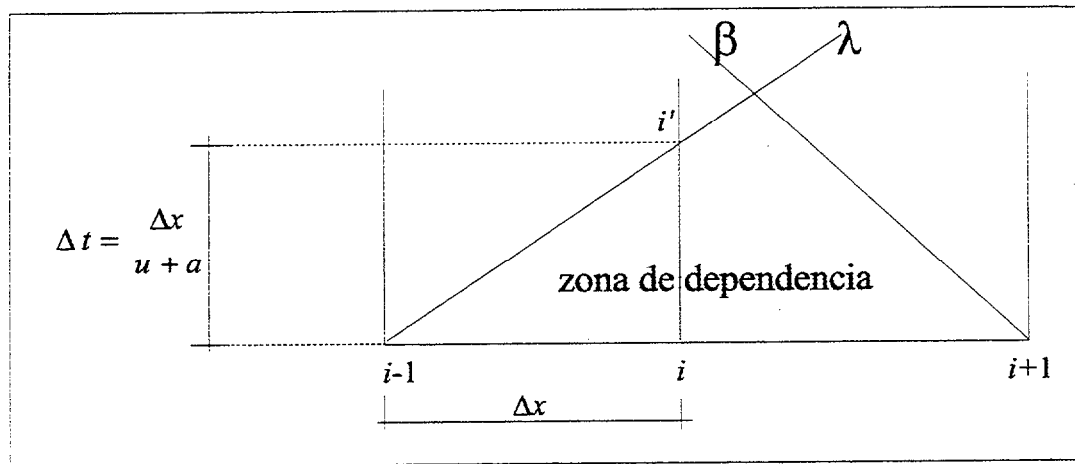


Figura 5.2.- Criterio de estabilidad

En el instante $t_0=0$ se conocen los valores de p , u y ρ en cada uno de los nodos, por tanto se pueden conocer los valores de las variables de Riemann λ y β en cualquier punto de la malla en ese instante por medio de las ecuaciones

$$\left(\frac{p}{p_{ref}} \right)^{\gamma-1/\gamma} = \frac{\lambda + \beta}{2} \quad y \quad \left(\frac{u}{a_{ref}} \right) = \frac{\lambda - \beta}{\gamma - 1} \quad (5.1)$$

El problema es calcular los valores de λ y β en los mismos puntos para un tiempo $t=t_0+\Delta t$. Puesto que las características λ y β se mueven en direcciones opuestas, usando la notación

$$\begin{aligned}\lambda &= \lambda_I \text{ y } \beta = \lambda_{II} && \text{para } x+ \text{ hacia la derecha} \\ \lambda &= \lambda_{II} \text{ y } \beta = \lambda_I && \text{para } x+ \text{ hacia la izquierda}\end{aligned}$$

podemos obtener la pendiente de las características en cada punto de la malla de la fig.5.1 por medio de las ecuaciones

$$\begin{aligned}(\lambda_I)_{t,i} &= (\lambda_I)_{t_0,i} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ b(\lambda_I)_{t_0,i-1} - a(\lambda_{II})_{t_0,i-1} \right\} \left\{ (\lambda_I)_{t_0,i-1} - (\lambda_I)_{t_0,i} \right\} \\ (\lambda_{II})_{t,i} &= (\lambda_{II})_{t_0,i} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ b(\lambda_{II})_{t_0,i+1} - a(\lambda_I)_{t_0,i+1} \right\} \left\{ (\lambda_{II})_{t_0,i+1} - (\lambda_{II})_{t_0,i} \right\}\end{aligned}$$

Se aprecia que $(\lambda_I)_{t,i}$ se puede calcular en todos los puntos excepto en $i=1$, y, $(\lambda_{II})_{t,i}$ en todos los puntos menos en $i=m+1$, es decir, en los contornos.

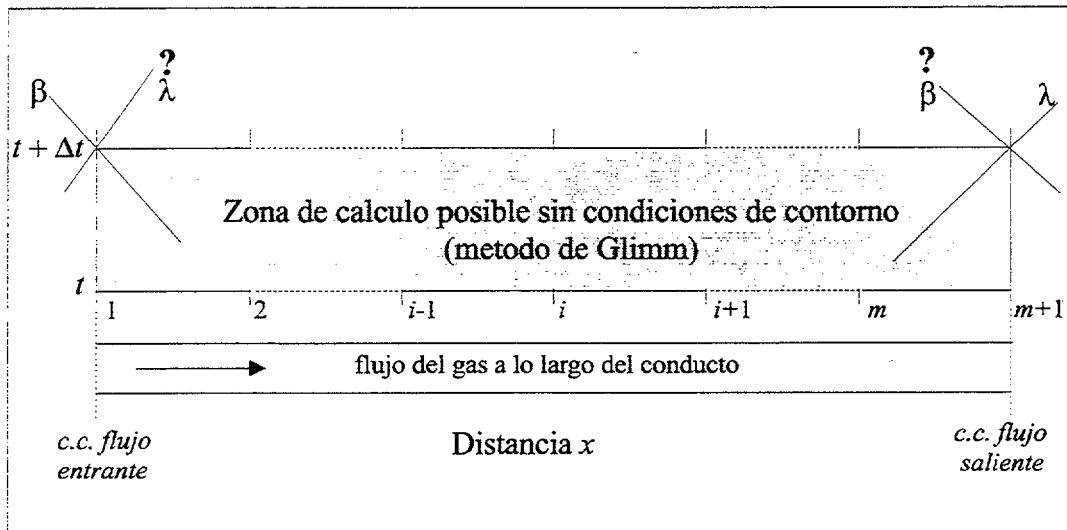


Figura 5.3.- Cálculo de las características β y λ en los contornos.

El estado del flujo en los puntos interiores de la malla se puede obtener por el método de Glimm en la forma ya descrita. Para calcularlo en los contornos y según las conclusiones anteriores, en el extremo izquierdo del conducto es necesario conocer el valor de la característica incidente $\beta=(\lambda_{II})_{t,i}$. Su cálculo es posible por la interpolación del valor de las características en los puntos 1 y 2 en un tiempo $t-\Delta t$ según las ecuaciones (5.2). El estado del flujo resultante en el contorno nos lo dará la intersección de la característica incidente β con las ecuaciones que definan la condición de contorno correspondiente a ese extremo, obteniéndose de esta forma la característica reflejada $\lambda=(\lambda_I)_{t,i}$.

Se opera de forma similar para conocer el estado del flujo en el extremo derecho, en este caso la característica incidente es $\lambda=(\lambda_I)_{t,i}$ y se obtiene por interpolación entre el valor de las características en los puntos m y $m+1$, con las mismas condiciones que para β en el extremo izquierdo. Sustituyendo el valor calculado de $\lambda=(\lambda_I)_{t,i}$ en las ecuaciones que definan la condición de contorno particular de ese extremo, se obtiene la característica reflejada $\beta=(\lambda_{II})_{t,i}$.

Conocido el estado del flujo en los contornos a través de las características incidente y reflejada en cada extremo, calculamos los valores de u y p en dichos puntos a través de las ecuaciones (5.1), con lo que se completa el cálculo para un tiempo t en todos los puntos de la malla en que se ha dividido el conducto, repitiéndose el proceso de cálculo para un nuevo Δt .

5.3.- CONDICIONES PARA FLUJO ENTRANTE O SALIENTE.

Se asume que las condiciones de contorno para flujo estacionario son las mismas que para flujo no estacionario. Rudinger [6] demostró que existe un desfase en la evolución del flujo considerado estacionario frente al no estacionario. Este desfase es usualmente pequeño, pero puede ser significativo en algunos casos. Por lo

tanto la consideración de flujo estacionario básicamente significa que las características que definen el contorno no son función de la frecuencia con que la onda incide en el mismo.

Condiciones de flujo saliente de un conducto

Son conocidas las variables λ o β según el extremo que se considere (de aquí en adelante todas las consideraciones se harán sobre el extremo izquierdo o derecho que se represente en la fig. que se tome de referencia), dadas por las características incidentes de la tabla 4.1, para este caso extremo derecho (fig. 5.4)

$$\lambda = A + \frac{\gamma - 1}{2} U$$

y el nivel de entropía dado por la ecuación

$$A_A = A \left(\frac{p_{ref}}{p} \right)^{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}}$$

donde $A_A = a_A/a_{ref}$, y a_A es el nivel de entropía, que es la velocidad que tendría el gas si evolucionase isentropicamente desde un determinado estado hasta otro estado con una cierta presión de referencia p_{ref}

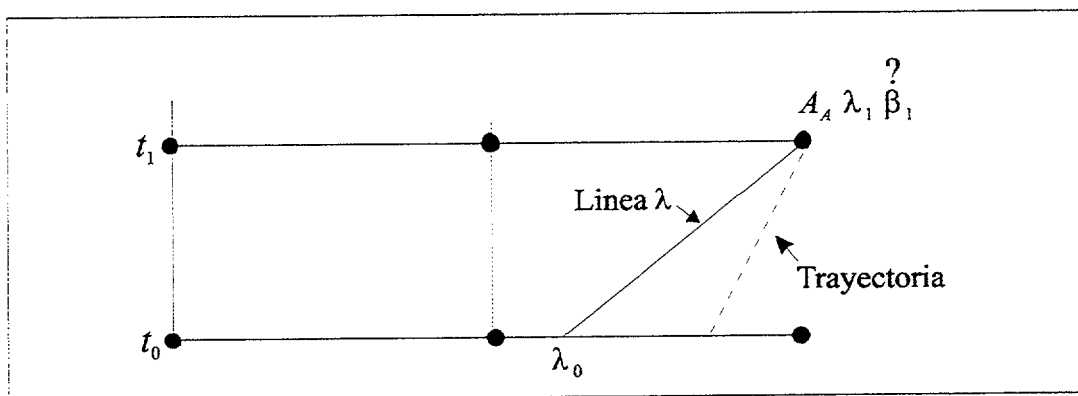


Fig. 5.4.- condiciones de flujo saliente desde un conducto.

Se necesita al menos una ecuación para obtener el valor de β .

Condiciones de flujo entrante a un conducto.

Como el flujo es entrante se desconoce el valor de A_{A1} , al no pasar la línea de la trayectoria por ese punto (fig. 5.5). No se puede por tanto calcular directamente el valor de λ_1 , para posteriormente poder calcular β_1

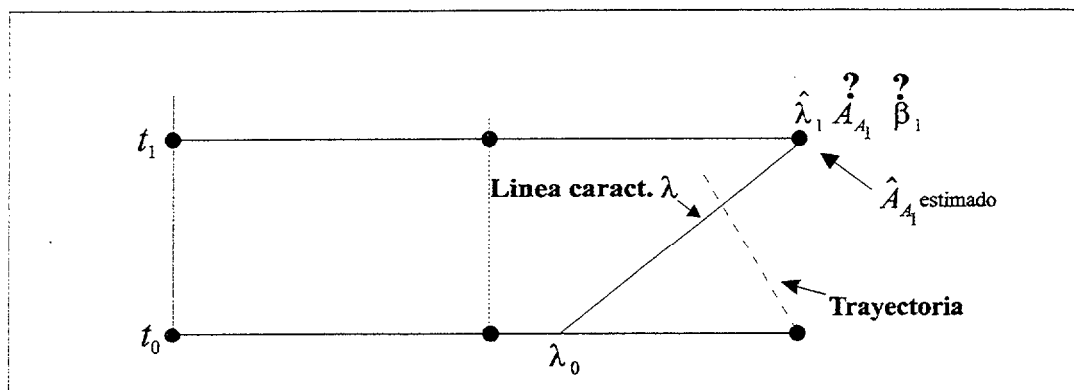


Fig. 5.5.- Condiciones de flujo entrante a un conducto.

Se usará un valor supuesto de A_{A1} , que llamaremos $\hat{A}_{A1}$ para calcular el valor de λ_1 al final del conducto. Este valor temporal de λ_1 lo denominaremos $\hat{\lambda}_1$. Para estimar la relación entre los valores supuestos y los reales se supone que todo el cambio de nivel de entropía se produce en una porción estrecha de fluido cerca del extremo, y que la presión es la misma a ambos lados de la singularidad.

$$\hat{\lambda}_1 = A_1 \frac{\hat{A}_{A1}}{A_{A1}} + \frac{\gamma - 1}{2} U_1$$

Se concluye que para flujo entrante se necesitan al menos dos ecuaciones para obtener el valor de β_1 y el correcto de A_{A1} . Posteriormente se corregirán $\hat{A}_{A1}$ y $\hat{\lambda}_1$.

5.4.- EXTREMO CERRADO.

Se utiliza para modelar válvulas cerradas. La condición que se impone en el extremo cerrado es:

$$U=0$$

como

$$\lambda = A + \frac{\gamma - 1}{2}U \quad \text{y} \quad \beta = A - \frac{\gamma - 1}{2}U$$

se deduce

$$\beta = \lambda$$

Esto significa que una onda incidente bien sea de presión o rarefacción, es reflejada de igual forma.

5.5.- EXTREMO ABIERTO.

El efecto de este contorno es invertir la onda incidente. Así, una onda de rarefacción es reflejada como una onda de compresión, y viceversa. Esta situación es diferente dependiendo de la dirección del flujo.

a.- Para flujo saliente.

Suponemos evolución isobárica desde la salida del tubo hasta las condiciones exteriores, luego $p_1 = p_a$, o bien

$$\frac{A_1}{A_{A1}} = \frac{A_a}{A_{Aa}}$$

combinando esta ecuación con la característica incidente

$$\lambda = A_1 + \frac{\gamma - 1}{2}U_1$$

y teniendo en cuenta la definición de β

$$\beta = A_1 - \frac{\gamma - 1}{2} U_1^2$$

que, combinándola con las dos ecuaciones anteriores, se obtiene el valor de la característica reflejada

$$\beta = 2 \frac{A_a A_{A1}}{A_{Aa}} - \lambda_1$$

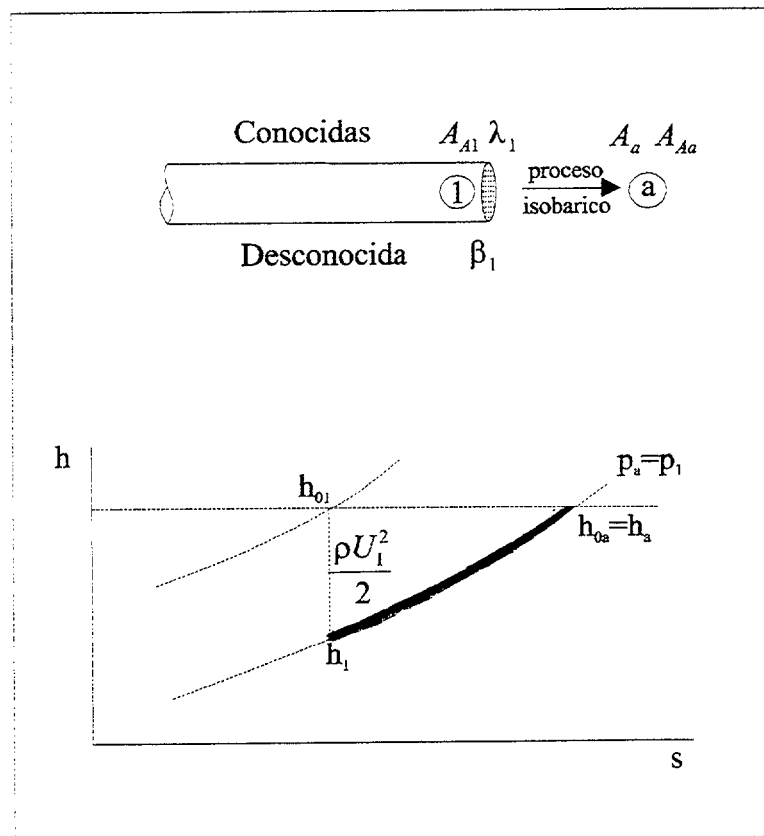


Figura 5.6.- Condición de contorno para extremo abierto con flujo saliente

b.- Para flujo entrante (caso isentropico).

Suponemos evolución isentropica del flujo desde las condiciones exteriores hasta el extremo abierto del conducto.

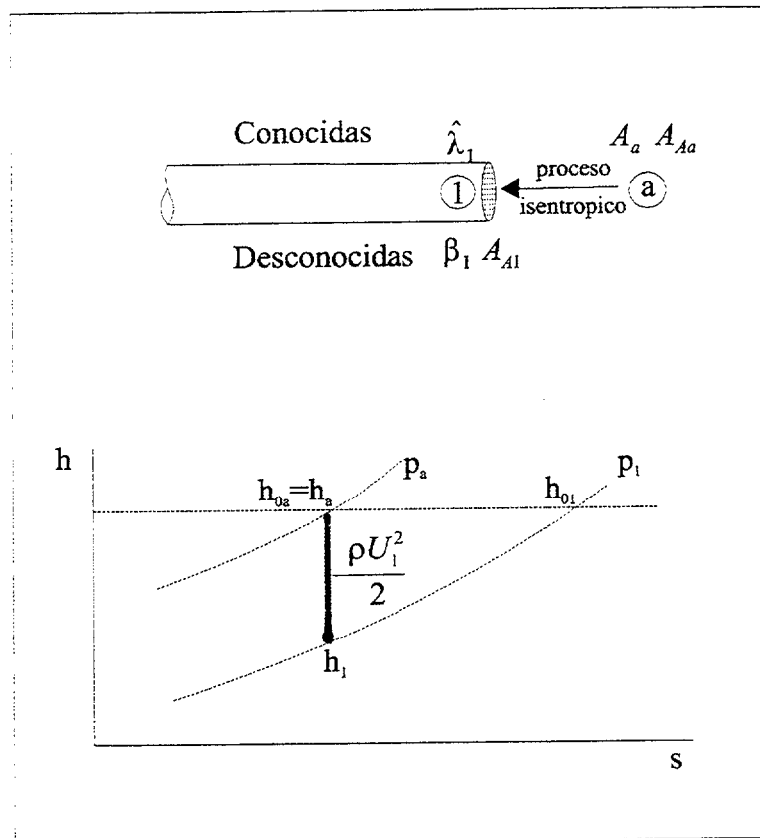


Figura 5.7.- Condición de contorno para extremo abierto con flujo entrante. (Caso isentropico)

La característica incidente es para este caso

$$\hat{\lambda}_1 = A_1 \frac{\hat{A}_{A1}}{A_{A1}} + \frac{\gamma - 1}{2} U_1 \quad (\text{I})$$

La ecuación de la energía entre las condiciones externas y el extremo abierto del conducto es:

$$A_1^2 + \frac{\gamma - 1}{2} U_1^2 = A_a^2 \quad (\text{II})$$

Si introducimos la Condición de proceso isentropico $A_{A1} = A_{Aa}$ en (I), obtenemos

$$\hat{\lambda}_1 = A_1 \frac{\hat{A}_{A1}}{A_{Aa}} + \frac{\gamma-1}{2} U_1 \quad (\text{III})$$

y, combinando (II) y (III)

$$U_1^2 \left(\left(\frac{\gamma-1}{2} \frac{A_{Aa}}{\hat{A}_{A1}} \right)^2 + \frac{\gamma-1}{2} \right) - U_1 (\gamma-1) \hat{\lambda}_1 \left(\frac{A_{Aa}}{\hat{A}_{A1}} \right)^2 + \hat{\lambda}_1^2 - A_a^2 = 0$$

ecuación de segundo grado con la que se obtiene U_1 , y una vez obtenida esta podemos calcular A_1 de la ecuación de la característica incidente (I), y por lo tanto obtener β .

c.- para flujo entrante (con pérdidas).

Para este caso consideramos un coeficiente de pérdida de velocidad $\phi = U_1/U_s$ donde U_s es la velocidad isentropica.

Sustituyendo $U_1 = \phi U_s$ en la ecuación de segundo orden del caso anterior se obtiene

$$U_s^2 \left(\left(\phi \frac{\gamma-1}{2} \frac{A_{Aa}}{\hat{A}_{A1}} \right)^2 + \frac{\gamma-1}{2} \right) - U_s \phi (\gamma-1) \hat{\lambda}_1 \left(\frac{A_{Aa}}{\hat{A}_{A1}} \right)^2 + \hat{\lambda}_1^2 - A_a^2 = 0$$

con la que se puede calcular U_s , y U_1 se obtiene de la definición de ϕ . Se siguen a partir de aquí los mismos pasos que en el caso anterior.



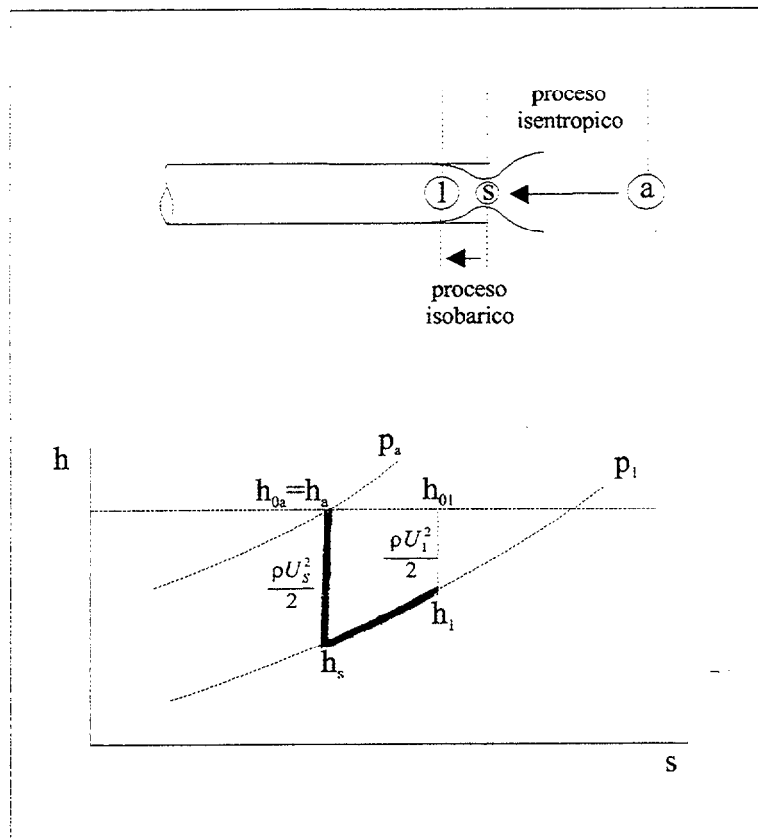


Figura 5.8.- Condición de contorno para extremo abierto con flujo entrante. (con pérdidas)

5.6.- CONDICIONES DE CONTORNO EN LAS VALVULAS.

Para encontrar las ecuaciones que definen el flujo a través de válvulas se supondrá lo siguiente:

- Las válvulas se simulan por una tobera con un coeficiente de flujo C_D (o coeficiente de descarga) obtenido de forma experimental, dependiente del levantamiento.
- El flujo en el conducto es uniforme junto a las válvulas.

Las variables en el interior del cilindro P y T se pueden conocer a través de un modelo termodinámico, o bien por medición directa como es nuestro caso. Las variables desconocidas son los parámetros de flujo en el comienzo del conducto. Se consideraran dos casos:

FLUJO DESDE EL CONDUCTO HACIA EL CILINDRO. (Flujo entrante al conducto)

Caso de flujo normal en la válvula de admisión y reflujo en la válvula de escape.

Hipótesis:

- Flujo isentropico desde el extremo del conducto hasta la sección de la garganta.
- Proceso isobárico desde la sección de la garganta hasta el cilindro.

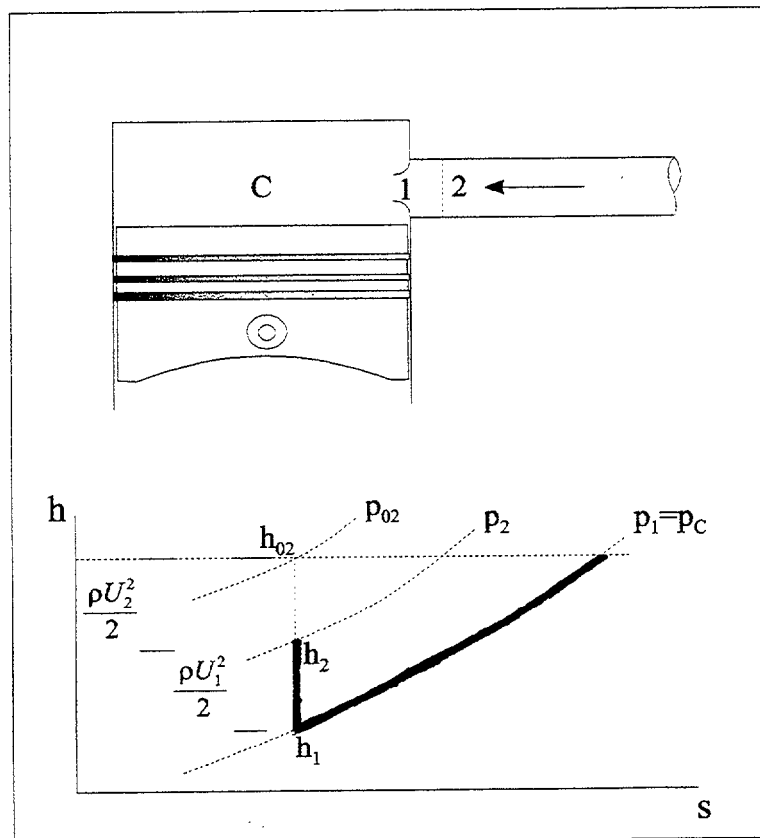


Figura 5.9.- Condición de contorno en las válvulas. Flujo entrante al cilindro.

Se desconocen las variables A_2 , U_2 , A_1 , U_1 y A_{A1} . Se necesitan por tanto cinco ecuaciones para resolver el problema. Estas son:

Característica incidente.

$$\beta_2 = A_2 - \frac{\gamma-1}{2} U_2$$

Proceso isentropico de 2 a 1.

$$A_{A2} = A_{A1}$$

Ecuación de continuidad entre 1 y 2.

$$\rho_2 F_2 U_2 = \rho_1 F_v C_D U_1$$

o bien

$$A_2^{\frac{2}{\gamma-1}} U_2 K = A_1^{\frac{2}{\gamma-1}} U_1 \quad \text{con} \quad K = \frac{F_2}{F_v C_D}$$

Proceso isobárico desde 1 hasta las c (condiciones en el cilindro).

$$\frac{A_1}{A_{A1}} = \frac{A_c}{A_{AC}}$$

Ecuación de la energía entre 1 y 2.

$$A_2^2 - \frac{\gamma-1}{2} U_2^2 = A_1^2 - \frac{\gamma-1}{2} U_1^2$$

Son conocidos los valores de A_c/A_{AC} , A_{A2} y β_2 . Por tanto debido a la presencia de A_2 y U_2 en una misma ecuación se ha de resolver el problema por un método iterativo de la siguiente manera:

- 1) Suponemos un valor para A_2
- 2) Calculamos U_2 a través de la ecuación de la característica incidente.
- 3) Combinado las ecuaciones que definen los procesos isobárico e isentropico con la ecuación de la continuidad obtenemos U_1 .

- 4) A través de la ecuación de la energía obtenemos un valor de aproximado A_2^*
- 5) Comparamos el valor supuesto de A_2 con el calculado A_2^* . Si son iguales o su diferencia esta dentro de la tolerancia establecida podemos calcular λ_2 . De no ser así elegimos un nuevo valor para A_2 y se repite el proceso.

FLUJO DESDE EL CILINDRO HACIA EL CONDUCTO. (Flujo entrante al conducto)

Este es el caso de flujo normal en la válvula de escape y de reflujo en la válvula de admisión.

Hipótesis:

- Proceso isentropico desde el cilindro hasta la sección de la garganta
- proceso isobárico desde la sección de la garganta hasta el inicio del conducto.

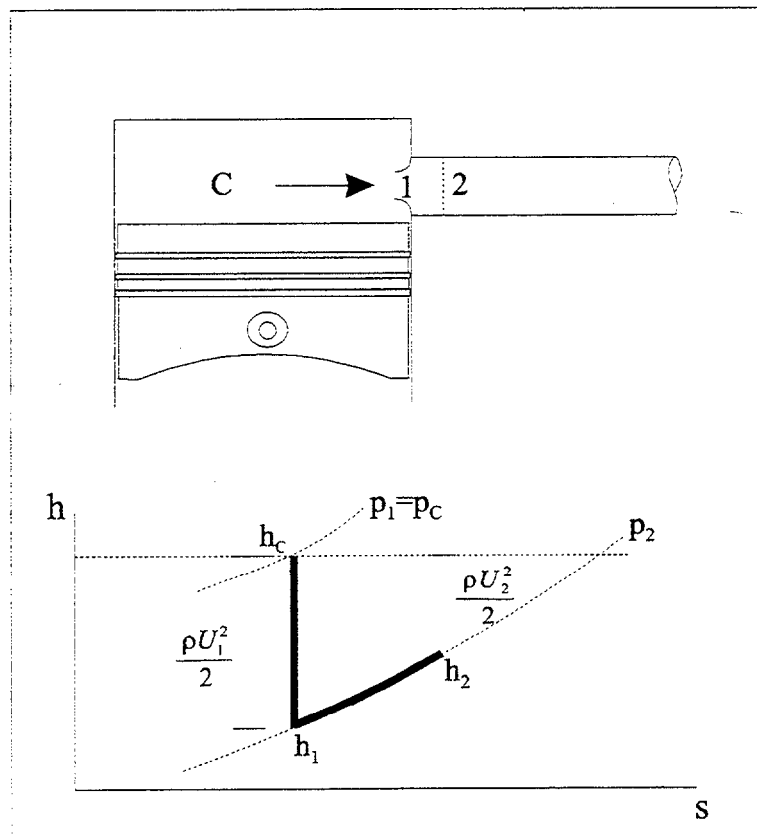


Figura 5.10.- Condicion de contorno en las válvulas. Flujo saliente del cilindro.

En este caso desconocemos las mismas variables que en el caso anterior, esto es, A_2 , U_2 , A_1 , U_1 y A_{A1} , mas A_{A2} . Necesitamos seis ecuaciones para resolver el problema.

Característica incidente.

$$\hat{\beta}_2 = A_2 \frac{\hat{A}_{A2}}{A_{A2}} + \frac{\gamma - 1}{2} U_2$$

proceso isobárico de 1 a 2.

$$\frac{A_1}{A_{A1}} = \frac{A_2}{A_{A2}}$$

proceso isentropico de c a 1.

$$A_{AC} = A_{A1}$$

Ecuación de la energía entre 2 y C.

$$A_2^2 - \frac{\gamma - 1}{2} U_2^2 = A_C^2$$

ecuación de la energía entre 1 y C.

$$A_1^2 - \frac{\gamma - 1}{2} U_1^2 = A_C^2$$

Ecuación de la continuidad entre 1 y 2.

$$A_2^2 U_2 K = A_1^2 U_1$$

Son conocidas la variables A_C , A_{AC} , A_2 y β_2 . Se necesita utilizar un proceso iterativo similar al caso anterior para encontrar la solución al problema, y poder obtener λ_2 .

5.7.-CONDICION DE CONTORNO EN LA UNION O RAMIFICACION DE CONDUCTOS.

Dos métodos diferentes han sido usados convencionalmente para resolver esta complicada Condicion de contorno. Uno es el modelo de Presión Constante, con el que se asume que las presiones estáticas en la unión de los conductos son iguales. Este método es simple y se puede aplicar a una unión con cualquier numero de conductos, pero puede haber casos en que la asunción anterior no es valida si los incrementos de presión entre conductos son grandes. El otro modelo de Perdida de Presión o Teoría del Momento en el cual se resuelve la ecuación del momento teniendo en cuenta la dirección del flujo del gas en cada conducto de la unión, y las perdidas de presión. Este método puede suplir los defectos del método de presión constate, pero solo es efectivo en uniones de hasta tres conductos, aparte de ser complejo su tratamiento analítico y difícil su implementación debido a la necesidad de datos experimentales.

En este estudio se utilizara el modelo de presión constante, pero modificado por la adición de un termino proporcional al cuadrado del numero de Mach en cada conducto para medir la caída de presión . Así las ecuaciones que definen este contorno serán:

- Misma presión para todos los conductos en la unión

$$\frac{A_i}{A_{Ai}} = \left(\frac{P_i}{P_{ref}} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} = \text{constante para } i = 1, \dots, N$$

- El nivel de entropía en los conductos con flujo saliente se promedia con el de los conductos con flujo entrante

$$A_{Ai} = \frac{\sum m_j A_{Aj}}{\sum m_j} \quad \begin{cases} i = \text{conductos con flujo saliente} \\ j = \text{conductos con flujo entrante} \end{cases}$$

Estas ecuaciones, junto con las de la característica incidente y continuidad, forman un sistema cerrado, con lo cual podremos calcular la característica reflejada correspondiente a cada conducto.

- La presión calculada en la unión se modifica para cada conducto a través de la expresión

$$p_i = \frac{P_u}{1 + C_i M_i^2}$$

donde p_u , p_i , C_i y M_i son respectivamente la presión en la unión, la presión estática, el coeficiente de caída de presión y el número de Mach en el conducto i .

El valor del coeficiente de pérdida de presión lo establecieron Takizawa [49] y Bingham y Blair [28] en 0.35 aproximadamente, pues, los resultados calculados con este valor eran casi coincidentes con los obtenidos experimentalmente en ambos casos para geometrías diferentes.

5.8.- CONDICIONES DE CONTORNO EN EL CILINDRO.

Para calcular las variaciones de la presión en el interior del cilindro durante el proceso de renovación de la carga, emplearemos la siguiente ecuación:

$$\frac{dp_c}{dt} = \frac{1}{V_c} \left[a_{a_0}^2 \left(\frac{dm}{dt} \right)_a - a_c^2 \left(\frac{dm}{dt} \right)_e - \gamma p_c \frac{dV_c}{dt} + (\gamma - 1) \frac{dQ}{dt} \right]$$

consideraremos solo transferencia de calor por convección por lo que

$$\frac{dQ}{dt} = \bar{h}_c A_p (\bar{T}_g - T_p)$$

siendo A_p el area del pistón $\bar{h}_c$ el coeficiente de transmisión de calor medio, dado por

$$\bar{h}_c = \lambda \frac{N_u}{D_c}$$

λ es la conductividad térmica del gas, D_c el diámetro del cilindro y N_u el numero de Nusselt que según Woschni [92], es

$$N_u = 0.035 R_e^{0.8} \quad \text{con} \quad R_e = \frac{\rho D_c 6.18 \bar{V}_p}{\mu}$$

siendo μ la viscosidad del gas y $\bar{V}_p$ la velocidad lineal media del pistón.

La variación de flujo másico entrando o saliendo del cilindro a través de un área F viene dado por

$$\frac{dm}{dt} = \left(\frac{4\lambda}{\gamma - 1} \right) \left(\frac{p_{ref} F}{a_{ref}} \right) \left[\frac{\lambda - \beta}{(\lambda + \beta)^2} \right] \left(\frac{\lambda + \beta}{2A_A} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}}$$

CAPITULO VI

MODELADO DEL PROCESO DE RENOVACION DE CARGA EN LOS MCI ALTERNATIVOS. VALIDACION EXPERIMENTAL. APLICACIONES.

6.1.- INTRODUCCION.

Un objetivo en el desarrollo de los motores de automoción es, junto con una mejora en la economía de combustible a carga parcial, conseguir un funcionamiento optimo a plena carga. Se requiere por tanto que de alguna manera se mejore el rendimiento volumétrico. En este sentido la introducción de cuatro válvulas por cilindro ha dado lugar a que se alcancen valores de par para velocidades de giro altas entre un 30% y 40% mas altos que los obtenidos con motores de dos válvulas. Esto sin embargo, se ha conseguido a expensas de una reducción del par a velocidades de giro medias y bajas, lo que indica que aun con cuatro válvulas es difícil conseguir un rendimiento volumétrico adecuado para todo el rango de velocidades del motor.

Una forma de mejorar el rendimiento volumétrico a velocidades bajas, es conseguir el *sintonizado* de la configuración del sistema de admisión, usando por ejemplo, conductos largos y estrechos. Pero esto llevaría a una reducción en el valor de la potencia máxima, pues el sintonizado a regímenes altos necesita de conductos cortos y anchos.

Se hace necesario por tanto la utilización de un sistema de admisión variable que controle la longitud de los conductos de acuerdo con la velocidad de giro del motor. Esta es la solución más efectiva para que el motor funcione de forma favorable en un rango más amplio de velocidades.

En este sentido los sistemas de admisión y escape deben ser diseñados en cuanto a la longitud y sección de los conductos que los formen, a través del análisis del movimiento del gas en su interior.

Dicho análisis lo llevaremos a cabo a través del modelo que presentamos y validamos en este capítulo para la predicción del rendimiento volumétrico, teniendo como base la generalización del método de Glimm que hemos desarrollado en el capítulo III y validado numéricamente en el capítulo IV, para el estudio del flujo en el interior de los conductos. El comportamiento del gas en los extremos de los mismos se lleva a cabo a través de los diferentes submodelos que se describen en el capítulo V y que se corresponden con las diferentes condiciones de contorno, que en los MCI alternativos, tienen asociadas cada extremo de cada conducto.

En la figura 6.1. se muestran los diferentes submodelos que componen el modelo de simulación global. El programa así formado permite la libre combinación de las partes del motor definidas por los datos de entrada.

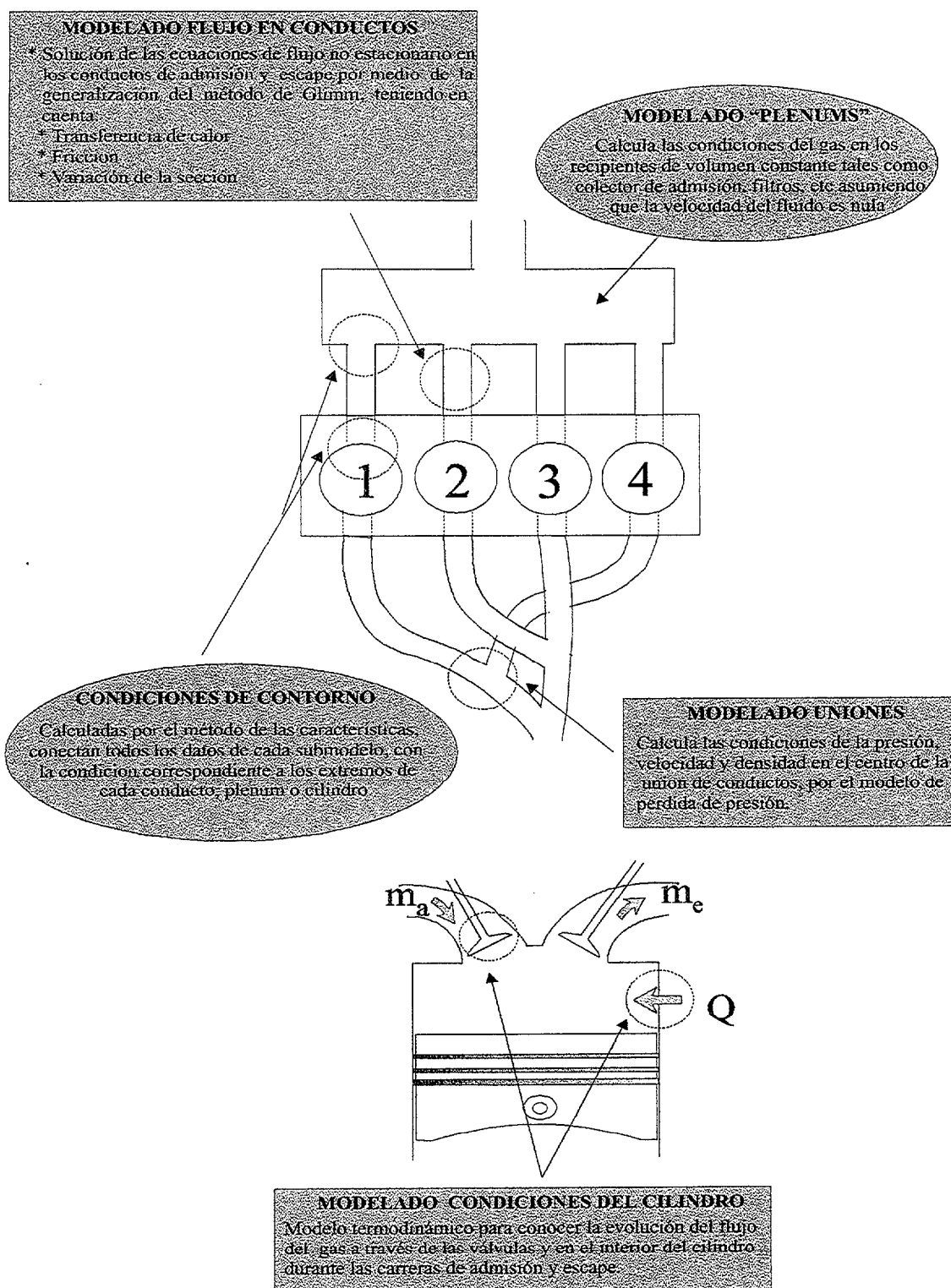


Figura 6.1.- Componentes del modelo global de simulación del flujo en los MCI.

6.2.-VALIDACION EXPERIMENTAL.

Para la validación de las capacidades predictivas del modelo señaladas anteriormente, se llevará a cabo un estudio comparativo entre los resultados calculados con el programa de la evolución del rendimiento volumétrico en todo el rango de velocidades de giro del motor a plena carga, y de la presión en diferentes puntos de la admisión y escape, y los obtenidos experimentalmente en banco de ensayo con un motor diesel tricilindrico de aspiración natural y cuatro tiempos, con inyección directa y refrigeración por aire, cuyas características y condiciones de operación se especifican en la tabla siguiente:

TABLA 6.1.- Características globales y condiciones de operación del motor.

DIAMETRO			100 mm.
CARRERA			105 mm.
LONGITUD DE BIELA			190 mm.
RELACION DE COMPRESION			17.5
ORDEN DE ENCENDIDO			1-3-2
REGLAJES	ADMISION	AAA	20°
		RCA	41°
	ESCAPE	AAE	50°
		RCE	20°
DIAMETRO	ADMISION		41 mm.
VALVULAS	ESCAPE		38 mm.
CONDICIONES DE OPERACION			PLENA CARGA
RANGO VELOCIDAD DEL MOTOR			500-3000 RPM

Las características del freno, medidor de flujo, captadores de presión y sistema de adquisición de datos utilizados en los ensayos, se definen en el anexo A.

6.2.1.- DATOS INICIALES Y CALCULOS PRELIMINARES.

El listado siguiente resume los detalles del motor que se requieren como datos iniciales para la ejecución del programa.

- **Orden de encendido.**
- **Diámetro, carrera y longitud de biela.**
- **Relación de compresión.**
- **Dimensiones de los sistemas de admisión y escape:**

Longitud y sección de todos los conductos de admisión y escape.

Forma de las uniones de los conductos.

Dimensiones y forma de las pipas de admisión y escape.

Volumen de los "*plenums*".

- **Reglaje de las válvulas:**

Perfil de las levas.

Area efectiva de las válvulas.

El inicio del programa coincide con la apertura de la válvula de escape. Necesitamos por lo tanto los valores de presión y temperatura en ese punto. En nuestro caso hemos obtenido experimentalmente la presión en cámara durante todo el ciclo cerrado, y, por tanto conocemos su valor en el momento que abre la válvula de escape, junto con 1 valor estimado de la temperatura. De esta forma los datos de partida para la simulación del proceso de la renovación de carga con el modelo, son mas exactos que si fuesen calculados con un modelo de combustión.

En la figura 6.2 se muestran como ejemplo la evolución de la presión medida en cámara a plena carga, durante el ciclo cerrado y la correspondiente estimación de la temperatura para 2100 rpm.

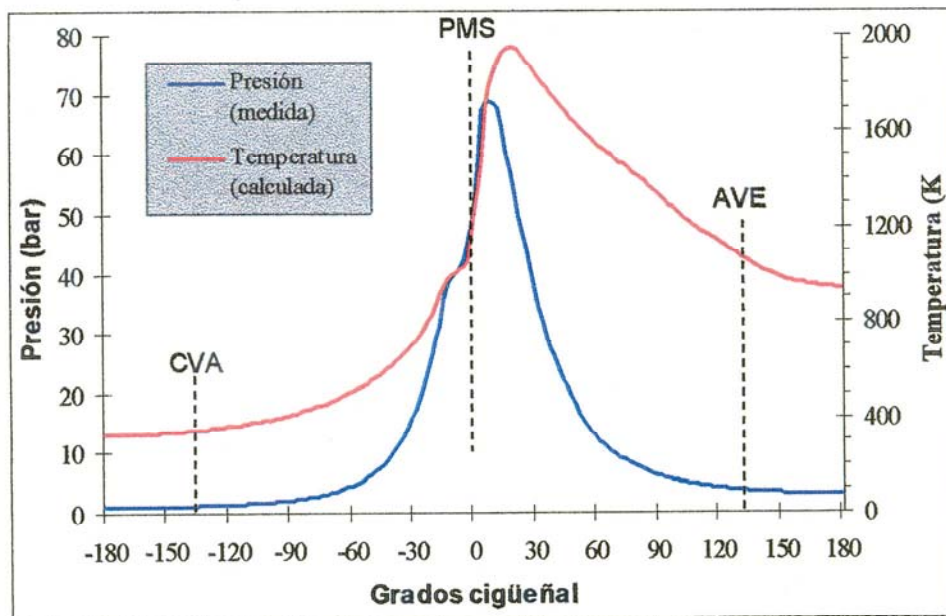


Figura 6.2.- Presión medida en el cilindro nº1 del motor ensayado a plena carga y 2000 rpm., junto con la temperatura estimada para las mismas condiciones.

Cada ciclo de 720° y durante tres o cuatro de ellos, el programa retoma el mismo valor de la presión dado inicialmente y el estimado de la temperatura en función de la carga del cilindro, hasta alcanzar unas condiciones estables. En ese momento se puede disponer de la variación con el tiempo y en cualquier punto de los sistemas de admisión y escape, de todos los parámetros que intervengan en la definición del flujo que atraviesa dichos sistemas (presión, velocidad, densidad, gasto másico, etc.). No obstante, para que la obtención de estos valores sea posible, es necesario que se defina detalladamente la disposición en el motor real, de cada uno de los conductos junto con la forma de conexión entre ellos, de manera que sea entendido por el programa lo mas aproximadamente posible.

6.2.1.1.- DEFINICION DEL MODELO DE CALCULO PARA LOS SISTEMAS DE ADMISION Y ESCAPE.

La figura 6.3. muestra la situación de los colectores de admisión y escape en el motor ensayado, y la figura 6.4 la geometría del colector de admisión. La diferencia entre ambos radica en sus dimensiones y no en la forma, que es la misma, tal como queda reflejado en el esquema general de calculo (fig. 6.5).

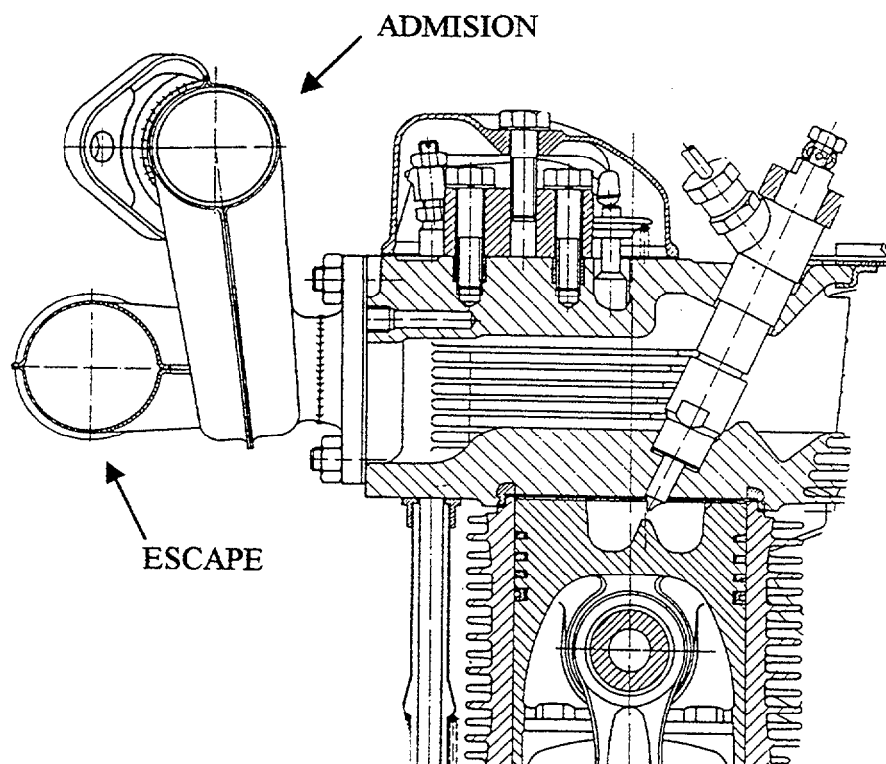


Figura 6.3.- Posicion de los colectores de admision y escape del motor ensayado.

Desde el punto de vista analítico hemos asumido los conductos como unidimensionales, debido a la incapacidad del programa de predecir efectos bidimensionales, una suposición aceptable para la mayor parte de los casos que hemos analizado. Así, la definición del contorno de los conductos en los que varia su sección, se hace por tramos con una determinada conicidad, determinada por los

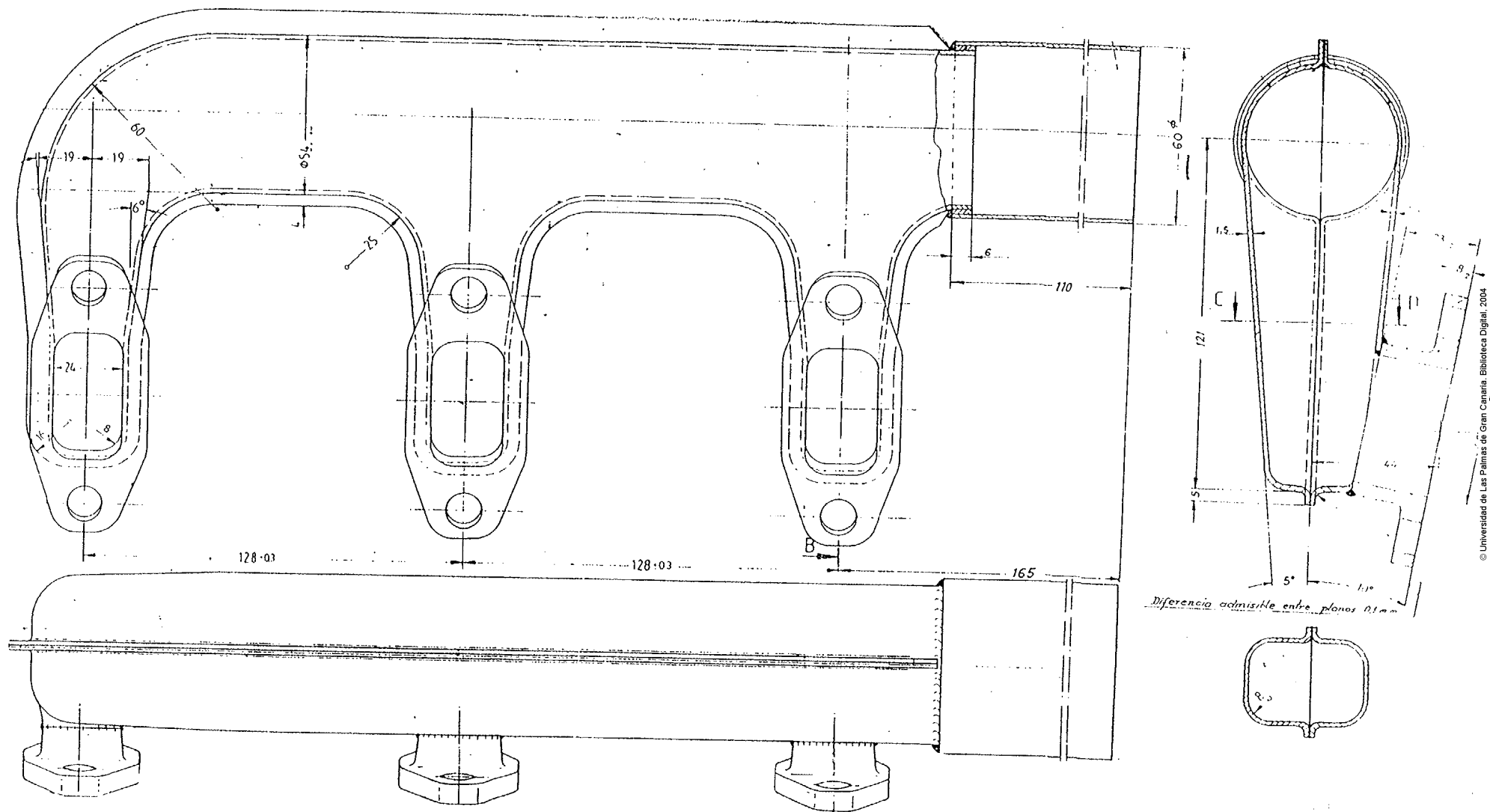


Figura 6.4.- Esquema del colector de admisión del motor MWM-DITER D 303-3.

diámetros de los extremos y longitud de cada tramo. Esta forma de operar es similar a la seguida para su construcción.

Con estos criterios, el esquema de calculo que hemos adoptado para los colectores de admisión y escape del motor ensayado es el de la figura 6.5.

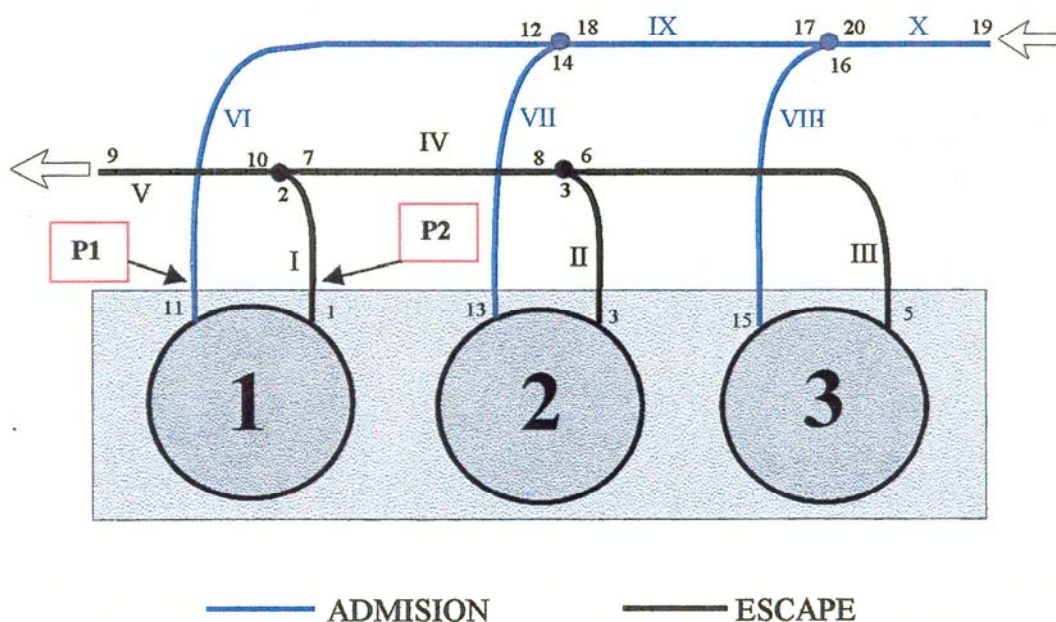


Figura 6.5.- Modelo de la configuración de los colectores de admisión y escape del motor ensayado. Los puntos señalados con P1 y P2 indican el lugar de medida de presiones.

El esquema de la figura 6.5 debe definirse de manera que sea aceptado por el programa implementado. La tabla 6.2 muestra los datos que son necesarios para la definición del colector de admisión. Para evitar confusiones, a los conductos se les asigna numeración romana, y a sus extremos, arábica.

Cada conducto se divide en un numero determinado de celdas. El tamaño de estas, definido por Δx , es la longitud básica de calculo. Δx y el incremento del ángulo del cigüeñal $\Delta \alpha$ (equivalente del tiempo en el motor) se relacionan por:

$$\Delta \alpha = \left[\frac{6N}{a} \Delta x \right]_{min}$$

ecuación derivada del criterio de estabilidad discutido en el capítulo III.

Para alcanzar una predicción suficientemente aproximada de las condiciones dentro del cilindro, el valor de $\Delta\alpha$ debe estar entre 1 y 2 grados de giro de cigüeñal. Con ello se puede calcular un valor apropiado para Δx a través de la ecuación anterior.

TABLA 6.2.- Datos para la definición del sistema de admisión de la figura 6.5.

a) Dimensiones de los conductos

Conducto	Longitud	Nº celdas	Nº tramos	Tramo 1			Tramo 2		
				ϕ_{izda}	Longitud	ϕ_{dcha}	ϕ_{izda}	longitud	ϕ_{dcha}
VI	0,35	12	2	0,054	0,23	0,038	0,038	0,12	0,038
VII	0,22	7	2	0,048	0,10	0,038	0,038	0,12	0,038
VIII	0,22	7	2	0,048	0,10	0,038	0,038	0,12	0,038
IX	0,12	4	1	0,054	0,12	0,054	-	-	-
X	0,16	5	1	0,06	0,16	0,06	-	-	-

b) Datos de las uniones.

Nº uniones	Nº conductos en cada unión	Nº de los extremos de los conductos de cada unión		
		12	14	18
2	3	12	14	18
	3	16	17	20

c) Datos sincronización de los cilindros.

Nº cilindro	Orden de Encendido	Desfase con Cilindro nº 1
1	1	0°
2	3	480°
3	2	240°

6.2.1.2.- CALCULO DE LOS COEFICIENTES DE FLUJO.

En cualquier tipo de modelado del flujo en los colectores de los MCI alternativos, es un requerimiento fundamental que los coeficientes de flujo se apliquen a las respectivas restricciones, con el fin de modelar con exactitud el flujo en esas regiones.

Los principales efectos presentes en los colectores de los motores de cuatro tiempos, desde el punto de vista de la dinámica de gases son, flujo a través del carburador, paso del flujo por las válvulas, flujo en las uniones de los conductos, transferencia de calor a o desde el colector, efectos de la variación del área y fricción.

Todos ellos ya han sido tratados en capítulos anteriores salvo en lo que respecta a los coeficientes de flujo o coeficientes de descarga en las válvulas, necesarios para calcular el área de flujo efectiva disponible con el levantamiento.

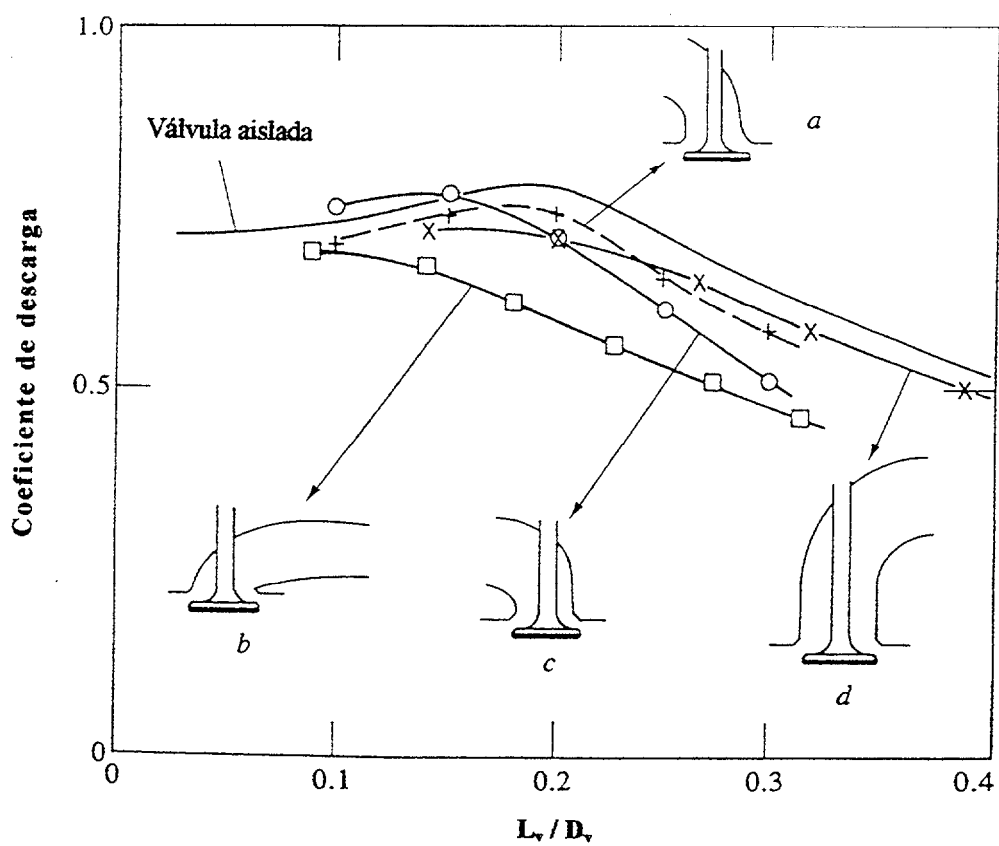
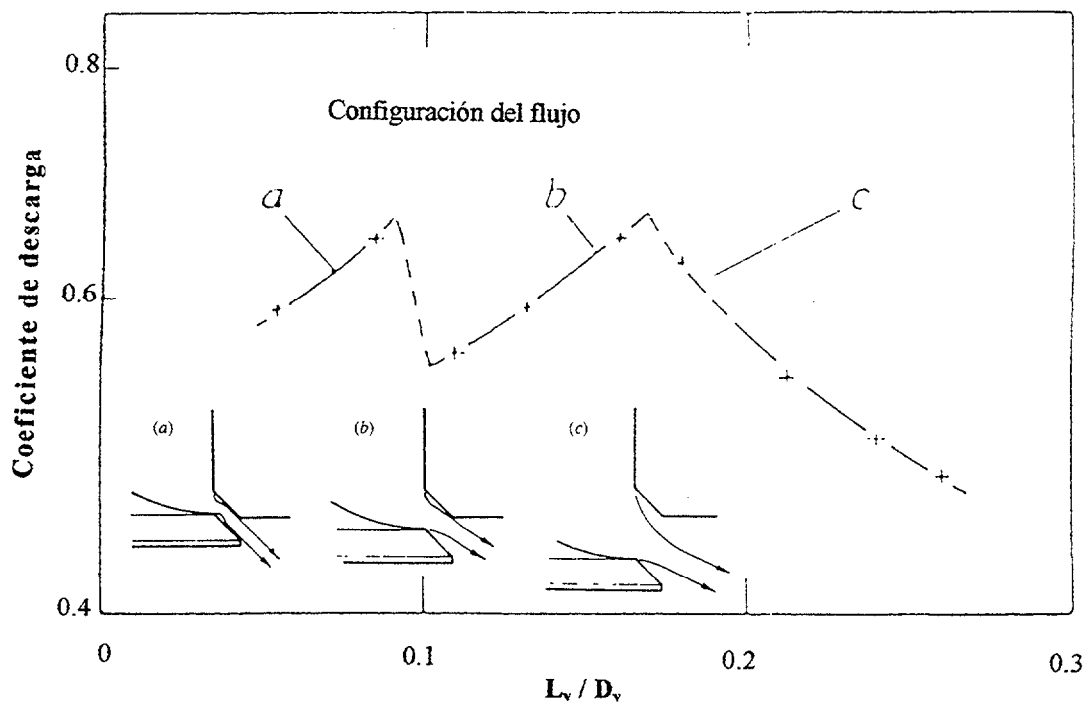
De forma que conociendo la geometría y el reglaje de las válvulas, las dimensiones y formas de las pipas de admisión y escape y el perfil de las levas, se efectuó el calculo del área efectiva de flujo A_E , en función del área de referencia A_R y del coeficiente de descarga C_D según la ecuación

$$A_E = C_D A_R$$

usándose como área de referencia la denominada área de cortina A_c que varia linealmente con el levantamiento de la válvula L_v y su diámetro D_v y dada por

$$A_c = \pi D_v L_v$$

El calculo de los coeficientes de descarga se llevo a cabo según los criterios que establecieron Annand y Roe [2], Woods [94], Wallace [95] y Cole [96], y que se resumen en las gráficas de la figura 6.6 y 6.7. El resultado de los cálculos se exponen en la gráfica 6.8., En la que se comparan el área real que se descubre con el levantamiento de la válvula en el motor DEUTZ-DITER, con el área de flujo efectiva.



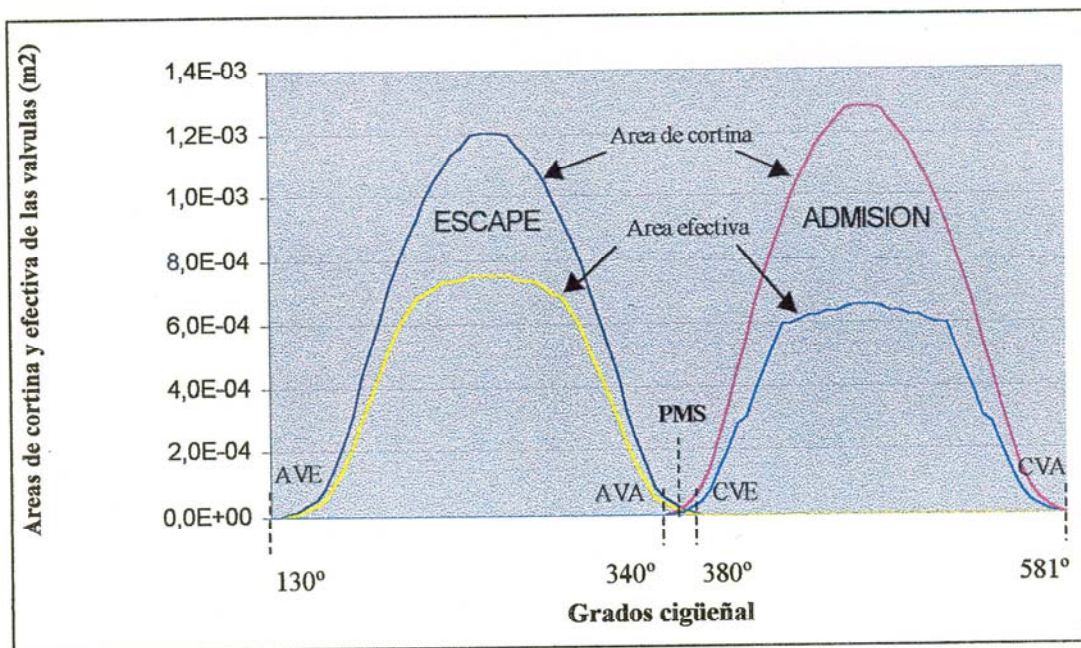


Figura 6.8.- Área efectiva de las válvulas de admisión y escape del motor calculadas en función de los coeficientes de descarga dados por las gráficas de las figuras 6.6 y 6.7.

6.2.1.3.-VALIDACION DEL MODELO POR COMPARACION CON LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES.

La validación de la capacidad predictiva del modelo se ha llevado a cabo a dos niveles. Primero se analiza y compara el rendimiento volumétrico para diferentes grados de carga. Posteriormente una validación mas detallada del proceso dinámico del gas se efectúa comparando la variación de la presión a la entrada de la pipa de admisión y a la salida de la de escape para un ciclo completo del motor para 2100 y 3000 rpm.

La figura 6.9 muestra los resultados obtenidos experimentalmente del rendimiento volumétrico para diferentes grados de carga. Se aprecia claramente la

disminución del mismo al aumentar la carga debido a una mayor transferencia de calor desde las paredes a la carga fresca con la consecuente caída del rendimiento volumétrico.

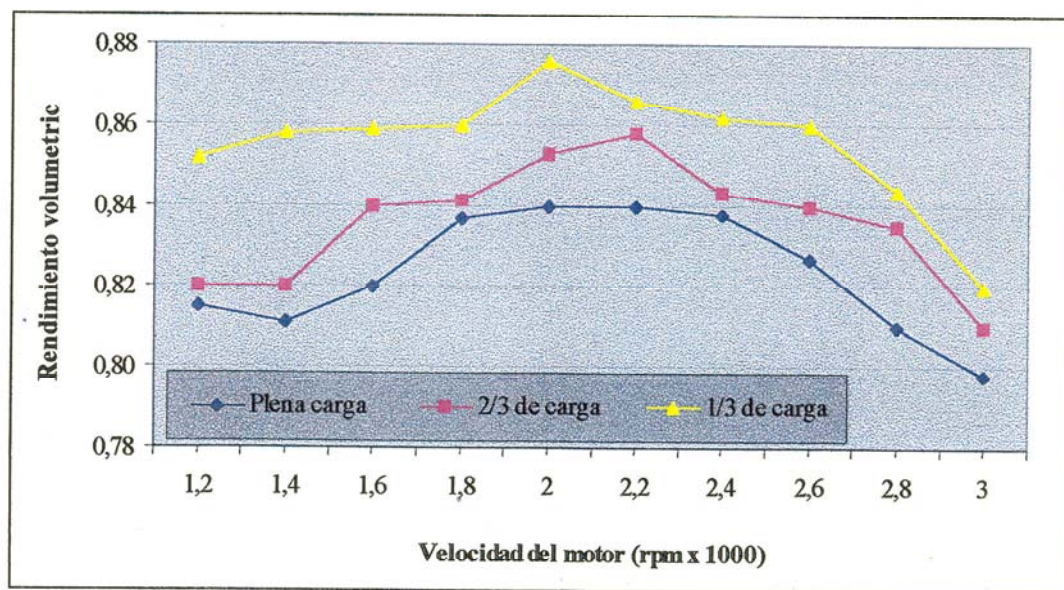


Figura 6.9.- Valores obtenidos experimentalmente del rendimiento volumétrico del motor ensayado para diferentes grados de carga.

En la figura 6.10 se comparan el rendimiento volumétrico medido (basado en la densidad ambiental) y calculado para plena carga. La discrepancia entre ambos resultados está entre un 5% y un 10% en todo el rango de velocidades. Esta diferencia máxima se alcanza en la zona 2500 a 3000 rpm., debido posiblemente a que las constantes en el término convectivo del modelo de Annand utilizado en nuestro caso, no son las correctas, y por lo tanto no cuantifica adecuadamente la cantidad de calor transferido al aire en la zona mencionada.

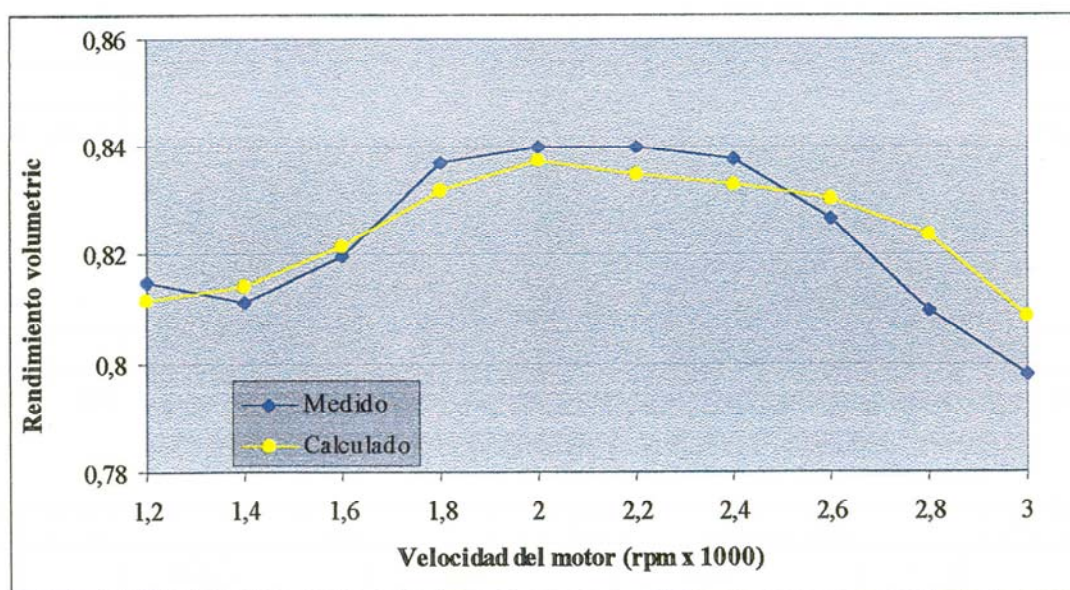


Figura 6.10.- Comparación de los valores experimental y calculado del rendimiento volumétrico, correspondientes al motor ensayado a plena carga.

Las figuras 6.11 y 6.13 comparan la variación de la presión calculada con la obtenida experimentalmente para el cilindro nº 1. Los puntos de medición se indican en la fig. 6.5 con P1 para la admisión y P2 para el escape. La figura 6.11 corresponde a la admisión para 1500 y 3000 rpm a plena carga, apreciándose que las predicciones del modelo concuerdan de manera aceptable con los resultados experimentales, especialmente durante el proceso de inducción al cilindro. Durante el resto del ciclo, el modelo predice algo de fluctuación en la amplitud de la presión, pero generalmente define correctamente los pulsos.

En cuanto a los conductos de entrada a los cilindros nº 2 y 3, y debido al hecho que la longitud que hemos asumido para cada uno de ellos es diferente del correspondiente al cilindro 1, la evolución de la presión es distinta con lo que también es diferente el régimen de giro al cual están sintonizados cada uno de ellos.

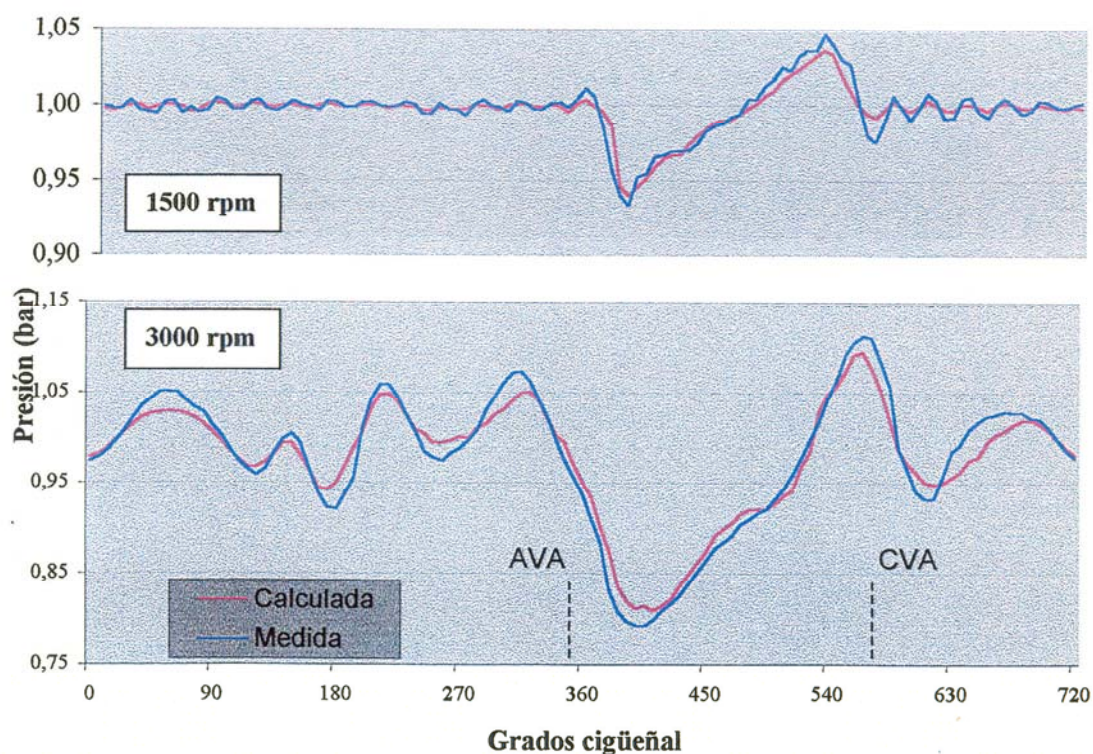


Figura 6.11.- Comparación de la evolución de la presión, medida y calculada en admisión (punto P1 fig. 6.5.)

Esto se comprueba según las predicciones del modelo para el rendimiento volumétrico de cada cilindro con el motor a plena carga como se ve en la figura 6.12.

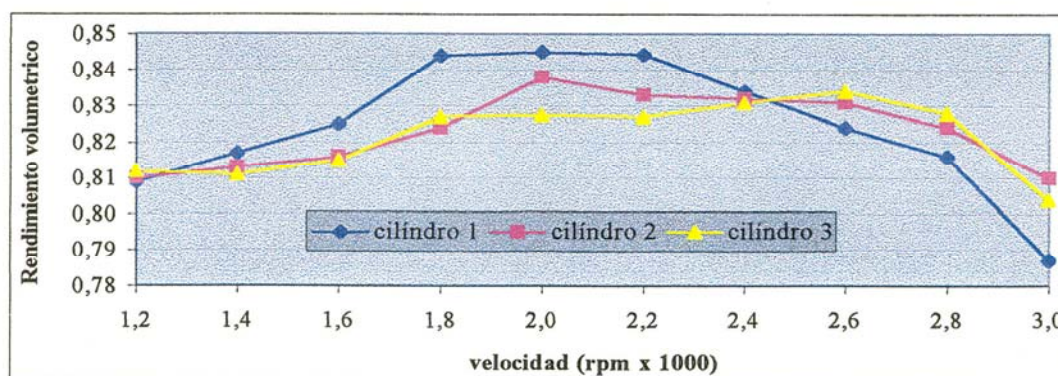


Figura 6.12.- Predicción del efecto producido por la diferencia de longitud asumida para los conductos de inducción directa a los cilindros, sobre el llenado de cada uno de ellos.

En la figura 6.13 se comparan los resultados medidos y calculados en la salida de la pipa de escape (punto P2 fig.6.5) para 2000 y 3000 rpm. Como se observa existe mejor acuerdo entre los resultados obtenidos para 3000 rpm, tanto en la situación de los pulsos de presión como en su amplitud.

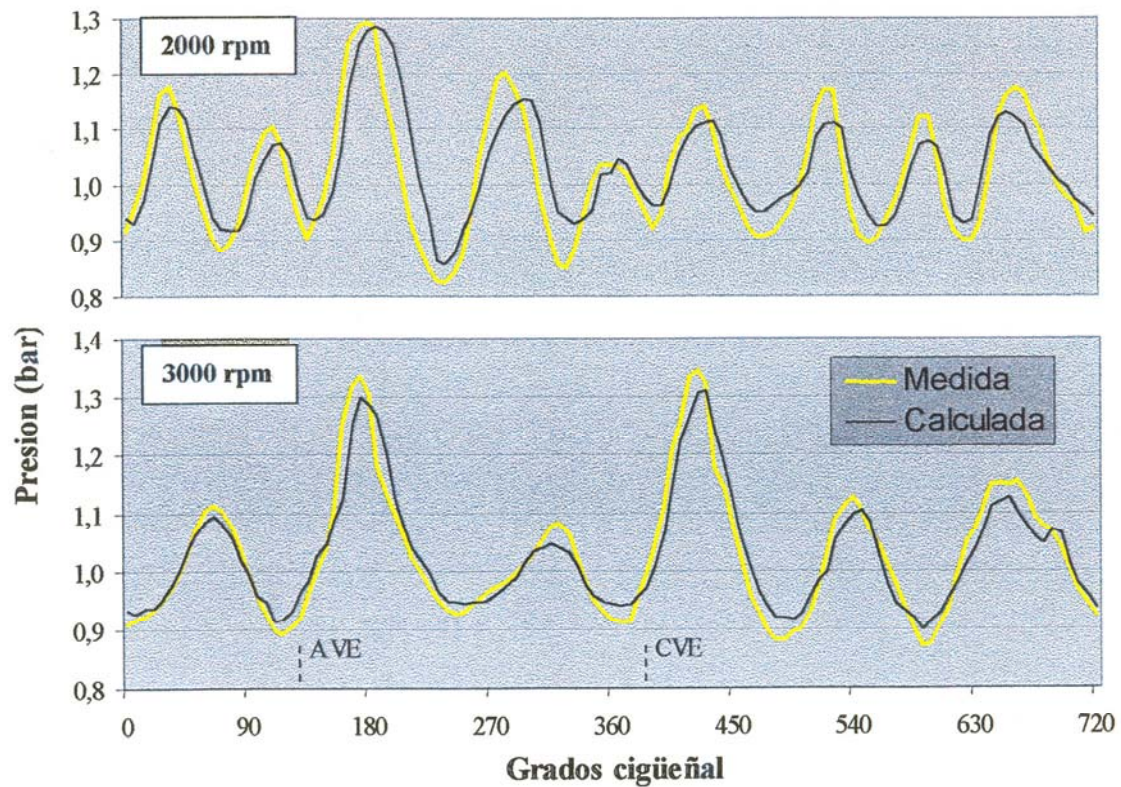


Figura 6.13.- Comparación de la presión medida y calculada en el conducto de escape (punto P2 fig.6.5)

La razón de este desacuerdo a velocidad media, esta **parcialmente** asociado a la incertidumbre de las dimensiones asumidas en el modelo de la fig.6.5 para la configuración de los colectores que simula la del motor real.

6.3.- APLICACION DEL MODELO A UN SISTEMA DE INDUCCION DE GEOMETRIA VARIABLE (SIGV).

En los motores de seis cilindros el valor máximo de rendimiento volumétrico tiende a producirse solamente a muy alto régimen. La utilización de cuatro válvulas por cilindro no ha paliado este problema, porque aunque aumenta la potencia máxima, la mejora del par a régimen medio y bajo es mínima. La solución la aporta la utilización de un sistema de inducción variable.

Con el fin de demostrar la capacidad del modelo como una potencial herramienta de diseño, presentamos un breve estudio paramétrico para mostrar los efectos del SIGV de la figura 6.14 sobre el rendimiento de un motor de gasolina de cuatro válvulas y seis cilindros.

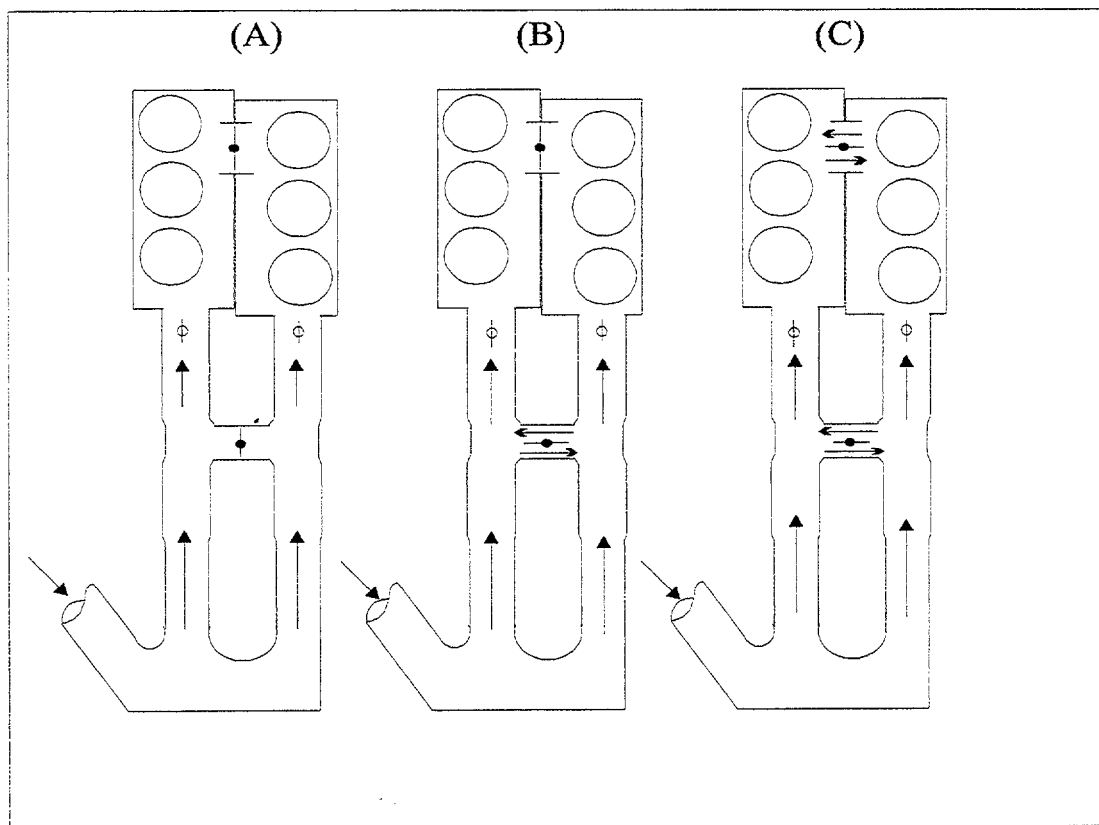


Figura 6.14.- Sistema de inducción de geometría variable para un motor V6 capaz de proporcionar la sintonización de forma separada a velocidades baja, media y alta.

El estudio de la dinámica de éste tipo de sistemas se analizó con detenimiento en el apartado 2.3.2. del capítulo II. Nos limitamos aquí a describir sucintamente el funcionamiento del SIGV de la figura 6.14.

(A).- Funcionamiento a bajo régimen. El sistema trabaja como dos colectores independientes de tres cilindros cada uno en los que la longitud a la que se alcanza la resonancia o sintonización de los conductos es grande, lográndose una mejora en el rendimiento volumétrico en el rango bajo de velocidad de giro.

(B).- Funcionamiento a régimen medio. La apertura de la válvula de separación entre los conductos que unen el exterior con los colectores, crea una cámara donde se amortiguan las pulsaciones transmitidas por los dos colectores debido a su diferencia de fase, dando lugar a que la presión en ése punto se mantenga casi estacionaria con lo que disminuye la longitud de sintonización de los conductos de alimentación, con la consiguiente mejora en el llenado del cilindro.

(C).- Funcionamiento a régimen alto. Se lleva a cabo con las dos válvulas abiertas y por tanto los dos colectores trabajan como uno solo. Esto da lugar a que se produzca una sola pulsación de resonancia en cada conducto de admisión directa al cilindro. La elección adecuada de la longitud de sintonización para una velocidad de giro, producirá el valor máximo del rendimiento volumétrico a ése régimen.

A efectos de calculo, la configuración del SIGV elegido para el estudio paramétrico, la simplificamos según el modelo de la figura 6.15.

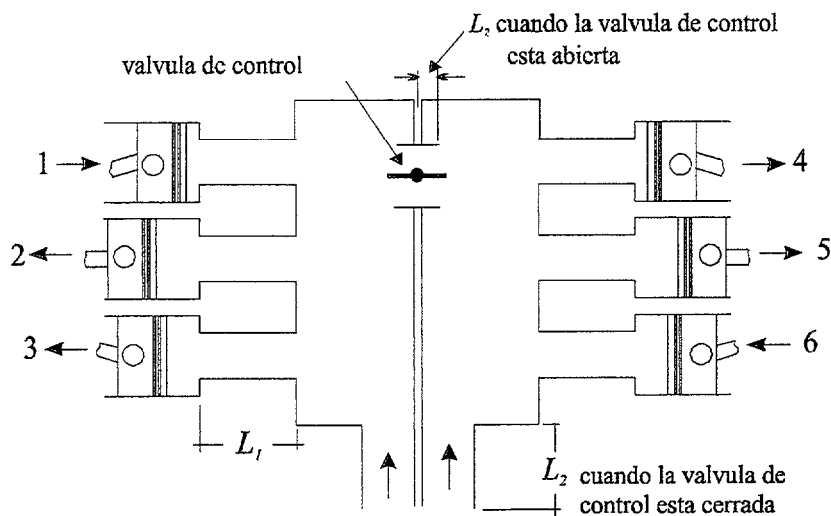


Figura 6.15.- Configuración del modelo de cálculo para el SIGV de la fig. 6.14

En la figura 6.16 se muestran los resultados obtenidos con el modelo de simulación en los casos en que la válvula de control está abierta y cerrada con SIGV y sin la utilización de éste, para un motor cuyas características se resumen en la tabla siguiente.

TABLA 6.3.- Especificaciones del motor utilizado en el estudio paramétrico.

TIPO DE MOTOR			V6 GASOLINA
DIAMETRO x CARRERA			87 x 83 mm.
RELACION DE COMPRESION			9.5
REGLAGES DISTRIBUCION	ADMISION	AAA	19°
		RCA	49°
	ESCAPE	AAE	55°
		RCE	13°
DIAMETRO VALVULAS	ADMISION		2 x 34 mm.
	ESCAPE		2 x 29,5 mm.

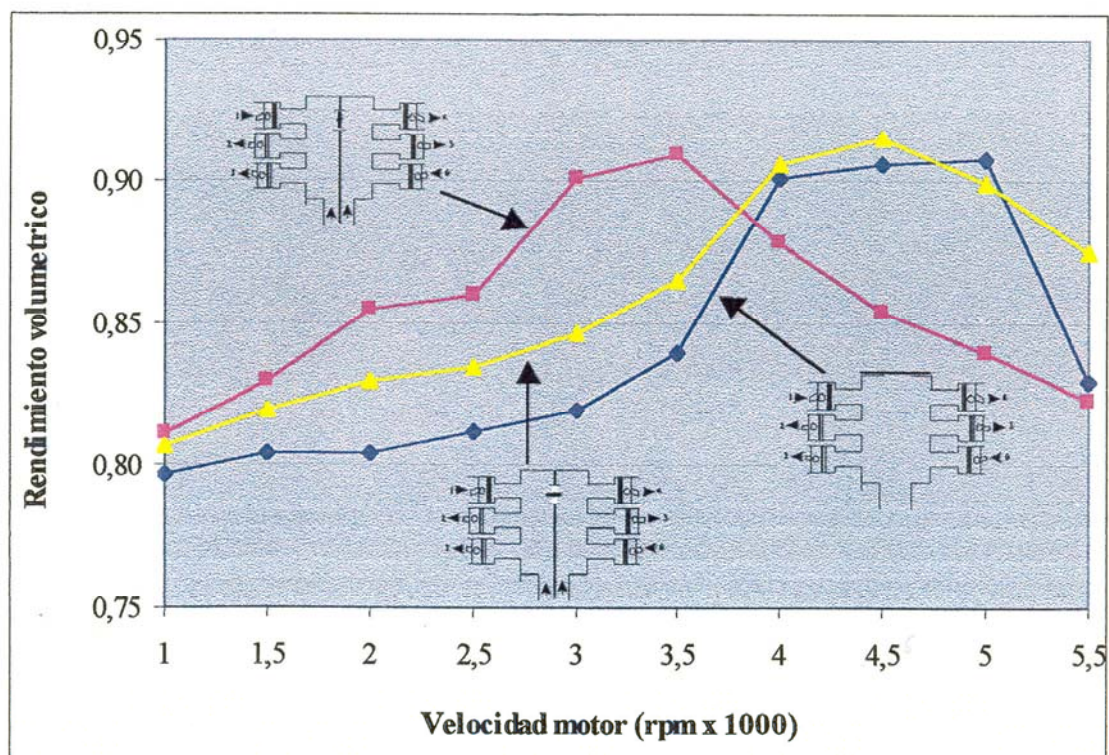


Figura 6.16. - Efecto del sistema de inducción variable sobre el rendimiento volumétrico

Se observa un incremento en el rendimiento volumétrico con el cierre de la válvula de control cuando se utiliza el SIGV, que dura aproximadamente hasta las 3500 rpm. Esto sugiere que a partir de esta velocidad y según los resultados obtenidos con el modelo, se debe abrir la válvula de control.

La evolución de la presión con el tiempo en las proximidades de la válvula de admisión, nos permite entender como varia el rendimiento volumétrico. Así en la figura 6.17 se puede observar como aumenta el pulso de la presión a 4500 rpm con la válvula abierta, justo hacia el final del proceso de inducción.

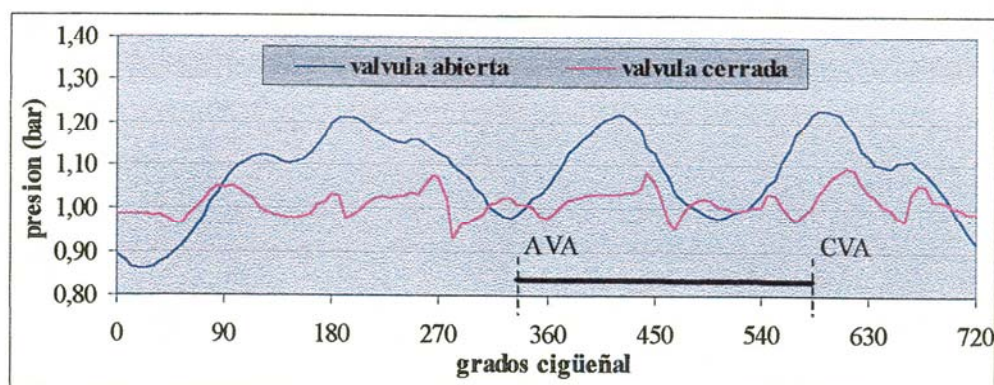


Figura 6.17.- Evolución de la presión en las proximidades de la válvula de admisión a 4500 rpm con la válvula de control abierta y cerrada.

En general, esto ocurre en todo el rango de velocidades entre 3500 y 5500 rpm, aunque no con la misma intensidad. Sucede lo mismo con la válvula cerrada para velocidades inferiores a 3500 rpm.

En la figura 6.18 se muestra la predicción de la variación del flujo másico en el cilindro numero uno cuando la válvula de control esta abierta con el motor girando a 3500 y 5000 rpm. Se observa claramente la desaparición del reflujo al inicio y final del proceso de llenado con el logro de la sintonización a velocidades altas.

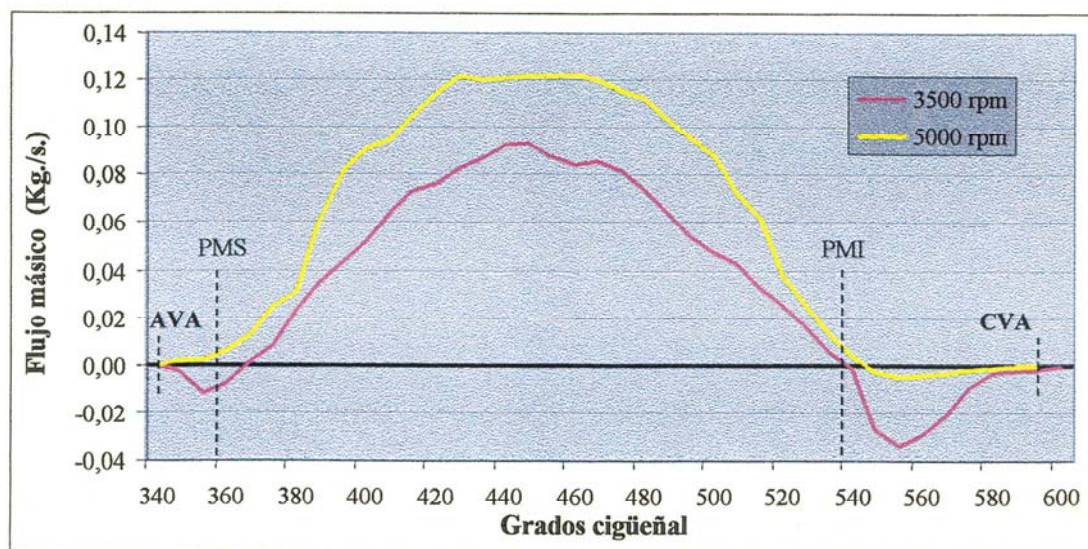


Figura 6.18.- Calculo de la evolución del flujo másico en la admisión durante un ciclo del motor por cilindro para 3500 y 5000 rpm. Con la válvula de control entre colectores abierta.

A través de este modelo de simulación se puede examinar la influencia que sobre el flujo en los MCI ejercen las características de los principales componentes de los sistemas de admisión y escape, tales como, longitud y diámetro de los conductos, dimensiones de los colectores o "plenums", distribución y levantamiento de válvulas etc.

Como ejemplo en la figura 6.19. se muestra el efecto que produce sobre el rendimiento volumétrico el diámetro del conducto de unión entre los dos colectores. Se aprecia que es este uno de los parámetros que afecta el llenado de los cilindros en el rango de velocidades de giro altas con la válvula de control entre colectores abierta.

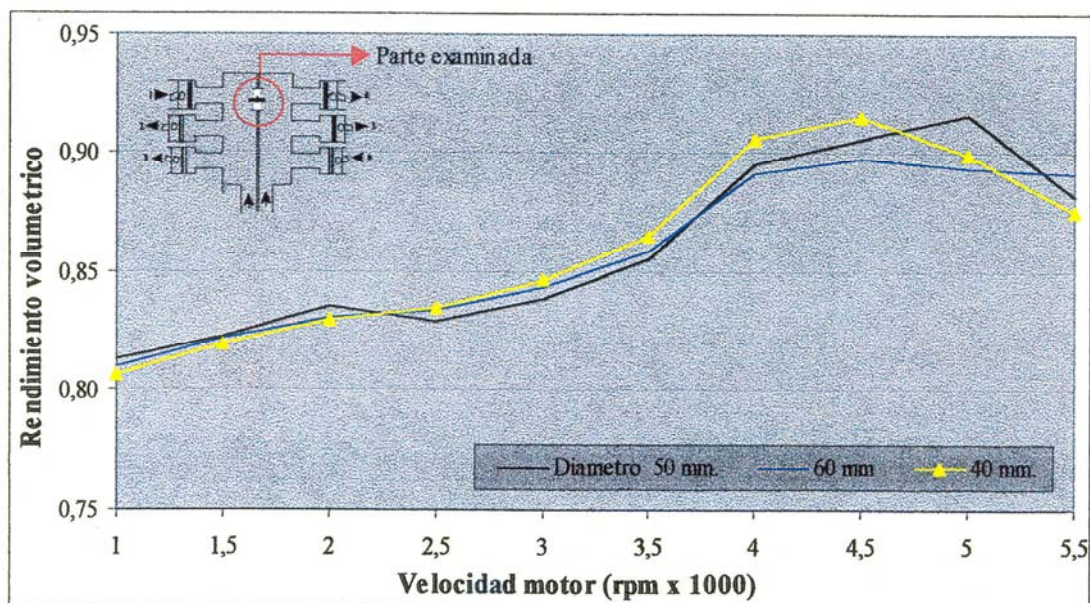


Figura 6.19.- Influencia de la variación del diámetro del conducto de conexión entre los colectores sobre el rendimiento volumétrico.

La figura 6.20 muestra el efecto de la longitud del conducto de admisión que alimenta a los colectores sobre la predicción de los valores del rendimiento volumétrico cuando la válvula de control está cerrada. Se aprecia que a régimen de velocidad medio, con el conducto de diámetro 70 mm. y longitud de 350 mm., se obtiene los mejores resultados.

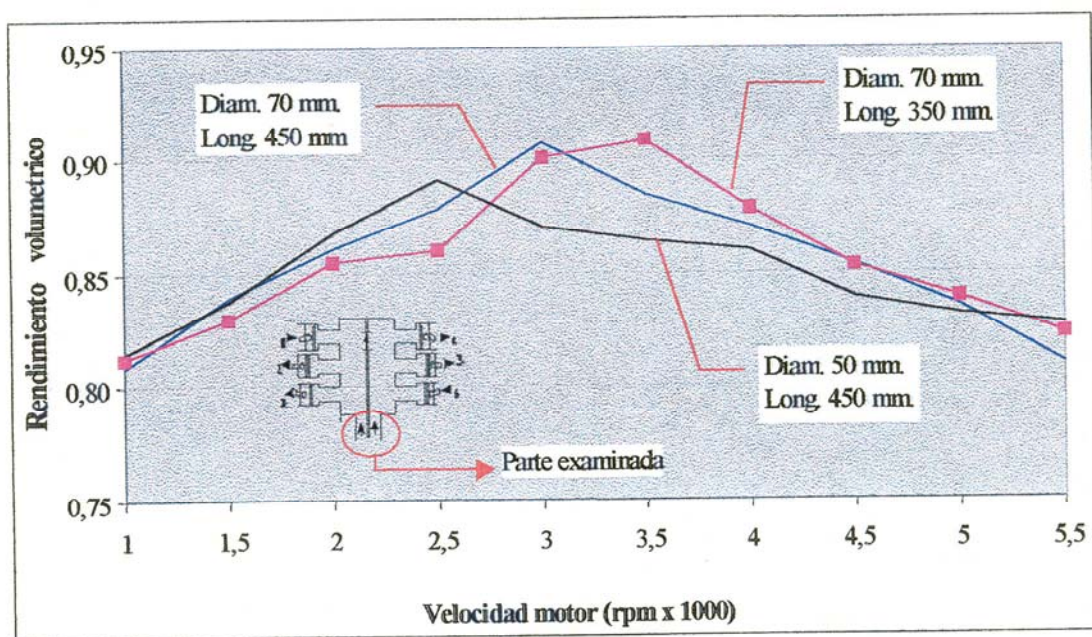


Figura 6.20.- Influencia del conducto que alimenta a los colectores sobre el rendimiento volumétrico.

6.4.- RECAPITULACION.

Se ha desarrollado un modelo de simulación para el proceso de renovación de carga de los MCI alternativos con un alto grado de aproximación entre los resultados obtenidos experimentalmente y los calculados, tanto para el rendimiento volumétrico, como para las fluctuaciones de la presión en diferentes localizaciones de los sistemas de admisión y escape.

Basado en el análisis de las características de las ondas de presión en la admisión de los MCI alternativos, descrito en el capítulo II, se ha aplicado un sistema de inducción de geometría variable a un motor de cuatro válvulas y seis cilindros. A través del estudio paramétrico realizado con el modelo se ha podido comprobar la mejora del rendimiento del motor a velocidades de giro media y baja, mientras mantiene las altas prestaciones propias de los motores con cuatro válvulas por cilindro, en el rango de velocidades mas elevado.

Hemos confirmado así que este modelo es una herramienta efectiva para el estudio analítico de las características de la presión dinámica en cada componente de los sistemas de admisión y escape, facilitando el diseño y desarrollo de los mismos.

CAPITULO VII.

CONCLUSIONES.

7.1.- CONCLUSIONES.

Se ha resuelto el sistema hiperbólico unidimensional de leyes de conservación asociado al flujo no estacionario de un fluido compresible en un conducto de sección variable, teniendo en cuenta la fricción y la transferencia de calor.

En nuestra opinión, y los resultados experimentales así parecen demostrarlo, el método de **Random Choice** o de **Glimm** utilizado, es capaz de encontrar, a través del muestreo de las soluciones explícitas de las ondas, soluciones numéricas aproximadas dependientes del tiempo a las discontinuidades que se producen en el flujo descrito.

Se ha comprobado que las soluciones aproximadas son razonablemente precisas, tanto en regiones donde el flujo es uniforme, como en las que están presentes las discontinuidades no lineales, que son calculadas con estabilidad y precisión y transportadas a lo largo de las características por saltos precisos a la velocidad correcta.

La efectividad de esta técnica esta basada a juicio del autor en la aportación novedosa (no por la técnica en sí, sino por la metodología de la aplicación) de:

- a) Un procedimiento de muestreo de la solución al problema de Riemann mas precisa y seguro, basado en la secuencia de distribución uniforme de Van der

Corput, con el que se reduce de forma notable la fluctuación de las soluciones causada por los errores introducidos en el muestreo. Se obtiene de esta forma una correcta representación de la propagación de las ondas continuas, particularmente las producidas por las interacciones no lineales de otras ondas.

b) La generalización del problema de Riemann para la dinámica de flujo de gases en conductos de sección variable por medio de una técnica de descomposición en dos pasos (*operator splitting*) como base para la generalización del propio método de Glimm, haciendo posible su aplicación a sistemas hiperbólicos de leyes de conservación no homogéneos, manteniendo las ventajas

Se ha definido una técnica general para la conexión de los valores calculados en el interior de los conductos por medio del método de Glimm, y los obtenidos en los contornos a través del método de las características, por ser este capaz de transmitir información entre nodos por medio de ondas.

La comprobación experimental, sin ser exhaustiva, ha puesto de manifiesto la bondad del método de Glimm generalizado y el modelo de simulación desarrollado, y basado en este método, en el cálculo del proceso de renovación de la carga de los MCI alternativos, con geometría compleja en los sistemas de admisión y escape.

Se ha confirmado a través del estudio paramétrico realizado a un motor de seis cilindros con un sistema de inducción de geometría variable, que el modelo de simulación desarrollado es una herramienta efectiva para el análisis de las características de la presión dinámica en cada componente de los sistemas de admisión y escape, de forma que se facilite el diseño y desarrollo de los mismos.

7.2.- DESARROLLO FUTURO.

Entre las líneas posibles de continuación de este trabajo se proponen las siguientes:

- 1) Investigar la viabilidad de la utilización de un *operator splitting* en la construcción de métodos bidimensionales a partir del unidimensional desarrollado en este trabajo.
- 2) Adaptación y aplicación del modelo de simulación a motores turbosobrealimentados.
- 3) Adaptación del modelo para el análisis y simulación de las condiciones de operación transitoria de los MCI alternativos.
- 4) Validación experimental de los modelos anteriores.

REFERENCIAS

- [1] HORLOCK y WINTERBONE.- “*The Thermodynamics and Gas Dynamics of Internal Combustion Engines* “. Vol I y II, Clarendon Press Oxford (1986)
- [2] ANNAND, W., ROE, G.- “*Gas flow in the internal combustion engine*” G.T. Somerset, (1974)
- [3] BRANDSTÄTTER, W., JOHNS, R.J.R.- Computer simulation of external and internal turbulent flows in the automotive industry. *Proc. of the Int. Conf. in Zurich*. (1986).
- [4] BRANDSTÄTTER W.- Recent progres in fluid flow and combustion simulation in the engine R&D enviromment. *ATA Ingegneria Automotoristica*, vol. 44, nº 4 (1991).
- [5] LESCHZINGER, M.A., DIMITRIADES, K.- Numerical simulation of three-dimensional turbulent flow in exhaust-manifold junctions. *Proceedings of IMechE. International Conference on Flows in ICE-III. ASME Miami-Beach* (1985).
- [6] DIMITRIADES, W., et al.- Computation of three dimensional flow in manifold type junctions. *International Simposium on Flows in I.C.E.- III. ASME*, Miami Beach, (1985).

[7] SEPPEN, J.J. Intake and exhaust processes in combustion engines development of "SIFLEX". *Numerical Simulation of Fluid Flow and Heat/mass Transfer Processes*. Springer-Verlag. (1986).

[8] GOSMAN, A.D., AHMED, A.M.- Measurement and multidimensional prediction of flow in an axymetric port/valve assembly. *SAE paper* 870592.

[9] ROSTEN, H.L., SPALDING, D.B.- *Phoenics-84 and beyond*.

[10] CHAPMAN, M.- Two dimensional numerical simulation of inlet manifold flow in a four cylinder combustion engine. *SAE paper* 790244

[11] TOSA, Y., SHIMODA, K.- Calculation of two-dimensional unsteady flows of inlet pipe system and its application for V-8 resonant intake system. *International Symposium on Flows in I.C.E.- III. ASME*, Miami Beach, (1985).

[12] ZHAO, Y., WINTERBONE, D.E.- A study of multi-dimensional gas flow in engine manifolds. *Proc. of IMechE*. vol. 208 (1994)

[13] ZHAO, Y., WINTERBONE, D.E.- Numerical simulation of three-dimensional turbulent flow in exhaust manifold junctions. *Proc. of IMechE. Int. Conf. on Computers Engine Technology. Paper* C430/039. (1991).

[13] WINTERBONE, D.E.- The application of gas dynamics for the design of engine manifolds. *Congreso de Modelado en Motores de Combustion Interna*, CMT 8701.

[15] MARGARY, R., BORETTI, A., MASCELLINI, R.M.- L'impiego dei super-calcolatori in Fiat: "La fluidodinamica computazionale". *ATA- Ingegneria Automoto-ristica*, vol. 44 (1991).

- [16] BORETTI, A.A., LISBONA, M., NEBULONI, P.- Numerical modelling of three-dimensional flows within the cilinder of a 4 valve spark ignition engine. *ATA-Ingegneria Automotoristica*, vol. 46, n°4. (1993)
- [17] HEYWOOD, J.B. "*Internal Combustion Engine Fundamentals*". McGraw-Hill, New York, (1988).
- [18] FUJIEDA, M. et al.- Analisis of gas flow in teh Intake Manifold of Gasoline Engines. *J.S.A.E. Review*, vol. 12, n°1.
- [19] WINTERBONE, D.E. et al.- Rapid wave action simulation technique for intake manifold design. *SAE paper* 900676.
- [20] WINTERBONE D.E. et al.- The accuracy of calculating wave action in engine intake manifolds. *SAE paper* 900677.
- [21] LIGHTHILL, L.- "*Waves in fluids*". Cambridge University Press (1978).
- [22] CSER G.- Some results of combined charging applications. *Proc. Inst. Mech. Engrs., Conf. on Turbochargin and turbo chargers*, C64/78.
- [23] RIEMANN, B.- Uber die fortpflanzung ebener Luftwellem von endlicher schwingungsweife. *Bott. Abh 8 (Math)*, (1885).
- [24] DE HALLER, R.- The aplication of a graphic method to some dynamic problems in gases. *Sulzer Tech. Rev.* 1, (1945).
- [25] JENNY, E.- Unidimensional transient flow with consideration of fricción heat transfer and change of section. *Brown Bobery Review*, 37 (1950).

- [26] HARTREE, D.R.- . Some practical methods of using characteristics in the calculation of non-steady compressible flow. *Harvard U. Report L.A.-HU-1*. (1953).
- [27] BENSON, R., GARG, R., WOOLLATT, D.- A numerical solution of unsteady flow problems. *Int. J. Mech. Science* 6 (1964).
- [28] BINGHAM, J.F., BLAIR G.P.- An improved branched pipe model for multi-cylinder automotive engine calculations. *Proc. Inst. Mech. Engrs.* 199, N° D1 (1985).
- [29] BENSON, R.- A comprehensive digital computer program to simulate a compression ignition engine including intake and exhaust systems. *SAE Paper* 710173.
- [30] LOW, S.C., BARUAH, P.C.- A generalized computer aided design package for internal combustion engine manifold system. *SAE paper* 810498.
- [31] WATSON, N., JANOTA, M.R.- Non steady flow in an exhaust system with pulse converter junction. *Inst. Mech. Engrs. Conf. Internal Flows, paper* 27, (1971).
- [32] BLAIR, G.P.- Prediction of two-cycle engine performance characteristics. *SAE paper* 760645.
- [33] SHIMAMOTO, Y., OKA, M., TANAKA, Y.- A research on inertia charging effect on intake system in multi-cylinder engines. *Bulletin Japan Soc. Mech. Engrs.* 21, N° 153, (1978).
- [34] DESANTES, J.M., BOADA, F., CORBERAN, J.M.- Exhaust pipe desing method for optimization of the scavenging process. *SAE paper* 850083.
- [35] SOD, G.A.- A survey of several finite difference methodsfor systems of non-linear hyperbolic laws. *J. Comput. Phys.* 27 (1978).

- [36] GODUNOV, S.K.- Finite difference method for numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics. *Mat. Sbornik* 47 (1959).
- [37] RICHTMYER, R.D.- A survey of difference methods for non-steady fluid dynamics. *NCAR Technical Notes*. Boulder, Colo. (1962).
- [38] HYMAN, J.M.- Self-adjusting grid methods for one-dimensional hyperbolic conservation laws. *Los Alamos Scientific Laboratory Report* N° LA-9105 (1983).
- [39] M'CORMACK, R.W.- Numerical solution of the interaction of a shock wave with a laminar boundary layer. *Lecture Notes in Physics*, vol. 8, *Springer Verlag*.
- [40] RICHTMYER, R.D., MORTON, K.- "Difference Methods for Initial-Value Problem". 2nd. ed., Interscience N.Y. (1967).
- [41] HARTEN, A., ZWAS, G.- Self-adjusting hybrid schemes for shock computations. *J. Comp. Phys.* 9 (1972).
- [42] CHORIN, A.J.- Random choice solutions of hyperbolic systems. *Journal Comp. Phys.* 22 (1976).
- [43] GLIMM, J.- Solutions in the large for non-linear hyperbolic systems of conservation laws. *Comm. Pure Appl. Math.* 18. (1965).
- [44] VON NEWMAN, J., RICHTMYER, R.- A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks. *J. Appl. Phys.* 21 (1950)
- [45] LAPIDUS, A. J. Computation of radially symmetric shocked flows. *J. Comp. Phys.* 8 (1971).

- [46] BORIS, J.P., BOOK, D.L.- Flux-corrected transport. *J. Comp. Phys.* 23, (1973)
- [47] HARTEN, A.- The method of artificial compression. *AEC R&D report COO-3077-50, N.Y. University.*
- [48] POLONI, M., WINTERBONE, D., NICHOLS, J.- Comparison of unsteady flow calculations in a pipe by the method of characteristics and the two-step differential Lax_wendroff method. *Int. J. Mech. Sci.* 29 (1987).
- [49] TAKIZAWA, M., et al.- A study of gas schange process simulation of an automotive multi-cylinder internal combustion engine. *SAE paper* 820410.
- [50] AZUMA, T., YURA, T.- Characteristics of exhaust gas pulsation of constant presure turbocharged diesel engines. *ASME J. Engng. Power* 102. (1980).
- [51] MEISNER, S., SORENSON, S.C.- Computer simulation of intake and exhaust manifold flow and heat transfer. *SAE paper* 860242.
- [52] CHAPMAN, M.- FRAM- Nonlinear algorithms for the continuity ecuation. *Journal Comp. Phys* 44, (1981).
- [53] WALTER, G., CHAPMAN, M.- Numerical simulation of the exhaust flow from a single cylinder of a two cycle engine. *SAE paper* 790243.
- [54] CHAPMAN, M., NOVAK, J.M., STEIN, R.- Numerical modeling of inlet and exhaust flows in multi-cylinder internal combustion engine. *ASME paper* 83-WA/DSG-14. (1983).
- [55] CORBERAN, J.M., GASCON, M.- TVD schemes for the calculation of flow in pipes of variable cross-section. *Math. Comput. Modelling* Vol. 21, nº 3 (1995).

[56] CORBERAN, J.M., PEREZ, A.- Desarrollo de un nuevo esquema para el calculo del flujo no estacionario unidimensional en conductos de sección variable. *II Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería*, Vol. II, (1993).

[57] HARTEN, A.- High resolution schemes for hiperbolic conservation laws. *J. Comput. Physics*, Vol. 49, (1983).

[58] TAKEYAMA et al.- Gas exchange simulation model for improving charging efficiency of four valve ICE. *IMechE*. C28/87.

[59] ADACHI, T., TUJIMURA, H., IMAIZUMI, M.- A numerical method of unsteady flow analisys. *Bulletin of the JSME*, vol. 20, nº 148 (1977).

[60] CHORIN, A.J.- Random choice methods whith applications to reacting gas flow. *Journal Comp. Phys.* 25, (1977).

[61] SOD, G.A.- Automotive engine modeling with hybrid random choice method. *SAE paper* 790242.

[62] SOD, G.A.- Automotive engine modeling with hybrid random choice method. II. *SAE paper* 800288.

[63] CONCUS, P., PROSKUROWSKI, W.- Numerical solution of a nonlinear hyperbolic equation by a random choice method. *J. Comp. Phys.* 30 (1979)

[64] IWAMOTO, J., DECKKER, B.E.- An experimental study of flow through a rotating disc valve. *SAE paper* 841092.

[65] IWAMOTO, J., DECKKER, B.E.- Application of random choice method to the calculation of unsteady flow in pipes. *SAE paper* 851561.

A-4.- FRENO DINAMOMETRICO.

MARCA:	TECNER E-135
DESCRIPCION:	FRENO DINAMOMETRICO DE CORRIENTES DE FOUCOLT REFRIGERADO POR AGUA.
REGULACION:	A VUELTAS CONSTANTES DE 0-9600 RPM. A PAR CONSTANTE (según curva de freno). POR INTENSIDAD DE EXCITACIÓN. MIXTO.
POTENCIA DE FRENADO:	135 kW. (constante max. entre 3000 y 9600 rpm)
MEDIDA DE PAR:	CELULA DE CARGA TECNER 100/200 CON RESOLUCION DE 0.1 Nm.

- [66] SPALDING, D., B.- A procedure for calculating the unsteady one-dimensional flow of a compressible fluid, with allowance for the effects of heat transfer and friction. *Report N° UF/TN/D/2, Imperial College*, (1969).
- [67] JONSSON, V., K., MATTHEUS, L., SPALDING, D., B.- Numerical solution procedure for calculating the unsteady one dimensional flow of compressible fluids. *ASME Paper N° 73-FE-30*.
- [68] COTTER, J.- Gas dynamics studies of stationary wave engine cell. *University of London Ph. D. Thesis*, (1965).
- [69] KASTNER, L., J.- Induction ramming effects in single cylinder four-stroke engines. *Proceedings of IMechE*. Vol. 153, (1945).
- [70] ENGELMAN, H., W.- Desing of a tuned intake manifold. *ASME Paper N° 73-WA/DPG-2*.
- [71] PROSSE, T., G.- Induction ramming a motored high speed four-stroke reciprocating engine influence of inlt port pressure waves on volumetric efficiency. *Proceedings of IMechE*. Vol. 188, (1974).
- [72] HATAMURA et al.- Mazda's new V-6 gasoline engine and its innovative induction system. *SAE Paper N° 871977*.
- [73] VORUM, P., C.- Short pipe manifold desing for four-stroke engines. Part II. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers. Journal of Engineering for Power*, Vol. 102, (1980).
- [74] BINGHAM, J., F.- Intake system desing using a validated internal combustion engine model. *Comp. in Engine Technology Conference. IMechE Paper N° C25/87*

- [75] TAYLOR, C., F.- "*The Intrnal Combustion Engine in Theory and Practice*". Vol. I, MIT Press, Cambridge, Massachusets (1977).
- [76] FUKUTANI, I.; WATANABE, E.- An analysis of th volumetric effieience characteristics of four-stroke cycle engines using the mean inlet Mach number. *SAE Paper* 790484.
- [77] OLEINIK, O., A.- Discontinuous solutions of nonlinear differential equations. *Amer. Math. Soc. Trans. Service* 2.26.95.
- [78] COURANT, R.; FRIEDRICHS, K., O.- "*Supersonic Flow and Shock Waves*". *Interscience, New York*, (1948).
- [79] COLELLA, P.- The effects of sampling and operator splitting on the accuracy of Glimm scheme. *Ph. D. Tesis. University of California, Berkeley* (1978).
- [80] COLELLA, P.- Glimm's method for gas dynamics. *Siam J. Sci. Stat. Comput* 3.
- [81] GLIMM, J.; MARSHALL, G.; BLOHR, B.- A generalized Riemann problem for quasi-one-dimensional gas flows. *Adv. Appl. Math.* 5 (1984).
- [82] LIU, T., P.- The deterministic version of Glimm's schme. *Comun. Pure Appl Math.* 19 (1977).
- [83] HAMMERSLEY, J.; HANDCOMB, D.- "*Monte Carlo Methods*".
- [84] FERGUSON, C., R.- "*Internal Combustion Engins. Applied Thermosciences*". Jhon Wiley & Sons. (1986).
- [85] CATON, J.; HEYWOOD, J. B.- An experimental an analitical study of heat transfer in an engine exhaust port. *Int. J. Heat Mas Transfer, Vol. 24, Nº 4* (1981).

- [86] MALCHOW, G.; SORENSON, S.- Heat transfer in the straight section of an exhaust port of a spark ignition engine. *SAE Paper* 790309.
- [87] LEER, B.- Towards the ultimate conservative difference scheme. A second order sequel to Godunov's methods. *J. Comput. Phys.* 32 (1979).
- [88] SHAPIRO, A. H.- "*The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow*". Vol. I y II, Jhon Wiley.
- [89] POLONI, M., WINTERBONE, D., NICHOLS, J.- Calculation of pressure and temperature discontinuity in a pipe by the method of characteristics and two-step Lax-Wendroff method. *ASME, Int. Symposium on Flows in ICE. FED Vol* 62.
- [90] FOA, J., V.- "*Elements of Fligh Propulsion*". Jhon Wiley N.Y. (1960)
- [91] RUDINGER, G.- "*Nonsteady Duct Flow*". Dover, N.Y. (1969).
- [92] REYES, M.,A.- A short course on gas exchange proccess in ICE. *Commet Programme. U.P. Valencia* (1995).
- [93] WOSCHNI, G.- A universally applicable equation for the instantaneus heat transfr coefficient in the internal combustion engines. *SAE Paper* 670931.
- [94] WOODS, W. A., KHAN, S. R.- An experimental study of flow through poppet valves. *Proc. Instn. Mech. Engrs.* Vol. 180, pt. 3N (1966).
- [95] WALLACE, W. B.- High output medium speed diesel engine air and exhaust system flow losses. *Proc. Instn. Mech. Engrs.* Vol. 182, pt. 3D. (1968).

[96] COLE, B. N., MILLS, B.- The theory of sudden enlargements applied to poppet exhaust valve, with reference to exhaust pulse scavenging. *Proc. Instn. Mech. Engrs.*, pt. 1B (1953).

APENDICE A

CADENA DE MEDICIONES.

A-1.- CAPTADORES DE PRESION.

PRESION EN CAMARA:

TRANSDUCTOR PIEZOELECTRICO CAPACITIVO, marca AVL, modelo 8QP500CA.

RANGO DE MEDIDA DE PRESIONES 0-150 bar

RESOLUCION 0,03 bar

SENSIBILIDAD A LA ACELERACION 0,001 bar/g.

SENSIBILIDAD (característica negativa) -12 pC/bar

RANGO DE TEMPERATURAS -50 °C / 275 °C

INCLUYE: sistema de refrigeración por agua AVL mod. ZP91.00 para cuatro captadores

PRESION EN COLECTOR DE ADMISION:

TRANSDUCTOR PIEZORRESISTIVO, marca PCB, modelo 112A20.

RANGO DE MEDIDA DE PRESIONES 0-2 bar

RESOLUCION 0,0003 bar

SENSIBILIDAD A LA ACELERACION 0,002 bar/g.

SENSIBILIDAD (característica negativa) -4,19 pC/bar

RANGO DE TEMPERATURAS -100 °C / 275 °C

PRESION EN COLECTOR DE ESCAPE:

TRANSDUCTOR PIEZOELECTRICO, marca PCB, modelo 112A.

RANGO DE MEDIDA DE PRESIONES 0-5 bar

RESOLUCION 0,006 bar

SENSIBILIDAD A LA ACELERACION 0,002 bar/g.

SENSIBILIDAD (característica negativa) -10 pC/bar

RANGO DE TEMPERATURAS -100 °C / 400 °C

INCLUYE: sistema de refrigeración por agua PCB mod. 64M37.

A-2.- AMPLIFICADOR DE CARGA.

MARCA:	ENDEVCO 104
NUMERO DE CANALES POR AMPLIFICADOR:	2
RANGO DE GANANCIA:	0.1-100
PRECISION EN LA GANANCIA:	$\pm 2.0\%$ a 1 kHz.
RANGO DE TENSIONES DE SALIDA (depende de la sensibilidad de la carga):	1-10000 mV/g
RUIDO RESIDUAL:	≤ 0.02 pC rms + 0.006 pC por cada 1000 pF de la fuente
ALIMENTACION:	± 15 V DC $\pm 5\%$, 60 mA. de intensidad máxima
CONECTORES:	INPUT 10-32 Microdot / OUTPUT BNC coaxial

A-3.- SISTEMA DE ADQUISICION DE DATOS.

MARCA:	NICOLET 500
NUMERO DE CANALES:	4(independientes, ampliables a 24)
FRECUENCIA DE MUESTREO MAXIMA:	1 MHz (1 μ s/muestra)
FRECUENCIA DE MUESTREO MINIMA:	0.1 Hz (10 μ s/ muestra)
NUMERO MAXIMO DE PUNTOS POR RGISTRO	65536
RESOLUCION EN AMPLITUD:	12 bits
RANGO DE TENSIONES DE LECTURA:	30 mV a 12 V
RUIDO DE FONDO:	30÷120 mV $\pm$ 0.150 % fondo escala 300÷12 mV $\pm$ 0.030 % fondo escala
TRIGGER INTERNO:	si
ALMACENAMIENTO:	depende del PC que lo controle