UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA

DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA Y SISTEMAS

TESIS DOCTORAL

FILTRADO Y RESTAURACIÓN DE IMÁGENES Y SEÑALES UNIDIMENSIONALES A TRAVÉS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

LUIS MAZORRA MANRIQUE DE LARA

Las Palmas de Gran Canaria, a 15 de Noviembre de 1993

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

31-1993/94

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA
UNIDAD DE TERCER CICLO Y POSTGRADO

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA
BIBLIOTECA GENERAL

Reunido el día de la fecha, el Tribunal nombrado por el Excmo. Sr. Rector Magfco. de esta Universidad, el aspirante expuso esta TESIS DOCTORAL.

Terminada la lectura y contestadas por el Doctorando las objeciones formuladas por los señores jueces del Tribunal, éste calificó dicho trabajo con la nota de APTO CUM LAUDE

Las Palmas de G. C., a 22 de Marzo de 1.994.

El Presidente: Dr. D. Roberto Moreno Díaz,

El Secretario: Dr. D. Roberto Moreno Díaz, JR.

El Vocal: Dr. D. Stanley Osher,

El Vocal: Dr. D. Jean Michel Morel,

El Vocal: Dr. D. Josep Blat Gimeno,

El Doctorando: D. Luis Mazorra Manrique de Lara,

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA
NEGOCIADO UNIDAD DE TERCER CICLO Y POSTGRADO

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
LAS PALMAS DE G. CANARIA
N.º Documento 342.137
N.º Copia 342.143

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA

DOCTORADO EN INFORMÁTICA

DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA Y SISTEMAS

PROGRAMA DE PERCEPCIÓN ARTIFICIAL Y APLICACIONES

FILTRADO Y RESTAURACIÓN DE IMÁGENES Y SEÑALES UNIDIMENSIONALES A TRAVÉS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Tesis Doctoral presentada por D. Luis Mazorra Manrique de Lara

Dirigida por el Doctor D. Luis Alvarez León

El Director

El Doctorando

Las Palmas de Gran Canaria, a 15 de Noviembre de 1.993

En primer lugar mi agradecimiento al Dr. Don Luis Alvarez León, director de esta Tesis, ya que sin su guía y continua atención, este trabajo no hubiera sido posible.

También mi agradecimiento al Departamento de Informática y Sistemas, en el que he desarrollado toda mi labor docente e investigadora, y en especial al Dr. Don Roberto Moreno Díaz por su labor durante todos estos años, aportando ideas y apoyo a las líneas de investigación de este Departamento.

No puedo olvidar mis estancias en el laboratorio C.E.R.E.M.A.D.E. de la Universidad París IX (París Dauphine) durante el desarrollo de esta Tesis. Y agradecer la atención especial de Dr. Don Jean Michel Morel por las fructíferas discusiones mantenidas.

Por último a mis compañeros del grupo de Análisis Matemático de Imágenes por su colaboración y apoyo constante.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN. 1

1.- FILTRADO LINEAL. LA ECUACIÓN DEL CALOR. 19

1.1.- INTRODUCCIÓN 19

1.2.- LA CONVOLUCIÓN CON UNA GAUSSIANA. 20

1.3.- EQUIVALENCIA ENTRE LA CONVOLUCIÓN CON UNA GAUSSIANA Y LA RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DEL CALOR. 23

1.4.- UNA APROXIMACIÓN AXIOMÁTICA AL FILTRADO GAUSSIANO 26

1.5.- DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DEL CALOR. 28

1.5.1.- Noción de estabilidad de un esquema numérico 28

1.5.2.- Discretización incondicionalmente estable de la Ecuación del Calor. Función de transferencia del filtro lineal asociado $m_\lambda(w)$. 35

1.6.- ESTUDIO MATEMÁTICO DE $m_\lambda(w)$ 37

1.7.- APROXIMACIÓN DEL FILTRADO GAUSSIANO A TRAVÉS DE LA n-ÉSIMA ITERACIÓN DE $m_\lambda(w)$ 45

1.8.- RESULTADOS EXPERIMENTALES. 46

2.- RESTAURACIÓN DE SEÑALES UNIDIMENSIONALES UTILIZANDO FILTROS DE CHOQUE 56

2.1.- INTRODUCCIÓN 56

2.2.- PRESENTACIÓN DE UN PROBLEMA CLÁSICO DE TRANSPORTE LINEAL Y LA ECUACIÓN DE BURGER. 56

2.2.1.- Análisis de un modelo clásico de transporte lineal. 56

2.2.2.- Un modelo clásico de ecuación que genera discontinuidades (choques). 69

2.3.- EL MODELO DE OSHER Y RUDIN PARA RESTAURACIÓN DE SEÑALES. 70
2.4.- MODELO PROPUESTO EN ESTE TRABAJO. 71
2.5.- RESULTADOS EXPERIMENTALES. 76

3.- RESTAURACIÓN DE IMÁGENES (SEÑALES BIDIMENSIONALES). 82
3.1.- INTRODUCCIÓN. 82
3.2.- LAS ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES COMO MODELOS EN EL TRATAMIENTO DE IMÁGENES. 84
3.2.1.- El modelo de Perona y Malik. 84
3.2.2.- El Modelo de Catté-Coll-Lions-Morel 86
3.2.3.- La difusión anisotrópica de Alvarez-Lions-Morel. 88
3.2.4.- El modelo de Osher y Rudin en dos dimensiones. 89
3.3.- MODELO PROPUESTO EN ESTE TRABAJO. 91
3.4.- RESULTADOS EXPERIMENTALES. 97

CONCLUSIONES 113

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 117

INTRODUCCIÓN

INTRODUCCIÓN.

El desarrollo tecnológico de los ordenadores en los últimos años ha generado paralelamente la aparición de nuevas disciplinas científicas. Este es el caso del tratamiento de imágenes digitales por ordenador, tema central de estudio de esta tesis. Marr en su monografía "Visión" [Marr 1982] establece algunos principios, bases y conjeturas que determinarían, en cierto modo, el desarrollo de la investigación en visión en estos últimos años. Uno de los principios fundamentales de esta teoría es que la visión puede dividirse en una serie de etapas. La primera de ellas se refiere a una etapa preatentiva, que puede durar una fracción de segundo, donde se detectan cambios de intensidad locales, sin que se utilice en esta fase ninguna información relativa al tipo de objetos presentes en la imagen. Esta fase consiste en un mecanismo automático de detección completamente independiente del tipo de imagen recibida en la retina. Este principio ha permitido el desarrollo de toda una teoría de visión denominada de "bajo nivel", donde se modelizan procesos sobre imágenes que no utilizan ninguna información "a priori" sobre la imagen. El trabajo presentado en esta memoria se inscribe dentro de esta teoría de visión "bajo nivel", puesto que los principios utilizados son operadores diferenciales que determinan localmente como es un punto de la imagen respecto a sus vecinos y sin utilizar ninguna otra información a más alto nivel.

Un problema básico en tratamiento de imágenes es como pasar de una

información de carácter totalmente local como puede ser el nivel de gris de los pixels de la imagen a una información de carácter global como puede ser la descripción de los objetos presentes en la imagen. La alta definición de las imágenes con las que se puede trabajar hoy día, (por ejemplo imágenes de 512x512 = 262.144 pixels) nos llevan a pensar que la información contenida en un pixel es de carácter infinitesimal en el sentido de que su valor como unidad independiente es totalmente despreciable frente a sus relaciones de vecindad con los pixeles próximos que es lo que determina perceptualmente la información contenida en una región de la imagen. Por ello, los operadores diferenciales tales como gradientes, curvaturas, laplacianos, etc..., son, de forma manifiesto o escondida, utilizados en el desarrollo de la mayoría de las técnicas en tratamiento de imágenes. El marco natural para formalizar y estudiar las técnicas que involucran operadores diferenciales son las ecuaciones diferenciales, donde a partir de un modelo se establecen las reglas de juego que hacen interactuar a los valores locales de la imagen para generar una información más global y compacta de la imagen. Históricamente el primer ejemplo de una tal formalización es el filtrado gaussiano. Efectivamente, Koenderink en 1984 [Koe] constató que la convolución de una imagen dada por una función $u_0(x,y)$ con una función gaussiana de desviación típica σ es equivalente a la resolución para un cierto tiempo $t=\sigma^2/2$ de la ecuación diferencial $u_t=\Delta u$, (conocida como la ecuación del calor) donde Δu representa el operador diferencial laplaciano. Posteriormente, el uso de ecuaciones diferenciales en tratamiento de imágenes se ha implantado como una herramienta fundamental. Entre otros muchos, cabe destacar las aportaciones de Perona y Malik, por la introducción de operadores no

lineales, Matheron y Serra, por la introducción de la morfología matemática, Osher y Rudin, por el uso de ecuaciones de tipo hiperbólico para generar discontinuidades, y Alvarez, Guichard, Lions y Morel, por la unificación axiomática de los diferentes modelos.

Siguiendo esta línea general de investigación, en esta tesis se desarrollan diversos aspectos, técnicas y modelos relacionados con el filtrado y la restauración de señales unidimensionales, e imágenes (o señales bidimensionales) a través de ecuaciones diferenciales. Los temas que han sido objeto de estudios son: (1) Aproximación al filtrado gaussiano a través de la ecuación del calor. (2) Restauración de señales unidimensionales y (3) Restauración de imágenes. A continuación realizaré una introducción más específica a estos temas, exponiendo el enfoque que se ha dado a estos problemas, así como un resumen de los resultados principales obtenidos es esta tesis.

El filtrado gaussiano. Los ceros y el esbozo primitivo de Marr. Siguiendo la teoría de Marr [Marr 1982] mencionada anteriormente, la primera de las etapas de la visión corresponde a la detección de los cambios de intensidad. Las dos ideas que subyacen a esta detección son (1) que los cambios de intensidad en una imagen ocurren a diferentes escalas, y por tanto, para detectarlos de modo óptimo, es preciso emplear operadores de diferentes tamaños, y (2) que un cambio brusco de intensidad dará lugar a una punta o un valle en la primera derivada o, de modo equivalente, a un cero de la

segunda derivada ("zero-crossing"). Estas ideas indican que para detectar de un modo eficiente los cambios de intensidad es preciso buscar un filtro que tenga dos características principales. En primer lugar y lo más importante, debe ser un operador diferencial que extraiga la primera o segunda derivada espacial de la imagen. En segundo lugar, debe poderse sintonizar para actuar a cualquier escala de modo que sea posible emplear los filtros grandes para detectar bordes de sombra difuminados y los pequeños para detectar detalles finos claramente enfocados de la imagen. Marr en colaboración con Hildreth en 1980 [MaHi], propone como filtro el laplaciano (suma de las derivadas segundas) de una gaussiana de desviación típica variable que corresponde a la escala. Además, Marr conjetura que la representación de los "zero-crossing" a todas las escalas posibles, caracteriza la imagen, esto es, la imagen puede reconstruirse a partir de la consideración de los "zero-crossings" a todas las escalas posible.

Estas consideraciones, y la amplia acogida que ha tenido la teoría de Marr entre la comunidad científica internacional de visión artificial ha generado que la convolución con funciones gaussianas sea una de las herramientas más utilizadas a la hora de analizar una imagen. Ello nos ha llevado a realizar un estudio en profundidad del filtrado gaussiano tanto desde un punto de vista teórico como de aproximación computacional. En primer lugar, observamos como el filtrado gaussiano es óptimo bajo diferentes puntos de vista. Desde un punto de vista de análisis de fourier y vía el principio de incertidumbre, vemos como las funciones gaussianas son las mejor localizadas simultáneamente en tiempo y en frecuencia. Por otro lado, a través de la

equivalencia del filtrado gaussiano y la resolución de la ecuación diferencial del calor, se muestra como el filtrado gaussiano es el único filtrado lineal que verifica ciertos principios básicos como son la causalidad (el filtrado tiene una estructura piramidal), el principio de comparación (si los niveles de gris de una imagen son mayores que los de otra imagen, las imágenes filtradas siguen manteniendo esta relación), y los principios de invarianza geométrica básicos como son la invarianza del filtrado por traslaciones y rotaciones.

Desde un punto de vista numérico o computacional, y teniendo en cuenta que el filtrado gaussiano es equivalente a resolver la ecuación del calor, obtenemos que cualquier aproximación numérica a la resolución de la ecuación del calor es una aproximación numérica al filtrado gaussiano. Además puesto que el filtrado para una señal de varias dimensiones puede realizarse como la superposición del filtrado en una dimensión, hemos centrado el estudio al caso unidimensional. Hemos elegido como modelo de aproximación una discretización implícita de la ecuación del calor que determina un esquema numérico incondicionalmente estable. Dicho esquema numérico equivale a realizar iteraciones de un filtro que tiene por función de transferencia:

$$m_\lambda(w) = \frac{1}{1+2\lambda-\lambda e^{iwh}-\lambda e^{-iwh}} = \frac{1}{1+2\lambda-2\lambda\cos(wh)}$$

donde $\lambda>0$ es una constante arbitraria. Utilizando técnicas de análisis de fourier e integración compleja, realizamos un estudio matemático del filtro $m_\lambda(w)$, obteniendo el

siguiente teorema:

Teorema 1. Sean $h,k>0$, $\lambda=k/h^2$ y sea $m_\lambda(w)$ definido anteriormente, entonces tenemos:

(a) $$m_\lambda(w) = \frac{\nu/\lambda}{(1-\nu e^{iwh})(1-\nu e^{-iwh})}$$

(b) $$m_\lambda(w) = (1+4\lambda)^{-1/2} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \nu^{|m|} e^{iwhm}$$

(c) $$\int_{-\frac{\pi}{h}}^{+\frac{\pi}{h}} m_\lambda^n(w)\,dw = \frac{2\pi\nu^n}{h\lambda^n(1-\nu^2)^{2n}} \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n+m-1}{m}\binom{n-1}{m} \nu^{2m}(1-\nu^2)^{n-m}$$

donde $$\nu = \frac{1+2\lambda-\sqrt{1+4\lambda}}{2\lambda}$$

Como se muestra en el capitulo 1 de esta memoria, El apartado (a) de este teorema permite realizar una rápida implementación recursiva del filtro $m_\lambda(w)$ a través de la composición de un filtro causal y un filtro anticausal. El apartado (b) determina los coeficientes del núcleo de convolución asociado al filtro, y por último el apartado (c) determina la energía que poseen las sucesivas iteraciones del filtro. En general, la

forma de aproximar el filtrado con una función gaussiana de desviación típica σ se realiza a través de un cierto número, n, de iteraciones del filtro $m_\lambda(w)$. Obviamente, es necesario establecer un criterio que relacione la variable σ con las variables n y λ. Utilizando el apartado (c) del teorema anterior, hemos introducido un nuevo criterio que consiste en que la energía (o norma ℓ_2) de la función gaussiana y la energía de la enésima iteración del filtro $m_\lambda(w)$ coincidan. Como se muestra en las experiencias numéricas, este criterio de aproximación mejora a los criterios clásicos.

Las limitaciones del filtrado lineal. Tal y como hemos mencionado anteriormente, el filtrado gaussiano es el filtrado lineal óptimo bajo diferentes puntos de vista, sin embargo la linealidad impone algunas limitaciones a las posibilidades de tal filtrado. Concretamente, el filtrado gaussiano, provoca la desaparición de bordes no suficientemente contrastados (pero importantes) y se produce un desagradable movimiento en la posición de los zero-crossing del laplaciano a través de las escalas, y ello dificulta la exacta localización de los bordes. Para evitar estos inconvenientes, es necesario introducir alguna no-linealidad en el proceso. Una alternativa al filtrado lineal es la teoría de La Morfología Matemática introducidas por Matheron y Serra, [Ser], donde se concentra la atención en las formas presentes en la imagen, más que en el relativo contraste que existe entre ellas. Posteriormente Alvarez, Guichard, Lions y Morel [AGLM] han desarrollado una teoría general sobre Morfología, desde un punto de vista axiomático utilizando como base ecuaciones en derivadas parciales. Otras alternativas posibles de filtrado no-lineal son expuestas en el capítulo 3 de esta memoria.

El problema de restauración de señales. Planteamientos clásicos. Las señales que son percibidas por los dispositivos de adquicisión acumulan defectos ocasionados por imperfecciones de los sensores, ruidos, fallos en el transporte de la información etc... Matemáticamente se suelen utilizar dos tipos de perturbaciones para modelizar la degradación de una señal. Por un lado el conocido "blurring" que consiste, en general, en convolucionar la señal original con un núcleo que denotaremos h(.) y por otro lado la adición de un ruido r(.), que en general es un ruido blanco que consiste en una señal totalmente decorrelada con media cero. La unión de estas dos perturbaciones determina que para una cierta señal original g(.), la señal degradada d(.) viene determinada por la expresión:

$$d(x) = h*g(x) + r(x).$$

Esta presentación del problema es, por supuesto, independiente de la dimensión de la señal. En particular, en imágenes bidimensionales el "blurring" puede venir determinado por un desenfoque de la imagen, etc..

El problema fundamental consiste en, partir de la imagen degradada d(.) para recuperar la imagen original g(.). El enfoque clásico para resolver este problema es utilizar el conocimiento que a priori se pueda tener sobre las funciones h(.) y r(.). La primera cuestión que se plantea es cuando se puede recuperar de manera exacta la imagen original. Para responder a esta pregunta plantearemos el problema en el espacio

de frecuencias, sean D(w), G(w), H(w) y R(w) las transformadas de fourier de las funciones d(x), g(x), h(x) y r(x) respectivamente. Un calculo sencillo nos lleva a que en el espacio de frecuencias la transformada de fourier de la señal original g(x) se puede recuperar mediante la formula:

$$G(w) = (D(w)-R(w))/H(w).$$

Desde un punto de vista teórico la condición para poder recuperar la imagen original g(x) es que la función G(w) sea de cuadrado integrable (para poder aplicar la antitransformada). Ahora bien desde un punto vista computacional (transformada de fourier discreta) pueden aparecer diversas dificultades. En primer lugar si H(w) se anula en algún punto (es el caso por ejemplo de utilizar como "blurring" la media en una vecindad del punto) entonces es imposible recuperar de manera exacta la señal original g(x). Por otro lado si en valor absoluto H(w) tiende hacia cero cuando w crece (el caso de convolucionar con una gaussiana), entonces el proceso de reconstrucción es altamente inestable (debido a la propagación de errores de cálculo), y puede generar la aparición de artefactos indeseables debido a que los errores se producen en las altas frecuencias (valores de w grande) que es donde se encuentra localizada la información relativa a bordes y discontinuidades. Por lo tanto concluimos que, en general, el proceso de reconstrucción puede estar mal definido o es fuertemente inestable, para evitar estas dificultades es necesario añadir nuevos criterios para elegir una versión reconstruida de la señal. El criterio más utilizado consiste en incluir una restricción de

regularidad a la imagen reconstruida. Ello se consigue a través de la resolución de un problema de minimización, por ejemplo, se considera que la señal restaurada $g_Q(x)$ es aquella que verificando que $\| h*g_Q-d \|_2 = \| r \|_2$ minimiza una cierta función Q(g), es decir $g_Q = \min_g Q(g)$, donde Q(.) determina la regularidad de la función g. Por ejemplo, una elección sencilla de Q es $Q(g) = \| \nabla g \|_2^2$.

Este tipo de técnicas son muy efectivas pero sólo se pueden aplicar en el caso de un conocimiento a priori de las funciones h(.) y r(.), hecho que sucede muy rara vez en el tratamiento de señales reales. Los modelos propuestos en esta tesis, basados en ecuaciones diferenciales parabólicas-hiperbólicas, tienen como base principios totalmente distintos. A grosso modo, estas nuevas técnicas consideran que la degradación de una señal se produce, bien por una degradación de las discontinuidades de la señal, que puede ser provocado por una convolución con un núcleo o por cualquier otra cosa, o bien por aparición de discontinuidades espurias debido a ruidos. Bajo estos principios, las técnicas que se desarrollan intentan restaurar las discontinuidades debidas a bordes y tienden a eliminar discontinuidades espurias sin tener en cuenta el tipo de degradación que haya sufrido la imagen. Por supuesto este enfoque de restaurar o eliminar discontinuidades es valido, en tanto en cuanto la señal buscada sea básicamente localmente homogénea y con discontinuidades nítidas, que es el caso, en general, de las imágenes reales. Sin embargo, si la información importante de la señal no radica en las discontinuidades, caso, por ejemplo, de los fenómenos ondulatorios donde la frecuencia de ondulación es la cualidad importante a estudiar,

entonces el uso de este tipo de técnicas no parece adecuado.

Dadas las diferencias importantes, que en el desarrollo de nuestras técnicas, aparecen en los casos de una o dos dimensiones, hemos realizado un estudio separado de ambos casos.

Restauración de señales unidimensionales. Siguiendo la teoría clásica de restauración que acabamos de presentar, un método de restauración debe ser capaz de restaurar discontinuidades que han sido degradadas por la convolución con un núcleo. Como se ha mostrado anteriormente, en general, no es posible invertir de forma exacta el proceso de convolución o su inversión puede producir inestabilidades desagradables. Con el fin de evitar estos problemas, hemos optado por una técnica de restauración de discontinuidades basada en ecuaciones hiperbólicas de transporte no-lineal. Con el fin de mostrar como una ecuación hiperbólica puede desarrollar discontinuidades o choques, hemos introducido en el capítulo 2 una introducción al modelo clásico dado por la ecuación de burger. Una ventaja importante de este tipo de ecuaciones es que hacen aparecer discontinuidades de una forma estable y sin crear artefactos. El modelo propuesto en esta tesis para la restauración de señales unidimensionales viene dado por la ecuación:

(1) $$u_t + F(G_\sigma * u_{xx}, G_\sigma * u_x)u_x = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}\text{x}\mathbb{R}^+$$

donde $G_\sigma(.)$ es una familia de núcleos regularizantes (por ejemplo gaussianas de desviación típica σ), y $F(.,.)$ es una función que satisface:

(2) $$F(p,q)pq \geq 0 \quad \text{para todo } p,q \in \mathbb{R},$$

Por ejemplo, una elección "canónica" para F es

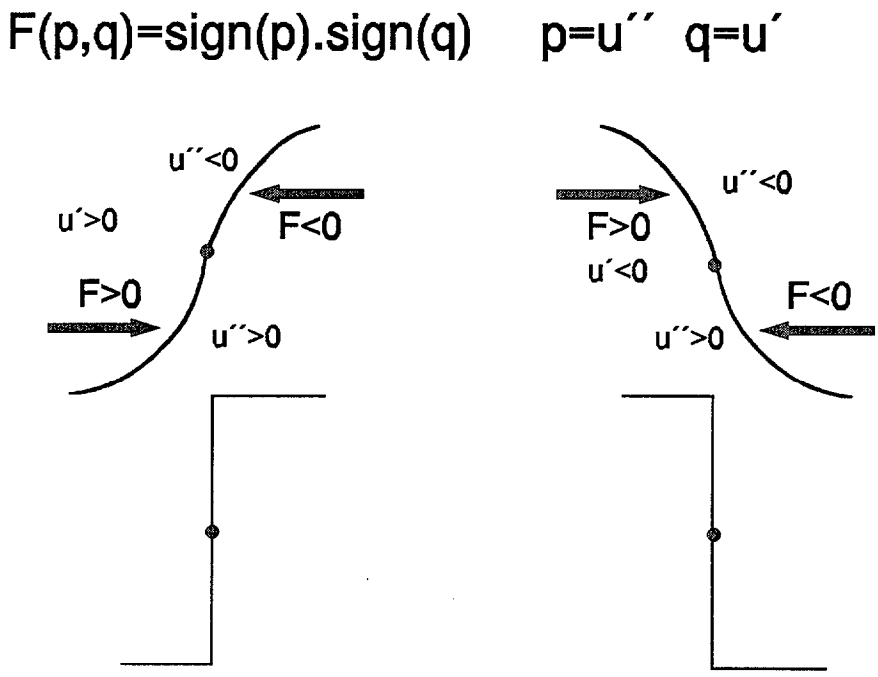
(3) $$F(p,q) = \text{sign}(p)\text{sign}(q)$$

donde $\text{sign}(s)=1$ si $s>0$, $\text{sign}(s)=-1$ si $s<0$ y $\text{sign}(0)=0$.

A "grosso modo", si $u(x,0)$ es la señal inicial (que corresponde a la señal degradada), la ecuación (1) produce discontinuidades en la posición de los zero crossing del operador $G_\sigma * u_{xx}$, y de esta forma restaura las discontinuidades "perdidas". Por tanto $u(.,t)$ representa una versión reconstruida de la señal original y según t crece el efecto de reconstrucción es más fuerte. La convolución con el núcleo G_σ se ha introducido para eliminar la influencia de ruidos o discontinuidades espurias.

En la gráfica, que aparece en el encabezamiento de la página siguiente, mostramos el modo de operar de la ecuación según los valores de F

Desde un punto de vista numérico utilizamos un esquema tipo "upwin" implícito para discretizar la ecuación, que da lugar a un algoritmo rápido, recursivo, e



incondicionalmente estable. En particular se demuestra que el método iterativo de resolución converge, que el método es L^{∞} estable (es decir las sucesivas iteraciones respetan el mínimo y máximo de la señal inicial) y por último que el esquema conserva la monotonía de las señales, ello implica en particular que no se generan oscilaciones espurias.

En las experiencias numéricas que hemos desarrollado, hemos utilizado como núcleo G_{σ} la aproximación a las funciones gaussianas presentada anteriormente.

Restauración de Imágenes. Por último se estudia el problema de la restauración de imágenes bidimensionales. A través de un estudio de diferentes trabajos referentes al problema de restauración, hemos constatado que de manera dispersa aparecen ideas

y principios que hemos intentado condensar en un único modelo a través de principios básicos y claros. En cada punto de la imagen existe un sistema de referencia especial determinado por los vectores gradiente y ortogonal al gradiente. El vector ortogonal al gradiente determina la dirección donde se encuentra el borde o línea de nivel que pasa por el punto, en esta dirección pretendemos hacer un lisage de la imagen, esto es eliminar oscilaciones espurias presentes en el borde para dar una impresión de suavidad que parece perceptualmente correcto. La otra dirección, la del gradiente, corresponde a la dirección perpendicular al borde, es esta dirección es donde se pueden producir degradaciones en el contraste entre diferentes objetos debido a la convolución con un núcleo regularizante, etc.., por tanto para restaurar dichos contrastes, debemos restaurar las discontinuidades existentes en la dirección perpendicular al borde. El establecimiento de estos principios locales de actuación determina un operador diferencial y una ecuación diferencial asociada.

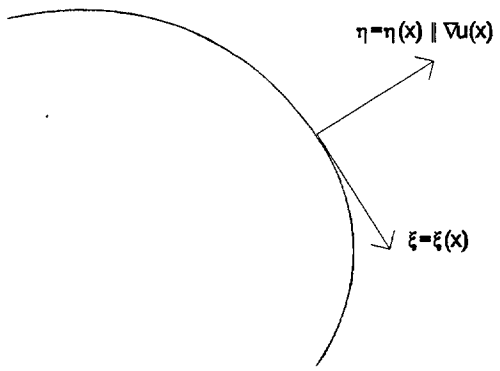
Concretamente, La ecuación propuesta en esta tesis es:

$$u_t = C\mathcal{L}(u) - F(G_\sigma * u_{\eta\eta}, G_\sigma * u_\eta)u_\eta. \qquad \text{en } \mathbb{R}^2 x \mathbb{R}^+ \tag{4}$$

donde $\eta = \eta(x)$ corresponde a la dirección del gradiente $\nabla u(x)$, $F(.,.)$ satisface (2), $G_\sigma(.,.)$ es una familia de núcleos regularizantes, $C > 0$ es cualquier constante positiva y $\mathcal{L}(u)$ es un operador de difusión en la dirección perpendicular al gradiente. Por ejemplo $\mathcal{L}(u)$ puede venir dado simplemente por:

$$\mathcal{L}(u) = u_{\xi\xi}$$

donde $\xi = \xi(x)$ corresponde a un vector unitario en la dirección ortogonal a la del gradiente $\nabla u(x)$.



A "grosso modo" está ecuación parabólica-hiperbólica difunde la imagen inicial u(x,y,0) (que corresponde a la imagen degradada) en la dirección de los bordes, lo cual produce la eliminación de ruido y la regularización del borde y desarrolla discontinuidades en la dirección perpendicular al borde lo cual genera una deconvolución y una restauración de los bordes. Por tanto u(.,.,t) representa una versión reconstruida de la imagen original y según t crece el efecto de reconstrucción es más fuerte. la constante C determina un balance entre el proceso de suavizado de bordes y el proceso de generación de discontinuidades

Desde un punto de vista numérico utilizamos un esquema tipo "upwin" implícito

para discretizar la ecuación, que da lugar a un algoritmo rápido, recursivo, e incondicionalmente estable. En particular se demuestra que el método iterativo de resolución converge, que el método es L^∞ estable (es decir las sucesivas iteraciones respetan el mínimo y máximo de la señal inicial). Como se muestra en las experiencias numéricas, este método puede aplicarse, con buenos resultados, a una gran variedad de imágenes de muy diferentes tipos. En este tipo de esquemas, el método para el cálculo de la dirección del gradiente puede tener una gran influencia en el resultado de la restauración; para evitar que el ruido o las discontinuidades espurias generen falsas direcciones de difusión se ha diseñado un método para el calculo de direcciones óptimas de difusión.

Debido a la estabilidad incondicional, nuestros esquemas producen buenos resultados con un pequeño número de iteraciones. Por otro lado, la implementación recursiva de cada iteración disminuye drásticamente el número de operaciones necesarias. Por tanto nuestros esquemas producen algoritmos estables, eficientes y rápidos.

Por último, hacemos notar que nuestro análisis se realiza sobre señales en todo $\mathbb{R}^n$. En los casos prácticos de implementación en ordenador, se impone de forma natural, una condición de frontera Neuman homogénea, es decir, $\partial u/\partial \nu = 0$ en la frontera, donde ν representa la dirección de la normal exterior, esto minimiza la acción de la frontera, sobre el interior de la imagen.

CAPÍTULO 1

FILTRADO LINEAL. LA ECUACIÓN DEL CALOR

1.- FILTRADO LINEAL. LA ECUACIÓN DEL CALOR.

1.1.- INTRODUCCIÓN

En este capítulo se realiza un estudio en profundidad del filtrado gaussiano como herramienta fundamental en el análisis de imágenes. Estudiaremos el caso unidimensional, puesto que el caso n-dimensional se obtiene por la aplicación sucesiva del filtrado en las direcciones ortogonales correspondientes.

Desde un punto de vista teórico se muestra como, dentro del caso lineal, la elección del filtrado gaussiano es óptimo bajo diferentes puntos de vista. Por un lado, en términos de análisis de frecuencias, se muestra como la función gaussiana es la mejor localizada en tiempo y en frecuencia. Por otro lado, a través de la equivalencia del filtrado con una función gaussiana y la resolución de la ecuación diferencial del calor, se muestra como el filtrado gaussiano es el único filtrado lineal que verifica ciertos principios básicos como son la causalidad (el filtrado tiene una estructura piramidal), el principio de comparación (si los niveles de gris de una imagen son más grandes que los de otra imagen, las imágenes filtradas siguen manteniendo esta relación), y los principios de invarianza geométrica básicos como son invarianza del filtrado por traslaciones y rotaciones.

Desde un punto de vista numérico o computacional, se estudia en profundidad métodos numéricos para, a través de la ecuación del calor, aproximar el filtrado gaussiano. Combinando técnicas tales como análisis de Fourier, discretización numérica de ecuaciones diferenciales, e integración compleja, se deducen nuevas formas y criterios para aproximar numéricamente el filtrado gaussiano de una forma rápida y robusta. Por último, se realizará una discusión sobre las ventajas y limitaciones del filtrado gaussiano.

1.2.- LA CONVOLUCIÓN CON UNA GAUSSIANA.

El principio de incertidumbre. Vamos a estudiar la relación que existe entre la localización de una señal y su espectro.

Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ una función tal que f, xf y $w\hat{f}$ sean de $L^2(\mathbb{R})$, entonces tenemos:

$$\sigma_f^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx$$ es la dispersión de la energía de f en tiempo.

$$\sigma_{\hat{f}}^2 = \int_{\mathbb{R}} w^2 |\hat{f}(w)|^2 dw$$ es la dispersión de la energía en frecuencia, y

$$E_f = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx$$ es la energía de f.

Así, se llama duración útil de la señal f a la cantidad Δt definida por $\Delta t=\sigma_f^2/E_f$; y banda útil a la cantidad $\Delta\lambda=\sigma_{\hat{f}}^2/E_f$.

El *Principio de incertidumbre* es una relación entre Δt y $\Delta\lambda$ que indica

que no se puede localizar finamente la señal y su frecuencia. Esta relación es $\Delta t \cdot \Delta\lambda \geq 1/4\pi$ y resulta de:

<u>Proposición</u>: Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ una función de $C^1(\mathbb{R})$ tal que f, f′ y xf pertenecen a $L^2(\mathbb{R})$. Entonces se tiene que $\sigma_f \cdot \sigma_{\hat{f}} \geq E_f/4\pi$.

Demostración: Como sabemos que:

(i) $\hat{f}'(w) = 2i\pi\xi\hat{f}(w)$ y (ii) $\lim\limits_{|x|\to\infty} x|f(x)|^2 = 0$

Entonces:

$$\sigma_{\hat{f}}^2 = \int_{\mathbb{R}} w^2|\hat{f}(w)|^2 dw = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}'(w)|^2 dw = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx$$

Por otra parte se tiene $(f\cdot\overline{f})' = f'\cdot\overline{f} + f\cdot\overline{f}'$ y

$$\left|\int_{\mathbb{R}} x(f(x)\cdot\overline{f}(x))' dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}} |xf'(x)\cdot\overline{f}(x)|dx + \int_{\mathbb{R}} |xf(x)\cdot\overline{f}'(x)|dx \leq$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |x\overline{f}(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\mathbb{R}} |xf(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2\left(\int_{\mathbb{R}} |xf(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = 4\pi\sigma_f\cdot\sigma_{\hat{f}}$$

Pero si hacemos por partes la siguiente integral y aplicando al primer término la propiedad (i), obtenemos:

$$\int x(f(x)\cdot\overline{f}(x))' dx = [x\cdot|f(x)|^2]_{-\infty}^{+\infty} - \int |f(x)|^2 dx = -E_f$$

Y si sustituimos en la desigualdad anterior, llegamos a la conclusión de

la proposición.

En la proposición siguiente mostramos que para una banda útil dada, la señal gaussiana es la que tiene una duración útil mínima.

Proposición: Sea $\Delta\lambda$ una banda útil fija. Entonces la señal:

$$f(t) = \alpha e^{-(2\pi\Delta\lambda)^2 t^2}$$

minimiza la duración útil.

Demostración: En la proposición anterior utilizamos la desigualdad de Schwarz ($|(x.y)| \leq \|x\| . \|y\|$) par obtener $4\pi\sigma_f \cdot \sigma_{\hat{f}} \geq E_f$. Entonces obtendremos la igualdad en $\mathbb{R}$ si la funciones tf y f′ son proporcionales. Esto lo da una función de la forma $f(t) = \alpha e^{-ct^2}$ con $c > 0$ para que f pertenezca a $L^2(\mathbb{R})$.

Si $f(t) = \alpha e^{-ct^2}$ entonces $\hat{f}(\lambda) = \alpha\sqrt{\pi/c}\, e^{-(\pi^2/c)\lambda^2}$. Entonces tenemos que:

$$\Delta\lambda^2 = \frac{\int_{\mathbb{R}} \lambda^2 |\hat{f}(\lambda)|^2 d\lambda}{\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\lambda)|^2 d\lambda} = \frac{\int_{\mathbb{R}} \lambda^2 e^{\frac{-2\pi^2\lambda^2}{c}} d\lambda}{\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-\pi^2\lambda^2}{c}} d\lambda} =$$

si integramos por partes en el dividendo, obtenemos:

$$= \frac{\frac{c}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-2\pi^2\lambda^2}{c}} d\lambda}{\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-2\pi^2\lambda^2}{c}} d\lambda} = \frac{c}{4\pi^2}$$

de donde, despejando nos queda: $c = 4\pi^2\Delta\lambda^2$.

1.3.- EQUIVALENCIA ENTRE LA CONVOLUCIÓN CON UNA GAUSSIANA Y LA RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DEL CALOR.

En este apartado veremos que la solución de la ecuación del calor con dato inicial una cierta función f(x), equivale a convolucionar, dicha función, con un filtro gaussiano.

Sea la ecuación del calor en las variables x,t:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 \\ \\ u(x,0) = u_0(x) = f(x) \end{cases}$$

Si le aplicamos la transformada de Fourier $\left(\hat{u}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\cdot e^{-iwx}dx\right)$.

Nos queda la siguiente ecuación diferencial de variables separadas en el espacio

de las transformadas:

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{u}}{dt} + w^2\hat{u} = 0 \\ \\ \hat{u}(w,0) = \hat{u}_0(w) = \hat{f}(w) \end{cases}$$

de la cual podemos, fácilmente, obtener la solución:

$$\frac{d\hat{u}}{\hat{u}} = -w^2 dt \Rightarrow \ln\hat{u} = -w^2 t + C \Rightarrow \hat{u} = e^{C} \cdot e^{-w^2 t} = K \cdot e^{-w^2 t}$$

si hacemos t=0, obtenemos al valor de la constante K, y así, nos queda la solución en el espacio de las transformadas:

$$\hat{u}(w,t) = \hat{f}(w) \cdot e^{-w^2 t}$$

como sabemos que la transformada de una convolución es el producto de las transformadas, si tomamos antitransformadas, nos queda que la solución u(x,t) es la convolución de la función inicial f(x) con la antitransformada de $e^{-\xi^2 t}$, que como vamos a ver, es precisamente una gaussiana.

Obtención de la transformada de la función $f(x)=e^{-ax^2}$:

Si $f(x)=e^{-ax^2}$, entonces $f'(x)=-2axf(x)$. Y si ahora aplicamos la transformada de Fourier a la igualdad, obtenemos la siguiente ecuación diferencial en variables separadas:

$$iw\hat{f}(w) = \frac{2a}{i}f'(w) \Rightarrow \frac{d\hat{f}(w)}{\hat{f}(w)} = -\frac{w}{2a}$$

de la cual obtenemos la solución siguiente: $\hat{f}(w) = C \cdot e^{-w^2/4a}$, si hacemos w=0

obtenemos la constante C, es decir,

$$\hat{f}(0) = C = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{-i \cdot 0 x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Con lo que tenemos que la transformada de la función $f(x)=e^{-ax^2}$ es:

$$\hat{f}(w) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{-w^2/4a}$$

Como lo que queremos es obtener la antitransformada de $\hat{f}(w)=e^{-tw^2}$, entonces hacemos t=1/4a, y operando tenemos que:

$$\sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-ax^2} \rightarrow T.F. \rightarrow e^{-w^2/4a}$$

por lo cual la antitransformada de e^{-tw^2}, es la siguiente gaussiana:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2} \qquad si \;\; 2t = \sigma^2$$

así, de esta manera queda vista la equivalencia de la convolución con una gaussiana y la resolución de la ecuación del calor.

1.4.- UNA APROXIMACIÓN AXIOMÁTICA AL FILTRADO GAUSSIANO.

En esta sección vamos a establecer unos principios básicos que un buen filtrado debería verificar y vamos a ver como el filtrado gaussiano es el único que verifica estos principios.

En primer lugar debemos definir que entendemos por un filtrado. En su forma más general, un filtrado es una familia de operadores $\{T_t\}_{t\geq 0}$ que dependen de un parámetro t (normalmente asociado a una escala) tales que a una imagen determinada por una función $u_0:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}$ le hace corresponder otra imagen $T_t(u_0):\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}$. Por ejemplo en el caso de la ecuación de calor $T_t(u_0)$ corresponde a la solución de la ecuación del calor en el instante t.

Los principios básicos que vamos a imponer son los siguientes:

Causalidad. Si $s>t$ entonces T_s se puede calcular a partir de T_t. Esto significa que existe un operador de transición $T_{s,t}$ tal que $T_s(u_0)=T_{s,t}(T_t(u_0))$. Además se añade el hecho de a la escala $t=0$ no se aplica ninguna transformación a la imagen, esto es

$T_0(u_0)=u_0$. Este principio también se suele denominar estructura piramidal.

Principio de Comparación. Dadas dos imágenes u_0 y v_0 tales que $u_0 \geq v_0$ entonces para cualquier $t>0$ se tiene $T_t(u_0) \geq T_t(v_0)$.

Invarianza por traslaciones. Sean a,b,c números reales, definimos $tr_{a,b,c}$ al operador tal que a una imagen $u_0(x,y)$ le hace corresponder otra imagen dada por $tr_{a,b,c}(u_0)(x,y)=a+u_0(b+x,c+y)$, entonces el filtrado conmuta con las traslaciones, es decir $T_t(tr_{a,b,c}(u_0)) = tr_{a,b,c}(T_t(u_0))$.

Invarianza por rotaciones. Dado un ángulo de rotación θ, definimos rot_θ al operador tal que a una imagen $u_0(x,y)$ le hace corresponder otra imagen dada por $rot_\theta(u_0)(x,y) = u_0(\cos(\theta)x+\mathrm{sen}(\theta)y,-\mathrm{sen}(\theta)x+\cos(\theta)y)$, entonces el filtrado conmuta con las rotaciones, es decir $T_t(rot_\theta(u_0))= rot_\theta(T_t(u_0))$.

Regularidad. Este principio determina que el filtrado evoluciona de manera regular a través de las escalas, es decir que no hay singularidades al pasar de una escala a otra posterior. Matemáticamente esto se puede expresar de la forma siguiente, si $u_0(x,y)$ es una función de C^∞ en un punto (x_0,y_0), es decir posee derivadas de cualquier orden en dicho punto, entonces para cualquier operador de transición $T_{s,t}$ se verifica que existe el siguiente límite:

$$\mathrm{Lim}_{s\to t}(T_{s,t}(u_0)(x_0,y_0)-u_0(x_0,y_0))/(s-t).$$

Además dicho límite depende de manera continua de las derivadas de u_0 en el punto (x_0,y_0)

Linealidad. Si u_0 y v_0 son dos imágenes, y a,b números reales, se tiene que: $T_t(au_0 + bv_0) = aT_t(u_0) + bT_t(v_0)$.

Utilizando estos principios básicos se puede demostrar (véase por ejemplo [AGLM]) que el único filtrado que verifica los principios arriba mencionados es el filtrado gaussiano. Un problema interesante consiste en estudiar que sucede si eliminamos alguno de estos principios. Por ejemplo si eliminamos el principio de linealidad aparece toda una familia de filtrados distintos. Una clasificación exhaustiva de esta familia ha sido realizada en [AGLM] a partir de añadir principios de invarianza morfológica (el filtrado sólo depende de la geometría de las formas presentes en la imagen y no del contraste entre las diferentes formas) y de invarianzas geométricas más complejas como pueden ser invarianza por transformaciones afines del plano. Dichos autores demuestran que existe un único filtrado (no lineal) que verifica todos estos principios de invarianza.

1.5.- DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DEL CALOR.

1.5.1.- Noción de estabilidad de un esquema numérico

Empezaremos por ver los operadores en diferencias básicos. Así, consideramos un conjunto discreto de puntos $x_i=i.h$ y una función definida en ese conjunto $f_i=f(i.h)$ tal que $f_i=0$ para todo i entero que $|i| \geq I$. Entonces, denotamos a $f = \{\ldots, f_{-2}, f_{-1}, f_0, f_1, f_2, \ldots\}=\{ f_i \}$. Si consideramos dos funciones, $f=\{ f_i \}$ y $g=\{ g_i \}$, podemos definir el producto discreto interior de f y g, como:

$$(f,g) = \sum_i f_i g_i h$$

donde h es el factor de escala. De esta manera podemos, también, definir la norma euclídea ℓ_2 como:

$$\|f\|_2 = \sqrt{(f,f)} = (\sum_i f_i^2 h)^{1/2}$$

donde el factor de escala h es importante, puesto que si lo hiciéramos muy pequeño, el número de términos en el sumatorio crecería muy rápido con lo cual podríamos hacer crecer a la norma ℓ_2 sin límite.

Ahora, vamos a definir los operadores en diferencias básicos sobre una función $f=\{f_i\}$ como sigue:

Operador paso hacia adelante S_+ tal que $(S_+f)_i = f_{i+1}$

Operador paso hacia atrás S_- tal que $(S_-f)_i = f_{i-1}$

Operador identidad I tal que $(If)_i = f_i$

Operador en diferencias hacia adelante D_+ tal que $(D_+f)_i = (f_{i+1} - f_i)/h$

Operador en diferencias hacia atrás D_- tal que $(D_-f)_i = (f_i - f_{i-1})/h$

Operador en diferencias centrado D_0 tal que $(D_0f)_i = (f_{i+1} - f_{i-1})/2h$

Podemos ver que los operadores en diferencias se pueden reducir a una combinación de los tres primeros, así, tenemos las siguientes equivalencias:

$$D_+ = (S_+ - I)/h \qquad D_- = (I - S_-)/h \qquad D_0 = (S_+ - S_-)/2h$$

También, se puede ver que las aproximaciones a derivadas superiores se puede poner como combinaciones de los operadores anteriores, es decir, en función sólo de los tres primeros, veamos como ejemplo una aproximación a la derivada segunda:

$$(D_-D_+f)_i = D_-\left(\frac{f_{i+1}-f_i}{h}\right) = \frac{(D_+f)_{i+1}-(D_+f)_i}{h} = \frac{\frac{f_{i+1}-f_i}{h} - \frac{f_i-f_{i-1}}{h}}{h} =$$

$$= \frac{f_{i+1}-2f_i+f_{i-1}}{h^2} = \frac{1}{h^2}([S_+-2I+S_-]f)_i$$

Ahora, vamos a precisar la noción de estabilidad de un esquema numérico. Sea un problema cualquiera:

$$\partial_t v = P(\partial_x)v, \ t>0$$

$$v(x,0) = f(x)$$

Entonces decimos que el problema está bien planteado en una norma $\|\cdot\|$, si existe una única solución que depende continuamente de la condición inicial, es decir, que existen dos constantes C y α tales que se verifica:

$$\| v(x,t) \| \leq C \cdot e^{\alpha \cdot t} \| f(t) \|$$

donde $P(\partial_x)$ representa un polinomio en ∂_x, es decir, que:

$$P(\partial_x) = a_n \partial_x^n + a_{n-1} \partial_x^{n-1} + \cdots + a_1 \partial_x + a_0.$$

Pasemos a aproximar el problema en un esquema en diferencias finitas. Entonces, $u^n = \{u_i^n\}$, denota la discretización de v, tal que, $t = n \cdot k$, de tal forma que, $u_i^0 = f(i \cdot h)$, denota la condición inicial discretizada. Así, el problema original se transforma en el siguiente:

$$u^{n+1} = Qu^n, \quad n \geq 0$$

$$u^0 = f$$

donde Q es un polinomio en los tres operadores básicos S_+, S_- e I. Ahora, vamos a ver

que condiciones debe cumplir el esquema numérico para que resolución nos acerque a al solución real del problema original.

Definición: Un esquema en diferencias finitas se dice que es estable si $\exists$ dos ctes K y β y alguna norma $\|\cdot\|$, tales que se verifica:

$$\|u^n\| \leq K \cdot e^{\beta t \cdot} \|u^0\|$$

donde $t=n \cdot k$ y K y β son independientes de h y k. Pudiendo h y k estar relacionados entre si.

Obsérvese que esta definición es equivalente a la de bien planteado del caso continuo, y además, admite crecimiento con el tiempo, pero no lo admite con el número de iteraciones del incremento temporal.

Definición: Un esquema en diferencias finitas se dice que es incondicionalmente estable si es estable para todo incremento temporal k y todo factor de escala h.

Definición: Un esquema en diferencias finitas se dice que es consistente hasta el tiempo T en una norma $\|\cdot\|$ con el problema continuo correspondiente, si la solución real v cuasi-satisface el esquema en diferencias, es decir, que verifica:

$$v^{n+1} = Qv^n + k \cdot \tau^n$$

donde $\|\tau^n\| \leq \tau(h)$, $n \cdot k < T$ y $\tau(h) \to 0$ cuando $k \to 0$. Aquí asumimos que h depende de k y tiende a cero con él, además, $v^n = v(ih,nk)$, es decir, la solución exacta evaluada en el punto (ih,nk) y τ^n es el error de truncamiento en el tiempo $n \cdot k$.

Definición: Un esquema en diferencias finitas se dice que es exacto de orden (p,q) si se verifica que:

$$\| v^{n+1} - Qv^n \| = k\cdot(o(h^p) + o(k^q))$$

en este caso $o(h^p) + o(k^q)$ es lo que llamamos error de truncamiento.

Definición: Un esquema en diferencias finitas se dice que es convergente en una norma $\| - \|$, si se verifica que:

$$\| v(x,t) - u_i^n \| \to 0 \text{ cuando } h,k \to 0$$

y se dice que es convergente de orden (p,q) si se verifica que:

$$\| v(x,t) - u_i^n \| = o(h^p) + o(k^q)$$

Por último, vamos a enunciar un teorema que nos relaciona todas las definiciones anteriores, el cual dice:

TEOREMA DE LAX: Si un esquema en diferencias finitas es lineal, estable, y exacto de orden (p,q), entonces, es convergente de orden (p,q).

Si, ahora, nos pasamos al campo de la Transformada de Fourier, también el esquema en diferencias pasa al campo de la Transformada Discreta, y estudiaremos cual es la condición equivalente en dicho campo para que un esquema sea estable.

Si consideramos la función discreta $u=\{u_j\}$, entonces, llamaremos Transformada de Fourier Discreta de u, a:

$$\hat{u}(w) = \sum_j u_j e^{ijw}$$

Ahora, vamos a ver como afectan los operadores básicos a la Transformada, así, tenemos que $S_+u=\{u_{j+1}\}$, entonces tenemos que:

$$(\hat{S}_+u)(w) = \sum_j u_{j+1} e^{ijw} = \sum_j u_j e^{i(j-1)w} = e^{-iw}\sum_j u_j e^{ijw} = e^{-iw}\hat{u}(w)$$

Del mismo modo tenemos que:

$$(\hat{S}_-u)(w) = e^{iw}\hat{u}(w)$$

y así, a e^{-iw} y a e^{iw} se les denomina los símbolos de S_+ y de S_- respectivamente.

Ahora, si partimos de un esquema en diferencias finitas cualquiera, $u^{n+1}=Q(S_+,S_-)u^n$, entonces, si pasamos al campo de la Transformada, tendremos el siguiente esquema:

$$\hat{u}^{n+1}(w) = Q(e^{-iw},e^{iw})\hat{u}(w) = \rho(w)\hat{u}(w)$$

Una vez obtenido este esquema, hemos de dar una condición de estabilidad para el campo de la Transformada de Fourier Discreta. Para lo cual, antes de establecer el teorema que nos da la equivalencia de dicha condición de estabilidad, vamos a hacer

la siguiente definición:

Se dice que $\rho(w)$ satisface la Condición de von Neumann, si existe una constante $C \geq 0$ (independiente de k,h,n y w) tal que verifica:

$$| \rho(w) | \leq 1 + C \cdot k$$

Y así:

<u>TEOREMA</u>: Un esquema en diferencias finitas es estable en norma ℓ_2 si y sólo si satisface la **Condición de von Neumann**.

1.5.2.- Discretización incondicionalmente estable de la Ecuación del Calor. Función de transferencia del filtro lineal asociado $m_\lambda(w)$.

Sea la ecuación del calor $u_t - u_{xx} = 0$, con el dato inicial $u(x,0)=f(x)$.

Vamos, ahora, a discretizar la ecuación usando el esquema incondicionalmente estable más simple. Sean $h>0$ y $k>0$ los incrementos espacial y temporal respectivamente, y por lo tanto $u_i^n \simeq u(ih,nk)$. Usamos la discretización siguiente:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} - \frac{u_{i+1}^{n+1} + u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1}}{h^2} = 0$$

que es un esquema recursivo implícito, que son, como veremos al pasar al campo de las transformadas, los que mantienen, como queríamos, la estabilidad incondicional.

Sea $\lambda = k/h^2$. Entonces tenemos:

$$(1+2\lambda)\, u_i^{n+1} - \lambda\, u_{i-1}^{n+1} - \lambda\, u_{i+1}^{n+1} = u_i^n \text{ para todo i entero y } n \in \mathbb{N}$$

Si aplicamos la Transformada de Fourier a los dos miembros de la igualdad anterior, obtenemos:

$$(1+2\lambda)\, \hat{u}_i^{n+1} - \lambda\, \hat{u}_{i-1}^{n+1} - \lambda\, \hat{u}_{i+1}^{n+1} = \hat{u}_i^n \text{ para todo i entero y } n \in \mathbb{N}$$

y como, según vimos antes en las propiedades de la Transformada de Fourier Discreta, $\hat{u}_{i-1}^{n+1}(wh) = e^{iwh}\hat{u}_i^{n+1}$ y $\hat{u}_{i+1}^{n+1}(wh) = e^{-iwh}\hat{u}_i^{n+1}$, y sustituyendo en la igualdad, nos queda:

$$(1+2\lambda)\, \hat{u}_i^{n+1} - \lambda\, e^{iwh}\hat{u}_i^{n+1} - \lambda\, e^{-iwh}\hat{u}_i^{n+1} = \hat{u}_i^n$$

de donde, despejando la señal en el paso n+1, obtenemos:

$$\hat{u}_i^{n+1} = \frac{1}{1+2\lambda-\lambda e^{iwh}-\lambda e^{-iwh}}\hat{u}_i^n = \frac{1}{1+2\lambda-2\lambda\cos(wh)}\hat{u}_i^n$$

con lo que podemos interpretar la señal u^{n+1} como la convolución de la u^n con un filtro definido por la función de transferencia:

$$m_\lambda(w) = \frac{1}{1+2\lambda-2\lambda\cos(wh)}$$

y como $0 \leq 1 - \cos(wh) \leq 2$ y $\lambda \geq 0$ entonces $|m_\lambda(w)| \leq 1$ y $w \in \mathbb{R}$, el esquema verifica la Condición de von Neumann, y por tanto estable para todo $k>0$ y $h>0$.

1.6.- ESTUDIO MATEMÁTICO DE $m_\lambda(w)$

En este apartado vamos a ver unas propiedades interesantes acerca de la Función de Transferencia antes obtenida. Empezaremos demostrando un Teorema, de cuya interpretación obtendremos dichas propiedades.

Teorema 1. Sean $h,k>0$, $\lambda=k/h^2$ y sea $m_\lambda(w)$ el definido anteriormente, entonces tenemos:

(a) $$m_\lambda(w) = \frac{\nu/\lambda}{(1-\nu e^{iwh})(1-\nu e^{-iwh})}$$

(b) $$m_\lambda(w) = (1+4\lambda)^{-1/2} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \nu^{|m|} e^{iwhm}$$

(c) $$\int_{-\frac{\pi}{h}}^{+\frac{\pi}{h}} m_\lambda^n(w)dw = \frac{2\pi\nu^n}{h\lambda^n(1-\nu^2)^{2n}} \sum_{m=0}^{n-1} \begin{pmatrix} n+m-1 \\ m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-1 \\ m \end{pmatrix} \nu^{2m}(1-\nu^2)^{n-m}$$

donde $$\nu = \frac{1+2\lambda-\sqrt{1+4\lambda}}{2\lambda}$$

Demostración:

(a).- Si hacemos $1/m_\lambda(w) = f(e^{iwh})$, entonces $f(e^{iwh}) = 1 + 2\lambda - \lambda e^{-iwh} - \lambda e^{iwh} = e^{-iwh}\cdot[-\lambda(e^{iwh})^2 + (1+2\lambda)e^{iwh} - \lambda]$. Si, ahora, hacemos $f(e^{iwh}) = 0$, obtenemos dos raíces:

$$v = \frac{1+2\lambda-\sqrt{1+4\lambda}}{2\lambda} \quad ; \quad v_0 = \frac{1+2\lambda+\sqrt{1+4\lambda}}{2\lambda}$$

que verifican que $\nu_0\nu = 1$. Luego, podemos factorizar de la forma siguiente:

$$f(e^{iwh}) = -\lambda e^{-iwh}(e^{iwh}-\nu)(e^{iwh}-\nu_0) = \lambda(1-\nu e^{-iwh})(\nu_0 - e^{iwh}) =$$

$$= \lambda(1-\nu e^{-iwh})(\frac{1}{\nu} - e^{iwh}) = \frac{\lambda}{\nu}(1-\nu e^{-iwh})(1-\nu e^{iwh})$$

y teniendo en cuenta la definición de $f(e^{iwh})$, obtenemos la relación definida en (a):

$$m_\lambda(w) = \frac{1}{f(e^{iwh})} = \frac{\nu/\lambda}{(1-\nu e^{iwh})(1-\nu e^{-iwh})}$$

(b).- Hemos de tener en cuenta que:

$$|ve^{iwh}| = |ve^{-iwh}| = |v| = \frac{|1+2\lambda-\sqrt{1+4\lambda}|}{2\lambda} < \frac{|1+2\lambda-1|}{2\lambda} = 1$$

y pasamos a descomponer en fracciones simples la expresión definida en (a):

$$m_\lambda(w) = \frac{\nu/\lambda}{(1-\nu e^{iwh})(1-\nu e^{-iwh})} = \frac{e^{iwh}\nu/\lambda}{(1-\nu e^{iwh})(e^{iwh}-\nu)} =$$

$$= \frac{\nu}{\lambda}\left[\frac{1/(1-\nu^2)}{1-\nu e^{iwh}} + \frac{\nu/(1-\nu^2)}{e^{iwh}(1-\nu e^{-iwh})}\right] = \frac{\nu}{(1-\nu^2)\lambda}\left[\frac{1}{1-\nu e^{iwh}} + \frac{\nu e^{-iwh}}{1-\nu e^{-iwh}}\right] =$$

donde podemos desarrollar en serie geométrica cada uno de los sumandos, por tener ambos razón con módulo menor que uno, por tanto:

$$= \frac{\nu}{(1-\nu^2)\lambda}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\nu^m e^{iwhm} + \sum_{m=1}^{\infty}\nu^m e^{-iwhm}\right] = \frac{1}{(\nu_0-\nu)\lambda}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\nu^m e^{iwhm} + \sum_{m=-1}^{-\infty}\nu^{|m|} e^{iwhm}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+4\lambda}}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\nu^{|m|}e^{iwhm} \qquad \textit{ya que} \quad \nu_0-\nu = \frac{\sqrt{1+4\lambda}}{\lambda}$$

que es la expresión de $m_\lambda(w)$ que en el apartado (b) del Teorema 1 queríamos alcanzar.

(c).- Si hacemos el cambio $z=e^{iwh}$, entonces, se verifica que $|z|=1$ y además

$z_0=e^{-i\pi}$ y $z_1=e^{i\pi}$, por lo que recorremos el círculo unidad en sentido positivo, por otra parte, diferenciando en el cambio de variables obtenemos que $dw=dz/(ihz)$. Entonces, si vamos a la integral original, y primero la ponemos en función de e^{iwh}, para después realizar dicho cambio de variables, obtenemos:

$$\int_{-\frac{\pi}{h}}^{+\frac{\pi}{h}} m_\lambda^n(w)dw = \int_{-\frac{\pi}{h}}^{+\frac{\pi}{h}} \frac{(\nu/\lambda)^n}{(1-\nu e^{iwh})^n(1-\nu e^{-iwh})^n}dw = \int_{-\frac{\pi}{h}}^{+\frac{\pi}{h}} \frac{(\nu/\lambda)^n(e^{iwh})^n}{(1-\nu e^{iwh})^n(e^{-iwh}-\nu)^n}dw =$$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{z^n(\nu/\lambda)^n}{(1-\nu z)^n(z-\nu)^n}\cdot\frac{dz}{ihz} = \frac{\nu^n}{ih\lambda^n}\cdot\oint_{|z|=1}\frac{z^{n-1}dz}{(1-\nu z)^n(z-\nu)^n}\cdot\frac{dz}{ihz} =$$

Aplicando el teorema de los residuos, y teniendo en cuenta que el único polo interior a $|z|=1$ es $z=\nu$, obtenemos el valor de la integral:

$$= \frac{\nu^n}{ih\nu^n}.2\pi i\frac{1}{(n-1)!}\cdot\frac{d}{dz^{n-1}}\left[\frac{z^{n-1}}{(1-\nu z)^n}\right]_{z=\nu} = \frac{2\pi}{h}\cdot\frac{\nu^n}{\lambda^n}\cdot\frac{1}{(n-1)!}\cdot\frac{d}{dz^{n-1}}\left[\frac{z^{n-1}}{(1-\nu z)^n}\right]_{z=\nu} =$$

Si tenemos en cuenta la fórmula de Newton para la derivada de orden n de un producto, llegamos a la igualdad que queremos:

$$= \frac{2\pi}{h}\cdot\frac{\nu^n}{\lambda^n}\cdot\frac{1}{(n-1)!}\left[\sum_{m=0}^{n-1}\begin{pmatrix} n-1 \\ m \end{pmatrix}(n+m-1)\ldots(n+1)n\nu^m(1-\nu z)^{-(n+m)}(n-1)\ldots(m+1)z^m\right]_{z=\nu} =$$

$$= \frac{2\pi}{h} \cdot \frac{\nu^n}{\lambda^n} \sum_{m=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n+m-1 \\ m \end{bmatrix} \frac{\nu^{2m}}{(1-\nu^2)^{n+m}} =$$

$$= \frac{2\pi\nu^n}{h\lambda^n(1-\nu^2)^{2n}} \sum_{m=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n+m-1 \\ m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix} \nu^{2m}(1-\nu^2)^{n-m}$$

con lo que queda terminada la demostración del Teorema 1 propuesto.

Ahora, vamos a hacer la interpretación de los resultados del Teorema:

Como primera consecuencia del Teorema 1, si observamos el apartado (a), y apoyándonos en el análisis de Fourier, que demuestra que una convolución pasa a ser un producto en el campo de las transformadas. Vemos, que efectivamente el filtro queda descompuesto en producto de dos, que significa una combinación de dos convoluciones asociadas a esos dos filtros, en el que uno de ellos es un filtro causal y el otro anticausal.

Además podemos descomponer el cálculo de u^{n+1} en los siguientes pasos:

(i) $u_i^{n+1/3} = u_i^n + \nu u_{i-1}^{n+1/3}$ para todo i entero

(ii) $u_i^{n+2/3} = u_i^{n+1/3} + \nu u_{i+1}^{n+2/3}$ para todo i entero

(iii) $u_i^{n+1} = (\nu/\lambda)u_i^{n+2/3}$ para todo i entero

y así, tenemos que el cálculo de u_i^{n+1} sólo necesita 3 multiplicaciones y 2 sumas para cada i entero. Además, en muchas aplicaciones podemos obviar el paso (iii), ya que sólo es un proceso de normalización.

Según el apartado (b), podemos interpretar u^{n+1} como la convolución de u^n con el filtro $h_\lambda(i)$, definido por:

$$h_\lambda(i) = (1+4\lambda)^{-1/2}\nu^{|i|} \qquad \text{para todo i entero}$$

puesto que $\nu \to 1$ cuando $\lambda \to +\infty$, el dominio efectivo de este filtro se vuelve infinito, sin embargo, el número de operaciones para calcular u^{n+1} permanece fijo e independiente de λ.

Además, de los apartados (a) y (b), podemos hacer la interpretación matricial, que nos aclara los términos allí reseñados, siguiente:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & (i) & & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}_{\infty\times\infty} \end{array} \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ u_i^{n+1} \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ u_i^{n} \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \qquad\qquad (i) \\ \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}_{\infty\times\infty} \end{array}^{-1} = (1+4\lambda)^{-1/2} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \nu^{-2} & \nu^{-1} & 1 & \nu & \nu^2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \nu^{-2} & \nu^{-1} & 1 & \nu & \nu^2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \nu^{-2} & \nu^{-1} & 1 & \nu & \nu^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\nu}{\lambda} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & -\nu & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & -\nu & 1 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & -\nu & 1 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & 1 & -\nu & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & 1 & -\nu & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & -\nu & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}^{-1}$$

Si elegimos para el cálculo de la energía a la norma ℓ_2, ya que esta norma permanece invariante si pasamos al campo de la transformada de Fourier, el apartado (c) nos da la energía del filtro $m_\lambda(w)$, con sólo aplicar la fórmula obtenida para índice 2n, es decir:

$$\| m_\lambda^n \|_2^2 = \int_{-\frac{\pi}{n}}^{+\frac{\pi}{n}} m_\lambda^{2n} dw = F(\lambda,n)$$

Así, podremos hacer una aproximación poniendo como condición la igualdad de energías.

Antes de pasar a la aproximación que nosotros vamos a hacer del filtro Gaussiano, haremos unas consideraciones computacionales:

En términos de frecuencia, podemos interpretar la solución de la ecuación de calor, u(x,t), como la convolución del dato inicial f(x) con un filtro gaussiano que tiene la función de transferencia $m(w)=e^{-tw^2}$, cuando discretizamos la señal f(x) y el filtro gaussiano $G_\sigma(x)$ con un incremento espacial h, el filtro m(w) se convierte en una función $2\pi/h$ periódica definida por:

$$m(w,h) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-t(w+2\pi m/h)^2} \qquad \text{para todo } t>0$$

(véase Gasquet y Witomski) [GaWi]. Por otra parte, u_i^n es una aproximación de u(ih,nk) y puede interpretarse como la convolución de la señal inicial u_i con el filtro definido por la función de transferencia $m_\lambda^n(w)$. Además $m_\lambda^n(w)$ es una aproximación de m(w,h). Desde un punto de vista teórico, λ debería hacerse pequeño para que u_i^n se acercara a la solución continua u. Sin embargo, si hacemos t "grande", necesitaríamos muchas iteraciones para aproximarnos a u(i,t), y entonces el esfuerzo computacional aumentaría rápidamente. Así, desde un punto de vista práctico, necesitamos tomar λ grande para reducir dicho esfuerzo computacional. Pero, si h es bastante pequeño y t bastante grande, el soporte efectivo de la función $m(w)=e^{-tw^2}$ estaría incluido en el intervalo $[-2\pi/h,2\pi/h]$, y en él, $m(w,h)\cong m(w)$. Hay que hacer constar, que $m_\lambda(w)$ y $m_\lambda^n(w)$ son no negativas, $2\pi/h$ periódicas, decrecientes en el intervalo $[0,\pi/h]$ y verifican que

$m_\lambda(0)=m_\lambda^n(0)=1$. Como $m_\lambda^n(w)$ decrece mas rápido que $m_\lambda(w)$, de este modo aproxima mejor la función m(w). La relación teórica entre λ,n y t, viene dada por:

$$h^2\lambda n=t.$$

1.7.- APROXIMACIÓN DEL FILTRADO GAUSSIANO A TRAVÉS DE LA n-ÉSIMA ITERACIÓN DE $m_\lambda(w)$

Como, mostraremos en las experiencias numéricas, si utilizamos como criterio para elegir los parámetros el expresado en el apartado anterior, es decir, que se verifique que $h^2\lambda n=t$, $m_\lambda^n(w)$ converge lentamente a m(w) cuando n tiende a infinito. Para acelerar la convergencia, usamos un criterio diferente para escoger λ y n. Usamos como criterio que m(w) y $m_\lambda^n(w)$ tengan la misma energía:

$$F(\lambda,n) = \int_{-\pi/h}^{+\pi/h} m_\lambda^{2n}(w)dw = \int_{-\pi/h}^{+\pi/h} m^2(w)dw \cong (\pi/2t)^{1/2}$$

Como quiera que, $F(\lambda,n)$ es continuamente decreciente respecto de λ, satisface:

$$F(0,n) = 2\pi/h \qquad \text{y} \qquad \lim F(\lambda,n) = 0, \text{ si } \lambda\to+\infty$$

Así, si $2\pi/h>(\pi/2t)^{1/2}$, tenemos que para todo $n\in\mathbb{N}$, existe un único $\lambda>0$ tal que $F(\lambda,n)=(\pi/2t)^{1/2}$. Y, podemos hacer esta relación explícita, usando la fórmula del apartado (c) del Teorema 1. Por ejemplo, para fijar ideas, si tomamos n=1,tenemos la relación siguiente:

$$(2\pi/h)(1+2\lambda)(1+4\lambda)^{-3/2} = (\pi/2t)^{1/2}$$

Como mostramos en los resultados numéricos (ver figuras 1 y 2), el criterio de la energía es más eficiente que el clásico para aproximar m(w).

1.8.- RESULTADOS EXPERIMENTALES.

Experimentos numéricos de aproximación de funciones gaussianas.

Primeramente, antes de pasar a experimentar el filtro $m_\lambda(w)$ en imágenes, vamos a constatar que es mejor la aproximación si usamos el criterio de la conservación de la energía. Así, representamos una aproximación al filtro $m(w)=e^{-3w^2}$, usando iteraciones de $m_\lambda(w)$ (la línea continua corresponde a m(w) y la discontinua corresponde a las iteraciones de $m_\lambda(w)$). En la figura 1, mostramos la aproximación clásica. Y en la figura 2, usamos el criterio de conservación de la energía.

Para mostrar la eficacia computacional de nuestra aproximación de funciones gaussianas mostraremos un experimento basado en una imagen real de 350x350 pixels que se muestra en la parte alta de la figura 3. En la parte baja de dicha figura se muestra (puntos en negro sobre fondo blanco), a título ilustrativo, los "zero-crossing" del laplaciano calculados sobre la imagen real. Como puede apreciarse, una imagen

real, contiene una cantidad enorme de "zero-crossing", debido a pequeñas fluctuaciones prácticamente imperceptibles al ojo humano. En la parte alta de las figuras 4, 5 y 6 se presenta el resultado de la aproximación del filtrado de la imagen de la figura 3 con unas gaussianas de desviación típica σ=3,5,9 respectivamente. En la parte baja de dichas figuras se muestran los "zero-crossing" de dichas imágenes. Para obtener estos resultados hemos fijado en los tres casos el número de iteraciones a 3, y hemos aproximado las gaussianas utilizando el criterio de energía presentado en este capítulo, es decir a través de 3 iteraciones del filtro $m_\lambda(w)$ y calculando λ de tal forma que la energía de la gaussiana y la energía del filtro $m_\lambda^3(w)$ sea la misma.

Puesto que el número de iteraciones es el mismo para la obtención de los resultados de las figuras 4, 5 y 6, obtenemos que el cómputo de operaciones por pixel es el mismo en los tres casos, (a pesar de que los resultados son bien distintos). Siguiendo el análisis matemático desarrollado en este capítulo para la descompocisión y cálculo del filtro $m_\lambda(w)$ obtenemos que el número de operaciones por pixel necesarias para obtener el resultado de las figuras (parte alta) 4, 5 ó 6 es únicamente de 12 sumas y 13 multiplicaciones, lo cual muestra la eficacia de nuestra aproximación.

Por último, si analizamos la evolución de los "zero-crossing" a través de las figuras 3, 4, 5 y 6 podemos constatar, tal como hemos mencionado en este capítulo, el sucesivo desplazamiento de dichos "zero-crossing" a través de las escalas (véase por ejemplo el contorno de la boca). Este hecho, debido esencialmente a la linealidad del

operador, dificulta el cálculo de los bordes de la imagen original utilizando la información contenida en los "zero-crossing". Efectivamente, podemos constatar como a bajas escalas (desviación típica de la gaussiana pequeña) hay demasiados "zero-crossing" espurios y en las altas escalas (desviación típica de la gaussiana grande) los "zero-crossing" de la imagen original que corresponden a bordes nítidos se han desplazado.

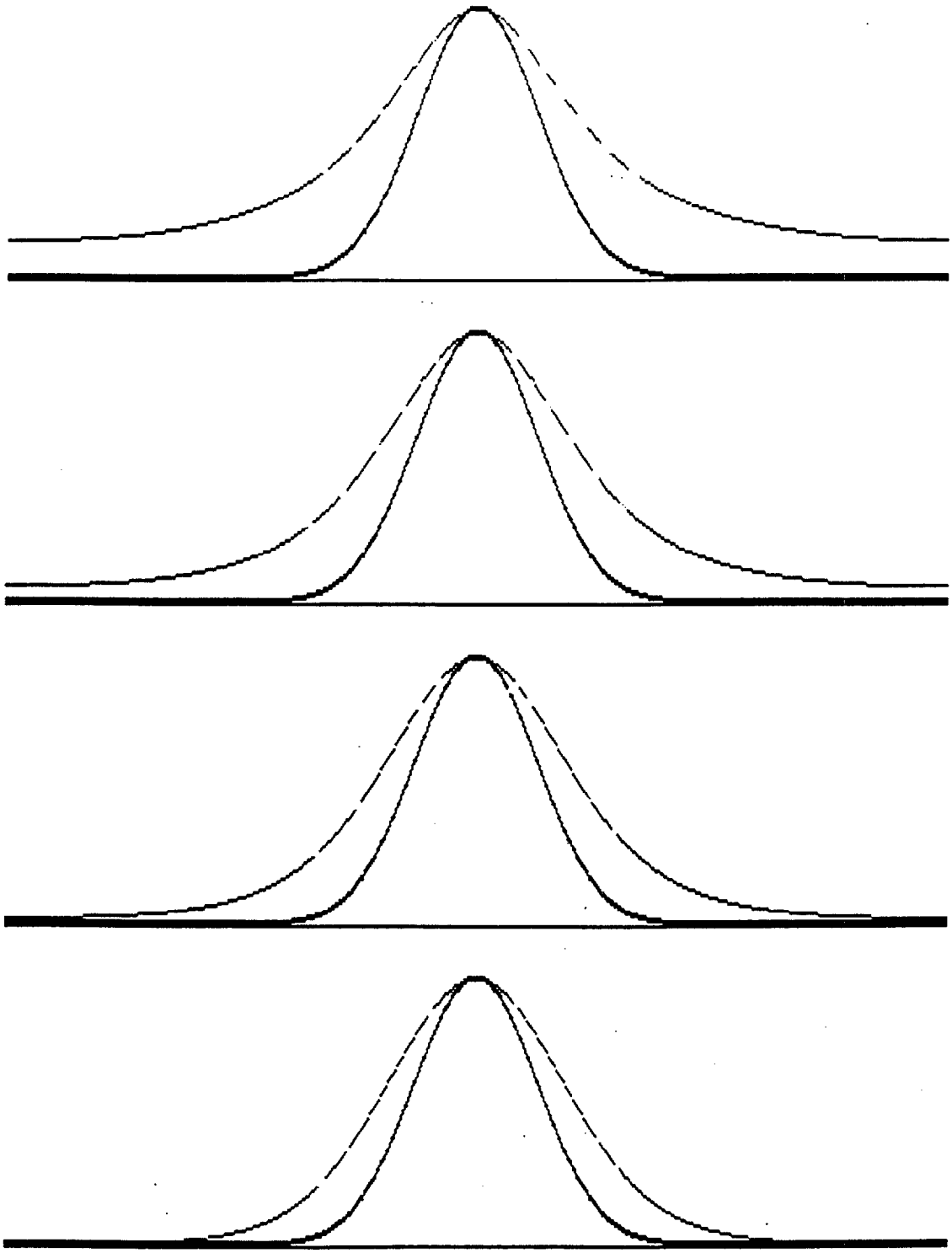


FIGURA Nº 1

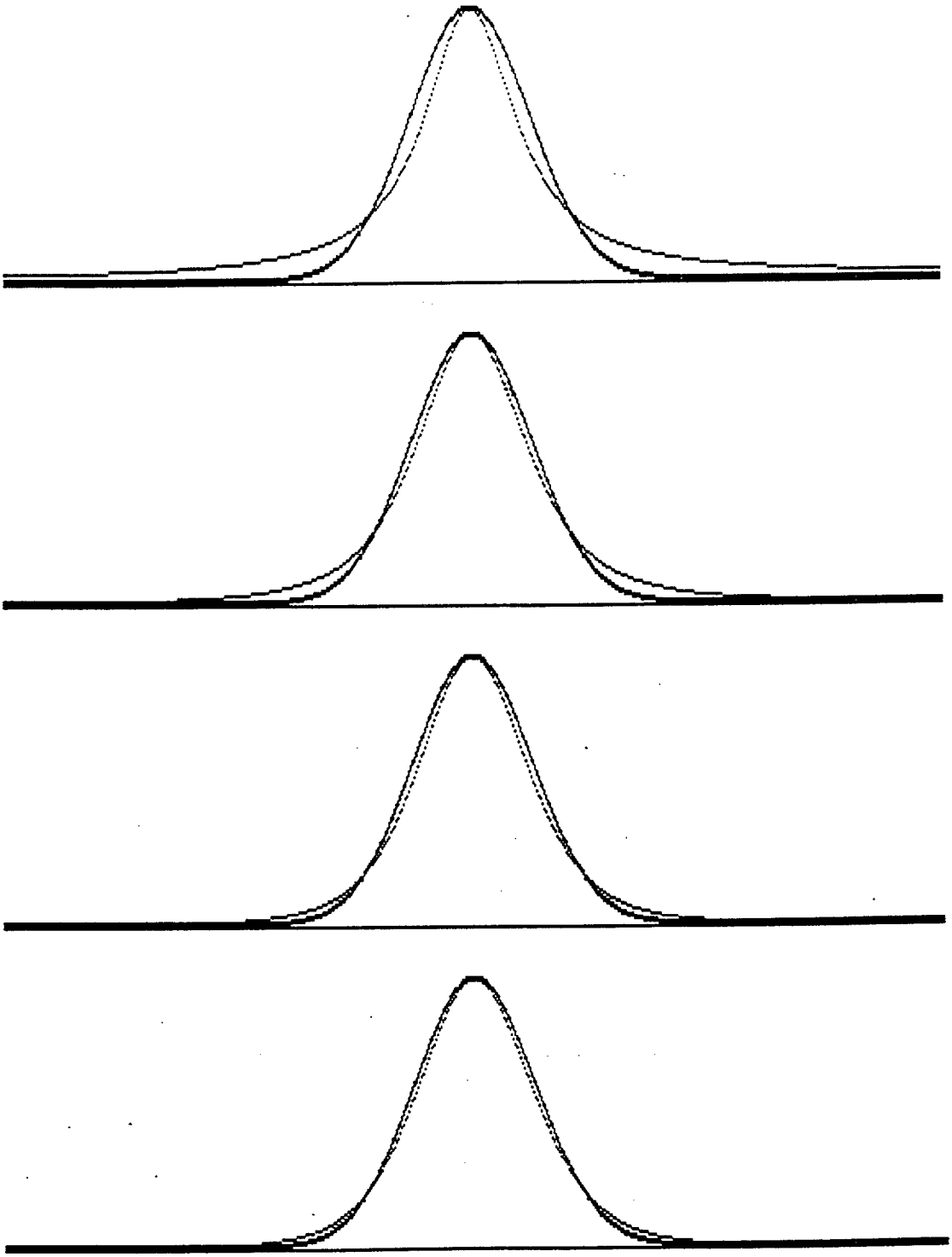


FIGURA Nº 2

FIGURA Nº 3

FIGURA Nº 4

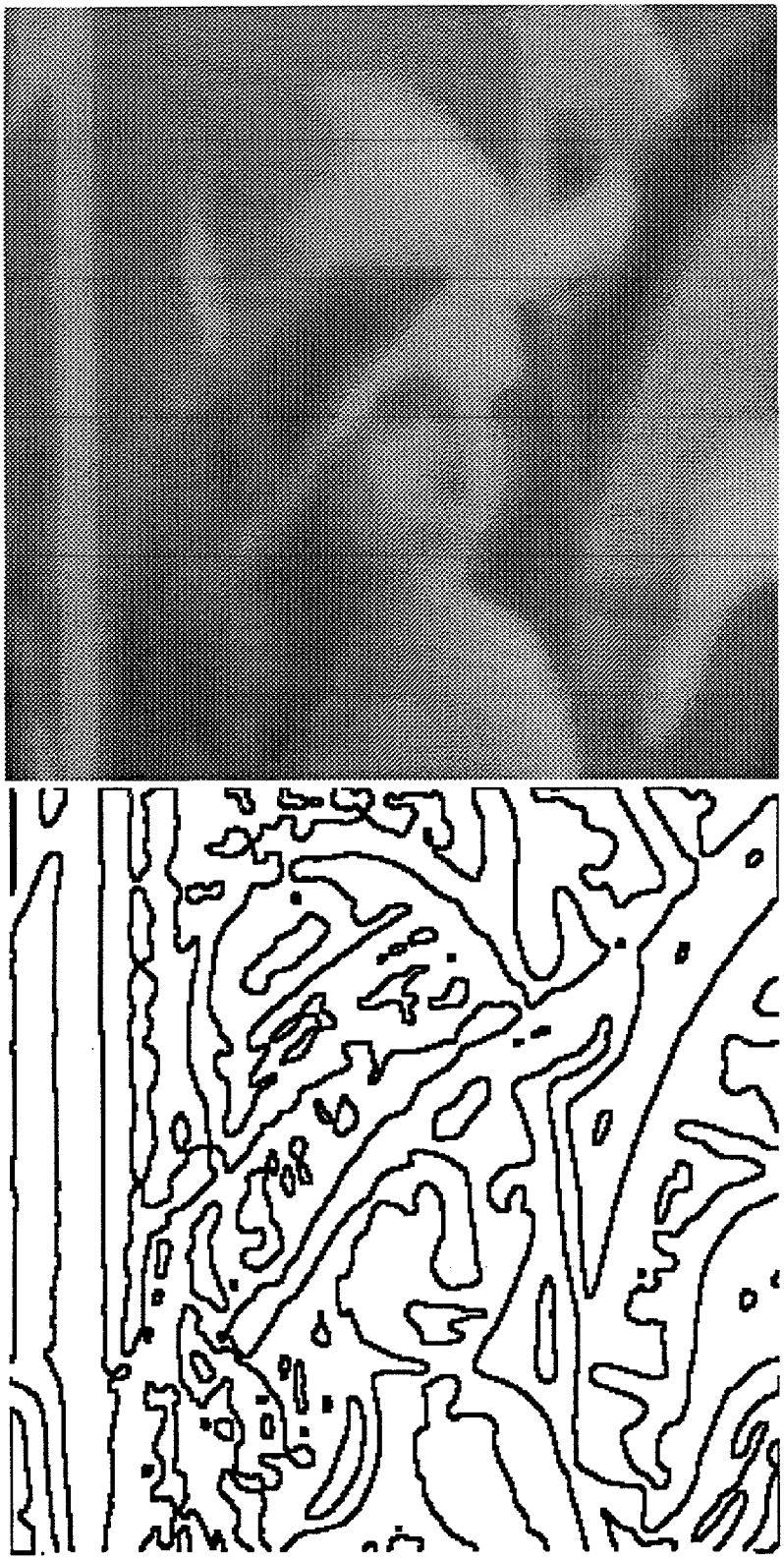


FIGURA Nº 5

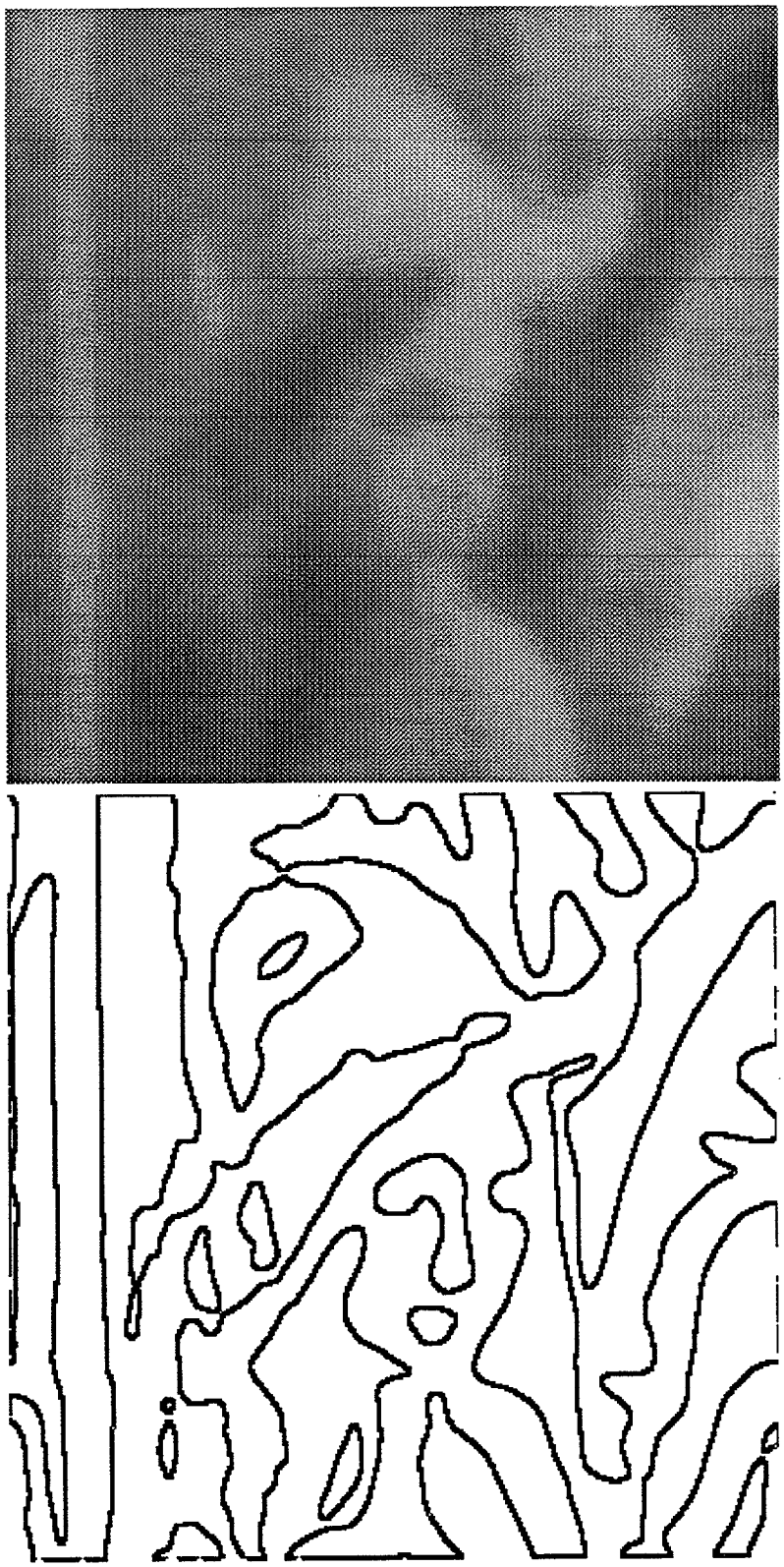


FIGURA Nº 6

CAPÍTULO 2

RESTAURACIÓN DE SEÑALES UNIDIMENSIONALES UTILIZANDO FILTROS DE CHOQUE

2.- RESTAURACIÓN DE SEÑALES UNIDIMENSIONALES UTILIZANDO FILTROS DE CHOQUE

2.1.- INTRODUCCIÓN

En este capítulo, estudiaremos el problema de la restauración de señales unidimensionales. En primer lugar veremos como se puede abordar el problema via ecuaciones diferenciales hiperbólicas, para ello introduciremos algunos conceptos básicos como son las ecuaciones de transporte lineal y la forma de crear discontinuidades utilizando ecuaciones diferenciales. Estudiaremos el modelo de Osher y Rudin, y por último propondremos nuestro modelo, así como, los algoritmos a los que da lugar. Es de destacar, que nuestro modelo no utiliza ninguna información a priori sobre el tipo de perturbación realizada sobre la señal.

2.2.- PRESENTACIÓN DE UN PROBLEMA CLÁSICO DE TRANSPORTE LINEAL Y LA ECUACIÓN DE BURGER.

2.2.1.- Análisis de un modelo clásico de transporte lineal.

Consideremos la ecuación hiperbólica lineal:

$$u_t + cu_x = 0 \text{ en } \mathbb{R}x\mathbb{R}^+,$$

donde c es una constante real. Es bien conocido que esta ecuación es de transporte puro, es decir, la solución u(x,t) para un dato inicial f(x) es u(x,t)=f(x-ct), donde la dirección de la onda de desplazamiento depende del signo de c.

Antes de discretizar la ecuación, vamos a hacer unas consideraciones sobre la estabilidad del posible esquema en diferencias que implementemos. Dichas consideraciones viene dadas por el cumplimiento de la Condición de Courant-Friedrichs-Lewy.

La Condición de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL).

La idea intuitiva que hay en la condición de Courant-Friedrichs-Lewy es que la ecuación en diferencias finitas no debería ser independiente de cualquier dato que determine la solución de la ecuación en derivadas parciales, a menos que pueda probarse que los datos omitidos tienen un efecto negligible.

Definición. El dominio numérico de dependencia de un método en diferencias finitas en un punto (ih,nk) es el conjunto de puntos (jh,0) sobre la línea inicial que influye en la solución en el punto (ih,nk).

Supóngase que el dominio de dependencia en el punto (ih,nk) del método en

diferencias finitas D_h no contiene el dominio de dependencia en el punto (ih,nk) de la ecuación en derivadas parciales D. Sea D_1 el conjunto de puntos en D que no están en D_h. Supóngase que se perturban los datos iniciales en D_1, la solución de la ecuación en diferencias finitas en el punto (ih,nk) no se verá afectada por dicha perturbación de los datos iniciales. Por ello, será imposible que la solución u_i^n del método de las diferencias finitas converja a la solución de la ecuación en derivadas parciales con la perturbación de datos iniciales cuando h,k tienden a 0.

Definición. Un método de diferencias finitas se dice que satisface la condición de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) si el dominio de dependencia de la solución de la ecuación en diferencias finitas incluyen el dominio de dependencia de la solución de la ecuación en derivadas parciales en todos los puntos (ih,nk). La condición CFL es necesaria para asegurar la estabilidad. Esto se sigue del argumento anterior.

Típicamente, un método de diferencias finitas que satisface la condición de CFL tendrá un dominio numérico de dependencia que contiene puntos que no están en el dominio de dependencia de la ecuación en derivadas parciales. Estos puntos adicionales en el dominio numérico de dependencia resultan datos iniciales adicionales que determinan la solución de la ecuación en diferencias finitas. Esto hace surgir un error, sin embargo, la contribución de estos datos adicionales tiende a 0 cuando h,k tienden a 0.

Si consideramos el prototipo de ecuación hiperbólica:

$$\partial_t v = c\partial_x v, \quad \text{en } \mathbb{R}x\mathbb{R}^+$$

donde c es una constante, con la condición inicial:

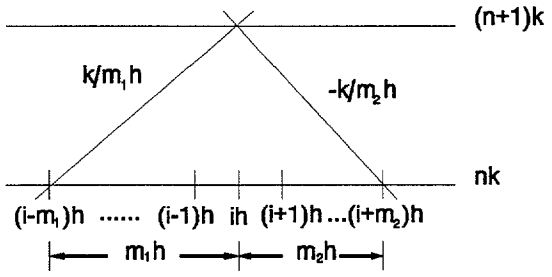
$$v(x,0) = f(x), \qquad \text{en } \mathbb{R}$$

Aproximamos la ecuación por el método de diferencias finitas siguiente:

$$u_i^{n+1} = \sum_{j=-m_1}^{m_2} A_j S_j^+ u_i^n$$

donde A_j en $j=-m_1$ y $j=m_2$ son distintos de 0.

La solución en el punto (ih,(n+1)k) depende de la solución en m1+m2+1 puntos en el nivel de tiempo anterior $((i-m_1)h,nk),\ldots,(ih,nk),\ldots,((i+m_2)h,nk)$. El dominio numérico de dependencia en el punto (ih,(n+1)k) está limitado por las dos líneas con pendientes $-k/m_2h$ y k/m_1h como se aprecia en la gráfica:



Estas pendientes son negativas y positivas respectivamente. Las ecuaciones de

estas líneas a través del punto (ih,(n+1)k) están dadas por:

$$\begin{cases} R_1 : t-(n+1)k = \dfrac{-k}{m_2 h}(x-ih) \\ R_2 : t-(n+1)k = \dfrac{k}{m_1 h}(x-ih) \end{cases}$$

Estas ecuaciones intersectan la línea inicial (t=0) en los puntos $((i+m_2(n+1))h,0)$ y $((i-m_1(n+1))h,0)$ respectivamente. Por ello, el dominio numérico de dependencia del punto (ih,(n+1)k) son $(m_1+m_2)(n+1)+1$ puntos en el intervalo $[(i+m_2(n+1))h\ ,\ (i-m_1(n+1))h]$

Las características de la ecuación de partida son de la forma:

$$x + ct = K$$

donde K es una constante. Esto representa una familia de líneas con pendiente -1/c. El dominio de dependencia de la ecuación en el punto (ih,(n+1)k) es el punto (ih+c(n+1)k,0) de la línea inicial (t=0). Entonces, la condición CFL requiere que:

$$(ih+c(n+1)k) \in [(i+m_2(n+1))h\ ,\ (i-m_1(n+1))h]$$

Existen dos casos a considerar según el signo de c. Si $c > 0$, entonces se satisface la condición C.F.L. si la pendiente de la recta R_1 es mayor ó igual que la pendiente de la característica, es decir, que se verifique:

$$-k/m_2h \geq -1/c$$

Esta condición puede escribirse como:

$$ck/h \leq m_2$$

Si $c<0$, entonces, la condición se satisface si la pendiente de la recta R_2 es menor ó igual a la pendiente de la característica, es decir, que se verifique:

$$k/m_1h \leq -1/c = 1/|c|$$

La condición puede escribirse como:

$$|c|k/h \leq m_1$$

La condición CFL para el método de diferencias finitas:

$$u_i^{n+1} = \sum_{j=-m_1}^{m_2} A_j S_j^+ u_i^n$$

queda de la forma siguiente:

$$\begin{cases} c\frac{k}{h} \leq m_2 & si\ c>0 \\ -c\frac{k}{h} \leq m_2 & si\ c<0 \end{cases}$$

Supongamos que aproximamos la ecuación prototipo por el siguiente esquema:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} = cD_+u_i^n, \quad es\ decir,$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n + kcD_+u_i^n =$$

$$= (1-\lambda c)\, u_i^n + \lambda c u_{i+1}^n =$$

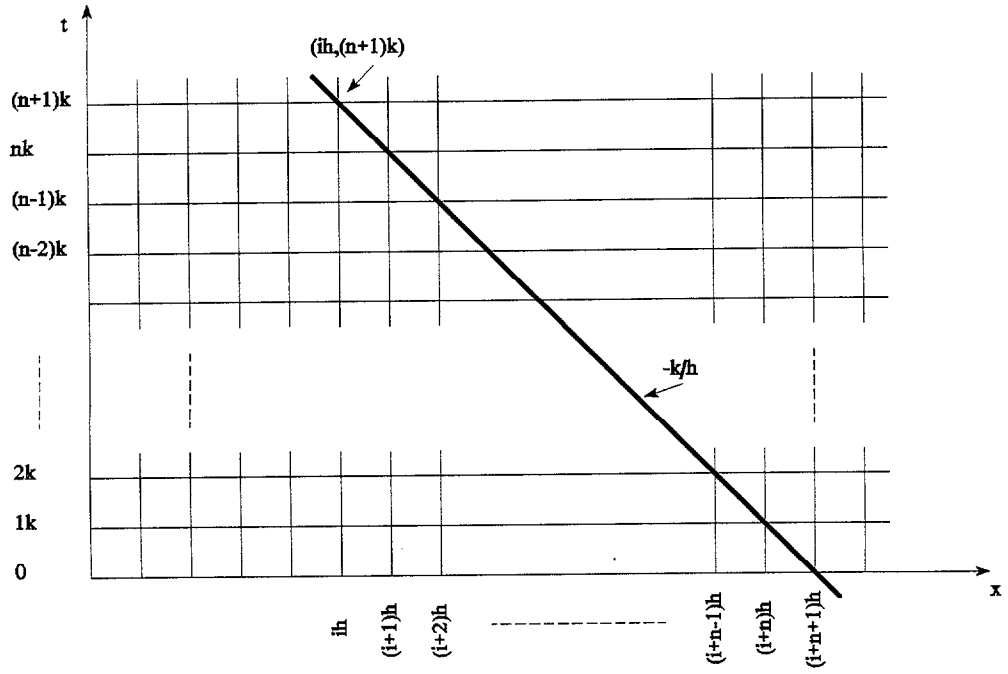
$$= (1-\lambda c)\, u_i^n + \lambda c S_+ u_i^n$$

donde $\lambda = k/h$. En este caso $m_1 = 0$ y $m_2 = 1$. Si suponemos que c es positiva, entonces, la condición CFL es que se verifique:

$$c\lambda \leq 1$$

La solución en el punto (ih,(n+1)k) depende de dos puntos en el nivel temporal anterior (ih,nk) y ((i+1)h,nk), que depende de tres puntos en el nivel anterior a ellos

en el tiempo (ih,(n-1)k), ((i+1)h,(n-1)k) y ((i+2)h,(n-1)k), y así sucesivamente hasta que se alcance la línea inicial (t=0), en donde la solución depende de n+2 puntos (ih,0), ((i+1)h,0), ..., ((i+n+1)h,0). El dominio numérico de dependencia en los puntos (ih,(n+1)k) consisten en los n+2 puntos en el intervalo [ih, (i+n+1)h] como se muestra en la siguiente gráfica:



Si queremos considerar la estabilidad del método hemos de tomar la trasformada discreta de Fourier y ver si se verifica la condición de von Newmann. Lo cual vamos a determinar a continuación:

$$\hat{u}^{n+1}(w) = \rho(w)\,\hat{u}^{n}(w) \quad donde\ \rho(w) = 1-c\lambda+c\lambda e^{-iw}$$

y si se verifica que $c\lambda \leq 1$, entonces:

$$|\rho(w)| \leq |1-c\lambda| + |c\lambda e^{-iw}| =$$

$$= 1-c\lambda + c\lambda|e^{-iw}| = 1$$

Por ello, para $c\lambda \leq 1$, se satisface la condición de von Newmann y el método en diferencias finitas es estable.

Para determinar la exactitud (error) del método, desarrollamos v en la serie de Taylor en el punto (ih,nk). Suponemos que v es continuamente diferenciable hasta el orden dos, así, si partimos de que $\partial_t v = c\partial_x v$ y derivamos respecto de t, obtenemos que:

$$\partial_t^2 v = c\partial_t\partial_x v = c\partial_x\partial_t v = c^2\partial_x^2 v$$

y

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{k} = (\partial_t v)_i^n + \frac{c^2 k}{2}(\partial_x^2 v)_i^n + o(k^2)$$

$$D_+ v_i^n = (\partial_x v)_i^n + \frac{h}{2}(\partial_x^2 v)_i^n + o(h^2)$$

y si ahora sustituimos en la ecuación de partida, nos resulta que:

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{k} - cD_+ v_i^n = \left(\frac{c^2 k}{2} - \frac{ch}{2}\right)(\partial_x^2 v)_i^n + o(k^2) + o(h^2)$$

Por ello el método de diferencias finitas es consistente y con una exactitud (error) del orden de o(h) + o(k).

De lo anterior vemos que el método de diferencias finitas es también consistente con la ecuación:

$$\partial_t v = c\partial_x v + \left(\frac{ch}{2} - \frac{c^2 k}{2}\right) \partial_x^2 v$$

que es una ecuación de difusión. Es por lo que el método en diferencias finitas que aproxima a la ecuación original debe introducir, al hacer su resolución numérica, una difusión en el resultado.

En el caso de que c sea negativa, podemos hacer un razonamiento igual que el anterior y obtener los mismos resultados, si usamos en el esquema el operador en diferencias hacia atrás, es decir, que nos queda el esquema siguiente:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} = cD_- u_i^n$$

Apoyándonos en lo expuesto anteriormente sobre la C.F.L., nosotros vamos a discretizar la ecuación usando esquemas implícitos, en lugar de explícitos, con lo que la condición se verifica siempre. Así, introducimos dos esquemas para discretizar la ecuación $u_t + cu_x = 0$, diferenciando el caso en el que c sea positivo del caso en el que c sea negativa.

Sean $h>0$ y $k>0$ los incrementos espacial y temporal respectivamente, y $u_i^n \simeq u(ih,nk)$. Si $c>0$, usamos la siguiente discretización:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + c\frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{h} = 0$$

Sea $\lambda=ck/h$. Entonces tenemos:

$$(1+\lambda)\, u_i^{n+1} - \lambda\, u_{i-1}^{n+1} = u_i^n \qquad \text{para todo i entero y n natural}$$

Nótese que u_i^{n+1} puede calcularse con número pequeño de operaciones (sólo 2 multiplicaciones y 1 suma para cada i). Además podemos interpretar la señal u^{n+1} como la convolución da la señal u^n con filtro definido por la función de transferencia:

$$m_\lambda(w) = \frac{1}{1+\lambda-\lambda e^{iwh}}$$

Como $|m_\lambda(w)| \leq 1$ para todo $\lambda>0$ y $w\in\mathbb{R}$, el esquema es estable para todo $k>0$ y $h>0$, y tenemos que:

$$m_\lambda(w) = \frac{1/(1+\lambda)}{1-\lambda/(1+\lambda)\, e^{iwh}} = \frac{1}{1+\lambda}\sum_{m=1}^{+\infty}\left[\frac{\lambda e^{iwh}}{1+\lambda}\right]^m$$

Además u^{n+1} es la convolución de u^n con el filtro $h_\lambda(i)$ definido por:

$$h_\lambda(i) = \begin{cases} (1+\lambda)^{-1}(\lambda/(1+\lambda))^{|i|} & if\ i\leq 0 \\ 0 & if\ i>0 \end{cases}$$

Este esquema es disipativo, es decir, que la discretización introduce una difusión artificial (mírese [So] para más detalles). De hecho, cuando $\lambda \to +\infty$, u_i^{n+1} tiende al promedio de la señal u_j^n para $j \in (-\infty, i)$.

Si $c<0$, usamos la siguiente discretización:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + c\frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{h} = 0$$

y usando los mismos argumentos, que para el caso $c>0$, tenemos que u^{n+1} puede interpretarse como la convolución de u^n con el filtro definido por:

$$h_\lambda(i) = \begin{cases} 0 & if\ i<0 \\ (1+\lambda)^{-1}(\lambda/(1+\lambda))^i & if\ i\geq 0 \end{cases}$$

donde $\lambda = -ck/h$.

Por último, vamos a exponer un método de discretización para ecuaciones hiperbólicas escalares, es decir, cuando se introduce un coeficiente variable. Este método, debido a Courant, Isaacson y Rees, se le conoce por método en diferencias "upwind". Así, partimos de la ecuación escalar siguiente:

$$\partial_t v = a(x)\partial_x v$$

Sabemos que los esquema siguientes:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + kcD_+u_i^n$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n + kcD_-u_i^n$$

son una aproximación de la ecuación con coeficiente constante, $\partial_t v = c\partial_x v$, para c positiva y negativa respectivamente. Además, los dos son estables, ya que verifican la condición C.F.L. para $c\lambda \leq 1$ y $-c\lambda \leq 1$ respectivamente.

Entonces, estos dos esquemas pueden combinarse para el caso en el que el coeficiente de la ecuación sea variable, así, introducimos uno u otro según sea el signo del coeficiente a(x), quedándonos el esquema siguiente:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \begin{cases} ka(ih)D_+u_i^n, & si\ a(ih)>0 \\ ka(ih)D_-u_i^n, & si\ a(ih)<0 \end{cases}$$

Puesto que cada uno de los esquemas es exacto con un error del orden de o(h)+o(k), la combinación de ambos también lo es.

Sin embargo, si a(x) cambia de signo, el esquema "upwind" no conserva la monotonía. Una forma de conseguir la monotonía, es plantear el esquema siguiente:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + ka^+_{i+\frac{1}{2}} D_+ u_i^n + ka^-_{i-\frac{1}{2}} D_- u_i^n \quad donde \quad a_{i\pm\frac{1}{2}} = a(x_{i\pm\frac{1}{2}}) \quad y$$

$$a^+_{i+\frac{1}{2}} \equiv \max(0, a_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}(a_{i+\frac{1}{2}} + |a_{i+\frac{1}{2}}|) \geq 0$$

$$a^-_{i+\frac{1}{2}} \equiv \min(0, a_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}(a_{i+\frac{1}{2}} - |a_{i+\frac{1}{2}}|) \leq 0$$

y si se verifica que $\max|a_{1+½}|\lambda \leq 1$, entonces el esquema "upwind" conserva la monotonía.

2.2.2.- Un modelo clásico de ecuación que genera discontinuidades (choques).

Aquí, presentamos el resultado de un problema test dado por la ley de la conservación escalar, a través de la resolución de la ecuación de Burger:

$$\partial_t v + \partial_x(½v^2) = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \; t \geq 0$$

con la condición inicial continua:

$$v(x,t) = \begin{cases} 1 & si \; x<0 \\ 1-x & si \; 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & si \; x>1 \end{cases}$$

La solución a este problema es una compresión de onda, la cual inicialmente, consiste en una recta para $0 \leq x \leq 1$. En oposición a una expansión de onda en la que la recta se expande con el tiempo, entonces, la compresión de onda, cierra (o comprime) la recta hasta que forma un choque. En este ejemplo, la onda continua consigue un pronunciamiento de la pendiente hasta $t=1$, donde se desarrolla el choque. La solución exacta para $t<1$ es:

$$v(x,t) = \begin{cases} 1 & si\ x<t \\ \dfrac{x-1}{t-1} & si\ t \leq x \leq 1 \\ 0 & si\ x>1 \end{cases}$$

y para $t \leq 1$, es:

$$v(x,t) = \begin{cases} 1 & si\ x> \dfrac{t+1}{2} \\ 0 & si\ x< \dfrac{t+1}{2} \end{cases}$$

2.3.- EL MODELO DE OSHER Y RUDIN PARA RESTAURACIÓN DE SEÑALES.

L. Rudin en [Ru] aplica por primera vez conceptos y técnicas de la resolución numérica de ecuaciones hiperbólicas no-lineales para la reconstrucción de imágenes. En una primera experiencia de filtro de choque, usó una modificación de la ecuación no-lineal de Burger. En un artículo reciente [OsRu], S.Osher y L.Rudin, introducen un avance importante, usando como modelo la siguiente ecuación hiperbólica:

$$u_t + F(u_{xx})|u_x| = 0 \text{ en } \mathbb{R}x\mathbb{R}^+$$

donde F(.) es una función tal que $F(s).s \geq 0$. Para discretizar esta ecuación, usaron un esquema monótono explícito que conserva la variación total y el tamaño y localización de los extremos locales. Sin embargo, este esquema no limpia algunos tipos de ruidos, como por ejemplo, el ruido "sal y pimienta". Desarrolla choques en los ceros de u_{xx}. Entonces, si tenemos una señal con ruido, dicho esquema produce muchos choques espurios debido a la influencia del ruido (ver figuras nº 7 y 8).

2.4.- MODELO PROPUESTO EN ESTE TRABAJO.

Nosotros introducimos (siguiendo la teoría clásica de [Marr 1982]) en la

ecuación un núcleo de difusión $G_\sigma(.)$ para eliminar los choques espurios. Proponemos como modelo la ecuación:

$$u_t + F(G_\sigma * u_{xx}, G_\sigma * u_x)\, u_x = 0 \qquad \text{en } \mathbb{R}\text{x}\mathbb{R}^+,$$

puesto que $G_\sigma * u_x = (G_\sigma)_x * u$, esta ecuación está mejor planteada desde un punto de vista teórico por que es de primer orden. Ahora los choques se desarrollan en los ceros de $G * u_{xx}$.

<u>Discretización de la ecuación</u> : Sean $h>0$ y $k>0$ los incrementos espacial y temporal respectivamente, y $u_i^n \simeq u(ih,nk)$. Entonces usamos la siguiente discretización:

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{k} + \frac{F^-(u_i^n)\,(u_{i+1}^{n+1}-u_i^{n+1}) + F^+(u_i^n)\,(u_i^{n+1}-u_{i-1}^{n+1})}{h} = 0, \quad i \text{ entero y } n \in \mathbb{N}$$

donde $F^-(s)=\min\{0,F(s)\}$, $F^+(s)=\max\{0,F(s)\}$, $F(u_i^n)=F((G_\sigma * u_i^n)_{xx},(G_\sigma * u_i^n)_x)$, $G_\sigma * u_i^n$ se calcula usando el filtro que dimos en el capítulo 1 para aproximar la convolución con una gaussiana, y finalmente:

$$(G_\sigma * u_i^n)_{xx} = \frac{G_\sigma * u_{i+1}^n + G_\sigma * u_{i-1}^n - 2G_\sigma * u_i^n}{h^2}$$

$$(G_\sigma * u_i^n)_x = \frac{G_\sigma * u_{i+1}^n - G_\sigma * u_{i-1}^n}{2h}$$

Para resolver la discretización propuesta, usamos la siguiente ecuación de punto fijo:

$$w_i = \lambda_i b_i + \nu_i w_{i+1} + \eta_i w_{i-1} \qquad \text{para todo i entero}$$

donde $w_i = u_i^{n+1}$, $\lambda_i = (1+(k/h)\,|\,F(u_i^n)\,|\,)^{-1}$, $b_i = u_i^n$, $\nu_i = -\lambda_i F^-(u_i^n)k/h$, $\eta_i = \lambda_i F^+(u_i^n)k/h$.

Ahora, vemos que esta ecuación de punto fijo tiene una solución única, estable y no oscilatoria.

<u>Teorema 2</u>. Sea b_i una sucesión acotada, y λ_i, ν_i, η_i tales que $\nu_i\eta_i = 0$, $\lambda_i > \epsilon$, $0 \leq \nu_i, \eta_i < 1$ y $\lambda_i + \nu_i + \eta_i = 1$ para todo i entero y un $\epsilon > 0$. Entonces tenemos que:

(i) La ecuación de punto fijo tiene una solución w_i única y acotada.

(ii) Si $m = \inf\{b_i\}$ y $M = \sup\{b_i\}$. Entonces, $m \leq w_i \leq M$ para todo i entero.

(iii) La función F conserva la monotonía (es decir, si b_i es monótona, entonces, w_i también lo es).

<u>Demostración</u>. (i) Sea E el espacio de las sucesiones acotadas $z = \{z_i \in \mathbb{R},\ i \text{ entero}\}$ y $Q: E \to E$ definida por $Q(z)_i = \lambda_i b_i + \nu_i z_{i+1} + \eta_i z_{i-1}$. Sean $z, v \in E$, entonces tenemos:

$$\sup\{\,|\,Q(z)_i - Q(v)_i\,|\,\} \leq \sup\{\,|\,\nu_i(z_{i+1}-v_{i+1}) + \eta_i(z_{i-1}-v_{i-1})\,|\,\} \leq (1-\epsilon)\sup\{\,|\,z_i - v_i\,|\,\}$$

así, como Q es contractiva y (i), deducimos, usando el teorema clásico del punto fijo de Banach, que si $z^0 \in E$, entonces la sucesión $z^k \in E$, definida por $z^k = Q(z^{k-1})$, converge a la solución w de la ecuación de punto fijo planteada.

Para demostrar (ii) y (iii), nótese que existen dos tipos especiales de puntos i de los enteros, definidos por:

$$A = \{i \text{ entero: } \eta_{i+1}=\nu_i=0\}$$

$$B = \{i \text{ entero: } \eta_i=\nu_{i+1}=0\}$$

Estos conjuntos representan los puntos donde la solución w de la ecuación de punto fijo puede desarrollar choques. De hecho, si $i \in A$, la solución w_j para $j \leq i$ es completamente independiente de w_j para $j \geq i+1$.

En los $i \in B$, tenemos:

$$\begin{cases} w_i = \lambda_i b_i + (1-\lambda_i)\, w_{i+1} \\ w_{i+1} = \lambda_{i+1} b_{i+1} + (1-\lambda_{i+1})\, w_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_i = \dfrac{\lambda_i b_i + \lambda_{i+1}(1-\lambda_i)\, b_{i+1}}{1-(1-\lambda_{i+1})(1-\lambda_i)} \\ w_{i+1} = \dfrac{\lambda_{i+1} b_{i+1} + \lambda_i (1-\lambda_{i+1})\, b_i}{1-(1-\lambda_{i+1})(1-\lambda_i)} \end{cases}$$

Hay que hacer notar que w_i y w_{i+1} son un promedio de b_i y b_{i+1}.

Sean $i_1, i_2 \in A$, $i_1 < i_2$; entonces existe $j_1 \in B$ tal que $i_1 < j_1 < i_2$. Además si $j_1, j_2 \in B$, entonces existe $i_2 \in A$ tal que $j_1 < i_2 < j_2$.

Así, podemos descomponer los enteros en $\bigcup_m [i_m+1\,,\, i_{m+1}]$ donde $i_m, i_{m+1} \in A$

(o $i_m = -\infty$, $i_{m+1} = +\infty$). Sea j_m tal que $[i_m+1, i_{m+1}] \cap B = \{j_m\}$. Entonces podemos hallar explícitamente la solución w_i en $[i_m+1, i_{m+1}]$. Como $j_m \in B$, w_{j_m}, w_{j_m+1} son calculadas usando la igualdad reseñada; Si $j \in [i_m+1, j_m]$, calculamos w_j, en esta región, de forma recursiva, usando:

$$w_j = \lambda_i b_i + (1-\lambda_i) w_{j+1}$$

Si $j \in [j_m, j_{m+1}]$, calculamos w_j, en esta región, de forma recursiva, usando:

$$w_j = \lambda_i b_i + (1-\lambda_i) w_{j-1}$$

Finalmente (ii) y (iii), se consiguen, ya que podemos interpretar la solución de la ecuación de punto fijo como:

$$w_i = \sum_j a_{ij} b_j \qquad \text{para todo entero } i,$$

donde $a_{ij} > 0$ y $\Sigma a_{ij} = 1$, igualmente, para todo i.

Nótese, que si $F(p,q) = \text{sign}(p) \cdot \text{sign}(q)$, entonces $\lambda_i = \lambda$ para todo i, y si tomamos $k \to +\infty$ entonces $\lambda \to 0$, y la solución w converge hacia la función w^∞, definida por:

$$w_i^\infty = \frac{b_{j_m} + b_{j_m+1}}{2} \qquad \text{para todo } i \in [i_m+1, i_{m+1}]$$

donde j_m, i_m, i_{m+1} son los ya definidos.

Por último, puede ser interesante, poner la varianza σ^2 del filtro $G_\sigma(.)$ en función

de t, $\sigma=\sigma(t)$. De esta manera, introducimos una interacción multiescala en cálculo de la localización de los pasos por cero de $G_\sigma * u_{xx}$, y así, el esquema de discretización que hemos propuesto, desarrolla choques en la localización de los ceros, y que permanecen estables en las diferentes escalas de $\sigma(t)$.

2.5.- RESULTADOS EXPERIMENTALES.

En este apartado, vamos a presentar dos tipos de experiencias. La primera se refiere a la implementación del modelo de Osher y Rudin, de la cual presentamos dos casos: En la figura nº 7 presentamos la reconstrucción de la señal inicial $u_0(x)=\cos x$, donde se aprecia como las discontinuidades son desarrolladas precisamente en la localización de los "zero crossing" de la segunda derivada de u, es decir, de u_{xx}. Y en la figura nº 8, vemos que si partimos de una señal inicial a la que se le ha añadido ruido, al reconstruirla como solución del modelo de Osher y Rudin, se genera múltiples choques o discontinuidades espurias, debido a la influencia del ruido en la localización de los ceros de la segunda derivada.

En la segunda experiencia, mostramos la reconstrucción de la misma señal inicial anterior, pero aplicándole el modelo presentado por nosotros en este capítulo para dos conjuntos distintos de parámetros. Así, en la figura nº 9, mostramos varias

iteraciones de la ecuación $u_t + F(G_\sigma * u_{xx}, G_\sigma * u_x)\, u_x = 0$ en $\mathbb{R}x\mathbb{R}^+$, con los siguientes valores: $\sigma=999$ y k=5. Y en la figura nº 10, presentamos la misma resolución pero con parámetros distintos, que son: $\sigma=9999$ y k=50. Como puede verse, en ambas figuras, la señal inicial es reconstruida perfectamente, y además, el comportamiento es estable respecto de los parámetros.

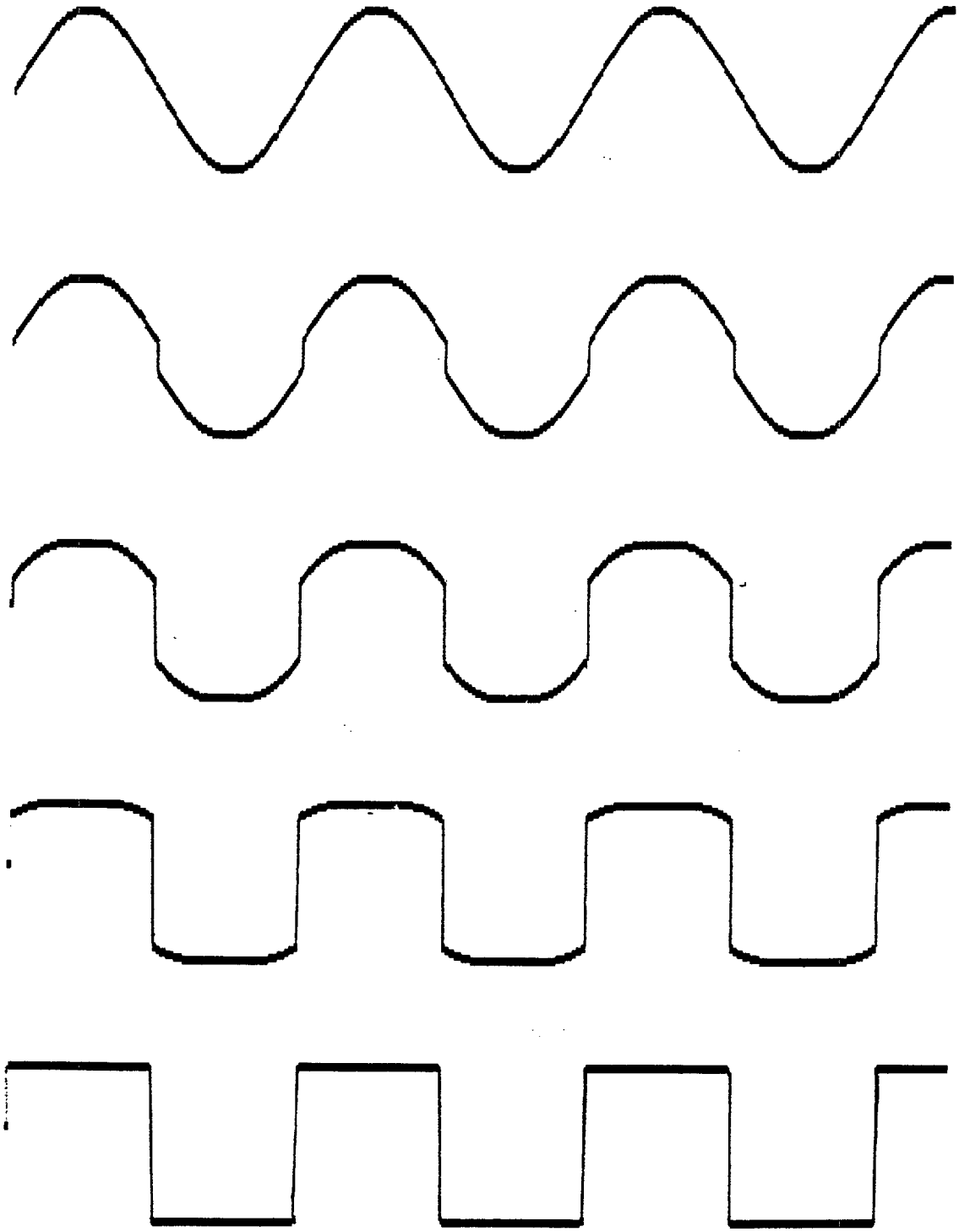


FIGURA Nº 7

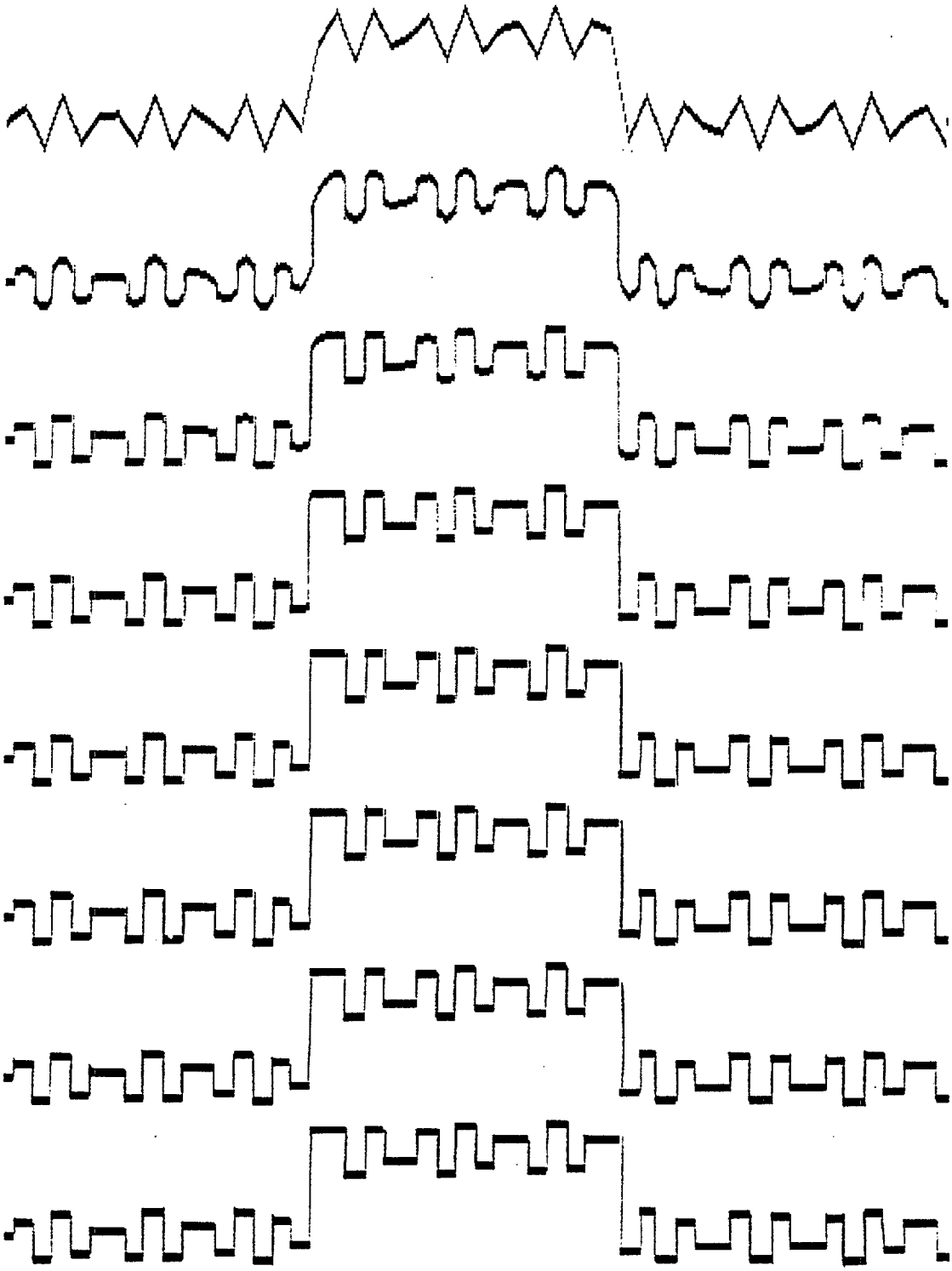


FIGURA Nº 8

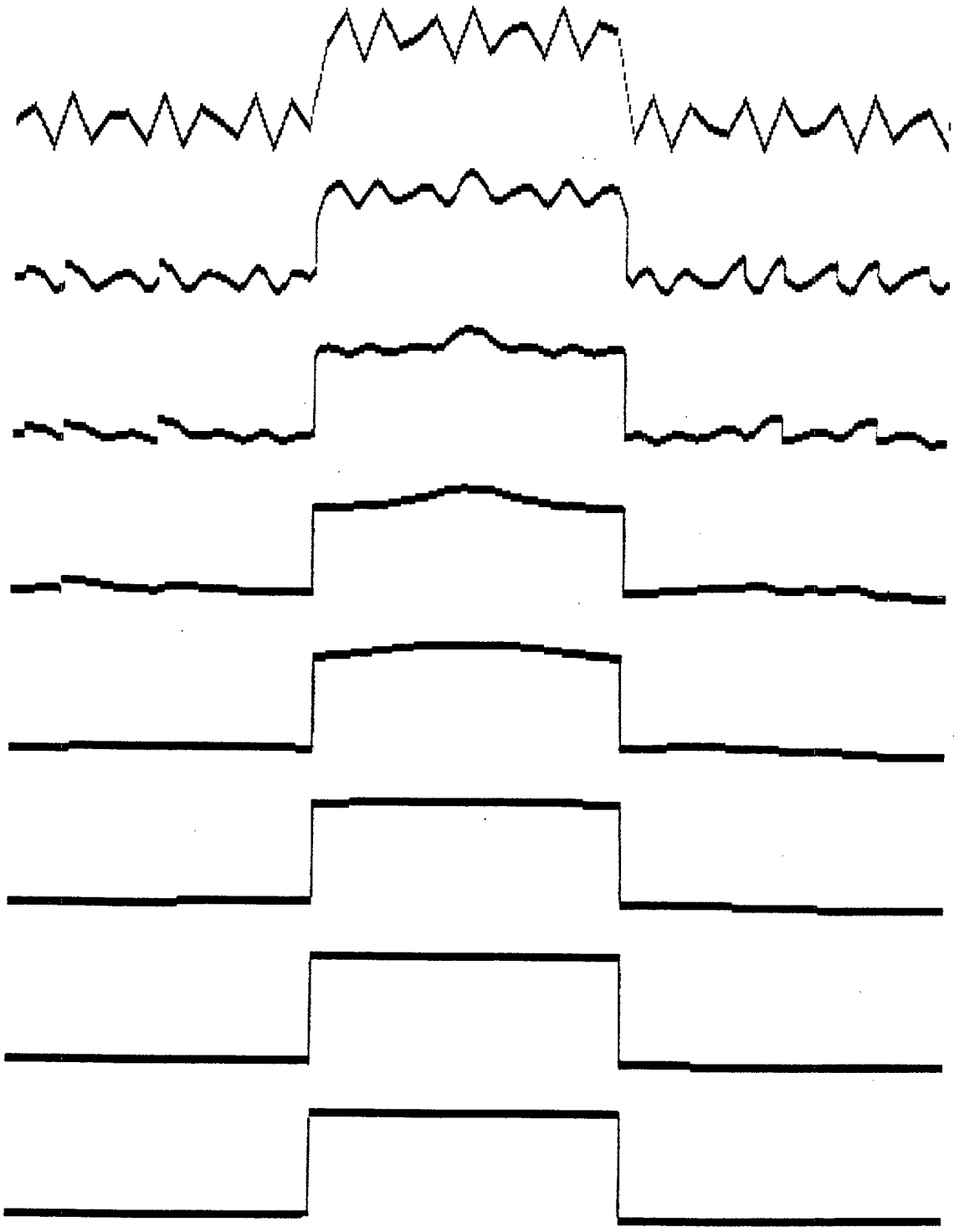


FIGURA Nº 9

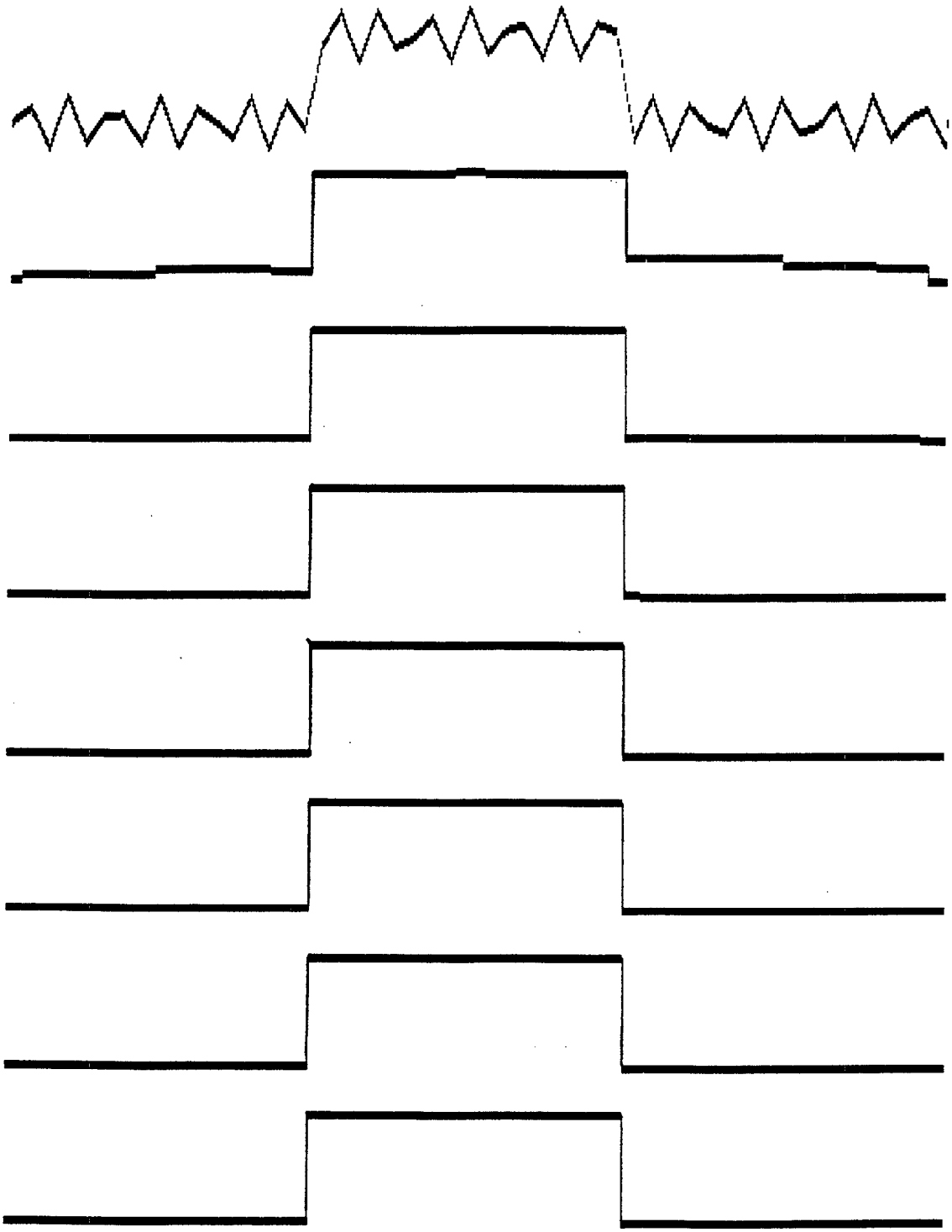


FIGURA N° 10

CAPÍTULO 3

RESTAURACIÓN DE IMÁGENES (SEÑALES BIDIMENSIONALES)

3.- RESTAURACIÓN DE IMÁGENES (SEÑALES BIDIMENSIONALES).

3.1.- INTRODUCCIÓN.

En este capítulo, y siguiendo la filosofía de trabajo presentada en el capítulo precedente, pretendemos diseñar modelos, algoritmos y métodos para restaurar imágenes utilizando ecuaciones en derivadas parciales. Como veremos, el hecho de trabajar en dos dimensiones, introduce aspectos nuevos y diferentes. Dichos métodos, aunque parten de principios totalmente distintos, son aplicables para la restauración de imágenes deterioradas usando los modelos de "blurring" y adición de ruidos presentados anteriormente. En este capítulo, haremos en primer lugar una presentación del estado actual del tema, siempre bajo el punto de vista de la aplicación de las ecuaciones diferenciales al tratamiento de imágenes. En segundo lugar presentaremos el modelo propuesto en este trabajo que resulta de una combinación de ideas presentes en ecuaciones de difusión direccional denominada difusión anisotrópica y ecuaciones hiperbólicas de propagación de frentes no-lineales denominados filtros de choque. Por último haremos un estudio detallado de los algoritmos que se derivan de la discretización de este modelo así como su validación a través de diversos test.

3.2.- LAS ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES COMO MODELOS EN EL TRATAMIENTO DE IMÁGENES.

3.2.1.- El modelo de Perona y Malik.

Los primeros en utilizar ecuaciones diferenciales no-lineales para mejorar el tratamiento lineal fueron Perona y Malik [PeMa] en 1987. Su idea, que ha tenido una amplia difusión entre la comunidad internacional de tratamiento de imágenes consiste en realizar una difusión selectiva de la imagen introduciendo un coeficiente de conductividad no-lineal en la ecuación del calor. La formulación de la ecuación es la siguiente:

$$\begin{cases} u_t = div(g(|\nabla u|)\nabla u) & in\ \mathbb{R}^N x \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = u_0(x) & in\ \mathbb{R}^N \end{cases}$$

donde $g(|\nabla u(x)|)$ corresponde al coeficiente de conductividad, g es una función regular y decreciente con $g(0)=1$, $g(s)\geq 0$, $g(s)$ tiende a cero en el infinito y $u_0(.)$ representa la imagen original. La idea consiste en que la difusión de la imagen obtenida por la ecuación es "condicional", es decir, si $\nabla u(x)$ es grande, entonces la difusión será penalizada y por tanto la exacta localización de los bordes es conservada. Si $\nabla u(x)$ es

pequeño entonces x pertenece a una región homogénea de la imagen y la difusión es grande. Esta formulación de la ecuación no permite dar una interpretación geométrica clara en términos de derivadas direccionales, Alvarez, Guichard, Lions y Morel [AGLM] constataron que el operador $\mathrm{div}(g(|\nabla u(x)|)\nabla u(x))$ se puede escribir como:

$$\mathrm{div}(g(|\nabla u(x)|)\nabla u(x)) = g(|\nabla u(x)|)u_{\xi\xi} + G'(|\nabla u(x)|)\, u_{\eta\eta}$$

donde $u_{\xi\xi}$ representa la derivada segunda direccional de u en la dirección perpendicular al gradiente, $u_{\eta\eta}$ la derivada segunda direccional de u en la dirección del gradiente, $G(s)=sg(s)$ y $G'(s) = \partial/\partial s(G(s))$. Bajo esta nueva formulación el operador diferencial tiene una fácil interpretación geométrica en base a derivadas direccionales, puesto que g es siempre no-negativa, el primer término $g(|\nabla u(x)|)u_{\xi\xi}$ representa una difusión direccional siguiendo la dirección perpendicular al gradiente que corresponde a la dirección de mínima variación de la función u, por tanto, a "groso" modo, podemos decir que el operador se comporta localmente como la ecuación del calor unidimensional en la dirección de los bordes. La interpretación del segundo término $G'(|\nabla u(x)|)u_{\eta\eta}$ depende fuertemente del signo de $G'(s)$. En los puntos x, donde $G'(|\nabla u(x)|)$ sea no-negativo, entonces el operador se comporta localmente como la ecuación del calor unidimensional en la dirección del gradiente, sin embargo, si $G'(|\nabla u(x)|)$ es negativo entonces se produce una inversión de la ecuación del calor en la dirección del gradiente. Todo ello depende, por supuesto, de la elección de la función g(s), uno de los ejemplos propuestos por Perona Y Malik corresponde a la elección de

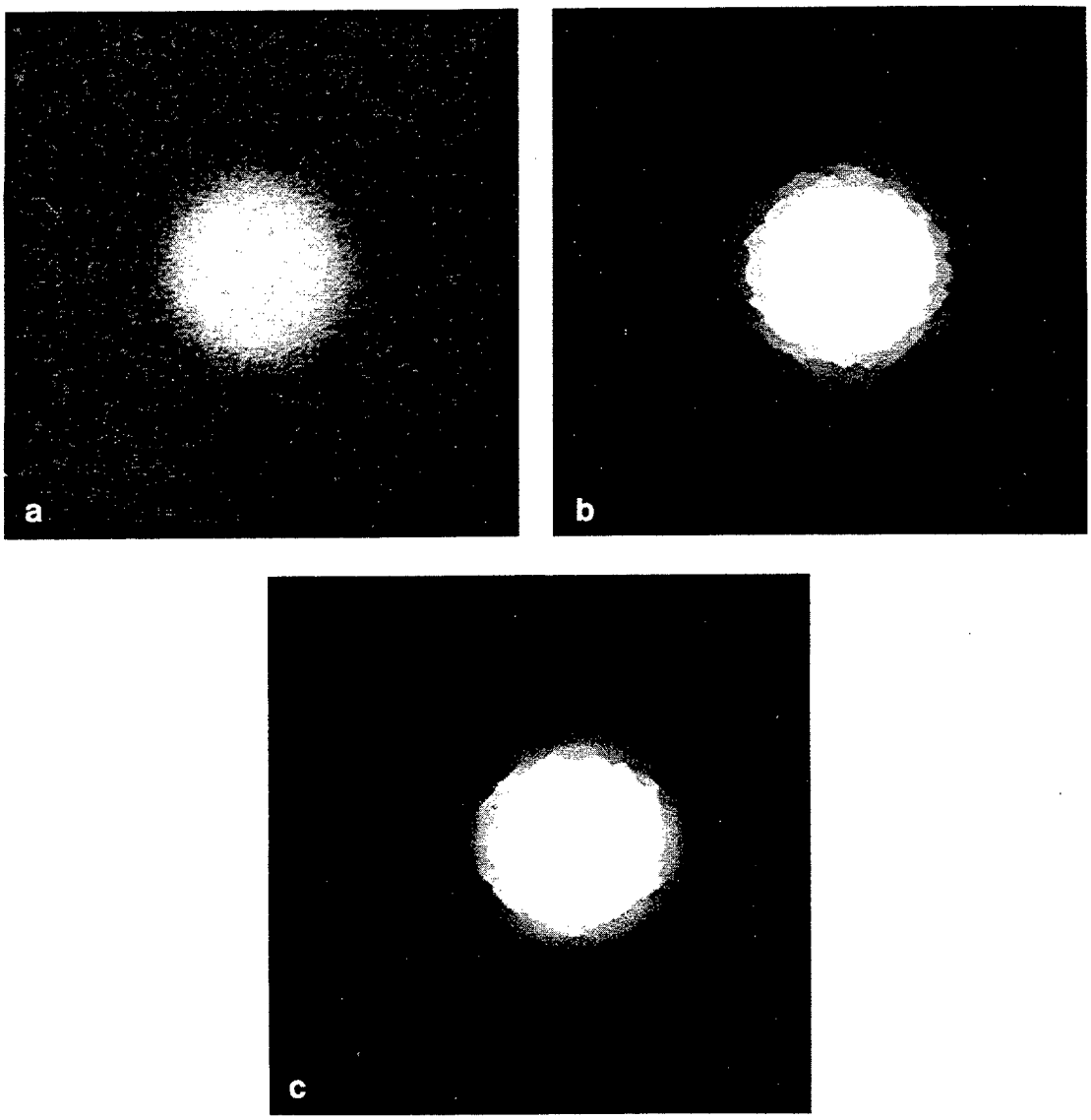
$$g(s)=e^{-ks^2}$$

donde k es una constante, en este caso se obtiene que la función $G'(s)=g(s)(1-2ks^2)$ es negativa si $s^2 > 1/2k$ y no-negativa en caso contrario. Por tanto, esto supone una especie de umbralización en torno al $\nabla u(x)$, es decir, en los puntos donde $|\nabla u(x)|^2 < 1/2k$ se produce una difusión en la dirección del gradiente que junto con la difusión en la dirección perpendicular al gradiente produce una homogeneización de esa región de la imagen. Sin embargo si $|\nabla u(x)|^2 > 1/2k$ entonces se produce una inversión de la ecuación del calor en la dirección del gradiente, lo cual implica un proceso de deconvolución o deblurring pero que posee un carácter fuertemente inestable pudiendo provocar la aparición de artefactos. Por tanto podemos concluir que la condición que esta ecuación introduce para considerar que un punto pertenece a un borde es que $|\nabla u(x)|^2 > 1/2k$.

En la página siguiente mostramos un resultado experimental obtenido por Whitaker y Pizer [WhPi], utilizando el modelo de Perona y Malik.

3.2.2.- El Modelo de Catté-Coll-Lions-Morel.

Desde un punto de vista matemático, el modelo de Perona y Malik está mal



En esta experiencia, Whitaker y Pizer [WhPi], muestran la implementación del modelo de Perona y Malik, en (a) presentan la imagen original, que consiste en un disco sobre fondo negro al que se le ha añadido un ruido distribuido uniformemente. En (b) y (c) muestran el resultado después de 100 iteraciones con dos valores distintos de k

planteado en el caso en que G´(s) sea negativo, además, el hecho de penalizar la difusión en función del valor de $|\nabla u(x)|$ implica que las oscilaciones o ruidos espurios no son convenientemente eliminados debido a que en dichos puntos el gradiente es alto. Con objeto de eliminar estas dificultades Catté, Coll, Lions y Morel [CCLM] en 1991 plantearon una versión "regularizada" de este modelo a través de la ecuación:

$$\begin{cases} u_t = div(g(\,|\nabla(G_\sigma * u)\,|\,)\nabla u) & in\ \mathbb{R}^N x \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = u_0(x) & in\ \mathbb{R}^N \end{cases}$$

donde G_σ es un núcleo regularizante (por ejemplo una gaussiana). Este núcleo regularizante evita, por un lado, la aparición de bordes espurias debido a ruidos y, por otro, está bien planteado desde un punto de vista matemático en el sentido de que presenta existencia y unicidad de soluciones.

3.2.3.- La difusión anisotrópica de Alvarez-Lions-Morel.

Retomando el modelo precedente de Perona y Malik, hay una elección de función g(s) que inhibe totalmente la actuación del operador en la dirección del gradiente, esta elección corresponde a g(s)=1/s. En 1992, Alvarez, Lions y Morel [ALM], introdujeron un nuevo modelo basado en esta idea de difusión direccional, la ecuación que determina este modelo es la siguiente

$$\begin{cases} u_t = g(\,|\nabla(G_\sigma * u)|\,)\,u_{\xi\xi} & in\ \mathbb{R}^N x \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = u_0(x) & in\ \mathbb{R}^N \end{cases}$$

donde $\xi = \xi(x)$ representa en cada punto la dirección perpendicular al gradiente $\nabla u(x)$. En este modelo, los autores utilizan una difusión a lo largo de los bordes de los objetos presentes en la imagen para limpiar dichos bordes sin que se degrade el contraste entre los diferentes objetos. además, para mantener controlada la difusión en los lugares donde el gradiente, en media, es alto, se utiliza la función $g(\,|\nabla(G_\sigma * u)|)$.

3.2.4.- El modelo de Osher y Rudin en dos dimensiones.

Ellos consideran la siguiente ecuación:

$$u_t = -\sqrt{u_x^2 + u_y^2}\ F(\mathcal{L}(u)) \qquad \text{en } \mathbb{R}^2 x \mathbb{R}^+$$

$$u(x,y,0) = u_0(x,y)$$

donde F satisface la misma condición del modelo unidimensional, es decir, $F(s).s \geq 0$.

Y $\mathcal{L}(u)$ es un operador no-lineal elíptico de segundo orden.

En esta ecuación, hacen una combinación no-lineal entre el término de propagación, que va en el orden de la magnitud del $|\nabla(u)|$, y el término de detección de bordes $F(\mathcal{L}(u))$, el cual detectará el cambio de signo de algún operador diferencial. Así, el proceso de formación de bordes y contrastes ocurrirá en aquellos puntos donde:

$$\mathcal{L}(u) = 0$$

Osher y Rudin, proponen un esquema en el que los puntos de detección de bordes sean los "zero-crossing" de algún operador diferencial que contenga una derivada de segundo orden direccional. Así, eligen para $\mathcal{L}(u)$ la segunda derivada de u en la dirección del gradiente, que queda de la forma siguiente:

$$\mathcal{L}(u) = u_{xx}u_x^2 + 2u_{xy}u_xu_y + u_{yy}u_y^2$$

Por último, por razones de implementación numéricas, hacen un proceso de normalización de F, que queda de la forma siguiente:

$$\tilde{F}(\mathcal{L}(u)) = \frac{F(\mathcal{L}(u))}{1 + |F(\mathcal{L}(u))|}$$

3.3.- MODELO PROPUESTO EN ESTE TRABAJO.

De una manera natural, mezclamos la técnica de captura de choques del caso unidimensional, expuesta en la capítulo 2, y las ideas de difusión direccional ahora mencionadas. Proponemos como modelo la ecuación Parabólica-Hiperbólica siguiente:

$$u_t = C\mathcal{L}(u) - F(G_\sigma * u_{\eta\eta}, G_\sigma * u_\eta)u_\eta \qquad \text{en } \mathbb{R}^2 x \mathbb{R}^+$$

donde $\eta = \eta(x)$ es la dirección de $\nabla u(x)$, $F(.,.)$ verifica (2), $G_\sigma(.,.)$ es una familia de núcleos de difusión bidimensional. $C>0$ es una constante positiva y $\mathcal{L}(u)$ es un operador de difusión direccional presentado antes. En este trabajo, nosotros usamos, como forma canónica de $\mathcal{L}(u)$, el siguiente operador:

$$\mathcal{L}(u) = u_{\xi\xi}$$

donde $\xi = \xi(x)$ es la dirección perpendicular al gradiente $\nabla u(x)$.

La interpretación de cada uno de los términos de la ecuación, con el término $\mathcal{L}(u)$ ya descrito, es como sigue:

a) El término $u_{\xi\xi}$ representa una difusión degenerada, la cual difunde u en la dirección ortogonal al gradiente ∇u. El propósito de este término, es difundir u a ambos lados del borde con una mínima difusión en el borde mismo.

b) El núcleo lineal suavizante G_σ se introduce con el propósito de evitar la influencia del ruido en el proceso de mezcla de las diferentes escalas.

c) El término $-u_\eta F(G_\sigma * u_{\eta\eta}, G_\sigma * u_\eta)$ produce la reconstrucción de bordes y deconvolución por desarrollo de choques en la posición de los ceros de $G_\sigma * u_{\eta\eta}$ en la dirección del gradiente.

d) Finalmente, la constante $C > 0$ representa el "balance" entre la acción de la difusión anisotrópica y el filtro de choque. Hacemos notar que estos dos procedimientos son complementarios de una forma natural.

Discretización de la ecuación. Discretizamos la ecuación usando un esquema recursivo rápido e incondicionalmente estable. Con respecto al término que representa el filtro de choque, seguimos las mismas ideas que desarrollamos en el caso unidimensional. Para el término que representa la difusión anisotrópica, usamos el tipo de esquema mostrado en Alvarez-Lions-Morel [ALM].

Sean k y h los incrementos temporal y espacial respectivamente, $i=(i_1,i_2)$ y $x_i=(i_1h,i_2h)$. Sea u_i^n una aproximación de $u(x_i,nk)$ y ∇u_i^n una aproximación de $\nabla u(x_i,nk)$. Sea $B\subset \mathbb{I}x\mathbb{I}$ una vecindad de (0,0). Sea j: $\mathbb{I}x\mathbb{I}\longrightarrow B$ tal que para cada i, j(i) maximiza la función $E_i:B\longrightarrow\mathbb{R}$, siguiente:

$$E(j) = \frac{(\nabla u_i^n, j)}{\| j \|}$$

Esto significa que j(i) es la mejor aproximación a la orientación de ∇u_i^n en el conjunto B. También definimos la función $l:\mathbb{I}x\mathbb{I}\longrightarrow\mathbb{I}x\mathbb{I}$, donde $l(i)=(j_2(i),-j_1(i))$, es decir, la dirección perpendicular a j(i).

Hay que hacer notar que el conjunto $B\subset \mathbb{I}x\mathbb{I}$ representa el número de direcciones que usamos para aproximar al vector ∇u_i^n en la malla $\mathbb{I}x\mathbb{I}$. Para nuestras experiencias, que mostramos en la sección 3.4, nosotros hemos usado el siguiente $B=\{i\in \mathbb{I}x\mathbb{I} : \|i\|^2\leq 5\}$.

Ahora, discretizamos la ecuación de la siguiente forma:

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{k} = Cg_i^n \frac{u_{i-1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i+1}^{n+1}}{\| l \|^2 h^2} - \frac{F^-(u_i^n)\,(u_{i+j}^{n+1}-u_i^{n+1}) + F^+(u_i^n)\,(u_i^{n+1}-u_{i-j}^{n+1})}{\| j \| h}$$

para todo $i \in \mathbb{I}x\mathbb{I}$, donde $g_i^n = g(G_\sigma * u_i^n)$, $F^-(s) = \min\{0, F(s)\}$, $F^+(s) = \max\{0, F(s)\}$ y $F(u_i^n) = F((G\sigma * u_i^n)_{\eta\eta}, (G_\sigma * u_i^n)_\eta)$.

Para calcular la sucesión u_i^{n+1} para todo $i \in \mathbb{I}x\mathbb{I}$, usamos la siguiente ecuación de punto fijo:

$$w_i = \lambda_i b_i + \alpha_i (w_{i-l(i)} + w_{i+l(i)}) + \nu_i w_{i+j(i)} + \eta_i w_{i-j(i)} \quad \text{para todo } i \in \mathbb{I}x\mathbb{I},$$

donde $b_i = u_i^n$, $\lambda_i = \dfrac{1}{1 + 2kCg_i^n / \|l\|^2 h^2 + (kF^+(u_i^n) - kF^-(u_i^n)) / \|j\| h}$,

$\alpha_i = \lambda_i \dfrac{kCg_i^n}{\|l\|^2 h^2}$, $\nu_i = -\lambda_i \dfrac{kF^-(u_i^n)}{\|j\| h}$ y $\eta_i = \lambda_i \dfrac{kF^+(u_i^n)}{\|j\| h}$ para todo $i \in \mathbb{I}x\mathbb{I}$. Por tanto, podemos interpretar u_i^n como la solución w_i de la ecuación de punto fijo propuesta.

<u>**Teorema 3**</u>. Sea b_i una sucesión acotada, y $\lambda_i, \alpha_i, \nu_i, \eta_i$ tal que $\nu_i \eta_i = 0$, $\lambda_i > \epsilon$, $0 \le \alpha_i, \nu_i, \eta_i < 1$ y $\lambda_i + 2\alpha_i + \nu_i + \eta_i = 1$ para todo $i \in \mathbb{I}x\mathbb{I}$ y $\epsilon > 0$ cualquiera. Entonces, tenemos:

(i) El esquema de punto fijo tiene solución única w_i.

(ii) Sean $m = \inf\{b_i,\ i \in \mathbb{I}x\mathbb{I}\}$ y $M = \{b_i,\ i \in \mathbb{I}x\mathbb{I}\}$. Entonces, $m \le w_i \le M$ para todo $i \in \mathbb{I}x\mathbb{I}$.

Demostración. (i) Sea E el espacio de las sucesiones acotadas $z=\{z_i\in\mathbb{R},\ i\in \mathbb{I}x\mathbb{I}\}$ y $Q:E\longrightarrow E$ definida por $Q(z)_i=\lambda_i b_i+\alpha_i(z_{i-l(i)}+z_{i+l(i)})+\nu_i z_{i+j(i)}+\eta_i z_{i-j(i)}$.

Sea $z,\nu\in E$, entonces tenemos:

$$\sup_{i\in \mathbb{I}x\mathbb{I}} \{|Q(z)_i-Q(\nu)_i|\}\leq$$

$$\leq \sup_{i\in \mathbb{I}x\mathbb{I}} \{|\alpha_i(z_{i-l(i)}-\nu_{i-l(i)}+z_{i+l(i)}-\nu_{i+l(i)})+\nu_i(z_{i+j(i)}-\nu_{i+j(i)})+\eta_i(z_{i-j(i)}-\nu_{i-j(i)})|\}\leq$$

$$\sup_{i\in \mathbb{I}x\mathbb{I}} (1-\epsilon)\{|z_i-\nu_i|\}$$

Por tanto Q es una función contractiva y se sigue (i) usando el teorema clásico de Banach del punto fijo. Además si $z^0\in E$, entonces la sucesión $z^k\in E$, definida por $z^k=Q(z^{k-1})$, converge a la solución w_i.

(ii) Sea $z_i^0=b_i$ para todo $i\in\mathbb{I}$, $m=\inf\{b_i : i\in \mathbb{I}x\mathbb{I}\}$, $M=\sup\{b_i : i\in \mathbb{I}x\mathbb{I}\}$ y z^k la definida antes, puesto que $\lambda_i,\alpha_i,\nu_i,\eta_i\geq 0$ y $\lambda_i+2\alpha_i+\nu_i+\eta_i=1$ para todo $i\in \mathbb{I}x\mathbb{I}$, tenemos que $m\leq z_i^k\leq M$ para todo $i\in \mathbb{I}x\mathbb{I}$ y $k\in\mathbb{N}$, y se sigue (ii) por paso al límite cuando $k\rightarrow+\infty$.

Aceleración de la convergencia: Para conseguir la aceleración de la convergencia a la solución $w\in E$ de la ecuación de punto fijo, usamos un esquema

recursivo basado en el algoritmo de Gauss-Seidel para resolver sistemas lineales. Sea $z^0=b\in E$, definimos $z^k\in E$, para todo $k\in\mathbb{N}$, como una aproximación de w. Si asumimos que z^{k-1} es conocido, definimos z^k como:

$$z_i^k=\lambda_i b_i+\alpha_i\,(z_{i-l(i)}^{k'}+z_{i+l(i)}^{k'})+\nu_i z_{i+j(i)}^{k'}+\eta_i z_{i-j(i)}^{k'}$$

para todo $i=(i_1,i_2)\in \mathbb{I}x\mathbb{I}$, donde k' es k o k-1 de acuerdo al camino que usemos para ir a través del índice $i\in \mathbb{I}x\mathbb{I}$. Por ejemplo, en los resultados que mostramos en la sección 3.4, atravesamos $\mathbb{I}x\mathbb{I}$ de forma decreciente o creciente según que el valor de k sea par o impar.

Estimación de ∇u_i: Cuando el ruido presente en la imagen es elevado, necesitamos una estimación más global de ∇u_i en nuestro esquema para calcular las funciones j(i) y l(i). Ahora, mostramos una aproximación para ∇u_i, a través del cálculo de la orientación local dominante. Sean:

$$z_{ix}=\frac{u_{i+(1,0)}-u_{i-(1,0)}}{2h}\quad y\quad z_{iy}=\frac{u_{i+(0,1)}-u_{i-(0,1)}}{2h}$$

Para a estimar una orientación local dominante de (z_{ix},z_{iy}), se puede pensar que es suficiente con filtrar (z_{ix},z_{iy}) con un núcleo lineal suavizante. Sin embargo, esto no funcionaría bien por una razón importante: en nuestro análisis la dirección (z_{ix},z_{iy}) y su opuesta $(-z_{ix},-z_{iy})$ son equivalentes, pero la convolución con un núcleo lineal suavizante cancelaría una con la otra. Una forma de resolver este problema, es como sigue:

Sea $G_\sigma(.,.)$ un núcleo suavizante bidimensional, definimos $\theta(i)$, orientación de ∇u_i, como el ángulo θ que maximiza la función:

$$E(\theta) = G_\sigma * (z_{ix}\cos\theta + z_{iy}\mathrm{sen}\theta)^2$$

Esta estimación elimina la influencia del ruido, si asumimos, de una forma natural, que el ruido no tiene una orientación especial. De otra parte, es fácil comprobar que $\theta(i)$ satisface:

$$\tan(2\theta(i)) = \frac{2G_\sigma * (z_{ix} z_{iy})}{G_\sigma * (z_{ix}^2 - z_{iy}^2)}$$

Una estimación similar fue usada en Kass-Witkin [KaWi] y en Ravishankar-Schuck [RaSc] para analizar la orientación de estructuras en imágenes.

3.4.- RESULTADOS EXPERIMENTALES.

A continuación mostraremos algunas experiencias de restauración de imágenes utilizando el algoritmo resultante de la discretización del modelo presentado en este capítulo. Este esquema tiene cuatro parámetros a elegir que son:

1.- El incremento de tiempo dado por k en el esquema numérico. Cuanto mayor sea k, mayor cambio se produce de una iteración a otra.

2.- La desviación típica σ del núcleo G_σ. cuanto mayor sea σ se tiene en cuenta una mayor región a la hora de calcular donde se genera una discontinuidad.

3.- La constante C que establece el balance entre la difusión direccional y la generación de discontinuidades a través del filtro de choque. Cuanto mayor sea C mayor es el efecto de suavizado de los bordes.

4.- El número de iteraciones n.

Experimento 1 (figuras 11 y 12): "Deblurring". En este experimento partimos de una imagen sintética de 512x256 pixels, compuesta de un grupo encajado de elipses (parte alta figura 11). A esta imagen la hemos sometido (parte del medio de la figura 11), utilizando las técnicas descritas en el capítulo 1, a la convolución con una gaussiana de desviación típica $\sigma=8$. Partiendo de esta imagen vamos a intentar recuperar la imagen original utilizando el esquema numérico presentado en este capítulo. Puesto que en este caso no se ha introducido ningún ruido adicional y la imagen degradada es muy regular podemos suprimir el término en $u_{\xi\xi}$ que regulariza los bordes, ello equivale a tomar $c=0$, por la misma razón podemos tomar $\sigma=0$ como desviación típica de la gaussiana G_σ. Hemos tomado $k=2$. En las imágenes de la parte baja de la figura 11 y en la figura 12 se muestra el resultado de 1,2,3, y 4 iteraciones respectivamente del procedimiento. Como puede observarse en este caso la recuperación

de la imagen original es prácticamente perfecta.

Experimento 2 (figuras 13, 14 y 15): " Special Denoising". En este experimento utilizamos una imagen sintética de 128x128 pixels compuesta de un triángulo y rectángulo negro sobre fondo blanco (parte alta figura 13) a esta figura la sometemos a un proceso que consiste en convolucionar la imagen con dos gaussianas de desviación típica $\sigma=7$ y 14, y posteriormente realizar un promedio aleatorio de ambas imágenes convolucionadas, el resultado de esto (parte baja de la figura 13) produce un ruido especial que deteriora fuertemente los bordes y que no puede ser modelizado por las técnicas habituales. En las figuras 14 y 15 se encuentran los resultados del proceso de restauración utilizando nuestro esquema para 1,2,4 y 15 iteraciones respectivamente. Se han tomado como, parámetros $k=4$, $\sigma=6$, $C=2$.

Experimento 3 (figuras 16, 17 y 18): "Denoising and Deblurring". En este experimento tomamos la imagen original del experimento 2 y la sometemos a un proceso clásico de degradación consistente en la convolución con una gaussiana de desviación típica $\sigma= 6$ (parte alta figura 16) y posteriormente le añadimos un ruido blanco gaussiano de desviación típica $\sigma=20$. (parte baja figura 16). En las figuras 17 y 18 se encuentran los resultados del proceso de restauración utilizando nuestro esquema para 1,2,4 y 10 iteraciones respectivamente. Se han tomado como parámetros $k=4$, $\sigma=6$, $C=3$.

A continuación mostraremos dos experimentos realizados sobre imágenes reales a las cuales no se les ha sometido a ningún proceso artificial de degradación. Es decir las imperfecciones de las imágenes son generadas por los dispositivos de adquisición, transmisión, etc..

Experimento 4 (figuras 19 y 20): "Imágenes médicas". En este experimento se utiliza como imagen de partida una fotografía de un scaner 512x512 pixels (parte alta de la figura 19). En la parte baja de la figura 19 y en la figura 20 se encuentran los resultados del proceso de restauración utilizando nuestro esquema para 5,10 y 20 iteraciones respectivamente. Se han tomado como parámetros $k=1$, $\sigma=2$, $C=1$. Obsérvese la estabilidad del proceso a lo largo de las iteraciones.

Experimento 5 (figuras 21 y 22): "Imágenes Satélite". En este experimento se utiliza como imagen de partida una fotografía aérea de 512x512 pixels (parte alta de la figura 21). En la parte baja de la figura 21 y en la figura 22 se encuentran los resultados del proceso de restauración utilizando nuestro esquema para 1,5 y 20 iteraciones respectivamente. Se han tomado como parámetros $k=4$, $\sigma=1$, $C=1$.

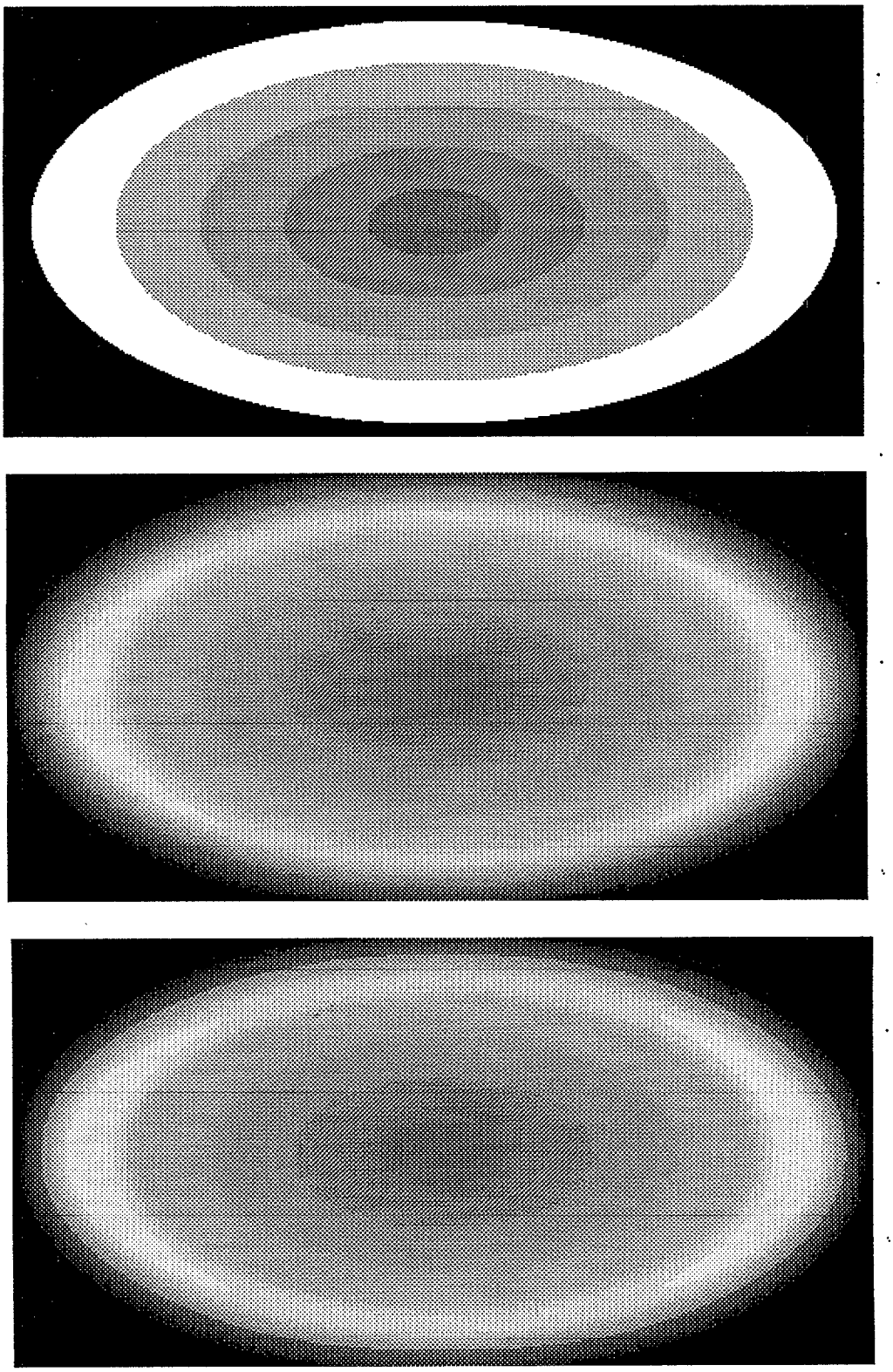


FIGURA Nº 11

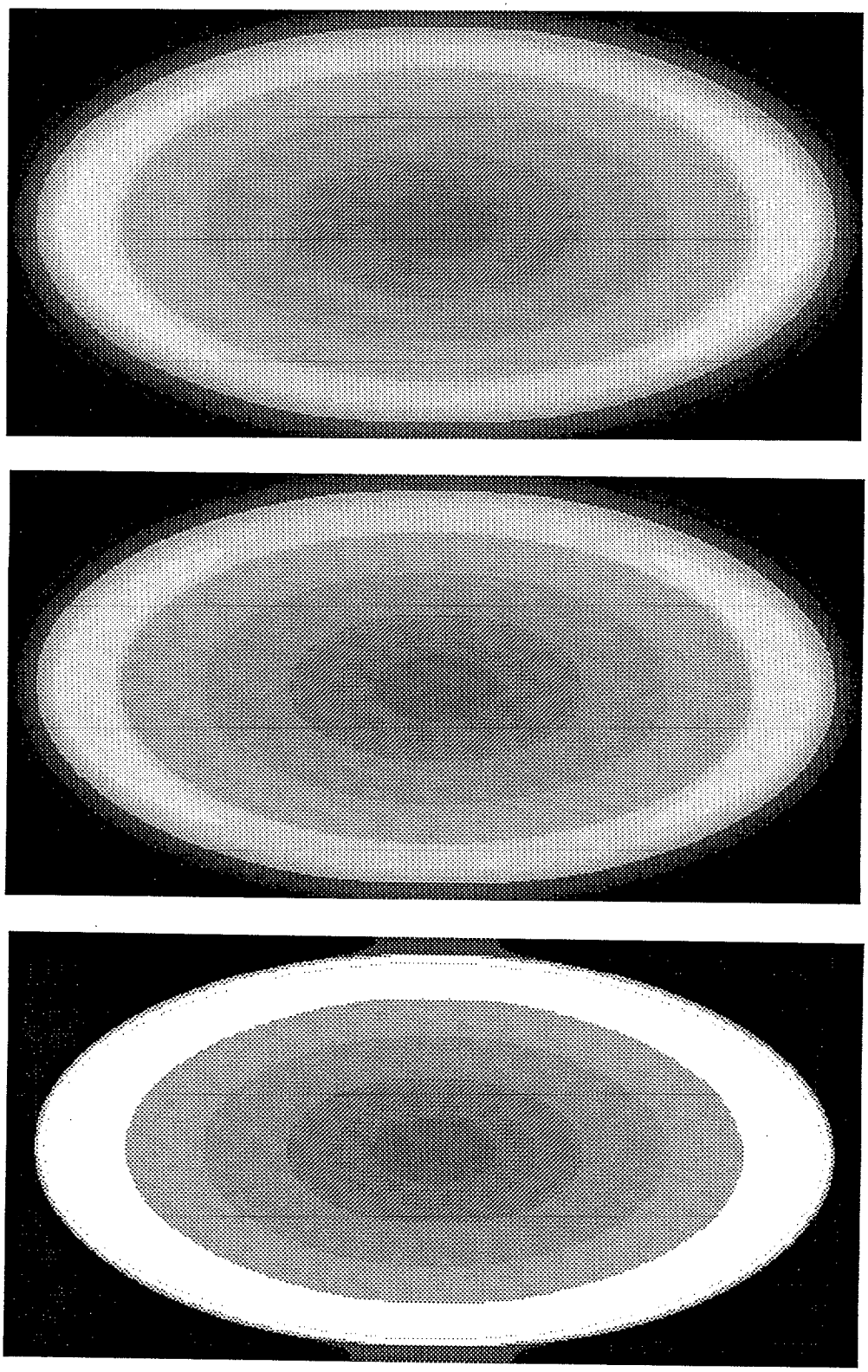


FIGURA Nº 12

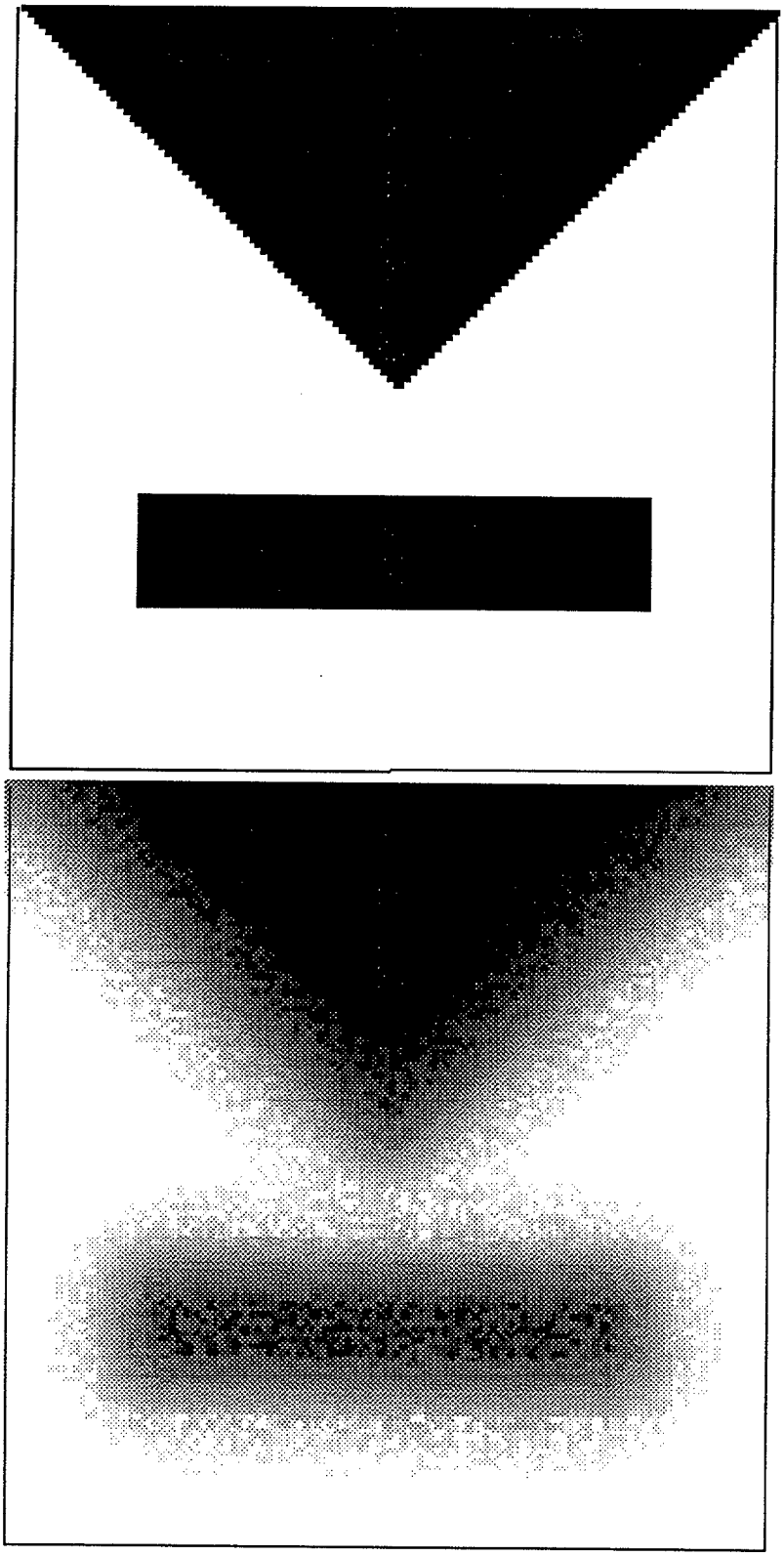


FIGURA Nº 13

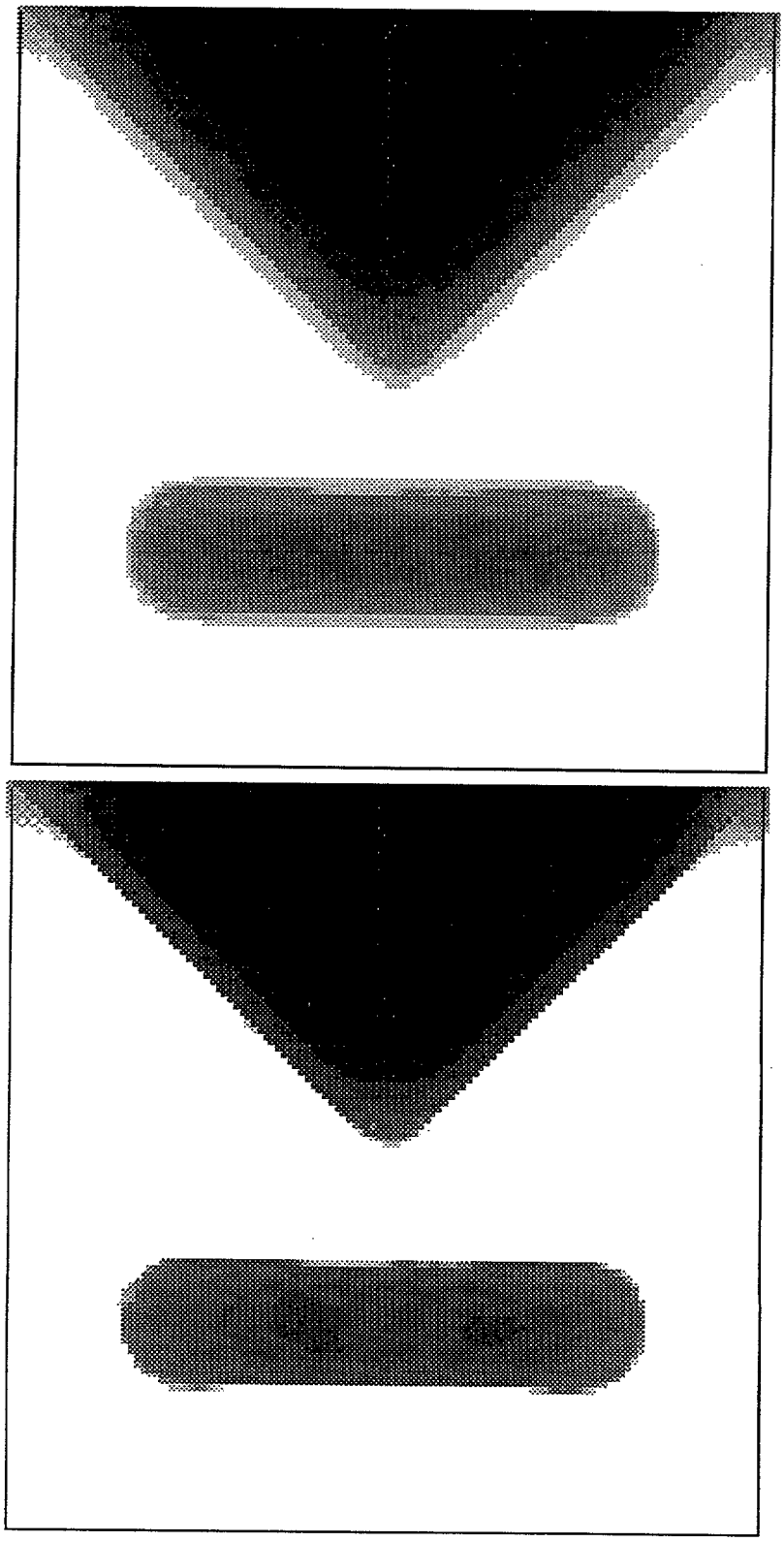


FIGURA Nº 14

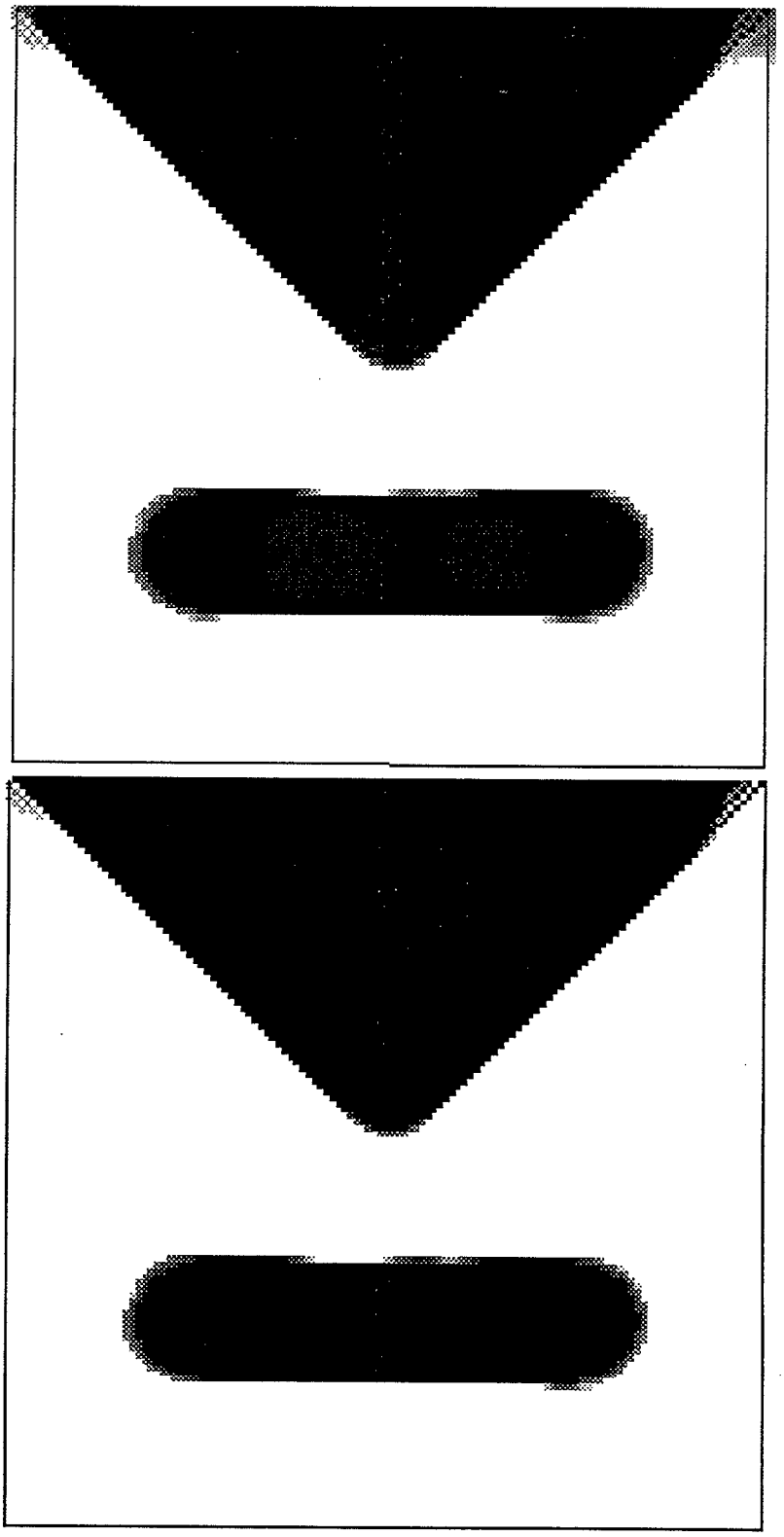


FIGURA Nº 15

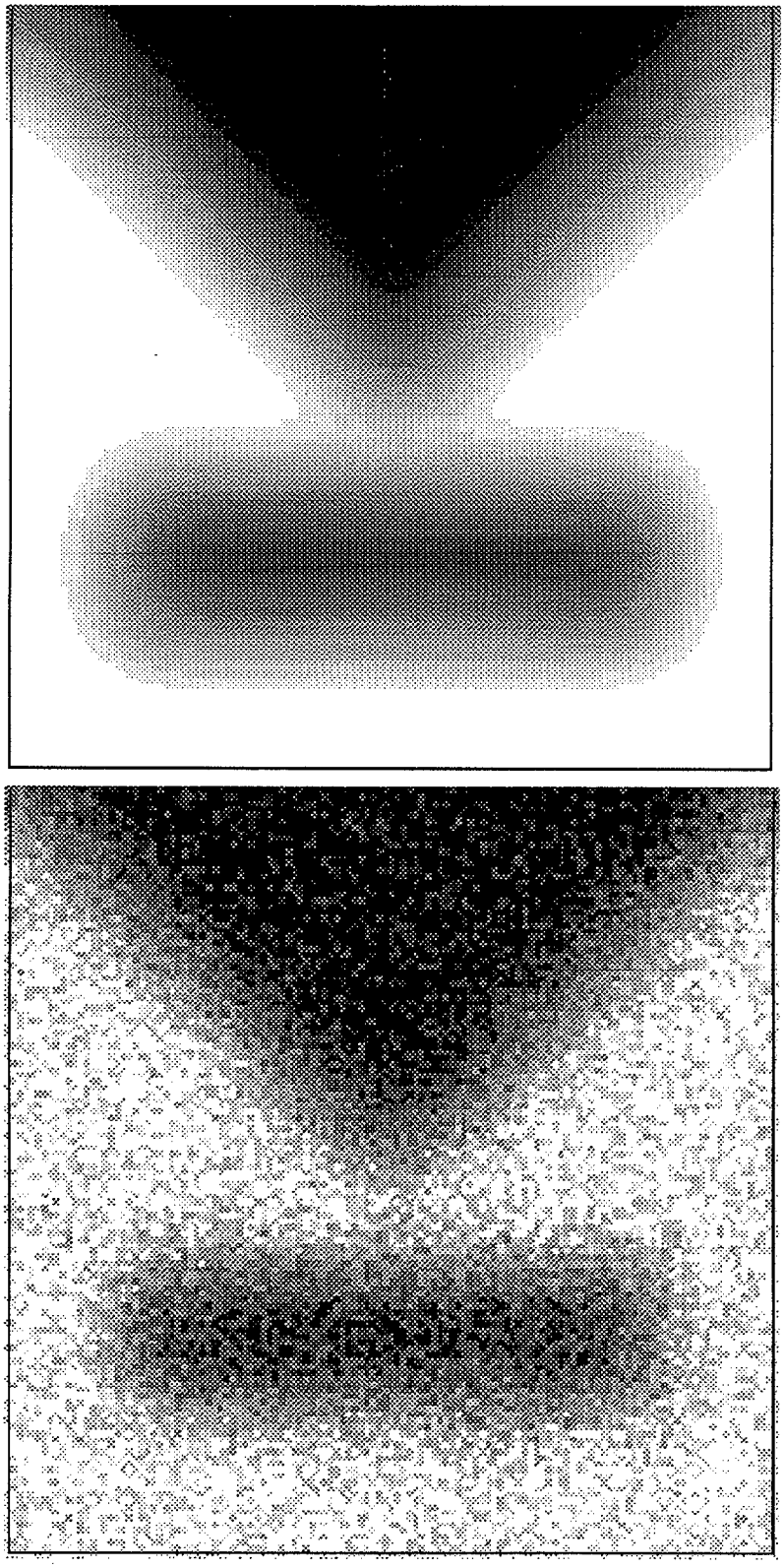


FIGURA Nº 16

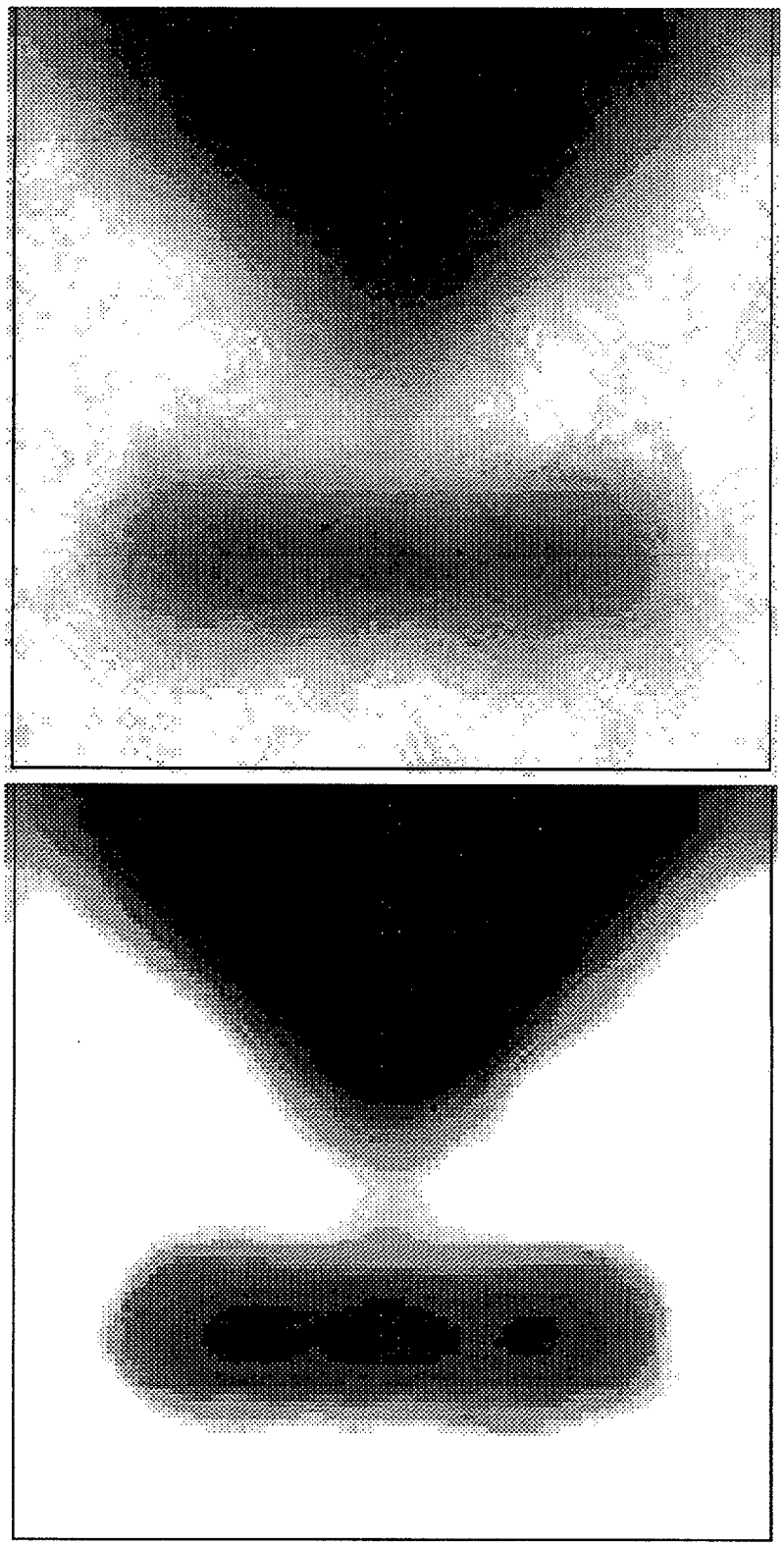


FIGURA Nº 17

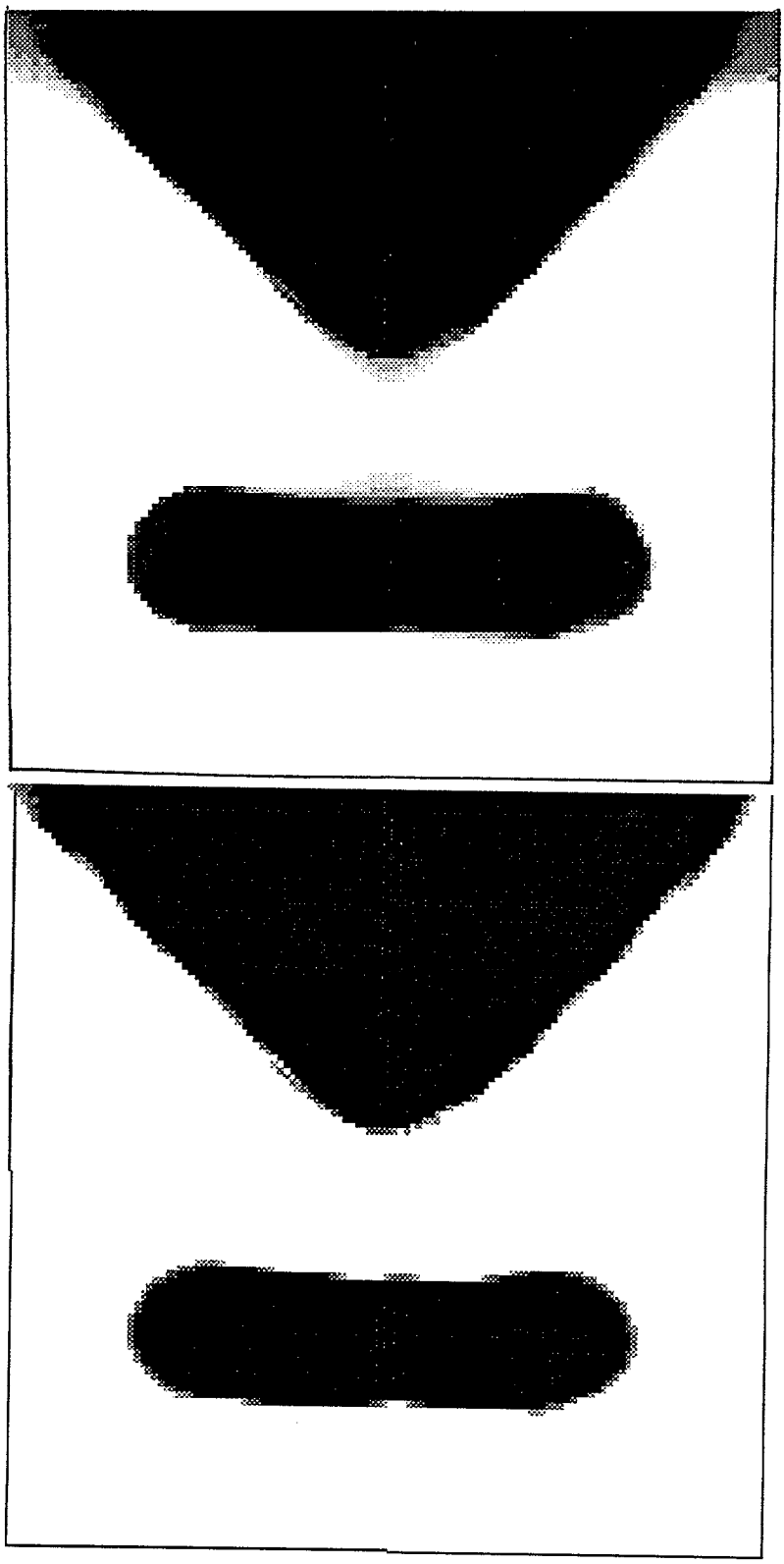


FIGURA Nº 18

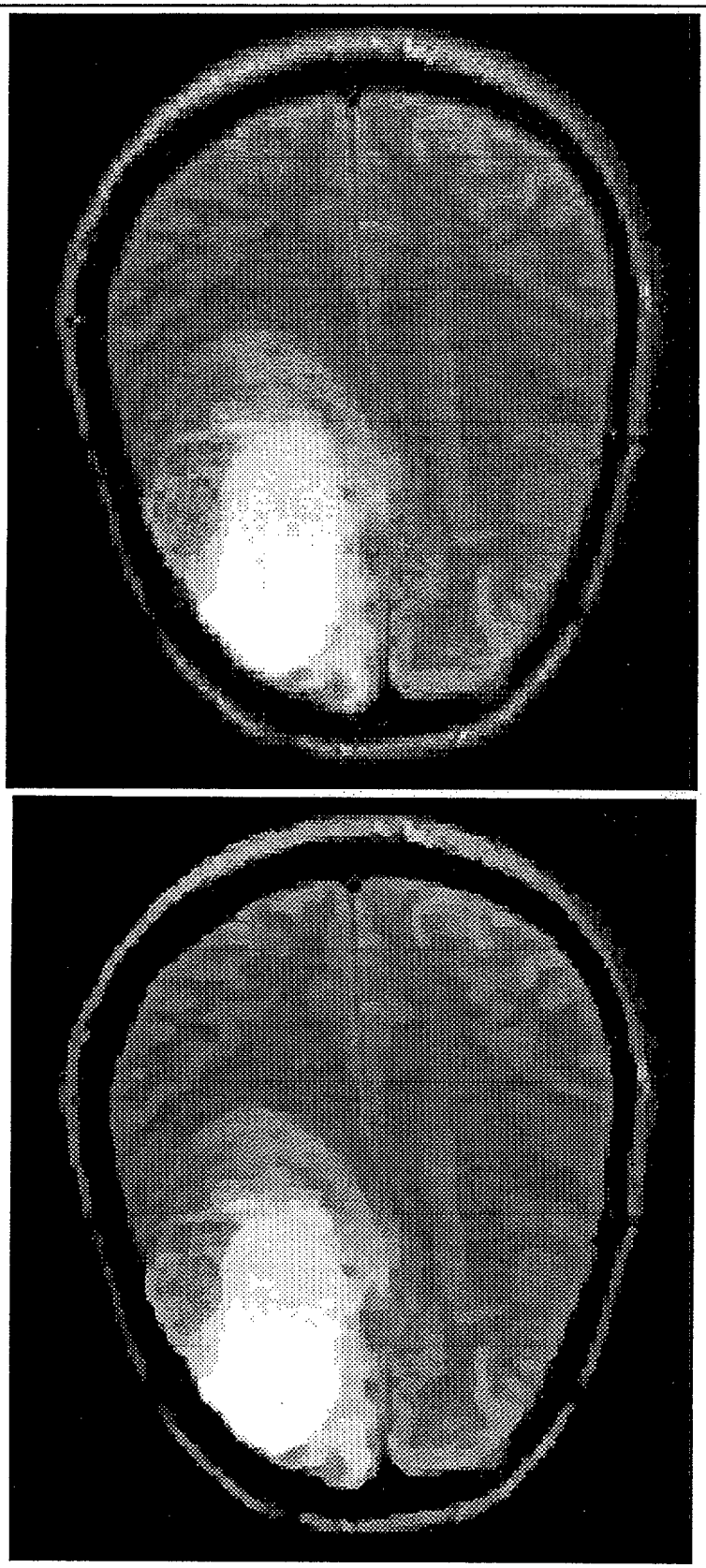


FIGURA Nº 19

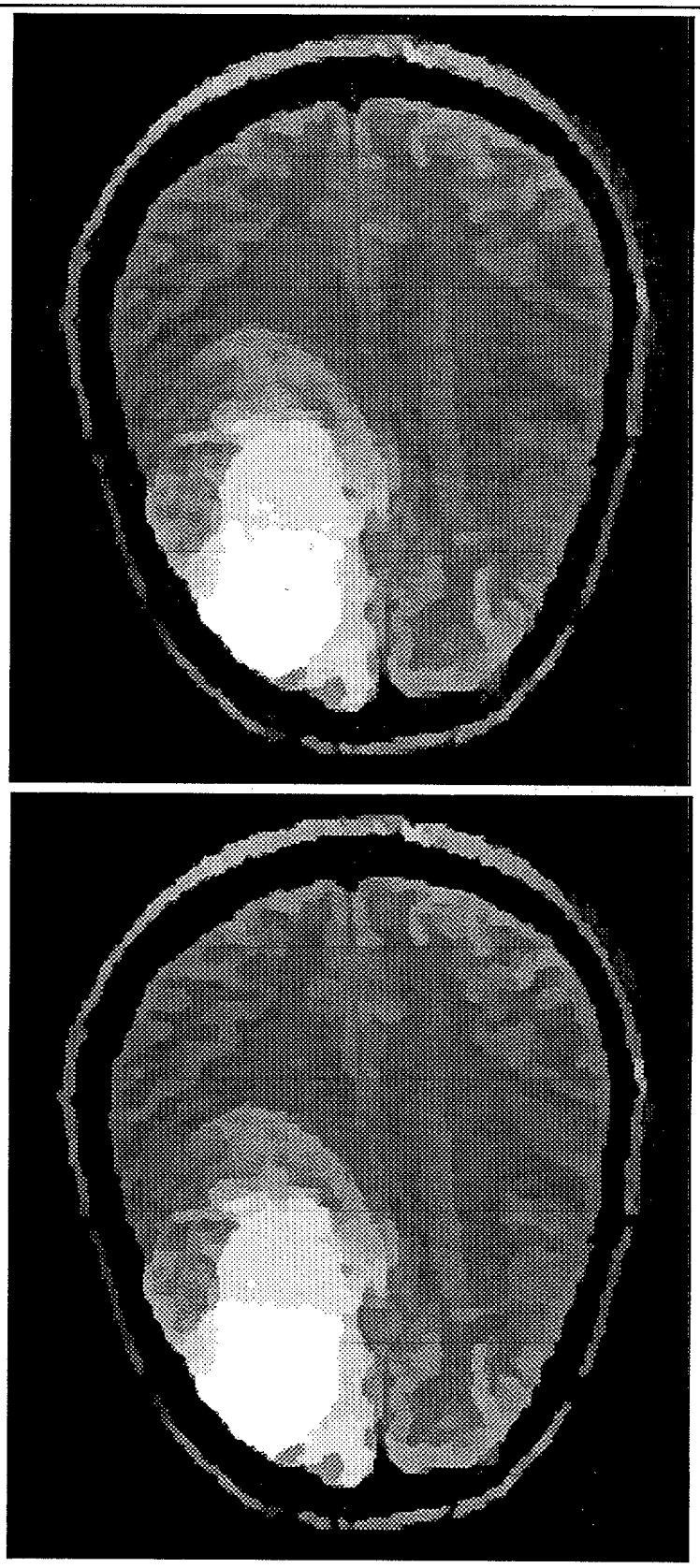


FIGURA Nº 20

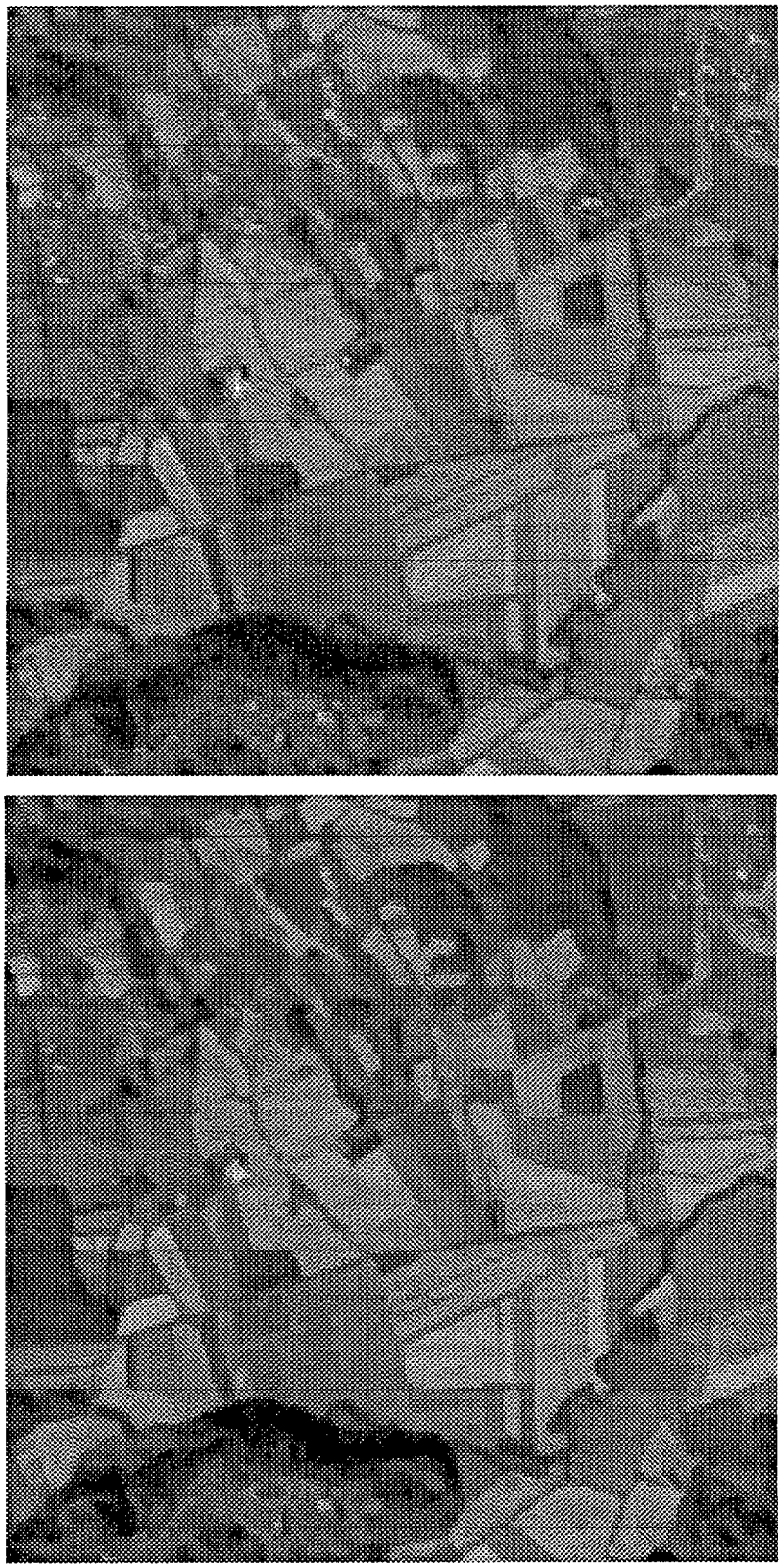


FIGURA N° 21

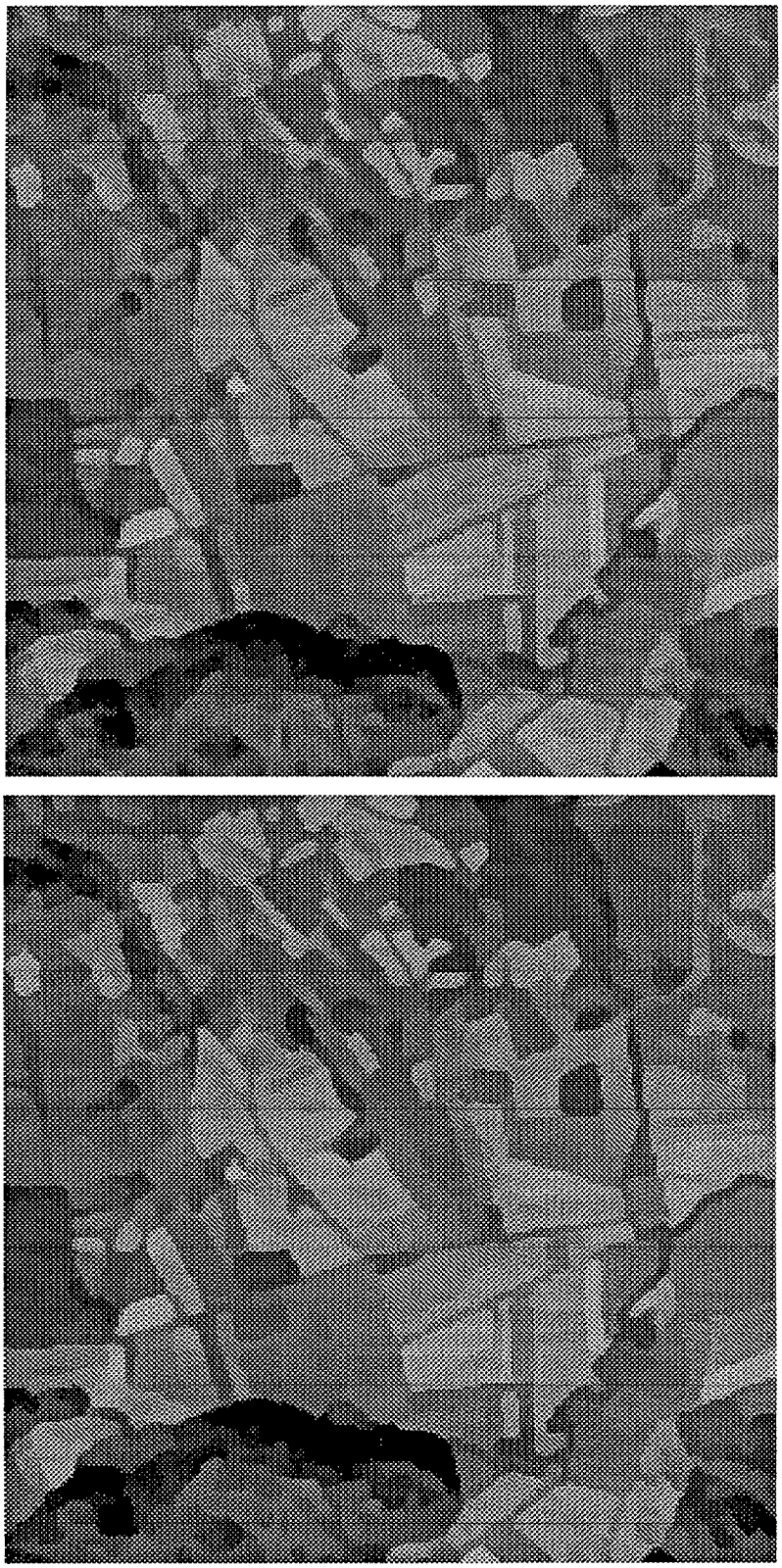


FIGURA Nº 22

CONCLUSIONES

En esta memoria se presenta un estudio sobre el filtrado y la restauración de imágenes y señales unidimensionales utilizando como modelos ecuaciones diferenciales. El uso de una teoría consolidada y robusta como las ecuaciones diferenciales posee, a mi juicio una serie de ventajas como son:

- La formalización de los modelos. A través de principios claros y concisos se puede escribir de manera compacta, en forma de ecuación diferencial, los modelos que se derivan de tales principios. Además, esta forma de proceder permite, en una primera fase de modelización, abstraerse del trabajo numérico, que siempre requiere consideraciones específicas, para centrarse en el aspecto conceptual y de principios.

- De lo local a lo global. En una ecuación diferencial se establecen los principios locales que hacen interactuar a un punto con sus vecinos a través de operadores diferenciales, la evolución de la solución de la ecuación determina en cada instante una versión de la imagen original que va perdiendo la información local en favor de una información más global de la imagen o señal.

- Utilización de técnicas de análisis numérico para el diseño de algoritmos. Una vez establecidos los principios y las ecuaciones, el uso de una teoría consolidada como es el análisis numérico de ecuaciones diferenciales permite la construcción y estudio de algoritmos para llevar a la práctica las ideas desarrolladas en los modelos.

Siguiendo esta filosofía de trabajo, en esta tesis se han abordado diferentes aspectos del filtrado y restauración de señales unidimensionales e imágenes:

En primer lugar, se aportan nuevas formas y criterios para aproximar el filtrado gaussiano a través de su equivalencia con la ecuación del calor. Para ello se han utilizado diversas técnicas como son el análisis de fourier, integración compleja y análisis numérico de ecuaciones diferenciales. Del desarrollo teórico y las pruebas numéricas, podemos concluir que los nuevos criterios introducidos, mejoran tanto en velocidad como en calidad de aproximación a los criterios clásicos.

En segundo lugar se aborda el problema de la restauración de señales unidimensionales. Se presentan los modelos clásicos de restauración, que tienen como límite, el hecho de que requieren un conocimiento a priori del tipo exacto de degradación sufrida por la imagen. Partiendo de principios locales, claros y concisos como son la restauración de discontinuidades que corresponden a bordes netos y la eliminación de discontinuidades debidas a ruidos o bordes espurios, se formula un nuevo modelo para la restauración de señales unidimensionales a través de una ecuación de tipo hiperbólico no-lineal. Se realiza un estudio de esta ecuación, haciendo especial hincapié en su análisis numérico. Las pruebas numéricas presentadas indican que el modelo restaura bien los saltos importantes presentes en la señal, y que es muy estable respecto a la introducción de ruido, que es eliminado en las sucesivas iteraciones.

Por último se estudia el problema de la restauración de imágenes bidimensionales. Partiendo de dos principios locales y "naturales" desde un punto de vista perceptual como son que en cada punto se debe realizar un lisage en la dirección del borde que pasa por el punto y una restauración de discontinuidades en la dirección perpendicular a dicho borde, se ha introducido un nuevo modelo para la restauración de imágenes que no utiliza ningún conocimiento a priori sobre el tipo de degradación sufrida por la imagen. El aspecto más original radica en la combinación de estos dos principios y el diseño de un operador diferencial que genera discontinuidades de una forma controlada y estable. Por ello se ha evitado explícitamente desarrollar un esquema en base a la inversión de la ecuación del calor, por la gran inestabilidad de tal proceso. Por supuesto, los resultados obtenidos no son tan espectaculares como los obtenidos en el caso de un control absoluto sobre el proceso que ha degradado la imagen. Sin embargo, como se muestra en las experiencias numéricas, puede utilizarse, con buenos resultados, sobre un gran abanico de tipos de imágenes distintas y sobre imágenes reales de las cuales se desconoce totalmente el tipo de degradación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[AlEs] Alvarez L. and Esclarín J. "Un modelo de cuantificación de imágenes", *Proceeding of XIII C.E.D.Y.A. 13-15 Septiembre 1993*, Univ. Politécnica de Madrid, 1993.

[ALM] Alvarez L., Lions P.L. and Morel J.M. "Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion (II)" *SIAM J. on Numerical Analysis*. Vol. 29, No. 3, pp. 845-866, 1992.

[AGLM1] Alvarez L., Ghichard F., Lions P.L. and Morel J.M. (1992), "Axiomes et équations fondamentales du traitement d´images. (Analyse Multiéchelle et E.D.P.) " *C.R.Acad.Sci. Paris*, Vol 315, Serie 1, pp 135-138, 1992.

[AGLM2] Alvarez L., Ghichard F., Lions P.L. and Morel J.M. "Axiomatisation et nouveaux opérateurs de la morphologie mathematique" *C.R.Acad.Sci. Paris*, Vol 315, Serie 1, pp 265-268, 1992.

[AGLM3] Alvarez L., Ghichard F., Lions P.L. and Morel J.M. "Analyse multiéchelle de films" *C.R.Acad.Sci. Paris*, t. 315, Serie I, pp. 1145-1148, 1992.

[AGLM] Alvarez L., Ghichard F., Lions P.L. and Morel J.M. "On the fundamental equations of image processing" *Arch. of Rational Mechanics*, Vol. 123, No. 3 pp. 199-257, 1993.

[AlMa] Alvarez L. and Mazorra L. "Signal and image restoration using shock filters and anisotropic diffusion" *Proceeding of EuroCast´93*, Las Palmas, february 1993.

[AlMa] Alvarez L. and Mazorra L. "Shock filters and anisotropic diffusion", *SIAM J. on Numerical Analysis*. Vol. 31, No. 1, Enero 1994.

[ALMo] Alvarez L. and Morel J.M. "Formalization and computational aspects of image analysis", *Acta Numerica*, Cambridge University Press, 1994.

[AsBr] Asada H. and Brady M. "The curvature primal sketch", *IEEE Transactions on Pattern analysis and machine intelligence* 8 No. 1, 1986.

[CCCD] Caselles V., Catté F., Coll T. and Dibos F. "A geometric model for active contours in image processing" *Report 9210, CEREMADE. Université Paris IX Dauphine*, 1992.

[CCLM] Catté F., Coll T., Lions P.L. and Morel J.M., "Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion", *SIAM J. on Numerical Analysis*, 29, pp. 182-193, 1992.

[CDK] Catté F., Dibos F. and Koepfler G. "A morphological approach of mean curvature motion" *Report 9310, CEREMADE. Université Paris IX Dauphine*, 1993.

[CEGLM] Cohignac T., Eve F., Guichard F., Lopez C., and Morel J.M. "Numerical Analysis of the fundamental equation of image processing", *CEREMADE, preprint,* 1993.

[CIL] Crandall M.G., Ishii H. and Lions P.L. "User's guide to viscosity solution of second order partial differential equation", *CEREMADE , preprint,* 1991.

[De] Deriche R. "Fast algorithms for low-level Vision", *IEEE trans. on pattern analysis and machine intelligence*, 12, N°1, pp. 78- 87, 1990.

[EvSp] Evans L.C. and Spruck J. "Motion of level sets by mean curvature I.", preprint, 1992.

[GaWi] Gasquet C. and Witomski P. *Analyse de Fourier et applications*, Ed. Masson, 1990.

[GeRe] Geman D. and Reynolds G. "Constrained restoration and the recovery of discontinuities ", *IEEE trans. pattern analysis and machine intelligence*, Vol 14, No. 3, pp 367-383, 1992.

[Hum] Hummel R. "Representations based on zero-crossing in scale-space", *Proc. IEEE Computer Vision and Pattern Recognition Conference*, 204--209, 1986.

[KaWi] Kass M. and Witkin A. "Analyzing oriented patterns", *Comput. Vision*

Graphics Image Process. 37, pp. 362-385, 1987.

[Koe] Koenderink J.J. "The structure of images", *Biol. Cybern.* 50, 363--370, 1984.

[Lin] Lindeberg T. "Scale-space for discrete signal", *IEEE Trans. Pattern Anal. and Machine Intell.* 12, 234--254, 1990.

[Mara] Maragos P. "Tutorial on advances in morphological image processing and analysis" *optical engineering* 26 No. 7, 1987.

[Marr] Marr D. "Analyzing natural images : a computational theory of texture vision" *Cold Spring Harbor Symposium on Quantitative Biology*, XL 647-662, 1976.

[Marr] Marr D. "*Vision*" Freeman and Co, 1982.

[MaHi] Marr D. and Hildreth E. "Theory of edge detection", *Proc. R. Soc. London* B 207, 187-217, 1980.

[Maz] Mazorra L. "Un criterio de energía para aproximar la solución de la ecuación del calor. Aplicación al filtrage de imágenes", *Proceeding of XIII C.E.D.Y.A.* 13-15 Septiembre, Univ. Politécnica de Madrid, 1993.

[NiSh] Nitzberg M. and Shiota T. "Nonlinear image filtering with edge and corner enhancement ", *IEEE trans. pattern analysis and machine intelligence*, Vol 14, No. 8, pp 826-833, 1992.

[OsRu] Osher S. and Rudin L. "Feature-oriented image enhancement using shock filters", *SIAM J. on Numerical Analysis*, 27, pp. 919-940, 1990.

[OsSe] Osher S. and Sethian J. "Fronts propagating with curvature dependent speed: algorithms based on the Hamilton-Jacobi formulation", *J. Comp. Physics* 79, 12--49, 1988.

[PeMa] Perona P. and Malik J. "A scale space and edge detection using anisotropic diffusion", *Proc. IEEE Computer Soc. Workshop on Computer Vision*, 1987.

[RaSc] Ravishankar A. and Schunck B.G. "Computing Oriented Texture Fields", *CVGIP: Graphical models and image processing.* 53 N° 2, pp. 157-185, 1991.

[ROF] Rudin L., Osher S. and Fati E. "Nonlinear Total Variation Based Noise Roval Algorithms" *Proc. Modélisations Matématiques pour le traitement d'images, INRIA*, 149--179, 1992.

[RoKa] Rosenfeld A. and Kak A. "*Digital picture processing*", Vol 1,2, Academic Press, 1982.

[Ru] Rudin L. "Images, numerical analysis of singularities, and shock filters", Ph.D. thesis, *Computer Science Dept., Caltech, Pasadena*, CA, #5250:TR:87, 1987.

[Ser] Serra J. *Image analysis and mathematical morphology*, Vol 1, Academic Press, 1982.

[ShCa] Shen J. and Castan S. "An optimal linear operator for edge detection", *in Proc. CVPR, Miami*, FL,June 1986, pp. 109-114, 1986.

[So] Sod G.A. *Numerical methods in fluid dynamics*, Cambridge University Press, 1985.

[TeTr] Tekalp A. and Trussell H., "Comparative study of some statistical and and set-theoric methods for image restoration", *CVGIP: Graphical models and image processing.* Vol. 3, No. 2 pp 108-120, 1991.

[TBKT] Thompson A., Brown J., Kay J. and Titterington M. "A study of methods of choosing the smoothing parameter in image restoration by regularization", *IEEE trans. pattern analysis and machine intelligence*, Vol 13, No. 4, pp 326-339, 1991.

[WhPi] Whitaker R.T. and Pizer S.M. "A multi-scale approach to nonuniform diffusion", *CVGIP: Image Understanding,* Vol. 37, No. 1, January, pp. 99-110, 1991.

[YuPo] Yuille A. and Poggio T. "Scaling theorems for zero crossings", *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 8, 1986.