© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria Biblioteca Dicital 2003

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS



TESIS DOCTORAL

AJUSTE DE HACES PARA AUTOCALIBRAR CÁMARAS NO – MÉTRICAS CON APORTACIÓN DE LOS ALGORITMOS DE RENUMERACIÓN PARA SISTEMAS LINEALES

ALEJANDRA SANJUÁN HERNÁN - PÉREZ

Las Palmas de Gran Canaria, Diciembre de 1994

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Título de la tesis:

AJUSTE DE HACES PARA AUTOCALIBRAR CÁMARAS NO – MÉTRICAS CON APORTACIÓN DE LOS ALGORITMOS DE RENUMERACIÓN PARA SISTEMAS LINEALES

Thesis title:

ADJUSTEMENT OF FASCES TO SELF - CALIBRATE NOT - METRICS CAMERAS WITH CONTRIBUTION OF THE ALGORITHMS OF RENUMBERING FOR LINEAR SYSTEM

Resumen

Ante el alto interés por aplicar las técnicas fotogramétricas, esta tesis desarrolla un algoritmo que partiendo de las coordenadas medidas en fotogramas obtenidos con cámaras no-métricas, nos proporciona las coordenadas terrestres con precisión menor que un milímetro, sin necesidad de introducir ningún dato de la cámara. Para lograr estas precisiones, hemos aplicado el ajuste de haces a un conjunto de fotogramas. La resolución de los sistemas la hacemos por el método de mínimos cuadrados. Para no perder su dispersidad, y mejorar el condicionamiento, hemos diseñado un algoritmo que reduce la matriz mediante las transformaciones de givens y de householder con renumeración posterior por el esquema inverso de cuthill-mckee, con estructuración por niveles enraizados en un nodo pseudoperiférico obtenido con la ayuda del algoritmo de dijkstra.

Como conclusiones fundamentales podemos citar:

- 1) La realización de la resección espacial con previa aplicación de la transformación lineal directa, sin necesidad de conocer la posición ni la orientación de la cámara.
- 2) La considerable reducción del número de interacciones al aplicar el ajuste a varios fotogramas, en vez de la resección espacial. Con este ajuste, además, podemos resolver la resección de fotogramas que aisladamente seria imposible.
- 3) La aplicación de las transformaciones ortogonales de givens y householder, así como las técnicas de renumeración empleadas, nos permiten controlar el condicionamiento y disminuir la envoltura de las matrices tratadas.

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA UNIDAD DE TERCER CICLO Y POSTGRADO

Reunido el día de la fecha, el Tribunal nombrado por el Excmo. Sr. Rector Magfco. de esta Universidad, la aspirante expuso esta TESIS DOCTORAL.

Terminada la lectura y contestadas por la Doctoranda las objeciones formuladas por los señores jueces del Tribunal, éste calificó dicho trabajo con la nota de APTO "CUM LAUDE"

Las Palmas de G. C., a 10 de Febrero de 1995.

El Presidente: Dr. D. Francisco Rubio Royo,

El Secretario: Dr. D. Gabriel Winter Althaus,

El Vocal: Dr. D. Argimiro Viñas Vizan,

El Vocal: Dr. D. Fernando Martín Asín,

La Vocal: Dra Da Rosa Mariana Chueca Castedo,

La Doctoranda: Da Alejandra Sanjuán Hernán-Pérez,

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA

DOCTORADO EN MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

PROGRAMA DE MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS EN LA INGENIERÍA

TESIS DOCTORAL:

AJUSTE DE HACES PARA AUTOCALIBRAR CÁMARAS NO-MÉTRICAS CON APORTACIÓN DE LOS ALGORITMOS DE RENUMERACIÓN PARA SISTEMAS LINEALES

Tesis Doctoral presentada por : Dña. Alejandra Sanjuán Hernán-Pérez

Dirigida por el Dr: D. Pedro Almeida Benítez

El Director:

La Doctoranda:

Las Palmas de Gran Canaria, 6 de Diciembre de 1994

AGRADECIMIENTOS:

Expreso mi agradecimiento a todas aquellas personas que de un modo u otro han contribuido a que esta Tesis culminara. En especial :

A Pedro Almeida Benítez, porque siempre ha estado a mi lado animándome en los momentos mas dificiles con su constante dedicación a la dirección de la Tesis.

A Francisco Rubio Royo y a Miguel Suarez de Tangil, quienes siempre me brindaron su apoyo personal e institucional.

A Javier Iglesias Moscoso, por haber compartido conmigo mis tareas docentes y haberme apoyado constantemente. A Jesús Romero por estar siempre ayudándome. A Jose Ignacio por su labor técnica.

A todos mis compañeros de los Departamentos de Cartografía y Expresión Gráfica en la Ingeniería, de Matemáticas y de Ingeniería Eléctrica.

A Pedro, mi marido, por su paciencia, comprensión y ánimos para terminar mi carrera académica.

A mis queridas hijas, Alejandra y Natalia.

A la memoria de Antoñita quien tanto me ayudó para seguir hasta el final, Dios sabe lo orgullosa que hubiera estado.

A mi madre y a mi padre que desde hace mucho están esperando esta culminación académica.

Las Palmas de Gran Canaria, Diciembre de 1994

Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN Y ANÁLISIS PREL	IMINAR
1.1. Introducción.	1
1.2. Métodos analíticos de fotogrametría con cámaras no-métri	cas5
1.3. Objetivos y Metodología	7
1.4. Test utilizado.	11
CAPÍTULO 2: RESECCIÓN ESPACIAL	
2.1 Introducción	13
2.2. Resección espacial para cámaras no métricas. Distorsiones	15
2.3. Linealización de las ecuaciones de colinealidad	21
CAPÍTULO 3: TRANSFORMACIÓN LINEAL DIREC	CTA
3.1. Introducción	26
3.2 Transformación Lineal Directa	27
3.3. Aplicación de la Transformación Lineal Directa	34
3.3.1. Resultados obtenidos.	37
3.3.2 Estudio del condicionamiento de la matriz	42

CAPÍTULO 4: AJUSTE DE HACES.

4.1. Introducción.	50
4.2. Aplicación del ajuste de haces al test.	51
4.2.1. Resección espacial de cada fotograma	52
4.2.2 Ajuste total del test.	68
4.2.3 Esquema del algoritmo utilizado en AJUSTE	74
5.1. Introducción	77
5.1. Introducción.	77
5.2. Representación de matrices dispersas mediante grafos	79
5.2.1. Introducción.	79
5.2.1.1. Terminología básica	80
5.2.1.2. Interpretación del grafo mediante vectores	85
5.2.1.3 .Información general sobre las subrutinas que ope	ran

en los grafos......92

5.3. Almacenamiento y ordenación de las matrices dispersas.95

5.3.1. Introducción.......95

5.3.2. El esquema de almacenamiento por la banda......95

5.3.3. El esuqema de almacenamiento por el perfil.......98

5.3.3.1. Formulación matricial 98

	5.4.1.	El algoritmo inverso de Cuthill-McKee	103
	5.4.2.	Selección de un nodo inicial.	108
5.5.	Un esqu	ema de almacenamiento de la envoltura.	116
5.6.	Descom	posición en valores singulares	118
	5.6.1.	Ortogonalización y renumeración de mínimos cuadrados	129
5.7.	Aplicaci	ón del algoritmo propuesto.	135
~			
CAPITUI	LO 6:	APLICACIONES.	
6.1.	Introduc	cción	140
6.2.	Test de	una estación en Viena.	140
	6.2.1.	Datos terrestres y coordenadas imagen	141
	6.2.2.	Resultados y precisiones.	145
6.3.	Seminar	io de Tafira Baja	146
	6.3.1.	Datos terrestres y coordenadas imagen.	146
	6.3.2.	Resultados y precisiones.	156
6.4.	Ermita c	le Tamaraceite	157
	6.4.1.	Datos terrestres y coordenadas imagen.	158
	6.4.2.	Resultados y precisiones.	159
CAPITUI	L O 7:	CONCLUSIONES.	
7.1.	Conclusi	ones	162

CAPÍTULO 8:	PERSPECTIVAS FUTUI	RAS.
8.1. Perspec	tivas futuras	165
REFERENCIAS	S BIBLIOGRÁFICAS.	167

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN Y ANÁLISIS PRELIMINAR

1.1. INTRODUCCIÓN.

La Fotogrametría, al servicio de la Cartografía, ha estado siempre considerada como una técnica de medición tridimensional tan precisa como la que se obtenía por métodos de Topografía clásica. Para lograr estas precisiones se requiere un equipamiento de cámaras y aparatos de restitución de coste elevado; las cámaras deben ser métricas, es decir, calibradas en laboratorios y los restituidores de alta precisión. Por este motivo, pocos son los que se benefician de esta técnica, produciéndose un estancamiento en el desarrollo de las aplicaciones fotogramétricas a otros campos fuera del ámbito topográfico.

La aparición de nueva instrumentación fotogramétrica y, sobre todo, la implantación de nuevos sistemas analíticos de restitución nos permiten establecer nuevos planteamientos y acomodar los sistemas de levantamiento fotogramétrico a las necesidades reales.

Los distintos caminos para reducir el costo y, por lo tanto, la precisión de los levantamientos fotogramétricos son los siguientes:

- •Utilización de cámaras no-métricas o de pequeño formato.
- •Utilización de restituidores analíticos de bajo costo o de pequeño formato.

Las cámaras utilizadas en la Fotogrametría de objeto cercano se dividen en dos

grupos, las métricas y las no-métricas (Kennert, 1976). Karara en 1974 definió como cámara no-métrica la que no está destinada a propósitos fotogramétricos, Faig en 1975 dio una definición más técnica diciendo que una cámara no-métrica es aquella cuya orientación interna es desconocida total o parcialmente y, frecuentemente, inestable (lo que supone desconocer la distorsión de las lentes, la distancia principal y la posición del punto principal); además, estas cámaras no tienen marcas fiduciales y no se puede controlar la deformación que experimenta el film. Quizás el camino más corto para definir que una cámara es métrica es que esté dotada de marcas fiduciales.

Cualquier cámara corriente, desde 35mm hasta 70mm, puede ser considerada como una cámara no-métrica. Algunas cámaras permiten la integración de una placa de cristal en el plano focal con un retículo (placa RESEAU) que ha sido calibrada en un laboratorio de Metrología y, que por lo tanto, nos sirve para controlar la deformación del film de esa cámara. Estas cámaras son las llamadas semi-métricas porque ofrecen mayor precisión.

Las ventajas y desventajas de las cámaras no-métricas (Karara, 1975, A.S.P. Non-tophographic) son las siguientes:

Ventajas:

- Mayor disponibilidad.
- Algunas cámaras pueden obtener muchos fotogramas seguidos.
- Flexibilidad en el rango del enfoque.
- Se transportan fácilmente y se orientan en cualquier dirección.
- El precio es considerablemente menor que las métricas.

Desventajas:

- Las lentes se diseñan para mayor resolución produciendo mayor distorsión.
- Inestabilidad en la orientación interior.
- Falta de marcas fiduciales.
- Ausencia de nivel de burbuja y, por lo tanto, dificil predicción de la orientación de la cámara al hacer la fotografía.

Los restituidores analíticos de pequeño formato constan fundamentalmente de un estereocomparador adecuado al pequeño formato del fotograma, lo que abarata su costo, y un software o tratamiento analítico de las coordenadas del comparador que no se diferencia prácticamente en nada con el tradicional salvo la aparición de nuevas incógnitas, la orientación interna de la cámara, como veremos más adelante.

El costo de estas cámaras y restituidores es bastante asequible, lo que hace atractivo aplicar las técnicas fotogramétricas a muchos campos donde la precisión necesaria no es demasiado fuerte.

Hasta ahora, la Fotogrametría sólo se ha conocido en un campo muy pequeño; a partir de ahora, el campo puede, y seguramente que así será, expandirse a otros muchos. Queda una labor muy importante para el futuro Ingeniero en Cartografía: aplicar la Fotogrametría de pequeño formato a otras áreas desconocidas.

Una de las resoluciones del Congreso Internacional de Fotogrametría y Teledetección celebrado en Kyoto, Japón, en su Comisión V (encargada de otras aplicaciones no cartográficas de la Fotogrametría y Teledetección), es la siguiente:

" The need to study algorithmic and computational aspects of timeconstrained solutions in photogrammetry".

El propósito de esta Tesis es tratar de resolver el problema de Resección Espacial

adecuado a las cámaras no métricas, lo que lleva consigo la resolución de sistemas con un número mayor de incógnitas, intentando reducir al máximo el apoyo de campo.

Existen en el mercado multitud de programas que resuelven este problema, pero muy pocos que realicen conjuntamente la resolución de una orientación externa e interna, en trabajos realizados con cámaras no métricas, sobre todo en lo referente al problema de las distorsiones.

El intentar resolver todos los parametros internos de un haz implica la necesidad de un número mayor de puntos de apoyo en el campo, ya que el número de incógnitas se amplía, cuestión que encarece el proceso fotogramétrico. Para paliar este encarecimiento hemos recurrido a disminuir el número de puntos de apoyo realizando un ajuste conjunto de varios fotogramas. Nos hemos basado en que la orientación interna de una cámara se puede considerar la misma y en que todos los fotogramas comparten las mismas incógnitas. Por lo tanto, si tratamos varios fotogramas a la vez disminuimos el número de incógnitas, lo que implica menor apoyo.

El inconveniente es que los sistemas que hay que tratar son tanto más grandes cuantas más fotogramas queramos resolver a la vez, si no empleáramos nuevas herramientas matemáticas nos veríamos obligados a reducir los sistemas.

La ventaja observada es que la matriz de coeficientes es altamente dispersa y aplicando algunas estrategias algebraicas vamos a ver cómo podemos ampliar el número de fotogramas tratados, sin que suponga un impedimento a uno de nuestros objetivos, que es el de reducir al máximo el apoyo de campo.

1.2. MÉTODOS ANALÍTICOS DE FOTOGRAMETRÍA CON CÁMARAS NO MÉTRICAS.

Con la introducción de los ordenadores se abre una nueva fase en la Fotogrametría, así los restituidores analógicos se transforman en equipos informáticos. Se llaman off-line los asistidos por operadores y on-line los que son completamente analíticos o digitales.

Al contrario que los analógicos, los analíticos no tienen limitaciones en cuanto a las orientaciones del fotograma, tamaño del modelo, escala del levantamiento, tipo de cámara, etc. Se pueden utilizar, incluso, las cámaras no-métricas. El software desarrollado para aplicaciones de Close-Range ha crecido de una forma my rápida en estos últimos años, existiendo hoy en día muchos paquetes disponibles en distintos servicios.

En los últimos años, la Transformación Lineal Directa (Abdel-Aziz y Karara, 1971), el método de los 11-parámetros (Bopp y Krauss, 1978), el de Autocalibración (Fraser, 1982), y el Ajuste de Haces (Granshaw, 1980), han sido las técnicas utilizadas para la solución de las ecuaciones de colinealidad en fotogrametría de objeto cercano.

Fraser (1982) demostró que el método de la Transformación Lineal Directa (DLT) era menos preciso que el de Ajuste de Haces o Autocalibración poseyendo algunas ventajas frente a la solución DLT:

- Admite la incorporación en el sistema lineal de ecuaciones de datos geodésicos.
- No necesita tantos puntos de control terrestre.
- Se pueden incorporar modelos que respondan a los errores en las distorsiones de las lentes y del film, sin que suponga observaciones adicionales.

La principal desventaja es la relacionada con el tiempo de computación y la necesidad de almacenamiento, además de necesitar una aproximación de las incógnitas para resolver el ajuste iterativamente.

El método DLT nos ofrece las ventajas siguientes:

- Menor tiempo de computación.
- Es un método directo, y por ello no necesita aproximaciones iniciales.

Las desventajas de este método están en que requiere mayor número de puntos de control terrestre, ya que cuenta con once incógnitas, frente al de haces con sólo nueve, sin enumerar los parámetros de la orientación interna del haz. El método original de Adbel-Aziz y Karara producía errores en la reconstrucción geométrica, Bopp y Krauss (1978) lo subsanaron con la incorporación de dos restricciones no lineales a los once parámetros, y más recientemente, Hatze (1988) demostró que con la incorporación de al menos uno de las ligaduras en su forma linealizada, se reducían los errores de reconstrucción.

No obstante, se ha visto que cuando la determinación de un número redundante de puntos de control no supone un problema, el método de 11-parámetros da la suficiente precisión.

Originalmente, el método DLT nos ofrecía una resolución directa del sistema de ecuaciones normales; posteriormente Naftel y Boot (1991) demostraron con sus trabajos realizados que una solución iterativa del método DLT mejoraba el resultado, obteniendo una precisión comparable a la de los métodos de haces.

Después de ver muchos estudios, se puede decir que hay muchas áreas donde se puede alcanzar una precisión aceptable con cámaras menos sofisticadas, tales como las

llamadas no-métricas, tipo Hasselblad, Pentax, u otras, las cuales suministran la información del objeto tridimensional mediante una adquisición y reducción de datos.

Principalmente tenemos que abordar las siguientes fases:

- Elegir una configuración de adquisición de datos que sea consecuente...
- Suministrar el control terrestre adecuado.
- Controlar la inestabilidad de la cámara combinando los procedimientos de calibración con los de medida.
- Elegir un modelo matemático para corregir el efecto de distorsión de las lentes y la deformación del film.

Debido a las grandes deformaciones del film y distorsiones de las lentes de las cámaras no-métricas, la solución analítica es la única que se ha utilizado para la reducción de los datos con cámaras de este tipo.

1.3. OBJETIVOS Y METODOLOGÍA.

Debido a que la Fotogrametría va creciendo en la aplicación de levantamientos con cámaras sencillas de todo tipo, no existen muchas aplicaciones que nos permitan realizar levantamientos con un proceso riguroso. Esto plantea uno de los problemas más graves dentro de esta ciencia, y es que sigue siendo la gran desconocida en el campo arquitectónico de los levantamientos de fachadas

El principal objetivo de esta Tesis es la obtención de un tratamiento computacional eficiente que aproveche la dispersidad de las matrices, y que permita realizar la determinación de las coordenadas de puntos de control desconocidos, con cámaras no métricas, en ordenadores personales, con la novedad de que no se necesite conocer previamente la situación y orientación de la cámara ni las coordenadas aproximadas de estos puntos.

Como las cámaras no-métricas no están calibradas, lo hacemos a la vez que realizamos el cálculo de las coordenadas terrestres de los puntos.

Esto significa que tenemos siete incógnitas de la cámara, seis de cada estación realizada, y tres de cada punto a determinar. Como las siete incógnitas son comunes para todas las fotos, se presenta la ventaja de que cuantas más fotos tengamos menos datos de campo necesitamos.

Como queremos realizar la calibración de la cámara simultáneamente al ajuste de haces, la estructura de la matriz se convierte en una banda de máximo ancho; hemos diseñado por ello algoritmos que reduzcan este ancho, tras una adecuada reordenación de las ecuaciones del sistema, es decir, mediante un proceso de renumeración.

Estos algoritmos surgen al expresar la matriz mediante su grafo asociado. Como podremos ver, nuestra matriz siempre será una matriz simétrica definida positiva, y por lo tanto, nos ofrece todas las ventajas algebraicas existentes para este tipo de matrices.

Los sistemas que hemos de 'resolver' están sobredimensionados, y lo realizamos por el método de los mínimos cuadrados.

En los problemas de mínimos cuadrados las dificultades están en que:

- Si la matriz A está mal condicionada, para resolver A^tAx = A^tb, el condicionamiento de (A^tA) se habrá elevado al cuadrado con respecto al de A.
- 2. La dispersidad se puede perder al realizar A^tA.

Para evitar estas dificultades hemos realizado distintas transformaciones en las

operidad de Les Dalmes de Gen Canaria Biblioteca Dicital 2001

matrices de los sistemas. Para lo cual hemos diseñado el siguiente algoritmo:

Paso 1:

Reducción por transformaciones ortogonales.

<u>Paso 2:</u>

Determinar la matriz de permutación Q sobre las columnas de A, que produce permutación simétrica en A^tA.

<u>Paso 3:</u>

Calcular
$$B = Q^t A^t A Q y Q^t A^t b$$
.

Paso 4:

Determinar la factorización de Cholesky L^tL de B

Paso 5:

Resolver sucesivamente: $L^{t}z = c$, Ly = z, x = Qy.

En el paso 1 las transformaciones ortogonales usadas son de Householder y Givens, combinadas adecuadamente con el fin de controlar tanto el condicionamiento como la dispersidad.

En el paso 2, la matriz de permutación que permitirá la renumeración la hemos obtenido por el algoritmo inverso de Cuthill-McKee enraizado en un nodo seudo-periférico, para cuya selección hemos recurrido al particionamiento del grafo en niveles, así como al algoritmo de Dijkstra.

Por último, la mayoría de los programas destinados a resolver las orientaciones en fotogrametría, necesitan conocer una orientación previa aproximada de la cámara, así como de las coordenadas de los puntos a determinar. Nuestro objetivo, aquí, es obtener esta aproximación de forma automática mediante la aplicación de algún algoritmo que nos la halle. Esto significa que no vamos a tener que indicar los datos previos, lo cual representa una gran ventaja cuando realizamos fotogrametría sin demasiada información sobre la topografía, que sólo la requerimos para realizar la determinación de las coordenadas terrestres de los puntos de control.

Para desarrollar este trabajo de Tesis hemos hecho uso de conceptos que pertenecen a distintas disciplinas de la Matemática, tocando en las muchas moradas que tiene el hogar de la Matemática.

Así, podemos destacar, desde clásicos conceptos de geometría hasta otros de la moderna geometría diferencial, donde hay un bagaje topológico; en el área del Álgebra, hemos tratado con elementos de Álgebra Abstracta, v.g., el grupo de Klein, y con aspectos del Álgebra Matricial, donde hemos manipulado con transformaciones pertenecientes al grupo ortogonal.

El resto pertenece al ámbito del Análisis Numérico, donde con la interpretación por grafos controlamos o podemos controlar, desde las renumeraciones de sistemas hasta las verdaderas aplicaciones prácticas de la fotogrametría en campos como los de la Ingeniería Civil y en el diseño de estas y otras redes de comunicación.

En esta Tesis, también hemos hecho uso del Mathematica, para tratar las expresiones algebraicas bajo computación simbólica, con el fin de obtener expresiones exactas y precisión numérica predeterminada. Asimismo, hemos operado con este entorno de

programación para simular situaciones tridimensionales con animación.

1.4. TEST UTILIZADO.

Todos los algoritmos realizados en esta Tesis han sido probados con un test fotogramétrico terrestre, destinado a que los usuarios realicen pruebas de los distintos programas de ajuste existentes en el mercado, siempre con los mismos datos.

El test consiste en once fotogramas realizados con una cámara Rollei Metric de formato 6x6 cm, que fotografían una estación en la ciudad de Viena. El croquis de sus situaciones es el indicado en la figura 1.4.1.

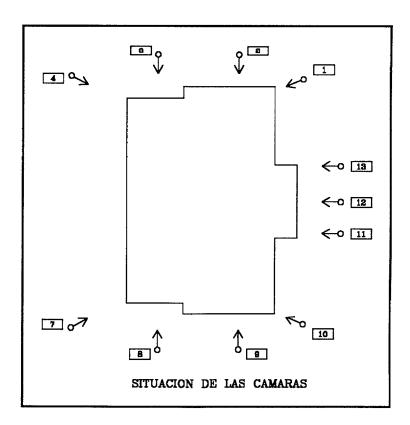


Figura 1.4.1

Cada foto cuenta con un número de puntos (desde 7 hasta 19) cuyas coordenadas terrestres han sido determinadas mediante topografía clásica, y que son puntos de características relevantes de las fachadas. Las coordenadas imagen han sido observadas en un estereocomparador MPS-2 de ADAM con precisión hasta la milésima del milímetro, aproximadamente.

Además, contamos con las orientaciones de la cámara, así como con su orientación interna y con los resultados de la aplicación al test de algunos programas de ajuste que existen en el mercado.

Los programas de ajuste en fotogrametría terrestre utilizan distintos ángulos de orientación externa de la cámara, esto implica que es dificil ver si nos da el mismo resultado, para lo que analizamos las coordenadas terrestres de los puntos que disponemos para ver qué error se produce al aplicar nuestros algoritmos.

Al realizar la confección de los programas debemos comprobarlos con una gran fiabilidad, para ello, hemos elaborado un test artificial. Hemos partido de las coordenadas terrestres del test de Viena e imponemos unas orientaciones externas a cada cámara situándolas de forma parecida a las del propio test, pero con los ángulos que nosotros utilizamos en nuestros programas. También se definimos una orientación interna determinada. Con estos datos, hemos confeccionado algoritmos que calculan exactamente las coordenadas imagen con una gran precisión; estas coordenadas, junto con las del terreno, son las que utilizamos previamente para garantizar los procedimientos.

Nuestro algoritmo aplicado al test de Viena nos da un error que aminora el producido por algunos programas de ajuste al mismo test.

2000 letter G and belief G about A and a benefit and and a benefit and and

CAPÍTULO 2: RESECCIÓN ESPACIAL

2.1 INTRODUCCIÓN.

Llamamos resección espacial a la determinación de la orientación y posición de un fotograma en el momento de la realización de la foto. La resección espacial se expresa mediante una transformación tridimensional de semejanza que formula matemáticamente la alineación entre la imagen de un punto en un fotograma, el centro de proyección y la posición terrestre del punto imagen.

Una forma simple de expresar la resección espacial es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} x - x_p \\ y - y_p \\ -f \end{pmatrix} = \lambda \cdot R \cdot \begin{pmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{pmatrix}$$
 (2.1)

donde:

x,y son las coordenadas imagen del punto en la fotografía.

 x_p,y_p son las coordenadas imagen del punto principal.

 λ es el factor de escala.

R es una matriz ortogonal de giro, (r.;).

X,Y,Z son las coordenadas terrestres del punto imagen.

X₀,Y₀,Z₀ son las coordenadas terrestres del centro perspectivo, la posición de la cámara.

Las coordenadas imagen pueden estar medidas en cualquier tipo de aparato, compa-

rador, tableta, estereocomparador, etc..

Desarrollando (2.1) y haciendo operaciones obtenemos:

$$x - x_{p} = -f \cdot \frac{r_{11}(X - X_{0}) + r_{12}(Y - Y_{0}) + r_{13}(Z - Z_{0})}{r_{31}(X - X_{0}) + r_{32}(Y - Y_{0}) + r_{33}(Z - Z_{0})}$$

$$y - y_{p} = -f \cdot \frac{r_{21}(X - X_{0}) + r_{22}(Y - Y_{0}) + r_{23}(Z - Z_{0})}{r_{31}(X - X_{0}) + r_{32}(Y - Y_{0}) + r_{33}(Z - Z_{0})}$$
(2.2)

donde:

f es la distancia principal de la cámara.

Las ecuaciones (2.2) son las llamadas ecuaciones de colinealidad. Hay muchas formas de expresar la matriz R, desde la puramente algebraica hasta la compuesta por tres giros (Schut, 1959). Lo cierto es que solamente contiene tres parámetros independientes, vamos a elegir los giros alrededor de los tres ejes ortogonales del sistema terrestre (X,Y,Z), llamándolos (ω,ϕ,κ) , que expresan la orientación de la cámara en el momento de hacer la foto:

$$R = R_{K}R_{\phi}R_{\omega} \tag{2.3}$$

(Por convenio de la Sociedad Internacional de Fotogrametría y Teledetección, los giros se ponen en ese orden siendo (ω,κ) directos y φ retrógrado).

Ya Schmid en 1953 publicó un método de orientación de un fotograma utilizando las ecuaciones de colinealidad, y en 1958 Brown realizó un método para el ajuste de múlti-

ples estaciones empleando las ecuaciones de colinealidad. Estos métodos no se pudieron aplicar al completo por la falta de ordenadores disponibles. Hoy en día existen muchos métodos desarrollados que están comercializados.

Cuando tenemos una cámara métrica, es decir, una cámara dotada de marcas fiduciales y calibrada en un laboratorio conocemos perfectamente su orientación interior, es decir:

- Podemos corregir las fotocoordenadas de las distorsiones de las lentes y del film.
- Podemos situar el punto principal en la placa con respecto al centro fiducial (x_p, y_p) .
- Conocemos la distancia principal f.

En este caso, la ecuación (2.2) contiene seis incógnitas por haz, (X_0, Y_0, Z_0) , coordenadas del centro perspectivo, $(\omega, \varphi, \kappa)$, orientación de la cámara. Como cada punto de coordenadas conocidas nos crea dos ecuaciones, con solamente tres puntos de control terrestre podemos resolver el sistema.

Las ecuaciones (2.2) no son lineales y necesitan linealizarse. De todos los métodos de linealización disponibles vamos a utilizar el de Taylor, que nos conduce a realizar una determinación iterativa de la solución, lo que significa que debemos de conocer aproximadamente las incógnitas.

2.2. RESECCIÓN ESPACIAL PARA CÁMARAS NO MÉ-TRICAS. DISTORSIONES.

Como disponemos de cámaras no métricas las consideraciones anteriores deben ampliarse.

En nuestro caso las incógnitas son la posición de la cámara, su orientación y las desviaciones de la perspectiva central teórica, es decir, las distorsiones de la lente y de la película. Desafortunadamente estas desviaciones son incógnitas en las cámaras no-métricas y normalmente no son constantes de una exposición a otra. En este tipo de cámaras no se conoce la orientación interna del haz, los parámetros básicos de la orientación interna de un haz son la distancia principal (distancia focal calibrada o constante de la cámara), el punto principal, así como la distorsión radial (simétrica), el descentramiento (componentes asimétricas y tangenciales) de las lentes y la deformación del film (no tienen marcas fiduciales y no se pueden corregir las imágenes de las deformaciones del film). Hay que añadir como incógnitas la falta de afinidad y la posible no perpendicularidad de los ejes del comparador que nos sirve para medir las coordenadas.

Para tener en cuenta casi todos estos parámetros el modelo matemático (2.2) debe completarse introduciendo parámetros adicionales en las ecuaciones de colinealidad, además de aumentar el número de incógnitas por fotograma:

$$x - x_{p} + \Delta x = f \cdot \frac{r_{11}(X - X_{0}) + r_{12}(Y - Y_{0}) + r_{13}(Z - Z_{0})}{r_{31}(X - X_{0}) + r_{32}(Y - Y_{0}) + r_{33}(Z - Z_{0})}$$

$$y - y_{p} + \Delta y = f \cdot \frac{r_{21}(X - X_{0}) + r_{22}(Y - Y_{0}) + r_{23}(Z - Z_{0})}{r_{31}(X - X_{0}) + r_{32}(Y - Y_{0}) + r_{33}(Z - Z_{0})}$$
(2.4)

donde:

Δx, Δy son el refinamiento de las fotocoordenadas en función de la distorsión de las lentes y del film.

A continuación vamos a ver cómo se pueden expresar esos incrementos en función de las coordenadas imagen de los puntos.

Podemos tomar el modelo de Brown para la distorsión radial simétrica de las lentes desde el punto principal o de simetría, expresado en forma polinómica:

$$\Delta r = K_1 r^3 + K_2 r^5 + K_3 r^7 + \dots + K_n r^{n2+1}$$
 (2.5)

donde:

Δr es la distorsión radial

r es la distancia radial desde el punto hasta el de simetría o punto principal, es decir:

$$r^{2} = (x - x_{p})^{2} + (y - y_{p})^{2}$$
 (2.6)

Para la mayoría de las lentes, con sólo tres términos del polinomio (2.5) es suficiente salvo las lentes llamadas ojo de pez. Existen trabajos realizados con cámaras no-métricas, de 35mm y 70mm, que prueban que simplemente tomando el término K₁ de (2.5) es suficiente para lentes simples. En nuestro caso vamos a trabajar con dos términos, lo cual nos asegurará la precisión deseada.

Así:

$$\Delta r = K_1 r^3 + K_2 r^5 \tag{2.7}$$

expresa la corrección de la distorsión radial de la mayoría de los trabajos.

A parte de esta distorsión radial existe una distorsión asimétrica que hay que tener en cuenta, esta es debido al descentramiento de las lentes en la cámara.

La distorsión asimétrica cambia con el enfoque, su formulación la podemos encontrar en Brown (1972), que es una modificación de la de Magill (1955).

La distorsión asimétrica debida principalmente al descentramiento de las lentes fue ya estudiada por Conrady (1919), posteriormente por Brown (1966), y modificada por Fryer y Brown (1986) para expresar la variación de la misma al cambiar el enfoque de la cámara y al situar puntos que estuvieran en el plano focal.

El modelo matemático es el siguiente:

$$\Delta x = \left(1 - \frac{f}{s}\right) P_1 \left(r^2 + 2(x - x_p)^2\right) + 2P_2 (x - x_p)(y - y_p)$$

$$\Delta y = \left(1 - \frac{f}{s}\right) P_2 \left(r^2 + 2(y - y_p)^2\right) + 2P_1 (x - x_p)(y - y_p)$$
(2.8)

donde:

f es la distancia principal.

 $\Delta x, \Delta y$ componentes de la distorsión asimétrica

r la distancia radial desde el punto al punto de simetría

x, y son las coordenadas del punto imagen.

 (x_p, y_p) coordenadas del punto principal.

P_i son los coeficientes de la distorsión asimétrica.

s es la distancia desde la lente al objeto.

Si consideramos que el enfoque es hacia el infinito, s=∞, las fórmulas (2 8) se simplifican. Nosotros vamos a considerar que las cámaras se van a enfocar hacia el infinito porque principalmente lo vamos a aplicar a trabajos arquitectónicos. Por lo tanto, nuestra corrección asimétrica la expresaremos:

$$\Delta x = P_1(r + 2(x - x_p)^2) + 2P_2(x - x_p)(y - y_p)$$

$$\Delta y = P_2(r + 2(y - y_p)^2) + 2P_1(x - x_p)(y - y_p)$$
(2.9)

Sólo nos queda considerar la deformación de la película. Existen muchos trabajos destinados a crear un modelo que controle las deformaciones del film, incluyendo irregularidades del material del film, no planeidad del mismo en la cámara, tensión ejercida en la cámara por la película y fuera de la cámara durante el proceso de revelado, y efecto de la temperatura y humedad relativa en el almacenamiento del film y durante el proceso. Para estimar los parámetros de tales modelos necesitamos algunas referencias calibradas, tales como las marcas fiduciales o una red calibrada, llamada placa RESEAU, cuando una cámara está dotada de este tipo de placas se llaman cámaras semi-métricas. En las cámaras semi-métricas podemos perfectamente corregir de la distorsión del film. Por lo general, en cámaras nométricas tales referencias no existen y debemos recurrir al control terrestre para determinar un efecto conjunto de las distorsiones de las lentes y la deformación del film.

Normalmente se suele considerar como modelo matemático una expresión lineal entre las coordenadas comparador:

$$\Delta x = a_1 + a_2 x + a_3 y$$

$$(2.10)$$

$$\Delta y = a_4 + a_5 x + a_5 y$$

Para nuestro trabajo no vamos a considerar la deformación del film debido a la poca precisión que nos aporta.

Después de todas estas consideraciones, las ecuaciones que nos sirven de base para la Resección Espacial son las siguientes:

$$(x-x_{p})(1+K_{1}r^{2}+K_{2}r^{4})+P_{1}(r^{2}+2(x-x_{p})^{2})+2P_{2}(x-x_{p})(y-y_{p})=$$

$$f \cdot \frac{r_{11}(X-X_{0})+r_{12}(Y-Y_{0})+r_{13}(Z-Z_{0})}{r_{31}(X-X_{0})+r_{32}(Y-Y_{0})+r_{33}(Z-Z_{0})}$$

$$(2.11)$$

$$(y-y_{p})(1+K_{1}r^{2}+K_{2}r^{4})+P_{2}(r^{2}+2(y-y_{p})^{2})+2P_{1}(x-x_{p})(y-y_{p})=$$

$$f \cdot \frac{r_{21}(X-X_{0})+r_{22}(Y-Y_{0})+r_{23}(Z-Z_{0})}{r_{31}(X-X_{0})+r_{32}(Y-Y_{0})+r_{33}(Z-Z_{0})}$$

El número de incógnitas a resolver es trece, seis parámetros externos $(X_0, Y_0, Z_0, \kappa, \phi, \omega)$ y siete internos $(f, x_p, y_p, K_1, K_2, P_1, P_2)$. Los parámetros internos son los mismos para todos los fotogramas, si no cambiamos de cámara ni de enfoque en cada foto.

2.3. LINEALIZACIÓN DE LAS ECUACIONES DE COLI-

NEALIDAD.

Nos damos cuenta de que (2.11) son ecuaciones no lineales que para resolver necesitamos linealizarlas. El método aplicado para linealizarlas va a ser el de Taylor en su primera aproximación. Para ello, debemos derivar las dos ecuaciones con respecto a cada una de las variables que consideramos como incógnitas.

Consideremos las siguientes variables:

$$U = r_{11}(X - X_0) + r_{12}(Y - Y_0) + r_{13}(Z - Z_0)$$

$$= r_{21}(X - X_0) + r_{22}(Y - Y_0) + r_{23}(Z - Z_0)$$

$$Q = r_{31}(X - X_0) + r_{32}(Y - Y_0) + r_{33}(Z - Z_0)$$
(2.12)

La matriz R, respetando los convenios fotogramétricos, es la siguiente:

$$R = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\kappa & \cos\omega\sin\kappa + \sin\omega\sin\varphi\cos\kappa & \sin\omega\sin\kappa - \cos\omega\sin\varphi\cos\kappa \\ -\cos\varphi\sin\kappa & \cos\omega\cos\kappa - \sin\omega\sin\varphi\sin\kappa & \sin\omega\cos\kappa + \cos\omega\sin\varphi\sin\kappa \\ -\sin\varphi & -\sin\omega\cos\varphi & \cos\omega\cos\kappa \end{pmatrix}$$
(2.13)

Las dos funciones para aplicar el método de Taylor son:

$$F_{1} = (x - x_{p})(1 + K_{1}r^{2} + K_{2}r^{4}) + P_{1}(r^{2} + 2(x - x_{p})^{2}) + 2P_{2}(x - x_{p})(y - y_{p}) - f\frac{U}{Q}$$

$$(2.14)$$

$$F_{2} = (y - y_{p})(1 + K_{1}r^{2} + K_{2}r^{4}) + P_{2}(r^{2} + 2(y - y_{p})^{2}) + 2P_{1}(x - x_{p})(y - y_{p}) - f\frac{V}{Q}$$

Las derivadas de (2 14) con respecto a cada una delas incógnitas que nos formarán los coeficientes de las ecuaciones lineales son las siguientes:

1. Derivadas con respecto a las coordenadas de la cámara (X_0, Y_0, Z_0) :

$$a_{11} - \frac{\partial F_1}{\partial X_0} - \frac{f}{Q} \left(-r_{11} + r_{31} \frac{U}{Q} \right)$$

$$a_{12} = \frac{\partial F_1}{\partial Y_0} = \frac{f}{Q} \left(-r_{12} + r_{32} \frac{U}{Q} \right)$$

$$a_{13} = \frac{\partial F_1}{\partial Z_0} = \frac{f}{Q} \left(-r_{13} + r_{33} \frac{U}{Q} \right)$$

$$a_{21} = \frac{\partial F_2}{\partial X_0} = \frac{f}{Q} \left(-r_{21} + r_{31} \frac{V}{Q} \right)$$

$$a_{22} = \frac{\partial F_2}{\partial Y_0} = \frac{f}{Q} \left(-r_{22} + r_{32} \frac{V}{Q} \right)$$

$$a_{23} = \frac{\partial F_2}{\partial Z_0} = \frac{f}{Q} \left(-r_{23} + r_{33} \frac{V}{Q} \right)$$

2. Derivadas con respecto al punto principal (x_p, y_p) :

$$a_{18} = \frac{\partial F_1}{\partial x_p} = -1 - K_1 r^2 - 2K_1 (x - x_p)^2 - 6P_1 (x - x_p) - 2P_2 (y - y_p) - K_2 r^4 - 4r^2 K_2 (x - x_p)^2$$

$$a_{19} = \frac{\partial F_1}{\partial y_p} = -1 - K_1 r^2 - 2K_1 (y - y_p)^2 - 6P_2 (y - y_p) - 2P_1 (x - x_p) - K_2 r^4 - 4r^2 K_2 (y - y_p)^2$$

$$a_{28} = \frac{\partial F_2}{\partial x_p} = -2K_1 (x - x_p)(y - y_p) - 2P_2 (x - x_p) - 2P_1 (y - y_p) - 4K_2 r^2 (x - x_p)(y - y_p)$$

$$a_{29} = \frac{\partial F_2}{\partial y_p} = -2K_1 (x - x_p)(y - y_p) - 2P_2 (x - x_p) - 2P_1 (y - y_p) - 4K_2 r^2 (x - x_p)(y - y_p)$$

Derivadas con respecto a la orientación de la cámara (κ,φ,ω):

$$a_{14} = \frac{\partial F_1}{\partial \omega} = \frac{f}{Q}V$$

$$a_{15} = \frac{\partial F_1}{\partial \varphi} = \frac{f}{Q} \left(-Q\cos\kappa - \frac{U}{Q} (U\cos\kappa - V\sin\kappa) \right)$$

$$a_{16} = \frac{\partial F_1}{\partial \kappa} = \frac{f}{Q} \left(-r_{13} (Y - Y_0) + r_{12} (Z - Z_0) - \frac{U}{Q} \left(-r_{33} (Y - Y_0) + r_{32} (Z - Z_0) \right) \right)$$

$$a_{24} = \frac{\partial F_2}{\partial \omega} = -\frac{f}{Q}U$$

$$a_{25} = \frac{\partial F_2}{\partial \varphi} = \frac{f}{Q} \left(Q\sin\kappa - \frac{V}{Q} (U\cos\kappa - V\sin\kappa) \right)$$

$$a_{26} = \frac{\partial F_2}{\partial \kappa} = \frac{f}{Q} \left(-r_{23} (Y - Y_0) + r_{22} (Z - Z_0) - \frac{V}{Q} \left(-r_{33} (Y - Y_0) + r_{32} (Z - Z_0) \right) \right)$$

4. Derivadas con respecto a la distancia focal f de la cámara:

$$a_{17} = \frac{\partial F_1}{\partial f} = \frac{U}{Q}$$

$$a_{27} = \frac{\partial F_2}{\partial f} = \frac{V}{Q}$$
(2.18)

5. Derivadas con respecto a la distorsión radial (K₁,K₂):

$$a_{110} = \frac{\partial F_1}{\partial K_1} = r^2 (x - x_p)$$

$$a_{210} = \frac{\partial F_2}{\partial K_1} = r^2 (y - y_p)$$

$$a_{113} = \frac{\partial F_1}{\partial K_2} = r^4 (x - x_p)$$

$$a_{213} = \frac{\partial F_2}{\partial K_2} = r^4 (y - y_p)$$
(2.19)

6. Derivadas con respecto a los parámetros de la distorsión tangencial (P1,P2):

$$a_{111} = \frac{\partial F_1}{\partial P_1} = r^2 + 2(x - x_p)^2 \qquad a_{211} = \frac{\partial F_2}{\partial P_1} = 2(x - x_p)(y - y_p)$$

$$a_{112} = \frac{\partial F_1}{\partial P_2} = 2(x - x_p)(y - y_p) \qquad a_{212} = \frac{\partial F_2}{\partial P_2} = r^2 + 2(y - y_p)^2$$
(2.20)

Vamos a denotar por b_i el valor de las funciones (2.14) cuando sustituimos las aproximaciones de las incógnitas:

$$b_{1} = (x - x_{p})(1 + K_{1}r^{2} + K_{2}r^{4}) + P_{1}(r^{2} + 2(x - x_{p})^{2}) + 2P_{2}(x - x_{p})(y - y_{p}) - f\frac{U}{Q}$$

$$b_{2} = (y - y_{p})(1 + K_{1}r^{2} + K_{2}r^{4}) + P_{2}(r^{2} + 2(y - y_{p})^{2}) + 2P_{1}(x - x_{p})(y - y_{p}) - f\frac{V}{Q}$$

Por lo tanto, el sistema a resolver sería el siguiente:

$$a_{11}\Delta X_{0} + a_{12}\Delta Y_{0} + a_{13}\Delta Z_{0} + a_{14}\Delta \kappa + a_{15}\Delta \varphi + a_{16}\Delta \omega + a_{17}\Delta f + a_{16}\Delta x_{p} + a_{19}\Delta y_{p} + a_{110}\Delta K_{1} + a_{111}\Delta P_{1} + a_{112}\Delta P_{2} + a_{113}\Delta K_{2} + b_{1} = 0$$

$$(2.22)$$

$$a_{21}\Delta X_{0} + a_{22}\Delta Y_{0} + a_{23}\Delta Z_{0} + a_{24}\Delta \kappa + a_{25}\Delta \varphi + a_{26}\Delta \omega + a_{27}\Delta f + a_{28}\Delta x_{p} + a_{29}\Delta y_{p} + a_{210}\Delta K_{1} + a_{211}\Delta P_{1} + a_{212}\Delta P_{2} + a_{213}\Delta K_{2} + b_{2} = 0$$

donde la matriz (a_{ij}) son las derivadas de las funciones (2.14) una vez sustituido el valor aproximado de las incógnitas.

Expresado matricialmente tendríamos:

$$A.\Delta = B \tag{2.23}$$

Normalmente se suelen tener más ecuaciones que incógnitas y una forma de resolver el sistema es recurriendo al método de ajuste por mínimos cuadrados:

$$A^t A \cdot \Delta = A^t B \tag{2.24}$$

(vamos a considerar que todos los datos son de igual peso)

CAPÍTULO 3: TRANSFORMACIÓN LINEAL DIRECTA

3.1. INTRODUCCIÓN.

Cuando aplicamos el método de resección espacial necesitamos conocer previamente los valores aproximados de las incógnitas. Fotogramétricamente esto no nos plantea problemas porque normalmente conocemos con qué cámara estamos trabajando, lo cual implica el conocimiento de la distancia focal f, y además podemos suponer que la cámara está exenta de distorsiones, es decir, que $K_1=K_2=P_1=P_2=0$. Por otra parte, podemos calcular las coordenadas del centro (x_p,y_p) sin más que medir las esquinas de la foto en el aparato de medida que utilicemos, e intersectar esas rectas. En cuanto a los parámetros externos del haz, siempre tenemos medidas topográficas de campo que nos dan la posición de la cámara (X_0,Y_0,Z_0) , y al trabajar con cámaras terrestres, el único ángulo que tenemos que determinar en el campo es el φ , que es la orientación del fotograma con respecto al sistema de referencia terrestre considerado. Los otros dos ángulos, si la foto es casi vertical al suelo, ω es próximo a 100^g (grados centesimales porque en los aparatos de fotogrametría todos los ángulos se miden en este tipo de magnitud), ya que el plano xy del fotograma es perpendicular al plano XZ terrestre, y el κ es próximo a 0^g , puesto que el fotograma suele tomarse vertical y no inclinado, para mayor aprovechamiento.

A pesar de que sus aproximaciones no suelen plantear problemas, hemos estimado oportuno, intentar resolver el problema de la resección espacial mediante algún método directo, para obtener de una forma aproximada los valores de estas incógnitas, lo cual significa que no necesitamos realizar su determinación en el campo. El método que hemos elegido ha sido la transformación lineal directa. Nosotros lo hemos desarrollado como paso previo a nuestros algoritmos de resección espacial.

3.2. TRANSFORMACIÓN LINEAL DIRECTA.

En 1971, Abdel-Aziz, Y.I. y Karara, H.M. desarrollaron un método de reducción de datos para las cámaras no-métricas llamado Transformación Lineal Directa (DLT), que ha sido muy utilizado desde entonces en diversas aplicaciones.

Hemos elegido este método porque, como veremos, es un método directo de resección espacial que aunque es menos preciso nos basta para aproximar las soluciones a incorporar en nuestros algoritmos.

Las ecuaciones básicas de una transformación lineal directa (Okamoto, 1981) se obtienen a partir de las ecuaciones de colinealidad (2..4):

$$x + \Delta x = \frac{L_1 X + L_2 Y + L_3 Z + L_4}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1}$$

$$y + \Delta y = \frac{L_5 X + L_6 Y + L_7 Z + L_8}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1}$$
(3.1)

donde:

(x,y) son las coordenadas de un punto imagen medidas en el comparador.

O Inharatelded de les Delmes de Gren Cenerie Diklister: Diatel

(X,Y,Z) son las coordenadas terrestres de un punto objeto.

L_i coeficientes de la transformación

Δx, Δy refinamiento de las coordenadas en función de las distorsiones.

Los parámetros Li son:

$$L_{1} = (x_{p}r_{31} - c_{x}r_{11})/L \qquad L_{5} = (y_{p}r_{31} - c_{y}r_{21})/L
L_{2} = (x_{p}r_{32} - c_{x}r_{12})/L \qquad L_{6} = (y_{p}r_{32} - c_{y}r_{22})/L
L_{3} = (x_{p}r_{33} - c_{x}r_{13})/L \qquad L_{7} = (y_{p}r_{33} - c_{y}r_{23})/L
L_{4} = x_{p} + c_{x}(r_{11}X_{0} + r_{12}Y_{0} + r_{13}Z_{0})/L \qquad L_{8} = y_{p} + c_{y}(r_{21}X_{0} + r_{22}Y_{0} + r_{23}Z_{0})/L
L_{9} = r_{31}/L \qquad L_{10} = r_{32}/L \qquad L_{11} = r_{33}/L
L = -(r_{31}X_{0} + r_{32}Y_{0} + r_{33}Z_{0})$$

donde:

$$f = \frac{c_x + c_y}{2}$$

Al operar en las ecuaciones (3.1) obtenemos:

$$-A\Delta x + L_1 X + L_2 Y + L_3 Z + L_4 - L_9 x X - L_{10} x Y - L_{11} x Z - x = 0$$

$$-A\Delta y + L_5 X + L_6 Y + L_7 Z + L_8 - L_9 y X - L_{10} y Y - L_{11} y Z - y = 0$$
(3.3)

donde:

L_i son los coeficientes de transformación.

$$A = L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1$$

Cuando estamos trabajando con requerimientos de muy baja precisión podemos despreciar los términos Δx , Δy de la ecuación (3.2):

$$L_{1}X + L_{2}Y + L_{3}Z + L_{4} - L_{9}xX - L_{10}xY - L_{11}xZ - x = 0$$

$$(3.4)$$

$$L_{5}X + L_{6}Y + L_{7}Z + L_{8} - L_{9}yX - L_{10}yY - L_{11}yZ - y = 0$$

Las ecuaciones (3.4) son lineales respecto de los parámetros L_i. Tras evaluar estos parámetros Li y leer las coordenadas del punto en el comparador, podemos determinar las coordenadas terrestres de dicho punto mediante la resolución del siguiente sistema:

$$(L_{1} - xL_{9})X + (L_{2} - xL_{10})Y + (L_{3} - xL_{11})Z = x - L_{4}$$

$$(L_{5} - yL_{9})X + (L_{6} - yL_{10})Y + (L_{7} - yL_{11})Z = y - L_{6}$$
(3.5)

Para resolver el sistema necesitamos, al menos, conocer las coordenadas comparador del punto en dos fotogramas.

Comparando (3.1), sin el incremento debido a las distorsiones, con (2.2) y realizando operaciones, obtenemos los parámetros de la orientación tanto interna como externa de una foto:

tomemos L como parámetro auxiliar,

$$L = \frac{-1}{\sqrt{L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2}}$$

$$x_p - (L_1 L_9 + L_2 L_{10} + L_3 L_{11}) L^2 \qquad y_p - (L_5 L_9 + L_6 L_{10} + L_7 L_{11}) L^2 \qquad (3.6)$$

$$c_x = \sqrt{(L_1^2 + L_2^2 + L_3^2) L^2 - x_p^2} \qquad c_y = \sqrt{(L_5^2 + L_6^2 + L_7^2) L^2 - y_p^2}$$

Los ángulos de orientación de la cámara:

$$\varphi = \operatorname{arcsen}(L_{p}L)$$

$$= \operatorname{arctag}\left(\frac{-L_{10}}{L_{11}}\right)$$

$$\kappa = \operatorname{arctg}\frac{-(y_{p}L_{9} - L_{5})c_{x}}{(x_{p}L_{9} - L_{1})c_{y}}$$
(3.7)

Las coordenadas de la cámara:

$$\begin{pmatrix} X_{0} \\ Y_{0} \\ Z_{0} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} L_{1} & L_{2} & L_{3} \\ L_{5} & L_{6} & L_{7} \\ L_{9} & L_{10} & L_{11} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L_{4} \\ L_{8} \\ 1 \end{pmatrix}$$
(3.8)

De esta forma, resolviendo el sistema lineal (3.4) sin tener en cuenta las distorsiones, cada punto nos ofrece dos ecuaciones con once incógnitas, que son los L_i, y conociendo dichos L_i podemos tener una valoración aproximada de las incógnitas de la resección espacial.

No obstante, la transformación lineal directa la podemos realizar teniendo en cuenta las distorsiones. Sabemos entonces que las ecuaciones son no lineales y se debe

cuenta las distorsiones. Sabemos entonces que las ecuaciones son no lineales y se dehe aplicar el método de Taylor para linealizarlas, conduciendo así a un proceso iterativo.

Considerando sólo un parámetro de la distorsión radial (2.5) y sustituyéndolo en (3.3):

$$-A(x-x_{p})K_{1}r^{2} + L_{1}X + L_{2}Y + L_{3}Z + L_{4} - L_{9}xX - L_{10}xY - L_{11}xZ - x = 0$$

$$-A(y-y_{p})K_{1}r^{2} + L_{5}X + L_{6}Y + L_{7}Z + L_{8} - L_{9}yX - L_{10}yY - L_{11}yZ - y = 0$$
(3.9)

Para resolver estas ecuaciones con 12 incógnitas, necesitamos como mínimo seis puntos de control terrestre bien distribuidos en el modelo.

Naturalmente, siempre se mejora el resultado si disponemos de datos redundantes, procurando que todos los puntos no estén en un mismo plano.

Estudios precedentes nos demuestran que la elección de más de veinticinco o treinta puntos de control terrestre no mejora prácticamente la solución.

Para que la precisión no se pierda, es mucho más importante la configuración de los fotogramas. Normalmente, se recomienda que éstos se obtengan en el caso normal, es decir, las cámaras dispuestas en posición vertical, o con un ángulo de convergencia pequeño igual para las dos cámaras.

Para resolver el sistema (3.9) realizamos su linealización. Sean las funciones:

$$F_{1} = -A(x - x_{p})K_{1}r^{2} + L_{1}X + L_{2}Y + L_{3}Z + L_{4} - L_{9}xX - L_{10}xY - L_{11}xZ - x = 0$$

$$(3.10)$$

$$F_{2} = -A(y - y_{p})K_{1}r^{2} + L_{5}X + L_{6}Y + L_{7}Z + L_{8} - L_{9}yX - L_{10}yY - L_{11}yZ - y = 0$$

Las derivadas con respecto a las incógnitas a determinar son:

$$a_{11} = \frac{\overline{F_{1}}}{\overline{A_{1}}} = X \qquad a_{21} = \frac{\overline{F_{2}}}{\overline{A_{1}}} = 0$$

$$a_{12} = \frac{\overline{F_{1}}}{\overline{A_{2}}} = Y \qquad a_{22} = \frac{\overline{F_{2}}}{\overline{A_{2}}} = 0$$

$$a_{13} = \frac{\overline{F_{1}}}{\overline{A_{2}}} = Z \qquad a_{23} = \frac{\overline{F_{2}}}{\overline{A_{2}}} = 0$$

$$a_{14} = \frac{\overline{F_{1}}}{\overline{A_{4}}} = 1 \qquad a_{24} = \frac{\overline{F_{2}}}{\overline{A_{4}}} = 0$$

$$a_{15} = \frac{\overline{F_{1}}}{\overline{A_{2}}} = 0 \qquad a_{25} = \frac{\overline{F_{2}}}{\overline{A_{2}}} = X$$

$$a_{16} = \frac{\overline{F_{1}}}{\overline{A_{2}}} = 0 \qquad a_{25} = \frac{\overline{F_{2}}}{\overline{A_{2}}} = Y$$

$$a_{17} = \frac{\overline{F_{1}}}{\overline{A_{2}}} = 0 \qquad a_{27} = \frac{\overline{F_{2}}}{\overline{A_{2}}} = Z$$

$$a_{18} = \frac{\overline{F_{1}}}{\overline{A_{2}}} = 0 \qquad a_{28} = \frac{\overline{F_{2}}}{\overline{A_{2}}} = 1$$

$$a_{19} = \frac{\overline{F_{1}}}{\overline{A_{2}}} = -xX - (x - x_{p})XK_{1}r^{2} \qquad a_{29} = \frac{\overline{F_{2}}}{\overline{A_{2}}} = -yX - (y - y_{p})XK_{1}r^{2}$$

$$a_{110} = \frac{\overline{F_{1}}}{\overline{A_{10}}} = -xY - (x - x_{p})YK_{1}r^{2} \qquad a_{210} = \frac{\overline{F_{2}}}{\overline{A_{20}}} = -yY - (y - y_{p})YK_{1}r^{2}$$

$$a_{111} = \frac{\overline{F_{1}}}{\overline{A_{11}}} = -xZ - (x - x_{p})ZK_{1}r^{2} \qquad a_{211} = \frac{\overline{F_{2}}}{\overline{A_{20}}} = -yZ - (y - y_{p})ZK_{1}r^{2}$$

$$a_{112} = \frac{\overline{F_{1}}}{\overline{A_{1}}} = -(x - x_{p})r^{2}A \qquad a_{212} = \frac{\overline{F_{2}}}{\overline{A_{10}}} = -(y - y_{p})r^{2}A$$

El sistema lineal a resolver sería el siguiente:

$$a_{11}\Delta L_{1} + a_{12}\Delta L_{2} + a_{13}\Delta L_{3} + a_{11}\Delta L_{4} + a_{15}\Delta L_{5} + a_{16}\Delta L_{6} +$$

$$+a_{17}\Delta L_{7} + a_{18}\Delta L_{8} + a_{19}\Delta L_{9} + a_{110}\Delta L_{10} + a_{111}\Delta L_{11} + a_{112}\Delta K_{1} + b_{1} = 0$$

$$a_{21}\Delta L_{1} + a_{22}\Delta L_{2} + a_{23}\Delta L_{3} + a_{21}\Delta L_{4} + a_{25}\Delta L_{5} + a_{26}\Delta L_{6} +$$

$$+a_{27}\Delta L_{7} + a_{28}\Delta L_{8} + a_{29}\Delta L_{9} + a_{210}\Delta L_{10} + a_{211}\Delta L_{11} + a_{212}\Delta K_{1} + b_{2} = 0$$

$$(3.12)$$

Bopp y Krauss (1978) publicaron una variación de este método incorporando ligaduras al sistema de ecuaciones. Es necesario eliminar dos de esos L_i para que la solución del sistema no cuente con singularidades. Dichos L_i se pueden obtener como expresiones trigonométricas de una matriz ortogonal. Bopp y Krauss obtuvieron las siguientes condiciones de ligaduras:

$$(L_{1}^{2} + L_{2}^{2} + L_{3}^{2}) - (L_{5}^{2} + L_{6}^{2} + L_{7}^{2}) + \frac{(L_{5}L_{9} + L_{6}L_{10} + L_{7}L_{11})^{2} - (L_{1}L_{9} + L_{2}L_{10} + L_{3}L_{21})^{2}}{(L_{9}^{2} + L_{10}^{2} + L_{11}^{2})} = 0$$

$$(3.13)$$

$$(L_{1}L_{5} + L_{2}L_{6} + L_{3}L_{7}) - \frac{(L_{1}L_{9} + L_{2}L_{10} + L_{3}L_{11})(L_{5}L_{9} + L_{6}L_{10} + L_{7}L_{11})}{(L_{9}^{2} + L_{10}^{2} + L_{11}^{2})} = 0$$

Incorporando estos dos restricciones al método DLT tenemos el llamado esquema de 11-parámetros.

La forma de resolver el nuevo sistema varía según se considere las restricciones como ecuaciones de observación adicionales con varianza cero o bien se incorporan al ajuste de mínimos cuadrados como restricciones entre los parámetros. Bopp recomienda el primer procedimiento por ser menos complicado a la hora de su informatización en el ordenador. Debido al carácter no lineal de las ecuaciones y restricciones, se suele recomendar la linealización por Taylor y posterior resolución mediante un proceso iterativo, el cual se inicializa con una aproximación obtenida por tan sólo unos pocos puntos de apoyo.

El sistema de ecuaciones lineales se puede resolver directamente o iterativamente.

Naftel y Boot (1991), al resolverlo iterativamente comprueban la obtención de una me-

joría en la precisión.

Como vamos a utilizar este método para obtener una aproximación de la orientación externa y parte de la interna de la cámara, lo hacemos por un proceso directo aplicado a (3.4).

3.3. APLICACIÓN DE LA TRANSFORMACIÓN LINEAL DIRECTA

Para determinar la posición y la orientación de la cámara de forma directa tenemos que recurrir a la resolución directa del sistema engendrado por las ecuaciones (3.4), despreciando la distorsión, mediante algún procedimiento. Está claro que nos dará una solución aproximada que puede alejarse bastante de la real, pero lo interesante es que nos sirva como valor estimado cuando realizamos la linealización del sistema.

X _p	0.6mm
y_p	0.4mm
C _x	79.59mm
C _y	79. 59mm
X_0	95 m
Y_0	100m
Z_0	12m
φ	225 ^g
ĸ	-2 ²
ω	100 ^g

Tabla 3.1

Para comprobar que el algoritmo funciona correctamente hemos creado un test

Para comprobar que el algoritmo funciona correctamente hemos creado un test artificial. Hemos calculado las coordenadas comparador (x,y) de una serie de puntos cuyas coordenadas terreno son conocidas por ser impuestas por nosotros. Para ello, partimos de una orientación conocida de la cámara, con los datos indicados en la tabla 3.1.

Estos datos de orientación están simulando casos reales, por los tanto, no son abstractos. Tomamos grados centesimales porque todos los instrumentos topográficos y fotogramétricos usan esta magnitud angular.

A partir de (3.2) y en función de los datos de la tabla 3.1, hemos calculado los once L_i. Con esos L_i y las coordenadas terrestres se calcula, mediante (3.4) las coordenadas (x,y) de los distintos puntos, que nos harán la función de coordenadas comparador exentas de errores de observación y accidentales.

Las coordenadas terreno de los puntos de prueba son las siguientes:

X (m)	Y (m)	Z (m)
96.807	73.351	9.242
99.544	74.685	9.237
105.606	78.765	9.691
107.089	78.348	9.226
107.004	78.270	11.348
104.585	78.082	11.350
101.303	76.493	11.354
99.657	74.709	11.361
96.925	73.362	11.371
97.247	73.522	12.289
99.976	74.866	12.278
105.319	78.597	12.426
100.443	76.229	12.435
104.250	78.089	15.375
102.758	77.686	17.410
	96.807 99.544 105.606 107.089 107.004 104.585 101.303 99.657 96.925 97.247 99.976 105.319 100.443 104.250	96.807 73.351 99.544 74.685 105.606 78.765 107.089 78.348 107.004 78.270 104.585 78.082 101.303 76.493 99.657 74.709 96.925 73.362 97.247 73.522 99.976 74.866 105.319 78.597 100.443 76.229 104.250 78.089

Tabla 3.2

Los parámetros Li obtenidos, y que tomaremos como datos sin error, han sido:

\mathbf{L}_1	-1.307544759883824
L_2	-5.531931483121493E-001
L ₃	-5.531931483121493E-001
L ₄	-4.461626288831488E-002
L_5	180.071462174838000
L_6	-3.848818492372136E-002
L ₇	1.419711695020847
L ₈	-11.013241528148100
L9	6.829607891306540E-003
L ₁₀	-1.648812741025494E-002
L ₁₁	-7.207189676300853E-010

Tabla 3.3

Así mismo, las coordenadas imagen calculas mediante (3.4) han sido:

PUNTO	X	у
1	27.676429764984880	-7.425515951448231
2	18.254495415019690	-7.801356429558169
3	-4.77504560828364	-7.534321033319455
4	-8.429726914137056	-8.852129685730196
5	-8.280812932355733	-1.983630408506030
6	-8.877352665632046E-001	-1.810806249867553
7	11.126119078205830	-1.401035232207453
8	17.669258276824720	-1.086920454563876
9	27.073703269966360	-7.440746693975665E-001
10	25.881866118417650	2.103314149165964
11	16.470259849504860	1.779818155800414
12	-3.948242671639243	1.687010328179728
13	14.013983447155400	2.262165503230495
14	-2.929797171550300E-001	11.672006235298040
15	4,653468507672970	18.793538985232610

Tabla 3.4

3.3.1. RESULTADOS OBTENIDOS

El algoritmo elaborado toma los datos de las tablas 3.2 y 3.4, para resolver mediante el método de mínimos cuadrados, y con una resolución directa por eliminación gaussiana el sistema creado por (3.4).

Puesto que este sistema cuenta con once incógnitas y que cada punto nos da dos ecuaciones, ello supone que necesitamos un mínimo de seis puntos para poder resolverlo. Hemos tomado quince puntos de apoyo para tener datos redundantes.

Calculamos primeramente los once Li, resolviendo (3.4).

A partir de aquí, operando con (3.4) y (2.2) podemos obtener la matriz de orientación espacial; cuyas entradas son:

$$r_{11} = L \frac{x_{p}L_{9} - L_{1}}{c_{x}} \qquad r_{12} = L \frac{x_{p}L_{10} - L_{2}}{c_{x}} \qquad r_{13} = L \frac{x_{p}L_{11} - L_{3}}{c_{x}}$$

$$r_{21} = L \frac{y_{p}L_{9} - L_{5}}{c_{y}} \qquad r_{22} = L \frac{y_{p}L_{10} - L_{6}}{c_{y}} \qquad r_{23} = L \frac{y_{p}L_{11} - L_{7}}{c_{y}}$$

$$r_{31} = LL_{9} \qquad r_{32} = LL_{10} \qquad r_{33} = LL_{11}$$

$$(3.14)$$

Con esta matriz podemos obtener cuál es la precisión de la solución determinada, sin más que aplicar las propiedades de una matriz ortogonal como es la R.

El gran problema que nos encontramos en el proceso es que los ángulos siempre los obtenemos menores de cien grados negativos o positivos. Para poder discernir cuál es el ángulo que nos interesa nos basamos en las siguientes hipótesis:

- El ángulo ω es siempre próximo a los 100^g, lo que significa que su seno siempre es positivo.
- 2. El ángulo κ es siempre próximo a 0^g, lo que significa que su coseno es siempre posi-

tivo.

3. El ángulo φ puede estar en cualquier cuadrante y es el que tenemos que determinar con ayuda de las anteriores suposiciones.

No hay problema con la determinación de κ , ya que su valor absoluto es siempre menor de cien grados centesimales.

No hay problema con la determinación de ω, porque si obtenemos un ángulo negativo significa que su coseno es negativo y que es mayor de cien grados centesimales, sumamos 200g y obtenemos el verdadero valor.

Sin embargo, según podemos ver en (3.7), el valor de ϕ se determina por el arco seno del producto de un L₉.L, visto (3.6) dicho L tiene signo negativo lo que restringe la determinación de ϕ .

Para determinar el verdadero valor de φ hemos considerado sus cuatro posibilidades, y elegido la que menor error produce en la determinación de las coordenadas comparador de los puntos.

Al aplicar el algoritmo obtenemos los siguientes datos de salida:

- Los parámetros aproximados de la resección espacial, que servirán para trabajar con posteriores algoritmos.
- Los valores de L_i calculados.
- Los residuales en las coordenadas imagen de los puntos, utilizando los Li anteriores.
 No podemos conocer los residuales en las coordenadas terrestres porque necesitamos más de un fotograma, tal como se vio en (3.5). Los residuales en las coordenadas imagen tienen que ser más finos para que el proceso sea aceptable, podemos aceptar la milésima del milímetro.

En este caso concreto hemos obtenido la siguiente orientación interna y externa de la cámara:

X _p	5.992931551204941E-001
y_p	3.995287703762822E-001
C _x	79.543107362649470
Cy	79.543105883218770
X _c	95.000000000447260
Y _c	99.999999998978050
Z _c	11.99999999986040
φ	224.984469753871600
κ	-1.999851398208582
ω	100.000002782503800

Tabla 3.5

Estos valores (Tabla 3.5) son prácticamente iguales a los de partida de la tabla 3.1.

Los errores en las fotocoordenadas son del orden de 10⁻¹¹, más que aceptables, debido a que las coordenadas están exentas de errores de observación. Normalmente los errores que se deben obtener son superiores al orden de 10⁻³.

Con estos resultados podemos dar como válido el algoritmo desarrollado. No obstante, conviene aplicarlo a algún caso real para comprobar de qué orden se obtienen los errores cuando las coordenadas no son tan precisas.

Lo primero que vamos a hacer es considerar que existe una distorsión que va a afectar a las coordenadas comparador, pero que no la vamos a tener en cuenta a la hora de determinar la posición y orientación de la cámara.

El cálculo de las coordenadas comparador de una serie de puntos cuyas coordenadas terreno son conocidas, se obtiene resolviendo el sistema (3.6) cuando existe un

parámetro de distorsión radial K₁. En nuestro trabajo hemos impuesto un valor K₁=0.000231, obtenido de un caso real. Como (3.6) no es lineal hemos linealizado el sistema aplicando el método de Taylor, considerando como incógnitas las coordenadas comparador (x,y), y obteniendo el siguiente sistema:

$$(3.15)$$

$$A(1+r^{2}K_{1}+2(x-x_{p})^{2}K_{1})\Delta x + 2A(x-x_{p})(y-y_{p})K_{1}\Delta y + A(x+(x-x_{p})r^{2}K_{1}) - L_{1}X - L_{2}Y$$

$$-L_{3}Z - L_{4} = 0$$

$$2A(x-x_{p})(y-y_{p})K_{1}\Delta x + A(1+r^{2}K_{1}+2(y-y_{p})^{2}K_{1})\Delta y + A(y+(y-y_{p})r^{2}K_{1}) - L_{5}X - L_{6}Y$$

$$-L_{7}Z - L_{8} = 0$$

$$A = L_{9}X + L_{10}Y + L_{11}Z + 1$$

Tomando como datos de entrada los valores de la tabla 3.1 además del K_1 y los de la tabla 3.2, calculamos los valores de L_i para obtener las coordenadas comparador de los puntos.

En este ejemplo hemos conseguido los mismos L_i anteriores, ya que no dependen de la distorsión, y unas coordenadas imagen ligeramente distintas puesto que la distorsión no es muy grande.

Con estas coordenadas imagen y con las terrestres ejecutamos nuevamente el algoritmo anterior, obteniendo la tabla 3.6.

Los L_i obtenidos son distintos a los impuestos (3.3). Solamente se ha incorporado un parámetro de distorsión radial bastante pequeño. Los residuales en las fotocoordenadas son del orden de 10⁻¹, lo que significa que la distorsión influye de forma considerable en el resultado.

X _p	20.038714622675660
y _p	2.431949500071033
C _x	49.014288694020430
C _y	50.865729971520520
X _c	95.798059602585080
Y _c	92.882017770175980
Z _c	12.490585686763580
φ	208.160411036602900
ĸ	-7.678727574721190E-001
ω	99.666101852553960

Tabla 3.6

Si analizamos los elementos de la orientación de la tabla 3.6 calculados a partir de esos L_i vemos que hay notable diferencia con respecto a los impuestos indicados en la tabla 3.1, sobre todo en los parámetros internos.

También podemos observar que los residuales en las coordenadas imagen con esos L_i calculados son bastante apreciables.

Podemos ver que con las coordenadas imagen obtenidas al existir distorsión, los residuales son mayores si tomamos los L_i de partida indicados en la tabla 3.3, a si tomamos calculados con la distorsión, esto significa que al calcular los L_i se ocultan los errores de las coordenadas imagen pudiendo darnos unos valores bastante alejados de los reales.

Si tuviéramos que obtener las coordenadas terreno de puntos que aparecen en los fotogramas con (3.4) tendríamos que optar por resolver iterativamente le sistema (3.6)

para obtener una aproximación de la distorsión, y en definitiva, una mayor precisión.

Como nos interesa tomar estos valores como una primera aproximación de la solución es importante ver si cumplen este requisito, si no lo cumplieran; tendríamos que intentar obtener una solución más aproximada con métodos iterativos.

3.3.2. ESTUDIO DEL CONDICIONAMIENTO DE LA MATRIZ.

Debemos efectuar un estudio más riguroso sobre el condicionamiento de la matriz de coeficientes en la resolución de los L_i. La matriz de coeficientes la hemos formado resolviendo (3.4) mediante mínimos cuadrados. Sea el sistema (3.4) expresado matricialmente:

$$A.L=b$$
 (3.16)

siendo:

siendo n el número de puntos de apoyo, y

Expresándolo mediante submatrices:

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 & C \\ 0 & B & D \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

Es sobradamente conocido que una forma de resolver este sistema es obtener una solución L* de forma que haga mínima la norma euclídea $\|b - AL^*\| = \min$.

En nuestros casos siempre tenemos que el rango de la matriz A es n, y, por lo tanto, se sabe que L* satisface la ecuación:

$$A^{t}.A.L = A^{t}.b \tag{3.20}$$

Este sistema es el llamado sistema normal.

Desafortunadamente, la matriz A^tA, normalmente, está muy mal condicionada y afectada generalmente de graves errores de redondeo. (Golub, 1965)

Existen muchos algoritmos que resuelven el sistema conservando la mínima nor-

ma euclídea, sin necesidad de crear el sistema normal. (Peters and Wilkinson, 1969), (Arioli, Duff and Rijk, 1989), (Spedicato and Bodon, 1993).

Aquí hemos intentado aplicar alguno de ellos para ver si era apreciable la disminución de los errores y la mejora del condicionamiento.

Dejamos vía libre para realizar un amplio estudio de todos estos algoritmos y su repercusión en el campo fotogramétrico.

Nosotros hemos aplicado los métodos de Givens y de Householder (Bjorck and Golub, 1967) (Zlatev Zahari, 1991). Ambos procedimientos tienen como fundamento multiplicar el sistema sobredimensionado por una matriz ortogonal Q, de forma que el producto Q.A sea una matriz triangular superior de rango n.

$$A^{\prime}.A = \begin{pmatrix} B^{\prime}B & 0 & B^{\prime}C \\ 0 & B^{\prime}B & B^{\prime}D \\ C^{\prime}B & D^{\prime}B & C^{\prime}C + D^{\prime}D \end{pmatrix} \quad A^{\prime}.b = \begin{pmatrix} B^{\prime}b_{x} \\ B^{\prime}b_{y} \\ C^{\prime}b_{x} + D^{\prime}b_{y} \end{pmatrix}$$
(3.21)

y cada submatriz:

$$B^{t}.B = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} X_{i}^{2} & \sum_{i=1}^{n} X_{i}Y_{i} & \sum_{i=1}^{n} X_{i}Z_{i} & \sum_{i=1}^{n} X_{i} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{i}Y_{i} & \sum_{i=1}^{n} Y_{i}^{2} & \sum_{i=1}^{n} Y_{i}Z_{i} & \sum_{i=1}^{n} Y_{i} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{i}Z_{i} & \sum_{i=1}^{n} Z_{i}^{2} & \sum_{i=1}^{n} Z_{i} & n \end{pmatrix}$$

$$B' \cdot C = \begin{pmatrix} -\sum_{i=1}^{n} x_{i} X_{i}^{2} & -\sum_{i=1}^{n} x_{i} X_{i} Y_{i} & -\sum_{i=1}^{n} x_{i} X_{i} Z_{i} \\ -\sum_{i=1}^{n} x_{i} X_{i} Y_{i} & -\sum_{i=1}^{n} x_{i} Y_{i}^{2} & -\sum_{i=1}^{n} x_{i} Y_{i} Z_{i} \\ -\sum_{i=1}^{n} x_{i} X_{i} Z_{i} & -\sum_{i=1}^{n} x_{i} Y_{i} Z_{i} & -\sum_{i=1}^{n} x_{i} Z_{i}^{2} \\ -\sum_{i=1}^{n} x_{i} X_{i} & -\sum_{i=1}^{n} x_{i} Y_{i} & -\sum_{i=1}^{n} x_{i} Z_{i} \end{pmatrix}$$

$$B' \cdot D = \begin{pmatrix} -\sum_{i=1}^{n} y_{i} X_{i}^{2} & -\sum_{i=1}^{n} y_{i} X_{i} Y_{i} & -\sum_{i=1}^{n} y_{i} X_{i} Z_{i} \\ -\sum_{i=1}^{n} y_{i} X_{i} & -\sum_{i=1}^{n} y_{i} Y_{i}^{2} & -\sum_{i=1}^{n} y_{i} Y_{i} Z_{i} \\ -\sum_{i=1}^{n} y_{i} X_{i} & -\sum_{i=1}^{n} y_{i} Y_{i} Z_{i} & -\sum_{i=1}^{n} y_{i} Y_{i} Z_{i} \\ \sum_{i=1}^{n} (x_{i}^{2} + y_{i}^{2}) X_{i}^{2} & \sum_{i=1}^{n} (x_{i}^{2} + y_{i}^{2}) X_{i}^{2} Z_{i} \end{pmatrix}$$

$$C' \cdot C + D' \cdot D = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} (x_{i}^{2} + y_{i}^{2}) X_{i}^{2} & \sum_{i=1}^{n} (x_{i}^{2} + y_{i}^{2}) X_{i}^{2} & \sum_{i=1}^{n} (x_{i}^{2} + y_{i}^{2}) X_{i}^{2} Z_{i} \\ \sum_{i=1}^{n} (x_{i}^{2} + y_{i}^{2}) X_{i}^{2} & \sum_{i=1}^{n} (x_{i}^{2} + y_{i}^{2}) Y_{i}^{2} & \sum_{i=1}^{n} (x_{i}^{2} + y_{i}^{2}) Y_{i}^{2} Z_{i} \end{pmatrix}$$

$$B' b_{2} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} X_{i} X_{i} & \sum_{i=1}^{n} (x_{i}^{2} + y_{i}^{2}) X_{i}^{2} & \sum_{i=1}^{n} (x_{i}^{2} + y_{i}^{2}) Y_{i}^{2} Z_{i} \\ \sum_{i=1}^{n} (x_{i}^{2} + y_{i}^{2}) Y_{i}^{2} & \sum_{i=1}^{n} (x_{i}^{2} + y_{i}^{2}) Y_{i}^{2} Z_{i} \end{pmatrix}$$

$$C' b_{2} + D' b_{2} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} X_{i} (x_{i}^{2} + y_{i}^{2}) X_{i}^{2} & \sum_{i=1}^{n} (x_{i}^{2} + y_{i}^{2}) Y_{i}^{2} Z_{i} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{i} X_{i} & \sum_{i=1}^{n} (x_{i}^{2} + y_{i}^{2}) Y_{i}^{2} & \sum_{i=1}^{n} (x_{i}^{2} + y_{i}^{2}) Y_{i}^{2} Z_{i} \end{pmatrix}$$

$$C' b_{2} + D' b_{2} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} X_{i} (x_{i}^{2} + y_{i}^{2}) X_{i}^{2} & \sum_{i=1}^{n} (x_{i}^{2} + y_{i}^{2}) X_{i}^{2} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{i} X_{i} & \sum_{i=1}^{n} (x_{i}^{2} + y_{i}^{2}) X_{i}^{2} & \sum_{i=1}^{n} (x_{i}^{2} + y_{i}^{2}) Y_{i}^{2} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{i}^{2} & \sum_{i=1}^{n} X_{i}^$$

Hemos tenido que evaluar el condicionamiento de la matriz de (3.20), para ello se ha confeccionado un algoritmo que realiza también un cálculo de la perturbación de la solución cuando se utilizan coordenadas comparador afectadas de distorsión, pero resolviendo el sistema como si no lo estuvieran.

Si al sistema (3.20) le introducimos una modificación del término independiente

(3.22)

Jniversidad de Las Palmas de Gran Canaria. BiblioteceDiaital. 20

tenemos:

$$A^{t}.A(L+\Delta L) = A^{t}.(b+\Delta b)$$
(3.23)

Ahora, supongamos que esta modificación es la que afecta a las coordenadas imagen debido a la distorsión radial, entonces:

$$\Delta b = \begin{pmatrix} (L_{9}X_{1} + L_{10}Y_{1} + L_{11}Z_{1})(x_{1} - x_{p})K_{1}r_{1}^{2} \\ \vdots \\ (L_{9}X_{n} + L_{10}Y_{n} + L_{11}Z_{n})(x_{n} - x_{p})K_{1}r_{n}^{2} \\ (L_{9}X_{1} + L_{10}Y_{1} + L_{11}Z_{1})(y_{1} - y_{p})K_{1}r_{1}^{2} \\ \vdots \\ (L_{9}X_{n} + L_{10}Y_{n} + L_{11}Z_{n})(y_{n} - y_{p})K_{1}r_{n}^{2} \end{pmatrix}$$

$$(3.24)$$

Nos interesa saber cómo se ve afectada la solución de los L_i , es decir, cuál es ΔL . El error relativo evaluado con cualquier norma cumple:

$$\frac{\|\Delta L\|}{\|L\|} = \|A^t \cdot A\| \|(A^t A)^{-1}\| \frac{\|A^t \cdot \Delta b\|}{\|A^t \cdot b\|}$$
(3.25)

Donde el condicionamiento de la matriz (A^t.A) es

$$K(A^{T}A) = ||A^{t}.A||.||(A^{t}A)^{-1}||$$
(3.26)

En el apartado anterior obtuvimos las coordenadas comparador afectadas con una distorsión K_1 =0.000231, así como el verdadero valor de los L_i . Además calculamos Δb .

Queremos estudiar el error relativo tomando como apoyo los datos de la tabla 3.2, las coordenadas imagen afectadas de distorsión, y los verdaderos L_i indicados en la tabla 3.3 obtenidos de la orientación de la tabla 3.1. Considerando como distorsión K_1 =0.000231, obtenemos un Δb :

$A(x-x_p)K_1r^2$	$A(y-y_p)K_1r^2$
1.511117488354476	4.367368265413903E-001
5.568234303656172E-001	-2.586710814103772E-001
-4.535800821251744E-002	-6.695478044603463E-002
-1.378278661011725E-001	-1.412225755663810E-001
-7.221243785680240E-002	-1.938198271474765E-002
-1.036582248651881E-003	-1.540383269340198E-003
1.108649835887142E-001	-1.896916992652994E-002
4.358019782830027E-001	-3.796315370821976E-002
1.354919330036546	-5.855353400181488E-002
1.210889234581398	8.158119169979727E-002
3.574046996979490E-001	3.107406547139874E-002
-9.787598719267503E-003	2.769584111754515E-003
2.172772625423150E-001	3.016301790863294E-002
-1.030572048142836E-002	1.300882240595523E-001
1.136842038760649E-001	5.158680354963393E-001

Tabla 3.7

que habrá que multiplicar por la traspuesta de la matriz de coeficientes.

Hemos elaborado un algoritmo para obtener el condicionamiento (3.26) junto con

el error relativo (3.25), que ha proporcionado los siguientes resultados:

K(A ^t .A)	1.113847276342009E+012
Norma de A ^t .b	710770.358200737600000
Norma de la solución L _i real	93.613209517487490
Norma de la perturbación de A ^t .Δb	27478.307272121290000
Norma de la perturbación de L _i calculada según (3.25)	4.031098871591331E+012
Norma de la perturbación I i real	100 891673114470200

Tabla 3.8

Para mejorar el condicionamiento de la matriz de coeficientes se ha resuelto el sistema A.x = b aplicando la transformación de Givens. Con los datos 3.2 y 3.4 obtenemos los siguientes resultados:

$\mathbf{L}_{\mathbf{l}}$	-1.307544759883852
L_2	-5.531931483121562E-001
L ₃	-4.461626288831442E-002
L ₄	180.071462174841500
L ₅	-3.848818492372138E-002
L_6	-2.366921244348734E-002
L ₇	1.419711695020873
L_8	-11.013241528148260
Lo	6.829607891306095E-003
L ₁₀	-1.648812741025418E-002
Lil	-7.207193039642884E-010

Tabla 3.9

Comparando este resultado (Tabla 3.9) con el impuesto indicado en la tabla 3.3 observamos la ventaja de resolver el sistema aplicando transformadas de Givens.

Los datos de las orientaciones a partir de los once L_i obtenidos al aplicar Givens han sido:

X _p	5.992931551815387E-001
y _p	3.995287701194081E-001
C _x	79.543107364537080
Cy	79.543105885229820
X.	94.99999999999450
Y _c	100.00000000001500
Z _c	12.0000000000000040
φ	224.984469753311900
κ	-1.999851398111029
ω	100.000002782754800

Tabla 3.10

Observamos que los valores de la orientación (Tabla 3.10) son más próximos a los impuestos (Tabla 3.3).

Visto el interés de modificar el sistema inicial para controlar el condicionamiento de la matriz, optamos por realizar estas modificaciones mediante Givens y Householder, que expresamos más detalladamente en el capítulo 5.

CAPÍTULO 4: AJUSTE DE HACES.

4.1. INTRODUCCIÓN.

El siguiente paso ha sido realizar la resección espacial para el conjunto de fotogramas. Pra ello hemos hecho varias consideraciones:

- 1. Las incógnitas de los parámetros internos de la cámara las podemos suponer iguales en todos los fotogramas, (f,x_p,y_p,K₁,K₂,P₁,P₂), siempre considerando que el enfoque realizado desde los distintos puntos de vistas son los mismos, porque si no, la distorsión estaría en función del enfoque y variaría. (Abdel-Aziz, 1973) (Abdel-Aziz, 1975).
- 2. Las posiciones de las cámaras varían de fotograma a fotograma (X_0, Y_0, Z_0) .
- 3. Las orientaciones de las cámaras varían de fotograma a fotograma (κ , ϕ , ω), pero como normalmente las cámaras se mantienen verticales al terreno, el κ es próximo a 0^g , el ω es próximo a 100^g , y el ϕ puede estar en cualquier cuadrante.
- 4. Esto significa que si contamos con NF como número de fotogramas tendremos cómo incógnitas:

7 + NFx3 + NFx3

Si antes para poder resolver la resección de un fotograma necesitábamos un mínimo de siete puntos, aquí reducimos el apoyo porque compartimos los parámetros internos de la cámara fotográfica. Esta es una de las principales ventajas que ofrece el realizar una resección espacial conjunta para varios fotogramas. Otra ventaja es que a la vez que determinamos los datos de la orientación podemos obtener coordenadas terreno de

puntos que aparecen en los fotogramas, pero que desconocemos; a estos puntos se les suele llamar puntos de control menor. Como sus coordenadas se determinan con el conjunto de fotogramas, a la vez que resolvemos el sistema, estamos realizando un ajuste de todo el bloque, por lo que se llama AJUSTE DE HACES.

Vamos a realizar este seguimiento en tres pasos; primero, realizaremos el programa que resuelva la orientación de sólo un fotograma, es decir, la resección espacial; luego, la resección espacial de varios fotogramas a la vez; y por último, determinamos las orientaciones y las coordenadas de puntos de control menor.

Puesto que para poder resolver los sistemas necesitamos los datos aproximados de las incógnitas, ya que obtenemos incrementos de los valores deseados, está claro que debemos ejecutar primero el anterior algoritmo cuyo resultado nos da unos datos de orientación aproximados de la solución. Realizaremos un análisis minucioso del valor aproximado introducido para ver si el intervalo de convergencia de cada variable es reducido o no.

Todos los programas resuelven el sistema linealizado mediante el método de mínimos cuadrados y por eliminación gaussiana

4.2. APLICACIÓN DEL AJUSTE DE HACES AL TEST.

Para asegurar que los algoritmo funcionan hemos procedido, al igual que con la transformación lineal directa, a crear un test artificial formado por dos fotogramas cuyos puntos de apoyo fueran los mismos pero no la situación y orientación de las cámaras. Los datos terrestres han sido los mismos que los de la tabla 3.2. Las orientaciones artifi-

ciales han sido los de la tabla 3.1 con las misma distorsiones que las indicadas en la tabla 4.1:

ORIENTACIÓN INTERNA		
Xp	0.6mm	
У _Р	0.4mm	
C _x	79.59mm	
C_y	79.59mm	
Κı	0.000231	
K ₂	0.00000123	
P_1	0.00005	
P ₂	0.00004	

	ORIENTA	CIÓN EXTERNA	.
(CÁMARA 1	CÁ	MARA 2
X ₀	95m	X_0	100m
Y ₀	100m	\mathbf{Y}_0	101m
Z_0	12m	Z ₀	11m
φ	225 ^g	φ	220 ^g
κ	-2 ^g	κ	2 ⁸
ω	100 ^g	ω	100 ^g

Tabla 4.1

Vimos la necesidad de construir una técnica que consista, al igual que en el anterior apartado, en obtener unas coordenadas imagen exentas de cualquier error.

4.2.1. RESECCIÓN ESPACIAL DE CADA FOTOGRAMA.

Para resolver la resección espacial hemos diseñado un algoritmo que dependiendo de cuántas incógnitas se consideran lo hemos llamado RESEC-N, siendo N el número de

incógnitas.

Para comprobar que no tiene ningún fallo, hemos tomado los datos terrestres y de imagen mencionados anteriormente.

Como vamos a realizar el análisis paso por paso, consideraremos una cámara donde el punto principal lo situamos en el (0,0), y esté exenta de distorsiones. Hemos elaborado un programa para calcular las coordenadas imagen con estos datos.

Para reducir el sistema hemos optado por considerar un sólo punto de apoyo, para ver cómo se comporta la convergencia cuando aplicamos el método de Taylor a las ecuaciones de colinealidad. El punto elegido tiene como coordenadas terreno (96.807, 73.351, 9.242), y de ahí, hemos obtenido como coordenadas imagen, en el caso de la orientación anterior del primer fotograma (Tabla 4.1):

27.676421126207510	-7.425519661607795		

Tabla 4.2

Tal como hemos dicho, hemos elaborado un algoritmo que parte de las ecuaciones de colinealidad — ecuaciones que no son lineales—, las ha linealizado aplicando el método de Taylor. Disponiendo de una aproximación inicial de la incógnita a determinar hemos resuelto el sistema de forma directa con eliminación Gaussiana en cada linealización.

Para realizar un estudio del comportamiento de las ecuaciones de colinealidad después de aplicar Taylor, el algoritmo que hemos confeccionado, resuelve inicialmente una incógnita, tomando un sólo punto de apoyo, progresivamente, este algoritmo prevé

la incorporación y resolución con nuevas incógnitas, teniendo en cuenta el intervalo de convergencia en cada caso.

El primero diseñado linealiza las ecuaciones de colinealidad sólo con respecto a la abscisa de la coordenada terrestre de la cámara X_0 . Tomamos como dato aproximado de la misma 90m, de los 95m reales. Tomamos como datos de partida las orientaciones impuestas indicadas en la tabla 4.1. En la cuarta iteración converge a 95.0000m.

A continuación, tomamos sólo tres decimales en las fotocoordenadas calculadas del punto, esto significaría que existe un error menor que un milímetro, el algoritmo hace converger en la cuarta iteración al valor 94.999870m, que podemos considerar exacto con la precisión del milímetro. Tomamos dos decimales en la fotocoordenadas y obtenemos convergencia en la cuarta iteración a 94.999570m, sigue satisfaciéndonos fotogramétricamente. Hemos tomado doble precisión, y aún así los resultados no han mejorado. Por último, tomando una aproximación inicial no cercana al verdadero valor, por ejemplo $X_0 = 50m$, logramos la convergencia después de siete iteraciones. Queda claro que esta aproximación inicial, topografgicamente, no se va a producir.

Como las otras coordenadas de la cámara se comportarán de igual forma pasamos a analizar los ángulos de la orientación externa.

Ahora realizamos los mismos pasos anteriores tomando como incógnita el ángulo κ . Sabemos que en fotogrametría terrestre, y debido a las ecuaciones utilizadas, este ángulo es próximo a 0^g . Hemos de analizar qué sucede cuando el valor aproximado de κ es positivo, y, sin embargo, su verdadero valor es negativo, o al revés, o cuando simplemente la primera aproximación es de 0^g .

Si tomamos como valor inicial de $\kappa = 0^{g}$, vemos que converge en la tercera itera-

ción al valor -1.999992^g, el cual podemos considerar como exacto fotogramétricamente.

Al igual que en el caso anterior, si consideramos sólo tres decimales, el proceso converge en la tercera iteración hacia -2.000856^g, con dos decimales en la fotocoordenadas se converge en la tercera iteración a -2.007943^g, valor que seguimos considerando válido. Con doble precisión no se mejoran los resultados.

Si elegimos como valor inicial de $\kappa = -4^g$, se logra convergencia igualmente.

Con $\kappa = 2^g$ se converge en la cuarta iteración.

Por último, con $\kappa = 100^g$ sigue convergiendo, ahora en la sexta iteración.

Por lo tanto, no importa cúal sea el valor inicial de este ángulo, por lo que se podría optar por el de 0^g. El único inconveniente es que se convergerá en más o menos iteraciones.

Tomemos ahora el ángulo ϕ , que puede tener cualquier valor en cualquier cuadrante, ya que es la orientación de la cámara con respecto al sistema de referencia terrestre. Hemos tomado como aproximación inicial de la solución $\phi = 220^g$, de 225^g que es el verdadero valor. Converge en la cuarta iteración al valor exacto.

Tomando, al igual que los casos anteriores, sólo tres decimales o dos en las fotocoordenadas sigue convergiendo y no mejora al tomar doble precisión. Cuando tratamos
de analizar el intervalo de convergencia, observamos que cuando introducimos como
valor aproximado un ángulo en el primer o cuarto cuadrante converge hacia
24.5962611^g; si tomamos como valor inicial un ángulo en el segundo o cuarto cuadrante,
converge a 224.99969^g, lo cual significa que necesitamos conocer el ángulo φ de una
forma aproximada, al menos, situado en el cuadrante que debe estar. En realidad, esto no
es difícil topograficamente, ya que se puede aproximar de una forma sencilla porque

siempre sabemos cómo hemos obtenido los fotogramas. Pero, además, el algoritmo empleado en el apartado 3.3 siempre nos da este ángulo en su cuadrante.

Realizando los mismos pasos con el ángulo ω , recordando que su valor real es de 100^g , y tomando como valor aproximado 90^g , vemos que en la cuarta iteración se obtiene convergencia.

Si probamos con menos decimales en las fotocoordenadas o con doble precisión vemos que se sigue obteniendo convergencia sin ningún problema , pero sin mejorar la precisión.

Si tomamos como valor inicial un ángulo alejado del valor real, por ejemplo 0^g , también se logra la convergencia.

Por lo tanto, para este ángulo no se necesita determinar exactamente ni su cuadrante ni su valor. No obstante, se sabe que por la disposición de las cámaras y la construcción geométrica de las ecuaciones este ángulo es siempre próximo a 100^g, por consiguiente, elegimos como una buena aproximación general la de 100^g.

Ahora pasamos a tomar los valores de la orientación interna de la cámara. Primeramente, la distancia principal f, que siempre conocemos el valor aproximado de esta variable, ya que sabemos con que cámara estamos trabajando cuya distancia focal no es una incógnita. Hemos considerado como valor real f = 79.59mm, y como primera aproximación f = 70mm, y vemos que converge sin ningún problema al valor real en sólo dos iteraciones.

Realizando los mismos pasos anteriores comprobamos que se sigue produciendo la convergencia, incluso cuando el valor aproximado lo alejamos a valores disparatados como f = 100mm o f = 20mm.

Antes de seguir tomando más incógnitas, como este número de incógnitas son las que se toman cuando tenemos una cámara métrica, vamos a ver cómo influye la aplicación del método de mínimos en la convergencia al aplicar el método de Taylor.

Para ello, consideramos los 15 puntos en el fotograma cuyas coordenadas terreno son las indicadas en la tabla 3.2. Aplicamos a estos puntos el programa que calcula sus coordenadas imagen, con los datos de orientación indicados en la tabla 4.1, sin tener en cuenta las distorsiones ni la situación del punto principal. Así, volviendo a aplicar el proceso anterior se obtiene la misma convergencia. Por lo tanto, cuando los valores están exentos de errores observacionales, el método de mínimos cuadrados no afecta a la resolución del sistema linealizado.

Hemos resuelto los sistemas para cada una de las incógnitas, y debemos hacerlo para todas ellas a la vez. Puede suceder que cuando conjuntemos varias incógnitas, los intervalos de convergencia varíen y hagan que diverja el sistema. Para realizar el estudio hemos elaborado un algoritmo que paulatinamente incorpora una a una las incógnitas deseadas.

Primeramente, resolvemos la abscisa de la cámara X_0 y el ángulo κ , obteniendo que se converge en una iteración más que la anterior.

Como segundo paso determinamos los valores de X_0 , κ y ϕ , y logramos la convergencia con el mismo número de iteraciones que anteriormente.

Si, ahora, determinamos X_0 , κ , ϕ y ω , la convergencia se obtiene, nuevamente, en la quinta iteración, que también coincide con las anteriores.

Por último, determinando todas las incógnitas tratadas aisladamente: X_0 , κ , φ , ω y f, la convergencia la hemos encontrado en la séptima iteración, que son dos iteracio-

nes más. Si acercamos más el valor aproximado de la distancia focal podemos acelerar el proceso iterativo. Esto indica que la distancia focal f puede influir de forma bastante alarmante si no la aproximamos bien, pues entonces nos retrasa la convergencia.

Como sólo hemos contado con la abscisa tenemos que incorporar las otras dos coordenadas de la cámara Y_0,Z_0 . Hasta ahora podemos resolver la resección espacial de un fotograma determinando siete incógnitas, es decir, (X_0,Y_0,Z_0) y (κ,ϕ,ω) , así como la calibración de la distancia principal de dicha cámara, f, (un total de siete incógnitas, que implica el conocimiento de al menos cuatro puntos de apoyo que suministren ocho ecuaciones lineales). Aplicando a nuestro ejemplo dicho programa se converge en la sexta iteración.

Nos damos cuenta que esto último se debe usar en los casos que sean cámara métricas donde la distorsión radial y tangencial así como la situación del punto principal se conocen.

Para aplicarlo a un caso real, donde las fotocoordenadas se hayan obtenido por mediciones efectuadas en algún comparador —lo que implica que están afectadas de errores no controlados—, hemos tomado la foto 11 del test de Viena con las mismas coordenadas terreno antes utilizadas así como las fotocoordenadas que aparecen en el capítulo 6. Esta foto nos sirve porque la cámara empleada tiene muy poca distorsión.

Tomando como primera aproximación:

	f	80	Omm	
X_0	93m		κ	0 ^g
Y ₀	97m		φ	220 ⁸
Z_0	10m		ω	100 ^g

Tabla 4.3

Obtenemos los siguientes valores:

	f	78.356570mm			
X_0	93.727	m	κ	-1.8559	905 ^g
\mathbf{Y}_{0}	97.301	m	φ	225.49	68 ^g
Zo	10.897	m	ω	97.010	29 ⁸

Tabla 4.4

Para ver si estos datos son fiables, tenemos que analizar el error que producen al obtener las coordenadas terrestres de los puntos de apoyo. Para detectar los errores que producen en las coordenadas terreno, hemos ampliado el algoritmo a otro que calcula los residuos. Tenemos que resolver las ecuaciones de colinealidad (2.2) sin contemplare la situación del punto principal, introduciendo la orientación obtenida y las coordenadas imagen. El error cometido en las coordenadas terreno es menor que un milímetro, lo que fotogramétricamente se considera más que aceptable.

El siguiente paso importante es el de incorporar dos incógnitas más, al suponer que desconocemos la situación del punto principal, punto desde donde parte simétricamente las distorsiones radiales de una cámara. La situación de este punto siempre es conocida cuando la cámara ha sido calibrada, pero aquí nos interesa aplicar estos programas a cámaras cuya calibración se desconoce.

Para ello, ampliamos el algoritmo, con el que inicialmente resolvemos la resección espacial anterior, teniendo en cuenta la situación del punto principal (x_p, y_p) . Así, las ecuaciones de colinealidad son las (2.2), que las expresamos de la siguiente forma:

$$x - x_p = -f \frac{U}{W}$$

$$y - y_p = -f \frac{V}{W}$$
(4.1)

suponemos que la situación real del punto principal sea la indicada en la tabla 4.1, donde $x_p=0.6mm$, $y_p=0.4mm$. Nuevamente, hay que calcular las coordenadas imagen del punto.

Si hacemos inicialmente que $x_p = y_p = 0$ mm, lo cual siempre es posible porque los valores suelen ser pequeños, logramos la convergencia en la séptima iteración.

Aplicando este último algoritmo al test de Viena obtenemos una convergencia hacia:

X _p	1.3796mm
\mathbf{y}_{p}	0.5028mm
f	80.1489mm
X_0	93.311m
Y_0	97.703m
Z_0	10.890m
φ	224.9286 ^g
κ	-1.7952 ^g
ω	97.1143 ^g

Tabla 4.5

Aquí el error en las coordenadas terreno es mucho menor que el obtenido anteriormente, lo que significa, una mejora en el método cuando tenemos en cuenta la situación del punto principal.

Nuestro propósito final es incorporar al algoritmo los cálculos de las distorsiones

tangencial y la radial Primeramente, tomaremos una distorsión radial con sólo un término polinómico de (2.5):

$$\Delta x = K_1 r^3 \tag{4.2}$$

Así, las ecuaciones de colinealidad quedarían como:

$$(x - x_p) + (x - x_p)K_1 r^2 = -f \frac{U}{W}$$

$$(y - y_p) + (y - y_p)K_1 r^2 = -f \frac{V}{W}$$
(4.3)

donde r es el radio imagen expresado en (2.6)

El test que teníamos tiene que volver a modificarse, puesto que se han variado las ecuaciones de colinealidad. Para ello, hemos creado un algoritmo que calcula las coordenadas imagen de los puntos de apoyo según unos datos de orientación de la cámara, que en nuestro caso son los indicados en la tabla 4.1, con sólo K₁ como parámetro de distorsión. La determinación de dichas coordenadas imagen se obtiene mediante la resolución del siguiente sistema:

$$(4.4)$$

$$(1 + K_1 r^2 + 2K_1 (x - x_p)^2) \Delta x + (2K_1 (x - x_p)(y - y_p)) \Delta y + (x - x_p) + (x - x_p)K_1 r^2 + f \frac{U}{W} = 0$$

$$(2K_1 (x - x_p)(y - y_p)) \Delta x + (1 + K_1 r^2 + 2K_1 (y - y_p)^2) \Delta y + (y - y_p) + (y - y_p)K_1 r^2 + f \frac{V}{W} = 0$$

Si eligiéramos como primera aproximación K_1 = 0.0004, obtenemos una convergencia en nueve iteraciones.

A continuación analizamos la convergencia del parámetro K₁, el cual no es conocido exactamente en las cámaras no-métricas, aunque sí sabemos que está acotado. Si tomamos las siguientes aproximaciones obtenemos los resultados que se indican:

$K_1 = 5$	no converge
$K_1 = 4$	converge en la iteración 56
$K_1 = 3$	converge en la iteración 37
$K_1 = 2$	converge en la iteración 11
$K_1 = 0.9$	converge en la iteración II
$K_1 = 0.5$	converge en la iteración 17
$K_1 = 0.1$	converge en la iteración 25
$K_1 = 0.01$	converge en la iteración 7
$K_1 = 0.001$	converge en la iteración 13
$K_1 = 0.0001$	converge en la iteración 33
$K_1 = 0.00001$	converge en la iteración 7
$K_1 = 0$	converge en la iteración 35

Tabla 4.6

Normalmente, la distorsión no es mayor que 2 y no suele ser menor que 0.00001. Tomando como valor inicial la unidad siempre tenemos garantizada la convergencia, en todos los casos que se han probado. Con distintas aproximaciones vemos que existen problemas de convergencia, por lo tanto convendría anotar que necesitamos conocer un valor aproximado de la distorsión de la cámara cuando no se produzca la convergencia al tomar la unidad.

Finalmente, podemos concluir que los ángulos iniciales deben de ser próximos al valor real, de lo contrario puede no ser convergente el proceso, las coordenadas de la cámara da exactamente igual como se introduzcan, las coordenadas del punto principal pueden tomarse nulas y la distancia focal debe también ser próxima ya que puede dar problemas.

La mayoría de los algoritmos fotogramétricos abortan cuando no se produce la convergencia sin explicar un por qué. Realmente es muy difícil detectar con tantas variables cuál es la razón de la no convergencia.

El siguiente paso ha sido tener en cuenta la distorsión tangencial, antes que considerar un término más en el desarrollo de la distorsión radial, porque normalmente los parámetros de la tangencial son de mayor orden y, a veces, se llegan a despreciar los demás términos de la radial.

Según el desarrollo de Brown la distorsión tangencial se expresa mediante (2.9).

Por lo tanto, las ecuaciones de colinealidad, quedarían de la forma:

$$(x-x_p) + (x-x_p)K_1r^2 + P_1(r^2 + 2(x-x_p)^2) + 2P_2(x-x_p)(y-y_p) + f\frac{U}{W} = 0$$

$$(4.10)$$

$$(y-y_p) + (y-y_p)K_1r^2 + P_2(r^2 + 2(y-y_p)^2) + 2P_1(x-x_p)(y-y_p) + f\frac{V}{W} = 0$$

Al igual que el caso anterior hemos tenido que determinar las coordenadas imagen resolviendo el siguiente sistema:

$$(4.6)$$

$$(1 + K_1 r^2 + 2K_1 (x - x_p)^2 + 6P_1 (x - x_p) + 2P_2 (y - y_p)) \Delta x +$$

$$+ (2K_1 (x - x_p)(y - y_p) + 2P_2 (x - x_p) + 2P_1 (y - y_p)) \Delta y +$$

$$+ (x - x_p) + (x - x_p)K_1 r^2 + P_1 (r^2 + 2(x - x_p)^2) + 2P_2 (x - x_p)(y - y_p) + f \frac{U}{W} = 0$$

$$(2K_1 (x - x_p)(y - y_p) + 2P_2 (x - x_p) + 2P_1 (y - y_p)) \Delta x +$$

$$+ (1 + K_1 r^2 + 2K_1 (y - y_p)^2 + 6P_2 (y - y_p) + 2P_1 (x - x_p)) \Delta y +$$

$$+ (y - y_p) + (y - y_p)K_1 r^2 + P_1 (r^2 + 2(y - y_p)^2) + 2P_2 (x - x_p)(y - y_p) + f \frac{V}{W} = 0$$

que particularizado para los quince puntos de apoyo, partiendo de los valores de la distorsión tangencial P_1 =0.0005 y P_2 =0.0004 —valores que se asimilan a los casos reales—, obtenemos sus coordenadas imagen.

Si damos a las aproximaciones iniciales $P_1=P_2=0$, y $K_1=1$, según el estudio anterior, llegamos perfectamente a la solución deseada.

Hemos llamado **RESEC-12**, al algoritmo que nos resuelve la resección espacial con un término de distorsión radial, dos para la tangencial, además de los parámetros de la cámara y su orientación, que hacen un total de doce incógnitas que nos obliga a tomar, como mínimo, seis puntos de apoyo conocidos. Esto es especialmente útil para muchos casos fotogramétricos, porque el segundo término de la distorsión radial suele ser despreciable.

Aplicándolo al fotograma 11 del test de Viena con los siguientes valores aproximados:

	ORIENTACIÓN EXTERNA	
$X_0 = 90m$	$Y_0 = 90m$	Z ₀ – 10m
$\varphi = 225^g$	$\kappa = 0^{g}$	$\omega = 100^g$
- Anna Carlo Alexandra (Carlo Carlo Ca	ORIENTACIÓN INTERNA	, , , , , , , , , , , , , , , , , , , ,
f = 80mm	$x_p = 0$ mm	$y_p = 0$ mm
$K_1 = 1$	$P_1 = 0$	$P_2 = 0$

Tabla 4.7

Obtenemos el siguiente resultado en la iteración 19:

ORIENTACIÓN EXTERNA			
$X_0 = 93.444466963354460$	$Y_0 = 97.866948227870590$	$Z_0 = 10.897237275806600$	
φ = 225.657507663765500	κ = -1.728826497669731	ω = 97.322097946035510	
ORIENTACIÓN INTERNA			
f = 80.832859854747750	$x_p = -1.998037981188820E-001$	$y_p = 2.728831168414056E-001$	
$K_1 = 1.076241646183027E-005$	P ₁ = 6.857824921349807E-006	P ₂ = 2.039570438629017E-005	

Tabla 4.8

Con estos valores de orientación obtenidos vemos que los errores en las coordenadas terreno son de un orden menor que un milímetro, lo cual significa que es un resultado óptimo.

Como hemos dicho, en fotogrametría terrestre con cámaras no-métricas, dada la precisión final que obtenemos, es suficiente considerar un sólo término en el desarrollo del polinomio que expresa la distorsión radial. No obstante, nosotros hemos incorporado un término más para cubrir un campo más amplio de aplicación fotogramétrica.

Con esta consideración, las ecuaciones de colinealidad quedarían de la siguiente forma (2.11):

$$(4.7)$$

$$(x - x_p) + (x - x_p) \left(K_1 r^2 + K_2 r^4 \right) + P_1 \left(r^2 + 2(x - x_p)^2 \right) + 2P_2 (x - x_p) (y - y_p) + f \frac{U}{W} = 0$$

$$(y - y_p) + (y - y_p) \left(K_1 r^2 + K_2 r^4 \right) + P_2 \left(r^2 + 2(y - y_p)^2 \right) + 2P_1 (x - x_p) (y - y_p) + f \frac{V}{W} = 0$$

El test debe modificarse resolviendo el siguiente sistema:

$$(4.8)$$

$$(1+K_1r^2+2K_1(x-x_p)^2+6P_1(x-x_p)+2P_2(y-y_p)+K_2r^4+4K_2r^2(x-x_p)^2)\Delta x +$$

$$+ (2K_1(x-x_p)(y-y_p)+2P_2(x-x_p)+2P_1(y-y_p)+4r^2K_2(x-x_p)(y-y_p))\Delta y +$$

$$+ (x-x_p)+(x-x_p)(K_1r^2+K_2r^4)+P_1(r^2+2(x-x_p)^2)+2P_2(x-x_p)(y-y_p)+f\frac{U}{W} = 0$$

$$(2K_1(x-x_p)(y-y_p)+2P_2(x-x_p)+2P_1(y-y_p)+4r^2K_2(x-x_p)(y-y_p))\Delta x +$$

$$+ (1+K_1r^2+2K_1(y-y_p)^2+6P_2(y-y_p)+2P_1(x-x_p)+K_2r^4+4K_2r^2(y-y_p)^2)\Delta y +$$

$$+ (y-y_p)+(y-y_p)(K_1r^2+K_2r^4)+P_1(r^2+2(y-y_p)^2)+2P_2(x-x_p)(y-y_p)+f\frac{V}{W} = 0$$

Aquí obtenemos otras coordenadas imagen para los mismos datos terrestres, tomando como datos iniciales los indicados en la tabla 4.1.

Hemos probado la convergencia con distintos valores iniciales de K₂ obteniendo el siguiente resultado:

$K_2 = 0$	no converge
$K_2 = 1$	no converge
$K_2 = 0.0001$	converge en la iteración 89
$K_2 = 0.001$	converge en la iteración 98
$K_2 = 0.01$	converge en la iteración 10

$K_2 = 0.1$	converge en la iteración 28
$K_2 = 2$	converge en la iteración 46
$K_2 = 3$	converge en la iteración 17
$K_2 = 4$	no converge
$K_2 = 5$	converge en la iteración 14

Tabla 4.9

Decidimos tomar como valor aproximado K_2 = 0.01, porque hemos detectado su buen funcionamiento en todos los problemas ejecutados.

IIemos llamado RESEC-13 al algoritmo que resuelve la resección espacial de la cámara con trece incógnitas: la posición, (X_0,Y_0,Z_0) ; la orientación externa, (κ, ϕ, ω) ; y la orientación interna, $(f, x_p, y_p, K_1, K_2, P_1, P_2)$. Con la programación de este algoritmo hemos incorporado el estudio de los errores cometidos en las coordenadas terrestres.

Al ser trece incógnitas necesitamos como mínimo siete puntos de apoyo.

Aplicando RESEC-13 a la foto 11 del Test de Viena, obtenemos el siguiente resultado en la iteración 427:

ORIENTACIÓN EXTERNA					
X ₀ =93.462425081844460	Y ₀ =97.834196541277110	Z ₀ =10.897991751218950			
φ =225.686864856597000	κ =-1.737144351088346	ω =97.302051746587140			
	ORIENTACIÓN INTERNA				
f = 80.688771203342030	$x_p = -2.505403194606892E-001$	y _p =2.927927241162439E-001			
K ₁ =9.177847078698220E-006	P ₁ - 6.663997698432613E-006	P ₂ = 2.067578575249875E-005			
$K_2 = 2.623748097778106E-009$					

Tabla 4.10

Con estos parámetros obtenemos un error de la décima del milímetro en las coor-

denadas terreno, que es practicamente el mismo que el conseguido cuando consideramos dos términos de la distorsión radial.

4.2.2. AJUSTE TOTAL DEL TEST.

Una vez resuelta la resección espacial al determinar los trece parámetros de una cámara, estamos en disposición de confeccionar un procedimiento que los evalúe simultáneamente en un conjunto de fotogramas. Para comenzar, sólo vamos a considerar dos fotogramas con una orientación impuesta artificialmente para comprobar su correcto funcionamiento. Este test artificial es el indicado en la tabla 4.1.

Primeramente, aplicamos la transformación lineal directa a ambos fotogramas.

De esta forma, disponemos de sendas orientaciones internas y externas, donde las externas y el promedio de las internas nos proporcionan la aproximación inicial en la resección espacial.

Hemos llamado AJUSTE al algoritmo que resuelve la resección espacial conjunta de varios fotogramas, es decir, haciendo comunes las incógnitas de la orientación interna.

Aplicando AJUSTE al test considerado vemos que se produce una convergencia hacia los valores impuestos en la iteración 57, dándonos un error en las coordenadas terreno del orden de 10⁻⁷.

Como hemos considerado 15 puntos de apoyo por fotograma, podemos resolver la resección espacial de forma individual, obteniendo para la primera una convergencia en la iteración 235 y para la segunda en la 163. El número de iteraciones es considerablemente mayor, lo que muestra la ventaja del ajuste, siempre que sea posible. Si al algoritmo RESEC-13 le incorporamos la resolución del sistema aplicando la transformada de

GIVENS, vemos que tenemos una considerable mejora en el número de iteraciones, siendo 13 para la primera foto y 115 para la segunda. Nos damos cuenta que aunque hemos mejorado las iteraciones, sigue siendo mejor aplicar un ajuste a la totalidad de las fotos porque el tiempo de resolución es menor.

Puesto que el beneficio de realizar un ajuste es que no necesitamos tantos puntos de apoyo por fotograma, en la segunda foto reducimos su número a sólo tres. Esto implica que el número de ecuaciones pasa de ser 15*2+15*2=60, del caso anterior, a 15*2+3*2=36, con aún 6*2+7=19 el número de incógnitas.

Aquí se nos plantea un grave problema, al no poder aplicar la transformación lineal directa en el segundo fotograma porque no disponemos de suficientes puntos para obtener los once parámetros. Para ello, debemos identificar los parámetros iniciales de la orientación interna con los de un haz que permita ejecutar su transformación lineal directa. En este ejemplo se puede realizar con el primer fotograma que dispone de 15 puntos de apoyo.

Al realizar el ajuste conseguimos una convergencia en la iteración 80, con un error en las coordenadas terrestres del orden de 10⁻⁷.

Ha aumentado de iteraciones, pero hemos podido resolver la resección espacial del segundo fotograma que individualmente habría sido imposible.

Para lograr mejores ventajas realizamos el ajuste a once fotogramas, variando el número de puntos de apoyo en cada uno de ellas. Aquí, las incógnitas son:

7(orientación interna) + 3(ángulos de orientación)x11+ 3(posición de la cámara)x11 =

$$7 + 33 + 33 = 73$$

Ya que cada punto nos ofrece dos ecuaciones de colinealidad, necesitamos, como

mínimo, 37 puntos de apoyo. Normalmente, se suelen tener muchos más, salvo que existan impedimentos.

Para nuestro test artificial hemos tomado el mismo apoyo que el test de Viena, que cuenta con un total de 146 puntos de apoyo, cuyas coordenadas están en el capítulo 6. La orientación interna de la cámara ha sido la descrita a continuación en la tabla 4.10. La posición de las cámaras la hemos considerado prácticamente igual que el test de Viena, cuyo croquis figura en el apartado 1.4 del capítulo 1, con los ángulos reseñados en la tabla 4.11:

f	$\mathbf{x}_{\mathtt{p}}$	y_p	K ₁	K ₂	\mathbf{P}_1	P ₂
80.241390	1.403300E-05	1.482569	2.027594E-05	0	-6.108997E-05	1.403300E-05

Tabla 4.11: Orientacion interna de la camara artificial

CÁMARA	X_{\circ}	Y _o	Z _o
1	79.804121374270220	84.679857554037800	9.761343549144929
2	77.327361242829240	65.083322498064830	10.968198154545900
3	80.778167720125580	61.011762865868700	10.018051037762760
4	102.930865041868200	42.383920282357050	10.064342197820610
5	129.525076658796300	66.962352037942570	10.145600643439270
6	126.900855111237700	81.961372090802770	10.131082575521840
7	125.674581230317400	86.049251896534430	10.150173041609880
8	115.229229385070500	99.725068629971180	10.106234615732020
9	98.036516089341380	100.173210671097300	10.776289980553560
10	93.457345804889880	97.849136355929730	10.825109367223800
11	93.462407529949690	97.834235651107760	10,897993953577150

CÁMARA	ω	φ	κ
1	87.288353969910670	269.067863594735100	-7.185410602675915
1	67.2663333909910070	209.007803394733100	-7.185410002075915
2	113.797501030347700	-84.641764008140340	14.128861811008910
3	100.847629435378700	-73.200391742364130	1.791538854164858
4	102.161793551102300	-5.593740968829064	1.101105255187812
5	112.458288600601700	80.891059374267500	-10.357942435959440
6	91.469333523938910	125.446569791944000	7.193198428707847
7	90.050137140107880	140.640101310933200	7.359561369640280
8	96.861209044439250	177.211776718020100	1.978190743398097
9	97.234603466043770	218.958837118821000	-7.872817219753262E-001
10	97.167252076744920	230.235633097090300	-2.262404676230112
11	97.302068390416990	225.686833405443900	-1.737134882219544

Tabla 4.11: Orientación externa artificial de las cámaras

FOTO	NUMERO DE PUNTOS DE	
	APOYO	
1	12	
2	7	
3	7	
4	19	
5	16	
6	9	
7	9	
8	22	
9	14	
10	16	
11	15	

Tabla 4.12: Número de puntos de apoyo por fotograma

Aplicando la resección espacial a cada uno de los once fotogramas obtenemos la siguiente convergencia:

FOTO	NUMERO DE	
	ITERACIONES	
1	9	
2	1000	
3	1000	
4	5	
5	5	
6	301	
7	38	
8	5	
9	4	
10	5	
11	8	

Tabla 4.13

En algunos fotogramas, llegado a las 1000 iteraciones aún no hemos logrado la convergencia, aunque el resultado obtenido, con errores en las coordenadas terreno de 10^{-6} , es más aceptable que el conseguido mediante la la transformación lineal directa.

Finalmente, al aplicar el ajuste de haces, obtenemos la convergencia en seis iteraciones con una precisión de 10⁻⁷ en las coordenadas terrestres, lo cual evidencia la ventaja del ajuste.

Para tener en cuenta los errores de observación, hemos aplicado el ajuste al test de Viena, donde las coordenadas imagen están medidas en un comparador.

Los resultados obtenidos son los siguientes:

	$X_0 = 79.478259242649970$	κ = -6.312828455138608
Fotograma 1	$Y_0 = 84.843013715865670$	$\varphi = 269.362069613697700$
	$Z_0 = 9.719271299441436$	ω=88.276272228571740
	X ₀ = 76.126553615537150	κ=-8.972908617450156E-001
Fotograma 2	$Y_0 = 64.302923948793360$	φ = -80.615133523210470
	$Z_0 = 9.653414399790394$	ω= 98.792727206724310
	X ₀ = 78.086783670297630	κ= 1.471303847233869E-001
Fotograma 3	$Y_0 = 59.718290413500210$	φ= -74.385547330688480
	$Z_0 = 9.851190650624503$	ω= 99.090253722239580
	X ₀ = 102.922859829657600	κ= 1.099413420273848
Fotograma 4	Y ₀ = 42.381961323663230	φ= -4.715098664619124
	$Z_0 = 10.070644737654900$	ω – 102.022314709725400
	X ₀ = 126.283988189176900	κ= 6.860650346731738
Fotograma 5	$V_0 = 81.625574043375750$	$\varphi = 125.494206128928800$
	$Z_0 = 10.132446498077200$	ω= 91.829154355795000
	X _o = 124.765012310068200	κ= 6.571781207909605
Fotograma 6	$Y_0 = 85.443388325792820$	$\varphi = 139.672792579305600$
	$Z_0 = 10.213679985916420$	$\omega = 91.063340527244490$
	$X_0 = 115.032511594526100$	κ= 1.803072666935323
Fotograma 7	Y ₀ = 99.158999888106080	$\varphi = 178.690649423555900$
	$Z_0 = 10.122101282310700$	$\omega = 97.330300876754440$
	$X_0 = 98.077702629044320$	κ = -8.358202854404674E-001
Fotograma 8	$Y_0 = 100.029542915753800$	$\varphi = 218.724215076469600$
	$Z_0 = 10.777963633007610$	ω = 97.065739702237720
	X ₀ = 93.470222000144330	κ= -2.320691054341229
Fotograma 9	Y ₀ = 97.773606923945000	φ= 230.419352806486700
	Z ₀ - 10.855971010673490	ω – 97.039256504365870
	X ₀ = 93.482353474510930	κ= -1.833585821785328
Fotograma 10	Y ₀ - 97.778164623786570	φ- 225.636730068952100
	Z ₀ = 10.856868570927230	ω= 97.071253733145640
	X ₀ - 129.611243291452200	к11.220331661380040
Fotograma 11	$Y_0 = 66.935779585392250$	φ= 80.371790443647360
	$Z_0 = 10.138547990948860$	ω= 113.365099339865600
	•	

Tabla 4.14

	ORIENTACIÓN INTERNA		
$x_p = -1.788814965292539E-001$	$K_1 = 6.716270297049112E-006$	P ₁ = 7.304521961529233E-006	
$y_p = 4.054064655272224E-001$	$K_2 = 3.060677365178733E-009$	$P_2 = 2.887739313986198E-007$	
f = 80.421885941044640			

Tabla 4.15

Se ha obtenido una convergencia en la quinta iteración. Los errores en las coordenadas son mayores que los que teníamos antes, —lo cual es lógico—, pero al ser del orden del milímetro son aceptables.

A lo anterior hemos incorporado la determinación de puntos de control menor.

Con una nueva aplicación al test de Viena, considerando dos de sus puntos de apoyo como de control menor, el número de iteraciones ha aumentado aunque la precisión en dichos puntos ha sido del orden de 10⁻⁴.

Con respecto a las incógnitas y al número de ecuaciones, las primeras han pasado de 73 a 79, y el segundo no ha variado.

El poder determinar coordenadas de puntos de control menor es una gran ventaja para los trabajos fotogramétricos, porque nos permite determinar el apoyo necesario de fotogramas, que no disponen del suficiente para posteriormente realizar su restitución.

4.2.3. ESQUEMA DEL ALGORITMO UTILIZADO EN AJUSTE.FOR.

Debido al interés heurístico, describimos a continuación el segmento de programa

que incorpora y distingue los puntos de control menor de los de apoyo.

65 CONTINUE

C SI EL PUNTO ELIDO ES DE CONTROL MENOR SON TRES INCÓGNITAS

C LO ALMACENAMOS EN VECTORES PARA LUEGO SUMAR LOS INCREMENTOS

C SI YA HEMOS REALIZADO UNA ITERACIÓN LAS COOR ESTAN INCREM.

IF(NK.GE.1)GO TO 61

C SI NO ES DE CONTROL MENOR NO LO ALMACENO EN UN VECTOR

IF(IN.EQ.0)GO TO 62

AXX(IP)=AX

AYY(IP)=AY

AZZ(IP)=AZ

61 IF(IN.EQ.0)GO TO 62

AX=AXX(IP)

AY = AYY(IP)

AZ=AZZ(1P)

- 62 CONTINUE
- 63 XX=AX-XC(IJ)

YY=AY-YC(IJ)

ZZ=AZ-ZC(IJ)

64 Q=XX*M(3,1)+YY*M(3,2)+ZZ*M(3,3)

U=XX*M(1,1)+YY*M(1,2)+ZZ*M(1,3)

V=XX*M(2,1)+YY*M(2,2)+ZZ*M(2,3)

R=(X-XP)**2+(Y-YP)**2

C DERIVADAS CON RESPECTO A LAS COORDENADAS TERRENO:

C SI IN=0 SIGNIFICA QUE ES UN PUNTO DE APOYO

IF(IN.EQ.0)GO TO 70

A(K+I,NF*6+8+3*(IP-1))=(-F/Q)*(-M(1,1)+M(3,1)*(U/Q))

A(KK+I,NF*6+8+3*(IP-1))=(-F/Q)*(-M(2,1)+M(3,1)*(V/Q))

A(K+I,NF*6+9+3*(IP-1))=(-F/Q)*(-M(1,2)+M(3,2)*(U/Q))

A(KK+I,NF*6+9+3*(IP-1))=(-F/Q)*(-M(2,2)+M(3,2)*(V/Q))

A(K+I,NF*6+10+3*(IP-1))=(-F/Q)*(-M(1,3)+M(3,3)*(U/Q))

A(KK+I,NF*6+10+3*(IP-1))=(-F/Q)*(-M(2,3)+M(3,3)*(V/Q))

- 70 CONTINUE
- C VAMOS A POR OTRO PUNTO DE APOYO END DO
- C NUMERO DE ECUACIONES DE ESTA FOTO, SUMANDO LAS ANTERIORES

 MM=2*NP(IJ+1)+MM
- C VAMOS A POR OTRA FOTO END.

CAPÍTULO 5:TRATAMIENTO DE LAS MATRICES DISPERSAS

5.1. INTRODUCCIÓN.

Considerado el test de Viena reseñado al final del apartado 4.2.2, se origina una matriz bastante dispersa cuyo diagrama es el de la figura 5.1.1.

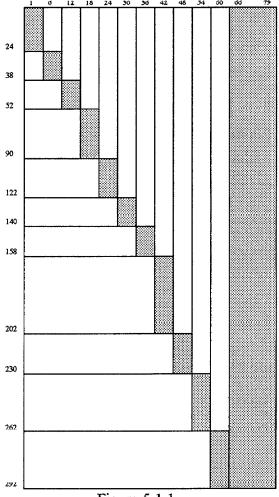


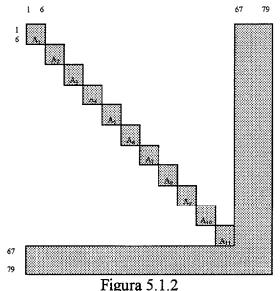
Figura 5.1.1.

Matriz de coeficientes

En esta matriz observamos una banda vertical completamente llena, constituida por los coeficientes de los parámetros internos de la cámara; las otras cajas corresponden a los elementos externos de cada una de las posiciones de la cámara. Puesto que el test está formado por once fotogramas, hay once cajas de distinto ancho, porque cada foto tiene un número de puntos diferentes, dispuestas diagonalmente.

Cuando aplicamos el método de mínimos cuadrados al sistema (2.23), la matriz del sistema normal es una matriz cuadrada simétrica, definida positiva y, generalmente, muy dispersa, cuyo diagrama es el de la figura 5.1.2. Es aquí donde podemos aplicar todos los algoritmos que facilitan el tratamiento de dichas matrices.

Si observamos, simplemente, el sistema normal, nos damos cuenta que la matriz del sistema es una matriz con bloques diagonales y unas bandas horizontal y vertical con máxima amplitud. Además, como se supone que determinamos coordenadas terreno de algunos puntos, el ancho de las bandas vertical y horizontal puede variar, así como su dispersión.



Estructura de la matriz del sistema normal

En nuestro ejemplo, la matriz del sistema normal está formada por una diagonal de once cajas de seis por seis, pertenecientes a la orientación externa de cada situación de la cámara, y una banda con un ancho de trece elementos, siete de la orientación interior de la cámara y seis coordenadas de dos puntos de control menor. Si tomamos más puntos de control menor para determinar sus coordenadas, tendríamos bandas vertical y horizontal mucho más anchas, en el lugar donde están los fotogramas que contienen a dichos puntos; las restantes entradas de las bandas serían ceros. En estos casos es donde se hace más necesaria la reordenación del sistema.

Hasta ahora habíamos resuelto el sistema así, tal cual, sin proceder a ninguna reordenación que aminore el ancho de la banda; además, no aplicábamos ningún método que disminuyera la memoria del almacenamiento de toda la matriz, guardando todos los ceros como elementos significativos de la misma.

Aquí es donde nos interesa aplicar lo concerniente a matrices dispersas; primeramente veamos algunas nociones sobre la teoría de grafos y algunos algoritmos de interés que van a ser aplicados posteriormente.

5.2. REPRESENTACIÓN DE MATRICES MEDIANTE GRAFOS.

5.2.1. INTRODUCCIÓN.

En este apartado consideramos algunas nociones básicas sobre teoría de grafos, y establecemos su correspondencia con conceptos matriciales. La notación y los conceptos de la teoría de grafos aportan una adecuada herramienta para describir algoritmos e identificar o caracterizar la estructura matricial. No obstante, es fácil verse sometido al uso de la teoría de grafos en tales análisis, y a menudo el resultado es el oscurecimiento de ideas básicamente simples a cambio de una elegancia notaciónal. Así, aunque podamos sacrificar la uniformidad, donde sea apropiado y ayude a la presentación daremos definiciones y resultados tanto en términos de teoría de grafos como matriciales. En la misma línea, nuestra intención es tratar las nociones de teoría de grafos exclusivamente donde se necesiten.

5.2.1.1. TERMINOLOGÍA BÁSICA.

Un grafo es una terna ordenada G = (X, E, f), donde X es un conjunto finito no vacío de nodos o vértices, E es un conjunto de aristas y f es una aplicación que asocia a cada arista $a \in E$ un par no ordenado de nodos $\{x, y\}$ llamados extremos de a. Con esta definición, cabe la posibilidad de que entre dos nodos haya más de una arista, las cuales se denominan aristas paralelas; o, incluso, que existan aristas llamadas bucles, cuyos extremos $\{i, i\}$ coincidan. Un grafo se dice que es simple si no posee ni bucles ni aristas paralelas. Los grafos que nosotros usamos serán grafos simples. Un ordenamiento α de G es una aplicación de $\{1, 2, 3, ..., n\}$ sobre X, donde n indica el número de nodos de G. Por lo demás, a menos que de forma específica lo hagamos constar, un grafo estará desordenado; el grafo G ordenado por α lo denotamos por $G^{\alpha} = (X^{\alpha}, E)$.

Si a los extremos de las aristas les asignamos un orden, tenemos un grafo dirigido o digrafo. En este caso, representamos las aristas de extremos x e y como un par ordenado (x,y), en vez de como un conjunto {x,y}.

Toda vez que nuestro objetivo al introducir los grafos es el estudio de matrices dispersas, expresemos la relación entre grafos y matrices. Sea A una matriz simétrica de tamaño nxn. El grafo ordenado asociado a A, denotado por $G^A = (X^A, E)$, es aquel para el cual los n vértices de G^A están numerados desde 1 hasta n, y $\{x_i, x_j\} \in X^A$ si, y sólo si, $a_{ij} = a_{ji} \neq 0$, $i \neq j$. Aquí, x_i indica el nodo de X^A con índice i. La figura 5. 2.1.1.1 muestra la estructura de una matriz y su grafo ordenado. La entrada diagonal i-ésima de una matriz la denotaremos por medio de i, para resaltar su correspondencia con el nodo x_i del grafo asociado. Los no ceros que están fuera de la diagonal principal, los representamos por un asterisco.

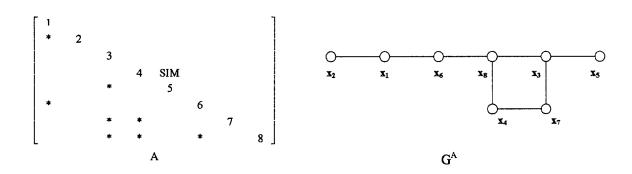


Figura 5.2.1.1.1

Matriz A y su grafo asociado G^A. Los * representan entradas no nulas de A.

Para cualquier matriz de permutación $P \neq I$ de tamaño nxn, los grafos no ordenados de A y PAP^t son los mismos, pero los ordenamientos asociados son diferentes. Así, el grafo no ordenado de A representa la estructura de A, sin que sugiera ningún ordenamiento en particular, y es, pues, representante de la clase de equivalencia de las matrices PAP^t , donde P es cualquier matriz de permutación nxn. Encontrar una buena permutación para A se puede considerar como seleccionar un buen ordenamien-

to para su grafo. La figura 5.2.1,1.2 ilustra dos ordenamientos diferentes.

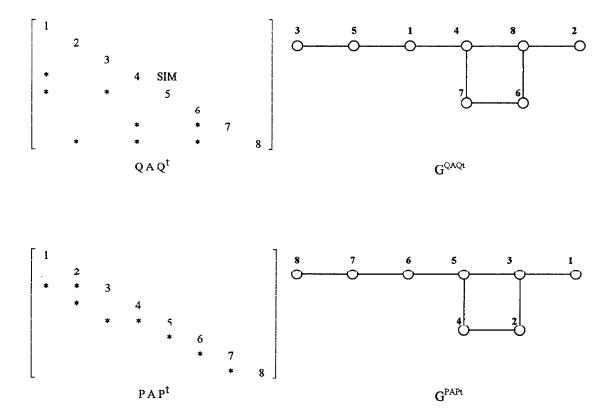


Figura 5.2.1.1.2

Dos ordenamientos diferentes de una matriz A

Algunas definiciones de teoría de grafos suponen grafos no ordenados. Con objeto de utilizar estas definiciones en términos matriciales, hemos de tener una matriz a la que recurramos, y esto, inmediatamente, implica un ordenamiento del grafo. Cuando nos refiramos a la matriz correspondiente de G, hemos de, o bien especificar algún ordenamiento de G, o entender que se supone un ordenamiento arbitrario.

Dos nodos x e y en G son advacentes si $\{x, y\} \in E$. Para $Y \subset X$, el conjunto advacente de Y, denotado por Ady(Y), es :

$$Ady(Y) = \{x \in X - Y / \{x, y\} \in E \text{ para algún } y \in Y\}$$

Expresado en palabras, el adyacente de Y es, simplemente, el conjunto de nodos en G que no perteneciendo a Y son adyacentes a algún nodo de Y. La figura
5.2.1.1.3 muestra la interpretación matricial de Ady(Y). Por motivos de conveniencia, el conjunto Y los hemos ordenado consecutivamente. Cuando Y esté formado
simplemente por un nodo y, escribiremos Ady(y), en lugar del formalmente correcto
Ady({y}).

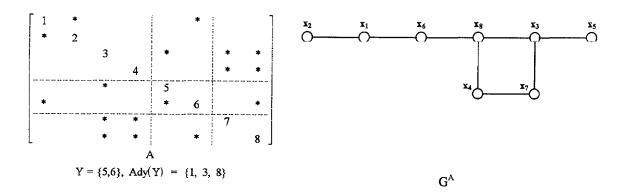


Figura 5.2.1.1.3

Ilustración del conjunto adyacente de un subconjunto de nodos Y⊆ X.

Para $Y \subset X$, el grado de Y, denotado por $\delta(Y)$, es simplemente el cardinal del advacente de Y, es decir, |Ady(Y)|. Nuevamente, cuando Y sea un conjunto unitario con un único nodo y, escribiremos $\delta(y)$. Por ejemplo, en la figura 5.2.1.1.3, $\delta(x_2) = 1$.

Un subgrafo G' = (X', E') es un grafo para el que $X' \subset X$ y $E' \subset E$. Para $Y \subset X$, la sección de grafo G(Y) o subgrafo generado por Y es el subgrafo (Y, E(Y)), donde:

$$E(Y) = \{ \{x, y\} \in E \mid x \in Y, y \in Y \}$$

En términos matriciales, la sección de grafo G(Y) es el grafo de una matriz que se obtiene suprimiendo todas las filas y columnas de la matriz de G que no corresponden a elementos de Y. Esto los mostramos en la figura 5.2.1.1.4.

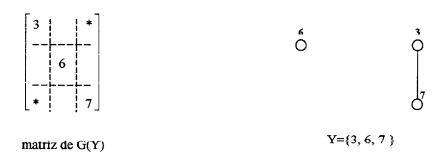


Figura 5.2.1.1.4

Ilustración de una sección de grafo G(Y) y la submatriz correspondiente en el grafo G de la figura 5.2.1.1.1.

El ejemplo de la figura 5.2.1.1.4 expresa un concepto que exploraremos ahora, y que es el de la conexión en un grafo. Para dos nodos distintos x e y de G, una trayectoria desde x hasta y de longitud $L \ge 1$ es un conjunto ordenado de L+1 nodos distintos $(v_1, v_2, ..., v_{L+1})$ tales que $v_{i+1} \in Ady(v_i)$, i=1,2,...,L, con $v_L=x$, $v_{L+1}=y$. Un grafo es conexo si para todo par de nodos diferentes existe por lo menos una trayectoria que los conecta. Por el contrario, un grafo G es inconexo o desconexo si consta de dos o mas componentes conexas, entendiéndose como tales todo subgrafo maximal conexo, esto es, aquellos subgrafos conexos que no están contenidos en ningún subgrafo conexo estrictamente mayor. Es evidente que todo grafo puede particionarse en componentes conexas. En términos matriciales, habría que aclarar que si G es inconexo g consta de g conexos g conexos g cada componente está ordenada consecutivamente, la matriz correspondiente será de bloques diagonales, perteneciendo cada bloque

diagonal a una componente conexa. Decimos que una matriz A es reducible si existe una matriz permutación P tal que:

$$PAP' = \begin{pmatrix} A_{11} & \\ & A_{22} \end{pmatrix}$$

En caso contrario, A será irreducible. Traducido esto en términos de grafos, A es irreducible si y sólo si su grafo asociado es conexo (Gastinel,1975).

La figura 5.2.1.1.5 muestra una trayectoria en un grafo y su interpretación en términos matriciales.

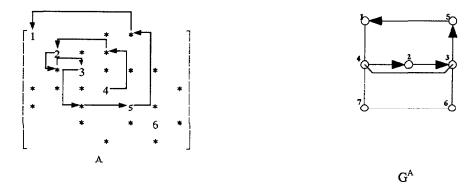


Figura 5.2.1.1.5

Una trayectoria en un grafo y la correspondiente interpretación matricial.

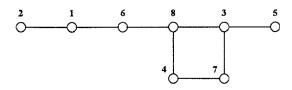
Por último, el conjunto $Y \subset X$ es un separador del grafo conexo G si la sección de grafo G(X - Y) es desconexa. Así, por ejemplo, $Y = \{x_3, x_4, x_5\}$ es un separador del grafo de la figura 5.2.1.1.5, puesto que G(X - Y) tiene tres componentes conexas con conjuntos de nodos $\{x_1\}$, $\{x_2\}$, $\{x_6, x_7\}$.

5.2.1.2. INTERPRETACIÓN DEL GRAFO MEDIANTE VECTORES.

En general, las ejecuciones de algoritmos sobre grafos son bastante sensibles

a la forma en que los grafos estén representados. Para nuestros objetivos, la operación básica empleada es la de componer las relaciones de adyacencia entre nodos. Así, necesitamos una representación que proporcione las propiedades de adyacencia del grafo y que sea económico en lo referente al almacenamiento (Christofides, 1986) y (George, 1981).

Sea G = (X, E) un grafo con n nodos. Una lista de adyacencia para un nodo x∈X es una lista que contiene todos los nodos de Ady(x). La estructura de adyacencia para G es el conjunto de las listas de adyacencia para todos los x∈X. Tal estructura se puede implementar, de forma bastante simple y económica, almacenando las listas de adyacencia secuencialmente en un vector unidimensional ADYACI junto con un vector de índices XADJ de longitud n + 1 que contenga indicadores al comienzo de cada lista de adyacencia en ADYACI, según se muestra en la figura 5.2.1.2.1. A menudo, al objeto de la programación resulta conveniente tener una entrada extra en XADJ tal que XADJ(n + 1) señale a la siguiente localización de almacenamiento disponible en ADYACI, como se ve en la figura 5.2.1.2.1. Evidentemente, la demanda de almacenamiento total para este esquema de almacenamiento es, pues, | X | +2 | E | +1, puesto que las aristas se cuentan dos veces: una por cada vértice adyacente en la arista y luego hay un indicador por vértice, más el extra que se sitúa en la siguiente posición de almacenamiento.



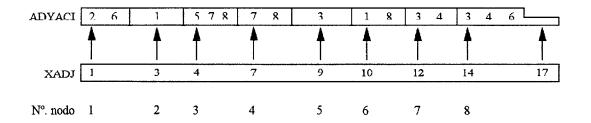


Figura 5.2.1.2.1.

Estructura de adyacencia del grafo G de la figura 5.2.1.1.5

Con la finalidad de examinar todos los vecinos de un nodo, se puede utilizar el siguiente segmento de programa

JCOMZO - XADJ(NODO)

 $JSTOP = XADJ(NODO + 1) \quad 1$

IF (JSTOP .LT.JCOMZO) GOTO 400

DO 300 J = JCOMZO, JSTOP

NODVEC = ADYACI(J)

300 CONTINUE

400 CONTINUE

Aunque todas las implementaciones que supongan grafos emplean el esquema de almacenamiento descrito anteriormente, a veces se emplean otros. Un esquema de almacenamiento muy común es una simple tabla de conexiones, que tiene n filas y m columnas, donde $m = \max \; \{\delta(x) \, / \, x \in X\}$. La lista de adyacencia para el nodo i se almacena en la fila i. Este esquema de almacenamiento puede resultar bastante ineficiente si un número sustancial de nodos tiene grados menores que m. Un ejemplo de una tabla

de conexión para el grafo de la figura 5.2.1.2.1 se da en la figura 5.2.1.2.2.

NODOS VECINOS		NODOS VECINOS	
1	2 6 -	5	3
2	1	6	1 8 -
3	5 7 8	7	3 4 -
4	7 8 -	8	3 4 6

Figura 5.2.1.2.2.

Tabla de conexiones para el grafo de la figura 5.2.1.2.1. Las posiciones no utilizadas en la tabla se indican mediante -.

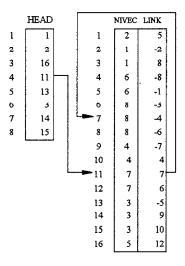


Figura 5.2.1.2.3.

Esquema de almacenamiento con enlaces para el grafo de la figura 5.2.1.2.1.

Los dos primeros esquemas descritos tienen una clara desventaja. A menos que los grados de los nodos se conozcan a priori, es dificil construir el esquema de almacenamiento cuando el grafo viene dado como una lista de aristas, ya que no conocemos el tamaño definitivo de las listas de adyacencia. Podemos superar esta dificultad

introduciendo un campo de enlaces o eslabones. La figura 5.2.1.2.3 muestra un ejemplo de tal esquema para el grafo de la figura 5.2.1.2.1 El indicador HEAD(i) comienza la lista de adyacencia para el nodo i, donde NVEC contiene un vecino del nodo i, y LINK es el indicador de la localización del siguiente nodo vecino de i.

Por ejemplo, para recuperar los vecinos del nodo 4, recobramos HEAD(4), que es 11. Luego examinamos NVEC(11), que da 7, uno de los vecinos del nodo 4. Entonces recuperamos LINK(11), que es 7, suponiendo que el vecino siguiente del nodo 4 es NVEC(7), que es 8. Finalmente, descubrimos que LINK(7) = -4, que indica el final de la lista de adyacencia para el nodo 4; en general, un LINK negativo de -i indica el final de la lista de adyacencia para el nodo i. La demanda de almacenamiento para esta representación del grafo es |X| + 4|E|, puesto que cada arista requiere dos puestos de memoria en NVEC y otros dos en LINK, esto es 2|E| + 2|E| = 4|E|, más |X| en HEAD, lo cual arroja un total |X| + 4|E|, que es substancialmente más que el esquema de la lista de adyacencia que utilizamos en nuestro programas .

Suponiendo que haya espacio suficiente en los vectores NVEC y LINK, se pueden añadir con facilidad nuevas aristas. Por ejemplo, para añadir la arista {3, 6} a la estructura de adyacencia hay que añadir dos nuevas entradas en los vectores NVEC y LINK, y luego ajustaremos la lista de adyacencia del nodo 3 asignando a LINK(17) el 16, NVEC(17) = 6 y a HEAD(3) el 17. La lista de adyacencia del nodo 6 se cambiaría de forma similar situando LINK(18) en 3, NVEC(18) en 3, y HEAD(6) en 18.

En un primer momento habíamos optado por tomar el primer esquema presentado y mostrado en la figura 5.2.1.2.1, pero en aras de disminuir el almacenamiento realizamos algunas modificaciones. Un ejemplo de este nuevo esquema lo vemos en la figura 5.2.1.2.4..

Hemos tomado los elementos no nulos por columnas, por ejemplo, XADJ(1) = 2, indica que en la primera columna hay dos elementos no nulos, XADJ(2) = 0, expresa que en la segunda columna no hay elementos no nulos: son todos ceros. De esta forma, simplemente mirando al vector XADJ nos damos cuenta en seguida de cómo es la matriz, en nuestro ejemplo vemos claramente que hay dos columnas nulas ya que la última siempre va a serlo. El último cero se ha mantenido para que la dimensión del vector XADJ sea el número de columnas de la matriz. Con respecto al vector modificado ADYACI, hemos reducido su dimensión a la mitad, pues no repetimos los nodos ya almacenados en las columnas anteriores. La demanda de almacenamiento total para este esquema es de |X| + |E|, puesto que las aristas no se cuentan dos veces.

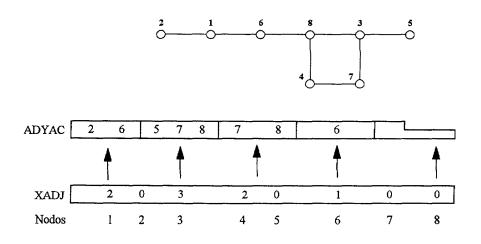


Figura 5.2.1.2.4.

Estructura de adyacencia disminuida del grafo G de la figura 5.2.1.1.5

Esta modificación de los vectores implica una complicación a la hora de leer los

nodos vecinos, sobre todo cuando la matriz es muy grande o deja de ser muy dispersa.

Con la finalidad de examinar los grados de los nodos se utiliza el siguiente segmento de programa:

```
LL=0
DO J=1,NUMECU
IF(J.EQ.1)THEN
GRAD(J)=RXADJ(1)
LL=GRAD(J)
END IF
LK=0
DO I=1,LL
IF(RADYACI(I).NE.J)GO TO 200
LK=LK+1
200
GRAD(J)=LK+RXADJ(J)
END DO
LL=LL+RXADJ(J)
END DO
```

En nuestro caso cuando aplicamos esta modificación al test de once fotogramas vemos que el tamaño del vector ADYACI se reduce de 1680 componentes a 840.

5.2.1.3. INFORMACIÓN GENERAL SOBRE LAS SUBRUTINAS QUE OPE-RAN EN LOS GRAFOS.

En las distintas subrutinas, el grafo G = (X, E) se almacena empleando el par de vectores de enteros (XADJ, ADYACI), y en muchas de ellas comparten otros parámetros comunes. Al objeto de evitar reiterar estos parámetros en los capítulos siguientes, mencionamos aquí su papel y nos referiremos a ellos más adelante a medida que los necesitemos.

El hecho de que un grafo se almacene empleando el par de vectores (XADJ, ADYACI) supone una clasificación particular del grafo. Consideramos este ordenamiento como la numeración original, y cuando nos refiramos al nodo i, es esta numeración la que queremos decir. Cuando una subrutina encuentra un nuevo ordenamiento, este se almacena en un vector PERM, donde PERM(i) = k significa que el número del nodo original k es el nodo i-ésimo en el nuevo ordenamiento. Empleamos un vector de permutación afín INVP de longitud n (la permutación inversa), que satisface INVP(PERM(i)) = i. Es decir, INVP(k) da la posición en PERM donde reside el nodo originalmente numerado k.

A veces es necesario ejecutar operaciones solamente en ciertas secciones del grafo G. Para implementar estas operaciones, muchas de nuestras subrutinas tienen un vector de enteros MASC, de longitud n, que se emplea para ordenar tal grafo. Estas subrutinas, aquí, sólo tienen en cuenta aquellos nodos i para los que MASC(i) \neq 0. La figura 5.2.1.3.2 tiene un ejemplo que muestra el papel de un vector de enteros MASC.

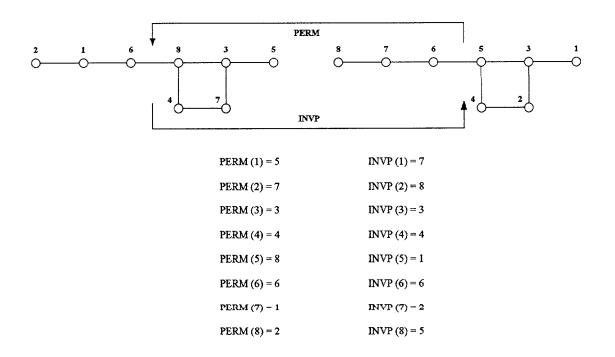


Figura 5.2.1.3.1.

Ilustración del efecto de los vectores PERM e INVP.

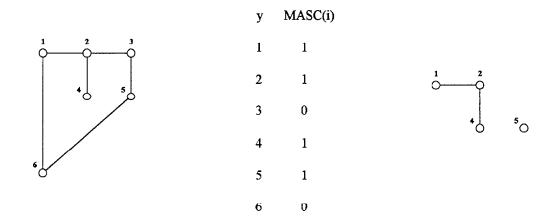


Figura 5.2.1.3.2.

Ejemplo que muestra la utilización del vector MASC para determinar un subgrafo.

Por último, algunas de nuestras subrutinas tienen un número de nodo escogido, normalmente llamado RAIZ, como argumento, con MASC(RAIZ) ≠ 0. Estas subrutinas

operan de forma característica sobre las componentes conexas del subgrafo parcial determinado por MASC que contiene al nodo RAIZ. Es decir, la combinación de RAIZ y MASC determinan el subgrafo conexo de G a procesar. A menudo, emplearemos la frase "la componente determinada por RAIZ y MASC" para referirnos a este subgrafo conexo. Por ejemplo, la combinación de RAIZ = 2 junto con el vector MASC y el grafo G de la figura 5.2.1.3.2. determinan el subgrafo de la figura 5.2.1.3.3.



Figura 5.2.1.3.3.
Subgrafo determinado por MASC y un nodo RAIZ

Resumiendo, algunos de los parámetros que utilizamos en nuestras subrutinas, junto con sus contenidos aparecen listados de la manera siguiente:

- (XADJ, ADYACI): es el par de vectores de enteros que almacena el grafo en su ordenamiento original.
- PERM: es un vector de enteros de longitud n que contiene al nuevo ordenamiento.
- INVP: es un vector de enteros de longitud n que contiene la inversa de la permutación.
- MASC: es un vector de enteros de longitud n utilizado para determinar un grafo parcial de G. Las subrutinas ignoran los nodos para los que MASC(i) = 0.
- RAIZ: es un número de nodo para el que MASC(RAIZ) ≠ 0. La subrutina opera normalmente sobre la componente del subgrafo especificada por MASC que contiene al nodo RAI Z.

5.3.ALMACENAMIENTO Y ORDENACIÓN DE LAS MATRICES DISPERSAS.

5.3.1. INTRODUCCIÓN.

En esta sección consideramos alternativas para el almacenamiento de sistemas dispersos: esquemas por banda y esquemas por envoltura o perfil, que es el propuesto en esta Tesis, con la finalidad de reducir el almacenamiento en ordenador, para la resolución numérica de grandes sistemas con matriz dispersa mediante métodos directos. El objetivo fundamental es el reordenamiento de la matriz, explotando su dispersión, procurando la reducción de la envoltura y el control del efecto fill-in.

5.3.2. EL ESQUEMA DE ALMACENAMIENTO POR LA BANDA.

Este método se describe a modo introductorio, a fin de resaltar la más adecuada elección del método de almacenamiento en perfil.

Sea A una matriz simétrica definida positiva de tamaño nxn, con entradas a_{ij} . Para la fila i-ésima de A, i = 1, 2, ..., n, se definen:

$$f_i(A) = \min\{j / a_{ij} \neq 0\}, y \quad \beta_i(A) = i - f_i(A).$$

El número $f_i(A)$ es, simplemente, el subíndice columna de la primera entrada no cero en la fila i de A. El número $\beta_i(A)$ se denomina i-ésimo ancho de banda de A. Puesto que las entradas diagonales a_{ii} son positivas, se tiene que $f_i \leq i$ y, en consecuencia, $\beta_i \geq 0$.

Definimos el ancho de banda de A por

$$\beta(A) = Max \{ \beta_i(A) / 1 \le i \le n \} = Max \{ |i-j| / a_{ij} \ne 0 \}$$

Y la banda de A como:

Band(A) =
$$\{ \{i, j\} / 0 < i - j \le \beta(A) \},$$

que es la zona de A localizada a una distancia de la diagonal principal igual a $\beta(A)$. En la expresión anterior empleamos pares desordenadas $\{i, j\}$ en lugar de pares ordenados $\{i, j\}$ porque A es simétrica.

El ejemplo de la figura 5.3.2.1. tiene un ancho de banda igual a 3.

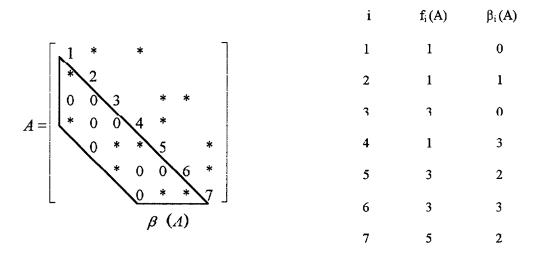


Figura 5.3.2.1.

Ilustración mediante un ejemplo de el ancho de banda $\beta(A)$, la i-ésima amplitud de banda $\beta_i(A)$ y $f_i(A)$

En el empleo del método de la banda está implícito que los ceros fuera de la banda Band(A) se ignoran; los ceros dentro de la banda son, normalmente, almacenados, aunque con frecuencia explotados en lo que respecta al cómputo real. Esta explotación de ceros es posible en la resolución directa porque:

$$Band(A) = Band(L + L^{t})$$

Un método común para almacenar en banda una matriz simétrica A, es el llamado esquema de almacenamiento diagonal. Las $\beta(A)$ subdiagonales del triángulo inferior de A que comprende Band(A) y la diagonal principal de A son almacenadas como columnas en una matriz de tamaño $n(\beta(A)+1)$, según se muestra en la figura 5.3.2.2. Este esquema de almacenamiento es muy simple, y bastante eficiente siempre y cuando $\beta_i(A)$ no varíe demasiado con y.

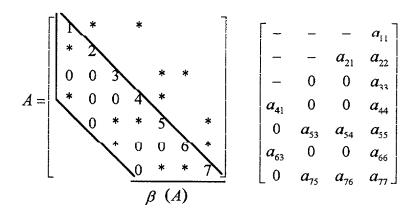


Figura 5.3.2.2.

Ilustración del esquema de almacenamiento diagonal de la matriz de la figura 5.3.2.1.

El número de operaciones requeridas para factorizar la matriz A, que tiene un ancho de banda β , suponiendo que Band(L + L^t) este llena, es:

$$\beta(\beta + 3)n/2 - \beta^3/3 - \beta^2 - 2\beta/3$$

y el número de operaciones que se necesitan para resolver el sistema lineal Ax = b, dado el factor de Cholesky L de A, es:

$$2(\beta + 1)n - \beta(\beta + 1) = (\beta + 1)(2n - \beta)$$

Como mencionábamos anteriormente, lo atractivo de este camino es su simplicidad. No obstante, presenta una debilidad potencialmente seria: si $\beta_i(A)$ varía considerablemente con respecto a i, el esquema de almacenamiento diagonal que aparece en la figura 5.3.2.2. será ineficiente. Recordemos que nuestra matriz representada en la figura 5.1.2. presenta una fuerte dispersidad que nos obligará a recurrir a esquemas de almacenamiento, pero no pueden ser ordenados de tal manera que tengan un ancho de banda pequeña.

5.3.3. EL ESQUEMA DE ALMACENAMIENTO POR EL PERFIL.

5. 3.3. 1. FORMULACIÓN MATRICIAL.

Un esquema ligeramente más sofisticado para explotar la dispersión es el llamado método del perfil o de la envoltura, que simplemente aprovecha la variación en $\beta_i(A)$ con i. La envoltura de A, denotada por Env(A), se define de la siguiente manera:

$$Env(A) = \{ \{i, j\} \} / 0 < i - j \le \beta_i(A) \}.$$

En términos de subíndices columna fi(A), se tiene

$$Env(A) = \{ \{i, j\} / f_i(A) \le j \le i \}$$

El cardinal | Env(A) | se denomina tamaño del perfil de A o tamaño de la envoltura de A, y viene dado por

$$\left| Env(A) \right| = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(A) \tag{5.1}$$

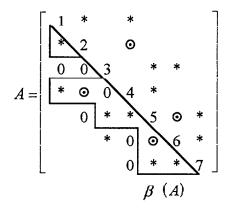


Figura 5.3.3.1.1.
Ilustración de la envoltura de A.

Los puntos denotan los rellenos de huecos producidos en L

Para una matriz simétrica o de perfil simétrico A, se verifica:

$$\operatorname{Env}(A) = \operatorname{Env}(L + L^{t}), \operatorname{Env}(A) \subset \operatorname{Band}(A)$$
 (5. 2.) puesto que,

Env(A) =
$$\{ \{i, j\} \} / 0 < i - j \le \beta_i(A) \}$$
.
Band(A) = $\{ \{i, j\} \ 0 < i - j \le \beta(A) \}$
 $\beta(A) = \text{Max} \{ \beta_i(A) / 1 \le i \le n \}$

 $Si \ \{i, j\} \in Env(A) \implies 0 < i - j \le \beta_i(A) \le \beta(A) \implies 0 < i - j \le \beta \ (A) \implies \{i, j\} \in Band(A). \ Luego, Env(A) \subset Band(A).$

La expresión 5. 2 justifica la explotación de ceros fuera de la envoltura o de la zona de la banda. Suponiendo que solamente se exploten aquellos ceros fuera de la envoltura, vamos a determinar, ahora, el coste aritmético de la ejecución de la solución directa. Con el fin de computar los totales de operaciones, nos ayudaría el introducir la noción de frente. Para una matriz A, la i-ésima amplitud de frente de A se define:

$$w_i(A) = |\{k \mid k > i \land a_{kl} \neq 0 \text{ para algún } l \leq i \}|$$

Observemos que $w_i(A)$ es simplemente el número de filas activas en el paso iésimo de la factorización; es decir, el número de filas de la envoltura de A que intersectan la columna i. Por tanto, $w_i(A) = |\{j > i / \{i, j\} \in Env(A)\}|$. El número $w(A) = Max \{ w_i(A) / 1 \le i \le n \}$ se denomina amplitud de frente de A o frente de onda de A. La figura 5.3.3.1.2 ilustra estas definiciones

Figura 5.3.3.1.2. Ilustración de un ejemplo de la i-ésima amplitud de frente $w_i(A)$ y la i-.ésima amplitud de banda β_i (A).

Veamos otra forma diferente de contar los elementos de la envoltura; en vez de hacerlo fila a fila, en virtud de que

$$|Env(A)| = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(A)$$

lo hacemos columna a columna, con lo que

$$\left| Env(A) \right| = \sum_{i=1}^{n} w_{i}(A)$$

Si se explota únicamente estos ceros fuera de la envoltura, el número de operaciones que se necesita para factorizar A en LL^t viene dado por:

$$(1/2)\sum_{i=1}^{n} w_{i}(A)(w_{i}(A)+3)$$

y el número de operaciones necesario para resolver el sistema Ax = b, dada la factorización LL^t es (Almeida Benitez, P., 1989):

$$2\sum_{i=1}^{n} (w_i(A) + 1)$$

Aunque parezca que los esquemas del perfil representan un incremento bastante secundario en la sofisticación sobre esquemas en banda, pueden proporcionar mejoras bastante espectaculares. Para comprobar esto consideremos el ejemplo de la figura 5.3.3.1.3, que muestra dos ordenamientos en la misma matriz,

Ordenamiento en el que el nodo se numera el ultimo

Ordenamiento de la minima amplitud de banda

Figura 5.3.3.1.3.

Ordenamiento de mínimo perfil y ordenamiento de banda mínima para un grafo estrellado

5. 3.3. 2. INTERPRETACIÓN DE LOS GRAFOS.

Para una matriz A simétrica nxn, sea su grafo no dirigido asociado G = (X, E), donde el conjunto de nodos se enumera según induce A:

$$X^A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$$

Con el fin de proporcionar una visión de la naturaleza combinatorial del método de la envoltura, es importante dar una interpretación teórica de grafo a las definiciones matriciales introducidas en la subsección previa, (Almeida Benitez, 1989):

Para
$$i < j$$
, $\{i, j\} \in Env(A) \Leftrightarrow x_j \in Ady(\{x_1, x_2, ..., x_i\})$
Para $i = 1, 2, ..., n$, $w_i(A) = |Ady(\{x_1, x_2, ..., x_i\})|$

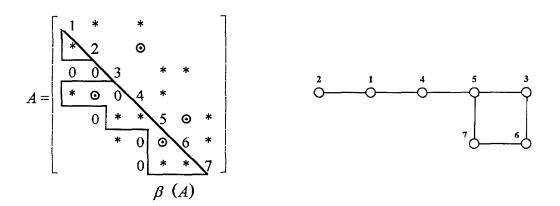


Figura 5.3.3.2.1.

Ilustración de la matriz A de la figura 5.3.2.1. y su grafo asociado

Si nos fijamos en la matriz del ejemplo y en su grafo ordenado asociado, reflejados en la figura 5.3.3.2.1, los conjuntos de adyacencia respectivos son:

$$Ady(x_1) = \{x_2, x_4\},$$

$$Ady(x_1, x_2) = \{x_4\},$$

$$Ady(x_1, x_2, x_3) = \{x_4, x_5, x_8\},$$

Ady
$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \{x_5, x_6\},$$

Ady $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \{x_6, x_7\},$
Ady $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \{x_7\},$
Ady $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = \emptyset$

Nos referiremos al conjunto $Ady(\{x_1,...,x_i\})$ como el frente i-ésimo del grafo ordenado, a su cardinal como la i-ésima amplitud del frente, según se había hecho anteriormente.

5.4. ORDENACIÓN DE LA ENVOLTURA

5. 4. 1. EL ALGORITMO INVERSO DE CUTHILL-MCKEE

Este es un algoritmo de reducción del perfil, diseñado para reducir la envoltura de una matriz dispersa de perfil simétrico.

El esquema utiliza la siguiente observación. Sea "y" un nodo numerado, y "z" otro nodo no numerado vecino de "y". Para minimizar el ancho de la fila asociada con "z", es evidente que el nodo "z" se debería ordenar lo antes posible inmediato después de y. La figura 4.3.1.1 muestra este aspecto.

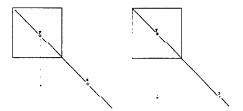


Figura 5.4.1.1.

Efecto sobre la amplitud de banda del nodo de numeración z posterior al nodo y, cuando ambos están conectados.

El esquema de Cuthill-McKee reduce la amplitud de banda de una matriz a través de una minimización local de los β_i , y es empleado como método para reducir el perfil $\Sigma\beta_i$ de una matriz. Pero, según los estudios realizados por George (George, 1975), el ordenamiento obtenido al invertir el ordenamiento de Cuthill-McKee, resulta frecuentemente mejor o igual, que el ordenamiento original, en términos de reducción del perfil, aunque el ancho de banda permanezca sin mejorarse (Liu y Herman, 1976). A este ordenamiento se le denomina ordenamiento inverso de Cuthill-McKee (ICM): para una matriz de orden nxn, al nodo numerado i se le asocia la numeración 1 + n - i. La base de la eficacia del algoritmo inverso de Cuthill-McKee consiste en la obtención de un perfil no más monótono que el resultante con el algoritmo directo $(\forall k, 1/k < 1: j_k \le j_1)$.

A continuación describimos el algoritmo ICM para un grafo conexo. La tarea de determinar el nodo inicial en el paso 1 la consideraremos en la siguiente sección.

Paso 1:

Determinar un nodo inicial r y asignar $x_1 \leftarrow r$.

Paso 2: Lazo principal

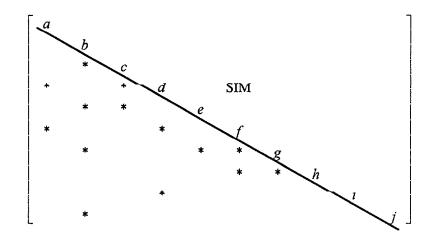
Para i = 1, 2,..., n, hallar todos los vecinos no numerados del nodo x_i y numerarlos en orden ascendente de grado.

Paso 3: Ordenamiento inverso

El ordenamiento inverso de Cuthill-McKee está dado por y_1 , y_2 ,..., y_n donde $y_i = x_{n-1}$, para i = 1, 2,..., n, esto es, $y_1 = x_n$, $y_2 = x_{n-1}$,..., $y_n = x_1$.

En el caso en el que el grafo G sea inconexo, aplicamos el algoritmo anterior

para cada componente conexa del grafo. Para un nodo inicial dado, el algoritmo es relativamente simple. Veámoslo con el grafo ilustrado en la figura 5.4.1.2.



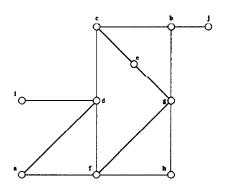


Figura 5.4.1.2.

Matriz A, junto con su grafo asociado a la que se le va a aplicar el algoritmo ICM.

Paso 1:

Determinar un nodo inicial r y asignar $x_1 \leftarrow r$.

Sea r = g, luego $x_1 = g$

Paso 2:

Lazo principal Para i=1, 2,..., n, hallar todos los vecinos no numerados del nodo x_i y numerarlos en orden ascendente de grado.

Vecinos no numerados de $x_1 = g$: {e, b, f, h}

$$\delta(e) = 2$$
, $\delta(b) = 3$, $\delta(f) = 4$, $\delta(h) = 2 \Rightarrow x_2 = h$, $x_3 = e$, $x_4 = b$, $x_5 = f$.

Vecinos no numerados de $x_2 = h$: \emptyset .

Vecinos no numerados de $x_3 = e$: $\{c\} \implies x_6 = c$

Vecinos no numerados de $x_4 = b$: $\{j\} \implies x_7 = j$

Vecinos no numerados de $x_5 = f$: {a, d}

$$\delta(a) = 2$$
, $\delta(d) = 3 \implies x_8 = a$, $x_9 = d$.

Vecinos no numerados de x₆ = c: Ø

Vecinos no numerados de $x_7 = j$: \emptyset

Vecinos no numerados de $x_8 = a$: \emptyset

Vecinos no numerados de $x_9 = d$: $\{i\} \Rightarrow x_{10} = i$

Vecinos no numerados de $x_{10} = \emptyset$

Paso 3: ordenación inversa.

La ordenación inverso de Cuthill-McKee está dado por $y_1, y_2,..., y_n$ donde $y_i = x_{n-i+1}$,

para
$$i = 1, 2, ..., n$$
, esto es, $y_1 - x_n, y_2 - x_{1} - 1, ..., y_n - x_1$.

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_{10} = \mathbf{i},$$

$$y_2 = x_9 = d,$$

$$y_3=x_8=a,$$

$$y_4 = x_7 = j,$$

$$y_5 = x_6 = c$$
,

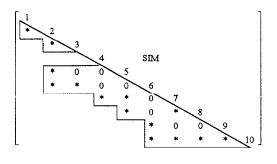
$$y_6 = x_5 = j,$$

$$y_7 = x_4 = b,$$

$$y_8 = x_3 = e$$
,

$$y_9 = x_2 = h,$$

 $y_{10} = x_1 = g.$



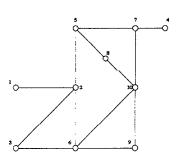
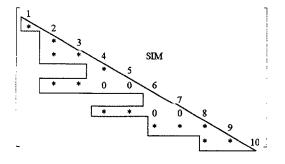


Figura 5.4.1.3. La ordenación final y la correspondiente estructura matricial, tomando como nodo inicial $x_1 = g$

La efectividad del algoritmo de ordenación depende en gran medida de la elección del nodo inicial. En el ejemplo, si en lugar del nodo que hemos seleccionado tomamos el nodo "a" como nodo inicial, tendremos un perfil más pequeño igual a 18, según se muestra en la figura 5.4.1.4.



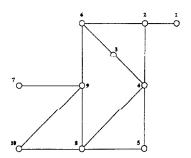


Figura 5.4.1.4. La ordenación final y la correspondiente estructura matricial, tomando como nodo inicial $x_1 = a$

Establezcamos ahora un límite aproximado de complejidad para el tiempo de ejecución del algoritmo ICM, suponiendo que se proporciona el nodo inicial. La suposición es que el tiempo que se emplee en la ejecución del algoritmo clasificando es proporcional al número de operaciones ejecutadas, donde cada una de las operaciones puede ser una comparación, o una recuperación de una partida de datos de la estructura de adyacencia utilizada para almacenar el grafo.

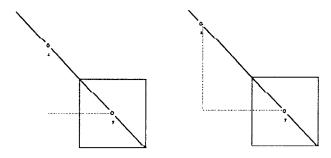


Figura 5.4.1.5.

Diagrama en el que se muestra el efecto de la inversión de la ordenación reflejado en la figura 5.4.1.1.

5. 4. 2. SELECCIÓN DE UN NODO INICIAL

Volvamos ahora al problema de seleccionar un nodo inicial para el algoritmo ICM. El objetivo es encontrar una pareja de nodos separados por la máxima distancia o por la distancia más cercana a la máxima.

Recordemos que una trayectoria de longitud k desde el nodo x_0 a x_k es un conjunto ordenado de nodos distintos $(x_0, x_1, ..., x_k)$, donde $xi \in Ady(x_{i+1})$, para $0 \le i \le k-1$. La distancia d(x, y) entre dos nodos x e y en el grafo conexo G = (X, E) es simplemente la longitud de la trayectoria más corta que une los nodos x e y. Definiremos

la excentricidad de un nodo x por $\varepsilon(x) = Max \{ d(x, y) / y \in X \}$. El diámetro de G queda, pues, dado por $\delta(G) = Max \{ \varepsilon(x) / x \in X \} = Max \{ d(x, y) / x, y \in X \}$.

Decimos que un nodo $x \in X$ es periférico si su excentricidad es igual al diámetro del grafo, es decir, si $\epsilon(x) = \delta(G)$. La figura 5.4.2.1 muestra un grafo que tiene 8 nodos, con un diámetro de 5. Los nodos x_2 , x_5 y x_7 son nodos periféricos.

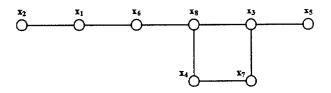


Figura 5.4.2.1.

Grafo con 8 nodos y diámetro igual a 5

Expresada esta terminología, nuestro objetivo en esta subsección es describir un algoritmo eficiente e inductivo para encontrar nodos de alta excentricidad, eficiente aunque no se garantiza que el algoritmo encuentre un nodo periférico, ni siquiera que esté próximo a ser periférico; no obstante, los nodos encontrados tienen una elevada excentricidad y son válidos como nodos iniciales. Además, a excepción de algunas situaciones claramente triviales, no parece que haya razón para esperar que los nodos periféricos sean mejores como nodos iniciales que aquellos encontrados por este algoritmo. Finalmente, en muchas situaciones es probablemente costoso encontrar nodos periféricos, y el mejor algoritmo para encontrarlos tiene un límite de complejidad de coste del orden O(|X|.|E|). Para la mayoría de las aplicaciones a matrices dispersas, este límite es del orden O(|X|.|E|). George, 1975). En lo que sigue, nos referiremos a los nodos encontrados por este algoritmo como nodos seudo-periféricos, propuesto por

George y Liu en 1981 para matrices simétricas, al que nosotros le incorporamos la variante de elección del nodo seudo-periférico por el algoritmo de Dijkstra, que es el siguiente:

Primeramente dirigimos el grafo hasta lograr un digrafo, G = (X,E,f), y lo etiquetamos adecuadamente con una aplicación d: $E \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^+$, donde S es finito.

Dados a,b∈X, este algoritmo tiene por objeto evaluar la distancia entre a y b de la siguiente manera:

Paso 1:

Definir la aplicación l: $X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, por

1:
$$X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

$$a \longrightarrow l(a) = 0$$

$$v \longrightarrow l(v) = \infty, \forall v \in X - \{a\}$$

Sea T = X

(la aplicación l y el conjunto de vértices T se irá transformando con la evolución del algoritmo)

Paso 2:

Encontrar el vértice $v \in T$ con etiqueta l(v) mínima.

Paso 3:

Si v = b, la distancia entre a y b es l(b), y acaba el algoritmo.

Paso 4:

Para todo $w \in T$, tal que exista una arista (v,w), con origen en v y extremo en w, si l(w)>l(v)+d(v,w)

Paso 5:

Eliminar en T el vértice v y volver al paso 2.

Una construcción clave en el algoritmo es la estructura por niveles enraizada en un nodo. En general, ésta es una partición $\mathcal{L} = \{ L_0, L_1, ..., Ll \}$ del conjunto de nodos X, donde:

$$Ady(L_0) \subset L_1$$
, $Ady(L_1) \subset L_{i-1}$, $Ady(L_i) \subset L_{i-1} \cup L_{i+1}$, para $i = 2, 3, ..., 1 - 1$.

Dado un nodo $x \in X$, la estructura por niveles enraizada en x es la partición $\mathcal{L}(x)=\{L_0(x), L_1(x), ..., L_{\epsilon(x)}(x)\}$ de X, que satisface:

$$L_0(x) = \{x\},\,$$

$$L_1(x) = Ady(L_0(x)),$$

$$L_i(x) = Ady(L_{i-1}(x)) - L_{i-2}$$
, para $i = 2, 3, ..., \varepsilon(x)$,

que evidentemente es enraizada en el sentido de la definición anterior. Se llama longitud de $\mathcal{L}(x)$ a la excentricidad de x, $\epsilon(x)$. La amplitud w(x) de $\mathcal{L}((x))$ se define por:

$$w(x) = Max \{ |L_i(x)| / 0 \le i \le \varepsilon(x) \}.$$

En la figura 5.4.2.2 se muestra una estructura por niveles del grafo de la figura 5.4.2.1, enraizada en el nodo x_6 . Observamos que $\varepsilon(x_6) = 3$ y $w(x_6) = 3$.

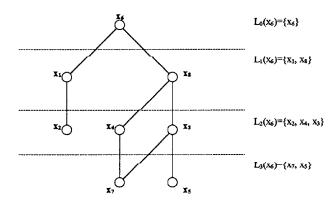


Figura 5.4.2.2.

Una estructura con niveles del grafo de la figura 5.4.2.1. enraizada en x₆

Estamos ya en condiciones de describir el algoritmo de búsqueda del nodo seudo-periférico. Utilizando nuestra notación de estructura por niveles que acabamos de introducir, el algoritmo es como sigue:

Paso 1: Inicialización.

Elegir un nodo arbitrario r de X.

Paso 2: Generar una estructura por niveles.

Construir la estructura con niveles enraizada en r: $\mathcal{L}(r) = \{L_0(r), L_1(r), ..., L_{\epsilon(r)}\}.$

Paso 3: Reducción en el ultimo nivel.

Elegir un nodo x de mínimo grado en L_{s(r)}(1)

Paso 4: Generar una estructura por niveles.

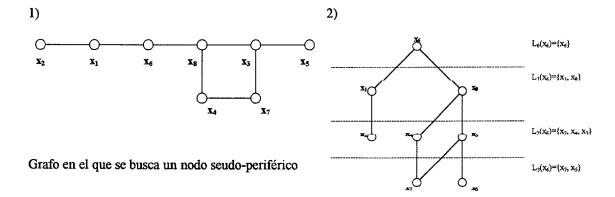
a) Construir la estructura por niveles enraizada en x:

$$\mathcal{L}(x) = \{ L_0(x), L_1(x), ..., L_{s(x)}(x) \}$$

b) Si $\varepsilon(x) > \varepsilon(r)$, establecer $r \leftarrow x$, e ir al paso 3.

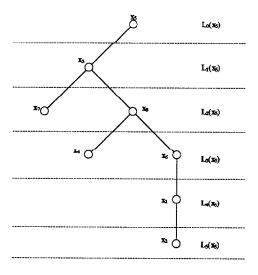
Paso 5: Conclusión.

El nodo x es un nodo seudo-periférico.



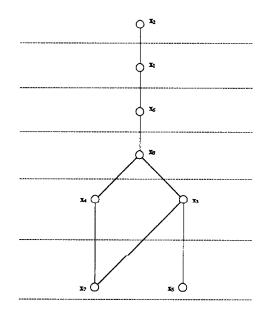
Estructura por niveles enraizada en x₆





Estructura por niveles enraizada en x5

4)



Estructura por niveles enraizada e x2

Figura 5.4.2.3. Secuencias para la determinación de un nodo seudo-periférico.

Veámoslo paso a paso:

Paso 1: Inicialización

Elegir un nodo arbitrario r de X.

Sea
$$r = x_6$$

Paso 2: Generar una estructura por niveles

Construir la estructura por niveles enraizada en r: $\mathcal{L}(r) = \{ \ L_0(r), \ L_1(r), ..., \ L_{\epsilon(r)}(r) \}.$

Hallar
$$\mathcal{L}(x_6) = \{ L_0(x_6), L_1(x_6), L_2(x_6), \dots \}$$

$$L_0(x_6) = \{x_6\}$$

$$L_1(x_6) = Ady(L_0(x_6)) = Ady(x_6) = \{x_1, x_8\}$$

$$L_2(x_6) = Ady(L_1(x_6)) - L_0(x_6) = Ady(\{x_1, x_8\}) - \{x_6\} = \{x_2, x_3, x_4\}$$

$$L_3(x_6) = Ady(L_2(x_6)) - L_1(x_6) = Ady(\{x_2, x_3, x_4\}) - \{x_1, x_8\} = \{x_1, x_5, x_7, x_8\} - \{x_1, x_8\}$$

$$= \{x_5, x_7\}$$

$$L_4(x_6) = Ady(L_3(x_6)) - L_2(x_6) = Ady(\{x_5, x_7\}) - \{x_5, x_7\} = \emptyset.$$

Resultando, así, la estructura por niveles representada en la figura 5.4.2.2.

Paso 3: Ultimo nivel de reducción

Elegir un nodo x de mínimo grado en L_{s(r)} (r)

$$\delta(x_5) = 1$$
, $\delta(x_7) = 2$, luego, $x = x_5$

Paso 4: Generar una estructura por niveles

a) Construir la estructura por niveles enraizada en x:

$$\mathcal{L}(x) = \{ L_0(x), L_1(x), ..., L_{\varepsilon(x)}(x) \}$$

- b) Si $\varepsilon(x) > \varepsilon(r)$, establecer $r \leftarrow x$, e ir al paso 3.
- a) Hallar $\mathcal{L}(x_5) = \{L_0(x_5), L_1(x_5), L_2(x_5), \dots \}$

$$L_0(x_5) = \{x_5\}$$

$$L_1(x_5) = Ady(L_0(x_5)) = \{x_3\}$$

$$L_2(x_5) = Ady(L_1(x_5)) - L_0(x_5) = \{x_7, x_8\}$$

$$L_3(x_5) = Ady(L_2(x_5)) - L_1(x_5) = \{x_4, x_6\}$$

$$L_4(x_5) = Ady(L_3(x_5)) - L_2(x_5) = \{x_1\}$$

$$L_5(x_5) = Ady(L_4(x_5)) - L_3(x_5) = \{x_2\}$$

Resultando, así, la correspondiente estructura por niveles ilustrada en la figura 5.4.2.2.

b) Dado que $\varepsilon(x_5) = 5 > \varepsilon(r) = 3$, se establece $r \leftarrow x_5$ siendo, pues, el "nuevo" r igual a x_5 .

Ir al paso 3.

Paso 3: Ultimo nivel de reducción.

Elegir un nodo x de mínimo grado en $L_{s(r)}(r)$.

El único nodo posible $x \in L_5(x_5)$ es $x = x_2$

Paso 4: Generar una estructura por niveles.

a) Construir la estructura por niveles enraizada en x :

$$\mathcal{L}(x) = \{ L_0(x), L_1(x), ..., L_{\epsilon(x)}(x) \}$$

- b) Si $\varepsilon(x) > \varepsilon(r)$, establecer $r \leftarrow x$, e ir al paso 3.
- a) Hallar $\mathcal{L}(x_2) = \{ L_0(x_2), L_1(x_2), L_2(x_2), ... \}$

$$L_0(\mathbf{x}_2) = {\mathbf{x}_2}$$

$$L_1(x_2) = Ady(L_0(x_2)) = \{x_1\}$$

$$L_2(x_2) = Ady(L_1(x_2)) - L_0(x_2) = \{x_6\}$$

$$L_3(x_2) = Ady(L_2(x_2)) - L_1(x_2) = \{x_8\}$$

$$L_4(x_2) = Ady(L_3(x_2)) - L_2(x_2) = \{x_3, x_4\}$$

$$L_5(x_2) = Ady(L_4(x_2)) - L_3(x_2) = \{x_5, x_7\}$$

$$L_6(x_2) = Ady(L_5(x_2)) - L_4(x_2) = \emptyset.$$

b) No se verifica que $\varepsilon(x_2) = 5 > \varepsilon(r) = 5$.

Paso 5: Conclusión.

El nodo x es un nodo seudo-periférico, i.e., $X = x_2$ es el nodo seudo-periférico.

5. 5. UN ESQUEMA DE ALMACENAMIENTO DE LA EN-VOLTURA.

El plan de almacenamiento que utilizaremos es el propuesto por Jennings. Para cada fila de la matriz se almacenan todas las entradas desde el primer no cero a la diagonal. Estas porciones de filas se almacenan en lugares contiguos en un vector. No obstante, emplearemos una modificación de este esquema, en el que las entradas diagonales se almacenan en un vector separado. Una ventaja de este esquema variante es que fácilmente se presta al caso en que A es asimétrica.

El esquema tiene un vector de almacenamiento principal ENV que contiene las entradas de la envoltura en cada fila en la matriz. Un vector índice auxiliar XENV de longitud n que se emplea para señalar el comienzo de cada porción de fila. Para la uniformidad de la planificación establecemos XENV(n + 1) a | Env(A)| + 1. De esta manera, el vector índice XENV nos permite acceder a cualquier entrada no cero de forma conveniente. La aplicación de Env(A) en {1, 2,..., | Env(A) | viene dada por

$$\{i, j\} \longrightarrow XENV(i+1) - (i-j)$$

Dicho de otra manera, una entrada a_{ij} dentro de la zona de la envoltura de A se encuentra en ENV(XENV(i + 1) - (i - j)). La figura 5.5.1.1. ilustra el esquema de almacenamiento. Por ejemplo, para recuperar a_{76} , tenemos XENV(7 + 1) - 7 - 6 = 8, de forma que a_{76} se almacena como el octavo elemento del vector ENV. Eso es, a_{76} =ENV(XENV(7 + 1) - 7 - 6 = ENV(8).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & & & & & \\ & a_{22} & & & & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & SIM & & & \\ & a_{42} & 0 & a_{44} & & & & \\ & & a_{53} & a_{54} & a_{55} & & & \\ & & & a_{65} & a_{66} & & \\ & & & & a_{76} & a_{77} & \\ & & & & & a_{87} & a_{88} \end{bmatrix}$$

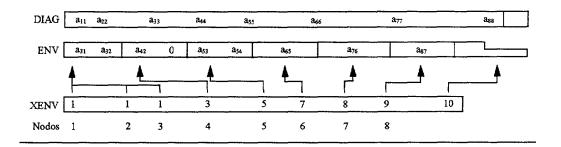


Figura 5.5.1.1. Ejemplo del esquema de almacenamiento de la envoltura.

Una operación empleada frecuentemente es la de recuperar la porción de una fila.

Esto se puede hacer convenientemente de la siguiente manera:

100 CONTINUE

200

El almacenamiento principal del esquema es |Env(A)| + n y el almacenamiento suplementario es n + 1. La estructura de datos para la estructura del almacenamiento se puede establecer en O(n) de tiempo y la subrutina BUSENV realiza esta función.

5.6. DESCOMPOSICIÓN EN VALORES SINGULARES

Para el estudio práctico de nuestros problemas, por el método de mínimos cuadrados, hemos considerado la descomposición en valores singulares de una matriz, válida para matrices $A \in \mathcal{W}_{n \times m}(\mathbb{R})$ de cualquier tamaño.

Describimos a continuación algunos de los resultados teóricos más relevantes sobre valores singulares.

Dada $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ (\mathbf{R}), $A^t = A$, sabemos que existe una base ortogonal $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, formada por autovectores de A, es decir, $Av_i = \lambda_i v_i$, tal que $\lambda_i \in \mathbf{R}$. Asimismo, $V = (v_1 | v_2 | | v_n)$, cuyas columnas son los vectores v_i , es una matriz ortogonal ($V^{-1} = V^t$), tal que:

$$V^{-1}AV = V^{t}AV = D.$$

siendo D una matriz diagonal cuyas entradas diagonales son λ_i , en el mismo orden correspondiente a cada v_i como columna de V, es decir,

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \cdot & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$Si V^t AV = D \Rightarrow A = VDV^t$$

Nos preguntamos si de alguna manera, podremos generalizar esta descomposición. Veremos que sí, incluso si A no es cuadrada.

Sea $A \subset \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$, sabemos que a cada matriz A le podemos asociar los subespacios: nulo N(A) y columna C(A):

$$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^m / Ax = 0\}$$

$$C(A) = \{Ax / x \in \mathbb{R}^n \}$$

Sabemos que la dimensión de C(A) es el rango de A

$$r(A) = \dim C(A)$$

También conocemos que

$$m = \dim N(A) + \dim C(A)$$

La descomposición que nosotros buscamos va a estar basada en las matrices $A^tA \in \mathcal{M}_{m \times m}$ y $AA^t \in \mathcal{M}_{n \times n}$. Por ello, veamos algunas propiedades de estas matrices:

A^tA y AA^t son simétricas y semidefinidas positivas, en general.

En efecto:

$$(A^tA)^t = A^tA^{tt} = A^tA \Rightarrow A^tA$$
 es simétrica

 $(AA^{t})^{t} = A^{tt} A^{t} = AA^{t} \Rightarrow AA^{t}$ es simétrica

$$x^{t}A^{t}Ax = (Ax)^{t}(Ax) = ||Ax||^{2} \ge 0$$

Por otra parte,

 $||Ax||^2 = 0 \Leftrightarrow Ax = 0$, lo cual no implica que x = 0 si A no es regular. Por tanto, en general es semidefinida positiva y si el rango de A es igual al número de columnas m entonces x = 0 y, en consecuencia, A^tA es definida positiva.

Un razonamiento análogo podemos emplear para probar que AA^t es, en general, semidefinida positiva, siendo definida positiva si el número de columnas de A^t, n, que es el número de filas de A, es igual al rango de A^t, que también es el de A. En efecto:

$$\mathbf{x}^{t} \mathbf{A} \mathbf{A}^{t} \mathbf{x} = (\mathbf{A}^{t} \mathbf{x})^{t} (\mathbf{A}^{t} \mathbf{x}) = \| \mathbf{A}^{t} \mathbf{x} \|^{2} \ge 0$$
$$\| \mathbf{A}^{t} \mathbf{x} \|^{2} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A}^{t} \mathbf{x} = 0$$

Teorema 1: $N(A^tA) = N(A)$

En efecto:

"_"

$$\forall x \in N(A^tA) : A^tAx = 0 \Rightarrow x^tA^tAx = 0 \Rightarrow (Ax)^t(Ax) = 0 \Rightarrow ||Ax||^2 = 0 \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow x \in N(A)$$

"_"

$$\forall x \in N(A) : Ax = 0 \Rightarrow A^t Ax = A^t 0 = 0 \Rightarrow A^t Ax = 0 \Rightarrow x \in N(A^t A)$$

Corolario 2

$$r(A^{t}A) = r(A) = r(A^{t}) = r(AA^{t})$$

En efecto:

Si
$$A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$$
, $m = \dim N(A) + r(A) \Rightarrow r(A) = m - \dim N(A)$. Luego,

$$r(A^{t}A) = m - \dim N(A^{t}A) = m - \dim N(A) = r(A)$$

Análogamente, $r(AA^t) = r(A^t)$, y como $r(A) = r(A^t)$, se obtiene:

$$r(A^tA) = r(A) = r(A^t) = r(AA^t)$$

Teorema 3: Si v es un autovector de A^tA asociado a un autovalor λ no nulo, entonces Av es un autovector de AA^t asociado al mismo autovalor λ .

En efecto:

Por hipótesis se verifica que $(A^tA)v = \lambda v$, desarrollemos $(AA^t)(Av)$:

$$(AA^{t})(Av) = A[(A^{t}A)v] = A\lambda v = \lambda(Av)$$

Exigimos que $\lambda \neq 0$, si $\lambda = 0$ entonces $A^tAv = \lambda v = 0v = 0$, con $v \neq 0$, esto es, $(A^tA)v = 0$, $v \neq 0 \Rightarrow r(A^tA) < m$. Como $r(A^t) = r(A^tA)$, si m<n, entonces $r(A^t) = r(A^tA) < m < n \Rightarrow r(A^t) < n$, con lo cual de $(A^tA)v = 0$, o sea de $A^t(Av) = 0$ podría deducirse que Av = 0, con lo cual no sería autovector. Del teorema anterior deducirsos el siguiente

Corolario 4: A^tA y AA^t tienen los mismos autovalores no nulos, incluso con la misma multiplicidad.

<u>Proposición 5:</u> Si v₁ y v₂ son autovectores ortogonales de A^tA, entonces Av₁ y Av₂ también son ortogonales.

En efecto:

$$(A^{t}A)v_{1} = \lambda_{1}v_{1}, (A^{t}A)v_{2} = \lambda_{2}v_{2}, y \text{ además } v_{1}^{t}v_{2} = 0, \text{ luego:}$$

$$(Av_1)^t(Av_2) = (v_1^tA^t)Av_2 = v_1^t(A^tA)v_2 = v_1^t\lambda_2v_2 = \lambda_2(v_1^tv_2) = \lambda_2 \ 0 = 0 \Rightarrow Av_1 \perp Av_2$$

Una matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ (\mathfrak{b}) es simple si tiene un conjunto de n autovectores linealmente independientes. Una matriz que es simple se llama defectiva o defectuosa.

Sea $B \in \mathcal{M}_{m \times m}(R)$, una matriz simple con los autovectores $v_1, v_2, \ldots, v_m \in R^m$, linealmente independientes asociados a los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \in R^m$, respectivamente. Supongamos que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, son no nulos y que $\lambda_{r+1} = \ldots, = \lambda_m = 0$, entonces $C(B) = \langle \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \rangle$, y, por lo tanto, r(B) = r, el número de autovalores no nulos.

En efecto:

$$C(B) = \langle Av_1, Av_2, \dots, Av_m \rangle = \langle \lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \dots, \lambda_r v_r, \dots \lambda_m v_m \rangle = \langle \lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \dots, \lambda_r v_r \rangle = \langle v_1, v_2, \dots, v_r \rangle$$
, lo que implica que $r(B) = r$, que es el número de autovalores no nulos.

Las matrices A^tA y AA^t son ambas simétricas y por lo tanto simples. Como A^tA y AA^t tienen los mismos autovalores no nulos, y su número es el rango de cada una de ellas, entonces A^tA y AA^t tienen el mismo rango, lo cual lo habíamos probado por otro procedimiento.

Si $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbf{R})$, $A^t A \in \mathcal{M}_{m \times m}(\mathbf{R})$ y $AA^t \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbf{R})$, es decir, son de diferentes tamaños, en general, y por tanto, pueden no tener exactamente los mismos autovalores. La diferencia si compara del autovalor nulo con la apropiada multiplicidad. Si $r(A^t A) = r(AA^t) = r$, y r<n entonces $A^t A$ tiene el 0 como autovalor con multiplicidad n-r. Dada la matriz A = (1,2),

$$A'A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (1 \quad 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

у

$$AA^{t} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}$$

donde se observa que A^tA tienen 0 como un autovalor y AA^t no lo tiene. Por lo tanto, si v es un autovector de A^tA asociado al autovalor 0

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases} x = -2y$$
v.g.,
$$si \quad y = 1 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = v$$
para el que $Av = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

que no puede ser autovector de AA^t, por ser nulo. Este ejemplo no contradice el teorema 3 visto anteriormente porque v es un autovector de A^tA asociado al autovalor nulo.

El siguiente teorema es el que garantiza la descomposición en valores singulares.

<u>Teorema 6:</u> Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$ (\mathbb{R}), que tiene rango r. Entonces existen números reales $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \ge \sigma_r > 0$, una base ortonormal $(v_1, v_2,, v_m)$ de \mathbb{R}^m , y una base ortonormal $(u_1, u_2,, u_n)$ de \mathbb{R}^n , tal que

$$Av_i = \sigma_i u_i$$
, siendo $i = 1, 2, ..., r$ (1)

$$Av_i = 0$$
, siendo $i = r+1,...,m$ (2)

$$A^{t}u_{i} = \sigma_{i}v_{i}, \text{ siendo } i = 1, 2, \dots, r$$
 (3)

$$A^{t}u_{i} = 0$$
, siendo $i = r+1,...,n$ (4)

Del enunciado de este teorema deducimos:

(1)
$$Av_i = \sigma_i u_i, \text{ siendo } i = 1, 2, ..., r$$

$$A^t Av_i = A^t \sigma_i u_i = \sigma_i A^t u_i = \sigma_i \sigma_i v_i \Rightarrow (A^t A) v_i = \sigma_i^2 v_i, i = 1, 2, ..., r$$

(2)
$$Av_i = 0$$
, $i = r+1,...,m$
 $A^tAv_i = A^t0 = 0 \Rightarrow (A^tA)v_i = 0$, $i = r+1,...,m$
Es decir, $v_1, v_2,...., v_m$ son autovectores de A^tA .
Análogamente $u_1, u_2,...., u_n$ son autovectores de AA^t

(3)
$$A^t u_i = \sigma_i v_i, \text{ siendo } i = 1, 2,, r$$

$$AA^t u_i = A\sigma_i v_i = \sigma_i A v_i = \sigma_i \sigma_i u_i = \sigma_i^2 u_i \Rightarrow (AA^t) u_i = \sigma_i^2 u_i , i = 1, 2,, r$$

(4)
$$A^t u_i = 0$$
, siendo $i = r+1,...,n$
 $AA^t u_i = A0 = 0 \Rightarrow (AA^t)u_i = 0$, $i = r+1,...,n$

De esta última declaración observamos cómo hemos de elegir $v_1, v_2, ... v_m$. En efecto, sea $(v_1, v_2, ... v_m)$ una base ortonormal de autovectores de A^tA , y sean λ_1 , λ_2 ,...... λ_m , sus autovalores asociados, respectivamente. Puesto que A^tA es semidefinida positiva, estos λ_i son no negativos. Supongamos que los vectores $v_1, v_2, ... v_m$ están ordenados de

tal forma que $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \ldots \ge \lambda_m$. Puesto que $r = rang(A) = rang(A^tA)$, se verifica que $\lambda_r > 0$, y $\lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_m = 0$.

Para i = 1, 2, ..., r, definimos σ_i y u_i por

$$\sigma_{i} = ||Av_{i}|| \text{ i} = 1,2,...,r$$

$$u_{i} = (1/\sigma_{i})Av_{i}$$

De estas definiciones deducimos:

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_{i} = \mathbf{\sigma}_{i}\mathbf{u}_{i}$$

$$\left\|\mathbf{u}_{i}\right\| = (1/\mathbf{\sigma}_{i}) \left\|\mathbf{A}\mathbf{v}_{i}\right\| = (1/\mathbf{\sigma}_{i}) \mathbf{\sigma}_{i} = 1$$

De la proposición 5 deducimos que como v_i es ortogonal a v_j , para $i\neq j$, Av_i y Av_j son también ortogonales, y por ello u_i y u_j son ortogonales. En definitiva, $(u_1,u_2,...,u_r)$ es un sistema ortonormal.

Observemos que
$$\sigma_i^2 = \lambda_i$$
, para $i = 1, 2, ..., r$

$$\sigma_{i}^{2} = ||Av_{i}||^{2} = (Av_{i})^{t}(Av_{i}) = v_{i}^{t}(A^{t}A)v_{i} = v_{i}^{t}\lambda_{i}v_{i} = \lambda_{i}v_{i}^{t}v_{i} = \lambda_{i}||v_{i}||^{2} = \lambda_{i}$$

Veamos la verificación de las relaciones (3)

$$\begin{split} A^t u_i &= A^t \ (1/\sigma_i) \ A v_i = \ (1/\sigma_i) A^t A v_i = \ (1/\sigma_i) \lambda_i v_v = \ (1/\sigma_i) \sigma_i^2 v_i = \sigma_i v_i, \Rightarrow \\ A^t u_i &= \sigma_i v_i, \quad i = 1, 2, ..., r \end{split}$$

Nos queda definir $u_{r+1},...,u_n$. Supongamos que r < n. Por el teorema 3, como $v_1,v_2,...,v_r$ son autovectores de A^tA , asociados a los autovalores no nulos, entonces $Av_1 = \sigma_1u_1$, $Av_2 = \sigma_2u_2,.....Av_r = \sigma_ru_r$ son autovectores de AA^t , y, en definitiva, $u_1,u_2,....,u_r$ son autovectores de AA^t . Puesto que $AA^t \in \mathcal{M}_n \times_n (R)$, y rang $(AA^t) = r$, entonces el subespacio nulo de AA^t tiene dimensión n-r. Sea $(u_{r+1},...,u_n)$ una base ortonormal de $N(AA^t)$. Observamos que $Aa^tu_j = 0 = 0u_j$, para j = r + n,...,n, es decir, son autovectores de AA^t asociados al autovalor cero. Además $u_{r+1},...,u_n$, son ortogonales a $u_1,u_2,....,u_r$, pues para $1 \le i \le r$ y para $r+1 \le j \le n$

$$u_i^t u_j = [(1/\sigma_i)AA^t u_i]^t u_j = (1/\sigma_i)u_i^t (AA^t)u_j = (1/\sigma_i)0 = 0$$

Así, $(u_1,u_2,...,u_m)$ es una base ortonormal de $I\!\!R^n$ formada por autovectores de AA^t Puesto que $N(AA^t) = N(A^t)$, como $AA^tu_j = 0$, para j = r+1,....,n, entonces $u_j \in N(AA^t) \Rightarrow u_j \in N(A^t) \Rightarrow A^tu_j = 0$, para j=r+1,....,n, lo que completa la demostración.

Los números $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_r$ se llaman valores singulares de A. Sea $K = \min(n, m)$. Si r < K, es usual añadir K-r valores singulares cero, i.e.

$$\sigma_{r+1} = \dots = \sigma_K = 0$$

Los vectores $v_1, v_2,, v_m$ se denominan vectores singulares por la derecha de A, y a los $u_1, u_2,, u_n$ se denominan vectores singulares por la izquierda de A. Los vectores singulares no están unívocamente determinados.

Este teorema nos permite dibujar el siguiente esquema, para cualquier matriz $A \in \mathcal{W}_{n \times m}(R)$:

$$\begin{array}{c}
v_{1} \xrightarrow{\sigma_{1}} u_{1} \\
v_{2} \xrightarrow{\sigma_{2}} u_{2} \\
\vdots \\
\vdots \\
v_{r} \xrightarrow{\sigma_{r}} u_{r} \\
\vdots \\
v_{r+1} \\
\vdots \\
v_{m}
\end{array}$$

y también:

$$\begin{array}{cccc}
A & A^{t} \\
\sigma_{1} & \sigma_{1} \\
v_{1} \rightarrow u_{1} \rightarrow v_{1} \\
\sigma_{2} & \sigma_{2} \\
v_{2} \rightarrow u_{2} \rightarrow v_{2} \\
- & & & \\
- & & & \\
\sigma_{r} & \sigma_{r} \\
v_{r} \rightarrow u_{r} \rightarrow v_{r} \\
v_{r+1} & & & \\
- & & & \\
v_{m} & & & \\
\end{array}$$

Observando el diagrama anterior obtenemos:

$$C(A) = \langle u_1, u_2, ..., u_r \rangle$$

 $N(A) = \langle v_{r+1}, ..., v_m \rangle$
 $C(A^t) = \langle v_1, v_2, ..., v_r \rangle$
 $N(A^t) = \langle u_{r+1}, ..., u_n \rangle$

De donde se deduce que:

$$C(A) = N(A^t)^{\perp}$$

$$C(A^t) = N(A)^-$$

Expresemos la descomposición en valores singulares como una descomposición matricial, tal como sigue:

<u>Teorema 7:</u> Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbf{R})$, con rango r. Entonces existen $U \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbf{R})$, $\sum \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbf{R})$ y $V \in \mathcal{M}_{m \times m}(\mathbf{R})$, tales que U y V son ortogonales y \sum es de la forma:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \sigma_2 & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ &$$

$$y A = U \sum V^{t}$$

En efecto:

Sean $v_1, v_2, ..., v_m$ y $u_1, u_2, ..., u_n$ los vectores singulares por la derecha y por la izquierda, respectivamente, y sean $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_r$ los valores singulares no nulos de A. sean las matrices $V = (v_1 \mid v_2 \mid \mid v_m) \in \mathcal{M}_{m \times m}(R)$,

 $U = (u_1 | u_2 | | u_n) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbf{R})$, estas matrices son ortogonales. Las ecuaciones

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_{i} - \begin{cases} \sigma_{i}\mathbf{u}_{i} & i = 1, 2, ..., r \\ 0 & i = r + 1, ... \mathbf{m} \end{cases}$$

expresadas matricialmente nos dan:

$$A(v_1 \mid v_2 \mid \dots, v_r \mid v_{r+1} \mid \dots \mid v_m) = (u_1 \mid u_2 \mid \dots, u_r \mid u_{r+1} \mid \dots \mid u_n) \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & & 0 \\ & & \cdot & & \\ & & & \sigma_r & \\ & 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

que es A V = U
$$\Sigma \Rightarrow$$
 AVV^t = U Σ V^t \Rightarrow A = U Σ V^t

En un sistema Ax = b incompatible, para encontrar el vector \mathbf{x} que minimice $\|\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b}\|\|_2$, cuando $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbf{R})$, con rango r menor o igual que el min $\{m,n\}$, y que, por tanto, sea una estimación de los parámetros de nuestros ajustes, dicho vector \mathbf{x} se evalúa mediante:

$$x = V \begin{pmatrix} \sum_{r}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^{t} b$$

donde Σ_r es la submatriz no nula de la matriz de valores singulares Σ_r en la descomposición $A=U\Sigma V^t$.

La matriz:

$$V\begin{pmatrix} \sum_{r}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^{t}$$

es, aquí, la matriz seudoinversa, que es independiente de las matrices ortogonales U y V.

5. 6. 1. ORTOGONALIZACIÓN Y RENUMERACIÓN DE MÍNIMOS CUADRADOS.

En los problemas de mínimos cuadrados las dificultades están en que:

 Si la matriz A está mal condicionada, para resolver A^tAx = A^tb, el condicionamiento de (A^tA) se habrá elevado al cuadrado con respecto al de A.

2. La dispersidad se puede romper al realizar A^tA.

Para evitar estas dificultades hemos realizado distintas transformaciones en las matrices de los sistemas.

De entre los distintos algoritmos que teóricamente pudieran ser válidos, el de Gram-Schmidt es numéricamente inestable, por lo que le hemos descartado, pues además, produce errores por cancelación en la sustracción de cantidades pequeñas.

No obstante, hemos ensayado distintas modificaciones de Gram-Schmidt, reorganizando los cálculos, y en todas ellas hemos encontrado una alta inestabilidad.

Nosotros hemos optado por aprovechar la bondad de transformaciones definidas por matrices ortogonales **Q** para las que:

1)
$$Q^{-1} - Q^{t}$$

$$2) \left\| Qx \right\| = \left\| x \right\|$$

Por lo que el problema de minimizar ||Ax-b|| es equivalente al de minimizar ||Q(Ax-b)|| y la matriz Q puede ser el producto de distintas y adecuadas transformaciones ortogonales, que reduzcan el problema inicial de mínimos cuadrados a otro de mejor comportamiento numérico.

Por este procedimiento se pretende transformar A mediante una matriz ortogonal Q, que produzca una matriz supertriangular R, esto es:

$$OA = R$$

Según definamos Q tendremos distintas transformaciones ortogonales.

Uno de estos métodos de "producción de ceros" es el de Householder, que se basa en la idea geométrica de la reflexión o simetría respecto de un subespacio vectorial.

En \mathbb{R}^2 , dado el subespacio vectorial determinado por la recta r, en el que \mathbf{u} es un vector unitario normal a r, la simetría axial respecto de r queda determinada por:

$$\mathbf{s} \colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$$

$$\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$$

$$\mathbf{a} \qquad \mathbf{r}$$

$$\mathbf{a} \qquad \mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$$

$$s(\mathbf{x}) + 2\mathbf{a} = \mathbf{x}$$

$$s(x) = x - 2a = x - 2 | a | u = x - 2 | x | \cos \varphi u = x - 2(u^{t}x)u = x - 2(uu^{t})x = (I - 2uu^{t})x$$

Así, la matriz $H = I - 2uu^t$ transforma el vector x en su simétrico respecto de r.

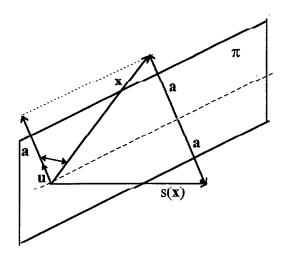
Si el vector dado ortogonal a r es un vector w no necesariamente unitario, se materializa obteniéndose:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}$$

que nos da

$$H = I - 2uu^{t} = I - 2\frac{w}{\|w\|} \frac{w^{t}}{\|w\|} = I - 2\frac{ww^{t}}{\|w\|^{2}}$$

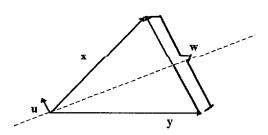
Esta idea se extiende a ${\bf R}^2$, considerando la simetría especular respecto de un plano π , cuyo vector unitario normal es ${\bf u}$



Al igual que en dos dimensiones:

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = (\mathbf{I} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathsf{t}})\mathbf{x}$$

En el campo numérico, el objetivo es encontrar el vector \mathbf{u} que determina la transformación de Householder mediante la cual un vector \mathbf{x} se transforma en otro \mathbf{y} , con la misma norma euclídea y que tenga nulas las componentes deseadas.



$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{w} \Rightarrow \mathbf{w} = \mathbf{x} - \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{u} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}$$

Aplicando este resultado a nuestro problema de mínimos cuadrados transformamos la matriz inicial $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$ (\mathbb{R}) en la matriz supertriangular que nos

interesa, mediante la composición sucesiva de transformación de Householder H_k que anulan las componentes k+1,...,n, para $k \in \{1,2,...,m\}$.

Otro tipo de transformación ortogonal de gran utilidad, especialmente en nuestras matrices dispersas, son las de Givens, que vienen determinadas por matrices de la forma:

$$G_{ij} \in \mathcal{W}_{n \times m} / G_{ij} = (g_{hk}^{ij}), \text{ con } i \neq j$$

$$g_{hk}^{ij} = \begin{cases} a, h = i \land k = i \\ a, h = j \land k = j \\ b, h = i \land k = j \\ -b, h = j \land k = i \\ 1, i \neq h = k \neq j \\ 0, \text{ resto} \end{cases}$$

con la condición $a^2 + b^2 = 1$.

Si elegimos ϕ tal que $a=\cos\phi$, $b=\sin\phi$, es evidente que la matriz de Givens producida representa un giro de ángulo ϕ en $I\!\!R^n$, con subespacio base la variedad lincal engendrada por el sistema $\{e_i,e_j\}$.

Nuestro objetivo es transformar la matriz $A \in \mathcal{W}_{n \times m}$ en la adecuada matriz supertriangular R, mediante la composición sucesiva de transformaciones de Givens.

Teóricamente, para matrices con estructura muy llena el coste computacional del algoritmo de Householder es más ventajoso que el de Givens.

No obstante, en matrices con entrada dispersa como las de nuestros problemas hemos probado la mejora de Givens sobre Householder. Para aumentar la velocidad de cálculo, y conseguir mayores ventajas, hemos usado transformaciones rápidas de Givens, con modificaciones basadas en reordenaciones de cálculos, así como supresión de otros cálculos innecesarios.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Una vez estudiados el problema de la reordenación y el de mínimos cuadrados, hemos procedido a conjuntar ambas metodologías, con el fin de conseguir explotar la dispersidad de nuestros problemas.

Así, en el sistema Ax=b, con $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$, si P es una matriz de permutación $n \times n$ y Q es otra matriz de permutación $m \times m$, que tal manera que P permuta las filas y Q las columnas de A tenemos que A^tA se transforma en:

$$(PAQ)^{t}(PAQ) = Q^{t}A^{t}(P^{t}P)AQ = Q^{t}(A^{t}A)Q,$$

esto es, la reordenación de columnas de A mediante Q equivale a una permutación simétrica Q sobre A^tA.

Por consiguiente, para resolver un problema de mínimos cuadrados con matriz dispersa proponemos el siguiente algoritmo:

Paso 1:

Reducción por transformaciones ortogonales.

<u>Paso 2:</u>

Determinar la matriz de permutación Q sobre las columnas de A, que produce permutación simétrica en A^tA.

<u>Paso 3:</u>

calcular
$$B = Q^t A^t A Q y Q^t A^t b$$
.

<u>Paso 4:</u>

Determinar la factorización de Cholesky L^tL de B

<u>Paso 5:</u>

Resolver sucesivamente: $L^{t}z = c$, Ly = z, x = Qy.

Para el paso 1 recomendamos, en nuestros problemas, transformadas rápidas de Givens. Para el paso 2, la técnica de reordenación por el algoritmo inverso de Cuthill-McKee, enraizado en un nodo inicial seudo-periférico, modificado por el algoritmo de Dijkstra. En caso de controlar el efecto fill-in, utilizaremos el algoritmo de grado mínimo.

En nuestras experiencias prácticas hemos utilizado el algoritmo inverso de Cuthill-McKee aunque también hemos realizado alguna por el grado mínimo. No obstante, queremos desarrollar algunas mejoras en este último algoritmo, vía utilización de los grafos cocientes y el particionamiento en bloques matriciales, mediante el control por grafos, tareas que son, respectivamente, objetos de otras tesis que actualmente se están desarrollando bajo la dirección del Dr. Almeida.

5.7. APLICACIÓN DEL ALGORITMO PROPUESTO

Ahora, incorporamos este último algoritmo a los de de ajuste de haces.

Con esta incorporación, principalmente, pretendemos resolver en un ordenador personal grandes sistemas lineales dispersos, mediante la técnica de almacenamiento analizada en este capítulo, pudiéndose así resolver sistemas mayores en este tipo de ordenadores. Nos dimos cuenta que otros programas almacenaban integramente la matriz, limitando el resolver matrices de mayor tamaño por incapacidad del ordenador.

Por lo que hemos visto hasta ahora, nuestro sistema crece a medida que tenemos mas fotogramas y se hace mucho más disperso cuantos más puntos queramos

determinar, por lo general siempre nos interesa resolver todo el bloque de fotogramas de una única vez, y por lo tanto, cualquier técnica que nos permita ampliar este orden nos va a beneficiar. Si no podemos resolver todo el grupo de fotogramas significa que tenemos que realizar más apoyo en el campo y esto en definitiva encarece y retrasa el proceso.

La matriz del sistema normal es la de la figura 5.1.2, en la que ya vimos la existencia de una banda horizontal y otra vertical de gran amplitud. Además a medida que consideramos mas puntos de control menor o fotogramas, estas bandas son más anchas y mas dispersas.

Algunos de los programas más relevantes que hemos diseñado los citamos a continuación por su interés referencial, sin pretender ser exaustivos en la descripción de todas las codificaciones realizadas:

- AJUSTE1.FOR: Programa que almacena la matriz de coeficientes y la de términos independientes, una vez efectuada la multiplicación por la traspuesta, en ficheros A.DAT, DIAG.DAT y B.DAT. Previamente se ha ejecutado el DLT.FOR, para poder calcular la matriz.
- ESTADY.FOR: Programa que almacena en los ficheros ADYACI.DAT y
 XADJ.DAT, los vectores que nos indican donde están los elementos no nulos de la
 matriz.
- ORDENA.FOR: Programa que realiza el algoritmo inverso de Cuthill-McKee para reordenar la matriz y reducir al máximo su envoltura. Esta información la almacena en los ficheros INVP.DAT y PERM.DAT.

• XENVOLT.FOR: Realiza el cambio de la matriz ya permutada, la almacena no como matriz sino como vectores de envoltura, diagonal y términos independientes en los ficheros: ENV.DAT, PDIAG.DAT y PB.DAT. Además del fichero XENV.DAT, que desarrolla el de la envoltura.

Como vamos a resolver sistemas mediante mínimos cuadrados contamos con matrices simétricas, para las que la ocupación de memoria en el ordenador queda reducida a la mitad.

En uno de nuestros ejemplos, el vector ADYACI tiene una longitud de 840, cuando antes llegaba a tener el doble de longitud. Por otra parte, de una envoltura con 79 hemos pasado a sólo 76, reducción que será más notable cuanto más ancha sea las bandas horizontal y vertical de la matriz.

Con los métodos directos obtenemos la solución exacta del sistema de ecuaciones, salvo errores de redondeo, frente a los iterativos que para resolverlo con una tolerancia prefijada requiere la realización de muchas operaciones, debido a la lentitud de la convergencia. Por todo ello, aquí, hemos optado por el empleo de métodos directos.

Por otro lado, las matrices de nuestros sistemas poseen un mal condicionamiento, que, en cierta medida podemos controlar mediante la factorización de Cholesky.

Para la mayoría de los sistemas con matrices dispersas una reordenación incontrolada de la matriz puede producir enormes rellenos de huecos(efecto fill-in), y, por lo tanto, no se origina un ahorro en la ejecución y en la memoria de la computadora. Por consiguiente, hemos explotado la dispersión de la matriz buscando la reordenación más adecuada.

Para la resolución directa del sistema por la descomposición de Cholesky, destacamos los siguientes programas:

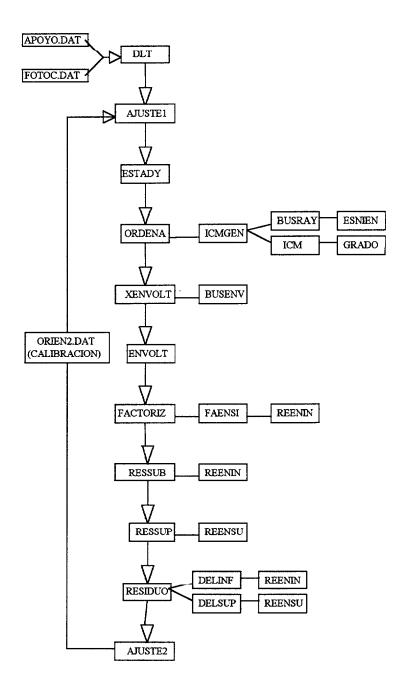
- FACTORIZ.FOR: Programa que descompone la matriz de coeficientes en las dos triangulares, almacenándolas en el fichero LENV.DAT.
- RESSUB.FOR: Programa que resuelve el sistema triangular superior almacenando la solución en el fichero Y.DAT.
- RESSUP.FOR: Programa que resuelve el sistema inferior, y por lo tanto, la solución final, almacenándolo en el fichero X.DAT.

Como nuestra solución es un incremento a la solución aproximada, debemos ejecutar otra vez este ciclo, para lo cual hemos elaborado el programa:

AJUSTE2.FOR: Programa que incrementa los valores del fichero ORIEN1.DAT y
las coordenadas aproximadas de APOYO.DAT de los puntos de control menor.
 Establece un control del incremento obtenido para cortar las iteraciones.

Evidentemente, la mejora de resultados sería más notable con la adaptación de nuestro algoritmo para resolver problemas de fotogrametría aérea, pues podremos resolver mayores sistemas sin tener que partir la zona cubierta por los fotogramas en distintos bloques.

Como resumen, mostramos el siguiente diagrama:



CAPITULO 6: APLICACIONES.

6.1. INTRODUCCIÓN.

Si bien hemos aplicado todos los programas a un test de una estación de Viena, para comprobar que los resultados son fiables, también lo hemos hecho a dos fachadas de edificios de nuestra ciudad.

6.2. TEST DE UNA ESTACIÓN EN VIENA.

Para fomentar la utilización de la fotogrametría a las aplicaciones arquitectónicas se creó la CIPA (Comité Internacional de la Fotogrametría Arquitectónica), uno de los trece comités especializados del Consejo Internacional de Monumentos y Lugares Históricos (ICOMOS) y de la Sociedad Internacional de Fotogrametría y Teledetección (ISPRS). Este organismo tiene diseñado un test para aplicar programas de ajuste desarrollados por casas comerciales y Universidades, con el fin de que se pueda acercar la fotogrametría a la arquitectura de una forma sencilla y económica.

El test está formado por once fotogramas de la estación de metro de la Karlsplatz de Viena, obra del arquitecto Otto Wargner. La cámara utilizada fue una Rolleiflex 6006 metric no. 311 680 023, con una distancia focal de 80.17 mm.

6.2.1. DATOS TERRESTRES Y COORDENADAS IMAGEN.

Los datos del apoyo terrestre y de las lecturas en el comparador son los siguientes:

	NUMERO	DE PTOS APO	OYO 12		
X	Y	Z	x	y	
99.657	74.709	11.361	952	533	
96.925	73.362	11.371	8.432	593	
97.247	73.522	12.289	7.439	2.901	
99.976	74.866	12.278	-1.754	2.691	
105.319	78.597	12.426	-19.333	3.212	
100.443	76.229	12.435	-6.740	3.619	
104.250	78.089	15.375	-16.103	12.479	
102.758	77.686	17.410	-12.885	19.628	
100.468	65.820	11.372	21.099	-2.937	
100.466	65.818	12.001	21.169	-1.105	
96.734	72.772	11.366	10.747	-0.794	
98.769	68.646	12.313	18.075	0.861	
	FOTOGR	AMA	2		
	NUMERO	DE PTOS APO	YO 7		
X	Y	Z	x	у	
100.473	65.703	9.241	20.018	-0.619	
100.468	65.820	11.372	19.648	6.597	
100.466	65.818	12.001	19.655	8.736	
99.448	67.953	11.367	11.923	6.709	
96.734	72.772	11.366	-7.039	7.092	
96.910	72.408	12.301	-5.570	10.454	
98.769	68.646	12.313	9.132	10.152	
	FOTOGRA	AMA	3	20.102	
	NUMERO DE PTOS APOYO 7				
X	Y	Z	X	у	
100.473	65.703	9.241	11.202	-1.463	
100.468	65.820	11.372	10.910	6.007	
100.466	65.818	12.001	10.957	8.203	
99.448	67.953	11.367	2.673	6.137	

06.504	Teo eeo	111.066	17.066	T (55(
96.734	72.772	11.366	-17.066	6.576
96.910	72.408	12.301	-15.547	9.920
98.769	68.646	12.313	451	9.647
	FOTOGRA	MA.	4	
	NUMERO	DE PTOS APO	YO 19	
X	Y	Z	x	У
104.969	67.782	9.227	0.245	-4.816
104.936	67.806	10.980	0.218	0.722
100.916	65.817	9.239	-13.202	-4.831
100.795	65.795	11.365	-13.484	2.536
109.187	69.834	9.236	11.918	-4.733
113.555	71.949	9.248	22.028	-4.640
113.433	71.948	11.374	21.745	0. 989
113.166	71.822	12.017	21. 199	2.727
100.950	65.878	12.005	-12.874	4.708
109.241	69.913	12.285	12.107	4.037
104.755	67.729	12.420	-0.262	5.263
105.411	73.893	15.914	0.386	12.622
100.473	65.703	9.241	-14.790	-4.821
100.468	65.820	11.372	-14.619	2.582
100.466	65.818	12.001	-14.595	4.754
99.448	67.953	11.367	-17.174	2.235
96.734	72.772	11.366	-22.753	1.668
96.910	72.408	12.301	-22.416	4.253
98.769	68.646	12.313	-18.917	5.100
	FOTOGR	AMA	5	
	NUMERO DE PTOS APOYO 6			
X	Y	Z	х	у
110.319	79.514	9.228	22.348	-8.525
112.602	74.016	11.363	7.266	0.501
112.530	74.886	11.368	10.601	0.337
110.328	79.404	11.355	22.098	-0.798
110.474	79.099	12.301	21.454	2.717
105.411	73.893	15.914	-1.609	13.587
<u> </u>	FOTOGRA	AMA	6	
	L	W		j

X 113.370 72	Y	Z	T		
113.370 72		~	x		у
1	2.540	9.245	-17.720		-8.425
112.607 74	4.802	9.226	-5.363		-8.469
110.319 79	9.514	9.228	21.803	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	-8.046
113.513 72	2.152	11.381	-19.843		2.667
112.602 74	4.016	11.363	-9.062		2.646
112.530 74	4.886	11.368	-4.871		2.825
110.328 79	9.404	11.355	20.980		2.905
110.474 79	9.099	12.301	19.148	······	7.726
113.507 72	2.168	12.015	-19.743		5.935
F	FOTOGRAM	A		7	
1	NUMERO DE	E PTOS APOYO)	9	
X	Y	Z	х		У
113.370 72	2.540	9.245	-18.875		-11.045
112.607 74	4.802	9.226	-8.218		-11.253
110.319 79	9.514	9.228	18.775		-11.198
113.513 72	2.152	11.381	-20.582		-0.844
112.602 74	4.016	11.363	-11.127		-0.708
112.530 74	4.886	11.368	-7.680		-0.487
110.328 79	9.404	11.355	17.909		0.025
110.474 79	9.099	12.301	15.962		4.895
113.507 72	2.168	12.015	-20.472		2.155
F	OTOGRAMA	A		8	
N	NUMERO DE	PTOS APOYO		9	
X	Y	Z	х		у
105.606 78	3.765	9.691	7.656		-4.441
107.089 78	3.348	9.226	2.116		-6.063
109.823 79	9.676	9.223	-6.231		-6.302
109.735 79).592	11.353	-5.829		2.189
107.004 78	3.270	11.348	2.408		1.580
104.585 78	3.082	11.350	9.935		1.301
110.328 79	0.404	11.355	-8.304		2.247
110.474 79	0.099	12.301	-9.076		5.893
110.319 79	0.514	9.228	-8.32		-6.247

	FOTOGRA	AMA	9	
	NUMERO	DE PTOS APO	YO 14	
X	Y	Z	x	у
99.544	74.685	9.237	19.200	-8.165
100.143	76.111	9.667	16.812	-6.945
105.606	78.765	9.691	-3.888	-7.035
107.089	78.348	9.226	-8.236	-8.503
109.823	79.676	9.223	-18.934	-8.605
107.004	78.270	11.348	-18.458	-1.118
104.585	78.082	11.350	-7.830	-1.184
109.735	79.592	11.353	0.326	-1.130
101.303	76.493	11.354	12.636	-1.170
99.657	74.709	11.361	18.775	-1.252
99.976	74.866	12.278	17.647	1.750
100.443	76.229	12.435	15.665	2.523
104.250	78.089	15.375	1.440	12.950
102.758	77.686	17.410	6.797	19.989
	FOTOGRA	AMA	10	
	NUMERO	DE PTOS APO	YO 16	
X	Y	Z	х	у
99.544	74.685	9.237	18.024	-8.227
100.143	76.111	9.667	14.528	-6.977
105.606	78.765	9.691	-7.336	-7.201
107.089	78.348	9.226	-10. 845	-8.667
109.823	79.676	9.223	-21.132	-8.796
109.735	79.592	11.353	-20.756	-1.534
107.004	78.270	11.348	-10.533	-1.397
104.585	78.082	11.350	-3.020	-1.197
101.303	76.493	11.354	9.983	-0.980
99.657	74.709	11.361	17.459	-0.905
97.247	73.522	12.289	26.552	2.420
99.976	74.866	12.278	16.158	2.220
105.319	78.597	12.426	-6.256	2.602
100.443	76.229	12.435	13.149	2.949
104.250	78.089	15.375	-2.183	13.124

102.758	77.686	17.410	3.101	20.671
	FOTOGRA	AMA	11	
	NUMERO	DE PTOS APO	YO 15	
X	Y	Z	x	у
96.807	73.351	9.242	21.941	-8.209
99.544	74.685	9.237	11.796	-8.396
105.606	78.765	9.691	-13.477	-7.363
107.089	78.348	9.226	-17.066	-8.838
107.004	78.270	11.348	-16.684	-1.474
104.585	78.082	11.350	-9.068	-1.328
101.303	76.493	11.354	3.941	-1.187
99.657	71.709	11.361	11.295	-1.156
96.925	73.362	11.371	21.400	-1.027
97.247	73.522	12.289	20.154	2.056
99.976	74.866	12.278	10.041	1.952
105.319	78.597	12.426	-12.310	2.514
100.443	76.229	12.435	7.095	2.702
104.250	78.089	15.375	-8.092	13.059
102.758	77.686	17.410	-2.731	20.468

Tabla 6.1

6.2.2. RESULTADOS Y PRECISIONES.

Aplicado el ajuste al problema anterior obtenemos una precisión en el apoyo del orden de 10⁻³, y los resultados de las orientaciones son los ya mencionados en el apartado 4.2.2 del capítulo 4.

6.3. SEMINARIO DE TAFIRA BAJA.

Hemos aplicado el ajuste a cinco fotogramas realizados con la cámara Lubitel Universal de formato de 6x6 cm, a una fachada de uno de los Seminarios situados en el Campus Universitario de Tafira Baja. Este edificio tiene 60 ventanas rectangulares cuyas esquinas están apoyadas topograficamente, lo que supone 240 puntos de control terrestre.

El trabajo topográfico de las ventanas se realizó mediante intersecciones directas con una estación total Set-3 de la casa Sokkisha.

Así, la primera foto cuenta con 88 puntos de apoyo, la segunda con 118, la tercera con 129, la cuarta con 194 y la quinta con 153; de las que se desprenden 682 puntos que proporcionan un sistema de 1364 ecuaciones con 37 incógnitas.

Al aplicar el ajuste hemos obtenido una convergencia en 30 iteraciones.

6.3.1. DATOS TERRESTRES Y COORDENADAS IMAGEN.

La situación de los puntos de apoyo en la fachada está croquizada en la figura 6.3.1.1. Las cuatro hileras de ventanas las hemos considerado como ocho filas de una matriz: una para la parte superior y otra para la inferior de cada hilera, y, analogamente con las columnas. Todo ello nos forma una malla de 240 puntos de apoyo.

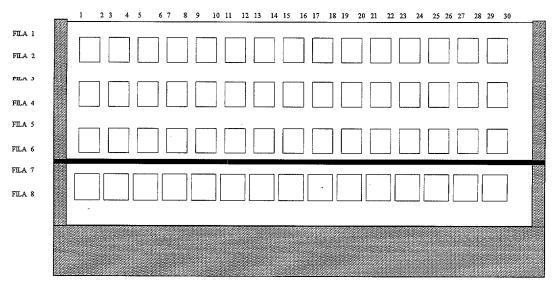


Figura 6.3.1.1. Croquis del seminario

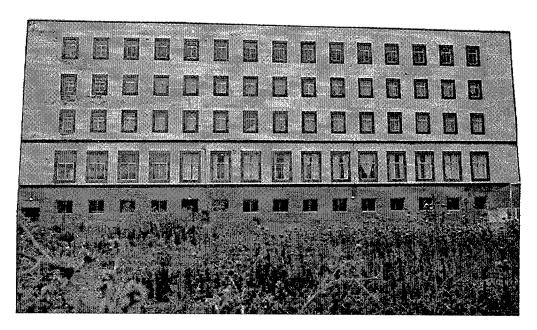


Figura 6.3.1.2. Foto de la fachada seminario.

Las coordenadas terrestres de las ventanas son las siguientes:

1 97.7481 50.1102 118.8030 2 98.6177 50.1343 118.8086 3 100.5497 50.1053 118.7943 4 101.4210 50.1389 118.7972 5 103.3807 50.1180 118.8135 6 104.2539 50.1472 118.8151 7 106.2117 50.1185 118.8066 8 107.0844 50.1506 118.8042 9 109.0219 50.1245 118.8073 10 109.9079 50.1178 118.8028 11 111.8545 50.1190 118.8034 12 112.7404 50.1252 118.8040 13 114.6711 50.1311 118.8035 14 115.5567 50.1291 118.8018 15 117.5016 50.1381 118.8030 16 118.3880 50.1375 118.7979 17 120.3187 50.1492 118.8053 18 121.2037 50.1453			FILA 1	
3 100.5497 50.1053 118.7943 4 101.4210 50.1389 118.7972 5 103.3807 50.1180 118.8135 6 104.2539 50.1472 118.8151 7 106.2117 50.1185 118.8066 8 107.0844 50.1506 118.8042 9 109.0219 50.1245 118.8073 10 109.9079 50.1178 118.8028 11 111.8545 50.1190 118.8034 12 112.7404 50.1252 118.8040 13 114.6711 50.1311 118.8035 14 115.5567 50.1291 118.8018 15 117.5016 50.1381 118.8030 16 118.3880 50.1375 118.7979 17 120.3187 50.1492 118.8053 18 121.2037 50.1453 118.8039 19 123.1270 50.1413 118.7926 20 124.0134 50.1381 118.7942 21 125.9527 50.1425 118.8066	1	97.7481	50.1102	118.8030
4 101.4210 50.1389 118.7972 5 103.3807 50.1180 118.8135 6 104.2539 50.1472 118.8151 7 106.2117 50.1185 118.8066 8 107.0844 50.1506 118.8042 9 109.0219 50.1245 118.8073 10 109.9079 50.1178 118.8033 11 111.8545 50.1190 118.8034 12 112.7404 50.1252 118.8040 13 114.6711 50.1311 118.8035 14 115.5567 50.1291 118.8018 15 117.5016 50.1381 118.8030 16 118.3880 50.1375 118.7979 17 120.3187 50.1492 118.8053 18 121.2037 50.1453 118.8053 19 123.1270 50.1413 118.7942 20 124.0134 50.1381 118.7942 21 125.9527 50.1425 118.7942 22 126.8403 50.1500 118.8066 <td>2</td> <td>98.6177</td> <td>50.1343</td> <td>118.8086</td>	2	98.6177	50.1343	118.8086
5 103,3807 50,1180 118,8135 6 104,2539 50,1472 118,8151 7 106,2117 50,1185 118,8066 8 107,0844 50,1506 118,8042 9 109,0219 50,1245 118,8073 10 109,9079 30,1178 118,8034 11 111,8545 50,1190 118,8034 12 112,7404 50,1252 118,8040 13 114,6711 50,1311 118,8035 14 115,5567 50,1291 118,8018 15 117,5016 50,1381 118,8030 16 118,3880 50,1375 118,7979 17 120,3187 50,1492 118,8053 18 121,2037 50,1453 118,8053 19 123,1270 50,1413 118,7926 20 124,0134 50,1381 118,7942 21 125,9527 50,1425 118,7989 22 126,8403 50,1500 118,8066 24 129,6498 50,1503 118,8109 <td>3</td> <td>100.5497</td> <td>50.1053</td> <td>118.7943</td>	3	100.5497	50.1053	118.7943
6 104.2539 50.1472 118.8151 7 106.2117 50.1185 118.8066 8 107.0844 50.1506 118.8042 9 109.0219 50.1245 118.8073 10 109.9079 30.1178 118.8028 11 111.8545 50.1190 118.8034 12 112.7404 50.1252 118.8040 13 114.6711 50.1311 118.8035 14 115.5567 50.1291 118.8018 15 117.5016 50.1381 118.8030 16 118.3880 50.1375 118.7979 17 120.3187 50.1492 118.8053 18 121.2037 50.1453 118.8039 19 123.1270 50.1413 118.7926 20 124.0134 50.1381 118.7942 21 125.9527 50.1425 118.7989 22 126.8403 50.1500 118.8050 23 128.7643 50.1475 118.8066 24 129.6498 50.1503 118.8109 </td <td>4</td> <td>101.4210</td> <td>50.1389</td> <td>118.7972</td>	4	101.4210	50.1389	118.7972
7 106.2117 50.1185 118.8066 8 107.0844 50.1506 118.8042 9 109.0219 50.1245 118.8073 10 109.9079 50.1178 118.8028 11 111.8545 50.1190 118.8034 12 112.7404 50.1252 118.8040 13 114.6711 50.1311 118.8035 14 115.5567 50.1291 118.8018 15 117.5016 50.1381 118.8030 16 118.3880 50.1375 118.7979 17 120.3187 50.1492 118.8053 18 121.2037 50.1453 118.8039 19 123.1270 50.1413 118.7926 20 124.0134 50.1381 118.7942 21 125.9527 50.1425 118.7989 22 126.8403 50.1500 118.8050 23 128.7643 50.1475 118.8066 24 129.6498 50.1503 118.8149 25 131.6057 50.1496 118.814 </td <td>5</td> <td>103.3807</td> <td>50.1180</td> <td>118.8135</td>	5	103.3807	50.1180	118.8135
8 107.0844 50.1506 118.8042 9 109.0219 50.1245 118.8073 10 109.9079 50.1178 118.8034 11 111.8545 50.1190 118.8034 12 112.7404 50.1252 118.8040 13 114.6711 50.1311 118.8035 14 115.5567 50.1291 118.8018 15 117.5016 50.1381 118.8030 16 118.3880 50.1375 118.7979 17 120.3187 50.1492 118.8053 18 121.2037 50.1453 118.8039 19 123.1270 50.1413 118.7926 20 124.0134 50.1381 118.7942 21 125.9527 50.1425 118.7989 22 126.8403 50.1500 118.8050 23 128.7643 50.1475 118.8066 24 129.6498 50.1503 118.8109 25 131.6057 50.1496 118.814 26 132.4922 50.1613 118.8130<	6	104.2539	50.1472	118.8151
9 109,0219 50,1245 118,8073 10 109,9079 50,1178 118,8028 11 111,8545 50,1190 118,8034 12 112,7404 50,1252 118,8040 13 114,6711 50,1311 118,8035 14 115,5567 50,1291 118,8018 15 117,5016 50,1381 118,8030 16 118,3880 50,1375 118,7979 17 120,3187 50,1492 118,8053 18 121,2037 50,1453 118,8039 19 123,1270 50,1413 118,7926 20 124,0134 50,1381 118,7942 21 125,9527 50,1425 118,7989 22 126,8403 50,1500 118,8050 23 128,7643 50,1475 118,8066 24 129,6498 50,1503 118,8109 25 131,6057 50,1496 118,8114 26 132,4922 50,1613 118,8144 28 135,3102 102 50,1554 <td>7</td> <td>106.2117</td> <td>50.1185</td> <td>118.8066</td>	7	106.2117	50.1185	118.8066
10 109,9079 50.1178 118.8028 11 111.8545 50.1190 118.8034 12 112,7404 50.1252 118.8040 13 114.6711 50.1311 118.8035 14 115,5567 50.1291 118.8018 15 117,5016 50.1381 118.8030 16 118.3880 50.1375 118.7979 17 120.3187 50.1492 118.8053 18 121.2037 50.1453 118.8039 19 123.1270 50.1413 118.7926 20 124.0134 50.1381 118.7942 21 125.9527 50.1425 118.7989 22 126.8403 50.1500 118.8050 23 128.7643 50.1475 118.8066 24 129.6498 50.1503 118.8109 25 131.6057 50.1496 118.8114 26 132.4922 50.1613 118.8130 27 134.4243 50.1538 118.8144 28 135.3102 102 50.1554 <td>8</td> <td>107.0844</td> <td>50.1506</td> <td>118.8042</td>	8	107.0844	50.1506	118.8042
11 111.8545 50.1190 118.8034 12 112.7404 50.1252 118.8040 13 114.6711 50.1311 118.8035 14 115.5567 50.1291 118.8018 15 117.5016 50.1381 118.8030 16 118.3880 50.1375 118.7979 17 120.3187 50.1492 118.8053 18 121.2037 50.1453 118.8039 19 123.1270 50.1413 118.7926 20 124.0134 50.1381 118.7942 21 125.9527 50.1425 118.7989 22 126.8403 50.1500 118.8050 23 128.7643 50.1475 118.8066 24 129.6498 50.1503 118.8109 25 131.6057 50.1496 118.8114 26 132.4922 50.1613 118.8130 27 134.4243 50.1538 118.8144 28 135.3102 102 50.1554 29 137.2404 50.1473 118.8149 <td>9</td> <td>109.0219</td> <td>50.1245</td> <td>118.8073</td>	9	109.0219	50.1245	118.8073
12 112.7404 50.1252 118.8040 13 114.6711 50.1311 118.8035 14 115.5567 50.1291 118.8018 15 117.5016 50.1381 118.8030 16 118.3880 50.1375 118.7979 17 120.3187 50.1492 118.8053 18 121.2037 50.1453 118.8039 19 123.1270 50.1413 118.7926 20 124.0134 50.1381 118.7942 21 125.9527 50.1425 118.7989 22 126.8403 50.1500 118.8050 23 128.7643 50.1475 118.8066 24 129.6498 50.1503 118.8109 25 131.6057 50.1496 118.8114 26 132.4922 50.1613 118.8130 27 134.4243 50.1538 118.8144 28 135.3102 102 50.1554 29 137.2404 50.1473 118.8149	10	109.9079	50.1178	118.8028
13 114.6711 50.1311 118.8035 14 115.5567 50.1291 118.8018 15 117.5016 50.1381 118.8030 16 118.3880 50.1375 118.7979 17 120.3187 50.1492 118.8053 18 121.2037 50.1453 118.8039 19 123.1270 50.1413 118.7926 20 124.0134 50.1381 118.7942 21 125.9527 50.1425 118.7989 22 126.8403 50.1500 118.8050 23 128.7643 50.1475 118.8066 24 129.6498 50.1503 118.8109 25 131.6057 50.1496 118.8114 26 132.4922 50.1613 118.8130 27 134.4243 50.1538 118.8144 28 135.3102 102 50.1554 29 137.2404 50.1473 118.8149	11	111.8545	50.1190	118.8034
14 115.5567 50.1291 118.8018 15 117.5016 50.1381 118.8030 16 118.3880 50.1375 118.7979 17 120.3187 50.1492 118.8053 18 121.2037 50.1453 118.8039 19 123.1270 50.1413 118.7926 20 124.0134 50.1381 118.7942 21 125.9527 50.1425 118.7989 22 126.8403 50.1500 118.8050 23 128.7643 50.1475 118.8066 24 129.6498 50.1503 118.8109 25 131.6057 50.1496 118.8114 26 132.4922 50.1613 118.8130 27 134.4243 50.1538 118.8144 28 135.3102 102 50.1554 29 137.2404 50.1473 118.8149	12	112.7404	50.1252	118.8040
15 117.5016 50.1381 118.8030 16 118.3880 50.1375 118.7979 17 120.3187 50.1492 118.8053 18 121.2037 50.1453 118.8039 19 123.1270 50.1413 118.7926 20 124.0134 50.1381 118.7942 21 125.9527 50.1425 118.7989 22 126.8403 50.1500 118.8050 23 128.7643 50.1475 118.8066 24 129.6498 50.1503 118.8109 25 131.6057 50.1496 118.8114 26 132.4922 50.1613 118.8130 27 134.4243 50.1538 118.8144 28 135.3102 102 50.1554 29 137.2404 50.1473 118.8149	13	114.6711	50.1311	118.8035
16 118.3880 50.1375 118.7979 17 120.3187 50.1492 118.8053 18 121.2037 50.1453 118.8039 19 123.1270 50.1413 118.7926 20 124.0134 50.1381 118.7942 21 125.9527 50.1425 118.7989 22 126.8403 50.1500 118.8050 23 128.7643 50.1475 118.8066 24 129.6498 50.1503 118.8109 25 131.6057 50.1496 118.8114 26 132.4922 50.1613 118.8130 27 134.4243 50.1538 118.8144 28 135.3102 102 50.1554 29 137.2404 50.1473 118.8149	14	115.5567	50.1291	118.8018
17 120.3187 50.1492 118.8053 18 121.2037 50.1453 118.8039 19 123.1270 50.1413 118.7926 20 124.0134 50.1381 118.7942 21 125.9527 50.1425 118.7989 22 126.8403 50.1500 118.8050 23 128.7643 50.1475 118.8066 24 129.6498 50.1503 118.8109 25 131.6057 50.1496 118.8114 26 132.4922 50.1613 118.8130 27 134.4243 50.1538 118.8144 28 135.3102 102 50.1554 29 137.2404 50.1473 118.8149	15	117.5016	50.1381	118.8030
18 121.2037 50.1453 118.8039 19 123.1270 50.1413 118.7926 20 124.0134 50.1381 118.7942 21 125.9527 50.1425 118.7989 22 126.8403 50.1500 118.8050 23 128.7643 50.1475 118.8066 24 129.6498 50.1503 118.8109 25 131.6057 50.1496 118.8114 26 132.4922 50.1613 118.8130 27 134.4243 50.1538 118.8144 28 135.3102 102 50.1554 29 137.2404 50.1473 118.8149	16	118.3880	50.1375	118.7979
19 123.1270 50.1413 118.7926 20 124.0134 50.1381 118.7942 21 125.9527 50.1425 118.7989 22 126.8403 50.1500 118.8050 23 128.7643 50.1475 118.8066 24 129.6498 50.1503 118.8109 25 131.6057 50.1496 118.8114 26 132.4922 50.1613 118.8130 27 134.4243 50.1538 118.8144 28 135.3102 102 50.1554 29 137.2404 50.1473 118.8149	17	120,3187	50.1492	118.8053
20 124.0134 50.1381 118.7942 21 125.9527 50.1425 118.7989 22 126.8403 50.1500 118.8050 23 128.7643 50.1475 118.8066 24 129.6498 50.1503 118.8109 25 131.6057 50.1496 118.8114 26 132.4922 50.1613 118.8130 27 134.4243 50.1538 118.8144 28 135.3102 102 50.1554 29 137.2404 50.1473 118.8149	18	121,2037	50.1453	118.8039
21 125.9527 50.1425 118.7989 22 126.8403 50.1500 118.8050 23 128.7643 50.1475 118.8066 24 129.6498 50.1503 118.8109 25 131.6057 50.1496 118.8114 26 132.4922 50.1613 118.8130 27 134.4243 50.1538 118.8144 28 135.3102 102 50.1554 29 137.2404 50.1473 118.8149	19	123.1270	50.1413	118.7926
22 126.8403 50.1500 118.8050 23 128.7643 50.1475 118.8066 24 129.6498 50.1503 118.8109 25 131.6057 50.1496 118.8114 26 132.4922 50.1613 118.8130 27 134.4243 50.1538 118.8144 28 135.3102 102 50.1554 29 137.2404 50.1473 118.8149	20	124.0134	50.1381	118.7942
23 128.7643 50.1475 118.8066 24 129.6498 50.1503 118.8109 25 131.6057 50.1496 118.8114 26 132.4922 50.1613 118.8130 27 134.4243 50.1538 118.8144 28 135.3102 102 50.1554 29 137.2404 50.1473 118.8149	21	125,9527	50.1425	118.7989
24 129.6498 50.1503 118.8109 25 131.6057 50.1496 118.8114 26 132.4922 50.1613 118.8130 27 134.4243 50.1538 118.8144 28 135.3102 102 50.1554 29 137.2404 50.1473 118.8149	22	126.8403	50.1500	118.8050
25 131.6057 50.1496 118.8114 26 132.4922 50.1613 118.8130 27 134.4243 50.1538 118.8144 28 135.3102 102 50.1554 29 137.2404 50.1473 118.8149	23	128.7643	50.1475	118.8066
26 132.4922 50.1613 118.8130 27 134.4243 50.1538 118.8144 28 135.3102 102 50.1554 29 137.2404 50.1473 118.8149	24	129.6498	50.1503	118.8109
27 134.4243 50.1538 118.8144 28 135.3102 102 50.1554 29 137.2404 50.1473 118.8149	25	131.6057	50.1496	118.8114
28 135.3102 102 50.1554 29 137.2404 50.1473 118.8149	26	132.4922	50.1613	118.8130
29 137.2404 50.1473 118.8149	27	134.4243	50.1538	118.8144
	28	135,3102	102	50.1554
30 138.1260 50.1504 118.8195	29	137.2404	50.1473	118.8149
	30	138.1260	50.1504	118.8195

1 97.7483 50.1094 118.3717 2 98.6183 50.1331 118.3745 3 100.5509 50.1019 118.3604 4 101.4210 50.1387 118.3624 5 103.3743 50.1348 118.3867 6 104.2513 50.1469 118.3811 7 106.2075 50.1127 118.3707 8 107.0792 50.1508 118.3689 9 109.0201 50.1181 118.3689 9 109.0201 50.1181 118.3667 11 111.8534 50.1198 118.3683 12 112.7403 50.1237 118.3680 13 114.6702 50.1230 118.3659 14 115.5570 50.1230 118.3667 15 117.4998 50.1305 118.3661 17 120.3186 50.1335 118.3660 18 121.2054 50.1377 118.3680 18 121.2054 50.1329		10.000 At 3 Nove 1	FILA 2	
3 100.5509 50.1019 118.3604 4 101.4210 50.1387 118.3624 5 103.3743 50.1348 118.3867 6 104.2513 50.1469 118.3811 7 106.2075 50.1127 118.3707 8 107.0792 50.1508 118.3689 9 109.0201 50.1181 118.3714 10 109.9052 50.1167 118.3667 11 111.8534 50.1198 118.3683 12 112.7403 50.1237 118.3680 13 114.6702 50.1230 118.3659 14 115.5570 50.1236 118.3662 15 117.4998 50.1305 118.3662 16 118.3853 50.1270 118.3601 17 120.3186 50.1335 118.3680 18 121.2054 50.1377 118.3652 19 123.1292 50.1329 118.3569 20 124.0144 50.1290	1	97.7483	50.1094	118.3717
4 101.4210 50.1387 118.3624 5 103.3743 50.1348 118.3867 6 104.2513 50.1469 118.3811 7 106.2075 50.1127 118.3707 8 107.0792 50.1508 118.3689 9 109.0201 50.1181 118.3689 9 109.0201 50.1181 118.3667 10 109.9052 50.1167 118.3667 11 111.8534 50.1198 118.3683 12 112.7403 50.1237 118.3680 13 114.6702 50.1230 118.3659 14 115.5570 50.1236 118.3667 15 117.4998 50.1305 118.3662 16 118.3853 50.1270 118.3601 17 120.3186 50.1335 118.3680 18 121.2054 50.1377 118.3652 19 123.1292 50.1329 118.3559 20 124.0144 50.1290 118.3569 21 125.9540 50.1364 118.3643	2	98.6183	50.1331	118.3745
5 103.3743 50.1348 118.3867 6 104.2513 50.1469 118.3811 7 106.2075 50.1127 118.3707 8 107.0792 50.1508 118.3689 9 109.0201 50.1181 118.3689 9 109.0252 50.1167 118.3667 11 111.8534 50.1198 118.3683 12 112.7403 50.1237 118.3680 13 114.6702 50.1230 118.3659 14 115.5570 50.1236 118.3667 15 117.4998 50.1305 118.3662 16 118.3853 50.1270 118.3601 17 120.3186 50.1335 118.3680 18 121.2054 50.1377 118.3652 19 123.1292 50.1329 118.3559 20 124.0144 50.1290 118.3569 21 125.9540 50.1364 118.3643 22 126.8395 50.1366 <th>3</th> <th>100.5509</th> <th>50.1019</th> <th>118.3604</th>	3	100.5509	50.1019	118.3604
6 104.2513 50.1469 118.3811 7 106.2075 50.1127 118.3707 8 107.0792 50.1508 118.3689 9 109.0201 50.1181 118.3689 9 109.9052 50.1167 118.3667 11 111.8534 50.1198 118.3683 12 112.7403 50.1237 118.3680 13 114.6702 50.1230 118.3659 14 115.5570 50.1236 118.3667 15 117.4998 50.1305 118.3662 16 118.3853 50.1270 118.3601 17 120.3186 50.1335 118.3680 18 121.2054 50.1377 118.3652 19 123.1292 50.1329 118.3559 20 124.0144 50.1290 118.3643 22 126.8395 50.1364 118.3643 22 126.8395 50.1386 118.369 23 128.7657 50.1467 118.3746 25 131.6059 50.1430 118.3750 <th>4</th> <th>101.4210</th> <th>50.1387</th> <th>118.3624</th>	4	101.4210	50.1387	118.3624
7 106.2075 50.1127 118.3707 8 107.0792 50.1508 118.3689 9 109.0201 50.1181 118.3714 10 109.9052 50.1167 118.3667 11 111.8534 50.1198 118.3683 12 112.7403 50.1237 118.3680 13 114.6702 50.1230 118.3659 14 115.5570 50.1236 118.3667 15 117.4998 50.1305 118.3662 16 118.3853 50.1270 118.3601 17 120.3186 50.1335 118.3680 18 121.2054 50.1377 118.3652 19 123.1292 50.1329 118.3559 20 124.0144 50.1290 118.3643 22 126.8395 50.1364 118.3643 22 126.8395 50.1364 118.3701 24 129.6507 50.1467 118.3746 25 131.6059 50.1430<	5	103.3743	50.1348	118.3867
8 107.0792 50.1508 118.3689 9 109.0201 50.1181 118.3714 10 109.9052 50.1167 118.3667 11 111.8534 50.1198 118.3683 12 112.7403 50.1237 118.3680 13 114.6702 50.1230 118.3659 14 115.5570 50.1236 118.3667 15 117.4998 50.1305 118.3662 16 118.3853 50.1270 118.3601 17 120.3186 50.1335 118.3680 18 121.2054 50.1377 118.3652 19 123.1292 50.1329 118.3559 20 124.0144 50.1290 118.3569 21 125.9540 50.1364 118.3643 22 126.8395 50.1386 118.3669 23 128.7657 50.1484 118.3701 24 129.6507 50.1467 118.3746 25 131.6059 50.1430 118.3750 26 132.4919 50.1556 118.3773	6	104.2513	50.1469	118.3811
9 109.0201 50.1181 118.3714 10 109.9052 50.1167 118.3667 11 111.8534 50.1198 118.3683 12 112.7403 50.1237 118.3680 13 114.6702 50.1230 118.3659 14 115.5570 50.1236 118.3667 15 117.4998 50.1305 118.3662 16 118.3853 50.1270 118.3601 17 120.3186 50.1335 118.3680 18 121.2054 50.1377 118.3652 19 123.1292 50.1329 118.3559 20 124.0144 50.1290 118.3569 21 125.9540 50.1364 118.3643 22 126.8395 50.1386 118.3669 23 128.7657 50.1484 118.3746 25 131.6059 50.1430 118.3750 26 132.4919 50.1556 118.3773 27 134.4230 50.1418 118.3772 28 135.3079 50.1455 118.377	7	106.2075	50.1127	118.3707
10 109.9052 50.1167 118.3667 11 111.8534 50.1198 118.3683 12 112.7403 50.1237 118.3680 13 114.6702 50.1230 118.3659 14 115.5570 50.1236 118.3667 15 117.4998 50.1305 118.3662 16 118.3853 50.1270 118.3601 17 120.3186 50.1335 118.3680 18 121.2054 50.1377 118.3652 19 123.1292 50.1329 118.3559 20 124.0144 50.1290 118.3569 21 125.9540 50.1364 118.3643 22 126.8395 50.1386 118.3669 23 128.7657 50.1484 118.3701 24 129.6507 50.1467 118.3746 25 131.6059 50.1430 118.3773 26 132.4919 50.1556 118.3773 27 134.4230 50.14	8	107.0792	50.1508	118.3689
11 111.8534 50.1198 118.3683 12 112.7403 50.1237 118.3680 13 114.6702 50.1230 118.3659 14 115.5570 50.1236 118.3667 15 117.4998 50.1305 118.3662 16 118.3853 50.1270 118.3601 17 120.3186 50.1335 118.3680 18 121.2054 50.1377 118.3652 19 123.1292 50.1329 118.3559 20 124.0144 50.1290 118.3569 21 125.9540 50.1364 118.3643 22 126.8395 50.1364 118.3669 23 128.7657 50.1484 118.3701 24 129.6507 50.1467 118.3746 25 131.6059 50.1430 118.3750 26 132.4919 50.1556 118.3773 27 134.4230 50.1418 118.3772 28 135.3079 50.1455 118.3772	9	109.0201	50.1181	118.3714
12 112.7403 50.1237 118.3680 13 114.6702 50.1230 118.3659 14 115.5570 50.1236 118.3667 15 117.4998 50.1305 118.3662 16 118.3853 50.1270 118.3601 17 120.3186 50.1335 118.3680 18 121.2054 50.1377 118.3652 19 123.1292 50.1329 118.3559 20 124.0144 50.1290 118.3569 21 125.9540 50.1364 118.3643 22 126.8395 50.1386 118.3669 23 128.7657 50.1484 118.3701 24 129.6507 50.1467 118.3746 25 131.6059 50.1467 118.3773 26 132.4919 50.1556 118.3773 27 134.4230 50.1418 118.3772 28 135.3079 50.1455 118.3772	10	109.9052	50.1167	118.3667
13 114.6702 50.1230 118.3659 14 115.5570 50.1236 118.3667 15 117.4998 50.1305 118.3662 16 118.3853 50.1270 118.3601 17 120.3186 50.1335 118.3680 18 121.2054 50.1377 118.3652 19 123.1292 50.1329 118.3559 20 124.0144 50.1290 118.3569 21 125.9540 50.1364 118.3643 22 126.8395 50.1386 118.3669 23 128.7657 50.1484 118.3701 24 129.6507 50.1467 118.3746 25 131.6059 50.1430 118.3750 26 132.4919 50.1556 118.3773 27 134.4230 50.1418 118.3772 28 135.3079 50.1455 118.3772	11	111.8534	50.1198	118.3683
14 115.5570 50.1236 118.3667 15 117.4998 50.1305 118.3662 16 118.3853 50.1270 118.3601 17 120.3186 50.1335 118.3680 18 121.2054 50.1377 118.3652 19 123.1292 50.1329 118.3559 20 124.0144 50.1290 118.3569 21 125.9540 50.1364 118.3643 22 126.8395 50.1386 118.3669 23 128.7657 50.1484 118.3701 24 129.6507 50.1467 118.3746 25 131.6059 50.1430 118.3750 26 132.4919 50.1556 118.3773 27 134.4230 50.1418 118.3791 28 135.3079 50.1455 118.3772	12	112.7403	50.1237	118.3680
15 117.4998 50.1305 118.3662 16 118.3853 50.1270 118.3601 17 120.3186 50.1335 118.3680 18 121.2054 50.1377 118.3652 19 123.1292 50.1329 118.3559 20 124.0144 50.1290 118.3569 21 125.9540 50.1364 118.3643 22 126.8395 50.1386 118.3669 23 128.7657 50.1484 118.3701 24 129.6507 50.1467 118.3746 25 131.6059 50.1430 118.3750 26 132.4919 50.1556 118.3773 27 134.4230 50.1418 118.3772 28 135.3079 50.1455 118.3772	13	. 114.6702	50.1230	118.3659
16 118,3853 50,1270 118,3601 17 120,3186 50,1335 118,3680 18 121,2054 50,1377 118,3652 19 123,1292 50,1329 118,3559 20 124,0144 50,1290 118,3569 21 125,9540 50,1364 118,3643 22 126,8395 50,1386 118,3669 23 128,7657 50,1484 118,3701 24 129,6507 50,1467 118,3746 25 131,6059 50,1430 118,3750 26 132,4919 50,1556 118,3773 27 134,4230 50,1418 118,3772 28 135,3079 50,1455 118,3772	14	115.5570	50.1236	118.3667
17 120.3186 50.1335 118.3680 18 121.2054 50.1377 118.3652 19 123.1292 50.1329 118.3559 20 124.0144 50.1290 118.3569 21 125.9540 50.1364 118.3643 22 126.8395 50.1386 118.3669 23 128.7657 50.1484 118.3701 24 129.6507 50.1467 118.3746 25 131.6059 50.1430 118.3750 26 132.4919 50.1556 118.3773 27 134.4230 50.1418 118.3791 28 135.3079 50.1455 118.3772	15	117.4998	50.1305	118.3662
18 121.2054 50.1377 118.3652 19 123.1292 50.1329 118.3559 20 124.0144 50.1290 118.3569 21 125.9540 50.1364 118.3643 22 126.8395 50.1386 118.3669 23 128.7657 50.1484 118.3701 24 129.6507 50.1467 118.3746 25 131.6059 50.1430 118.3750 26 132.4919 50.1556 118.3773 27 134.4230 50.1418 118.3791 28 135.3079 50.1455 118.3772	16	118.3853	50.1270	118.3601
19 123.1292 50.1329 118.3559 20 124.0144 50.1290 118.3569 21 125.9540 50.1364 118.3643 22 126.8395 50.1386 118.3669 23 128.7657 50.1484 118.3701 24 129.6507 50.1467 118.3746 25 131.6059 50.1430 118.3750 26 132.4919 50.1556 118.3773 27 134.4230 50.1418 118.3791 28 135.3079 50.1455 118.3772	17	120.3186	50.1335	118.3680
20 124.0144 50.1290 118.3569 21 125.9540 50.1364 118.3643 22 126.8395 50.1386 118.3669 23 128.7657 50.1484 118.3701 24 129.6507 50.1467 118.3746 25 131.6059 50.1430 118.3750 26 132.4919 50.1556 118.3773 27 134.4230 50.1418 118.3791 28 135.3079 50.1455 118.3772	18	121.2054	50.1377	118.3652
21 125.9540 50.1364 118.3643 22 126.8395 50.1386 118.3669 23 128.7657 50.1484 118.3701 24 129.6507 50.1467 118.3746 25 131.6059 50.1430 118.3750 26 132.4919 50.1556 118.3773 27 134.4230 50.1418 118.3791 28 135.3079 50.1455 118.3772	19	123.1292	50.1329	118.3559
22 126.8395 50.1386 118.3669 23 128.7657 50.1484 118.3701 24 129.6507 50.1467 118.3746 25 131.6059 50.1430 118.3750 26 132.4919 50.1556 118.3773 27 134.4230 50.1418 118.3791 28 135.3079 50.1455 118.3772	20	124.0144	50.1290	118.3569
23 128.7657 50.1484 118.3701 24 129.6507 50.1467 118.3746 25 131.6059 50.1430 118.3750 26 132.4919 50.1556 118.3773 27 134.4230 50.1418 118.3791 28 135.3079 50.1455 118.3772	21	125.9540	50.1364	118.3643
24 129.6507 50.1467 118.3746 25 131.6059 50.1430 118.3750 26 132.4919 50.1556 118.3773 27 134.4230 50.1418 118.3791 28 135.3079 50.1455 118.3772	22	126.8395	50.1386	118.3669
25 131.6059 50.1430 118.3750 26 132.4919 50.1556 118.3773 27 134.4230 50.1418 118.3791 28 135.3079 50.1455 118.3772	23	128.7657	50.1484	118.3701
26 132.4919 50.1556 118.3773 27 134.4230 50.1418 118.3791 28 135.3079 50.1455 118.3772	24	129.6507	50.1467	118.3746
27 134 4230 50 1418 118 3791 28 135.3079 50.1455 118.3772	25	131.6059	50.1430	118.3750
28 135.3079 50.1455 118.3772	26	132.4919	50.1556	118.3773
	27	134.4230	50.1418	118 3791
40 107.0407 50.1405 110.0704	28	135.3079	50.1455	118.3772
29 137.2407 50.1425 118.3794	29	137.2407	50.1425	118.3794
30 138.1264 50.1468 118.3816	30	138.1264	50.1468	118.3816

1 2	97.7466 98.6176	50.1085	115.2870
2	98.6176	50 1000	
		50.1320	115.2898
3	100.5671	50.1096	115.2836
4	101.4368	50.1386	115.2887
5	103.3769	50.1120	115.2927
6	104.2495	50.1435	115,2928
7	106.2076	50.1234	115.2901
8	107.0419	50.1508	115.2881
9	109.0371	50.0970	115.2835
10	109.9212	50.0955	115,2826
11	111.8732	50.0932	115.2755
12	112.7561	50.0925	115.2764
13	114.6976	50.0958	115.2789
14	115.5818	50.1008	115.2762
15	117.5134	50.1020	115.2695
16	118.3988	50.0993	115.2692
17	120.3192	50.1116	115.2836
18	121.2035	50.1106	115.2835
19	123.1505	50.1231	115.2769
20	124.0361	50.1144	115.2766
21	125.9612	50.1129	115.2693
22	126.8477	50.1189	115.2805
23	128.7688	50.1245	115.2903
24	129.6531	50.1198	115.2888
25	131.5957	50.1175	115.2915
26	132.4751	50.1109	115.2878
27	134.4243	50.1257	115.2996
28	135.3091	50.1297	115.2988
29	137.2360	50.1253	115.3057
30	138.1213	50.1304	115.3056

1 97.7476 50.1062 114.8512 2 98.6164 50.1363 114.8552 3 100.5665 50.1092 114.8479 4 101.4346 50.1404 114.8490 5 103.3777 50.1111 114.8562 6 104.2480 50.1419 114.8571 7 106.2062 50.1197 114.8531 8 107.0808 50.1522 114.8520 9 109.0338 50.1012 114.8499 10 109.9200 50.0904 114.8471 11 111.8722 50.0912 114.8397 12 112.7563 50.0952 114.8409 13 114.6975 50.0976 114.8455 14 115.5802 50.1034 114.8398 15 117.5091 50.1055 114.8370 16 118.3937 50.1064 114.8365 17 120.3222 50.1073 114.8503 18 121.2074 50.1087 114.849 20 124.0341 50.1195 114.8439		FIL	A 4	
3 100.5665 50.1092 114.8479 4 101.4346 50.1404 114.8490 5 103.3777 50.1111 114.8562 6 104.2480 50.1419 114.8571 7 106.2062 50.1197 114.8531 8 107.0808 50.1522 114.8520 9 109.0338 50.1012 114.8499 10 109.9200 50.0904 114.8471 11 111.8722 50.0912 114.8397 12 112.7563 50.0952 114.8409 13 114.6975 50.0976 114.8455 14 115.5802 50.1034 114.8398 15 117.5091 50.1055 114.8370 16 118.3937 50.1064 114.8365 17 120.3222 50.1073 114.8503 18 121.2074 50.1087 114.8439 20 124.0341 50.1161 114.8439 20 124.0341 50.1161	1	97.7476	50.1062	114.8512
4 101.4346 50.1404 114.8490 5 103.3777 50.1111 114.8562 6 104.2480 50.1419 114.8571 7 106.2062 50.1197 114.8531 8 107.0808 50.1522 114.8520 9 109.0338 50.1012 114.8499 10 109.9200 50.0904 114.8471 11 111.8722 50.0912 114.8397 12 112.7563 50.0952 114.8409 13 114.6975 50.0976 114.8455 14 115.5802 50.1034 114.8398 15 117.5091 50.1055 114.8370 16 118.3937 50.1064 114.8365 17 120.3222 50.1073 114.8503 18 121.2074 50.1087 114.8439 20 124.0341 50.1161 114.8439 20 124.0341 50.1161 114.8477 22 126.8407 50.1173 114.8573 24 129.6555 50.1212 114.8561 <th>2</th> <th>98.6164</th> <th>50.1363</th> <th>114.8552</th>	2	98.6164	50.1363	114.8552
5 103.3777 50.1111 114.8562 6 104.2480 50.1419 114.8571 7 106.2062 50.1197 114.8531 8 107.0808 50.1522 114.8520 9 109.0338 50.1012 114.8499 10 109.9200 50.0904 114.8471 11 111.8722 50.0912 114.8397 12 112.7563 50.0952 114.8409 13 114.6975 50.0976 114.8455 14 115.5802 50.1034 114.8398 15 117.5091 50.1055 114.8370 16 118.3937 50.1064 114.8365 17 120.3222 50.1073 114.8503 18 121.2074 50.1087 114.8439 20 124.0341 50.1161 114.8439 20 124.0341 50.1161 114.8422 21 125.9556 50.1103 114.8477 22 126.8407 50.1173 <th>3</th> <th>100.5665</th> <th>50.1092</th> <th>114.8479</th>	3	100.5665	50.1092	114.8479
6 104.2480 50.1419 114.8571 7 106.2062 50.1197 114.8531 8 107.0808 50.1522 114.8520 9 109.0338 50.1012 114.8499 10 109.9200 50.0904 114.8471 11 111.8722 50.0912 114.8397 12 112.7563 50.0952 114.8409 13 114.6975 50.0976 114.8455 14 115.5802 50.1034 114.8398 15 117.5091 50.1055 114.8370 16 118.3937 50.1064 114.8365 17 120.3222 50.1073 114.8503 18 121.2074 50.1087 114.8506 19 123.1489 50.1195 114.8439 20 124.0341 50.1161 114.8422 21 125.9556 50.1103 114.8477 22 126.8407 50.1173 114.8561 23 128.7700 50.1208 114.8561 25 131.5970 50.1175 114.8579 </th <th>4</th> <th>101.4346</th> <th>50.1404</th> <th>114.8490</th>	4	101.4346	50.1404	114.8490
7 106.2062 50.1197 114.8531 8 107.0808 50.1522 114.8520 9 109.0338 50.1012 114.8499 10 109.9200 50.0904 114.8471 11 111.8722 50.0912 114.8397 12 112.7563 50.0952 114.8409 13 114.6975 50.0976 114.8455 14 115.5802 50.1034 114.8398 15 117.5091 50.1055 114.8370 16 118.3937 50.1064 114.8365 17 120.3222 50.1073 114.8503 18 121.2074 50.1087 114.8506 19 123.1489 50.1195 114.8439 20 124.0341 50.1161 114.8422 21 125.9556 50.1103 114.8477 22 126.8407 50.1173 114.8457 23 128.7700 50.1208 114.8561 25 131.5970 50.1175<	5	103.3777	50.1111	114.8562
8 107.0808 50.1522 114.8520 9 109.0338 50.1012 114.8499 10 109.9200 50.0904 114.8471 11 111.8722 50.0912 114.8397 12 112.7563 50.0952 114.8409 13 114.6975 50.0976 114.8455 14 115.5802 50.1034 114.8398 15 117.5091 50.1055 114.8370 16 118.3937 50.1064 114.8365 17 120.3222 50.1073 114.8503 18 121.2074 50.1087 114.8506 19 123.1489 50.1195 114.8439 20 124.0341 50.1161 114.8422 21 125.9556 50.1103 114.8477 22 126.8407 50.1173 114.8457 23 128.7700 50.1208 114.8573 24 129.6555 50.1212 114.8561 25 131.5970 50.1175 114.8578 26 132.4825 50.1215 114.8638	6	104.2480	50.1419	114.8571
9 109.0338 50.1012 114.8499 10 109.9200 50.0904 114.8471 11 111.8722 50.0912 114.8397 12 112.7563 50.0952 114.8409 13 114.6975 50.0976 114.8455 14 115.5802 50.1034 114.8398 15 117.5091 50.1055 114.8370 16 118.3937 50.1064 114.8365 17 120.3222 50.1073 114.8503 18 121.2074 50.1087 114.8506 19 123.1489 50.1195 114.8439 20 124.0341 50.1161 114.8422 21 125.9556 50.1103 114.8477 22 126.8407 50.1173 114.8457 23 128.7700 30.1208 114.8573 24 129.6555 50.1212 114.8561 25 131.5970 50.1175 114.8578 26 132.4825 50.1215 114.8638 27 134.4245 50.1222 114.863	7	106.2062	50.1197	114.8531
10 109,9200 50,0904 114,8471 11 111.8722 50,0912 114,8397 12 112,7563 50,0952 114,8409 13 114,6975 50,0976 114,8455 14 115,5802 50,1034 114,8398 15 117,5091 50,1055 114,8370 16 118,3937 50,1064 114,8365 17 120,3222 50,1073 114,8503 18 121,2074 50,1087 114,8506 19 123,1489 50,1195 114,8439 20 124,0341 50,1161 114,8422 21 125,9556 50,1103 114,8477 22 126,8407 50,1173 114,8477 23 128,7700 50,1208 114,8573 24 129,6555 50,1212 114,8561 25 131,5970 50,1175 114,8579 26 132,4825 50,1215 114,8638 27 134,4245 50,1224 114,8644	8	107.0808	50.1522	114.8520
11 111.8722 50.0912 114.8397 12 112.7563 50.0952 114.8409 13 114.6975 50.0976 114.8455 14 115.5802 50.1034 114.8398 15 117.5091 50.1055 114.8370 16 118.3937 50.1064 114.8365 17 120.3222 50.1073 114.8503 18 121.2074 50.1087 114.8506 19 123.1489 50.1195 114.8439 20 124.0341 50.1161 114.8422 21 125.9556 50.1103 114.8477 22 126.8407 50.1173 114.8477 23 128.7700 50.1208 114.8573 24 129.6555 50.1212 114.8561 25 131.5970 50.1175 114.8579 26 132.4825 50.1215 114.8638 27 134.4245 50.1224 114.8644	9	109.0338	50.1012	114.8499
12 112.7563 50.0952 114.8409 13 114.6975 50.0976 114.8455 14 115.5802 50.1034 114.8398 15 117.5091 50.1055 114.8370 16 118.3937 50.1064 114.8365 17 120.3222 50.1073 114.8503 18 121.2074 50.1087 114.8506 19 123.1489 50.1195 114.8439 20 124.0341 50.1161 114.8422 21 125.9556 50.1103 114.8477 22 126.8407 50.1173 114.8457 23 128.7700 50.1208 114.8573 24 129.6555 50.1212 114.8561 25 131.5970 50.1175 114.8579 26 132.4825 50.1215 114.8558 27 134.4245 50.1222 114.8644	10	109.9200	50.0904	114.8471
13 114.6975 50.0976 114.8455 14 115.5802 50.1034 114.8398 15 117.5091 50.1055 114.8370 16 118.3937 50.1064 114.8365 17 120.3222 50.1073 114.8503 18 121.2074 50.1087 114.8506 19 123.1489 50.1195 114.8439 20 124.0341 50.1161 114.8422 21 125.9556 50.1103 114.8477 22 126.8407 50.1173 114.8457 23 128.7700 50.1208 114.8573 24 129.6555 50.1212 114.8561 25 131.5970 50.1175 114.8579 26 132.4825 50.1215 114.8558 27 134.4245 50.1222 114.8638 28 135.3095 50.1224 114.8644	11	111.8722	50.0912	114.8397
14 115.5802 50.1034 114.8398 15 117.5091 50.1055 114.8370 16 118.3937 50.1064 114.8365 17 120.3222 50.1073 114.8503 18 121.2074 50.1087 114.8506 19 123.1489 50.1195 114.8439 20 124.0341 50.1161 114.8422 21 125.9556 50.1103 114.8477 22 126.8407 50.1173 114.8457 23 128.7700 50.1208 114.8573 24 129.6555 50.1212 114.8561 25 131.5970 50.1175 114.8579 26 132.4825 50.1215 114.8558 27 134.4245 50.1222 114.8638 28 135.3095 50.1224 114.8644	12	112.7563	50,0952	114.8409
15 117.5091 50.1055 114.8370 16 118.3937 50.1064 114.8365 17 120.3222 50.1073 114.8503 18 121.2074 50.1087 114.8506 19 123.1489 50.1195 114.8439 20 124.0341 50.1161 114.8422 21 125.9556 50.1103 114.8477 22 126.8407 50.1173 114.8457 23 128.7700 50.1208 114.8573 24 129.6555 50.1212 114.8561 25 131.5970 50.1175 114.8579 26 132.4825 50.1215 114.8588 27 134.4245 50.1222 114.8638 28 135.3095 50.1224 114.8644	13	. 114.6975	50.0976	114.8455
16 118.3937 50.1064 114.8365 17 120.3222 50.1073 114.8503 18 121.2074 50.1087 114.8506 19 123.1489 50.1195 114.8439 20 124.0341 50.1161 114.8422 21 125.9556 50.1103 114.8477 22 126.8407 50.1173 114.8457 23 128.7700 50.1208 114.8573 24 129.6555 50.1212 114.8561 25 131.5970 50.1175 114.8579 26 132.4825 50.1215 114.8588 27 134.4245 50.1222 114.8638 28 135.3095 50.1224 114.8644	14	115.5802	50.1034	114.8398
17 120.3222 50.1073 114.8503 18 121.2074 50.1087 114.8506 19 123.1489 50.1195 114.8439 20 124.0341 50.1161 114.8422 21 125.9556 50.1103 114.8477 22 126.8407 50.1173 114.8457 23 128.7700 50.1208 114.8573 24 129.6555 50.1212 114.8561 25 131.5970 50.1175 114.8579 26 132.4825 50.1215 114.8588 27 134.4245 50.1222 114.8638 28 135.3095 50.1224 114.8644	15	117.5091	50.1055	114.8370
18 121.2074 50.1087 114.8506 19 123.1489 50.1195 114.8439 20 124.0341 50.1161 114.8422 21 125.9556 50.1103 114.8477 22 126.8407 50.1173 114.8457 23 128.7700 50.1208 114.8573 24 129.6555 50.1212 114.8561 25 131.5970 50.1175 114.8579 26 132.4825 50.1215 114.8588 27 134.4245 50.1222 114.8638 28 135.3095 50.1224 114.8644	16	118.3937	50.1064	114.8365
19 123.1489 50.1195 114.8439 20 124.0341 50.1161 114.8422 21 125.9556 50.1103 114.8477 22 126.8407 50.1173 114.8457 23 128.7700 50.1208 114.8573 24 129.6555 50.1212 114.8561 25 131.5970 50.1175 114.8579 26 132.4825 50.1215 114.8558 27 134.4245 50.1222 114.8638 28 135.3095 50.1224 114.8644	17	120.3222	50.1073	114.8503
20 124.0341 50.1161 114.8422 21 125.9556 50.1103 114.8477 22 126.8407 50.1173 114.8457 23 128.7700 50.1208 114.8573 24 129.6555 50.1212 114.8561 25 131.5970 50.1175 114.8579 26 132.4825 50.1215 114.8558 27 134.4245 50.1222 114.8638 28 135.3095 50.1224 114.8644	18	121.2074	50.1087	114.8506
21 125.9556 50.1103 114.8477 22 126.8407 50.1173 114.8457 23 128.7700 50.1208 114.8573 24 129.6555 50.1212 114.8561 25 131.5970 50.1175 114.8579 26 132.4825 50.1215 114.8558 27 134.4245 50.1222 114.8638 28 135.3095 50.1224 114.8644	19	123.1489	50.1195	114.8439
22 126.8407 50.1173 114.8457 23 128.7700 50.1208 114.8573 24 129.6555 50.1212 114.8561 25 131.5970 50.1175 114.8579 26 132.4825 50.1215 114.8558 27 134.4245 50.1222 114.8638 28 135.3095 50.1224 114.8644	20	124.0341	50.1161	114.8422
23 128.7700 50.1208 114.8573 24 129.6555 50.1212 114.8561 25 131.5970 50.1175 114.8579 26 132.4825 50.1215 114.8558 27 134.4245 50.1222 114.8638 28 135.3095 50.1224 114.8644	21	125.9556	50.1103	114.8477
24 129.6555 50.1212 114.8561 25 131.5970 50.1175 114.8579 26 132.4825 50.1215 114.8558 27 134.4245 50.1222 114.8638 28 135.3095 50.1224 114.8644	22	126.8407	50.1173	114.8457
25 131.5970 50.1175 114.8579 26 132.4825 50.1215 114.8558 27 134.4245 50.1222 114.8638 28 135.3095 50.1224 114.8644	23	128.7700	50.1208	114.8573
26 132.4825 50.1215 114.8558 27 134.4245 50.1222 114.8638 28 135.3095 50.1224 114.8644	24	129.6555	50.1212	114.8561
27 134.4245 50.1222 114.8638 28 135.3095 50.1224 114.8644	25	131.5970	50.1175	114.8579
28 135.3095 50.1224 114.8644	26	132.4825	50.1215	114.8558
	27	134.4245	50.1222	114.8638
20 127 2290 50 1251 114 2521	28	135.3095	50.1224	114.8644
29 157.2580 50.1251 114.8731	29	137.2380	50.1251	114.8731
30 138.1222 50.1319 114.8699	30	138.1222	50.1319	114,8699

	FILA 5					
1	97.7570	50.1075	111.7875			
2	98.6231	50.1348	111.7851			
3	100.5689	50.1060	111.7926			
4	101.4344	50.1405	111.7917			
5	103.3780	50.1055	111.7837			
6	104.2480	50.1420	111.7827			
7	106.2130	50.1146	111.7823			
8	107.0820	50,1503	111.7828			
9	109.0384	50.1100	111.7807			
10	109.9232	50,1059	111.7795			
11	111.8610	50.1163	111.7818			
12	112.7458	50.1157	111.7783			
13	114.6736	50.1213	111.7838			
14	115,5577	50.1122	111.7802			
15	117.5016	50.1210	111.7800			
16	118.3860	50.1215	111.7789			
17	120.3169	50.1267	111.7832			
18	121.2023	50.1257	111.7821			
19	123.1405	50.1248	111.7793			
20	124.0256	50.1251	111.7821			
21	125.9597	50.1326	111.7883			
22	126.8444	50.1307	111.7900			
23	128.7681	50.1380	111.7912			
24	129.6526	50.1373	111.7876			
25	131.6070	50.1374	111.7899			
26	132.4925	50.1374	111.7900			
27	134.4279	50.1319	111.7851			
28	135.3128	50.1435	111.7860			
29	137.2382	50.1473	111.7933			
30	138.1235	50.1507	111.7938			

FILA 6					
1	97.7558	50.1068	111.3527		
2	98.6210	50.1370	111.3499		
3	100.5670	50.1072	111.3580		
4	101.4337	50.1421	111.3538		
5	103.3816	50.1016	111.3433		
6	104.2490	50.1484	111.3465		
7	106.2104	50,1073	111,3469		
8	107.0800	50.1458	111.3463		
9	109.0381	50.1075	111.3485		
10	109.9227	50.1086	111.3437		
11	111.8600	50 1064	111 3456		
12	112.7440	50.1154	111.3441		
13	114.6724	50.1158	111.3484		
14	115.5562	50.1164	111.3433		
15	117.4994	50.1232	111.3458		
16	118.3857	50.1194	111.3444		
17	120.3148	50.1168	111.3476		
18	121.2001	50.1205	111.3465		
19	123.1379	50.1213	111.3483		
20	124,0245	50.1235	111.3478		
21	125.9608	50.1299	111.3535		
22	126.8460	50.1335	111.3548		
23	128.7695	50.1384	111.3560		
24	129.6526	50 1310	111.3509		
25	131.6107	50.1267	111.3528		
26	132.4875	50.1332	111.3540		
27	134.4294	50.1345	111.3500		
28	135.3125	50.1452	111.3508		
29	137.2386	50.1460	111.3586		
30	138.1229	50.1508	111.3588		

FILA 7						
1	97.5067	50.1103	107.9157			
2	98.8657	50.1372	107.9107			
3	100.3265	50.1069	107.9137			
4	101.6858	50.1270	107.9124			
5	103.1554	50.1114	107.9131			
6	104.5153	50.1310	107.9095			
7	105.9816	50.1238	107.9177			
8	107.3434	50.1498	107.9126			
9	108.8123	50.1078	107.9137			
10	110.1840	50,1015	107.9155			
11	111.6405	50.1034	107.9153			
12	113.0154	50.0962	107.9158			
13	114.4692	50.1002	107.9149			
14	115.8431	50.1085	107.9154			
15	117.3682	50.1090	107.9162			
16	118.7447	50.1124	107,9176			
17	120.1880	50.1171	107,9104			
18	121.5633	50.1198	107.9108			
19	123.0180	50.1119	107.9102			
20	124.3930	50.1174	107.9097			
21	125.7218	50.1261	107.9110			
22	127.0967	50.1189	107.9111			
23	128.5418	50.1319	107.9147			
24	129.9160	50.1277	107.9162			
25	131.3572	50.1373	107.9145			
26	132.7329	50.1413	107.9159			
27	134.1746	50.1408	107.9182			
28	135.5504	50.1424	107.9174			
29	137.0085	50.1494	107.9164			
30	138.3816	50.1485	107.9196			

1 97.5104 50.1073 107.0815 2 98.8628 50.1359 107.0746 3 100.3250 50.1096 107.0754 4 101.6802 50.1372 107.0783 5 103.1564 50.1085 107.0778 6 104.5144 50.1410 107.0721 7 105.9821 50.1144 107.0813 8 107.3415 50.1492 107.0756 9 108.8083 50.1106 107.0814 10 110.1830 50.1140 107.0818	
3 100.3250 50.1096 107.0754 4 101.6802 50.1372 107.0783 5 103.1564 50.1085 107.0778 6 104.5144 50.1410 107.0721 7 105.9821 50.1144 107.0813 8 107.3415 50.1492 107.0756 9 108.8083 50.1106 107.0814	
4 101.6802 50.1372 107.0783 5 103.1564 50.1085 107.0778 6 104.5144 50.1410 107.0721 7 105.9821 50.1144 107.0813 8 107.3415 50.1492 107.0756 9 108.8083 50.1106 107.0814	
5 103.1564 50.1085 107.0778 6 104.5144 50.1410 107.0721 7 105.9821 50.1144 107.0813 8 107.3415 50.1492 107.0756 9 108.8083 50.1106 107.0814	
6 104.5144 50.1410 107.0721 7 105.9821 50.1144 107.0813 8 107.3415 50.1492 107.0756 9 108.8083 50.1106 107.0814	
7 105.9821 50.1144 107.0813 8 107.3415 50.1492 107.0756 9 108.8083 50.1106 107.0814	
8 107.3415 50.1492 107.0756 9 108.8083 50.1106 107.0814	
9 108.8083 50.1106 107.0814	
10 110.1830 50.1140 107.0818	
11 111.6389 50.1099 107.0811	
12 113.0144 50.1100 107.0812	
13 114.4674 50.1088 107.0795	
14 115 8361 50 1290 107.0834	
15 117.3719 5 0.1109 107.0812	
16 118.7465 50.1113 107.0830	
17 120.1884 50.1161 107.0763	
18 121.5645 50.1158 107.0754	
19 123.0202 50.1184 107.0763	
20 124.3928 50.1220 107.0756	
21 125.7171 50.1319 107.0765	
22 127.0935 50.1309 107.0777	
23 128.5403 50.1365 107.0806	
24 129.9153 50.1390 107.0811	
25 131.3583 50.1423 107.0799	
26 132.7336 50.1385 107.0812	
27 134.1740 50.1497 107.0837	
28 135.5493 50.1471 107.0829	
29 137.0087 50.1458 107.0824	
30 138.3818 50.1525 107.0856	

Tabla 6.2

6.3.2. RESULTADOS Y PRECISIONES.

Hemos obtenido los siguientes resultados:

	ORIENTACIÓN INTERNA				
$x_p = 4.997584013159835E-001$	K ₁ =2.051237748079732E-005	P ₁ =7.396180896721685E-006			
$y_p = -3.923588635271292$	$K_2 = -6.485574831144129E-009$	$P_2 = -6.084758812208676E-005$			
f =43.733513566799740					

Tabla 6.3

ORIENTACIÓN EXTERNA DE LAS CÁMARAS					
FOTOGRAMA NUMERO:	1	X ₀ =	115.659881316772300	к= -6.419396448279042Е-001	
		$\mathbf{Y}_0 =$	24.19965517250644	φ= -3.007736187684978E-001	
•		Z ₀ =	101.212214249537500	ω= 110.982641970137100	
FOTOGRAMA NUMERO:	2	X ₀ =	109.739075249497700	κ= -1.102416260336022	
		$Y_0 =$	24.185051824801020	φ= -1.534800665679589	
		Z ₀ =	101.265801255808500	ω= 111.131947913199100	
FOTOGRAMA NUMERO:	3	X ₀ =	134.827338594213000	κ= -5.404574968990424E-001	
		$Y_0 =$	24.434345956117380	φ= -5.317908751351681E-001	
-	:	$Z_0=$	100.550654052953800	ω= 108.170308802927200	
FOTOGRAMA NUMERO:	4	X ₀ -	129.334535025306800	κ5.108496072978517E-001	
		$Y_0 =$	24.350303130919810	φ= -3.536846870519460	
		$Z_0=$	100.794937939916500	ω= 108.378336007350700	
FOTOGRAMA NUMERO:	5	X ₀ =	140.963530730687300	κ= 4.883715945638206E-002	
		$Y_0 =$	24.122823611799990	φ= -7.273663029662057Е-001	
		$Z_0=$	100.850988929970300	ω= 109.247289222912800	

Tabla 6.4

Con estos resultados, las precisiones son del orden de 10⁻³, es decir del milímetro, aunque en los puntos que permanecen en los bordes del fotograma se disminuye la precisión hasta el centímetro.

6.4. ERMITA DE TAMARACEITE.

Una de las aplicaciones de este trabajo es calibrar la cámara y obtener coordenadas de otros puntos destacados que no se determinen por medios topográficos.

Con la utilización de las cámaras no-métricas en fotogrametría se ha abierto un campo muy importante en el terreno de la conservación del patrimonio. Aquí, hemos querido finalizar nuestro trabajo con una aplicación que pudiera ser empleada en la restauración y rehabilitación de la Ermita de Tamaraceite, sita en nuestro Municipio.

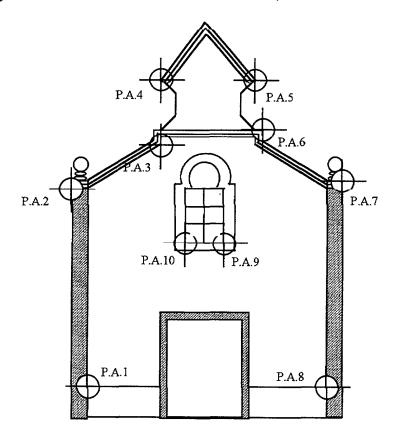


Figura 6.4.1. Croquis de la fachada de la Ermita. Puntos de apoyo.

Hemos tomado la fachada principal como ejemplo, y la hemos fotografiado desde dos puntos de vista, con una cámara Hasselblad de formato 6x6cm.

El apoyo topográfico consta de diez puntos característicos de la fachada, cuya situación y croquis son los de las figuras 6.4.1 y 6.4.2.

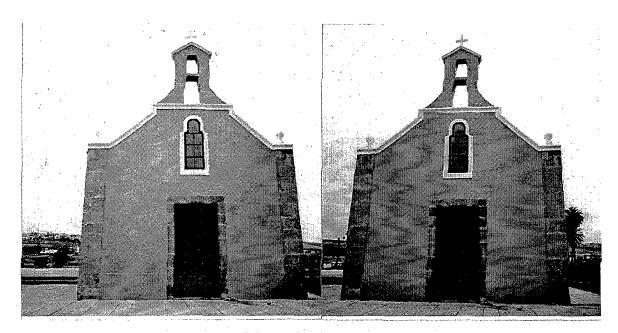


Figura 6.4.2. Par estereoscópico de la Ermita.

6.4.1. DATOS TERRESTRES Y COORDENADAS COMPARADOR.

Las coordenadas terrestres han dsido obtendidas mediante intersección directa con una estación total TC1610 de la casa WILD.

Las coordenadas comparador de los puntos de apoyo han sido medidas en el restituidor analítico MPS-2 de ADAM.

	COORD. TERRENO(m)			FOTO	FOTO 1 (mm)		FOTO 2 (mm)	
PTO	X	Y	Z	х	у	. x	у	
1	94.713	113.552	100.748	-11.488	-17.516	-18.150	-17.415	
2	94.041	113.575	104.910	-13.706	2.869	-19.250	2.240	
3	96.315	113.557	106.304	-3.023	8.624	-8.804	8.131	
4	96.946	113.581	109.016	277	18.757	-5.614	18.251	
5	98.539	113.493	108.994	6.336	18.744	0.946	18.568	
6	99.296	113.452	106.744	10.195	10.353	4.382	10.278	
7	101.318	113.454	104.938	19.853	3.010	14.146	3.054	
8	100.633	113.472	100.750	18.955	-16.975	12.153	-17.530	
9	98.046	115.531	104.206	5.157	304	-1.228	-0.594	
10	97.457	113.547	104.204	2.394	334	-3.956	-0.625	

Tabla 6.5

6.4.2. RESULTADOS Y PRECISIONES.

En este caso tenemos muchos menos puntos de apoyo, por lo que nuestra labor ha sido la de obtener mas puntos de control menor, así como una calibración de la cámara para introducir los resultados en el restituidor.

	ORIENTACIÓN INTERNA	
$x_p = -2.271056978800228E-001$	$K_1 = 4.751681463004479E-005$	P ₁ =-3.155879016378760E-005
$y_p = -4.672423947128387$	$K_2 = -5.575621258248765E-008$	$P_2 = -9.601359506830987E-005$
	f = 40.097852536301470	

Tabla б.б

			Orientación externa	
FOTOGRAMA NUMERO:	1	X ₀ =	96.412896972805500	κ = 2.072638943281042E-002
		$Y_0 =$	105.545777813825200	$\varphi = -3.709570838493448$
		Z ₀ =	101.405611613954700	ω = 114.517836229547700
FOTOGRAMA NUMERO:	2	$X_0=$	98.414610039779800	$\kappa = -3.132881148267265E-001$
		$Y_0 =$	105.445103680953900	$\varphi = 1.216029609790011$
		$Z_0=$	101.446495758665200	ω = 114.466767823364100

Tabla 6.7

X	Y	Z
1.437835621504187E-003	3.961678617922515E-006	-3.863152251010818E-004
-1.758562795263451E-003	-1.061904650480269E-004	9.100849575125816E-004
8.233527887715676E-003	-1.207713072759492E-003	3.080530149269081E-003
-5.908831032894739E-003	1.426718867943717E-003	-4.622077532193021E-003
6.697777497224271E-003	-8.403669313573128E-004	1.892463273351554E-003
-6.629545219002449E-003	-3.289893391073898E-004	3 127467673139865E-003
-8.480696254307279E-005	3.054744675951571E-004	-1.294983322280369E-003
-3.346252423293838E-004	6.658339446700065E-004	-2.783211525944303E-003
-1.919051316741381E-003	1.957603591229429E-006	4.848310413558196E-004

Tabla 6.8: Errores en coordenadas terreno

Los errores son del milímetro, que son totalmente aceptables.

Los resultados obtenidos de la cámara se han introducido en el restituidor como datos de calibración, y ello ha permitido realizar el levantamiento total con la precisión

señalada anteriormente. Sin estos datos de calibración, la precisión disminuyó al centímetro, lo que nos demuestra que aunque el apoyo es mayor los resultados son excelentes.

Nos damos cuenta que, en el caso del Seminario, tenemos que llegar a muchas más iteraciones que en éste; esto es un claro ejemplo de como influyen los errores en el condicionamiento y, en definitiva, en el proceso general, mientras el primero se utiliza, prácticamente, para la calibración de la cámara, el segundo es para realizar el levantamiento general de la fachada.

CAPITULO 7: CONCLUSIONES

7.1. CONCLUSIONES

Hemos visto el gran potencial que tienen la fotos realizadas con cámaras no métricas en fotogrametría terrestre. Este potencial, se ve incrementado por la creación de unos algoritmos que nos convierten la información bidimensional del fotograma por información tridimensional del detalle fotografiado ajustado en escala.

Una vez finalizado el trabajo podemos destacar las siguientes conclusiones;

- 1. Cuando tratamos de realizar la Resección espacial de una cámara no métrica basta con considerar un sólo término en la distorsión radial, pero cuando realizamos el Ajuste de Haces de varios fotogramas se pueden aumentar a dos términos sin que suponga ningún esfuerzo extra fotogramétrico ni de la resolución del sistema final.
- 2. La Transformación Lineal Directa es un método que obtiene la orientación interna y externa de la cámara con una precisión suficiente para considerarlas como primera aproximación en la resección espacial, pero bastante mala si la pensamos como una solución definitiva. No obstante, cuando tratamos de obtener las coordenadas terrestres de los puntos de control menor obtenemos una precisión que puede llegar a ser del centímetro, esto indica que este método es aceptable en muchos trabajos fotogramétricos no topográficos como los destinados a realizar levantamientos de fachadas para escalas 1:100 o menores. Y sobre todo, nos dará mucha más precisión que la ob-

tenida por medios rústicos como la utilización de cintas métricas para el levantamiento de edificios.

- Se puede realizar la Resección espacial de un fotograma sin necesidad de conocer la posición ni la orientación de la cámara, para ello hemos tenido que aplicar la Transformación Lineal Directa previamente.
- 4. Cuando se toman demasiados puntos de apoyo en un fotograma puede dar resultados negativos llegando a producirse una divergencia en las iteraciones, hemos observado que más de veinte puntos resulta contraproducente. En cuanto a su situación en
 el par podemos dar como conclusión que si están muy alejados en profundidad unos
 de otros, lo que hace que la escala varíe enormemente de un punto a otro, se producen unos errores difíciles de controlar llegando a desechar el resultado final. Conviene
 que la escala de cada fotograma sca lo más homogénea posible.
- 5. Para la autocalibración de una cámara se deben situar los puntos rodeando todo el formato porque si no obtenemos unos datos de orientación interna, que debido al procedimiento seguido, ajustan dichos puntos pero no son los de la cámara.
- 6. Analizando el condicionamiento de la matriz del sistema normal nos damos cuenta que son matrices muy mal condicionadas; esto justifica que a veces sucedan problemas inexplicables debido a los errores con que contamos, hemos intentado mejorar el condicionamiento pero esta no ha sido sustancial.
- 7. Cuando aplicamos las transformadas de Householder y Givens a la resección espacial de una foto funciona perfectamente la de Givens, acelerando el proceso de convergencia pero la de Householder llega a realizar un proceso oscilante en la iteración.

Cuando aplicamos Givens al tratamiento de Ajuste de Haces obtenemos un oscilamiento igual que el de Householder. Habría que estudiar más detalladamente por qué se produce esto, aunque es posible que sea porque la matriz de nuestros sistemas tienen números de magnitudes discrepantes, que no guardan homogeneidad en la matriz, y entonces al realizar divisiones los errores de truncamiento afectan de muy distinta forma a los coeficientes.

- 8. Cuando aplicamos las técnicas de almacenamiento de la envoltura de una matriz podemos realizar el Ajuste de Haces de más fotogramas sin tener que recurrir a ordenadores más potentes. El software confeccionado trabaja en cualquier tipo de ordenador personal y fácilmente podemos ajustar once y doce fotogramas terrestres con el número de incógnitas y de puntos de apoyo indicados en el test de la estación de Viena.
- 9. Al aplicar el algoritmo inverso de Cuthill-McKee al sistema creado con el test de Viena nos ha reducido el tamaño de la envoltura, pudiéndose obtener reducciones más notables al tomar más puntos de control, en cuyo caso hay una mejor explotación de la dispersidad de la matriz.

CAPITULO 8: PERSPECTIVAS FUTURAS.

8.1. PERSPECTIVAS FUTURAS.

Con esta Tesis queda abierta una serie de líneas de investigación, así como algunos trabajos de desarrollo. Entre estos destacamos los siguientes:

- Con la fachada del Seminario que tenemos apoyada topográficamente podemos realizar las calibraciones de cámaras no métricas, expidiendo certificaciones de calibración, y siempre extensible a otro tipo de edificio.
- Queremos tomar como medio de medición de coordenadas fotográficas una tableta digitalizadora, debemos comprobar la precisión obtenida para poder aplicarlo al campo arquitectónico.
- Entre otras perspectivas futuras que tenemos previsto está el programar en computación simbólica y lenguaje C, con la finalidad de conectar la computación simbólica con la numérica, con la doble finalidad docencia-investigación.

Con respecto a las líneas futuras de investigación tenemos las siguientes:

• En todos los problemas fotogramétricos contamos con un número de ecuaciones de observación mayor que el número de incógnitas, esto significa que tenemos que aplicar algoritmos que nos permitan resolver los sistemas. En nuestro trabajo hemos optado por aplicar el método de mínimos cuadrados, hay líneas de investigación sobre la resolución de sistemas de este tipo sin tener que multiplicar por la matriz traspuesta, porque esto

implica un empeoramiento del condicionamiento de la matriz, una buena línea sería investigar cómo se pueden aplicar estos algoritmos a nuestros problemas de fotogrametría.

- Las técnicas de almacenamiento y reordenación de la matriz del sistema han sido diseñadas para los casos de matrices simétricas y definidas positivas. Habría que desarrollar estas técnicas para el caso de matrices generales e incluso para matrices que no sean cuadradas.
- Podemos aplicar todo lo estudiado cuando el destino es el caso de fotogrametría aérea con cámara no métricas. Su planteamiento sería muy distinto porque los recubrimientos de los fotogramas son menores y las matrices son mas dispersas.
- Las técnicas empleadas con las matrices dispersas pueden perfectamente adaptarse a los problemas de índole geodésico. Habría que estudiar su particularidad.
- Por último, sería conveniente intentar incorporar a nuestro sistema de ecuaciones unas ecuaciones de datos geodésicos. Esto se hace muy interesante cuando tratamos de disminuir el apoyo topográfico si disponemos de otras medidas fiables tales como distancias, desniveles, etc...
- Podremos utilizar otras técnicas de reordenamiento distintas de las derivadas de Cuthill-McKee, como es la del grado mínimo vía grafos cociente, sobre la cual ya se están realizando trabajos de investigación y Tesis en el Departamento de Matemáticas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abdel-Aziz, Y.I.,1975. <u>Asymmetric lens Distortion</u>. Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, 41 (3)
- Abdel-Aziz, Y.I., 1973. <u>Lens Distortion at Close Range</u>. Photogrammetric Engineering, 39(6)
- Adams, L., 1985. m- Step Preconditioned Conjugated Gradient Methods. SIAM, J. Sci. Stat. Comput., Vol 6, No. 2, April.
- Ali, M.E.O., Brandenberger, A.J., 1982. <u>Analytical Triangulation of Space Photography</u>. Photogrammetric Engineeering and Remote Sensing, 48 (1).
- Almeida Benitez, P. 1989. Resolución directa de sistemas sparses por grafos, contribución al uso de estructuración computacional numérica de grafos para la resolución directa de sistemas saparses, en contraposición a los métodos iterativos.
 Tesis. Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.
- Almeida, P., Winter, G., 1990. Contribución numérica en la resolución directa de sistemas de ecuaciones asociados al método de elementos finitos con utilización de la teoría de grafos. I Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería. Las Palmas de G.C.
- Allen J.Pope, 1974. Two approaches to Nonlinear Least Squares Adjustments. The Canadian Surveyor, Vol.28, No.5, December 1974.
- Arioli, M. Duff, I.S. and Rijk, P.P.M., 1989. On the Augmented System Approach to Sparse Least-Squres Problems. Numer. Math. 55, 667-684 (1989).
- Axelson, O., 1980. Conjugate Gradient Type Methods for Unsymmetric and Inconsistent Systems of Linear Equations. Linear Algebra and its Applications, V, 29, (1980).
- Axelsson, O., Gustafsson, Y., 1979. A Modified Upwind Scheme for Convective transport equations and the use of a Conjugate Gradient Method for the solution of Non-symetric systems of equations. J. Inst. Maths. Applies, V, 23.
- Ayeni, O.O., 1982. <u>Phototriangulation: A Review and Bibliography</u>. Photogrammetric Engineeering and Remote Sensing, 48 (11).

- Balce, A.E., 1988. Comparison of Block Adjustment Methods and Accuracies of Photogrammetric Point Determination. CISM Journal ACSGC 42 (3).
- Berge, C., 1966. La théorie des graphes et ses aplications. Dunod, Paris.
- Bernard D. y Menegezzi P., 1989. Resolution de Systemes lineaires .Gazette
 Leodufel n. 9. INRIA. Paris. Anexo 5, Cours Modulef 1989. 30/5/89. Rocquencourt.
 Paris
- Björck, A. and Golub, G.. 1967. <u>Iterative Refinement of Linear Least Square Solutions</u> by Householder Transformation. BIT 7.
- Blais, J.A.R. and Chapman, M.A., 1984. The use of Auxiliary Airbone Sensor Data in SPACE-M Photogrammetric Block Adjustments. The Canadian Surveyor, Vol.38, No.1, Spring.
 - Blais, J.A.R. and Chapman, M.A., 1984. The use of relative terrestrial Control Data in SPACE-M Photogrammetric Block Adjustments. The Canadian Surveyor, Vol.38, No.4. Winter.
- Bluh, 1979. <u>Directions for the use of Program System BLUH</u>. Universität Hannover. Institut für Photogrammetrie und Ingenieurvermessungen. Version August.
- Bock-Mo, Yeu and Hong-gi, Park, 1988. Gross Error Detection by Robust Estimation in DLT. Commission V, XVIth ISPRS Congress.
- Boop, H. and Krauss, H., 1978. An Orientation and Calibration Method for Non-Topographic Applications. Photogrammetric Engineeering and Remote Sensing, 44 (9).
- Borse, G.J., 1989. <u>Programación en Fortran con aplicaciones en cálculo numérico en ciencias e ingeniería.</u> Anaya Multimedia. Madrid.
- Brown, D.C., 1966. <u>Decentering Distortion of Lenses</u>. Photogrammetric Engineeering, 32 (3).
- Brown, D.C., 1971. Close-range Camera Calibration. Photogrammetric Engineering, 37(8).
- Burnside, C.D. and Marshall, H.P. 1992. Experiences in calibrating small format cameras. Photogrammetric Record. 14(80).
- Ciarlet, P.G., 1985. <u>Introductions L'Analyse numérique matricielle et L'Optimisation</u>. Editorial Masson, Paris.

- Conde Lázaro, C. y Winter Althaus, G., 1990. Métodos y algoritmos básicos del álgebra numérica, barcelona, Reverté.
- Cooper, M.A.R. and Cross, P.A., 1988. Statistical Concepts and their Application in Photogrammetry and Surveying Photogrammetric Record, 12 (71).
- Cooper, M.A.R., 1984. <u>Deformation Measurement by Photogrammetry</u>. Photogrammetric Record, 11 (63).
- Cuthill, E., McKee, J., 1969. Reducing the bandwith of sparse symetric matrices.

 Proc. A. C. M. National Conference New York.
- Chong, A.K.,1987. A Robust Method for Multiple Outliers Detection in Multi-Parametric Models. Photogrammetric Engineeering and Remote Sensing, 53 (6).
- Christofides, N., 1986. <u>Graph Theory an Algorithmic Approach</u> Academic Press, INC., London.
- Christofides, N., 1975. Graph theory and algorithmic approch. academic press inc.

 London
- De La Fuente O'Connor, J.L., 1993. <u>Tecnología computacionales para sistemas de ecuaciones, optimización lineal entera.</u> Reverte. Mexico.
- Deren, L. and Jie, S., 1989. Quality Analysis of Bundle Block Adjustment with Navigation Data. Photogrammetric Engineeering and Remote Sensing, 55 (12).
- Dermanis A., 1994. Free network solutions with the DLT method. ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing, 49 (2)
- Dermanis A., 1994. The Photogrammetric inner constraints. ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing, 49 (1).
- Duff, I.S., Grimes, R.G. and Lewis, J.G., 1989. Sparse Matrix Test Problems. ACM Transactions on Mathematical Software, Vol. 15, No.1, March.
- Eisenstat S. C., Schultz M. H., Sherman A. H., 1983. Algorithms and Data Structures for Sparse Symetric Gaussian Elimination SIAM J. Scientific Computation Vol 2 num.2.
- El Beik, A.H.A., 1994. <u>Development of a multi-application collinearity equations</u>

 model. Photogrammetric Record. 14(82)
- El Hakim, S.F., 1981. A combined Adjustment of Geodetic and Photogrammetric

- Observations. Photogrammetric Engineeering and Remote Sensing, 47 (1).
- Felippa, C. A., 1974. Solution of linear equations with skyline-stored symetric matrix. Comp. Struct. 4.
- Förstner, W., 1985. The Reliability of Block Triangulation. Photogrammetric Engineeering and Remote Sensing, 51 (6).
- Fraser, C.S., 1982. Optimization of Precision in Close-Range Photogrammetry.

 Photogrammetric Engineeering and Remote Sensing, 48 (4).
- Fraser, C.S., 1987. <u>Multiple Exposures in Non-Metric Camera Applications</u>. Photogrammetria (PRS), 42.
- Frobin, W. and Hierholzer, E., 1982. <u>Calibration and Model Reconstruction in Analytical Close-Range Stereophotogrammetry</u>. Photogrammetric Engineeering and Remote Sensing, 48 (1).
- Fryer, J.G. and Fraser, C.S., 1986. On the Calibration of Underwater Cameras.

 Photogrammetric Record, 12 (67)
- Galera, M.D., Almeida, P., 1990. Esquemas computacionales de la factorización de crout y su incidencia en la resolución de sistemas lineales y no lineales sparse. I Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería. Las Palmas de G.C.
- Gastinel, N., 1975. Analise numerique lineaire. Hermann, Paris, (1975).
- Gastinel, N., 1975. Analyse numerique lineaire. Hermann, Paris.
- George, A., Liu, W.H., 1981. Computer Solution of Large Sparse Positive

 Definite Systems. Edit. Prentice Hail. Series in Computational Mathematics.
- George, A., Liu, W.H., 1979. An implementation of a pseudoperipherical node finder.

 A. C. M. Transactions on Math. Soft. Vol 5.
- George, A., 1973. Nested dissection of a regular finite element mesh SIAM Journal of Numerical Analysis Vol 10
- George, A., 1975. A note on fill for sparse matrices SIAM J. Numer. Anal. 12.
- Gibss, N.E., Poole, W.G., Stockmeyer, P.K., 1976. An algorithm for reducing the bandwith and profile of a sparse matrix. SIAM Journal of Numerical Analysis Vol 13.
- Glaser G.H. and Saliba, M.S., 1972. Application of Sparse matrices to Analytical

- Photogrammetry. DBA Systems, Inc. Melbourne, Florida. Sparse matrices and their applications. The IBM Research Symposia Series. New York.
- Glowinski, R. Keller, H. Reinhart, L., 1982. <u>Continuation- Conjugate Gradient Methods for the least square solution of nonlinear boundary value problems</u>.
 Rapports de Recherche, No. 141, INRIA, Paris.
- Glowinski, R., Golub, G.H., Meurant, G. y Periaux, J., 1988. Proceedings of the first international symposium on domain descomposition methods for partial differential equations. SIAM.
- Golub, G. H., 1983. <u>Meurant Résolution Numérique des grands systemes linéaires.</u>
 Eyrolles, Paris.
- Golub, G., 1965. <u>Numerical Methods for solving Linear Least Squares Problems.</u>
 Numerische Mathematik 7.
- Gonzalez, L. Felipe, P., 1977. <u>Teoría y aplicaciones de los grafos</u> Ed. Pueblo y Educacion. La Habana
- Grün, A., 1982. The Accuracy Potential of Modern Bundle Block Adjustment in Aerial Photogrammetry. Photogrammetric Engineeering and Remote Sensing, 48.
- Harris, W.D., Keller, M. and Tewinkel, G.C., 1962. Analytic Aerotriangulation.
- Technical Bulletin no.21. U.S. Department of Commerce.
- Hassan, I.M., 1981. Analytical Techniques for Use with reconnaissance Frame Photography. Photogrammetric Engineering, 47 (12).
- Hintz, R.J., Karakadas, C. and Kang J.M., 1989. Analysis of Pavement Cracking and Rutting Using Close-Range Photography. Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, 55 (2).
- **Hirvonen, R.A., 1979.** Adjustment by Least Squares in Geodesy and Photogrammetry. Frederick Ungar Publishing Co., New York.
- Hostetter, G.H., Santina, M.S., 1991. <u>Analytical, Numerical, and computational methods for science and engineering.</u> Prentice-Hall International.
- Hottier, PH., 1976. Accuracy of Close-Range Analytical Restitutions: Practical Experiments and Prediction. Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, 42 (3).
- Jenning, A., Malik, G.M., 1978. The solution of Sparse Linear Equations by the

- Conjugate Gradient Method. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 12.
- Jennings, A., 1966. A compact storage scheme for the solution of symetric simultaneous equations. Comp. J., 9...
- Jennings, A., McKeown, J.J., 1992. Matrix computation. John Wiley & Sons. N.Y.
- Joly, J., 1982. Resolutions de systemes lineaires non symetriques par des methodes de gradient conjugue. Universitw P. et M. Curie.
- Juliá, J.E., 1985. Conferencia dada en el Instituto Geográgico Nacional de España con patrocinio de la Sociedad Española de Cartografía, Fotogrametría y Teledetección. 5 de Abril de 1985.
- Juliá, J.E., 1986. <u>Developments with the Coblo Block Adjustment Program</u>. Photogrammetric Record, 12 (68).
- Junkins, D.R. and Steeves, R.R., 1986. Accumulation of the Cholesky Square Root in Helmert Blocking. The Canadian Surveyor, 40 (3)
- Karara, H.M. and Abdel-Aziz, Y.I., 1974. Accuracy Aspects of Non-Metric Imagineries. Photogrammetric Engineering, 40(9).
- Karara, H.M.,1985. Close-Range Photogrammetry: Where Are We and Where Are We Heading? Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, 51 (5).
- Keller, M. and Tewinkel, G.C., 1966. Three-Photo Aerotriangulation. Technical Bulletin no.29. U.S. Department of Commerce.
- Keller, M. and Tewinkel, G.C., 1967. <u>Block Analytical Aerotriangulation</u>. Technical Bulletin no.35. U.S. Department of Commerce.
- Kenefick, J.F., Gyer, M.S. and Harp, B.F., 1972. <u>Analytical Self-Calibration</u>. Photogrammetric Engineering, 38(11).
- Kennert,I., 1976. <u>State-of-the-Art of Close-Range Photogrammetry</u>. Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, 42 (1).
- King, B.A., 1991. <u>A Relative Orientation for Motor Vehicle accident Phtogrammetry.</u> Photogrammetric Record, 13 (78).
- Kondo,S.,Ohba,R. and Murata,K.,1982. The Location os Three-Dimensinal Linear

 Objects by Using Multiple Projections. Photogrammetric Engineering and Remote

- Sensing, 48 (1).
- Konecny, G.,1985. <u>Keynote Address.</u> Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, 51 (7).
- Koo, T.K. and Aw, Y.B., 1991. A Three- Dimensional Visualization Approach to Accident Mapping. Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, 57 (7)
- Kotowski, R., Peipe, J. and Wester-Ebbinghaus, W., 1988. <u>Bundle Triangulation in Architectural Photogrammetry: The Basilica of San Francesco in Siena.</u>
 Photogrammetric Record, 12 (72)
- Kubik, K.,1987. A Note on Photogrammetric Block Adjustment with Additional Parameters. Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, 53 (11).
- Landesman, E.M., Hesteres, M.R., 1992. <u>Linear Algebra for Mathematics</u>, <u>science</u>, and <u>engineering</u>. Prentice-Hall International.
- Lascaux, P., 1987. Analyse Numérique Matricielle Apliquée a l'art de l'ingénieur (tomos 1 y 2) Masson
- Light, D.L., 1992. The New Camera Calibration System at the U.S. Geological Survey.

 Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, 58 (2).
- Liu, J.W., Herman, A.H., 1976. Comparative analysis of the Cuthill McKee and the inverse Cuthill-McKee ordering algorithms for sparse matrices. SIAM Journal of Numerical Analysis Vol 13.
- Liu, J.W., 1976. On reducing the profile of sparse symmetric matrices Dept. Computer Science, Univ. of Waterloo.
- Magill, A.A., 1955. <u>Variation in Distortion with Magnification</u>. Journal of Research of the national Bureau of standards. Vol. 54, No.3, March.
- Marquardt, Donald W. 1963. An Algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. J.Soc. Indust.Appl. Math..Vol.11No.2, June.
- Martin Faba, J., 1990. Resolución de grandes sistemas lineales dispersos por mínimos cuadrados utilizando rotaciones de Givens I Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería. Las Palmas de G.C.
- Meurant, G. ,1988. Conjugate gradient preconditioners for parallel computers In "Proceedings of the third SIAM conference on parallel processing of the third

- SIAM conference on parallel processing for scientific computing". Los Angeles. SIAM.
- Meurant, G.,1986. The conjugate gradient method on supercomputers.

 Supercomputer, v 13.
- Mikhail, E.M. and Helmering, R.J., 1973. Recursive Methods in Photogrammetric
 Data Reduction. Photogrammetric Engineering, 39(9).
- Mitchell, H.L., Chadwick, R.G. and McCabe, J.F., 1989. Stereomicroscope

 Photogrammetry for the Measurement of Small Objects. Photogrammetric Record, 13

 (74).
- Moniwa, L., Hideya, J. 1980. The concept of "photo-variant" self-calibration and its
 application in block adjustment with bundles. Fourteenth Congress of the International
 Society for Photogrammetry. Hamburg.
- Montero,G., 1989. Aplicación de esquemas elemento a elemento de resolución de sistemas de ecuaciones asociados a métodos de elementos finitos adaptativos. Tesis Doctoral, U.P.C., Las Palmas.
- Müftüoglu, O, 1984. <u>Nonlinear Least-Squares Estimation of the Colinearity Condition</u>.
 International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing, V. 25 part A5.
- Müftüoglu, O, 1993. A Data reduction Approach Using the Collinearity Model from
 Non-Metric Photography. Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, 59 (5).

 Mustaffar, M. and Newton, I., 1991. Instant appeal? Close-Range Photogrammetry
 with polaroid Instant Photography. Photogrammetric Record, 13 (77).
- Naftel, A.J. and Boot, J.C., 1991. <u>An Iterative Linear Transformation Algorithm for Solution of the Collinearity Equations.</u> Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, 57 (7).
- Niedzwiedz, W.R., 1990. <u>Assessing Permit Compliance in Residential Areas Using</u>
 <u>Color 35-mm Aerial Photography</u>. Photogrammetric Engineering and Remote Sensing,
 56 (2).
- Okamoto, A., 1981. <u>Orientation and Construction of Models. Part I: The Orientation Problem in Close-Range Photogrammetry</u>. Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, 47 (10).

- Okamoto, A., 1981. Orientation and Construction of Models Part III: Mathematical Basis of the Orientation Problem of One-Dimensinal Central Perspective Photographs.

 Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, 47 (12).
- Papo, H.B. and Perelmuter, A., 1982. Free Net Analysis in Close-Range

 Photogrammetry. Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, 48 (4).
- Papo, H.B., 1987. <u>Bases os Null-Space in Analytical Photogrammetry</u>. Photogrammetria (PRS), 41
- Peters, G., and Wilkinson, J.H., 1970. The Least squares problem and pseudoinverses. The Computer Journal, v 13 n° 3, august..
- Rice, J.R., 1981. Matrix computations and mathematical software. Mc Graw-Hill. N.Y.
- Robson, S., 1991. <u>Is There a Future for Film in Close-Range Photogrammetry?</u> Photogrammetric Record, 13 (77).
- Rodrigues, G., 1982. (editor). Parallel computations. Vol.1. Academic Press.
- Sanjuán, A., 1992. El tratamiento analítico de la Fotogrametría de pequeño formato.
 TOP-CART-92. Madrid
- Sanjuán, A., Almeida, P., 1993. <u>Tratamiento analítico simplificado en fotogrametría con cámaras no-métricas</u>. II Congreso de Expresion Gráfica aplicada a la Edificación. Tenerife
- Sanjuán, A., Almeida, P., 1994. <u>Calibración de una cámara no métrica</u>. II Congreso Internacional de Rehabilitación del Patrimonio Arquitectónico y edificación del 28 de agosto al 4 de septiembre de 1994. Mar de Plata, Argentina.
- Schut, G.H.,1959. Construction of Ortogonal Matrices and their Application in Analytical Photogrammetry. Photogrammetria vol XV no. 4.
- Schut, G.H.,1973. On the choice of inverse in the adjustment of coordinates.

 Photogrammetric Research, Division of Physics National Research Council of Canada,
 Ottawa.
- Schut, G.H.,1973. <u>Similarity Transformation and Least Squares</u>. Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, 39(6).
 - Schut, G.H.,1974. Methods and Fortran Programs for Self-Calibration of Position Measuring Devices. Archives of National research Council of Canada. NRC 14180.

- Schut, G.H.,1978. <u>Adjustment of bundles. Part 1: Formulation and Experiments.</u>
 Photogrammetric Research, Division of Physics National Research Council of Canada, Ottawa. NRC-16832.
- Schut, G.H.,1978. <u>Adjustment of bundles. Part 2: Programs and Operating Instruccions.</u> Photogrammetric Research, Division of Physics National Research Council of Canada, Ottawa. NRC-17401.
- Schut, G.H.,1979. Selection of Additional Parameters for the Bundle Adjustment.

 Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, 45(9).
- Schut, G.H.,1980. Adjustment of bundles. The Canadian Surveyor, 34 (2).
- Sevilla, M.J., 1985. Formulación de modelos matemáticos en la compensación de redes geodésicas. Archivo del Instituto de Astronomía y Geodesia (UCM-CSIC).
- Shih, T.Y., 1990. An Investigation into the Computational Procedures of Space Resection by Collinearity Equations. Photogrammetric Record, 13 (75).
- Smith, A.B., 1984. <u>A Comparison of Some Block Adjustment Systems in Current Use</u>. Photogrammetric Record, 11 (64).
- Spedicato, E. and Bodon, E., 1987. Solution of linear least squares via the ABS algorithm. Mathematical Programming, 58. North-Holland.
- Turner, H., 1988. <u>Multi-Model Techniques in Photogrammetry.</u> CISM Journal ACSGC, 42 (1).
- Uren, J., 1992. Adam Technology MPS-2, What the Users Think. Photogrammetric Record, 14 (80).
- Veress, S.A., 1980. <u>Contemporary Analytical Solutions in Terrestrial Photogrammetry.</u>
 Fourteenth Congress of the International Society for Photogrammetry. Hamburg.
- Veress, S.A., Youcai, H., 1987. A Method for Improving the Efficiency of the Sequential Estimation Procedure in Photogrammetry. Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, 53 (6).
- Veress, S.A. and Hatzopoulos, J.N., 1981. A Combination of Aerial and Terrestrial
 Photogrammetry for Monitoring. Photogrammetric Engineering and Remote Sensing,
 17 (12).
- Vozikis, E., 1984. Some Theorical and Practical Aspects of the OR1/SORA-PR

- System. Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, 50 (5).
- Watkins, D.S., 1991. Fundamentals of matrix computations. John Wiley & Sons. N.Y.
- Wester-Ebbinghaus, W., 1987. Simultaneous Calibration of a Photogrammetric Stereopair. Photogrammetric Record, 12 (70).
- Williams, H.S., 1972. A Theorem in Least Squares. Photogrammetric Engineering, 38(11).
- Winter, G., 1984. Aplicacion de los metodos de Quasi-Newton a problemas no lineales de transferencia de calor. Tesis Doctoral, U.P.C., Las Palmas
- Wong, Y.S., 1980. <u>Iterative methods for problems in numerical analysis.</u> Phil. D. Th. Oxford University.
- Wong, K.W. and Elphingstone, G.,1973. Recursive Partitioning by Direct Random Access. Photogrammetric Engineering, 39(3)
- Wong, K.W.,1972. Aerotriangulation by SAPGO. Photogrammetric Engineering, 38(8)
- Zlatev, Z., 1991. <u>Computational Methods for general sparse matrices.</u> Kluwer Academic Publisher. London.