

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS



TESIS DOCTORAL

**CONTRIBUCIÓN A LA DISCRETIZACIÓN DE
DOMINIOS PLANOS NO CONVEXOS
MEDIANTE ALGORITMOS DE
TRIANGULACIÓN Y TÉCNICAS DE
REGULARIZACIÓN DE MALLAS**

PEDRO DAMIÁN CUESTA MORENO

Las Palmas de Gran Canaria, Diciembre de 1992

Título de la tesis:

CONTRIBUCIÓN A LA DISCRETIZACIÓN DE DOMINIOS PLANOS NO CONVEXOS MEDIANTE ALGORITMOS DE TRIANGULACIÓN Y TÉCNICAS DE REGULARIZACIÓN DE MALLAS

Thesis title:

CONTRIBUTION TO THE DISCRETIZATION OF NON-CONVEX PLANE DOMAINS BY TRIANGULATION ALGORITHMS AND TECHNIQUES ON MESH REGULARIZATION

Resumen

En estos últimos años se esta dedicando un enorme esfuerzo a generación de mallas que permitan la discretización de dominios muy irregulares, como son los que surgen en problemas de la física y de la ingeniería.

El objeto de esta tesis es elaborar una herramienta eficaz y con un alto grado de automatización en la construcción de mallas para dominios planos no convexos. La aproximación de contornos se realiza mediante un conjunto de tramos rectos y curvos. Los tramos curvos se construyen mediante interpolación Spline cúbica directa e inversa, con distintos tipos de condiciones en los extremos. La discretización de los tramos rectos es inmediata, en cambio para los tramos curvos es necesario obtener aquellos puntos que los dividen en segmentos curvos de una longitud determinada.

Antes del proceso de triangulación se genera una nube de puntos interiores al dominio, dividiendo este previamente en regiones de diferentes densidades. Seguidamente se realiza un proceso de eliminación de puntos generados que no cumplan unas propiedades exigidas. Se proponen en este trabajo dos algoritmos de generación de mallas: uno basado en la triangulación de Delaunay adaptada a dominios no convexos mediante la aplicación de un criterio similar al de la generación de puntos; y otro basado en el método de avance frontal dotado de algunas mejoras.

A las mallas generadas por cualquiera de estos caminos se le puede aplicar un proceso de regularización modificando ciertas caras de los triángulos tal que se aumente su conformidad.

Para mejorar la calidad de la malla se propone también un suavizado de tipo laplaciano o alternativamente otro basado en un algoritmo genético simple.

Se realizan diferentes aplicaciones como la generación de mallas en dominios irregulares, aproximación de superficies y discretización de dominios utilizada en elementos finitos.

13-1992/93

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA

UNIDAD DE TERCER CICLO Y POSTGRADO

Reunido el día de la fecha, el Tribunal nombrado por el Excmo. Sr. Rector Magfco. de esta Universidad, el aspirante expuso esta TESIS DOCTORAL.

Terminada la lectura y contestadas por el Doctorando las objeciones formuladas por los señores jueces del Tribunal, éste calificó dicho trabajo con la nota de ~~OPTO UN / OURE POR LA UNIDAD~~

Las Palmas de G. C., a 12 de febrero de 1993.

El Presidente: Dr. D. José-Manuel Correas Dobato,

Secretari@: Dr. D. Luis Gavete Corvinos,

El Vocal: Dr. D. Miguel Galante Guille,

. Vocal: Dr. D. Francisco-Javier Elorza Tenreiro,

El Vocal: Dr. D. Gabriel Bugada Castelltort,

El Doctorando: D. Pedro-Damián Cuesta Moreno,

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA

DOCTORADO EN INGENIERÍA INDUSTRIAL

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS EN LA INGENIERÍA

**CONTRIBUCIÓN A LA DISCRETIZACIÓN DE DOMINIOS PLANOS
NO CONVEXOS MEDIANTE ALGORITMOS DE TRIANGULACIÓN Y
TÉCNICAS DE REGULARIZACIÓN DE MALLAS.**

Tesis Doctoral presentada por Pedro Damián Cuesta Moreno

Dirigida por el Dr. Gustavo Montero García

Codirigida por el Dr. Gabriel Winter Althaus

El Director

El Codirector

El Doctorando

Las Palmas de Gran Canaria, a 11 de Diciembre de 1992.

a mi padre...

RESUMEN

En este trabajo se proponen nuevas técnicas de aproximación de contornos de dominios planos no convexos, así como la generación de mallas triangulares mediante métodos basados en el de Delaunay y en el de Avance Frontal. Se presentan nuevas vías de regularización y suavizado de mallas, y se realizan aplicaciones que validan los algoritmos desarrollados.

ABSTRACT

In this work, new techniques on contour lines approximation in non-convex plane domains and triangular meshes generation by methods based on Delaunay and front avance algorithms, are proposed.

New ways for mesh regularization and smoothing are presented, and some applications are considered in order to test the developed algorithms.

AGRADECIMIENTOS

Resultaría muy prolijo mencionar a todas las personas que me brindaron su ayuda y su ánimo en la realización de esta TESIS. Por ello mencionaré a los que más directamente contribuyeron a ésta.

En primer lugar he de mencionar a mi Director, *Gustavo Montero*, y a mi codirector *Gabriel Winter*, que, además de ser excelentes *Maestros*, me dedicaron su tiempo en detrimento muchas veces de su descanso y dedicación a la familia.

A *Luis Ferragut*, por su sugerencia sobre el Tema de Investigación.

A *Miguel Galante*, por el ánimo que me impulsó muchas veces a continuar y por su colaboración en una parte del trabajo de *Investigación*.

A *Manuel Galán*, por su apoyo y colaboración en la redacción y edición del presente trabajo.

Finalmente, a todos aquellos miembros de nuestra *Universidad* y de otros Centros que me ayudaron y contribuyeron de una u otra forma a que este Trabajo llegara a buen fin.

A todos **GRACIAS**.

INDICE

CAPÍTULO 1:	
INTRODUCCIÓN	1
1.1 INTRODUCCIÓN	2
CAPÍTULO 2:	
MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS Y DISCRETIZACIÓN DE DOMINIO	4
2.1. INTRODUCCIÓN	5
2.2. FORMULACIÓN ABSTRACTA CLÁSICA DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS	7
2.3 SOBRE OTRAS FORMULACIONES VARIACIONALES	21
2.4. DISCRETIZACIÓN DEL DOMINIO Y FORMULACIÓN EN DIMENSIÓN FINITA DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS	26
2.5. ERROR DE LA APROXIMACIÓN Y ESTABILIDAD DE LA SOLUCIÓN NUMÉRICA: VINCULACIÓN CON LA DISCRETIZACIÓN CON ELEMENTOS FINITOS	35
2.5.1. ERROR DE LA APROXIMACIÓN EN EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS EN PROBLEMAS ELÍPTICOS	35
2.5.1.1. ESTIMADORES A PRIORI DE ACOTACIÓN DEL ERROR DE APROXIMACIÓN EN PROBLEMAS ELÍPTICOS	40
2.5.1.2. PROBLEMAS CON DISMINUCIÓN DE REGULARIDAD EN LA SOLUCIÓN	46
2.5.1.3. MALLADOS TRIANGULARES	57

2.5.2. ERROR DE LA APROXIMACIÓN EN PROBLEMAS PARABÓLICOS	68
2.5.3. ESTABILIDAD DE LA SOLUCIÓN NUMÉRICA	72
2.5.4. MÉTODOS ADAPTATIVOS	75
2.5.4.1. MÉTODOS Y RESOLUCIONES ADAPTATIVAS DE ELEMENTOS FINITOS	75
2.6. CONCLUSIONES PRELIMINARES	81
CAPÍTULO 3:	
TÉCNICAS DE GENERACIÓN DE MALLAS TRIANGULARES	86
3.1. INTRODUCCIÓN	87
3.2. MÉTODO DE DELAUNAY	88
3.3. MÉTODO DE AVANCE FRONTAL	97
3.4. OTRAS TÉCNICAS DE GENERACIÓN DE MALLAS TRIANGULARES	101
3.4.1. MÉTODOS DE TRANSPORTE-PROYECCIÓN	101
3.4.2. MÉTODOS BASADOS EN RESOLUCIÓN DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES	102
3.4.3. MÉTODOS DE DESCOMPOSICIÓN EN BLOQUES	104
3.4.4. MÉTODOS DE SUPERPOSICIÓN-DEFORMACIÓN DE RETÍCULAS	105
3.5. TÉCNICAS DE REGULARIZACIÓN DE MALLADOS	107

CAPÍTULO4:	
CONTRIBUCIÓN A LA APROXIMACIÓN DE CONTORNOS EN 2-D Y A LA DISCRETIZACIÓN DE DOMINIOS NO CONVEXOS POR NUBE DE PUNTOS	113
4.1. APROXIMACIÓN DE CONTORNOS BIDIMENSIONALES	113
4.1.1. INTRODUCCIÓN	113
4.1.2. SPLINE CÚBICA	113
4.2. CONDICIONES EN LOS EXTREMOS	115
4.2.1. CONDICIONES EN DERIVADA SEGUNDA	115
4.2.2. CONDICIÓN EN DERIVADA PRIMERA FINITA	115
4.2.3. CONDICIÓN EN DERIVADA PRIMERA INFINITA	116
4.3. CONTRIBUCIÓN A LA DISCRETIZACIÓN DE CONTORNOS DE DOMINIOS PLANOS	122
4.3.1. INTRODUCCIÓN	122
4.3.2. DISCRETIZACIÓN DE CONTORNOS RECTOS	123
4.3.3. DISCRETIZACIÓN DE CONTORNOS CURVOS	123
4.3.4. UNA SOLUCIÓN A LA DISCRETIZACIÓN DE UN TRAMO SPLINE	124
4.4. GENERACIÓN DE NUBE DE PUNTOS INTERIORES	126
4.4.1. INTRODUCCIÓN	126
4.4.2. FIJACIÓN DEL TAMAÑO DE TRIÁNGULOS POR REGIONES	127

4.4.3. CÁLCULO DE LA NUBE INTERNA DE PUNTOS	128
4.4.3.1. CÁLCULO DE INTERSECCIONES CON CONTORNOS	130
4.4.3.2. CÁLCULO DE TRAMOS EN QUE HAY QUE DISCRETIZAR	130
4.4.3.3. DISCRETIZACIÓN DEL TRAMO "AB"	135
4.4.3.4. REGULARIZACIÓN DE LA NUBE DE PUNTOS	137
4.5. ALGORITMO UTILIZADO EN LA GENERACIÓN DE PUNTOS INTERIORES AL DOMINIO	138
CAPÍTULO 5: CONTRIBUCIÓN A LA TRIANGULACIÓN DE DELAUNAY Y MÉTODO DE AVANCE FRONTAL EN DOMINIOS PLANOS NO-CONVEXOS	140
5.1. UTILIZACIÓN DE LA TRIANGULACIÓN DE DELAUNAY PARA DOMINIOS PLANOS NO-CONVEXOS	140
5.2. MÉTODO DE AVANCE FRONTAL	149
5.2.1. CRITERIO DE ELECCIÓN DE UN PUNTO	150
5.2.2. ALGORITMO DE AVANCE FRONTAL	154
5.3. ALISADO A TRAVÉS DE UN ALGORITMO GENÉTICO SIMPLE	162
5.3.1. COORDENADAS GRÁFICAS O CROMOSOMAS	163
5.3.2. FUNCIÓN OBJETIVO	163
5.3.3. SELECCIÓN, CRUCE Y MUTACIÓN	165

CAPÍTULO 6:	
APLICACIONES Y CONCLUSIONES	167
6.1. PROBLEMA DE ELASTICIDAD LINEAL Y TENSIÓN PLANA	168
6.2. PROBLEMA LINEAL DE TRANSMISIÓN DE CALOR	174
6.3 PROBLEMA DE FILTRACIÓN EN ACUÍFERO CONFINADO BAJO UN PILOTE	180
6.4. PROBLEMA DE CONTAMINACIÓN EN ZONAS COSTERAS	187
6.5. CONCLUSIONES	198
CAPÍTULO 7:	
LINEAS FUTURAS	200
7.1. ADAPTACIÓN DE MALLAS	201
7.1.1 INDICADORES DE ERROR Y ESTRATEGIA DE CREACIÓN DE MALLAS	201
7.1.2. APLICACIONES	206
7.1.2.1. FILTRACIÓN EN ACUÍFERO CONFINADO BAJO UN PILOTE	206
7.1.2.2. PROBLEMA DE UN INTERCAMBIADOR DE CALOR DE FLUJO CRUZADO	210
7.2. OTRAS LINEAS FUTURAS	216
CAPÍTULO 8.	
BIBLIOGRAFÍA	217

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN

1.1. INTRODUCCIÓN

En estos últimos años se está dedicando un enorme esfuerzo a la generación de mallas que permitan la discretización de dominios complejos e irregulares, como los que surgen en distintos problemas de la Física y de la Ingeniería.

Los objetivos abordados en esta tesis doctoral han sido:

1.- Aproximar contornos curvos mediante interpolación Spline cúbica con distintos tipos de condiciones en los extremos, principalmente el caso de pendiente infinita. La discretización de los tramos rectos es inmediata, en cambio, para los tramos curvos es necesario obtener aquellos puntos que lo dividen en segmentos curvos de una longitud determinada.

2.- Considerar antes del proceso de triangulación, la generación de nube de puntos interiores al dominio, dividiendo éste previamente, si es necesario, en regiones de diferentes densidades, realizándose a continuación un proceso de eliminación de los puntos generados que no cumplan ciertas propiedades exigidas a priori.

3.- Desarrollar dos algoritmos de generación de mallas, uno basado en la triangulación de Delaunay adaptada a dominios no convexos mediante la aplicación de un criterio similar al de la generación de puntos interiores al dominio; y otro basado en el método de Avance Frontal con una nueva técnica en la elección del punto que unido a dos puntos consecutivos de la línea de avance formen un triángulo.

4.- Abordar procesos de regularización modificando los triángulos para

que se aumente la calidad de la malla. Asimismo, además de aplicar suavizado de tipo laplaciano, abordar una nueva vía basada en un algoritmo genético simple, proponiéndose distintas funciones objetivo.

5.- Conexión del trabajo realizado con un código adaptativo de elementos finitos con el fin de realizar diferentes aplicaciones, que validen las técnicas elaboradas de generación de mallas, en dominios irregulares, aproximación de superficies y discretización de dominios en la resolución de diversos problemas.

CAPITULO 2: MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS Y DISCRETIZACIÓN DE DOMINIO

2.1. INTRODUCCIÓN

El método de los elementos finitos es el más usado para la simulación numérica de problemas físicos variados, formulados en términos de ecuaciones diferenciales. Entre ellos cabe citar problemas de cálculo de temperaturas, desplazamientos, presión, velocidades, campos magnéticos, etc., en ciertos puntos del dominio o región asociado al problema tratado.

Una simulación numérica exige, en una primera etapa, la construcción del mallado del dominio del problema, a fin de construir un recubrimiento de este dominio y definir sus nodos o mas general sus puntos de cálculo: discretización del medio continuo para en ella calcular la solución numérica.

Esta fase del preproceso es muy importante, en la medida que la generación de un mallado para un dominio de geometría compleja no es una operación simple y la calidad de la solución numérica depende del mallado considerado. Así mallados con características no aceptables repercuten en la no convergencia del método de elementos finitos, o bien en disminuir la velocidad de convergencia del método. Y, el hecho evidentemente de que la calidad de la solución numérica esta limitada en la intensidad y la calidad de la discretización mediante la cual se calculó la misma.

En este capítulo tratamos todos los aspectos necesarios a tener en cuenta, para el establecimiento de un mallado apropiado a la resolución de un problema, mediante técnica de elementos finitos. Después de tratar etapas fundamentales en la resolución de un problema, se tratan vinculaciones de esas etapas en la discretización geométrica y de la solución, en la resolución numérica de una amplia gama de problemas de la Ingeniería. Se con-

cluye este capítulo en consideraciones vinculadas a la discretización de los problemas: convergencia, estabilidad de la solución numérica, aproximación del contorno y singularidades entre otros aspectos, y en contexto asimismo de resoluciones adaptativas de elementos finitos.

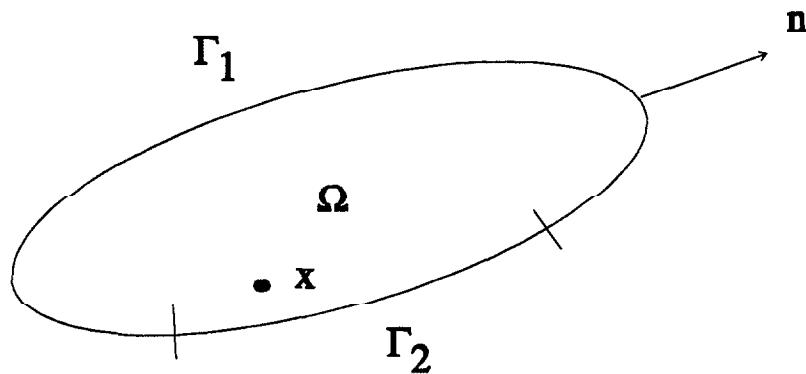
2.2. FORMULACIÓN ABSTRACTA CLÁSICA DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS.

Para una gama amplia de problemas se describe de un modo general las etapas del Método de los Elementos Finitos.

Sea Ω un dominio, abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, de frontera $\partial\Omega$ regular.

$$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$$



$$x(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Sea un problema de contorno, elíptico, de formulación clásica:

Encontrar $u(x)$ que verifique:

$$\left. \begin{aligned} A_1 u &= f(x) \text{ en } \Omega \\ M u &= g_1(x) \text{ en } \Gamma_1 \\ N u &= g_2(x) \text{ en } \Gamma_2 \end{aligned} \right\} \quad (P1)$$

Siendo A_1 operador diferencial de orden $2m$, elíptico, M operador dife-

rencial de orden $m-1$, y N operador diferencial de orden $2m-1$.

La segunda y tercera ecuación, corresponden a condiciones de contorno impuestas a la solución u del problema, respectivamente denominadas *condiciones de contorno esenciales* y *condiciones de contorno naturales*.

En general $f \in L^2(\Omega)$ lo que impone la regularidad a la solución del problema (PI), tal que $u \in H, H \subset H^{2m}(\Omega)$.

El primer paso de la técnica de elementos finitos es establecer una formulación más débil denominada formulación variacional o débil del problema a fin de disminuir la regularidad exigida en (PI) a la solución.

La ecuación variacional se establece multiplicando la ecuación a resolver en Ω por una función test v e integrando en todo el dominio:

$$\int_{\Omega} (A_1 u) v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega \quad \forall v \in V$$

Siendo V espacio funcional de las funciones test admisibles. Mediante aplicación de teoremas de cálculo integral realizamos integración por partes en el primer miembro de la ecuación, lo que conlleva a debilitar la regularidad inicialmente exigida a la solución, al mismo tiempo que nos permite incorporar las condiciones de contorno naturales. Generalmente se lleva a cabo lo descrito exigiendo a la solución y a las funciones test la misma regularidad. En definitiva, se obtiene la ecuación variacional estándar:

$$\sum \int_{\Omega} (B_i u)(B_j v) \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} (Nu)(Mv) \, d\sigma = \int_{\Omega} f v \, d\Omega$$

Siendo B_i, B_j operadores con derivadas de orden menor o igual a m .

Exigiendo a las funciones test v que $Mv = 0$ en Γ_1 tendremos:

$$\sum \int_{\Omega} (B_i u)(B_j v) d\Omega + \int_{\Gamma_2} (Nu)(Mv) d\Gamma_2 = \int_{\Omega} f v d\Omega$$

En definitiva obtenemos la formulación variacional estándar del problema:

Hallar $u \in H^m(\Omega)$ tal que $Mu = g_1$ en Γ_1 y verificando que:

$$\sum \int_{\Omega} (B_i u)(B_j v) d\Omega + \int_{\Gamma_2} g_2 M v d\Gamma_2 = \int_{\Omega} f v d\Omega$$

$$\forall v \in H^m(\Omega) : Mv = 0 \text{ en } \Gamma_1$$

Posteriormente denotaremos de forma más abstracta la ecuación expresándola de la forma:

$$a(u, v) = f(v)$$

Así, para la formulación clásica correspondiente a muchos problemas potenciales:

$$-\operatorname{div}\left(a(x) \operatorname{grad}(\vec{u})\right) = f(x) \text{ en } \Omega$$

$$u = g_1 \text{ en } \Gamma_1$$

$$-a(x) \frac{\partial u}{\partial n} = g_2 \text{ en } \Gamma_2$$

$f \in L^2(\Omega), a(x) \in L^\infty(\Omega)$, la formulación variacional clásica del problema corresponderá pues, a:

Hallar $u \in H^1(\Omega)$ tal que:

$$u = g_1 \text{ en } \Gamma_1$$

Verificando que:

$$\int_{\Omega} a(x) \vec{\text{grad}} u \vec{\text{grad}} v d\Omega - \int_{\Gamma_2} g_2 v d\Gamma_2 = \int_{\Omega} f v d\Omega$$

$$\forall v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ en } \Gamma_1$$

Donde corresponde al caso particular de:

$$A_1 = -\text{div} \left(a(x) \vec{\text{grad}} \right) \text{ en } \Omega$$

$$M = I \quad \text{en } \Gamma_1$$

$$N = -a(x) \frac{\partial}{\partial n} \quad \text{en } \Gamma_2$$

Resultando $B = \vec{\text{grad}}$ en la aplicación de integración por partes correspondiente al primer miembro de:

$$\int_{\Omega} (A_1 u) v d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega \quad \forall v \in V$$

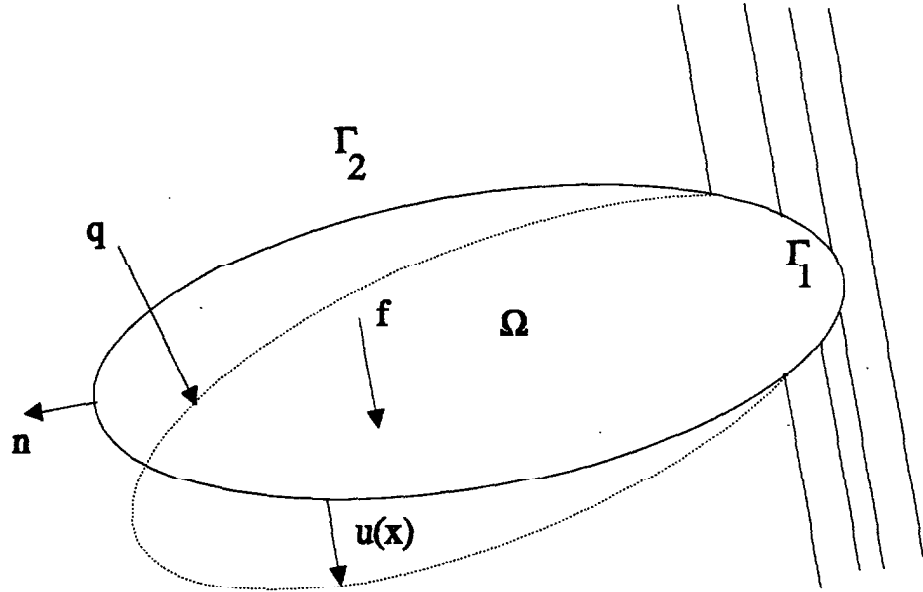
La técnica de construcción de la formulación variacional se extiende a problemas vectoriales, como es el caso del problema de elasticidad lineal plana que exponemos a continuación:

Sea un cuerpo homogéneo, isótropo, elástico, ocupando un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d=2,3$ y de frontera $\partial\Omega$

$$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$$

Área de Γ_1 positiva y consideremos un estado de cargas $f(f_1, f_2, \dots, f_d)$ actuando sobre Ω y un estado de cargas $q(q_1, q_2, \dots, q_d)$ actuando sobre Γ_2 .



$\tilde{n}(n_1, n_2, \dots, n_d)$ seminormal exterior.

Deseamos calcular el desplazamiento $u(u_1, u_2, \dots, u_d)$, siendo u_i el desplazamiento en la dirección i , y σ_{ij} el tensor de tensiones correspondiente al estado de cargas (σ_{ij} es el esfuerzo normal en la dirección x_i para $i = j$, siendo σ_{ij} esfuerzos cortantes cuando $i \neq j$).

La formulación clásica del problema, de naturaleza vectorial a considerar es:

$$\begin{aligned} -\sum_{j=1}^d \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} &= f_i \quad \text{en } \Omega \\ -\sum_{j=1}^d \sigma_{ij} n_j &= q_i \quad \text{en } \Gamma_2 \quad i = 1, 2, \dots, d \\ u_i &= 0 \quad \text{en } \Gamma_1 \end{aligned}$$

Corresponde establecer la formulación variacional a ser formada por d-ecuaciones variacionales realizando el mismo procedimiento que en casos escalares para cada valor de i .

Se considera funciones test vectoriales $v(v_1, v_2, \dots, v_d)$ siendo v_i compo-

nente de la función test correspondiente a la dirección i .

Así para la primera ecuación expresado con notación de índices repetidos,

$$\begin{aligned} -\sigma_{ij,j} &= f_i \quad \text{en } \Omega \\ -\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} v_i d\Omega &= \int_{\Omega} f_i v_i d\Omega \\ i &= 1, 2, \dots, d \end{aligned}$$

siendo:

$$\sigma_{ij} = \lambda \operatorname{div} u \delta_{ij} + \mu \varepsilon_{ij}(u)$$

en elasticidad lineal (ley de Hooke), δ_{ij} es la delta de Kronecker,

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

es el tensor de deformación asociado al desplazamiento u .

Realizando integración por partes e introduciendo la condición de tipo natural en la propia formulación variacional, da lugar a:

Hallar $u \in (H^1(\Omega))^d$, $u = 0$ en Γ_1 tal que:

$$\begin{aligned} a(u, v) &= f(v) \\ \forall v \in (H^1(\Omega))^d : v &= 0 \text{ en } \Gamma_1 \end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} [\lambda \operatorname{div} u \operatorname{div} v + \mu \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v)] d\Omega \\ f(v) &= \int_{\Omega} f_i v_i d\Omega + \int_{\Gamma_2} q_i v_i d\Gamma_2 \end{aligned}$$

donde μ y λ tienen las expresiones:

$$\mu = \frac{E}{1+\nu}$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

E es el módulo de elasticidad o de Young del material elástico y ν el coeficiente (razón de contracción) de Poisson del material elástico.

Para el problema evolutivo parabólico cuya solución estacionaria corresponde a la solución de (P1), de formulación clásica:

Hallar $u(x,t)$ que verifique, $\forall t \in (0, T)$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + A_1 \right) u &= f && \text{en } \Omega \times (0, T) \\ M u &= g_1 && \text{en } \Gamma_1 \times (0, T) \\ N u &= g_2 && \text{en } \Gamma_2 \times (0, T) \\ u(x, 0) &= u_0 && \text{en } \Omega \end{aligned}$$

de modo similar se construye la formulación variacional estándar:

$$\int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + A_1 \right) u \right] v d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega \quad \forall v \in V$$

siendo el problema variacional, $\forall t \in (0, T)$:

Hallar $u \in H^m(\Omega)$ tal que:

$$\begin{aligned} M u &= g_1 && \text{en } \Gamma_1 \\ u &= u_0 && \text{en } \Omega \quad \text{para } t = 0 \end{aligned}$$

y verificando

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} v d\Omega + \sum \int_{\Omega} (B_i u) (B_j v) d\Omega + \int_{\Gamma_2} g_2 M v d\Gamma_2 = \int_{\Omega} f v d\Omega$$

$$\forall v \in H^m(\Omega) : Mv = 0 \text{ en } \Gamma_1$$

expresada de forma abstracta:

encontrar

$$u : t \in (0, T) \rightarrow u(t) \in H^m(\Omega)$$

tal que:

$$\frac{d}{dt}(u(t), v) + a(u(t), v) = (f(t), v)$$

siendo la derivada en sentido de distribuciones sobre $(0, T)$ y $\forall \varphi, \Psi \in L^2(\Omega)$, el producto escalar,

$$(\varphi, \Psi) = \int_{\Omega} \varphi \Psi d\Omega$$

Así el problema:

Hallar $u(x, t)$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div} \left(a(x) \vec{\operatorname{grad}}(u) \right) &= f(x, t) && \text{en } \Omega \times (0, T) \\ u &= g_1 && \text{en } \Gamma_1 \times (0, T) \\ -a(x) \frac{\partial u}{\partial n} &= g_2 && \text{en } \Gamma_2 \times (0, T) \\ u(x, 0) &= u_0 && \text{en } \Omega \end{aligned}$$

Tendremos la formulación variacional estándar siguiente:

Hallar $u \in H^1(\Omega) \quad \forall t \in (0, T)$ tal que:

$$\begin{aligned} u &= g_1 \text{ en } \Gamma_1 \times (0, T) \\ u &= u_0 \text{ en } \Omega \text{ para } t = 0 \end{aligned}$$

verificando que,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} v d\Omega + \int_{\Omega} a(x) \vec{\text{grad}} u \vec{\text{grad}} v d\Omega &= \int_{\Omega} f v d\Omega + \int_{\Gamma_2} g_2 v d\Gamma_2 \\ \forall v \in H^1(\Omega) : v &= 0 \text{ en } \Gamma_1 \end{aligned}$$

La segunda etapa de la técnica de elementos finitos es la aproximación en dimensión finita del problema variacional, formulándose ésta en un subespacio de dimensión finita del espacio de las funciones admisibles.

Así la aproximación u_h de la solución u es de la forma:

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \phi_j(x)$$

O para problemas evolutivos separando variables (denominada semi-discretización en cuanto que se discretiza en espacio con la técnica de elementos finitos)

$$u_h(x, t) = \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) \phi_j(x)$$

Donde N es la dimensión del espacio H_h , subespacio de H^m en los problemas planteados anteriormente; $\{\Phi_j\}_{j=1}^N$ base de H_h .

La formulación abstracta de los problemas antes expresados en dimensión finita corresponden a:

Hallar: $u_h \in H_h \subset H^m$, u_h aproximación de u en H_h tal que $\forall v_h \in H_h$:

- Problema Elíptico:

$$a(u_h, v_h) = f(v_h), \text{ es decir,}$$

$$a\left(\sum_{j=1}^N \alpha_j \phi_j(x), v_h\right) = f(v_h)$$

- Problema Parabólico:

$$\frac{d}{dt}(u_h(x, t), v_h) + a(u_h(x, t), v_h) = (f(t), v_h)$$

cumpliendo las condiciones impuestas esenciales en el contorno y condición inicial en Ω en problema evolutivo parabólico.

Las funciones base ϕ_j son frecuentemente elegidas polinomios a trozos en el dominio de cálculo, construidas de modo que verifican:

$$\phi_j(x_i) = \delta_{ij}$$

lo que implica que:

$$\alpha_j = u(x_j)$$

o en caso evolutivo

$$\alpha_j(t) = u(x_j, t)$$

de este modo se tiene

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^N u(x_j) \phi_j(x)$$

o bien

$$u_h(x, t) = \sum_{j=1}^N u(x_j, t) \phi_j(x)$$

Paralelamente el dominio Ω es reemplazado por Ω_h compuesto de E subdominios Ω_e denominados elementos finitos de forma que:

$$\begin{aligned}\Omega_h &\approx \Omega \quad , \quad \partial\Omega_h \approx \partial\Omega \\ \overline{\Omega}_h &= \bigcup_{e=1}^E \overline{\Omega}_e\end{aligned}$$

Siendo la restricción de $\phi_j(x)$ en Ω_e denominada función de forma Ψ_j^e , la aproximación u_h^e de u en Ω_e será:

$$u_h^e = \sum_{j=1}^{N_e} u_j^e \Psi_j^e(x); \quad x \in \Omega_e$$

N_e es el número de nodos o puntos de cálculo $x_j^e \in \Omega_e$ elegidos.

Formulando los problemas variacionales localmente sobre cada elemento Ω_e con $v_h = \Psi_i^e$ tenemos los problemas variacionales siguientes:

- Problema Elíptico:

$$\begin{aligned}a\left(\sum_{j=1}^{N_e} u_j^e \Psi_j^e(x), \Psi_i^e\right) &= f(\Psi_i^e) \\ i &= 1, 2, \dots, N_e\end{aligned}$$

- Problema Parabólico:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^{N_e} u_j^e(t) \Psi_j^e(x), \Psi_i^e \right) + a \left(\sum_{j=1}^{N_e} u_j^e \Psi_j^e(x), \Psi_i^e \right) = (f(t), \Psi_i^e)$$

$$i = 1, 2, \dots, N_e$$

Que expresados en notación matricial corresponde a los sistemas de ecuaciones:

- Problema Elíptico:

$$\sum_{j=1}^{N_e} K_{ij}^e u_j^e = f_i^e - \sigma_i^e$$

$$i = 1, 2, \dots, N_e$$

- Problema Parabólico:

$$\frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{N_e} C_{ij}^e u_j^e + \sum_{j=1}^{N_e} K_{ij}^e u_j^e = f_i^e - \sigma_i^e$$

$$i = 1, 2, \dots, N_e$$

σ_i^e representa las contribuciones de las condiciones de contorno naturales sobre el contorno del elemento finito Ω_e , correspondiente a $Nu = g_2$, con u solución exacta.

Mediante ensamblaje de las ecuaciones que forman los sistemas anteriores o construcción de un sistema de ecuaciones por suma de matrices de los sistemas locales, establecidos con anterioridad en cada Ω_e , teniendo en cuenta la suma de las contribuciones de cada elemento al que pertenezca el nodo i , nos da lugar a obtener un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son los valores de la solución en los i -nodos. Así se obtienen los sistemas a resolver numéricamente:

- Problema Elíptico:

$$\sum_{j=1}^N K_{ij} u_j = F_i$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

- Problema Parabólico:

$$\frac{d}{dt} \sum_{j=1}^N C_{ij} u_j + \sum_{j=1}^N K_{ij} u_j = F_i ; u = u_0 \text{ en } t = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

siendo

$$K_{ij} = \sum_{e=1}^E K_{ij}^e$$

$$C_{ij} = \sum_{e=1}^E C_{ij}^e$$

En el problema evolutivo parabólico queda considerar semidiscretización en tiempo, así una aproximación a considerar puede ser,

$$\frac{du_j}{dt} \equiv \frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{t_{n+1} - t_n}$$

que corresponde a la formulación variacional iterativa:

Hallar $u(t_{n+1}) \in H$, cumpliendo condición en $\partial\Omega_I$ esencial (Dirichlet), tal que conocido $u_h(t_n)$ se verifique:

$$\int_{\Omega} \frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{t_{n+1} - t_n} v d\Omega + a[u(t_n), v] = F(v) \quad \forall v \in V$$

Donde t_0 pudiera elegirse entre otras posibilidades $t_0 = t_{n+1}, t_0 = t_n, \dots$

Para la primera iteración ($n=1$) se considera el valor impuesto conocido, $u(t_0) = u_0$.

Para un problema estacionario elíptico no lineal, debido por ejemplo a la dependencia $a = a(x, u)$, la formulación variacional será la misma que en el caso lineal, con la única diferencia que el coeficiente es $a = a(x, u)$ en lugar de $a = a(x)$.

La discretización dará lugar a un sistema de ecuaciones algebraico no lineal:

$$\begin{aligned} K_{ij}(u) \{u_j\} &= F_i \\ i &= 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Que se resolverá numéricamente, por ejemplo, según método de punto fijo:

Dado u^n , aproximación de u , hallar u^{n+1} mejor aproximación, resolviendo:

$$\begin{aligned} K_{ij}(u^{n+1}) \{u_j^n\} &= F_i \\ i &= 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

La formulación variacional expresada iterativamente con la linealización según punto fijo será:

Hallar $u_h^{n+1} \in H_h$ aproximación de la solución $u_h \in H_h$, conocida la aproximación u_h^n tal que se verifique:

$$a(u^{n+1}, v) = f \quad \forall v \in V$$

2.3 SOBRE OTRAS FORMULACIONES VARIACIONALES

La formulación variacional a considerar no es única, puede establecerse para un problema concreto de diversos modos distintos a la clásica expuesta, de forma que la función test v y la incógnita que intervenga en la formulación variacional (no necesariamente la incógnita en esta formulación es u , sino puede ser otra variable relacionada con ella y posteriormente calcular u) pertenezcan a espacios funcionales distintos.

Así sea el problema elíptico lineal de contorno en $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, con notación de índices repetidos:

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = f \quad \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^d, f \in L^2(\Omega)$$

$$u = g_1 \quad \text{en } \partial\Omega_1, g_1 \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_1)$$

$$a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} n_i = g_2 \quad \text{en } \partial\Omega_2, g_2 \in L^2(\partial\Omega_2)$$

siendo

$$\begin{aligned} a_{ij} &\in L^\infty(\Omega) \quad \text{con} \\ a_{ij}(x) \xi_j \xi_i &\geq \alpha \xi_j \xi_i \\ \alpha &> 0 \quad \text{en } \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

La condición anterior hace que $a(u, v)$ sea forma bilineal y α -elíptica

Una formulación variacional distinta a la estándar y que constituye una formulación mixta del problema queda constituida del siguiente modo:

Introduciendo un campo incógnita $\vec{p}$ de componentes p_i , $i=1,2,\dots,d$ siendo:

$$p_i = a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}$$

El problema pasa a ser formulado:

$$\operatorname{div} \vec{p} = -f \quad f \in L^2(\Omega)$$

$$u = g_1 \quad \text{en } \partial\Omega_1$$

$$\vec{p} \cdot \vec{n} = a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} n_i = g_2 \quad \text{en } \partial\Omega_2$$

$f \in L^2(\Omega)$ asegura que $\vec{p} \in H(\operatorname{div}; \Omega)$.

Expresemos una formulación variacional introduciendo la condición de tipo natural en la misma mediante definición del espacio:

$$H_{0,\partial\Omega_2}(\operatorname{div}; \Omega) = \{ \vec{q} \in H(\operatorname{div}; \Omega); \vec{q} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{en } \partial\Omega_2 \}$$

O bien de modo más formal:

$$H_{0,\partial\Omega_2}(\operatorname{div}; \Omega) = \left\{ \vec{q} \in H(\operatorname{div}; \Omega); \int_{\partial\Omega_2} \vec{q} \cdot \vec{n} v ds = 0 \quad \forall v \in L^2(\Omega) \right\}$$

Sea v función test $v \in L^2(\Omega)$, en la primera ecuación del problema:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{p} v \, d\Omega = - \int_{\Omega} f v \, d\Omega \quad \forall v \in L^2(\Omega) \quad (*)$$

que expresada respecto a A_{ij} matriz inversa de a_{ij} nos da:

$$A_{ij} p_j - \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$$

multiplicando por $\vec{q} \in H_{0,\partial\Omega_2}(\operatorname{div}; \Omega)$, integrando en Ω y aplicando el teo-

rema de Green:

$$\int_{\Omega} A_{ij} p_j q_i d\Omega + \int_{\Omega} u \frac{\partial q_i}{\partial x_i} d\Omega - \int_{\partial\Omega_1} \vec{q} \cdot \vec{n} g_1 ds \quad \forall \vec{q} \in H_{0,\partial\Omega_2}(\text{div}; \Omega) \quad (*)$$

$$\int_{\partial\Omega_2} \vec{p} \cdot \vec{n} \varphi ds = \int_{\partial\Omega_2} g_2 \varphi ds \quad \forall \varphi \in H_{0,\partial\Omega_1}^1(\Omega) \quad (*)$$

$$H_{0,\partial\Omega_1}^1 = \left\{ \varphi \in L^2(\partial\Omega_1) \mid \varphi = 0 \text{ en } \partial\Omega_1 \right\}$$

En definitiva, una formulación variacional podría ser por tanto:

Hallar:

$$(\vec{p}, u) \in H(\text{div}; \Omega) \times L^2(\Omega)$$

tal que se verifiquen las tres ecuaciones (*) establecidas.

La restricción primera puede considerarse formulando el problema como de punto silla, es decir, tratando esta restricción mediante un multiplicador de Lagrange, es decir formulado el problema en el espacio:

$$V = V^{(0)} = \left\{ \vec{q} \in H(\text{div}; \Omega), \text{div } \vec{q} = 0 \right\}$$

La formulación variacional mixta expuesta conduce mediante la resolución con elementos finitos a la obtención directa del campo $\vec{\text{grad}} u_h$, así en problemas donde interesara determinar dicho campo, la formulación mixta proporciona mejor exactitud en su cálculo que respecto a determinar u_h mediante formulación variacional estándar y luego tener que derivar para calcular $\vec{\text{grad}} u_h$, con la consiguiente pérdida de exactitud al determinar u_h . A modo de ejemplo, en problemas eléctricos, en lugar de interesar calcular el

potencial ϕ muchas veces interesa más determinar el campo $\vec{D}$ de desplazamiento eléctrico.

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = -\epsilon \text{grad } \phi$$

A modo de resumen, las etapas fundamentales al resolver numéricamente un problema por el método de elementos finitos son:

- a) Elección y establecimiento de la formulación del problema en forma variacional.
- b) Establecer una discretización apropiada a las características del problema (zonas singulares geométricas o de unión de distintos materiales y de acuerdo al orden de error exigido a la solución)
- c) Construcción de la aproximación del problema en el subespacio aproximador con elección de funciones de base del subespacio aproximador para el tipo de elementos del mallado y propiedades consideradas
- d) Resolución del sistema de ecuaciones generado
- e) Análisis de las características de la solución numérica obtenida y estimación del error.

La aproximación de u por u_h será tanto mejor cuanto menor sea la diferencia de ambas evaluadas con respecto a normas apropiadas en el problema a resolver y siempre que el método de elementos finitos sea convergente.

En este contexto tiene una gran importancia la discretización de Ω en elementos Ω_e , la aproximación de $\partial\Omega$ por contornos de elementos Ω_e , el tamaño h_e de los elementos Ω_e incluso la forma de dichos elementos y otras

características.

Por ello, se trata a continuación estos aspectos con definiciones y resultados precisos.

2.4. DISCRETIZACIÓN DEL DOMINIO Y FORMULACIÓN EN DIMENSIÓN FINITA DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS.

Paralelamente y en conexión a la discretización en un contexto funcional de paso del problema continuo (correspondiente a la formulación variacional) al problema discreto formulado en un subespacio aproximador, tenemos la discretización geométrica del dominio y de su contorno.

En primer lugar debemos considerar las particularidades del dominio a tratar (tipos de contornos que forman el contorno $\partial\Omega$, existencia de interfaces, simetrías del problema, etc.) a fin de establecer una discretización geométrica que sea en buena medida adaptada al problema a resolver, y en concordancia con la formulación variacional del mismo en dimensión finita.

Para concretar lenguaje preciso en términos de discretización en el método de elementos finitos, se enuncian las siguientes definiciones:

DEFINICIÓN:

Un poliedro de $\mathbb{R}^n$ es una intersección finita de semiespacios cerrados de $\mathbb{R}^n$.

DEFINICIÓN:

Mallado es la discretización de un dominio en un conjunto T_k de elementos que lo recubre geométricamente tan fiel como sea posible, o sea a verificar las condiciones:

$$1) \overline{\Omega} = \bigcup_{K \in T_K} K$$

para el caso de poliédrico (poligonal si $n=2$)

$$2) \overline{\Omega} \approx \bigcup_{K \in T_K} K$$

para el caso general de Ω no poliédrico (parte de $\partial\Omega$ curvo)

DEFINICIÓN:

Una parte C de la frontera $\partial\Omega$ es una cara (arista si $n=2$) si y solo si existe un hiperplano HP tal que $C = \partial\Omega \cap HP$.

DEFINICIÓN:

T_k es un mallado conforme de $\overline{\Omega}$ si se verifican las condiciones:

1) Todo elemento K de T_k es de interior no vacío.

2) La intersección de dos elementos de T_k debe ser de una de las siguientes posibilidades:

a) Conjunto vacío.

b) Un punto.

c) Una arista.

d) Una cara.

DEFINICIÓN:

Mallado uniforme es un mallado donde sus elementos tienen el mismo tamaño en todas las partes de Ω .

DEFINICIÓN:

Mallado cuasi-uniforme es un mallado donde sus elementos tienen aproximadamente el mismo tamaño en todas las partes de Ω .

DEFINICIÓN:

Nodo de un mallado es un vértice de un elemento k del mallado T_k .

DEFINICIÓN:

Nodo de cálculo es un punto que tiene una o más incógnitas.

DEFINICIÓN:

La conectividad de un mallado es la Definición de las uniones entre sus vértices.

DEFINICIÓN:

La topología de un elemento del mallado es la descripción de las aristas y caras a partir de los vértices.

DEFINICIÓN:

Diámetro h_k de un elemento $k \in T_k$ es la distancia mayor entre dos nodos o vértices del elemento. En un mallado triangular corresponderá a la longitud del lado mayor del triángulo k .

DEFINICIÓN:

Mallado triangular agudo es un mallado triangular en el que ningún elemento tiene un ángulo obtuso.

DEFINICIÓN:

Un mallado se dice estructurado si la conectividad asociada es del tipo diferencias finitas.

DEFINICIÓN:

Un mallado se dice no estructurado si la conectividad asociada es de tipo cualquiera. Las mallas estructuradas se distinguen de las no estructuradas por tener los nodos colocados en las intersecciones de varias familias de curvas que forman un sistema de coordenadas curvilíneas.

DEFINICIÓN:

Un elemento finito es un elemento k del mallado T_k de $\overline{\Omega}$ con sus grados de libertad y funciones de forma asociadas al mismo, en general un elemento del mallado con todas sus características locales asociadas a la interpolación en el mismo.

Así aparte de considerar un elemento de un mallado conforme, éste es un elemento finito conforme si hay continuidad de la derivada normal en la interfase entre elementos finitos.

Un elemento finito no conforme implica que, $H_h \not\subset H$, para el espacio funcional H de las funciones admisibles que intervienen en la formulación variacional del problema a resolver. Puesto que la formulación variacional

puede ser interpretada como consecuencia de un principio energético, la pérdida de continuidad en interfases de elementos finitos puede conducir a una "fuga de energía en las interfases" e implicar la pérdida de la convergencia del método de elementos finitos, cuando el tamaño o el diámetro de los elementos tiende a cero.

Por tanto, cuando se utiliza elementos finitos no conforme debe asegurarse que en las interfases o bien los errores introducidos tienden a cero cuando el mallado es con $h \rightarrow 0$ o bien se cancelen las integrales de línea en las interfases.

En estos últimos casos es aceptable el uso de elementos finitos no conforme en la resolución numérica.

DEFINICIÓN:

Se dice que un conjunto de N_e puntos x_i^e distintos de un elemento $k \in T_k$,

$$\Sigma_K = \{x_i^e\}_{i=1}^{N_e}$$

es p-unisolvente si y solamente si dado N_e reales distintos cualesquiera α_i ($1 < i < N_e$), existe una única función $p \in P$, siendo P un espacio vectorial de dimensión finita de funciones definidas sobre k con valores reales, verificando:

$$p(x_i^e) = \alpha_i \quad (1 < i < N_e)$$

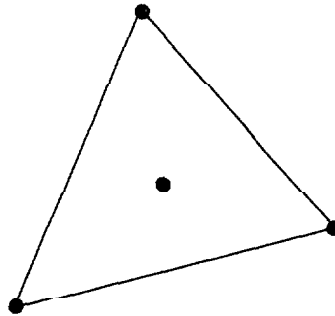
DEFINICIÓN:

Un elemento finito de Lagrange es un elemento finito cuyos nodos de cálculo x_i^e forman un conjunto p-unisolvente, Σ_k .

Así, en mallados triangulares (en R^2) tenemos distintos elementos finitos de Lagrange variando Σ_k o P o ambos para un mismo elemento k del mallado T_k .

A modo de ejemplo:

a) Elemento finito de Lagrange de tipo 0.

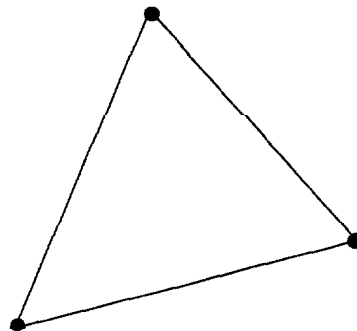


(elemento subparamétrico)

Σ_k = centro de gravedad de k .

$P = p_0$ = espacio de polinomios de dos variables de grado 0.

b) Elemento finito de Lagrange de tipo 1.

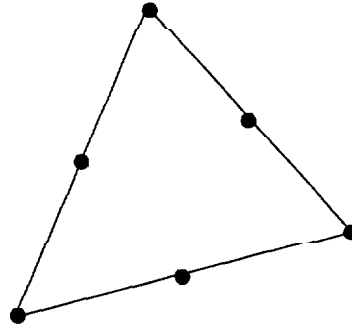


(elemento isoparamétrico)

Σ_k = vértices de $k=3$.

$P = p_1 =$ espacio de polinomio de 2 variables de grado menor o igual a uno.

c) Elemento finito de Lagrange de tipo 2.



(elemento superparamétrico)

$\Sigma_k =$ vértices de k y los puntos medios de sus lados.

$P = p_2 =$ espacio de polinomios de dos variables de grado menor o igual a dos.

DEFINICIÓN:

A la función

$$\prod_h u(x) = \sum_{j=1}^N u(x_j) \phi_j(x)$$

Se le denomina interpolada de $u(x)$ en un espacio funcional V_h (siendo N denominado número de grados de libertad y ϕ_j funciones de una base de V_h).

Generalmente en el método de elementos finitos $(\prod_h u)$ es construida con $\phi_j(x)$ polinomios a trozos.

DEFINICIÓN:

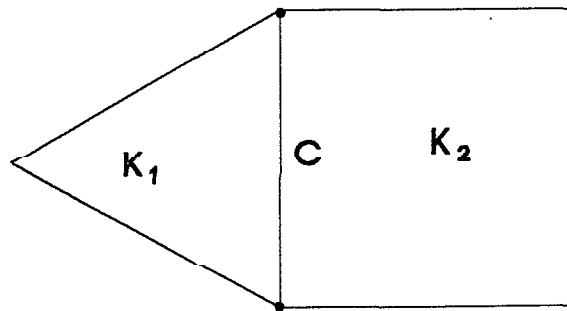
A la función:

$$\left(\prod_h u(x)\right)_k = \sum_{j=1}^{N_e} u(x_j^e) \Psi_j^e(x)$$

Se le denomina la interpolada de $u(x)$ en un elemento k de T_k (N_e es el número de nodos de cálculo de k y Ψ_j^e j-ésima función de forma en el elemento k). Generalmente en el método de elementos finitos $\left(\prod_h u\right)_k$ es un polinomio completo de grado uno ó dos, definido en K .

Hay que considerar ciertas hipótesis suplementarias, tenidas en cuenta en los resultados teóricos que se establecen posteriormente, sobre los elementos finitos asociados a cada elemento del mallado para asegurar la continuidad de la interpolada de una función y de su pertenencia a V_h .

Para ello siendo k_1 y k_2 dos elementos adyacentes de T_k y designando por C la cara común entre ellos se supondrá que:



$$\sum k_1 \cap C = \sum k_2 \cap C$$

y que

$$P_{k_1}|_C = P_{k_2}|_C$$

Así mismo la restricción a toda cara de un elemento k de una función cualquiera perteneciente a P_k pueda definirse de manera única según los valores que dicha función tome en los puntos de Σ_k que estén sobre la cara concernida y que todas las funciones de P_k sean continuas sobre k (de clase C^0).

Impuesta esta serie de condiciones, para toda función $v \in C^0(\Omega)$, existe la función $\prod_h v \in V_h$ (excepto sea un elemento finito no conforme).

En la discretización de $\bar{\Omega}$ debemos atender no sólo a cuestiones básicas sobre la conectividad y topología de los elementos del mallado. La discretización debe atender a muchas y variadas cuestiones de gran interés, algunas relacionadas con la geometría de $\bar{\Omega}$, otras vinculadas con las características del problema (localización de fuentes puntuales, zonas que ocupan distintos materiales, presencia de singularidades, etc.).

Debemos atender asimismo de modo relevante a la relación del mallado a considerar con parámetros que inciden en la calidad de la aproximación de la solución exacta u mediante u_h , y en la convergencia de u_h hacia u .

Por ello, tratamos a continuación consideraciones y resultados del Análisis Numérico del error de aproximación del método de los elementos finitos estándar para problemas elípticos y parabólicos.

2.5. ERROR DE LA APROXIMACIÓN Y ESTABILIDAD DE LA SOLUCIÓN NUMÉRICA: VINCULACIÓN CON LA DISCRETIZACIÓN CON ELEMENTOS FINITOS.

2.5.1. ERROR DE LA APROXIMACIÓN EN EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS EN PROBLEMAS ELÍPTICOS.

Abordamos cuestiones sobre la aproximación de u mediante u_h relacionadas con su incidencia en parámetros y consideraciones a tener en cuenta en la resolución numérica, prioritariamente y de modo especial en la incidencia de resultados teóricos sobre el error de la aproximación en la Definición o establecimiento de un buen mallado de $\bar{\Omega}$.

En el marco abstracto abordado anteriormente, sea la ecuación variacional del problema elíptico de contorno en dimensión infinita:

$$\begin{aligned} a(u, v) &= f(v) \\ \forall u, v &\in V \end{aligned}$$

V espacio de Hilbert con producto escalar $(\cdot, \cdot)$ y norma correspondiente $\|\cdot\|_V$.

$a(\cdot, \cdot)$ es una forma bilineal en $V \times V$ para ello en el problema elíptico es necesario que,

$$\exists C_1, C_2 \in \mathbb{R}^+$$

tal que

$$C_1 \leq a(x) \leq C_2 \quad \forall x \in \Omega$$

además,

$$\begin{aligned} f &\in [L^2(\Omega)]^d \\ g &\in [L^2(\Omega)]^d \end{aligned}$$

Siendo el área de Γ_1 positiva,

f forma lineal en V

Es bien conocido que $a(\cdot, \cdot)$ es simétrica, continua

$$|a(v, w)| \leq \gamma \|v\|_V \|w\|_V \quad \forall v, w \in V$$

y V -elíptica

$$\exists \alpha > 0 / a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V$$

Siendo $f(\cdot)$ continua

$$\exists A > 0 / |f(v)| \leq A \|v\|_V \quad \forall v \in V$$

También es bien conocido que la ecuación variacional es equivalente al problema de minimización:

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v)$$

donde

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - f(v)$$

Existiendo una única solución $u \in V$, además,

$$\|u\|_V \leq \frac{A}{\alpha} \quad (u, \text{solución exacta})$$

Si la condición de simetría sobre $a(,)$ no se cumpliera también es conocido que existe una única solución $u \in V$ tal que:

$$a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in V$$

Cumpléndose también la estimación de estabilidad dada anteriormente.

En la discretización por elementos finitos considerando el subespacio en dimensión finita V_h de V , de dimensión N , se verifica para la aproximación de la solución u mediante su aproximación por $u_h \in V_h$, una estimación de estabilidad igual a la anterior:

$$\|u_h\|_{V_h} \leq \frac{A}{\alpha}$$

Para evaluar la distancia entre la solución exacta u y la solución aproximada u_h podemos considerar distintas expresiones, así siendo:

$$e = u - u_h$$

el error de la aproximación, se obtienen los siguientes resultados conocidos:

$$\begin{aligned} a) \quad & \|u - u_h\|_V \leq \frac{\gamma}{\alpha} \|u - v_h\|_V \quad \forall v_h \in V_h \\ b) \quad & \|u - u_h\|_E \leq \|u - v_h\|_E \quad \forall v_h \in V_h \end{aligned}$$

Siendo $\|\cdot\|_E$ norma de la Energía.

Podemos expresar b) del modo siguiente:

$$\|u - u_h\|_E = \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_E$$

Es decir, u_h es el elemento de V_h cuya distancia (evaluada respecto a $\|\cdot\|_E$) a la solución u es mínima. Dicho de otro modo u_h es la mejor aproximación de la solución exacta en la norma de la Energía.

A fin de estimar el error, se utiliza la teoría de interpolación, en efecto:

$$\|u - u_h\|_E \leq \frac{\gamma}{\alpha} \|u - v_h\|_V \leq \frac{\gamma}{\alpha} \|u - \Pi_h u\|_V$$

o bien:

$$\|u - u_h\|_E \leq \|u - v_h\|_E \leq \|u - \Pi_h u\|_E$$

donde se ha considerado $v_h = \Pi_h u$, el interpolado de u en V_h , que usualmente se elige para que los grados de libertad para V_h coincidan para u y para $\Pi_h u$,

$$\Pi_h u(x) = \sum_{j=1}^N u_h(x_j) \Phi_j(x)$$

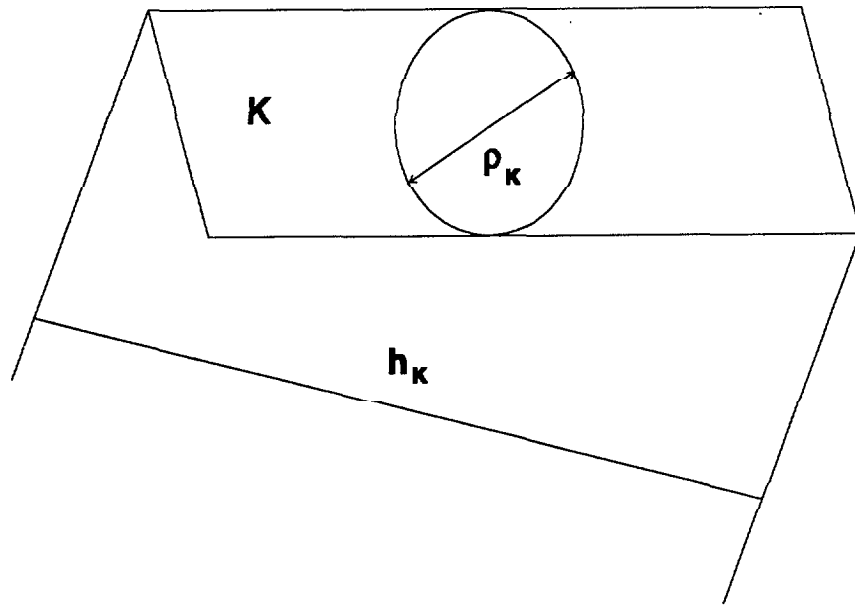
De este modo, el problema de estimación de $\|u - \Pi_h u\|$ se reduce al problema de estimarlo individualmente en cada elemento K del mallado T_K y por suma sobre todos los elementos K estimarlo globalmente para el mallado y elementos finitos considerados.

Para los resultados de la estimación del error de aproximación que se detallan a continuación se exige para los elementos K del mallado T_K que debe existir una constante, β , $\beta > 0$ tal que se verifique:

$$\frac{h_k}{\rho_k} \leq \beta \quad \forall k \in T_K$$

siendo:

$$\rho_k = \text{Sup} \{ \text{diámetro}(B), B \text{ bola contenida en } T_K \}$$



Esta condición significa que en caso de mallados triangulares no es permitido que los elementos sean agudos, o dicho de modo equivalente que los ángulos de los triángulos K no pueden ser arbitrariamente pequeños siendo la constante β la medida del ángulo más pequeño en cualquier elemento K del mallado T_K .

Para el análisis de la convergencia del método de los elementos finitos uno de los contextos es la h -convergencia, es decir, concerniente a una familia de mallados $\{T_K\}$ que son indexados por el parámetro h :

$$h = \max_{K \in T_K} h_K$$

2.5.1.1. ESTIMADORES A PRIORI DE ACOTACIÓN DEL ERROR DE APROXIMACIÓN EN PROBLEMAS ELÍPTICOS.

El problema de estimar:

$$\left\| u - \prod_h u \right\|$$

es llevado a término estimándolo individualmente en cada elemento K del mallado T_K .

El método de los elementos finitos realiza una interpolación en cada elemento K sustituyendo una función v definida sobre K por su interpolada y tomando como función interpolada sobre todo el dominio $\bar{\Omega}$ a la función:

$$\prod_h v(x) = \left(\prod_h v(x) \right)_K \quad \forall x \in K \quad y \quad \forall K \in T_K$$

Por tanto es preciso asegurar la continuidad de $\prod_h v(x)$, y su permanencia a V_h .

La expresión de la interpolada de $v \in V_h$ en V_h es:

$$\prod_h v(x) = \sum_{j=1}^N v(x_j) \Phi_j(x)$$

siendo localmente,

$$\left(\prod_h v(x) \right)_K = \sum_{i=1}^{N_e} v(x_i^e) \Psi_i^e(x)$$

Ψ_i^e restricción de Φ_i en el elemento K .

En caso de interpolación de $v(x)$ y sus derivadas hasta orden q ,

$$\prod_h v(x) = \sum_{j=1}^N \sum_{\alpha=0,1,\dots}^q D^\alpha v(x_j) \Phi_i^\alpha(x)$$

siendo localmente,

$$\left(\prod_h v(x)\right)_K = \sum_{i=1}^{N_e} \sum_{\alpha=0,1,2,\dots}^q D^\alpha v(x_j^e) \Psi_i^\alpha(x)$$

En el método de elementos finitos los cálculos para un elemento Ω_e , se realizan en un elemento de referencia $\hat{\Omega}_e$, a fin de sistematizar los cálculos de las integrales y estructurar la implementación informática del método de los elementos finitos de forma general a distintas formulaciones variacionales, y luego se trasladan los resultados al elemento Ω_e utilizando una biyección F_e continua de $\hat{\Omega}_e$ sobre Ω_e de modo que:

$$\Omega_e = F_e(\hat{\Omega}_e)$$

$$P = \left\{ p: \Omega_e \rightarrow R / p \circ F_e \in \hat{P} \right\}$$

$$\Sigma = F_e(\hat{\Sigma})$$

Siendo F_e afín (líneas rectas en Ω_e se transforman en líneas rectas en $\hat{\Omega}_e$), de la forma:

$$F_e(\hat{x}) = A\hat{x} + C = x, \quad x \in \Omega_e, \quad \hat{x} \in \hat{\Omega}_e$$

Siendo A matriz inversible y C vector de traslación en R^n .

Se dice que (Ω_e, P, Σ) es elemento finito afín-equivalente a $(\hat{\Omega}_e, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ verificándose,

$$(\Pi_h v)_{\Omega_e} \circ F_e = (\hat{\Pi}_h(v \circ F_e))_{\Omega_e}$$

para toda función v definida sobre Ω_e , de este modo podemos asociar a toda función v definida sobre Ω_e la función $\hat{v}$ definida sobre $\hat{\Omega}_e$ mediante:

$$\hat{v} = v \circ F_e$$

y de este modo identificar

$$\hat{\Pi}_h v = \hat{\Pi}_h \hat{v}$$

DEFINICIÓN:

Se dice que $\{T_K\}$ es una familia regular de mallados si se verifican las cuatro condiciones siguientes:

1) Todos los elementos finitos $(\Omega_e, P_{\Omega_e}, \Sigma_{\Omega_e})$ de todos los mallados son afines equivalentes a un mismo elemento de referencia $(\hat{\Omega}_e, \hat{P}_{\Omega_e}, \hat{\Sigma}_{\Omega_e})$ de clase C^0 .

2) Para todo par de caras $(\hat{C}_1, \hat{C}_2)$ de $\hat{\Omega}_e$ y para toda aplicación afín $\hat{F}$ inversible tal que $\hat{C}_2 = \hat{F}(\hat{C}_1)$ se tiene que:

$$\hat{\Sigma} \cap \hat{C}_2 = \hat{F}(\hat{\Sigma} \cap \hat{C}_1)$$

$$\{\hat{P}_{\hat{C}_2} / \hat{p} \in \hat{P}\} = \{p \circ \hat{F}_{C_1} / p \in \hat{P}\}$$

3) Se cumple que $h \rightarrow 0$

4) Se cumple en todo elemento K o Ω_e de T_K :

$$\frac{h_e}{\rho_e} \leq \sigma, \sigma \geq 1$$

En una familia regular de mallados $\{T_K\}$ es conocido el siguiente resultado de la teoría de interpolación en elementos finitos:

$$\text{para } v \in H^{K+1}(\Omega_e), P_K(\hat{\Omega}_e) \subset \hat{P} \subset H^m(\hat{\Omega})$$

$$\left| v - (\Pi_h v)_K \right|_{H^m(\Omega_e)} \leq C_1 \frac{h_e^{K+1}}{\rho_e^m} |v|_{H^{K+1}(\Omega_e)}$$

siendo $|\bullet|$ seminorma de espacios referidos.

donde $C_I > 0$ e independiente de h_e , ρ_e y de v .

Considerando:

$$h = \max_{1 \leq e \leq E} h_e$$

globalmente en Ω , se verifica,

$$\left[\sum_{e=1}^E \left\| v - (\Pi_h v)_K \right\|_{H^m(\Omega_e)}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq Ch^{K+1-m} |v|_{H^{K+1}(\Omega)}$$

para

$$0 \leq m \leq \min(k+1, r)$$

siendo $C > 0$ y $P_K(\hat{\Omega}_e) \subset \hat{P} \subset H^r(\Omega)$

P_K : Espacio de polinomios completos de grado menor o igual K .

Puesto que, se atiende a que,

$$P \subset H^1(\Omega_e)$$

$$V_h(\Omega) \subset \overline{C}_0(\Omega)$$

tenemos

$$V_h(\Omega) \subset H^1(\Omega)$$

y

$$\|v - \Pi_h v\|_{H^m(\Omega)} = \left[\sum_{e=1}^E \|v - \Pi_h v\|_{H^m(\Omega_e)}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq Ch^{K+1-m} |v|_{H^{K+1}(\Omega)}$$

para

$$0 \leq m \leq \min(1, r)$$

Para un problema elíptico con formulación variacional en $H^m(\Omega)$, el error de aproximación verifica que,

$$\|u - u_h\|_{H^m(\Omega)} \leq C_2 \|u - \Pi_h u\|_{H^m(\Omega)} \leq Ch^\mu |u|_{H^r(\Omega)}$$

siendo

$$C_2, C > 0$$

$$\mu = \min(k+1-m, r-m)$$

$$\Pi_h: H^{k+1} \rightarrow H^h \subset H^m, \quad k+1 \geq m \geq 0$$

$$(\Pi_h v)_{\overline{\Omega}_e} = \Pi_e(v_{\overline{\Omega}_e}), \quad \forall v \in H^r(\Omega)$$

$$\prod p = p \quad \forall \quad p \in P_k$$

En la estimación a priori del error de aproximación tenemos el factor $|u|_{H^r(\Omega)}$ siendo u la solución exacta del problema a resolver. El índice r refleja la regularidad de la solución y es el grado de regularidad de la solución exacta.

La potencia de h es el orden de convergencia, que depende de la norma utilizada en la estimación, así en general:

$$\|u - u_h\|_V \leq Ch^\mu \quad y \quad \|u - u_h\|_V = O(h^\mu)$$

μ depende del grado k del polinomio completo utilizado en la interpolación y del grado de regularidad de la solución exacta. A μ se le denomina razón asintótica de convergencia.

Para problemas con $r-1 \geq k$ tendremos que μ no depende de r correspondiendo la expresión anterior del error de aproximación:

$$\|u - u_h\|_{H^m(\Omega)} \leq Ch^{K+1-m} |u|_{H^r(\Omega)}$$

μ depende en estos casos del grado k del polinomio de interpolación y es independiente de r , siempre que $r \geq k+1$. Para problemas con $r-1 \leq k$ tendremos que μ depende de r correspondiendo a este caso:

$$\|u - u_h\|_{H^m(\Omega)} \leq Ch^{r-1} |u|_{H^r(\Omega)}$$

Para que exista convergencia con $h \rightarrow 0$ deberá ser, para el problema a resolver, que $\mu > 0$, convergiendo $u \rightarrow u_h$ más rápidamente cuanto mayor valor tenga μ . Para existir convergencia $\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_V = 0$.

La constante C depende de ρ_k y de características relacionadas con el mallado siendo independiente de μ y de h .

La estimación a priori considerada nos da información de la calidad de la solución aproximada u_h en su comportamiento cuando calculamos u_h en una sucesión de mallados con $h \rightarrow 0$, es decir, en el contexto de h-convergencia.

2.5.1.2. PROBLEMAS CON DISMINUCIÓN DE REGULARIDAD EN LA SOLUCIÓN.

Si en el problema elíptico de orden dos la solución exacta es regular con $u \in H \subset H^2(\Omega)$, tendremos:

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch |u|_{H^2(\Omega)}$$

Para que $u \in H^2(\Omega)$ o al menos en un espacio H muy próximo a $H^2(\Omega)$, $H \subset H^2(\Omega)$ tal que:

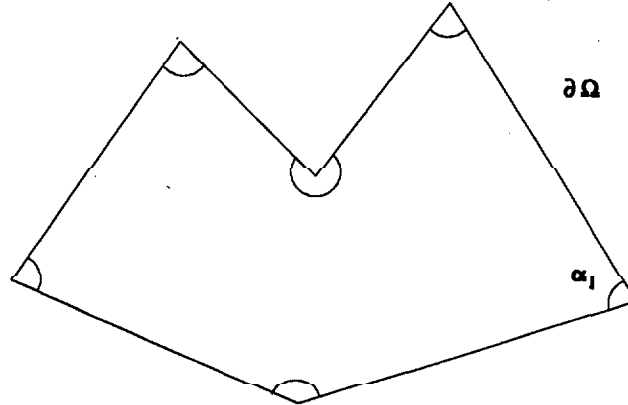
$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \approx O(h)$$

tiene que verificarse que los datos f , $a(x)$, coeficientes de la ecuación diferencial y funciones que intervienen en las condiciones de contorno, sean suaves en el sentido de permitir que $u \in H^2(\Omega)$, además es de interés resaltar que el contorno $\partial\Omega$ del dominio debe ser suficientemente regular, por ejemplo C^1 -regular.

Así si $\partial\Omega$ no es suave, caso de ser a trozos lineal con ángulos interiores $\alpha_i > \pi$, hace que $u \notin H$, H próximo a $H^2(\Omega)$, incluso para $\alpha_i \gg \pi$, tenemos $\vec{\text{grad}} u \rightarrow \infty$ y estimadores de la forma,

$$\| u - u_h \|_{H^1(\Omega)} = O(h^\alpha)$$

con $\alpha < 1$



Los casos en que existe una disminución de regularidad severa en la solución exacta u , se verán en el próximo apartado, donde se recoge una estimación de error para el caso de problemas con irregularidad en la forma del contorno.

Existen otras estimaciones del error de aproximación locales o globales relativos a algunos problemas concretos.

Así para,

$$-\Delta u + u = f \quad \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

$$u = 0 \quad \text{en } \partial\Omega$$

con datos suficientemente regulares, incluyendo la forma de $\partial\Omega$,

$$\| u - u_h \|_\infty \leq C h^2 |\log h|, \quad \text{para } k = 1$$

y,
$$\| u - u_h \|_\infty \leq C h^{k+1}, \quad \text{para } k \geq 2$$

puesto que $\forall \varepsilon, \varepsilon > 0$ se verifica:

$$h^2 |\log h| < h^{2-\varepsilon}$$

para valores de h pequeños realmente podemos expresar:

$$\|u - u_h\|_{\infty} \leq O(h^2) \quad \text{para } k = 1$$

$$\|u - u_h\|_{\infty} \leq Ch^{K+1} \quad \text{para } k \geq 2$$

En el apartado siguiente se detallarán para elementos finitos en mallas triangulares distintos tipos usuales de elementos triangulares de C^0 y C^1 , y particularizaciones de los resultados de estimación de error anteriormente expuestos para estos elementos.

De la expresión del error de aproximación se deducen estrategias para aumentar la exactitud de u_h , bien mediante resolución de problemas en distintas mallas tal que $h \rightarrow 0$ (refinamiento en h), como aumentando el grado de polinomios en la interpolación de las distintas resoluciones secuenciales (refinamiento en p) manteniendo la malla fija, así como otras estrategias adaptativas de modo que la resolución del problema aumente la exactitud de la solución numérica.

Un aspecto también a tener en cuenta es la aproximación de Ω por Ω_h y el error en la discretización geométrica del contorno $\partial\Omega$ por $\partial\Omega_h$.

La no suavidad en los datos del problema hace que disminuya la regularidad $u \in H^r(\Omega)$, es decir, que r disminuya respecto al caso en que fueran los datos suficientemente regulares.

Así tenemos los denominados problemas singulares que provienen de

distintos casos:

a)

f irregular

ejemplo: $f = \delta(x-a) \quad x, a \in \Omega$

b)

g_1 irregular

$u = g_1$ en $\partial\Omega$

c)

g_2 irregular

$-a(x) \frac{\partial u}{\partial n} = g_2$ en parte de $\partial\Omega$

d)

condiciones mixtas

$u = g_1$ en $\partial\Omega_1$

$-a(x) \frac{\partial u}{\partial n} = g_2$ en $\partial\Omega_2$

Caso de irregularidad de g_1 y g_2 hay una variación muy grande del gradiente de en $\partial\bar{\Omega}_1 \cap \partial\bar{\Omega}_2$.

e) Coeficientes en la ecuación diferencial, tal que sean discontinuos en puntos, líneas o superficies de Ω .

Estos problemas hacen $u(x) \rightarrow \infty$, o bien que $\frac{\partial u}{\partial x_i} \rightarrow \infty$ $i = 1, 2, \dots, n$, en zonas locales de Ω .

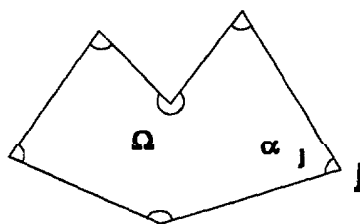
En estos problemas μ depende de r en la estimación a priori del error. Existen estimadores a priori del error para problemas elípticos en determinados problemas singulares.

Así si $\partial\Omega$ no es suave y está definida por segmentos rectilíneos, es bien conocido para problemas elípticos de orden dos, tipo laplaciano, en $\partial\Omega$, que la regularidad de la solución exacta se estima a ser:

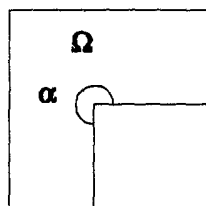
$$u \in H^{1+\beta-\varepsilon}$$

para su aplicación en los estimadores anteriores tratados siendo $\varepsilon \geq 0$ ($\varepsilon = 0$ para caso de condición Dirichlet en $\partial\Omega$), ε arbitrariamente pequeño,

$\beta = \frac{\pi}{\alpha_j}$ siendo α_j el ángulo interno mayor entre dos segmentos del contorno $\partial\Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.



Para el dominio en forma de L :



$$\beta = \frac{\pi}{\frac{3\pi}{2}} = \frac{2}{3}$$

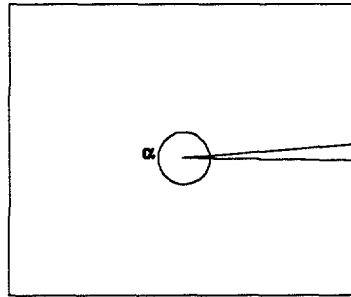
$$u \in H^{\frac{5}{3}-\varepsilon} \Rightarrow r \cong \frac{5}{3}$$

y tendremos

$$\mu = \min(k, r-1) = r-1 \cong \frac{2}{3}$$

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^{\frac{2}{3}} |u|_{H^{\frac{5}{3}-\varepsilon}(\Omega)}$$

Para modelización de una grieta, como por ejemplo:



$$\alpha \rightarrow 2\pi \quad \beta \rightarrow \frac{1}{2} \quad u \in H^{\frac{3}{2}-\varepsilon}(\Omega)$$

$$\mu = \min(k, r-1) \cong \min\left(k, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^{\frac{1}{2}} |u|_{H^{\frac{3}{2}-\varepsilon}(\Omega)}$$

Vemos con el estimativo de error considerado que aunque aumentemos el grado k del polinomio completo a utilizar en la interpolación de los ele-

mentos finitos (μ depende de r y no de k) no mejoramos la aproximación disminuyendo la distancia de u y u_h en la norma $H^1(\Omega)$).

Si existiese regularidad en $\partial\Omega$ y datos (ej: $f \in L^2(\Omega)$, $a(x) \in C^\infty(\Omega)$, ...) podríamos tener prácticamente la regularidad:

$u \in H^2(\Omega)$ y para $k = 1$, la estimación

$$\| u - u_h \|_{H^1(\Omega)} \leq Ch |u|_{H^2(\Omega)}$$

Es decir $O(h)$ frente a $O\left(h^{\frac{1}{2}}\right)$.

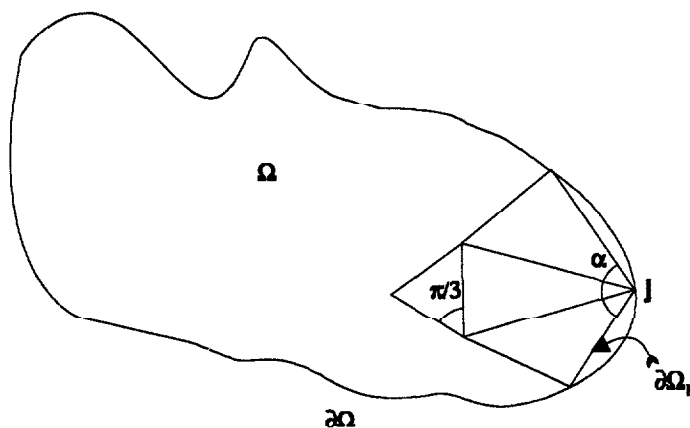
Cuando hay singularidades es suficiente utilizar elementos finitos lineales ($k=1$) en el contexto de la h -convergencia (ver anteriores expresiones de μ).

Aunque el estimativo de acotación del error sea aproximado nos da una idea cualitativa de pautas a seguir en el contexto de la tesis acerca de criterios en la generación de mallas triangulares y resolución numérica con el método de los elementos finitos.

La singularidad de un problema en cuanto a $\partial\Omega$ irregular aumenta los valores de las cotas del error de la aproximación. Un aspecto de interés a tener en cuenta relacionado también en la exactitud de la solución numérica a obtener en la resolución de un problema elíptico referido a $\partial\Omega$ irregular es la propiedad común en todos los problemas elípticos siguiente:

El comportamiento del error de aproximación es mejor en el interior del dominio que en el contorno, siendo mejor a medida que nos alejamos de

$\partial\Omega$ en dirección de su normal. De modo que se verifica un principio tipo *St-Venant* que ha sido comprobado empíricamente y es aplicable en un contexto de discretización: "alejándose del contorno el promedio es lo que importa y no las oscilaciones locales del error de pequeña longitud de onda". Así, si en un lugar de $\partial\Omega$ tenemos la aproximación $\partial\Omega_h$ poligonal y considerando interpolación de grado $k=2$:



$$\|u - u_h\|_{H^1(K)} = O\left(h^{\frac{3}{2}}\right)$$

correspondiente a $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ de la figura y para elementos Ω_e , con $\partial\Omega_e \in \partial\Omega_h$.

Sin embargo alejándonos en dirección al interior del dominio:

$$\|u - u_h\|_{H^1(K)} = O(h^2)$$

ademas generalmente tenemos el caso:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u_h}{\partial x} = O(h^2)$$

Está comprobado computacionalmente que en este caso para elementos Ω_e como los que comparten el nodo j que:

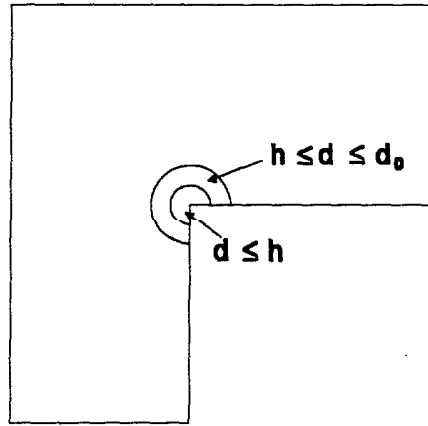
$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u_h}{\partial x} = O\left(h^{\frac{3}{2}}\right)$$

Siendo x un punto a una distancia d de un nodo de $\partial\Omega_h$, es conocido el estimador de error para zona alejada de la singularidad en $\partial\Omega$ ($h \leq d \leq d_0$):

$$\|u - u_h\|_{\infty} \leq C(u) h^{2\beta-\varepsilon} d^{-\beta}$$

y para zonas próximas a la singularidad ($d \leq h$):

$$\|u - u_h\|_{\infty} \leq C(u) h^{2\beta-\varepsilon}$$



Estos estimadores igual que otros existentes nos informan del aumento de razón de convergencia al alejarse de la singularidad en $\partial\Omega$ hacia el interior de Ω .

En el problema de contorno en elasticidad lineal:

$$-\sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} = f_i \quad \Omega \subset R^N$$

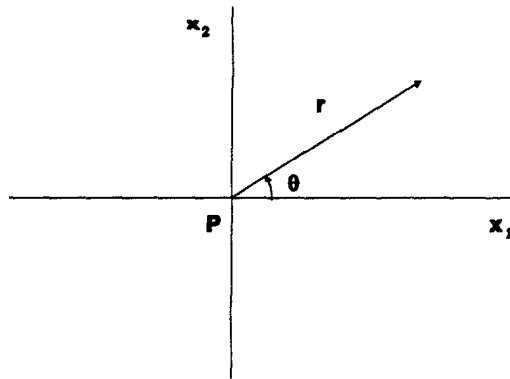
$$u = u_0 \quad \partial\Omega_1$$

$$\sum_{j=1}^N \sigma_{ij} n_j = g_i \quad \partial\Omega_2$$

$$\forall i=1,2,\dots,N$$

$$g_i = \text{tensiones impuestas en } \partial\Omega_2$$

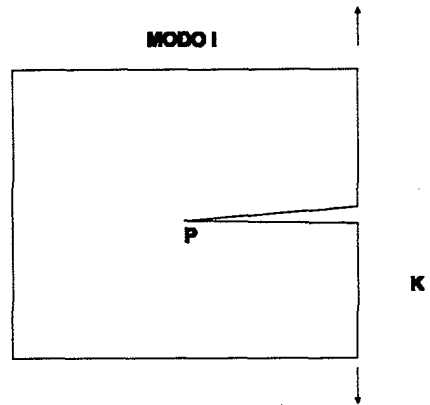
En el caso bidimensional con una fisura recta la distribución de tensiones presenta una singularidad en el extremo de la fisura. Así en coordenadas polares los desplazamientos y tensiones alrededor del extremo de la fisura tiene como términos principales:



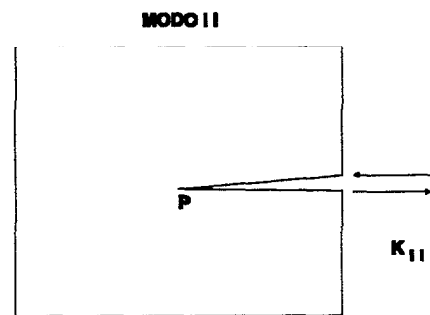
$$u_i = K_I \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} f_i(\theta) + K_{II} \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_i(\theta)$$

$$\sigma_{ij} = K_I \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + K_{II} \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} g_{ij}(\theta)$$

siendo K_I y K_{II} factores de tensiones en modos I y II.



$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f(\theta)$$



$$\sigma_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f(\theta)$$

La fractura es frágil, en caso de deformación plana si $\alpha < 1$, o de tensión plana si $\alpha < 0.4$, siendo:

$$\alpha = \frac{\left(\frac{K_c}{\sigma_y} \right)}{\beta}$$

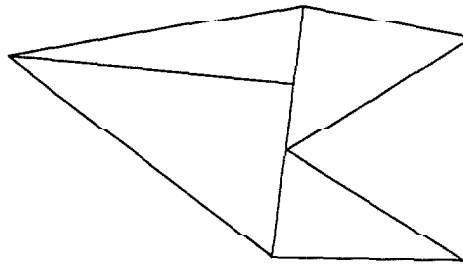
K_c tenacidad, si K_I o $K_{II} \leq K_c$ la fractura no se propaga, σ_y límite elástico y β longitud de la fractura.

Las tensiones en el vértice entrante P o extremo de la fisura se hacen infinitas ($r=0$).

Aparecen singularidades también en problemas de transmisión de calor o en cualquier problema de contorno que presenta irregularidad fuerte en sus datos.

2.5.1.3. MALLADOS TRIANGULARES.

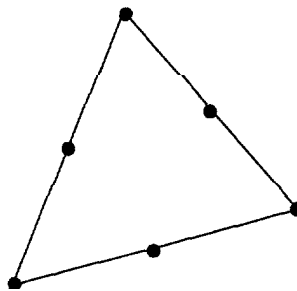
En las acotaciones del error se exige que los mallados sean conformes, eliminándose la posibilidad de una triangulación como la de la figura:



para que $V_h \subset H^1(\Omega)$.

Si el mallado es no conforme entonces hace que $V_h \not\subset H^1(\Omega)$.

Por otro lado se dice que si $V_h \not\subset H^1(\Omega)$ el método de elementos finitos no es conforme, por ejemplo, sea el triángulo de la figura $P_K = P_1(K)$ y nodos de cálculo en vértices y puntos medios de cada lado :



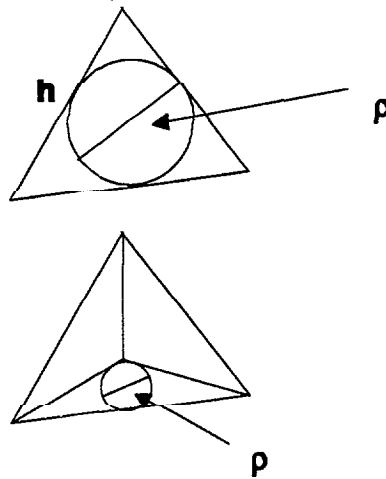
Es un elemento finito tipo $V_h \not\subset H^1(\Omega)$.

Un elemento Ω_e es conforme si es un elemento de C^{m-1} a fin de que $V_h \subset H^1(\Omega)$, siendo la solución exacta $u \in H^r$, $r > m$.

Por otro lado para que los nodos de cálculo constituyan un conjunto

p -unisolvante, los puntos deben ser no colineales.

Otro aspecto a tener en cuenta es que resoluciones con $h = \text{constante}$ y disminuyendo ρ incrementa el error de interpolación y por tanto el error de la aproximación.



Este efecto ha sido estudiado por Fried y Synge y muestran que:

$$\frac{1}{\rho} \leq \frac{c}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

donde c es constante y θ el ángulo mayor en el triángulo (al aumentar θ aumenta ρ , aumentando el error de interpolación).

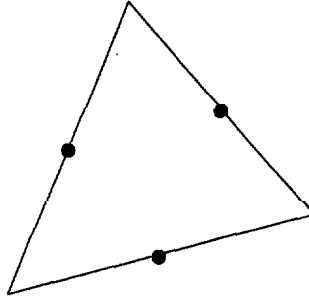
Estas condiciones sobre θ han sido estudiadas en detalle por Babuska y Aziz. Para triángulos:

$$\left| v - \prod_h v \right|_{H^s(\Omega_e)} \leq \frac{c}{(\sin \theta)^s} h^{K+1-s} |u|_{H^{K+1}(\Omega_e)}$$

$$\forall s = 0, 1, \dots, m \quad m \leq K + 1$$

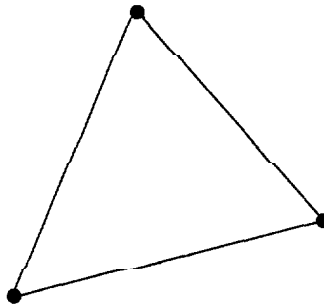
Entre distintos tipos de elementos triangulares, tenemos:

a) Elemento lineal no conforme:



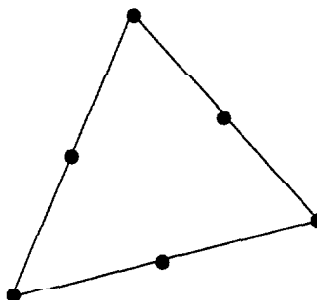
v no es continua en los lados (no conforme), la dimensión de P_K es 3, siendo $K=1$.

b) Lineal:



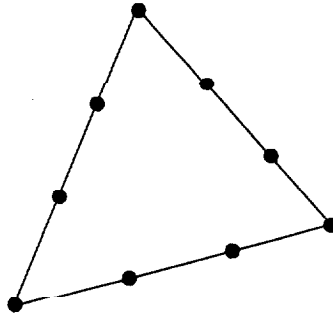
v es continua C^0 , la dimensión de P_K es 3, siendo $K=1$.

c) Cuadrático:



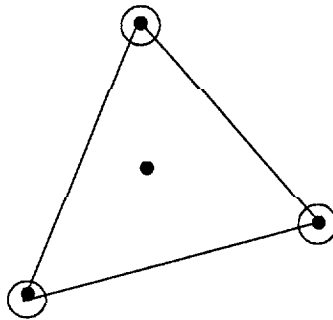
v es continua C^0 , la dimensión de P_K es 6, siendo $K=2$.

d) Cúbico:



v es continua C^0 , la dimensión de P_K es 10, siendo $K=3$.

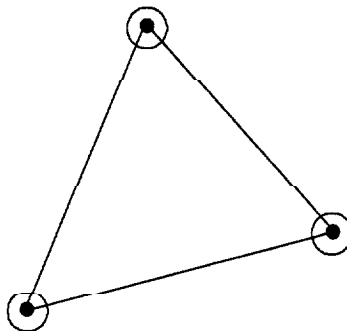
e) Cúbico z_3 o C^0 Hermite:



v es continua C^0 , $\frac{\partial v}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial y}$ son continuas en los vértices, la dimensión de P_K

es 10, siendo $K=3$.

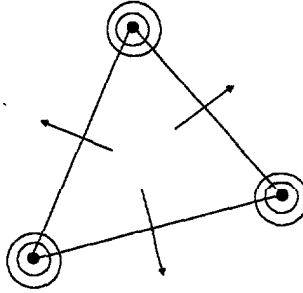
f) Restringido z_3 :



v es continua C^0 , $\frac{\partial v}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial y}$ son continuas en los vértices, la dimensión de

P_K es 9, siendo $K=2$.

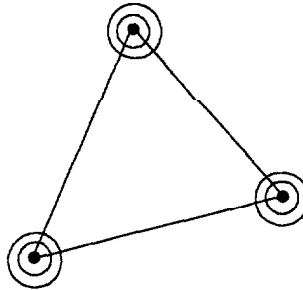
g) Quinto grado (Argyris):



v es continua C^1 y $v, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial^2 y}, \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \frac{\partial v}{\partial n}$ son continuas entre ele-

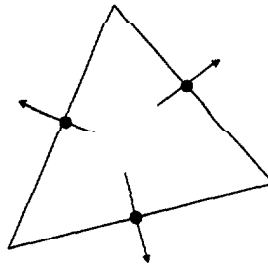
mentos, la dimensión de P_K es 21, siendo $K=5$.

h) Quinto grado reducido:



v es continua C^1 , la dimensión de P_K es 18, siendo $K=4$.

i)



para aproximar $\vec{q}(v_1, v_2) \in (L^2(\Omega))^2$ de la forma:

$$q_1 = \alpha_1 + \alpha_0 x$$

$$q_2 = \alpha_2 + \alpha_0 y$$

Tal que:

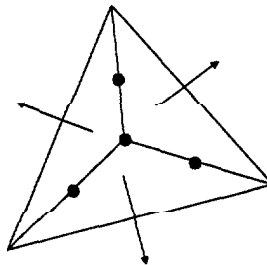
$$\text{div } q = 2\alpha_0$$

y por tanto $\text{div } q \in L^2(\Omega)$.

Se tiene que $\vec{q} \cdot \vec{n}$ es continua en nodos de cálculo (constante).

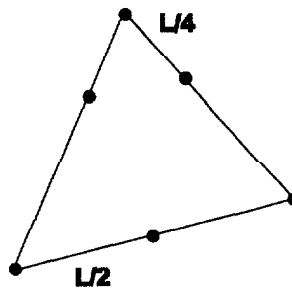
Si se desea que $\int_{\Omega} v \text{div } q = 0 \quad \forall v \in H$ consideramos $\text{div } q = 0$ imponiendo $\alpha_0 = 0$, siendo v en cada lado polinomio de grado 0.

j) Macrocúbico:



v es continua C^1 , la dimensión de P_K es 12 siendo $K=3$.

k) Elemento de Barsoum:



Proviene de elemento isoparamétrico degenerado cuadrilateral, adecuado para singularidad de tipo $\frac{1}{\sqrt{r}}$ en nodo I (elemento finito singular).

1) Existen una gran variedad de elementos finitos triangulares a partir de los anteriores, como por ejemplo caso con lado curvo, bien con $\text{div } q \in L^2(\Omega)$ más exacto y otros singulares con características diversas.

Respecto a la estimación del error, sea:

$$V_h = \left\{ v \in C^\alpha(\bar{\Omega}) : v|_K \in P_r(K), K \in T_K \right\}$$

Al aproximar en un elemento Ω_e (geométricamente elemento K del malla T_K), para $v \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ se deberá cumplir:

$$D^\alpha \prod_h v = D^\alpha v$$

en nodos de cálculo de $\Omega_e \forall \alpha \leq 2$ ($\alpha = 0$ elementos C^0 , $\alpha = 1$ elementos $C^1(\Omega)$).

En algunos nodos de ciertos elementos Ω_e se cumple:

$$\frac{\partial}{\partial n} \prod_h v = \frac{\partial v}{\partial n}$$

siendo nodos en elementos triangulares situados en el punto medio de cada lado del triángulo. La estimación del error será:

$$\left| v - \prod_h v \right|_{H^1(\Omega)} \leq C h^r |v|_{H^{r+1}(\Omega)}$$

$$\text{para } v \in H^{s+1}, s+1 \geq K$$

También:

$$\left| v - \prod_h v \right|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{r+1} |v|_{H^{r+1}(\Omega)}$$

$$\left| v - \prod_h v \right|_{H^2(\Omega)} \leq Ch^{r-1} |v|_{H^{r+1}(\Omega)}$$

Para el triángulo $K=1$ tenemos en h -convergencia las siguientes acotaciones en norma $L^\infty(\Omega_e)$:

$$\left| v - \prod_h v \right|_{L^\infty(\Omega_e)} \leq 2h_K^2 \max_{\alpha=2} \|D^\alpha v\|_{L^\infty(\Omega_e)}$$

$$\max_{\alpha=1} \|D^\alpha (v - \prod_h v)\|_{L^\infty(\Omega_e)} \leq 6 \frac{h_K^2}{\rho_K} \max_{\alpha=2} \|D^\alpha v\|_{L^\infty(\Omega_e)}$$

y relativo a seminorma en $H^1(\Omega)$, recordemos,

$$\left| e_i \right|_{H^1} = \left| v - \prod_h u \right|_{H^1} \leq Ch^{\min(K,r-1)}$$

Tenemos para triángulo $K=1$ y h -convergencia:

$$\left| e_i \right|_{H^1(\Omega)} \leq Ch$$

$$\left| e_i \right|_{H^1(\Omega)} \leq C \frac{h}{2} \text{ para malla } \frac{h}{2}$$

$$\left| e_i \right|_{H^1(\Omega)} \leq C \frac{h}{4} \text{ para malla } \frac{h}{4}$$

y para triángulo $K=2$ y h -convergencia:

$$\left| e_i \right|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^2$$

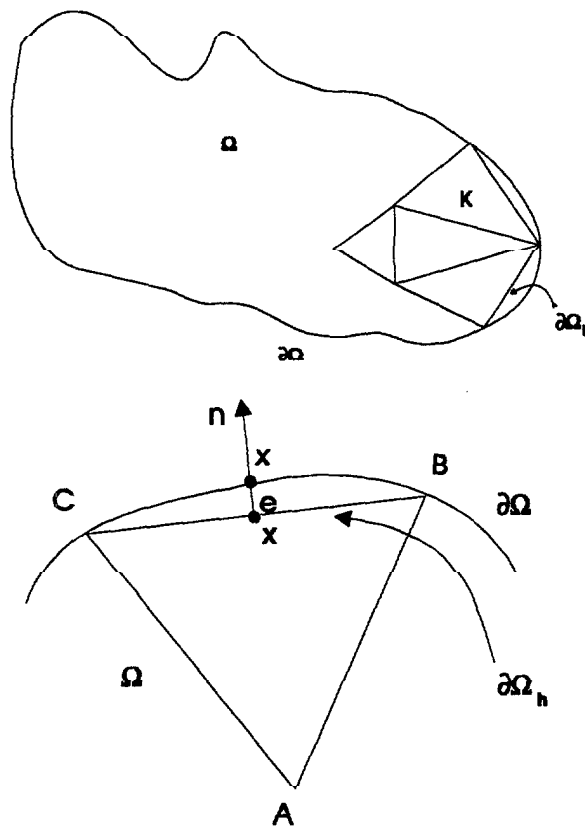
$$\left| e_i \right|_{H^1(\Omega)} \leq C \frac{h^2}{4} \text{ para malla } \frac{h}{2}$$

$$|e_i|_{H^1(\Omega)} \leq C \frac{h^2}{16} \text{ para malla } \frac{h}{4}$$

Cuando $\partial\Omega$ tiene una forma irregular un nuevo tipo de error de aproximación hay que tener en cuenta: la aproximación del contorno $\partial\Omega$ por $\partial\Omega_h$, siendo de interés minimizar $\Omega - \Omega_h$ en los mallados triangulares.

Si $\partial\Omega_h$ es muy próximo a $\partial\Omega$ entonces la solución en Ω está en condiciones de facilitar en la resolución numérica a ser muy próxima a la solución exacta en Ω_h .

Una posibilidad generalmente utilizada es aproximar $\partial\Omega$ mediante segmentos y utilizar mallados de Ω tal que los elementos con nodos en el contorno tienen $\partial\Omega_e \rightarrow \partial\Omega$.



Si consideramos grado de interpolación $K=2$, ¿qué diferencia entre $x(\partial\Omega)$ y $x(\partial\Omega_h)$ podríamos considerar admisible?, o dicho de otro modo, ¿de qué orden debe ser la distancia en dirección de la normal a $\partial\Omega$ en $x(\partial\Omega)$ para que la diferencia de la aproximación de la solución u entre los triángulos $\left(\overset{\Delta}{ABC}, x \in \partial\Omega\right)$ y $\left(\overset{\Delta}{ABC}, x \in \partial\Omega_h\right)$ sea despreciable? (de orden similar al error de la aproximación).

Se demuestra que la diferencia de interpolación,

$$\left| \prod_h u_h - \prod_{h^0} u_h \right|$$

Siendo $\prod_h u_h$ interpolada de u en nodos donde cualquier lado del triángulo no pertenece a $\partial\Omega_h$ (ejemplo, triángulo de la figura) y $\prod_{h^0} u_h$ interpolada de u en los nodos con un lado del triángulo perteneciente a $\partial\Omega_h$, para caso de interpolación $K=2$, se tiene que para la aproximación u_h con $u_h = 0$ en $\partial\Omega$ y con $u \in H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ no se ve afectada por la diferencia (aproximación de u_h del mismo orden que el caso $\partial\Omega_h - \partial\Omega = \emptyset$) de las interpoladas si el mallado es con:

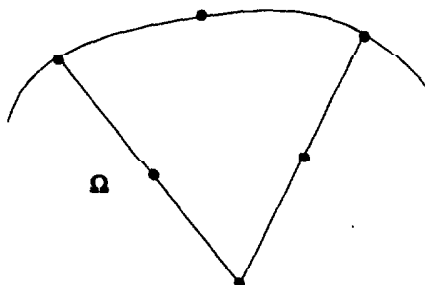
$$e = \left| x(\partial\Omega) - x(\partial\Omega_h) \right| = O(h_K^2)$$

Por tanto, para mallado triangular, $K=2$, de forma que se cumpla la anterior expresión, la diferencia $\partial\Omega_h - \partial\Omega$ no afecta a la exactitud de cálculo de la solución aproximada u_h respecto al caso $\partial\Omega_h - \partial\Omega = \emptyset$, caso de problemas con condición de contorno tipo Dirichlet.

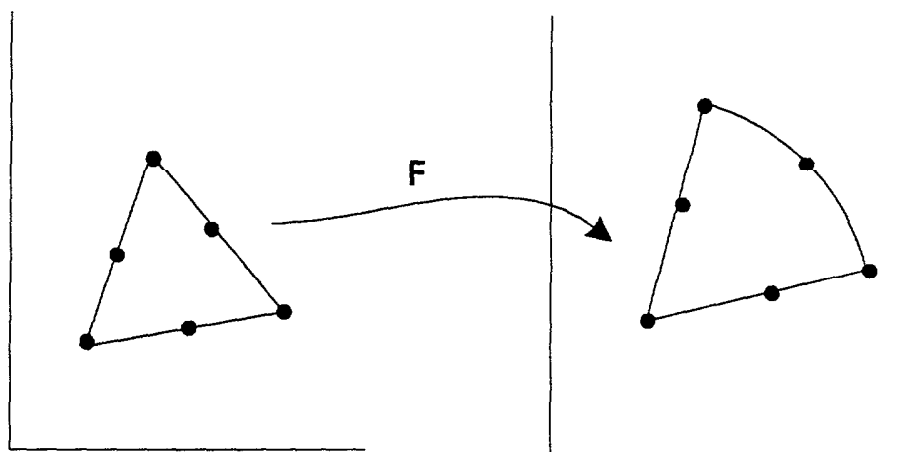
Para caso $K=1$, mallado triangular con interpolación lineal en Ω_e :

$$\left| x(\partial\Omega) - x(\partial\Omega_h) \right| < h_K^\alpha \text{ con } \alpha < 2$$

Se suele utilizar para aproximar mejor $\partial\Omega$ triángulos Ω_ρ , con un lado curvo o bien utilizar mayor densidad de elementos triangulares de tres nodos (en los vértices).



Los triángulos con un lado curvo son generados mediante técnica isoparamétrica e imponer en la transformación restricción de que dos lados se transformen en lados rectos.



Podemos observar que no se asegura $\Omega_h \subset \Omega$ pero si existe regularidad geométrica en $\partial\Omega$ y de datos del problema y la distancia equivalente anterior:

$$e = \left| x(\partial\Omega) - x(\partial\Omega_h) \right| = O(h_K^2)$$

se conserva también el orden de convergencia para u_h dado por el es-

timador de error de aproximación.

En ambos casos expuestos está verificado que aunque $u \in H^r$, las estimaciones que dan lugar a las conclusiones anteriores corresponden a $u \in H^3(\Omega)$ y no es posible mejorar el orden de convergencia aunque tenga la solución regularidad $r > 3$.

En el contexto de minimizar $\partial\Omega_h - \partial\Omega$ una alternativa es utilizar polinomios Spline que aproximen $\partial\Omega$ discretizando previamente en puntos discretos y luego considerar triángulos con $K=1$ o $K=2$ con un lado entre dos puntos discretos fijados de $\partial\Omega$.

En esta tesis se desarrolla un método de aproximación Spline que ajusta a $\partial\Omega$ incluso en puntos con derivada infinita.

2.5.2. ERROR DE LA APROXIMACIÓN EN PROBLEMAS PARABÓLICOS.

La resolución de un problema parabólico mediante semidiscretización (discretización en espacio mediante método estándar de elementos finitos) conduce a la resolución de un problema de valor inicial. Este problema se resuelve numéricamente discretizando la variable tiempo utilizando un método numérico (por ejemplo de Crank-Nicolson). Es de interés por tanto en estos problemas evolutivos garantizar la estabilidad de la solución.

Sea el problema parabólico:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div} \left(\vec{\operatorname{grad}} u \right) = f \quad \text{en } \Omega \times (0, T)$$

$$u = 0 \quad \text{en } \Gamma \times (0, T)$$

$$u = u^0 \quad \text{en } \Omega, t = 0$$

$$\text{con } f \in L^2(\Omega), u^0 \in L^2(\Omega)$$

La estimación básica de estabilidad para $f=0$ es:

$$\|u(t)\| \leq \|u^0\| \quad t \in (0, T)$$

$$\|\dot{u}(t)\| \leq \frac{C}{t} \|u^0\| \quad t \in (0, T)$$

Que siendo

$$u^0 \in L^2(\Omega),$$

$$\|u^0(t)\| = O(t^{-1}) \quad \text{con } t \rightarrow 0$$

La formulación variacional del problema es:

$$\left(\dot{u}_h(t), v\right) + a(u_h(t), v) = (f(t), v) \quad \forall v \in V \quad t \in (0, T)$$

$$u_h(0) = u^0 \quad \text{en } \Omega \quad \text{con } t = 0$$

y con uso de semidiscretización conduce a la resolución del problema de valor inicial:

$$C_{ij} \left\{ \dot{u}_j(t) \right\} + K_{ij} \left\{ u_j(t) \right\} = F(t) \quad t \in (0, T)$$

$$C_{ij} \left\{ u_j(0) \right\} = U^0$$

siendo C_{ij} , matriz de masa, y K_{ij} , matriz de rigidez, simétricas y definidas positivas.

Por tanto si:

$$[C] = C_{ij}$$

$$[C] = E^T E$$

y utilizando una nueva variable $\eta(t)$ de componente $\eta_j(t)$

siendo $\eta = Eu(t)$; $u(t)$ de componente $u_j(t)$.

El problema de valor inicial quedará expresado:

$$\dot{\eta}(t) - \bar{K}\eta(t) = g(t) \quad t \in (0, T)$$

$$\eta(0) = \eta^0$$

donde $\bar{K} = E^{-T} K_{ij} E^{-1}$,

siendo un problema tipo Stiff relativo a ser los valores propios de $\bar{K}$ grandes.

Expresamos un resultado de la aproximación $u(t)$ mediante $u_h(t)$ para uso de polinomios de grado $K=1$ en la interpolación de los elementos finitos y malla cuasiforme, cumpliendo condición de ángulos mínimos y $\partial\Omega$ suave:

$$\max_{t \in (0, T)} \|u(t) - u_h(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(1 + \left| \log \frac{T}{h^2} \right| \right) \max_{t \in (0, T)} h^2 \|u(t)\|_{H^2(\Omega)}$$

Respecto a la resolución numérica del problema de valor inicial es conocido utilizando el método de Euler regresivo:

$$\left(\frac{\partial u_h}{\partial t} \approx \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\Delta t_n} \quad y \quad a(u_h^{n-1}, v) \right)$$

la condición de estabilidad numérica:

$$\left| I - \Delta t_n \bar{K} \right| \geq \alpha > 1$$

α independiente de n

y

$$\Delta t_n \leq Ch^2$$

Siendo

$$\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$$

Por tanto, si h es moderadamente pequeño es muy restrictivo la condición $\Delta t_n \leq Ch^2$, debiéndose considerar Δt_n excesivamente pequeños.

En cambio, utilizando método de Crank-Nicolson entre otros métodos implícitos, al ser éste incondicionalmente estable, no es necesario elegir Δt_n excesivamente pequeños, sino en orden a la exactitud requerida a la solución.

El método progresivo de Euler:

$$\left(\frac{\partial u_h}{\partial t} \approx \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\Delta t_n} \quad y \quad a(u_h^n, v) \right)$$

y Crank-Nicolson son implícitos requiriendo por tanto mayor tiempo de cálculo que los explícitos en cada iteración de tiempo en la resolución.

En general, en problemas parabólicos la solución exacta tiene un periodo transitorio inicial donde la solución no es suave, pero pasado este periodo se va suavizando (disminuyendo su variación en el tiempo) al irse incrementando t .

Este efecto es importante tenerlo en cuenta en la resolución numérica a fin de variar el tamaño de discretización (en tiempo y espacio) de acuerdo a la suavidad de la solución exacta u y usando mallas finas al principio donde u no es suave e incrementando el tamaño de malla cuando u comienza a ser suave (obviamente en contexto de mallas no estructuradas o mallas con refinamiento/desrefinamiento de elementos).

También estos periodos transitorios de no suavidad en la solución exacta puede ocurrir para un tiempo $t^* \gg t_0$ debido a cambios bruscos del valor de f o de las condiciones de contorno para $t = t^*$ (un instante).

Existen también métodos discontinuos de Galerkin que discretizan mediante formulación de elementos finitos la variable temporal.

Asimismo, en la resolución numérica se puede, a partir de estimaciones de error, generar algoritmos de control automático de paso espacial (h) y de tiempo (Δt).

2.5.3. ESTABILIDAD DE LA SOLUCIÓN NUMÉRICA.

En un problema elíptico la discretización con elementos finitos nos conduce en su última etapa a resolver un sistema de ecuaciones algebraico:

$$K_{ij} \{u_j\} = \{F_i\} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

En este sistema, un pequeño cambio de K_{ij} o F_i puede producir un cambio relativamente grande en el cálculo de $\{u_j\}$.

Una medida de la sensibilidad bien conocida es el número de condicionamiento de la matriz de forma que si este estimador es muy grande, con

pequeño cambio en K_{ij} , o F_i produce un notable cambio en el valor de $\{u_j\}$.

Puede ocurrir que los datos del problema obtenido por medidas experimentales contengan un error, o por efecto de errores de redondeo los términos de K_{ij} no sean todo lo exacto que deberían.

Por tanto, es de interés conocer conclusiones existentes sobre el tema para tomar las precauciones necesarias en la resolución del problema.

Así, en problemas elípticos de orden $2m$ la estimación del número de condicionamiento es de $O(h^{-2m})$ para un mallado cuasi-uniforme.

Para problemas elípticos de segundo orden en $1-D$ y mallado irregular es de:

$$O\left(\frac{\tilde{h}^{-1} h_{min}^{-1}}{\lambda_{min}}\right)$$

siendo $\tilde{h}$ el valor promedio de h_K en T_K .

Para problemas elípticos de orden $2m$ y mallado irregular, puede sugerirse:

$$O\left(\frac{h_{min}^{-2m}}{\lambda_{min}}\right)$$

Siendo λ_{min} el autovalor más pequeño de la matriz K_{ij} y es impuesto por la formulación del problema continuo.

En las estimaciones dadas se supone que los elementos $K \in T_K$ no degeneran. Caso de que algunos degeneraran daría lugar a incrementos más al-

tos en el número de condicionamiento.

Para problemas con condiciones de contorno esenciales, el escalado de valores propios es efectivo para reducir el número de condicionamiento en mallados cuasi-uniformes. En mallados irregulares o condiciones de contorno naturales, la influencia es local y tenderá a mejorar en muchos casos el número de condicionamiento la descomposición:

$$K_{ij} \rightarrow D K_{ij} D$$

Siendo D matriz diagonal positiva.

En problemas con coeficientes discontinuos es también muy efectivo el escalado.

Por otro lado, el número de condicionamiento no depende fuertemente del grado del polinomio elegido en la interpolación.

En 3-D el condicionamiento es mejor que en 2-D y a su vez, éste es mejor que en 1-D; caso de orden N altos de la matriz ($N \times N$):

$$\lambda_{max} = O\left(N^{\frac{2}{n}-1}\right)$$

Obviamente los errores de redondeo en el cálculo de K_{ij} y de F_i aumenta proporcionalmente con $O(h^{-2m})$ el número de condicionamiento: errores en los cálculos de los términos y en el ensamblaje, errores de redondeo en la computación, errores de integración numérica, etc.

Asimismo es de interés al resolver los sistemas de ecuaciones mediante métodos iterativos en caso de matrices mal condicionadas, utilizando méto-

dos con preconditionamiento de la matriz.

También, es de interés en mallas muy finas utilizar cálculo en ordenador con doble precisión evitar mallas muy irregulares, es decir sin excesivas variaciones en el tamaño de elementos, y en general, que no degeneren los elementos geoméricamente.

En problemas que se desee calcular aproximadamente el número de condicionamiento, éste puede computarse sin excesivo coste adicional después de factorizar K_{ij} , en el contexto de uso de métodos directos.

2.5.4. MÉTODOS ADAPTATIVOS.

2.5.4.1. MÉTODOS Y RESOLUCIONES ADAPTATIVAS DE ELEMENTOS FINITOS.

Un método de elemento finito adaptativo consiste en resolver mediante el método de elementos finitos el problema considerado para una malla, sea esta regular o irregular, con un tipo de elemento finito y su interpolación asociada a estos, y a fin de mejorar la calidad de la solución numérica resolver nuevamente varias veces el problema con un mallado distinto o con mayor grado de interpolación o bien combinando ambos. A fin de minimizar el coste computacional es fundamental iniciar el proceso adaptativo con una malla bastante adaptada, no importando el tamaño de los elementos, sino la adaptación a las singularidades del contorno, adaptación entre las interfaces de materiales distintos y atendiendo a una buena discretización del contorno del dominio y con triangulación gradual en mallas irregulares y elementos de formas geométricas idóneas respecto a optimizar la forma preferentemente (no sólo evitar su degeneración con la consiguiente pérdida de

convergencia).

Además interesa que la malla de partida sea con menor h_k en los elementos situados en zonas previsibles de comportamiento no suave de la solución y que su generación sea además de automática, flexible. En este sentido es interesante que en la generación de mallas se utilicen criterios adecuados de elección muy variada que recojan aspectos muy diversos.

Así, en distintos apartados de la tesis se presentan métodos de triangulación y regularización en 2-D y métodos *Spline* para discretización de contornos en el cual una de las aplicaciones corresponde a definir la triangulación local conectada al contorno del dominio del problema.

Entre distintas resoluciones adaptativas, podemos atender a la siguiente clasificación:

- a) Métodos de refinamiento de mallado (*h-adaptativos*)
- b) Método *p-adaptativo*
- c) Métodos *h-p-adaptativo*
- d) Procesos de *refinamiento* y *desrefinamiento* de mallados
- e) Otros métodos

A continuación concretaremos algunos de estos métodos, sus propiedades, ventajas e inconvenientes, a fin conectar con el apartado de la tesis doctoral en que se presenta un método adaptativo de mallados de dominios:

- a) Los métodos de refinamiento de mallado pueden ser locales o globales en todo el dominio, basados en disminuir sucesivamente el tamaño de los

elementos del mallado. Estos se clasifican en:

1.- Métodos de refinamiento de mallado estructurado

2.- Métodos de refinamiento de mallado no estructurado

Los primeros, a partir de una malla inicial regular o no regular refina la malla dividiendo elementos donde siguieran indicadores a posteriori del error de la solución obtenida, esta división es realizada de una forma estructurada, obteniéndose una nueva malla con la precaución de ser conforme sin elementos degenerados. Una opción entre otras es utilizar elementos triangulares y dividir estos en cuatro subtriángulos. Las nuevas mallas que se van generando contienen a las mallas anteriores.

Los métodos de refinamiento de mallado no estructurado se diferencian de los estructurados en que las nuevas mallas generadas, no tienen que contener a las anteriores.

Estos métodos mantienen constante el grado de los polinomios de interpolación en las distintas resoluciones adaptativas.

b) Un método *p-adaptativo* mantiene fija la malla inicial, resolviendo el problema sucesivamente incrementando el grado de los polinomios de interpolación en cada resolución del problema (se suele considerar p referido a interpolación con polinomios de grado igual a p).

c) Un método *h-p-adaptativo* consiste en resolver sucesivamente el problema disminuyendo el parámetro h de discretización y aumentando el grado k de los polinomios de interpolación. En éstos el refinamiento de mallados puede considerarse uniforme o local.

d) Los procesos de refinamiento y desrefinamiento de mallados pueden también clasificarse en estructurados y no estructurados. Los estructurados son aquellos que mantienen una estructura de mallas encajadas, y por tanto, se eliminan nodos en las readaptaciones de los mallados manteniéndose inamovibles los nodos de la malla inicial. Los no estructurados adaptan la generación de mallas más flexiblemente.

A fin de comparar métodos h , p , y h - p adaptativos consideremos resultados para problemas elípticos sobre estimadores de error en el marco de la p -convergencia, o sea, aumentando jerárquicamente el grado de los polinomios de interpolación y en el marco de la h - p convergencia (combinando la h -convergencia y la p -convergencia).

Para $m=1$ en particular para el problema:

$$-\Delta u + u = f \quad \text{en } \Omega$$

$$u = 0 \quad \text{en } \partial\Omega$$

donde $f \in L^2(\Omega)$ y Ω es poligonal acotado.

En p -refinamiento obtenemos una secuencia de soluciones aproximadas

$$u_p \in P_p \cap H_0^1(\Omega) \quad \text{para } p=1,2,\dots(\text{grado uno, dos},\dots)$$

que satisfacen:

$$\int_{\Omega} \vec{\text{grad}} u \cdot \vec{\text{grad}} v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx$$

$$\forall v_p \in P_p \cap H_0^1(\Omega)$$

Babuska establece el siguiente estimador a priori de p -convergencia:

siendo la regularidad:

$$u \in H^r(\Omega), r > 1$$

se establece que,

$$\|u - u_p\|_{H^1(\Omega)} \leq C(r, \varepsilon) \frac{\|u\|_{H^r(\Omega)}}{p^{\frac{r-1}{r}}} p^\varepsilon$$

$\varepsilon > 0$, arbitrario, en caso de condiciones Neumann homogéneas (para Dirichlet homogénea $\varepsilon = 0$).

Siendo N el número de grados de libertad para polinomios en una triangulación de grado p en las variables espaciales $x(x_1, x_2)$ (observando triángulo de Pascal) tenemos asintóticamente $N = O(p^2)$ que en la expresión anterior conduce a:

$$\|u - u_p\|_{H^1(\Omega)} \leq C(r, \varepsilon) \frac{\|u\|_{H^r(\Omega)}}{N^{\frac{r-1}{2}}} p^\varepsilon$$

Para un h fijo.

Por otro lado, en caso de $u \in H^2(\Omega)$ dará:

$$\|u - u_p\|_{H^1(\Omega)} \leq C(r, \varepsilon) \frac{\|u\|_{H^2(\Omega)}}{p} p^\varepsilon$$

En h -convergencia tenemos para un p fijo, $u \in H^r(\Omega)$, y $h \rightarrow 0$, la generación de secuencia de u_h para $h, \frac{h}{2}, \dots$

$$\| u - u_h \|_{H^m(\Omega)} \leq C h^{\min(p+1-m, r-m)} |u|_{H^r(\Omega)}$$

Para $m=1$

$$\| u - u_h \|_{H^1(\Omega)} \leq C h^{\min(p, r-1)} |u|_{H^r(\Omega)}$$

y si $u \in H^2(\Omega)$

$$\| u - u_h \|_{H^1(\Omega)} \leq C h |u|_{H^2(\Omega)}$$

Este último resultado es de $O(h)$ independiente de $p \geq 1$.

En la h -convergencia $N = O(h^{-2})$ por tanto para $r-1 \leq p$ (ej: $r=2, p=1,2$)

$$\| u - u_h \|_{H^1(\Omega)} \leq C \frac{\|u\|_{H^2(\Omega)}}{N^{\frac{r-1}{2}}}$$

Por otro lado, es conocido que cuando se hace coincidir un nodo con un punto singular (problemas singulares), la p -convergencia tiene un comportamiento que se expresa variando el estimador dado anteriormente, siendo el estimador de error:

$$\| u - u_p \|_{H^1(\Omega)} \leq C(r, \varepsilon) \frac{\|u\|_{H^r(\Omega)}}{N^{r-1}}$$

Por tanto, podemos concluir comparando las situaciones que expresan las anteriores expresiones, que la p -convergencia es superior a la h -convergencia, o al menos tan buena como ella.

Una acotación conjunta para la h - p -convergencia que engloba a la h -convergencia y a la p -convergencia es:

$$\| u - u_h \|_{H^1(\Omega)} \leq C \frac{h^{\min(p, r-1)}}{p^{\alpha(r-1)}} \| u \|_{H^r(\Omega)}$$

correspondiente a valores de α , $\alpha=1$ cuando no hay singularidades y verificado que $\alpha=2$ cuando hay singularidades y si coinciden nodos en los puntos singulares del problema (mallado adaptado a las singularidades).

Una combinación de una malla bien adaptada a las singularidades, refinada gradualmente en combinación con algoritmo *p-adaptativo* elimina la influencia de las singularidades produciendo altas exactitudes en la solución numérica y con gran velocidad de convergencia. En este contexto existen estimadores en determinados problemas en los cuales la convergencia es independiente del carácter de la singularidad y la velocidad de convergencia es exponencial para caso de soluciones de variación suave en Ω , de la forma:

$$\| e \| \leq C e^{-\beta N^\gamma}$$

C, β, γ constantes positivas (con frecuencia $\gamma \geq 3$), γ depende de la distribución de p .

2.6. CONCLUSIONES PRELIMINARES.

Expresamos a continuación distintas conclusiones, en el contexto de uso de métodos adaptativos, atendiendo principalmente a la discretización en la resolución de aplicaciones:

1.- Las mallas deben ser adaptadas a las singularidades, es decir, haciendo coincidir nodos y contornos de elementos con las singularidades y cargas puntuales, importantes en resolución p-adaptativa o h-p-adaptativa.

2.- Las mallas irregulares deben evitar bruscas variaciones de tamaño entre un elemento y sus adyacentes, siendo de interés el diseño de criterios flexibles de definición de densidades de mallados en el dominio.

3.- No deben degenerar geométricamente los elementos del mallado.

4.- Un refinamiento de mallado excesivamente fuerte, aún local, puede producir inestabilidad numérica en la resolución, debiéndose atender a trabajar en doble precisión y a la resolución de sistemas mal condicionados.

5.- En problemas evolutivos debe evitarse el uso exclusivo de refinamiento sin ir acompañados con técnicas de desrefinamiento o de generación de adaptación de mallas a lo largo de la resolución si la dependencia del tiempo implica cambios en zonas de máximo gradiente en la solución, a fin de no encarecer el coste computacional por fijación de elementos en cada paso de tiempo para las mallas refinadas posteriores (evitar elementos "parásitos" de cálculo en instantes de tiempos posteriores).

6.- Técnicas de refinamiento y desrefinamiento de mallados estructurados son de interés en el uso de métodos multimalla de los sistemas de

ecuaciones, por aprovechar secuencias de mallas contenidas entre ellas en las prolongaciones y restricciones.

7.- En el uso de los algoritmos de refinamiento de mallado estructurado es interesante considerar algoritmos elemento a elemento, los cuales son paralelizables, a fin de disminuir el coste computacional evitando la necesidad de ensamblaje de ecuaciones y en el uso de métodos directos además no es necesario recalcular en las factorizaciones las matrices elementales correspondientes a elementos del mallado no refinados. Si se utilizan métodos iterativos es de interés utilizar métodos preconditionados.

8.- Para una discretización geométrica considerada, podemos utilizar distintos elementos finitos que geométricamente sean iguales, en caso de elementos finitos que geométricamente sean distintos debe prestarse atención especial a verificar la conformidad del mallado o aceptabilidad de la no conformidad en la resolución.

9.- Para problemas con singularidades dependiendo del tipo de singularidad existen elementos finitos especiales que mantienen la misma regularidad caso de que fuera el problema regular. Sin el uso de métodos adaptativos, la malla caso de ser irregular, debe atender cualitativamente al comportamiento de estimadores de error locales para reducir el efecto de polución en los elementos cercanos a los que contienen nodos o fronteras en las singularidades.

10.- La versión *h-p-adaptativa*, de mejor velocidad de convergencia respecto a los *h-adaptativos* o *p-adaptativos*, es de compleja implementación en ordenadores, e incluso se ha trabajado en la creación de sistemas expertos para la generación de dichos métodos o estrategias óptimas de remallado *h-*

p . No obstante, los dos procedimientos propuestos por Zienkiewicz y colaboradores pueden llegar a conseguir errores relativos en norma de energía del 1% sin aumentar hasta límites no aceptables el número de grados de libertad y de relativa facilidad en un código *h-adaptativo*. Estos procedimientos se basan en una de las dos estrategias siguientes:

a) Realizar un refinamiento *h-adaptativo* de la malla, manteniendo bajo el grado de los elementos ($p=1,2$) hasta conseguir un error en la norma de la energía global sobre el 5% y sobre la malla refinada aplicar una extensión *p-adaptativa* utilizando elementos jerárquicos hasta conseguir la precisión deseada.

b) Realizar un refinamiento *p-adaptativo* con elementos jerárquicos en una malla grosera inicial pero bien adaptada a singularidades hasta conseguir que el error relativo entre dos pasos consecutivos (con uso del estimador a priori) sea sobre el 5% y a continuación realizar refinamiento *h-adaptativo* de la malla hasta conseguir la precisión deseada. En general, el refinamiento con aumento de p no sobrepasa $p=3,4$ y el coste computacional es limitado.

La primera opción es de interés según el estudio preliminar expuesto en problemas donde la solución sea de comportamiento relativamente suave, excepto en zonas de altos gradientes, siendo estas zonas pequeñas respecto al resto del dominio. Si además el problema en las zonas mayores fuera bastante suave, no sería necesario acudir a la resolución *h-p* sino únicamente con *h-adaptativo* y así reducir el coste computacional para estos problemas.

En la segunda opción, corresponde aplicar estrategia adaptativa a

problemas que mediante sólo refinamiento h implica gran coste computacional. No obstante, una alternativa de resolución a estos problemas corresponde a los nuevos procesos de métodos adaptativos que impliquen refinamiento y desrefinamiento. Al final de la tesis se presenta un método de adaptación de mallas que actúa tanto refinando como desrefinando el mallado, no estructuradamente.

11.- En la versión p el cálculo de la matriz local es paralelizable y permite uso de fórmulas de cuadratura con mayor número de puntos de interés en ciertos elementos curvilíneos. Por contra, genera matrices menos dispersas y por tanto aumenta el coste computacional.

El efecto del error en un elemento se traslada en mayor medida a los elementos adyacentes donde la solución es más regular (influencia del problema de la polución). No obstante, los elementos en una región podrían ser jerárquicos de un cierto grado, mientras elementos fuera de esa región podrían ser jerárquicos de otro grado. Para forzar la conformidad de las bases en las interfases de las regiones, puede utilizarse multiplicadores o métodos "penalty" a fin de imponer la condición de continuidad en el problema variacional.

12.- En los métodos adaptativos la utilización de distintos indicadores de error posibles (en problemas elípticos sobre todo) permite plantear diversas estrategias de resoluciones adaptativas de refinamientos locales para que cada elemento de la malla tenga un error relativo muy similar y tal que el error global sea menor que el deseado. Para una determinada estrategia puede puntualizarse variaciones apropiadas específicamente al problema a resolver.

CAPÍTULO 3: TÉCNICAS DE GENERACIÓN DE MALLAS TRIANGULARES.

3.1. INTRODUCCIÓN.

Se dedica este capítulo a las técnicas principales de generación de mallas triangulares y más ligadas a las contribuciones realizadas en la tesis que se presentan en el capítulo siguiente y posterior.

Los métodos presentados son:

- 1) Método de Delaunay.
- 2) Método de Avance Frontal.
- 3) Método de Transporte-Proyección.
- 4) Método basado en la resolución de una ecuación diferencial en derivadas parciales.
- 5) Método de Superposición-Deformación de retículas.

Además se indican métodos o técnicas de regularización de mallas muy utilizadas.

3.2. MÉTODO DE DELAUNAY

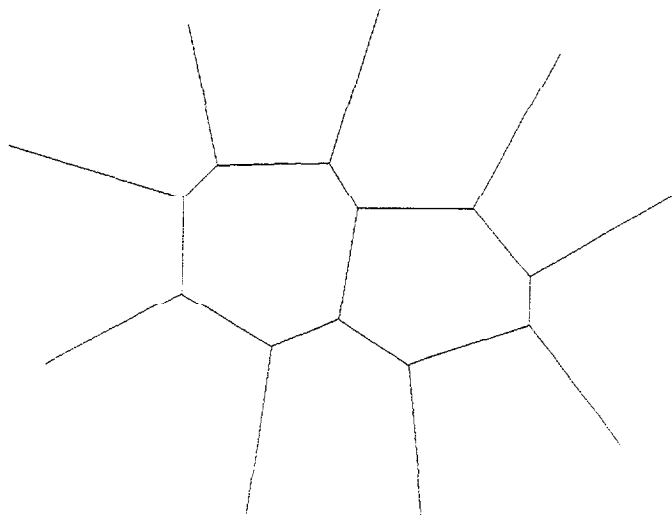
La triangulación de Delaunay se basa en el concepto propuesto por Dirichlet para la descomposición de un dominio dado en un conjunto de polígonos convexos.

Dirichlet asignó a cada punto de definición del dominio, una zona o región, denominada tesela, que es el área del plano más cercana al punto que a cualquier otro. Estas teselas se conocen como los denominados polígonos de Voronoi y se definen de la forma siguiente:

Dado un conjunto de puntos en el plano $\{P_i\}$, las regiones o polígonos de Voronoi cumplen:

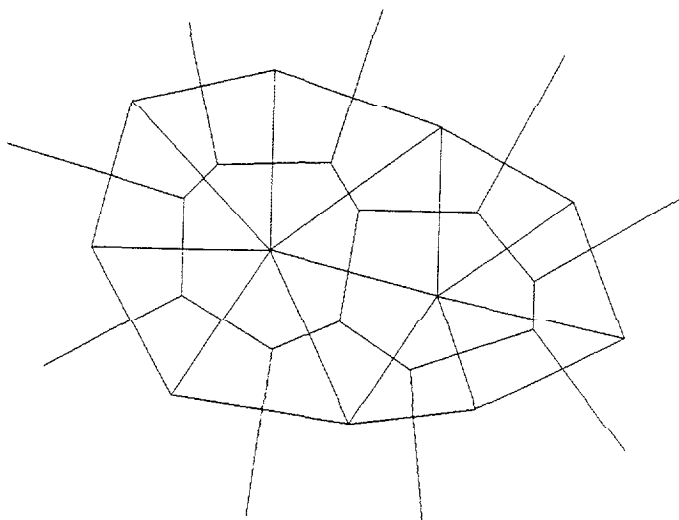
$$\{V_i\} = \left\{ p: \|p - p_i\| < \|p - p_j\|, \forall i \neq j \right\}$$

Es decir, un polígono de Voronoi $\{V_i\}$ es el conjunto de todos los puntos p que están más cercanos a los p_i que a cualquier otro punto.



En $\mathbb{R}^2$, las líneas que forman una cara de un polígono de Voronoi son las medianas entre los dos puntos que ésta separa.

Si se unen todos los puntos que tienen común alguna cara de los polígonos de Voronoi, se obtiene una triangulación de la región convexa formada por la unión de todos los puntos. A esta triangulación se le conoce como triangulación de Delaunay.



En el interior de cada triángulo sólo existe un punto que es un vértice de un polígono de Voronoi y en este punto sólo inciden tres caras de estos polígonos, siendo estas caras, las medianas de los lados de los triángulos.

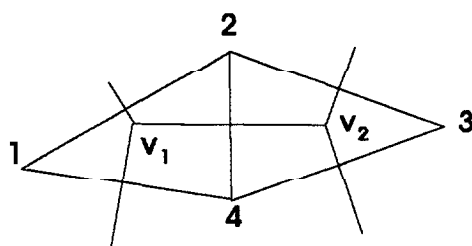
Esto significa que este punto es el circuncentro del triángulo asociado de la triangulación de Delaunay.

Como propiedad importante cabe destacar que cada triángulo de Delaunay contiene un único punto del diagrama de Voronoi y ningún otro punto estará situado dentro del circuncírculo de ese triángulo.

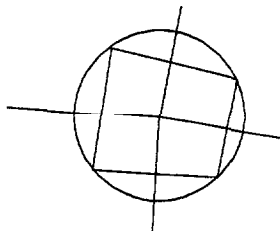
La triangulación de Delaunay es única siempre que en las circunferencias circunscritas a los triángulos no haya más de tres puntos del conjunto de puntos a triangular. Por ello conviene estudiar algunas degeneraciones que pudieran aparecer en la triangulación:

a) Caso en que tres puntos de un posible triángulo están alineados. Esto implica que el circuncentro de los tres puntos está en el infinito. Cuando se detecta este fenómeno, se puede solucionar eliminando un punto o moviéndolo una pequeña distancia antes de incluirlo.

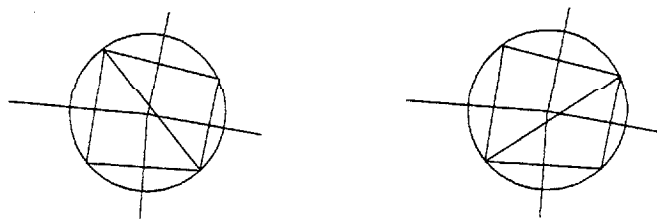
b) Caso en que cuatro o más puntos están sobre una circunferencia circunscrita a un triángulo. Por definiciones anteriores se sabe que un vértice de un polígono de Voronoi sólo contiene tres aristas. En la figura vemos una triangulación de Delaunay de cuatro puntos y observamos que es única.



Si los cuatro puntos están sobre el círculo, como se ve en la figura, el vértice del polígono de Voronoi interior al mismo contiene a cuatro aristas, con lo cual el algoritmo nos ha dado un cuadrilátero en vez de un triángulo.

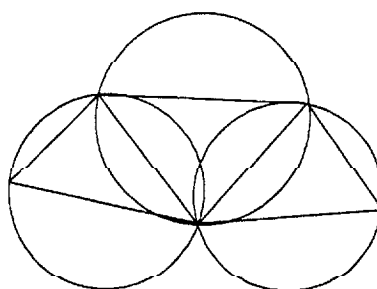


Una solución es triangular a posteriori dicho cuadrilátero, trazando una diagonal, y por lo tanto, teniendo dos posibilidades.

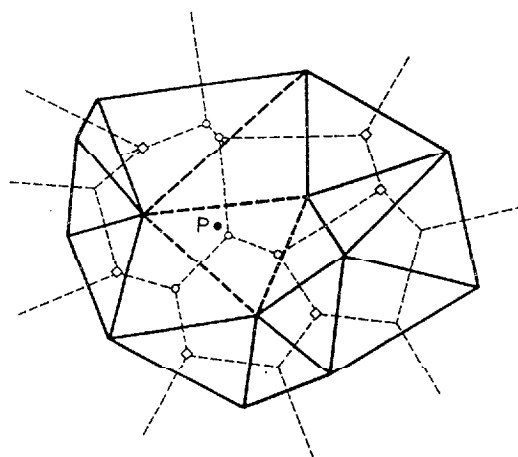


En este caso la triangulación de Delaunay no es única.

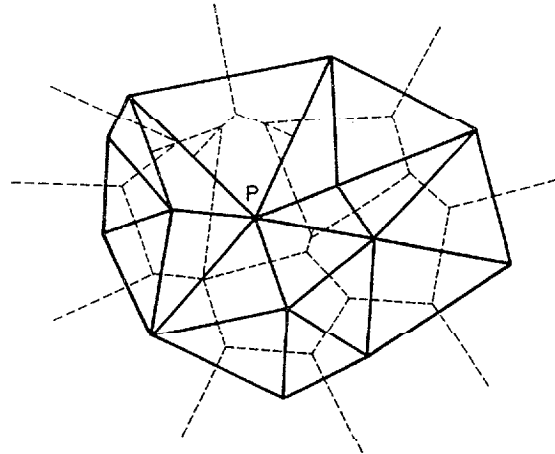
Una de las propiedades más importantes de la triangulación de Delaunay es la de poder insertar un nuevo punto interior a una triangulación ya existente, obteniéndose una nueva triangulación de Delaunay.



Al insertar un nuevo punto habrá un conjunto de triángulos cuyo circuncírculo tendrá el punto introducido en su interior. La unión de todos estos triángulos forman un polígono denominado polígono de inserción.



La nueva triangulación de Delaunay estará formada por todos los triángulos de la anterior triangulación, exteriores al polígono de inserción, más los triángulos formados al unir dicho punto con los vértices del polígono de inserción.



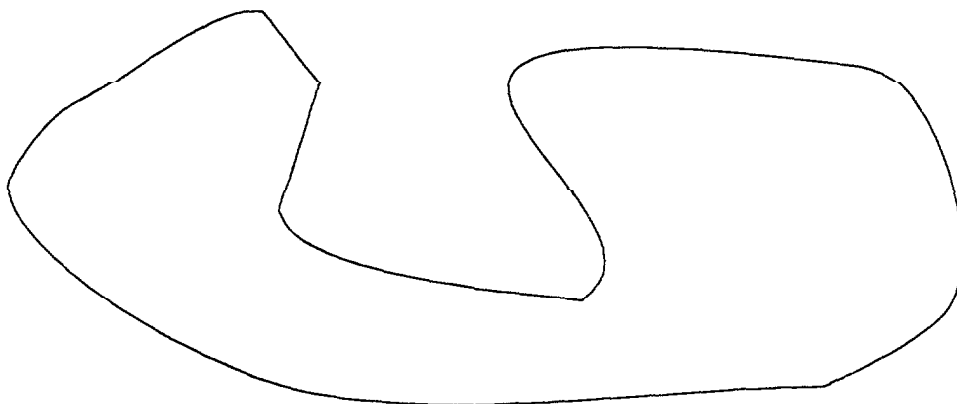
Antes de entrar en la triangulación de un dominio cualquiera utilizando el método de Delaunay desarrollamos uno de los algoritmos más conocidos para la triangulación de un conjunto cualquiera de puntos en el plano. Este algoritmo es el denominado algoritmo de Watson, cuyos aspectos fundamentales son:

- 1.- Crear un triángulo que encierre a todos los puntos.
- 2.- Tomar como primera triangulación de Delaunay dicho triángulo.
- 3.- Insertar punto a punto teniendo en cuenta la propiedad anterior de inserción de un punto interior a una triangulación de Delaunay dada.
- 4.- Eliminar todos los triángulos de la última triangulación de Delaunay obtenida que contenga al menos un nodo del triángulo inicialmente creado.

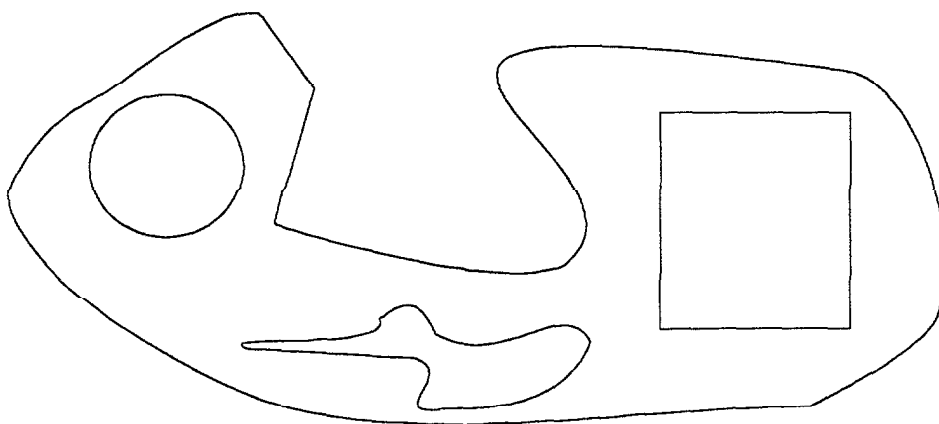
Este algoritmo de triangulación, por lo expuesto anteriormente, esta envuelto por una poligonal convexa y solo convexa.

Para la implementación del algoritmo de Watson a la discretización de un dominio cualquiera se tiene que tener en cuenta que un dominio en general cumple:

a) El contorno exterior del dominio no será una poligonal convexa. En general, la forma geométrica del contorno exterior es no convexa o puede hacerse no convexa por su aproximación en caso de contornos curvos.



b) En su interior podrán existir contornos que limiten una zona no perteneciente al dominio (agujeros).



Supongamos un dominio cerrado y con agujeros interiores, definido por un conjunto de puntos que serán los nodos de la triangulación de Delaunay. Este conjunto de puntos lo dividimos en los siguientes subconjuntos:

- b.1) Conjunto de puntos que definen al contorno exterior del dominio.
- b.2) Conjuntos de puntos que definen a cada uno de los contornos interiores al dominio (agujeros).
- b.3) Conjunto de puntos que pertenecen al dominio y que no pertenecen a ninguna frontera.

El algoritmo de Watson para este dominio será:

- 1.- Se crea una poligonal que encierre a todos los puntos. Watson utiliza un triángulo y otros autores un cuadrilátero. En general puede usar cualquier poligonal.
- 2.- Se aplica el algoritmo de triangulación de Delaunay al conjunto de puntos formado por los vértices de la poligonal creada en el apartado anterior y los puntos del contorno exterior.
- 3.- De la triangulación obtenida se eliminan los triángulos exteriores al dominio.
- 4.- Insertar en la triangulación obtenida los puntos que definen los distintos contornos interiores (agujeros).
- 5.- Eliminar los triángulos interiores a los contornos interiores.
- 6.- Una vez obtenida la triangulación asociada a los puntos que forman los distintos contornos del dominio, insertamos los puntos interiores del

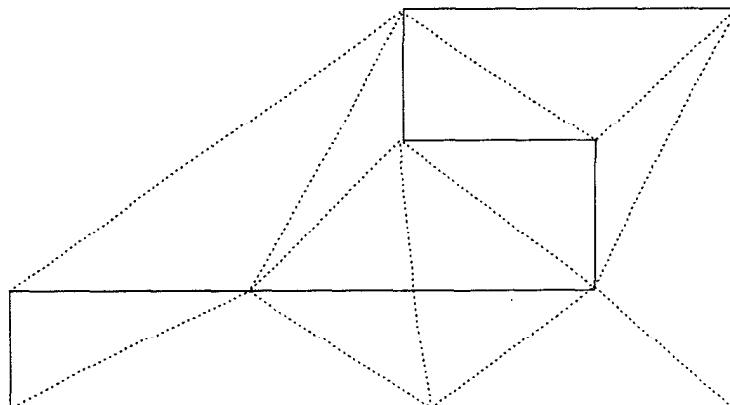
dominio que no forman parte de ningún contorno.

Esta técnica presenta varios inconvenientes a la hora de implementarla. Enumeramos algunos de ellos:

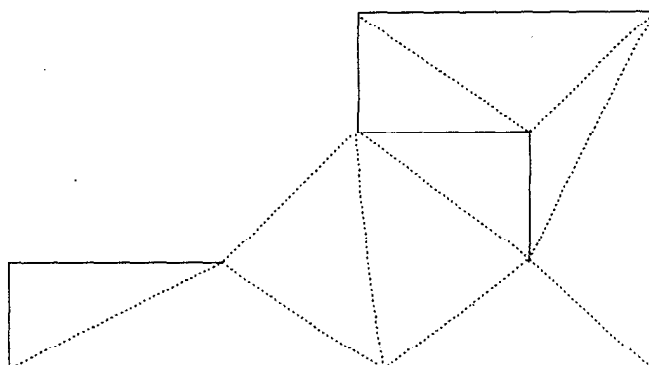
1) Al eliminar los triángulos en los apartados 3 y 5 los triángulos exteriores al dominio cuyos vértices pertenezcan al mismo tienen que ser marcados sin tener en cuenta aquellos triángulos con algún vértice en la poligonal creada en el apartado 1, ya que aunque sean eliminados para la triangulación final, pueden intervenir en la aplicación del método de Delaunay cuando se inserten puntos posteriores.

2) Cuando realizamos el paso 3, la triangulación asociada queda envuelta por un dominio no convexo y esto contradice la propiedad de la triangulación de Delaunay de la poligonal convexa.

3) Si los triángulos son eliminados por etapas como propone el algoritmo expuesto, podría ocurrir que algún contorno se viera modificado. Pasados los apartados 1 y 2 del algoritmo y eliminados los triángulos con algún vértice en la poligonal creada por el apartado 1, tenemos la triangulación:



Por último, si eliminamos los triángulos según el apartado 3, el dominio se modificaría:



3.3 MÉTODO DE AVANCE FRONTAL.

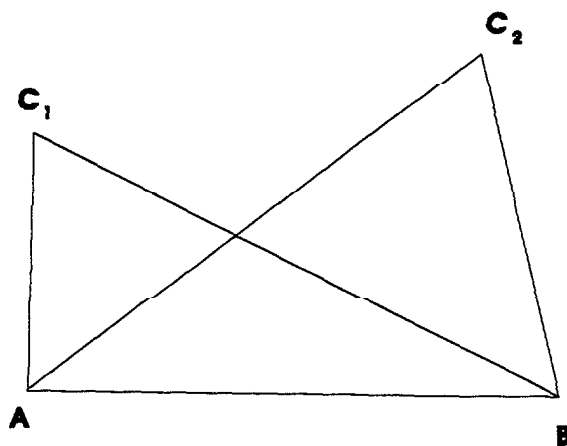
El método de avance frontal recibe su nombre del hecho de que en cada etapa del proceso existe un frente formado por todos los posibles lados sobre los cuales se puede generar un elemento. De forma repetitiva el proceso consta de una etapa de generación de un elemento y de otra etapa de actualización del frente.

El primer frente o línea de avance está formada por los puntos generados en el contorno exterior del dominio.

Para la formación de un elemento son conocidas dos técnicas diferenciadas:

a) Formación de un elemento dada una discretización del interior del dominio. Técnica propuesta por S. H. LO

Dados dos nodos A y B consecutivos de la línea de avance, es elegido un nodo (C_1 o C_2) de la discretización interior del dominio o de la línea de avance con el siguiente criterio:



1.- Para el nodo C_1 se define:

$$\alpha_1 = \frac{\Delta ABC_1}{AB^2 + BC_1^2 + CA_1^2}$$

$$\beta_1 = \frac{\Delta C_1 BC_2}{C_1 B^2 + BC_2^2 + C_1 C_2^2}$$

$$\partial_1 = \frac{\Delta AC_1 C_2}{AC_1^2 + C_1 C_2^2 + C_2 A^2}$$

$$\lambda_1 = \max(\beta_1, \partial_1)$$

2.- Para el nodo C_2 se define:

$$\alpha_2 = \frac{\Delta ABC_2}{AB^2 + BC_2^2 + C_2 A^2}$$

$$\beta_2 = \frac{\Delta C_2 BC_1}{C_2 B^2 + BC_1^2 + C_1 C_2^2} = -\beta_1$$

$$\partial_2 = \frac{\Delta AC_2 C_1}{AC_2^2 + C_2 C_1^2 + C_1 A^2} = -\partial_1$$

$$\lambda_2 = \max(\beta_2, \partial_2)$$

3.- El nodo C_1 es seleccionado si:

$$\alpha_1 \cdot \lambda_1 > \alpha_2 \cdot \lambda_2$$

En caso contrario sería seleccionado el nodo C_2 .

b) Proceso que permite controlar el tamaño de los elementos y su forma. Dados dos nodos A y B consecutivos de la línea de avance, es elegido un nodo C de la siguiente forma:

1.- Elección de un tamaño de elemento δ .

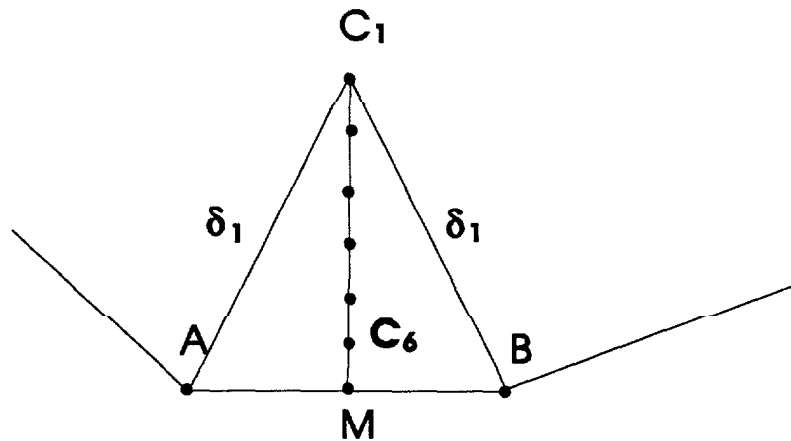
2.- Determinar un punto C_1 a una distancia δ_1 de A y B con el siguiente criterio:

$$\delta_1 = \delta \quad \text{si} \quad 0.55 \cdot AB < \delta < 2 \cdot AB$$

$$\delta_1 = 0.55 \cdot AB \quad \text{si} \quad 0.55 \cdot AB > \delta$$

$$\delta_1 = 2 \cdot AB \quad \text{si} \quad \delta > 2 \cdot AB$$

3.- Determinación de los puntos C_2, C_3, C_4, C_5 y C_6 que estarán equiespaciados en el segmento que unirá los puntos C_1 y M .



4.- Determinación de los nodos pertenecientes a la línea de avance que estén situados dentro de un círculo de radio $r = 3 \cdot AB$ y centro C_1 . De estos nodos se escogen los que estén situados en el semiplano delimitado por la recta que une los puntos A y B y que contiene al punto C_1 . Estos nodos se ordenan según la distancia al punto C_1 y se adjuntan a una lista de tal forma que el primero será el más cercano aplicándose a todos ellos una penalización de valor δ_1 .

5.- Determinación del punto de conexión C . Este será el primer nodo de la lista que satisfaga las dos condiciones siguientes:

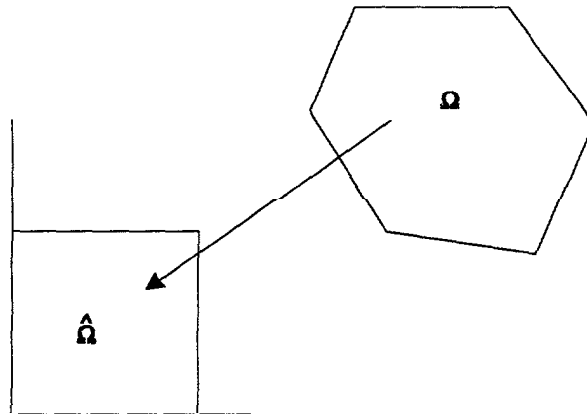
5.1.- El interior del triángulo ABC no contiene ninguno de los restantes nodos de la línea de avance.

5.2.- El segmento CM no corta ninguna de las caras existentes en ese momento en la línea de avance.

3.4. OTRAS TÉCNICAS DE GENERACIÓN DE MALLAS TRIANGULARES.

3.4.1. MÉTODOS DE TRANSPORTE-PROYECCIÓN.

Se genera el mallado del dominio real geométrico Ω compuesto por elementos Ω_e a partir de un mallado base $\hat{\Omega}$ y uso de función F de traslación de modo que $F(\hat{\Omega}_e) = \Omega_e$



Para triángulos las imposiciones a F convenientes son:

$$F\left(\begin{smallmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{smallmatrix}\right) = \sum_{i=1}^3 P_i\left(\begin{smallmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{smallmatrix}\right) a_i$$

$$P_1\left(\begin{smallmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{smallmatrix}\right) = 1 - \hat{x} - \hat{y}$$

$$P_2\left(\begin{smallmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{smallmatrix}\right) = \hat{x}$$

$$P_3\left(\begin{smallmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{smallmatrix}\right) = \hat{y}$$

Constituyen requerimientos que dificultan la elección de F , unido a que generalmente no es conocida la expresión analítica de $\partial\Omega$, hace que estos métodos no sean del todo generales o robustos.

No obstante, se investiga actualmente para dominios fuertemente no convexos su aplicación mediante uso de modificaciones de corrección del mallado generado, deformando éste a posteriori mediante desplazamientos de nodos interiores atendiendo a su situación espacial respecto a nodos del contorno, es decir, en el contexto de que la deformación de la malla obtenida por estos métodos hacia la malla definitiva aceptable sea dirigida por los nodos del contorno. Para este propósito se utilizan funciones pesos asociadas a los nodos interiores y parámetros de ajuste que permitan controlar la relación espacial entre nodos interiores y nodos del contorno.

La idea de deformación es aplicable a 3-D [Marroco,1984]

3.4.2. MÉTODOS BASADOS EN RESOLUCIÓN DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES.

A diferencia de los métodos de Traslación-Proyección, la función para generar la malla no es fijada, siendo ésta determinada resolviendo un sistema de ecuaciones en derivadas parciales convenientemente elegido:

En Thompson [1982,1985] se presenta un estudio completo de estos métodos y sus diferentes aplicaciones.

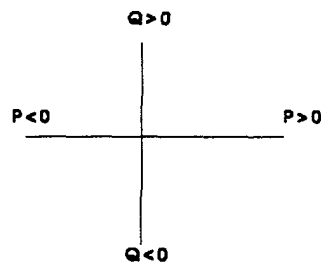
El establecimiento de estos métodos reside en la elección del sistema diferencial o sistema de generación de la malla. Existen dos clases de métodos:

1) Métodos que obedecen a expresar el sistema en las variables espaciales del problema a tratar (x,y) y por inversión del sistema de ecuaciones calcular las funciones de coordenadas $x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)$ de los nodos de Ω .

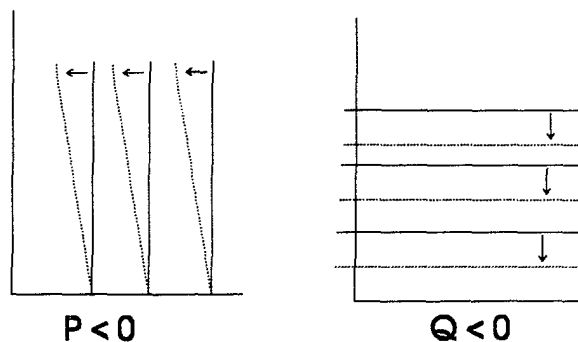
En estos métodos la inversión del sistema da por resultado un sistema acoplado no lineal definido en el dominio base $\hat{\Omega}$ cuya resolución nos da las funciones $x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)$.

$$\xi_{xx} + \xi_{yy} = P(\xi, \eta)$$

$$\eta_{xx} + \eta_{yy} = Q(\xi, \eta)$$



A las funciones P y Q se les denominan funciones de control de la malla. Se pueden diseñar para conseguir la flexividad que en ocasiones se requiere para controlar el espaciamiento entre los puntos de las mallas generadas.



2) Métodos que expresan el sistema de ecuaciones en las variables (ξ,η) del dominio base, cuya resolución nos da directamente

$x = x(\xi, \eta), y = y(\xi, \eta)$ siendo el sistema desacoplado y lineal .

En los métodos del primer apartado se suele utilizar generalmente en el sistema métodos elípticos o de uso del operador de Laplace por sus propiedades regularizantes. A fin de mejorar la forma de las mallas en zonas fuertemente no convexas propone un método *Doursat–Perronne*(1989).

Los métodos del segundo apartado, más o menos empíricos y de justificación teórica dificultosa, no garantizan mallas aceptables en $\partial\Omega$ con cavidades pronunciadas. Una alternativa suele ser tratar de introducir en el sistema términos correctores para permitir mallados aceptables en dominios no convexos.

A efectos de que el mallado en Ω tenga ciertas propiedades se utilizan sistemas no homogéneos, por ejemplo, propiedades relativas a la densidad o a ortogonalidad de mallas. Así, es de interés en la discretización de determinados problemas de la Mecánica de Fluidos la construcción de mallados ortogonales, y actualmente se investiga en sistemas de generación de mallas que son definidas mediante operadores diferenciales hiperbólicos, parabólicos, etc.

3.4.3. MÉTODOS DE DESCOMPOSICIÓN EN BLOQUES.

Representa una alternativa para permitir generar la malla en dominios geoméricamente complejos donde los métodos anteriores no dan mallas aceptables. Asimismo, es de interés en la resolución del problema a tratar informáticamente en paralelo.

Son introducidos y estudiados en [Pierrot y otros, 1979],[Thompson,1987],[Fritz,1987],[George,1989].

Se basan en descomponer groseramente el dominio base $\hat{\Omega}$ en bloques topológicos elementales (triángulos, cuadriláteros, ...), pudiéndose mallar cada bloque por un método de generación distinto y luego mediante ensamble de los mallados de cada bloque construir el mallado final en $\hat{\Omega}$ y llevarlo al dominio real Ω por traslación.

En esta técnica las dificultades en su implementación radican en la repercusión que tiene la elección de los bloques y la elección de mallados para obtener una buena malla final así como la unión entre bloques implica una problemática en las interfases de conexión. Se facilita esta conexión enumerando los vértices en el recubrimiento o mallado de referencia $\hat{\Omega}$.

Estos métodos pueden ser híbridos en cuanto a permitir posibilidades de que los mallados de cada bloque pueden ser formados por elementos de distinto tipo.

3.4.4. MÉTODOS DE SUPERPOSICIÓN-DEFORMACIÓN DE RETÍCULAS.

En este método se recubre el dominio Ω mediante un reticulado fijado a partir de los puntos del contorno. Este reticulado se realiza mediante un árbol cuaternario en 2-D (4 "hijos" por "padre"), aplicable a 3-D con árbol octal.

Estos métodos se estudian en [Cheng,1988],[Shephar,1988].

A partir de las retículas, éstas se subdividen en triángulos tratándose de evitar situaciones degeneradas que darían mallados no conformes.

Los algoritmos basados en estas técnicas son implementados considerando una extensa lista de situaciones y su proceder para eliminar construc-

ciones de mallados no aceptables. Estos métodos conducen a discretizaciones muy densas en los contornos, si estos son irregulares, y su aplicabilidad general corresponde a contornos de formas alargadas, suaves y en el objetivo de obtención de mallados relativamente uniformes siendo de interés su uso cuando se desea controlar la posición de un punto, arista o cara.

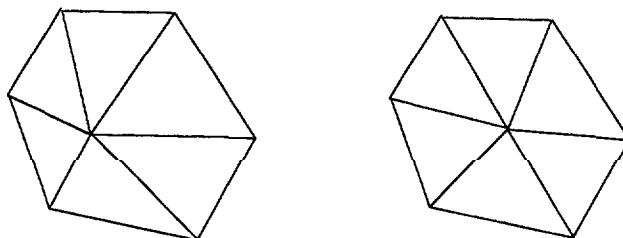
Estos métodos podrían utilizarse como soporte de uso en métodos de mallados frontales o de Delaunay.

3.5. TÉCNICAS DE REGULARIZACIÓN DE MALLADOS.

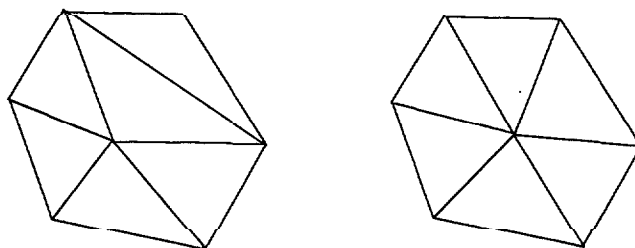
Una vez generada una malla triangular por alguno de los criterios expuestos, se ha de mejorar su funcionalidad para su utilización como malla de partida en el método de los elementos finitos, es decir, que los triángulos de la malla sean los elementos finitos.

En base a esto se atienden a las siguientes condiciones:

a) Que los lados h_K de los elementos adyacentes no difieran excesivamente.



b) Que los elementos no sean obtusángulos



c) Que los ángulos interiores de los triángulos tengan un mínimo no cercano a cero (para la utilización de un elemento K de T_K como elemento finito triangular se ha considerado que un ángulo agudo no debe ser inferior a aproximadamente 18°).

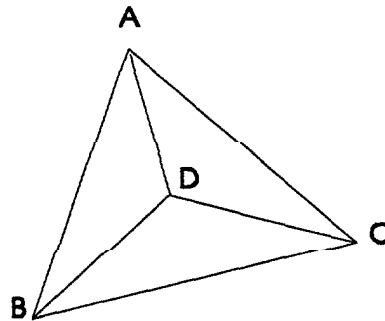
Para conseguir este propósito se necesitan realizar una serie de operaciones con el fin de conseguir una malla más regular que las obtenidas,

atendiendo al criterio de que un punto interior al dominio esté conectado a seis nodos colaterales, para conseguir elementos los más equiláteros posible, siempre que el tamaño del elemento no varíe considerablemente.

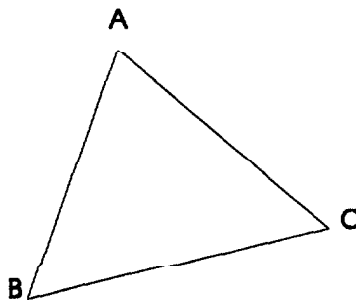
Existen varias operaciones que intentan conseguir este objetivo, como son:

1. Eliminación de nodos interiores conectados a tres nodos colaterales.

En la figura se puede ver este caso:

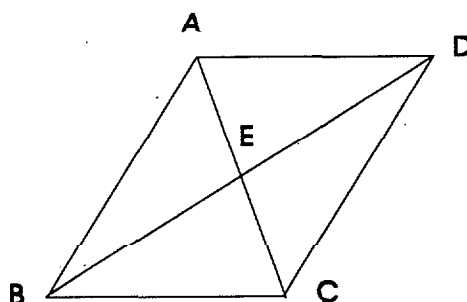


Dado que el ideal, como se ha mencionado anteriormente, es que en un punto coincidan seis aristas o caras, se elimina dicho punto sustituyéndose los tres elementos conectados en ese punto por uno solo formado por los tres puntos colaterales.

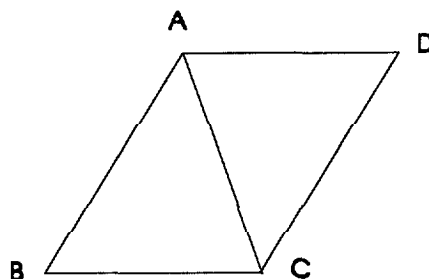


2. Reestructuración del mallado local formado por cuatro elementos adyacentes con un punto común.

En este caso coinciden en un punto cuatro aristas o caras como se ve en la figura:

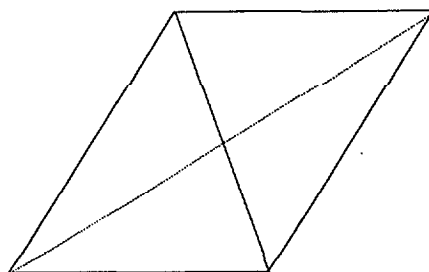


Para mejorar el mallado se elimina el punto y en el cuadrilátero que queda se traza una de las diagonales, de esta manera se obtienen dos elementos triangulares en vez de los cuatro que existían.



3. Permutación de diagonales.

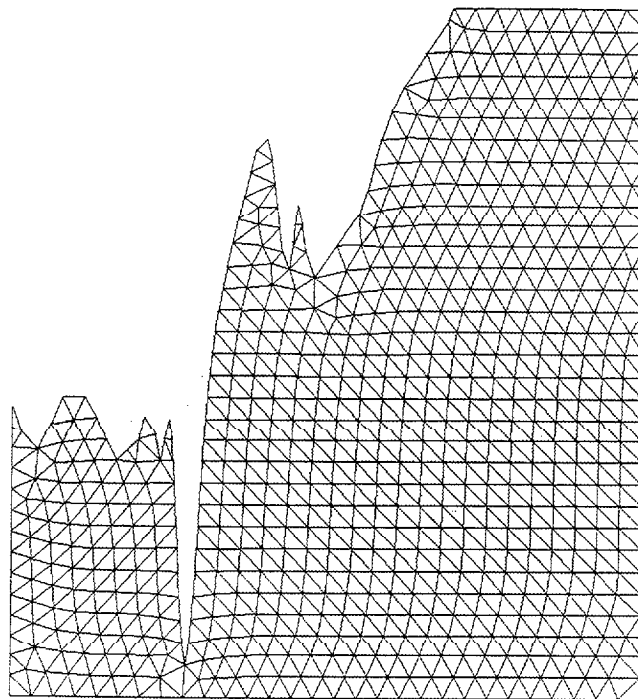
Dos triángulos con una arista o cara común forma un cuadrilátero cuya diagonal es la arista común. Se eliminaría la diagonal existente y se elegiría la otra diagonal del cuadrilátero si con ello se mejora la conectividad del mallado o los ángulos de los elementos.



Debido a que se debe realizar la búsqueda de todas las conectividades posibles, este proceso puede ser de un costo grande en tiempo de *CPU*, respecto al tiempo total de obtención de la malla, por lo cual se debe dejar libre el criterio de realizarlo al usuario.

4. Suavizado de la malla.

Una vez realizada la regularización geométrica se aplica una técnica de allanado de la malla, que consiste en mover las coordenadas de los puntos interiores al dominio, de tal forma que los elementos triangulares que tienen un vértice común sean lo más equiláteros posible.



Se ha utilizado el método denominado alisado laplaciano. Esta técnica debe su nombre al hecho de que el movimiento de un punto interior se puede obtener como una aproximación por diferencias finitas de la ecuación de Laplace.

La aplicación se resuelve colocando un punto interior a una poligonal que lo envuelve en su centro geométrico. Este movimiento de puntos se hace solamente para los puntos interiores al dominio, con el fin de no modificar la forma de los contornos que lo definen. Este proceso se suele aplicar varias veces a los puntos y cambiando alternativamente el orden, ya que al moverse éstos, hace variar la poligonal que los envuelve.

Con ello, se consiguen posiciones de los puntos interiores al dominio que dan una mayor calidad de la malla obtenida con la misma cantidad de puntos interiores inicialmente generados.

Se suele utilizar la expresión siguiente:

$$p = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \alpha_j p_{Kj}$$

Donde n es el número de puntos conectados al punto p , siendo p_{Kj} los puntos conectados a p y α_j unos parámetros que cumplen:

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$$

Una variante consiste en utilizar un nuevo término en la fórmula con un parámetro de relajación ω :

$$p^{m+1} = (1-\omega)p^m + \frac{\omega}{n} \sum_{j=1}^n \alpha_j p_{Kj}^m$$

El coste computacional no es muy grande respecto al total, aunque haya que buscar los puntos que forman la poligonal que encierra a un punto interior.

CAPÍTULO 4: CONTRIBUCIÓN A LA
APROXIMACIÓN DE CONTORNOS EN 2-D
Y A LA DISCRETIZACIÓN DE DOMINIOS
NO-CONVEXOS POR NUBE DE PUNTOS.

4.1. APROXIMACIÓN DE CONTORNOS BIDIMENSIONALES.

4.1.1. INTRODUCCIÓN

Los contornos curvos, definidos inicialmente por un número de puntos n , se aproximarán por tramos mediante funciones splines cúbicos.

La aproximación Spline cúbica es la función interpolante de mínima curvatura, relativo a minimización en L^2 (mínimos cuadrados). Por otro lado, al ser polinomios de grado bajo con continuidad en las segundas derivadas, da lugar físicamente a curvas suaves.

Dado que las dimensiones de un dominio en estudio pueden ser de gran magnitud, conviene realizar un cambio de escala, con el fin de que el comportamiento de los polinomios definidos por la Spline cúbica sea satisfactorio. En nuestro caso, hemos reducido cualquier dominio al:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq x \leq 1, 0 < y < 1\}$$

4.1.2. SPLINE CÚBICA.

Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ los puntos que definen el contorno y se pretende interpolar mediante un spline cúbico $S(x)$. Consideremos $h_i = x_{i+1} - x_i$, con $i = 1, 2, \dots, n-1$, y $s_i(x)$ la restricción del spline cúbico $S(x)$ al intervalo $[x_i, x_{i+1}]$.

Como $s_i(x)$ es un polinomio cúbico, su derivada segunda $s_i''(x)$ es una función lineal. Si llamamos z_i y z_{i+1} a los valores de $s_i''(x)$ en x_i y x_{i+1} , respectivamente, se tiene,

$$s_i''(x) = z_{i+1} \frac{x - x_i}{h_i} + z_i \frac{x_{i+1} - x}{h_i}$$

Integrando dos veces e imponiendo la condición de que la spline pase por los puntos considerados, es decir, $s_i(x_i) = y_i$, $s_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$, se deduce

$$s_i(x) = \frac{z_{i+1}}{6h_i} (x - x_i)^3 + \frac{z_i}{6h_i} (x_{i+1} - x)^3 + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{z_{i+1}h_i}{6} \right) (x - x_i) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{z_i h_i}{6} \right) (x_{i+1} - x)$$

expresión que garantiza la continuidad de $S(x)$ y representa la función interpoladora en los puntos soportes.

Para que $S'(x)$ sea continua en (x_1, x_n) , debe verificarse,

$$s'_{i-1}(x_i) = s'_i(x_i), \quad i = 2, 3, \dots, n-1$$

Derivando $s_i(x)$ y evaluando para $x = x_i$ se obtiene:

$$s'_i(x_i) = -\frac{h_i}{3} z_i - \frac{h_i}{6} z_{i+1} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}$$

y para $s'_{i-1}(x)$ en $x = x_i$,

$$s'_{i-1}(x_i) = -\frac{h_{i-1}}{6} z_{i-1} + \frac{h_{i-1}}{3} z_i + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}$$

Igualando y simplificando resultan $n-2$ ecuaciones:

La continuidad de $S''(x)$ en los puntos (x_i, y_i) para $i = 2, 3, \dots, n-1$,

$$h_{i-1} z_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i) z_i + h_i z_{i+1} = \frac{6}{h_i} (y_{i+1} - y_i) - \frac{6}{h_{i-1}} (y_i - y_{i-1})$$

$$i = 2, 3, \dots, n-1$$

está asegurada debido a la forma en que se ha construido inicialmente s_i'' :

$$s''_{i-1}(x_i) = s''_i(x_i) = z_i$$

4.2. CONDICIONES EN LOS EXTREMOS.

Las restantes ecuaciones se obtienen a partir de las condiciones que se impongan en los extremos x_1 y x_n . Aunque a continuación se estudia conjuntamente el mismo tipo de condición en ambos extremos, en la práctica se ha considerado la posibilidad de resolver el problema con diferentes condiciones en cada uno de ellos.

4.2.1. CONDICIONES EN DERIVADA SEGUNDA.

Fijando los valores de las derivadas segundas z_1 y z_n , sustituimos dichas incógnitas en el sistema lineal dado, resolvemos el mismo mediante un método directo (en nuestro caso hemos utilizado el de Gauss) para obtener el resto de las z_i , con $i=2,3,\dots,n-1$.

4.2.2. CONDICIÓN EN DERIVADA PRIMERA FINITA.

Si fijamos las derivadas primeras en los extremos, las ecuaciones resultantes son:

$$-\frac{h_1}{3} z_1 - \frac{h_1}{6} z_2 = s'(x_1) - \frac{y_2 - y_1}{h_1}$$

$$\frac{h_{n-1}}{6} z_{n-1} + \frac{h_{n-1}}{3} z_n = s'(x_n) - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}}$$

Siempre y cuando los valores de $S'(x_1)$ y $S'(x_n)$ estén acotados.

Para la resolución del sistema, se ha utilizado el mismo método que en el caso anterior.

4.2.3. CONDICIÓN EN DERIVADA PRIMERA INFINITA.

Si la condición en los extremos es de tangente vertical (derivada primera infinita), aproximaremos el primer y último tramo de la spline mediante un polinomio cúbico en la variable y , de tal forma que la spline siga siendo de clase C^2 en $[x_1, x_n]$. Esta modificación permite aproximar la tangente vertical (horizontal para el polinomio en y) que resultaba imposible con un polinomio en x .

La expresión de este polinomio cúbico para el primer tramo tendrá la misma forma que la expresada anteriormente:

$$s_1(y) = \frac{z'_2}{6(y_2 - y_1)}(y - y_1)^3 + \frac{z'_1}{6(y_2 - y_1)}(y_2 - y)^3 + \\ + \left(\frac{x_2}{(y_2 - y_1)} - \frac{z'_2(y_2 - y_1)}{6} \right)(y - y_1) + \left(\frac{x_1}{(y_2 - y_1)} - \frac{z'_1(y_2 - y_1)}{6} \right)(y_2 - y)$$

Para el último tramo, el polinomio resulta:

$$s_{n-1}(y) = \frac{z'_n}{6(y_n - y_{n-1})}(y - y_{n-1})^3 + \frac{z'_{n-1}}{6(y_n - y_{n-1})}(y_n - y)^3 + \\ + \left(\frac{x_n}{(y_n - y_{n-1})} - \frac{z'_n(y_n - y_{n-1})}{6} \right)(y - y_{n-1}) + \left(\frac{x_{n-1}}{(y_n - y_{n-1})} - \frac{z'_{n-1}(y_n - y_{n-1})}{6} \right)(y_n - y)$$

Siendo $z'_i = S''(y_i)$, y por tanto la continuidad de la spline queda asegurada en y_2 e y_{n-1} .

La condición de continuidad de la primera derivada de la spline es idéntica a la vista anteriormente, variando únicamente en y_2 e y_{n-1} donde

varía debido al ensamblaje de un polinomio cúbico en x con otro en y . Para el punto (x_2, y_2) la ecuación que asegura la continuidad de $S'(x)$ es:

$$s'_2(x_2) = \frac{1}{s'_1(y_2)}$$

Sustituyendo las expresiones de dichas derivadas,

$$s'_2(x_2) = -\frac{h_2}{3} z_2 - \frac{h_2}{6} z_3 + \frac{y_3 - y_2}{h_2}$$

$$s'_1(y_2) = \frac{y_2 - y_1}{6} z'_1 + \frac{y_2 - y_1}{3} z'_2 + \frac{h_1}{y_2 - y_1}$$

Se tiene:

$$-\frac{h_2}{3} z_2 - \frac{h_2}{6} z_3 = \frac{1}{\frac{y_2 - y_1}{6} z'_1 + \frac{y_2 - y_1}{3} z'_2 + \frac{h_1}{y_2 - y_1}} - \frac{y_3 - y_2}{h_2}$$

De igual forma para el punto (x_{n-1}, y_{n-1}) se tiene:

$$-\frac{h_{n-2}}{6} z_{n-2} - \frac{h_{n-2}}{3} z_{n-1} = \frac{1}{-\frac{y_n - y_{n-1}}{3} z'_{n-1} - \frac{y_n - y_{n-1}}{6} z'_n + \frac{h_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}}$$

La continuidad en la segunda derivada se obtiene implícitamente como en los casos anteriores de la propia construcción de la spline, excepto en los puntos (x_2, y_2) y (x_{n-1}, y_{n-1}) , donde consideraremos:

$$s_1''(y_2) = -\frac{s_2''(x_2)}{(s_2'(x_2))^3}$$

$$s_{n-1}''(y_{n-1}) = -\frac{s_{n-2}''(x_{n-1})}{(s_{n-2}'(x_{n-1}))^3}$$

Sustituyendo las expresiones de las derivadas se obtiene:

$$z_2' = -\frac{z_2}{\left(-\frac{h_2}{3}z_2 - \frac{h_2}{6}z_3 + \frac{y_3 - y_2}{h_2}\right)^3}$$

$$z_{n-1}' = -\frac{z_{n-1}}{\left(\frac{h_{n-2}}{6}z_{n-2} + \frac{h_{n-2}}{3}z_{n-1} + \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}}\right)^3}$$

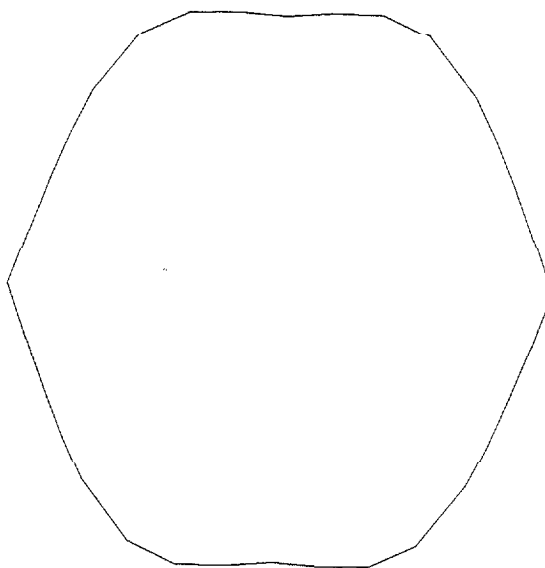
Por último, de la condición tangente vertical en los extremos de la spline, es decir, $s_1'(x_1) = 0$ y $s_{n-1}'(x_n) = 0$, se obtiene:

$$-\frac{y_2 - y_1}{3}z_1' = \frac{y_2 - y_1}{6}z_2' - \frac{h_1}{y_2 - y_1}$$

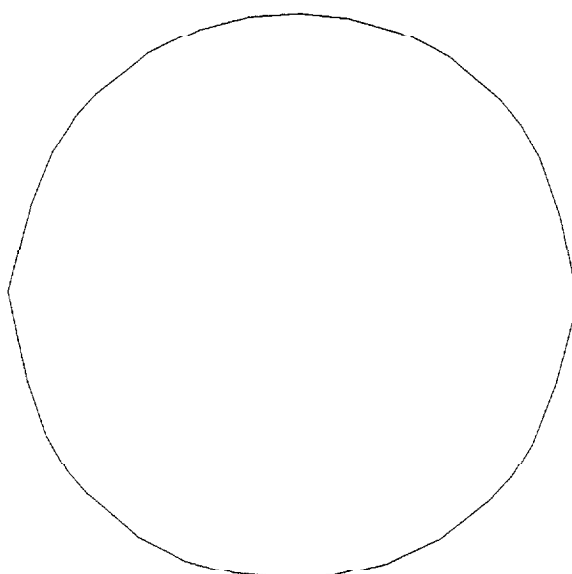
$$\frac{y_n - y_{n-1}}{3}z_n' = -\frac{y_n - y_{n-1}}{6}z_{n-1}' - \frac{h_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$$

En este caso el sistema resultante es no lineal y se ha aplicado para su

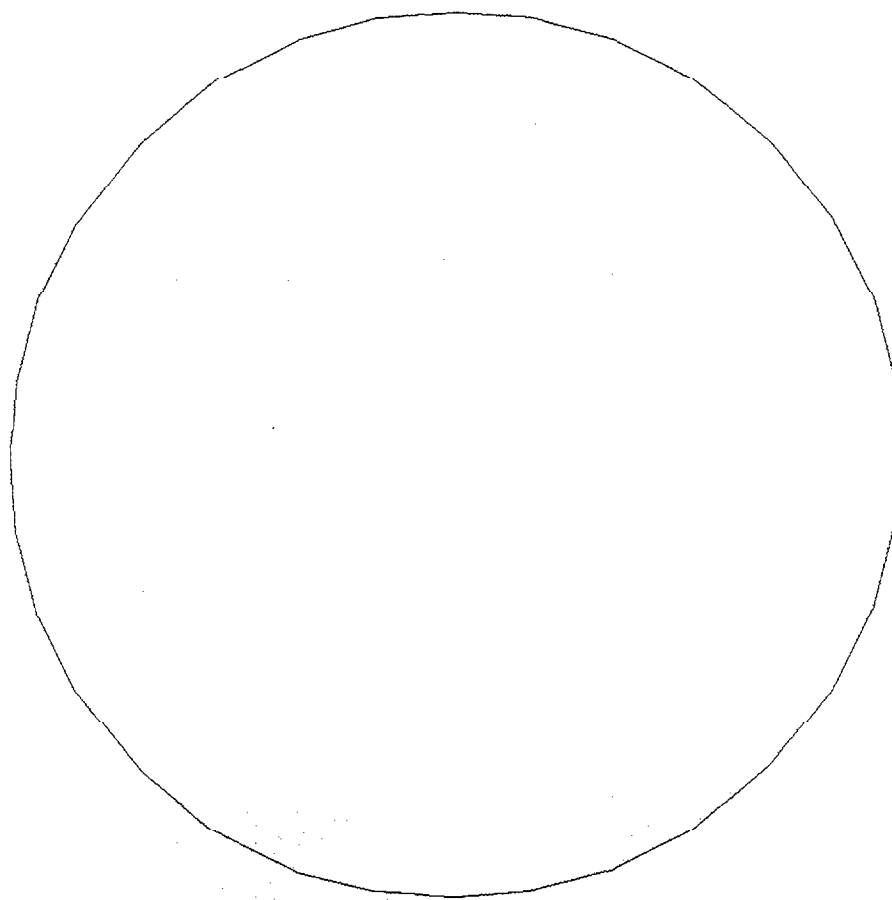
resolución el método de Newton, con el que se han obtenidos resultados satisfactorios.



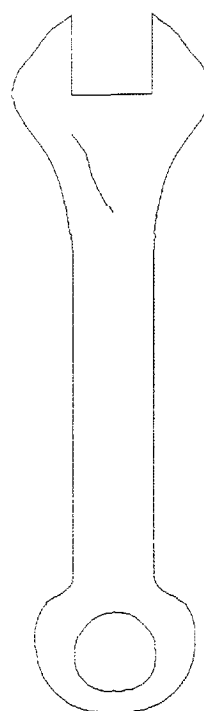
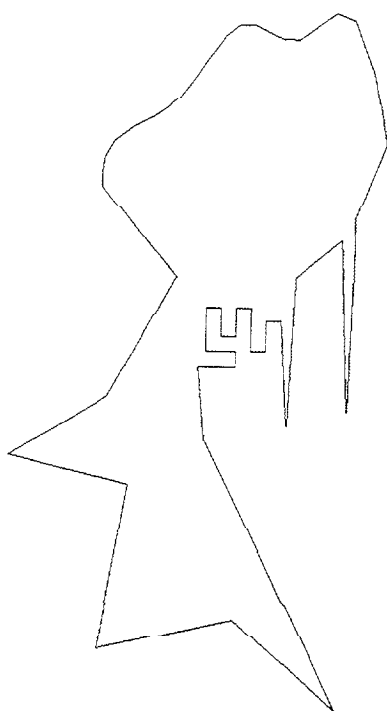
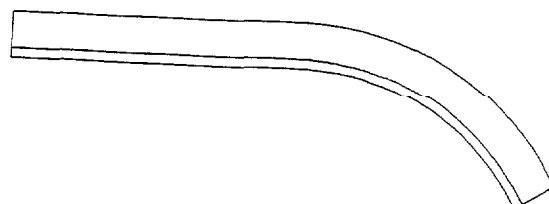
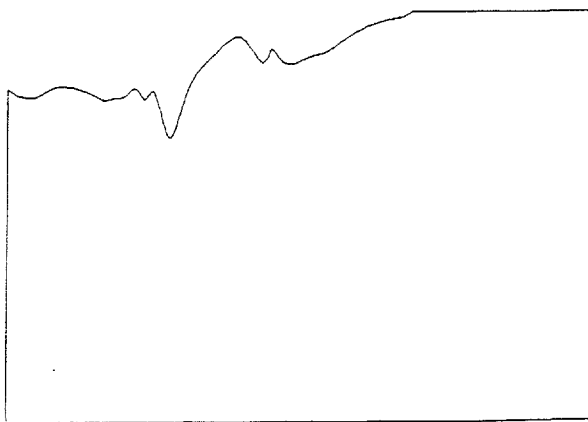
Circunferencia aproximada mediante "splines" cúbicas con condiciones naturales en los extremos, a partir de ocho puntos conocidos.



Circunferencia aproximada mediante "splines" cúbicas con condición en los extremos de derivada 1ª alta, a partir de ocho puntos conocidos.



Circunferencia aproximada mediante "splines" cúbicas con condición en los extremos de derivada 1ª infinita, a partir de ocho puntos conocidos.



Ejemplos de aproximación de contorno mediante tramos rectos y curvos
("spline" cúbica).

4.3. CONTRIBUCIÓN A LA DISCRETIZACIÓN DE CONTORNOS DE DOMINIOS PLANOS.

4.3.1. INTRODUCCIÓN

En la discretización de los contornos que definen al dominio hay que tener en cuenta lo siguiente:

a) Contornos rectos:

En este caso, el algoritmo requiere como datos los puntos que definen al tramo y el tamaño de discretización, teniéndose en cuenta que si el tramo sólo pertenece a una región, el tamaño de discretización será el de la región, y si pertenece a dos regiones, se tomará como tamaño de discretización la media aritmética de los tamaños de las regiones a que pertenece.

b) Contornos curvos:

En este caso, el cálculo de un punto contiguo a uno dado no se realiza de una forma lineal, con lo cual tiene que resolverse la ecuación:

$$\int_{x_i}^{x_j} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = L$$

Donde L es la distancia de discretización, (x_i, y_i) el punto conocido y (x_j, y_j) el que queremos obtener sobre el tramo de curva $y = f(x)$.

Los contornos curvos han sido aproximados por Spline cúbica y se propone una solución a la discretización utilizando el método de Newton-Raphson para la resolución de la ecuación obtenida.

Al hacer la discretización de un tramo de un contorno, hay que tener

en cuenta si pertenece a dos regiones, ya que al discretizarse por primera vez se han generado los puntos interiores del tramo que raramente coincidirían con todas sus cifras exactas cuando se discretizará por pertenecer a otra región. Esto se resuelve teniendo en cuenta al discretizar un tramo si pertenece a una región ya discretizada. Si esto ocurriese dicho tramo no se discretizaría tomándose los mismos puntos obtenidos en su primera discretización.

4.3.2. DISCRETIZACIÓN DE CONTORNOS RECTOS.

Supongamos que dados dos puntos consecutivos (x_i, y_i) y (x_{i+1}, y_{i+1}) de un contorno se quiere discretizar de forma que el tramo que los une sea recto. Dado que el grado de discretización del contorno está impuesto por el usuario, atendiendo a criterios de densidad de mallas no constante debido a singularidades de la solución, etc., el algoritmo realiza el cálculo del número de puntos a introducir entre (x_i, y_i) y (x_{i+1}, y_{i+1}) .

Una vez conocido el número de puntos y los incrementos de Δx_i e Δy_i , cada punto es introducido atendiendo a las fórmulas:

$$x_j = x_i + \Delta x_i \quad y_j = y_i + \Delta y_i$$

Donde (x_j, y_j) representa el punto colateral al (x_i, y_i) , este nuevo puntos (x_j, y_j) pasaría a ser el nuevo (x_i, y_i) repitiéndose el algoritmo hasta conseguir el número de puntos a introducir entre los dos que definen al tramo recto.

4.3.3. DISCRETIZACIÓN DE CONTORNOS CURVOS.

Planteamiento del problema: Supongamos que dados dos puntos consecutivos (x_i, y_i) y (x_{i+1}, y_{i+1}) de un contorno curvo, se ha aproximado el

tramo que los une mediante una spline cúbica del tipo analizado en el apartado anterior:

El grado de discretización del contorno vendrá dado por una función densidad que el usuario puede imponer a priori, dependiendo de la forma del dominio, zonas donde se espera una mayor singularidad de la solución, etc.; o bien, puede ser obtenida a partir de una solución aproximada inicial dada.

En cualquier caso, si deseamos obtener el valor $x_{j+\theta}$, con $0 < \theta < 1$, tal que la longitud del tramo de curva entre x_j y $x_{j+\theta}$ sea un valor l_j determinado a partir de la función densidad, se plantea el siguiente problema:

$$\int_{x_j}^{x_{j+\theta}} \sqrt{1 + [s'_i(x)]^2} dx = l_j$$

Es decir, resolver una ecuación en $x_{j+\theta}$ de la forma:

$$F(x_{j+\theta}) = 0$$

Siendo:

$$F(x_{j+\theta}) = \int_{x_j}^{x_{j+\theta}} \sqrt{1 + [s'_i(x)]^2} dx - l_j$$

4.3.4. UNA SOLUCIÓN A LA DISCRETIZACIÓN DE UN TRAMO SPLINE.

Para la resolución de la ecuación, proponemos el método de Newton-Raphson:

$$x_{j+\theta}^{n+1} = x_{j+\theta}^n - \frac{F(x_{j+\theta}^n)}{F'(x_{j+\theta}^n)}$$

Entonces, conociendo el valor de la derivada de $F(x_{j+\theta})$:

$$F'(x_{j+\theta}) = \sqrt{1 + [s'_i(x_{j+\theta})]^2}$$

La expresión del algoritmo de Newton-Raphson para nuestro problema resulta:

$$x_{j+\theta}^{n+1} = x_{j+\theta}^n - \frac{\int_{x_j}^{x_{j+\theta}^n} \sqrt{1 + [s'_i(x)]^2} - l_i}{\sqrt{1 + [s'_i(x_{j+\theta}^n)]^2}}$$

En el caso de trabajar con polinomios $s_i(y)$, el problema se resuelve de la misma forma, siendo en este caso la incógnita buscada $y_{i+\theta}$.

4.4. GENERACIÓN DE NUBE DE PUNTOS INTERIORES

4.4.1 INTRODUCCIÓN

Una vez dividido el dominio en regiones y discretizados cada contorno siguiendo los algoritmos expuestos anteriormente, se crea la nube de puntos interiores a cada región mediante un criterio no aleatorio y ligado a densidades de discretización que se requieran, de tal forma que los triángulos cumplan las condiciones mínimas exigidas

Los aspectos fundamentales a tener en cuenta en la creación de la nube de puntos son:

a) Distribución de puntos lo más equidistante posible para un nivel de discretización dado.

b) Regularización de dicha nube de puntos.

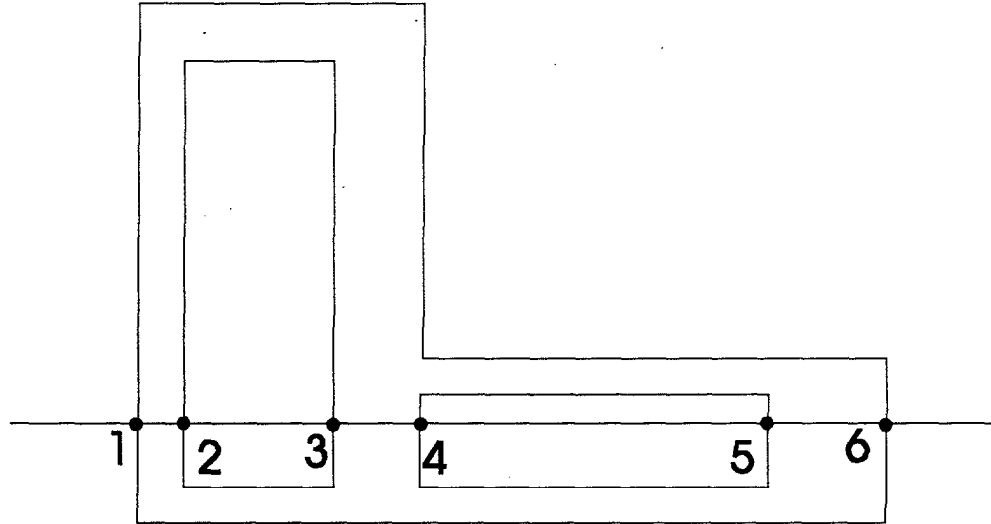
Para la generación se utiliza el método propuesto por SH LO modificado de la forma siguiente:

1) No se distribuyen las líneas imaginarias horizontales entre el máximo y el mínimo del contorno exterior de la región.

Dado que el dominio esta compuesto por distintos contornos, el exterior y los interiores (agujeros), se calculan los máximos y mínimos de cada uno de los contornos y una vez ordenados de menor a mayor se trazan líneas horizontales imaginarias equidistantes entre cada par de puntos consecutivos de la tabla de máximos y mínimos ordenados.

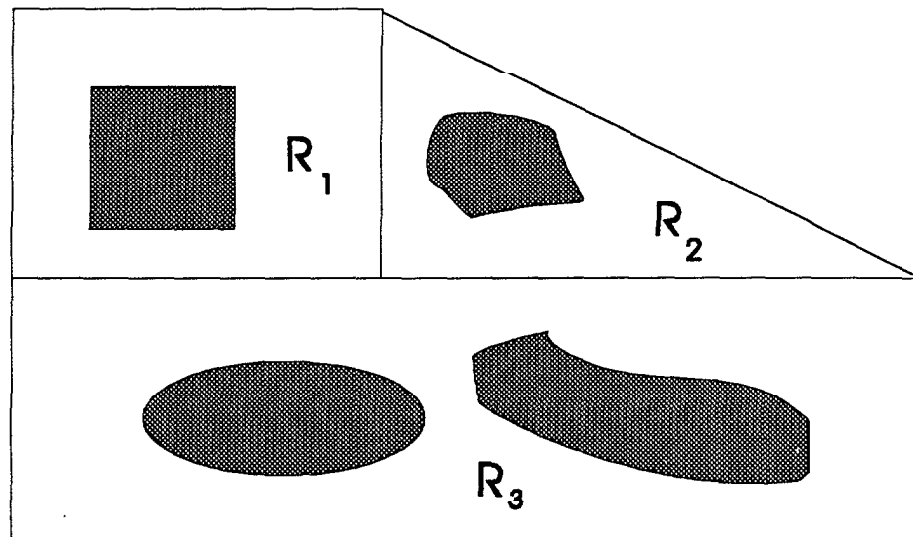
2) Dada una línea imaginaria, S.H. LO propone que ésta esté obligada

a que el número de cortes con contornos del dominio sea par, lo cual no siempre ocurre. Dicha técnica es mejorada con un algoritmo que se expondrá posteriormente.



4.4.2 FIJACIÓN DEL TAMAÑO DE TRIÁNGULOS POR REGIONES.

Supongamos que tenemos tres regiones para el dominio de la figura:



Cada región puede tener el mismo tamaño de triángulo, en este caso se han diferenciado las regiones por posibles motivos de estudio del dominio como por ejemplo distintos materiales, querer estudiar lo que ocurre en las

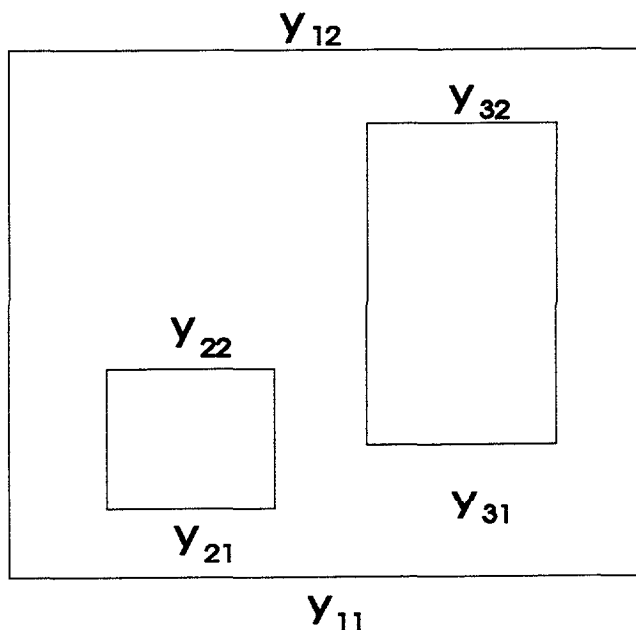
líneas comunes a dos regiones, existencias de cargas en dichas líneas etc.

En caso de que el tamaño de triángulo de cada región sea distinto, el de una región y su contigua no debe diferir en mas de un 50%. En la discretización de los contornos exteriores de cada región se tendrá en cuenta que los lados comunes a dos regiones tomarán como densidad de discretización la media aritmética de cada una de las regiones para conseguir que en las zonas comunes los triángulos no degeneren.

4.4.3. CÁLCULO DE LA NUBE INTERNA DE PUNTOS.

Una vez conocido el tamaño de elemento de cada región se procede al cálculo de la nube interna de puntos de cada una de ellas adoptando el siguiente criterio:

Obtención de la tabla que contiene ordenados de menor a mayor los máximos y mínimos de todos los contornos que forman la región.



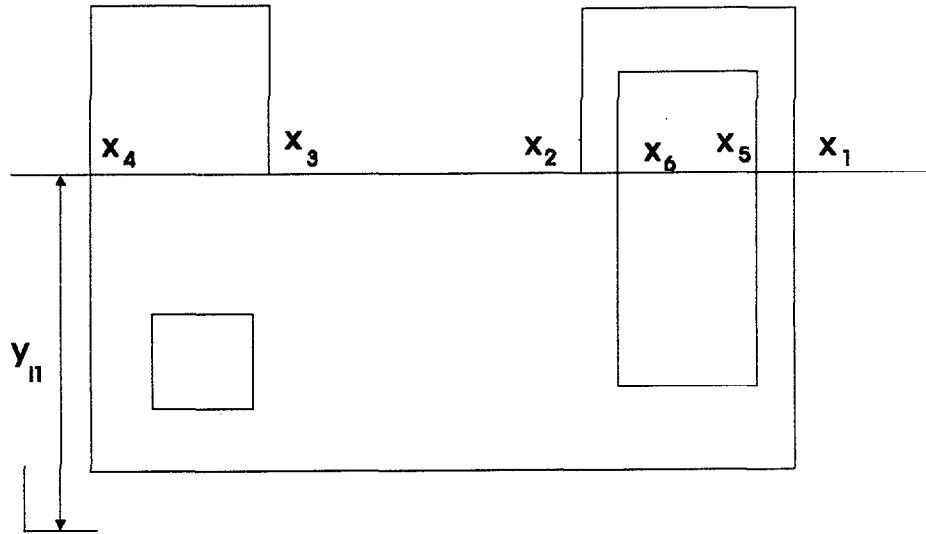
y_{ij} representa, si $j=1$ el mínimo del contorno i , y si $j=2$, el máximo del

contorno i .

La tabla obtenida será:

$$[y_{11}, y_{21}, y_{31}, y_{22}, y_{32}, y_{12}]$$

Trazado de líneas imaginarias distanciadas según el nivel de discretización de la región entre dos puntos consecutivos de la tabla.



Para el cálculo de y_i se procede de la siguiente forma:

- 1) Cálculo del número de líneas imaginarias (INUM).

$$INUM = \frac{y_{i,tabla} - y_{i+1,tabla}}{T_{KR}}$$

T_{KR} es el tamaño de elemento en la región R

- 2) Optimización del número de líneas imaginarias:

$$INUM = E(INUM + 0.5)$$

- 3) Cálculo de la distancia entre dos líneas imaginarias:

$$y_{INUM} = \frac{y_{i,tabla} - y_{i+1,tabla}}{INUM}$$

4.4.3.1. CÁLCULO DE INTERSECCIONES CON CONTORNOS.

Para una línea imaginaria $y=y_i$ se estudia con que contornos intersecciona, calculándose dichas intersecciones y ordenándose éstas de menor a mayor, sin tener en cuenta si el número de intersecciones es par o impar (S.H. LO sólo crea una tabla de intersecciones cuando el número de estas es par)

Para el cálculo de los contornos que interseccionan a $y=y_i$ se utilizan los máximos y mínimos de cada contorno, si y_i está entre el máximo y el mínimo de un contorno, tiene al menos con él una intersección:

Si $y_{min,contorno} < y_i < y_{max,contorno} \Rightarrow y_i$ corta al contorno.

Dado que en la tabla de puntos que definen a un contorno, estos puntos están ordenados según el sentido contrario a las agujas del reloj, las intersecciones calculadas proporcionan una tabla que se ordena en sentido creciente de abscisas.

La tabla ordenada para el ejemplo sería:

$$[x_4, x_3, x_2, x_6, x_5, x_1]$$

4.4.3.2. CÁLCULO DE TRAMOS EN QUE HAY QUE DISCRETIZAR.

Para un conjunto ordenado de intersecciones de una línea imaginaria $y=y_i$, se analiza si hay que discretizar entre dos puntos consecutivos de la tabla.

Para el ejemplo, habría que discretizar entre x_4 y x_3 , entre x_2 y x_6 y entre x_5 y x_1 , que son zonas pertenecientes al dominio y no hay que discretizar entre x_3 y x_2 (por pertenecer a un contorno y estar ya discretizado) y entre x_6 y x_5 (por ser un agujero del dominio).

Este cálculo se efectúa conforme el siguiente algoritmo:

Dada una tabla de puntos intersección de una línea imaginaria y los contornos que definen el dominio, se le asigna a cada punto un vector determinado por dos puntos del contorno al que pertenece, con el siguiente criterio:

a) Caso en que el punto intersección no pertenezca a los puntos que definen al contorno discretizado:

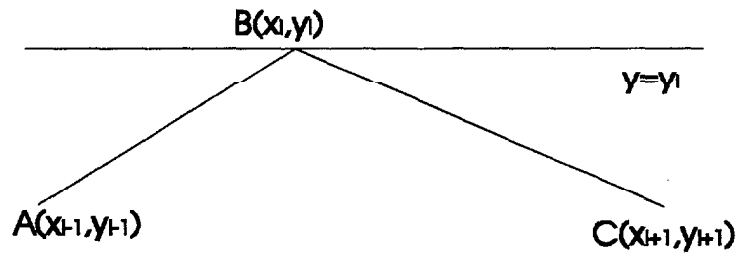
Se calcula la intersección entre la línea imaginaria $y=y_i$ y el contorno.

Dados dos puntos del contorno $A(x_j, y_j)$ y $B(x_{j+1}, y_{j+1})$ la intersección del segmento AB y la línea imaginaria $y=y_i$ viene dada por:

$$x = x_j + \frac{(y_i - y_j)(x_{j+1} - x_j)}{(y_{j+1} - y_j)}$$

El vector asignado al punto intersección será el vector $\vec{AB}$ si el contorno es el exterior al dominio, y el vector $\vec{BA}$, si es un contorno interior.

b) Caso en que el punto intersección sea un punto perteneciente a la discretización de un contorno del dominio.



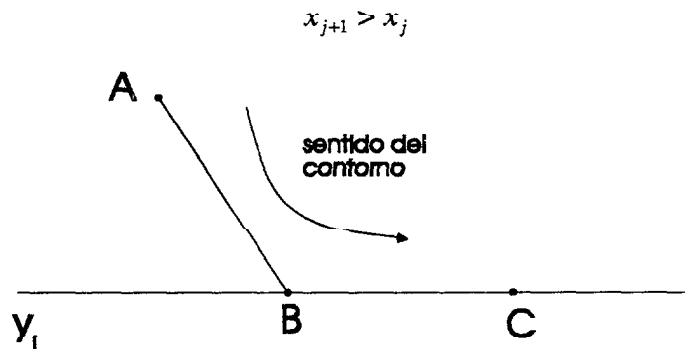
Este punto pertenecerá a dos tramos del contorno, determinados ambos por dos puntos consecutivos, siendo el punto intersección el segundo del primer tramo y el primero del segundo.

Para asignar el vector al punto intersección se estudia todos los casos posibles:

1) Si el punto pertenece a un tramo horizontal del dominio:

$$y_{j+1} = y_j \neq y_{j-1}$$

estando éste limitado por los puntos B y C , y siendo el punto B el anterior a C según abscisas crecientes.

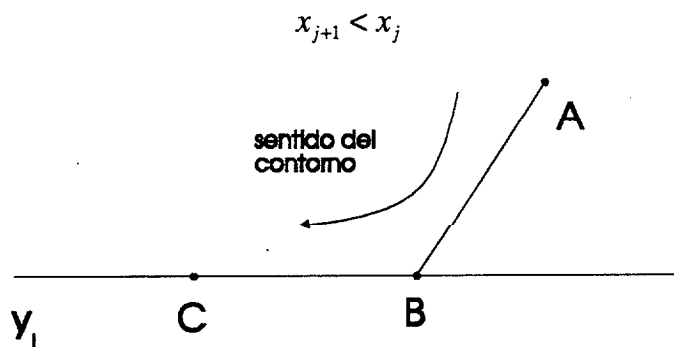


El vector asignado al punto B será el $\vec{BC}$ si el contorno es el exterior al dominio, y el vector $\vec{CB}$ si es un contorno interior.

2) Si el punto pertenece a un tramo horizontal del dominio:

$$y_{j+1} = y_j \neq y_{j-1}$$

estando éste limitado por los puntos B y C y siendo el punto C anterior a B según abscisas crecientes.

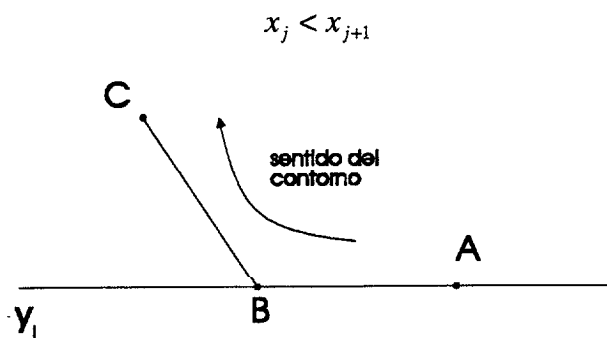


El vector asignado al punto B será el $\vec{AB}$ si el contorno es el exterior al dominio, y el vector $\vec{BA}$ si es un contorno interior.

3) Si el punto pertenece a un tramo horizontal del dominio:

$$y_{j-1} = y_j \neq y_{j+1}$$

estando éste limitado por los puntos A y B , y siendo el punto B anterior a A según abscisas crecientes.

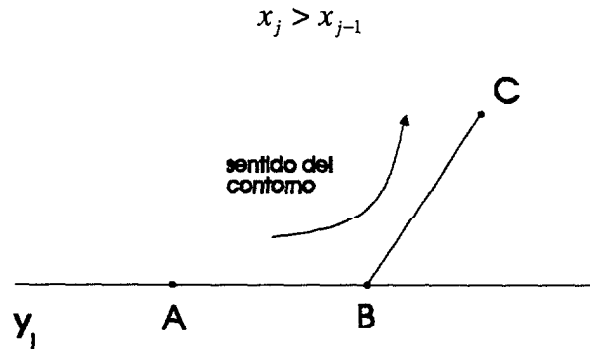


El vector asignado al punto B será el $\vec{AB}$ si el contorno es el exterior al dominio y el vector $\vec{BA}$ si es un contorno interior.

4) Si el punto pertenece a un tramo horizontal del dominio:

$$y_{j-1} = y_j \neq y_{j+1}$$

estando éste limitado por los puntos A y B, y siendo el punto A anterior a B según abscisas crecientes.

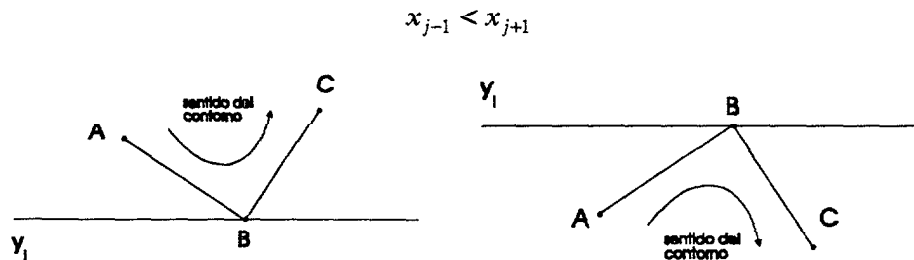


El vector asignado al punto B será el $\vec{BC}$ si el contorno es el exterior al dominio, y el vector $\vec{CB}$ si es un contorno interior.

5) Si el punto no pertenece a un tramo horizontal del dominio:

$$y_{j-1} \neq y_j \neq y_{j+1}$$

estando el punto A anterior al punto C según abscisas crecientes

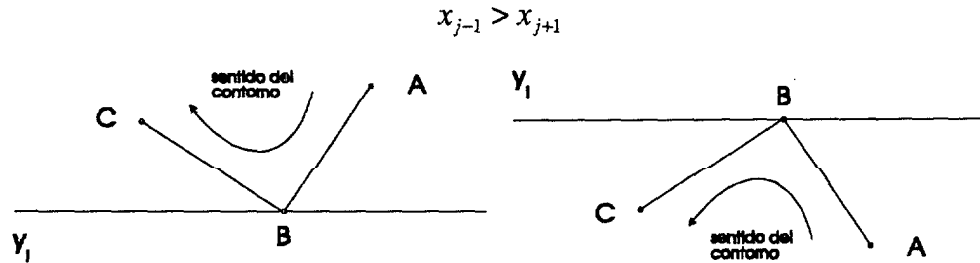


El vector asignado al punto B será el $\vec{BC}$ si el contorno es el exterior al dominio y el vector $\vec{CB}$ si es un contorno interior.

6) Si el punto no pertenece a un tramo horizontal del dominio:

$$y_{j-1} \neq y_j \neq y_{j+1}$$

estando el punto C anterior al punto A según abscisas crecientes



El vector asignado al punto B será el $\vec{AB}$ si el contorno es el exterior al dominio y el vector $\vec{BA}$ si es un contorno interior.

Una vez obtenida una tabla ordenada de menor a mayor de intersecciones de una línea imaginaria $y=y_i$ con los contornos de un dominio, se estudia para todos los posibles pares de puntos consecutivos de la tabla si el segmento que los une pertenece o no al dominio.

Si $A(x_j, y_i)$ y $B(x_{j+1}, y_i)$ son dos puntos consecutivos de la tabla y $\vec{v}$ el vector asociado al punto A, el segmento AB es del dominio si se cumple:

$$1.- \vec{w} = \vec{v} \wedge \vec{AB}$$

2.- AB pertenece al dominio si $\vec{w}$ es negativo

4.4.3.3. DISCRETIZACIÓN DEL TRAMO AB.

Una vez localizados los tramos en los cuales hay que discretizar, se obtienen los puntos de la línea imaginaria que toman parte de la nube interna de puntos con el siguiente esquema:

1) Si x_i y x_{i+1} son puntos que pertenecen a la misma región:

cálculo del número de puntos a introducir teniendo en cuenta el tamaño exigido para la región.

$D = \text{tamaño elemento de la región}$

$$INUM = \frac{(x_i - x_{i+1})}{D}$$

$$INUM = E (INUM + 0.5)$$

$$\Delta x = \frac{(x_i - x_{i+1})}{D}$$

2) Si x_i o x_{i+1} pertenecen a un tramo del contorno común a dos regiones:

a) Cálculo del número de puntos a introducir teniendo en cuenta el tamaño exigido a la región tratada y a la colindante.

$$D = \frac{D_R + D_{R+1}}{2}$$

$$INUM = \frac{(x_i - x_{i+1})}{D}$$

$$INUM = E (INUM + 0.5)$$

$$\Delta x = \frac{(x_i - x_{i+1})}{D}$$

b) Cálculo de las coordenadas de dicho punto de manera proporcional teniendo en cuenta los tamaños exigidos entre las dos regiones.

$$x_K = x_i + K \times \Delta x$$

$$K = 1, 2, \dots, (INUM - 1)$$

4.4.3.4. REGULARIZACIÓN DE LA NUBE DE PUNTOS.

Calculada la nube de puntos interiores de la región se realiza una regularización de todos los puntos internos hallados eliminándose aquellos que se encuentren muy cercanos al contorno, porque estos puntos dan lugar a la generación de triángulos inadmisibles ya sea por su forma geométrica o por destruir el contorno fijado en zonas no convexas.

El punto (x_i, y_i) es eliminado de la nube de puntos generada si:

$$(x_i - p_j) + (y_i - q_j) < \frac{2}{3}D$$

donde (p_j, q_j) es cualquier punto del contorno.

4.5. ALGORITMO UTILIZADO EN LA GENERACIÓN DE PUNTOS INTERIORES AL DOMINIO.

Hacer I=1, número de regiones

- Cálculo del máximo y mínimo de cada contorno
- Ordenar estos máximos y mínimos (tabla 1)

Hacer J=1, tamaño tabla1 menos 1

- Cálculo del número de líneas imaginarias

Hacer K=1, número de líneas imaginarias

- Hallar con que contornos intersecciona
- Cálculo de las intersecciones
- Ordenar de menor a mayor según x las intersección (tabla 2)

Hacer L01, tamaño tabla 2 menos 1

- Cálculo si es tramo a discretizar o no

Si es tramo a discretizar

- Cálculo del número de puntos
- Cálculo de sus coordenadas
- Cálculo de aceptación de los puntos

Fin Si

Fin Todos Hacer

CAPÍTULO 5: CONTRIBUCIÓN A LA
TRIANGULACIÓN DE DELAUNAY Y
MÉTODO DE AVANCE FRONTAL EN
DOMINIOS PLANOS NO-CONVEXOS.

5.1. UTILIZACIÓN DE LA TRIANGULACIÓN DE DELAUNAY PARA DOMINIOS PLANOS NO CONVEXOS.

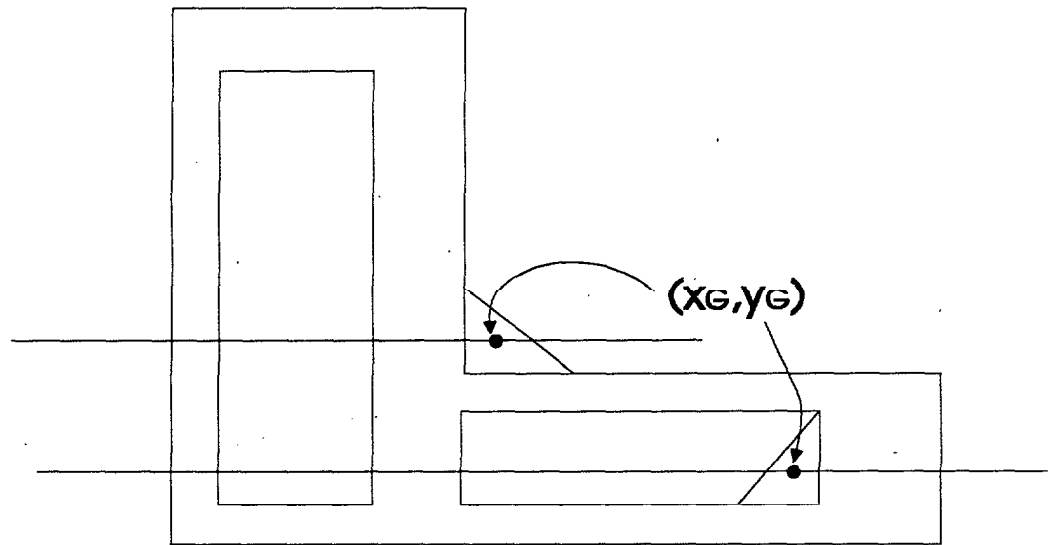
El algoritmo descrito anteriormente, aunque trivial, no siempre consigue triangulaciones aceptables para su utilización en el método de los elementos finitos, ya que en algunos casos producen elementos no admisibles o que modifican la forma del dominio.

Se ha introducido algunas modificaciones al algoritmo propuesto, resultando éste de la siguiente forma:

- 1) Formación de un polígono inicial que contenga a todos los puntos.
- 2) Utilizar el algoritmo de Delaunay para triangular todos los puntos del dominio, tanto los de los contornos como los interiores al dominio.
- 3) Eliminación de los triángulos exteriores al dominio. Para ello se ha seguido un proceso de bajo coste computacional y basado en el mismo algoritmo utilizado para la creación de la nube de puntos interiores al dominio. En efecto, dado un dominio cualquiera y trazada una recta horizontal $y=y_i$, se determina el conjunto ordenado según la coordenada x de menor a mayor de los puntos (x_j, y_i) intersección de esa recta horizontal con los contornos del dominio.

Según el algoritmo descrito en el apartado anterior se conoce si el segmento limitado por dos puntos consecutivos de la tabla anterior pertenece o no al dominio.

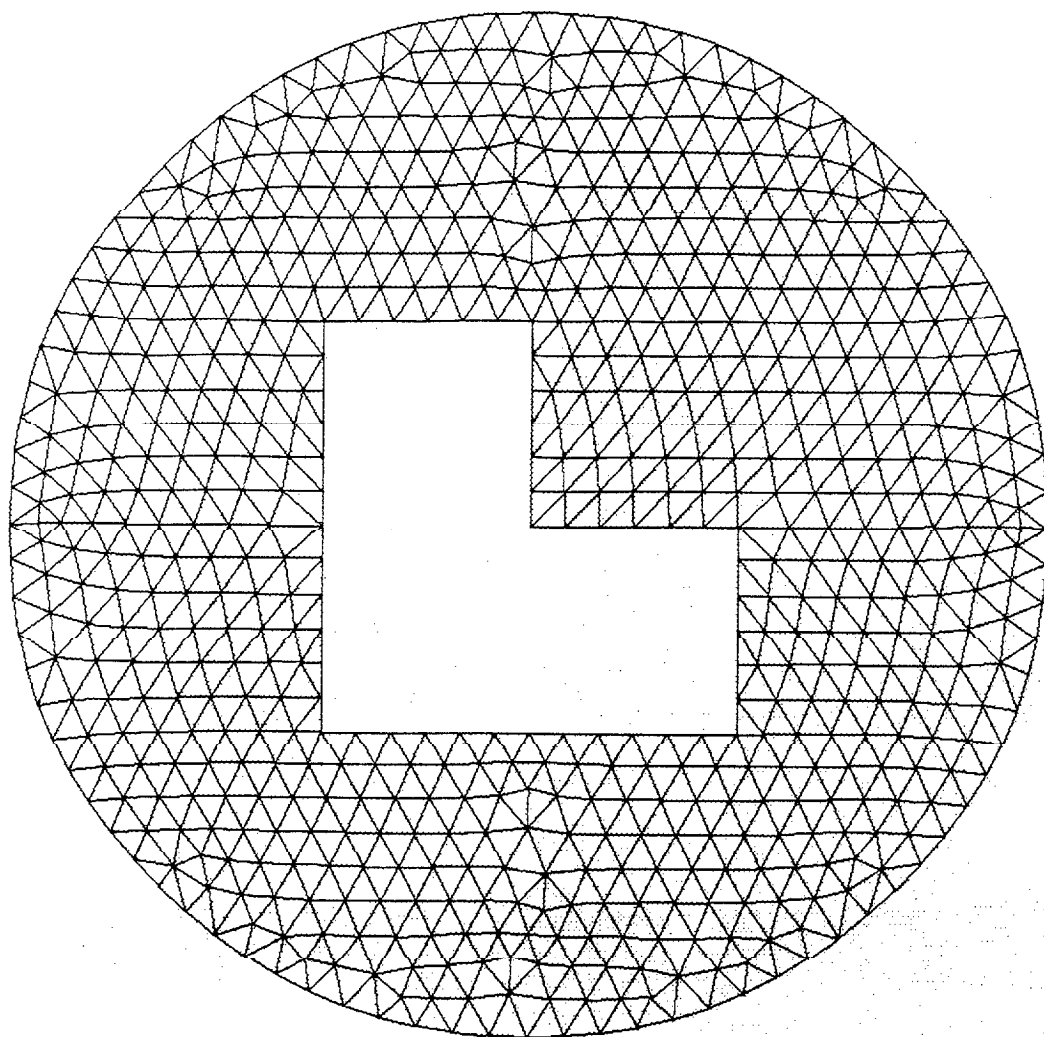
Si un triángulo de Delaunay no es del dominio, su centro geométrico tampoco estará en él.



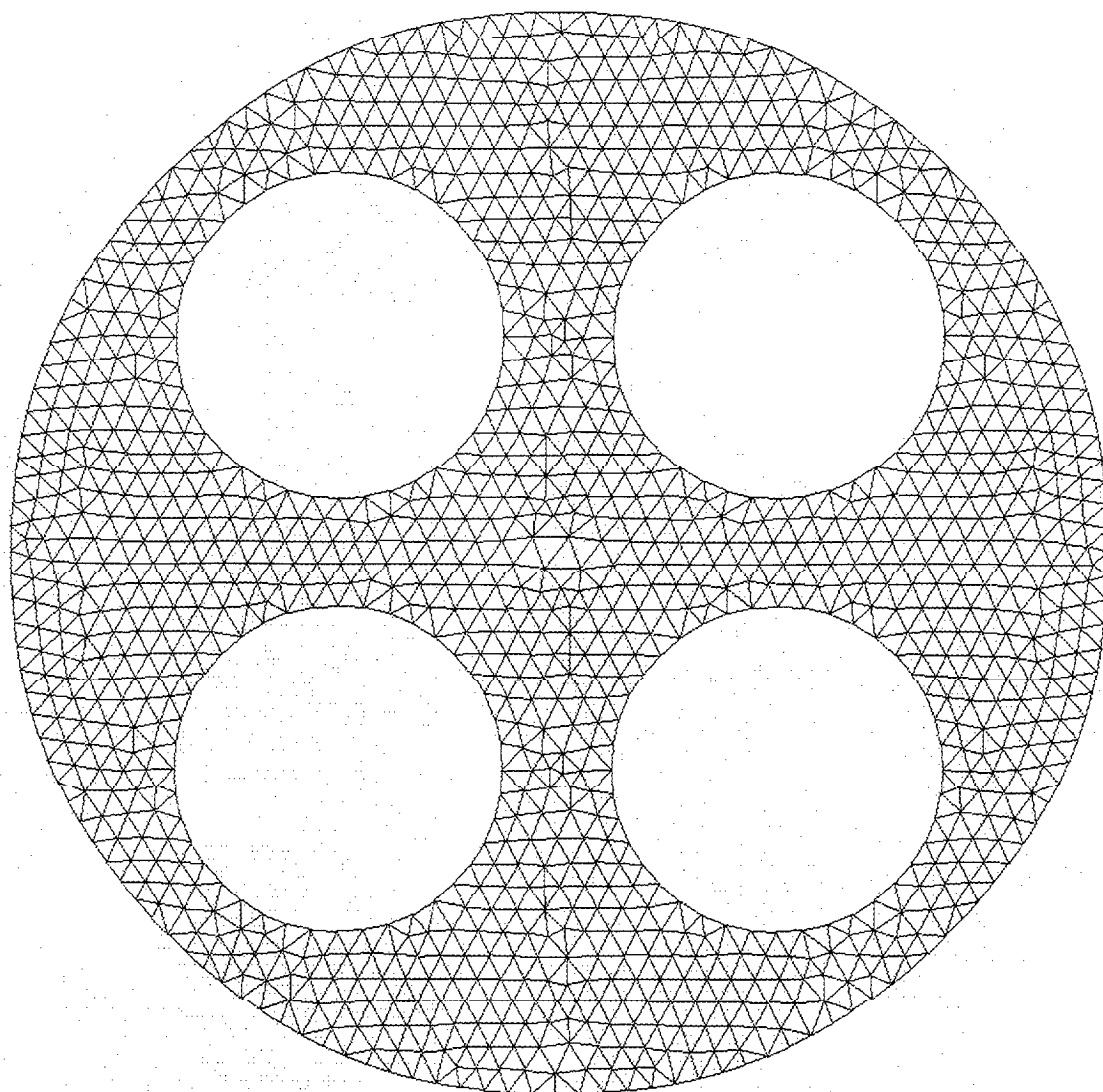
Trazada la línea imaginaria $y=y_G$, y siguiendo el proceso anterior, sabemos que el segmento limitado por dos puntos consecutivos de la tabla de puntos de corte de $y=y_G$ con los contornos del dominio, que contenga en su interior al punto (x_G, y_G) , es o no del dominio, y como el punto (x_G, y_G) pertenece a dicho segmento, sabemos si el centro geométrico del triángulo está o no en el interior del dominio.

Si el punto (x_G, y_G) no pertenece al dominio, el triángulo que lo generó no es un triángulo que pertenece a la triangulación deseada.

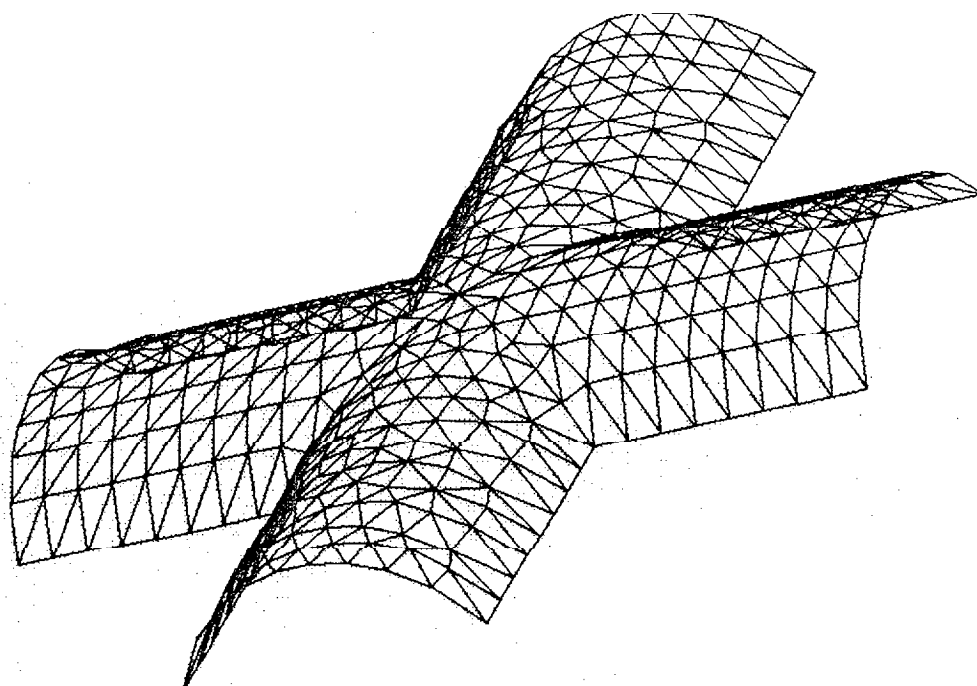
Sería muy costoso computacionalmente el que este algoritmo se tuviera que aplicar a todos los triángulos obtenidos mediante proceso de Delaunay, pero como se observa en la figura, sólo es necesario comprobarlo en los triángulos cuyos vértices pertenecen a un mismo contorno.



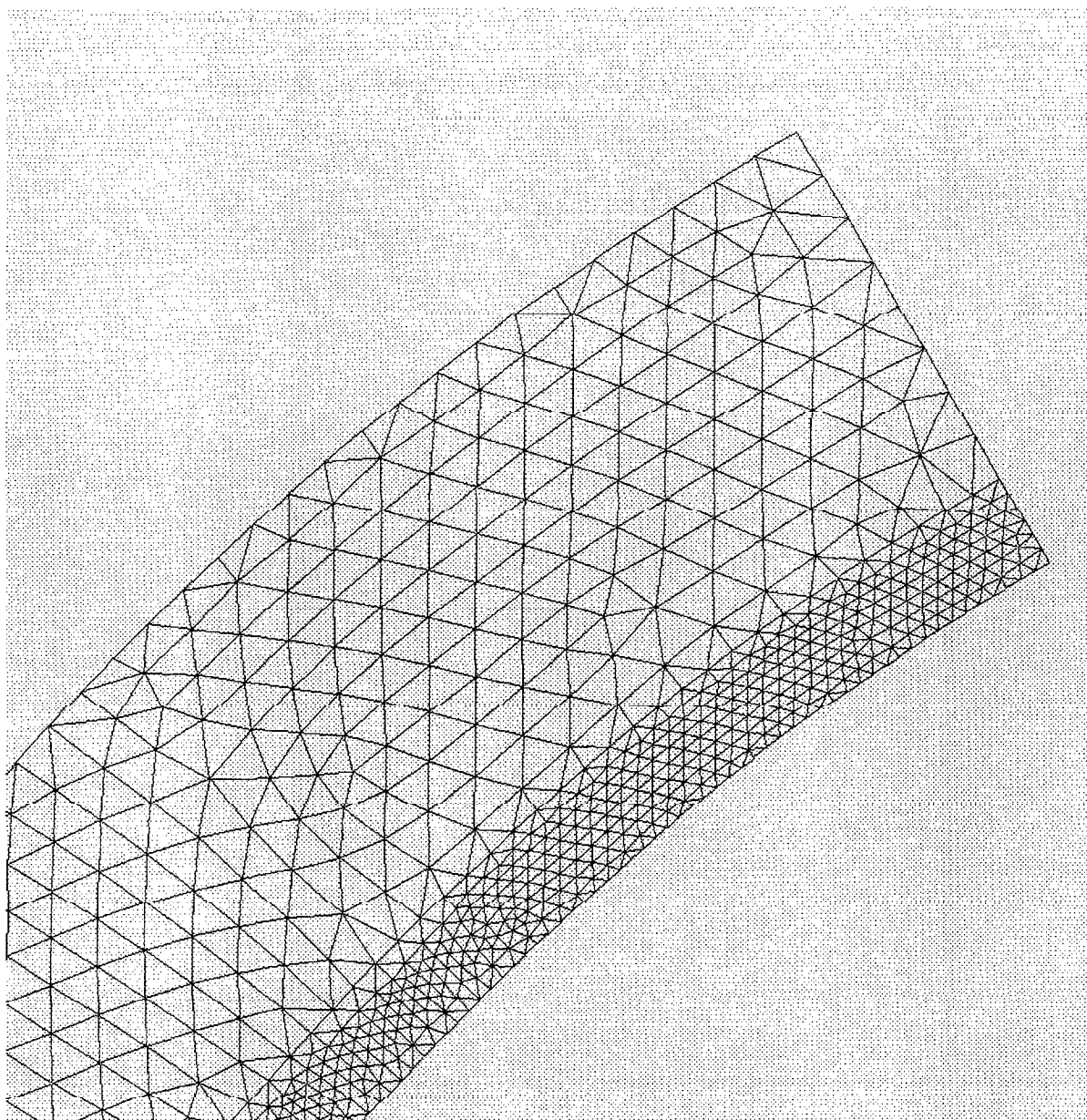
Triangulación de un dominio con agujero no convexo utilizando el método de Delaunay propuesto.



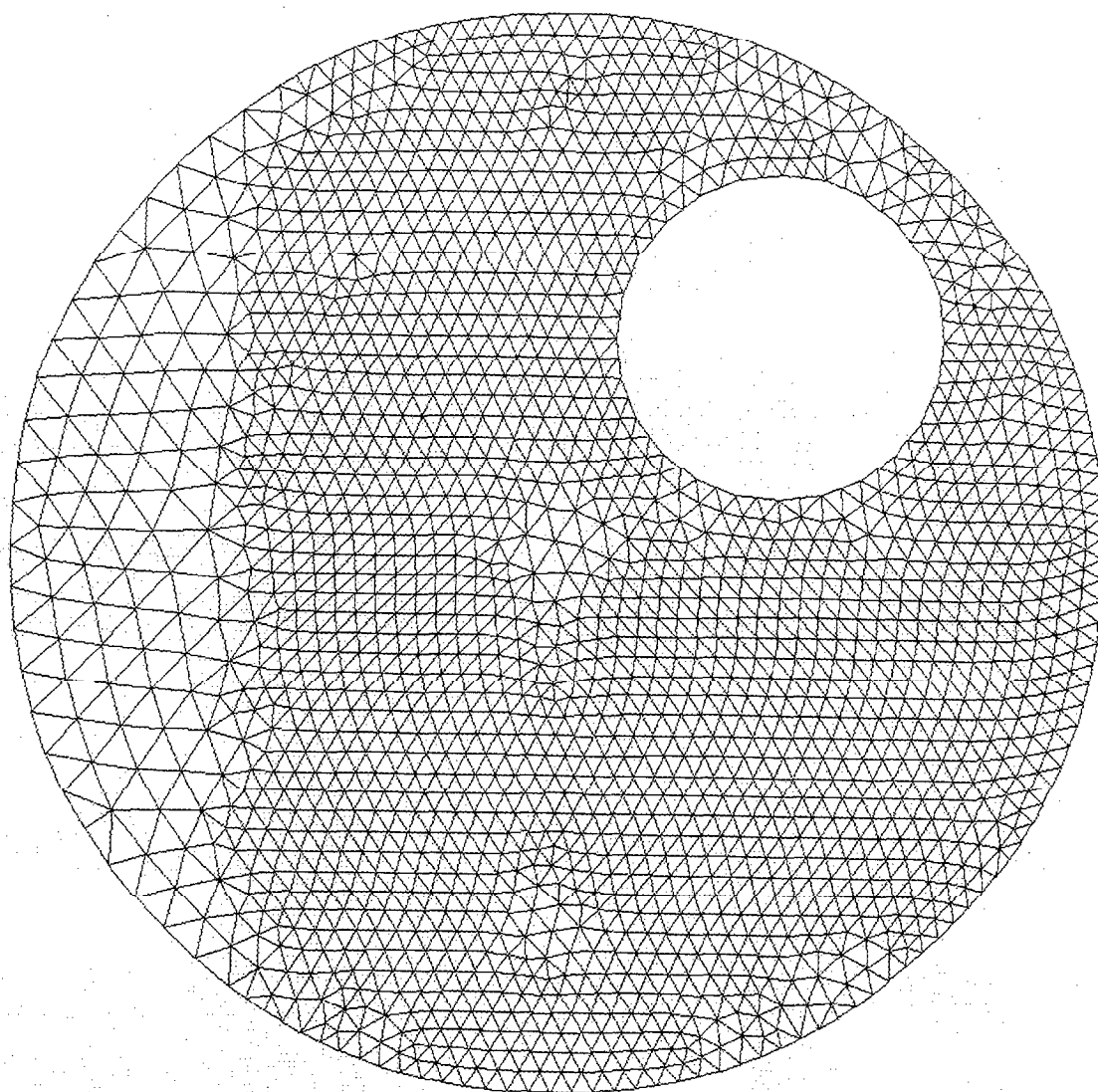
Triangulación de un dominio con agujeros no convexos utilizando el método de Delaunay propuesto.



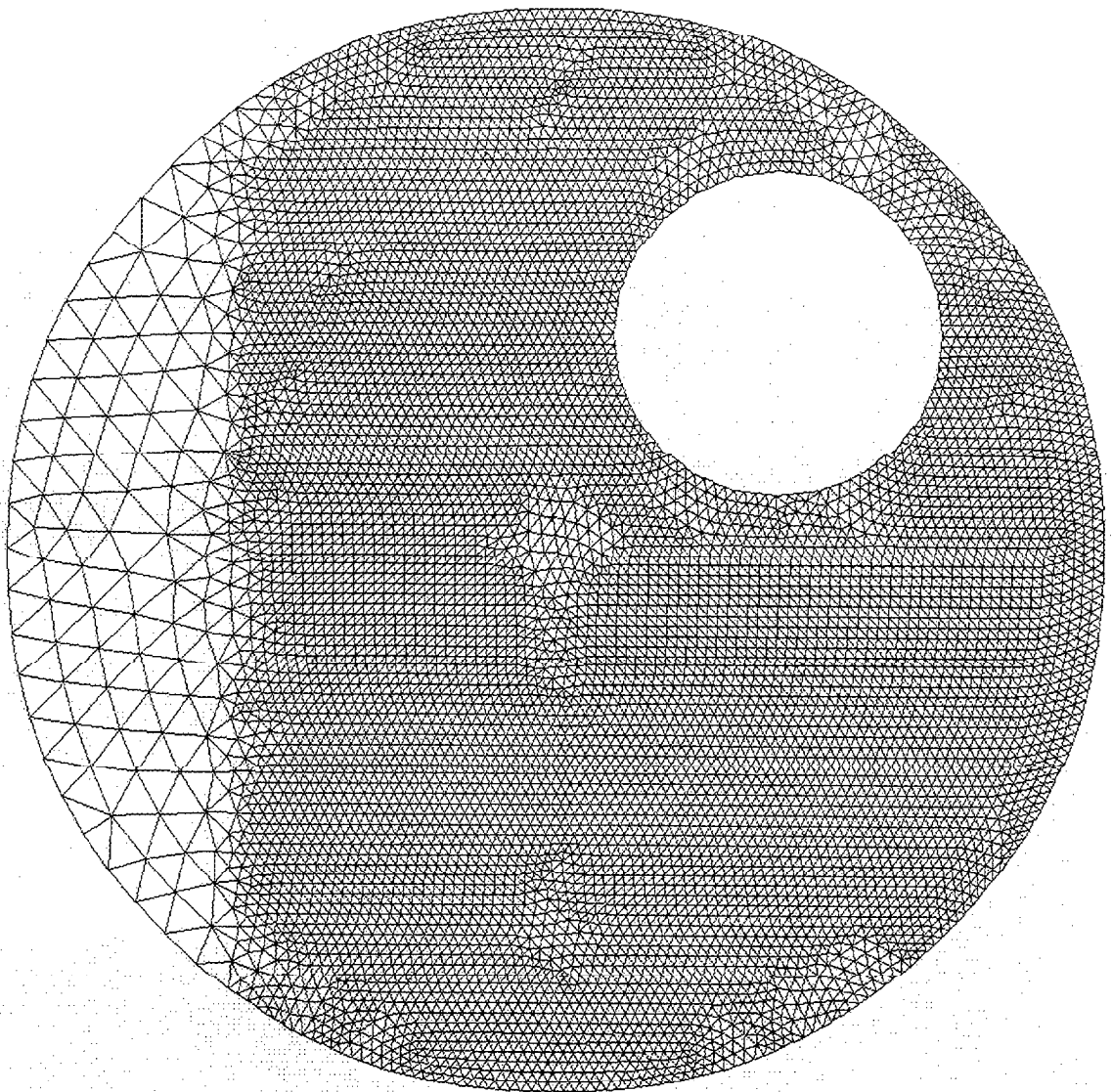
Obtención de una superficie en el espacio mediante triangulación de
Delaunay en dominio no convexo.



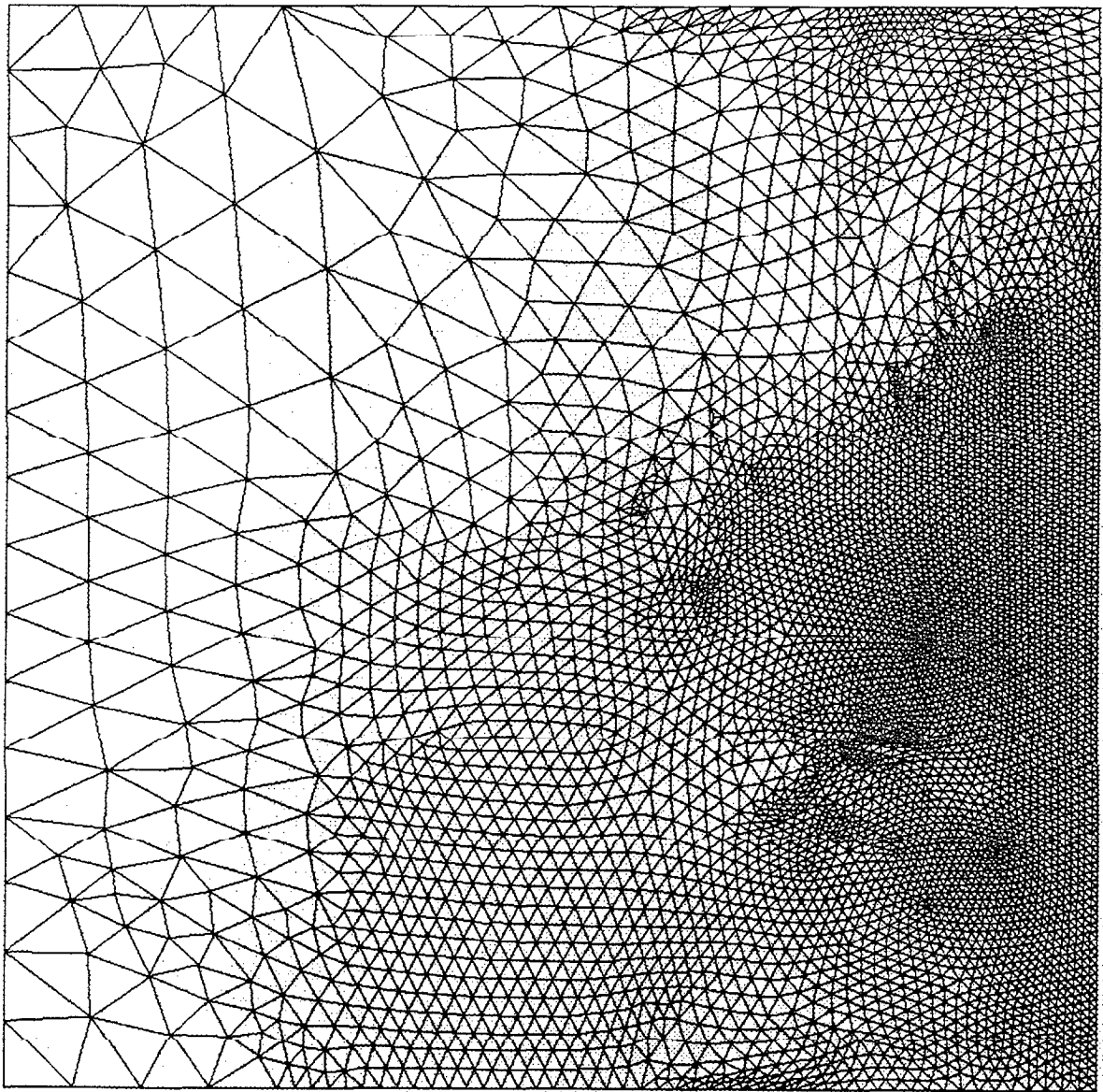
Caso de triangulación de Delaunay en dominio no convexo con dos regiones de diferente densidad de malla. Detalle ampliado



Ejemplo de 1ª etapa de malla adaptada con triangulación de Delaunay en dominio no convexo.



Ejemplo de 2ª etapa de malla adaptada con triangulación de Delaunay
en dominio no convexo.



Ejemplo de malla adaptada con triangulación de Delaunay.

5.2. MÉTODO DE AVANCE FRONTAL.

Este proceso debe su nombre al hecho de que en todo momento del proceso existe una línea que encierra a todos los puntos a triangular, denominada línea de avance.

El proceso se realiza una vez discretizados los contornos, exterior e interiores y generada la nube de puntos interiores, siguiendo los pasos que se indican a continuación:

1) Creación de una tabla que contiene a los puntos del contorno exterior. Creación de una tabla que contiene a los puntos interiores al dominio. Creación de tantas tablas como contornos interiores haya.

2) La tabla que contiene a los puntos del contorno exterior se convierte en la línea de avance inicial.

3) Dados dos puntos de la línea de avance, se calcula el punto perteneciente a cualquier lista que nos proporciona el mejor triángulo.

4) Creación del triángulo si cumple las características exigidas.

5) Rehacer la tabla que contiene al punto elegido.

6) Crear la nueva línea de avance.

7) Terminar la triangulación cuando no exista ninguna lista.

8) Suavizado de la malla obtenida.

5.2.1. CRITERIO DE ELECCIÓN DE UN PUNTO.

Dados dos puntos consecutivos A y B de la línea de avance, se elige un punto C para crear el triángulo ABC de la forma siguiente:

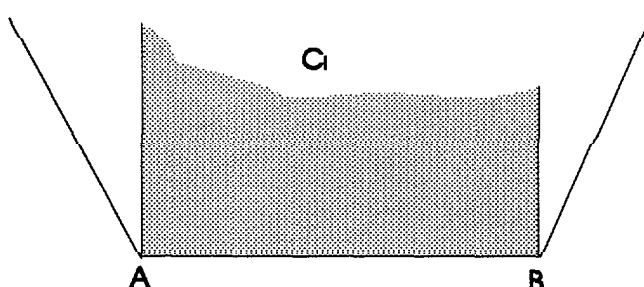
a) Se realizan los productos vectoriales:

$$\vec{v}_1 = \vec{AB} \wedge \vec{AC}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{BA} \wedge \vec{BC}$$

$$m = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$$

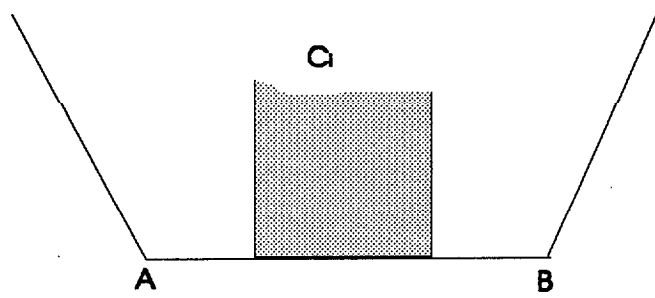
Si m es positivo o cero, el punto C pertenece a la región sombreada en la figura:



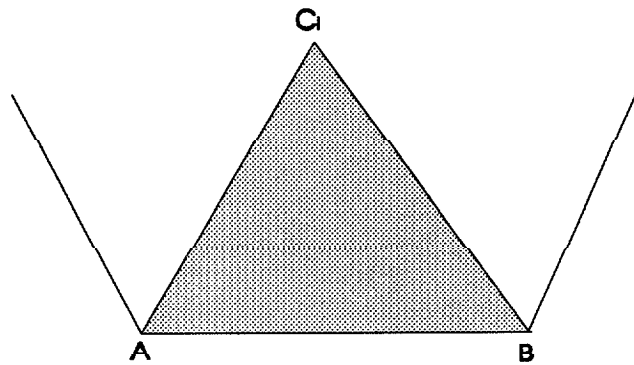
b) En el caso de que haya más de un punto que cumpla las anteriores condiciones, el criterio de elección se hará de tal forma que el cociente:

$$m_1 = \frac{\left| \vec{v}_1 \right|}{\left| \vec{v}_2 \right|}$$

m_1 es más cercano a la unidad para el punto elegido que para el resto



c) De todos los puntos que estén situados en dicha zona se elige el más cercano a A o B.



Una vez elegido el punto que cumple todas las condiciones, se comprueba si satisface las características de tamaño de triángulo, para que éste no sea degenerado. Este criterio podría ser:

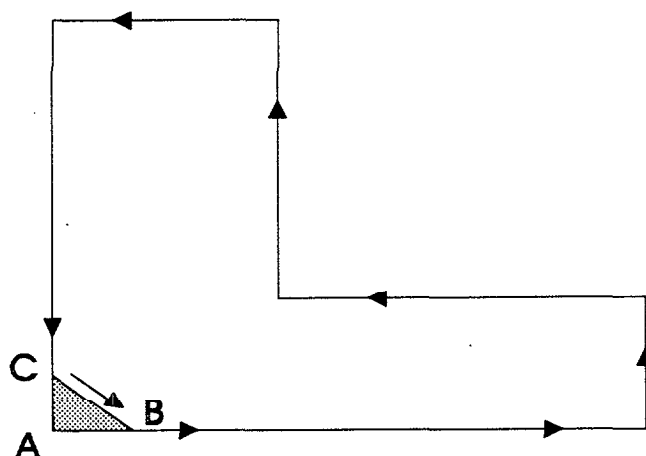
$$\text{Distancia} \leq 1.5 \times D_R$$

D_R es el tamaño de elemento en la región

Si todas las condiciones anteriormente expuestas son cumplidas por un punto C, se crea el triángulo y se modifica la línea de avance y la lista a la que pertenecía.

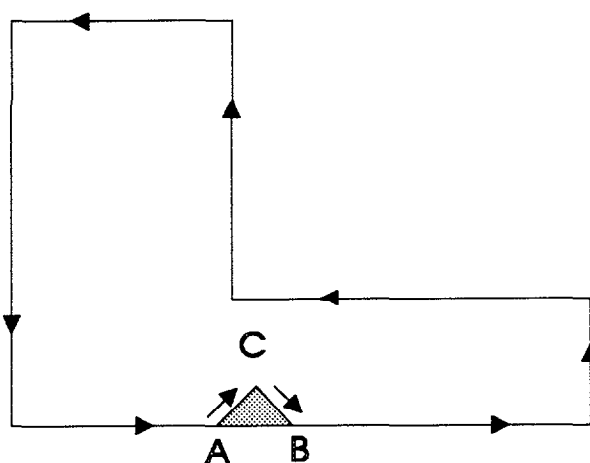
Si el punto C es un punto de la línea de avance, ésta se ve modificada eliminando de la lista el punto A. En la mayoría de los casos, el punto C

sería el anterior en posición al punto *A* o el posterior al punto *B*.



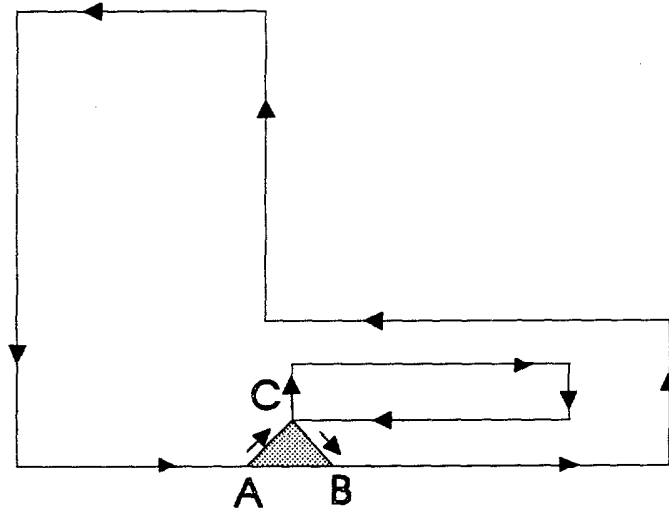
En caso de no ocurrir así, la razón será que existen zonas estrechas en el dominio, y el punto *C* elegido no está en ningún extremo de *A* y *B* en la tabla. En este caso, la línea de avance se dividirá en dos nuevas líneas de avance y se seguiría el proceso de la misma manera empezando siempre por la línea de avance que contenga menos puntos, con el fin de trabajar con el menor número de líneas de avance posible.

FSi el punto *C* es de la tabla de la nube de puntos interiores a la línea de avance tratada, se introduce entre *A* y *B* en la línea de avance.



Si el punto *C* pertenece a un contorno interior, se introducen en la

línea de avance entre A y B todos los puntos que forman dicho contorno, teniendo en cuenta que para conseguir el mismo sentido en la línea de avance estos puntos tendrían que estar ordenados en el sentido inverso.



Como se observa, el punto C estaría dos veces formando parte de la línea de avance. Esto no dificulta el proceso, ya que, al pertenecer a la línea de avance, cuando éste se elija, se eliminará.

5.2.2. ALGORITMO DE AVANCE FRONTAL

Hacer de $I = 1$ a número de regiones

Orientar los puntos que definen los contornos discretizados

Creación del vector línea de avance

Creación del vector nube interna

Creación del vector contornos

Elegir punto de la línea de avance

Elegir punto de la nube interna

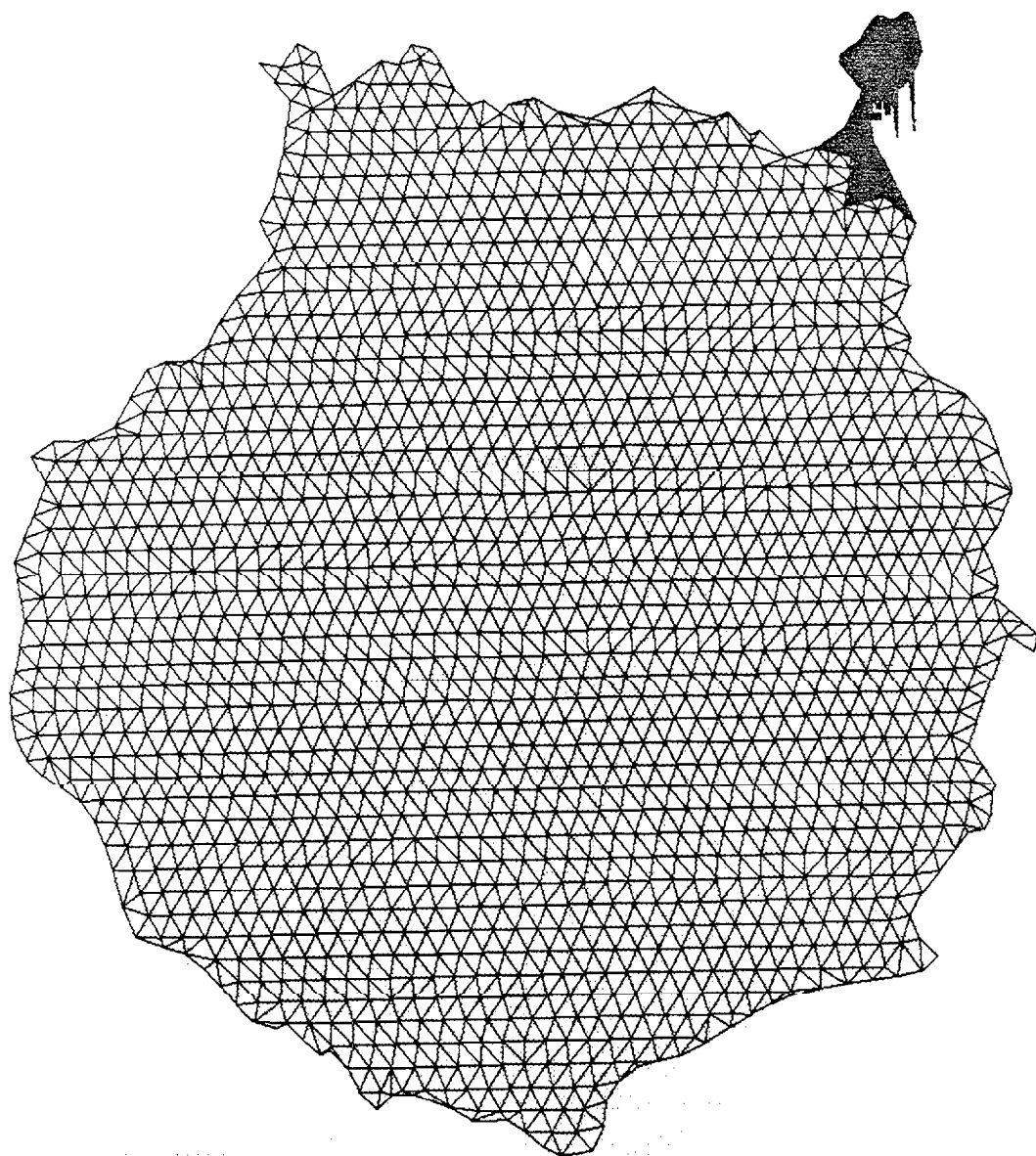
Elegir punto de los contornos

Crear triángulo si ha sido elegido algún punto

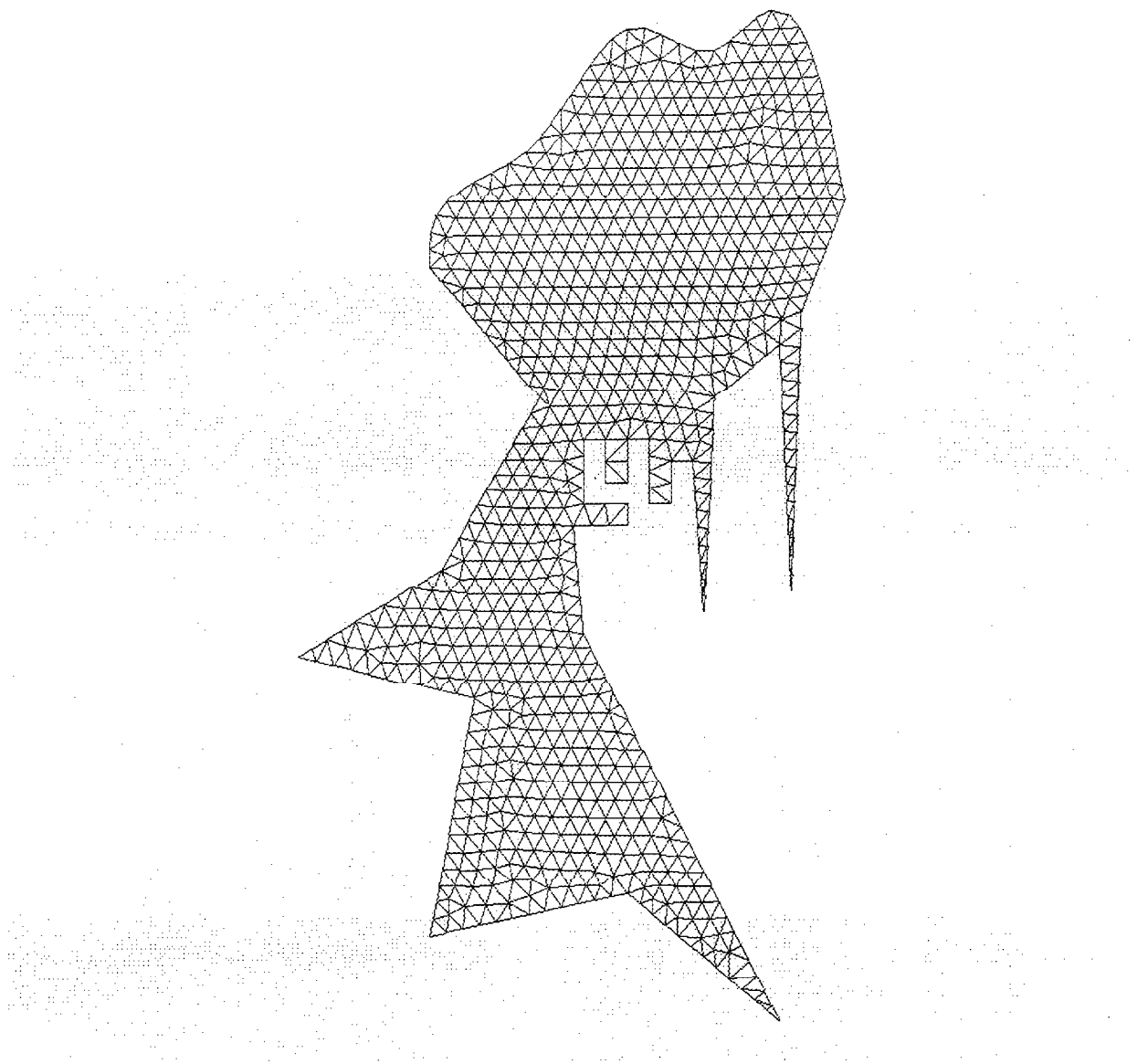
Rehacer las listas

Terminar cuando existan tres puntos en línea de avance

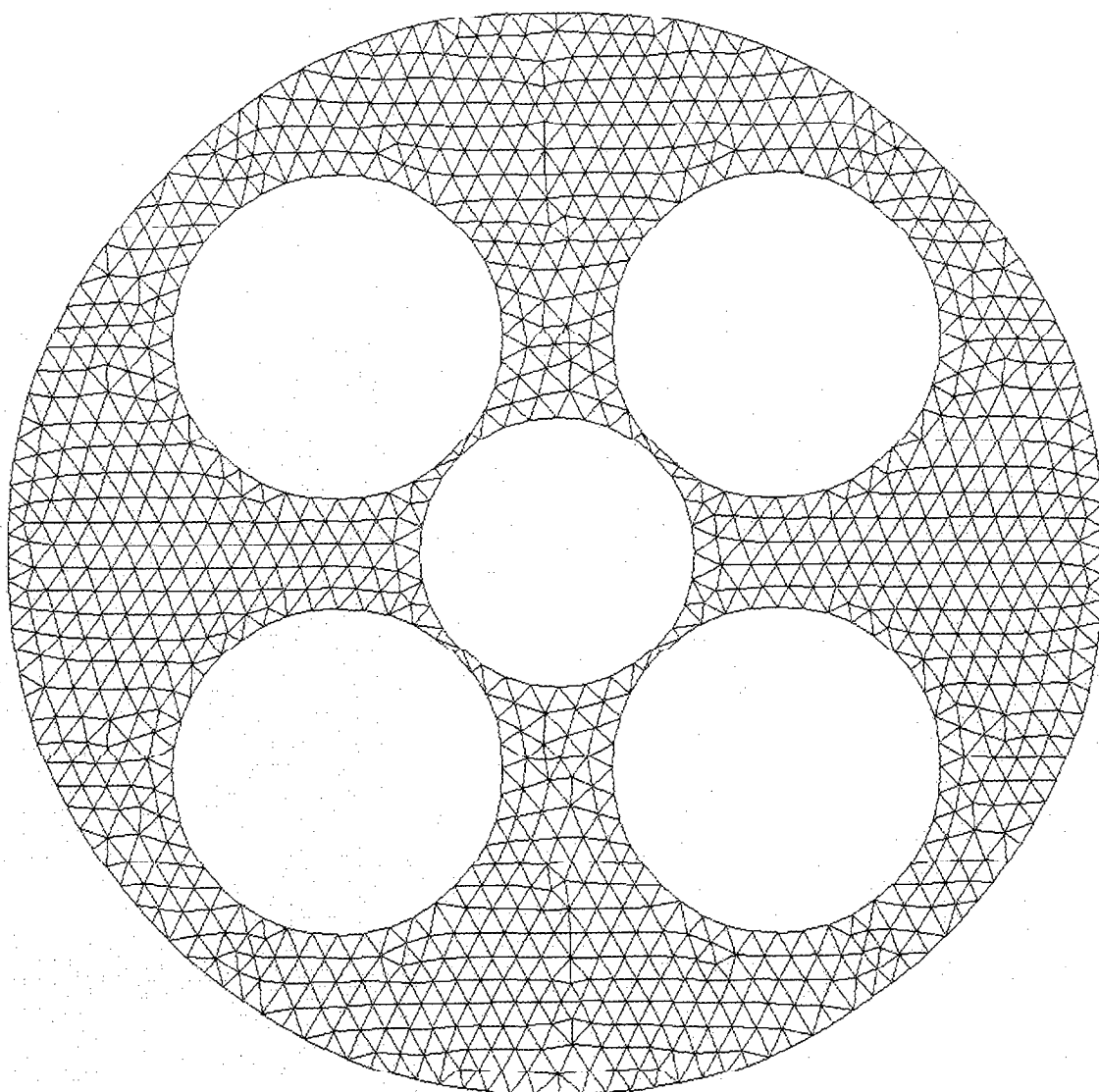
Fin Hacer



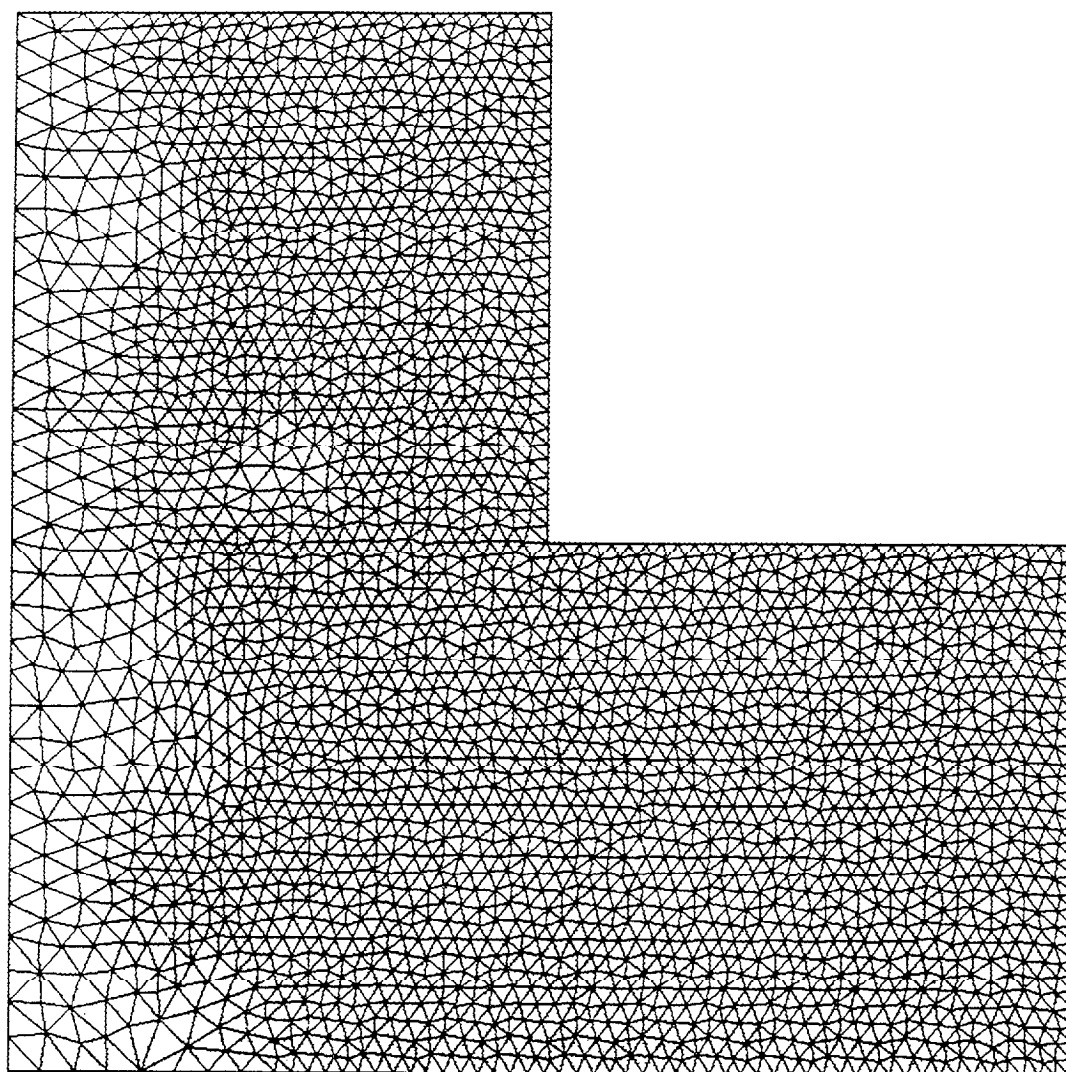
Triangulación de un dominio con contorno irregular y no convexo
utilizando el método de avance frontal propuesto.



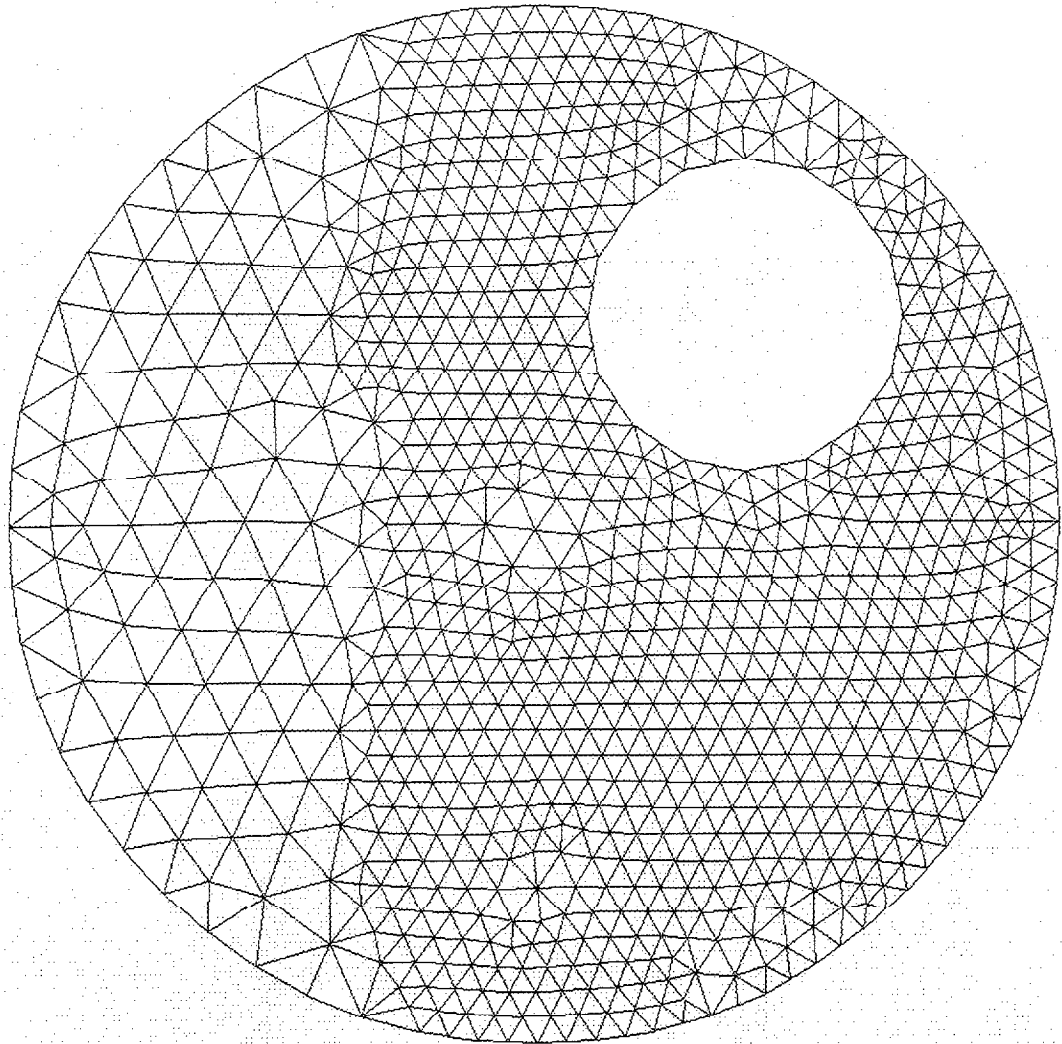
Detalle ampliado de zona con contorno no convexo.



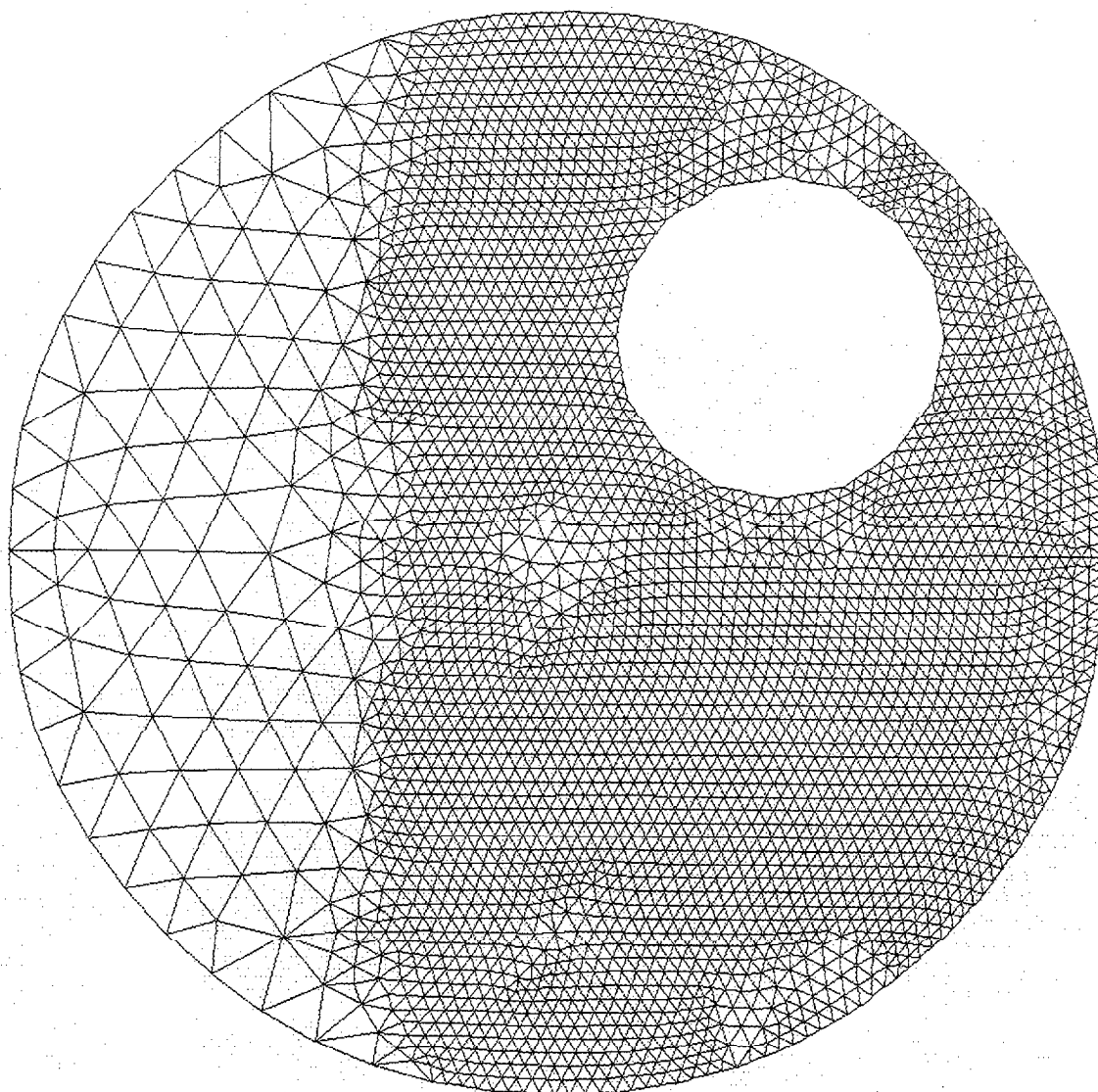
Triangulación de un dominio con agujeros utilizando el método de avance frontal propuesto.



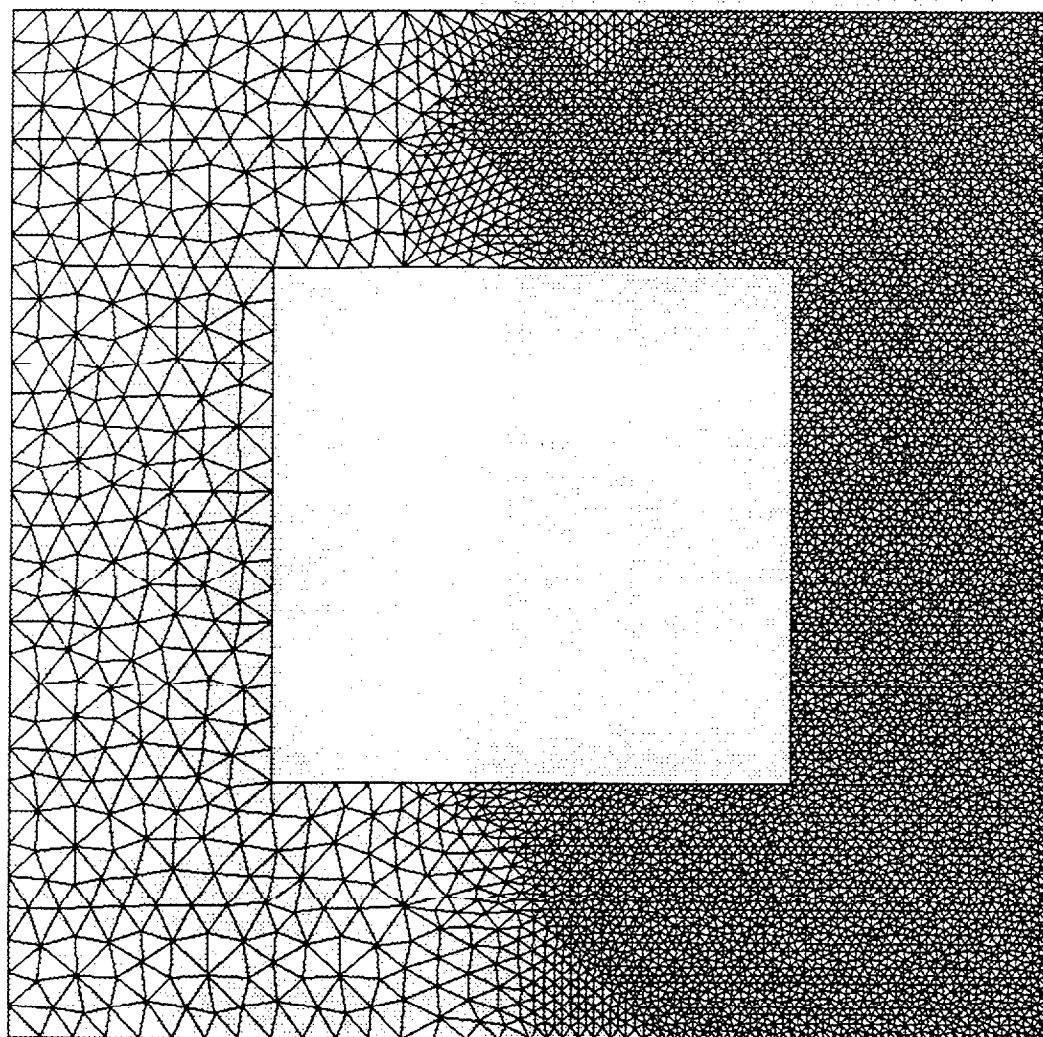
Ejemplo de malla adaptada con triangulación de avance frontal,
dominio no convexo.



Ejemplo de 1ª etapa de malla adaptada con triangulación de avance frontal, dominio no convexo.



Ejemplo de 2ª etapa de malla adaptada con triangulación de avance frontal, dominio no convexo.



Ejemplo de malla adaptada con triangulación de avance frontal,
dominio con agujero.

5.3.- ALISADO A TRAVÉS DE UN ALGORITMO GENÉTICO SIMPLE.

John Holland es el fundador del campo de los algoritmos genéticos. Con la publicación "Adaptation in natural and artificial systems" integró y elaboró dos fundamentos que han persistido en su investigación: la habilidad de representaciones simples para codificar complicadas estructuras (cadenas de bits) y la potencia de transformaciones simples para mejorar tales estructuras.

Holland mostró que con el adecuado control de las estructuras, se pueden conseguir rápidas mejoras de las cadenas de bits bajo ciertas transformaciones, de tal manera que las cadenas de bits se pueden *asimilar* a la evolución de las poblaciones de los seres vivos.

El importante hallazgo conseguido fue que incluso en grandes y complicados espacios de búsqueda, dadas ciertas condiciones en el dominio del problema, los algoritmos genéticos tienden a converger hacia soluciones que globalmente son los óptimos o están muy cerca de ellas.

Un algoritmo genético para resolver un problema debe tener cinco partes:

1. Una representación cromosomal de las soluciones posibles al problema.
2. Un camino para crear una población inicial de soluciones.
3. Una función de evaluación que juega el papel de la

"naturaleza" valorando soluciones en términos de su mérito o "fitness".

4. Operadores genéticos que alteran la composición de los cromosomas hijos durante la reproducción.

5. Valores de los parámetros que el algoritmo genético utiliza (tamaño de la población, probabilidad de aplicación de los operadores genéticos, etc.).

5.3.1. COORDENADAS GRÁFICAS O CROMOSOMAS.

La representación de un punto en un espacio bidimensional (punto interior a modificar su posición) requiere la fijación de dos números para definir su posición respecto a unos ejes coordenados:

$$posición = [x, y]$$

Si representamos ambos números en el sistema binario obtenemos una cadena de 0 y 1 :

$$cromosoma = [1101100.....10110]$$

En estas condiciones cada cromosoma representa una posición en el espacio topológico. Una población queda representada por un conjunto de cromosomas que se distinguen unos de otros por su valor de mérito, obtenido a través de una función de evaluación que se fija de acuerdo con el fin buscado.

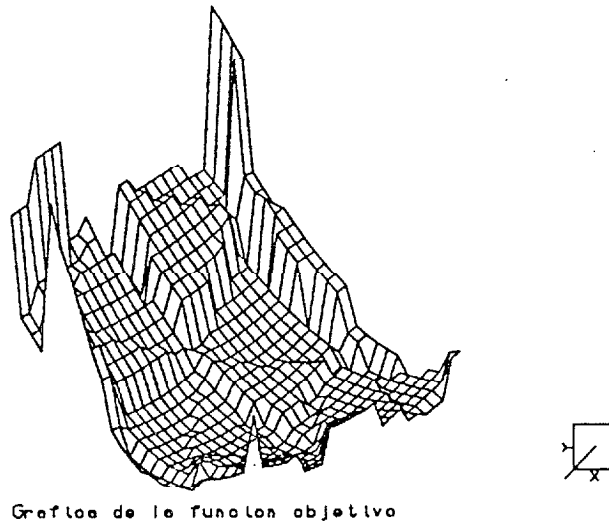
5.3.2. FUNCIÓN OBJETIVO:

Se han elegido las siguiente funciones objetivo para el suavizado de la malla:

- a) Función que permita a los ángulos centrales, formado por el punto a estudiar y dos puntos consecutivos de la poligonal que la encierra, ser lo más iguales posible.

$$F_1 = \sum_{i=1}^{NP} \sin^2 \left(\frac{2\pi}{NP} - \alpha_i \right)$$

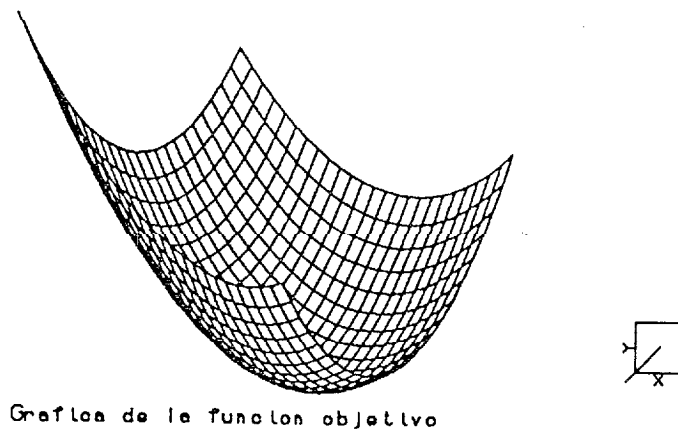
Siendo NP el número de puntos de la poligonal y α_i el ángulo de vértice el punto interior correspondiente a un triángulo.



- b) Función que permita a los triángulos ser lo más isósceles posible.

$$F_2 = \sum_{i=1}^{NT} (C_{1i} - C_{2i})^2$$

Siendo NT el número de triángulos y C_{ij} la distancia entre el punto interior de la poligonal que lo encierra y un punto de dicha poligonal.



5.3.3. SELECCIÓN, CRUCE Y MUTACIÓN.

Definidos los cromosomas, se parte de una población inicial creada aleatoriamente. Se evalúa cada cromosoma y de acuerdo con ello, se establece un criterio de selección. Esta es una parte delicada de los algoritmos genéticos, dependiendo de ello que la convergencia hacia la posición óptima se realice en un tiempo aceptable o se salga de los límites razonables.

Se utiliza un modelo estocástico basado en la distribución de Bernoulli. Una vez seleccionados dos padres la operación de cruce consiste en:

Si tenemos dos cadenas de N bits cada una; se elige aleatoriamente un número K en el intervalo $(1, N-1)$ y se crean dos hijos intercambiando las cadenas comprendidas entre 1 y K inclusive. Sean los padres:

$$padre\ 1 = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}]$$

$$padre\ 2 = [b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, b_9, b_{10}]$$

a_i y b_i representan 0 ó 1. Supuesto se obtiene aleatoriamente $K=6$ de la operación de cruce se obtienen los hijos:

$$hijo\ 1 = [b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}]$$

$$hijo\ 2 = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, b_7, b_8, b_9, b_{10}]$$

El último paso de las operaciones de transformación lo constituye el proceso de mutación, que consiste en elegir aleatoriamente un número K del intervalo $(0, N-1)$, y si a la posición K del cromosoma le corresponde un 1 se coloca un 0 y viceversa.

La mutación aumenta las posibilidades de ampliar el espacio de búsqueda a zonas que de otra manera quedarían ocultas.

Al igual que en la operación de cruce, existe un parámetro que regula la posibilidad de mutación de los cromosomas.

La optimización a través del proceso de selección para la reproducción, cruce y mutación puede ser entendido de una manera más rigurosa examinando la aparición desde el inicio de las poblaciones de robustos esquemas de bits en los cromosomas que crecen generación tras generación, haciendo a la población tender hacia el óptimo que es alcanzado para todos los miembros.

Este algoritmo se ha comprobado que en la actualidad y para el caso del suavizado de mallas, es rentable cuando el número de puntos a triangular no es muy elevado.

CAPÍTULO 6. APLICACIONES Y CONCLUSIONES

6.1. PROBLEMA DE ELASTICIDAD LINEAL Y TENSIÓN PLANA.

DEFINICIÓN:

Consideremos la viga de la figura sometida a las fuerzas actuantes en las partes del contorno Γ_{2a} y Γ_{2b} , con dos agujeros (de contornos Γ_1).

La formulación clásica que define el problema a resolver y que consideramos en esta aplicación viene dada por:

$$-\sum_{j=1}^2 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad i=1,2$$

$$-\sum_{j=1}^2 \sigma_{ij} n_j = \frac{-x_i}{24} \quad \text{en } \Gamma_{2a}$$

$$-\sum_{j=1}^2 \sigma_{ij} n_j = -1 \quad \text{en } \Gamma_{2b}$$

$$u = 0 \quad \text{en } \Gamma_1$$

RESOLUCIÓN NUMÉRICA:

Se ha considerado la formulación variacional estándar, siendo $f_i = 0$, y valores de constantes:

$$E = 2 \cdot 10^4$$

$$\nu = 0.3$$

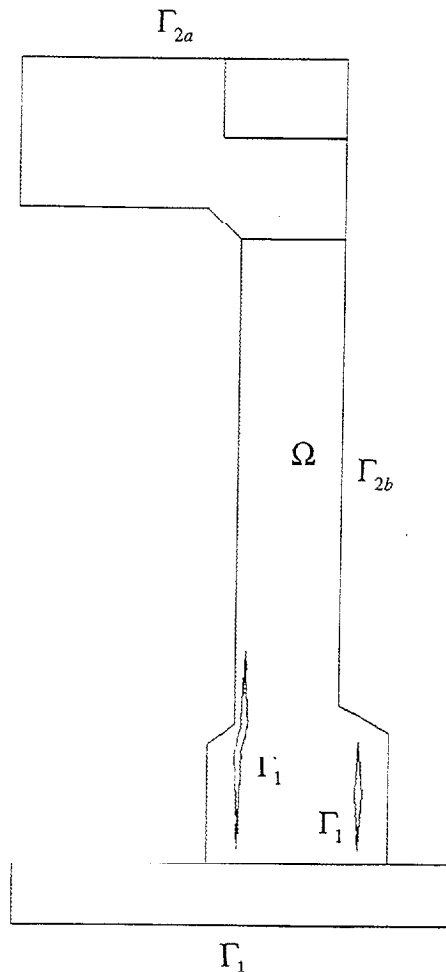
GENERACIÓN DE LA MALLA:

Se han considerado dos regiones, aplicándose para la obtención de la

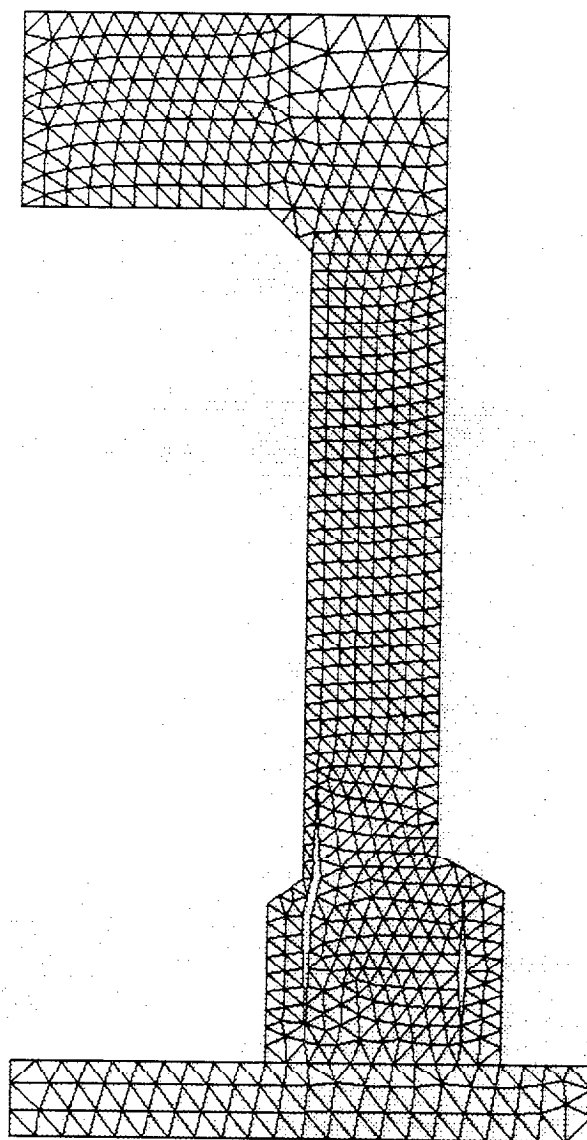
mallar el método de Delaunay con la contribución aportada en la presente tesis para dominios no convexos. Posteriormente se le ha aplicado un suavizado laplaciano. Para la resolución del problema se ha obtenido una malla refinada aplicando el algoritmo propuesto por M.C. Rivara.

RESULTADOS:

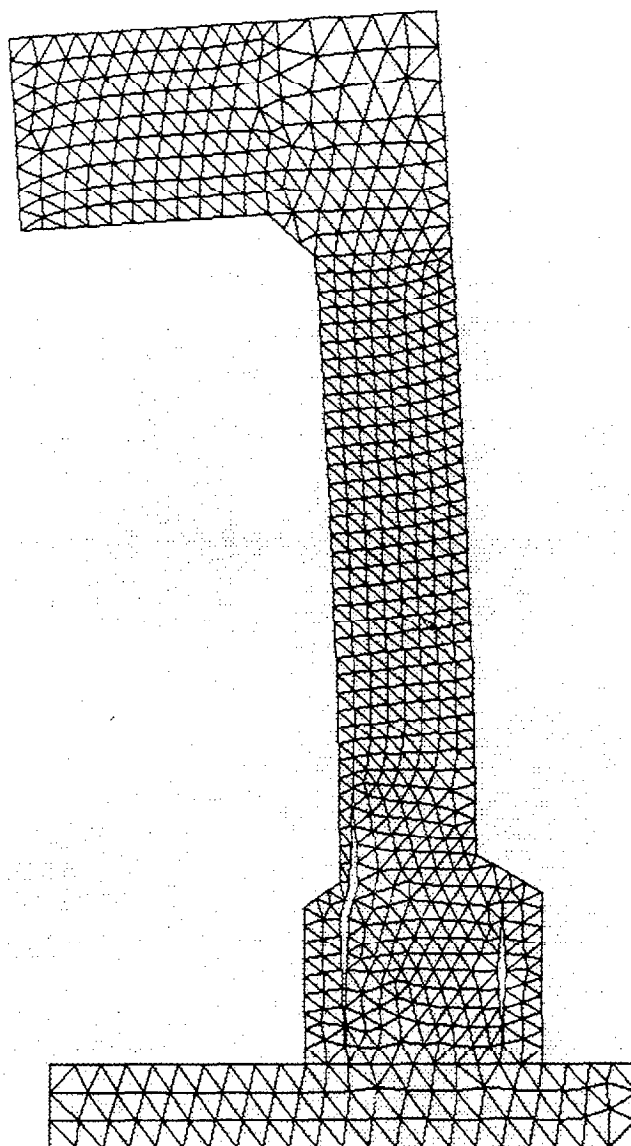
Se presentan los gráficos de la viga deformada.



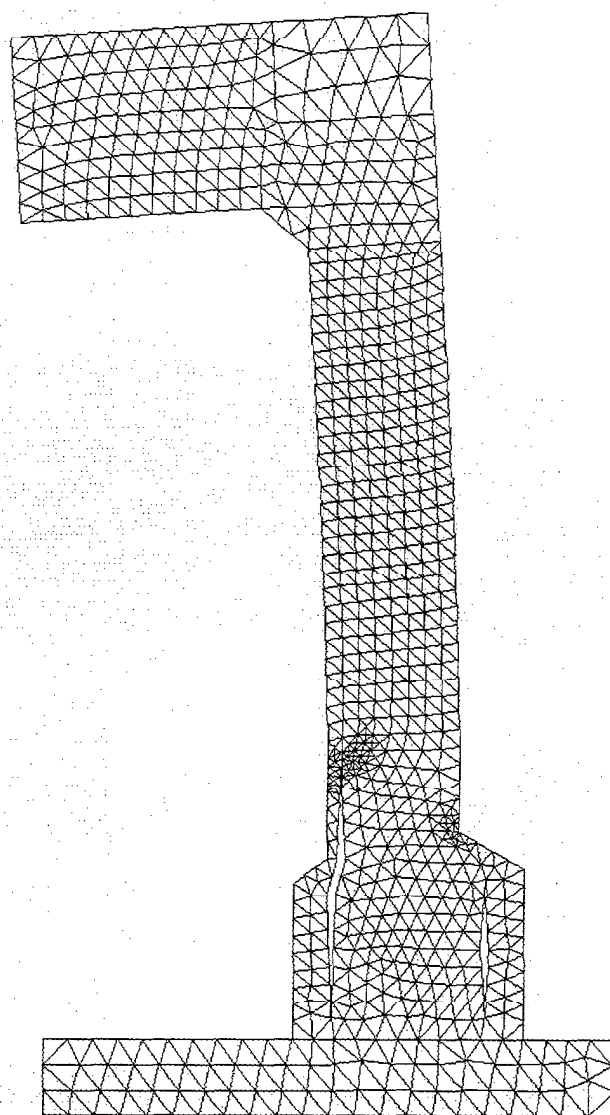
Dominio del problema compuesto por cuatro regiones.



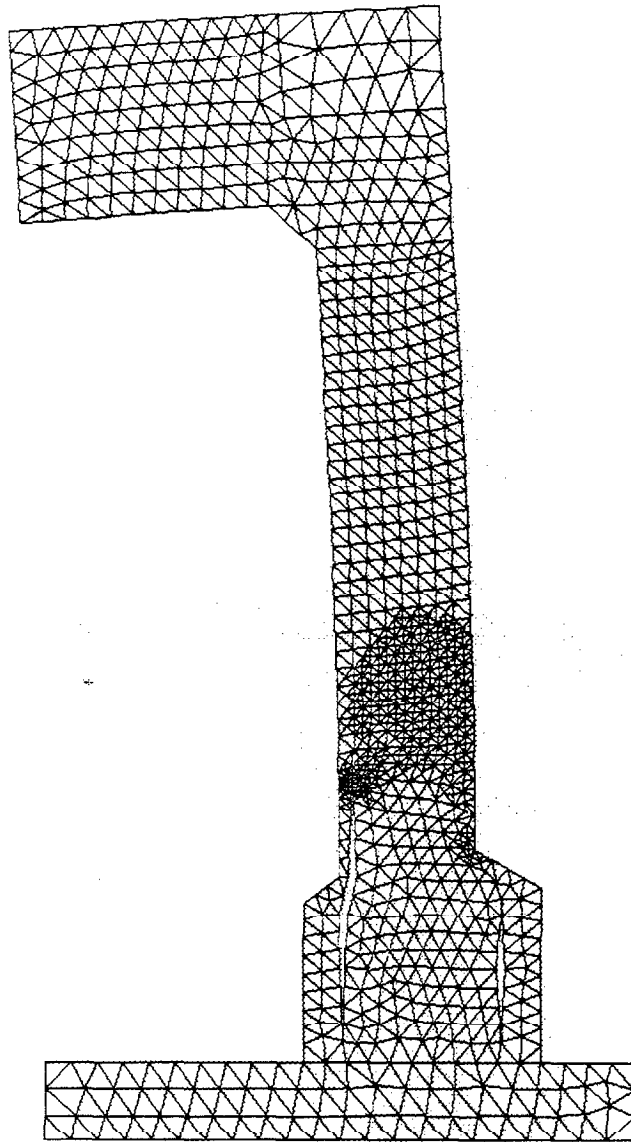
Malla inicial.



Solución para la malla inicial.



Solución con un refinamiento.



Solución con dos refinamientos.

6.2. PROBLEMA LINEAL DE TRANSMISIÓN DE CALOR.

DEFINICIÓN:

Se considera una placa circular con agujero, con condiciones Dirichlet en el contorno exterior y flujo de calor por convección impuesto en el contorno interior.

La formulación clásica del problema considerado es:

$$-\text{Div}(K \text{ gra } u) = 0 \quad \text{en } \Omega$$

$$u|_{\Gamma_1} = 20^\circ$$

$$u|_{\Gamma_2} = 25^\circ$$

$$u|_{\Gamma_3} = 30^\circ$$

$$-K \frac{\partial u}{\partial n} = h(u - 100^\circ) \quad \text{en } \Gamma_4$$

RESOLUCIÓN NUMÉRICA:

Se ha considerado la formulación variacional estándar y valores de constantes:

$$h = 20 \quad \frac{\text{Kcal}}{\text{h m}^2 {}^\circ\text{C}}$$

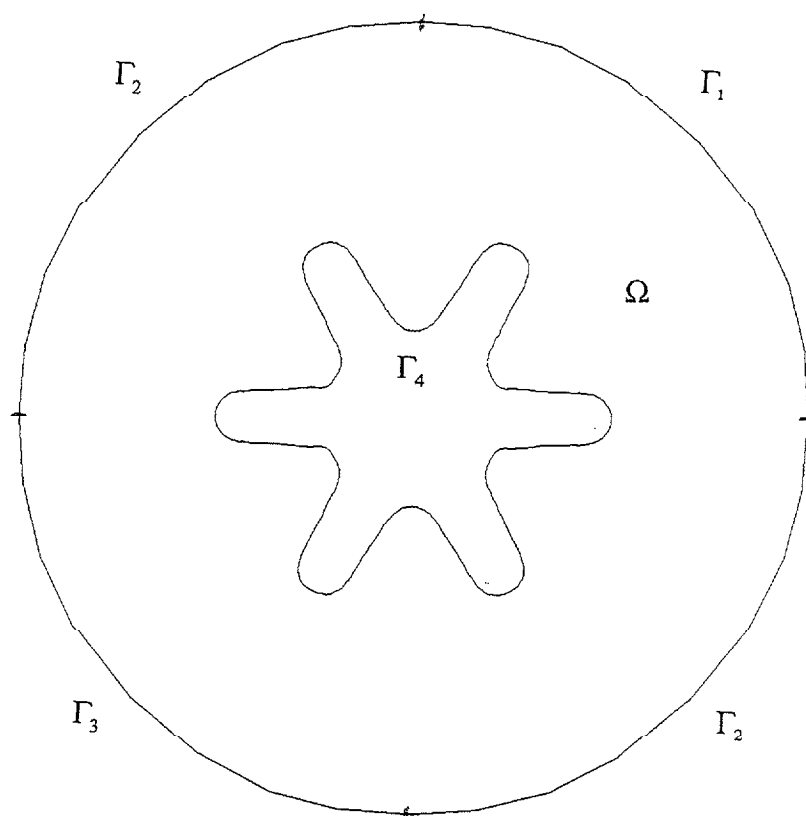
$$K = 10^{-3} \quad \frac{\text{Kcal}}{\text{h m}^0\text{C}}$$

GENERACIÓN DE LA MALLA:

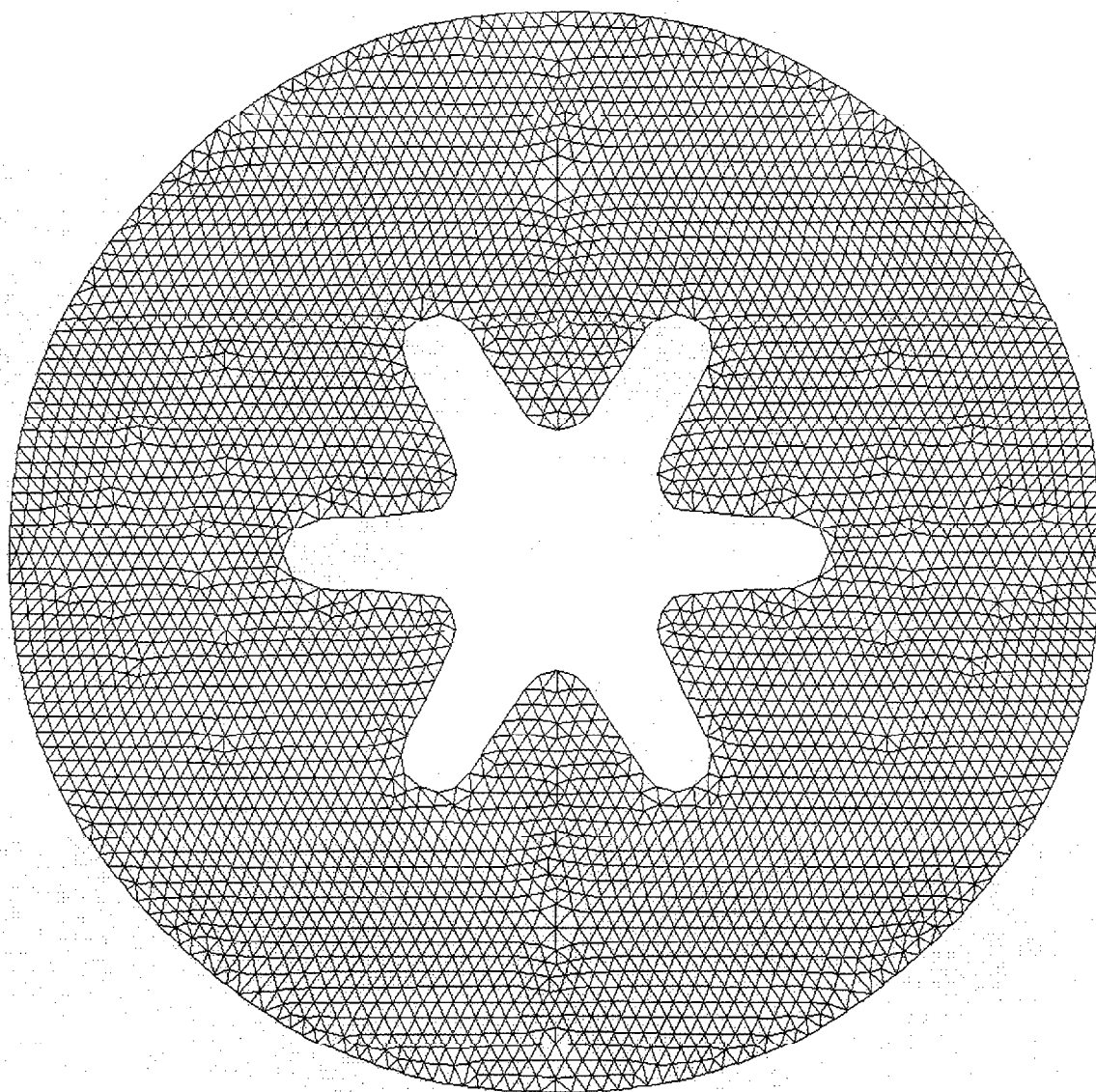
Para la obtención de los contornos curvos de la placa y su discretización se han utilizado las aportaciones dadas en la presente tesis. Para la obtención de la malla se ha utilizado el método de Avance Frontal debido a la alta no convexidad del agujero. Posteriormente se le ha aplicado tres suavizados laplacianos. Para la resolución del problema se ha obtenido una malla refinada aplicando el algoritmo propuesto por M.C. Rivara.

RESULTADOS:

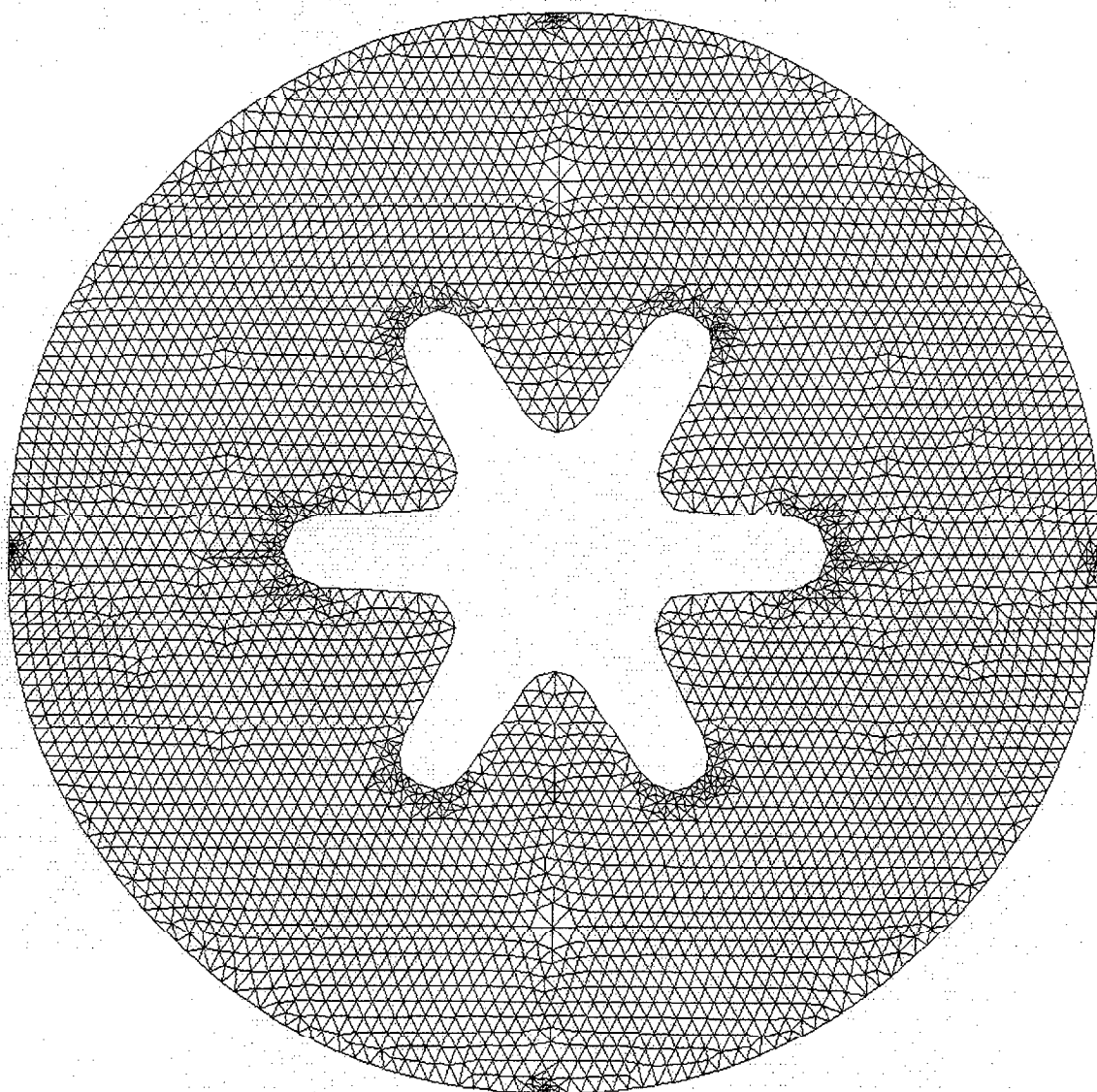
Se presentan gráficas de distribución de temperaturas.



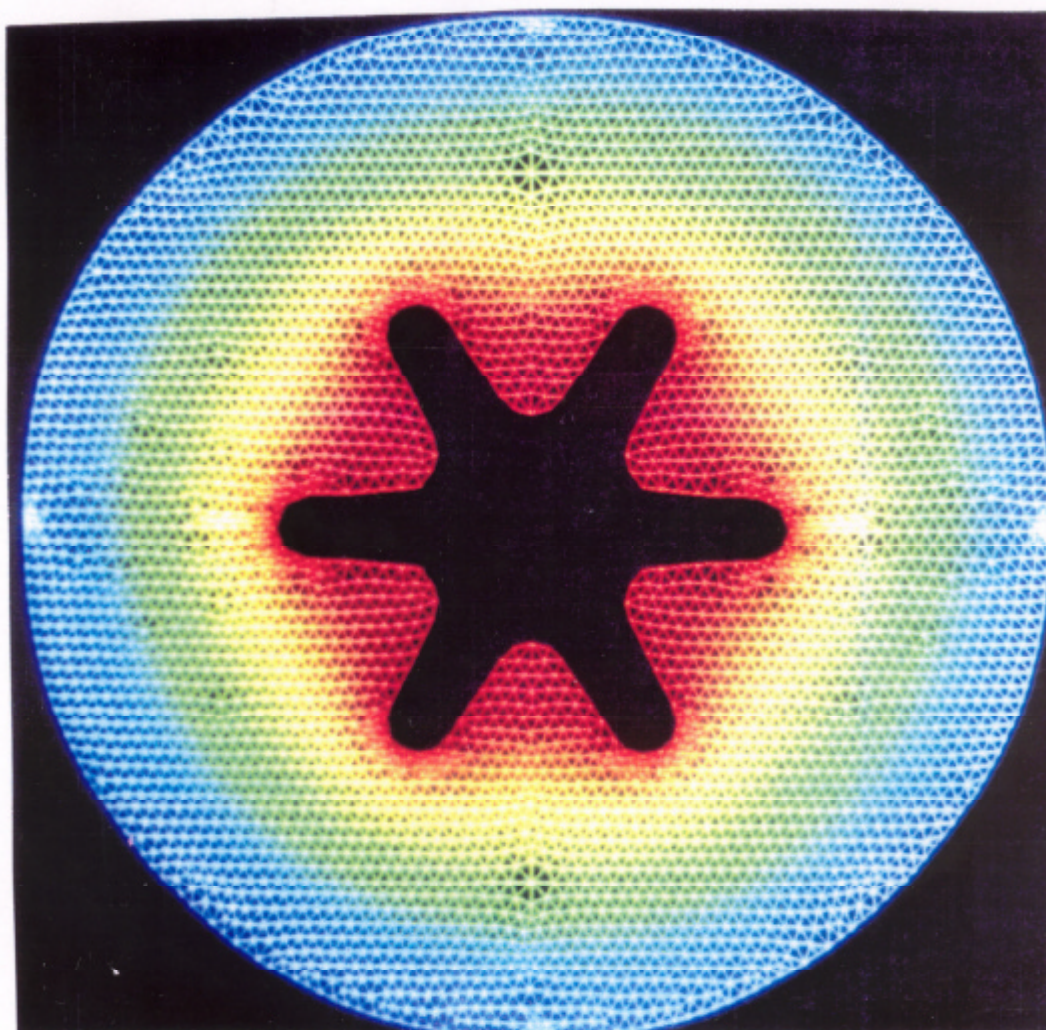
Dominio del problema .



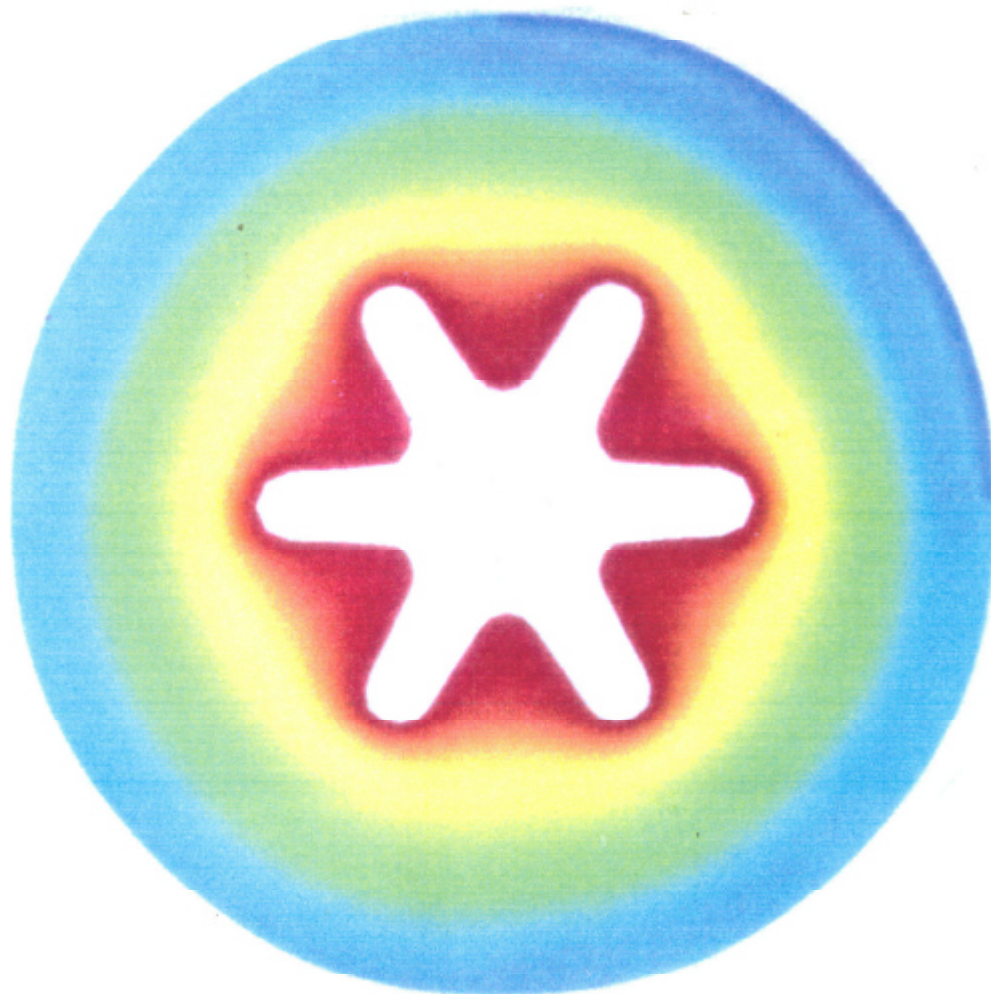
Malla inicial.



Malla Refinada.



Malla con distribución de la solución.



Solución (máximo en rojo, mínimo en azul).

6.3 PROBLEMA DE FILTRACIÓN EN ACUÍFERO CONFINADO BAJO UN PILOTE.

DEFINICIÓN:

Se considera el cálculo de alturas piezométricas en un acuífero confinado, despreciando efectos de inercia en el proceso de filtración por ser la aplicación considerada de aceleración del fluido pequeña.

Consideramos modelo simple lineal en la relación de la velocidad y el gradiente hidráulico (Ley de Darcy).

La formulación clásica que define el problema a resolver y que consideramos en esta aplicación viene dada por:

$$-\text{Div}(K \text{ gra } h) = 0 \quad \text{en } \Omega$$

$$h = 20 \text{ m} \quad \text{en } \Gamma_1$$

$$h = 5 \text{ m} \quad \text{en } \Gamma_2$$

RESOLUCIÓN NUMÉRICA:

Se ha considerado la formulación variacional estándar conocida y valor de constante:

$$K = 0.005$$

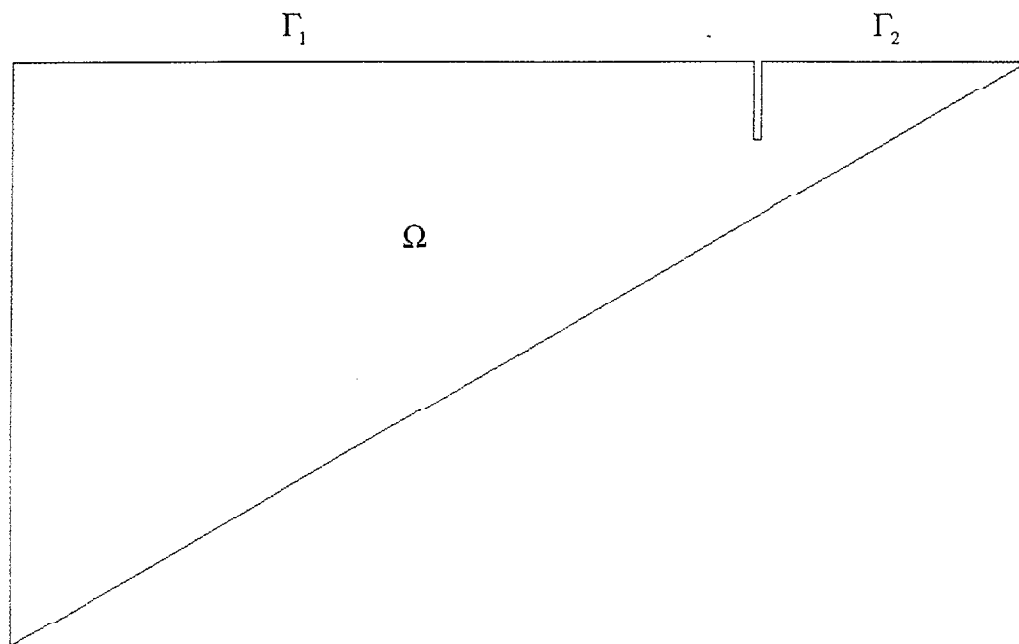
GENERACIÓN DE LA MALLA:

Se aplica para la obtención de la malla el método de Delaunay con la contribución aportada en la presente tesis para dominios no convexos.

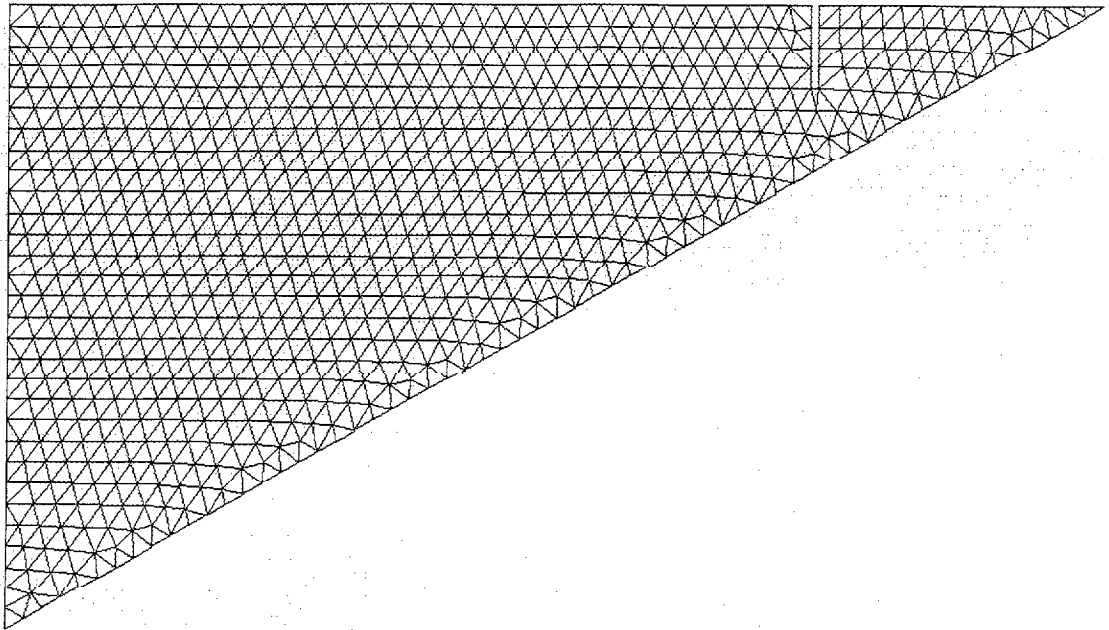
Posteriormente se le ha aplicado un suavizado laplaciano. Para la resolución del problema se ha obtenido una malla refinada aplicando el algoritmo propuesto por M.C. Rivara.

RESULTADOS:

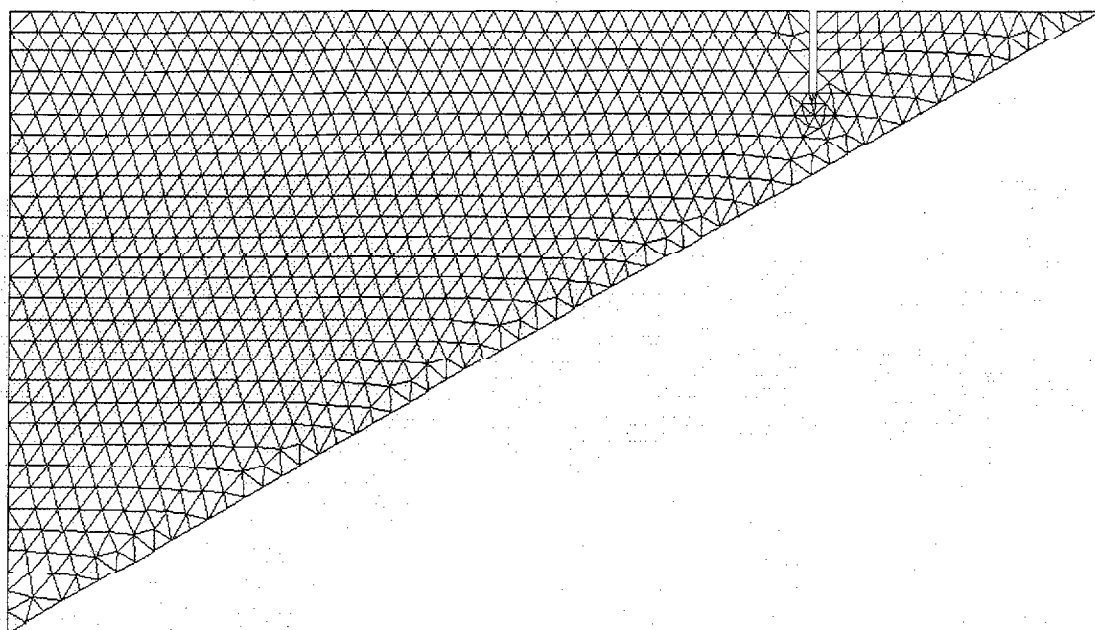
Se presentan las gráficas.



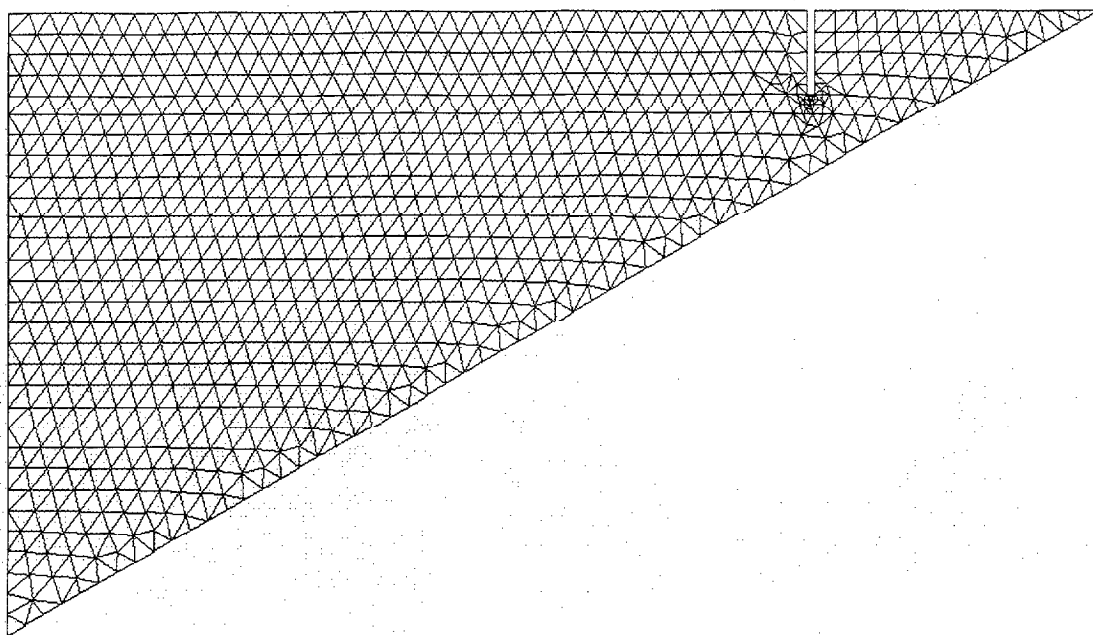
Dominio del problema.



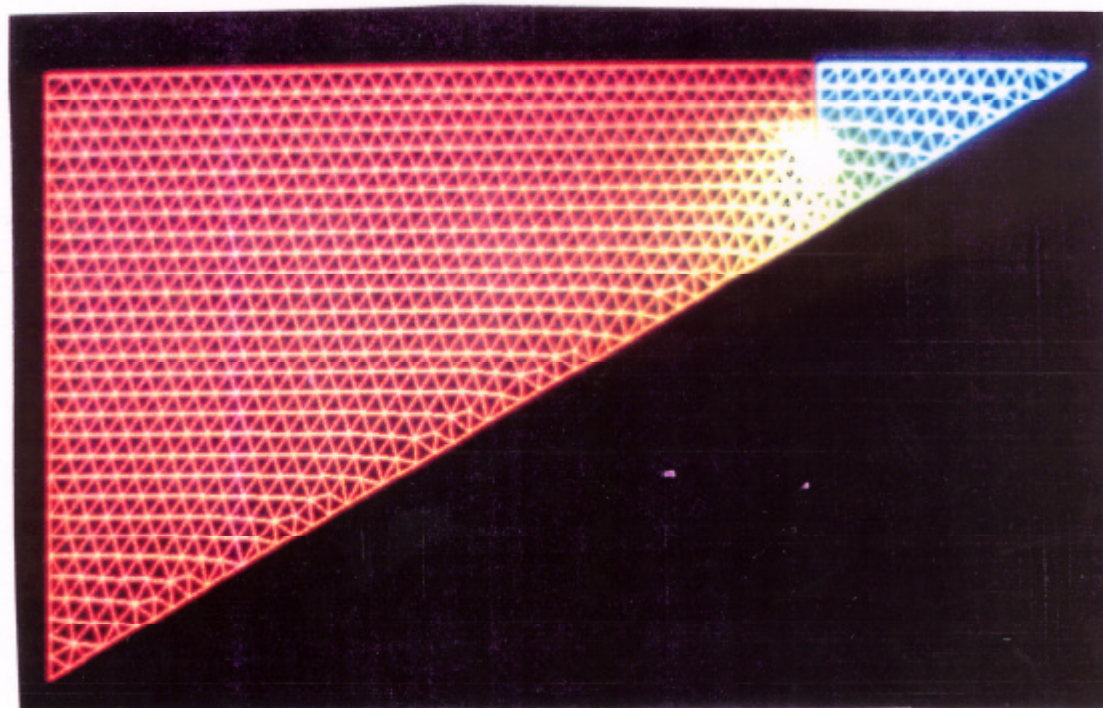
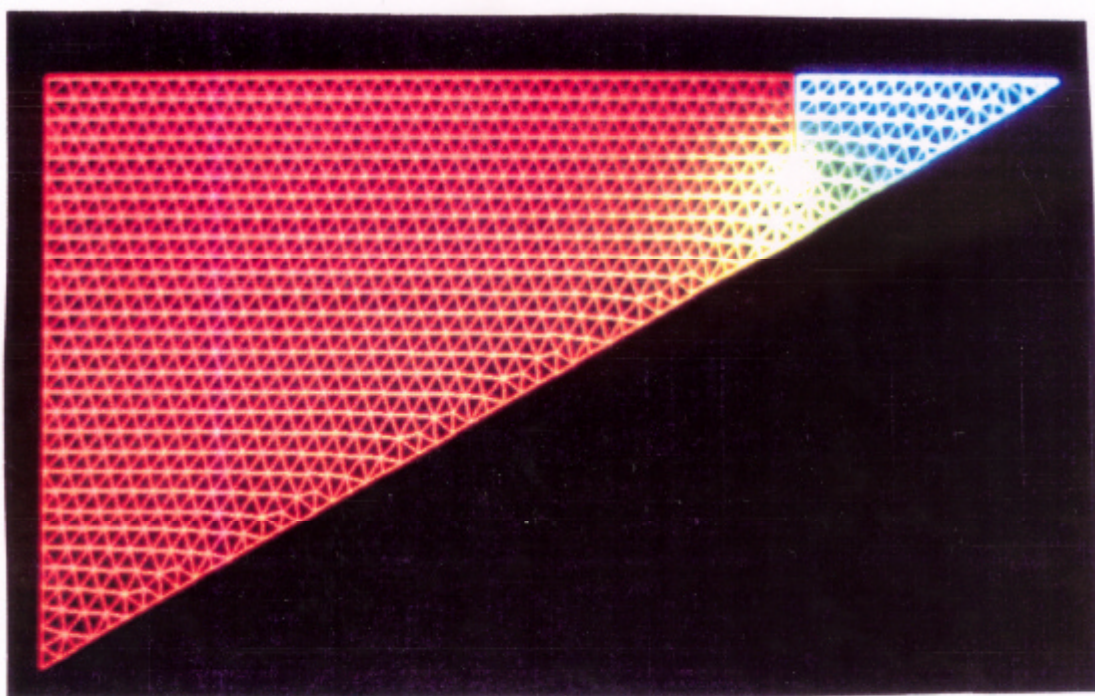
Malla inicial.



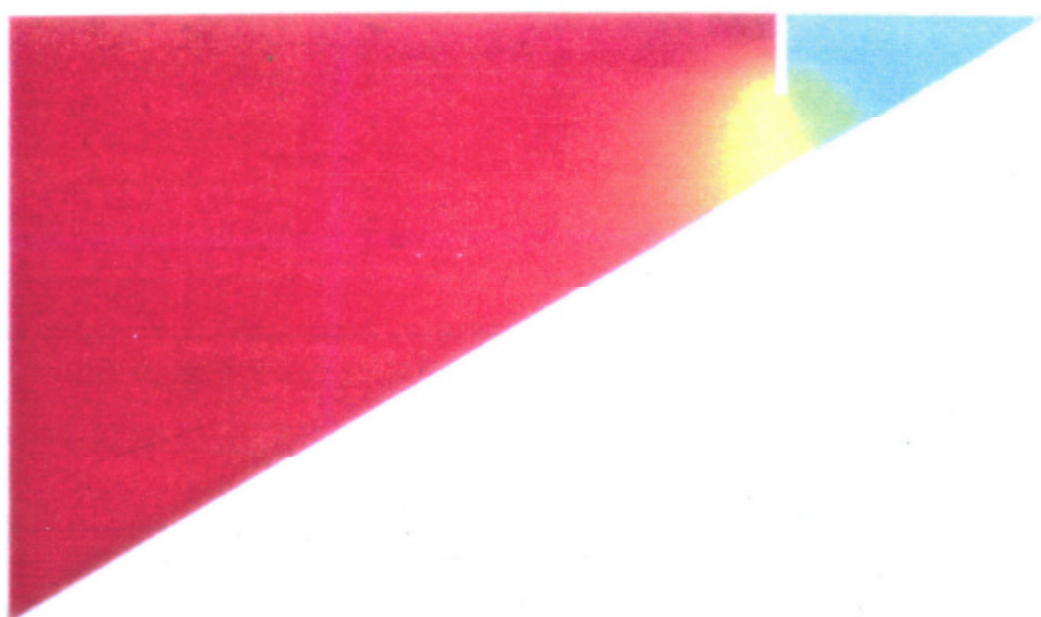
Malla con un refinamiento.



Malla con dos refinamientos.



Mallas anteriores con distribución de la solución.



Solución (máximo en rojo, mínimo en azul)

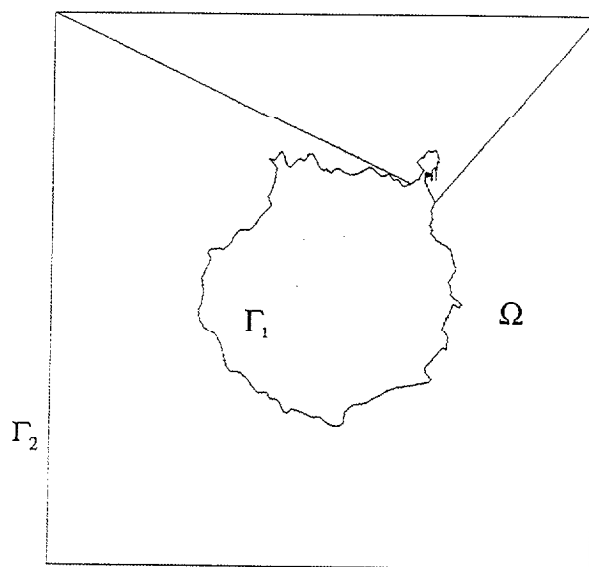
6.4. PROBLEMA DE CONTAMINACIÓN EN ZONAS COSTERAS.

El problema se trata en dos etapas diferenciadas. La primera consiste en la construcción de un campo de velocidades a partir de datos observados y el segundo es un problema de convección-difusión.

A) FORMULACIÓN DEL PROBLEMA: CONSTRUCCIÓN DEL CAMPO DE VELOCIDADES A PARTIR DE DATOS OBSERVADOS.

Para un dominio dado $\Omega \subset R^d$ ($d=2,3$) con frontera $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, buscamos un campo vectorial u que se ajuste a un campo de velocidades u_0 obtenido de la interpolación de medidas experimentales y que verifique el siguiente problema:

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{en } \Omega$$



Dominio del problema.

Si k es el número de medidas observadas sobre el lugar estudiado, el campo u_0 se construye mediante la siguiente interpolación:

$$u_{0i} = \frac{\sum_{j=1}^k u_{ji} \frac{1}{d_j^2}}{\sum_{j=1}^k \frac{1}{d_j^2}}, \quad i = 1, 2$$

siendo u_{ji} la i -ésima componente de la velocidad medida en la j -ésima estación u_{0i} , la i -ésima componente de la velocidad interpolada en un nodo considerado, y d_j la distancia desde la j -ésima estación a ese nodo.

El funcional de ajuste considerado es de tipo mínimos cuadrados,

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u - u_0)^t P (u - u_0)$$

siendo P una matriz diagonal.

Entonces, el campo vectorial u será la solución del problema:

"Encontrar $u \in K$ " que verifica,

$$J(u) = \min_{v \in K} J(v)$$

$$K = \left\{ v, \operatorname{div} v = 0, \quad v \cdot n|_{\Gamma_1} = 0 \right\}$$

El problema equivale a la determinación del punto silla del Lagrangiano:

$$L(v, q) = J(v) + \int_{\Omega} q \operatorname{div} v$$

Concretamente, si $L^2(\Omega)$ es el espacio de funciones de cuadrado integrable y $H^1(\Omega)$ el subespacio de $L^2(\Omega)$ de funciones con primeras derivadas de cuadrado integrable, denotamos:

$$H_{0,\Gamma_2}(\Omega) = \{\varphi \in H^1(\Omega); \varphi|_{\Gamma} = 0\}$$

$$H(\text{div}, \Omega) = \{v \in (L^2(\Omega))^d; \text{div } v \in L^2(\Omega)\}$$

e introduciendo el espacio de funciones vectoriales tal que $v \cdot n = 0$ en Γ_1 , es decir:

$$H_{0,\Gamma_1}(\text{div}, \Omega) = \left\{ v \in H(\text{div}, \Omega); \int_{\Gamma} v \cdot n \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in H_{0,\Gamma_2}(\Omega) \right\}$$

Buscamos la pareja (u, λ) en $H_{0,\Gamma_1}(\text{div}, \Omega) \times L^2(\Omega)$ tal que:

$$L(u, q) \leq L(u, \lambda) \leq L(v, \lambda)$$

$\forall q \in L^2(\Omega)$ y para todo $v \in H_{0,\Gamma_1}(\text{div}, \Omega)$, lo cual es representado por:

$$\frac{\partial L(u, \lambda)}{\partial v} = 0 \quad y \quad \frac{\partial L(u, \lambda)}{\partial q} = 0$$

obteniéndose la siguiente formulación:

$$\int_{\Omega} v^t P u + \int_{\Omega} \lambda \text{div } v = \int_{\Omega} v^t P u_0$$

$$\forall v \in H_{0,\Gamma_1}(\text{div}, \Omega)$$

$$\int_{\Omega} q \text{div } u = 0$$

$$\forall q \in L^2(\Omega)$$

Imponiendo la regularidad al multiplicador de Lagrange, $\lambda \in H^1(\Omega)$ e introduciendo las condiciones sobre u , se obtiene:

$$u = u_0 + P^{-1} \vec{\nabla} \lambda \quad \text{en } \Omega$$

$$-\vec{\nabla} \left(P^{-1} \vec{\nabla} \lambda \right) = \vec{\nabla} u_0 \quad \text{en } \Omega$$

$$-P^{-1} \frac{\partial \lambda}{\partial n} = n \cdot u_0 \quad \text{sobre } \Gamma_1$$

$$\lambda = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_2$$

El método de elementos finitos, aplicado a este problema, nos proporciona los valores de, λ y, a partir de la resolución de la primera ecuación, los valores de u .

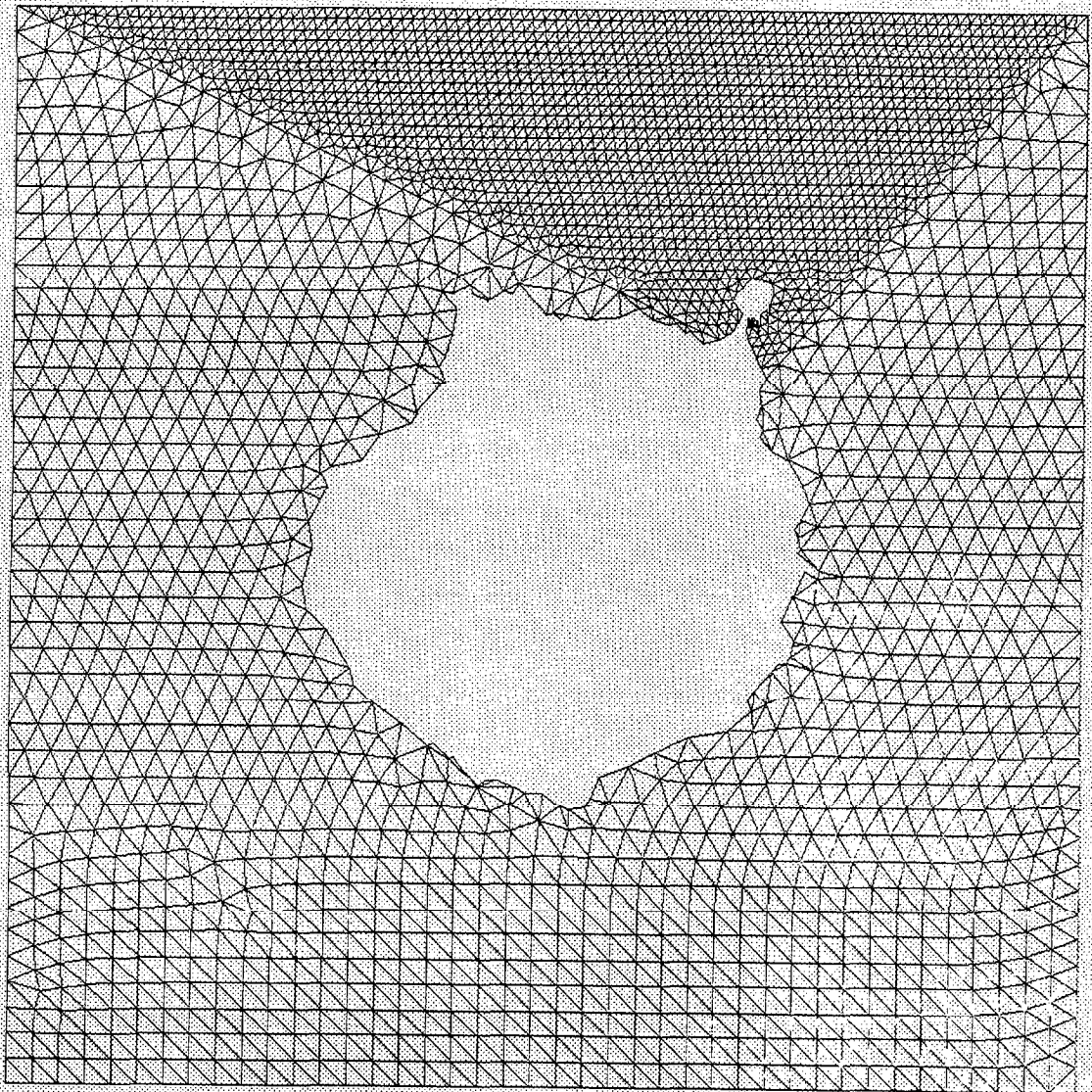
RESOLUCIÓN NUMÉRICA:

Los valores observados para la resolución numérica son:

X	Y	V_x	V_y
6.	0.	-10.	0.
20.	1.	-8.	-8.
28.	16.	-3.	-8.
30.	23.	-0.	-8.
28.	25.	-4.	-4.
25.	29.	-4.	1.
8.	28.	-0.	-6.
2.	15.	-4.	4.

GENERACIÓN DE LA MALLA:

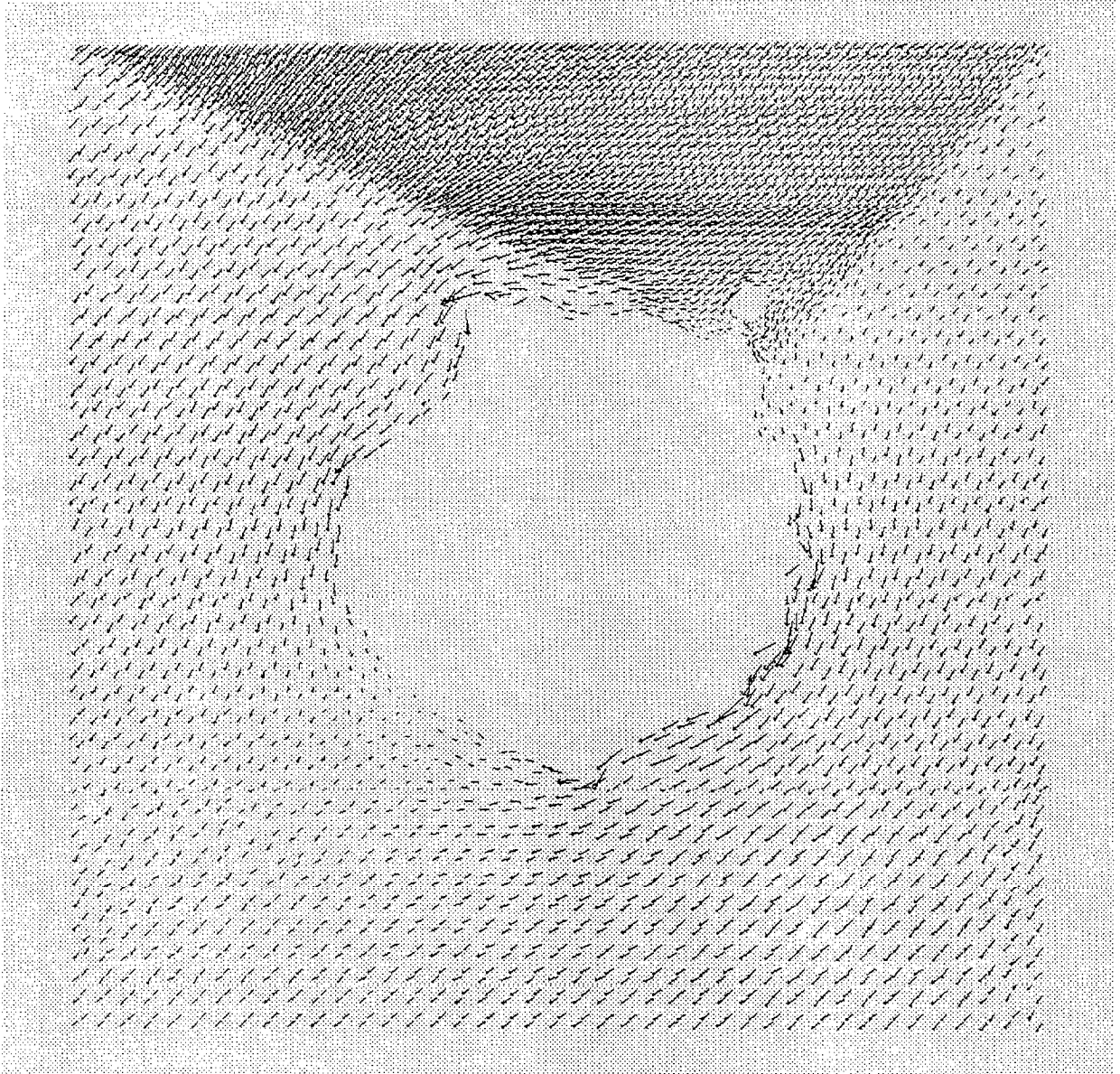
Para la obtención de los contornos curvos de la isla y su discretización se han utilizado las aportaciones dadas en la presente tesis. Para la obtención de la malla se ha utilizado el método de Avance Frontal debido a la alta no convexidad del agujero. Posteriormente se le ha aplicado tres suavizados laplacianos. Para la resolución del problema se ha obtenido una malla refinada aplicando el algoritmo propuesto por M.C. Rivara.



Malla inicial.

RESULTADOS:

Se presenta la siguiente gráfica de velocidades:



B) FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE CONVECCIÓN-DIFUSIÓN.

Consideramos el siguiente problema de convección-difusión definido en un dominio Ω bidimensional, de frontera Γ :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} c - \vec{\nabla} \cdot (K \vec{\nabla} c) = f$$

siendo $c = c(\vec{x}, t)$ solución del problema la concentración de un elemento de fluido en movimiento; ésta depende de su vector de posición $\vec{x} = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j}$, y del tiempo t . El fluido que transporta la magnitud, u , posee un campo de velocidades en régimen estacionario, $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}) = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j}$.

Consideraremos el estudio del modelo lineal, donde la difusión de la magnitud, u , viene determinada por $K = K(\vec{x})$; $f = f(\vec{x}, t)$ son las fuentes externas. Suponemos además conocido el valor inicial,

$$u(\vec{x}, 0) = u_0(\vec{x}) \quad \text{en } \Omega$$

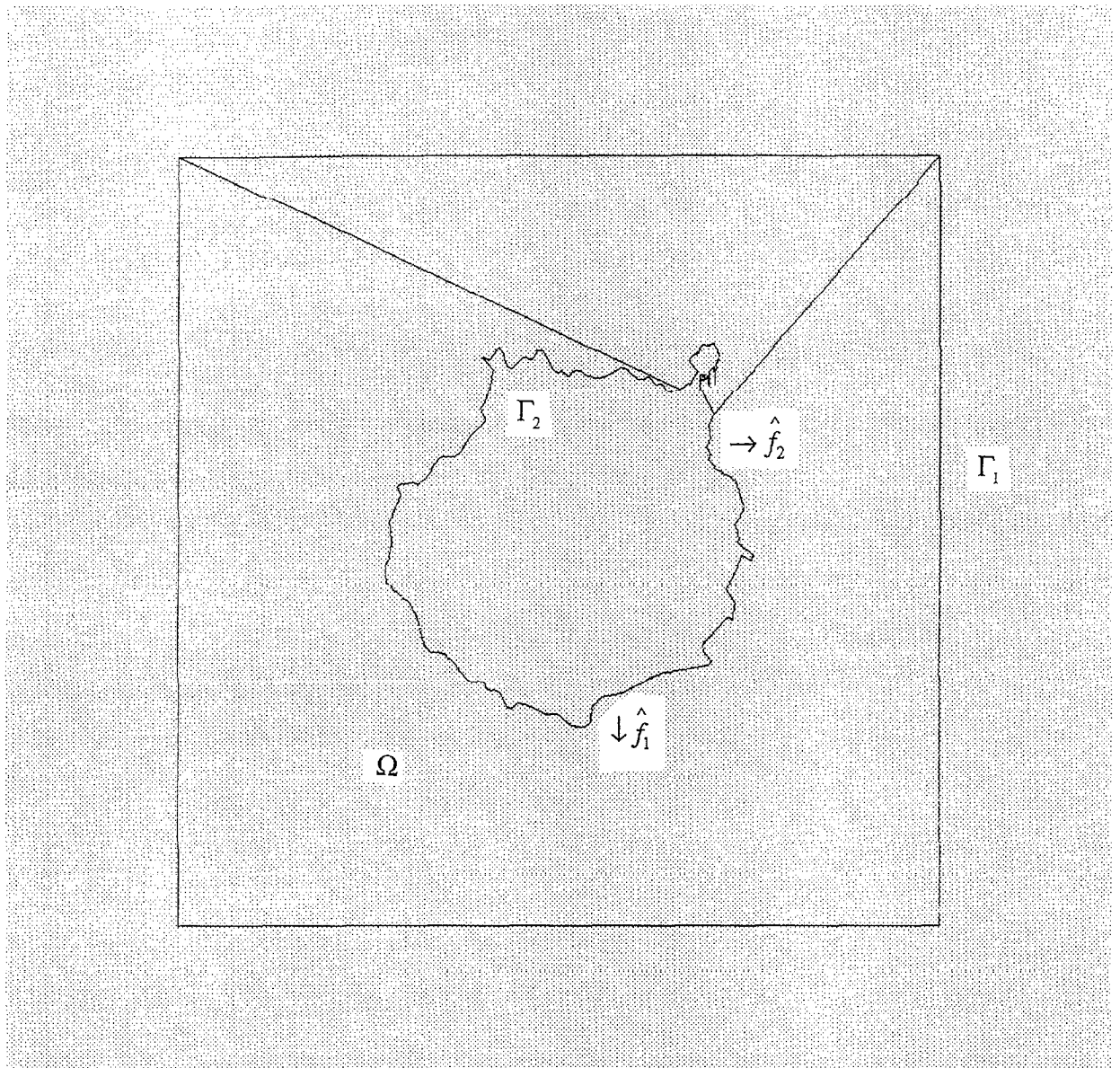
y unas condiciones de contorno en la frontera Γ de Ω :

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \quad / \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$$

de tipo Dirichlet en Γ_1 y de tipo mixta en Γ_2 , de forma que el problema tenga solución única;

$$u|_{\Gamma_1} = \bar{u}(\vec{x}) \quad \text{en } \Gamma_1$$

$$-K(\vec{x}) \frac{\partial u}{\partial n} = h(\vec{x}) u - G(\vec{x}) \quad \text{en } \Gamma_2$$



Dominio del problema.

RESOLUCIÓN NUMÉRICA:

Utilizando el método de las características, y posteriormente mediante la técnica estándar de elementos finitos obtenemos la solución numérica del problema evolutivo

Siendo el esquema numérico considerado:

$$c^{n+1} - \Delta t \vec{\nabla} \left[K \vec{\nabla} c^n \right] = \Delta t \left[c^{n+1} + c^n - \Delta t \vec{u} \vec{\nabla} c^n + \frac{\Delta t^2}{2} \sum_i \left(\vec{u} \vec{\nabla} u_i \right) \frac{\partial c^n}{\partial x_i} + \frac{\Delta t^2}{2} \sum_{i,j} u_i u_j \frac{\partial^2 c^n}{\partial x_i \partial x_j} \right]$$

En la resolución del problema se ha supuesto que existen dos focos puntuales contaminantes $\hat{f}_1$ y $\hat{f}_2$.

GENERACIÓN DE LA MALLA:

Se ha utilizado como malla inicial, la misma correspondiente al problema del campo de velocidades del fluido.

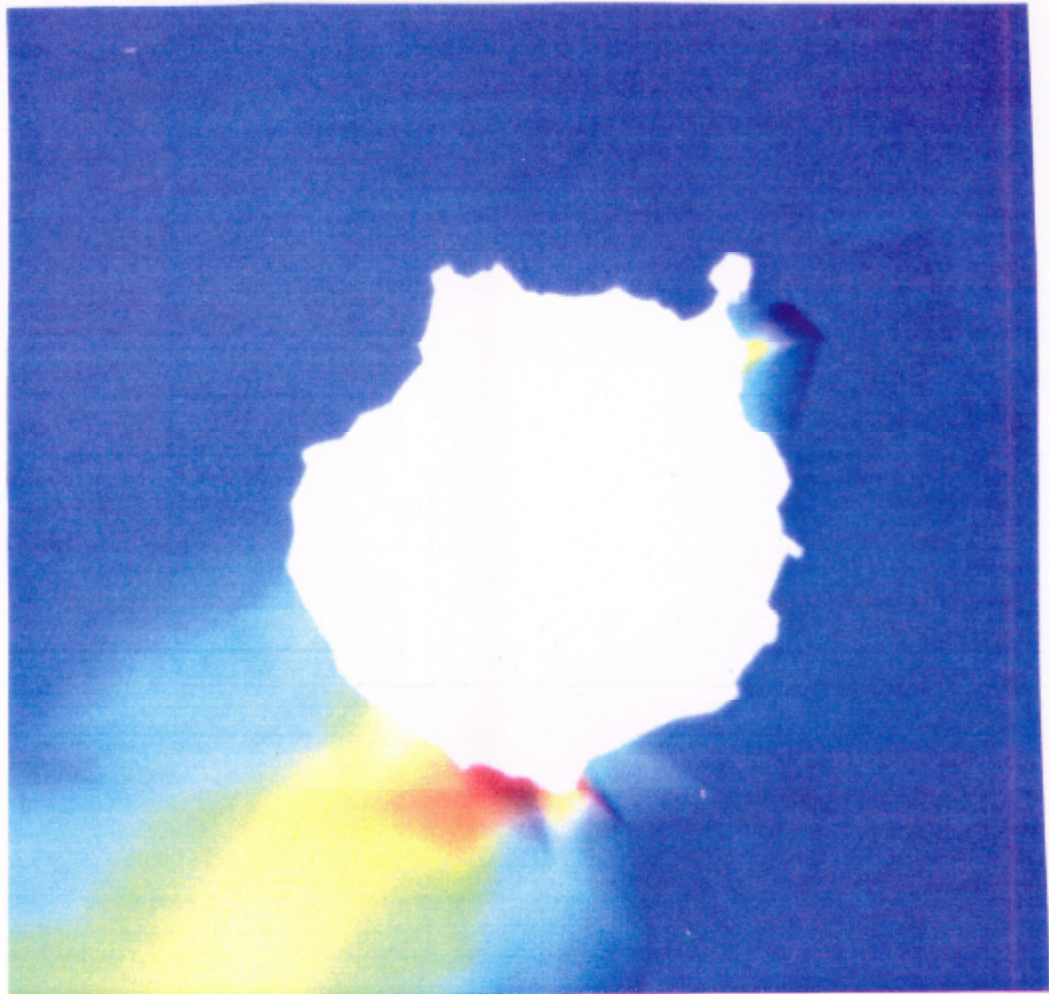
En el proceso de refinamiento se ha utilizado el siguiente estimador de error:

$$e_i = \left[\frac{h_i^2}{24 K_{min}} \int_{\Omega_i} r^2 d\Omega \right]^{\frac{1}{2}}$$

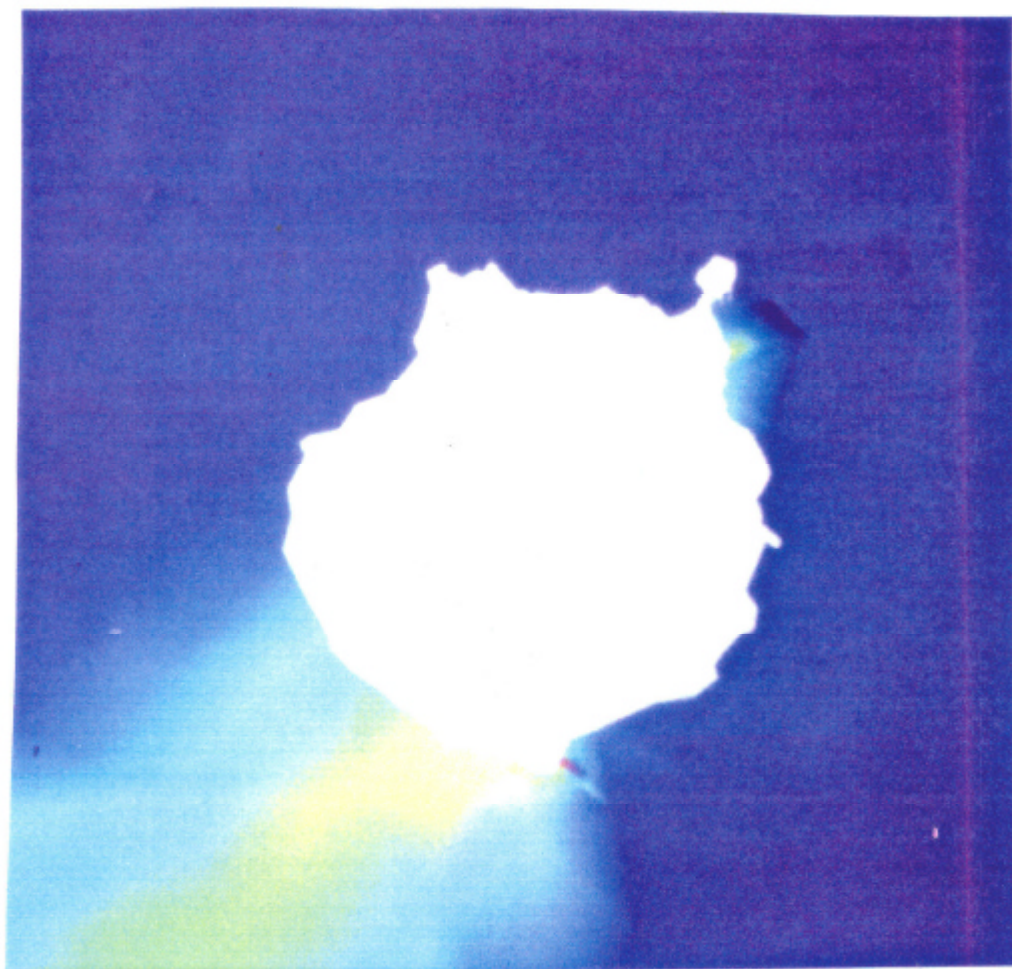
Se considera este indicador para ver su comportamiento al tenerse en cuenta exclusivamente la aportación del residuo de la ecuación.

RESULTADOS:

Se presentan gráficas de isovalores:



Solución con un refinamiento.



Solución con dos refinamientos.

6.5. CONCLUSIONES

Entre las conclusiones del trabajo investigador realizado se describen las siguientes:

1.- Se han desarrollado nuevas técnicas de generación de mallas para la utilización del método de Delaunay en dominios planos no convexos y un nuevo algoritmo para la elección de puntos en la construcción de un triángulo por el método de Avance Frontal, que han proporcionado resultados satisfactorios.

2.- Para un mismo dominio se ha observado que el método de Delaunay propuesto consume menor tiempo de CPU que el método de Avance Frontal, pero éste es más idóneo cuando los contornos de los agujeros son a su vez no convexos.

3.- Para la regularización de la malla se aplica una nueva técnica utilizando un algoritmo genético simple, que aunque es de mayor coste computacional que el suavizado laplaciano, es más versátil en el sentido que permite elegir distintas funciones objetivo para suavizar la malla.

4.- En la aproximación de contornos curvos, se aporta una alternativa a otras técnicas de aproximación de curvas mediante uso de parametrización, la vía Spline cúbica directa e inversa que, con un mínimo coste computacional, permite definir contornos curvos con precisión utilizando un número pequeño de puntos en el preproceso.

5.- En la discretización de tramos curvos de contornos, se propone la utilización del método de Newton que proporciona una formulación sencilla

y efectiva, permitiendo la partición de dichos tramos curvos en distintos arcos de longitud predefinida.

6.- La estructura informática implementada nos ha permitido afrontar aplicaciones con diferentes densidades de mallas definidas a priori, que posibilitaron soluciones a problemas con dominios de geometría y naturaleza compleja.

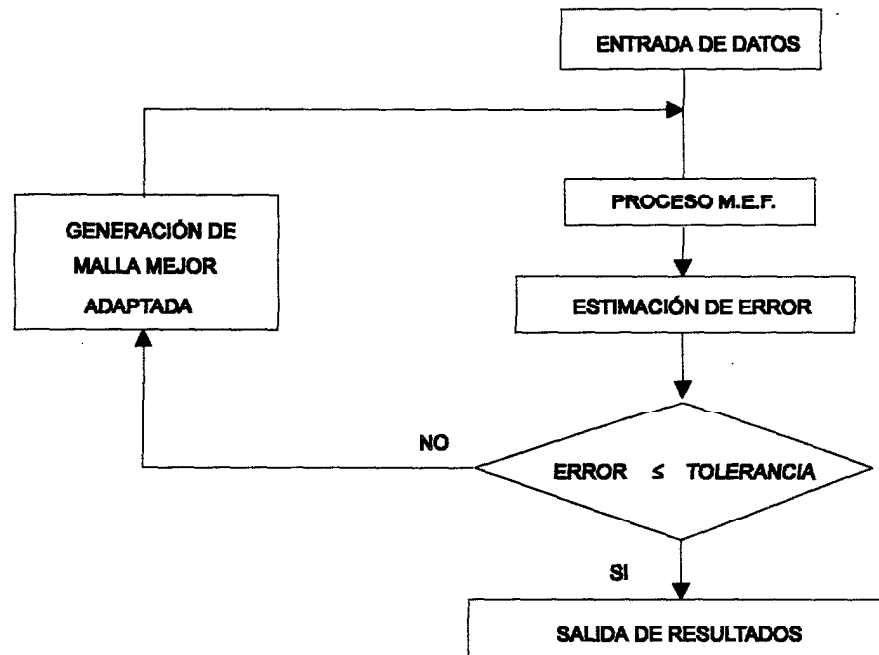
7.- Se ha realizado la incorporación del trabajo desarrollado, a un código de elementos finitos, elaborándose e implementándose algoritmos para la obtención de las conectividades de mallas, condiciones de contorno, macroinstrucciones, etc., que han permitido minimizar el tiempo en la entrada de datos de definición de un problema.

8.- Se aportan resultados iniciales de adaptación de mallas con uso de la estrategia descrita en las líneas futuras, con mallas generadas según las técnicas desarrolladas. Los resultados obtenidos deben contrastarse en futuros trabajos donde se obtenga la nube de puntos interior al dominio mediante algoritmos que tengan en cuenta las diferentes densidades de malla definidas por indicadores de error en la resolución adaptativa.

CAPÍTULO 7. LINEAS FUTURAS

7.1. ADAPTACIÓN DE MALLAS.

Estudio de una resolución adaptativa con generación de mallas utilizando los métodos propuestos en las presente Tesis.



7.1.1 INDICADORES DE ERROR Y ESTRATEGIA DE CREACIÓN DE MALLAS:

El disponer de estimadores de error eficaces para evaluar la calidad de la solución numérica en procesos adaptativos y de indicadores de error que nos señale donde es preciso actuar a modificar la malla de modo más intenso a fin de adaptarla del modo más óptimo al problema a resolver, son cuestiones relevantes en cualquier proceso de resolución adaptativa. Posteriormente, quedará tratar como establecer el proceso adaptativo e generación de los nuevos mallados, es decir, acometer el paso de la malla M_n a la nueva malla M_{n+1} .

El estudio de la estimación del error dependerá en general del tipo de problema a resolver, y es un tema que no está del todo resuelto en la actualidad. Autores como Babuska, Zienkiewicz, Kelly, Gago, entre otros, realizan un considerable esfuerzo en el estudio de este problema, y han propuesto algunos estimadores para problemas elípticos en 2-D.

Si el problema variacional es elíptico como indicadores de error ε_i que nos muestren de forma efectiva aumentar o disminuir la discretización de densidad en cada etapa del proceso adaptativo, se pueden utilizar entre otros los indicadores que a continuación se exponen:

INDICADOR 1

$$\varepsilon_i = \left[\frac{h_i^2}{24K_{min}} \int_{\Omega_i} r^2 d\Omega + \frac{h_i}{24K_{min}} \int_{\Gamma_i} \left(K \frac{\partial u_h}{\partial n} \right)^2 d\Gamma \right]^{\frac{1}{2}}$$

donde h_i es el diámetro del elemento Ω_i de frontera Γ_i ; K_{min} es el valor mínimo de la difusión $K = K(x)$ en Ω_i ; $\left(K \frac{\partial u_h}{\partial n} \right)$ representa el salto de flujo de la solución numérica $u_h = u_h(x)$, obtenida en la malla a adaptar, en la frontera Γ_i de Ω_i ; $r = r(x)$ es el residuo de la ecuación:

$$-\vec{\nabla} \cdot \left(K \vec{\nabla} u \right) = f$$

INDICADOR 2

$$\varepsilon_i = h_i \left| \vec{\nabla} u_h \right|$$

Este indicador localiza las capas límites que se puedan ocasionar en un problema, estacionario o evolutivo. Nos mide la máxima variación

experimentada por la solución numérica en el elemento Ω_i , al ser $\left| \nabla \vec{u}_h \right|$ constante en todo Ω_i , elementos triangulares de tres nodos e interpolación lineal.

Se puede ver que los indicadores de error propuestos verifican la propiedad:

$$\varepsilon \rightarrow 0 \text{ cuando } h \rightarrow 0$$

Una vez conocida la distribución de los indicadores de error ε_i , estamos en disposición de determinar los nuevos elementos que deben conformar la nueva malla, mejor adaptada, para la resolución numérica del problema.

Podríamos definir una estrategia de adaptación ideal como aquella que una vez fijada la precisión exigida a la solución del problema, se ajuste a dicha precisión en el menor tiempo, partiendo de un mismo mallado inicial. Normalmente, el mallado final que consigue una estrategia ideal no es el óptimo en cuanto a número de nodos introducidos, ya que lograr esto llevará en la mayoría de los casos un excesivo tiempo.

Las cuestiones relevantes que una estrategia de búsqueda de mejores discretizaciones a considerar en la resolución adaptativa pueden ser:

a) Qué zonas del dominio mallado no son adecuadas para la adaptación en concordancia con la información de las estimaciones del error evaluadas en los elementos del mallado.

b) Con qué intensidad actuamos en las zonas en que el error es apreciable.

Se pueden considerar distintas opciones que se exponen a continuación para responder a cada una de estas preguntas. Una vez calculados los indicadores de error en cada elemento, estaremos en disposición de enfrentarnos a las cuestiones anteriormente señaladas para definir la nueva malla.

Se aumentará la discretización en aquellos elementos cuyo indicador de error sea mayor o igual que un determinado valor. Entre las distintas opciones para definir este valor tenemos:

1.- Utilizar la media geométrica de los indicadores de error de todos los elementos del mallado.

$$M_1 = \left[\prod_{i=1}^N \epsilon_i \right]^{\frac{1}{N}}$$

2.- Utilizar la media aritmética.

$$M_2 = \frac{\sum_{i=1}^N \epsilon_i}{N}$$

3.- Utilizar la media cuadrática.

$$M_3 = \left[\frac{\sum_{i=1}^N \epsilon_i^2}{N} \right]^{\frac{1}{2}}$$

4.- Utilizar un parámetro $\gamma \in [0,1]$ propuesto por diferentes autores, fijado a priori para todas las etapas adaptativas.

$$M_4 = \gamma \max_{i=1,N} (\varepsilon_i)$$

La elección de los primeros criterios (medias) depende de la mayor o menor intensificación de densidad de malla que se desee.

En el último criterio, la intensidad de discretización depende exclusivamente del valor máximo de los indicadores de error, y no de la distribución de éstos como ocurre en los tres criterios anteriores.

En la línea futura propuesta se presenta una aplicación en la cual una vez obtenidos los indicadores de error en cada elemento consideramos los siguientes criterios de adaptación de mallas:

Sea ε_i indicador de error en Ω_i

1.- $\varepsilon_i \leq a\varepsilon_{max}$, los tres nodos del elemento son eliminados. No se eliminarán aquellos que pertenezcan a la definición del contorno.

2.- $b\varepsilon_{max} \leq \varepsilon_i \leq c\varepsilon_{max}$, además de los tres nodos del elemento se considera un nuevo punto localizado en el centro geométrico del mismo.

3.- $c\varepsilon_{max} \leq \varepsilon_i \leq d\varepsilon_{max}$ además de los tres nodos del elemento se considera tres nuevos nodos localizados en los puntos medios de cada arista del elemento.

4.- $d\varepsilon_{max} \leq \varepsilon_i \leq e\varepsilon_{max}$ en este caso se realizan dos pasos del procedimiento anterior.

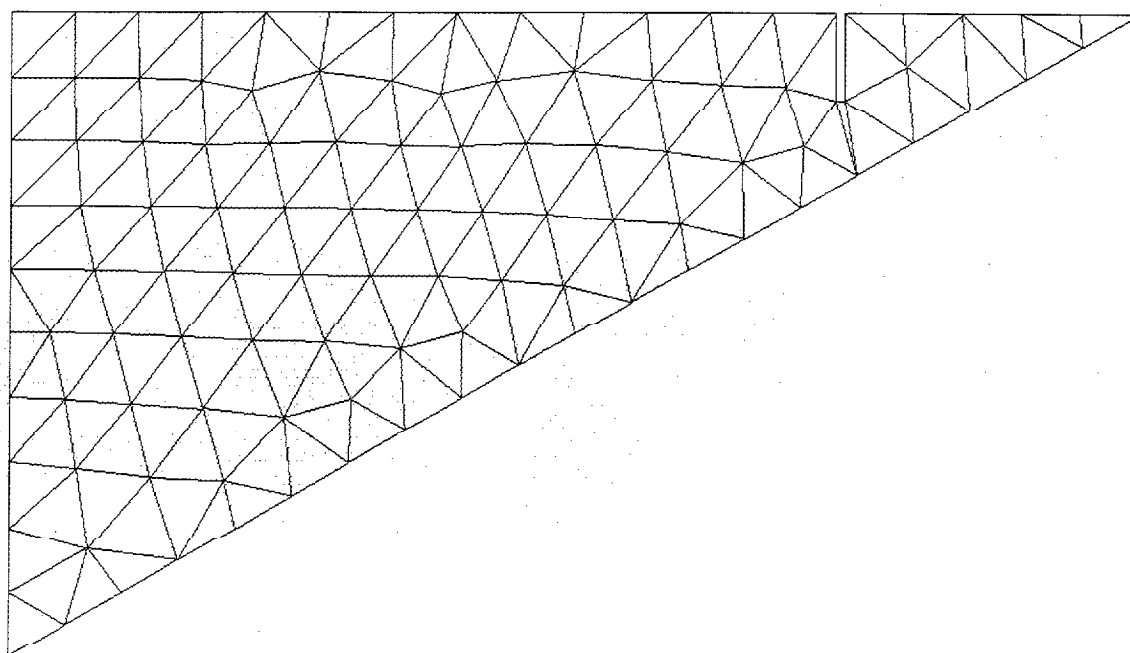
a, b, c, d, e, parámetros variables elegidos para cada problema comprendidos en el intervalo $[0,1]$, siendo $a < b < c < d < e$.

7.1.2. APLICACIONES

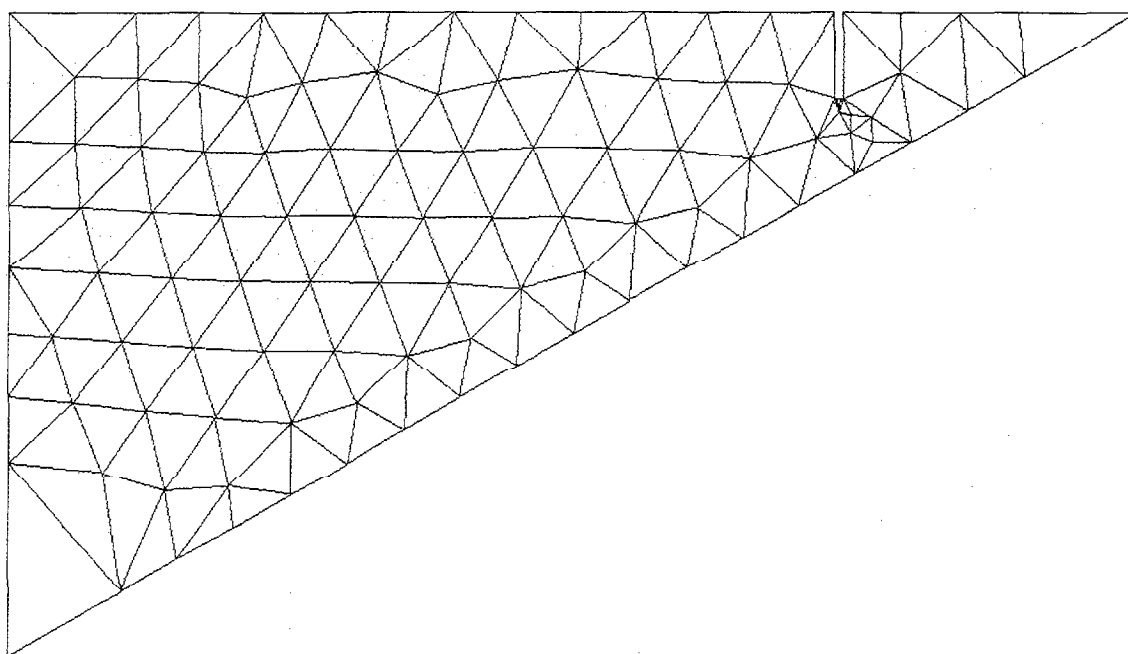
7.1.2.1. FILTRACIÓN EN ACUÍFERO CONFINADO BAJO UN PILOTE.

Se ha acometido la resolución de la aplicación 6.3 utilizando la estrategia de adaptación de malla iniciada.

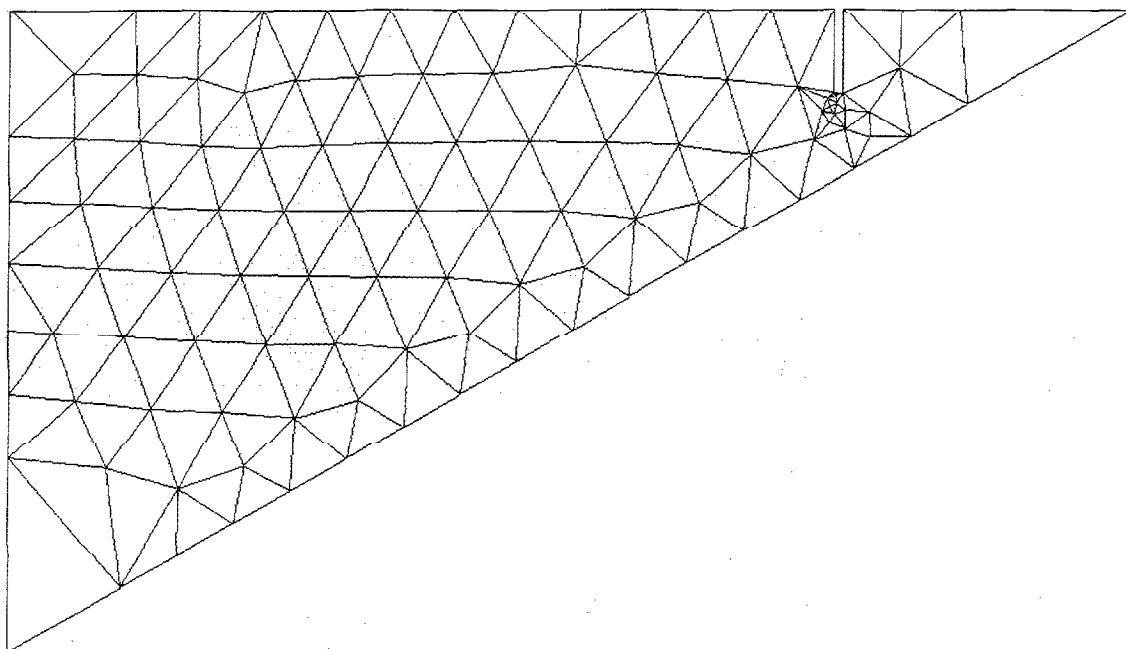
A continuación se presenta la malla de partida así como las mallas adaptadas y la solución.



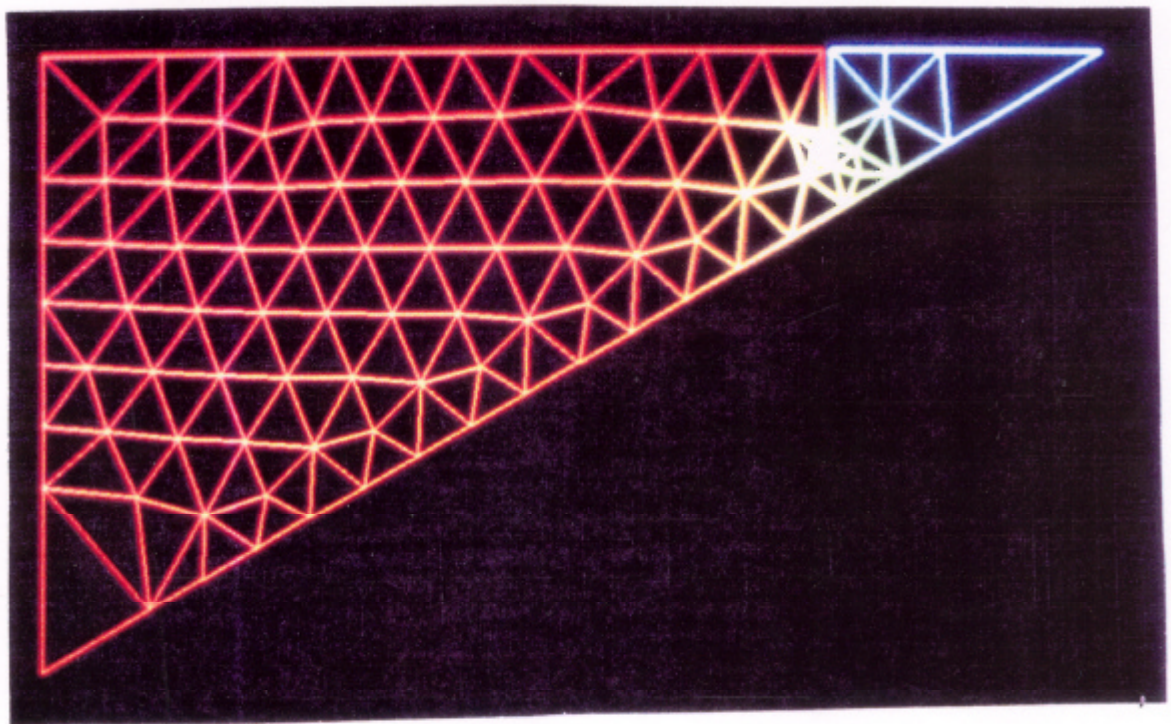
Malla inicial.



Malla adaptada 1.



Malla adaptada 2.



Solución (máximo en rojo, mínimo en azul).

7.1.2.2. PROBLEMA DE UN INTERCAMBIADOR DE CALOR DE FLUJO
CRUZADO GAS-PARTICULAS SOLIDAS.

DEFINICIÓN:

Se trata del problema de transferencia de calor en sistema de flujo cruzado, donde en una dirección se desplazan partículas sólidas y en dirección perpendicular atraviesa un gas, es decir un sistema de lecho móvil fluidizado con intercambio de calor en su interior entre el gas y granulados sólidos.

La porosidad ε define en Ω la ocupación de sólido y gas en el sistema o dominio Ω .

La definición del problema corresponde a un problema evolutivo de convección-difusión tanto para la fase sólida como la correspondiente ecuación para el fluido:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\alpha}{\varepsilon} (\theta - T) + \beta \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{fase fluido}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial \theta}{\partial t} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\alpha^*}{(1-\varepsilon)} (T - \theta) + \beta^* \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad \text{fase sólido}$$

Podemos observar que ambas ecuaciones en Ω están acopladas. Las constantes α y α^* incorporan en su valor el tamaño de partículas y coeficientes convectivos de interacción fluido-partícula además de densidades y capacidades caloríficas.

Las constantes β y β^* son coeficientes para cada fase difusivas y por tanto en el intervienen las conductividades térmicas efectivas

correspondientes a cada una de las fases.

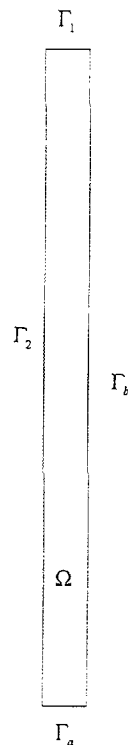
Consideremos en la aplicación que nos trata condiciones impuestas en fronteras de temperaturas en las entradas del gas y del sólido. En las fronteras de salida de cada fase consideramos transferencia de calor por convección con el exterior:

$$T = T_1 \quad \text{en} \quad \Gamma_2$$

$$\theta = \theta_1 \quad \text{en} \quad \Gamma_1$$

$$-K \frac{\partial T}{\partial x} = h(T - T_\infty) \quad \text{en} \quad \Gamma_b$$

$$-K^* \frac{\partial T}{\partial x} = h(\theta - T_\infty) \quad \text{en} \quad \Gamma_a$$



Dominio del problema.

RESOLUCIÓN NUMÉRICA:

Se ha optado por considerar una formulación explícita para el cálculo de temperaturas correspondiente a cada fase, por tanto es llevado a cabo desacoplamiento de las dos ecuaciones diferenciales que rigen el proceso de transferencia de calor en Ω .

La formulación considerada es una extensión y adaptación a dos fases para nuestro problema de esquema explícito propuesto por Montenegro en su tesis doctoral del problema de convección difusión estándar de fase y consistente en integrar el sistema diferencial a lo largo de las líneas características de desplazamientos de cada partícula sólida o del fluido, concretamente usamos el esquema:

$$\begin{aligned}\theta^{n+1} &= \theta^n - \Delta t v \frac{\partial \theta^n}{\partial y} + \frac{1}{2} (v \Delta t)^2 \frac{\partial^2 \theta^n}{\partial y^2} + \Delta t v \beta^* \frac{\partial^2 \theta^n}{\partial y^2} + \frac{\Delta t \alpha^*}{1 - \varepsilon} (T^n - \theta^n) \\ T^{n+1} &= T^n - \Delta t u \frac{\partial T^n}{\partial x} + \frac{1}{2} (u \Delta t)^2 \frac{\partial^2 T^n}{\partial x^2} + \Delta t u \beta \frac{\partial^2 T^n}{\partial x^2} + \frac{\Delta t \alpha}{\varepsilon} (\theta^n - T^n)\end{aligned}$$

Ambas ecuaciones se integran en Ω mediante la técnica o formulación variacional estándar a fin de incorporar condiciones de contorno de tipo natural definidas anteriormente en las fronteras Γ_a y Γ_b .

En la resolución adaptativa hemos considerado como indicador de error:

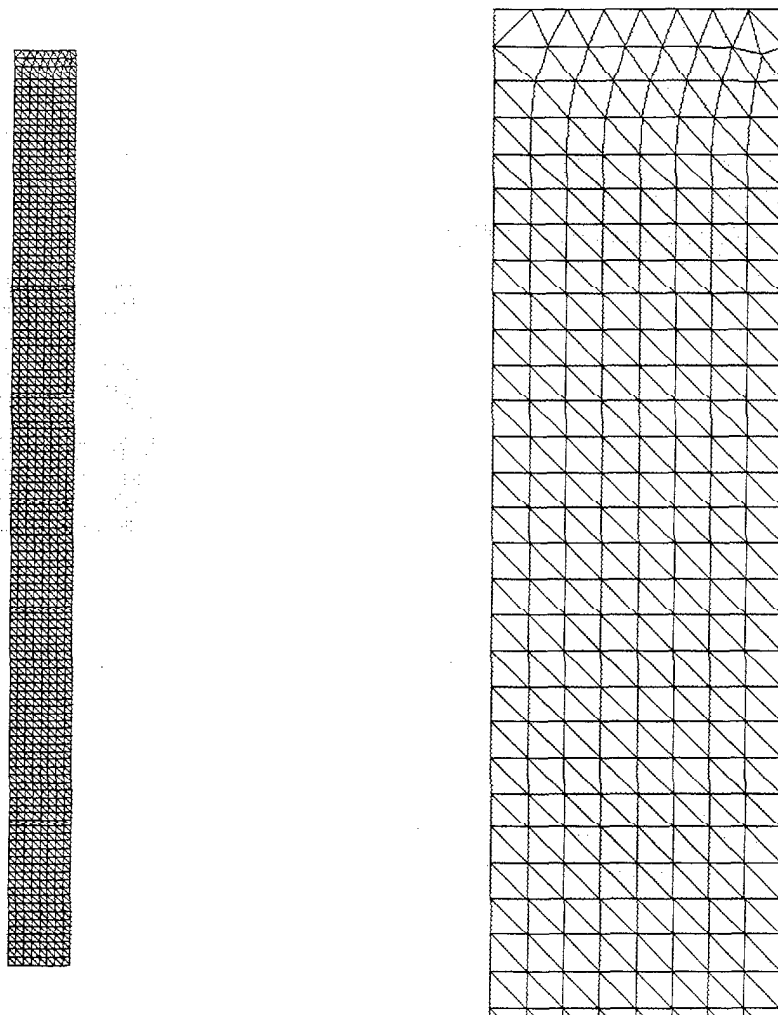
$$e_i = \left(\vec{\text{gra}} \theta \right)^2 + \left(\vec{v} \cdot \vec{\text{gra}} T \right)^2$$

Este indicador tiene en cuenta la velocidad del gas puesto que la del

sólido se considera despreciable a efectos de errores en la solución.

GENERACIÓN DE LA MALLA:

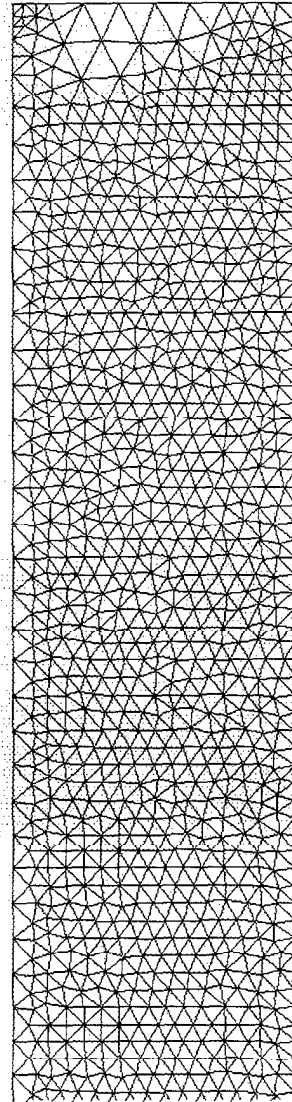
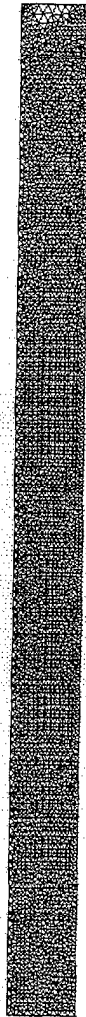
Para la obtención de la malla se ha utilizado el método de Avance Frontal. Posteriormente se le ha aplicado tres suavizados laplacianos. Para la resolución del problema se ha obtenido una malla refinada aplicando la técnica de adaptación de mallas propuesta en la línea futura de la presente tesis.



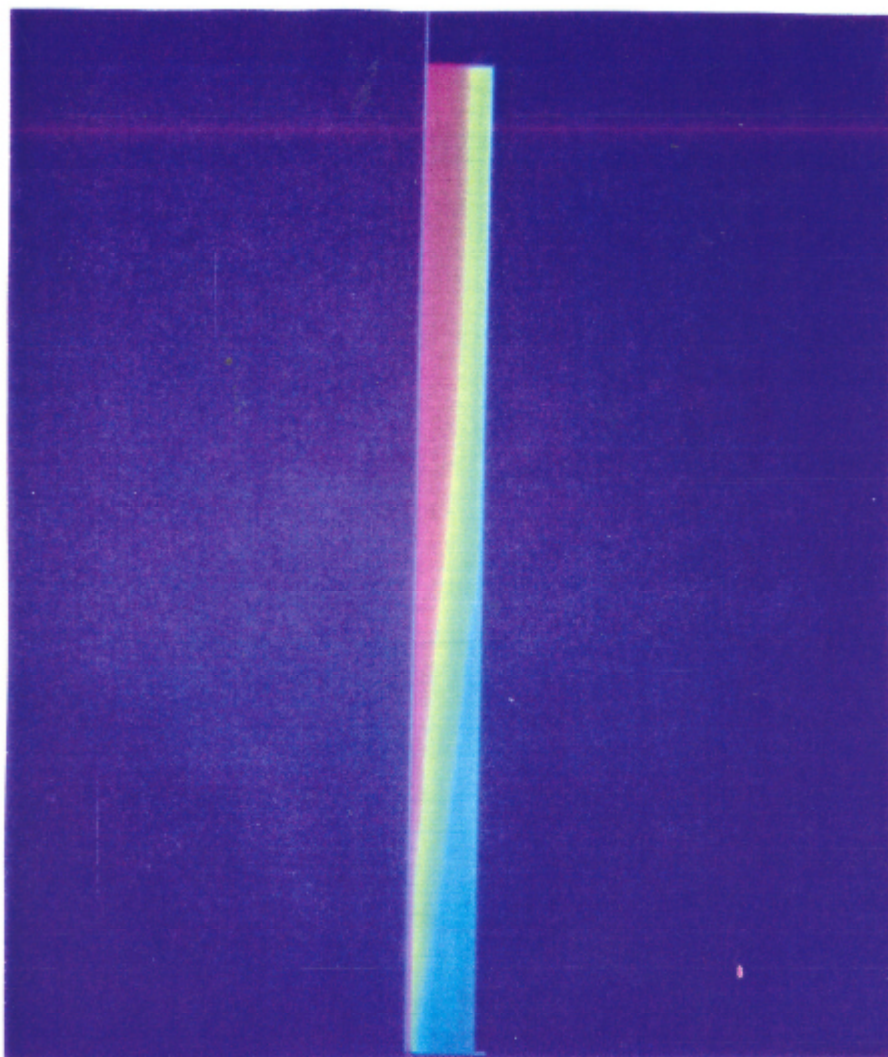
Malla inicial y zoom de zona.

RESULTADOS:

A continuación se presenta las gráficas de la malla adaptada y una gráfica de la distribución de temperaturas del gas.



Malla adaptada y zoom de zona.



Gráfica de distribución de temperaturas del gas (máximas en rojo).

7.2 OTRAS LINEAS FUTURAS

- Estudio de funciones objetivos para la utilización del alisado de la malla mediante algoritmos genéticos simples.

Ademas de profundizar en el estudio de los algoritmos genéticos aplicados a la generación de mallas, deben implementarse funciones objetivos para la regularización de mallados que estudien márgenes de tolerancia admisibles de los valores de los ángulos interiores de los triángulos, etc.

- Nuevas estrategias de adaptaciones de mallas, incluyendo conexión con p-adaptativo.

Las técnicas propuestas de generación y adaptación de mallas pueden utilizarse en una resolución adaptativa aumentando el grado de los polinomios de interpolación. El disponer de un código adaptativo que permita utilizar estrategia de adaptación de mallas combinado con p-adaptativo es de sumo interés a fin de aumentar la calidad de la solución numérica con ordenes de convergencia altos en la resolución del problema.

- Otras estrategias de generación de nube interna de puntos.

Creación de la nube de puntos interna al dominio basada en la localización de ésta, a través de vectores normales a la línea de avance en los nodos de la misma y en parámetros locales que definan una función densidad para controlar la calidad de la malla.

CAPÍTULO 8. BIBLIOGRAFÍA

BIBLIOGRAFÍA:

- Akhras, G. y Dhatt, G." An Automatic Node Relabelling Scheme for Minimizing a Matrix or Network Bandwidth", Int. Jour Num. Meth. in Eng., 10,787-797,1989.
- Babuska, I; Szabo, B.A. y Katz, I.N."The p-version of the Finite Element Method",Center for Computational Mechanics, Washington University, SINUM.
- Babuska, I. "The Self-Adaptative Approach in the Finite Element Method". J.Whiteman, ed. Mathematics of Finite Elements with Applications_ MAFELAP, 1975, Academic Press, New York, 1977.
- Babuska, I. y Dorr, M."Error Estimates for the Combined h and p versions of Finite Element Method", Numer. Math.,25,257-277,1981.
- Babuska, I. y Guo, B."The h-p version of Finite Element Method, Part 2", Mech. 1,203-220,1986.
- Babuska, I. y Suri, M."The h-p version of the Finite Element Method with Quasi-Uniform Meshes",Mathematical Modelling and Numerical Analysis, Vol.21,199-238,1987.
- Babuska, I. y Suri, M."The Optimal Convergence rate of the p-version of the Finite Element Method", SIAM J. Numer. Anal. Vol.24, Nº 4, 751-776, 1987.
- Babuska, I. y Guo, B."The h-p version of Finite Element Method for Domains with Curved Boundaries" SIAM J. Numer. Anal 25,837-861,1988.

- Benet, J.A. y Botkin, M.E." Shape Optimization of Two-Dimensional Structures with Geometric Problem Description and Adaptative Mesh Refinement", General Motors Research Publication, GMR-4297,1983.

- Boots, B.N." Delaunay Triangles: An Alternative Approach to Point Pattern Analysis", Proc. Assoc. Amer. Geographers, vol. 6, 26-29,1974.

- Bowyer, A." Computer Dirichlet Tessellations", Comp. Jour., vol 24, num. 2,162-166,1981.

- Bugada, G. "Utilización de técnicas de estimación de error y generación automática de mallas en procesos de optimización estructural" tesis doctoral, E.T.S.I. de Caminos, Canales y Puertos, Barcelona, 1990.

- Carey, G.F. y Oden, J.T."Finite Elements: A Second Course" Prentice-Hall.1983.

- Carey, G.F. y Oden, J.T."Finite Elements: Computational Aspect" Prentice-Hall.1984.

- Cavendish, J.C. "Automatic Triangulation of Arbitrary Planar Domains for the Finite Element Method" Int. Jour. Num. Meth.Eng., Vol. 8, 679-696, 1974.

- Cescotto, S. y Zhou Ding Wu," A Variable-Density Mesh Generation for Planar Domains", Int. Jour Num. Meth. in Eng., 5,473-481,1989.

- Cheng, J.H., y otros "Quadtree/Octree Meshing with Adaptive Analysis, Numerical Grid Generation in Computational Fluid Mechanics". Miami, 1988.

- Cuesta, P., Montero, G., Winter, G. "Aplicación de la Triangulación de Delaunay y Avance Frontal Mejorado en Dominios Planos no Convexos". Actas del XII C.E.D.Y.A., II Congr. de Mat. Apl., Oviedo, 1991.

- Cuesta, P., Montero, G., Winter, G. "Triangulation Algorithms for Surfaces Approximation". Actas del Int. Congr. Extrapol. and Rat. Approx. Tenerife, 1992.

- Cuesta, P., Galante, M., Montero, G. "Aplicación de Algoritmos Genéticos en el Suavizado de Mallas". Congr. de Met. Num. en Ing. y Ciencias Apl. Chile, 1992.

- De Boor, C. "A Practical Guide to Spline". Springer-Verlag. New York, 1978.

- Diez, F. "Métodos Numéricos en Problemas Elípticos con Singularidades. Una Recapitulación", Seminario del Departamento de Cálculo Numérico e Informática. E.T.S. Ingenieros de Minas de Madrid, 1986.

- Doursat, C. y Perronet, A. "Maillage Structuré Versification de L'injectivite et Amelioration in Calcul des Structures et Intelligence Artificielle". Pluralis, 1989.

- Frey, W.H. y Cavendish, J.C. "Fast Planar Mesh Generation Using the Delaunay Triangulation", General Motors Research Publication, GMR-4555, 1983.

- Fritz, W. "Two-Dimensional and Three-Dimensional Block Structured Grid Generation Techniques". Grenoble, 1987.

- George, P.L. "Generation Automatique de Maillages". Masson, Paris 1991.
- Georges, M.K. y Shephard, M.S. "Automatic Adaptive 2-D System for the hp-Version of the Finite Element Method", Int. Jour Num. Meth. in Eng., 32,867-893,1991.
- Green, P.J. y Sibson, R." Computing Dirichlet Tessellations in the Plane", Comp. Jour., vol 21, num. 2,168-173,1978.
- Herranz, J. "Nuevos Elementos Singulares de Alto Orden. Aplicación a la Mecánica de Fractura", Tesis Doctoral U.P.M.,1991.
- Holland, J.H. "Processing and Processors for Schemata". E.L.Jacks (Ed.) Associative Information Processing, 127-146, 1971.
- Holland. J.H. "Genetic Algorithms and the Optimal Allocations of Trials". SIAM Journal of Computing, 88-105, 1973.
- Holland. J.H. "Adaptation in Natural and Artificial". University of Michigan Press, 1975.
- Hussain, M.A; Vasilakis, J.D. and Pu, S.L. "Quadratic and Cubic Transition Elements", Int. Jour Num. Meth. in Eng., 17,1397-1406,1981.
- Jin, H. y Wiberg, N." Two-Dimensional Mesh Generation Adaptive Remeshing and Refinement", Int. Jour Num. Meth. in Eng., 29,1501-1526,1990.
- Johnston, B.P. y Sullivan, J.M. " Fully Automatic Two Dimensional Mesh Generation Using Normal Offsetting", Int. Jour Num. Meth. in Eng.,

33,425-442,1992.

- Kelly, D.W; Gago, J.P; Zienkiewicz, O.C. and Babuska, I. "A Posteriori Error Analysis and Adaptive Processes in the Finite Element Method", Int. Jour Num. Meth. in Eng., 19, 1.593-1.619, 1983.

- Lee, D.T. "Two-Dimensional Voronoi Diagrams in Lp-Metric". J. of the ACM, 27, 4, 604-618, 1980.

- Leguillon, D. y Sanchez, E. "Computation of Singular Solutions in Elliptic Problems and Elasticity", John Wiley/Masson, Paris. 1987.

- Lo, S.H. "Perspective Projection of Non-Convex Polyhedra". Int. Jour. Num. Meth. Eng., Vol. 26, 1.485-1.506, 1988.

- Lo, S.H. "Delaunay Triangulation of Non-Convex Planar Domains". Int. Jour. Num. Meth. Eng., Vol. 28, 2.695-2.707, 1989.

- Lorenzi, H. y Shih, C. "Application of ADINA to Elastic-Plastic Fracture Problems", Report 82448-6 Proceedings of the Adina Conference, Massachusetts, 349-383, 1978.

- Marroco, A. "Simulations numeriques dans la fabrication des circuits a semiconducteurs". Rapport de Recherche num.305, INRIA, 1984.

- Michavila, F. y Gavete, L. "Métodos Numéricos para el Estudio de Singularidades en Elasticidad Lineal", Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, 1-24, 1988.

- Milgram, M.S. "Does a point Lie Inside a Polygon", J. of Comp. Phys., 84, 134-144, 1989.

- Montenegro, R., Montero, G., Winter, G., Ferragut, L. "Aplicación de Métodos de Elementos Finitos Adaptativos a Problemas de Convección-Difusión en 2-D.". *Rev. Int. Met. Num. Cal. y Dis. en Ing.*, Vol.5, 4, 535-560.

- Montero, G., Winter, G., Macías, A., Cuesta, P. "Aproximación Numérica de Resultados de Distribución de Concentración de Contaminantes. Aplicación al Entorno de Plantas de Energía Convencional". Proyecto de Investigación subvencionado por la Consejería de Industria y Energía del Gobierno de Canarias. Las Palmas, 1992.

- Nelson, J.L. "A Triangulation Algorithm for Arbitrary Planar Domains", *Applied Mathematical Modeling*, vol.2, 151-159, 1978.

- Peraire, J; Vahdati, M; Morgan, K. y Zienkiewicz, O.C. "Adaptative Remeshing for Compresible Flow Computations", *J. of Comp. Phys.*, 72, 2, 449-466, 1987.

- Peraire, J., Morgan, K. y Peiro, J. "Unstructured Finite Element Mesh Generation and Adaptative Procedure for CFD-AGARD F.D.P.", *Specialist's Meeting*, Loen, Noruega, 1989.

- Perronnet, A., Joly, P. y Kouttchmy, O. "Les Modules de maillage bidimensionnel du Club Modulef" INRIA, 1977.

- Perruccio, R; Saxena, M. y Kela, A. "Automatic Mesh Generation from Solid Models Based on Recursive Spatial Decompositions". *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, 28, 2.469-2.501, 1989.

- Pierrot, R., Vazeilles, A. y Perronnet, A. "Une Methode de generation d'un maillage bi ou tridimensionnel a partir d'un maillage grossier"

Annales de l'Institut Technique du Batiment et des Travaux Publics, nº 372,1979.

- Raviart, P.A. y Thomas J.M." Introduction a l'analysis numerique des équations aux dérivées partielles",Ed. Masson,1983.

- Schatz, A.H. y Wahlbin, L.B."Maximum Norm Estimates in the Finite Element Method on Polygonal Domains", Math. Comput. 32,141,73-109,1978.

- Schroeder, W.J. y Shephard, M.S. "A Combined Octree/Delaunay Method For Fully Automatic 3-D Mesh Generation", Int. J. Num. Meth. in Eng., 29, 37-55, 1990.

- Schumaker, L. "Triangulation Methods", Center for Aproximation Theory, Texas, A & M University, 1987.

- Schumaker, L. "Spline Functions: Basic Theory". John Wiley & Sons. New York, 1891.

- Shephard, M.S, Lo, J.A. y otros "Trends in Automatic Three-Dimensional Mesh Generation". Comp. and Struct.,vol.30, nº 1/2, pp.421-429, 1988.

- Sibson, R. "The Dirichlet Tessellation as an aid in data Analysis", Scand. J. Statist, vol.7, 14-20, 1980.

- Sloan, S.W. y Houlsby, G.T. "An Implementation of Watson's Algorithm for Computing 2-D Delaunay Triangulations", Adv. Eng. Software, vol 6, Nº 4, 192-197, 1984.

- Szabo, B.A. y Peano, A.G." Hierarchic Finite Elements", Washington University,1983.

- Thompson, J.F., Warsi, Z.U.A., y Mastin, C.W. "Numerical grids generation, foundations and applications". North Holland, 1985.

- Watson, D.F. "Computing the n-dimensional Delaunay Tessellation with Applications to Voronoi Polytopes", *Comp. Jour.*, vol 24, num. 2,167-172,1981.

- Winter, G., Montenegro, R., Montero, G., Ferragut, L. "Modelización Numérica de Distribución de Velocidades de Campos de Viento en Parques Eólicos con Utilización de Métodos Adaptativos de Elementos Finitos y Aplicaciones". Memoria final del Proyecto de Investigación subvencionado por la Consejería de Industria y Energía del Gobierno de Canarias. Las Palmas, 1989.

- Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. "The Finite Element Method". McGraw-Hill Book Company. 1ª ed, 1967.

- Zienkiewicz, O.C y Zhu,J.Z. "Adaptivity and Mesh Generation". *Int. Jour. Num. Meth.Eng.*, Vol. 32, 783-810, 1991.