UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA

DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA Y SISTEMAS

TESIS DOCTORAL

CUANTIFICACIÓN DE IMÁGENES DIGITALES

JULIO ESCLARÍN MONREAL

Las Palmas de Gran Canaria, febrero de 1996

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

40/1995-96

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA
UNIDAD DE TERCER CICLO Y POSTGRADO

Reunido el día de la fecha, el Tribunal nombrado por el Excmo. Sr. Rector Magfco. de esta Universidad, el/a aspirante expuso esta TESIS DOCTORAL.

Terminada la lectura y contestadas por el/a Doctorando/a las objeciones formuladas por los señores jueces del Tribunal, éste calificó dicho trabajo con la nota de APTO - CUM LAUDE

Las Palmas de Gran Canaria a 26 de abril de 1996.

El/a Presidente/a: Dr. D.Roberto Moreno Díaz,

El/a Secretario/a: Dr. D. Luis Mazorra Manrique de Lara,

El Vocal: Dr. D. José Miguel Pacheco Castelao,

El Vocal: Dr. D. Rachid Deriche,

El Vocal: Dr. D. Christian López,

El/a Doctorando/a: D. Julio Esclarín Monreal,

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA

DOCTORADO EN INFORMÁTICA

DEPARTAMENTO DE: INFORMÁTICA Y SISTEMAS

PROGRAMA DE: PERCEPCIÓN ARTIFICIAL Y APLICACIONES

CUANTIFICACIÓN DE IMÁGENES DIGITALES

Tesis Doctoral presentada por D.
JULIO ESCLARíN MONREAL

Dirigida por los Drs. D.
LUIS ÁLVAREZ LEÓN
JEAN-MICHEL MOREL

Los Directores

El Doctorando

Las Palmas de Gran Canaria a 14 de febrero de 1996

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar mi agradecimiento a los Profesores Don Luis Álvarez León y Don Jean-Michel Morel, codirectores de esta Tesis, ya que sin su guía y continua atención, este trabajo no hubiera sido posible.

Así mismo, quiero agradecer al Profesor Don Roberto Moreno Díaz, director del programa de doctorado, las facilidades que me ha dado para su lectura.

También mi agradecimiento al grupo de investigación Análisis Matemático de Imágenes por sus consejos y apoyo, especialmente a Agustín Trujillo Pino, por la paciencia, amabilidad y eficacia con que ha resuelto todos los problemas informáticos que han ido surgiendo.

Parte de este trabajo se ha realizado en el laboratorio C.E.R.E.M.A.D.E. de la Universidad de París IX (Dauphine). Vaya mi agradecimiento a todos sus componentes, especialmente a Freddy Paiva, Oscar Barraza y Jean-Pierre D'Alès De Corbet que hicieron que mi estancia fuera tan amena como fructífera.

Y por último, y no por ello menos importante, vaya mi agradecimiento al Servicio de Radiología Vascular Intervencionista del Hospital Nuestra Señora del Pino de Las Palmas de Gran Canaria, sin cuya aportación esta Tesis se hubiera visto privada de sus mejores imágenes.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

ÍNDICE

I INTRODUCCIÓN 5

1 INTRODUCCIÓN 1

II Estado Actual Del Tema 13

2 CAPÍTULO 1 15

Cuantificación 15

Ecuaciones en Derivadas Parciales 24

Soluciones de Viscosidad 31

Programación Dinámica 36

III MODELIZACIÓN 43

3 CAPÍTULO 2 45

Descripción del Problema 45

IV ANÁLISIS MATEMÁTICO 51

4 CAPÍTULO 3 53

Análisis Matemático del Modelo 53

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Estados Asintóticos 82

V Análisis Numérico 91

5 CAPÍTULO 4 93

Cuantificador Óptimo 93

Discretización Del Operador Diferencial 108

Algoritmo y Estabilidad 113

VI Resultados Experimentales 119

6 CAPÍTULO 5 121

Cuantificación y eliminación de ruido 121

Contrastación 138

Segmentación 142

VII CONCLUSIONES 147

VIII REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 153

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

INTRODUCCIÓN

La demanda del manejo de imágenes en forma digital se ha incrementado enormemente en los últimos años. Gracias al aumento de rendimiento y a las significativas reducciones en el costo de escaneado de imágenes, fotografías, texto impreso y otros medios, éstos pueden pasarse fácilmente a forma digital (*digitalización de imágenes).* La adquisición directa de imágenes digitales se ha hecho más común debido a las mejoras de sensores y electrónicas asociadas; el uso de imágenes vía satélite y la llegada al mercado de las nuevas cámaras digitales de fotografía son buenos ejemplos. Además, en Medicina, muchas especialidades como la Radiología, hacen uso de imágenes digitalizadas directamente, como las resonancias magnéticas, las tomografías, algunas angiografías etc.

Por otra parte, las imágenes generadas por ordenador (*imágenes sintéticas)* son cada vez más frecuentes. El uso de los gráficos por ordenador en la publicidad y ocio está muy extendido y su uso en aplicaciones de ingeniería crece a un gran ritmo.

La razón por el interés en imágenes digitales es claro: la representación de

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

imágenes en forma digital permite que la información visual sea fácilmente manipulada mediante nuevas y útiles técnicas. Este hecho, combinado con el crecimiento exponencial de la potencia de los ordenadores respecto de la década pasada, ha propiciado el uso de sistemas de imágenes digitalizadas en campos tales como la Astronomía, Medicina, Fotoperiodismo, Artes Gráficas, Publicidad, etc.

Para generar una imagen digital; la fuente, que suponemos emite la información en forma continua, se muestrea en localizaciones discretas usando algún tipo de sensor. Estas muestras se llaman pixels. Los valores del pixel producidos por el sensor son continuos sobre un rango finito, y existe por lo general alguna relación lineal con la intensidad de energía irradiada en cada localización muestreada. El uso del término de energía irradiada es intencionado, puesto que el sensor puede ser sensible a longitudes de onda fuera del rango de la visión humana.

Existen diferentes estrategias para la localización del muestreo, pero la más común es una malla rectangular y equidistante. Idealmente, cada muestra corresponde a una región infinitamente pequeña de la fuente; pero a causa de la naturaleza física de los sensores y ópticas asociadas, es un valor integrado sobre algún área finita, llamada pixel. El número de localizaciones de la muestra por unidad de área define la frecuencia de muestreo del sistema. Si la imagen a muestrear tuviese una banda de frecuencias finita, la elección de la frecuencia

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

de muestreo estaría basada en el teorema de Nyquist, o sea, la frecuencia de muestreo debe ser más pequeña que dos veces la frecuencia espacial más alta de los componentes de la fuente. Sin embargo, es de destacar que habitualmente las imágenes presentan discontinuidades en los bordes de los objetos, y por tanto poseen una banda de frecuencias infinita, luego no existe en general una frecuencia de muestreo que no introduzca alguna pérdida de información en la imagen.

Además del muestreo espacial de la imagen a través de los pixels, es necesario también muestrear el rango de valores de nivel de gris, o intensidad, que es posible asignar a los pixels. Es decir, idealmente, a un pixel se le podría asignar cualquier valor de nivel de gris; sin embargo, la codificación de la imagen con una precisión finita nos obliga a utilizar un número finito de valores. A esta codificación de la imagen utilizando un número finito de valores se le denomina cuantificación de la imagen. El principal objetivo de esta memoria es estudiar en detalle el problema de la cuantificación, proponiendo nuevas soluciones a través de las ecuaciones en derivadas parciales.

En primer lugar, vamos a explicar brevemente la importancia de la cuantificación de imágenes y del tipo de problemas que pueden surgir en su estudio.

La primera pregunta que surge es, dada una imagen, cuántos niveles de gris son necesarios para obtener una representación visualmente correcta de la imagen. Entendemos por una representación visualmente correcta de una imagen a una cuantificación tal que, perceptualmente, el ojo humano no pueda distinguir

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

entre la imagen original y la cuantificada. Esta pregunta es de vital importancia, puesto que el costo en almacenamiento de la imagen depende de su respuesta. Existen dos tipos de estrategias para abordar esta cuestión. La primera, que es la más comúnmente utilizada, consiste en establecer un rango fijo de valores independientemente de la imagen a cuantificar. Habitualmente se utilizan 256 niveles de gris fijos, lo que da una tasa de almacenamiento de 8 bits/pixel. En este caso, la cuantificación, que denominaremos cuantificación uniforme, consiste en asignar a cada nivel de gris de la imagen original el nivel de gris más próximo dentro de los 256 posibles. La segunda estrategia consiste en adaptar la cuantificación a la imagen que se quiere cuantificar, eligiendo los niveles de gris que mejor representan la imagen en concreto.

La cuantificación uniforme, aunque muy simple de utilizar, presenta algunos problemas importantes. En primer lugar, los 256 niveles están mal distribuidos desde un punto de vista perceptual, es decir, el ojo humano es incapaz de distinguir entre niveles de grises próximos. Además, debido a la fuerte no-linealidad del proceso visual, el ojo humano tiende a percibir mejor los contrastes cuando los niveles de gris se encuentran en valores intermedios, que cuando se encuentran próximos al blanco o al negro. Dicho de otra manera, la distribución uniforme de niveles de gris no responde a la sensibilidad visual. Otra objeción importante a este modelo de cuantificación uniforme es que utiliza más memoria de la necesaria para codificar la imagen. En general, en función del tipo de imagen, y eligiendo

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

convenientemente los niveles de gris, se puede reducir notablemente la tasa de almacenamiento de 8 bits/pixel . Reducir esta tasa de almacenamiento es muy importante, puesto que hoy día se trabaja con imágenes de alta resolución que contienen millones de pixels.

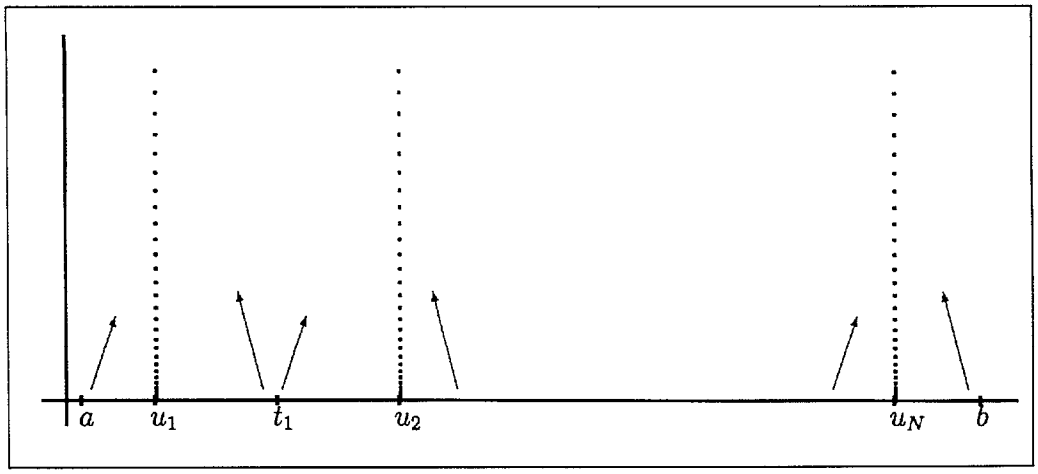
En esta memoria desarrollamos en toda su generalidad la segunda estrategia de cuantificación mencionada, que consiste en adaptar la cuantificación a cada imagen concreta. Los temas fundamentales que se van a tratar en esta memoria son:

- La elección óptima de los niveles de gris representativos de una imagen.

- La introducción de un proceso regularizante en la cuantificación, basado en la estructura local de las imágenes.

Desde un punto de vista clásico, una cuantificación de una imagen viene determinada por un conjunto de niveles representativos (o niveles finales) dados por $\{u_1, u_2, ...u_S\}$, y un conjunto de separadores $\{t_1, t_2, ..., t_{S+1}\}$ que determinan el intervalo de influencia de cada nivel representativo u_i; de tal manera que la cuantificación consiste en asociar a cualquier valor de nivel de gris $u \in [t_i, t_{i+1}]$ su representante u_i.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003



Regla de la Cuantificación. Las líneas de puntos representan a los niveles finales o atractores.

Llamaremos cuantificador de S niveles, y lo denotaremos por Q_S, a cualquier distribución de $2S+1$ puntos tales que:

$$-\infty \leq t_1 < u_1 < t_2 < \ldots\ldots < u_S < t_{S+1} \leq \infty$$

La forma de asociar un cuantificador a una imagen concreta es a través de la minimización de una energía que determina la proximidad de la imagen original a la imagen cuantificada. La energía que se utiliza habitualmente en la literatura es la Energía de Max-Lloyd que viene dada por la expresión:

$$E(Q_S) = \sum_{k=1}^{S} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (s - u_k)^2 \, dH(s). \tag{1.1}$$

Donde $H(s)$ representa la función de distribución del histograma $h(s)$ de la imagen, (es decir $dH(s) = h(s)ds$). Nosotros nos proponemos modificar este funcional

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

de energía de manera que se adapte mejor a las peculiaridades de la percepción visual.

La introducción de un proceso regularizante en la cuantificación consiste en tener en cuenta la estructura local de la imagen en el proceso de cuantificar. Una imagen es, habitualmente, una función regular a trozos que presenta discontinuidades en los bordes de los objetos u oclusiones. Por tanto, existe una cierta homogeneidad entre niveles de gris de pixels vecinos. Nosotros partimos de que esta homogeneidad debe preservarse en la imagen cuantificada, y por tanto debe tenerse en cuenta en el procedimiento que cuantifica; de tal forma que el ámbito de influencia de un nivel representativo u_i no solo depende del intervalo $[t_i, t_{i+1})$ sino también de las relaciones de vecindad existentes en la imagen.

La forma de plantear un cuantificador, que verifique esta condición de homogeneidad por regiones, va a ser a través de una ecuación en derivadas parciales de reacción-difusión, de manera que los estados asintóticos de sus soluciones correspondan a la cuantificación deseada.

Las ecuaciones de reacción-difusión son ecuaciones parabólicas no lineales de la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - F\left(x, u(x), Du(x), D^2u(x)\right) = f(u(x)) \qquad \text{en } \Omega \times (0,T)$$

$$+ \text{ Condiciones de contorno y dato inicial,}$$

donde $F\left(x, u(x), Du(x), D^2u(x)\right)$ es un operador elíptico degenerado no lineal y $f : \Re \to \Re$ es una función no lineal. Estas ecuaciones modelan fenómenos que

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

aparecen en campos muy variados: Química, Biología, Neurofisiología, Epidemiología, Combustión, Genética de poblaciones, etc.

Las bases teóricas de las ecuaciones de reacción-difusión fueron dadas en el trabajo de Alan Turing, que propuso estas ecuaciones como un modelo matemático para las bases químicas de la Morfogénesis [69]. En 1989, C.B. Price, P. Wambacq y A. Oosterlink, introdujeron el uso de los sistemas de reacción-difusión en el tratamiento de imágenes.

Debido a que nuestro operador diferencial es no lineal y elíptico degenerado, la existencia y unicidad de soluciones de esta ecuación se han obtenido en el marco de las soluciones de viscosidad.

El modelo presentado es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - g\left|u * \nabla G\right| \left\|\nabla u\right\| div\left(\frac{\nabla u}{\left\|\nabla u\right\|}\right) - f\left(u\right) &= 0 \quad sobre \quad [0,+\infty] \times \Re^N \\ u\left(0,x\right) &= u_0\left(x\right) \end{aligned}$$

donde:

- $g(x)$ es una función no decreciente que satisface $g(0) = 1$.
- G es núcleo de convolución.
- $f(u)$ es una función regular con un número finito de ceros.

Como los estados asintóticos de la ecuación vienen dados por los ceros de la

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

función $f(x)$, se ha hecho que estos ceros se correspondan por un lado con los separadores del cuantificador y por otro lado con los niveles finales, siendo éstos los estados asintóticos.

El trabajo presentado en esta memoria se ha dividido en las siguientes partes:

- Construcción del cuantificador óptimo.
- Modelización del problema. Teorema de existencia y unicidad de soluciones.
- Análisis Numérico.
- Resultados prácticos.

Para el diseño de un cuantificador óptimo, es necesario optimizar algún funcional de energía. Se ha demostrado que nuestro funcional es separable, por otro lado, la utilización de las técnicas clásicas para optimizar (resolución de un sistema de ecuaciones formado por las derivadas del funcional respecto de las variables) presenta problemas para la obtención del mínimo global, (el resultado final depende de la aproximación inicial dada y lo que se obtiene es el mínimo relativo más cercano) y dado que encontrar un cuantificador óptimo se puede plantear como un problema de programación no lineal en un conjunto finito, se han utilizado técnicas de programación dinámica. Por otra parte, estas técnicas nos permiten obtener un algoritmo óptimo en número de operaciones.

Para la segunda parte se han tenido en cuenta dos cosas:

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

- Cuantificar la imagen.

- Introducir proceso regularizante.

Cuantificar una imagen puede asociarse a la solución de la ecuación:

$$u_t = f(u)$$

donde los ceros de $f(u)$ definen al cuantificador.

Para la eliminación de ruidos se ha usado el operador definido por Álvarez, Guichard, Lions y Morel, debido a que respeta los contrastes entre las diferentes formas, es decir, no desplaza las fronteras de regiones homogéneas.

Entonces el modelo ha combinado por una parte, la difusión para la eliminación del ruido y por otra, la reacción para la cuantificación definitiva.

La demostración de existencia y unicidad de soluciones de la ecuación se ha hecho en el marco de las soluciones de viscosidad dado que el operador diferencial es elíptico degenerado no lineal, y porque permite soluciones que no son diferenciables en el sentido clásico.

En la parte dedicada al Análisis numérico, se establece la discretización del operador diferencial utilizando para ello una ventana de 3x3 y un polinomio trigonométrico.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Se establece un algoritmo basado en el siguiente esquema iterativo:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n}}{\triangle t} = \ell\left(u_{i,j}^{n}\right) + f\left(u_{i,j}^{n}\right)$$

donde $\ell(u)$ representa al operador diferencial discretizado.

Se enuncia y demuestra un teorema de estabilidad para este algoritmo.

En la parte de resultados se verán diferentes imágenes y comparaciones con otros cuantificadores. También se verán algunas aplicaciones prácticas como el resaltado de imágenes y la segmentación.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

CAPÍTULO II

Estado Actual Del Tema

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Cuantificación

Un cuantificador escalar Q, con S niveles de gris, es una aplicación

$$Q : \Re \rightarrow C$$

donde $\Re$ es el conjunto de números reales y

$$C \equiv \{u_1, u_2, u_3, ..., u_S\} \subset \Re$$

es el conjunto de salida de tamaño S. A los u_i también se les llama niveles finales o valores de reproducción.

Asociada a cada cuantificador existe una partición de $\Re$ en S células o átomos $R_{i,i=1,2,..S}$. Cada $i - ésima$ célula se define por

$$R_i = \{x \in \Re : Q(x) = u_i\} \equiv Q^{-1}(u_i).$$

Puesto que un cuantificador se define completamente por los niveles de salida $\{u_i; i = 1, 2, .., S\}$ y la correspondiente partición en células $\{R_i; i = 1, 2, .., S\}$,

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

escribiremos

$$Q = \{u_i, R_i; i = 1, 2, .., S\}$$

para su descripción explícita.

Un cuantificador se dice que es regular si:

a) cada celula R_i es un intervalo,

b) $u_i \in (t_{i-1}, t_i)$

Los valores t_i los llamaremos separadores, niveles de decisión o puntos finales.

Un cuantificador regular tiene la propiedad de que si dos valores de entrada, a y b con $a < b$, presentan el mismo nivel final u_k cualquier otro valor de entrada que esté comprendido entre los dos, presentará el mismo nivel final u_k. Esta propiedad corresponde a la noción intuitiva de la cuantificación como una vía de aproximación al número real con una representación de precisión finita.

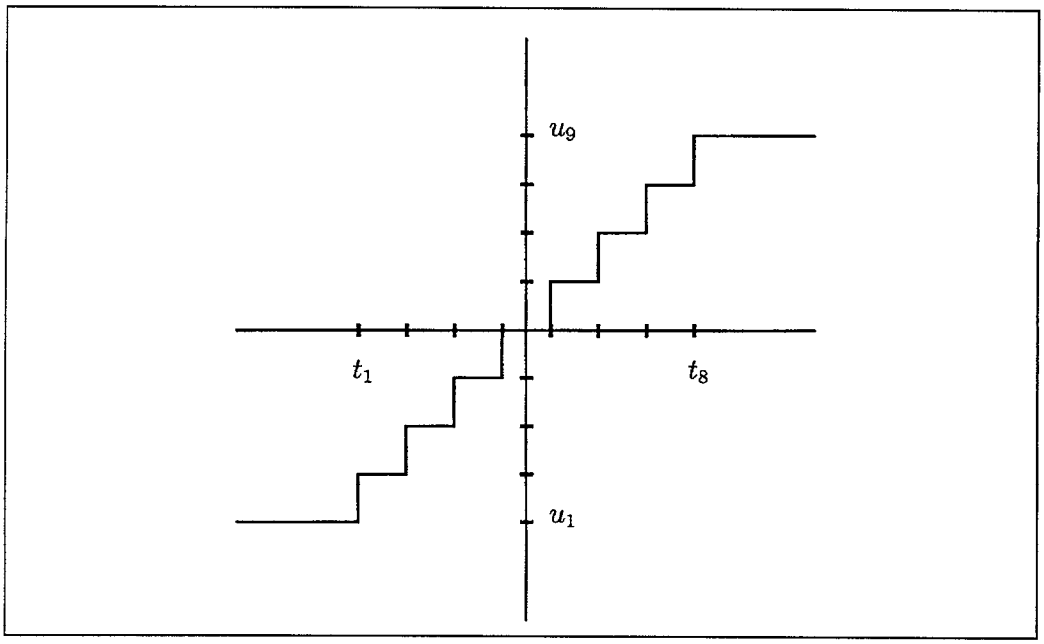
Para un cuantificador regular, el conjunto de separadores está ordenado de la siguiente forma:

$$t_1 < u_1 < t_2 < .... < u_S < t_{S+1}.$$

Además cuando $Q(x)$ es una función monótona no decreciente de x, se dice que el cuantificador es monótono. Es fácil ver que un cuantificador regular debe ser monótono.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Como puede verse en la figura siguiente, la función $Q(x)$ para un cuantificador regular y simétrico es una función en escalera:



Gráfica en escalera de un cuantificador

La característica entrada-salida consiste en S escalones o pasos horizontales, con contraescalón o segmento vertical que indica el salto de la discontinuidad entre dos pasos sucesivos que ocurren en cada separador.

La cuantificación es irreversible en el sentido de que para una salida dada, el valor de la entrada no se puede determinar de forma única.

Dentro del grupo de los cuantificadores de un número fijo de niveles, el más común es el cuantificador uniforme. Un cuantificador uniforme es un cuantificador regular en el que:

- Los separadores están igualmente espaciados

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

- El nivel final asociado a cada intervalo es el centro de dicho intervalo.

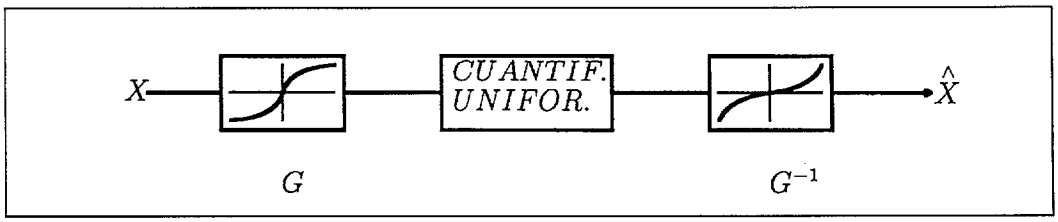
De ésta segunda condición se puede deducir que:

$$u_i = \frac{t_{i-1} + t_i}{2} \text{ para } i = 2, 3, \cdots, S-1.$$

Entonces la partición consiste en intervalos de la misma longitud Δ, y para entradas no acotadas, el primer intervalo es $(-\infty, t_1]$ y el último intervalo es (t_{S-1}, ∞) con $u_1 = t_1 - \frac{\Delta}{2}$, $u_S = t_{S-1} + \frac{\Delta}{2}$. Nótese que $u_i = t_{i-1} + \frac{\Delta}{2}$.

En muchas imágenes es posible encontrar que una gran cantidad de niveles de gris contiguos tienen una frecuencia igual a cero. En esos casos un cuantificador uniforme pierde niveles de gris en el sentido de que varios niveles finales pueden tener frecuencia cero. Entonces, en tratamiento de imágenes parace más indicado el utilizar cuantificadores no uniformes.

Un modelo general para cuantificadores no uniformes con un número finito de niveles finales se puede ver en el siguiente gráfico



Modelo de Compandor para una cuantificación uniforme.

La entrada se transforma primero con una función no lineal monótona no decreciente G para producir una salida $y = G(x)$, entonces este valor se cuantifica

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

de manera uniforme produciendo una salida $\hat{y}$, finalmente ésta es transformada con la función inversa de G para obtener el resultado final $\hat{x}= G^{-1}\left(\hat{y}\right)$.

La primera función se llama (en inglés) *compressor* y a la segunda función se la llama *expandor*. El término *compandor* se obtiene de la combinación de ambas palabras y designa la estructura de un cuantificador no uniforme consistente en un *compressor* , un cuantificador uniforme y un *expandor* en cascada.

La generalidad del modelo *compandor* se establece en el siguiente teorema:

TEOREMA 1 *Para cada cuantificador regular finito existe un modelo compandor.*

Demostración.-Dado un cuantificador por sus separadores $\{y_1, y_2, y_3, ..., y_{S+1}\}$ y sus niveles finales $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_S\}$, se construye el modelo de *compandor* de la siguiente forma: Se definen dos conjuntos en el plano

$$\begin{aligned} P &= \{(y_i, i\Delta + \kappa)\,,\ para\ i = 1, 2, \cdots, S+1\} \\ Q &= \left\{\left(x_i, i\Delta + \frac{\Delta}{2} + \kappa\right)\,,\ para\ i = 1, 2, \cdots, S\right\} \end{aligned}$$

Las colecciones de puntos P y Q se pueden representar gráficamente.

En el eje de las X se sitúan los valores del cuantificador no uniforme y en el eje de las Y se sitúan los valores $i\Delta + \kappa$ y $i\Delta + \frac{\Delta}{2} + \kappa$.

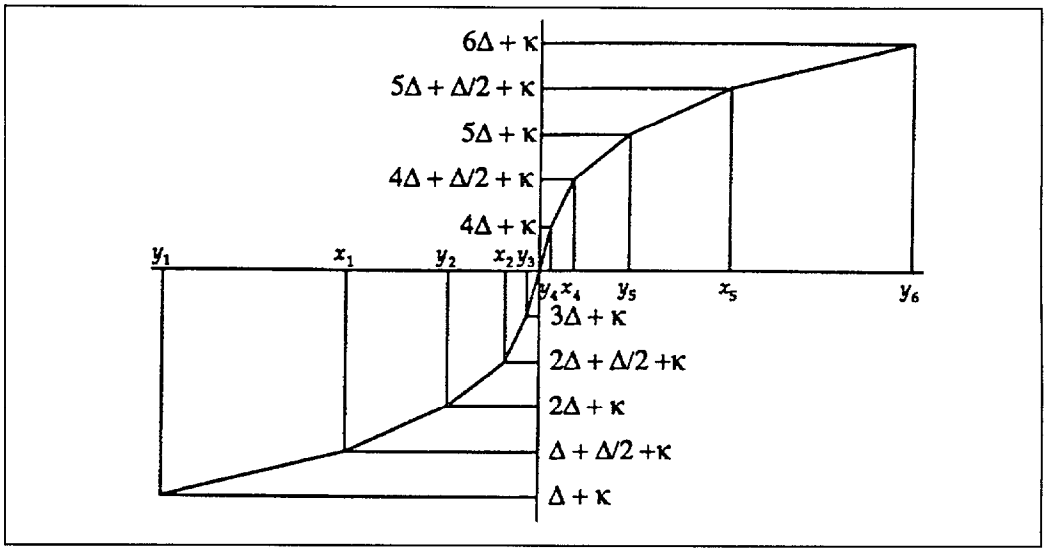
© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Conectandose los puntos $(y_i, i\Delta + \kappa)$ con $\left(x_i, i\Delta + \frac{\Delta}{2} + \kappa\right)$ se obtiene una curva monótona no decreciente $G(x)$ definida sobre el intervalo (y_1, y_n)

$$\begin{aligned} G(x_i) &= i\Delta + \frac{\Delta}{2} + \kappa \\ G(y_i) &= i\Delta + \kappa \end{aligned}$$

La elección de κ debe hacerse para satisfacer la condición $G(0) = 0$.

□



Ejemplo de Compandor.

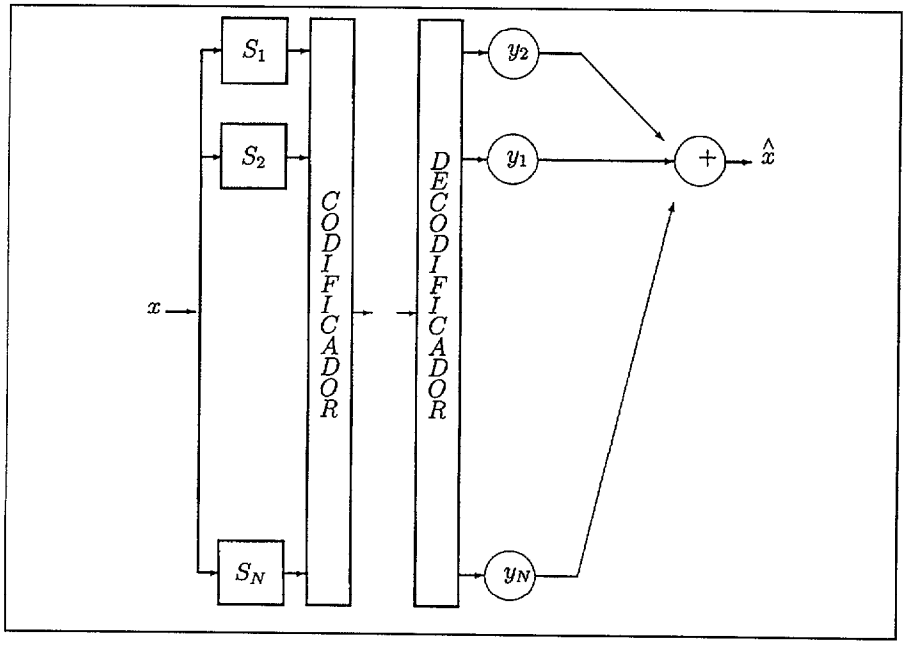
De forma clara se puede ver que la función definida a trozos se puede sustituir por una curva regular que pase por los $2S + 1$ puntos y que la variación de la pendiente sea continua. Esta regularidad se puede obtener sustituyendo los segmentos por aproximaciones por curvas del tipo *spline*. Entonces se puede asumir

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

que todo cuantificador no uniforme se puede modelar mediante un *compandor* con un *compressor* regular no lineal.

Por otra parte, cada cuantificador puede ser considerado como la combinación de dos operaciones sucesivas (aplicaciones), un codificador E y un decodificador D. El codificador es una aplicación $E : \Re \rightarrow I$ donde $I = \{1, 2, 3, \cdots, S\}$ y el decodificador es la aplicación $D : I \rightarrow C$. Así si $Q(x) = u_i$ entonces $E(x) = i$ y $D(i) = u_i$. Con estas definiciones tenemos que $Q(x) = D(E(x))$.

Este diseño está especialmente indicado para optimizar la transmisión. El transmisor realiza la codificación y solo transmite índices, el receptor realiza la decodificación.



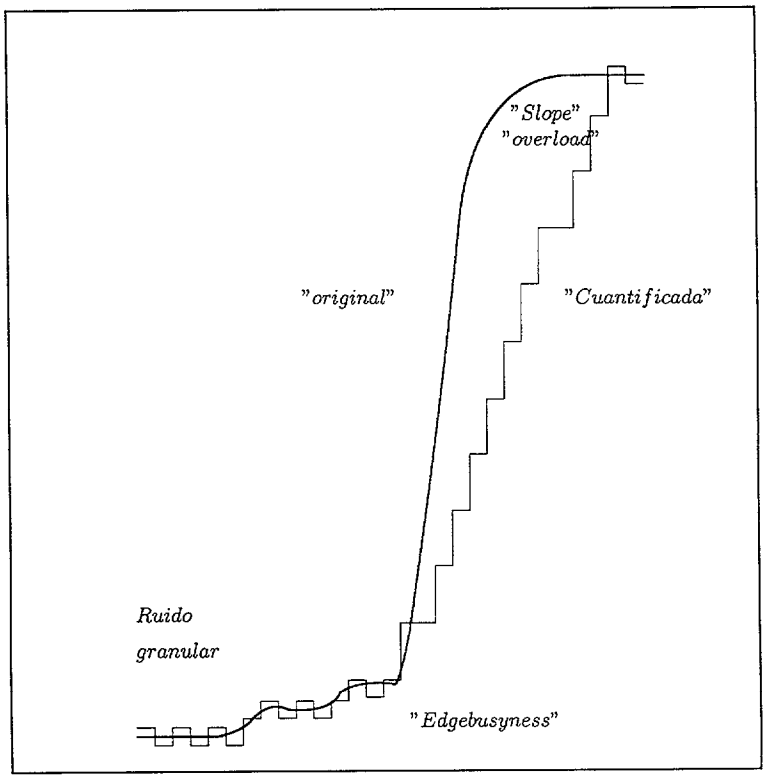
Estructura de un modelo de Codificador/Decodificador

En el diseño de los cuantificadores para una aplicación dada, es importante conocer los tipos de distorsión visual introducidos por el proceso de cuantificación,

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

que son:

- ruido granular,
- "slope overload",
- "edge busyness".



Diferentes tipos de ruido relacionados con la Cuantificación.

El ruido granular aparece en regiones uniformes y resulta de la fluctuación aleatoria de los niveles de salida cuando los valores de la imagen son muy próximos. El ruido "Slope overload" aparece cuando existe un gran contraste en algunos bordes y los niveles de salida del cuantificador no son lo suficientemente grandes para responder rápidamente a un gran salto en la señal. El ruido

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

"Edge busyness" aparece cuando un borde reconstruido varia ligeramente en su posición de una línea a otra debido a fluctuaciones del cuantificador. Desgraciadamente cuando se intenta reducir alguno de estos ruidos, normalmente se resaltan otros. Además hay que reseñar que, por lo general, cuando se cuantifica una zona de la imagen en la que existe un degradado del nivel de gris, de manera que en la imagen original parece realizarse de forma continua, en la cuantificación de imágenes se hacen visibles los saltos entre los diferentes niveles de gris.

Cuando en la imagen a cuantificar aparece la piel humana, este efecto es bastante desagradable. Una posible solución es hacer que no exista una zona de salto, sino que exista una banda en la que los pixels se distribuyan entre los dos niveles.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Ecuaciones en Derivadas Parciales

Un problema básico en el tratamiento de imágenes es como pasar de una información de carácter totalmente local, como puede ser el nivel de gris de los pixels de la imagen, a una información de carácter global como puede ser la descripción de los objetos presentes en la imagen. La alta definición de las imágenes con la que se puede trabajar hoy día nos lleva a pensar que la información contenida en un pixel es de carácter infinitesimal en el sentido de que su valor como unidad independiente es totalmente despreciable frente a sus relaciones de vecindad con los pixels próximos, que es lo que determina perceptualmente la información contenida en una región de la imagen. Por ello, los operadores diferenciales tales como gradientes, curvaturas, laplacianos, etc., son, de forma manifiesta o escondida, utilizados en el desarrollo de la mayoría de las técnicas en el tratamiento de imágenes. El marco natural para formalizar y estudiar las técnicas que involucran operadores diferenciales son las ecuaciones diferenciales, donde, a partir de un modelo, se establecen las reglas de juego que hacen interactuar a los valores locales de la imagen para generar una información más global y compacta de ésta. Históricamente el primer ejemplo de una tal formalización es el filtrado gaussiano.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Efectivamente, Koenderink [47], en 1984, constató que la convolución de una imagen dada por una función $u_0(x,y)$ con una función gaussiana de desviación típica σ es equivalente a la resolución para un cierto tiempo $t = \frac{\sigma^2}{2}$ de la ecuación diferencial $u_t = \triangle u$, (conocida como la ecuación del calor) donde $\triangle u$ representa el operador laplaciano. Posteriormente, el uso de ecuaciones diferenciales en tratamiento de imágenes se ha implantado como una herramienta fundamental. Entre otros muchos, cabe destacar las aportaciones de Perona y Malik, por la introducción de operadores no lineales, Matheron y Serra, por la introducción de la Morfología Matemática, Osher y Rudin, por el uso de ecuaciones de tipo hiperbólico para generar discontinuidades, y Álvarez, Guichard, Lions y Morel, por la unificación axiomática de los diferentes modelos.

Observemos que existe una forma de obtener una imagen cuantificada resolviendo una ecuación diferencial ordinaria.

Sea $f \in C^0(\Re)$ una función que satisface $f(s) = 0 \Longleftrightarrow s = t_1, u_1, ..., u_S, t_{S+1}$ y $\frac{\partial f}{\partial s}(t_k) > 0$ y $\frac{\partial f}{\partial s}(u_k) < 0$ para cada k.

Entonces, la solución de la ecuación diferencial $u_t = f(u)$, con la imagen original como dato inicial, es la imagen cuantificada con niveles $\{u_1, ..., u_S\}$ y separadores $\{t_1, ..., t_{S+1}\}$.

La idea que soporta este modelo es que cada cero de la función $f(u)$ con derivada negativa, u_k actúa como atractor , quedando al final del proceso reducidos los niveles de gris de la imagen al número de atractores del sistema, siendo

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

los niveles de decisión , t_k, los ceros de la función $f(u)$ con derivada positiva (los expulsores). Un gran inconveniente de este método es que conserva el ruido de la imagen, ya que tiende a aproximar el nivel de gris de cada pixel al atractor más cercano, sin analizar que ocurre en un entorno de ese pixel.

Para evitar estos inconvenientes, los modelos basados en EDP utilizan un término de regularización, o sea, dicho de otra forma se exige que niveles de gris de pixels vecinos verifiquen cierta homogeneidad. Dicha homogeneización se realiza a través de un filtrado, que por lo general consiste en sustituir los valores del pixel por la media calculada en un entorno de dicho pixel.

El filtrado lineal se hace generalmente por convolución con Gaussianas de varianza creciente. En 1984, Koenderink constató que la convolución de una señal con una Gaussiana en cada escala es equivalente a la solución de la ecuación del calor con la señal como dato inicial.

Llamando a este dato u_0, las sucesivas imágenes se obtienen resolviendo la ecuación del calor:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} &= \triangle u(x,y,t) && en\ \Re^2 \times [0,+\infty] \\ u(x,y,0) &= u_0(x,y) && en\ \Re^2 \end{aligned}$$

La solución de esta ecuación para un dato inicial con norma cuadrática aco-

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

tada es:

$$u(t,x,y) = G_t * u_0$$

donde:

$$G_t(x,y) = Ct^{-1}exp(-\frac{(x^2+y^2)}{4t})$$

es la función de Gauss. Aquí t representa un parámetro de escala (en la resolución de detalles).

La linealidad del operador laplaciano produce, a través de las escalas, una descolocación o pérdida de bordes de las regiones presentes en la imagen y por tanto es necesario buscar operadores no lineales.

En 1971 Malik y Perona propusieron cambiar el operador laplaciano por el operador:

$$div(g(|\nabla u|)\nabla u)$$

y utilizan como modelo la ecuación:

$$u_t = div\left(g\left(|\nabla u|\right)\nabla u\right)$$

donde $g(\cdot)$ es positiva y monótona decreciente.

Su idea es penalizar la difusión donde los gradientes de la señal son grandes. Sin embargo este modelo presenta algunos inconvenientes:

- se comporta mal en presencia de ruido (el ruido se conserva)

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

- la ecuación está mal planteada desde un punto de vista teórico si sg(s) no es creciente.

Posteriormente, en 1992, L. Álvarez, P.L. Lions y J.M. Morel derivaron un método basado en la ecuación de la curvatura media:

$$u_t = \|\nabla u\| \, div(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|})$$

mediante el modelo:

$$u_t = g(|G * \nabla u|) \, \|\nabla u\| \, div(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|})$$

Este operador, que representa una difusión direccional en la dirección de mínima variación de la función (dirección ortogonal al gradiente ∇u), y produce una regularización de las formas presentes en la imagen respetando los contrastes entre diferentes formas, es el que se ha utilizado en nuestro modelo.

Por otra parte Cottet y Germain ([25]) han introducido un modelo basado en ecuaciones de reacción-difusión. La idea que soporta este modelo es combinar la difusión para el filtrado de ruidos y la reacción para la mejora del contraste. El objetivo es describir un método en el cual la imagen procesada pueda observarse

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

como el estado asintótico de la solución del modelo matemático:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sigma\varepsilon^2 div\left(\left[A_\varepsilon\left(u\right)\right]\left[\nabla u\right]\right) = f(u) \quad en \quad \Omega$$

donde Ω es acotado, $u \in L^2\left(\Omega\right)$ y la función $f(x) \in C^1$ satisface:

$$f\left(\pm 1\right) = 0\ ;\ xf(x) > 0\ para\ x \in (-1,0) \cup (0,1)$$

Se denota por A_ε el operador no lineal cuyo valor es la matriz 2x2:

$$A_\varepsilon\left(u\right)_{i,j} = \frac{\tilde{\partial}_i u \tilde{\partial}_j u}{\left|\nabla u\right|^2 + \varepsilon^2}$$

donde $\tilde{\partial}_1 = \dfrac{\partial}{\partial_{x_2}}$ y $\tilde{\partial}_2 = -\dfrac{\partial}{\partial_{x_1}}$. Además el término ε^2 se utiliza para evitar singularidades cuando $\|\nabla u\| = 0$ en las derivadas de esta matriz. A_ε es la proyección ortogonal sobre la dirección perpendicular a este gradiente.

La elección del parámetro ε presenta algunos problemas, por un lado si ε tiende a cero, u_ε tiende a u y entonces no existe difusión ya que el término de difusión se hace cero, por otro lado, si ε es grande se introduce una distorsión. Además la interpretación geométrica del operador no parece clara.

Por supuesto, existe una gran cantidad de formas de definir filtros a través de EDP's. En las referencias [12] y [9], se puede encontrar un completo estudio de las aplicaciones de las EDP's a la teoría del Análisis Multiescala usando una

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

aproximación axiomática.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Soluciones de Viscosidad

Esta teoría se aplica a ciertas EDP's de la forma $F(x, u, Du, D^2u) = 0$, donde $F : \Re^N \times \Re \times \Re^N \times S(N) \to \Re$ y $S(N)$ es el conjunto de las matrices simétricas.

Las primeras propiedades de esta teoría son que permite fácilmente que funciones continuas sean soluciones de ecuaciones de segundo orden completamente no lineales; proporciona teoremas muy generales de existencia y unicidad, y produce formulaciones precisas para condiciones de frontera generales.

Por otra parte, estas características van mano a mano con una gran flexibilidad con el paso al límite en varios marcos y con pruebas relativamente simples.

En la expresión $F(x, u, Du, D^2u)$, u puede ser una función de valores reales definida sobre algún conjunto Θ de $\Re^N$, Du corresponde al gradiente de u y D^2u corresponde a la matriz de las segundas derivadas de u. Sin embargo, Du y D^2u no tienen el significado clásico, y de hecho la teoría abarca clases de ecuaciones que tienen soluciones que no son diferenciables en el sentido clásico.

Para aplicar esta teoría a una ecuación dada $F = 0$, se requiere que F satisfaga

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

una condición fundamental de monotonía:

$$F(x,r,p,X) \leq F(x,s,p,Y) \ \ cuando \ \ r \leq s \ \ e\, Y \leq X \tag{2.1}$$

donde $r, s \in \Re$, $x, p \in \Re^N$, $X, Y \in S(N)$ y $S(N)$ está dotado de su orden usual.

Se dice que F es elíptica degenerada cuando $F(x,r,p,X) \leq F(x,r,p,Y)$ para $Y \leq X$. Se usa el orden habitual en $S(N)$, esto es $Y \leq X$ significa que $\langle X\xi, \xi \rangle \leq \langle Y\xi, \xi \rangle$ para $\xi \in \Re^N$

DEFINICIÓN 1 *Sea* $F(x,u,Du,D^2u)$ *satisfaciendo* (4.2) *y* $\mathcal{O} \subset \Re^N$. Una subsolución de viscosidad *de* $F = 0$ *en* $\mathcal{O}$ *es una función* $u \in USC(\mathcal{O})$ *tal que:*

$$F(x,u(x),p,X) \leq 0 \ \ \forall x \in \mathcal{O} \ y \ \ (p,X) \in J^{2,+}_{\mathcal{O}} u(x) \tag{2.2}$$

Similarmente, *una supersolución de viscosidad* de $F = 0$ en $\mathcal{O}$ es una función $u \in LSC(\mathcal{O})$ tal que:

$$F(x,u(x),p,X) \geq 0 \ \ \forall x \in \mathcal{O} \ y \ \ (p,X) \in J^{2,-}_{\mathcal{O}} u(x) \tag{2.3}$$

Finalmente, u es *una solución de viscosidad* de $F = 0$ en $\mathcal{O}$, si es a la vez subsolución de viscosidad y supersolución de viscosidad de $F = 0$ en $\mathcal{O}$.

$LSC(\mathcal{O}) = \{$funciones semicontinuas superiores $u : \mathcal{O} \mapsto \Re\}$

$USC(\mathcal{O}) = \{$funciones semicontinuas inferiores $u : \mathcal{O} \mapsto \Re\}$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Veamos otra forma de definir las soluciones de viscosidad:

Dada una función $h : \mathcal{O} \mapsto \Re$, se define *relajación semicontinua inferior* de h en $\overline{\mathcal{O}}$ y se escribe h_*:

$$h_*(x) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \inf_{|z-y|<\epsilon, y \in \mathcal{O}} h(y), \quad x \in \overline{\mathcal{O}}$$

La *relajación semicontinua superior* de h en $\overline{\mathcal{O}}$ se define por $h^* = -(-h)_*$.

Para cada $A \in \Re^N$, consideramos un subconjunto denso W de $J(A) = A \times \Re \times \Re^N \times S^N$. Sea $E = E(y, s, q, Y)$ una función de W en $\Re$. Como W es denso en $J(A)$, las relajaciones E_* y E^* se definen en $J(A)$ con valor en $\overline{\Re}$.

DEFINICIÓN 2 *Una función $u = u(y) : A \to \Re$ se llama* subsolución de viscosidad *(*supersolución de viscosidad *respectivamente) de la ecuación:*

$$E\left(y, u, Du, D^2u\right) = 0 \quad en \ A \tag{2.4}$$

si $u^* < \infty$ ($u_* > -\infty$, respectivamente) en A, y para cada par de $\phi \in C^2(A)$ y $\overline{y} \in A$ satisfaciendo $\max_A(u^* - \phi) = (u^* - \phi)(\overline{y})$ ($\min_A(u_* - \phi) = (u_* - \phi)(\overline{y})$, respectivamente) se tiene que:

$$E_*\left(\overline{y}, u^*\left(\overline{y}\right), D\phi\left(\overline{y}\right), D^2\phi\left(\overline{y}\right)\right) \leq 0$$

$$\left(E^*\left(\overline{y}, u_*\left(\overline{y}\right), D\phi\left(\overline{y}\right), D^2\phi\left(\overline{y}\right)\right) \leq 0, \ respectivamente\right)$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Veamos tres propiedades básicas de las subsoluciones de viscosidad.

PROPOSICIÓN 1 *Sea S una familia no vacía de subsoluciones de* (2.4) *y u una función definida en A por:*

$$u(y) = \sup_{v \in S} v(y) \ \ para \ \ y \in A$$

Suponemos que $u^*(y) < \infty$ para $x \in A$. Entonces u es una subsolución de (2.4).

PROPOSICIÓN 2 (Existencia) *Sean f y $g : A \to \Re$ respectivamente una sub y supersolución de viscosidad de* (2.4). *Se supone $f \leq g$ en A. Entonces existe una solución u para* (2.4), *satisfaciendo:*

$$f \leq u \leq g \ \ en \ \ A$$

PROPOSICIÓN 3 (Estabilidad) *Sean E y $E_k : W \to \Re$ y sea u_k una subsolución de*

$$E_k\left(y, u_k, Du_k, D^2u_k\right) = 0 \quad en \ \ A \tag{2.5}$$

$k = 1, 2, \cdots$. Asumamos que $\lim_{h \to \infty *} E_h \geq E_*$ y u_k converge uniformemente en cada subconjunto compacto de A. Entonces u es una subsolución de: (2.5) *con este E.*

La demostración de estas proposiciones se puede encontrar en [43]. La proposición 2 está demostrada por el método de Perron en [44] y [23].

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

La teoría de viscosidad ha sido introducida por M.G. Crandall y P.L. Lions, en 1983, en el artículo [27], aunque los primeros pasos fueron dados en el artículo [28].

Existen analogías con la teoría de las leyes de conservación escalar de S.N. Kruzkov [48], proporcionadas por la dirección de la noción y de su presentación. La presentación del primer artículo resalta el caso de primer orden, debido al hecho de que la unicidad resulta asequible solo para este caso en el tiempo. Además en [27] se pone de manifiesto la existencia de varias vías equivalentes para formular la noción de soluciones de viscosidad; una de éstas está íntimamente conectada a los trabajos anticipados de L.C. Evans [33] y [34] que tratan de la convergencia en sentido débil en ecuaciones que satisfacen el Principio del Máximo. En estos trabajos las direcciones estaban indicadas por aspectos del análisis funcional no lineal y de la teoría de semigrupos no lineales.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Programación Dinámica

La Programación Dinámica es una colección de herramientas matemáticas que se usan para analizar procesos de decisión secuenciales. Esto identifica a la Programación Dinámica como una rama de las Matemáticas Aplicadas. Es un principio general aplicable a numerosos problemas de optimización con condiciones, lineales o no, en variables continuas o discretas, pero poseyendo una propiedad llamada de descomposición.

El nombre de Programación Dinámica proviene del hecho de que este método se aplicaba en un inicio a la optimización de sistemas dinámicos, es decir, sistemas que evolucionan en el tiempo y para los que la evolución puede ser controlada por variables de decisión. La utilización se ha extendido a problemas donde el tiempo no interviene.

La Programación Dinámica no es una excepción a la regla de que buenas ideas tienen raíces profundas. Antecedentes a estas ecuaciones funcionales pueden encontrarse en la historia de las Matemáticas, pero los trabajos que han dado lugar al nacimiento de la Programación Dinámica proceden de mediados del siglo XX. Estos incluyen estudios de Massé (1946) de los recursos del agua, Wald

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

(1947) de problemas secuenciales de decisión en Estadística, estudios de control de inventarios de Arrow, Harris y Marshack (1951) y el estudio por Bellman de las ecuaciones funcionales (1952).

Fue Bellman quien se aprovechó del principio de optimalidad y, con gran ingeniosidad, lo usó para analizar cientos de problemas de optimización en Matemáticas, Ingeniería, Economía, y otros campos.

La idea base de la Programación Dinámica es tratar de reemplazar la optimización de una función de n variables por la resolución de un cierto número de problemas de optimización más simples de resolver. En este sentido, el método se puede considerar como un método de descomposición.

Una noción importante es la de función descomponible.

DEFINICIÓN 3 *Se dice que la función f es descomponible en las funciones f_1 y f_2, si f es separable ($f(x,y) = f_1(x, f_2(y))$) y si además, la función f_1 es monótona no decreciente respecto de su segundo argumento.*

Se puede enunciar el resultado fundamental siguiente:

TEOREMA 2 (Optimalidad) *Sea f una función real de variables x e $y = (y_1, y_2, \cdots, y_k)$. Si f es descomponible con $f(x,y) = f_1(x, f_2(y))$, entonces se tiene:*

$$\underset{(x,y)\in\Omega}{Opt}\ f(x,y) = \underset{x}{Opt}\left\{ f_1\left(x, \underset{y\in\Omega_x}{Opt}\ \{f_2(y)\}\right)\right\}$$

donde *Opt* puede ser tanto Maximizar como Minimizar y:

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

$$\Omega \in \Re^{k+1} \ , \ \Omega_x = \left\{ y \mid y \in \Re^k ; (x,y) \in \Omega \right\}.$$

La demostración puede encontrarse en [58].

Desde un punto de vista práctico, si se supone que el conjunto de las soluciones Ω es a priori cualquiera, la búsqueda del óptimo de f en Ω mediante la fórmula dada por el teorema de Optimalidad es equivalente a:

- Determinar para cada x el valor de la función φ :

$$\varphi(x) = \underset{y \in \Omega_x}{Opt} \{f_2(y)\}$$

- Determinar el óptimo en x de la función:

$$\psi(x) = f_1(x, \varphi(x))$$

Esto es estrictamente equivalente al cálculo del mínimo de $f(x,y)$ por enumeración de todos los $(x,y) \in \Omega$. En el teorema solo precisa el orden en el que se efectúa dicha enumeración. Está claro que tal procedimiento no puede conducir a un método eficaz en la práctica; de hecho el teorema de optimalidad depende esencialmente de la forma del dominio de soluciones Ω, y más precisamente de la posibilidad de considerarle como un elemento de una familia más vasta de dominios $\Omega_i(E)$, parametrizada por un vector E, llamado vector de estado.

En general,un problema de optimización con condiciones sobre las variables

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

(x, y) se puede considerar de la forma:

$$\begin{cases} F^* = Opt\ f(x,y) \\ \\ g(x,y) \in \mathcal{E}_t \end{cases} \tag{2.6}$$

donde $g : \Re^{k+1} \rightarrow \Re^m$ y $\mathcal{E}_t \subset \Re^m$.

Supongamos ahora que g es separable y se pueda poner de la forma:

$$\begin{aligned} g(x,y) &= h_2(y, h_1(x)) \\ \textit{donde}: & \\ h_1(x) &: \Re \rightarrow \Re^m \\ h_2(y,z) &: \Re^{k+m} \rightarrow \Re^m \end{aligned}$$

Puede verse que, para valores dados de x y de y, $g(x,y)$ se puede calcular por:

$$\begin{cases} E_1 = h_1(x) \\ \\ E_2 = h_2(y, E_1) \\ \\ g(x,y) = E_2 \end{cases}$$

Sea $\mathcal{E}$ un subconjunto de $\Re^m$ tal que:

$$\begin{aligned} \forall x &\in \{x \mid \exists y : (x,y) \in \Omega\} \Rightarrow h_1(x) \in \mathcal{E} \\ \forall E &\in \mathcal{E}, \forall y \in \{y \mid \exists x : (x,y) \in \Omega\} \Rightarrow h_2(y,E) \in \mathcal{E} \end{aligned}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

A $\mathcal{E}$ se le llama *conjunto de estados* y a sus elementos *vectores de estado.* Las funciones h_1 y h_2 se llaman f*unciones de transición.* $\mathcal{E}_t$ es el conjunto de estados *terminales* admisibles.

La idea consiste en reemplazar la solución del problema (2.6), que tiene $k+1$ variables, por la resolución de una familia de problemas de optimización con k variables:

$$\begin{cases} F_2(E_1) = Opt\left\{f_2\left(y\right)\right\} \\ \qquad h_2\left(y, E_1\right) \in \mathcal{E}_t \end{cases}$$

con E_1 recorriendo $\mathcal{E}$.

A la ecuación:

$$F_i(E_{i-1}) = Opt\left\{f_i\left(x_i, F_{i+1}\left(h_i\left(x_i, E_{i-1}\right)\right)\right)\right\}$$

donde $F_i\left(E_{i-1}\right) = Opt\ \overline{f}_i(x_i, \cdots x_m)$ bajo la condición:

$$\overline{h}_i(x_i, \cdots, x_m, h_{i-1}(x_{i-1}, E_{i-2})) \in \mathcal{E}_t$$

con las $\overline{f_i}$ descomponibles, las h_i funciones de transición y $\overline{h}_i(x_i, \cdots, x_m, E)$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

definida recursivamente por:

$$\begin{cases} E_i = h_i(x_i, E) \\ E_{i+1} = h_{i+1}(x_{i+1}, E_i) \\ \cdots\cdots\cdots \\ E_n = h_n(x_n, E_{n-1}) \\ \overline{h}_i(x_i, \cdots, x_m, E) = E_n \end{cases}$$

se le llama *ecuación funcional de la Programación Dinámica.*

Entre todas las soluciones posibles $(x_i, \cdots, x_m)$ para ir del estado E (en la etapa i-ésima) al subconjunto de estados $\mathcal{E}_t$, solo se conserva la información relativa a una solución optimal.

La solución optimal obtenida está conforme al *principio de optimalidad*, enunciado por R. Bellman (1957): *Una política optimal tiene la propiedad de que, cualesquiera que sean el estado inicial y el estado final, las decisiones restantes deben constituir una política optimal con relación al estado resultante de la primera decisión.*

Este principio se puede resumir por: *Toda solución optimal solo puede estar formada por soluciones parciales optimales.*

Sin embargo, para que este principio sea equivalente a la ecuación funcional de la Programación Dinámica es necesario reemplazar la hipótesis de monotonía del teorema de optimalidad por la hipótesis de monotonía en el sentido estricto.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

La Programación Dinámica se emplea, entre otros, en los siguientes campos:

- Optimización de Sistemas Dinámicos.
- Optimización de recorridos de grafos.
- Problemas de circuitos hamiltonianos de longitud mínima.
- Problemas de acoplamiento, partición y recubrimiento de un hipergrafo de intervalos.
- Sistemas estocásticos.
- Optimización de funcionales de energía en tratamiento de imágenes.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

CAPÍTULO III

MODELIZACIÓN

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Descripción del Problema

Dada una imagen bidimensional:

$$u : \Re^2 \longrightarrow \Re$$

Un cuantificador Q_S es una regla que asocia a cada imagen u dos conjuntos finitos:

$\{u_k\}_{k=1,..,S}$ que representa los niveles de cuantificación,

$\{t_k\}_{k=1,..,S+1}$ que representa los separadores de la cuantificación,

satisfaciendo:

$$t_1 < u_1 < t_2 < .... < u_S < t_{S+1}.$$

Entonces, cada cuantificador genera una imagen cuantificada reemplazando cada valor del intervalo $[t_k, t_{k+1})$, por u_k.

Vamos a tratar dos problemas en relación a la cuantificación de imágenes. El primero es la elección del cuantificador Q_S para un número de niveles de cuantificación S. El segundo es introducir un procedimiento de eliminación de ruido que actúe al mismo tiempo que el procedimiento de cuantificación.

El método clásico para la elección de un cuantificador consiste en minimizar el error cuadrático medio. Sea $H(s)$ la función de distribución de la imagen u

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

dada por:

$$H(s) = P\{u(x,y) < s\}$$

Consideramos que u es periódica de periodo $[a,b) \times [c,d)$ que representa el dominio de la imagen original. Entonces P se puede considerar como la medida de Lebesgue sobre $[a,b) \times [c,d)$. Hay que notar que el histograma $h(s)$ de u viene dado por $H'(s) = h(s)$.

El cuantificador Lloyd-Max minimiza la energía cuadrática:

$$E(Q_S) = \sum_{k=1}^{S} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (s - u_k)^2 \, dH(s).$$

En el marco del proceso de imágenes, no es deseable que los valores t_k, t_{k+1} o u_k, u_{k+1} estén demasiado próximos, dado que perceptualmente representarían un solo nivel. Para evitarlo, hemos introducido dos nuevos términos en la energía de Lloyd:

- $\dfrac{\lambda_S}{t_{k+1} - t_k}$, que penaliza el hecho de que aparezcan intervalos $(t_k, t_{k+1}]$ pequeños.
- $C\left(\dfrac{t_{k+1} + t_k}{2} - u_k\right)^2$, que sitúa el nivel de gris u_k en el centro del intervalo $(t_k, t_{k+1}]$.

Donde λ_S y C son constantes positivas.

Con lo que la energía que hay que minimizar para obtener el cuantificador,

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

nos queda:

$$E(Q_S) = \sum_{k=1}^{S} \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} (s - u_k)^2 \, dH(s) + \frac{\lambda_S}{t_{k+1} - t_k} + C \left(\frac{t_{k+1} + t_k}{2} - u_k \right)^2 \right) \quad (3.1)$$

Planteado como un problema de optimización, podemos hacer uso de las técnicas del Cálculo Diferencial e igualar a cero las derivadas de (3.1) respecto de las variables t_k y u_k.

El problema de este método es que cualquier vía que se use para resolver el sistema resultante depende fuertemente de la aproximación inicial y además la existencia de gran cantidad de mínimos locales hace casi imposible alcanzar el mínimo global.

Otra forma de abordar el problema es comprobar que el funcional (3.1) es separable en el sentido de que si la familia de paramétros $\{t_1 = a, u_1, t_2, ..., u_k, t_{k+1} = b\}$ optimiza el intervalo $[a, b]$, entonces la familia $\{t_2, u_2..., u_k, t_{k+1} = b\}$ optimiza el intervalo $[t_2, b]$ y se pueden usar técnicas de programación dinámica para resolverlo.

El segundo y principal paso en nuestro modelo de cuantificación es eliminar el ruido en la imagen original. Para resolver este paso utilizaremos ecuaciones en derivadas parciales del tipo reacción-difusión.

El método que se propone también está basado en ecuaciones de reacción-

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

difusión. Concretamente se propone la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - g\left|u * \nabla G\right| \left\|\nabla u\right\| div\left(\frac{\nabla u}{\left\|\nabla u\right\|}\right) - f\left(u\right) &= 0 \; sobre \; [0,+\infty] \times \Re^N \\ u\left(0,x\right) &= u_0\left(x\right) \end{aligned}$$

donde $g(x) \geq 0$ es una función no creciente que satisface $g(0) = 1$, G es un núcleo de convolución (por ejemplo una función gaussiana) y $f(u)$ es una función regular con un número finito de ceros.

Utilizaremos la notación $\partial_{ij} u = \dfrac{\partial u^2}{\partial x_i \partial x_j} = u_{ij}$.

Una interpretación de los términos de la ecuación es la siguiente:

- a) el término:

$$\left\|\nabla u\right\| div\left(\frac{\nabla u}{\left\|\nabla u\right\|}\right) = \triangle u - \frac{\nabla^2 u\left(\nabla u, \nabla u\right)}{\left\|\nabla u\right\|^2}$$

  representa un término de difusión degenerado, que difunde u en dirección ortogonal al gradiente ∇u y no difunde en ninguna otra dirección de ∇u. El propósito de este término de difusión degenerado es regularizar u a los dos lados de un borde con una mínima pérdida del borde mismo.(Un borde se define como una línea a lo largo de la cual el gradiente es grande).

- b) El término $g(|G * \nabla u|)$ se usa para resaltar los bordes. Ciertamente,

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

controla la velocidad de la difusión:

1. Si ∇u tiene una media pequeña en un entorno de un punto x, la difusión es grande.

2. Si ∇u tiene una media grande en un entorno de un punto x, x se considera un punto del borde y la difusión es baja, puesto que $g(s)$ es pequeña para valores grandes de s.

- c) El término $f(u)$, que satisface $f(s) = 0 \Longleftrightarrow s = t_1, u_1, ..., u_S, t_{S+1}$ y $\frac{\partial f}{\partial s}(t_k) > 0$ y $\frac{\partial f}{\partial s}(u_k) < 0$ para cada k, determina el estado asintótico de la ecuación usando el cuantificador Q_S que minimiza la energía (3.1) como se ha explicado más arriba.

Usando la ecuación (1.2), introducimos un procedimiento de suavizamiento en la regla de cuantificación. Por tanto, el estado asintótico de esta ecuación, cuando t tiende a infinito, representa una cuantificación sin ruido de la imagen original.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

CAPÍTULO IV

ANÁLISIS MATEMÁTICO

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Análisis Matemático del Modelo

El modelo matemático propuesto es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - g\left(u * \nabla G\right) \sum_{i,j} a_{ij}\left(\nabla u\right) \partial_{ij} u - f\left(u\right) &= 0 \; sobre \; [0, +\infty] \times \Re^N \quad (4.1) \\ u\left(0, x\right) &= u_0\left(x\right) \end{aligned}$$

donde:

1. $g^{\frac{1}{2}}\left(\Re^N, \Re\right)$ es lipschitziana, $g\left(p\right) \geq 0 \; \forall p \in \Re^N$.

2. $D^\alpha G \in L^1\left(\Re^N\right) \;\; \forall \left|\alpha\right| \leq 2$.

3. $\sum_{i,j} a_{ij}\left(p\right) \xi_i \xi_j \geq 0 \;\; \forall p \in \Re^N \setminus \{0\}, \xi \in \Re^N \quad a_{ij} = a_{ji}$.

4. a_{ij} es continua y acotada en $\Re^N \setminus \{0\}$.

5. $f(x) \in C^0\left(\Re\right)$, $f'(x) \in L^\infty\left(\Re\right)$ y existe un intervalo $[a, b]$ tal que:

$$f(x) > 0 \; si \; x < a \; y \; f(x) < 0 \; si \; x > b$$

Esta ecuación se puede plantear de la forma:

$$u_t + g\left(u * \nabla G\right) F\left(t, x, u, \nabla u, D^2 u\right) = f(u)$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

siendo:

$$F(x,u,p,X) = -traza\left(\left(I - \frac{p\otimes p}{|p|^2}\right)X\right)$$

En primer lugar vamos a ver que el operador $F(t,x,u,p,X)$ es elíptico degenerado, o sea que verifica:

$$F(x,u,p,X) \leq F(x,u,p,Y) \ \ si\ Y \leq X$$

con el orden usual en las matrices simétricas. Esta propiedad se deduce del siguiente lema:

LEMA 1 *Si A y B son dos matrices simétricas y semidefinidas positivas, entonces $tr(AB) \geq 0$, donde $tr(A)$ indica la traza de A.*

Demostración.- Como A y B son matrices simétricas, existen matrices ortogonales P, Q y matrices diagonales D_A, D_B que satisfacen:

$$A = P^{-1}D_AP$$

$$B = Q^{-1}D_BQ$$

como $tr(AB) = tr(BA)$, nos queda:

$$tr(AB) = tr\left(P^{-1}D_APQ^{-1}D_BQ\right) = tr\left(D_B\left(PQ^{-1}\right)^{-1}D_A\left(PQ^{-1}\right)\right) = tr\left(D_BU\right)$$

siendo $U = \left(PQ^{-1}\right)^{-1}D_A\left(PQ^{-1}\right)$ no negativa. Por otro lado:

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

$$tr\,(D_B U) = \sum \lambda_i u_{ii} \geq 0$$

por ser tanto λ_i como $u_{ii} \geq 0$.

Efectivamente:

- $\lambda_i \geq 0$ por ser los autovalores de B que es no negativa.
- $u_{ii} \geq 0$ por ser los elementos de la diagonal de una matriz positiva.

Por tanto hemos obtenido $tr(AB) \geq 0$.

□

Como $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$, no es difícil ver que $F\,(t,x,u,p,X)$ es degeneradamente elíptico. Efectivamente, en primer lugar veamos que la matriz $\left(I - \frac{p \otimes p}{|p|^2}\right)$ es no negativa.

$p \otimes p = p \cdot {}^t p$

$\left(I - \frac{p \otimes p}{|p|^2}\right) p = p - p = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ es un autovalor, siendo p un autovector.

$\left(I - \frac{p \otimes p}{|p|^2}\right) p^{\perp} = p^{\perp} \Rightarrow \lambda = 1$ es un autovalor con $p^{\perp}$ como autovector.

Sean las matrices simétricas X, Y tales que $Y \leq X$, o lo que es lo mismo, la matriz $X - Y$ no negativa.

Por tanto:

$$tr\left(\left(I - \frac{p \otimes p}{|p|^2}\right)(X - Y)\right) \geq 0$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Entonces:

$$tr\left(\left(I-\frac{p\otimes p}{|p|^2}\right)((X-Y)\right)=tr\left(\left(I-\frac{p\otimes p}{|p|^2}\right)X\right)-tr\left(\left(I-\frac{p\otimes p}{|p|^2}\right)Y\right)\geq 0\Rightarrow$$

$$tr\left(\left(I-\frac{p\otimes p}{|p|^2}\right)X\right)\geq tr\left(\left(I-\frac{p\otimes p}{|p|^2}\right)Y\right)\Rightarrow F\left(x,u,p,X\right)\leq F\left(x,u,p,Y\right).$$

□

Recordemos la definición de soluciones de viscosidad de (4.1) en $\Re^N$.

Sea u en $C\left([0,T]\times\Re^N\right)$ para algún T en $]0,+\infty[$. Entonces u es una subsolución de (4.1) si, para todo Φ en $C^2\left([0,T]\times\Re^N\right)$, en cada punto (t_0,x_0) en $]0,T]\times\Re^N$, máximo local de $(u-\Phi)$, se verifica:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}\left(t_0,x_0\right)-g\left(u*\nabla G\left(t_0,x_0\right)\right)\sum_{i,j}a_{ij}\left(\nabla\Phi\left(t_0,x_0\right)\right)\partial_{ij}\Phi\left(t_0,x_0\right)-f(u(t_0,x_0))\leq 0$$

$$si\ \nabla\Phi\left(t_0,x_0\right)\neq 0$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}\left(t_0,x_0\right)-g\left(u*\nabla G\left(t_0,x_0\right)\right)\limsup_{p\to 0}\sum_{i,j}a_{ij}\left(p\right)\partial_{ij}\Phi\left(t_0,x_0\right)-f(u(t_0,x_0))\leq 0$$

$$si\ \nabla\Phi\left(t_0,x_0\right)=0$$

Se define una supersolución de viscosidad de manera similar, reemplazando "punto de máximo local" por "punto de mínimo local", "$\leq$" por "$\geq$" y "lim sup" por "lim inf". Finalmente, se define una solución de viscosidad como una función

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

que es a la vez una supersolución y una subsolución.

Para el dato inicial u_0 se impone:

1. u_0 es lipschitziana.

2. $\exists h = (h_1, h_2, ..., h_n) \in \Re^N$ tal que:

$$u_0(x + (0, 0, ..., h_k, ..0)) = u_0(x) \; \forall x \in \Re^N \;\; y \;\; k = 0, 1, \cdots, N \qquad (4.2)$$

Esto significa que u_0 es una función periódica.

LEMA 2 *Sea u solución de viscosidad de* (4.1) *satisfaciendo* (4.2). *Entonces, para cada* $t > 0$ *y* $x \in \Re^N$*:*

$$\min\{\inf_{\Re^N} |u_0|, a\} \leq u(x,t) \leq \max\{\sup_{\Re^N} |u_0|, b\}$$

Demostración.- Sea $T > 0$ fijo. Mostraremos que la desigualdad anterior es válida para $(t, x) \in [O, T] \times \Re^N$. Obsérvese que la periodicidad de u garantiza que existe máximo sobre $[O, T] \times \Re^N$.

Sea (t_0, x_0) máximo de $u(t, x)$. Supongamos que $t_0 > 0$. En la definición de subsolución de viscosidad tomamos $\Phi \equiv 0$ y por tanto $u - \Phi$ tiene un máximo local en (t_0, x_0), con lo que:

$$-f(u(t_0, x_0)) \leq 0 \Longrightarrow f(u(t_0, x_0)) \geq 0 \Longrightarrow u(t_0, x_0) \leq b$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Repitiendo el mismo razonamiento con una supersolución con (t_0, x_0), mínimo local de $u - \Phi$, obtenemos:

$$-f(u(t_0, x_0)) \geq 0 \Longrightarrow f(u(t_0, x_0)) \leq 0 \Longrightarrow a \leq u(t_0, x_0)$$

Si $t_0 = 0$ se tiene:

$$inf_{\Re^N} |u_0| \leq u(x, 0) \leq sup_{\Re^N} |u_0|$$

Entonces reuniendo ambas desigualdades se tiene:

$$\min\{\inf_{\Re^N} |u_0|, a\} \leq u(x, t) \leq \max\{\sup_{\Re^N} |u_0|, b\}$$

□

En el siguiente teorema se establece la existencia y unicidad de soluciones de la ecuación planteada (4.1)

TEOREMA 3 *Sea u_0 Lipschitz sobre $\Re^N$, entonces se verifica:*

i) El problema (4.1) *tiene una solución de viscosidad u en $C\left([0,T] \times \Re^N\right) \cap L^\infty\left(0, T; W^{1,\infty}\left(\Re^N\right)\right)$ para cada $T < \infty$.*

ii) Sean $u \in C\left([0,T] \times \Re^N\right) \cap L^\infty\left(0, T; W^{1,\infty}\left(\Re^N\right)\right)$, $v \in C\left([0,\infty) \times \Re^N\right)$ soluciones de viscosidad del problema (4.1) satisfaciendo

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

(4.2) *con* u_0, v_0 *como datos iniciales. Entonces para cada* T *en* $[0, +\infty)$, *existe una constante* K *que solo depende de* $\|u_0\|_{W^{1,\infty}}$, $\|v_0\|_{L^\infty}$ *y de la constante de Lipschitzt de* u *(y por tanto de* T*) que:*

$$\sup_{0\leq t\leq T} |u(t,\cdot) - v(t,\cdot)|_{L^\infty(\Re^N)} \leq K \|u_0 - v_0\|_{L^\infty(\Re^N)} \tag{4.3}$$

Para la demostración del teorema utilizaremos técnicas de la teoría de viscosidad dadas en [11], [20], [23], [26], [27], y [68] .

Empezaremos por la demostración del resultado de unicidad (estimación (4.3)). Para ello estudiaremos algunas propiedades del máximo (t_0, x_0, y_0) del siguiente funcional:

$$u(t,x) - v(t,y) - \frac{|x-y|^4}{4\varepsilon} - \lambda t;\ t \in [0,T],\ x, y \in \Re^N, T, \varepsilon, \lambda \in]0, +\infty[\tag{4.4}$$

nótese que como $u, v \in C\left([0,\infty[\times \Re^N\right)$ son funciones periódicas, dicho máximo (t_0, x_0, y_0) siempre se alcanza.

LEMA 3 *Sea* (t_0, x_0, y_0) *máximo de* (4.4) *y sea* L *la constante de Lipschitz de* u. *Entonces:*

$$|x_0 - y_0| \leq (4\varepsilon L)^{\frac{1}{3}}$$

Demostración.-

$$u(t_0,x_0) - v(t_0,y_0) - \frac{|x_0-y_0|^4}{4\varepsilon} - \lambda t_0 \geq u(t_0,y_0) - v(t_0,y_0) - \lambda t_0 \Longrightarrow$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

$$\frac{|x_0 - y_0|^4}{4\varepsilon} \leq |u(t_0, x_0) - u(t_0, y_0)| \leq L\,|x_0 - y_0| \Longrightarrow |x_0 - y_0| \leq (4\varepsilon L)^{\frac{1}{3}}\,.$$

□

LEMA 4 *Sea* (t_0, x_0, y_0) *máximo de* (4.4). $\forall \delta > 0$ *existe* $M > 0$ *tal que si:*

$\varepsilon = \left(\delta \sup_{\Re^N \times [0,T]} |u - v|\right)^{\frac{1}{3}}$ *y* $\lambda = M \sup_{\Re^N \times [0,T]} |u - v|$ *entonces el máximo de* (4.4) *se obtiene en* $t_0 = 0$.

Demostración.-Supongamos en primer lugar que $t_0 > 0$. Siguiendo el teorema de unicidad y existencia de ([11], *pg* 854) se tiene que $\forall \lambda, \mu > 0$ existen $c, d \in \Re$, X, Y matrices (N×N) (simétricas) tal que:

$$c - d = \lambda$$

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} A + \mu A^2 & -A - \mu A^2 \\ -A - \mu A^2 & A + \mu A^2 \end{pmatrix} \quad \forall \mu > 0 \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} & c - g(u * \nabla G)(t_0, x_0) \sum_{i,j} a_{ij}(\varepsilon^{-1} |x_0 - y_0|^2 (x_0 - y_0)) X_{ij} \\ & -f(u(t_0, x_0)) \leq 0 \\ & d - g(v * \nabla G)(t_0, y_0) \sum_{i,j} a_{ij}(\varepsilon^{-1} |x_0 - y_0|^2 (x_0 - y_0)) Y_{ij} \\ & -f(v(t_0, y_0)) \geq 0 \end{aligned} \tag{4.6}$$

donde:

$$A = \frac{1}{\varepsilon} |x_0 - y_0|^2 Id + \frac{2}{\varepsilon} (x_0 - y_0) \otimes (x_0 - y_0)$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

$$A^2 = \frac{1}{\varepsilon^2}|x_0 - y_0|^4 Id + \frac{8}{\varepsilon^2}|x_0 - y_0|^2 (x_0 - y_0) \otimes (x_0 - y_0)$$

Veamos que si suponemos:

$$\lambda > L_f \sup_{\Re^N \times [0,T]} |u - v|$$

entonces:

$$x_0 \neq y_0$$

donde L_f es la constante Lipschitziana de f en el intervalo:

$$[\min\{a, \inf|u_0|, inf|v_0|\}, \max\{b, \sup|u_0|, sup|v_0|]$$

Por el lema (2), tenemos que:

$$\min\{a, \inf|u_0|, \inf|v_0|\} \leq u, v \leq \max\{b, \sup|u_0|, \sup|v_0|\}$$

Si $x_0 = y_0$ entonces $A \equiv 0$ lo que implica que $X \leq 0$ e $Y \geq 0$ y de (4.6) se obtiene:

$$c - f(u(t_0, x_0)) \leq 0$$

$$d - f(v(t_0, y_0)) \geq 0$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

y por tanto:

$$\lambda = c - d \leq f(u(t_0, x_0)) - f(v(t_0, y_0)) \leq L_f \ \sup_{\Re^N \times [0,T]} |u - v|$$

Por lo que si:

$$\lambda > L_f \ \sup_{\Re^N \times [0,T]} |u - v|$$

entonces:

$$x_0 \neq y_0$$

Sea $\mu = \varepsilon \left| x_0 - y_0 \right|^{-2}$, de (4.5) se deduce:

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq \frac{2}{\varepsilon} \begin{pmatrix} B & -B \\ -B & B \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

donde B es $|x_0 - y_0|^2 Id + 5(x_0 - y_0) \otimes (x_0 - y_0)$. Sea Λ la matriz N×N dada por:

$$\Lambda_{ij} = a_{ij} \left(\varepsilon^{-1} \left| x_0 - y_0 \right|^{-2} (x_0 - y_0) \right)$$

se tiene que $\Lambda \geq 0$.

Sea $g_1 = g(u * \nabla G)(t_0, x_0)$ y $g_2 = g(v * \nabla G)(t_0, y_0)$.

Sea la matriz de orden (2N,2N):

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

$$\Gamma = \begin{pmatrix} g_1\Lambda & \sqrt{g_1 g_2}\Lambda \\ \sqrt{g_1 g_2}\Lambda & g_2\Lambda \end{pmatrix}$$

veamos que $\Gamma \geq 0$:

Sean $\xi, \eta \in \Re$:

$$\begin{aligned} {}^t(\xi,\eta)\,\Gamma(\xi,\eta) &= g_1\,{}^t\xi\Lambda\xi + 2\sqrt{g_1 g_2}\,{}^t\xi\Lambda\eta + g_2\,{}^t\xi\Lambda\eta = \\ & \left(\sqrt{g_1}\xi + \sqrt{g_2}\eta\right)\Lambda\left(\sqrt{g_1}\xi + \sqrt{g_2}\eta\right) \end{aligned}$$

Por tanto, como $\Lambda \geq 0$ obtenemos que $\Gamma \geq 0$, lo que implica que si multiplicamos (4.7) por Γ y si tomamos la traza del resultado, obtenemos:

$$\begin{aligned} g_1 \sum_{i,j} a_{ij}\xi_{ij} - g_2 \sum_{i,j} a_{ij}\eta_{ij} &\leq 2\varepsilon^{-1}\left(g_1 - 2\sqrt{g_1 g_2} + g_2\right) tr\,(\Lambda B) \leq \\ 2\varepsilon^{-1}\left(\sqrt{g_1} - \sqrt{g_2}\right)^2 \sum_{i,j} a_{ij}b_{ij} &\leq 2\varepsilon^{-1}\left(\sqrt{g_1} - \sqrt{g_2}\right)^2 C_0\,|x_0 - y_0|^2 \end{aligned}$$

para un cierto C_0 que depende solo de $(a_{ij})_{\,1\leq i,j\leq N}$ de donde, teniendo en cuenta (4.6) y que $\lambda = c - d$

$$\begin{aligned} &\lambda \leq g_1 \sum_{i,j} a_{ij}X_{ij} - g_2 \sum_{i,j} a_{ij}Y_{ij} - (f(u) - f(v)) \leq \\ &\leq 2\varepsilon^{-1}C_0\left(\sqrt{g_1} - \sqrt{g_2}\right)^2 |(x_0 - y_0)|^2 + L_f \sup{}_{[0,T]\times\Re^N} |u - v| \end{aligned} \tag{4.8}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Veamos una estimación de $\left(\sqrt{g_1} - \sqrt{g_2}\right)$.

Teniendo en cuenta que:

$$\sqrt{g_1} - \sqrt{g_2} = \sqrt{g(u * \nabla G)(t_0, x_0)} - \sqrt{g(v * \nabla G)(t_0, y_0)}$$

y recordando que $\sqrt{g}$ es lipschitziana nos queda:

$$\left(\sqrt{g_1} - \sqrt{g_2}\right) \leq L_g \left|(u * \nabla G)(t_0, x_0) - (v * \nabla G)(t_0, y_0)\right|$$

donde L_g es la constante de Lipschitz de $\sqrt{g}$.

Para estimar $\left|(u * \nabla G)(t_0, x_0) - (v * \nabla G)(t_0, y_0)\right|$ hacemos:

$$\left|(u * \nabla G)(t_0, x_0) - (v * \nabla G)(t_0, y_0)\right| \leq$$
$$\left|(u * \nabla G)(t_0, x_0) - (u * \nabla G)(t_0, y_0)\right| + \left|(u * \nabla G)(t_0, y_0) - (v * \nabla G)(t_0, y_0)\right|$$

Veamos ahora por separado cada uno de los sumandos:

$$\left|(u * \nabla G)(t_0, x_0) - (u * \nabla G)(t_0, y_0)\right| =$$
$$\left|\int_{\Re} \left(u(t_0, x_0 - z) - u(t_0, y_0 - z)\right)(\nabla G)(z)\, dz\right| \leq$$
$$L\left|x_0 - y_0\right| \int_{\Re} \left|(\nabla G)(z)\right|\, dz \leq L \cdot C_G \left|x_0 - y_0\right|$$

puesto que $D^\alpha G \in L^1\left(\Re^N\right) \forall\, |\alpha| \leq 2$ y por tanto $C_G \int_{\Re} \left|(\nabla G)(z)\right|\, dz < +\infty$.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Por otra parte tenemos:

$$|(u * \nabla G)(t_0, y_0) - (v * \nabla G)(t_0, y_0)| =$$
$$\left| \int_{\Re} (u(t_0, x_0 - z) - v(t_0, y_0 - z)) (\nabla G)(z)\, dz \right| \leq$$
$$\sup_{\Re^N \times [0,T]} |u - v| \int_{\Re} |(\nabla G)(z)|\, dz \leq C_G \sup_{\Re^N \times [0,T]} |u - v|$$

por la misma razón que antes.

Con lo que $\left(\sqrt{g_1} - \sqrt{g_2}\right)$ viene estimado por:

$$C_2 \left(\sup_{[0,T] \times \Re^N} |u - v| + |x_0 - y_0| \right)$$

donde C_2 depende de g, de la constante de Lipschitz de u, de $\int_{\Re} |(\nabla G)(z)|\, dz$ y de $\sup_{\Re^N \times [0,T]} |u - v|$.

Podemos deducir de (4.8):

$$\lambda \leq C \left(\sup^2_{\Re^N \times [0,T]} |u - v| \frac{|x_0 - y_0|^2}{\varepsilon} + \frac{|x_0 - y_0|^4}{\varepsilon} \right) + L_f \sup_{[0,T] \times \Re^N} |u - v|$$

donde $C = 2C_0 L_g^2 C_2^2$.

y por el lema (3) podemos deducir:

$$\lambda \leq C_3 \left(\|u - v\|^2_{L^\infty(0,T)} \varepsilon^{-\frac{1}{3}} + \varepsilon^{\frac{1}{3}} \right) + L_f \|u - v\|_{L^\infty(0,T)}$$

donde $C_3 = \max\left((4L)^{\frac{2}{3}}, (4L)^{\frac{4}{3}} \right) C$.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $\sup_{[0,T]\times\Re^N} |u-v| > 0$ y tomando:

$$\varepsilon^{\frac{1}{3}} = \delta \|u-v\|_{L^\infty(0,T)}$$

obtenemos:

$$\lambda \leq \left(L_f + C_3\left(\delta + \frac{1}{\delta}\right)\right)\|u-v\|_{L^\infty(0,T)}$$

Por tanto si tomamos:

$$M = L_f + C_3\left(\delta + \frac{1}{\delta}\right) + 1$$

y

$$\lambda = M\|u-v\|_{L^\infty(0,T)}$$

se contradice la desigualdad y por tanto $t_0 = 0$, con lo que se concluye la demostración del lema.

□

LEMA 5 *Sea (t_0, x_0, y_0) máximo de (4.4) y sea L la constante de Lipschitz de u. Si t_0= 0 entonces:*

$$\|u-v\|_{L^\infty(0,T)} \leq \|u_0 - v_0\|_{L^\infty} + \frac{3}{4}L^{\frac{4}{3}}\varepsilon^{\frac{1}{3}} + \lambda T$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Demostración.- Podemos asumir que:

$$\|u - v\|_{L^\infty(0,T)} \leq \sup(u - v)$$

los otros casos se pueden tratar de forma similar.

Tenemos:

$$u(t,x) - v(t,y) - \frac{|x-y|^4}{4\varepsilon} - \lambda t \leq \sup_{x,y}\left\{u_0(x) - v_0(y) - \frac{|x-y|^4}{4\varepsilon}\right\}$$

Si hacemos $x = y$, tenemos:

$$\|u - v\|_{L^\infty(0,T)} \leq \lambda T + \sup_{x,y}\left\{u_0(x) - v_0(y) - \frac{|x-y|^4}{4\varepsilon}\right\} \leq$$

$$\lambda T + \|u_0 - v_0\|_{L^\infty} + \sup_{x,y}\left\{L\,|x-y| - \frac{|x-y|^4}{4\varepsilon}\right\} \tag{4.9}$$

y como la función:

$$h(s) = Ls - \frac{s^4}{4\varepsilon}$$

alcanza su máximo en el punto $s = (L\varepsilon)^{\frac{1}{4}}$. Sustituyendo este valor en (4.9) se concluye la demostración.

□

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Demostración de la unicidad de soluciones:

Si tomamos dos soluciones de viscosidad del problema (4.1 :) tenemos por el lema (5):

$$\|u - v\|_{L^\infty(0,T)} \leq \|u_0 - v_0\|_{L^\infty} + \frac{3}{4} L^{\frac{4}{3}} \varepsilon^{\frac{1}{3}} + \lambda T$$

tomando como en el lema (4)

$$\varepsilon^{\frac{1}{3}} = \delta \|u - v\|_{L^\infty(0,T)}$$

y

$$\delta = L^{-\frac{4}{3}}$$

nos queda:

$$\|u - v\|_{L^\infty(0,T)} \leq \|u_0 - v_0\|_{L^\infty} + \frac{3}{4} \|u - v\|_{L^\infty(0,T)} + \lambda T$$

y entonces:

$$\|u - v\|_{L^\infty(0,T)} \leq 4 \|u_0 - v_0\|_{L^\infty} + 4\lambda T$$

Sea t_1 tal que $4Mt_1 = \frac{1}{2}$ donde M es la constante que para un δ fijo determina λ en el lema (4). Entonces tomando:

$$\lambda = M \|u - v\|_{L^\infty(0,T)}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

se tiene:

$$\frac{1}{2}\|u-v\|_{L^\infty(0,t_1)} \leq 4\|u_0-v_0\|_{L^\infty}$$

$$\Rightarrow \|u-v\|_{L^\infty(0,t_1)} \leq 8\|u_0-v_0\|_{L^\infty}$$

Tomamos ahora un intervalo de la forma $(t_1,\ 2t_1)$ y aplicando el mismo razonamiento obtenemos:

$$\|u-v\|_{L^\infty(t_1,t_2)} \leq 8\|u_1-v_1\|_{L^\infty(0,t_1)} \leq 8\cdot 8\|u_0-v_0\|_{L^\infty}$$

donde u_1, v_1 son los valores tomados en t_1.

Siguiendo el razonamiento se obtiene:

$$\|u-v\|_{L^\infty(0,T)} \leq 8^n\|u_0-v_0\|_{L^\infty}$$

donde n es tal que:

$$n\cdot t_1 \geq T$$

y de aquíse deduce que:

$$\|u-v\|_{L^\infty(0,T)} \leq C_T\|u_0-v_0\|_{L^\infty}$$

y si ambas soluciones tienen el mismo dato inicial u_0, coinciden.

□

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Para la demostración de la existencia de soluciones, consideraremos el siguiente problema aproximado:

Se considera $u_0^\varepsilon \in C^\infty(\Re^N)$ periódica, tal que:

$$u_0^\varepsilon \longrightarrow u_0 \text{ uniformemente en } \Re^N \text{ si } \varepsilon \to 0.$$

$$\|\nabla u_0^\varepsilon\|_{L^\infty} \leq \|\nabla u_0\|_{L^\infty};\ \|u_0^\varepsilon\|_{L^\infty} \leq \|u_0\|_{L^\infty}$$

También se introduce $g_\varepsilon = g + \varepsilon;\ a_{ij}^\varepsilon = \varepsilon\delta_{ij} + \alpha_{ij}^\varepsilon$, donde:

- $\alpha_{ij}^\varepsilon \longrightarrow a_{ij}^\varepsilon$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\Re^N \setminus \{0\}$
- $\sup_{i,j,\varepsilon} \sup_{\Re^N \setminus \{0\}} \left|\alpha_{ij}^\varepsilon\right| < \infty$
- $\sum_{i,j} \alpha_{ij}^\varepsilon(p)\xi_i\xi_j \geq 0 \ \ \forall p \in \Re^N \setminus \{0\},\ \xi \in \Re^N$
- α_{ij}^ε es de soporte compacto en $\Re^N \setminus \{0\}$

y utilizaremos los siguientes lemas:

LEMA 6 *Sean $A = (a_{ij})$, $U = (u_{ij})$ matrices simétricas con $A \geq 0$, entonces se verifica:*

$$\left|\sum_{i,j} a_{ij}u_{ij}\right| \leq C\left(\sum_{i,j} a_{ij}\sum_k u_{ki}u_{kj}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Demostración.- como

$$\sum_{i,j} a_{ij}u_{ij} = tr\ AU$$

y

$$\sum_{i,j} a_{ij}\sum_k u_{ki}u_{kj} = tr\ AU^2$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

para probar el lema, se elige una matriz B que diagonalice U (y no A).

$$^tBB = Id,\ U =^t BDB$$

entonces, escribiendo $(c_{ij}) = BA\,^tB$ y $D = diag\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$, calculamos:

$$|tr\ AU|^2 = \left|tr\left(A\,^tBDB\right)\right|^2 = \left|tr\left(BA\,^tB\right)D\right|^2 = \left(\sum_i c_{ii}\lambda_i\right)^2$$

y por la desigualdad de Schwarz:

$$\left(\sum_i c_{ii}\lambda_i\right)^2 \leq \sum_i c_{ii} \sum_i c_{ii}\lambda_i^2$$

$$\sum_i c_{ii} \sum_i c_{ii}\lambda_i^2 = trBA\,^tBtrBA\,^tBD^2 = tr\ AU \cdot tr\ AU^2.$$

tomando:

$$C = (tr\ A)^{\frac{1}{2}}$$

el lema queda probado.

□

LEMA 7 (Estimación del gradiente) *Sea u una solución regular de:*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - g\left(\omega * \nabla G\right) \sum_{i,j} a_{ij}\left(\nabla u\right) u_{ij} - f\left(u\right) = 0\ sobre\ ]0, +\infty[\times \Re^N \qquad (4.10)$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

donde a_{ij} *se supone regular sobre* $\Re^N$ *y* $\omega \in L^\infty\left(]0,+\infty[\times \Re^N\right)$. *Entonces:*

$$\|\nabla u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\Re^N)} \leq e^{Ct} \|\nabla u_0\|_{L^\infty(\Re^N)} \tag{4.11}$$

donde C *depende de* $sup\,|a_{ij}|$, $sup_s\,|f'(s)|$ *y* $sup_{|p|<R}\,|D^2 g(p)|$, *con* $R = \|\omega\|_{L^\infty(\Re^N)} \|\nabla G\|_{L^1(\Re^N)}$.

Demostración.- Para demostrar la desigualdad, utilizaremos el método clásico de Bernstein [49]. Para esto se deriva (4.10) respecto de x_k:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_k}{\partial t} &= \partial_k(g(\omega * \nabla G)) \sum_{i,j} a_{ij}(\nabla u)\, u_{ij} \\ &\quad + g(\omega * \nabla G)\left[\sum_l \left(\sum_{i,j} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_l}\right) u_{lk} u_{ij} + \sum_{i,j} a_{ij}(\nabla u)\, u_{ijk}\right] + f'(u)\, u_k\end{aligned}$$

multiplicando por $2u_k$, se obtiene:

$$\begin{aligned}2u_k\frac{\partial u_k}{\partial t} &= 2\left(\partial_k(g(\omega * \nabla G))\right) \sum_{i,j} a_{ij}(\nabla u)\, u_{ij} u_k \\ &\quad + 2g(\omega * \nabla G)\left[\sum_l \left(\sum_{i,j} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_l}\right) u_{lk} u_{ij} + \sum_{i,j} a_{ij}(\nabla u)\, u_{ijk}\right] u_k + 2f'(u)\, u_k^2\end{aligned}$$

puesto que:

$$\begin{aligned}\partial_{ij}\left(u_k^2\right) &= \partial_i\left(2u_{kj}u_k\right) = 2u_{ijk}u_k + 2u_{ik}u_{jk} \\ \sum_k u_{ikj}u_k &= \partial_{ij}\left|\nabla u\right|^2 - 2\sum_k u_{ik}u_{jk}\end{aligned}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

$$2\sum_l u_{kl}u_k = \sum_l \partial_k (u_l)^2 = \partial_k |\nabla u|^2$$

sumando sobre k, podemos escribir:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}|\nabla u|^2 &= 2\sum_k \partial_k (g(\omega * \nabla G)) \sum_{i,j} a_{ij}(\nabla u) u_{ij}u_k + \\ & g(\omega * \nabla G)\sum_k \sum_{i,j} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\partial_k |\nabla u|^2 u_{ij} \\ & + g(\omega * \nabla G)\sum_{i,j} a_{ij}(\nabla u)\partial_{ij}|\nabla u|^2 - \\ & 4g(\omega * \nabla G)\sum_k \sum_{i,j} a_{ij}(\nabla u) u_{ik}u_{jk} + 2f'(u)|\nabla u|^2\end{aligned}$$

Si llamamos:

$$\ell(v) = g(\omega * \nabla G)\sum_{i,j} a_{ij}(\nabla u)\partial_{ij}v + g(\omega * \nabla G)\sum_k \sum_{i,j} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\partial_k u_{ij} v$$

podemos escribir:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \ell\right)|\nabla u|^2 &= 2\sum_k \frac{\partial g(\omega * \nabla G)}{\partial x_l}\sum_{i,j} a_{ij}(\nabla u) u_{ij}u_k \\ & -4g(\omega * \nabla G)\sum_k \sum_{i,j} a_{ij}(\nabla u) u_{ik}u_{jk} + 2f'(u)|\nabla u|^2\end{aligned}$$

como:

$$|\omega * \partial_{lk} G| \leq C \tag{4.12}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x_k}(\omega * \nabla G)\right| \leq C\left(g\left(\omega * \nabla G\right)\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \left(g\left(x\right)\right)^{\frac{1}{2}} \in W^{1,\infty}\left(\Re^N\right)$$

$$\left|u_k \frac{\partial g}{\partial x_k}\right| \leq C\left|\nabla u\right| |g(x)|^{\frac{1}{2}}$$

donde C depende solo de $\sup|\omega|$ y g, se puede escribir:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \ell\right)|\nabla u|^2 \leq -4g(\omega * \nabla G)\sum_k \sum_{i,j} a_{ij}\left(\nabla u\right) u_{ik}u_{jk}$$
$$+2C\textstyle\sum_k \left(g(\omega * \nabla G)\right)^{\frac{1}{2}} \displaystyle\sum_{i,j} a_{ij}\left(\nabla u\right) u_{ij}u_k + 2f'(u)\left|\nabla u\right|^2$$

y teniendo en cuenta (4.12) y el lema (6) obtenemos:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \ell\right)|\nabla u|^2 \leq -4g(\omega * \nabla G)\sum_k \sum_{i,j} a_{ij}\left(\nabla u\right) u_{ik}u_{jk}$$
$$+2C\sum_k \left(g(\omega * \nabla G)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i,j} a_{ij}\left(\nabla u\right) u_{ki}u_{kj}\right)^{\frac{1}{2}} u_k + 2f'(u)\left|\nabla u\right|^2$$
$$\leq -4g(\omega * \nabla G)\sum_k \sum_{i,j} a_{ij}\left(\nabla u\right) u_{ik}u_{jk} + g(\omega * \nabla G)\sum_k \sum_{i,j} a_{ij}\left(\nabla u\right) u_{ik}u_{jk}$$
$$+C^2\left|\nabla u\right|^2 + 2f'(u)\left|\nabla u\right|^2$$

esta última desigualdad es debida a que $2ab \leq a^2 + b^2$

como $\sum_k \sum_{i,j} a_{ij}\left(\nabla u\right) u_{ik}u_{jk} \geq 0$, y teniendo en cuenta que $f'(u)$ está acotada obtenemos :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \ell\right)|\nabla u|^2 \leq C\left|\nabla u\right|^2 \tag{4.13}$$

Haciendo el cambio:

$$v = |\nabla u|^2$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

en (4.13) podemos escribir:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \ell\right) v \leq Cv$$

Si hacemos ahora:

$$\tilde{v} = e^{-Ct} v$$

obtenemos:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \ell\right) \tilde{v} \leq 0$$

y teniendo en cuenta que ℓ es un operador elíptico, nos queda (4.11) aplicando el principio del máximo.

□

LEMA 8 *Se considera la solución regular* u^ε *de:*

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - g_\varepsilon \left(u^\varepsilon * \nabla G\right) \sum_{i,j} a_{ij}^\varepsilon \left(\nabla u^\varepsilon\right) \partial_{ij} u^\varepsilon + f\left(u^\varepsilon\right) = 0$$

Entonces para todo $\delta > 0$, *existe* $u_\delta^\varepsilon \in W^{2,\infty}(\Re^N)$ *tal que para* $0 < s \leq t \leq T$, *se tiene:*

1. $Sup_{x \in \Re^N} \left|u^\varepsilon(s,x) - u_\delta^\varepsilon(x)\right| \leq C_T \delta.$

2. $Sup_{x \in \Re^N} \left|D^2 u_\delta^\varepsilon(x)\right| \leq \dfrac{C_T}{\delta}.$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

3. $\|u^\varepsilon(t,\cdot) - u_\delta^\varepsilon(\cdot)\|_{L^\infty} \leq \left(M + \frac{C_T}{\delta}\right)(t-s) + C_T\delta.$

4. *$u^\varepsilon(t,x)$ es equicontinua respecto de x y de t.*

Donde C_T es una constante que no depende de δ.

Demostración.- Para demostrar los dos primeros casos, se considera el operador "mollifier" ([38], capítulo 10) para definir $u_\delta^\varepsilon = J_\delta u^\varepsilon(s,\cdot)$ donde J_δ viene dada por:

$$(J_\delta u^\varepsilon)(x) = \frac{1}{\delta^N}\int_{|x-y|<\delta} \rho\left(\frac{|x-y|}{\delta}\right) u^\varepsilon(s,y)dy$$

donde ρ es una función de clase C^∞ que verifica las propiedades siguientes:

$$\rho(x) \geq 0 \qquad si\ |x| \leq 1$$

$$\rho(x) = 0 \qquad si\ |x| > 1$$

$$\int_{|x|\leq 1} \rho(x)dx = 1$$

Se obtiene fácilmente:

$$D^2 u_\delta^\varepsilon(x) = \frac{1}{\delta^N}\int_{|x-y|<\delta} D\rho\left(\frac{|x-y|}{\delta}\right) Du^\varepsilon(t,y)dy$$

y por tanto existe una constante:

$$C_T \geq \sup|Du^\varepsilon| \int_{|x|<1} |D\rho(x)|$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

tal que:

$$Sup_{x\in\Re^N}\left|D^2u_\delta^\varepsilon(x)\right| \leq \frac{C_T}{\delta}$$

Además se puede escribir:

$$|u^\varepsilon(s,x) - u_\delta^\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{\delta^N}\int_{|x-y|<\delta}\rho\left(\frac{|x-y|}{\delta}\right)|u^\varepsilon(s,y) - u^\varepsilon(s,x)|\,dy$$

se puede demostrar que:

$$|u^\varepsilon(s,y) - u^\varepsilon(s,x)| \leq C_T\,|x-y|$$

utilizando el lema (7).

Se tiene por tanto:

$$|u^\varepsilon(s,x) - u_\delta^\varepsilon(x)| < C_T\delta.$$

Para obtener que $u^\varepsilon(t,x)$ es equicontinua es suficiente demostrar:

$$|u^\varepsilon(t,y) - u^\varepsilon(t,x)| \leq C_T\,|x-y|$$

$$|u^\varepsilon(s,x) - u^\varepsilon(t,x)| \leq M\,|t-s| + 2C_T\,|t-s|^{\frac{1}{2}}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

La primera parte ya se ha visto y solo queda demostrar la segunda parte, para lo cual hacemos:

$$v(x,t) = u^{\varepsilon}(t,x) - u_{\delta}^{\varepsilon}(x)$$

se tiene que la derivada respecto de t es:

$$v_t = u_t^{\varepsilon}$$

entonces se puede escribir:

$$v_t - g_{\varepsilon}\left(u^{\varepsilon} * \nabla G\right) \sum_{i,j} a_{ij}\left(\nabla u^{\varepsilon}\right) \partial_{ij} v = f(u_{\delta}^{\varepsilon}) + g_{\varepsilon}\left(u^{\varepsilon} * \nabla G\right) \sum_{i,j} a_{ij}\left(\nabla u^{\varepsilon}\right) \partial_{ij} u_{\delta}^{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow v_t - g_{\varepsilon}\left(u^{\varepsilon} * \nabla G\right) \sum_{i,j} a_{ij}\left(\nabla u^{\varepsilon}\right) \partial_{ij} v \leq M + \frac{C_T}{\delta} = M_T'$$

Si llamamos ahora:

$$\ell_1(v) = g_{\varepsilon}\left(u^{\varepsilon} * \nabla G\right) \sum_{i,j} a_{ij}\left(\nabla u^{\varepsilon}\right) \partial_{ij} v$$

y hacemos el cambio:

$$\tilde{v}^1(x,t) = v(x,t) - M_T'(t-s)$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

entonces $\tilde{v}_t^1 - \ell_1(\tilde{v}^1) \leq 0$ y como ℓ_1 es un operador elíptico, se obtiene por el principio del máximo que:

$$\sup_{\Re^N \times (s,t)} \tilde{v}^1(x,t) \text{ se alcanza en } t = s$$

$$\Longrightarrow v(x,t) \leq M_T'(t-s) + \sup_x v(x,s) \leq M_T'(t-s) + C_T\delta$$

Si ahora escribimos:

$$\tilde{v}^2(x,t) = -v(x,t) - M_T'(t-s)$$

se tiene que:

$$\tilde{v}_t^2 - \ell_1(\tilde{v}^2) \leq 0$$

y por la misma razón se obtiene que:

$$-v(x,t) \leq M_T'(t-s) + \sup_x v(x,s) \leq M_T'(t-s) + C_T\delta$$

En realidad se ha visto que:

$$|v(x,t)| < M_T'(t-s) + C_T\delta$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Entonces se tiene que:

$$|u^\varepsilon(s,x) - u^\varepsilon(t,x)| \leq |u^\varepsilon(t,x) - u_\delta^\varepsilon(x)| + |u^\varepsilon(s,x) - u_\delta^\varepsilon(x)|$$
$$\leq |u^\varepsilon(t,x) - u_\delta^\varepsilon(x)| + \|u^\varepsilon(s,\cdot) - u_\delta^\varepsilon\|_{L^\infty} \leq \left(M + \frac{C_t}{\delta}\right)(t-s) + C_T\delta + C_T\delta$$

Haciendo:

$$\delta = |t-s|^{\frac{1}{2}}$$

nos queda:

$$|u^\varepsilon(s,x) - u^\varepsilon(t,x)| \leq M(t-s) + 2C_T|t-s|^{\frac{1}{2}}$$

de donde se deduce fácilmente la equicontinuidad de $u^\varepsilon(t,x)$

□

Demostración de la existencia de soluciones:

Utilizando la teoría de las ecuaciones cuasilineales uniformemente parabólicas [49], se deduce que existe una solución u^ε regular definida sobre $[0,+\infty[\times \Re^N$ de la ecuación regularizada:

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - g_\varepsilon(u^\varepsilon * \nabla G)\sum_{i,j} a_{ij}^\varepsilon(\nabla u^\varepsilon)\,\partial_{ij}u^\varepsilon + f(u^\varepsilon) = 0 \quad en\ ]0,+\infty[\times \Re^N$$

Teniendo en cuenta las propiedades de consistencia y estabilidad de las soluciones de viscosidad, es suficiente mostrar que u^ε (o una subsucesión) converge uniformemente sobre el dominio $[0,T] \times \Re^N$ hacia una función

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

$u \in C\left([0,T] \times \Re^N\right) \cap L^\infty\left(0,T; W^{1,\infty}\left(\Re^N\right)\right)$ para cada $T < \infty$.

Como las funciones u^ε son equicontinuas, usando el teorema de Arzola-Ascoli se concluye la demostración.

□

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Estados Asintóticos

En primer lugar vamos a estudiar los estados asintóticos de la ecuación

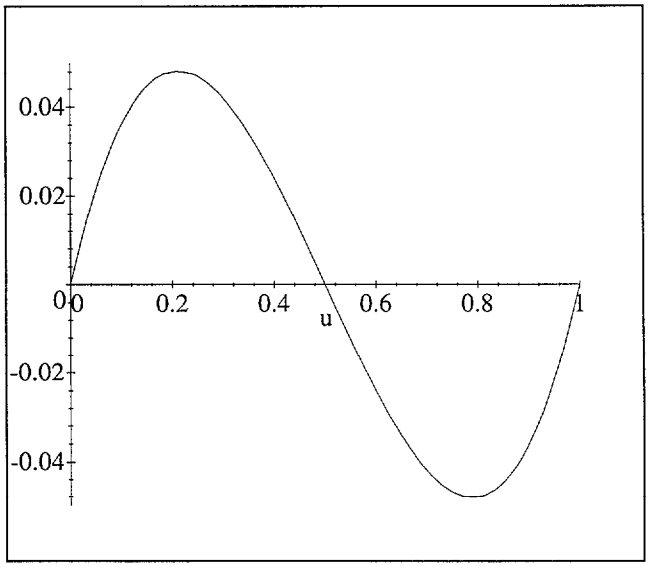
$$u_t = f(u)$$

siendo $f(u)$ una función no lineal del tipo de las empleadas en la ecuación (4.1).

Vamos a resolverla para funciones distintas:

si suponemos que $f(u) = u(\frac{1}{2} - u)(1 - u)$, la ecuación queda:

$$\frac{du}{u\left(\frac{1}{2} - u\right)(1 - u)} = dt \tag{4.14}$$



Gráfica de la función $u_t = u(0.5 - u)(1 - u)$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Las soluciones $u = 0$, y $u = 1$, son puntos críticos de equilibrio inestable, en el sentido de que si se producen pequeñas variaciones, los valores finales varían bastante. En cambio la solución $u = \frac{1}{2}$, es una solución asintóticamente estable de la ecuación (4.14) o bien que es punto crítico (de equilibrio) asintóticamente estable. Este hecho se puede interpretar de la siguiente forma: Las soluciones $u = 0$, y $u = 1$, proporcionan soluciones inestables en el sentido de que pequeñas variaciones en la entrada, hacen que los valores finales sean muy distintos, mientras que en la solución $u = \frac{1}{2}$, pequeñas variaciones en la entrada dejan la salida estable.

Resolviendo la ecuación diferencial obtenemos:

$$\frac{d\left(u\left(t\right)\right)}{u\left(t\right)\left(0.5-u\left(t\right)\right)\left(1-u\left(t\right)\right)} = dt$$

que es una ecuación diferencial ordinaria de variables separadas

$$\int \frac{d\left(u\left(t\right)\right)}{u\left(t\right)\left(0.5-u\left(t\right)\right)\left(1-u\left(t\right)\right)} = \int dt$$

Integrando nos queda:

$$t = 2\ln\frac{u(1-u)}{(0.5-u)^2}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Con lo que despejando u nos queda:

$$u(t) = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{C \cdot e^{\frac{t}{2}} + 1}} \quad C > 0$$

Si hacemos que $u(0) = u_0$, y tomamos la suma, nos queda:

$$\begin{aligned} u(0) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{C+1}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{C+1}} = 2u_0 - 1 \\ \sqrt{C+1} &= \frac{1}{2u_0 - 1} \Rightarrow C = \left(\frac{1}{2u_0 - 1}\right)^2 - 1 \end{aligned}$$

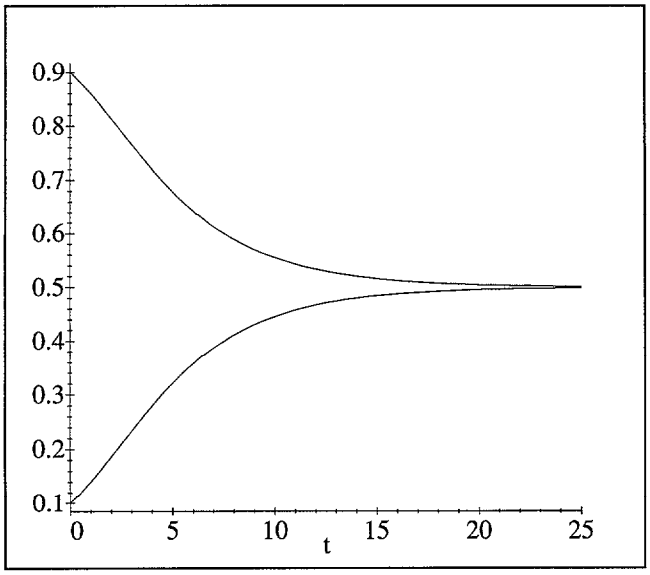
para el caso de la resta se obtiene la misma constante puesto que

$$(2u_0 - 1)^2 = (1 - 2u_0)^2$$

con lo que la solución de la ecuación queda:

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{\left(\left(\frac{1}{2u_0-1}\right)^2 - 1\right) \cdot e^{\frac{t}{2}} + 1}} \Rightarrow \\ u(t) &= \frac{1}{2} \pm \frac{2u_0 - 1}{2\sqrt{\left(1 - (2u_0 - 1)^2\right) \cdot e^{\frac{t}{2}} + (2u_0 - 1)^2}} \end{aligned}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003



Gráfica de las soluciones para un valor de entrada $u_0 = 0.1$. Nótese que la solución $u = 0.5$ está incluida.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

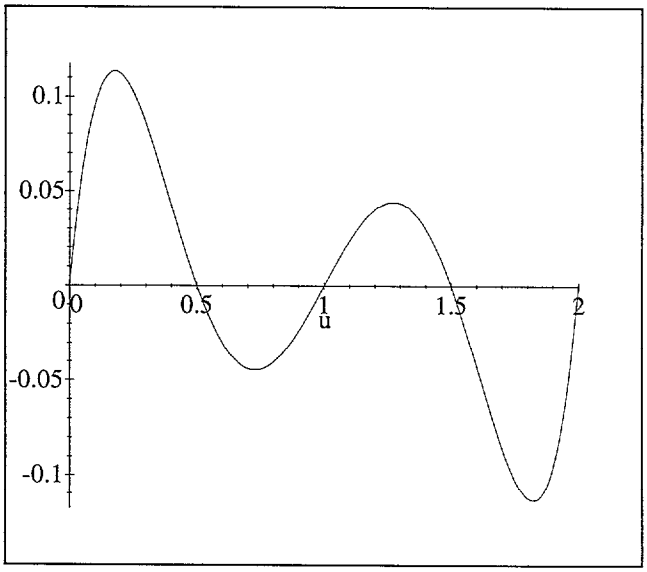
Esta solución contiene la solución constante $u(t) = \frac{1}{2}$, que corresponde al valor inicial $u_0 = \frac{1}{2}$, además cuando $t \to \infty$, la solución $u(t) \to \frac{1}{2}$.

Suponiendo ahora que $f(u) = u\left(\frac{1}{2} - u\right)(1-u)\left(\frac{3}{2} - u\right)(2-u)$, la ecuación diferencial nos queda:

$$\int \frac{du}{u\left(\frac{1}{2} - u\right)(1-u)\left(\frac{3}{2} - u\right)(2-u)} = \int dt$$

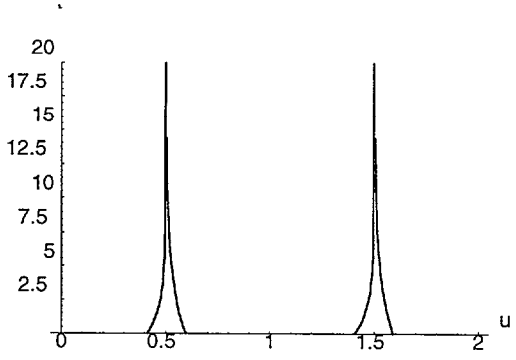
$$\int \frac{du}{u\left(\frac{1}{2} - u\right)(1-u)\left(\frac{3}{2} - u\right)(2-u)} = 2\ln \frac{u\,(-1.0+u)^6\,(-2.0+u)}{(-1.0+2.0u)^4\,(-3.0+2.0u)^4}$$

$$\int dt = t$$



Gráfica de la función $u_t = u(0.5-u)(1-u)(1.5-u)(2-u)$

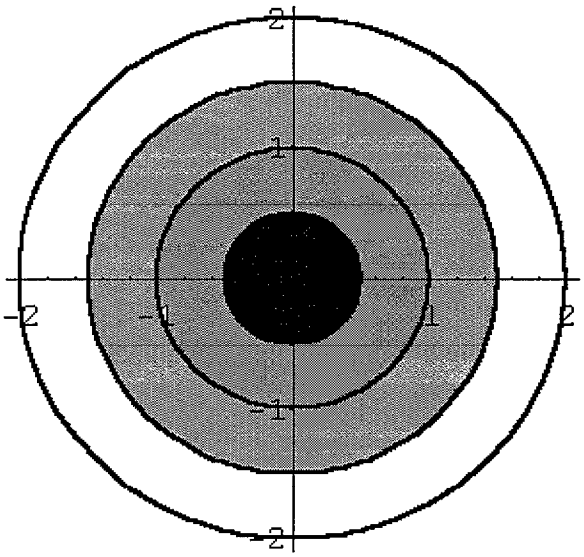
En este caso no es fácil encontrar u de forma explícita. En la siguiente figura se puede ver una gráfica de u en la que se han invertido los ejes.



Soluciones de la ecuación. Puede verse que las soluciones $u = 0.5, 1.5$ están incluidas

En este caso, se ve que los estados asintóticos estables son las soluciones $u = \frac{1}{2}$, $u = \frac{3}{2}$, cuya interpretación geométrica puede ser la siguiente:

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003



En el caso de nuestra ecuación, para estudiar los posibles estados asintóticos no triviales supondremos el caso de funciones radiales. Además por comodidad supondremos que la función $g = 1$.

Si estos estados existen, deben ser tales que verifiquen

$$\|\nabla u_\infty\| \, div \left[\frac{\nabla u_\infty}{\|\nabla u_\infty\|} \right] + f\left(u_\infty\right) = 0$$

donde

$$\|\nabla u\| \, div \left[\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right] + f\left(u\right) =$$

$$\frac{u_y^2}{u_x^2 + u_y^2} u_{xx} - \frac{u_x u_y}{u_x^2 + u_y^2} 2u_{xy} + \frac{u_x^2}{u_x^2 + u_y^2} u_{yy} + f(u)$$

Supongamos que u es una función radial con centro en el origen, o sea

$$u(x, y) = h(x^2 + y^2)$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Llamando $r = h(x^2 + y^2)$ nos queda:

$$\begin{aligned} u_x &= 2xh'(r) \\ u_y &= 2yh'(r) \\ u_{xx} &= 2h'(r) + 4x^2h''(r) \\ u_{xy} &= 4xyh''(r) \\ u_{yy} &= 2h'(r) + 4y^2h''(r) \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores nos queda

$$u_{\xi\xi} = 2h'(r)$$

con lo que la ecuación quedará

$$2\frac{d\left(h\left(r\right)\right)}{dr} - f\left(h\left(r\right)\right) = 0 \Rightarrow 2\frac{d\left(h\left(r\right)\right)}{f\left(h\left(r\right)\right)} = dr$$

que es también una ecuación diferencial ordinaria de variables separadas.

Resolviéndola, como antes, con la función $f(u) = u(\frac{1}{2} - u)(1 - u)$, la ecuación diferencial nos queda:

$$2\frac{d\left(h\left(r\right)\right)}{h\left(r\right)\left(0.5 - h\left(r\right)\right)\left(1 - h\left(r\right)\right)} = dr$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

$$2\int \frac{d\left(h\left(r\right)\right)}{h\left(r\right)\left(0.5-h\left(r\right)\right)\left(1-h\left(r\right)\right)} = \int dr$$

$$\int \frac{2du}{u(\frac{1}{2}-u)(1-u)} = 4\ln\frac{u\left(u-1\right)}{\left(2u-1\right)}$$

$$\int dr = r$$

Con lo que despejando u nos queda:

$$u = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{C\cdot e^{\frac{r}{4}}+1}} \quad C>0$$

donde se puede observar que en los posibles estados asintóticos de la ecuación se encuentra el valor $\frac{1}{2}$.

Suponiendo ahora que $f(u) = u\left(\frac{1}{2}-u\right)(1-u)\left(\frac{3}{2}-u\right)(2-u)$, la ecuación diferencial nos queda:

$$2\frac{du}{u\left(\frac{1}{2}-u\right)(1-u)\left(\frac{3}{2}-u\right)(2-u)} = dr$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

$$2\int \frac{du}{u\left(\frac{1}{2}-u\right)(1-u)\left(\frac{3}{2}-u\right)(2-u)} = \int dr$$

$$\int \frac{du}{u\left(\frac{1}{2}-u\right)(1-u)\left(\frac{3}{2}-u\right)(2-u)} = 4\ln \frac{u\,(-1.0+u)^6\,(-2.0+u)}{(-1.0+2.0u)^4\,(-3.0+2.0u)^4}$$

$$\int dr = r$$

De nuevo puede observarse que en los posibles estados asintóticos se encuentran las soluciones $u = \frac{1}{2},\ u = \frac{3}{2}$.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

CAPÍTULO V

Análisis Numérico

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Cuantificador Óptimo

En nuestro modelo, el primer problema a resolver es la elección del cuantificador óptimo Q_S. Usualmente, el funcional de Lloyd se utiliza para obtener un cuantificador. Sin embargo, en aplicaciones de proceso de imágenes se desea que los niveles de cuantificación no estén demasiado cerca uno del otro. Para penalizar este hecho hemos añadido términos en el funcional de Lloyd, de manera que trabajamos con el funcional:

$$E(Q_S) = \sum_{k=1}^{S} \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} (s - u_k)^2 \, dH(s) + \frac{\lambda_S}{t_{k-1} - t_k} + C \left(\frac{t_{k-1} + t_k}{2} - u_k \right)^2 \right)$$

donde L_S y C son constantes positivas. Nótese que cuando L_S y C tienden a infinito, el mínimo del funcional anterior tiende a un cuantificador uniformemente distribuido, es decir, la distancia entre los niveles de cuantificación es constante. Sin embargo, usando este funcional, hemos resuelto problemas de no unicidad que aparecen cuando se usa el funcional de Lloyd. Efectivamente, en el caso en que el histograma de una imagen sea 0 en una región, entonces el funcional de Lloyd puede tener varios mínimos globales, pero en el caso de nuestro funcional, este problema de no unicidad desaparece, porque los niveles de cuantificación tienden a distribuirse uniformemente.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Una forma de calcular las condiciones necesarias para la minimización de $E(Q_S)$ podría ser igualando a cero las derivadas de (3.1), respecto de t_k y u_k.

Teniendo en cuenta que $t_{k-1} \leq t_k$, se obtienen las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} t_k &= \frac{u_{k-1} + u_k}{2} \\ u_k &= \frac{\int_{t_k}^{t_{k+1}} u p_u(u) du}{\int_{t_k}^{t_{k+1}} p_u(u) du} = E\left[u \mid u \in I_k\right] \end{aligned}$$

donde I_k es el k-ésimo intervalo $[t_k,\ t_{k+1})$.

El sistema no posee en general soluciones que se puedan obtener de forma explícita y por tanto es necesario resolverlo mediante técnicas numéricas. En ciertos casos, cuando $p_u(u)$ sigue una distribución laplaciana, o sea, cuando $p_u(u) = \frac{\alpha}{2} \exp\left(-\alpha \left|u - \mu\right|\right)$, donde μ es la media de $p_u(u)$ y la varianza σ^2 viene dada por $\frac{2}{\alpha}$, la solución se puede obtener de forma explícita. Desafortunadamente, la probabilidad de que el histograma $p_u(u)$ siga una distribución uniforme es casi nula, entonces puede resolverse por métodos de gradiente descendente, pero este procedimiento no funciona bien debido a que depende fuertemente de la aproximación inicial que se elija. El problema se debe a que tanto nuestro funcional como el funcional de Lloyd tienen, en general, una gran cantidad de minimos locales, que pueden quedar lejos del minimo global.

Un cuantificador de S niveles de gris de una imagen de N niveles, puede considerarse como una partición del conjunto ordenado $\{x_i : 1 \leq i \leq N\}$ en S

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

subconjuntos $\{x_i : t_{j-1} \leq i \leq t_j\}$, donde $0 \leq j \leq S$ y $t_0 = 0,\ t_S = N$.

Si se define el conjunto finito:

$$Q_S^{[1,N]} = \{t : 1 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_{k-1} < N\} \subset \aleph^{S-1}$$

donde $\aleph$ representa a los números naturales, entonces existe una aplicación biyectiva entre un $t \in Q_S^{[1,N]}$ y una partición definida por un cuantificador de S niveles de una imagen de N niveles.

A nivel discreto, se puede ver el funcional como una función de t y u de la siguiente forma:

$$E(t,u) = \sum_{k=1}^{S} \left(\sum_{t_{k-1}+1}^{t_k} (s-u_k)^2 \, dH(s) + \frac{L_S}{t_{k-1}-t_k} + C\left(\frac{t_{k-1}+t_k}{2} - u_k\right)^2 \right)$$

donde las integrales han sido sustituidas por sumatorios.

Encontrar un cuantificador óptimo es, por lo tanto, un problema de programación no lineal de minimizar $E(t,u)$ para todo $t \in Q_S^{[1,256]}$. Puesto que $Q_S^{[1,256]}$ es un conjunto finito, por enumeración de todos los posibles cuantificadores $\left(\left|Q_S^{[1,256]}\right| = \binom{255}{S-1}\right)$ y minimizando $E(t,u)$ respecto de u para cada cuantificador, se puede llegar a una solución global. Por supuesto, dado el número posible de cuantificadores no es posible pensar en una solución de este tipo incluso para números pequeños.

Asumiremos que los niveles finales $\{u_k\}$ son números enteros en el inter-

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

valo $[0, 255]$ que son los valores usuales de niveles de gris de una imagen. Para evitar que los niveles finales $\{u_k\}$ y los separadores $\{t_k\}$ tengan los mismos valores, definimos los separadores $\{t_k\}$ en el conjunto de números reales $\{-0.5, 0.5, 1.5, 2.5, ..., 255.5\}$. En general, la búsqueda exhaustiva del mínimo global del funcional (3.1) tiene una complejidad de $\mathcal{O}(K^{S+1})$ donde K representa la dimensión del espacio de búsqueda (en nuestro caso 257) y S representa el número de niveles de cuantificación. Sin embargo utilizando técnicas de programación dinámica, podemos bajar la complejidad de la búsqueda a $\mathcal{O}(K^2 S)$.

Las técnicas de programación dinámica han sido y son utilizadas para calcular el mínimo global del funcional de Lloyd (ver por ejemplo [21] o más recientemente [72] donde los autores muestran que en algunos casos la complejidad de la búsqueda se puede reducir a $\mathcal{O}(KS)$). Podemos aplicar las técnicas de la programación dinámica en el caso de que el funcional de energía sea separable en el siguiente sentido:

Si $\hat{Q}_S$ es un mínimo global de energía en el intervalo $[t_1, t_{S+1}]$ con

$$t_1 < u_1 < t_2 < u_2 < ..... < u_S < t_{S+1}$$

, entonces el cuantificador $\hat{Q}_{S-1}$ definido por

$$t_2 < u_2 < ..... < u_S < t_{S+1}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

es un mínimo global de energía en el intervalo $[t_2, t_{S+1}]$.

En el siguiente lema se establece que el funcional (3.1) es separable:

LEMA 9 *El funcional de energía* $E(Q_N^{[a,b]})$ *es separable*

Demostración.- Notemos que para cada intervalo $(t_{k-1},\ t_k]$ el funcional de energía solo depende de valores del histograma que pertenecen a $[t_{k-1},\ t_k]$.

Supongamos que $Q_N^{[a,b]}$ es un cuantificador que optimiza el mínimo de energía, del que t_1 es su primer separador distinto de a. Veamos que $Q_{N-1}^{[t_1,b]}$ también minimiza la energía en $(t_1, b]$.

Si existiese otro cuantificador distinto $S_{N-1}^{[t_1,b]}$ tal que:

$$E(S_{N-1}^{[t_1,b]}) < E\left(Q_{N-1}^{[t_1,b]}\right)$$

entonces $S_N^{[a,b]} = \{a, t_1\} \cup S_{N-1}^{[t_1,b]}$ que es distinto de $Q_N^{[a,b]}$ nos daría una energía menor que $Q_N^{[a,b]}$, lo cual es absurdo.

□

Una vez establecida la separabilidad del funcional, es necesario ver que la energía disminuye a medida que el número de niveles finales aumenta.

LEMA 10 *Para* $C = 0$, *si* $\lim_{N\to\infty} \lambda_N (N+1)^2 = 0$, *entonces* $\lim_{N\to\infty} E(Q_N^{[a,b]}) = 0$.

Demostración.- En primer lugar es fácil demostrar que el mínimo de:

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

$$\sum_{k=1}^{N+1} \frac{\lambda_N}{t_k - t_{k-1}}$$

se obtiene cuando los t_i están equidistantemente distribuidos, lo que implica que:

$$t_k - t_{k-1} = \frac{b-a}{N+1}$$

lo que proporciona una suma:

$$\sum_{k=1}^{N+1} \frac{\lambda_N}{t_k - t_{k-1}} = \sum_{k=1}^{N+1} \frac{\lambda_N (N+1)}{b-a} = \frac{\lambda_N (N+1)^2}{b-a}$$

Por otra parte, en caso de que los t_i estén equidistantemente distribuidos se tiene:

$$\sum_{k=1}^{N+1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (s-u_k)^2 dH(s) \leq \sum_{k=1}^{N+1} (t_k - t_{k-1})^2 \int_{t_{k-1}}^{t_k} dH(s)$$

Sea $M = \int_a^b dH(s)$, deducimos entonces:

$$\sum_{k=1}^{N+1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (s-u_k)^2 dH(s) < \sum_{k=1}^{N+1} \left(\frac{b-a}{N+1} \right)^2 M = \frac{(b-a)^2 M}{N+1}$$

que tiende a cero cuando N tiende a infinito.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Como $E(Q_N^{[a,b]}) < \sum_{k=1}^{N+1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (s - u_k)^2 dH(s) + \frac{\lambda_N}{t_k - t_{k-1}}$, se tiene que $\lim_{N\to\infty} E(Q_N^{[a,b]}) = 0$.

□

En orden a establecer propiedades que nos permitan optimizar el número de operaciones, es interesante ver como influyen los separadores en el nivel final. Esta influencia queda establecida en el siguiente lema:

LEMA 11 *El atractor $u_{t,t'}$ correspondiente al intervalo $(t,\ t']$ es no decreciente respecto a t y t'.*

Demostración.-

$$u_{t,t'} = \frac{\int_t^{t'} sh(s)ds + C\frac{t+t'}{2}}{\int_t^{t'} sh(s)ds + C}$$

veamos primero que $u_{t,t'}$ es una función creciente respecto de t, para lo cual derivamos respecto de t:

$$\frac{\partial u_{t,t'}}{\partial t} = \frac{\left(-th(t) + \frac{C}{2}\right)\left(\int_t^{t'} sh(s)ds + C\right) + h(t)\left(\int_t^{t'} sh(s)ds + C\frac{t+t'}{2}\right)}{\left(\int_t^{t'} sh(s)ds + C\right)^2}$$

como solo nos interesa el signo, podemos despreciar el denominador ya que está elevado al cuadrado.

Reagrupando el numerador obtenemos:

$$\frac{C}{2}\left(\int_t^{t'} sh(s)ds + C\right) + h(t)\left(\int_t^{t'} sh(s)ds + C\frac{t+t'}{2} - t\int_t^{t'} sh(s)ds - tC\right) =$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

$$\frac{C}{2}\left(\int_t^{t'} sh(s)ds + C\right) + h(t)\left(C\frac{t'-t}{2} + \int_t^{t'} (s-t)\,h(s)ds\right)$$

como $t\prime > t$, cada uno de los sumandos es positivo, y por tanto tenemos que:

$$\frac{\partial u_{t,t'}}{\partial t} > 0$$

lo que implica que $u_{t,t'}$ es creciente respecto de t.

Analogamente se demuestra para t'.

□

LEMA 12 *Si* $0 < a < b < m < n < N$, *entonces se verifica:*

$$En(a,m] + En(b,n] < En(a,n] + En(b,m]$$

donde

$$En(a,m] = \int_a^m (s - u_{a,m})^2 dH(s) + \frac{\lambda}{m-a} = E'n(a,m] + E''n(a,m]$$

es el mínimo en el intervalo $(a,m]$.

Demostración.- Para la demostración consideraremos por separado cada uno de los sumandos.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Para el primer sumando vamos a considerar el caso en que $u_{b,m} > u_{a,n}$.

Aplicando el lema (11) tenemos que:

$$t_m > u_{b,m} > u_{a,n}$$

Además se tiene que:

$$(s - u_{b,m})^2 \leq (s - u_{a,n})^2 \; si \; s > t_m.$$

Por lo tanto, podemos escribir:

$$E'n(b,m] \leq \int_b^n (s - u_{b,m})^2 dH(s)$$

puesto que $E'n(b,m]$ es mínimo.

$$\int_b^m (s - u_{b,m})^2 dH(s) + \int_m^n (s - u_{b,m})^2 dH(s) \leq$$

$$E'n(b,m] + \int_m^n (s - un)^2 dH(s).$$

Además:

$$E'n(a,m] + E'n(b,n] \leq$$

$$\int_a^m (s - u_{a,n})^2 dH(s) + \int_m^n (s - u_{a,n})^2 dH(s) + E'n(b,m] = E'n(a,n] + E'n(b,m].$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Mediante un razonamiento similar se puede demostrar el caso $u_{b,m} < u_{a,n}$.

Para el segundo sumando tenemos que ver

$$\frac{1}{m-a} + \frac{1}{n-b} \leq \frac{1}{m-b} + \frac{1}{n-a}$$

Realizando las sumas, nos queda:

$$\frac{1}{m-a} + \frac{1}{n-b} = \frac{n-b+m-a}{(m-a)(n-b)}$$

y

$$\frac{1}{m-b} + \frac{1}{n-a} = \frac{n-b+m-a}{(m-b)(n-a)}$$

como los numeradores son iguales, basta con demostrar:

$$(m-b)(n-a) \leq (m-a)(n-b)$$

Multiplicando y cancelando los términos iguales queda:

$$-am - bn < -an - bm \Rightarrow bm - am < bn - an$$

de lo que se deduce:

$$(m-n)(b-a) < 0$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

lo cual es cierto puesto que:

$$a < b < m < n \Rightarrow b - a > 0 \; y \; m - n < 0$$

□

LEMA 13 *Sea $q(t)$ el primer separador que optimiza la energía en el intervalo $(t, t_N]$. Entonces $q(t)$ es no decreciente respecto a t.*

Demostración.- Supongamos que $q(t) > q(t')$ para $t < t'$.

Sabemos que obtenido $q(t)$, la energía obtenida con el funcional (3.1)

$$En(t, q(t)] + En(q(t), t_N]$$

es mínima.

Aplicando el lema (12) a

$$t < t' < q(t') \leq q(t)$$

obtenemos:

$$En(t, q(t')] + En(t', q(t)] \leq En(t, q(t)] + En(t', q(t')]$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

de donde:

$$En(t, q(t')] \leq En(t, q(t)] + En(t', q(t')] - En(t', q(t)]$$

Por otra parte:

$$En(t, q(t')] + En(q(t'), t_N)] \leq En(q(t'), t_N)] + En(t, q(t)] + En(t', q(t')] - En(t', q(t)]$$

como:

$$En(t', q(t')] + En(q(t'), t_N)] < En(t', q(t)] + En(q(t), t_N)]$$

por estar optimizada. Sustituyendo en la fórmula anterior nos queda:

$$En(t, q(t')] + En(q(t'), t_N)] \leq En(t, q(t)] + En(t', q(t)] + En(q(t), t_N)] - En(t', q(t)]$$

$$= En(t, q(t)] + En(q(t), t_N)]$$

o sea:

$$En(t, q(t')] + En(q(t'), t_N)] \leq En(t, q(t)] + En(q(t), t_N)]$$

lo cual es absurdo, por estar $En(t, q(t)] + En(q(t), t_N)]$ optimizada y por tanto, se tiene que $q(t) \leq q(t')$.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

□

De este modo calculamos el mínimo global del funcional (3.1) en dos pasos. En el primer paso calculamos la energía y el nivel final $u_{t,t'}$ para cada intervalo $[t, t']$ incluido en $[-0.5, 255.5]$. Recordemos que el nivel final asociado $u_{t,t'}$ puede calcularse derivando el funcional (3.1) respecto de u_k y se obtiene:

$$u_{t,t'} = \frac{\int_t^{t'} sh(s)ds + C\frac{t+t'}{2}}{\int_t^{t'} h(s)ds + C}$$

En el segundo paso, computamos el mínimo global $\hat{Q}_S$ del funcional (3.1) recursivamente calculando $\hat{Q}_2^{t'}, \hat{Q}_3^{t'}, ...$, teniendo en cuenta que $\hat{Q}_k^{t'} = \{0, u_{0,t'}\} \cup \hat{Q}_{k-1}^{t'}$ done $\hat{Q}_k^{t'}$ representa el mínimo global del funcional (3.1) en el intervalo $[t', 255.5]$ usando k niveles de cuantificación.

Por supuesto, en la práctica, las integrales se han sustituido por sumatorios. Por otra parte, podemos rebajar el número de operaciones para calcular la energía teniendo en cuenta que:

$$\int_t^{t'} (s - u_{t,t'})^2 h(s)ds = \int_t^{t'} s^2 h(s)ds - u_{t,t'} \int_t^{t'} 2sh(s)ds + u_{t,t'}^2 \int_t^{t'} h(s)ds$$

Así, se calcula rápidamente esta energía y los niveles finales $u_{t,t'}$, si se han calculado previamente las integrales: $\int_0^{t'} h(s)ds$, $\int_0^{t'} sh(s)ds$ y $\int_0^{t'} s^2 h(s)ds$ para cada $t' = -0.5, 0.5, 1.5, ...255.5$.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

El algoritmo para la búsqueda del cuantificador óptimo se puede dividir en 6 etapas:

1. Cómputo y almacenamiento de $\sum_{k=0}^{j} h(k)$, $\sum_{k=0}^{j} k * h(k)$, $\sum_{k=0}^{j} k^2 * h(k)$ $j = 1, \cdots, N$.

   Orden de operaciones $\mathcal{O}(N)$.

2. Definición y puesta a cero de matrices cuadradas de orden N, para almacenamiento de la energía.

   Orden de operaciones $\mathcal{O}(N^2)$.

3. Cálculo de los niveles finales y primeras energías.

   Orden de operaciones $\mathcal{O}(N^2)$.

4. Recorrido de las matrices de energía para la búsqueda del cuantificador óptimo.

   Orden de operaciones $\mathcal{O}(KN^2)$.

5. Búsqueda del primer parámetro de la cuantificación.

   Orden de operaciones $\mathcal{O}(N)$.

6. Búsqueda del resto de parámetros de la cuantificación.

   Orden de operaciones $\mathcal{O}(K)$.

Por tanto el orden de operaciones es $\mathcal{O}(KN^2)$.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Una vez obtenido el cuantificador óptimo $\hat{Q}_S$, entramos en el problema de resolver la EDP (4.1) generada a partir de nuestro modelo de cuantificación. Los estados asintóticos de la solución representan una cuantificación regular de la imagen original usando el cuantificador óptimo $\hat{Q}_S$.

Como se ha explicado en la introducción, se ha asociado a cada cuantificador Q_S una función $f()$ que satisface para cada k,

$$f(t_k) = f(u_k) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial s}(t_k) > 0 \ \ y \ \ \frac{\partial f}{\partial s}(u_k) < 0$$

Se han fijado los valores $t_1 = -0.5$ y $t_{S+1} = 255.5$. Los valores de la función $f(\cdot)$ fuera del intervalo $[-0.5, 255.5]$ no tienen realmente importancia puesto que la distribución de la imagen está dada en general en el intervalo $[0, 255]$. En el intervalo $[-0.5, 255.5]$ se define $f(\cdot)$ de la siguiente forma:

$$f(s) = -\frac{1}{u_k - t_k}(s - t_k)(s - u_k) \quad si \quad s \in [t_k, u_k)$$

$$f(s) = \frac{1}{t_{k+1} - u_k}(s - t_{k+1})(s - u_k) \quad si \quad s \in [u_k, t_{k+1})$$

La elección de la función $f(\cdot)$ hace que el valor de la derivada de f en el nivel de cuantificación sea -1 en u_k y 1 en t_k. Fuera del intervalo $[-0.5, 255.5]$, se define la función f siguiendo algún criterio de estabilidad para la ecuación (4.1) desarrollada en la siguiente sección.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Discretización Del Operador Diferencial

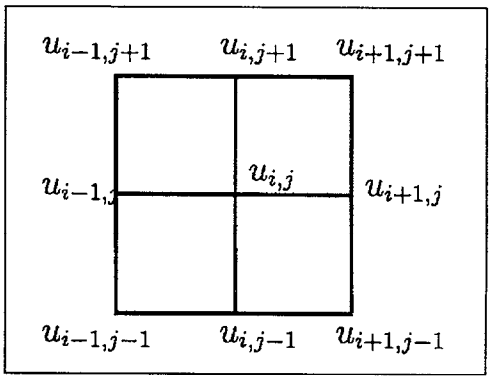
Denotando por ξ la dirección ortogonal a ∇u, nos queda:

$$u_{\xi\xi} = \|\nabla u\| \, div \left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right)$$

Sea θ tal que $\xi = (-\sin\theta, \cos\theta)$, entonces podemos escribir:

$$u_{\xi\xi} = \ell(u) = \sin^2\theta u_{xx} - 2\sin\theta\cos\theta u_{xy} + \cos^2\theta u_{yy} \tag{5.1}$$

Vamos a escribir $u_{\xi\xi}$ como una combinación lineal de valores de u sobre una matriz fija de 3×3.



Ventana 3x3 usada en la discretización del operador diferencial

$$\begin{aligned} \ell(u) &= -\frac{4\lambda_0}{h^2}(u_{i,j}) + \lambda_1(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + \lambda_2(u_{i,j+1} + u_{i,,j-1}) \\ &+\lambda_3(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j-1}) + \lambda_4(u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j+1}) \end{aligned} \tag{5.2}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

donde h es el valor del incremento, que se considera constante e igual para ambas variables.

La discretización mediante este método depende de un parámetro libre λ_0, cuya elección se hará en función de criterios geométricos.

Aplicando la fórmula de Taylor nos queda:

1. $u(x+h,y) = u(x,y) + hu_x(x,y) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(x,y) + \cdots$
2. $u(x-h,y) = u(x,y) - hu_x(x,y) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(x,y) + \cdots$
3. $u(x,y+h) = u(x,y) + hu_y(x,y) + \frac{h^2}{2}u_{yy}(x,y) + \cdots$
4. $u(x,y-h) = u(x,y) - hu_y(x,y) + \frac{h^2}{2}u_{yy}(x,y) + \cdots$
5. $u(x+h,y+h) = u(x,y) + h(u_x+u_y) + \frac{h^2}{2}(u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}) + \cdots$
6. $u(x+h,y-h) = u(x,y) + h(u_x-u_y) + \frac{h^2}{2}(u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}) + \cdots$
7. $u(x-h,y+h) = u(x,y) + h(-u_x+u_y) + \frac{h^2}{2}(u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}) + \cdots$
8. $u(x-h,y-h) = u(x,y) - h(u_x+u_y) + \frac{h^2}{2}(u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}) + \cdots$

multiplicamos (1) y (2) por λ_1, (3) y (4) por λ_2, (5) y (8) por λ_3, (6) y (7) por λ_4, y sumando nos queda:

$$\lambda_1(u(x+h,y)+u(x-h,y)) = 2\lambda_1 u(x,y) + \lambda_1 h^2 u_{xx}(x,y) + \cdots$$

$$\lambda_2(u(x,y+h)+u(x,y-h)) = 2\lambda_2 u(x,y) + \lambda_2 h^2 u_{yy}(x,y) + \cdots$$

$$\lambda_3(u(x+h,y+h)+u(x-h,y-h)) =$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

$$2\lambda_3 u(x,y) + \lambda_3 h^2 \left(u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy}\right) + \cdots$$

$$\lambda_4 \left(u\left(x+h, y-h\right) + u\left(x-h, y+h\right)\right) =$$

$$2\lambda_4 u(x,y) + \lambda_3 h^2 \left(u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy}\right) + \cdots$$

- igualando (5.1) con (5.2) obtenemos:

$$-\frac{4\lambda_0}{h^2} + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 + 2\lambda_4 = 0$$

$$h^2\left(\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4\right) = \sin^2\theta$$

$$h^2\left(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4\right) = \cos^2\theta$$

$$h^2\left(\lambda_3 - \lambda_4\right) = \sin\theta\cos\theta$$

- Resolviendo tenemos los siguientes valores para los λ_i :

$$\lambda_1 = \frac{2\lambda_0 - \sin^2\theta}{h^2}$$

$$\lambda_2 = \frac{2\lambda_0 - \cos^2\theta}{h^2}$$

$$\lambda_3 = \frac{-\lambda_0 + \frac{1}{2}\left(1 + \sin\theta\cos\theta\right)}{h^2}$$

$$\lambda_4 = \frac{-\lambda_0 + \frac{1}{2}\left(1 - \sin\theta\cos\theta\right)}{h^2}$$

Buscamos ahora un polinomio trigonométrico en θ para el valor de $\lambda_0\left(\theta\right)$ de manera que, cuando difunda en alguna de las direcciones principales, en las otras direcciones, la difusión sea nula.

Haciendo:

$$\lambda_0(\theta) = a + b\cos\theta + c\sin\theta + d\cos^2\theta + e\sin\theta + f\sin\theta\cos\theta + g\sin^2\theta\cos^2\theta$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

teniendo en cuenta los λ_i ya calculados, y recordando que (5.1) = (5.2), obtenemos:

$$\theta = 0 \Rightarrow \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0 \Rightarrow 2\lambda_0 = 1 \Rightarrow$$

$$a + b + d = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 \neq 0, \lambda_4 = \frac{1}{4} \Rightarrow \lambda_0 = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$a + \frac{\sqrt{2}}{2}b + \frac{\sqrt{2}}{2}c + \frac{d}{2} + \frac{e}{2} + \frac{f}{2} + \frac{g}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0 \Rightarrow \lambda_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$a + c + e = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \lambda_4 \neq 0 \Rightarrow \lambda_0 = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$a - \frac{\sqrt{2}}{2}b + \frac{\sqrt{2}}{2}c + \frac{d}{2} + \frac{e}{2} - \frac{f}{2} + \frac{g}{4} = \frac{1}{4}$$

$\theta = \pi \Rightarrow$ igual que en la dirección $0 \Rightarrow$

$$a - b + d = \frac{1}{2}$$

$\theta = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow$ igual que en la dirección $\frac{\pi}{4} \Rightarrow$

$$a - \frac{\sqrt{2}}{2}b - \frac{\sqrt{2}}{2}c + \frac{d}{2} + \frac{e}{2} + \frac{f}{2} + \frac{g}{4} = \frac{1}{4}$$

$\theta = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$ igual que en la dirección $\frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$$a - c + e = \frac{1}{2}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

$\theta = \dfrac{7\pi}{4} \Rightarrow$ igual que en la dirección $\dfrac{3\pi}{4} \Rightarrow$

$$a + \frac{\sqrt{2}}{2}b - \frac{\sqrt{2}}{2}c + \frac{d}{2} + \frac{e}{2} - \frac{f}{2} + \frac{g}{4} = \frac{1}{4}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, los valores finales obtenidos son:

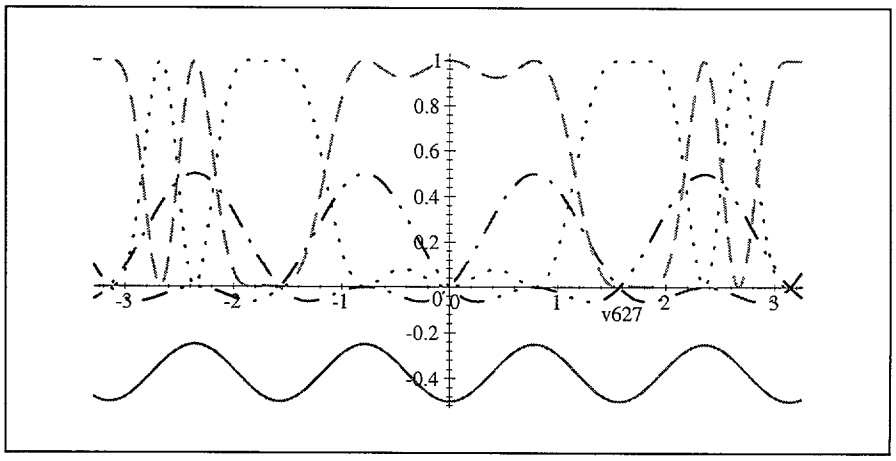
$$-4\lambda_0 = -2 + 4\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$\lambda_1 = \cos^2\theta\left(\sin^2\theta - \cos^2\theta\right)$$

$$\lambda_2 = \sin^2\theta\left(\sin^2\theta - \cos^2\theta\right)$$

$$\lambda_3 = \sin^2\theta\cos^2\theta + \tfrac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$$

$$\lambda_4 = \sin^2\theta\cos^2\theta - \tfrac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$$



Gráfica de los valores de las distintas λ

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Algoritmo y Estabilidad

El algoritmo se ha dividido en los siguientes pasos:

1. Cálculo de u_x *y de* u_y :

$$u_x(i) = \frac{1}{4h}\left(u_{i+1,j} - u_{i-1,j} + \frac{1}{2}\left((u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j-1}) + (u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1})\right)\right)$$
$$u_y(i) = \frac{1}{4h}\left(u_{i,j+1} - u_{i,j-1} + \frac{1}{2}\left((u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j-1}) + (u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1})\right)\right)$$

2. Cálculo de $\cos\theta$ y de $\sin\theta$

$$\cos\theta = \frac{u_x}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}}; \qquad \sin\theta = \frac{u_y}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}}$$

3. Cómputo de la función g. Primero calculamos la convolución de la imagen con un núcleo gaussiano con desviación típica σ y después calculamos la norma del gradiente utilizando el algoritmo presentado en el paso 1. Se usa un parámetro para determinar cuando se penaliza la difusión.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

4. Esquema iterativo

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n}}{\triangle t} = \ell(u_{i,j}^{n}) + f(u_{i,j}^{n})$$

Se ha tenido en cuenta que en la ecuación (4.1) existe invarianza por traslaciones y se ha tomado para la función *f(x)* un intervalo centrado en el origen.

La estabilidad del esquema numérico se establece en el siguiente teorema

TEOREMA 4 *Sea:*

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n}\left(1 - 4g\left(u_{i,j}^{n}\right) C_d \lambda_0 \triangle t\right)$$

$$+g\left(u_{i,j}^{n}\right) C_d \triangle t \sum_{k,l} \lambda_{k,j}\, u_{i+k,j+l}^{n} + \triangle t\, f\left(u_{i,j}^{n}\right)$$

donde $f(u)$ *satisface:*

$$|f(u)| \leq C_r \qquad si\ u \in [-a, a]$$

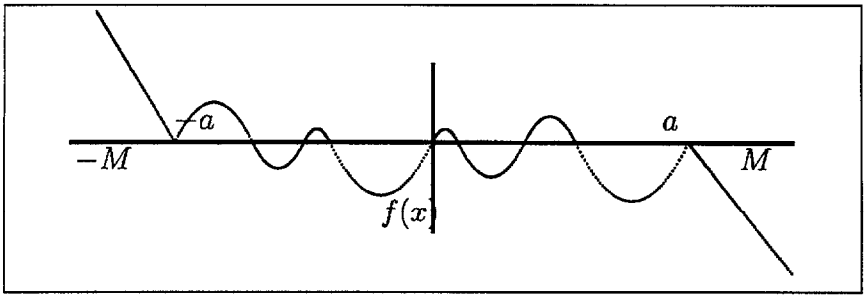
$$f(u) = k(-a - u) \quad si\ u < -a$$

$$f(u) = k(a - u) \qquad si\ u > a$$

Si $0.65C_d - 2k < 0$ *entonces se tiene que* $\forall M > a$, $\exists \delta > 0$ *tal que cuando* $0 < \triangle t < \delta$, *si* $\left|u_{i,j}^{n}\right| < M\ \forall i, j$ *entonces*

$$\left|u_{i,j}^{n+1}\right| \leq M.$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003



Gráfica de la función f(x)

Demostración.-

Recordemos que $0 < g(s) \leq 1$. Vamos a dividir el problema en tres casos según los valores de $u_{i,j}^n$ pertenezcan a $[-M,-a]$, $[-a,a]$, $[a,M]$.

- Caso 1: $u_{i,j}^n \in [-M,-a]$

Se tiene:

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{n+1} &= u_{i,j}^n \left(1 - 4g\left(u_{i,j}^n\right) C_d \lambda_0 \triangle t - k \triangle t\right) + \\ & \quad C_d g\left(u_{i,j}^n\right) \triangle t \sum_{k,l} \lambda_{k,j}\, u_{i+k,j+l}^n - \triangle t\, ka. \end{aligned}$$

Si imponemos que $\left(1 - 4g\left(u_{i,j}^n\right) C_d \lambda_0 \triangle t - k \triangle t\right) \geq 0$, nos queda:

$$i)\ u_{i,j}^{n+1} \leq C_d g\left(u_{i,j}^n\right) \triangle t \sum_{k,l} |\lambda_{k,j}|\, M \leq M \Longleftrightarrow C_d g\left(u_{i,j}^n\right) \triangle t \sum_{k,l} |\lambda_{k,j}| \leq 1$$

$$\begin{aligned} ii)\ u_{i,j}^{n+1} &\geq \left(1 - 4C_d g\left(u_{i,j}^n\right) \lambda_0 \triangle t - k \triangle t\right)(-M) + \\ & \quad C_d g\left(u_{i,j}^n\right) \triangle t \sum_{k,l} |\lambda_{k,j}|\,(-M) - \triangle t\, ka \end{aligned}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

$$\begin{aligned}
&\geq \left(1 - 4C_d g\left(u_{i,j}^n\right)\lambda_0 \triangle t - k \triangle t\right)(-M) + \\
&\quad C_d g\left(u_{i,j}^n\right) \triangle t \sum_{k,l} |\lambda_{k,j}| (-M) - \triangle t\, kM \\
&\geq \left(1 - 4C_d g\left(u_{i,j}^n\right)\lambda_0 \triangle t - k \triangle t\right)(-M) + \\
&\quad C_d g\left(u_{i,j}^n\right) \triangle t \sum_{k,l} |\lambda_{k,j}| (-M) - \triangle t\, kM \\
&\geq \left(1 - 4C_d g\left(u_{i,j}^n\right)\lambda_0 \triangle t - 2k \triangle t + C_d g\left(u_{i,j}^n\right) \triangle t \sum_{k,l} |\lambda_{k,j}|\right)(-M) > -M
\end{aligned}$$

siempre que:

$$\left|\left(1 - \left(\left(4\lambda_0 \triangle t - \triangle t \sum_{k,l} |\lambda_{k,j}|\right) g\left(u_{i,j}^n\right) C_d + 2k\right) \triangle t\right)\right| < 1 \qquad (5.3)$$

lo que da la siguiente condición sobre $\triangle t$:

$$\left(\left(4\lambda_0 \triangle t - \triangle t \sum_{k,l} |\lambda_{k,j}|\right) g\left(u_{i,j}^n\right) C_d + 2k\right) \triangle t < 2$$

Mediante un cálculo elemental se obtiene

$$-0.65 \leq \left(4\lambda_0 \triangle t - \triangle t \sum_{k,l} |\lambda_{k,j}|\right) g\left(u_{i,j}^n\right) C_d \leq 0$$

y para que se verifique (5.3), basta con tomar $\triangle t < \frac{2}{k}$.

- Caso 2: $u_{i,j}^n \in [-a, a]$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Se tiene:

$$\left|u_{i,j}^{n+1}\right| \leq \left(1 - 4g\left(u_{i,j}^{n}\right) C_d \lambda_0 \triangle t\right) a + C_d g\left(u_{i,j}^{n}\right) \triangle t \sum_{k,l} |\lambda_{k,j}| \; M + \triangle t \, C_r \quad (5.4)$$

Supongamos que $(5.4) \leq M$. En ese caso tendremos:

$$\left(1 - 4g\left(u_{i,j}^{n}\right) C_d \lambda_0 \triangle t\right) a + \triangle t \, C_r \leq M \left(1 - C_d g\left(u_{i,j}^{n}\right) \triangle t \sum_{k,l} |\lambda_{k,j}|\right)$$

y dividiendo todo por:

$$\left(1 - C_d g\left(u_{i,j}^{n}\right) \triangle t \sum_{k,l} |\lambda_{k,j}|\right)$$

nos queda:

$$\frac{\left(1 - 4g\left(u_{i,j}^{n}\right) C_d \lambda_0 \triangle t\right) a + \triangle t \, C_r}{\left(1 - C_d g\left(u_{i,j}^{n}\right) \triangle t \sum_{k,l} |\lambda_{k,j}|\right)} \leq M \quad (5.5)$$

cuando $\triangle t \; \rightarrow 0$, la expresión de la izquierda de (5.5) tiene como límite a a que es menor que M, por tanto existen valores de $\triangle t$ que hacen que (5.5) sea cierto y por tanto

$$\left|u_{i,j}^{n+1}\right| \leq M$$

- Caso 3: $u_{i,j}^{n} \in [a, M]$

Se demuestra de la misma forma que el caso 1.

□

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

CAPÍTULO VI

Resultados Experimentales

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Cuantificación y eliminación de ruido

En primer lugar, vamos a ver algunas experiencias sobre cuantificación y eliminación de ruido.

Las experiencias numéricas se han realizado en dos pasos:

- En el primer paso se ha calculado el cuantificador óptimo Q_S respecto del funcional de energía (3.1). Para este paso hemos tenido que elegir tres parámetros:

  1. El número de niveles finales S.
  2. La constante L en el funcional de energía.
  3. La constante C en el mismo funcional.

- En el segundo paso resolvemos numéricamente la ecuación diferencial (4.1). Para este paso necesitamos elegir 6 parámetros:

  1. La desviación standard σ de la función gaussiana G_σ para calcular $G_\sigma * u$
  2. El parámetro de umbral T_g para determinar la forma de la función $g(\cdot)$. Esto significa que la difusión se penaliza para $|\nabla G_\sigma * u| > T_g$.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

3. Para equilibrar la influencia entre los términos de reacción y difusión, usamos la constante C_f. Así usamos $C_f f(u)$ como término de reacción.

4. El paso de discretización $\triangle t$.

5. El número de iteraciones.

6. El factor de penalización de la difusión. Este factor mide la diferencia de difusión entre las regiones homogéneas y los bordes, en otras palabras, indica los valores que toma $g(\cdot)$.

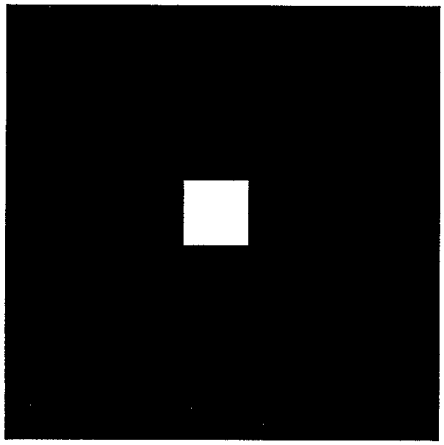
© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

La primera experiencia que presentamos muestra la diferencia entre el funcional de Lloyd y el funcional propuesto en este trabajo. Tomamos una imagen sintética que representa un cuadrado claro en un fondo oscuro. El histograma normalizado de la imagen, $h(s)$, contiene solo tres valores distintos de cero que son:

$$h(3) = 0.497864$$

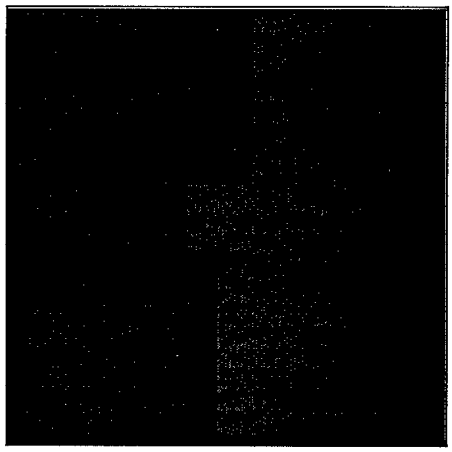
$$h(6) = 0.480103$$

$$h(255) = 0.022034$$



Si calculamos el cuantificador óptimo Q_2, con dos niveles finales, usando el funcional de Lloyd, obtenemos los siguientes resultados:

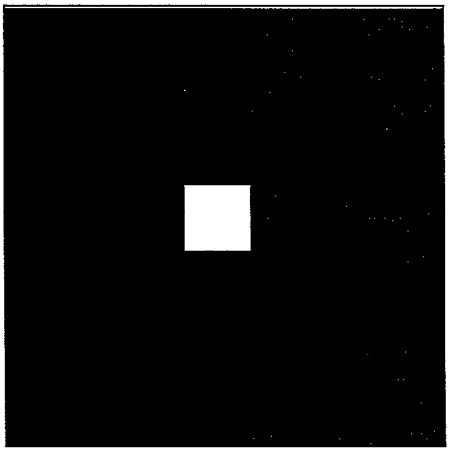
$$t_1 = -0.5,\ u_1 = 3,\ t_2 = 3.5,\ u_2 = 17,\ t_3 = 255.5.$$



Así el nivel 3 permanece sin cambios y los niveles de gris 6 y 255 se reagrupan en el mismo nivel 17, desapareciendo de esta forma el pequeño cuadrado claro.

Sin embargo, usando el funcional propuesto en este trabajo para calcular el cuantificador óptimo Q_2 con $L = 20$ y $C = 0$, obtenemos:

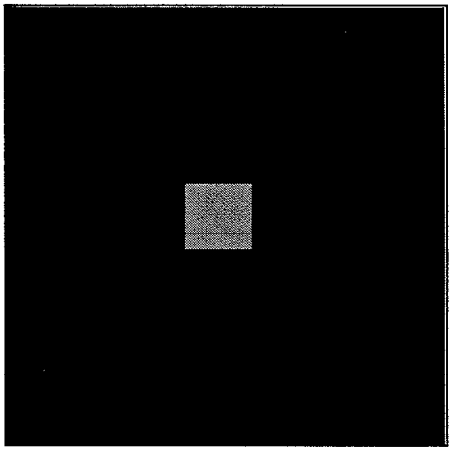
© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003



$$t_1 = -0.5,\ u_1 = 4,\ t_2 = 41.5,\ u_2 = 255,\ t_3 = 255.5.$$

De esta forma, el fondo se normaliza en el nivel de gris 4 y el cuadrado claro permanece.

Si usamos ahora el funcional con $L = 20$ y $C = 15$, obtenemos:



$$t_1 = -0.5,\ u_1 = 5,\ t_2 = 10.5,\ u_2 = 133,\ t_3 = 255.5.$$

De esta forma, el cuadrado claro se convierte en un gris más oscuro, debido a que el valor de C fuerza a tomar el valor del centro del intervalo de influencia.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

En la segunda experiencia se presenta una imagen médica proporcionada por el Servicio de Radiología Vascular e Intervencionista del Hospital Nuestra Señora del Pino de Las Palmas de Gran Canaria. De izquierda a derecha y de arriba a abajo:

- (a) la imagen original.
- (b) imagen cuantificada con 3 niveles de gris, usando una cuantificación uniforme. No se han empleado ni EDP, ni las técnicas de programación dinámica para buscar el cuantificador.
- (c) imagen cuantificada con 3 niveles de gris, usando un cuantificador óptimo Q_3 con $L = 1$ y $C = 0.0025$, sin emplear la difusión (EDP).
- (d) imagen cuantificada con 3 niveles de gris, usando un cuantificador óptimo Q_3 y la difusión (EDP) con:
  1. $\triangle t = 0.2$,
  2. $C_f = 4.0$,
  3. $\sigma = 2$,
  4. $T_g = 25$
  5. 100 iteraciones.
  6. factor de penalización de la difusión: 25

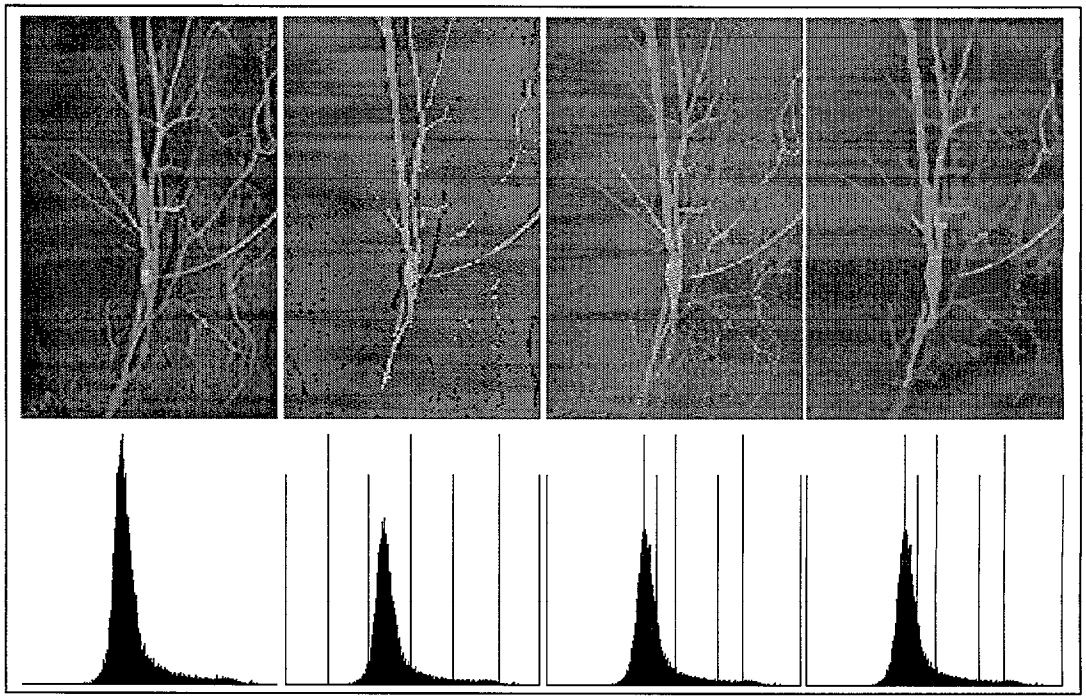
© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

- (e) histograma de la imagen.

- (f) niveles de cuantificación que corresponde a la cuantificación uniforme. Las lí neas verticales largas indican la localización de los niveles finales y la lí neas cortas indican la localización de los separadores.

- (g) niveles de cuantificación que corresponden a minimizar el funcional (3.1)

- (h) lo mismo que (g) pues el cuantificador no varía.



De izquierda a derecha y de arriba a abajo: (a) Imagen original, (b) Imagen cuantificada a 3 niveles de gris usando un cuantificador uniforme, (c) Imagen cuantificada a 3 niveles de gris sin utilizar difusión, (d) Imagen cuantificada a 3 niveles de gris usando el modelo propuesto, (e) Histograma de la imagen original, (f) Localización del cuantificador uniforme, (g) localización del cuantificador óptimo usando nuestro modelo, (h)=(g).

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Puede observarse que en la imagen (b) desaparece gran cantidad de información, debido a que, como puede apreciarse en el histograma, un nivel de gris final apenas tiene asociados unos pocos pixels, que además no son significativos.

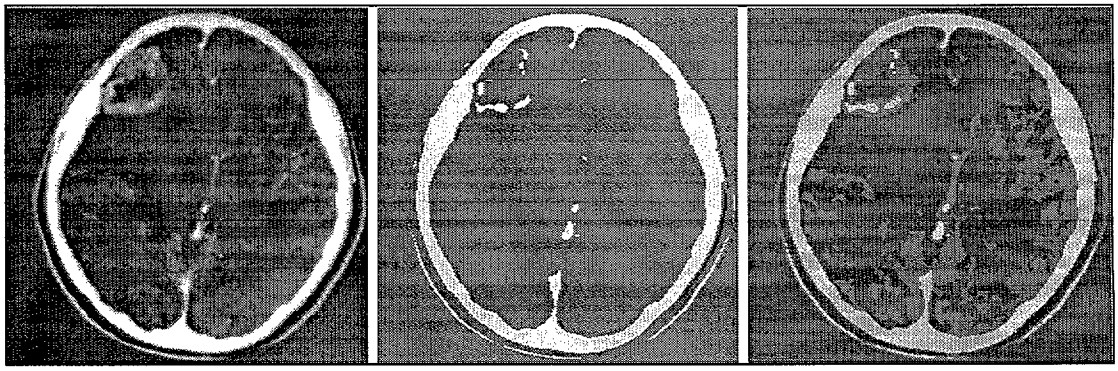
En la imagen (c), este problema ha desaparecido, pero puede observarse una gran cantidad de ruido cerca de los vasos que dificultan su seguimiento.

La imagen (d), una vez eliminado el ruido, presenta con mayor nitidez los vasos.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

En la siguiente imagen tenemos un TAC cerebral, que se ha cuantificado usando primero un cuantificador uniforme y después el cuantificador diseñado en esta Tesis, con los parámetros siguientes:

- 3 niveles de gris.
- $L = 10$
- $C = 0$



TAC Cerebral: (a) Imagen original, (b) Imagen cuantificada a 3 niveles usando un cuantificador uniforme, (c) Imagen cuantificada a 3 niveles usando el modelo propuesto.

Se ha resuelto numéricamente la ecuación con:

- $\triangle t = 0.2$
- $C_f = 5.0$
- $\sigma = 3$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

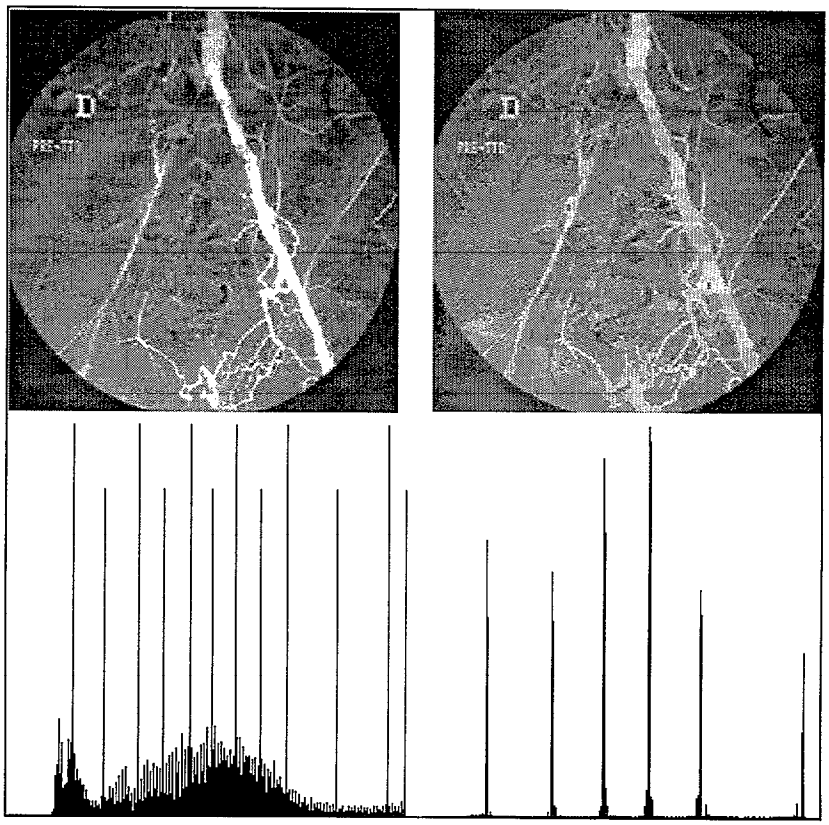
- $T_g = 45$
- 200 iteraciones.
- 100 como factor de penalización de la difusión.

Puede observarse, en este caso, la diferencia que se produce al utilizar un cuantificador adaptado. Prácticamente en la imagen (b) no puede observarse nada, mientras que en la imagen (c), se conserva la información.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

La siguiente imagen muestra una arteriografía del sector ilíaco. Se ha cuantificado, usando nuestro modelo, a 6 niveles de gris con los siguientes parámetros:

- 6 niveles de gris.
- $L = 10$
- $C = 0$



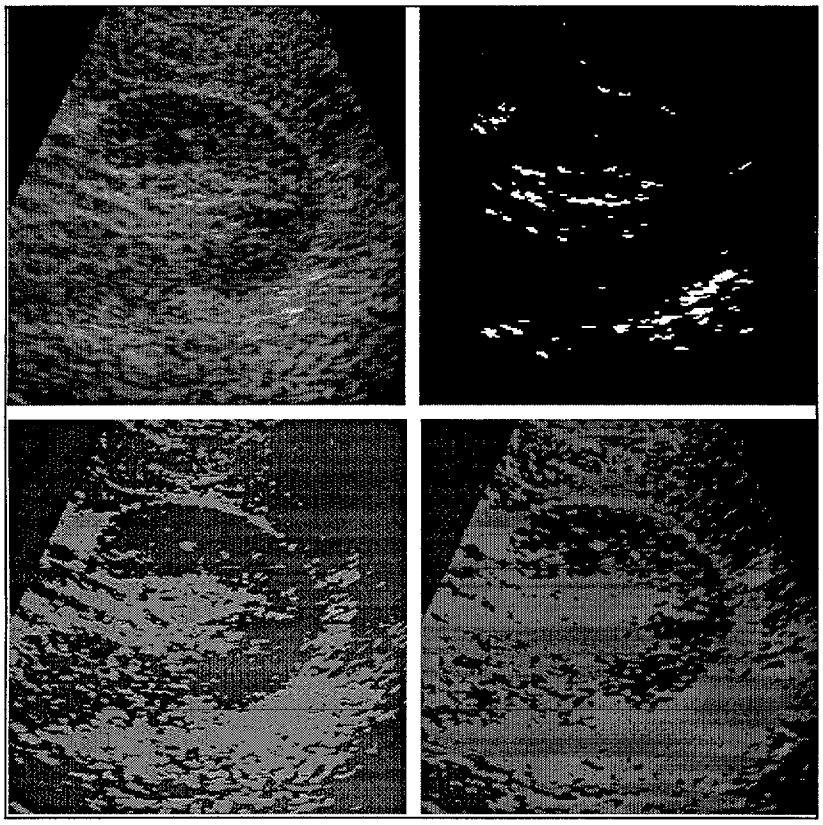
Arteriografía del sector ilíaco.

Se ha resuelto numéricamente la ecuación con:

- $\triangle t = 0.1$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

- $C_f = 5.0$
- $\sigma = 4$
- $T_g = 40$
- 100 iteraciones.
- 100 como factor de penalización de la difusión.



Ecografía. Se ha cuantificado a dos niveles de gris. En la imagen superior izquierda, tenemos la imagen original, en la superior derecha, imagen cuantificada uniformemente a dos niveles, en la imagen inferior izquierda, imagen cuantificada a dos niveles con valores de λ y C nulos, en la inferior derecha, imagen cuantificada a dos niveles con valores $\lambda = 5, C = 10$.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

En los siguientes experimentos, se presenta una aplicación del modelo para la cuantificación y eliminación de ruido simultaneamente.

En la siguiente imagen se presenta de izquierda a derecha y de arriba a abajo:

- (a) imagen original.
- (b) Imagen en la que se ha introducido un ruido. Se ha tomado aleatoriamente el 15% de los pixels y se ha cambiado su valor de forma aleatoria.
- (c) Se calcula la solución de la ecuación EDP (4.1) usando como dato inicial a la imagen con ruido, con los siguientes parámetros:

  1. 8 niveles de gris.
  2. $L = 10$
  3. $C = 0.0025$

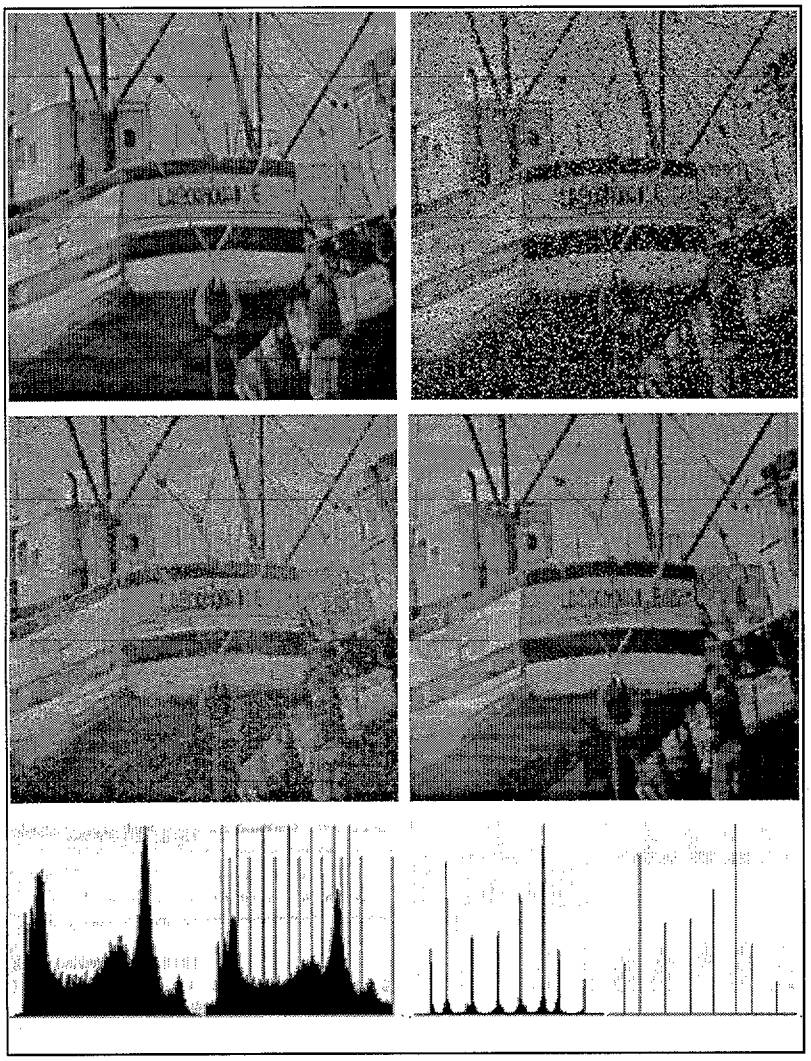
  Se ha resuelto numéricamente la ecuación con:

  1. $\triangle t = 0.1$
  2. $C_f = 10.0$
  3. $\sigma = 3$
  4. $T_g = 45$
  5. 20 iteraciones.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

6. 25 como factor de penalización de la difusión.

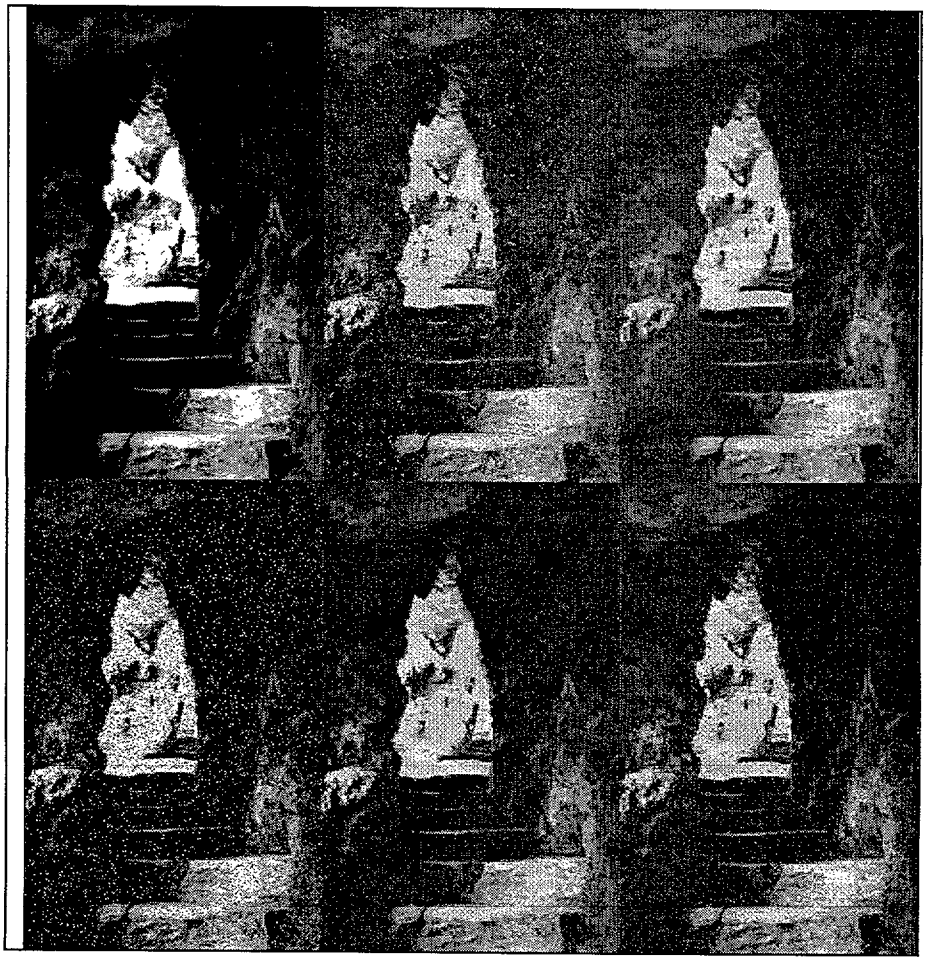
- (d) Se presenta el resultado después de 200 iteraciones
- (e),(f),(g),(h) histograma de las imágenes (a),(b),(c) y (d) respectivamente.



De izquierda a derecha y de arriba a abajo:(a) imagen original, (b) Imagen original con ruido, (c) Imagen (b) cuantificada a 8 niveles de gris usando el modelo propuesto con 20 iteraciones, (d) resultado después de 200 iteraciones, (e) Histograma de la imagen original, (f) localización del cuantificador óptimo, (g) y (h) Histogramas de las imágenes c y d.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

En la siguiente experiencia se presenta las diferencias en la cuantificación de una imagen a la que previamente se le ha añadido ruido blanco y ruido destructivo (se toman aleatoriamente pixels de la imagen y se les da un valor aleatorio), cuando se varía el valor de σ y el de T_g (umbral).



De arriba a abajo y de izquierda a derecha: (a) Imagen original, (b) Imagen a la que se le ha añadido ruido blanco y ruido destructivo, (c) y (d) cuantificaciones obtenidas con σ= 2 y umbrales de 15 y 75 respectivamente, (e) y (f) lo mismo que antes con σ= 8 y umbrales de 75 y 15 respectivamente.

Se ha cuantificado tomando los siguientes valores:

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

- 8 niveles de gris.
- $L = 5$
- $C = 0.0$

Se ha resuelto numéricamente la ecuación con:

- $\triangle t = 0.2$
- $C_f = 7.0$
- 500 iteraciones.
- 100 como factor de penalización de la difusión.

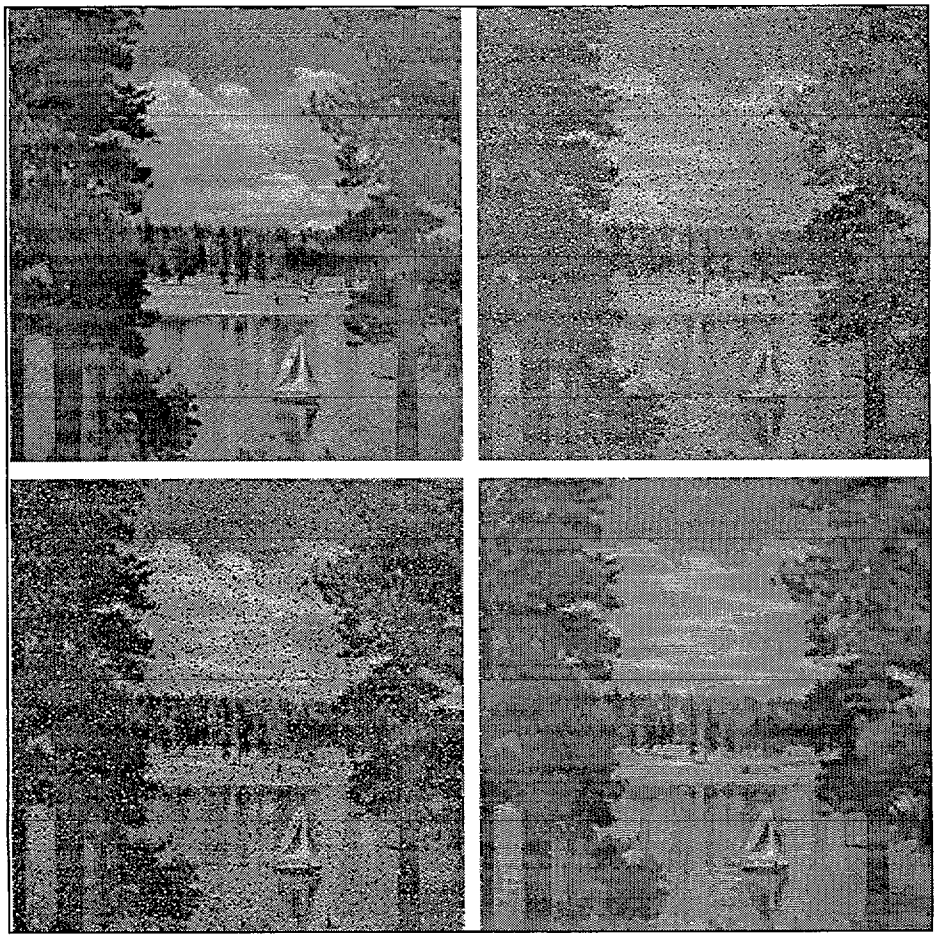
Los valores de σ y T_g han sido:

en la imagen (c), $\sigma = 2$ y $T_g = 15$, en la imagen (d), $\sigma = 2$ y $T_g = 75$, en la imagen (e), $\sigma = 8$ y $T_g = 75$ y en la imagen (f), $\sigma = 8$ y $T_g = 15$.

Es de reseñar que, cuando aparecen muchos bordes en una imagen, el ruido cercano a esos bordes es más dificil de eliminar, debido a que en ellos la penalización a la difusión es elevada. La franja de ruido que lo rodea, depende del valor de σ (tamaño de la ventana utilizada para calcular el gradiente). También puede observarse que según sea T_g, obtendremos mayor o menor difusión, debido a que si éste es muy pequeño, apareceran gran cantidad de bordes, para los cuales la difusión está penalizada, y en definitiva ésto hace que permanezca el ruido.

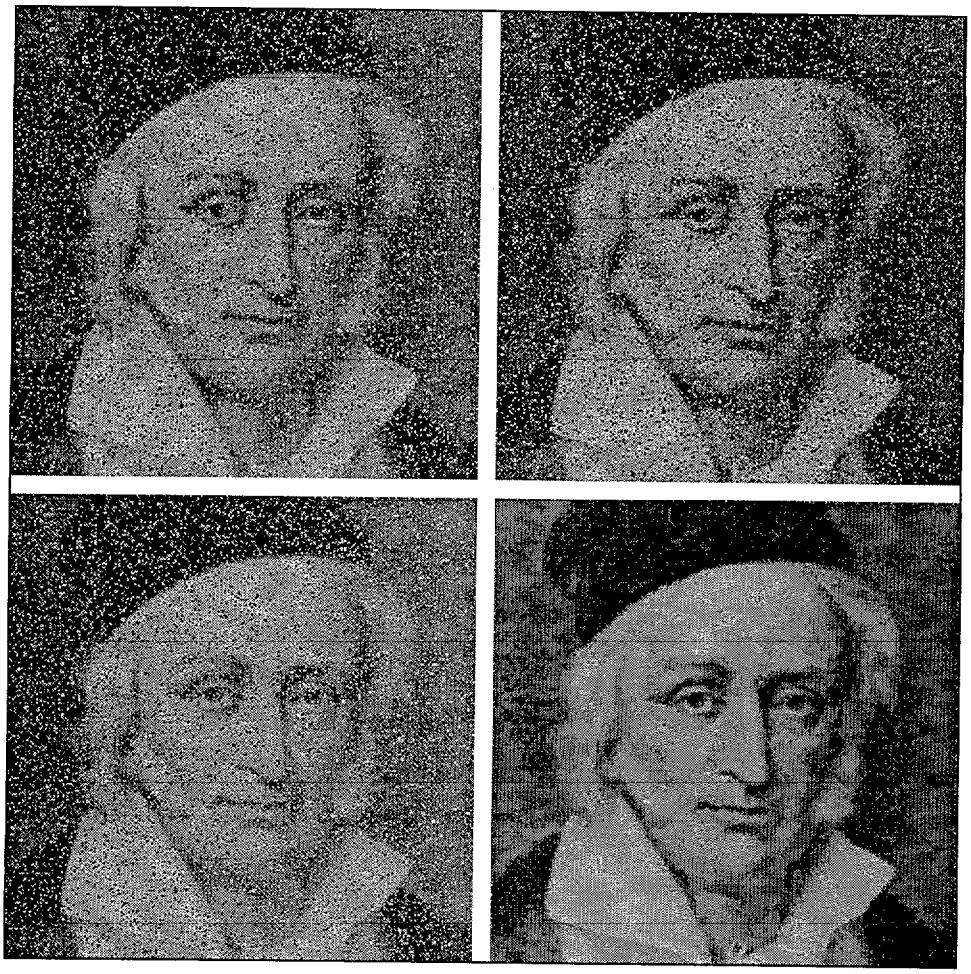
© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

En las siguientes imágenes, se pone de manifiesto las distintas fases por las que pasa el algoritmo en la cuantificación y eliminación de ruido, mostrandolas con diferente número de iteraciones



Eliminación de ruido de una imagen. Distintas fases del algoritmo. La imagen inferior derecha se puede considerar como la solución final.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003



Distintas fases de la eliminación de ruido de una imagen. La imagen inferior derecha puede considerarse como una buena aproximación de la solución final.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

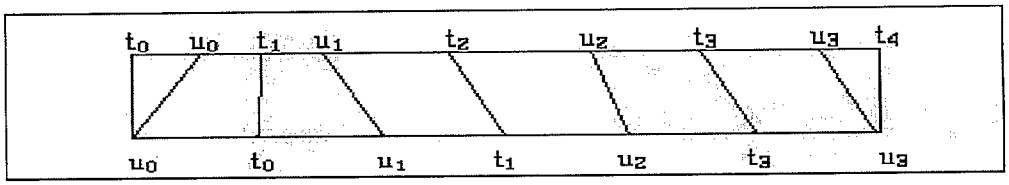
Contrastación

Una línea futura de aplicación de este trabajo es la contrastación de imágenes, o sea, el realce de los bordes, la separación entre los niveles de gris, etc.

Para la contrastación de imágenes, se ha aplicado el siguiente método:

En primer lugar se calculan los intervalos de influencia relativos al número de niveles deseados.

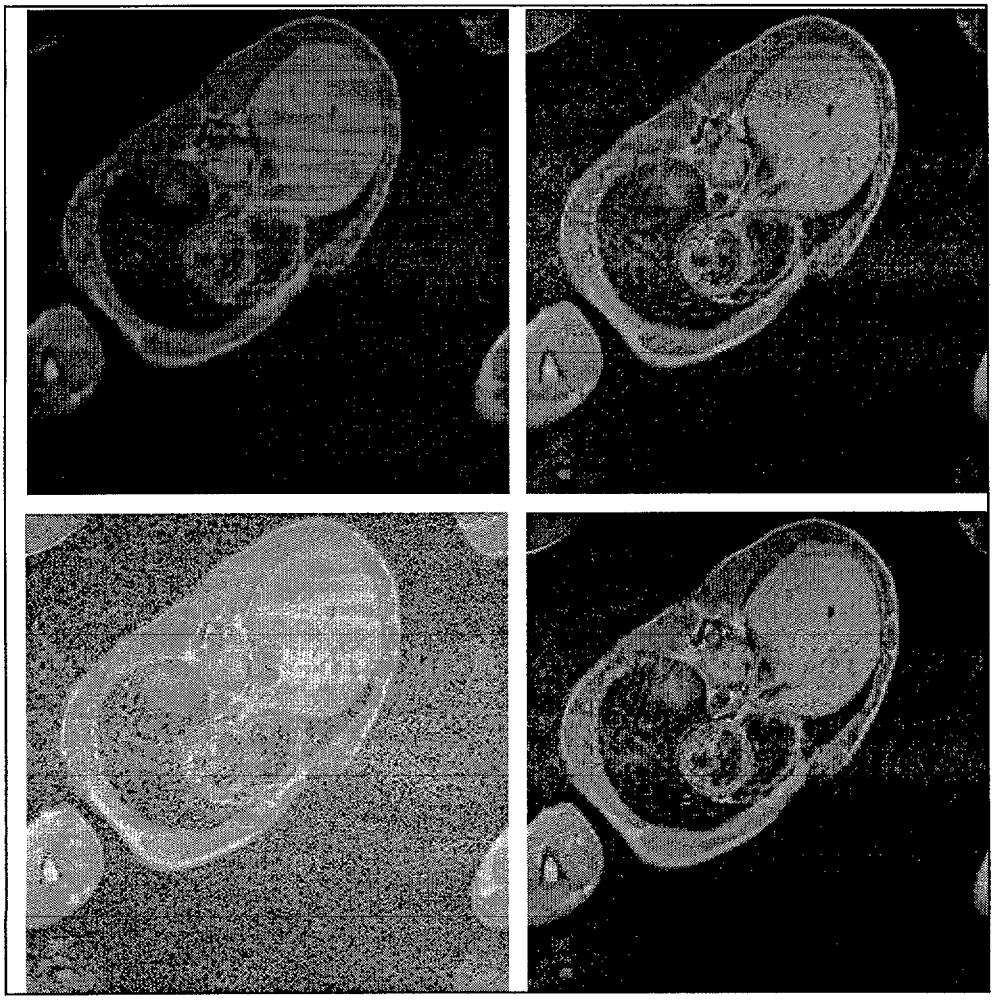
Una vez obtenidos los extremos de los intervalos y los atractores, se establece una aplicación de manera que los atractores obtenidos pasen a ser los atractores uniformemente distribuidos y lo mismo para los separadores, excepto en el caso del primer y último atractor que pasan a los valores 0 y 255 respectivamente, haciendo que los valores en el intervalo entre el 0 y el primer atractor, sean 0 y los valores entre el último atractor y 255, sean 255.



Ejemplo de como se realiza la contrastación.

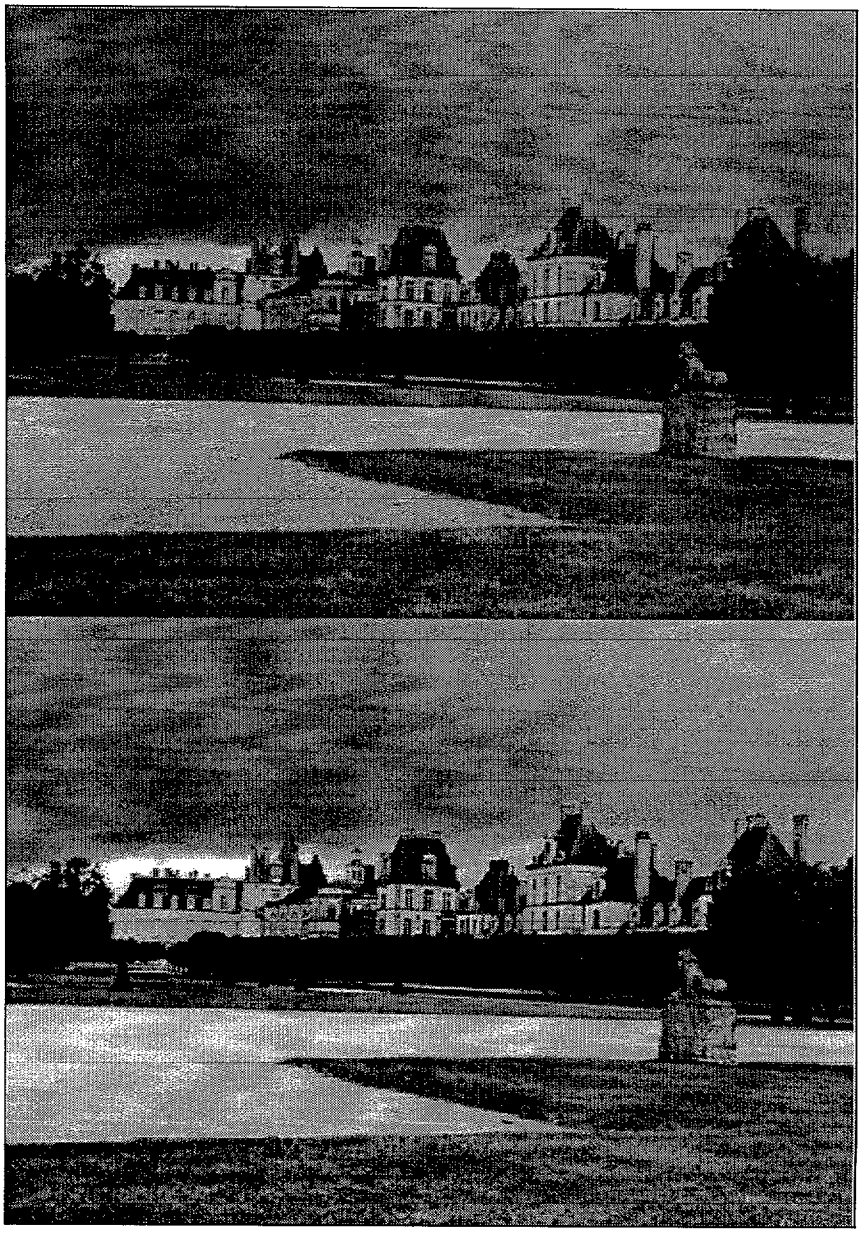
En las siguientes imágenes puede verse una aplicación de este método.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003



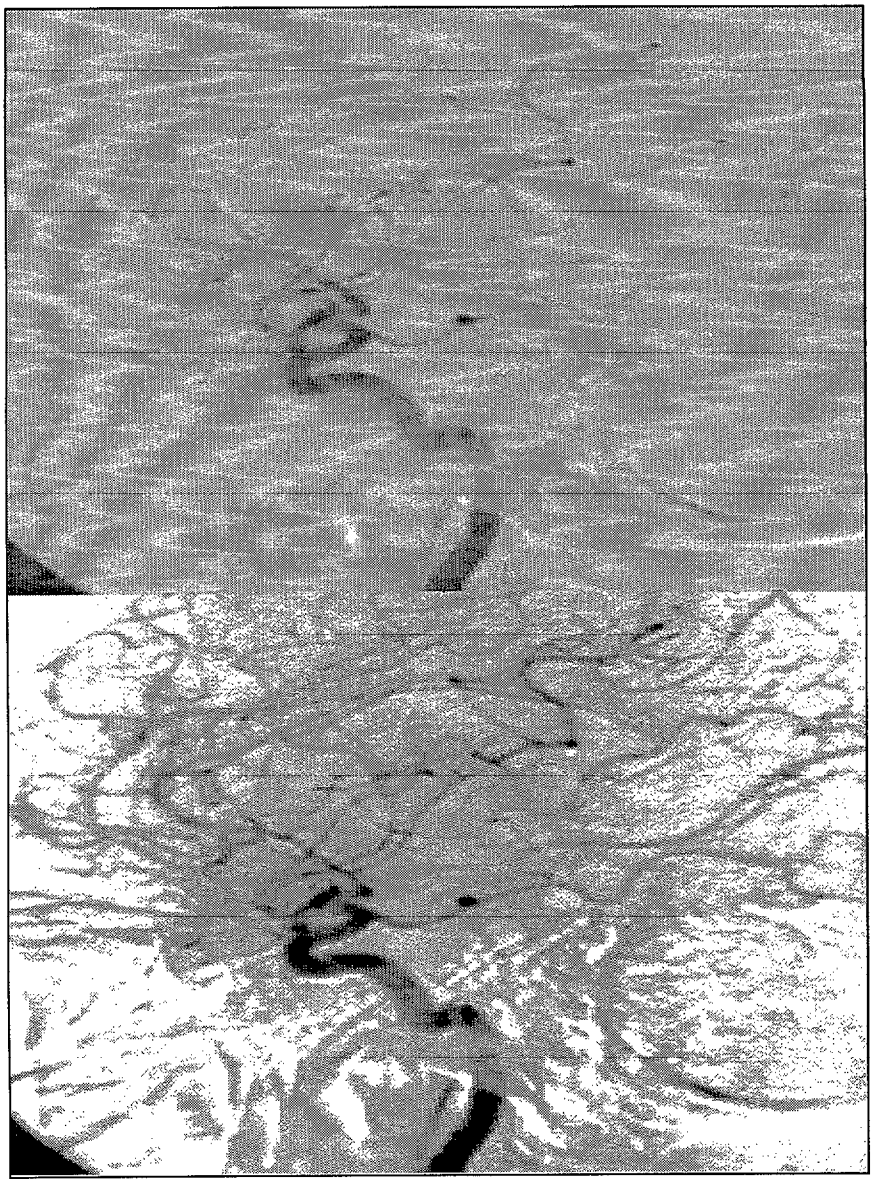
Ecografía. Se ha contrastado usando 4 y 8 niveles de gris.De izquierda a derecha y de arriba a abajo: (a) imagen original, (b) y (d) imágenes contrastadas con 4 y 8 niveles de gris respectivamente, (c) imagen ecualizada.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003



Castillo de Fontaineblau. Contrastado de imágenes, en la parte superior, imagen original, en la parte inferior imagen contrastada.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003



Ejemplo de contrastación sobre una angiografía del cerebro. En la imagen inferior pueden observarse los vasos con mayor nítidez.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

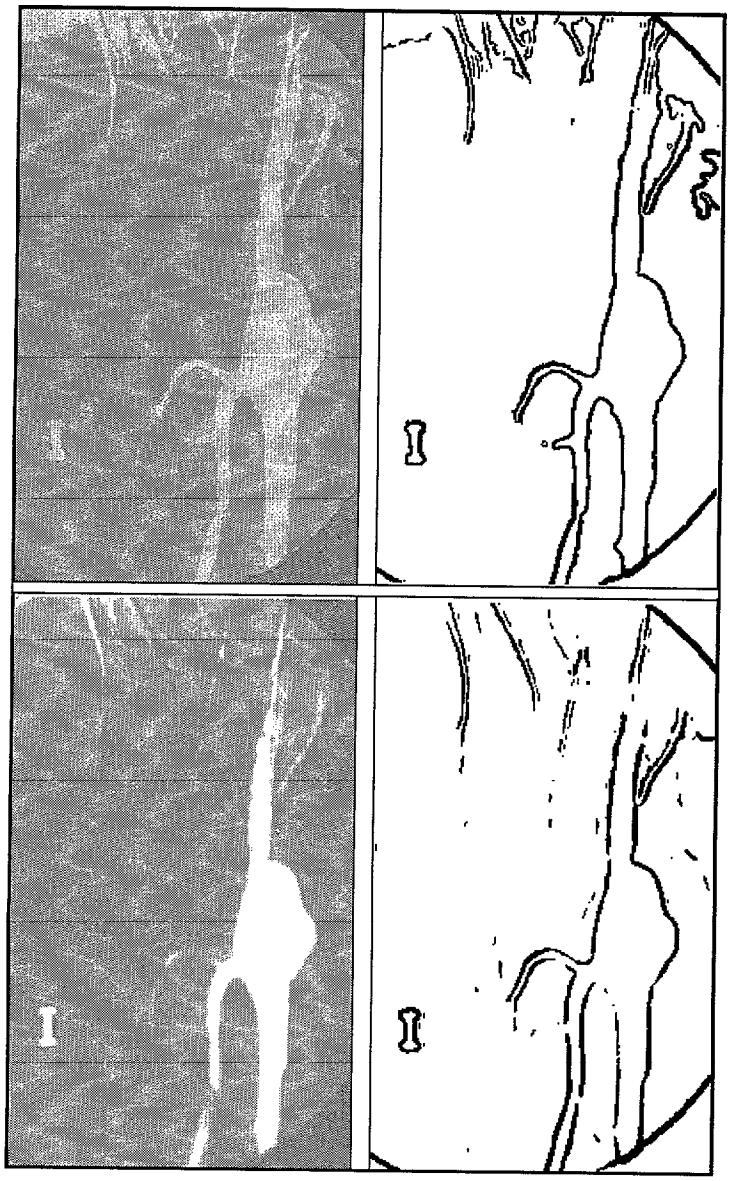
Segmentación

Aunque se habla de segmentación de imágenes, en realidad las imágenes que se presentan corresponden a la detección de bordes en lugar de la segmentación propiamente dicha.

En un primer paso para detectar los bordes, cuantificamos la imagen, y después nos quedamos con los pixels que separan regiones de distinto nivel de gris. Hay que analizar si la separación de niveles de gris corresponde a un borde o se ha producido por un degradado de estos niveles. Para ello, calculamos el gradiente, y cuando éste sobrepasa un umbral determinado, decidimos que hay un borde. Esto corresponde a decidir que existe borde cuando se pasa de un nivel de gris a otro que no sea contiguo en la escala.

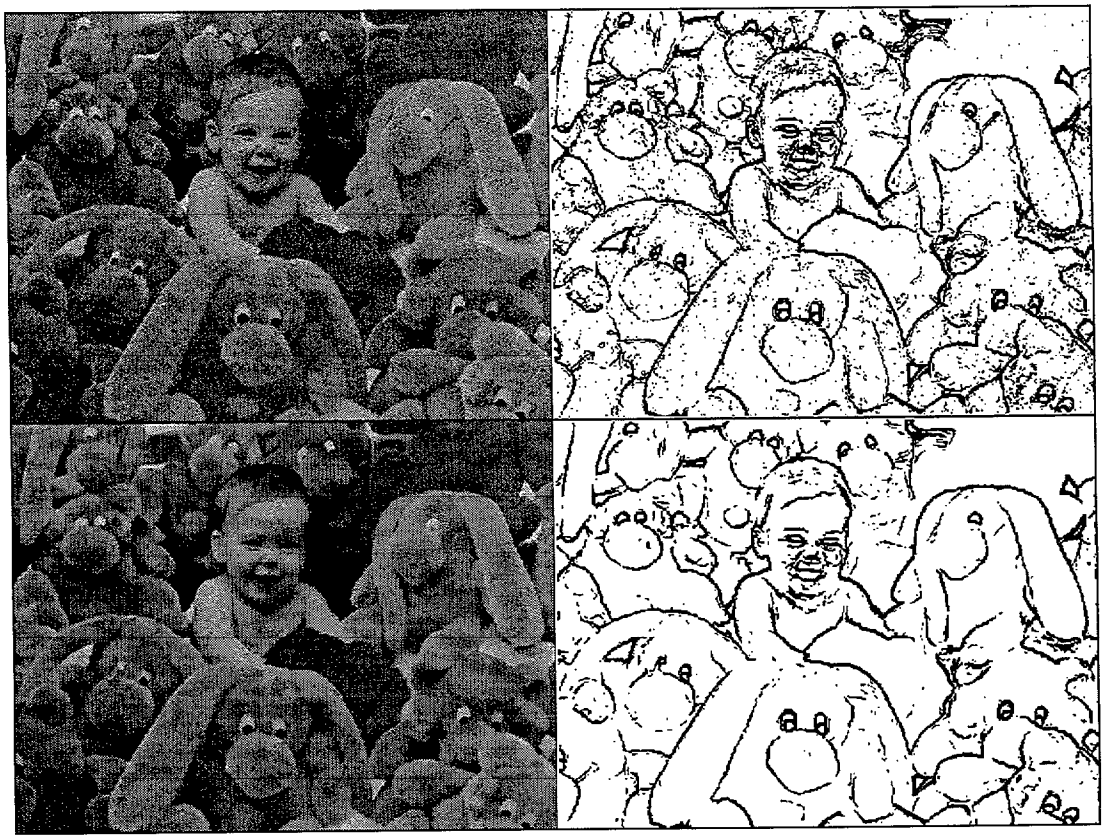
Los siguientes pasos podrían ser el cerrar los bordes encontrados, buscar la regiones homogéneas de la imagen, etc.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003



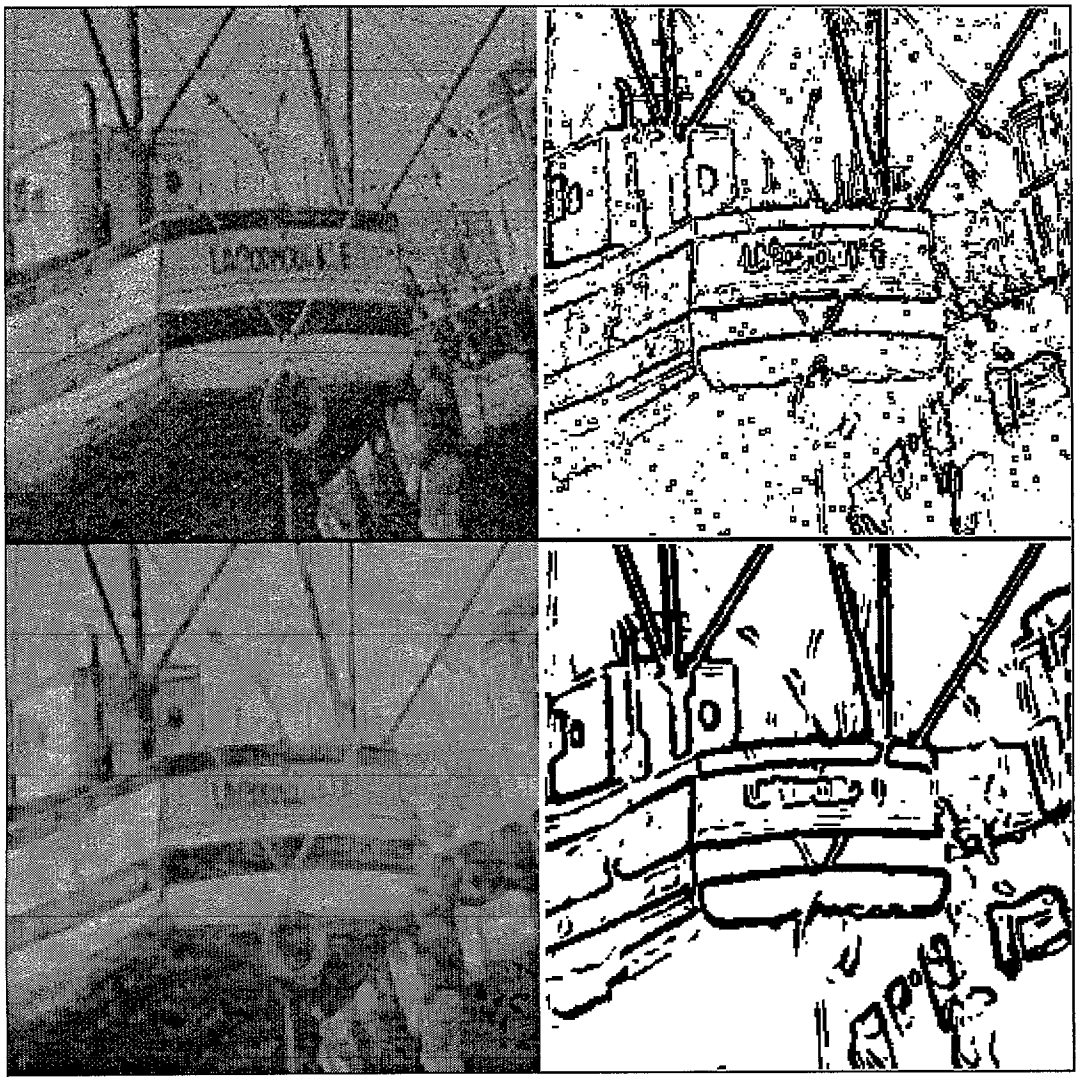
Ejemplo de detección de bordes sobre una angiografía plana de un aneurisma en la arteria femoral. De arriba a abajo y de izquierda a derecha: (a) imagen cuantificada a 6 niveles de gris, (b) imagen original, (c) detección de bordes sobre la imagen cuantificada y (d) detección de bordes sobre la imagen original.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003



Ejemplo de detección de bordes. En las imágenes superiores se pueden ver: a la izquierda imagen original con ruido blanco, y a la derecha un zero-crossing de ella. En las imágenes inferiores: a la izquierda imagen cuantificada a 16 niveles y a la derecha detección de bordes

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003



Ejemplo de detección de bordes. En las imágenes superiores se pueden ver: a la izquierda imagen original con ruido blanco, y a la derecha un zero-crossing de ella. En las imágenes inferiores: a la izquierda imagen cuantificada a 16 niveles y a la derecha detección de bordes

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

CAPÍTULO VII

CONCLUSIONES

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

En esta memoria se presenta un estudio sobre la cuantificación de imágenes digitales. Por un lado, se ha diseñado un cuantificador no uniforme, basado en un funcional de energía que penaliza la aparición de niveles de gris finales muy próximos. Este funcional se ha demostrado que es separable y se la han podido aplicar las técnicas de programación dinámica para resolver el problema de la optimización inherente a la elección de un cuantificador.

Por otro lado, se han utilizando como modelo ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

El uso de una teoría consolidada y robusta como las ecuaciones diferenciales posee, a mi juicio, una serie de ventajas como son:

- - La formalización de modelos. A través de principios claros y concisos se puede escribir de manera compacta, en forma de ecuación diferencial, los modelos que se derivan de tales principios. Además, esta forma de proceder permite, en una primera fase de modelización, abstraerse del trabajo numérico, que siempre requiere consideraciones específicas, para centrarse en el aspecto conceptual y de principios.

- -De lo local a lo global. En una ecuación diferencial se establecen los principios locales que hacen interactuar a un punto con sus vecinos a través de operadores diferenciales, la evolución de la solución de la ecuación determina en cada instante una versión de la imagen original que va perdiendo

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

la información local en favor de una información más global de la imagen o señal.

- -Utilización de técnicas de análisis numérico para el diseño de algoritmos. Una vez establecidos los principios y las ecuaciones, el uso de una teoría consolidada como es el Análisis Numérico de ecuaciones diferenciales permite la construcción y estudio de algoritmos para llevar a la práctica las ideas desarrolladas en los modelos.

Siguiendo esta filosofía de trabajo, en esta tesis se han abordado los siguientes temas:

1. Se ha definido un nuevo funcional de energía. A partir del funcional de LLoyd (1.1) , se han introducido términos de manera que los niveles de gris finales no queden cercanos, y por tanto, visualmente se obtengan los niveles requeridos. Esto explica la mejora obtenida con respecto al funcional de Lloyd.

2. Se ha estudiado el funcional de energía introducido y se ha demostrado que es separable en el siguiente sentido: Si $\hat{Q}_S$ es un mínimo global de energía en el intervalo $[t_1, t_{S+1}]$ con

$$t_1 < u_1 < t_2 < u_2 < ..... < u_S < t_{S+1}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

entonces el cuantificador $\hat{Q}_{S-1}$ definido por

$$t_2 < u_2 < ..... < u_S < t_{S+1}$$

es un mínimo global de energía en el intervalo $[t_2, t_{S+1}]$. Además se han estudiado propiedades de este funcional para rebajar el número de operaciones necesarias, quedando de orden $\mathcal{O}(KN^2)$, donde K es el número de niveles finales y N es el número de niveles totales.

3. Se ha presentado como modelo una ecuación en derivadas parciales de reacción-difusión, para la cual se ha estudiado la existencia y unicidad de soluciones en el marco de las soluciones de viscosidad, así como la estabilidad de las mismas. Se ha demostrado la versatilidad de este modelo para abordar simultáneamente los problemas de cuantificación de imágenes y eliminación de ruidos. Esta ecuación en la parte de difusión elimina el ruido que aparece en la imagen, mediante una homegeneización en una ventana, respetando los contrastes entre las diferentes zonas. Representa una difusión direccional de mínima variación de la función (dirección perpendicular al gradiente ∇u). En la parte de reacción, lleva a los niveles finales los valores que pertenecen al intervalo de decisión o influencia.

4. Se ha estudiado la discretización del operador diferencial y se ha establecido, a través de un teorema, la estabilidad del esquema numérico resultante. Se

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

ha establecido la cuantificación como los estados asintóticos de la ecuación diferencial, tomando la imagen original como dato inicial. La convergencia del método hace que sean necesarias alrededor de 200 iteraciones, no obstante, este número depende del nivel de ruido presentado en la imagen.

Como líneas de aplicaciones futuras de este trabajo se pueden mencionar las siguientes:

- Segmentación de imágenes. Quedandose con los bordes de la imagen cuantificada se puede obtener una segmentación de ella, como se muestra en las imágenes presentadas.

- Resaltado de imágenes. Como la cuantificación óptima divide el intervalo $[0, 255]$ en subintervalos en los que la cantidad de energía es casi la misma, una forma de resaltar la imagen es establecer una aplicación de esta subdivisión en otra que sea uniforme, de manera que cada subintervalo tenga la misma longitud.

Como conclusión final, diríamos que el trabajo presentado en esta tesis representa un paso más hacia la consolidación de las ecuaciones en Derivadas Parciales como una herramienta fundamental en el procesamiento de imágenes a bajo nivel.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

CAPÍTULO VIII

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

BIBLIOGRAFÍA

[1] A. Aggarwal, M. M. Klawe, S. Moran, P. Shor, R. Wilber (1987), "Geometric Applications of a Matrix-Searching Algorithm", Algoritmica, 2 pp 195-208.

[2] E. Altman, G. Koole (1995), "On submodular value functions of dynamic Programming", Rapport de Recherche N. 2658, INRIA Sophia Antipolis.

[3] L. Álvarez, J. Esclarín (1995), "Image quantization by nonlinear smoothing", SPIE Vol. 2567 pp 182-192.

[4] L. Álvarez, J. Esclarín (1993), "Un modelo de cuantificación de imágenes", Proceeding of XIII C.E.D.Y.A. pp 473-478.

[5] L. Álvarez, J. Esclarín (1996), "Image quantization using partial differential equations", artículo aceptado para su publicación en SIAM J. on Applied Mathematics.

[6] L. Álvarez, J. Esclarín (1995), "Cuantificación de Imágenes", Second European Workshop on Image Processing and Mean Curvature, Palma de Mallorca, pp. 116-126.

[7] L. Álvarez, J. Esclarín, A. Trujillo (1996), "Segmentación de Imágenes mediante Cuantificación", preprint.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

[8] L. Álvarez, F. Guichard, P.L. Lions, J.M. Morel (1992), "Axiomes et equations fondamentaux du traitement d'images (Analyse Multiechelle et e.d.p.)", C.R.Acad. Sci. Paris, 315(1), pp 135-138.

[9] L. Álvarez, F. Guichard, P.L. Lions, J.M. Morel (1993), "Axioms and fundamental equations of image processing", Arch. for Rat. Mechanics 132(3), pp 199-257.

[10] L. Álvarez, F. Guichard, P.L. Lions, J.M. Morel (1992), "Axiomatization et nouveaux operateurs de la Morphologie Mathématique", C.R.Acad. Sci. Paris, 315(1), pp 265-268.

[11] L. Álvarez, P.L.Lions, J.M. Morel (1992), "Image selective smoothing and edge detection by non linear diffusion (II)", SIAM J. Num. Anal. Vol. 29, N. 3 , pp 845-866.

[12] L. Álvarez, J.M. Morel (1994), "Formalization and computational aspects of image analysis", Acta Numerica, pp. 1-61.

[13] L. Álvarez, J.M. Morel (1994), "A morphological approach to multiscale analysis. From principles to equations", Kluwer Academic Publishers, pp 249-276.

[14] L. Álvarez, L. Mazorra (1994), "Shock filters and anisotrpic diffusion", SIAM J. on Numerical Analysis. Vol. 31, No.1.

[15] L. Álvarez, F. Santana (1995), "Partial Differential Equations and Image Processing", Technical Report, Análisis Matemático de Imágenes, Dpto Informática y Sistemas, Universidad de las Palmas de Gran Canaria.

[16] G. Barles (1985), "Remark on a flame propagation model", Rapport INRIA, n.464.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

[17] R. Bellman (1957), "Dynamic Programming", Princeton University Press, Princeton, N.Y.

[18] R. Bellman, K. l. Cooke, J. A. Lockett (1970), " Algorithms, Graphs and Computers", Academic Press, New York.

[19] W.E. Boyce, R.C. Di Prima (1984), "Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera", Limusa, Mexico.

[20] H.Brezis (1987), "Analyse fonctionnelle", Masson, Paris.

[21] J.D. Bruce (1964), "Optime Quantization", Sc.D. thesis, M.I.T.

[22] V.Caselles, F. Catte, T. Coll, F. Dibos (1992), "A geometrical model for active contours in image progresing", cahier du CEREMADE n 9210.

[23] Y. G. Chen, Y. Giga, S. Goto (1989), "Uniqueness and Existence of Generalized Mean Curvature Flow Equations", preprint, Department of Mathematics, Hokkaido University, Japan.

[24] Y-G Chen, Y. Giga, T. Hitaka, M. Honma,(), "Numerical Analysis for motion of a Surface by Its Mean Curvature", preprint, Department of Mathematics, Hokkaido University, Japan.

[25] G.H.Cottet, L. Germain (1992), "Image processing trough Reaction combined with nonlinear Diffusion", Rapport Technique, RT 78.

[26] M.G.Crandall,H.Ishii, P.L.Lions (1990), " User's guide to viscosity solution of second order partial differential equation", Bulletin of the American Mathematical Society, (27), pp. 1-67, 1992.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

[27] M.G.Crandall, P.L.Lions (1983), "Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations", Trans. Amer. Math. Soc. 277, pp 1-42.

[28] M.G.Crandall, P.L.Lions (1981), "Condition d'unicité pour les solutions generalisées des équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre", C.R.Acad.Sc. Paris 292, pp 183-186.

[29] M.G.Crandall, L.C. Evans y P.L.Lions (1984), "Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations", Trans. Amer. Math. Soc. 282, pp 487-502.

[30] R. Dautray, J. L. Lions (1988), "Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques", MASSON, Paris.

[31] E. V. Denardo (1982), "Dynamic Programming", Prentice- Hall.

[32] R. Deriche, O. Faugeras (1995), "Les EDP en traitement des images et vision par ordinateur", Rapport de Recherche, INRIA.

[33] L.C. Evans (1978), "A convergence theorem for solutions of non linear second order elliptic equations", Indiana Univ. J.27, pp 875-887.

[34] L.C. Evans (1980), "On solving certain non linear differential equations by accretive operator methods", Israel J. Math 36, pp 225-247.

[35] L.C. Evans, H.M. Soner, P.E. Souganidis, (),"Phase Transitions and generalized motion by mean curvature", preprint.

[36] P.C.Fife (1987), "Mathematical Aspects of Reaction-Diffusion Systems", Springer_Verlag.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

[37] I. Fonseca, L. Tartar (1989), "The gradient theory transitions for systems with two potencial well", Procc. Roy. Soc. Of Edimburgh, 111A, pp 89-102.

[38] A.Friedman (1964), "Partial differential equations of parabolic type", Prentice-Hall.

[39] A. Gersho, R.M. Gray (1995), "Vector quantization and signal compression", Kluwer Academic Publishers, Boston.

[40] P.Grindrod (1991), "The theory and applications of Reaction-Diffusion equations", Clarendon Press, Oxford.

[41] D. Henry (1981), "Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations" Springer-Verlag, New York.

[42] U. Huckenbeck (1993), "Dynamic Programming in a Generalized Decision Model", Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald, Fachrichtungen Mathematik/Informatik, Jahnstr. 15a, D-17487 Greifswald, Germany.

[43] H.Ishii (1987), "Perron's method for Hamilton-Jacobi equations", Duke Math. J. 55, 369-384.

[44] H.Ishii (1989), "On uniqueness and existence of viscosity solutions of fully nonlinear second order elliptic PDE's", Comm. Pure Appl. Math. 42, 15-45.

[45] A.K. Jan (1989), "Fundamentals of digital image processing", Prentice-Hall.

[46] J. Kacur, K. Mikula (1995), "Solution of nonlinear diffusion appearing in image smoothing and edge detection", Applied Numerical Mathematics 17, pp 47-59.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

[47] J.J. Koenderink (1984), "The structure of images", Biol.Cybernet. 50 pp 363-370.

[48] S.N. Kruzkov (1970), "First order quasilinear equations in several independent variables", Math. USSR-sb. 10, pp 217-243.

[49] O.A. Ladyzhenskaja, V.A. Solonnikov, N.N. Ural'tseva (1968), "Linear and quasilinear equations of parabolic type", American Mathematical Society, Providence,R.I.

[50] P. Lascaux, R. Théodor (1986), "Analyse numérique matricielle appliquée a l'art de l'ingénieur", MASSON, Paris.

[51] B. Lew, H. J. Weiss (1982), "Introduction to Mathematical Programing: Quantitave Tools for Decision Making", Noht Holland. New York.

[52] J.O. Limb, C.B. Rubinstein (1978), "On the design of quantizers for DCPM Coders: A functional relationship between visibility, probability and masking", IEEE Trans. on comm. vol. com-26, NO. 5, pp 573-578.

[53] S.P. Lloyd (1957), "Least Squares Quantization in PCM", Unpublished Memo. Bell Lab.; IEEE Trans. Inform. Theory, IT-28, pp 129-137, 1982.

[54] D. Marr (1985), "La visión", Alianza Editorial, Madrid.

[55] D. Marr, H. Hildreth (1980), "Theory of edge detection", Proc.Roy. Soc. London Sr. B. 207, pp. 187-210.

[56] L. Mazorra (1993), "Filtrado y restauración de imágenes y señales unidimensionales a través de ecuaciones diferenciales", Tesis doctoral, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

[57] Y. Meyer (1992), "Les Ondelettes, Algorithmes et Applications", Armand Colin, Paris.

[58] M. Minoux (1983), "Programation Mathématique. Théorie et Algorithmes. Tome 2", Dunod, Paris.

[59] R. Moreno Jr. (1991), "The natural design of visual machinery", Rev. Acad. Canar. Cienc., Vol. III, No. 2, pp 89-94.

[60] A.N. Netravali (1977), "On Quantizers for DPCM coding of picture signals", IEEE Trans. Inform. Theory VOL: IT-23, NO. 3 pp 360-370.

[61] A.N. Netravali, B. Prasada (1977), "Adaptive quantization of picture signals using spatial masking", Proc. of the IEEE, Vol. 65, NO. 4, pp 537-548.

[62] F. Paiva (1994), "Comunicación personal".

[63] P. Perona, J. Malik (1990), "Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion", IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, (12) pp. 429-439.

[64] C.B. Price, P. Wambacq, A. Oosterlinck(1990), "Image enhacement and analysis with reaction-diffusion paradigm", IEE Proc. Vol. 137, Pt. I, N.3, pp 136-145.

[65] M. Rabbani, P.W. Jones (1991), "Digital compression Techniques", Tutorial Texts in optical engineering, Vol. TT7.

[66] P. A. Raviart, J. M. Thomas (1988), Introduction à l'anayse numérique des équations aux dérivées partielles", MASSON, Paris.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

[67] J.A. Sherrat (1995), "Turing bifurcations with a temporally varying diffusion coefficient", Journal of Mathematical Biology Springer_Verlag N. 33 pp 295-308.

[68] M. Soner, "Motion of a set by the curvature of its mean boundary", Preprint.

[69] A.M. Turing (1952), "The chemical basis of morphogenesis", Phil.Trans. Roy. Soc. London, B237, pp 37-72.

[70] A.P. Witkin, (1983), "Scale-space filtering", Prov. IJCAI, Karlsrure, pp. 1019-1021.

[71] A.P. Witkin, M. Kass (1991), "Reaction-Diffusion Textures", Computer Graphics, Vol. 25, N. 4, pp 299-307.

[72] X. Wu, K. Zhang (1993), "Quantizer Monotonicities and Globally Optimal Scalar Quantizer Design", IEEE Trans. Informa. Theory, Vol. 39, N. 3, 1049-1053.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003