UNIVERSIDAD POLITECNICA
DE
CANARIAS

CONCURSO AL CUERPO

DE

PROFESORES TITULARES DE ESCUELAS UNIVERSITARIAS

(Resolución de 1 de Junio de 1987)

(B.O.E. de 23 de Junio de 1987)

CONCURSO NUMERO 17

Area de conocimiento: MATEMATICA APLICADA

Departamento. MATEMATICA APLICADA

Actividades a desarrollar: impartir docencia en

CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Y

METODOS NUMERICOS CON APLICACIONES A LA INGENIERIA INDUSTRIAL, EN LA ESCUELA UNIVERSITARIA POLITECNICA

PROYECTO DOCENTE

Presentado por:

RAFAEL ALEJANDRO MONTENEGRO ARMAS

P R O Y E C T O   D O C E N T E

Rafael Alejandro Montenegro Armas

I N D I C E   G E N E R A L

Pág.

CAPITULO 1.- Prólogo.

1.1.- Objeto de la Memoria...................... 4

1.2.- Estructura de la Memoria.................. 6

CAPITULO 2.- La Matemática en la Ingeniería.

2.1.- Necesidad de la Matemática................ 9

2.2.- La Escuela Universitaria Politécnica.

Ingeniería Técnica Industrial............. 15

2.2.1.- Plan de estudios.................. 16

2.2.2.- Alumnado.......................... 19

2.2.3.- Ciclicidad........................ 22

CAPITULO 3.- Diseño del Proyecto Docente.

3.1.- Introducción.............................. 27

3.2.- Objetivos................................. 28

3.3.- Contenidos................................ 30

3.4.- Metodología............................... 31

3.5.- Evaluación................................ 42

Pág.

CAPITULO 4.- **Programa de Cálculo Diferencial e Integral.**

4.1.- Introducción............................. 51

4.2.- Desarrollo detallado del Programa......... 54

CAPITULO 5.- **Programa de Métodos Numéricos.**

5.1.- Introducción............................. 212

5.2.- Desarrollo detallado del Programa......... 214

CAPITULO 6.- **Bibliografía**........................ 313

CAPITULO 1

Prólogo

CAPITULO 1.- PROLOGO.

1.1.- OBJETO DE LA MEMORIA.

Por Resolución de 1 de Junio de 1987 (B.O.E. de 23 de Junio de 1987) de la Universidad Politécnica de Canarias, se convoca a concurso una plaza perteneciente al Cuerpo de Profesores Titulares de Escuelas Universitarias, en el área de conocimiento "Matemática Aplicada", teniendo que desarrollar quien obtenga la plaza las siguientes actividades: Impartir docencia en Cálculo diferencial e integral y métodos numéricos con aplicaciones a la Ingeniería Industrial, en la Escuela Universitaria Politécnica; (concurso nº 17).

Este concurso se regirá por lo dispuesto en la Ley Orgánica 11/1983, de 25 de Agosto; el Real Decreto 1888/ 1984, de 26 de Septiembre, modificado parcialmente por el Real Decreto 1427/1986, de 13 de Junio; la Orden de 28 de Diciembre de 1984; y los Estatutos de la Universidad Politécnica de Canarias.

Según se establece en el Artículo 9º del Real Decreto 1888/1984, modificado posteriormente por el Real Decreto 1427/1986, los concursantes entregarán al Presidente de la Comisión en el acto de presentación la siguiente documentación:

a) Curriculum vitae, por quintuplicado, según modelo que establezca la convocatoria del concurso y un ejemplar de las publicaciones y documentos acreditativos de lo consignado en el mismo.

b) Proyecto Docente, por quintuplicado, que el candidato se propone desarrollar de serle adjudicada la plaza a la que concursa.

Como candidato definitivamente admitido a concursar en la citada plaza, por comunicación de 19 de Octubre de 1987 del Excmo. Sr. Rector de la Universidad Politécnica de Canarias, y con el fin de cumplimentar lo dispuesto en la legislación mencionada, he redactado la presente Memoria.

1.2.- ESTRUCTURA DE LA MEMORIA.

La Memoria se ha estructurado a fin de configurar un Proyecto Docente para la enseñanza de las materias: "Cálculo Diferencial e Integral" y "Métodos Numéricos", orientadas a la carrera de Ingeniería Técnica Industrial, en la E.U.P. de la U.P.C.

Para ello, en el Capítulo 2 se expone una reflexión sobre el papel de la Matemática en la Ingeniería, destacando su creciente importancia. Se particulariza haciendo un análisis del actual plan de estudios de la E.U.P. y su alumnado, así como posibles repercusiones que conllevaría un plan cíclico.

A continuación, en el Capítulo 3, se estudian los aspectos fundamentales que intervienen en el diseño del Proyecto Docente: objetivos, contenidos, metodología y evaluación; así como sus interconexiones.

En los Capítulos 4 y 5 se presentan los Programas de las materias objeto del presente Proyecto Docente: "Cálculo Diferencial e Integral" y "Métodos Numéricos", respectivamente. En éstos se desarrollan con más detalle los objetivos y contenidos de ambas materias; y se expone posibles temas para clases prácticas, temas de ampliación y ejercicios propuestos, bibliografía comentada y complementaria, temporización y comentarios sobre cada una de las Partes que componen las materias.

Finalmente, en el Capítulo 6, se muestra la lista bibliográfica principal que se ha consultado en el Departamento de Matemática Aplicada de la U.P.C., para el desarrollo del presente Proyecto Docente. Esta relación bibliográfica se ha agrupado alfabéticamente para cada una de las materias.

CAPITULO 2

La Matemática en la Ingeniería

CAPITULO 2.- LA MATEMATICA EN LA INGENIERIA.

2.1.- NECESIDAD DE LA MATEMATICA.

En la realización de este Proyecto Docente se plantea, en primer lugar, la necesidad de reflexionar sobre la enseñanza de la Matemática en una Escuela de Ingeniería Técnica Industrial, destacando las particularidades que debe presentar en relación con la impartida en otros centros.

En la actualidad, la Matemática impregna cualquier estudio y técnica de nuestro mundo. En las últimas décadas ha crecido enormemente la cantidad y variedad de métodos matemáticos usados en diversas disciplinas, y en particular en Ingeniería; ya que en esta ciencia se combina la observación de los fenómenos de la naturaleza y la necesidad de cuantificación de los mismos, para lo cual es imprescindible disponer de un modelo matemático capaz de reflejar el comportamiento natural de las "cosas".

Por otro lado, la Matemática proporciona un entrenamiento en el pensamiento racional y ordenado, capacitando al ingeniero para generalizar a partir de su experiencia.

En consecuencia, la enseñanza de la Matemática para un ingeniero debe tener un triple fin:

- Enseñarle a razonar adecuadamente, lógicamente y con economía de pensamiento, y a generalizar.

- Proporcionarle métodos útiles para atacar los problemas que aparecen en las diferentes disciplinas de la Ingeniería.

- Darle facilidad para comprender nuevos problemas técnicos con un contenido matemático significativo.

Paralelamente al desarrollo de nuevas teorías, los avances en el uso de ordenadores, en las diversas ramas de la Ciencia y la Tecnología, han abierto nuevas posibilidades a la Matemática y sus aplicaciones; el ordenador nos permite atacar hoy problemas que hasta hace poco tiempo eran inabordables. La razón principal de este aumento de posibilidades reside en la alta velocidad con que los ordenadores pueden realizar cálculos aritméticos, y la creciente capacidad de almacenamiento de datos.

Este explosivo y acelerado desarrollo tiene como consecuencia el aumentar, cada vez más, las multiples responsabilidades de aquellos cuya labor es enseñar

Matemática. Es necesario hacer su estudio comprensible e interesante, resaltando sus características como instrumento útil y poderoso para resolver problemas reales que surgen en la vida diaria.

Al aplicar la Matemática a cualquier problema real requiere un buen conocimiento de los sistemas físicos. Esto permite dar a la información física disponible una forma matemática. Este proceso de formulación del problema conduce a un modelo matemático que representa la realidad dentro de los márgenes de dependencia de las hipótesis realizadas y de la precisión con que se conocen los parámetros significativos; entonces el modelo puede ser procesado por métodos matemáticos formales que conducen a la solución del problema. El paso final es la interpretación de la solución en términos físicos.

Las limitaciones del análisis formal son evidentes; este es uno de los hechos que limita la complejidad de ciertos sistemas físicos que quisieramos analizar en el sentido clásico. Sin embargo, disponiendo de ordenadores digitales, problemas que hasta ahora han sido considerados como inatacables pueden ser formulados con gran detalle y resueltos numéricamente. Por ello, parece razonable estimular a los estudiantes a pensar más acerca de la formulación del problema y menos sobre la manipulación formal, especialmente con vista a problemas reales, y resaltar el hecho de que los Métodos Numéricos nos abre un camino para alcanzar gran conocimiento de los sistemas físicos. Todo esto hace que el tipo de educación matemática que debe recibir un ingeniero vaya evolucionando de acuerdo con los adelantos no solo de la Matemática, sino de la Tecnología. Ya en los primeros cursos de carrera debe enseñarse el manejo de lenguajes de programación, con objeto de que el alumno pueda usar estas técnicas numéricas libremente a lo largo de las diversas asignaturas de Matemática e Ingeniería. En particular, es importante que el alumno se ejercite en la programación y contraste diversos métodos numéricos en problemas de interés real.

Entre los mayores problemas que encuentra el profesor de Matemática para ingenieros técnicos está la motivación del alumno; hacerle comprender la necesidad de la Matemática en Ingeniería.

Con objeto de conseguir una enseñanza motivada y bien dirigida, debe existir un diálogo continuo entre profesores de Matemática y de asignaturas más específicas de Ingeniería. Debe contrastarse el contenido de curriculum y métodos de enseñanza, con intercambio de conocimientos y experiencias, determinando los cambios necesarios en constante revisión.

No se debe perder de vista que estamos intentando preparar personas que se van a incorporar plenamente a la Industria en los próximos años. Y estas personas, si han de ser ingenieros técnicos, han de estar preparados para resolver problemas de dificíl planteamiento, adaptarse a nuevos campos de actividad, tener seguridad en sí mismos y ser capaces de tomar decisiones por cuenta propia.

Deben desarrollar facultades críticas de modo que puedan seleccionar los resultados significativos de un estudio de ingeniería y presentarlos claramente, con precisión en forma verbal, gráfica y matemática. Su preparación debe producir un intelecto lo suficientemente flexible para adaptarse a los cambios en un mundo en desarrollo tecnológico acelerado. En resumen, tienen que llegar a darse cuenta que tendrán que aprender a lo largo de toda su vida, no sólo estudiantil, sino profesional.

La Matemática juega en toda esta formación un papel fundamental, dado que el alumno se enfrenta en todo momento "con rigor" a nuevos planteamientos y problemas. Adquiere la costumbre de trabajar con métodos ordenados y estructurados, que le ayudarán a enfrentarse con problemas de otra índole, abordándolos con esquemas lógicos. Una de nuestras misiones será enseñar al futuro ingeniero técnico a "pensar" y "actuar". La metodología seguida en este proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos de la Matemática tendrá gran importancia para conseguir estos objetivos, pues de dicha metodología depende en esencia lo que realmente aprende el alumno, que puede y debe ser mucho más que el simple contenido de la enseñanza recibida.

2.2.- LA ESCUELA UNIVERSITARIA POLITECNICA. INGENIERIA TECNICA INDUSTRIAL.

En la Escuela Universitaria Politécnica de la Universidad Politécnica de Canarias se pueden cursar en la actualidad cuatro carreras, que dan lugar a los siguientes títulos académicos:

- Ingeniero Técnico Industrial.

- Ingeniero Técnico en Obras Públicas.

- Ingeniero Técnico Naval.

- Ingeniero Técnico Topógrafo.

Hay que indicar que recientemente se ha creado, como centro independiente de la E.U.P., la Escuela de Ingenieros Técnicos de Telecomunicación, cuyos estudios eran impartidos en la E.U.P.

El presente Proyecto Docente se centra en los estudios de Ingeniería Técnica Industrial, de acuerdo con el perfil docente referenciado en el apartado 1.1 de la presente Memoria. No obstante, gran parte de lo que aquí se expone puede ser aplicable al resto de los estudios.

2.2.1.- Plan de Estudios.

La carrera de Ingeniería Técnica Industrial que se imparte en la E.U.P. posee un plan de estudios experimental de cuatro años, basado en el Plan 1971, si bien una minoría de alumnos opta por el plan trienal.

Se pueden distinguir cinco Secciones agrupadas en tres Especialidades:

1ª) Eléctrica:

- Centrales y Líneas Eléctricas.

- Electrónica Industrial.

2ª) Mecánica:

- Estructuras e Instalaciones Industriales.

- Construcción de Maquinaria.

3ª) Química Industrial:

- Instalaciones y Procesos Químicos.

Para acceder al título de Ingeniero Técnico Industrial, los alumnos, además de superar todas las asignaturas que componen la carrera, deberán presentar un Proyecto Fin de Carrera que juzgará un Tribunal nombrado al respecto.

El plan de estudios situa las siguientes asignaturas de Matemática en los dos primeros cursos de la carrera, siendo éstas comunes y obligatorias para las tres Especialidades:

* PRIMER CURSO:

  - "Algebra": 5 horas/semana.

  - "Cálculo Infinitesimal": 6 horas/semana.

* SEGUNDO CURSO:

  - "Ampliación de Matemáticas y Programación": 4 horas/semana.

Las materias que se citan en el perfil docente referenciado en el apartado 1.1: "Cálculo Diferencial e Integral" y "Métodos Numéricos" se distribuirarán entre estas tres asignaturas, como se indicará posteriormente en el desarrollo de los Programas de las mismas.

Se observa que el plan de estudios adolece de una asignatura propia de Métodos Numéricos, que bien podría impartirse en el tercer curso de la carrera. El Departamento de Matemática Aplicada, siendo consciente de esta anomalía, y dada la importancia de esta materia, revisará en un futuro próximo esta situación cuando se plantee la Reforma de las Enseñanzas en las Escuelas Técnicas; proponiendo introducir en el plan de estudios una asignatura cuatrimestral de Métodos Numéricos con un mínimo de 4 horas/semana en el tercer curso, por considerar imprescindible esta materia para la formación del ingeniero técnico, en concordancia con la demanda social y los avances tecnológicos.

2.2.2.- Alumnado.

Los alumnos constituyen uno de los factores básicos de la enseñanza, ya que forman el elemento receptor de la misma.

Los resultados que se obtengan de la enseñanza dependen en gran medida de la actitud del alumno frente a ella. En general las posibles actitudes son dos: la introducida por los deseos de aprender y la introducida por los deseos de aprobar.

Puede decirse que en todo alumno se suelen presentar alternativamente las dos actitudes a lo largo de su paso por la Universidad, sin embargo en unos domina sobre todo una de ellas y en otros, la otra.

El alumno dominado por la idea de aprobar no puede obtener beneficios en el rendimiento que alcanzaría si se liberase de esa obsesión, que es a todas luces perjudicial. Muchas veces esta obsesión es debida al propio alumno, por causas vocacionales o personales, pero en otras existen causas ajenas al mismo. En algunos casos será el planteamiento inadecuado de una asignatura o plan de estudios, la escasa oferta académica de la Universidad donde reside, etc.

Por el contrario, el alumno dominado por el ansia de conocimientos se encuentra en perfectas condiciones de asimilar las enseñanzas y dispone de un optimismo que le hace mucho más llevadera la labor del "estudio". Se suele tratar de alumnos cuya vocación va en la línea de la carrera que han elegido, y por lo tanto llegan a participar de una satisfacción personal por el simple hecho de aprender materias de su agrado.

El profesor debe ser capaz de lograr que la actitud de sus alumnos sea la segunda y no la primera, tratando de superar las limitaciones que le vienen dadas. Debe motivarlos intentando despertar en ellos el deseo de aprender, haciéndoles ver que aquello que estudian es necesario y de gran utilidad para el posterior ejercicio de su profesión.

Resulta evidente que calidad y número no son fácilmente compatibles. Es difícil encontrar muchos y buenos, y lograr que sigan siendo buenos después de recibir las enseñanzas. El alumno necesita la dirección del profesor, pero desgraciadamente ello lleva tiempo y por desgracia no todos los alumnos son iguales. Por tanto un profesor con muchos alumnos no podrá atenderlos como es debido y, en consecuencia, ello redundará en perjuicio de la enseñanza.

En el primer curso impartido en la E.U.P. nos podemos encontrar con aulas de más de 150 alumnos, de procedencia variada. Hay que destacar que del orden de un 30 % son alumnos que han cursado estudio en Formación Profesional, y los conocimientos que poseen en Matemática no son muy abundantes. Esto hace que el profesor tenga una difícil labor para distinguir lo que supone ya por sabido (conocimientos previos necesarios) y lo que debe repasar, teniendo en cuenta la necesidad de establecer a priori un "nivel" suficiente para la obtención del título y ejecer satisfactoriamente la profesión.

A un buen profesor no le será nada fácil obtener buenos resultados con alumnos poco motivados y con escasos conocimientos previos, que debe obviar por considerarse aprendidos en las enseñanzas de Bachillerato o Formación Profesional; por lo que un mínimo de calidad en el alumnado es más conveniente, y para ello sería necesario establecer algún tipo de selección particular para entrar en la carrera que pretenden estudiar. Aunque esto puede ser causa de ciertos males, evita males mayores, puesto que actualmente, esta selección se realiza en el primer curso de carrera, habiendo alumnos que repiten un gran número de años, por causas puramente vocacionales o por la falta de base necesaria para enfrentarse a nuevas materias.

2.2.3.- Ciclicidad.

Actualmente nos encontramos en una etapa de transición, debido al inminente desarrollo de la futura Ley de Reforma de las Enseñanzas Universitarias. Las carreras universitarias se dividirán, en su mayoría, en dos ciclos; el primero de tres años y el segundo de dos.

En la Ingeniería, problamente el primer ciclo permitirá ejercer la profesión y será equivalente a los actuales estudios de Ingeniería Técnica, en los que se busca principalmente la preparación de ingenieros especializados en temas concretos. Los dos años restantes darán, al que siga estudiando, una perspectiva más amplia y general, que es el actual fin de los estudios de Ingeniería Superior. Este sistema va a traer serios problemas académicos y profesionales. Estructurar el paso del primer ciclo al segundo no es tarea nada fácil. Significa acceder de una enseñanza muy específica a otra mucho más general. Por otro lado, se reducirán los estudios de Ingeniería Técnica y Superior en un año de carrera, que será difícil de condensar o incluir en los planes de estudios. Habrá, por tanto, que analizar qué materias se eliminan, o al contrario qué asignaturas se amplian. El gran temor de las Escuelas Superiores es la posible pérdida de generalidad y rigor de que gozan sus estudios.

En los estudios actuales, una parte de las asignaturas de Matemática del primer curso se dedica a cubrir lagunas y rellenar omisiones de la enseñanza media. Si en los futuros planes de estudio reducen la carrera en un año, se podrá ganar tiempo obviando esos repasos, siempre que se mejore la calidad de la formación en BUP, FP y COU.

Comparando el presente plan de estudios de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de la U.P.C., atendiendo a las asignaturas de Matemática, expuesto a continuación, con el de la E.U.P. (véase apartado 2.2.1 de la presente Memoria):

* PRIMER CURSO:

  - "Algebra Lineal": 5 horas/semana.

  - "Cálculo Infinitesimal": 6 horas/semana.

* SEGUNDO CURSO:

  - "Ampliación de Matemáticas": 7 horas/semana.

* TERCER CURSO:

  - "Estadística Teórica y Aplicada": 5 h/semana.

* CUARTO CURSO: (sólo en Organización Industrial)

- "Cálculo Numérico": 5 h/sem. (cuatrimestral).

Podemos observar que en el primer curso los dos planes de estudio poseen el mismo número de horas lectivas; en el segundo existe una diferencia de sólo 3 horas/semana, y las asignaturas del tercer y cuarto curso no figuran en la E.U.P.; si bien es de destacar que la asignatura de "Cálculo Numérico" no se imparte tampoco en las restantes especialidades de Ingeniería Superior (sólo en la de Organización Industrial), pese a su indiscutible importancia, y que bien podría figurar en el último curso del primer ciclo.

Si, por otro lado, nos fijamos en la discutida Ley de Atribuciones, por la que se concede al ingeniero técnico mayor responsabilidad profesional, habrá que pensar en una mayor preparación del mismo; y no cabe duda que la Matemática juega en esta preparación un papel fundamental como ya se ha indicado en el apartado 2.1.

De todo ello, podríamos pensar en un plan cíclico, para las asignaturas de Matemática, en el que se intente conseguir un mayor rigor y amplitud en las materias impartidas en el primer ciclo, con respecto al que se desarrolla en el actual plan de estudios. En el diseño del presente Proyecto Docente se ha intentado tener en cuenta esta filosofía en el momento de establecer los objetivos perseguidos para el desarrollo de las materias que son objeto del mismo.

Es obvio que el plan cíclico que finalmente afecte a las Escuelas Técnicas será el fruto de diferentes discusiones entre profesores de las distintas materias que componen actualmente las carreras técnicas y superiores, así como de las directrices establecidas por el Gobierno. En este apartado, no se ha pretendido más que hacer una breve reflexión al respecto.

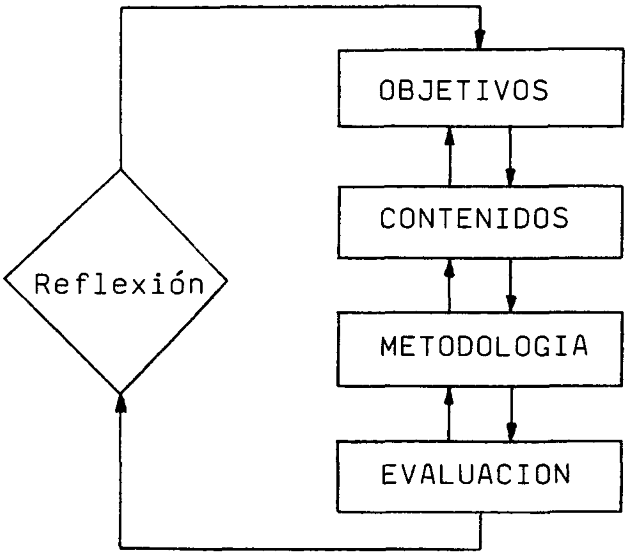
C A P I T U L O   3

D i s e ñ o   d e l   P r o y e c t o   D o c e n t e

3.1.- INTRODUCCION.

Para plantear correctamente el diseño del Proyecto Docente con el perfil expuesto en el apartado 1.1 de esta Memoria, habrá que definir los objetivos generales y específicos que se pretenden conseguir con la enseñanza de estas materias, lo cual nos lleva a la concreción de los contenidos de las mismas, así como de la metodología utilizada para su aprendizaje por parte de los alumnos. Finalmente tendremos que realizar un control (proceso de evaluación) de los objetivos; ver hasta qué punto se han alcanzado, pues esto nos permite reflexionar y modificar tanto los objetivos, contenidos y metodología, o incluso las técnicas de evaluación.

En los próximos apartados de este Capítulo se analizan estos cuatro núcleos fundamentales de la planificación de la enseñanza, íntimamente relacionados entre sí.



3.2.- OBJETIVOS.

En el Capítulo 2 de la presente Memoria ya se ha analizado el papel de la Matemática para un ingeniero técnico industrial. Nos quedaría concretar más los objetivos generales que nos proponemos en el desarrollo de la enseñanza del "Cálculo Diferencial e Integral" y "Métodos Numéricos"; materias que son indiscutiblemente necesarias para la formación del futuro profesional.

Por otra parte es necesario, a la hora de establecer los objetivos, tener presente los medios de que se dispone, los conocimientos de partida y las horas previstas de dedicación por parte del alumno a estas materias; si bien el ajuste definitivo se verifica al fijar los contenidos.

Podemos comenzar enunciando unos objetivos generales que engloban prácticamente las materias a que se refiere este Proyecto Docente:

a) Que el alumno sea capaz de:
   - Analizar el enunciado de un problema.
   - Resolverlo utilizando las técnicas más eficientes del Cálculo.
   - Interpretar los resultados obtenidos.

b) Que el alumno adquiera la base teórica del Cálculo necesaria para el estudio de las asignaturas específicas que componen la carrera.

Que el alumno desarrolle su capacidad de abstracción, interrelación y conexión de los conceptos impartidos.

d) Que el alumno adquiera una actitud positiva frente a las técnicas del Cálculo, entendiendo las múltiples aplicaciones que poseen.

En cuanto a las técnicas del Cálculo, se han englobado tanto las técnicas clásicas del Cálculo Diferencial e Integral, como los Métodos Numéricos.

Estos objetivos generales quedan especificados, más detalladamente, en los desarrollos de los Programas de las materias objeto del presente Proyecto Docente. Véase Capítulos 4 y 5. En éstos se exponen los objetivos generales y especificos de cada una de las Partes en que se han dividido las materias de "Cálculo Diferencial e Integral" y "Métodos Numéricos".

3.3.- CONTENIDOS.

Los contenidos de una determinada materia responden a la pregunta qué debe enseñarse y qué debe ser aprendido por el alumno. La selección y organización de los contenidos para un determinado nivel de enseñanza ha sufrido diversos cambios a lo largo de la historia de la educación, no sólo en función del propio desarrollo de la ciencia y la cultura, sino especialmente por los variados criterios pedagógicos imperantes en cada época.

En los Capítulos 4 y 5 del presente Proyecto Docente se detallan de forma ordenada los contenidos que corresponden a las materias de "Cálculo Diferencial e Integral" y "Métodos Numéricos", atendiendo a las necesidades de un ingeniero técnico industrial y al plan de estudios de la carrera. Cada una de estas materias se ha dividido en Partes que responden a conceptos con una determinada afinidad, las cuales a su vez se desglosan siguiendo en todo momento una estructura de árbol, hasta llegar a las partes más básicas, de forma que los conceptos necesarios para la comprensión del siguiente se exponen en primer lugar. Asimismo, se indica el nivel de profundización en cada uno de los conceptos estableciendo los objetivos específicos en cada uno de ellos. De esta manera, el alumno fácilmente deduce en qué lugar de la materia se encuentra y su relación con el resto.

3.4.- METODOLOGIA.

Una vez definidos los objetivos a cubrir en las materias de "Cálculo Diferencial e Integral" y "Métodos Numéricos", y como consecuencia establecidos los contenidos de la enseñanza, se va a desarrollar en este apartado la organización de la enseñanza, es decir el método a seguir para cubrir los objetivos establecidos.

Se debe resaltar el hecho de que el alumno ha sido educado desde las primeras etapas de su vida docente para ser enseñado, significando con esto el sentarse a recibir unos ciertos conocimientos expuestos con claridad unas veces, con menos en otras; y, en general, no ha sido instruído en la necesidad de ir formándose con la ayuda de las personas más idoneas para ello, que lo estimulen, le orienten y aconsejen en todo lo que necesite. Con esta mentalidad se llega a la Universidad y desgraciadamente en la mayor parte de los casos se sigue con ella.

Por otra parte, hay falta de espíritu crítico en el alumnado, pues de todos es sabido que en general la crítica constructiva, poniendo todo el énfasis en esta última palabra, es casi inexistente.

Por extraño que parezca, el alumno actual, a pesar de reconocer que puede mejorar, se niega a colaborar en el empeño, y no sabemos si será debido a una malformación proveniente de los niveles inferiores, pero el alumno medio piensa que cuanto mayor sea la participación en clase, el profesor considerará que el nivel de preparación es más elevado y, en consecuencia, será más exigente a la hora de calificar. Por esta razón, los pocos alumnos verdaderamente activos que surgen en algunas promociones son considerados "perjudiciales" por sus propios compañeros. Generalmente, son marginados del grupo y su actitud activa suele decaer.

Creemos que para una enseñanza realmente científica el alumno debe tomar, en la mayor medida posible, parte activa en su propio aprendizaje, acudiendo al profesor en el momento que las dudas planteadas sobrepasan su capacidad. Es lógico pensar que a través de estas consultas el profesor puede ir conociendo poco a poco el nivel del alumno y su profundización en la asignatura. Esto es siempre útil para cualquier replanteamiento de la estrategia a seguir por el profesor.

Un aspecto a tener en cuenta es el hecho de que generalmente desde el primer día de clase se parte desde un nivel establecido por el profesor, sin intentar llegar a ese nivel mediante un examen o prueba que pueda darlo. La realidad es que el nivel entre los alumnos es muy distinto, incluso se llega a la Universidad sin haber estudiado en el curso anterior las asignaturas que corresponden a los estudios elegidos. Debido a ello, el primer día de clase debería evaluarse, mediante un cuestionario, los conocimientos previos que poseen los alumnos.

En cuanto a las relaciones profesor-alumno en el desarrollo de las clases, es evidente que la separación física que entraña la realización de la clase tradicional trae como consecuencia un alejamiento a nivel de relación personal. Los alumnos, al ver al profesor apartado cuando no elevado sobre ellos, sienten una inferioridad que se manifiesta en la ausencia de participación.

La consecuencia práctica es que el enseñante se encuentra en un lugar superior, en el que poseyendo unos conocimientos los transmite a otras personas que los ignoran: "alguien que sabe explica al que no sabe", esta es la idea básica de la clase convencional, y no se tiene en cuenta la posibilidad de variación del sistema pedagógico.

En cuanto a los dos tipos de clase de Matemática que se dan actualmente, la de teoría y la de problemas. Creemos que no se debería de dar esta separación tan drástica entre teoría y práctica, pues de todos es sabido la estrecha complementación que tienen entre sí, y por tanto la separación hecha hasta ahora tiene muchos inconvenientes, acentuados sin duda por la circunstancia de que la persona que imparta teoría y problemas no sea la misma; incluso en ocasiones la coordinación entre ambos no es la adecuada, siendo un factor que influye negativamente en el alumnado. Esta afirmación es consecuencia de las encuestas realizadas por los alumnos sobre profesores, en las que se muestra muy claramente su deseo de que en caso de no poder ser el mismo profesor, éstos actúen conjuntamente con unidad de criterio.

El profesor debe sacar el máximo provecho del entusiasmo inicial del alumno ganando su confianza, conociéndolo mejor y consiguiendo hacer de él un colaborador. Mediante la aplicación de la metodología más adecuada procurará crear y mantener en sus clases un ambiente propicio a la actividad intelectual intensiva, desarrollando en los alumnos hábitos fundamentales de orden, disciplina y trabajo, e inculcándoles sentido de responsabilidad; y conduciendo al grupo a la adquisición de los conocimientos y aptitudes programados dentro de los objetivos académicos y profesionales.

Hay que tener un plan bien meditado, magníficamente fundado, actuando según un programa definido. Aunque una asignatura se haya explicado durante varios años, el profesor no debe apoyarse en la memoria y repetir lo mismo año tras año, sino que debe mantener una actitud de renovación y autocrítica constante. Resulta costoso actuar siempre así, pero hay que considerar la docencia como una profesión de un alto grado de responsabilidad, puesto que de nosotros depende la formación de un gran número de profesionales.

Podríamos señalar dos aspectos en la preparación de las clases:

1º) Hacer un plan de trabajo:

a) Asegurándose cuáles son los conocimientos previos de los alumnos.

b) Determinando con exactitud qué es lo que hay que enseñar.

c) Dividiendo el tema en sus partes más simples.

d) Asignando a cada parte la extensión adecuada.

2º) Hacer un análisis de la lección:

a) Determinando los puntos importantes del tema a enseñar.

b) Determinando los conocimientos requeridos para comprender el tema.

c) Previendo las dificultades que pueden encontrar los alumnos y el modo de solucionarlas.

d) Haciendo una estimación del tiempo.

Cualquiera que sea el estilo de la clase, y los métodos y técnicas que en ella se utilicen, el profesor debe recordar que es responsabilidad suya el mantener un alto nivel de atención por parte de los alumnos. Los estudios efectuados sobre clases magistrales muestran que si el profesor presenta su lección verbalmente y con pocas ilustraciones, el alto nivel de atención inicial decae notablemente hasta poco antes del final, en que sube un poco, para decaer finalmente durante las conclusiones. Por consiguiente, el plan de clase debe dar cabida a varios métodos encaminados a estimular la atención. Un buen profesor hace uso de ejemplos ilustrativos, figuras, comparaciones; varía el ritmo, el tono de voz y da énfasis al hacer afirmaciones de gran importancia, resaltando en todo momento las interesantes aplicaciones que pueden desprenderse de la materia que trata de explicar. De este modo, la atención de los alumnos se mantiene.

Los momentos iniciales de la clase merecen una cuidadosa atención. Si lo que se propone el profesor es dirigir la atención hacia un problema particular, la introducción suele adoptar la forma de preguntas, toque de atención, o incluso fallos deliberados que muestren las consecuencias de un error; de este modo se capta la atención del auditorio. Ahora bien, si se trata de una serie de clases conectadas entre sí, un breve resumen podrá ser de utilidad; también puede discutirse una pregunta relativa a la clase anterior o un ejercicio procedente de ella. Si la asignatura constituye una unidad en sí misma, un breve compendio de los temas a tratar ayudará al auditorio a organizar el contenido y recibir una muestra adelantada de los temas que serán de especial interés.

De manera esquemática, podríamos considerar el siguiente plan de clase:

1º) Preparar a los alumnos:

a) Predisponer a los alumnos.

b) Definir claramente qué se va a enseñar.

c) Interesar a los alumnos por el tema.

2º) Presentar el tema:

a) Explicar e ilustrar una sola fase importante cada vez.

b) Hacer notar los puntos clave en cada fase.

c) Hablar con seguridad y serenidad.

d) Desarrollar completamente el tema.

3º) Hacer ejercicios:

a) Hacer que los alumnos realicen ejercicios y vean la aplicabilidad de los mismos.

b) Corregir los errores en el momento en que se dan.

c) Hacer preguntas para verificar si han comprendido.

d) Completar sobre la marcha detalles secundarios.

4º) Acompañar a los alumnos en su progreso:

a) Motivar a los alumnos para estudiar temas nuevos.

b) Estimular a los alumnos para que hagan preguntas.

c) Orientarlos sobre bibliografía y fuentes de estudio.

d) Calificarlos.

En la enseñanza de la Matemática, habrá que tener en cuenta la metodología más idonea para presentar una enseñanza constructiva, lo cual no es nada fácil. El método socrático de hacer preguntas que lleven al estudiante a descubrir un resultado debe usarse con cautela. Las preguntas deben ser razonables y que puedan ser respondidas por el mayor número de alumnos. De otra manera éstos se sentirán derrotados y llegarán a perder el interés. Los alumnos deben adquirir confianza en su propia capacidad. Será más fácil que lo consigan si contribuyen a la construcción de la matemática, que si se les pide que aprendan un teorema sofisticado, cuya demostración es el resultado de muchas remodelaciones de versiones anteriores.

Por otra parte, el profesor debe promover los métodos activos de aprendizaje, centrando el interés en lo que los alumnos hacen. En este sentido, la misión del docente es preparar, guiar y evaluar la actuación de los alumnos. Y aún estos dos últimos aspectos pueden pasar en parte a depender de los propios alumnos. Para ello es preciso disponer el aprendizaje de forma que las intervenciones activas de los alumnos no se superpongan a las clásicas lecciones magistrales, sino que en parte las sustituyan. De este modo, el planteamiento de test, preguntas, problemas, discusiones por grupos, etc., en el periodo de una clase hacen la enseñanza más activa, y aumenta el rendimiento. Evidentemente, la participación del alumno será más eficaz cuanto menos "masificada" esté el aula.

Otro aspecto muy importante en la clase es estar más pendiente de los alumnos que ellos del profesor. Es necesario mantener un contraste constante sobre el estado de asimilación de los alumnos. El profesor debe animar constantemente a sus discípulos a que planteen sus dudas o plantearlas por sí mismo, insistiendo en ello cada vez que note que sus explicaciones no son captadas con normalidad. En líneas generales, cada vez que se presenta un concepto nuevo es conveniente justificarlo; esto facilita al alumno la comprensión y hace que lo maneje con más familiaridad en el futuro. Cuando se inicia una teoría, antes de comenzar su formalización y empezar a establecer resultados, se debe hacer una presentación de la misma a grandes rasgos, donde se justifique su interés, se explique cómo ha aparecido y se indique sus aplicaciones y repercusiones dentro de la disciplina; tengamos siempre bien presente que la motivación es de importancia capital para orientar el entusiasmo de los alumnos.

Finalmente, tras resumir lo expuesto de manera ordenada, breve y sencilla, la clase debe terminar con preguntas-resumen de lo tratado. De este modo, el alumno termina la clase con una idea clara de qué es lo que ha aprendido en ella.

Conviene fijar varios textos básicos para las diferentes asignaturas, y a lo largo del curso, a medida que van apareciendo cuestiones nuevas ir mencionando otros libros de consulta, que el Departamento debe tener a disposición de los alumnos, a los que debe animarse a a consultar con frecuencia. Este material al alcance del alumno evita que su tarea se reduzca a asistir a la clase limitándose a copiar las notas de las explicaciones del profesor sin utilizar sus facultades intelectivas para seguirlas de cerca y comprenderlas. Por este motivo, es conveniente que el profesor dedique parte de su tiempo a la confección de unos apuntes que llenen las lagunas bibliográficas de los textos básicos fijados.

El profesor que dirige una asignatura debe intentar formar un buen equipo de profesores ayudantes con los que constituya un órgano docente uniforme. Se establece frecuentemente una separación total entre las clases teóricas y prácticas, lo que origina a veces, la inutilidad de muchas de ellas. Todo el equipo de profesores de una asignatura debe estar perfectamente coordinado para hacer eficaz cada una de las clases, de cualquier tipo. Las clases prácticas no pueden limitarse a plantear y resolver una serie de ejercicios sin tener en cuenta el desarrollo de las clases teóricas, sino adaptarse a éstas siguiendo un plan paralelo, exponiendo cuestiones que aparezcan relacionadas con la teoría, proponiendo ejercicios para resolver con ayuda de ésta, y cuando sea necesario, completar o complementar las clases teóricas. Demostraciones sencillas omitidas en la clase teórica, o generalización a situaciones parecidas de los resultados presentados, son material útil de trabajo para el alumno, que luego en las clases prácticas o tutorías discute con el profesor.

3.5.- EVALUACION.

Normalmente se confunde la evaluación con la que se hace exclusivamente sobre los conocimientos adquiridos por los alumnos. Si bien, habría que evaluar todos los aspectos que intervienen en el proceso de enseñanza-aprendizaje de una determinada materia. Es decir, hay que evaluar desde los objetivos propuestos, contenidos y metodología empleada por el profesor hasta la asimilación de los contenidos por parte de los alumnos, puesto que todo ello nos dará información para replantear cualquiera de estos aspectos. La evaluación de los tres primeros deberá hacerse mediante encuestas periódicas a los alumnos, y por medio de la reflexión, sobre estos resultados, de los profesores que coordinadamente imparten la materia.

Por otra parte, no cabe duda que la evaluación de los conocimientos adquiridos por el alumno, así como su capacidad para enfrentarse a nuevos problemas, nos indica bastante acerca de la culminación, o no, de los objetivos propuestos. Esta información debe ser usada por el profesor no sólo para calificar al alumno, sino para enjuiciarse a sí mismo o al programa impartido.

Siempre es difícil evaluar al alumno mediante pruebas que no dejan de ser en cualquier caso aleatorias en cuanto a su contenido. Podríamos pensar en un sistema de evaluación "ideal" que consistiría en el seguimiento individualizado del alumno a lo largo de todo el curso académico, con un estrecho contacto profesor-alumno. Esto podría realizarse teniendo discusiones periódicas con el alumno sobre los distintos temas y problemas impartidos o propuestos durante el curso. El problema es que ello resulta prácticamente inviable en las asignaturas correspondientes a los primeros cursos de carrera, en las que el profesor se encuentra bajo su responsabilidad con varios cientos de alumnos.

Si un profesor dedicara una hora diaria, por ejemplo, a este tipo de contactos con el alumno, podría contrastar los conocimientos de éste exclusivamente del orden de una hora por cada alumno en todo el curso. Con este ejemplo se puede observar la dificultad y el poco rendimiento al que nos llevaría esta manera de actuar. Máxime, si se tiene en cuenta que estos contactos deberían estar concentrados también a final del curso académico, para evaluar los conocimientos globales que el alumno ha adquirido de toda la asignatura.

Deducida la inviabilidad de los contactos profesor-alumno, desde un punto de vista estructurado y global, debido a la "masificación", no por ello deben desecharse totalmente, pues las ventajas que poseen son obvias.

La solución que se ha elegido en este sentido es la de fijar horas de tutoría, en las que los alumnos que poseen un mayor interés, o que se encuentran con ciertas dificultades en el estudio de una materia, puedan acudir voluntariamente al profesor para buscar entre ambos la solución más adecuada a los problemas que planteen. Habrá que motivar al alumno para que tome parte activa en las horas de tutoría siempre que sea necesario y sin ningún tipo de restricciones.

Por todo lo expuesto anteriormente, y basándonos en que cuanto mayor conocimiento tenga el profesor del alumno, mayor cantidad de datos tendrá para poder realizar una calificación más exacta, es por lo que se ha elegido como criterio de calificación el que expone a continuación para cada una de las materias objeto del presente Proyecto Docente:

* "Cálculo Diferencial e Integral":

A lo largo del curso académico se efectuarán, al menos, cuatro pruebas evaluatorias que constarán de cuestiones teóricas y prácticas, que podríamos llamar pruebas parciales. En cada una de ellas se evaluarán los conocimientos del alumno sobre dos o tres Partes del programa desarrollado en el Capítulo 4 del presente Proyecto Docente.

Cada Parte se evaluará de forma independiente, es decir, el alumno recibirá una calificación por cada Parte sin obtenerse una calificación global de la prueba.

Las preguntas que se realicen por cada Parte llevarán la puntuación asignada por el profesor, de tal forma que la suma de éstas sea de diez puntos. Normalmente se dará mayor peso a las cuestiones prácticas que a las teóricas, dado que en éstas los alumnos deberán utilizar los conceptos asimilados en el estudio de la teoría, combinándolos para resolver el problema propuesto al respecto. Por otro lado, de esta forma se intenta evitar el estudio únicamente memorístico por parte del alumno, pudiéndose evaluar su capacidad de relación, comprensión y aplicación de los conceptos que posee.

Se seguirá el criterio de que las Partes aprobadas en estas pruebas parciales se guardarán hasta la convocatoria de Septiembre, es decir, tendrán carácter liberatorio.

Para los alumnos que no hayan superado todas las Partes en estas cuatro pruebas parciales, se les dará una segunda oportunidad en una prueba general llamada "repesca", que se realizará en los primeros días del mes de Junio. En esta prueba se puntuará también cada Parte independientemente, pero con la salvedad que la máxima puntuación será un nueve, con el fin de fomentar que el alumno intente desde un principio aprobar la asignatura por curso.

Para los alumnos que aún le queden algunas Partes pendientes, y no hayan renunciado a la convocatoria de Junio, se les dará la oportunidad de superarlas en la prueba llamada de Tribunal, que tendrá una estructura similar a la "repesca", si bien en este caso la máxima puntuación, en dichas Partes pendientes, será un ocho. Las pruebas de "repesca" y de Tribunal tendrán también carácter liberatorio.

Por último, los alumnos que todavía le queden Partes por superar, y no hayan renunciado a la convocatoria de Septiembre, tendrán derecho a presentarse a esta prueba cuya estructura y máxima calificación será similar a la de Tribunal de Junio.

En definitiva, todo alumno dispondrá de cuatro oportunidades para superar cada Parte a lo largo del curso académico, número que por otro lado se considera suficientemente alto. Por tanto, para aprobar la asignatura podrá exigirse tener aprobadas todas las Partes. La calificación final se realizará con arreglo al baremo de puntos obtenidos en cada Parte.

En cuanto a la convocatoria de Febrero, en el caso que la otorgue la Universidad, será una prueba similar a la de Tribunal, aunque algo más corta, donde el alumno se presentará a todas las Partes de la asignatura; las haya aprobado o no en cursos anteriores. En esta prueba, también podrá exigirse al alumno aprobar todas las Partes por separado.

Con este sistema de evaluación se pretende fomentar que el alumno apruebe la asignatura a lo largo del curso y que no deje de estudiar ninguna Parte de la materia. Este método de evaluación es el que se está llevando a cabo en la actualidad en las asignaturas de "Cálculo Infinitesimal" y "Ampliación de Matemáticas y Programación" en la E.U.P. de la U.P.C.

También hay que decir que se considerará falta grave el incumplimiento de las instrucciones que se dan en cada prueba, o el uso de ayudas no autorizadas explícitamente, pudiendo el profesor sancionar al alumno no permitiéndole concurrir a nuevas pruebas parciales, sino exclusivamente a las de Tribunal de Junio y Septiembre. El alumno podrá ser expulsado de la prueba en que cometa la infracción.

Es importante que los alumnos examinen todas las dificultades que hayan encontrado en la realización de cada prueba. Por ello, se les darán los problemas propuestos, en las diferentes pruebas, resueltos en su totalidad, con posterioridad a la prueba. Se considera igualmente oportuno dedicar al menos una sesión de clase para estudiar los aspectos más interesantes y los fallos más comunes que el profesor haya encontrado en la revisión de las pruebas.

Asímismo, el análisis global de los resultados obtenidos por todos los alumnos permitirá al profesor precisar aquellos objetivos previstos en la programación, y que no hayan sido superados satisfactoriamente. Esto marcará la pauta para la elaboración de las oportunas modificaciones en la programación, y la búsqueda de métodos que permitan incidir con mayor eficacia en aquellos conceptos o técnicas cuya dificultad para el alumnado haya quedado en relieve.

* "Métodos Numéricos":

Para esta materia se propone un sistema de evaluación análogo al expuesto anteriormente, si bien, al estimarse que el programa correspondiente se imparte en un cuatrimestre como ya se ha indicado, se realizarán exclusivamente dos pruebas parciales en lugar de cuatro, manteniéndose el resto de las pruebas.

Debido al alto número de aplicaciones que posee esta materia, conviene que el alumno lleve a la práctica en el ordenador la resolución de diversos problemas con aplicaciones a la física y técnica, en cada una de las Partes del programa desarrollado en Capítulo 5 del presente Proyecto Docente. De esta forma, el alumno se familiariza con las técnicas numéricas y descubre su gran utilidad. Por ello, los alumnos deberán presentar diversos trabajos con el desarrollo de los algoritmos y programas en BASIC o FORTRAN 77 de los problemas propuestos por el profesor en cada una de las Partes. Estos trabajos se considerarán imprescindibles para superar la materia, y se baremarán junto con las calificaciones obtenidas en cada una de las Partes.

CAPITULO 4

Programa de Cálculo Diferencial e Integral

CAPITULO 4.- PROGRAMA DE CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL.

4.1.- INTRODUCCION.

A continuación se expone el desarrollo detallado del Programa de "Cálculo Diferencial e Integral", que forma parte del perfil docente referenciado en el apartado 1.1 de la presente Memoria.

Esta materia se considera que corresponde a la asignatura de "Cálculo Infinitesimal", según el plan de estudios analizado en el apartado 2.2.1 de la presente Memoria, por lo que se supone un número de seis horas lectivas semanales para su impartición a lo largo de todo el curso académico. Tras un estudio del calendario académico, se tomará como base un total de veintiocho semanas lectivas en el curso.

El contenido de la materia se ha dividido en diez Partes que se desarrollan en el apartado siguiente. En cada una de estas Partes se detallan los siguientes apartados:

1º) Indice de su contenido.

Se presentan los títulos de los apartados que forman la Parte, numerados según la estructura de árbol mencionada en el apartado 3.3 de la presente Memoria.

2º) Objetivos generales.

Se resumen los objetivos generales establecidos en la impartición de esta Parte de la materia.

3º) Objetivos específicos.

Se detallan los objetivos específicos que se proponen en cada uno de los apartados indicados en el índice de los contenidos de la Parte.

4º) Temas para clases prácticas.

Se indican diferentes temas para clases prácticas o aplicaciones a la ingeniería de la materia expuesta en la Parte.

5º) Temas de ampliación y ejercicios propuestos.

Se proponen diversos temas relacionados con la Parte, para que el alumno con un mayor interés amplíe sus conocimientos. Asimismo, se indican problemas en los que el alumno puede medir su dominio de la materia.

6º) Temporización.

Se indica el tiempo estimado en la exposición de la Parte.

7º) Bibliografía.

Se hacen dos relaciones bibliográficas (relación detallada y relación complementaria) correspondiente a la materia de la Parte. La relación detallada contiene aquellos capítulos o apartados de diversos libros que constituyen la base bibliográfica, de una manera sumaria pero suficientemente completa, para una adecuada preparación de la materia de la Parte. En las relaciones bibliográficas no se ha pretendido acumular una gran cantidad de títulos, sino que se ha preferido limitar las referencias, por un lado, de forma desglosada al material que efectivamente se ha manejado y, por otro lado, a aquellos textos que se estima son de interés para que quienes lo deseen, puedan ampliar y profundizar en las materias que les resulten más interesantes.

8º) Comentarios.

Se realizan una serie de comentarios sobre los aspectos más destacables de la Parte, atendiendo principalmente a la aplicación a la ingeniería industrial de los conceptos y técnicas estudiados.

4.2.- DESARROLLO DETALLADO DEL PROGRAMA.

El Programa de "Cálculo Diferencial e Integral" consta de diez Partes fundamentales que se desarrollan a continuación, como se ha indicado anteriormente:

Parte 0.- PRELIMINARES.

Parte 1.- ESPACIOS METRICOS: DEFINICION Y CONCEPTOS FUNDAMENTALES.

Parte 2.- LIMITES.

Parte 3.- CONTINUIDAD.

Parte 4.- DIFERENCIACION.

Parte 5.- ESTUDIO LOCAL DE LAS FUNCIONES FUNDAMENTALES.

Parte 6.- CURVAS.

Parte 7.- SERIES.

Parte 8.- INTEGRACION.

Parte 9.- INTRODUCCION A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.

PROGRAMA

DE

CALCULO

DIFERENCIAL E INTEGRAL

P A R T E   0

P R E L I M I N A R E S

PARTE 0.- PRELIMINARES.

0.1.- NUMEROS COMPLEJOS.

0.1.1.- El cuerpo de los números complejos.

0.1.2.- Representación gráfica en el plano complejo. Formas cartesiana, binómica, trigonométrica y polar.

0.1.3.- Operaciones fundamentales en forma binómica y trigonométrica. Cálculo gráfico.

0.1.4.- Potencias de exponente entero. Fórmula de Moivre.

0.1.5.- Potencias de exponente racional. Raíz n-sima de un número complejo.

0.1.6.- Fórmula de Euler. Forma exponencial de un número complejo. Propiedades.

0.1.7.- Función exponencial de exponente complejo.

0.1.8.- Logaritmo neperiano de números complejos.

0.1.9.- Potencia de base y exponente complejo.

0.2.- FUNCIONES HIPERBOLICAS.

0.2.1.- Definición. Representación gráfica.

0.2.2.- Fórmulas fundamentales.

0.2.3.- Funciones hiperbólicas inversas. Expresiones logarítmicas.

* **OBJETIVOS GENERALES.**

- Conocer y aplicar el álgebra elemental de los números complejos.
- Introducir las funciones hiperbólicas.

* **OBJETIVOS ESPECIFICOS.**

0.1.- NUMEROS COMPLEJOS.

- Introducir el conjunto de los números complejos como el producto cartesiano RxR. Definir las operaciones de suma y producto. Definir la igualdad de números complejos.
- Definir la unidad real e imaginaria. Introducir la forma binómica de un número complejo. Definir el plano complejo. Representar gráficamente un número complejo.
- Conocer los conceptos de conjugado y opuesto de un número complejo.
- Establecer la forma trigonométrica de un número complejo. Definir los conceptos de módulo y argumento.
- Analizar las operaciones de suma, diferencia, producto y cociente de complejos, en forma binómica y trigonométrica. Obtener los resultados de forma gráfica en el plano complejo.
- Demostrar la fórmula de Moivre.
- Demostrar la expresión de la raíz n-sima de un número complejo. Interpretar gráficamente.

- Introducir la fórmula de Euler. Deducir las fórmulas de seno y coseno trigonométrico en función de las potencias del número e.
- Establecer la forma exponencial de un complejo. Ver sus ventajas.
- Desarrollar la exponencial de exponente complejo.
- Deducir la expresión del logaritmo neperiano de un número complejo.
- Generalizar la expresión de una potencia de base y exponente complejo.

0.2.- FUNCIONES HIPERBOLICAS.

- Fijar las expresiones de las funciones hiperbólicas y su relación con la hipérbola equilátera. Conocer el significado geométrico del argumento hiperbólico.
- Representar gráficamente las funciones hiperbólicas.
- Demostrar las fórmulas fundamentales de funciones hiperbólicas.
- Introducir las funciones hiperbólicas inversas. Deducir sus expresiones logarítmicas.

*** TEMAS PARA CLASES PRACTICAS.**

- Practicar las operaciones definidas con los números complejos.
- Aplicar las propiedades de los complejos en ciertos problemas geométricos.
- Resolver ecuaciones con soluciones complejas; incluir aquellas en que figuren funciones trascendentes.

*** TEMAS DE AMPLIACION Y EJERCICIOS PROPUESTOS.**

- Demostrar que el conjunto de los números complejos tiene estructura de cuerpo.
- Deducir la fórmula de Euler con los conocimientos que el alumno posee sobre desarrollos en serie adquiridos en el Bachillerato.
- Analizar el significado geométrico del argumento de las funciones hiperbólicas.
- Demostrar ciertas fórmulas de funciones hiperbólicas.

*** TEMPORIZACION.**

El tiempo invertido en la exposición de la Parte 0 será aproximadamente de una semana.

*** BIBLIOGRAFIA.**

Relación detallada.

- T.M. APOSTOL
  Análisis Matemático.
  Segunda edición.
  Editorial Reverté, S.A.
  Barcelona 1981.
  Páginas 19-31 para un desarrollo general del número complejo.

- R.V. CHURCHILL, J.W. BROWN

  Variable Compleja y aplicaciones.

  Cuarta edición.

  Libros McGraw-Hill. Ediciones La Colina, S.A.

  Madrid 1986.

  Capítulos 1 y 3 para un estudio general de esta parte.

- B. DE DIEGO

  Ejercicios de Análisis (Cálculo Diferencial e Integral)

  Tercera Edición.

  Editorial Deimos, S.A.

  Sevilla 1983.

  Capítulo 3 para problemas del apartado 0.1

- J.M. ESTEFANIA, F. MICHAVILA

  Elementos de Análisis Matemático.

  Editado por los autores.

  Madrid 1974.

  Capítulo 4 para un desarrollo general de esta parte.

- E. LINES ESCARDO

  Análisis Matemático II.

  Editado por la U.N.E.D.

  Madrid 1974.

  Capítulo 6 de la Unidad 1 para una introducción al concepto de número complejo.

- A. LOPEZ DE LA RICA, J.F. DE RETANA A.

  Funciones de Variable Compleja.

  Editorial Razón y Fe, S.A.

  Madrid 1968.

  Es útil para una introducción al estudio de los números complejos.

- R. LOSADA RODRIGUEZ

  Análisis Matemático.

  Editorial Pirámide,S.A.

  Madrid 1978.

  Capítulo 3 para un desarrollo general del apartado de números complejos.

  Páginas 315-322 para una introducción al apartado de funciones hiperbólicas.

- N. PISKUNOV

  Cálculo Diferencial e Integral.

  Editorial Montaner y Simón, S.A.

  Barcelona 1978.

  Páginas 255-267 para el estudio completo del apartado de números complejos.

  Página 867 para la demostración de la fórmula de Euler, propuesto como tema de ampliación.

  Páginas 107-110 para el estudio de las funciones hiperbólicas.

- J. REY PASTOR, A. DE CASTRO BRZEZICKI

  Elementos de Matemáticas.

  Novena edición, corregida.

  Editorial S.A.E.T.A.

  Madrid 1981.

  Capítulo 9 para un desarrollo completo del apartado 0.1

- E. TEBAR FLORES

  Problemas de Cálculo Infinitesimal (2 tomos).

  Quinta edición.

  Editorial Tebar Flores.

  Madrid.

  Capítulo 2 para problemas de esta parte.

- G.B. THOMAS, Jr.

  Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica.

  Sexta edición.

  Editorial Aguilar.

  Madrid 1980.

  Capítulos 8 y 19 para ampliación de esta parte.

- L. THOMAS ARA, Mª E. RIOS GARCIA

  Cálculo.

  Editado por el autor.

  Santander 1975.

  Lección 5 para el estudio del número complejo.

  Páginas 141-144 para funciones hiperbólicas.

- A.J. WASHINGTON

  Fundamentos de Matemática con Cálculo.

  Tercera edición.

  Fondo Educativo Iberoamericano.

  E.U.A. 1983.

  Capítulo 11 para el estudio del número complejo y sus aplicaciones.

Relación complementaria.

- R. BRONTE ABAURREA

  Cálculo Infinitesimal e Integral (Topología).

  Editado por el autor.

  Madrid 1977.

- J. DE BURGOS

  Cálculo Infinitesimal (Teoría y Problemas)

  Editorial Alhambra, S.A.

  Madrid 1984.

- F. GRANERO

  Problemas de Cálculo para Ingenieros.

  Editorial URMO, S.A.

  Bilbao 1982.

- J. MARTINEZ SALAS

  Elementos de Matemática.

  Tercera edición.

  Editado por el autor.

  Valladolid 1969.

- R.A.E.C.

  Problemas de Cálculo Infinitesimal.

  Sexta edición (Recopilación Tomos I y II)

  Publicaciones R.A.E.C.

  Madrid 1985.

- J. RIVAUD

  Ejercicios de Análisis (2 tomos).

  Editorial Aguilar.

  Madrid 1975 y 1979.

- W. RUDIN

  Principios de Análisis Matemático.

  Tercera edición.

  Libros McGraw-Hill de México, S.A.

  México 1981.

- W. RUDIN

  Análisis Real y Complejo.

  Editorial Alhambra, S.A.

  Madrid 1985.

- M. SPIVAK

  Calculus. Cálculo Infinitesimal (2 tomos).

  Editorial Reverté, S.A.

  Barcelona 1980.

- L. THOMAS ARA, J.L. REMBADO, Mª E. RIOS GARCIA

  Problemas de Cálculo.

  Editado por el autor.

  Santander 1984.

*** COMENTARIOS.**

Es de gran importancia introducir el campo complejo dadas las aplicaciones técnicas en las que toma parte como aparato matemático, así como en el posterior estudio de funciones de variable compleja, desarrollos en series de Fourier y otras materias con que el alumno se enfrenta en cursos posteriores. Entre sus principales aplicaciones se pueden citar:

- Tratamiento de circuitos eléctricos de corriente alterna monofásica y trifásica.
- En el estudio de campos y ondas electromagnéticas de variación senoidal.
- Tratamiento de señales, utilizando desarrollos en series de Fourier.
- Estudio de máquinas eléctricas.

Conviene destacar la importancia de la forma exponencial del número complejo, dado que las magnitudes físicas que admiten tratamiento complejo suelen ser expresadas de esta manera.

En cuanto a las funciones hiperbólicas, hay que mencionar la nececidad de ser introducidas como una de las funciones trascendentes más importantes. Existen multitud de problemas en los que la solución exacta viene dada por un tipo de estas funciones. Por citar uno de ellos, se puede aludir a la curva descrita por un cable eléctrico que suspende de dos torres de alta tensión.

P A R T E   1

E S P A C I O S   M E T R I C O S :
D E F I N I C I O N   Y   C O N C E P T O S
F U N D A M E N T A L E S

PARTE 1.- ESPACIOS METRICOS: DEFINICION Y CONCEPTOS FUNDAMENTALES.

1.1.- DISTANCIA. CONCEPTO DE ESPACIO METRICO.

1.1.1.- Noción de distancia y semidistancia. Definición de espacio métrico. Ejemplos.

1.1.2.- Espacio métrico producto. Subespacio métrico. Isometría.

1.1.3.- Bolas abiertas. Bolas cerradas. Esferas.

1.1.4.- Diámetro de un conjunto. Conjunto acotado.

1.1.5.- Distancia entre subconjuntos de un espacio métrico.

1.2.- TOPOLOGIA ASOCIADA A UNA DISTANCIA.

1.2.1.- Concepto de topología. Espacios topológicos.

1.2.2.- Distancias topológicamente equivalentes.

1.2.3.- Distancias equivalentes.

1.3.- TOPOLOGIA DE UN ESPACIO METRICO.

1.3.1.- Entornos de un punto.

1.3.2.- Conjuntos abiertos. Conjuntos cerrados.

1.3.3.- Interior, exterior y frontera.

1.3.4.- Adherencia y conjunto derivado. Subconjuntos densos.

1.3.5.- Recubrimiento. Conjuntos compactos.

1.3.6.- Conjuntos conexos. Conjuntos continuos.

1.3.7.- Topología de R. Teoremas fundamentales.

* **OBJETIVOS GENERALES.**

- Mostrar al alumno aquellos conceptos métricos básicos necesarios para la comprensión y generalización del estudio de las funciones fundamentales entre espacios métricos. Asimismo, estos conceptos serán utilizados en el análisis de técnicas numéricas.

* **OBJETIVOS ESPECIFICOS.**

1.1.- DISTANCIA. CONCEPTO DE ESPACIO METRICO.

- Conocer los conceptos de distancia y semidistancia. Exponer diferentes ejemplos.
- Definir los conceptos de espacio y subespacio métrico, y espacio métrico producto.
- Definir el concepto de espacios isométricos.
- Definir los conceptos de bola abierta, cerrada y esfera en un espacio métrico.
- Determinar el diámetro de un conjunto incluído en un espacio métrico.
- Definir el concepto de conjunto acotado.
- Determinar la distancia entre dos subconjuntos de un espacio métrico.

1.2.- TOPOLOGIA ASOCIADA A UNA DISTANCIA.

- Definir el concepto de topología sobre un conjunto. Conocer el concepto de espacio topológico.
- Definir la topología asociada a la distancia en un espacio métrico.
- Determinar si dos distancias definidas sobre un

mismo conjunto son topológicamente equivalentes.

- Determinar si dos distancias definidas sobre un mismo conjunto son equivalentes.
- Razonar que dos distancias equivalentes son topológicamente equivalentes.

1.3.- TOPOLOGIA DE UN ESPACIO METRICO.

- Definir el concepto de entorno de un punto.
- Conocer las propiedades de la unión e intersección de entornos.
- Definir los conceptos de conjunto abierto y cerrado en un espacio métrico.
- Conocer las propiedades de la unión e intersección de conjuntos abiertos y cerrados.
- Definir los conceptos de punto interior e interior de un subconjunto de un espacio métrico.
- Definir los conceptos de punto exterior y exterior de un subconjunto de un espacio métrico.
- Definir los conceptos de punto frontera y frontera de un subconjunto de un espacio métrico.
- Definir los conceptos de punto adherente y adherencia de un subconjunto de un espacio métrico.
- Conocer las relaciones entre interior, exterior, frontera y adherencia de un subconjunto de un espacio métrico.
- Definir los conceptos de punto de acumulación y conjunto derivado de un subespacio métrico.
- Introducir el conceto de punto aislado de un

subconjunto de un espacio métrico.

- Definir el concepto de densidad de conjuntos.
- Conocer el concepto de recubrimiento de un subconjunto de un espacio métrico.
- Definir los conceptos de espacio métrico compacto y parte compacta.
- Caracterizar las partes compactas de un espacio métrico como cerradas y acotadas.
- Enunciar las propiedades de la unión e intersección de compactos.
- Definir los conceptos de espacio métrico conexo y parte conexa.
- Enunciar las propiedades de la unión e intersección de partes conexas.
- Definir el concepto de espacio métrico continuo.
- Definir el concepto de dominio.
- Particularizar los conceptos estudiados a la recta real. Conocer el concepto de intervalo.
- Conocer que la condición necesaria y suficiente para que un subconjunto de R sea compacto es que sea cerrado y acotado (Teorema de Borel-Lebesgue).
- Razonar que todo intervalo cerrado de R es compacto.
- Demostrar que todo subconjunto infinito y acotado de R tiene al menos un punto de acumulación (Teorema de Bolzano-Weierstrass).
- Razonar que las únicas partes conexas de la recta real son los intervalos.

* TEMAS PARA CLASES PRACTICAS.

- Realizar diferentes ejercicios y ejemplos para una mejor comprensión de los conceptos y propiedades que se definen en esta parte. Trabajar con las distancias más usuales, y en especial con los espacios métricos euclídeos.

* TEMAS DE AMPLIACION Y EJERCICIOS PROPUESTOS.

- A aquellos alumnos interesados en esta materia se les propone como tema de ampliación la introducción a los espacios topológicos sin referencia a espacios métricos, lo que supone una mayor generalización de los conceptos estudiados.
- Realizar diferentes ejercicios propuestos en la relación bibliográfica adjunta.

* TEMPORIZACION.

El tiempo invertido en la exposición de la Parte 1 será aproximadamente de dos semanas.

* BIBLIOGRAFIA.

Relación detallada.

- J.M. AMILLO

  Topología: Espacios Métricos.

  Tercera edición.

  Departamento de Publicaciones de la E.T.S.I.T.

  Madrid 1982.

  Capítulos 1,2,3,6,7 y 8 para un desarrollo general de esta parte.

- M. ANZOLA, J. CARUNCHO, G. PEREZ, CANALES

  Problemas de análisis (2 tomos).

  Imprenta Fareso, S.A.

  Madrid 1984.

  Capítulo 2 del Tomo I para problemas de esta parte.

- T.M. APOSTOL

  Análisis Matemático.

  Segunda edición.

  Editorial Reverté, S.A.

  Barcelona 1981.

  Capítulo 3 para un desarrollo general de esta parte.

- B. CALVO, J. DOYEN, A. CALVO, BOSCHET

  Cours d'analyse (6 tomos)

  Librairie Armand Colin.

  Paris 1977.

  Páginas 5-34 del Tomo IV para un estudio y ampliación general de esta parte.

- F. MICHAVILA

  Fundamentos de Cálculo Numérico 1: Topología Métrica.

  Editorial Reverté, S.A.

  Barcelona 1986.

  Se recomienda como libro de apoyo y ampliación de esta parte.

- C. PISOT, M. ZAMANSKY

  Matemáticas Generales. Algebra y Análisis.

  Editorial Montaner y Simon, S.A.

  Barcelona 1966.

  Páginas 225-241 para el estudio del apartado 1.3.7.

- E. TEBAR FLORES

  Problemas de Cálculo Infinitesimal (2 tomos).

  Quinta edición.

  Editorial Tebar Flores.

  Madrid.

  Capítulo 1 para problemas relacionados con esta parte.

- L. THOMAS ARA, Mª E. RIOS GARCIA
  Cálculo.
  Editado por el autor.
  Santander 1975.
  Lección 3 para el estudio del punto 1.3.7.; Topología de R y teoremas fundamentales.

Relación complementaria.

- M.N. BENTABOL, J. MARGALEF, E. OUTERELO, J.L. PINILLA
  Análisis Matemático. Cálculo Diferencial en Espacios Euclídeos.
  Ediciones Pirámide, S.A.
  Madrid 1981.

- F. BOMBAL, L. RODRIGUEZ, G. VERA
  Problemas de Análisis Matemático.1 Cálculo Diferencial.
  Reimpresión.
  Editorial AC.
  Madrid 1985.

- J. DE BURGOS
  Cálculo Infinitesimal (Teoría y Problemas)
  Editorial Alhambra, S.A.
  Madrid 1984.

- J. DIEUDONNE
Fundamentos de Análisis Moderno.
Editorial Reverté, S.A.
Zaragoza 1966.

- F. GARCIA CASTRO, A. GUTIERREZ GOMEZ
Cálculo Infinitesimal-II (2 tomos).
Ediciones Pirámide, S.A.
Madrid 1980-81.

- A.N. KOLMOGOROV, S.V. FOMIN
Elementos de la Teoría de Funciones y Análisis Funcional.
Editorial MIR
Moscú 1978.

- J. LELONG FERRAND, J.M. ARNAUDIES
Curso de Matemáticas. Tomo 2: Análisis.
Editorial Reverté, S.A.
Barcelona 1980.

- E. LINES ESCARDO
Análisis Matemático II.
Editado por la U.N.E.D.
Madrid 1974.

- S. LIPSCHUTZ

  Topología General.

  Libros McGraw-Hill de México, S.A.

  Colombia 1970.

- F. MICHAVILA

  Espacios Métricos. Espacios Vectoriales Normados.

  Editorial AC.

  Madrid 1981.

- W. RUDIN

  Principios de Análisis Matemático.

  Tercera edición.

  Libros McGraw-Hill de México, S.A.

  México 1981.

- A. SARABIA, C. GUTIERREZ CAÑAS

  Cálculo Infinitesimal. Teoría y Problemas.

  Ediciones I.C.A.I.

  Madrid 1974.

- M. ZAMANSKY

  Introducción al Algebra y Análisis Numérico.

  Segunda edición.

  Editorial Montaner y Simón, S.A.

  Barcelona 1967.

* COMENTARIOS.

Esta materia se ha incluído en la primera parte del programa, con el fin de que el alumno adquiera unos conocimientos de partida para el posterior estudio de los conceptos que se abordarán. De esta forma, se podrá dar una mayor generalidad y rigor en la exposición de éstos.

Por otro lado, el estudio en cursos posteriores de Métodos Numéricos obliga a tener conocimientos básicos sobre Espacios Métricos y Análisis Funcional.

En partes sucesivas se introducirán aquellas materias referentes al estudio de Espacios Métricos relacionadas con los objetivos de dichas partes.

P A R T E   2

L I M I T E S

PARTE 2.- LIMITES.

2.1.- LIMITES DE SUCESIONES DE UN ESPACIO METRICO.

2.1.1.- Concepto de sucesión. Subsucesiones.

2.1.2.- Límite de una sucesión. Sucesión convergente.

2.1.3.- Puntos de aglomeración.

2.1.4.- Sucesiones de Cauchy. Propiedades.

2.1.5.- Espacios métricos completos.

2.1.6.- Sucesiones de números reales.

2.1.6.1.- Sucesiones convergentes, divergentes y oscilantes. Propiedades.

2.1.6.2.- Sucesiones acotadas. Sucesiones monótonas.

2.1.6.3.- Límite inferior y superior.

2.1.6.4.- Sucesiones dobles. Matriz de Toeplitz. Aplicaciones al cálculo de límites.

2.1.7.- Introducción a las sucesiones de números complejos. Convergencia.

2.2.- LIMITES DE FUNCIONES ENTRE ESPACIOS METRICOS.

2.2.1.- Concepto de función. Funciones fundamentales.

2.2.2.- Límites de funciones. Existencia y unicidad. Propiedades.

2.2.3.- Límite de una función real de una variable real.

2.2.3.1.- Límites laterales. Límite infinito y límite en el infinito.

2.2.3.2.- Infinitésimos e infinitos.

2.2.4.- Límite de una función real de dos variables reales.

2.2.4.1.- Límite doble. Límites direccionales. Límites iterados.

2.2.5.- Generalización a una función real de n variables reales.

2.2.6.- Límite de una función vectorial de una variable real.

2.2.7.- Límite de una función vectorial de una variable vectorial.

* OBJETIVOS GENERALES.

- En esta parte se pretende presentar los conceptos de límites de suceciones de un espacio métrico y límites de funciones entre espacios métricos.

  Se concretará el estudio de límites de sucesiones de números reales.

* OBJETIVOS ESPECIFICOS.

2.1.- LIMITES DE SUCESIONES DE UN ESPACIO METRICO.

- Introducir los conceptos de sucesión y subsucesiones de un espacio métrico.
- Definir el concepto de límite de una sucesión. Fijar el concepto de sucesión convergente. Demostrar la unicidad del límite de una sucesión convergente.
- Establecer el concepto de punto de aglomeración. Fijar sus relaciones con el punto límite de una sucesión.
- Definir el concepto de sucesión de Cauchy.
- Demostrar que una sucesión convergente es de Cauchy.
- Demostrar que toda sucesión de Cauchy es un conjunto acotado.
- Demostrar que en una sucesión de Cauchy el concepto de punto de aglomeración coincide con el de punto límite.
- Definir el concepto de espacio métrico completo.
- Introducir las sucesiones de números reales, haciendo distinción entre sucesiones convergentes,

divergentes y oscilantes, e indicando las principales propiedades de las mismas.

- Definir el concepto de sucesión acotada superior e inferiormente.
- Definir el concepto de sucesión monótona creciente y decreciente.
- Establecer las propiedades fundamentales de las sucesiones monótonas y acotadas.
- Introducir los conceptos de límite inferior y superior de una sucesión.
- Razonar que en una sucesión de números reales es necesario y suficiente que su límite superior e inferior coincidan para que sea convergente.
- Definir el concepto de sucesión doble.
- Definir la matriz de Toeplitz. Establecer las condiciones en que se cumple el criterio de Toeplitz y deducir a partir de éste los criterios de la media aritmética, de la media geométrica, de la raíz y de Stolz.
- Introducir las sucesiones de números complejos. Establecer el concepto de convergencia. Fijar el criterio general de convergencia de Cauchy.

2.2.- LIMITES DE FUNCIONES ENTRE ESPACIOS METRICOS.

- Definir el concepto de función entre dos espacios métricos. Presentar las funciones fundamentales entre espacios euclídeos: función real de una variable real, función real de dos o más variables reales, función vectorial de una variable real y función vectorial de una variable vectorial.

- Definir el concepto de límite de una función definida entre espacios métricos en un punto.
- Razonar la unicidad del límite en el caso que exista.
- Establecer las propiedades del algebra de límites de funciones.
- Aplicar la definición de límite para una función real de una variable real. Analizar los conceptos de límites laterales, límite infinito y límite en el infinito.
- Definir los conceptos de infinitésimos e infinitos.
- Definir los conceptos de orden y equivalencia de infinitésimos e infinitos.
- Introducir los conceptos de parte principal de un infinitésimo e infinito.
- Establecer las propiedades fundamentales del algebra de infinitésimos e infinitos.
- Aplicar la definición de límite para una función real de dos variables reales; introducir los conceptos de límite doble, límites direccionales y límites iterados. Exponer las diferentes propiedades que relacionan estos límites.
- Plantear diferentes técnicas para el cálculo de límites de funciones de dos variables.
- Aplicar la definición de límite para una función

real de n variables reales, una función vectorial de una variable real y una función vectorial de una variable vectorial.

*** TEMAS PARA CLASES PRACTICAS.**

- Realizar diferentes ejercicios y ejemplos para una *mejor comprensión de los conceptos y propiedades* que se definen en esta parte.
- Aplicar los criterios estudiados al cálculo de límite de sucesiones de números reales (Recordar la definición del número "e" y la fórmula de Stirling).
- Presentar algún caso del estudio de sucesiones de números complejos.
- Resolver distintos problemas del cálculo de límites de funciones reales de una y dos variables reales, utilizando especialmente los conceptos de infinitos e infinitésimos estudiados.
- Demostrar las principales equivalencias entre infinitos, y entre infinitésimos.

*** TEMAS DE AMPLIACION Y EJERCICIOS PROPUESTOS.**

- Profundizar en la teoría de sucesiones de números complejos.
- Realizar diferentes ejercicios sobre el cálculo de límites de sucesiones y funciones propuestos en la bibliografía adjunta.

* **TEMPORIZACION.**

El tiempo invertido en la exposición de la Parte 2 será aproximadamente de dos semanas.

* **BIBLIOGRAFIA.**

Relación detallada.

- J.M. AMILLO
  Topología: Espacios Métricos.
  Tercera edición.
  Departamento de Publicaciones de la E.T.S.I.T.
  Madrid 1982.
  Capítulos 5 y 9 para el estudio de convergencia y los espacios métricos completos.

- T.M. APOSTOL
  Calculus (2 tomos).
  Segunda edición.
  Editorial Reverté, S.A.
  Barcelona 1980.
  Pregunta 8.4 del Tomo II para el estudio del apartado 2.2.7.

- T.M. APOSTOL

  Análisis Matemático.

  Segunda edición.

  Editorial Reverté, S.A.

  Barcelona 1981.

  Páginas 85-93 para el estudio general de esta parte.

- M.N. BENTABOL, J. MARGALEF, E. OUTERELO, J.L. PINILLA

  Análisis Matemático. Cálculo Diferencial en Espacios Euclídeos.

  Ediciones Pirámide, S.A.

  Madrid 1981.

  Páginas 53-61 para el estudio del apartado 2.2.7.

- B. DE DIEGO

  Ejercicios de Análisis (Cálculo Diferencial e Integral)

  Editorial Deimos, S.A.

  Sevilla 1983.

  Capítulo 2 para ejercitarse en límites de sucesiones.

- R. LOSADA RODRIGUEZ

  Análisis Matemático.

  Editorial Pirámide,S.A.

  Madrid 1978.

  Capítulo 4 para el estudio de las sucesiones de números reales y complejos.

  Capítulos 8 y 11 para el estudio del apartado 2.2.

- F. MICHAVILA

  Fundamentos de Cálculo Numérico 1: Topología Métrica.

  Editorial Reverté, S.A.

  Barcelona 1986.

  Páginas 67-73 para el concepto de límite de una sucesión.

  Páginas 109-119 para el estudio de sucesiones de Cauchy y espacios métricos completos.

- J. PUIG

  Análisis Matemático-1.

  Editorial Toray-Masson, S.A.

  Barcelona 1981.

  Páginas 85-87 para el desarrollo de la matriz de Toeplitz.

- J. REY PASTOR, A. DE CASTRO BRZEZICKI

  Elementos de Matemáticas.

  Novena edición, corregida.

  Editorial S.A.E.T.A.

  Madrid 1981.

  Capítulo 11 para el estudio del apartado 2.1.

- W. RUDIN

  Principios de Análisis Matemático.

  Tercera edición.

  Libros McGraw-Hill de México, S.A.

  México 1981.

  Páginas 89-91 para el estudio del apartado 2.2.2.

  Páginas 104-105 para el estudio de límite infinito y límite en el infinito.

- E. TEBAR FLORES

  Problemas de Cálculo Infinitesimal (2 tomos).

  Quinta edición.

  Editorial Tebar Flores.

  Madrid.

  Capítulo 3 para problemas de límites de sucesiones.

  Capítulo 5 para problemas de límites de funciones.

- G.B. THOMAS, Jr.

  Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica.

  Sexta edición.

  Editorial Aguilar.

  Madrid 1980.

  Capítulo 2 para el estudio del apartado 2.2.3.

- L. THOMAS ARA, Mª E. RIOS GARCIA
Cálculo.
Editado por el autor.
Santander 1975.
Lección 4 para el estudio de sucesiones de números reales.

Relación complementaria.

- M. ANZOLA, J. CARUNCHO, G. PEREZ, CANALES
Problemas de análisis (2 tomos).
Imprenta Fareso, S.A.
Madrid 1984.

- F. AYRES, Jr.
Cálculo Diferencial e Integral.
Libros McGraw-Hill (Colección Schaum).
México 1971.

- F. BOMBAL, L. RODRIGUEZ, G. VERA
Problemas de Análisis Matemático.1 Cálculo Diferencial.
Reimpresión.
Editorial AC.
Madrid 1985.

- R. BRONTE ABAURREA

  Cálculo Infinitesimal e Integral (Topología).

  Editado por el autor.

  Madrid 1977.

- J. DE BURGOS

  Cálculo Infinitesimal (Teoría y Problemas)

  Editorial Alhambra, S.A.

  Madrid 1984.

- B. CALVO, J. DOYEN, A. CALVO, BOSCHET

  Cours d'analyse (6 tomos).

  Librairie Armand Colin.

  Paris 1977.

  Volumen IV.

- J. DIEUDONNE

  Fundamentos de Análisis Moderno.

  Editorial Reverté, S.A.

  Zaragoza 1966.

- J.I. ECHARREN, A. PRIMO

  Problemas de Cálculo Infinitesimal.

  Editorial Lex-Nova.

  Valladolid 1975.

- J.M. ESTEFANIA, F. MICHAVILA

  Elementos de Análisis Matemático.

  Editado por los autores.

  Madrid 1974.

- F. GARCIA CASTRO, A. GUTIERREZ GOMEZ

  Cálculo Infinitesimal-II (2 tomos).

  Ediciones Pirámide, S.A.

  Madrid 1980-81.

- A.N. KOLMOGOROV, S.V. FOMIN

  Elementos de la Teoría de Funciones y Análisis Funcional.

  Editorial MIR.

  Moscú 1978.

- J. LELONG FERRAND, J.M. ARNAUDIES

  Curso de Matemáticas. Tomo 2: Análisis.

  Editorial Reverté, S.A.

  Barcelona 1980.

- E. LINES ESCARDO

  Análisis Matemático II.

  Editado por la U.N.E.D.

  Madrid 1974.

- S. LIPSCHUTZ
  Topología General.
  Libros McGraw-Hill de México, S.A.
  Colombia 1970.

- J. MARTINEZ SALAS
  Elementos de Matemática.
  Tercera edición.
  Editado por el autor.
  Valladolid 1969.

- F. MICHAVILA
  Espacios Métricos. Espacios Vectoriales Normados.
  Editorial AC.
  Madrid 1981.

- N. PISKUNOV
  Cálculo Diferencial e Integral.
  Editorial Montaner y Simón, S.A.
  Barcelona 1978.

- M.H. PROTTER, C.B. MORREY
  Análisis Real.
  Editorial AC.
  Madrid 1986.

- R.A.E.C.

  Problemas de Cálculo Infinitesimal.

  Sexta edición (Recopilación Tomos I y II)

  Publicaciones R.A.E.C.

  Madrid 1985.

- A. SARABIA, C. GUTIERREZ CAÑAS

  Cálculo Infinitesimal. Teoría y Problemas.

  Ediciones I.C.A.I.

  Madrid 1974.

- L. THOMAS ARA, J.L. REMBADO, Mª E. RIOS GARCIA

  Problemas de Cálculo.

  Editado por el autor.

  Santander 1984.

*** COMENTARIOS.**

Se puede señalar la importancia del estudio de sucesiones, especialmente las de Cauchy, como fundamento básico del Análisis Funcional más utilizado en el estudio de técnicas numéricas. En este sentido, los conceptos aquí estudiados serán utilizados en la parte siguiente para la demostración del teorema del punto fijo.

El concepto de límite de funciones entre espacios métricos servirá como base para el estudio general de la mayoría de las partes incluídas en el presente Programa.

P A R T E 3

C O N T I N U I D A D

PARTE 3.- CONTINUIDAD.

3.1.- CONTINUIDAD DE FUNCIONES ENTRE ESPACIOS METRICOS.

3.1.1.- Noción de continuidad. Discontinuidad.

3.1.2.- Propiedades fundamentales de la continuidad en espacios métricos.

3.1.3.- Continuidad uniforme. Propiedades.

3.1.4.- Funciones lipschitcianas. Propiedades. Teorema del punto fijo.

3.1.5.- Continuidad y compacticidad. Teorema de Bolzano-Weierstrass. Teorema de Heine.

3.1.6.- Continuidad y conexibilidad. Conexión por arcos.

3.1.7.- Continuidad de funciones compuestas.

3.1.8.- Homeomorfismos entre espacios métricos.

3.2.- CONTINUIDAD DE LAS FUNCIONES FUNDAMENTALES.

3.2.1.- Continuidad de una función real de una variable real.

3.2.1.1.- Continuidad local.

3.2.1.2.- Tipos de discontinuidades.

3.2.1.3.- Teorema de Bolzano.

3.2.2.- Continuidad de una función real de dos variables reales.

3.2.3.- Generalización a una función real de n variables reales.

3.2.3.1.- Teorema de los valores intermedios.

3.2.4.- Continuidad de una función vectorial de una variable real.
3.2.5.- Continuidad de una función vectorial de una variable vectorial.

* OBJETIVOS GENERALES.

- Introducir el concepto de continuidad simple y uniforme de funciones definidas entre espacios métricos. Particularizar para el caso de las funciones fundamentales entre espacios euclídeos.

* OBJETIVOS ESPECIFICOS.

3.1.- CONTINUIDAD DE FUNCIONES ENTRE ESPACIOS METRICOS.

- Definir las nociones de continuidad y discontinuidad de una función en un punto.
- Demostrar la propiedad de caracterización de la continuidad simple en espacios métricos.
- Enunciar y demostrar las principales propiedades de la continuidad simple en espacios métricos.
- Definir el concepto de función uniformemente continua sobre un espacio métrico.
- Deducir la relación existente entre continuidad uniforme y continuidad simple.
- Definir el concepto de aplicación lipschitciana.
- Definir el concepto de contracción.
- Estudiar que toda aplicación lipschitciana es uniformemente continua.
- Definir el concepto de punto fijo de una función.
- Enunciar y demostrar el teorema del punto fijo.
- Demostrar que la imagen de toda aplicación continua definida sobre un compacto es un compacto (Teorema de Bolzano-Weierstrass).

- Demostrar que toda aplicación continua definida sobre un compacto es uniformemente continua (Teorema de Heine).
- Demostrar que la imagen de toda aplicación continua definida sobre un conexo es un conexo.
- Definir el concepto de camino o arco definido sobre un espacio métrico.
- Definir el concepto de trayectoria descrita por un camino o arco definido sobre un espacio métrico.
- Definir el concepto de espacio métrico conexo por arcos o caminos.
- Razonar que todo espacio métrico conexo por arcos es conexo.
- Demostrar la continuidad de la función compuesta de dos funciones continuas.
- Definir el concepto de homeomorfismo entre espacios métricos.
- Demostrar que toda aplicación biyectiva continua de un espacio métrico compacto sobre otro espacio métrico es un homeomorfismo entre dichos espacios.

3.2.- CONTINUIDAD DE LAS FUNCIONES FUNDAMENTALES.

- Particularizar el concepto de continuidad para funciones reales de una variable real.
- Definir el conceto de continuidad local.
- Establecer los distintos tipos de discontinuidades de una función en un punto: 1ª especie, 2ª especie, salto finito e infinito, y evitable.

- Enunciar y demostrar el teorema de Bolzano y su generalización para funciones reales de una variable real.
- Particularización del concepto de continuidad para funciones reales de dos o más variables reales.
- Enunciar y demostrar el teorema de los valores intermedios para funciones reales de n variables reales.
- Particularizar el concepto de continuidad para funciones vectoriales de una variable real.
- Particularizar el concepto de continuidad para funciones vectoriales de una variable vectorial.

*** TEMAS PARA CLASES PRACTICAS.**

- Aplicar el estudio de continuidad simple y uniforme a diferentes funciones particulares.
- Comprobar la verificación de los teoremas estudiados en esta parte en diferentes funciones particulares.

*** TEMAS DE AMPLIACION Y EJERCICIOS PROPUESTOS.**

- Aplicación del teorema del punto fijo a la resolución numérica de ecuaciones de la forma x=f(x).
- Generalización de los conceptos anteriormente estudiados a espacios topológicos.
- Profundizar en el estudio de los espacios métricos conexos por arcos.

* TEMPORIZACION.

El tiempo invertido en la exposición de la Parte 3 será aproximadamente de dos semanas.

* BIBLIOGRAFIA.

Relación detallada.

- J.M. AMILLO
  Topología: Espacios Métricos.
  Tercera edición.
  Departamento de Publicaciones de la E.T.S.I.T.
  Madrid 1982.
  Capítulo 4 para el estudio del apartado 3.1.

- T.M. APOSTOL
  Calculus (2 tomos).
  Segunda edición.
  Editorial Reverté, S.A.
  Barcelona 1980.
  Pregunta 8.4 del Tomo II para el estudio del apartado 3.2.5.

- T.M. APOSTOL

  Análisis Matemático.

  Segunda edición.

  Editorial Reverté, S.A.

  Barcelona 1981.

  Páginas 95-116 para un estudio general de esta parte.

- M.N. BENTABOL, J. MARGALEF, E. OUTERELO, J.L. PINILLA

  Análisis Matemático. Cálculo Diferencial en Espacios Euclídeos.

  Ediciones Pirámide, S.A.

  Madrid 1981.

  Páginas 64-78 para el estudio del apartado 3.2.5.

- J. DE BURGOS

  Cálculo Infinitesimal (Teoría y Problemas).

  Editorial Alhambra, S.A.

  Madrid 1984.

  Capítulo 3 para una introducción a esta parte.

- R. LOSADA RODRIGUEZ

  Análisis Matemático.

  Editorial Pirámide,S.A.

  Madrid 1978.

  Capítulos 9 y 11 para el estudio del apartado 3.2.

- F. MICHAVILA

Fundamentos de Cálculo Numérico 1: Topología Métrica.

Editorial Reverté, S.A.

Barcelona 1986.

Páginas 73-100, 119-124, 153-160 y 177-183 para el estudio del apartado 3.1.

- W. RUDIN

Principios de Análisis Matemático.

Tercera edición.

Libros McGraw-Hill de México, S.A.

México 1981.

Páginas 91-100 para un estudio general de continuidad.

- E. TEBAR FLORES

Problemas de Cálculo Infinitesimal (2 tomos).

Quinta edición.

Editorial Tebar Flores.

Madrid.

Capítulo 6 para problemas del apartado 3.2.1.

- L. THOMAS ARA, Mª E. RIOS GARCIA

Cálculo.

Editado por el autor.

Santander 1975.

Para el estudio de continuidad de las funciones fundamentales.

Relación complementaria.

- M. ANZOLA, J. CARUNCHO, G. PEREZ, CANALES
  Problemas de análisis (2 tomos).
  Imprenta Fareso, S.A.
  Madrid 1984.

- F. BOMBAL, L. RODRIGUEZ, G. VERA
  Problemas de Análisis Matemático.1 Cálculo Diferencial.
  Editorial AC.
  Madrid 1985.

- R. BRONTE ABAURREA
  Cálculo Infinitesimal e Integral (Topología).
  Editado por el autor.
  Madrid 1977.

- B. CALVO, J. DOYEN, A. CALVO, BOSCHET
  Cours d'analyse (6 tomos). Tomo IV.
  Librairie Armand Colin.
  Paris 1977.

- B. DE DIEGO
  Ejercicios de Análisis (Cálculo Diferencial e Integral)
  Tercera Edición.
  Editorial Deimos, S.A.
  Sevilla 1983.

- J.I. ECHARREN, A. PRIMO

  Problemas de Cálculo Infinitesimal.

  Editorial Lex-Nova.

  Valladolid 1975.

- J.M. ESTEFANIA, F. MICHAVILA

  Elementos de Análisis Matemático.

  Editado por los autores.

  Madrid 1974.

- F. GARCIA CASTRO, A. GUTIERREZ GOMEZ

  Cálculo Infinitesimal-II (2 tomos).

  Ediciones Pirámide, S.A.

  Madrid 1980-81.

- F. GRANERO

  Problemas de Cálculo para Ingenieros.

  Editorial URMO, S.A.

  Bilbao 1982.

- A.N. KOLMOGOROV, S.V. FOMIN

  Elementos de la Teoría de Funciones y Análisis Funcional.

  Editorial MIR.

  Moscú 1978.

- J. LELONG FERRAND, J.M. ARNAUDIES
  Curso de Matemáticas. Tomo 2: Análisis.
  Editorial Reverté, S.A.
  Barcelona 1980.

- E. LINES ESCARDO
  Análisis Matemático II.
  Editado por la U.N.E.D.
  Madrid 1974.

- S. LIPSCHUTZ
  Topología General.
  Libros McGraw-Hill de México, S.A.
  Colombia 1970.

- J. MARTINEZ SALAS
  Elementos de Matemática.
  Tercera edición.
  Editado por el autor.
  Valladolid 1969.

- F. MICHAVILA
  Espacios Métricos. Espacios Vectoriales Normados.
  Editorial AC.
  Madrid 1981.

- N. PISKUNOV

  Cálculo Diferencial e Integral.

  Editorial Montaner y Simón, S.A.

  Barcelona 1978.

- M.H. PROTTER, C.B. MORREY

  Análisis Real.

  Editorial AC.

  Madrid 1986.

- R.A.E.C.

  Problemas de Cálculo Infinitesimal.

  Sexta edición (Recopilación Tomos I y II).

  Publicaciones R.A.E.C.

  Madrid 1985.

- J. REY PASTOR, A. DE CASTRO BRZEZICKI

  Elementos de Matemáticas.

  Novena edición, corregida.

  Editorial S.A.E.T.A.

  Madrid 1981.

- A. SARABIA, C. GUTIERREZ CAÑAS

  Cálculo Infinitesimal. Teoría y Problemas.

  Ediciones I.C.A.I.

  Madrid 1974.

- G.B. THOMAS, Jr.
  Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica.
  Sexta edición.
  Editorial Aguilar.
  Madrid 1980.

- L. THOMAS ARA, J.L. REMBADO, Mª E. RIOS GARCIA
  Problemas de Cálculo.
  Editado por el autor.
  Santander 1984.

*** COMENTARIOS.**

En esta parte se generaliza el concepto de continuidad sobre la recta real que ya posee el alumno, a espacios métricos cualesquiera, prestando especial interés a aquellas propiedades de la continuidad que posteriormente deberá manejar el alumno en el análisis de diferenciación y estudio local de funciones, básicamente.

Se ha introducido también el teorema del punto fijo debido a su gran utilidad en el estudio de técnicas numéricas, tales como resolución de ecuaciones y sistemas.

P A R T E 4

D I F E R E N C I A C I O N

PARTE 4.- DIFERENCIACION.

4.1.- INTRODUCCION A LOS ESPACIOS VECTORIALES NORMADOS.

4.1.1.- Norma y seminorma. Concepto de espacio vectorial normado.

4.1.2.- Topología asociada a la norma. Normas equivalentes.

4.1.3.- Espacios de Banach.

4.1.4.- Aplicaciones lineales continuas entre espacios vectoriales normados. Propiedades.

4.1.5.- El espacio de las aplicaciones lineales continuas.

4.2.- DIFERENCIACION DE FUNCIONES ENTRE ESPACIOS VECTORIALES NORMADOS DE DIMENSION FINITA.

4.2.1.- Definición de la diferencial de una función en un punto. Unicidad. Función diferencial.

4.2.2.- Condición necesaria para la existencia de la diferencial de una función.

4.2.3.- Linealidad de la diferencial.

4.2.4.- Diferencial de la función compuesta.

4.3.- DIFERENCIACION DE LAS FUNCIONES FUNDAMENTALES.

4.3.1.- Diferenciación de una función real de una variable real.

4.3.1.1.- Concepto de derivada total en un punto a partir de la definición de diferencial.

4.3.1.2.- Derivadas laterales.

4.3.1.3.- Función derivada. Propiedades.

4.3.1.4.- Interpretación geométrica de la derivada y la diferencial.

4.3.1.5.- Cálculo de derivadas elementales.

4.3.1.6.- Derivadas y diferenciales sucesivas.

4.3.2.- Diferenciación de una función real de dos variables reales.

4.3.2.1.- Concepto de derivada parcial en un punto a partir de la definición de diferencial. Derivadas direccionales.

4.3.2.2.- Interpretación geométrica de la derivada parcial y la diferencial. Plano tangente a una superficie en un punto.

4.3.2.3.- Función derivada parcial. Propiedades.

4.3.2.4.- Derivadas y diferenciales sucesivas. Teorema de Schwarz.

4.3.2.5.- Cálculo de derivadas y diferenciales de funciones compuestas.

4.3.2.6.- Concepto de función homogénea. Propiedades. Teorema de Euler generalizado.

4.3.2.7.- Derivadas de funciones implícitas.

4.3.2.8.- Cambios de variables.

4.3.3.- Generalización a una función real de n variables reales.

4.3.4.- Diferenciación de una función vectorial de una variable real.

4.3.4.1.- Concepto de derivada total en un punto a partir de la definición de diferencial. Función derivada.

4.3.4.2.- Interpretación geométrica en el espacio euclídeo tridimensional. Recta tangente a una curva alabeada.

4.3.5.- Diferenciación de una función vectorial de una variable vectorial.

4.3.5.1.- Concepto de funciones componentes. Matriz jacobiana. Propiedades.

4.3.5.2.- Derivación de funciones implícitas definidas en un sistema de ecuaciones.

4.3.5.3.- Derivación de funciones compuestas. Regla de la cadena.

* OBJETIVOS GENERALES.

- Introducir los conceptos de espacios vectoriales normados necesarios para estudiar la diferenciación.
- Establecer el concepto de diferencial de funciones entre espacios vectoriales normados de dimensión finita y particularizar para las funciones fundamentales entre espacios euclídeos.
- Que el alumno sepa aplicar el estudio de cálculo de derivadas y diferenciales de funciones.

* OBJETIVOS ESPECIFICOS.

4.1.- INTRODUCCION A LOS ESPACIOS VECTORIALES NORMADOS.

- Conocer el concepto de norma y seminorma.
- Definir los conceptos de espacio vectorial normado y subespacio vectorial normado.
- Definir el concepto de distancia asociada a una norma.
- Definir el concepto de topología asociada a una norma.
- Demostrar que toda norma es una aplicación lipschitciana.
- Enunciar y demostrar la propiedad de invarianza respecto a la traslación en los espacios vectoriales normados.
- Enunciar y demostrar la propiedad de homotecia en los espacios vectoriales normados.
- Fijar el concepto de norma asociada a la distancia.

- Definir el concepto de normas equivalentes.
- Enunciar la condición necesaria y suficiente para la equivalencia de normas.
- Enunciar la propiedad de que en un espacio vectorial de dimensión finita todas las normas que se definan sobre él son equivalentes.
- Definir el concepto de espacio de Banach.
- Deducir si un espacio vectorial normado dado es un espacio de Banach o no.
- Definir el concepto de aplicación lineal entre espacios vectoriales normados.
- Demostrar que en un espacio vectorial normado de dimensión finita todas las aplicaciones lineales que sobre él se puedan definir son además continuas.
- Demostrar la condición necesaria y suficiente de continuidad de las aplicaciones lineales entre espacios vectoriales normados.
- Definir el conjunto de las aplicaciones lineales y continuas Lc(E,F) , entre espacios vectoriales normados. Demostrar que es un espacio vectorial.
- Definir la norma usual sobre Lc(E,F).
- Definir el espacio vectorial normado de las aplicaciones lineales y continuas.
- Enunciar la propiedad de que el espacio vectorial normado de las aplicaciones lineales y continuas de un espacio vectorial normado sobre un Banach, es un Banach.

4.2.- DIFERENCIACION DE FUNCIONES ENTRE ESPACIOS VECTORIALES NORMADOS DE DIMENSION FINITA.

- Definir el concepto de diferencial en un punto de función entre espacios vectoriales normados de dimensión finita.
- Demostrar que si existe la diferencial, es única.
- Definir el concepto de función diferencial de una función entre dos espacios vectoriales normados de dimensión finita.
- Demostrar que si existe la diferencial de una función en un punto, necesariamente la función es continua en dicho punto.
- Demostrar que la diferencial cumple las propiedades de linealidad.
- Demostrar la expresión de la diferencial de una función compuesta (Regla de la cadena).

4.3.- DIFERENCIACION DE LAS FUNCIONES FUNDAMENTALES.

- Particularización del concepto de diferencial a una función real de una variable real.
- Definir el concepto de derivada total de una función en un punto a partir de la definición de diferencial.
- Introducir el concepto de derivada lateral de una función en un punto.
- Definir el concepto de función derivada total.
- Demostrar que la derivada total cumple la propiedad de linealidad.
- Interpretar gráficamente la derivada y diferencial.

- Recordar la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto.
- Recordar el cálculo de las derivadas elementales.
- Definir y analizar los conceptos de derivadas y diferenciales sucesivas.
- Particularización del concepto de diferencial a una función real de dos variables reales.
- Definir el concepto de derivada parcial de una función en un punto a partir de la definición de diferencial.
- Introducir el concepto de derivada direccional.
- Interpretar geométricamente los valores de las derivadas parciales y de la diferencial.
- Demostrar la ecuación del plano tangente a una superficie en un punto.
- Definir el concepto de función derivada parcial.
- Demostrar que la derivada parcial cumple la propiedad de linealidad.
- Definir y analizar los conceptos de derivada parcial y diferenciales sucesivas. Enunciar el teorema de Schwarz.
- Analizar distintos casos de cálculo de derivadas parciales y diferenciales de funciones compuestas. Establecer los árboles de dependencia.
- Definir el concepto de función homogénea.
- Introducir las principales propiedades de las funciones homogéneas.

- Demostrar el teorema de Euler generalizado.
- Recordar el concepto de función implícita.
- Analizar diversos casos de derivadas de funciones implícitas definidas por una ecuación.
- Analizar los casos más frecuentes de cambios de variables independientes y/o función en expresiones diferenciales.
- Generalizar los conceptos relativos a diferenciación estudiados en funciones reales de dos variables reales a funciones reales de n variables reales.
- Particularizar el concepto de diferencial para una función vectorial de variable real.
- Definir el concepto de derivada total en un punto a partir de la definición de diferencial.
- Definir el concepto de función derivada total de una función vectorial de una variable real.
- Interpretar geométricamente los valores de la derivada y diferencial de una función vectorial de una variable real en un punto (espacio euclídeo tridimensional).
- Deducir la ecuación de la recta tangente a una curva alabeada en un punto.
- Particularización del concepto de diferencial a una función vectorial de una variable vectorial.
- Recordar el concepto de funciones componentes.
- Introducir la matriz jacobiana y sus propiedades fundamentales.

- Analizar el estudio de derivadas de funciones implícitas definidas por un sistema de ecuaciones.
- Analizar la matriz jacobiana de una función compuesta de dos funciones vectoriales de una variable vectorial (Regla de la cadena).

*** TEMAS PARA CLASES PRACTICAS.**

- Determinar si una aplicación definida en un espacio vectorial y sobre el cuerpo de los números reales es una norma o seminorma.
- Determinar si una función es o no diferenciable en un punto.
- Calcular derivadas y diferenciales sucesivas de funciones fundamentales simples y compuestas.
- Realizar diversas aplicaciones del teorema de Euler para funciones homogéneas.
- Calcular derivadas y diferenciales sucesivas de funciones implícitas definidas por una o varias ecuaciones.
- Realizar diferentes ejercicios de cambios de variable atendiendo especialmente a ecuaciones con carácter físico o geométrico. Por ejemplo, transformar la ecuación de Laplace en dos dimensiones a coordenadas polares, simplificar la ecuación de onda,...

* TEMAS DE AMPLIACION Y EJERCICIOS PROPUESTOS.

- Ampliar el estudio de espacios vectoriales normados a espacios prehilbertianos y de Hilbert.
- Demostrar el teorema de Schwarz.
- Analizar el teorema de las funciones implícitas.
- Realizar ejercicios propuestos en la relación bibliográfica adjunta en materias referentes a los temas indicados para clases prácticas.

* TEMPORIZACION.

El tiempo invertido en la exposición de la Parte 4 será aproximadamente de cuatro semanas.

* BIBLIOGRAFIA.

Relación detallada.

- T.M. APOSTOL
  Calculus (2 tomos).
  Segunda edición.
  Editorial Reverté, S.A.
  Barcelona 1980.
  Páginas 308-342 para un desarrollo general de los apartados 4.3.2, 4.3.3, 4.3.4 y 4.3.5.

- T.M. APOSTOL
  Análisis Matemático.
  Segunda edición.
  Editorial Reverté, S.A.
  Barcelona 1981.
  Páginas 125-129 para el estudio del apartado 4.3.1.
  Capítulos 12 y 13 para el estudio de los apartados 4.3.2, 4.3.3 y 4.3.5.

- M.N. BENTABOL, J. MARGALEF, E. OUTERELO, J.L. PINILLA
  Análisis Matemático. Cálculo Diferencial en Espacios Euclídeos.
  Ediciones Pirámide, S.A.
  Madrid 1981.
  Capítulo 3 para el desarrollo teórico-práctico de los apartados 4.3.2 y 4.3.3.

- B. CALVO, J. DOYEN, A. CALVO, BOSCHET
  Cours d'analyse (6 tomos)
  Librairie Armand Colin.
  Paris 1977.
  Páginas 34-41 del Tomo IV para el estudio y ampliación del apartado 4.1.
  Páginas 49-67 del Tomo IV para el estudio y ampliación del apartado 4.2.

- J. LELONG FERRAND, J.M. ARNAUDIES
  Curso de Matemáticas. Tomo 2: Análisis.
  Editorial Reverté, S.A.
  Barcelona 1980.
  Páginas 130-135 para el estudio del apartado 4.1.
  Capítulos 4, 5 y 6 para el desarrollo del apartado 4.3.

- R. LOSADA RODRIGUEZ
  Análisis Matemático.
  Editorial Pirámide,S.A.
  Madrid 1978.
  Capítulos 10 y 12 para el desarrollo del apartado 4.3.

- J.L. MATAIX PLANA
  Problemas de Complementos de Cálculo Algebraico y de Cálculo Diferencial (2 tomos).
  Séptima edición.
  Editorial Dossat, S.A.
  Madrid 1967.
  Tomo II para problemas de funciones implícita y cambios de variables.

- F. MICHAVILA
  Fundamentos de Cálculo Numérico 1: Topología Métrica.
  Editorial Reverté, S.A.
  Barcelona 1986.
  Capítulo 7 para el estudio y ampliación del punto 4.1.

- L. THOMAS ARA, Mª E. RIOS GARCIA
Cálculo.
Editado por el autor.
Santander 1975.
Para el estudio de derivabilidad de las funciones fundamentales.

Relación complementaria.

- M. ANZOLA, J. CARUNCHO, G. PEREZ, CANALES
Problemas de análisis (2 tomos).
Imprenta Fareso, S.A.
Madrid 1984.

- F. AYRES, Jr.
Cálculo Diferencial e Integral.
Libros McGraw-Hill (Colección Schaum).
México 1971.

- F. BOMBAL, L. RODRIGUEZ, G. VERA
Problemas de Análisis Matemático.1 Cálculo Diferencial.
Reimpresión.
Editorial AC.
Madrid 1985.

- R. BRONTE ABAURREA

  Cálculo Infinitesimal e Integral (Topología).

  Editado por el autor.

  Madrid 1977.

- J. DE BURGOS

  Cálculo Infinitesimal (Teoría y Problemas)

  Editorial Alhambra, S.A.

  Madrid 1984.

- B.P. DEMIDOVICH

  5.000 Problemas de Análisis Matemático.

  Tercera edición.

  Editorial Paraninfo.

  Madrid 1985.

- J. DIEUDONNE

  Fundamentos de Análisis Moderno.

  Editorial Reverté, S.A.

  Zaragoza 1966.

- B. DE DIEGO

  Ejercicios de Análisis (Cálculo Diferencial e Integral)

  Tercera Edición.

  Editorial Deimos, S.A.

  Sevilla 1983.

- J.M. ESTEFANIA, F. MICHAVILA

  Elementos de Análisis Matemático.

  Editado por los autores.

  Madrid 1974.

- F. GARCIA CASTRO, A. GUTIERREZ GOMEZ

  Cálculo Infinitesimal-II (2 tomos).

  Ediciones Pirámide, S.A.

  Madrid 1980-81.

- F. GRANERO

  Problemas de Cálculo para Ingenieros.

  Editorial URMO, S.A.

  Bilbao 1982.

- A.N. KOLMOGOROV, S.V. FOMIN

  Elementos de la Teoría de Funciones y Análisis Funcional.

  Editorial MIR

  Moscú 1978.

- E. LINES ESCARDO

  Análisis Matemático II.

  Editado por la U.N.E.D.

  Madrid 1974.

- S. LIPSCHUTZ

  Topología General.

  Libros McGraw-Hill de México, S.A.

  Colombia 1970.

- J. MARTINEZ SALAS

  Elementos de Matemática.

  Tercera edición.

  Editado por el autor.

  Valladolid 1969.

- F. MICHAVILA

  Espacios Métricos. Espacios Vectoriales Normados.

  Editorial AC.

  Madrid 1981.

- MURRAY R. SPIEGEL

  Cálculo Superior.

  Libros McGraw-Hill (Colección Schaum).

  México 1969.

- N. PISKUNOV

  Cálculo Diferencial e Integral.

  Editorial Montaner y Simón, S.A.

  Barcelona 1978.

- M.H. PROTTER, C.B. MORREY
  Análisis Real.
  Editorial AC.
  Madrid 1986.

- R.A.E.C.
  Problemas de Cálculo Infinitesimal.
  Sexta edición (Recopilación Tomos I y II)
  Publicaciones R.A.E.C.
  Madrid 1985.

- J. REY PASTOR, A. DE CASTRO BRZEZICKI
  Elementos de Matemáticas.
  Novena edición, corregida.
  Editorial S.A.E.T.A.
  Madrid 1981.

- J. RIVAUD
  Ejercicios de Análisis (2 tomos).
  Editorial Aguilar.
  Madrid 1975 y 1979.

- W. RUDIN
  Principios de Análisis Matemático.
  Tercera edición.
  Libros McGraw-Hill de México, S.A.
  México 1981.

- A. SARABIA, C. GUTIERREZ CAÑAS
  Cálculo Infinitesimal. Teoría y Problemas.
  Ediciones I.C.A.I.
  Madrid 1974.

- M. SPIVAK
  Calculus. Cálculo Infinitesimal (2 tomos).
  Editorial Reverté, S.A.
  Barcelona 1980.

- S.K. STEIN
  Cálculo y Geometría Analítica.
  Tercera edición.
  Libros McGraw-Hill de México, S.A.
  México 1984.

- E. TEBAR FLORES
  Problemas de Cálculo Infinitesimal (2 tomos).
  Quinta edición.
  Editorial Tebar Flores.
  Madrid.

- G.B. THOMAS, Jr.
  Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica.
  Sexta edición.
  Editorial Aguilar.
  Madrid 1980.

- L. THOMAS ARA, J.L. REMBADO, Mª E. RIOS GARCIA
  Problemas de Cálculo.
  Editado por el autor.
  Santander 1984.

- T. WONNACOTT
  Aplicaciones del Cálculo Diferencial e Integral.
  Primera edición.
  Editorial Limusa, S.A.
  México 1983.

- M. ZAMANSKY
  Introducción al Algebra y Análisis Numérico.
  Segunda edición.
  Editorial Montaner y Simón, S.A.
  Barcelona 1967.

*** COMENTARIOS.**

Hasta ahora se han estudiado materias necesarias para la introducción de la diferenciación de funciones.

El estudio de la diferenciación de funciones forma parte de una de las materias básicas para el ingeniero industrial. En efecto, dado que gran parte de los problemas físicos admiten formulación diferencial, y por tanto ésta aparece en otras asignaturas, es muy importante que el alumno domine perfectamente el concepto e interpretación de la diferencial, así como las técnicas más comunes utilizadas en diferenciación.

Entre las aplicaciones más interesantes de esta parte podemos señalar el cálculo fundamental de derivadas y diferenciales de funciones y el estudio de cambios de variables en expresiones diferenciales. Este último tiene muchas aplicaciones en lo referente a la simplificación de expresiones que representan diversos problemas de la ingeniería.

La introducción realizada a espacios vectoriales normados, constituye por otro lado una de las materias básicas para el desarrollo de diferentes técnicas numéricas.

Una vez desarrollados y comprendidos los conceptos relativos a la diferenciación de funciones, se está en disposición de abordar el análisis de las partes propuestas a continuación en el presente programa: estudio local de funciones, estudio de curvas, series, integración y ecuaciones diferenciales.

P A R T E 5

E S T U D I O L O C A L

D E

L A S F U N C I O N E S F U N D A M E T A L E S

PARTE 5.- ESTUDIO LOCAL DE LAS FUNCIONES FUNDAMENTALES.

5.1.- FUNCION REAL DE UNA VARIABLE REAL.

5.1.1.- Teoremas del valor medio.

5.1.1.1.- Teorema de Rolle.

5.1.1.2.- Teorema de Lagrange o de los incrementos finitos.

5.1.1.3.- Teorema del valor medio generalizado o de Cauchy.

5.1.2.- Indeteterminaciones.

5.1.2.1.- Regla de L'Hopital. Generalización.

5.1.2.2.- Cálculo de límites indeterminados.

5.1.3.- Fórmula de Taylor.

5.1.3.1.- Obtención de la fórmula de Taylor.

5.1.3.2.- Término complementario de Lagrange.

5.1.3.3.- Fórmula de Mac-Laurin.

5.1.3.4.- Aplicaciones.

5.1.3.4.1.- Cálculo de funciones trascendentes.

5.1.3.4.2.- Aproximación lineal. Error cometido.

5.1.3.4.3.- Obtención de infinitésimos equivalentes.

5.1.3.4.4.- Cálculo de límites indeterminados.

5.1.4.- Estudio de variaciones.

5.1.4.1.- Crecimiento y decrecimiento.

5.1.4.2.- Máximos y mínimos absolutos y relativos.

5.1.4.3.- Concavidad y convexidad. Punto de infexion.

5.1.4.4.- Condiciones necesarias y suficientes de existencia de extremo y punto de inflexión.

5.2.- FUNCION REAL DE DOS VARIABLES REALES.

5.2.1.- Teorema del valor medio.

5.2.2.- Fórmula de Taylor. Aplicaciones.

5.2.3.- Máximos y mínimos libres. Hessiano.

5.3.- FUNCION REAL DE N VARIABLES REALES.

5.3.1.- Generalización del teorema del valor medio.

5.3.2.- Generalización de la fórmula de Taylor.

5.3.3.- Máximos y mínimos libres y condicionados. Multiplicadores de Lagrange.

5.4.- FUNCION VECTORIAL DE UNA VARIABLE REAL.

5.4.1.- Fórmula de Taylor. Aplicaciones.

5.5.- FUNCION VECTORIAL DE UNA VARIABLE VECTORIAL.

5.5.1.- Fórmula de Taylor. Aplicaciones.

* OBJETIVOS GENERALES.

- Introducir el estudio local de las funciones fundamentales (entre espacios euclídeos): función real de una variable real, función real de dos o más variables reales, función vectorial de una variable real y función vectorial de una variable vectorial.

* OBJETIVOS ESPECIFICOS.

5.1.- FUNCION REAL DE UNA VARIABLE REAL.

- Introducir los teoremas del valor medio.
- Enunciar, demostrar e interpretar geométricamente el teorema de Rolle.
- Enunciar, demostrar e interpretar geométricamente el teorema de Lagrange o de los incrementos finitos. Comprobar que es una generalización del teorema de Rolle.
- Enunciar y demostrar el teorema del valor medio generalizado o de Cauchy. Comprobar que a partir de éste se pueden deducir como casos particulares los dos anteriores.
- Obtener la regla de L'Hopital a partir del teorema de Cauchy, para indeterminaciones de la forma cero partido por cero. Generalizar dicha regla para indeterminaciones de la forma infinito partido por infinito.
- Analizar y establecer la manera de abordar las indeterminaciones de la forma: cero por infinito,

infinito menos infinito, infinito elevado a cero, cero elevado a cero y uno elevado a infinito.

- Deducir la expresión de la fórmula de Taylor para una función y=f(x) en un entorno del punto x=a.
- Obtener el término complementario de Lagrange. Saber su relación con el error cometido al aproximar la función y=f(x) tomando n términos de su desarrollo.
- Conocer la fórmula de Mac-Laurin. Particularización de la fórmula de Taylor en un entorno del punto x=0.
- Analizar diferentes aplicaciones de la fórmula de Taylor: cálculo de funciones trascendentes, aproximación lineal (interpretación geométrica y error cometido), obtención de infinitésimos equivalentes, cálculo de límites indeterminados.
- Definir los conceptos de crecimiento y decrecimiento determinando su relación con la derivada primera. Interpretación geométrica.
- Definir los conceptos de máximo y mínimo absoluto y relativo de una función.
- Definir los conceptos de concavidad y convexidad. Determinar su relación con la derivada segunda. Interpretar geométricamente.
- Definir el concepto de punto de inflexión.
- Deducir las condiciones necesarias y suficientes de existencia de extremo y punto de inflexión a partir de la fórmula de Taylor. Analizar la posición relativa de la función respecto a la recta tangente.

5.2.- FUNCION REAL DE DOS VARIABLES REALES.

- Enunciar y demostrar el teorema del valor medio.
- Deducir la expresión de la fórmula de Taylor a partir de la fórmula de las funciones reales de una variable real.
- Aplicar la fórmula de Taylor al cálculo de errores cometidos en la obtención de magnitudes físicas a partir de medidas realizadas.
- Deducir las condiciones necesarias y suficientes de existencia de máximo y mínimo relativo a partir de la fórmula de Taylor.
- Introducir el Hessiano.
- Analizar la posición relativa de la función respecto del plano tangente.

5.3.- FUNCION REAL DE N VARIABLES REALES.

- Enunciar y demostrar el teorema del valor medio.
- Generalizar la fórmula de Taylor para funciones reales de n variables reales. Aplicación al cálculo de errores.
- Introducir el estudio de máximos y mínimos libres.
- Definir el concepto de extremo condicionado.
- Describir y aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange para el cálculo de extremo condicionado con ecuaciones de tipo igualdad.

5.4.- FUNCION VECTORIAL DE UNA VARIABLE REAL.

- Plantear la fórmula de Taylor. Aplicar a diferentes funciones.

5.5.- FUNCION VECTORIAL DE UNA VARIABLE VECTORIAL.

- Plantear la fórmula de Taylor. Aplicar a diferentes funciones.

*** TEMAS PARA CLASES PRACTICAS.**

- Diferentes aplicaciones de los teoremas del valor medio.
- Resolver ejercicios de límites indeterminados.
- Realizar las aplicaciones de la fórmula de Taylor y Mac-Laurin mencionadas en los objetivos específicos.
- Resolver ejercicios de máximos y mínimos relativos libres y condicionados, estudiando especialmente problemas de la ingeniería: minimización de costes, maximización o minimización de diversas magnitudes.

*** TEMAS DE AMPLIACION Y EJERCICIOS PROPUESTOS.**

- Generalizar el teorema del valor medio para funciones vectoriales.
- Proponer ejercicios de toda esta parte, referenciados en la relación bibliográfica detallada.
- Plantear el cálculo de extremos condicionados con ecuaciones de tipo desigualdad.

*** TEMPORIZACION.**

El tiempo invertido en la exposición de la Parte 5 será aproximadamente de dos semanas.

*** BIBLIOGRAFIA.**

Relación detallada.

- T.M. APOSTOL

  Calculus (2 tomos).

  Segunda edición.

  Editorial Reverté, S.A.

  Barcelona 1980.

  Páginas 369-391 para estudiar los apartados 5.2 y 5.3.

- T.M. APOSTOL

  Análisis Matemático.

  Segunda edición.

  Editorial Reverté, S.A.

  Barcelona 1981.

  Páginas 130-146 para el estudio del apartado 5.1.

  Páginas 437-439 para el estudio del apartado 5.3.2.

  Páginas 456-466 para el estudio del apartado 5.3.3.

- M.N. BENTABOL, J. MARGALEF, E. OUTERELO, J.L. PINILLA

  Análisis Matemático. Cálculo Diferencial en Espacios Euclídeos.

  Ediciones Pirámide, S.A.

  Madrid 1981.

  Páginas 195-198 para desarrollo del apartado 5.3.1.

  Capítulo 5 para el desarrollo general de los apartados 5.2, 5.3, 5.4 y 5.5.

- B. CALVO, J. DOYEN, A. CALVO, BOSCHET
  Cours d'analyse (6 tomos).
  Librairie Armand Colin.
  Paris 1977.
  Páginas 109-120 del Tomo IV para estudio y ampliación de los apartados 5.2, 5.3, 5.4 y 5.5.

- E. TEBAR FLORES
  Problemas de Cálculo Infinitesimal (2 tomos).
  Quinta edición.
  Editorial Tebar Flores.
  Madrid.
  Capítulos 8, 9 y 11 para problemas relacionados con esta parte.

- L. THOMAS ARA, Mª E. RIOS GARCIA
  Cálculo.
  Editado por el autor.
  Santander 1975.
  Para un primer estudio de casi toda esta parte.

Relación complementaria.

- M. ANZOLA, J. CARUNCHO, G. PEREZ, CANALES
  Problemas de análisis (2 tomos).
  Imprenta Fareso, S.A.
  Madrid 1984.

- F. BOMBAL, L. RODRIGUEZ, G. VERA

  Problemas de Análisis Matemático.1 Cálculo Diferencial.

  Reimpresión.

  Editorial AC.

  Madrid 1985.

- R. BRONTE ABAURREA

  Cálculo Infinitesimal e Integral (Topología).

  Editado por el autor.

  Madrid 1977.

- J. DE BURGOS

  Cálculo Infinitesimal (Teoría y Problemas)

  Editorial Alhambra, S.A.

  Madrid 1984.

- B.P. DEMIDOVICH

  5.000 Problemas de Análisis Matemático.

  Tercera edición.

  Editorial Paraninfo.

  Madrid 1985.

- B. DE DIEGO

  Ejercicios de Análisis (Cálculo Diferencial e Integral)

  Tercera Edición.

  Editorial Deimos, S.A.

  Sevilla 1983.

- J.M. ESTEFANIA, F. MICHAVILA
  Elementos de Análisis Matemático.
  Editado por los autores.
  Madrid 1974.

- F. GARCIA CASTRO, A. GUTIERREZ GOMEZ
  Cálculo Infinitesimal-II (2 tomos).
  Ediciones Pirámide, S.A.
  Madrid 1980-81.

- F. GRANERO
  Problemas de Cálculo para Ingenieros.
  Editorial URMO, S.A.
  Bilbao 1982.

- A.N. KOLMOGOROV, S.V. FOMIN
  Elementos de la Teoría de Funciones y Análisis Funcional.
  Editorial MIR.
  Moscú 1978.

- J. LELONG FERRAND, J.M. ARNAUDIES
  Curso de Matemáticas. Tomo 2: Análisis.
  Editorial Reverté, S.A.
  Barcelona 1980.

- E. LINES ESCARDO
  Análisis Matemático II.
  Editado por la U.N.E.D.
  Madrid 1974.

- R. LOSADA RODRIGUEZ
  Análisis Matemático.
  Editorial Pirámide,S.A.
  Madrid 1978.

- J. MARTINEZ SALAS
  Elementos de Matemática.
  Tercera edición.
  Editado por el autor.
  Valladolid 1969.

- J.L. MATAIX PLANA
  Problemas de Complementos de Cálculo Algebraico y de Cálculo Diferencial (2 tomos).
  Séptima edición.
  Editorial Dossat, S.A.
  Madrid 1967.

- MURRAY R. SPIEGEL
  Cálculo Superior.
  Libros McGraw-Hill (Colección Schaum).
  México 1969.

- N. PISKUNOV

  Cálculo Diferencial e Integral.

  Editorial Montaner y Simón, S.A.

  Barcelona 1978.

- R.A.E.C.

  Problemas de Cálculo Infinitesimal.

  Sexta edición (Recopilación Tomos I y II).

  Publicaciones R.A.E.C.

  Madrid 1985.

- J. REY PASTOR, A. DE CASTRO BRZEZICKI

  Elementos de Matemáticas.

  Novena edición, corregida.

  Editorial S.A.E.T.A.

  Madrid 1981.

- J. RIVAUD

  Ejercicios de Análisis (2 tomos).

  Editorial Aguilar.

  Madrid 1975 y 1979.

- W. RUDIN

  Principios de Análisis Matemático.

  Tercera edición.

  Libros McGraw-Hill de México, S.A.

  México 1981.

- A. SARABIA, C. GUTIERREZ CAÑAS
Cálculo Infinitesimal. Teoría y Problemas.
Ediciones I.C.A.I.
Madrid 1974.

- S.K. STEIN
Cálculo y Geometría Analítica.
Tercera edición.
Libros McGraw-Hill de México, S.A.
México 1984.

- G.B. THOMAS, Jr.
Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica.
Sexta edición.
Editorial Aguilar.
Madrid 1980.

- L. THOMAS ARA, J.L. REMBADO, Mª E. RIOS GARCIA
Problemas de Cálculo.
Editado por el autor.
Santander 1984.

*** COMENTARIOS.**

En esta parte hay que destacar especialmente la importancia que posee el desarrollo de Taylor y el estudio de máximos y mínimos libres y condicionados, dadas las aplicaciones a la ingeniería que de éstos se derivan.

En cuanto al desarrollo de Taylor podemos señalar, además de las aplicaciones ya indicadas, su utilidad en el Cálculo Numérico. En efecto, uno de los caminos más interesantes para la obtención de los esquemas en diferencias finitas de una ecuación diferencial ordinaria o en derivadas parciales, pasa por la utilización de desarrollos de Taylor.

El estudio de máximos y mínimos es una pieza básica para el ingeniero industrial. Este, a lo largo de su vida profesional, se encontrará en multitud de ocasiones con la necesidad de optimizar funciones tales como beneficio, coste, tiempo, distancia, energía, etc. Evidentemente, el estudio aquí planteado no es más que una primera introducción al problema general de la optimización, el cual puede ser ampliado con conocimientos de Programación Lineal, Programación Dinámica y Control Optimo.

Por último, esta parte servirá de soporte para la representación de curvas, materia a tratar en la Parte 6 que se expone a continuación.

P A R T E   6

C U R V A S

PARTE 6.- CURVAS.

6.1.- ESTUDIO DE CURVAS ALABEADAS.

6.1.1.- Elemento de arco.

6.1.2.- Vector unitario según la tangente.

6.1.3.- Plano osculador.

6.1.4.- Concepto de curvatura y radio de curvatura de flexión.

6.1.5.- Plano normal y direcciones normales. Binormal y plano rectificante. Conceptos.

6.1.6.- Primera fórmula de Frenet.

6.1.7.- Odógrafa de la velocidad. Aceleración.

6.1.8.- Cálculo de los vectores unitarios, rectas y planos del triedro intrínseco o de Frenet.

6.1.9.- Cálculo del radio de curvatura de flexión.

6.1.10.- Concepto de curvatura y radio de curvatura de torsión. Cálculo.

6.1.11.- Segunda y tercera fórmula de Frenet.

6.2.- ESTUDIO DE CURVAS PLANAS.

6.2.1.- Curvas en forma explícita.

6.2.1.1.- Dominio de variación. Simetrías y periodos. Asíntotas y ramas parabólicas. Puntos de encuentro con los ejes y asíntotas. Monotonías. Máximos y mínimos. Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.

6.2.1.2.- Representación.

6.2.2.- Curvas en forma paramétrica.

6.2.2.1.- Dominio de variación del parámetro. Simetrías y periodos. Asíntotas y ramas parabólicas. Puntos de encuentro con los ejes y asíntotas. Monotonías. Máximos y mínimos de tangente horizontal y vertical. Puntos de inflexión. Puntos de retroceso. Puntos múltiples.

6.2.2.2.- Representación.

6.2.2.3.- Ecuaciones paramétricas de las cónicas.

6.2.2.4.- Curvas cíclicas. Ecuaciones paramétricas de las cicloides, epicicloides, hipocicloides y evolventes de circunferencia.

6.2.3.- Curvas en coordenadas polares.

6.2.3.1.- Coordenadas polares. Dominio de variación del argumento. Periodos y simetrías. Posición de la curva respecto de la tangente. Ecuación de la recta. Asintotas. Puntos de encuentro con los ejes y asíntotas.

6.2.3.2.- Representación.

6.2.3.3.- Ecuaciones de las cónicas en polares.

6.2.4.- Curvas en forma implícita.

6.2.4.1.- Métodos de las regiones. Simetrías. Asíntotas. Puntos de encuentro con los ejes y asíntotas. Máximos y mínimos de tangente horizontal y vertical. Puntos de inflexión. Puntos de retroceso. Puntos múltiples. Tangentes en el origen.

6.2.4.2.- Representación.

* OBJETIVOS GENERALES.

- Conocer los elementos principales para el estudio de curvas alabeadas.
- Analizar y representar curvas planas dadas en forma explícita, paramétrica, polares e implícitas.

* OBJETIVOS ESPECIFICOS.

6.1.- ESTUDIO DE CURVAS ALABEADAS.

- Recordar el concepto de curva alabeada como caso particular de una función vectorial de variable real.
- Deducir la expresión del elemento de arco.
- Introducir el vector unitario según la dirección de la tangente, teniendo en cuenta la interpretación geométrica de la primera derivada de una función vectorial de variable real en el espacio euclídeo tridimensional, estudiada en el apartado 4.3.4.2.
- Definir e interpretar el concepto de plano osculador y deducir su expresión.
- Determinar los conceptos de curvatura y radio de curvatura de flexión.
- Definir e interpretar los conceptos de plano normal y direcciones normales. Introducir el concepto de dirección normal principal y vector unitario según dicha dirección.
- Definir e interpretar los conceptos de dirección binormal y plano rectificante. Conocer la expresión

del vector unitario según la binormal a partir de los vectores unitarios según la tangente y la normal principal.

- Introducir la primera fórmula de Frenet.
- Introducir los conceptos de trayectoria y odógrafa de la velocidad. Estudiar el concepto de aceleración y su expresión según las direcciones de la tangente y normal principal (aceleración tangencial y normal)
- Particularizar la expresión de la aceleración en los casos de movimiento rectilíneo, uniforme o circular.
- Analizar las expresiones para el cálculo de los vectores unitarios, rectas y planos del triedro intrínseco o de Frenet.
- Deducir la expresión del radio de curvatura de flexión. Particularizar para una curva plana.
- Determinar los conceptos de curvatura y radio de curvatura de torsión. Fijar la expresión para el cálculo de la curvatura de torsión.
- Introducir la segunda y tercera fórmula de Frenet.

6.2.- ESTUDIO DE CURVAS PLANAS.

- Analizar los elementos necesarios para realizar la representación gráfica de una curva en forma explícita.
- Analizar los elementos necesarios para realizar la representación gráfica de una curva en forma paramétrica.
- Plantear las ecuaciones paramétricas de las cónicas.

- Deducir las ecuaciones paramétricas de las curvas cíclicas principales.
- Analizar los elementos necesarios para realizar la representación gráfica de una curva dada en polares.
- Deducir las ecuaciones de las cónicas en polares.
- Analizar los elementos necesarios para realizar la representación gráfica de una curva dada en forma implícita.

*** TEMAS PARA CLASES PRACTICAS.**

- Aplicar el cálculo de vectores unitarios, rectas y planos del triedro intrínseco a diferentes curvas alabeadas. Calcular curvaturas y radios de curvatura de flexión y torsión. Interpretar los resultados.
- Calcular e interpretar los valores de velocidad y aceleración para una trayectoria dada.
- Estudiar los elementos necesarios para representar curvas planas en forma explícita, paramétrica, polar e implícita.

*** TEMAS DE AMPLIACION Y EJERCICIOS PROPUESTOS.**

- Realizar una mayor profundización en el campo de la Geometría Diferencial.
- Representación de curvas planas en pantalla gráfica y plotter mediante programas de ordenador.
- Proponer diferentes ejercicios de curvas alabeadas y planas que figuran en relación bibliográfica.

*** TEMPORIZACION.**

El tiempo invertido en la exposición de la Parte 6 será aproximadamente de tres semanas.

*** BIBLIOGRAFIA.**

Relación detallada.

- J. GAYO, A. ROMEU
  Dibujo de Curvas.
  Ediciones I.C.A.I.
  Madrid 1973.
  Es útil para el estudio y aplicaciones del apartado 6.2

- A. LOPEZ DE LA RICA
  Geometría Diferencial de Curvas y Superficies (2 tomos)
  Ediciones I.C.A.I.
  Madrid 1972.
  Tomo I para estudio y ampliación de curvas alabeadas.

- A. LUZARRAGA
  Problemas resueltos. Algebra lineal.
  Quinta edición.
  Editado por el autor.
  Barcelona 1970.
  Capítulos 14, 16, 17 y 18 para problemas de esta parte.

- J. MARTINEZ SALAS

  Elementos de Matemática.

  Tercera edición.

  Editado por el autor.

  Valladolid 1969.

  Capítulos 24 y 32 para un desarrollo general de esta parte.

- J.L. MATAIX PLANA

  Problemas de Geometría Analítica.

  Cuarta edición.

  Editorial Dossat, S.A.

  Madrid 1968.

  Para un desarrollo práctico de esta parte.

- N. PISKUNOV

  Cálculo Diferencial e Integral.

  Editorial Montaner y Simón, S.A.

  Barcelona 1978.

  Capítulo 9 para el estudio de curvas alabeadas.

  Capítulo 5 para el estudio de curvas planas.

- R.A.E.C.

  Problemas de Algebra Lineal.

  Publicaciones R.A.E.C.

  Madrid 1986.

  Capítulos 11, 12, 13 y 14 para problemas de esta parte.

- J. REY PASTOR, A. DE CASTRO BRZEZICKI

  Elementos de Matemáticas.

  Novena edición, corregida.

  Editorial S.A.E.T.A.

  Madrid 1981.

  Capítulos 17 y 25 para el estudio de esta parte.

- G.B. THOMAS, Jr.

  Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica.

  Sexta edición.

  Editorial Aguilar.

  Madrid 1980.

  Capítulo 11 para el estudio de curvas en polares.

- L. THOMAS ARA, Mª E. RIOS GARCIA

  Cálculo.

  Editado por el autor.

  Santander 1975.

  Lección 35 para el estudio de curvas alabeadas.

  Lecciones 11, 12, 13, 14 y 15 para curvas planas.

- A.J. WASHINGTON

  Fundamentos de Matemática con Cálculo.

  Tercera edición.

  Fondo Educativo Iberoamericano.

  E.U.A. 1983.

  Capítulo 2 para repasar la geometría analítica plana.

Relación complementaria.

- F. GRANERO
  Problemas de Cálculo para Ingenieros.
  Editorial URMO, S.A.
  Bilbao 1982.

- R.E. LARSON, R.P. HOSTETLER
  Cálculo y Geometría Analítica.
  Segunda edición.
  Libros McGraw-Hill. Ediciones La Colina, S.A.
  Madrid 1986.

- S.K. STEIN
  Cálculo y Geometría Analítica.
  Tercera edición.
  Libros McGraw-Hill de México, S.A.
  México 1984.

- F.S. WOODS, F.H. BAYLEY
  Geometría Analítica y Cálculo Infinitesimal.
  Editorial Hispano-Americana.
  México 1960.

* COMENTARIOS.

El estudio de curvas alabeadas puede ser bastante interesante para el tratamiento mecánico (análisis cinemático y dinámico) del movimiento de una masa puntual en el espacio tridimensional, así como el estudio de curvas sobre superficies en el espacio. Es importante conocer esta materia para el posterior estudio de la circulación de campos vectoriales a lo largo de curvas alabeadas (cálculo de trabajos, diferencias de potencial electrodinámico, etc.).

El análisis de curvas planas se hace imprescindible para una interpretación rápida de los resultados de determinados problemas de la ingeniería.

En la actualidad, dados los avances conseguidos en el campo de la informática, muchos problemas se resuelven numéricamente manejándose un gran número de datos. Ello conlleva a la necesidad de una presentación gráfica de éstos para realizar una interpretación sencilla de los resultados, por lo cual es necesario un conocimiento de los elementos relacionados con la representación de curvas.

P A R T E 7

S E R I E S

PARTE 7.- SERIES.

7.1.- SERIES NUMERICAS.

7.1.1.- Concepto de serie de números reales. Suma de la serie. Convergencia.

7.1.2.- Criterio general de convergencia de Cauchy. Consecuencias.

7.1.3.- Series de términos positivos.

7.1.3.1.- Propiedades.

7.1.3.2.- Criterio de comparación de Gauss.

7.1.3.3.- Series geométricas.

7.1.3.4.- Serie de Riemann o armónica generalizada.

7.1.3.5.- Criterio de D'Alambert o del cociente.

7.1.3.6.- Criterio de Cauchy o de la raíz.

7.1.3.7.- Criterio de Pringsheim.

7.1.3.8.- Criterio logarítmico.

7.1.3.9.- Criterio de Raabe.

7.1.4.- Series de términos positivos y negativos.

7.1.4.1.- Series alternadas. Criterio de Leibnitz.

7.1.4.2.- Convergencia absoluta y condicional.

7.1.4.3.- Teorema de Riemann.

7.1.4.4.- Teorema de Dirichlet.

7.1.4.5.- Fórmula de Abel.

7.1.4.6.- Adición y multiplicación de series. Propiedades.

7.1.5.- Introducción a las series de números complejos.

7.2.- SUCESIONES Y SERIES FUNCIONALES.

7.2.1.- Sucesiones de funciones.

7.2.1.1.- Introducción.

7.2.1.2.- Condición de Cauchy para la convergencia uniforme.

7.2.1.3.- Convergencia uniforme y continuidad. Teorema de Dini.

7.2.1.4.- Convergencia uniforme e integrabilidad.

7.2.1.5.- Convergencia uniforme y derivabilidad.

7.2.2.- Series funcionales.

7.2.2.1.- Introducción.

7.2.2.2.- Criterios para la convergencia uniforme.

7.2.2.2.1.- Criterio de Cauchy.

7.2.2.2.2.- Criterio de Weierstrass.

7.2.2.2.3.- Criterio de Dirichlet.

7.2.2.2.4.- Criterio de Abel.

7.2.2.3.- Series funcionales y continuidad.

7.2.2.4.- Series funcionales e integración.

7.2.2.5.- Series funcionales y derivación.

7.2.3.- Series de potencias.

7.2.3.1.- Introducción.

7.2.3.2.- Teorema de Abel. Radio de convergencia. Convergencia uniforme y absoluta.

7.2.3.3.- Teoremas de integración y derivación.

7.2.3.4.- Cálculo del radio de convergencia.

7.2.3.5.- Desarrollo de una función en serie de potencias.

* OBJETIVOS GENERALES.

- Conocer y aplicar el estudio de convergencia de las series numéricas y funcionales, haciendo especial énfasis en las series de potencia.

* OBJETIVOS ESPECIFICOS.

7.1.- SERIES NUMERICAS.

- Definir el concepto de serie de números reales.
- Definir el concepto de suma de la serie como el límite de la sucesión formada por sus sumas parciales.
- Establecer los conceptos de serie convergente, divergente u oscilante.
- Demostrar la linealidad de series convergentes.
- Enunciar y demostrar el criterio general de convergencia de Cauchy.
- Deducir que para que una serie sea convergente es necesario que el término general tienda a cero. Razonar que esta condición no es suficiente.
- Demostrar que el carácter de una serie no se altera cuando se suprime un número finito de sus primeros términos.
- Demostrar que el carácter de una serie no se altera cuando se multiplican todos sus términos por una constante distinta de cero.
- Demostrar que no se modifica el carácter de una serie convergente o divergente, así como la suma de

la misma en el primer caso, cuando se sustituyen grupos de términos consecutivos por su suma.

- Definir el concepto de serie de números reales positivos.
- Razonar que una serie de términos positivos converge o diverge, pero nunca oscila.
- Razonar que una serie de términos positivos converge si y solo si la sucesión de sumas parciales está acotada superiormente.
- Demostrar que reordenando los términos de una serie de números reales positivos no se altera su carácter ni varía su suma.
- Demostrar que una serie de términos positivos es convergente si existe una mayorante convergente. Análogamente, demostrar que es divergente si existe una minorante divergente (Criterio de comparación de Gauss).
- Demostrar los criterios de comparación de segunda especie.
- Definir el concepto de serie geométrica. Estudiar su carácter y suma en función de la razón.
- Definir la serie armónica simple. Demostrar su carácter divergente.
- Introducir la serie armónica generalizada o de Riemann. Estudiar su carácter.
- Enunciar y demostrar los criterios de D'Alambert, Cauchy, Pringsheim, Logarítmico y Raabe.

- Definir el concepto de serie de términos positivos y negativos.
- Definir el concepto de serie alternada. Enunciar y demostrar el criterio de Leibnitz.
- Definir los conceptos de convergencia absoluta y condicional.
- Razonar que toda serie absolutamente convergente es convergente.
- Enunciar el teorema de Riemann.
- Introducir que toda serie absolutamente convergente es incondicionalmente convergente y recíprocamente (Teorema de Dirichlet).
- Introducir la fómula de Abel.
- Plantear las propiedades principales relativas a la suma y producto de series.
- Introducir las series de números complejos; estudiar los criterios básicos de convergencia.

7.2.- SUCESIONES Y SERIES FUNCIONALES.

- Introducir el concepto de sucesión de funciones.
- Definir los conceptos de convergencia puntual y convergencia uniforme.
- Enunciar y demostrar la condición de Cauchy para la convergencia uniforme.
- Demostrar que el límite de una sucesión de funciones continuas uniformemente convergente es una función continua.
- Enunciar el teorema de Dini.

- Plantear la relación entre convergencia uniforme e integrabilidad de suceciones funcionales.
- Plantear la relación entre convergencia uniforme y derivabilidad de suceciones funcionales.
- Introducir el concepto de serie funcional.
- Definir los conceptos de convergencia puntual, uniforme y absoluta.
- Enunciar y demostrar los criterios de convergencia uniforme para las series funcionales: Criterios de Cauchy, Weierstrass, Dirichlet y Abel.
- Demostrar que una serie uniformemente convergente de funciones continuas define una función continua.
- Plantear la relación entre convergencia uniforme e integrabilidad de series de funciones.
- Plantear la relación entre convergencia uniforme y derivabilidad de series de funciones.
- Introducir el concepto de serie de potencias.
- Enunciar y demostrar el teorema de Abel para series de potencias.
- Definir el concepto de radio de convergencia. Hallar el campo de convergencia uniforme y absoluta.
- Establecer la igualdad de los radios de convergencia de una serie dada y su derivada o integral.
- Utilizar los criterios de convergencia más usuales para el cálculo de radios de convergencia.
- Estudiar el desarrollo en serie de potencias de diferentes funciones.

* **TEMAS PARA CLASES PRACTICAS.**

  - Estudiar el carácter y suma en caso de convergencia de algunas series numéricas aplicando los criterios de convergencia estudiados.
  - Estudiar el error cometido en la suma aproximada de una serie alternada.
  - Resolver algún ejemplo de serie de números complejos.
  - Analizar la convergencia puntual y la convergencia uniforme de diferentes sucesiones y series de funciones.
  - Calcular el radio de convergencia de varias series de potencias.
  - Desarrollar funciones dadas en series de potencias. Estudiar su campo de convergencia.

* **TEMAS DE AMPLIACION Y EJERCICIOS PROPUESTOS.**

  - Demostrar que el conjunto de las series de números reales convergentes constituyen un espacio vectorial sobre R.
  - Estudiar las series hipergeométricas.
  - Demostrar el teorema de Dini.
  - Introducirse en el estudio de series de Fourier.
  - Realizar ejercicios de las materias propuestas en los temas indicados para clases prácticas, referenciados en la bibliografía adjunta.
  - Realizar programas de ordenador para el cálculo de funciones utilizando desarrollos en series.

* TEMPORIZACION.

El tiempo invertido en la exposición de la Parte 7 será aproximadamente de dos semanas.

* BIBLIOGRAFIA.

Relación detallada.

- T.M. APOSTOL
  Análisis Matemático.
  Segunda edición.
  Editorial Reverté, S.A.
  Barcelona 1981.
  Capítulos 8 y 9 para un estudio general y ampliación de esta parte.

- J. DE BURGOS
  Cálculo Infinitesimal (Teoría y Problemas)
  Editorial Alhambra, S.A.
  Madrid 1984.
  Capítulos 8 y 9 para un estudio general de esta parte.

- B.P. DEMIDOVICH

  5.000 Problemas de Análisis Matemático.

  Tercera edición.

  Editorial Paraninfo.

  Madrid 1985.

  Capítulo 5; gran número de problemas propuestos con solución para el estudio de series numéricas y funcionales.

- B. DE DIEGO

  Ejercicios de Análisis (Cálculo Diferencial e Integral)

  Tercera Edición.

  Editorial Deimos, S.A.

  Sevilla 1983.

  Capítulo 8 para resolución de problemas de series numéricas y funcionales.

  Páginas 321-322 un resumen de desarrollos en serie de potencias.

- J.W. KITCHEN, Jr.

  Cálculo.

  Libros McGraw-Hill. Ediciones La Colina, S.A.

  Madrid 1986.

  Capítulo 13 para un desarrollo general del estudio de series.

- J. LELONG FERRAND, J.M. ARNAUDIES
  Curso de Matemáticas. Tomo 2: Análisis.
  Editorial Reverté, S.A.
  Barcelona 1980.
  Capítulos 7, 8 y 9 para desarrollo total y ampliación de esta parte.

- N. PISKUNOV
  Cálculo Diferencial e Integral.
  Editorial Montaner y Simón, S.A.
  Barcelona 1978.
  Capítulo 16 para el estudio de esta parte.

- J. PUIG
  Análisis Matemático-1.
  Editorial Toray-Masson, S.A.
  Barcelona 1981.
  Capítulo 5 para un estudio completo de esta parte.

- J. REY PASTOR, A. DE CASTRO BRZEZICKI
  Elementos de Matemáticas.
  Novena edición, corregida.
  Editorial S.A.E.T.A.
  Madrid 1981.
  Capítulo 12 para el estudio del apartado 7.1.

- W. RUDIN

  Principios de Análisis Matemático.

  Tercera edición.

  Libros McGraw-Hill de México, S.A.

  México 1981.

  Capítulos 7 y 8 para el desarrollo del apartado 7.2.

- L. THOMAS ARA, Mª E. RIOS GARCIA

  Cálculo.

  Editado por el autor.

  Santander 1975.

  Páginas 290-342 para el estudio de series numéricas y funcionales.

Relación complementaria.

- M. ANZOLA, J. CARUNCHO, G. PEREZ, CANALES

  Problemas de análisis (2 tomos).

  Imprenta Fareso, S.A.

  Madrid 1984.

- F. AYRES, Jr.

  Cálculo Diferencial e Integral.

  Libros McGraw-Hill (Colección Schaum).

  México 1971.

- R. BRONTE ABAURREA

  Cálculo Infinitesimal e Integral (Topología).

  Editado por el autor.

  Madrid 1977.

- B. CALVO, J. DOYEN, A. CALVO, BOSCHET

  Cours d'analyse (6 tomos)

  Librairie Armand Colin.

  Paris 1977.

  Tomo V.

- J.M. ESTEFANIA, F. MICHAVILA

  Elementos de Análisis Matemático.

  Editado por los autores.

  Madrid 1974.

- F. GRANERO

  Problemas de Cálculo para Ingenieros.

  Editorial URMO, S.A.

  Bilbao 1982.

- R. LOSADA RODRIGUEZ

  Análisis Matemático.

  Editorial Pirámide,S.A.

  Madrid 1978.

- J. MARTINEZ SALAS

  Elementos de Matemática.

  Tercera edición.

  Editado por el autor.

  Valladolid 1969.

- MURRAY R. SPIEGEL

  Cálculo Superior.

  Libros McGraw-Hill (Colección Schaum).

  México 1969.

- R.A.E.C.

  Problemas de Cálculo Infinitesimal.

  Sexta edición (Recopilación Tomos I y II)

  Publicaciones R.A.E.C.

  Madrid 1985.

- J. RIVAUD

  Ejercicios de Análisis (2 tomos).

  Editorial Aguilar.

  Madrid 1975 y 1979.

- A. SARABIA, C. GUTIERREZ CAÑAS

  Cálculo Infinitesimal. Teoría y Problemas.

  Ediciones I.C.A.I.

  Madrid 1974.

- M. SPIVAK

  Calculus. Cálculo Infinitesimal (2 tomos).

  Editorial Reverté, S.A.

  Barcelona 1980.

- E. TEBAR FLORES

  Problemas de Cálculo Infinitesimal (2 tomos).

  Quinta edición.

  Editorial Tebar Flores.

  Madrid.

- L. THOMAS ARA, J.L. REMBADO, Mª E. RIOS GARCIA

  Problemas de Cálculo.

  Editado por el autor.

  Santander 1984.

*** COMENTARIOS.**

La aproximación de funciones mediante las series funcionales supone una herramienta matemática fundamental para el tratamiento numérico de problemas de ingeniería.

En ciertas ocasiones es necesario la obtención del valor de determinadas funciones trascendentes con una exactitud superior a la que el ordenador disponible en ese momento nos puede ofrecer. Esto puede superarse en la mayoría de los casos por medio de desarrollos en serie de potencias de dichas funciones. De esta forma, podemos controlar el error cometido en el cálculo del valor que toma la función en un punto, obteniendo la precisión deseada para el problema en estudio.

Otra de las aplicaciones del desarrollo en serie de potencias es el cálculo aproximado de integrales, que será introducido en la parte siguiente del presente Programa.

Por último, cabe recordar que en el estudio de series realizado en esta parte se ha pretendido hacer una introducción de esta materia, dejando para la asignatura de "Ampliación de Matemáticas y Programación" el tratamiento de otros tipos de series, tales como las de Fourier, si bien éstas se han propuesto como tema de ampliación.

P A R T E   8

I N T E G R A C I O N

PARTE 8.- INTEGRACION.

8.1.- INTEGRAL SIMPLE.

8.1.1.- Integral en el sentido de Riemann.

8.1.1.1.- Concepto de integral definida.

8.1.1.2.- Condición de integrabilidad. Consecuencias.

8.1.1.3.- Propiedades de la integral definida.

8.1.1.4.- Interpretación geométrica de la integral definida.

8.1.1.5.- Teorema del valor medio. Generalización.

8.1.1.6.- La integral indefinida. Función primitiva.

8.1.1.7.- Integral función de su límite superior. Interpretación geométrica de la función primitiva. Continuidad y derivación. Teorema fundamental del cálculo.

8.1.1.8.- Regla de Barrow. Cambio de variable.

8.1.1.9.- Integral en el sentido de Riemann-Stieltjes y propiedades.

8.1.2.- Cálculo de primitivas.

8.1.2.1.- Integrales inmediatas.

8.1.2.2.- Integración por cambio de variable.

8.1.2.3.- Integración por partes.

8.1.2.4.- Integración de funciones racionales.

8.1.2.5.- Integración de funciones irracionales.

8.1.2.6.- Integración de funciones trascendentes.

8.1.3.- Integración mediante desarrollo en series de potencias. Convergencia.

8.1.4.- Integrales impropias y paramétricas.

8.1.4.1.- Integrales impropias.

8.1.4.1.1.- Integrales extendidas a un intervalo infinito. Convergencia.

8.1.4.1.2.- Integrales de funciones no acotadas.

8.1.4.2.- Integrales paramétricas.

8.1.4.2.1.- Continuidad. Derivación bajo el signo integral.

8.1.4.2.2.- Caso en que los límites de la integral dependan del parámetro.

8.1.4.3.- Integrales eulerianas.

8.1.4.3.1.- Integral euleriana de primera especie. Función Beta.

8.1.4.3.2.- Integral euleriana de segunda especie. Función Gamma.

8.1.4.3.3.- Relaciones entre las funciones Beta y Gamma.

8.1.5.- Aplicaciones de la integral definida.

8.1.5.1.- Cálculo de áreas de superficies planas.

8.1.5.2.- Cálculo de longitudes de arcos de curvas planas y alabeadas.

8.1.5.3.- Cálculo de volúmenes por secciones.

8.1.5.4.- Cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución.

8.1.5.5.- Cálculo de áreas de superficies de revolución.

8.1.5.6.- Aplicaciones físicas.

8.2.- INTEGRALES MULTIPLES Y DE CAMPO.

8.2.1.- Introducción a la teoría de campos.

8.2.1.1.- Concepto de campo escalar.

8.2.1.2.- Concepto de campo vectorial.

8.2.1.3.- Gradiente de un campo escalar. Propiedades.

8.2.1.4.- Divergencia de un campo vectorial. Propiedades.

8.2.1.5.- Rotacional de un campo vectorial. Propiedades.

8.2.1.6.- Laplaciana de un campo escalar y vectorial. Propiedades.

8.2.2.- Integrales dobles.

8.2.2.1.- Concepto de integral doble. Interpretación geométrica.

8.2.2.2.- Cálculo de una integral doble mediante integración reiterada.

8.2.2.3.- Teorema del valor medio. Interpretación geométrica.

8.2.2.4.- Cambio de variables en integrales dobles.

8.2.2.5.- Elemento de área en coordenadas polares. Cálculo analítico y geométrico.

8.2.3.- Integrales triples o de volumen.

8.2.3.1.- Concepto de integral triple o de volumen. Interpretaciones físicas y geométricas.

8.2.3.2.- Cálculo de una integral triple mediante integración reiterada.

8.2.3.3.- Cambio de variables en integrales triples.

8.2.3.4.- Elemento de volumen en cilíndricas y esféricas. Cálculo analítico y geométrico.

8.2.4.- Integrales curvilíneas.

8.2.4.1.- Concepto de integral curvilínea o circulación de un campo vectorial. Interpretaciones físicas.

8.2.4.2.- Cálculo de la integral curvilínea.

8.2.4.3.- Fórmula de Riemann o de Green en el plano. Consecuencias. Aplicación en transformación de variables en integrales dobles.

8.2.4.4.- Integración de diferenciales totales exactas. Campo conservativo. Potencial.

8.2.5.- Integrales de superficie.

8.2.5.1.- Concepto de integral de superficie. Interpretaciones físicas y geométricas.

8.2.5.2.- Cálculo de la integral de superficie. Elemento de área. Diferentes casos.

8.2.6.- Flujos de campos vectoriales.

8.2.6.1.- Concepto de flujo de un campo vectorial a través de una superficie. Interpretaciones físicas.

8.2.6.2.- Cálculo del flujo de un campo vectorial a través de una superficie. Elemento de flujo. Diferentes casos.

8.2.7.- Teorema de Stokes. Consecuencias.

8.2.8.- Teorema de la divergencia o de Gauss-Ostrogradski. Consecuencias.

8.2.9.- Aplicaciones de las integrales múltiples y de campo.

8.2.9.1.- Cálculo de volúmenes.

8.2.9.2.- Cálculo de áreas de superficies.

8.2.9.3.- Cálculo de centros de gravedad. Teoremas de Guldin.

8.2.9.4.- Cálculo de momentos de inercia.

8.2.9.5.- Otras aplicaciones físicas.

* **OBJETIVOS GENERALES.**

- Entender el concepto de integral simple, múltiple y de campo.
- Que el alumno sepa aplicar el estudio de cálculo de integrales.

* **OBJETIVOS ESPECIFICOS.**

8.1.- INTEGRAL SIMPLE.

- Introducir el concepto de integral en el sentido de Riemann. Definir el concepto de integral definida.
- Enunciar y demostrar la condición necesaria y suficiente de integrabilidad.
- Demostrar que toda función monótona en un intervalo cerrado es integrable.
- Demostrar que toda función continua en un intervalo cerrado es integrable.
- Demostrar que toda función acotada y con un número finito de puntos de discontinuidad es integrable.
- Demostrar que si una función es integrable, su valor absoluto es también integrable.
- Plantear las principales propiedades de la integral definida: relativas al intervalo de integración, linealidad y acotación.
- Interpretar geométricamente el concepto de integral definida.
- Enunciar y demostrar el teorema del valor medio y su generalización.

- Interpretar el concepto de valor medio de una función en un intervalo.
- Definir los conceptos de integral indefinida y función primitiva.
- Interpretar geométricamente la función primitiva introduciendo la integral función de su límite superior.
- Estudiar el teorema fundamental del cálculo: continuidad y derivación de la función primitiva, y Regla de Barrow.
- Analizar los cambios de variable en la integral definida.
- Introducir el concepto de integral en el sentido de Riemann-Stieltjes y enunciar sus principales propiedades.
- Introducir el cálculo de primitivas.
- Recordar las principales integrales inmediatas.
- Recordar diferentes casos de integración por cambios de variable.
- Recordar el método de integración por partes.
- Analizar los diferentes casos clásicos de aplicación del método de integración por partes. Establecer las fórmulas de recurrencia.
- Analizar los diferentes casos de integración de funciones racionales según la naturaleza de las raíces del denominador. Presentar el método de Hermite.

- Analizar los diferentes casos de integración de funciones irracionales.
- Analizar los diferentes casos de integración de funciones trigonométricas, hiperbólicas y otras funciones trascendentes.
- Aplicar los desarrollos en series de potencias para la resolución de integrales de forma aproximada; casos típicos de funciones que no poseen primitivas. Estudiar la convergencia.
- Introducir el concepto de integral impropia. Conocer su clasificación.
- Analizar las integrales extendidas a un intervalo de amplitud infinita, estudiando su convergencia.
- Analizar las integrales de funciones no acotadas en el intervalo de integración, estudiando su convergencia.
- Introducir el concepto de integral dependiente de un parámetro.
- Estudiar la continuidad de la integral dependiente de un parámetro.
- Calcular la derivada de una integral definida dependiente de un parámetro, respecto de dicho parámetro. Generalizar al caso en que los límites de la integral dependan del parámetro.
- Introducir las integrales eulerianas.
- Definir las funciones Beta y Gamma, y determinar sus principales propiedades.

- Aplicar la integral definida al cálculo de áreas de superficies planas limitadas por curvas dadas en forma explícita, paramétrica y polar.
- Aplicar la integral definida al cálculo de longitud de curvas planas (explícita, paramétrica y polar) y alabeadas.
- Aplicar la integral definida al cálculo de volúmenes por secciones.
- Aplicar la integral definida al cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución (por discos y por tubos).
- Aplicar la integral definida al cálculo de áreas de superficies de revolución.
- Extender la integral definida para abordar problemas físicos.

8.2.- INTEGRALES MULTIPLES Y DE CAMPO.

- Definir el concepto de campo escalar. Indicar algún ejemplo físico.
- Definir el concepto de superficie de nivel.
- Definir el concepto de campo vectorial. Indicar algunos ejemplos físicos.
- Introducir el concepto de líneas de campo.
- Definir los conceptos de campo estacionario y variable.
- Introducir el concepto de gradiente de un campo escalar. Definir el operador nabla.
- Deducir que el gradiente de un campo escalar es perpendicular a las superficies de nivel.

- Demostrar las principales propiedades del operador gradiente.
- Introducir el concepto de divergencia de un campo vectorial. Demostrar sus principales propiedades.
- Introducir el concepto de rotacional de un campo vectorial. Demostrar sus principales propiedades.
- Introducir el concepto de laplaciana de un campo escalar y vectorial. Demostrar sus principales propiedades.
- Introducir el concepto de integral doble. Interpretarla geométricamente.
2 - Analizar el cálculo de una integral doble mediante integración reiterada.
3 - Enunciar y demostrar el teorema del valor medio para integrales dobles. Interpretarlo geométricamente.
4 - Analizar el cambio de variables en integrales dobles y estudiar la transformación del elemento de área del recinto de integración.
- Analizar el caso particular de la transformación del elemento de área tras un cambio de coordenadas cartesianas a polares. Calcularlo analítica y geométricamente.
- Introducir el concepto de integral triple o de volumen. Dar diferentes interpretaciones físicas y geométricas.
- Analizar el cálculo de una integral triple o de volumen mediante integración reiterada.

- Analizar el cambio de variables en integrales triples o de volumen. Deducir la transformación del elemento de volumen del recinto de integración.
- Analizar los casos particulares de la transformación del elemento de volumen con un cambio de coordenadas cartesianas a cilíndricas y esféricas. Calcularlos analítica y geométricamente.
- Introducir el concepto de integral curvilínea o circulación de un campo vectorial. Dar diferentes interpretaciones físicas. Analizar su cálculo.
- Demostrar la fórmula de Riemann o de Green en el plano. Deducir sus principales consecuencias. Aplicar al cambio de variables en integrales dobles.
- Definir el concepto de diferencial total exacta y función potencial de un campo conservativo o irrotacional. Deducir la condición de existencia de función potencial.
- Particularizar el cálculo de integrales curvilíneas a diferenciales totales exactas; propiedades.
- Introducir el concepto de integral de superficie. Darle interpretaciones físicas y geométricas.
- Analizar el cálculo de la integral de superficie. Estudiar el elemento de área cuando la superficie viene dada en forma explícita y paramétrica.
- Introducir el concepto de elemento de flujo, y flujo de un campo vectorial a través de una superficie. Darle interpretaciones físicas.

- Analizar el cálculo del flujo de un campo vectorial a través de una superficie. Estudiar el elemento de área en forma vectorial cuando la superficie viene dada en forma explícita y paramétrica.
- Enunciar y demostrar el teorema de Stokes. Analizar sus consecuencias.
- Enunciar y Demostrar el teorema de la divergencia o de Gauss-Ostrogradski. Analizar sus consecuencias.
- Analizar las principales aplicaciones de las integrales múltiples y de campo al cálculo de volúmenes, áreas de superficies, centros de gravedad (demostrando los teoremas de Guldin), momentos de inercia y otras aplicaciones físicas.

*** TEMAS PARA CLASES PRACTICAS.**

- Calcular las primitivas de diferentes tipos de funciones utilizando los métodos de integración que se estudian en esta parte.
- Hacer diferentes problemas de integrales impropias, paramétricas y eulerianas.
- Resolver diversos ejercicios de aplicaciones físicas y geométricas de la integral definida.
- Resolver diversos ejercicios de aplicaciones físicas y geométricas de las integrales múltiples y de campo.
- Plantear diferentes problemas de la teoría de campos.
- Comproþar la verificación de los teoremas de Riemann o de Green, de Stokes y de Gauss-Ostrogradski.

*** TEMAS DE AMPLIACION Y EJERCICIOS PROPUESTOS.**

- Realizar diferentes ejercicios de los temas indicados para clases prácticas referenciados en la relación bibliográfica adjunta.
- Introducirse en el estudio de las integrales simples y múltiples en el sentido de Lebesgue.
- Introducirse en los métodos de integración numérica.
- Ampliar el estudio de la teoría de campos.

*** TEMPORIZACION.**

El tiempo invertido en la exposición de la Parte 8 será aproximadamente de ocho semanas.

*** BIBLIOGRAFIA.**

Relación detallada.

- T.M. APOSTOL
  Calculus (2 tomos).
  Segunda edición.
  Editorial Reverté, S.A.
  Barcelona 1980.
  Capítulos 10, 11 y 12 para un estudio general del apartado 8.2.

- T.M. APOSTOL

  Análisis Matemático.

  Segunda edición.

  Editorial Reverté, S.A.

  Barcelona 1981.

  Capítulos 7 y 14 para el estudio y ampliación de la integral simple y múltiple.

- J. DE BURGOS

  Cálculo Infinitesimal (Teoría y Problemas)

  Editorial Alhambra, S.A.

  Madrid 1984.

  Capítulo 7 para el estudio del apartado 8.1.4.

- F. COQUILLAT

  Cálculo Integral. Metodología y Problemas.

  Editorial Tebar Flores.

  Madrid 1980.

  Es útil para que el alumno se ejercite en la resolución de problemas de integrales simples y sus aplicaciones, así como para una introducción a integrales múltiples.

- B.P. DEMIDOVICH

  5.000 Problemas de Análisis Matemático.

  Tercera edición.

  Editorial Paraninfo.

  Madrid 1985.

Capítulos 3 y 4 para problemas propuestos de integrales indefinidas y definidas.

Capítulo 7 para problemas del apartado 8.1.4.

Capítulo 8 para problemas de integrales múltiples y de campo.

- B. DE DIEGO

  Ejercicios de Análisis (Cálculo Diferencial e Integral)

  Tercera Edición.

  Editorial Deimos, S.A.

  Sevilla 1983.

  Capítulo 7 para problemas de integrales simples.

- J.M. ESTEFANIA, F. MICHAVILA

  Elementos de Análisis Matemático.

  Editado por los autores.

  Madrid 1974.

  Capítulo 17 para el estudio del apartado 8.1.4.

- F. GARCIA CASTRO, A. GUTIERREZ GOMEZ

  Cálculo Infinitesimal-II (2 tomos).

  Ediciones Pirámide, S.A.

  Madrid 1980-81.

  Capítulos 1 y 2 del Tomo II para el estudio del apartado 8.2.

- J. LELONG FERRAND, J.M. ARNAUDIES

  Curso de Matemáticas. Tomo 2: Análisis.

  Editorial Reverté, S.A.

  Barcelona 1980.

  Capítulos 10 y 11 para estudio ampliado de esta parte.

- J.E. MARSDEN, A.J. TROMBA

  Cálculo Vectorial.

  Fondo Educativo Iberoamericano.

  E.U.A. 1981.

  Es útil para un desarrollo y ampliación del estudio de integrales múltiples y de campos. Teoría de campos.

- J.L. MATAIX PLANA

  Mil Problemas de Cálculo Integral (4 tomos).

  Décima edición.

  Editorial Dossat, S.A.

  Madrid 1981.

  Los tomos 1 y 2 se recomiendan para practicar en la resolución de integrales simples (Tomo I), múltiples y de campos (Tomo II).

- N. PISKUNOV

  Cálculo Diferencial e Integral.

  Editorial Montaner y Simón, S.A.

  Barcelona 1978.

  Capítulos 10, 11, 12, 14 y 15 para estudiar esta parte.

- P. PUIG ADAM

  Cálculo Integral.

  Decimo séptima edición.

  Editado por Gómez Puig.

  Madrid 1979.

  Libro clásico en el estudio de los métodos de integración y aplicaciones de las integrales simples.

- R.A.E.C.

  Problemas de Cálculo Integral.

  Ediciones Universidad y Cultura.

  Madrid 1986.

  Para practicar en problemas de integrales estudiadas en esta parte.

- M. SPIVAK

  Calculus. Cálculo Infinitesimal (2 tomos).

  Editorial Reverté, S.A.

  Barcelona 1980.

  Páginas 317-381 del Tomo I para el apartado 8.1.1.

- L. THOMAS ARA, Mª E. RIOS GARCIA

  Cálculo.

  Editado por el autor.

  Santander 1975.

  3ª Parte para integrales indefinidas y definidas.

  7ª Parte para las integrales múltiples y de campos.

Relación complementaria.

- F. AYRES, Jr.
  Cálculo Diferencial e Integral.
  Libros McGraw-Hill (Colección Schaum).
  México 1971.

- M.N. BENTABOL, J. MARGALEF, E. OUTERELO
  Análisis Matemático. Cálculo Integral en Espacios Euclídeos.
  Ediciones Pirámide, S.A.
  Madrid 1982.

- R. BRONTE ABAURREA
  Cálculo Infinitesimal e Integral (Topología).
  Editado por el autor.
  Madrid 1977.

- F. GRANERO
  Problemas de Cálculo para Ingenieros.
  Editorial URMO, S.A.
  Bilbao 1982.

- E. LINES ESCARDO
  Análisis Matemático II.
  Editado por la U.N.E.D.
  Madrid 1974.

- R. LOSADA RODRIGUEZ
  Análisis Matemático.
  Editorial Pirámide,S.A.
  Madrid 1978.

- J.A. MARIN TEJERIZO
  Problemas de Cálculo Integral.
  Segunda edición ampliada.
  Editorial S.A.E.T.A.
  Madrid 1968.

- J. MARTINEZ SALAS
  Elementos de Matemática.
  Tercera edición.
  Editado por el autor.
  Valladolid 1969.

- MURRAY R. SPIEGEL
  Cálculo Superior.
  Libros McGraw-Hill (Colección Schaum).
  México 1969.

- M.H. PROTTER, C.B. MORREY
  Análisis Real.
  Editorial AC.
  Madrid 1986.

- J. PUIG

  Análisis Matemático-1.

  Editorial Toray-Masson, S.A.

  Barcelona 1981.

- R.A.E.C.

  Problemas de Cálculo Infinitesimal.

  Sexta edición (Recopilación Tomos I y II)

  Publicaciones R.A.E.C.

  Madrid 1985.

- J. REY PASTOR, A. DE CASTRO BRZEZICKI

  Elementos de Matemáticas.

  Novena edición, corregida.

  Editorial S.A.E.T.A.

  Madrid 1981.

- J. RIVAUD

  Ejercicios de Análisis (2 tomos).

  Editorial Aguilar.

  Madrid 1975 y 1979.

- W. RUDIN

  Principios de Análisis Matemático.

  Tercera edición.

  Libros McGraw-Hill de México, S.A.

  México 1981.

- J.J. SCALA, R. RIAZA, L. ORTIZ
Cálculo Vectorial Aplicado.
Editado por la E.T.S.I.I. de Madrid.
Madrid 1967.

- S.K. STEIN
Cálculo y Geometría Analítica.
Tercera edición.
Libros McGraw-Hill de México, S.A.
México 1984.

- G.B. THOMAS, Jr.
Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica.
Sexta edición.
Editorial Aguilar.
Madrid 1980.

- L. THOMAS ARA, J.L. REMBADO, Mª E. RIOS GARCIA
Problemas de Cálculo.
Editado por el autor.
Santander 1984.

- A.J. WASHINGTON
Fundamentos de Matemática con Cálculo.
Tercera edición.
Fondo Educativo Iberoamericano.
E.U.A. 1983.

- T. WONNACOTT

Aplicaciones del Cálculo Diferencial e Integral.

Primera edición.

Editorial Limusa, S.A.

México 1983.

*** COMENTARIOS.**

En esta parte se ha concentrado todo el estudio de integración simple, múltiple y de campo con el fin de que el alumno adquiera una visión global sobre esta materia, a la que se dedica por su importancia y amplitud algo menos de la tercera parte del curso.

La aplicación del Cálculo Integral aparece en la mayoría de las asignaturas que el alumno cursa a lo largo de su carrera, por lo que es imprescindible que domine la materia tanto a nivel teórico como práctico. Entre las aplicaciones físicas de todo el estudio de campos escalares y vectoriales, podemos destacar los problemas de campos electromagnéticos, campos de fuerzas mecánicas, campos de velocidades de fluídos, campos de temperaturas, campos de densidades, etc., donde aparecen conceptos estudiados en diferenciación e integración que se centran normalmente en las ecuaciones diferenciales, que son introducidas en la parte que sigue en este Programa.

PARTE 9

INTRODUCCION A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

PARTE 9.- INTRODUCCION A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.

9.1.- CONCEPTOS GENERALES. CLASIFICACION.

9.1.1.- Ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales.

9.1.2.- Conceptos de orden y grado.

9.1.3.- Soluciones generales y particulares. Ecuación diferencial correspondiente a una familia de curvas.

9.1.4.- Planteamiento diferencial de algunos problemas físicos. Condiciones iniciales y de contorno.

9.2.- ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN.

9.2.1.- Ecuaciones de variables separadas.

9.2.2.- Ecuaciones homogéneas y reducibles a homogéneas.

9.2.3.- Ecuaciones lineales. Método de Lagrange o de variación de constantes.

9.2.4.- Ecuaciones de Bernouilli.

9.2.5.- Introducción a las ecuaciones de primer orden y grado n.

9.3.- ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR.

9.3.1.- Ecuaciones incompletas.

9.3.2.- Ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes.

9.3.2.1.- Solución general de la ecuación homogénea.

9.3.2.2.- Solución particular de la ecuación completa. Método de los coeficientes indeterminados. Diferentes casos.

9.3.3.- Generalización a las ecuaciones diferenciales lineales de orden n con coeficientes constantes.

9.4.- INTRODUCCION A LOS SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES.

9.4.1.- Conceptos.

9.4.2.- Resolución mediante el operador D.

9.5.- TRAYECTORIAS ORTOGONALES.

9.5.1.- Trayectorias ortogonales a una familia de curvas dada en coordenadas cartesianas.

9.5.2.- Trayectorias ortogonales a una familia de curvas dada en coordenadas polares.

* **OBJETIVOS GENERALES.**

- Motivar e introducir el estudio de ecuaciones diferenciales.

* **OBJETIVOS ESPECIFICOS.**

9.1.- CONCEPTOS GENERALES. CLASIFICACION.

- Definir la ecuación diferencial ordinaria.
- Definir la ecuación diferencial en derivadas parciales.
- Conocer los conceptos de orden y grado de una ecuación diferencial.
- Conocer las nociones de solución general y solución particular de una ecuación diferencial. Interpretar geométricamente como una familia de curvas dependiente de n parámetros, en el caso de una ecuación diferencial ordinaria de orden n.
- Conocer la forma de obtener la ecuación diferencial correspondiente a una familia de curvas dada.
- Describir algunos problemas físicos que se modelizan mediante ecuaciones diferenciales y plantear sus correspondientes formulaciones.
- Analizar la necesidad de introducir condiciones iniciales y/o de contorno para determinar la solución particular de un problema físico concreto.

9.2.- ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN.

- Conocer y aplicar la resolución de ecuaciones diferenciales de variabes separadas.

- Definir la ecuación diferencial homogénea y deducir su reducción a una ecuación de variables separadas.
- Conocer los distintos casos de las ecuaciones diferenciales reducibles a homogéneas, y su correspondiente tratamiento.
- Introducir la ecuación diferencial lineal de primer orden, y deducir su solución general mediante el método de variación de constantes o de Lagrange.
- Conocer la ecuación de Bernouilli, y describir su reducción a una ecuación diferencial lineal.
- Introducir el tratamiento de las ecuaciones diferenciales de primer orden y grado n.

9.3.- ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR.

- Conocer diversos casos de ecuaciones diferenciales incompletas y su resolución mediante reducción del orden.
- Definir las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes. Conocer los conceptos de ecuación homogénea y completa.
- Deducir la solución general de la ecuación homogénea atendiendo a la naturaleza de las raíces del polinomio característico.
- Exponer el método de los coeficientes indeterminados para la obtención de la solución particular de la ecuación completa.
- Demostrar que la solución general de la ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes

constantes es la suma de la solución general de la ecuación homogénea y la particular de la completa.

- Generalizar los cuatro objetivos anteriores a las ecuaciones diferenciales lineales de orden n con coeficientes constantes.

9.4.- INTRODUCCION A LOS SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES.

- Introducir y clasificar los sistemas de ecuaciones diferenciales.
- Conocer el procedimiento de reducción de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes a una ecuación diferencial, utilizando el operador D.
- Destacar la importancia de la relación entre las constantes arbitrarias de las distintas soluciones.

9.5.- TRAYECTORIAS ORTOGONALES.

- Conocer el concepto de trayectoria ortogonal a una familia de curvas.
- Describir la determinación de las trayectorias ortogonales a una familia de curvas dada en coordenadas cartesianas o polares.

*** TEMAS PARA CLASES PRACTICAS.**

- Realización de varios ejercicios de verificación de soluciones generales y particulares de distintas ecuaciones diferenciales.

- Determinar la solución particular de varios problemas de valor inicial y de contorno, dada la solución general.
- Obtener la ecuación diferencial correspondiente a una familia de curvas dada: circunferencias, parábolas,..
- Resolución de diversos ejercicios de las ecuaciones diferenciales y sistemas estudiados. Aplicar ciertas condiciones iniciales o de contorno.
- En especial se plantearán ejercicios de tipo geométrico y físico: obtener las familias de curvas con subtangente o normal constante, obtener la trayectoria de un móvil puntual de masa m sometido a una determinada fuerza resultante y conocidas las condiciones iniciales sobre la posición y velocidad, resolución de problemas de circuítos eléctricos de corriente alterna,...
- Resolución de algunos problemas de trayectorias ortogonales.

* **TEMAS DE AMPLIACION Y EJERCICIOS PROPUESTOS.**
- Proponer la resolución de ecuaciones diferenciales y sistemas estudiados. Remitir a bibliografía.
- Introducirse en el problema de existencia y unicidad.
- Analizar y determinar la solución general del problema de vibraciones mecánicas. Vibraciones libres o forzadas, amortiguadas o no amortiguadas. Estudiar el régimen transitorio y estacionario.

- Analizar la aplicación del circuíto eléctrico RLC. Correspondencia entre sistemas mecánicos y elétricos.

*** TEMPORIZACION.**

El tiempo invertido en la exposición de la Parte 9 será aproximadamente de dos semanas.

*** BIBLIOGRAFIA.**

Relación detallada.

- T.M. APOSTOL

  Calculus (2 tomos).

  Segunda edición.

  Editorial Reverté, S.A.

  Barcelona 1980.

  Capítulos 6 y 7 para un desarrollo general y ampliación de esta parte.

- R. BRONSON

  Ecuaciones Diferenciales Modernas.

  Libros McGraw-Hill (Colección Schaum).

  México 1976.

  Libro para ejercitarse en la resolución de problemas de esta parte.

- F. GARCIA CASTRO, A. GUTIERREZ GOMEZ
  Cálculo Infinitesimal-II (2 tomos).
  Ediciones Pirámide, S.A.
  Madrid 1980-81.
  Capítulos 3 y 4 para un desarrollo y ampliación de esta parte.

- J.L. MATAIX PLANA
  Mil Problemas de Cálculo Integral (4 tomos).
  Décima edición.
  Editorial Dossat, S.A.
  Madrid 1981.
  El Tomo III puede utilizarse para practicar en la resolución de problemas de esta parte.

- N. PISKUNOV
  Cálculo Diferencial e Integral.
  Editorial Montaner y Simón, S.A.
  Barcelona 1978.
  Capítulo 13 para un desarrollo y ampliación de esta parte.

- J. QUINET
  Curso de Matemáticas Superiores (6 tomos).
  Ecuaciones Diferenciales (tomo 4).
  Editorial Paraninfo, S.A.
  Madrid 1983.

Interesante para el estudio de esta parte y en especial para aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden.

- G.B. THOMAS, Jr.
  Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica.
  Sexta edición.
  Editorial Aguilar.
  Madrid 1980.
  Capítulo 20 para un desarrollo de esta parte.

- L. THOMAS ARA, Mª E. RIOS GARCIA
  Cálculo.
  Editado por el autor.
  Santander 1975.
  5ª Parte para un desarrollo general de lo que se pretende conseguir en esta introducción a ecuaciones diferenciales.

Relación complementaria.

- M. DE GUZMAN, I. PERAL, M. WALIAS
  Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.
  Primera edición.
  Editorial Alhambra, S.A.
  Madrid 1978.

- P. PUIG ADAM

  Curso Teórico-Práctico de Ecuaciones Diferenciales aplicado a la Física y Técnica.

  Décimo sexta edición.

  Editado por Roberto Puig Alvarez.

  Madrid 1980.

- R.A.E.C.

  Problemas de Ecuaciones Diferenciales.

  Quinta edición.

  Publicaciones R.A.E.C.

  Madrid 1968.

- C. RAY WYLIE

  Matemáticas Superiores para la Ingeniería.

  Libros McGraw-Hill.

  México 1982.

- J. RIVAUD

  Ejercicios de Análisis (2 tomos).

  Editorial Aguilar.

  Madrid 1975 y 1979.

- L. THOMAS ARA, J.L. REMBADO, Mª E. RIOS GARCIA

  Problemas de Cálculo.

  Editado por el autor.

  Santander 1984.

- A.J. WASHINGTON

  Fundamentos de Matemática con Cálculo.

  Tercera edición.

  Fondo Educativo Iberoamericano.

  E.U.A. 1983.

- T. WONNACOTT

  Aplicaciones del Cálculo Diferencial e Integral.

  Primera edición.

  Editorial Limusa, S.A.

  México 1983.

* COMENTARIOS.

La importancia del estudio de las ecuaciones diferenciales es obvia. La gran mayoría de los problemas físicos y técnicos, pasado un cierto nivel, admiten exclusivamente un planteamiento diferencial que queda plasmado en una ecuación diferencial o sistema, sometido a las condiciones de contorno y/o iniciales necesarias para su determinación.

En la mayoría de las materias que el alumno estudia relacionadas con la Ingeniería Industrial (Electricidad, Mecánica, Fluídos, Regulación Automática, Transmisión de Calor, Resistencia de Materiales,...) se encontrará con planteamientos diferenciales que no sólo deberá saber interpretar y plantear, sino llegar a la solución de los mismos. De ahí la importancia que tiene que el alumno asimile bien el concepto de ecuación diferencial y sus condiciones de contorno y/o iniciales.

En esta parte simplemente se intenta realizar una breve introducción al amplio estudio de las ecuaciones diferenciales, con el fin de que el alumno se familiarice con éstas y aprenda los métodos más elementales para resolverlas. En la asignatura de Ampliación de Matemática y Programación (2º Curso) se le dedicará un estudio más amplio a esta materia.

C A P I T U L O   5

P r o g r a m a

d e

M é t o d o s   N u m é r i c o s

CAPITULO 5.- PROGRAMA DE METODOS NUMERICOS.

5.1.- INTRODUCCION.

A continuación se expone el desarrollo detallado del Programa de "Métodos Numéricos", que forma parte del perfil docente referenciado en el apartado 1.1 de la presente Memoria.

Como se indicó en el apartado 2.2.1 de la presente Memoria, el plan de estudios actual de la carrera de Ingeniería Técnica Industrial de la E.U.P. en la U.P.C. adolece de una asignatura propia de Métodos Numéricos, que bien podría impartirse en el tercer curso de la carrera. El Departamento de Matemática Aplicada, siendo consciente de esta anomalía, y dada la importancia de esta materia, revisará en un futuro próximo esta situación cuando se plantee la Reforma de las Enseñanzas en las Escuelas Técnicas; proponiendo introducir en el plan de estudios una asignatura cuatrimestral de Métodos Numéricos con un mínimo de 4 horas/semana en el tercer curso por considerar imprescindible esta materia para la formación del ingeniero técnico, en concordancia con la demanda social y los avances tecnológicos. En base a esta idea, se ha elaborado un Programa de "Métodos Numéricos" capaz de cubrir las necesidades básicas de un ingeniero técnico industrial, a impartir en medio curso académico

(14 semanas, a razón de 4 horas/semana). Por el momento, este programa puede ser desarrollado en las distintas asignaturas de Matemática del plan de estudios, o incluso en seminarios organizados por el Departamento para aquellos alumnos que muestren un determinado interés por esta útil materia.

En el desarrollo detallado, que a continuación se expone, del Programa de "Métodos Numéricos" y sus aplicaciones a la ingeniería industrial se ha seguido la misma estructura que en el de "Cálculo Diferencial e Integral", desglosando la materia en este caso en un total de siete Partes.

5.2.- DESARROLLO DETALLADO DEL PROGRAMA.

El Programa de "Métodos Numéricos" se ha dividido en siete Partes fundamentales que se desarrollan a continuación, como se ha indicado anteriormente:

Parte 1.- RESOLUCION DE ECUACIONES.

Parte 2.- SISTEMAS DE ECUACIONES.

Parte 3.- VALORES Y VECTORES PROPIOS.

Parte 4.- INTERPOLACION.

Parte 5.- DERIVACION E INTEGRACION NUMERICA.

Parte 6.- ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.

Parte 7.- ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES.

P R O G R A M A

D E

M E T O D O S   N U M E R I C O S

P A R T E 1

R E S O L U C I O N D E E C U A C I O N E S

PARTE 1.- RESOLUCION DE ECUACIONES.

1.1.- PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

1.1.1.- Introducción.

1.1.2.- Separación de raíces.

1.1.3.- Existencia y unicidad de raíces en un intervalo.

1.2.- METODO DE BIPARTICION.

1.2.1.- Algoritmo.

1.2.2.- Interpretación gráfica.

1.2.3.- Iteraciones y aproximación.

1.3.- METODO DE APROXIMACIONES SUCESIVAS.

1.3.1.- Algoritmo.

1.3.2.- Teorema del punto fijo.

1.3.3.- Condición suficiente de existencia y unicidad de un punto fijo.

1.3.4.- Interpretación gráfica.

1.3.5.- Iteraciones y aproximación.

1.3.6.- Técnica de sobreiteración.

1.4.- METODO DE NEWTON-RAPHSON.

1.4.1.- Algoritmo.

1.4.2.- Interpretación gráfica.

1.4.3.- Condición suficiente de existencia y unicidad de un punto fijo.

1.5.- METODO DE LA SECANTE.

1.5.1.- Algoritmo.

1.5.2.- Interpretación gráfica.

1.6.- METODO DE LA REGULA-FALSI.

1.6.1.- Algoritmo.

1.6.2.- Interpretación gráfica.

1.7.- ANALISIS DEL ERROR EN METODOS ITERATIVOS Y TECNICAS DE ACELERACION.

1.7.1.- Concepto de orden de convergencia.

1.7.2.- Método de Aitken.

1.7.3.- Método de Steffensen.

1.8.- CASO DE RAICES COMPLEJAS EN ECUACIONES ALGEBRAICAS. METODO DE BAIRSTOW.

* **OBJETIVOS GENERALES.**

- Conocer y aplicar los principales métodos de resolución de ecuaciones del tipo f(x)=0 , estudiando la convergencia y el error de los mismos.

* **OBJETIVOS ESPECIFICOS.**

1.1.- PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

- Introducir y definir el problema de la obtención de raíces de la ecuación f(x)=0.
- Conocer diferentes métodos de separación de raíces; métodos gráficos.
- Razonar las condiciones de existencia y unicidad de raíces en un determinado intervalo.

1.2.- METODO DE BIPARTICION.

- Describir el algoritmo del método.
- Interpretar gráficamente el método.
- Calcular el número de iteraciones necesarias para obtener una solución con una aproximación deseada.

1.3.- METODO DE APROXIMACIONES SUCESIVAS.

- Describir el algoritmo del método para x=g(x).
- Recordar el teorema del punto fijo. Aplicarlo al método de aproximaciones sucesivas.
- Demostrar que es suficiente para la existencia y unicidad de un punto fijo en un intervalo, que g'(x) en valor absoluto esté mayorada en dicho intervalo por un número real K menor que la unidad.

- Interpretar gráficamente los diferentes casos de convergencia del método.
- Calcular el número de iteraciones necesarias para obtener una solución con una aproximación deseada.
- Estudiar la técnica de sobreiteración para mejorar la convergencia del método.

1.4.- METODO DE NEWTON-RAPHSON.

- Describir el algoritmo del método y su relación con la técnica de sobreiteración.
- Interpretar gráficamente el método.
- Particularizar la condición suficiente de existencia y unicidad de un punto fijo.

1.5.- METODO DE LA SECANTE.

- Describir el algoritmo del método.
- Interpretar gráficamente el método.

1.6.- METODO DE LA REGULA-FALSI.

- Describir el algoritmo del método.
- Interpretar gráficamente el método.

1.7.- ANALISIS DEL ERROR EN METODOS ITERATIVOS Y TECNICAS DE ACELERACION.

- Recordar el concepto de orden de convergencia de un método iterativo.
- Describir el proceso de aceleración de Aitken.
- Describir el método de Steffensen.

1.8.- CASO DE RAICES COMPLEJAS EN ECUACIONES ALGEBRAICAS. METODO DE BAIRSTOW.

- Describir el algoritmo del método.

*** TEMAS PARA CLASES PRACTICAS.**

- Elaborar y ejecutar programas en BASIC y FORTRAN 77, para los diferentes métodos de resolución de ecuaciones.
- Comparar los resultados obtenidos al resolver una ecuación dada por los métodos estudiados.
- Plantear algunas ecuaciones que respondan a problemas de la ingeniería.

*** TEMAS DE AMPLIACION Y EJERCICIOS PROPUESTOS.**

- Introducirse en el estudio de otros métodos de resolución de ecuaciones tales como: el de Whittaker, el de Newton modificado, el de Halley,...
- Realizar un algoritmo que represente gráficamente la función implícita definida por la ecuación $f(x,y)=0$ en un intervalo determinado.
- Analizar el orden de convergencia de los diferentes métodos de resolución de ecuaciones.
- Realizar diferentes ejercicios propuestos en la bibliografía adjunta.

*** TEMPORIZACION.**

El tiempo invertido en la exposición de la Parte 1 será aproximadamente de una semana.

* **BIBLIOGRAFIA.**

Relación detallada.

- R.L.BURDEN, J.D. FAIRES, A.C. REYNOLD

  Numerical Analysis.

  Editorial Prindle, Weber & Schmidt.

  Boston 1981.

  Capítulo 2 para el estudio de los algoritmos de los métodos y el análisis de su convergencia, así como las técnicas de aceleración.

- B. CARNAHAN, H.A. LUTHER, J.O. WILKES

  Cálculo Numérico. Métodos, Aplicaciones.

  Editorial Rueda.

  Madrid 1979.

  Capítulo 3 para el desarrollo ampliado de algunos métodos, y sus aplicaciones a problemas de ingeniería propuestos y resueltos.

- R.F. CHURCHHOUSE

  Handbook of Applicable Mathematics.

  Volume III. Numerical Methods.

  Editorial John Wiley & Sons.

  U.S.A. 1981.

  Capítulo 5 para un estudio general de esta parte.

- A.M. COHEN

  Análisis Numérico.

  Editorial Reverté, S.A.

  Barcelona 1977.

  Páginas 32-35 para el estudio del método de Bairstow.

- O. LOPEZ

  Métodos Iterativos de resolución de ecuaciones.

  Editorial Alhambra.

  Bilbao 1986.

  Todo el texto es útil para desarrollar los diagramas de flujo y programas en BASIC de algunos métodos.

  Páginas 39-57 para el estudio del método de Whittaker y Newton modificado, propuestos como temas de ampliación.

- R. LUTHE, A. OLIVERA, F. SCHUTZ

  Métodos Numéricos.

  Editorial Limusa.

  México 1978.

  Capítulo 3 para realizar diagramas de flujo y programas en FORTRAN de algunos métodos estudiados.

- M.J. MARON

  Numerical Analysis. A Practical Approach.

  Editorial Macmillan Publishing Co.

  U.S.A. 1982.

  Capítulo 2 para un desarrollo amplio de esta parte.

- F. MICHAVILA

  Fundamentos del Cálculo Numérico 1: Topología Métrica.

  Editorial Reverté, S.A.

  Barcelona 1986.

  Apartado 4.3 para el estudio general del teorema del punto fijo.

- F. MICHAVILA, L. GAVETE

  Programación y Cálculo Numérico.

  Editorial Reverté, S.A.

  Barcelona 1985.

  Capítulo 5 para un desarrollo completo de esta parte, junto con programas en BASIC y problemas propuestos.

- J.P. NOUGIER

  Méthodes de Calcul Numérique.

  Editorial Masson.

  Paris 1983.

  Capítulo 5 para un estudio general de esta parte.

- M. SIBONY, J.-Cl. MARDON

  Analyse Numérique I . Systémes Linéaires et non Linéaires.

  Editorial Hermann.

  Paris 1982.

  Páginas II.2 y II.3 para el estudio de separación de raíces, su existencia y unicidad en un intervalo.

Apartado 1 del Capítulo II para un estudio general de esta parte, especialmente para un tratamiento correcto de las interpretaciones gráficas de los métodos.

- J. STOER, R. BURLIRSCH

  Introduction to Numerical Analysis.

  Editorial Springer-Verlag.

  New York 1980.

  Capítulo 5 para un desarrollo general de esta parte.

Relación complementaria.

- C.T.H. BAKER, C. PHILLIPS

  The Numerical Solution of Nonlinear Problems.

  Editorial Oxford University Press.

  New York 1981.

- W. CHENEY, D. KINCAID

  Numerical Mathematics and Computing.

  Editorial Brooks/Cole Publishing Company.

  California 1980.

- Ph. D. FRANCIS SCHEID

  Análisis Numérico.

  Libros McGraw-Hill de México, S.A.

  Colombia 1972.

- C.F. GERALD

  Applied Numerical Analysis.

  Segunda edición.

  Editorial Addison-Wesley Publishing Company.

  U.S.A. 1980.

- F.B. HILDEBRAND

  Introduction to Numerical Analysis.

  Segunda edición.

  Libros McGraw-Hill.

  U.S.A. 1974.

- M. PICHAT, C. DI CRESCENZO, J. WOLF

  Mathematiques pour L'Informatique.

  3-Algorithmmique Numerique (2). Exercises et Problemes.

  Editorial Armand Colin.

  Paris 1971.

- A. RALSTON

  Introducción al Análisis Numérico.

  Editorial Limusa, S.A.

  México 1978.

- A. RECUERO FORNIES

  Métodos Numéricos.

  Ediciones I.C.A.I.

  Madrid 1974.

* COMENTARIOS.

Parece razonable comenzar este Programa presentando uno de los problemas elementales del Cálculo Numérico: la resolución de ecuaciones de la forma $f(x)=0$.

En esta parte el alumno se familiariza con el concepto de método iterativo que posteriormente utilizará en el desarrollo de métodos numéricos más complicados incluídos en este Programa. Asimismo, se introduce el error de aproximación debido al propio método, el error de redondeo debido al ordenador utilizado, el orden de convergencia, el número de iteraciones, tiempo de cálculo en ordenador, conceptos todos ellos comunes en los métodos iterativos.

Multitud de problemas de la ingeniería en los que se utilizan técnicas numéricas pasan en algún momento por la necesidad de resolver una ecuación del tipo estudiado. De ahí, la importancia de su estudio y dominio por parte del alumno.

P A R T E   2

S I S T E M A S   D E   E C U A C I O N E S

PARTE 2.- SISTEMAS DE ECUACIONES.

2.1.- PRELIMINARES.

2.1.1.- Norma de un vector. Propiedades.

2.1.2.- Norma de una matriz. Propiedades.

2.1.3.- Construcción de normas matriciales a partir de una norma vectorial.

2.1.4.- Polinomio característico. Valores y vectores propios.

2.1.5.- Radio espectral. Propiedades.

2.1.6.- Vector residual.

2.2.- SISTEMAS LINEALES.

2.2.1.- Introducción.

2.2.2.- Métodos directos.

2.2.2.1.- Definición y aspectos generales.

2.2.2.2.- Método de Gauss. Pivote parcial y total.

2.2.2.3.- Método de factorización de Crout.

2.2.2.4.- Método de Cholesky.

2.2.2.5.- Cálculo de la matriz inversa.

2.2.3.- Métodos iterativos.

2.2.3.1.- Definición y aspectos generales.

2.2.3.2.- Método de Jacobi.

2.2.3.3.- Método de Gauss-Seidel.

2.2.3.4.- Métodos de relajación.

2.2.3.5.- Método del gradiente conjugado.

2.2.3.6.- Criterios de convergencia.

2.3.- SISTEMAS NO LINEALES.

2.3.1.- Introducción.

2.3.2.- Método de aproximaciones sucesivas. Estudio de convergencia.

2.3.3.- Método de Newton. Convergencia.

2.3.4.- Método de Newton modificado. Convergencia.

* OBJETIVOS GENERALES.

- Que el alumno sepa resolver un sistema de ecuaciones, lineal o no, mediante el método numérico más adecuado en cada caso.

* OBJETIVOS ESPECIFI OS.

2.1.- PRELIMINARES.

- Recordar el concepto de norma definida sobre un espacio vectorial.
- Definir las normas más usuales de un vector y enunciar sus principales propiedades.
- Definir la norma multiplicativa de una matriz.
- Construir las principales normas matriciales a partir de las normas vectoriales.
- Definir la norma matricial de Frobenius.
- Definir el polinomio característico de una matriz.
- Definir los conceptos de valor y vector propio.
- Definir el radio espectral de una matriz. Enunciar sus principales propiedades.
- Definir el concepto de vector residual de un sistema de ecuaciones para una aproximación dada.

2.2.- SISTEMAS LINEALES.

- Plantear el problema que define un sistema de ecuaciones lineal.
- Razonar la inviabilidad del método de Cramer y el de cálculo directo de la matriz inversa, para resolver sistemas de un gran número de ecuaciones.

- Definir el concepto de método directo para la resolución de sistemas de ecuaciones.
- Conocer las características comunes a los métodos directos de resolución de sistemas de ecuaciones.
- Describir las etapas principales del método de Gauss y definir el concepto pivote.
- Señalar las diferencias principales entre el uso de pivote parcial y pivote total.
- Describir el método de factorización de Crout para la resolución de sistemas.
- Describir las etapas principales del método de Cholesky para sistemas de ecuaciones simétricos.
- Comparar el número de operaciones y la memoria utilizada en los algoritmos de los métodos directos estudiados.
- Recordar el concepto de matriz singular.
- Utilizar los métodos directos generales para la obtención de la inversa de una matriz dada.
- Definir el concepto de método iterativo para la resolución de sistemas de ecuaciones.
- Conocer las características comunes a los métodos iterativos de resolución de sistemas de ecuaciones.
- Describir el método de Jacobi.
- Describir el método de Gauss-Seidel.
- Describir los métodos de relajación: subrelajación y sobrerrelajación.

- Definir los criterios a seguir para la obtención de un parámetro de relajación óptimo.
- Describir el método del gradiente conjugado para sistemas de ecuaciones simétricos.
- Demostrar las condiciones de convergencia de los métodos iterativos de Jacobi, Gauss-Seidel y relajación.
- Comparar el número de iteraciones, operaciones y la memoria utilizada en los algoritmos de los métodos iterativos estudiados.

2.3.- SISTEMAS NO LINEALES.

- Plantear el problema que define un sistema de ecuaciones no lineal.
- Describir el método de aproximaciones sucesivas para la resolución de un sistema no lineal.
- Definir las condiciones de convergencia del método de aproximaciones sucesivas.
- Describir el método de Newton para la resolución de sistemas no lineales.
- Establecer las condiciones de convergencia del método de Newton.
- Describir el método de Newton modificado para la resolución de sistemas no lineales.
- Establecer las condiciones de convergencia del método de Newton modificado.
- Comparar los métodos iterativos estudiados para la resolución de sistemas no lineales.

* **TEMAS PARA CLASES PRACTICAS.**

- Realizar programas en BASIC o FORTRAN 77 para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y no lineales utilizando los diferentes algoritmos de los métodos estudiados.
- Comparar la efectividad de los métodos programados en problemas concretos.
- Aplicar los métodos estudiados para la inversión de matrices.
- Plantear sistemas de ecuaciones que respondan a problemas de ingeniería: resolución de circuítos eléctricos utilizando las Leyes de Kirchhoff, problemas de equilibrio químico, redes de transporte de fluídos, cálculo de estructuras,...

* **TEMAS DE AMPLIACION Y EJERCICIOS PROPUESTOS.**

- Analizar el método de Gauss-Jordan.
- Estudiar el condicionamiento de la matriz de un sistema; técnicas de precondicionamiento.
- Analizar el método de Householder.
- Introducirse en la aplicación de la teoría de grafos a la resolución de sistemas.
- Tratar la resolución de grandes sistemas: técnicas de almacenamiento y resolución por bloques.
- Analizar el método del gradiente conjugado con precondicionamiento.
- Introducirse en sistemas sobredeterminados.

- Introducirse en los métodos de Cuasi-Newton para la resolución de sistemas no lineales.

*** TEMPORIZACION.**

El tiempo invertido en la exposición de la Parte 2 será aproximadamente de tres semanas.

*** BIBLIOGRAFIA.**

Relación detallada.

- R.L.BURDEN, J.D. FAIRES, A.C. REYNOLD
  Numerical Analysis.
  Editorial Prindle, Weber & Schmidt.
  Boston 1981.
  Capítulos 6,8 y 9 para un estudio completo de la parte.

- B. CARNAHAN, H.A. LUTHER, J.O. WILKES
  Cálculo Numérico. Métodos, Aplicaciones.
  Editorial Rueda.
  Madrid 1979.
  Apartado 5.3 para el método de Gauss. Apartado 5.4 para el método de Gauss-Jordan propuesto como tema de ampliación. Apartado 5.6 para el método de Jacobi. Apartado 5.7 para el método de Gauss-Seidel. Apartado 5.9 para el método de Newton.

- P.G. CIARLET

  Introduction á L'Analyse Numérique Matricielle et á L'Optimisation.

  Editorial Masson.

  Paris 1982.

  Capítulo 1 para los conceptos matriciales utilizados en esta parte. Capítulo 4 para un tratamiento completo y riguroso de los métodos directos estudiados. Capítulos 2 y 8 para el estudio de temas de ampliación. Capítulo 3 para el estudio de problemas numéricos que conducen a la resolución de sistemas de ecuaciones. Capítulo 5 para un estudio riguroso de los métodos iterativos. Apartado 7.5 para el estudio del método de Newton.

- N. GASTINEL

  Análisis Numérico Lineal.

  Editorial Reverté, S.A.

  Barcelona 1975.

  Capítulo IV, apartados IV y V para el método de Gauss; apartado VI para el método de Crout; apartado 7 para el método de Gauss-Jordan; apartado XI para matrices simétricas y método de Cholesky; y apartado IX para la inversión de matrices.

  Capítulo V, apartados I y II para los métodos de Jacobi, Gauss-Seidel y relajación; apartado IV para el método del gradiente conjugado.

- C.F. GERALD

  Applied Numerical Analysis.

  Segunda edición.

  Editorial Addison-Wesley Publishing Company.

  U.S.A. 1980.

  Apartado 2.4 para el método de Gauss y de Gauss-Jordan.

  Apartado 2.7 para la inversión de matrices.

- E. ISAACSON, H.B. KELLER

  Analysis of Numerical Methods.

  Editorial John Wiley & Sons.

  U.S.A. 1966.

  Apartado 3.3 para el estudio del método de Newton para sistemas no lineales.

- F. MICHAVILA, L. GAVETE

  Programación y Cálculo Numérico.

  Editorial Reverté, S.A.

  Barcelona 1985.

  Apartado 6.1 para generalidades sobre métodos directos.

  Apartado 6.2 para el método de Gauss y su algoritmo, así como de Gauss-Jordan.

  Apartado 6.3 para el método de Cholesky y su algoritmo.

  Apartado 6.4 para generalidades de métodos iterativos.

  Apartado 6.5 para los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel, con algoritmo de los mismos.

- M. SIBONY, J.-Cl. MARDON

  Analyse Numérique I. Systémes Linéaires et non Linéaires.

  Editorial Hermann.

  Paris 1982.

  Capítulo 0, I y II para un seguimiento completo de esta parte.

- J. STOER, R. BURLIRSCH

  Introduction to Numerical Analysis.

  Editorial Springer-Verlag.

  New York 1980.

  Apartado 4.1 para el método de Gauss. Apartado 4.2 para el algoritmo de Gauss-Jordan. Apartado 4.3 para el método de Cholesky. Apartado 4.4 para el estudio de la influencia de los errores de redondeo.

  Capítulo 8, apartados 1-5 para un estudio completo de los métodos iterativos.

- G. WINTER

  Resolución Numérica de Sistemas de Ecuaciones Algebraicas.

  Publicaciones de la U.P.C. (E.T.S.I.I.).

  Las Palmas 1986.

  Todo el texto se adapta al estudio realizado en esta parte. Es útil también para temas de ampliación.

Relación complementaria.

- C.T.H. BAKER, C. PHILLIPS
  The Numerical Solution of Nonlinear Problems.
  Editorial Oxford University Press.
  New York 1981.

- N. BAKHVALOV
  Métodos Numéricos.
  Editorial Paraninfo, S.A.
  Madrid 1980.

- W. CHENEY, D. KINCAID
  Numerical Mathematics and Computing.
  Editorial Brooks/Cole Publishing Company.
  California 1980.

- R.F. CHURCHHOUSE
  Handbook of Applicable Mathematics(3).Numerical Methods
  Editorial John Wiley & Sons.
  U.S.A. 1981.

- P.G. CIARLET, J.-M. THOMAS
  Exercises D'Analyse Numérique Matricielle et D'Optimisation.
  Editorial Masson.
  Paris 1982.

- A.M. COHEN

  Análisis Numérico.

  Editorial Reverté, S.A.

  Barcelona 1977.

- Ph. D. FRANCIS SCHEID

  Análisis Numérico.

  Libros McGraw-Hill de México, S.A.

  Colombia 1972.

- L.A. HAGEMAN, D.M. YOUNG

  Applied Iterative Methods.

  Editorial Academic Press.

  U.S.A. 1981.

- F.B. HILDEBRAND

  Introduction to Numerical Analysis.

  Segunda edición.

  Libros McGraw-Hill.

  U.S.A. 1974.

- A.S. HOUSEHOLDER

  The Theory of Matrices in Numerical Analysis.

  Editorial Dover Publications, Inc.

  U.S.A. 1975.

- R. LUTHE, A. OLIVERA, F. SCHUTZ

Métodos Numéricos.

Editorial Limusa.

México 1978.

- M.J. MARON

Numerical Analysis. A Practical Approach.

Editorial Macmillan Publishing Co.

U.S.A. 1982.

- J.P. NOUGIER

Méthodes de Calcul Numérique.

Editorial Masson.

Paris 1983.

- M. PICHAT, C. DI CRESCENZO, J. WOLF

Mathematiques pour L'Informatique.

3-Algorithmmique Numerique (2). Exercises et Problemes.

Editorial Armand Colin.

Paris 1971.

- A. RALSTON

Introducción al Análisis Numérico.

Reimpresión.

Editorial Limusa, S.A.

México 1978.

- A. RECUERO FORNIES
  Métodos Numéricos.
  Ediciones I.C.A.I.
  Madrid 1974.

- D.M. YOUNG
  Iterative Solution of Large Linear Systems.
  Editorial Academic Press.
  U.S.A. 1971.

*** COMENTARIOS.**

La mayoría de los problemas físicos, al ser formulados mediante su modelo matemático y tratados numéricamente, conducen a la resolución de un sistema de ecuaciones de orden elevado. Este sistema de ecuaciones será lineal o no lineal de acuerdo con el carácter físico del problema.

En general, al resolver problemas que responden a ecuaciones diferenciales, sometidas a ciertas condiciones iniciales o de contorno, utilizando métodos numéricos nos enfrentamos finalmente a la resolución de un gran sistema de ecuaciones.

Así, por ejemplo, en la aplicación del método de los elementos finitos, el ensamblaje de las matrices de rigidez de los elementos conduce a un sistema de ecuaciones algebraicas lineales, en el caso de problemas lineales. En caso de problemas no lineales, el gran sistema de ecuaciones a resolver es consecuencia de una linealización en cada iteración. Análogamente, esto sucede cuando se aplican esquemas en diferencias finitas.

En el estudio de los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones, desde la aparición de los ordenadores, la optimización de la memoria utilizada así como la minimización del tiempo de cálculo han adquirido gran importancia.

El análisis de métodos diferentes conlleva de forma inevitable a una comparación de sus ventajas e inconvenientes que se estudian atendiendo a los criterios mencionados en el párrafo anterior.

PARTE 3

VALORES Y VECTORES PROPIOS

PARTE 3.- VALORES Y VECTORES PROPIOS.

3.1.- INTRODUCCION.

3.1.1.- Planteamiento del problema.

3.1.2.- Clasificación de los métodos para el cálculo de valores y vectores propios de una matriz.

3.2.- METODOS DIRECTOS DE DETERMINACION DEL POLINOMIO CARACTERISTICO.

3.2.1.- Método de Leverrier modificado.

3.3.- METODOS DE TRANSFORMACION DE LA MATRIZ.

3.3.1.- Método de Jacobi.

3.3.2.- Método de Givens.

3.3.3.- Método de Householder.

3.4.- METODOS ITERATIVOS.

3.4.1.- Método de aproximaciones sucesivas.

3.4.2.- Método QR.

3.4.3.- Métodos de la potencia y la potencia inversa.

* **OBJETIVOS GENERALES.**

- Calcular los valores y vectores propios de una matriz dada mediante el método numérico más adecuado a cada caso.

* **OBJETIVOS ESPECIFICOS.**

3.1.- INTRODUCCION.

- Plantear el problema del cálculo de valores y vectores propios.
- Clasificar los métodos de determinación de valores y vectores propios.

3.2.- METODOS DIRECTOS DE DETERMINACION DEL POLINOMIO CARACTERISTICO.

- Introducir los aspectos generales de los métodos directos para la determinación del polinomio característico de una matriz.
- Describir el método de Leverrier modificado.

3.3.- METODOS DE TRANSFORMACION DE LA MATRIZ.

- Introducir los métodos de transmutación o de transformación de la matriz para el cálculo de valores y vectores propios.
- Describir el método de Jacobi para el cálculo de los valores y vectores propios de una matriz simétrica.
- Describir el método de Givens para el cálculo de los valores y vectores propios de una matriz simétrica.
- Describir el método de Householder para el cálculo de valores y vectores propios de una matriz.

3.4.- METODOS ITERATIVOS.

- Introducir los métodos iterativos para el cálculo de valores y vectores propios de una matriz.
- Describir el método de aproximaciones sucesivas para el cálculo de valores y vectores propios de una matriz simétrica.
- Describir el método QR (o de Francis-Kublanovskaya) para el cálculo de valores y vectores propios de una matriz cualquiera.
- Describir los métodos de la potencia y la potencia inversa para el cálculo de un valor propio de una matriz. Particularizar para el cálculo de mayor valor propio de una matriz.

*** TEMAS PARA CLASES PRACTICAS.**

- Elaborar y ejecutar programas en BASIC y FORTRAN 77 para el cálculo de valores y vectores propios de una matriz utilizando los algoritmos de los métodos estudiados.
- Comparar la efectividad de los métodos programados en problemas con matrices concretas.
- Plantear problemas de la ingeniería en que surga la necesidad del cálculo de valores y vectores propios, tales como elasticidad y resistencia de materiales, vibraciones mecánicas, membrana elástica,...

* **TEMAS DE AMPLIACION Y EJERCICIOS PROPUESTOS.**

- Analizar otros métodos numéricos para el cálculo de valores y vectores propios de una matriz: método de Krylov, método de Hessenberg, método de Lanczos, método LR,...
- Estudiar técnicas de deflación para la determinación sucesiva de valores y vectores propios.

* **TEMPORIZACION.**

El tiempo invertido en la exposición de la Parte 3 será aproximadamente de una semana.

* **BIBLIOGRAFIA.**

Relación detallada.

- R.L.BURDEN, J.D. FAIRES, A.C. REYNOLD
  Numerical Analysis.
  Editorial Prindle, Weber & Schmidt.
  Boston 1981.
  Apartado 8.4 para el estudio de los métodos de la potencia y de la potencia inversa, y método de deflación de Wielandt.
  Apartado 8.5 para desarrollar el método de Householder.

- B. CARNAHAN, H.A. LUTHER, J.O. WILKES

  Cálculo Numérico. Métodos, Aplicaciones.

  Editorial Rueda.

  Madrid 1979.

  Apartados 4.6, 4.7 y 4.9 para el estudio de métodos de determinación de valores y vectores propios de una matriz. Incluye programas en FORTRAN de los mismos.

- P.G. CIARLET

  Introduction á L'Analyse Numérique Matricielle et á L'Optimisation.

  Editorial Masson.

  Paris 1982.

  Capítulo 6 para un tratamiento riguroso de esta parte.

- P.G. CIARLET, J.-M. THOMAS

  Exercises D'Analyse Numérique Matricielle et D'Optimisation.

  Editorial Masson.

  Paris 1982.

  Capítulo 6 para problemas de esta parte.

- A.M. COHEN

  Análisis Numérico.

  Editorial Reverté, S.A.

  Barcelona 1977.

  Capítulo 9 para un estudio general de esta parte.

- N. GASTINEL

  Análisis Numérico Lineal.

  Editorial Reverté, S.A.

  Barcelona 1975.

  Capítulo 8 para un tratamiento general del tema.

- A.S. HOUSEHOLDER

  The Theory of Matrices in Numerical Analysis.

  Editorial Dover Publications, Inc.

  U.S.A. 1975.

  Capítulos 6 y 7 para un desarrollo y ampliación de esta parte.

- R. LUTHE, A. OLIVERA, F. SCHUTZ

  Métodos Numéricos.

  Editorial Limusa.

  México 1978.

  Capítulo 5 para realizar diagramas de flujo y programas en FORTRAN de algunos de los métodos numéricos estudiados.

- F. MICHAVILA, L. GAVETE

  Programación y Cálculo Numérico.

  Editorial Reverté, S.A.

  Barcelona 1985.

  Capítulo 7 para un estudio ajustado de esta parte.

- A. RALSTON

Introducción al Análisis Numérico.

Reimpresión.

Editorial Limusa, S.A.

México 1978.

Capítulo 10 para un estudio completo de esta parte.

- M. SIBONY, J.-Cl. MARDON

Analyse Numérique I . Systémes Linéaires et non Linéaires.

Editorial Hermann.

Paris 1982.

Capítulo 3 para un estudio y ampliación de esta parte.

- J. STOER, R. BURLIRSCH

Introduction to Numerical Analysis.

Editorial Springer-Verlag.

New York 1980.

Capítulo 6 para un tratamiento general de esta parte.

Relación complementaria.

- R.F. CHURCHHOUSE

Handbook of Applicable Mathematics.

Volume III. Numerical Methods.

Editorial John Wiley & Sons.

U.S.A. 1981.

- Ph. D. FRANCIS SCHEID

  Análisis Numérico.

  Libros McGraw-Hill de México, S.A.

  Colombia 1972.

- C.F. GERALD

  Applied Numerical Analysis.

  Segunda edición.

  Editorial Addison-Wesley Publishing Company.

  U.S.A. 1980.

- E. ISAACSON, H.B. KELLER

  Analysis of Numerical Methods.

  Editorial John Wiley & Sons.

  U.S.A. 1966.

- H. LEIPHOLZ

  Direct Variational Methods and Eingevalue Problems in Engineering.

  Editorial Noordhoff.

  Netherlands 1977.

- M.J. MARON

  Numerical Analysis. A Practical Approach.

  Editorial Macmillan Publishing Co.

  U.S.A. 1982.

- J.P. NOUGIER
Méthodes de Calcul Numérique.
Editorial Masson.
Paris 1983.

* COMENTARIOS.

En esta parte se han incluído los métodos numéricos más utilizados en el cálculo de valores y vectores propios de una matriz, intentando que el alumno posea herramientas suficientes cuando se le presente un problema de este tipo.

La solución de muchos problemas físicos requiere el cálculo, o al menos una estimación, de los valores propios y los correspondientes vectores propios de una matriz asociada a un sistema lineal de ecuaciones.

El problema de determinar los valores propios de una matriz se presenta al estudiar problemas discretos de equilibrio dinámico. El problema de valores propios incluye la determinación de la configuración del sistema (vectores propios), pero más importante que esto es la necesidad de encontrar las condiciones críticas de carga bajo las cuales son posibles esas configuraciones. El parámetro que describe tales condiciones críticas es un valor propio. Como ejemplo se tienen las frecuencias naturales de sistemas oscilatorios y las cargas de pandeo en problemas de estabilidad elástica.

P A R T E 4

I N T E R P O L A C I O N

PARTE 4.- INTERPOLACION.

4.1.- INTRODUCCION.

4.1.1.- Planteamiento del problema.

4.1.2.- Clasificación de los métodos de interpolación.

4.2.- INTERPOLACION POLINOMIAL.

4.2.1.- Interpolación de Lagrange.

4.2.2.- Error en interpolación polinomial.

4.2.3.- Interpolación de Taylor.

4.2.4.- Interpolación de Hermite.

4.3.- OTROS METODOS DE INTERPOLACION POLINOMIAL.

4.3.1.- Interpolación con soporte cualquiera.

4.3.1.1.- Diferencias divididas. Propiedades.

4.3.1.2.- Fórmula de Newton.

4.3.2.- Interpolación con soporte equidistante.

4.3.2.1.- Diferencias finitas progresivas y regresivas.

4.3.2.2.- Fórmulas de Newton-Gregory.

4.3.2.3.- Diferencias finitas centradas.

4.3.2.4.- Fórmulas de Gauss.

4.4.- INTERPOLACION POLINOMIAL A TROZOS.

4.4.1.- Interpolación a trozos de Lagrange y Hermite.

4.4.2.- Interpolación polinomial a trozos tipo Spline. Spline Cúbica.

* OBJETIVOS GENERALES.

- Escoger y aplicar la técnica de interpolación más adecuada para obtener el polinomio interpolador de una función de la que se conoce su valor y el de ciertas derivadas en un soporte de interpolación.

* OBJETIVOS ESPECIFICOS.

4.1.- INTRODUCCION.

- Plantear el problema de interpolación generalizado.
- Determinar la condición necesaria y suficiente para que el problema de interpolación generalizado tenga solución única.
- Definir los diferentes tipos de interpolación más usuales.

4.2.- INTERPOLACION POLINOMIAL.

- Calcular el polinomio de Lagrange para un soporte de n puntos.
- Calcular el error de interpolación polinomial.
- Aplicar la interpolación de Taylor (o diferencial).
- Analizar la técnica de interpolación de Hermite.

4.3.- OTROS METODOS DE INTERPOLACION POLINOMIAL.

- Definir las diferencias divididas de una función en un soporte de interpolación.
- Utilizar la fórmula de Newton para calcular el polinomio interpolador de una función.
- Construir la tabla de Frasser y Logenze, útil para el cálculo de diferencias divididas.

- Definir las diferencias finitas progresiva y regresiva de orden m de una función en un punto de un soporte de interpolación equidistante.
- Deducir la relación entre las diferencias finitas regresivas y progresivas.
- Construir las fórmulas de Newton-Gregory (fórmulas del polinomio de interpolación con diferencias finitas progresivas y regresivas).
- Construir la tabla de obtención de diferencias finitas progresivas y regresivas.
- Definir la diferencia central de orden m de una función sobre un soporte de interpolación equidistante.
- Deducir la relación de las diferencias finitas centrales con las diferencias finitas regresivas y progresivas.
- Deducir la relación entre diferencias finitas centrales y diferencias divididas.
- Construir las fórmulas del polinomio interpolador en diferencias centrales (Fórmulas de Gauss progresiva y de Stirling o de Gauss regresiva).

4.4.- INTERPOLACION POLINOMIAL A TROZOS.

- Plantear la interpolación polinomial a trozos.
- Comparar la interpolación polinomial a trozos con la interpolación polinomial sobre todo el soporte.
- Calcular la base del espacio de polinomios a trozos de primer grado en una dimensión, de Lagrange.

- Construir el polinomio interpolador de Lagrange a trozos de primer grado de una función dada por sus valores en los puntos de un soporte cualquiera.
- Calcular la base del espacio de polinomios a trozos de grado n, de Lagrange.
- Construir el polinomio interpolador de Lagrange a trozos de grado n de una función dada por sus valores en los puntos de un soporte convenientemente elegido.
- Estudiar la interpolación polinomial de Hermite.
- Analizar la interpolación spline cúbica.

* **TEMAS PARA CLASES PRACTICAS.**

- Realizar programas en BASIC o FORTRAN 77 para la interpolación polinomial, utilizando los algoritmos de los métodos estudiados.
- Comparar la efectividad de los métodos programados en problemas de interpolación de funciones concretas.
- Plantear problemas de la ingeniería en que surga la necesidad de interpolar funciones, a partir de datos experimentales, tales como procesos químicos y termodinámicos, problemas eléctricos, mecánicos,...

* **TEMAS DE AMPLIACION Y EJERCICIOS PROPUESTOS.**

- Introducirse en el estudio de interpolación mediante funciones racionales.
- Ampliar el estudio de interpolación de Lagrange y Hermite a dos y tres dimensiones. Generalizar a n dimensiones.
- Introducirse en otras técnicas de interpolación: polinomio interpolador por recurrencia, lema de Aitken y algoritmo de Neville.
- Introducirse en la interpolación inversa, iterada, de Tchebycheff, y trigonométrica.
- Introducirse en la interpolación polinomial a trozos bidimensional y tridimensional.
- Estudiar las funciones B-spline.
- Introducirse en la interpolación polinomial a trozos tipo spline bidimensional.

* TEMPORIZACION.

El tiempo invertido en la exposición de la Parte 4 será aproximadamente de dos semanas.

* BIBLIOGRAFIA.

Relación detallada.

- N. BAKHVALOV
  Métodos Numéricos.
  Editorial Paraninfo, S.A.
  Madrid 1980.
  Apartado II.1 para el planteamiento del problema.
  Apartados II.2 y II.3 para el estudio de la interpolación polinomial de Lagrange y el error en dicha interpolación.

- A.M. COHEN
  Análisis Numérico.
  Editorial Reverté, S.A.
  Barcelona 1977.
  Apartados 3.4 y 3.5 para el estudio de las diferencias finitas y de diversas fórmulas de interpolación en diferencias finitas.

- M. CROUZEIX, A.L. MIGNOT

  Analyse Numérique des équations différentielles.

  Editorial Masson.

  Paris 1984.

  Capítulo 1 , apartado 1 para el análisis de la interpolación de Lagrange y de Hermite; apartado 2 para el estudio del error; apartado 3 para una síntesis de las ideas fundamentales de esta parte.

- C.F. GERALD

  Applied Numerical Analysis.

  Segunda edición.

  Editorial Addison-Wesley Publishing Company.

  U.S.A. 1980.

  Apartados 3.1 - 3.6 para un estudio de la interpolación en diferencias finitas.

  Capítulo 10 para el estudio de la interpolación spline cúbica y sus aplicaciones.

- F.B. HILDEBRAND

  Introduction to Numerical Analysis.

  Segunda edición.

  Libros McGraw-Hill.

  U.S.A. 1974.

  Capítulo 4 para un estudio de la interpolación usando diferencias finitas.

  Capítulo 5 para un estudio detallado de las operaciones con dichas diferencias.

Apartados 9.10-9.13 para el estudio de la interpolación spline.

- E. ISAACSON, H.B. KELLER
  Analysis of Numerical Methods.
  Editorial John Wiley & Sons.
  U.S.A. 1966.
  Apartados 6.0, 6.1 y 6.3 para un estudio de la interpolación usando diferencias divididas y centrales.

- P.-J. LAURENT
  Approximation et optimisation.
  Editorial Hermann
  Paris 1972.
  Capítulo 4 para un estudio en profundidad de la función spline.
  Capítulo 9 para un estudio de las funciones spline en un convexo.

- F. MICHAVILA, C. CONDE
  Métodos de Aproximación.
  Publicaciones de la E.T.S. de Ingenieros de Minas de la Universidad Politécnica de Madrid.
  Madrid 1985.
  Capítulos 5, 6 y 7 para un estudio completo y ajustado del tema.

- F. MICHAVILA, L. GAVETE

  Programación y Cálculo Numérico.

  Editorial Reverté, S.A.

  Barcelona 1985.

  Apartado 3.1 para un planteamiento general.

  Apartado 3.2 para la interpolación de Lagrange y algoritmos.

  Apartado 3.3 para la interpolación de Hermite.

  Apartado 3.4 y 3.5 para el estudio de otros métodos de interpolación.

  Apartado 3.7 para una introducción a la interpolación polinomial a trozos.

- A. RALSTON

  Introducción al Análisis Numérico.

  Reimpresión.

  Editorial Limusa, S.A.

  México 1978.

  Apartado 3.2 para interpolación de Lagrange.

  Apartado 3.8 para interpolación de Hermite.

  Apartado 3.9 para el problema de interpolación polinomial en general.

  Páginas 71-83 para un estudio de las diferencias finitas y fórmulas de interpolación en dichas diferencias.

- L. SCHUMAKER

Spline Functions: Basic Theory.

Editorial John Wiley & Sons.

U.S.A. 1981.

El libro, por entero, trata el tema de las funciones spline y sus aplicaciones. El apartado 1.3 se refiere a la interpolación polinomial a trozos. A partir del capítulo 4 y hasta el capítulo 8, se presentan de forma muy ampliada las funciones spline que se estudian en esta parte.

- J. STOER, R. BURLIRSCH

Introduction to Numerical Analysis.

Editorial Springer-Verlag.

New York 1980.

Apartado 2.4 para el estudio de interpolación spline.

- G.A. WATSON

Approximation Theory and Numerical Methods.

Editorial John Wiley & Sons.

U.S.A. 1980.

Capítulo 8 para el estudio de interpolación polinomial de Hermite e interpolación spline, así como el error cometido.

Relación complementaria.

- R.L.BURDEN, J.D. FAIRES, A.C. REYNOLD
  Numerical Analysis.
  Editorial Prindle, Weber & Schmidt.
  Boston 1981.

- B. CARNAHAN, H.A. LUTHER, J.O. WILKES
  Cálculo Numérico. Métodos, Aplicaciones.
  Editorial Rueda.
  Madrid 1979.

- W. CHENEY, D. KINCAID
  Numerical Mathematics and Computing.
  Editorial Brooks/Cole Publishing Company.
  California 1980.

- R.F. CHURCHHOUSE
  Handbook of Applicable Mathematics.
  Volume III. Numerical Methods.
  Editorial John Wiley & Sons.
  U.S.A. 1981.

- P.J. DAVIS
  Interpolation and Approximation.
  Editorial Dover.
  New York 1975.

- J.H. FERZIGER

  Numerical Methods for Engineering Application.

  Editorial John Wiley & Sons.

  U.S.A. 1981.

- Ph. D. FRANCIS SCHEID

  Análisis Numérico.

  Libros McGraw-Hill de México, S.A.

  Colombia 1972.

- R. LUTHE, A. OLIVERA, F. SCHUTZ

  Métodos Numéricos.

  Editorial Limusa.

  México 1978.

- M.J. MARON

  Numerical Analysis. A Practical Approach.

  Editorial Macmillan Publishing Co.

  U.S.A. 1982.

- J.P. NOUGIER

  Méthodes de Calcul Numérique.

  Editorial Masson.

  Paris 1983.

- M. PICHAT, C. DI CRESCENZO, J. WOLF
  Mathematiques pour L'Informatique.
  3-Algorithmmique Numerique (2). Exercises et Problemes.
  Editorial Armand Colin.
  Paris 1971.

- A. RECUERO FORNIES
  Métodos Numéricos.
  Ediciones I.C.A.I.
  Madrid 1974.

*** COMENTARIOS.**

La interpolación constituye la base del análisis numérico clásico. Existen dos razones importantes para esto; la primera está constituída por el hecho de que en la computación manual es necesario observar continuamente el valor de una función en una tabla, realizada mediante la medición de datos experimentales. Para determinar el valor de la función a partir de argumentos no tabulados es necesario interpolar. La segunda razón es que las fórmulas de interpolación constituyen los puntos de partida en las derivaciones de muchos métodos de otras áreas del análisis numérico. Casi todos los métodos clásicos de diferenciación numérica, cuadratura numérica e integración numérica son derivables directamente de las fórmulas de interpolación. Esta es una de las razones por la que esta parte haya sido propuesta en un lugar anterior a las materias mencionadas en el presente Programa.

PARTE 5

DERIVACION E INTEGRACION NUMERICA

PARTE 5.- DERIVACION E INTEGRACION NUMERICA.

5.1.- DERIVACION NUMERICA.

5.1.1.- Planteamiento del problema.

5.1.2.- Fórmulas de derivación numérica de tipo interpolatorio.

5.1.2.1.- Expresión general de las fórmulas.

5.1.2.2.- Estudio del error cometido.

5.1.3.- Fórmulas usuales de derivación numérica.

5.1.3.1.- Derivadas de primer orden.

5.1.3.2.- Derivadas de orden superior.

5.2.- INTEGRACION NUMERICA.

5.2.1.- Planteamiento del problema.

5.2.2.- Fórmulas de integración numérica de tipo interpolatorio.

5.2.2.1.- Expresión general de las fórmulas.

5.2.2.2.- Estudio del error cometido.

5.2.3.- Fórmulas usuales de integración numérica.

5.2.3.1.- Fórmula del rectángulo.

5.2.3.2.- Fórmula del punto medio.

5.2.3.3.- Fórmula del trapecio.

5.2.4.- Fórmulas de Newton-Cotes.

5.2.4.1.- Fórmulas cerradas.

5.2.4.2.- Fórmulas abiertas.

5.2.5.- Fórmulas de cuadratura de Gauss.

5.2.6.- Fórmulas de Gauss ponderadas.

5.2.6.1.- Cuadratura de Gauss-Legendre.

5.2.6.2.- Cuadratura de Gauss-Laguerre.

5.2.6.3.- Cuadratura de Gauss-Hermite.

5.2.6.4.- Cuadratura de Gauss-Tchebycheff.

5.2.7.- Fórmulas de cuadratura compuestas.

* **OBJETIVOS GENERALES.**

- Conocidos los valores que toma una función de una variable en un soporte de puntos, calcular el valor de su derivada de orden k en un punto comprendido entre los extremos del soporte.
- Conocidos los valores que toma una función de una variable en un soporte de puntos, calcular la integral definida de dicha función extendida a un determinado intervalo.

* **OBJETIVOS ESPECIFICOS.**

5.1.- DERIVACION NUMERICA.

- Plantear el problema de la derivación numérica.
- Definir el concepto de fórmula de derivación exacta de orden k.
- Determinar la expresión general de las fórmulas de derivación numérica de tipo interpolatorio para la obtención de primeras derivadas.
- Demostrar que las únicas fórmulas de derivación numérica exactas para todo polinomio de grado menor o igual que n, construidas sobre un soporte de n+1 puntos, son las de tipo interpolatorio.
- Escribir la expresión de la fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio para la obtención de la derivada k-ésima.
- Obtener la expresión general del error cometido al aproximar la primera derivada de una función en un

punto mediante una fórmula de tipo interpolatorio.

- Deducir las fórmulas de derivación numérica para el cálculo de la primera derivada usando soportes de uno, dos y tres puntos, y hallar las expresiones del error que se comete con dichas fórmulas.
- Deducir las fórmulas más usuales de derivación numérica para la obtención de derivadas de orden k.
- Hallar la expresión de los errores cometidos al aproximar una derivada de orden k, mediante las fórmulas más usuales de derivación numérica.

5.2.- INTEGRACION NUMERICA.

- Plantear el problema de la integración numérica.
- Escribir la expresión general de las fórmulas de integración (o cuadratura) numérica.
- Definir el concepto de fórmula de cuadratura numérica exacta de orden k.
- Definir la expresión general de las fórmulas de integración numérica de tipo interpolatorio.
- Demostrar que las únicas fórmulas de integración numérica, construidas sobre un soporte de n+1 puntos, exactas para todo polinomio de grado menor o igual que n son las fórmulas de tipo interpolatorio.
- Deducir la expresión general del error cometido en las fórmulas de integración numérica de tipo interpolatorio.
- Deducir las fórmulas del rectángulo y del punto medio, así como el error cometido en cada una.

- Deducir la fórmula de integración del trapecio y el error cometido con ella.
- Definir el concepto de fórmula de integración de Newton-Cotes cerrada.
- Deducir la fórmula de Simpson con tres puntos de soporte y hallar el error que se comete con ella.
- Deducir las fórmulas de Newton-Cotes cerradas y del error con cuatro y cinco puntos de soporte.
- Definir el concepto de fórmula de integración de Newton-Cotes abierta.
- Introducir las fórmulas de Newton-Cotes abiertas con uno, dos, tres y cuatro puntos de soporte y la expresión del error cometido con ella.
- Construir las fórmulas de integración gaussiana con n puntos de soporte y calcular dichos puntos.
- Determinar el grado de los polinomios para los que una fórmula de cuadratura gaussiana es exacta.
- Determinar el error cometido en las fórmulas de integración gaussiana.
- Conocer las fórmulas de integración ponderada de Gauss-Legendre, Gauss-Laguerre, Gauss-Hermite y Gauss-Tchebycheff.
- Enunciar los criterios que hacen necesarias las fórmulas de integración compuestas.
- Construir las fórmulas de integración compuestas a partir de las simples dando las nuevas expresiones del error.

* **TEMAS PARA CLASES PRACTICAS.**

- Realizar programas en BASIC o FORTRAN 77 para la derivación e integración numérica, utilizando los algoritmos de las técnicas estudiadas.
- Comparar los errores cometidos en los distintos métodos de derivación e integración numérica programados, al aplicarlos a problemas concretos.
- Plantear diferentes problemas de ingeniería en los que sea necesario realizar derivación e integración numérica de determinadas magnitudes físicas, ya sea por la complejidad de su expresión o por ser éstas conocidas mediante datos experimentales.

* **TEMAS DE AMPLIACION Y EJERCICIOS PROPUESTOS.**

- Calcular numéricamente derivadas parciales de orden k de funciones de varias variables.
- Analizar otros casos de métodos de integración numérica de tipo interpolatorio.
- Introducirse en el estudio de fórmulas numéricas para el cálculo de integrales dobles y triples.
- Estudiar la integración gaussiana extendida a ciertos dominios bidimensionales y tridimensionales.

* **TEMPORIZACION.**

El tiempo invertido en la exposición de la Parte 5 será aproximadamente de dos semanas.

* **BIBLIOGRAFIA.**

Relación detallada.

- N. BAKHVALOV

  Métodos Numéricos.

  Editorial Paraninfo, S.A.

  Madrid 1980.

  Apartados II.17 y II.18 para un estudio del error en las fórmulas de derivación.

  Apartado III.1 para el estudio de las fórmulas de Newton-Cotes; apartado III.2 para el estudio del error en integración numérica de funciones; apartado III.3 para la cuadratura gaussiana; apartado III.4 para la evaluación práctica del error en fórmulas de cuadratura elementales.

- B. CARNAHAN, H.A. LUTHER, J.O. WILKES

  Cálculo Numérico. Métodos, Aplicaciones.

  Editorial Rueda.

  Madrid 1979.

  Capítulo 2 para el método de Newton-Cotes.

- A.M. COHEN

  Análisis Numérico.

  Editorial Reverté, S.A.

  Barcelona 1977.

Apartado 5.1 para el estudio de las fórmulas de Newton-Cotes; apartado 5.3 para el estudio de las fórmulas de integración en diferencias; apartado 5.5 para estudiar la integración gaussiana.

- M. CROUZEIX, A.L. MIGNOT
  Analyse Numérique des équations différentielles.
  Editorial Masson.
  Paris 1984.
  Apartado 2.1 para un estudio riguroso de los métodos de integración numérica; apartados 2.2 y 2.3 para un estudio del error de estos métodos.

- C.F. GERALD
  Applied Numerical Analysis.
  Segunda edición.
  Editorial Addison-Wesley Publishing Company.
  U.S.A. 1980.
  Apartados 4.1 y 4.2 para un estudio general de la derivación numérica; apartados 4.3 y 4.4 para una ampliación a otras técnicas de derivación numérica. Apartado 4.7 para un planteamiento general de la fórmula del trapecio de integración numérica; apartados 4.9 y 4.10 para un estudio de la regla de integración numérica de Simpson.

- F.B. HILDEBRAND

  Introduction to Numerical Analysis.

  Libros McGraw-Hill.

  U.S.A. 1974.

  Capítulo 8 para un estudio exhaustivo de la cuadratura gaussiana.

- E. ISAACSON, H.B. KELLER

  Analysis of Numerical Methods.

  Editorial John Wiley & Sons.

  U.S.A. 1966.

  Apartado 6.5 para el estudio de fórmulas de derivación numérica de tipo interpolatorio.

  Apartado 7.0 para un planteamiento general de la integración numérica; apartado 7.1 para un estudio de las fórmulas de integración numérica de tipo interpolatorio en general, y concretamente, las de Newton-Cotes; apartado 7.2 para un estudio del error; apartados 7.3 y 7.4 para la integración gaussiana; apartado 7.5 para fórmulas de cuadratura compuestas.

- F. MICHAVILA, C. CONDE

  Métodos de Aproximación.

  Publicaciones de la E.T.S. de Ingenieros de Minas de la Universidad Politécnica de Madrid.

  Madrid 1985.

  Apéndice A para un estudio ajustado de esta parte.

- F. MICHAVILA, L. GAVETE
  Programación y Cálculo Numérico.
  Editorial Reverté, S.A.
  Barcelona 1985.
  Apartados 4.1 y 4.2 para una visión global de la derivación numérica.
  Apartado 4.3 para un estudio de las fórmulas de integración numérica de tipo interpolatorio; apartados 4.4 y 4.5 para una introducción a la cuadratura de Gauss y cuadratura compuesta, respectivamente.

- A. RALSTON
  Introducción al Análisis Numérico.
  Reimpresión.
  Editorial Limusa, S.A.
  México 1978.
  Apartados 4.5 al 4.9 para un estudio de la cuadratura gaussiana; apartados 4.11 al 4.13 para fórmulas de integración compuestas.

- J. STOER, R. BURLIRSCH
  Introduction to Numerical Analysis.
  Editorial Springer-Verlag.
  New York 1980.
  Apartado 3.1 para el estudio de las fórmulas de Newton-Cotes; apartado 3.6 para la cuadratura gaussiana.

Relación complementaria.

- R.L.BURDEN, J.D. FAIRES, A.C. REYNOLD
  Numerical Analysis.
  Editorial Prindle, Weber & Schmidt.
  Boston 1981.

- W. CHENEY, D. KINCAID
  Numerical Mathematics and Computing.
  Editorial Brooks/Cole Publishing Company.
  California 1980.

- R.F. CHURCHHOUSE
  Handbook of Applicable Mathematics.
  Volume III. Numerical Methods.
  Editorial John Wiley & Sons.
  U.S.A. 1981.

- J.H. FERZIGER
  Numerical Methods for Engineering Application.
  Editorial John Wiley & Sons.
  U.S.A. 1981.

- Ph. D. FRANCIS SCHEID
  Análisis Numérico.
  Libros McGraw-Hill de México, S.A.
  Colombia 1972.

- R. LUTHE, A. OLIVERA, F. SCHUTZ
  Métodos Numéricos.
  Editorial Limusa.
  México 1978.

- M.J. MARON
  Numerical Analysis. A Practical Approach.
  Editorial Macmillan Publishing Co.
  U.S.A. 1982.

- J.P. NOUGIER
  Méthodes de Calcul Numérique.
  Editorial Masson.
  Paris 1983.

- M. PICHAT, C. DI CRESCENZO, J. WOLF
  Mathematiques pour L'Informatique.
  3-Algorithmmique Numerique (2). Exercises et Problemes.
  Editorial Armand Colin.
  Paris 1971.

- A. RECUERO FORNIES
  Métodos Numéricos.
  Ediciones I.C.A.I.
  Madrid 1974.

* COMENTARIOS.

Como extensión de los métodos de interpolación estudiados en la parte anterior del programa, se presenta aquí el problema de la derivación e integración numérica.

Ya en el programa de Cálculo Diferencial e Integral del presente Proyecto Docente, se resaltó la importancia de la derivación e integración de funciones, dadas las múltiples aplicaciones que se derivan en la ingeniería. En aquel momento se estudiaron estas materias desde un punto de vista analítico. Ahora bien, no siempre es fácil el cálculo analítico de derivadas o integrales de una función. Esto puede ser debido a que ésta posea una expresión complicada o que simplemente se conozcan valores tabulados de la misma, muchas veces obtenidos experimentalmente. La derivación e integración numérica resuelven precisamente estos dos problemas.

Asimismo, la derivación e integración numérica son herramientas fundamentales de otros métodos numéricos más complejos, tales como ciertos métodos de resolución de ecuaciones diferenciales con condiciones de contorno y/o iniciales.

P A R T E 6

E C U A C I O N E S D I F E R E N C I A L E S O R D I N A R I A S

PARTE 6.- ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.

6.1.- INTRODUCCION.

6.1.1.- Planteamiento de los problemas de valor inicial y de contorno.

6.1.2.- Clasificación de los métodos numéricos de resolución.

6.1.3.- Convergencia, estabilidad y consistencia.

6.2.- PROBLEMAS DE VALOR INICIAL.

6.2.1.- Métodos de pasos libres.

6.2.1.1.- Método de Euler.

6.2.1.2.- Método de Euler modificado o de Heun.

6.2.1.3.- Método de Euler mejorado.

6.2.1.4.- Método de Runge-Kutta de cuarto orden.

6.2.2.- Métodos de pasos ligados.

6.2.2.1.- Métodos explícitos.

6.2.2.1.1.- Métodos de Adams-Bashforth.

6.2.2.1.2.- Métodos de Nystrom.

6.2.2.1.3.- Método de Milne.

6.2.2.2.- Métodos implícitos.

6.2.2.2.1.- Métodos de Adams-Moulton.

6.2.2.2.2.- Método de Milne-Simpson.

6.2.3.- Métodos de predicción-corrección.

6.2.4.- Ecuaciones diferenciales de orden superior y sistemas.

6.3.- PROBLEMAS DE CONTORNO.

6.3.1.- Método de tiro.

6.3.1.1.- Problema lineal.

6.3.1.2.- Problema no lineal.

6.3.2.- Método de diferencias finitas.

6.3.2.1.- Problema lineal.

6.3.2.2.- Problema no lineal.

* **OBJETIVOS GENERALES.**

- Analizar y aplicar diferentes métodos de resolución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales o de contorno.

* **OBJETIVOS ESPECIFICOS.**

6.1.-INTRODUCCION.

- Plantear los problemas de valor inicial y de contorno.
- Clasificar los métodos numéricos de resolución de los problemas planteados. Describir sus aspectos generales.
- Definir el concepto de error de truncamiento.
- Definir el concepto de error de redondeo.
- Definir el concepto de error global.
- Estudiar la relación entre los diferentes errores.
- Definir la noción de convergencia de un método.
- Definir el concepto de orden de convergencia de un método.
- Definir la noción de estabilidad de un método.
- Definir el concepto de radio de estabilidad de un método.
- Definir la noción de consistencia de un método.
- Definir el concepto de error de consistencia de un método.
- Plantear la relación entre los conceptos de convergencia, estabilidad y consistencia.

6.2.- PROBLEMAS DE VALOR INICIAL.

- Introducir los métodos de pasos libres (o de un paso).
- Deducir el método de Euler e interpretarlo gráficamente.
- Introducir el orden de convergencia del método de Euler.
- Describir el método de Euler modificado (o de Heun) e introducir su orden de convergencia.
- Describir el método de Euler mejorado e introducir su orden de convergencia.
- Describir la formulación general de los métodos de Runge-Kutta.
- Conocer el método de Runge-Kutta de cuarto orden y analizar su convergencia.
- Introducir los métodos de pasos ligados (o de multipasos).
- Describir la forma general de obtención de los métodos de pasos ligados explícitos e implícitos.
- Describir la formulación de los métodos explícitos más utilizados de Adams-Bashforth, Nystrom y Milne, indicando sus órdenes de convergencia.
- Describir la formulación de los métodos implícitos más utilizados de Adams-Moulton y Milne-Simpson, indicando sus órdenes de convergencia.
- Describir los métodos de predicción-corrección.

- Plantear el problema de resolución de ecuaciones diferenciales de orden superior y sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden.
- Recordar la equivalencia entre una ecuación diferencial ordinaria de orden n y un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden.
- Describir los métodos de Euler y Runge-Kutta para la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden.

6.3.- PROBLEMAS DE CONTORNO.

- Describir el método de tiro aplicado a un problema de contorno lineal de segundo orden.
- Describir el método de tiro aplicado a un problema de contorno de segundo orden no lineal.
- Deducir el método de diferencias finitas para resolver un problema de contorno de segundo orden lineal.
- Deducir el método de diferencias finitas para resolver un problema de contorno de segundo orden no lineal.

*** TEMAS PARA CLASES PRACTICAS.**

- Realizar programas en BASIC o FORTRAN 77 , utilizando los algoritmos de los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias estudiados en esta parte.

- Comparar la efectividad de los distintos métodos programados al aplicarlos en la resolución de problemas concretos.
- Plantear diferentes problemas de ingeniería cuya formulación responda a un problema de valor inicial o de contorno: problemas de transmisión de calor, cálculo de potencial eléctrico, resolución de circuitos,...

*** TEMAS DE AMPLIACION Y EJERCICIOS PROPUESTOS.**

- Realizar un estudio riguroso del análisis de convergencia, estabilidad y consistencia de cada uno de los métodos propuestos.
- Utilizar las técnicas de predicción-corrección combinando diversos métodos.
- Introducirse en el control automático del orden y del paso.
- Introducirse en los problemas Stiff.
- Introducirse en el método de los elementos finitos para la resolución de problemas de contorno en una dimensión.

*** TEMPORIZACION.**

El tiempo invertido en la exposición de la Parte 6 será aproximadamente de tres semanas.

* BIBLIOGRAFIA.

Relación detallada.

- C.T.H. BAKER, C. PHILLIPS
The Numerical Solution of Nonlinear Problems.
Editorial Oxford University Press.
New York 1981.
Capítulo 6 para el estudio del problema de valor inicial.
Capítulo 11 para el estudio y ampliación del método de tiro en problemas no lineales de contorno.

- R.L.BURDEN, J.D. FAIRES, A.C. REYNOLD
Numerical Analysis.
Editorial Prindle, Weber & Schmidt.
Boston 1981.
Capítulo 5 para un seguimiento completo del problema de valor inicial; apartado 5.10 para introducirse en los problemas Stiff propuestos como temas de ampliación.
Apartados 10.1 y 10.2 para el estudio ajustado del método de tiro para problemas lineales y no lineales, respectivamente; apartado 10.3 para el método de diferencias finitas en problemas de contorno.

- B. CARNAHAN, H.A. LUTHER, J.O. WILKES

  Cálculo Numérico. Métodos, Aplicaciones.

  Editorial Rueda.

  Madrid 1979.

  Capítulo 6 para un estudio general de la parte, incluyendo algunos programas en FORTRAN de métodos numéricos estudiados, con aplicaciones a la ingeniería.

- R.F. CHURCHHOUSE

  Handbook of Applicable Mathematics.

  Volume III. Numerical Methods.

  Editorial John Wiley & Sons.

  U.S.A. 1981.

  Apartado 8.2 para el estudio del problema de valor inicial; apartado 8.3 para los métodos multipasos.

- M. CROUZEIX, A.L. MIGNOT

  Analyse Numérique des équations différentielles.

  Editorial Masson.

  Paris 1984.

  Capítulo 4 para un estudio detallado del método de Euler.

  Capítulo 5 para un estudio general de los métodos de un paso.

  Capítulo 6 para un estudio detallado de los métodos de Adams.

- J.H. FERZIGEN
  Numerical Methods for Engineering Application.
  Editorial John Wiley & Sons.
  U.S.A. 1981.
  Capítulo 3 para un desarrollo general y ampliado de la parte, incluyendo programas en FORTRAN de diferentes métodos.

- C.F. GERALD
  Applied Numerical Analysis.
  Segunda edición.
  Editorial Addison-Wesley Publishing Company.
  U.S.A. 1980.
  Capítulo 5 para el estudio del problema de valor inicial.
  Apartado 6.1 para el método de tiro en problemas de contorno.

- E. ISAACSON, H.B. KELLER
  Analysis of Numerical Methods.
  Editorial John Wiley & Sons.
  U.S.A. 1966.
  Apartado 8.7 para un estudio de los diversos métodos de resolución de problemas de contorno.

- R. LUTHE, A. OLIVERA, F. SCHUTZ

  Métodos Numéricos.

  Editorial Limusa.

  México 1978.

  Capítulo 8 para un desarrollo general de la parte, incluyendo programas en FORTRAN de algunos de los métodos estudiados.

- M.J. MARON

  Numerical Analysis. A Practical Approach.

  Editorial Macmillan Publishing Co.

  U.S.A. 1982.

  Capítulo 8 para un estudio completo y ampliación de esta parte.

- F. MICHAVILA, L. GAVETE

  Programación y Cálculo Numérico.

  Editorial Reverté, S.A.

  Barcelona 1985.

  Capítulo 8 para algunos programas en BASIC.

- J.M. ORTEGA, W.G. POOLE Jr.

  An Introduction to Numerical Methods for Differential Equations.

  Editorial Pitman Publishing Inc.

  U.S.A. 1981.

  Apartado 2.5 para problemas Stiff.

Capítulo 3 para el método de diferencias finitas en el caso lineal, y capítulo 4 para el método de tiro y diferencias finitas en el caso no lineal.

- C.E. ROBERTS, Jr.
  Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Un enfoque al Cálculo Numérico.
  Editorial Dossat, S.A.
  Madrid 1980.
  Capítulo 4 para un desarrollo detallado y completo del problema de valor inicial.
  Capítulo 10 para problemas de contorno, incluyendo programas en FORTRAN.

Relación complementaria.

- N. BAKHVALOV
  Métodos Numéricos.
  Editorial Paraninfo, S.A.
  Madrid 1980.

- W. CHENEY, D. KINCAID
  Numerical Mathematics and Computing.
  Editorial Brooks/Cole Publishing Company.
  California 1980.

- A.M. COHEN

  Análisis Numérico.

  Editorial Reverté, S.A.

  Barcelona 1977.

- R. DAUTRAY, J.-L. LIONS

  Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques (2 Tomos).

  Editorial Masson.

  Paris 1984.

- Ph. D. FRANCIS SCHEID

  Análisis Numérico.

  Libros McGraw-Hill de México, S.A.

  Colombia 1972.

- F.B. HILDEBRAND

  Introduction to Numerical Analysis.

  Segunda edición.

  Libros McGraw-Hill.

  U.S.A. 1974.

- J.P. NOUGIER

  Méthodes de Calcul Numérique.

  Editorial Masson.

  Paris 1983.

- M. PICHAT, C. DI CRESCENZO, J. WOLF
  Mathematiques pour L'Informatique.
  3-Algorithmmique Numerique (2). Exercises et Problemes.
  Editorial Armand Colin.
  Paris 1971.

- A. RALSTON
  Introducción al Análisis Numérico.
  Reimpresión.
  Editorial Limusa, S.A.
  México 1978.

- A. RECUERO FORNIES
  Métodos Numéricos.
  Ediciones I.C.A.I.
  Madrid 1974.

- J. STOER, R. BURLIRSCH
  Introduction to Numerical Analysis.
  Editorial Springer-Verlag.
  New York 1980.

* COMENTARIOS.

El comportamiento de muchos procesos físicos, particularmente los dependientes del tiempo (régimen transitorio) puede representarse por medio de ecuaciones diferenciales ordinarias. Los métodos de resolución de estas ecuaciones son por tanto de gran importancia para científicos e ingenieros. Aunque se conoce la solución analítica de muchas ecuaciones diferenciales importantes, un número todavía mayor de ellas no pueden ser resueltas analíticamente. Afortunadamente, puede, en general, encontrarse la solución numérica de estas últimas.

El campo de la resolución numérica de ecuaciones diferenciales centra gran parte de la investigación realizada en el presente, intentando encontrar algoritmos más generales y eficaces, en cuanto al tiempo de cálculo y memoria requerida de ordenador.

En esta parte se describen algunos de los métodos numéricos más utilizados para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias sometidas a condiciones de valor inicial o de contorno.

En la parte siguiente, se extenderá este estudio a ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

PARTE 7

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

PARTE 7.- ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES.

7.1.- INTRODUCCION.

7.1.1.- Generalidades. Fenómenos físicos representados mediante ecuaciones en derivadas parciales.

7.1.2.- Clasificación de los métodos de resolución.

7.1.3.- Diferencias finitas. Convergencia, estabilidad y consistencia de un esquema.

7.2.- ECUACIONES ELIPTICAS.

7.2.1.- Método de diferencias finitas para la ecuación de Poisson con condiciones de tipo Dirichlet. Convergencia, consistencia y estabilidad. Problema en R^2.

7.2.2.- Extensión al problema de Neuman en R^2.

7.2.3.- Método de colocación.

7.3.- ECUACIONES PARABOLICAS.

7.3.1.- Diferencias finitas para la ecuación de calor en una dimensión. Convergencia, consistencia y estabilidad.

7.3.2.- Extensión del método a R^2.

7.4.- ECUACIONES HIPERBOLICAS.

7.4.1.- Diferencias finitas para la ecuación de transporte en una dimensión. Convergencia, consistencia y estabilidad.

7.4.2.- Método de diferencias finitas para la ecuación de ondas en una dimensión. Convergencia, consistencia y estabilidad.

* **OBJETIVOS GENERALES.**

- Analizar y aplicar el método de diferencias finitas a la resolución de ecuaciones en derivadas parciales.

* **OBJETIVOS ESPECIFICOS.**

7.1.- INTRODUCCION.

- Definir las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales elípticas, parabólicas e hiperbólicas.
- Conocer algunos problemas físicos que se modelizan mediante ecuaciones en derivadas parciales.
- Clasificar los principales métodos numéricos de resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.
- Obtener las expresiones en diferencias finitas centradas, regresivas y progresivas de las derivadas parciales de primer y segundo orden en R^2.
- Estudiar la convergencia, consistencia y estabilidad de un esquema en diferencias finitas centradas correspondiente a una ecuación diferencial en derivadas parciales general de segundo orden. Definir los distintos errores del método.

7.2.- ECUACIONES ELIPTICAS.

- Definir un problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson en un rectángulo.
- Deducir el esquema en diferencias finitas centrales para el problema anterior.
- Deducir el valor del error de consistencia.

- Deducir la expresión matricial del método de diferencias finitas centrales.
- Modificar el esquema en diferencias anterior para tratar condiciones de contorno de Neuman.
- Introducir el método de colocación simple y generalizado.

7.3.- ECUACIONES PARABOLICAS.

- Plantear el problema de conducción de calor en 1-D, en el caso transitorio.
- Deducir el esquema de diferencias progresivas para la resolución del problema anterior.
- Deducir el error de consistencia para el esquema de diferencias progresivas.
- Analizar la estabilidad del esquema de diferencias progresivas.
- Analizar la convergencia del método de diferencias progresivas.
- Deducir el esquema de diferencias regresivas para la resolución del problema anterior.
- Deducir el error de consistencia para el esquema en diferencias regresivas.
- Analizar la estabilidad del esquema en diferencias regresivas.
- Analizar la convergencia del esquema en diferencias regresivas.
- Deducir el esquema de Crank-Nicolson para la resolución del problema planteado.

- Deducir el error de consistencia del método de Crank-Nicolson.
- Analizar la estabilidad del método de Crank-Nicolson
- Analizar la convergencia del método de Crank-Nicolson.
- Introducir el método de diferencias finitas a la ecuación de calor en R^2.

7.4.- ECUACIONES HIPERBOLICAS.

- Plantear el problema del transporte en 1-D.
- Deducir el esquema en diferencias explícito para el problema anterior.
- Deducir el error de consistencia para dicho esquema.
- Analizar la estabilidad para dicho esquema.
- Analizar la convergencia para dicho esquema.
- Deducir un esquema en diferencias implícito para el problema planteado.
- Deducir el error de consistencia para dicho esquema.
- Analizar la estabilidad para dicho esquema.
- Analizar la convergencia para dicho esquema.
- Plantear el problema de la propagación de ondas en 1-D.
- Deducir el esquema en diferencias centrales para el problema anterior.
- Deducir el error de consistencia para el esquema en diferencias centrales anterior.
- Analizar la estabilidad del esquema en diferencias centrales anterior.

- Analizar la convergencia del esquema en diferencias centrales anterior.

*** TEMAS PARA CLASES PRACTICAS.**

- Realizar programas en BASIC o FORTRAN 77, utilizando los algoritmos de los esquemas en diferencias para resolver ecuaciones en derivadas parciales, expuestos en esta parte.
- Comparar la efectividad de los diferentes esquemas propuestos para la resolución de problemas concretos elípticos, parabólicos e hiperbólicos.
- Plantear problemas de la ingeniería cuya formulación respondan a una ecuación en derivadas parciales: cálculo de potencial electrostático, transmisión de calor por conducción en régimen transitorio, propagación de ondas,...

*** TEMAS DE AMPLIACION Y EJERCICIOS PROPUESTOS.**

- Introducirse en el estudio de los esquemas en direcciones alternadas.
- Introducirse en el método de los elementos finitos para la resolución de problemas de contorno en 2-D.

*** TEMPORIZACION.**

El tiempo invertido en la exposición de la Parte 7 será aproximadamente de dos semanas.

* BIBLIOGRAFIA.

Relación detallada.

- R.L.BURDEN, J.D. FAIRES, A.C. REYNOLD
  Numerical Analysis.
  Editorial Prindle, Weber & Schmidt.
  Boston 1981.
  Apartado 11.1 para ejemplos físicos, apartado 11.2 para el tratamiento por diferencias finitas de la ecuación de Poisson, apartado 11.3 para un desarrollo ajustado de las ecuaciones parabólicas y apartado 11.4 para ecuaciones hiperbólicas de segundo orden. En todos los casos se incluye la programación.

- B. CARNAHAN, H.A. LUTHER, J.O. WILKES
  Cálculo Numérico. Métodos, Aplicaciones.
  Editorial Rueda.
  Madrid 1979.
  Capítulo 7 para un desarrollo general de esta parte excepto problemas hiperbólicos.

- W. CHENEY, D. KINCAID
  Numerical Mathematics and Computing.
  Editorial Brooks/Cole Publishing Company.
  California 1980.
  Capítulo 15 para ejemplos físicos y programas.

- J.H. FERZIGEN

Numerical Methods for Engineering Application.

Editorial John Wiley & Sons.

U.S.A. 1981.

Apartados 4.7, 4.8, 4.9 y 4.11 para un estudio de diversos métodos para la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales asociados y programación.

Apartado 4.1 y 4.2 para ecuaciones parabólicas y su programación. Apartado 4.18, 4.20 y 4.21 para ecuaciones hiperbólicas y su programación.

- L. LAPIDUS, G.F. PINDER

Numerical Solution of Partial Differential Equations in Science and Engineering.

Editorial John Wiley & Sons.

U.S.A. 1982.

Apartados 5.1 a 5.4 para un tratamiento general de las ecuaciones elípticas. Capítulo 4 para un estudio de los métodos aplicados a problemas parabólicos. Capítulo 6 para un estudio general de los métodos aplicados a problemas hiperbólicos.

- F. MICHAVILA, L. GAVETE

Programación y Cálculo Numérico.

Editorial Reverté, S.A.

Barcelona 1985.

Apartados 9.1, 9.2, 9.4 y 9.5 para la programación.

- J.P. NOUGIER

  Méthodes de Calcul Numérique.

  Editorial Masson.

  Paris 1983.

  Apartados 10.6 a 10.8 para un desarrollo completo de esta parte.

- J. NOYE (Editor)

  Numerical Solutions of Partial Differential Equations.

  Editorial North-Holland Publishing Company.

  Amsterdam 1982.

  Todo el libro realiza un estudio ampliado de esta parte.

- J.M. ORTEGA, W.G. POOLE Jr.

  An Introduction to Numerical Methods for Differential Equations.

  Editorial Pitman Publishing Inc.

  U.S.A. 1981.

  Secciones 7.2 y 7.3 para un estudio del problema de la estabilidad.

- P.A. RAVIART, J.M. THOMAS

  Introduction á L'Analyse Numérique des Equations aux Dérivées Partielles.

  Editorial Masson.

  Paris 1983.

  Capítulo 2, 7 y 8 para una ampliación de esta parte.

- A.A. SAMARSKI, V.B. ANDREIEV

Métodos en Diferencias para las Ecuaciones Elípticas.

Editorial MIR.

Moscú 1979.

Todo el texto es útil para un desarrollo ampliado de las ecuaciones elípticas.

Relación complementaria.

- C.T.H. BAKER, C. PHILLIPS

The Numerical Solution of Nonlinear Problems.

Editorial Oxford University Press.

New York 1981.

- R.F. CHURCHHOUSE

Handbook of Applicable Mathematics.

Volume III. Numerical Methods.

Editorial John Wiley & Sons.

U.S.A. 1981.

- A.M. COHEN

Análisis Numérico.

Editorial Reverté, S.A.

Barcelona 1977.

- R. DAUTRAY, J.-L. LIONS
  Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques (2 Tomos).
  Editorial Masson.
  Paris 1984.

- C.F. GERALD
  Applied Numerical Analysis.
  Segunda edición.
  Editorial Addison-Wesley Publishing Company.
  U.S.A. 1980.

- E. ISAACSON, H.B. KELLER
  Analysis of Numerical Methods.
  Editorial John Wiley & Sons.
  U.S.A. 1966.

- R. LUTHE, A. OLIVERA, F. SCHUTZ
  Métodos Numéricos.
  Editorial Limusa.
  México 1978.

- A. RECUERO FORNIES
  Métodos Numéricos.
  Ediciones I.C.A.I.
  Madrid 1974.

* COMENTARIOS.

Las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales se presentan frecuentemente al analizar problemas científicos y de ingeniería, como torsión de barras, análisis de membranas y placas, vibración de cables y barras, problemas de la mecánica de fluidos, elasticidad, plasticidad, transferencia de calor, campos eléctricos y magnéticos, etc.

En esta parte, se presenta una breve introducción a algunas técnicas numéricas que permiten aproximar la solución de ciertos problemas tipo, modelizados por medio de una ecuación en derivadas parciales sometida a ciertas condiciones de contorno y/o iniciales. Se limita el estudio a estos tipos de ecuaciones, ya que sería necesario recurrir a técnicas numéricas más complejas, con una base de análisis más riguroso, para poder resolver problemas inestables en la propia naturaleza.

Este es un campo de investigación abierto en la actualidad. Incluso métodos numéricos más potentes, como el de los elementos finitos, puede necesitar resolver sistemas de grandes dimensiones para conseguir una solución aproximada aceptable. En ciertos casos ésto llega a ser inviable.

C A P I T U L O   6

B i b l i o g r a f í a

CAPITULO 6.- BIBLIOGRAFIA.

A continuación se expone una relación bibliográfica global ordenada alfabéticamente por autores, en la que se incluyen aquellos libros que han ayudado al desarrollo de los programas de las materias objeto del presente Proyecto Docente.

Las fuentes bibliográficas se han agrupado en dos grupos correspondientes a los contenidos de:

* Cálculo Diferencial e Integral.

* Métodos Numéricos.

La mayor parte de la bibliografía ha sido comentada e incluída en los desarrollos detallados de los distintos programas, por parecer más coherente con la estructura seguida en este Proyecto Docente. Es por esto, que en este Capítulo sólo se ha pretendido agrupar, según las materias antes mencionadas, las fuentes consultadas con el fin de facilitar una visión más general.

Por último, indicar que todos los libros, que aquí se citan, se encuentran en el Departamento de Matemática Aplicada a disposición de los alumnos y profesores que deseen consultarlos.

* **Cálculo Diferencial e Integral.**

- J.M. AMILLO

  Topología: Espacios Métricos.

  Tercera edición.

  Departamento de Publicaciones de la E.T.S.I.T.

  Madrid 1982.

- M. ANZOLA, J. CARUNCHO, G. PEREZ, CANALES

  Problemas de análisis (2 tomos).

  Imprenta Fareso, S.A.

  Madrid 1984.

- T.M. APOSTOL

  Calculus (2 tomos).

  Segunda edición.

  Editorial Reverté, S.A.

  Barcelona 1980.

- T.M. APOSTOL

  Análisis Matemático.

  Segunda edición.

  Editorial Reverté, S.A.

  Barcelona 1981.

- F. AYRES, Jr.
  Cálculo Diferencial e Integral.
  Libros McGraw-Hill (Colección Schaum).
  México 1971.

- M.N. BENTABOL, J. MARGALEF, E. OUTERELO, J.L. PINILLA
  Análisis Matemático. Cálculo Diferencial en Espacios Euclídeos.
  Ediciones Pirámide, S.A.
  Madrid 1981.

- M.N. BENTABOL, J. MARGALEF, E. OUTERELO
  Análisis Matemático. Cálculo Integral en Espacios Euclídeos.
  Ediciones Pirámide, S.A.
  Madrid 1982.

- F. BOMBAL, L. RODRIGUEZ, G. VERA
  Problemas de Análisis Matemático.1 Cálculo Diferencial.
  Reimpresión.
  Editorial AC.
  Madrid 1985.

- R. BRONSON
  Ecuaciones Diferenciales Modernas.
  Libros McGraw-Hill (Colección Schaum).
  México 1976.

- R. BRONTE ABAURREA

  Cálculo Infinitesimal e Integral (Topología).

  Editado por el autor.

  Madrid 1977.

- J. DE BURGOS

  Cálculo Infinitesimal (Teoría y Problemas).

  Editorial Alhambra, S.A.

  Madrid 1984.

- B. CALVO, J. DOYEN, A. CALVO, BOSCHET

  Cours d'analyse (6 tomos).

  Librairie Armand Colin.

  Paris 1977.

- F. COQUILLAT

  Cálculo Integral. Metodología y Problemas.

  Editorial Tebar Flores.

  Madrid 1980.

- R.V. CHURCHILL, J.W. BROWN

  Variable Compleja y aplicaciones.

  Cuarta edición.

  Libros McGraw-Hill. Ediciones La Colina, S.A.

  Madrid 1986.

- B.P. DEMIDOVICH

  5.000 Problemas de Análisis Matemático.

  Tercera edición.

  Editorial Paraninfo.

  Madrid 1985.

- J. DIEUDONNE

  Fundamentos de Análisis Moderno.

  Editorial Reverté, S.A.

  Zaragoza 1966.

- B. DE DIEGO

  Ejercicios de Análisis

  (Cálculo Diferencial e Integral).

  Tercera Edición.

  Editorial Deimos, S.A.

  Sevilla 1983.

- J.I. ECHARREN, A. PRIMO

  Problemas de Cálculo Infinitesimal.

  Editorial Lex-Nova.

  Valladolid 1975.

- J.M. ESTEFANIA, F. MICHAVILA

  Elementos de Análisis Matemático.

  Editado por los autores.

  Madrid 1974.

- F. GARCIA CASTRO, A. GUTIERREZ GOMEZ
  Cálculo Infinitesimal-II (2 tomos).
  Ediciones Pirámide, S.A.
  Madrid 1980-81.

- J. GAYO, A. ROMEU
  Dibujo de Curvas.
  Ediciones I.C.A.I.
  Madrid 1973.

- F. GRANERO
  Problemas de Cálculo para Ingenieros.
  Editorial URMO, S.A.
  Bilbao 1982.

- M. DE GUZMAN, I. PERAL, M. WALIAS
  Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.
  Primera edición.
  Editorial Alhambra, S.A.
  Madrid 1978.

- J.W. KITCHEN, Jr.
  Cálculo.
  Libros McGraw-Hill. Ediciones La Colina, S.A.
  Madrid 1986.

- A.N. KOLMOGOROV, S.V. FOMIN

  Elementos de la Teoría de Funciones y Análisis Funcional.

  Editorial MIR

  Moscú 1978.

- R.E. LARSON, R.P. HOSTETLER

  Cálculo y Geometría Analítica.

  Segunda edición.

  Libros McGraw-Hill. Ediciones La Colina, S.A.

  Madrid 1986.

- J. LELONG FERRAND, J.M. ARNAUDIES

  Curso de Matemáticas. Tomo 2: Análisis.

  Editorial Reverté, S.A.

  Barcelona 1980.

- E. LINES ESCARDO

  Análisis Matemático II.

  Editado por la U.N.E.D.

  Madrid 1974.

- S. LIPSCHUTZ

  Topología General.

  Libros McGraw-Hill de México, S.A.

  Colombia 1970.

- A. LOPEZ DE LA RICA, J.F. DE RETANA A.
Funciones de Variable Compleja.
Editorial Razón y Fe, S.A.
Madrid 1968.

- A. LOPEZ DE LA RICA
Geometría Diferencial de Curvas y Superficies (2 tomos)
Ediciones I.C.A.I.
Madrid 1972.

- R. LOSADA RODRIGUEZ
Análisis Matemático.
Editorial Pirámide,S.A.
Madrid 1978.

- A. LUZARRAGA
Problemas resueltos. Algebra lineal.
Quinta edición.
Editado por el autor.
Barcelona 1970.

- J.A. MARIN TEJERIZO
Problemas de Cálculo Integral.
Segunda edición ampliada.
Editorial S.A.E.T.A.
Madrid 1968.

- J.E. MARSDEN, A.J. TROMBA

  Cálculo Vectorial.

  Fondo Educativo Iberoamericano.

  E.U.A. 1981.

- J. MARTINEZ SALAS

  Elementos de Matemática.

  Tercera edición.

  Editado por el autor.

  Valladolid 1969.

- J.L. MATAIX PLANA

  Mil Problemas de Cálculo Integral (4 tomos).

  Décima edición.

  Editorial Dossat, S.A.

  Madrid 1981.

- J.L. MATAIX PLANA

  Problemas de Complementos de Cálculo Algebraico y de Cálculo Diferencial (2 tomos).

  Séptima edición.

  Editorial Dossat, S.A.

  Madrid 1967.

- J.L. MATAIX PLANA

  Problemas de Geometría Analítica.

  Cuarta edición.

  Editorial Dossat, S.A.

  Madrid 1968.

- F. MICHAVILA

  Espacios Métricos. Espacios Vectoriales Normados.

  Editorial AC.

  Madrid 1981.

- F. MICHAVILA

  Fundamentos de Cálculo Numérico 1: Topología Métrica.

  Editorial Reverté, S.A.

  Barcelona 1986.

- MURRAY R. SPIEGEL

  Cálculo Superior.

  Libros McGraw-Hill (Colección Schaum).

  México 1969.

- N. PISKUNOV

  Cálculo Diferencial e Integral.

  Editorial Montaner y Simón, S.A.

  Barcelona 1978.

- C. PISOT, M. ZAMANSKY
  Matemáticas Generales. Algebra y Análisis.
  Editorial Montaner y Simon, S.A.
  Barcelona 1966.

- M.H. PROTTER, C.B. MORREY
  Análisis Real.
  Editorial AC.
  Madrid 1986.

- P. PUIG ADAM
  Cálculo Integral.
  Decimo séptima edición.
  Editado por Gómez Puig.
  Madrid 1979.

- P. PUIG ADAM
  Curso Teórico-Práctico de Ecuaciones Diferenciales aplicado a la Física y Técnica.
  Décimo sexta edición.
  Editado por Roberto Puig Alvarez.
  Madrid 1980.

- J. PUIG
  Análisis Matemático-1.
  Editorial Toray-Masson, S.A.
  Barcelona 1981.

- J. QUINET

  Curso de Matemáticas Superiores (6 tomos).

  Ecuaciones Diferenciales (tomo 4).

  Editorial Paraninfo, S.A.

  Madrid 1983.

- R.A.E.C.

  Problemas de Algebra Lineal.

  Publicaciones R.A.E.C.

  Madrid 1986.

- R.A.E.C.

  Problemas de Cálculo Infinitesimal.

  Sexta edición (Recopilación Tomos I y II)

  Publicaciones R.A.E.C.

  Madrid 1985.

- R.A.E.C.

  Problemas de Cálculo Integral.

  Ediciones Universidad y Cultura.

  Madrid 1986.

- R.A.E.C.

  Problemas de Ecuaciones Diferenciales.

  Quinta edición.

  Publicaciones R.A.E.C.

  Madrid 1968.

- C. RAY WYLIE

Matemáticas Superiores para la Ingeniería.

Segunda edición en español.

Libros McGraw-Hill.

México 1982.

- J. REY PASTOR, A. DE CASTRO BRZEZICKI

Elementos de Matemáticas.

Novena edición, corregida.

Editorial S.A.E.T.A.

Madrid 1981.

- J. RIVAUD

Ejercicios de Análisis (2 tomos).

Editorial Aguilar.

Madrid 1975 y 1979.

- W. RUDIN

Principios de Análisis Matemático.

Tercera edición.

Libros McGraw-Hill de México, S.A.

México 1981.

- W. RUDIN

Análisis Real y Complejo.

Editorial Alhambra, S.A.

Madrid 1985.

- A. SARABIA, C. GUTIERREZ CAÑAS
  Cálculo Infinitesimal. Teoría y Problemas.
  Ediciones I.C.A.I.
  Madrid 1974.

- J.J. SCALA, R. RIAZA, L. ORTIZ
  Cálculo Vectorial Aplicado.
  Primera edición.
  Editado por la E.T.S.I.I. de Madrid.
  Madrid 1967.

- M. SPIVAK
  Calculus. Cálculo Infinitesimal (2 tomos).
  Editorial Reverté, S.A.
  Barcelona 1980.

- S.K. STEIN
  Cálculo y Geometría Analítica.
  Tercera edición.
  Libros McGraw-Hill de México, S.A.
  México 1984.

- E. TEBAR FLORES
  Problemas de Cálculo Infinitesimal (2 tomos).
  Quinta edición.
  Editorial Tebar Flores.
  Madrid.

- G.B. THOMAS, Jr.
  Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica.
  Sexta edición.
  Editorial Aguilar.
  Madrid 1980.

- L. THOMAS ARA, Mª E. RIOS GARCIA
  Cálculo.
  Editado por el autor.
  Santander 1975.

- L. THOMAS ARA, Mª E. RIOS GARCIA
  Problemas de Cálculo.
  Editado por el autor.
  Santander 1975.

- A.J. WASHINGTON
  Fundamentos de Matemática con Cálculo.
  Tercera edición.
  Fondo Educativo Iberoamericano.
  E.U.A. 1983.

- T. WONNACOTT
  Aplicaciones del Cálculo Diferencial e Integral.
  Primera edición.
  Editorial Limusa, S.A.
  México 1983.

- F.S. WOODS, F.H. BAYLEY

Geometría Analítica y Cálculo Infinitesimal.

Editorial Hispano-Americana.

México 1960.

- M. ZAMANSKY

Introducción al Algebra y Análisis Numérico.

Segunda edición.

Editorial Montaner y Simón, S.A.

Barcelona 1967.

*** Métodos Numéricos.**

- C.T.H. BAKER, C. PHILLIPS
  The Numerical Solution of Nonlinear Problems.
  Editorial Oxford University Press.
  New York 1981.

- N. BAKHVALOV
  Métodos Numéricos.
  Editorial Paraninfo, S.A.
  Madrid 1980.

- R.L.BURDEN, J.D. FAIRES, A.C. REYNOLD
  Numerical Analysis.
  Editorial Prindle, Weber & Schmidt.
  Boston 1981.

- B. CARNAHAN, H.A. LUTHER, J.O. WILKES
  Cálculo Numérico. Métodos, Aplicaciones.
  Editorial Rueda.
  Madrid 1979.

- W. CHENEY, D. KINCAID
  Numerical Mathematics and Computing.
  Editorial Brooks/Cole Publishing Company.
  California 1980.

- R.F. CHURCHHOUSE

  Handbook of Applicable Mathematics.

  Volume III. Numerical Methods.

  Editorial John Wiley & Sons.

  U.S.A. 1981.

- P.G. CIARLET

  Introduction á L'Analyse Numérique Matricielle et á L'Optimisation.

  Editorial Masson.

  Paris 1982.

- P.G. CIARLET, J.-M. THOMAS

  Exercises D'Analyse Numérique Matricielle et D'Optimisation.

  Editorial Masson.

  Paris 1982.

- A.M. COHEN

  Análisis Numérico.

  Editorial Reverté, S.A.

  Barcelona 1977.

- M. CROUZEIX, A.L. MIGNOT

  Analyse Numérique des équations différentielles.

  Editorial Masson.

  Paris 1984.

- R. DAUTRAY, J.-L. LIONS
  Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques (2 Tomos).
  Editorial Masson.
  Paris 1984.

- P.J. DAVIS
  Interpolation and Approximation.
  Editorial Dover.
  New York 1975.

- O.J. FARRELL, B. ROSS
  Solved Problems: Gamma and Beta Functions, Legendre Polynomials, Bessel Functions.
  Editorial Macmillan Company.
  New York 1963.

- J.H. FERZIGER
  Numerical Methods for Engineering Application.
  Editorial John Wiley & Sons.
  U.S.A. 1981.

- Ph. D. FRANCIS SCHEID
  Análisis Numérico.
  Libros McGraw-Hill de México, S.A.
  Colombia 1972.

- N. GASTINEL
  Análisis Numérico Lineal.
  Editorial Reverté, S.A.
  Barcelona 1975.

- C.F. GERALD
  Applied Numerical Analysis.
  Segunda edición.
  Editorial Addison-Wesley Publishing Company.
  U.S.A. 1980.

- L.A. HAGEMAN, D.M. YOUNG
  Applied Iterative Methods.
  Editorial Academic Press.
  U.S.A. 1981.

- F.B. HILDEBRAND
  Introduction to Numerical Analysis.
  Segunda edición.
  Libros McGraw-Hill.
  U.S.A. 1974.

- A.S. HOUSEHOLDER
  The Theory of Matrices in Numerical Analysis.
  Editorial Dover Publications, Inc.
  U.S.A. 1975.

- E. ISAACSON, H.B. KELLER
  Analysis of Numerical Methods.
  Editorial John Wiley & Sons.
  U.S.A. 1966.

- L. LAPIDUS, G.F. PINDER
  Numerical Solution of Partial Differential Equations in Science and Engineering.
  Editorial John Wiley & Sons.
  U.S.A. 1982.

- P.-J. LAURENT
  Approximation et optimisation.
  Editorial Hermann.
  Paris 1972.

- H. LEIPHOLZ
  Direct Variational Methods and Eingevalue Problems in Engineering.
  Editorial Noordhoff.
  Netherlands 1977.

- O. LOPEZ
  Métodos Iterativos de resolución de ecuaciones.
  Editorial Alhambra.
  Bilbao 1986.

- R. LUTHE, A. OLIVERA, F. SCHUTZ
  Métodos Numéricos.
  Editorial Limusa.
  México 1978.

- M.J. MARON
  Numerical Analysis. A Practical Approach.
  Editorial Macmillan Publishing Co.
  U.S.A. 1982.

- F. MICHAVILA
  Fundamentos del Cálculo Numérico 1: Topología Métrica.
  Editorial Reverté, S.A.
  Barcelona 1986.

- F. MICHAVILA, C. CONDE
  Métodos de Aproximación.
  Publicaciones de la E.T.S. de Ingenieros de Minas de la Universidad Politécnica de Madrid.
  Madrid 1985.

- F. MICHAVILA, L. GAVETE
  Programación y Cálculo Numérico.
  Editorial Reverté, S.A.
  Barcelona 1985.

- J.P. NOUGIER

  Méthodes de Calcul Numérique.

  Editorial Masson.

  Paris 1983.

- J. NOYE (Editor)

  Numerical Solutions of Partial Differential Equations.

  Editorial North-Holland Publishing Company.

  Amsterdam 1982.

- J.M. ORTEGA, W.G. POOLE Jr.

  An Introduction to Numerical Methods for Differential Equations.

  Editorial Pitman Publishing Inc.

  U.S.A. 1981.

- M. PICHAT, C. DI CRESCENZO, J. WOLF

  Mathematiques pour L'Informatique.

  3-Algorithmmique Numerique (2). Exercises et Problemes.

  Editorial Armand Colin.

  Paris 1971.

- A. RALSTON

  Introducción al Análisis Numérico.

  Reimpresión.

  Editorial Limusa, S.A.

  México 1978.

- P.A. RAVIART, J.M. THOMAS

  Introduction á L'Analyse Numérique des Equations aux Dérivées Partielles.

  Editorial Masson.

  Paris 1983.

- A. RECUERO FORNIES

  Métodos Numéricos.

  Ediciones I.C.A.I.

  Madrid 1974.

- C.E. ROBERTS, Jr.

  Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Un enfoque al Cálculo Numérico.

  Editorial Dossat, S.A.

  Madrid 1980.

- A.A. SAMARSKI, V.B. ANDREIEV

  Métodos en Diferencias para las Ecuaciones Elípticas.

  Editorial MIR.

  Moscú 1979.

- L. SCHUMAKER

  Spline Functions: Basic Theory.

  Editorial John Wiley & Sons.

  U.S.A. 1981.

- M. SIBONY, J.-Cl. MARDON
  Analyse Numérique I . Systémes Linéaires et non Linéaires.
  Editorial Hermann.
  Paris 1982.

- J. STOER, R. BURLIRSCH
  Introduction to Numerical Analysis.
  Editorial Springer-Verlag.
  New York 1980.

- G.A. WATSON
  Approximation Theory and Numerical Methods.
  Editorial John Wiley & Sons.
  U.S.A. 1980.

- G. WINTER
  Resolución Numérica de Sistemas de Ecuaciones Algebraicas.
  Publicaciones de la U.P.C. (E.T.S.I.I.).
  Las Palmas 1986.

- D.M. YOUNG
  Iterative Solution of Large Linear Systems.
  Editorial Academic Press.
  U.S.A. 1971.