UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

TESIS DOCTORAL

CONVEXIDAD, LISURA Y TEORÍA DE OPERADORES INDUCIDAS POR UNA CANTIDAD CONJUNTISTA

SERGIO FALCÓN SANTANA

Las Palmas de Gran Canaria, 2001

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

41/2000-01

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA
UNIDAD DE TERCER CICLO Y POSTGRADO

Reunido el día de la fecha, el Tribunal nombrado por el Excmo. Sr. Rector Magfco. de esta Universidad, el/a aspirante expuso esta TESIS DOCTORAL.
Terminada la lectura y contestadas por el/a Doctorando/a las objeciones formuladas por los señores miembros del Tribunal, éste calificó dicho trabajo con la nota de SOBRESALIENTE CUM LAUDE

Las Palmas de Gran Canaria, a 24 de abril de 2001.

El/a Presidente/a: Dr. D. Rafael Montenegro Armas,

El/a Secretario/a: Dr.D. Juan Rocha Martín,

El/a Vocal: Dr. D. Víctor Kolyada,

El/a Vocal: Dr.D. Antonio Martinón Cejas,

El/a Vocal: Dr. D. Jorge Betancor Pérez,

El Doctorando: D. Sergio Falcón Santana,

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

CONVEXIDAD, LISURA Y TEORÍA DE OPERADORES INDUCIDAS POR UNA CANTIDAD CONJUNTISTA

Sergio Falcón Santana

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BIBLIOTECA GENERAL · UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA

CONVEXIDAD, LISURA Y TEORÍA DE OPERADORES INDUCIDAS POR UNA CANTIDAD CONJUNTISTA

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Sergio Falcón Santana

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
LAS PALMAS DE G. CANARIA
N.° Documento 240343
N.° Copia 651804

KISHIN B. SADARANGANI SADARANGANI, profesor del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria,

CERTIFICA:

Que la presente memoria titulada CONVEXIDAD, LISURA Y TEORÍA DE OPERADORES INDUCIDAS POR UNA CANTIDAD CONJUNTISTA ha sido realizada bajo mi dirección por Don Sergio Falcón Santana, y constituye su Tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Y para que así conste, en cumplimiento de la legislación vigente y a los efectos oportunos, firmo la presente en Las Palmas de Gran Canaria, a 15 de enero de 2.001

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Eterna gratitud a mis padres y hermanos
que hicieron posible mis estudios de Matemáticas.

Mi más sincero agradecimiento a don Kishin Sadarangani
sin cuyo colaboración no habría sido posible la elaboración de esta tesis.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Dedico esta memoria a mi esposa e hijos que han sabido comprender en todo momento mis aspiraciones, tanto en mi vida profesional como fuera de ella.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Índice general

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

INTRODUCCION

Desde un punto de vista histórico, el concepto de convexidad surge hacia la mitad de los años treinta cuando Clarkson [24] definió los espacios uniformemente convexos (UC) como aquellos espacios que verifican:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ si } \|x\| \leq 1 \text{ y } \|y\| \leq 1 \text{ con } \|x-y\| \geq \epsilon \Rightarrow \|x+y\| \leq 2(1-\delta)$$

Esta definición se corresponde con la idea de que la bola unidad sea suficientemente "redonda", hecho que no es estable al pasar a una norma equivalente.

El hecho de que la convexidad uniforme implique la reflexividad, hace que los espacios uniformemente convexos tomen una mayor relevancia en la literatura matemática (una propiedad geométrica, como es que la bola unidad sea suficientemente redonda implica una propiedad topológica como es la reflexividad). La demostración de este hecho se debe a J.Pettis [66] y a D.P.Milman [62], independientemente.

En 1941, Smulyan [72] introdujo la noción de espacio uniformemente liso (US) y prueba que son, precisamente, los duales de los espacios uniformemente convexos. Más concretamente, se tiene el siguiente resultado

$$E \text{ es } UC \Leftrightarrow E^* \text{ es } US$$

$$E \text{ es } US \Leftrightarrow E^* \text{ es } UC$$

Por las mismas fechas, M.M.Day [28] define el módulo de convexidad como la función $\rho_\epsilon : [0,2] \rightarrow [0,1]$ dada por

$$\rho_E(\epsilon) = inf\{1 - \frac{\|x+y\|}{2} : x, y \in S_E, \|x-y\| \geq \epsilon\}$$

Este módulo permite caracterizar a los espacios UC como aquéllos que satisfacen que $\delta_E(\epsilon) > 0$ si $\epsilon > 0$.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Lindenstrauss [59] por su parte, define el módulo de lisura como la función $f_E : [0,1] \to [0,1]$ definida por

$$f_E(\epsilon) = \frac{1}{2} sup\{\|x+\epsilon y\| + \|x-\epsilon y\| - 2 : x, y \in S_E\}$$

y este módulo permite caracterizar a los espacios US a través de la equivalencia

$$E \text{ es } US \Leftrightarrow \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\rho_E(\epsilon)}{\epsilon} = 0$$

En el mismo trabajo, Lindenstrauss obtiene unas fórmulas sorprendentes que relacionan los módulos de convexidad y lisura a través de las siguientes igualdades:

$$\rho_E(t) = \sup_{o \leq \epsilon \leq 2} \{\frac{t\epsilon}{2} \delta_{E^*}(\epsilon)\}$$

$$\rho_{E^*}(t) = \sup_{o \leq \epsilon \leq 2} \{\frac{t\epsilon}{2} \delta_E(\epsilon)\}$$

A comienzos de los años ochenta habían surgido otras formas de medir conjuntos acotados en espacios de Banach además de la clásica de diámetro, como eran las medidas de no compacidad. Basados en la observación de que el módulo de convexidad uniforme δ_E se traduce en términos de diámetro de la forma siguiente

$$\delta_E(\epsilon) = \inf\{1 - dist(\theta, X) : \ X \subset B_E, \ X = Conv\ X, \ diam(X) \geq \epsilon\}$$

donde $Conv\ X$ denota la clausura convexa cerrada de X, Goebel y Sekowski [41] proponen la natural generalización del módulo de convexidad uniforme de la siguiente manera:

$$\overline{\Delta}_E(\epsilon) = \inf\{1 - dist(\theta, X) : \ X \subset B_E, \ X = Conv\ X, \ \alpha(X) \geq \epsilon\}$$

donde α denota la medida de no compacidad de Kuratowski, apareciendo el módulo de convexidad no compacto y, por medio de este módulo, los espacios $\overline{\Delta}$-uniformemente convexos.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Anteriormente, Huff [46] había introducido los espacios casi uniformemente convexos (NUC) y prueba que E es NUC si y sólo si E es reflexivo y verifica que para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $(x_n) \subset B_E$ converge débilmente a x y si $inf\{\|x_n - x_m\| : \ n \neq m\} \geq \epsilon$ entonces $\|x\| \leq 1 - \delta$. Esta condición es conocida con el nombre de que la norma sea uniformemente Kadec-Klee (UKK).

En 1987, Rolewicz [68] prueba que los espacios NUC y los $\overline{\Delta}$-uniformemente convexos son los mismos espacios. Por la misma época, Montesinos [64] introduce los espacios localmente casi uniformemente convexos (LNUC), aunque sin utilizar esta denominación, haciendo uso de la medida de Kuratowski de slices.

A comienzos de los noventa, Banas [7] da una caracterización de los espacios NUC en términos de slices medidos por medio de la medida de no compacidad de Hausdorff, que por ser la distancia de Hausdorff a la familia de los conjuntos relativamente compactos es la medida de no convexidad por excelencia. Además unifica y sistematiza los conceptos relacionados con la convexidad no compacta. Asimismo, con el uso de slices duales, introduce los llamados espacios casi uniformemente lisos (NUS) y obtiene una caracterización, homóloga al caso clásico, de la forma siguiente:

$$E \text{ es } NUC \Leftrightarrow E^* \text{ es } NUS$$

En el mismo trabajo se prueba que el clásico espacio c_0 es NUS y este hecho rompe con la lisura clásica ya que los espacios uniformemente lisos son reflexivos.

Recientemente, en [23], se hace un estudio análogo al realizado por Banas, pero utilizando la medida de débil no compacidd de De Blasi. En este caso, se prueba que los espacios uniformemente convexos y los localmente uniformemente convexos introducidos por esta medida de débil no compacidad coinciden con los espacios reflexivos.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

En la presente memoria se utilizan las cantidades conjuntistas que son una generalización natural de las medidas de no compacidad y que tienen como mejores representantes a la distancia de Hausdorff a una familia relevante de conjuntos acotados en un espacio de Banach y se analizan la convexidad y lisura que inducen y su relación con la teoría de operadores.

En primer lugar, y antes de empezar la tesis propiamente dicha, se exponen los preliminares del objeto estudio de esta tesis por medio de la distancia de Hausdorff y de las cantidades conjuntistas en sentido general.

En el primer capítulo se dan en primer lugar las definiciones de espacios μ-UC, μ-LUC y μ-SC, siendo μ una cantidad conjuntista general. Se prueba que en caso de que la cantidad conjuntista contenga en su núcleo a los conjuntos con un único elemento, estas clases contienen a sus homólogas inducidas por las medidas de no compacidad de Hausdorff, dígase NUC, LNUC y NSC.

En la segunda sección se plantea las condiciones que ha de verificar la cantidad conjuntista μ para que la familia de los μ-LUC esté contenida en la clase de los reflexivos. Esta condición se traduce en el hecho de que la cantidad conjuntista sea cantoriana. Esta sección finaliza con una aplicación a la teoría de puntos expuestos y fuertemente expuestos, obteniéndose una generalización de un resultado debido a Kutzarova [56].

En la siguiente sección se prueba un resultado relacionado con la teoría de la renormación y que afirma que todo espacio β-LUC, donde β es la medida de no compacidad débil de De Blasi admite una norma equivalente que lo hace LNUC. Este resultado es la versión no compacta de un reciente resultado de Moltó, Orihuela, Troyanski y Valdivia [63] que afirma que todo espacio débilmente localmente uniformemente convexo (WLUR) admite una norma equivalente localmente uniformemente convexa (LUR).

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

En la sección cuarta se hace un estudio sobre las implicaciones contrarias a la cadena $\mu - UC \Rightarrow \mu - LUC \Rightarrow \mu - SC$ y, entre otras cosas, se prueba que si la cantidad conjuntista es cantoriana y se anula en los conjuntos unipuntuales no tiene por qué verificarse la implicación contraria a $\mu - LUC \Rightarrow \mu - SC$.

En la sección quinta se introduce el módulo de μ-convexidad como $W_\mu : [0, \mu(B_E)] \to \mathcal{R}^+$ y se prueba que un espacio es μ-UC si y sólo si este módulo verifica que $W_\mu(\epsilon) > 0$ si $\epsilon > 0$, generalizándose así un resultado obtenido por Rolewicz [69]. Asimismo se prueba que el módulo de convexidad de De Blasi se anula en espacios clásicos como son c_0, l^1, $L^1(0,1)$ y el espacio $\mathcal{J}$ de James. Finalmente se da una estimación para el coeficiente de convexidad de Kuratowski, $\bar{\epsilon}_1(\mathcal{J})$ (cuyo valor, hasta lo que podemos saber, es desconocido), de la forma $\bar{\epsilon}_1(\mathcal{J}) \geq \sqrt{2}$ así como para la constante de Kottman $K(\mathcal{J})$ [1].

En la sección sexta, hacemos uso de la $\mu\beta$-propiedad como generalización de la β-propiedad de Rolewicz [69] y demostramos un teorema que relaciona los espacios μ-UC con la $\mu\beta$-propiedad.

En la sección séptima se introduce el concepto de μ-lisura y se obtiene una relación entre μ-lisura del dual y μ-convexidad del espacio.

En la octava y última sección del primer capítulo se introduce la μ-lisura y se relaciona con algunos aspectos que aparecen en la geometría de espacios de Banach como son la diferencial de Gateaux y la norma fuertemente subdiferenciable.

En el segundo capítulo se comienza con la definición de la μ-variación asociada a un operador y se prueban un conjunto de propiedades que verifica la μ-variación de un operador.

En la segunda sección se generaliza la propiedad de aproximación que es

[1]Decir que el valor de esta constante ha sido obtenido recientemente en un artículo de Prus [54]

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

un concepto fundamental en el Análisis Funcional, utilizando las cantidades conjuntistas y obteniendo una generalización de un resultado obtenido por Astala y Tilly para los operadores compactos y débilmente compactos [4].

En la tercera sección se introduce los operadores μ-tauberianos como una generalización de los operadores tauberianos clásicos. Se prueba que estos operadores son invariantes por perturbaciones débilmente compactas y se prueba que si $T : E \to F$ es un operador μ-tauberiano su núcleo $Ker\ T$ es μ-UC, resultado que generaliza el ya conocido en el caso de los clásicos operadores tauberianos de que su núcleo es reflexivo. Asimismo se prueba que si μ es una cantidad conjuntista cantoriana, entonces no existe ningún operador μ-tauberiano de l^∞ en c_0, como ocurre con los operadores tauberianos clásicos.

En la sección cuarta se estudia fundamentalmente las condiciones mínimas necesarias para que se pueda obtener un teorema de Tacon relacionado con potencias de operadores.

En el tercer y último capítulo y en una única sección, se empieza probando que los conjuntos condicionalmente débilmente compactos constituyen una familia de subconjuntos acotados que es cerrada para la topología inducida por la distancia de Hausdorff y, consecuentemente, podemos considerar la cantidad conjuntista dada por la distancia de Hausdorff a esta familia de conjuntos. Se prueba que los μ-LUC generados por esta cantidad conjuntista no tienen por qué ser reflexivos, rompiendo con las teorías estudiadas hasta la fecha y que están relacionadas con la medida de no compacidad de Hausdorff y la medida de no compacidad débil de De Blasi . El resultado más relevante en este capítulo es que los μ-UC y μ-LUC espacios generados, siendo μ la distancia de Hausdorff a los conjuntos condicionalmente débilmente compactos , coinciden con la clase de los espacios que no contienen copias de l^1

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

PRELIMINARES

En este capítulo daremos las notaciones, definiciones y resultados básicos que usaremos a lo largo de esta memoria.

0.1 DISTANCIA DE HAUSDORFF

Sea E un espacio de Banach real con norma $||.||$. Indicaremos por B_E y S_E la bola unidad cerrada y la esfera unidad de E, respectivamente. Por $P_b(E)$ denotamos la familia de los subconjuntos acotados y no vacíos de E. Para $x \in E$, $C \subset E$ y $\epsilon > 0$, escribimos:

$$d(x, C) = inf\{||x - y||, y \in C\}, \qquad B(C, \epsilon) = \{x \in E, d(x, C) \leq \epsilon\}$$

Notar que $B(C, \epsilon) = C + \epsilon B_E$.

Denotaremos por $Conv\ C$ la clausura (o envolvente) convexa cerrada del conjunto C y por $\bar{C}$ la clausura topológica de C.

Para $C, D \in P_b(E)$, se define la distancia no simétrica de Hausdorff como

$$H'(C, D) = inf\{\epsilon > 0 : C \subset B(D, \epsilon)\} = inf\{\epsilon > 0 : C \subset D + \epsilon B_E\}$$

Por $H(C, D)$ se denota la distancia de Hausdorff entre C y D definida como $H(C, D) = max\{H'(C, D), H'(D, C)\}$.

Si denotamos por $P_{bc}(E)$ la subfamilia de $P_b(E)$ formada por los subconjuntos no vacíos, acotados y cerrados de E, se puede probar que la función

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

H es una métrica en $P_{bc}(E)$ [12].

Sea $\mathcal{N}$ una subfamilia no vacía de $P_b(E)$ y consideremos las dos funciones siguientes:

$$H'_{\mathcal{N}} : P_b(E) \to R \text{ definida por } H'_{\mathcal{N}}(C) = inf\{H'(C,P) : P \in \mathcal{N}\}$$
$$H_{\mathcal{N}} : P_b(E) \to R \text{ definida por } H_{\mathcal{N}}(C) = inf\{H(C,P) : P \in \mathcal{N}\}$$

La función $H_{\mathcal{N}}$ fue considerada en [12] en un espacio métrico completo S. El principal resultado obtenido en dicho artículo viene dado por la proposición siguiente.

0.1.1 Proposición

Sea $\mathcal{N}$ una subfamilia no vacía de $P_b(S)$ que satisface la condición de que

$$M \in \mathcal{N} \text{ y } \emptyset \neq P \subset M \Rightarrow P \in \mathcal{N} \tag{0.1}$$

Entonces, para cualquier $C \in P_b(S)$ se tiene que $H'_{\mathcal{N}}(C) = H_{\mathcal{N}}(C)$.

Además, si $\mathcal{N}$ satisface la condición de que $P, M \in \mathcal{N} \Rightarrow P \cup M \in \mathcal{N}$, entonces se tiene que

$$H_{\mathcal{N}}(C \cup D) = max\{H_{\mathcal{N}}(C), H_{\mathcal{N}}(D)\}$$

para $C, D \in P_b(S)$

En caso de que se trate de un espacio de Banach E, en [48, Teorema 1.1.2] se prueban, además, algunas propiedades adicionales de la función $H_{\mathcal{N}}$. Estas propiedades quedan resumidas en el siguiente teorema.

0.1.2 Teorema

Sea $\mathcal{N}$ una subfamilia no vacía de $P_b(E)$ que satisface la condición (0.1) anterior.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

1. Si $\mathcal{N}$ satisface la condición $\lambda \in R$, $P \in \mathcal{N} \Rightarrow \lambda P \in \mathcal{N}$ entonces $H_{\mathcal{N}}(\lambda P) = |\lambda| H_{\mathcal{N}}(P)$

2. Si $\mathcal{N}$ satisface la condición de que $P, M \in \mathcal{N} \Rightarrow P + M \in \mathcal{N}$ entonces $H_{\mathcal{N}}(P + M) \leq H_{\mathcal{N}}(P) + H_{\mathcal{N}}(M)$

3. Si $\mathcal{N}$ es cerrado por clausuras convexas cerradas, más concretamente, si $\mathcal{N}$ verifica la condición de que si $P \in \mathcal{N}$ entonces $Conv\ P \in \mathcal{N}$, se tiene que $H_{\mathcal{N}}(Conv\ P) = H_{\mathcal{N}}(P)$

A continuación damos algunos ejemplos.

1. Sea $\mathcal{N}$ la familia de los subconjuntos no vacíos y relativamente compactos de E. Entonces $H_{\mathcal{N}}$ coincide con la medida de no compacidad de Hausdorff [9]

2. Sea $\mathcal{N}$ la familia de los subconjuntos no vacíos y relativamente débilmente compactos de E. Entonces $H_{\mathcal{N}}$ coincide con la medida de no compacidad débil de De Blasi [30]

3. Si $\mathcal{N} = \{\{0\}\}$ entonces $H_{\mathcal{N}}$ coincide con la norma, es decir,

$$H_{\mathcal{N}}(C) = \|C\| = sup\{\|x\| : x \in C\}$$

0.2 CANTIDADES CONJUNTISTAS

Comenzamos introduciendo la noción de cantidad conjuntista que generaliza el concepto de medida de no compacidad y que ya aparece en [13, 70].

0.2.1 Definición

Una cantidad conjuntista μ en un espacio de Banach E es una aplicación $\mu : P_b(E) \rightarrow [0, \infty)$ que satisface las siguientes condiciones, cualesquiera que sean los conjuntos $C, D \in P_b(E)$ y cualquiera que sea el escalar $\lambda \in R$:

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

1. $\mu(C \cup D) = max\{\mu(C), \mu(D)\}$

2. $\mu(\lambda C) = |\lambda|\mu(C)$

3. $\mu(C + D) \leq \mu(C) + \mu(D)$

4. $\mu(Conv\ C) = \mu(C)$

En la proposición siguiente, se dan algunas de las propiedades que verifica cualquier cantidad conjuntista [70, Proposición 1.1.5].

0.2.2 Proposición

Sea μ una cantidad conjuntista en un espacio de Banach E.
Si $C, D \in P_b(E)$ y $r > 0$, entonces se verifican las siguientes propiedades:

1. $\mu(\{0\}) = 0$
2. $\mu(B(C, r)) \leq \mu(C) + r\mu(B_E)$
3. $C \subset D \Rightarrow \mu(C) \leq \mu(D)$
4. $\mu(C) = \mu(\bar{C})$
5. $\mu(\bigcup_{0 \leq \lambda \leq r} \lambda C) = r\mu(C)$
6. $|\mu(C) - \mu(D)| \leq \mu(B_E)H(C, D)$
7. μ es uniformemente continua en $P_b(E)$ con respecto a la distancia de Hausdorff

0.2.3 Definición

Sea μ una cantidad conjuntista en un espacio de Banach E. Definimos el núcleo de la cantidad μ y lo indicamos como $Ker\ \mu$, como el conjunto $Ker\ \mu = \{C \in P_b(E) : \mu(C) = 0\}$.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

0.2.4 Proposición [70, Proposición 1.1.7]

Sea μ una cantidad conjuntista en un espacio de Banach E. Entonces, su núcleo $Ker\ \mu$ cumple las siguientes propiedades:

1. $Ker\ \mu \neq \emptyset$
2. $P, M \in Ker\ \mu \Leftrightarrow P \neq \emptyset, M \neq \emptyset$ y $P \cup M \in Ker\ \mu$
3. $\lambda \in R,\ P \in Ker\ \mu \Rightarrow \lambda P \in Ker\ \mu$
4. $P, M \in Ker\ \mu \Rightarrow P + M \in Ker\ \mu$
5. $P \in Ker\ \mu \Rightarrow Conv\ P \in Ker\ \mu$
6. $Ker\ \mu$ es cerrado en la topología generada por la distancia H en $P_b(E)$
7. $Ker\ \mu \neq P_b(E) \Leftrightarrow \mu(B_E) > 0$

Si $Ker\ \mu$ es la clase de los subconjuntos no vacíos y relativamente compactos de E, entonces se dice que μ es una medida de no compacidad.

Si $Ker\ \mu$ es la familia de los subconjuntos no vacíos y relativamente débilmente compactos de E, entonces decimos que μ es una medida de no compacidad débil.

El siguiente teorema que aparece en [70], y que será muy importante para el desarrollo posterior de este trabajo, nos da una técnica para construir cantidades conjuntistas en un espacio de Banach .

0.2.5 Teorema [70, Teorema 1.1.8]

Sea $\mathcal{N}$ una subfamilia no vacía de $P_b(E)$ que satisface las condiciones 1 a 6 de la proposición 0.2.4.
Entonces $H_{\mathcal{N}}$ verifica las siguientes propiedades:

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

1. $H_{\mathcal{N}}$ es una cantidad conjuntista

2. $Ker\ H_{\mathcal{N}} = \mathcal{N}$

3. $\mathcal{N} = P_b(E) \Leftrightarrow H_{\mathcal{N}}(B_E) = 0$

4. $\mathcal{N} \neq P_b(E) \Leftrightarrow H_{\mathcal{N}}(B_E) = 1$

5. Si μ es otra cantidad conjuntista en E tal que $Ker\ \mu = \mathcal{N}$, entonces $\mu(D) \leq \mu(B_E)H_{\mathcal{N}}(D)$ para cada $D \in P_b(E)$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Capítulo 1

CONVEXIDAD Y LISURA INDUCIDAS POR UNA CANTIDAD CONJUNTISTA

1.1 μ-CONVEXIDAD

En esta sección, estudiaremos la μ-convexidad que será una generalización de la convexidad no compacta y de la convexidad no compacta débil [7, 8, 9, 23]. Más concretamente, con ayuda de una cantidad conjuntista μ definiremos los espacios μ-uniformemente convexos (los cuales indicaremos con la notación μ-UC) que generalizan a los ya conocidos en la literatura por casi uniformemente convexos (NUC), los espacios μ-localmente uniformemente convexos (μ-LUC) que generalizan a los localmente casi uniformemente convexos (LNUC) y los μ-estrictamente convexos (μ-SC) que generalizan a los casi estrictamente convexos (NSC) [7, 8, 9]. Asimismo, generalizan a los espacios recientemente estudiados en [23] bajo el nombre de débilmente casi uniformemente convexos (WNUC), débilmente localmente casi uniformemente convexos (WLNUC) y a los débilmente casi estrictamente convexos

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

(WNSC).

A partir de este momento, supondremos que μ es una cantidad conjuntista definida en un espacio de Banach E.

1.1.1 Definición

Un espacio de Banach E se dice que es μ-uniformemente convexo y lo indicamos en la forma E es μ-UC, si verifica que

$$\lim_{\epsilon \to 0} sup\{\mu(F(f,\epsilon)) : f \in S_{E^*}\} = 0$$

donde $F(f,\epsilon) = \{x \in B_E : f(x) \geq 1 - \epsilon\}$.

Observación

a) Téngase en cuenta que si la cantidad μ es la medida de no compacidad de Hausdorff χ, entonces la definición anterior se corresponde con la definición de espacio casi uniformemente convexo NUC [8].

b) Si la cantidad μ es la medida de no compacidad débil de De Blasi β, la noción anterior se corresponde con la de espacio débilmente casi uniformemente convexo WNUC [23].

A continuación, localizando la definición 1.1.1, obtendremos los espacios μ-localmente uniformemente convexos μ-LUC.
Concretamente, tenemos la siguiente definición.

1.1.2 Definición

Un espacio de Banach E se dice que es μ-localmente uniformemente convexo y lo indicamos en la forma μ-LUC, si para cada $f \in S_{E^*}$ se verifica que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \mu(F(f,\epsilon)) = 0$$

A continuación definimos los espacios μ-estrictamente convexos.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

1.1.3 Definición

Un espacio de Banach E se dice que es μ-estrictamente convexo y lo indicamos en la forma μ-SC, si $F(f,0)$ es un elemento de $Ker\ \mu$ para cada $f \in S_{E^*}$, siendo $F(f,0) \neq \emptyset$. Equivalentemente, E es μ-SC si $\mu(F(f,0)) = 0$; para $f \in S_{E^*}$ con $F(f,0) \neq \emptyset$.

Notar que $F(f,0) = \emptyset$ para algún $f \in S_{E^*}$ si el espacio es no reflexivo, en virtud del teorema de caracterización de la reflexividad de James [48].

Observación

Evidentemente, se tiene la cadena de implicaciones

$$\mu\text{-UC} \Rightarrow \mu\text{-LUC} \Rightarrow \mu\text{-SC}$$

Una cuestión natural que se plantea es saber si las inversas de las implicaciones anteriores se verifican o no y en qué circunstancias lo hacen.

Como se sabe, en caso de que μ sea la medida de no compacidad de Hausdorff , existen ejemplos de espacios que demuestran que dichas implicaciones inversas no se verifican [7, 8, 9].

Y en caso de que μ sea la medida de no compacidad débil de De Blasi se prueba en [23] que las clases de los espacios μ-UC y μ-LUC coinciden con la clase de los espacios reflexivos. Asimismo, en [23] se da un ejemplo de espacio μ-SC que no es reflexivo. Con estos dos ejemplos, podemos deducir que la verificación o no de las implicaciones inversas de la cadena anterior depende de la cantidad conjuntista μ.

Otro ejemplo a tener en cuenta es que si μ es la cantidad conjuntista que aparece en el ejemplo 3 posterior al teorema 0.1.2, es decir $\|C\| = sup\{\|x\| : x \in C\}$ para cualquier $C \in P_b(E)$, entonces no existe ningún espacio de Banach (salvo el caso trivial en que $E = \{0\}$) que sea μ-SC. Y esto es así porque, por un resultado debido a Bishop-Phelps [16], el conjunto de funcio-

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

nales $f \in S_{E^*}$ tales que $F(f,0) \neq \emptyset$ es denso en la esfera unidad de E^* y, en consecuencia, $\mu(F(f,0)) > 0$ para todos estos $f \in S_{E^*}$. Por lo tanto, para esta cantidad conjuntista , las clases de los espacios μ-UC, μ-LUC y μ-SC son vacías, salvo para el caso trivial en que $E = \{0\}$.

Pasemos ahora a estudiar cuándo estas clases contienen alguna clase relevante de espacios de Banach.

Si μ es una cantidad conjuntista que se anula en una clase de espacios de Banach, entonces dicha clase está contenida en la de los μ-UC y por lo tanto, en la de los μ-LUC y en la de los μ-SC.

Existen cantidades conjuntistas que se anulan en clases relevantes de espacios de Banach, como por ejemplo la medida de no compacidad débil de De Blasi que se anula en la clase de los espacios reflexivos [23, 30].

Por otra parte, existen cantidades conjuntistas que no se anulan en espacios de Banach infinito-dimensionales como es la medida de no compacidad de Hausdorff , ya que en caso contrario la bola unidad cerrada sería compacta y, por tanto, el espacio E finito dimensional.

1.1.4 Definición

Sean μ y ν dos cantidades conjuntistas en la clase de los espacios de Banach

Diremos que la cantidad ν es menos fina que la μ, si para cada espacio de Banach E existe un número $k > 0$ para el cual se verifica que $\mu(C) \leq k\ \nu(C)$ para cualquier $C \in P_b(E)$ (notar que k depende de E).

Hay que tener en cuenta que si μ es una cantidad conjuntista , entonces, por el teorema 0.2.5, la cantidad $H_{Ker\mu}$ es también una cantidad conjuntista que verifica que $\mu(C) \leq \mu(B_E) H_{Ker\ \mu}(C)$ para cualquier $C \in P_b(E)$. Por lo tanto, $H_{Ker\mu}$ es menos fina que μ.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Seguidamente estudiaremos la relación existente entre la ν-convexidad y la μ-convexidad, siendo μ y ν dos cantidades conjuntistas con la condición de que ν sea menos fina que μ.

El siguiente resultado es evidente a partir de las definiciones precedentes.

1.1.5 Proposición

Sean μ y ν dos cantidades conjuntistas tales que ν es menos fina que μ. Entonces:

$$\text{E es } \nu\text{-UC} \Rightarrow \text{E es } \mu\text{-UC}$$
$$\text{E es } \nu\text{-LUC} \Rightarrow \text{E es } \mu\text{-LUC}$$
$$\text{E es } \nu\text{-SC} \Rightarrow \text{E es } \mu\text{-SC}$$

Por la relación existente entre la cantidad conjuntista μ y la cantidad conjuntista asociada $H_{Ker\mu}$ ya mencionada con anterioridad, se obtienen los siguientes corolarios.

1.1.6 Corolario

Sea μ una cantidad conjuntista no trivial. Entonces:

$$\text{E es } H_{Ker\mu}\text{-UC} \Rightarrow \text{E es } \mu\text{-UC}$$
$$\text{E es } H_{Ker\mu}\text{-LUC} \Rightarrow \text{E es } \mu\text{-LUC}$$

Para el caso de los espacios μ-SC se obtiene un resultado más fuerte que el de la proposición 1.1.5 para las cantidades conjuntistas μ y $H_{Ker\mu}$. Más concretamente, se tiene el siguiente resultado.

1.1.7 Corolario

$$\text{E es } \mu\text{-SC} \Leftrightarrow \text{E es } H_{Ker\mu}\text{-SC}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Demostración.
Es evidente que si E es $H_{Ker\mu}$ -SC entonces E es μ-SC, sin más que tener en cuenta que $H_{Ker\mu}$ es menos fina que μ y la proposición 1.1.5.
Por lo tanto, sólo hay que demostrar que si el espacio E es μ-SC, entonces también es $H_{Ker\mu}$ -SC. En efecto; sea $f \in S_{E^*}$ siendo $F(f,0) \neq \emptyset$. Como E es μ-SC, resulta que $\mu(F(f,0)) = 0$ y por tanto, $F(f,0) \in Ker\ \mu$. Luego $H_{Ker\ \mu}(F(f,0)) = 0$ y, en consecuencia, E es $H_{Ker\mu}$ -SC.

Una cuestión natural es preguntarse si las implicaciones inversas en la proposición 1.1.5 se verifican o no.
Esta cuestión se contesta negativamente en base al trabajo [23]. En este trabajo se prueba que existen espacios WNUC, WLNUC y WNSC, o de forma equivalente, espacios β-UC, β-LUC y β-SC, donde β es la medida de no compacidad débil de De Blasi , que no son NUC, LNUC ni NSC o, de forma equivalente, que no son χ-UC, χ-LUC ni χ-SC, respectivamente. Tener en cuenta que $\beta \leq \chi$. Por lo tanto, concluimos con el siguiente teorema.

1.1.8 Teorema

Existen cantidades conjuntistas μ y ν, con ν menos fina que μ y espacios de Banach E, tales que estos espacios E son μ-UC (respectivamente, μ-LUC y μ-SC) que no son ν-UC (respectivamente, ν-LUC ni ν-SC).

Otra cuestión, un poco más delicada que la anterior, es saber si las implicaciones inversas en el corolario 1.1.6 se verifican o no. Más concretamente, saber si existe una cantidad conjuntista μ y un espacio de Banach E tal que E sea μ-UC (respectivamente, μ-LUC) y que no sea $H_{Ker\mu}$ -UC (respectivamente, $H_{Ker\mu}$ -LUC).

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Por otra parte, un gran número de las cantidades conjuntistas μ que se utilizan tienen como propiedad que los conjuntos unipuntuales pertenecen al núcleo de la misma. En consecuencia, por la proposición 0.2.4, como dicho núcleo es cerrado en la topología generada por la distancia de Hausdorff, y como para cualquier conjunto relativamente compacto K y para $\epsilon > 0$,

$$\bar{K} \subset \bigcup_{x \in K} B(x_i, \epsilon)$$

y por la propiedad de compacidad

$$\bar{K} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \epsilon) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} + \epsilon B_E$$

resulta en consecuencia que, aplicando las propiedades de una cantidad conjuntista , $\mu(K) \leq \epsilon\ \mu(B_E)$. Y como esto es cierto para todo $\epsilon > 0$, resultará que el núcleo de la cantidad μ contendrá a los relativamente compactos. Por lo tanto, si $C \in P_b(E)$ y $\chi(C) = r$ siendo χ la medida de no compacidad de Hausdorff se tendrá que para $\epsilon > 0$ existe un conjunto F relativamente compacto tal que $C \subset F + (r + \epsilon)B_E$. Aplicando la cantidad conjuntista μ y teniendo en cuenta sus propiedades, resultará que $\mu(C) \leq (r + \epsilon)\mu(B_E)$. Y como esto es válido para cualquier $\epsilon > 0$, resultará finalmente que $\mu(C) \leq \chi(C)\mu(B_E)$.
En consecuencia, tenemos la siguiente proposición.

1.1.9 Proposición

Si μ es una cantidad conjuntista cuyo núcleo contiene a los conjuntos unipuntuales, entonces la medida de no compacidad de Hausdorff χ es menos fina que μ. En forma más precisa, se verifica que $\mu(C) \leq \chi(C)\mu(B_E)$ para cualquier $C \in P_b(E)$.

Si $\mu = \chi$, entonces el espacio χ-UC se expresa como NUC y se dice que es casi uniformemente convexo.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Si $\mu = \beta$, entonces el espacio β-UC se expresa como WNUC y se dice que es débilmente casi uniformemente convexo.

Y de igual forma se define los restantes espacios "localmente" y "estrictamente".

Por lo tanto, teniendo en cuenta la proposición 1.1.5, se tiene el siguiente corolario.

1.1.10 Corolario

Sea μ una cantidad conjuntista cuyo núcleo contiene a los conjuntos unipuntuales . Entonces:

$$\text{E es NUC} \Rightarrow \text{E es } \mu\text{-UC}$$
$$\text{E es LNUC} \Rightarrow \text{E es } \mu\text{-LUC}$$
$$\text{E es NSC} \Rightarrow \text{E es } \mu\text{-SC}$$

Este corolario lo que nos viene a decir es que si la cantidad conjuntista se anula en los conjuntos unipuntuales , entonces las clases de los espacios de Banach μ-UC, μ-LUC y μ-SC, contienen a las clases de los espacios NUC, LNUC y NSC respectivamente.

1.2 μ-CONVEXIDAD Y REFLEXIVIDAD

En los casos conocidos de χ y β, medidas de no compacidad de Hausdorff y de no compacidad débil de De Blasi, respectivamente, se tiene los siguientes resultados [9, 23, 63]:

$$\text{E es } \chi - UC \Rightarrow \text{E es } \chi - LUC \Rightarrow \text{E es reflexivo}$$
$$\text{E es } \beta - UC \Leftrightarrow \text{E es } \beta - LUC \Leftrightarrow \text{E es reflexivo}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Nos planteamos a continuación qué condición ha de verificar la cantidad conjuntista μ para que la clase de los espacios μ-LUC esté contenida en la clase de los espacios reflexivos [1].

Veremos que una condición suficiente para que esto ocurra es que la cantidad conjuntista μ sea cantoriana. A continuación definiremos este concepto.

1.2.1 Definición

Una cantidad conjuntista μ definida en un espacio de Banach E se dice que es cantoriana si para cualquier sucesión decreciente (A_n) de subconjuntos no vacíos de E, acotados y cerrados, tal que $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$ se verifica que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$$

Notar que las cantidades χ y β son cantorianas [11, 23].

El siguiente resultado prueba que si un espacio E es μ-LUC y la cantidad μ es cantoriana, entonces E es reflexivo.

Pero antes recordemos un resultado debido a James [48] que caracteriza a los espacios reflexivos y que se usará para probar el resultado mencionado anteriormente.

1.2.2 Teorema

Un espacio de Banach E es reflexivo si y sólo si para cada $f \in E^* - \{0\}$ existe un $x \in E - \{0\}$ tal que $f(x) = \|f\| \cdot \|x\|$.

Pasemos entonces a probar el teorema mencionado.

[1] Notar que esta sección es parte del artículo [33]

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

1.2.3 Teorema

Si μ es una cantidad conjuntista cantoriana definida en un espacio de Banach E y este espacio E es μ-LUC, entonces E es reflexivo.
Demostración.
Como E es μ-LUC, dado un $f \in S_{E^*}$, se tiene que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \mu(F(f, \epsilon)) = 0$$

o de forma equivalente,

$$\lim_{n \to \infty} \mu(F(f, \frac{1}{n})) = 0$$

Veamos que $(F(f, \frac{1}{n}))$ es una sucesión decreciente de conjuntos no vacíos, acotados y cerrados.
Es evidente que $F(f, \frac{1}{n}) \neq \emptyset$ para cada $n \in N$ ya que $f \in S_{E^*}$ y $F(f, \frac{1}{n}) = \{x \in B_E : f(x) \geq 1 - \frac{1}{n}\}$. Obviamente, $F(1, \frac{1}{n}) \supset F(f, \frac{1}{n+1})$ y además, los conjuntos $F(f, \frac{1}{n})$ son, trivialmente, cerrados. Por tanto, como

$$\lim_{n \to \infty} \mu(F(f, \frac{1}{n})) = 0$$

y al ser μ cantoriana, resultará que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F(f, \frac{1}{n}) \neq \emptyset$$

Por otra parte, como

$$\begin{aligned} \bigcap_{n=1}^{\infty} F(f, \frac{1}{n}) &= \{x \in B_E : f(x) \geq 1 - \frac{1}{n}, \text{ para todo } n \in N\} \\ &= \{x \in B_E : f(x) = 1\} = \{x \in S_E : f(x) = 1\} = F(f, 0) \end{aligned}$$

resultará que $F(f, 0) \neq \emptyset$ y esto se ha probado para $f \in S_{E^*}$ arbitrario.
En consecuencia, por el mencionado teorema de James, E es reflexivo, ya que si $f \in E^* - \{0\}$ entonces $\frac{f}{\|f\|} \in S_{E^*}$, y, en consecuencia, $F\left(\frac{f}{\|f\|}, 0\right) \neq \emptyset$. Esto significa que existe $x \in S_E$ tal que $\frac{f}{\|f\|}(x) = 1 = \|x\|$ o, lo que es lo mismo,

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

$f(x) = \|f\| \cdot \|x\|$.

Este resultado generaliza el obtenido por Montesinos [64, Theorem 3] que afirma que todo espacio $\chi - LUC$ es reflexivo. Asimismo, generaliza el resultado obtenido en [23, Teorema 4.1.3] en el que se prueba que todo espacio $\beta - LUC$ es reflexivo.

Este teorema tiene como consecuencia la siguiente caracterización de reflexividad.

1.2.4 Corolario

E es un espacio de Banach reflexivo si y sólo si existe una cantidad conjuntista cantoriana definida sobre él que lo haga μ-LUC.
Demostración.
$\Leftarrow$) Es el teorema 1.2.3
$\Rightarrow$) Si E es un espacio reflexivo, entonces existe una cantidad conjuntista cantoriana que es la medida de no compacidad débil de De Blasi que es nula en $P_b(E)$ por ser E reflexivo y, en consecuencia, E es $\beta - LUC$.

Para finalizar esta sección, planteamos las dos cuestiones siguientes:

1. ¿Existe una cantidad conjuntista que no sea cantoriana?
2. ¿Existe una cantidad conjuntista μ y un espacio de Banach E de forma que E sea μ-LUC y sin embargo no sea reflexivo?

Nótese que la segunda cuestión contiene a la primera.
Las respuestas a estas preguntas las dejaremos para un tratamiento posterior.

Finalizamos esta sección con una aplicación a la teoría de los puntos expuestos y fuertemente expuestos.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

1.2.5 Puntos expuestos y fuertemente expuestos

Sea E un espacio de Banach , $f \in S_{E^*}$ y $\|f\| = 1$. Decimos que $x \in B_E$ es un punto expuesto de B_E por f si $f(x) = 1$ y las condiciones $f(y) = 1,\ y \in B_E$ implican que $y = x$. Decimos que $x \in B_E$ es un punto fuertemente expuesto de B_E por F si x si es un punto expuesto y los diámetros de $F(f, \delta)$ tienden a cero cuando $\delta \to 0$.

El siguiente teorema nos da una condición suficiente para que un punto expuesto sea fuertemente expuesto.

Teorema 1 *Sea E un μ-LUC espacio siendo μ una cantidad conjuntista que satisface la condición de Cantor. Entonces, todo punto expuesto de B_E es fuertemente expuesto.*

Demostración. Sea $f \in S_{E^*}$ y x un punto expuesto de B_E por f. Supongamos que x no es un punto fuertemente expuesto de B_E por f. Esto significa que exsite $\epsilon > 0$ tal que para todo $n \in N$ existe $\delta_n > 0$ con $\delta_n < \frac{1}{n}$ y $diam(F(f, \delta_n)) > \epsilon$. Consideremos los conjuntos $F'_{\delta_n} = F(f, \delta_n) - B(x, \frac{\epsilon}{2})$. Vamos a demostrar que $F'_{\delta_n} \neq \emptyset$ para $n \in N$.
En efecto, puesto que $diam(F(f, \delta_n)) > \epsilon$ podemos encontrar $u, v \in F(f, \delta_n)$ con $\|u - v\| > \epsilon$. Supongamos que $F'_{\delta_n} = \emptyset$ para algún $n \in N$. esto significa que $u, v \in B(x, \frac{\epsilon}{2})$ o, equivalentemente, $\|u - x\| \leq \frac{\epsilon}{2}$ y $\|v - x\| \leq \frac{\epsilon}{2}$ y, en consecuencia, $\|u - v\| \leq \epsilon$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $F'_{\delta_n} \neq \emptyset$ para todo $n \in N$.

Puesto que $F'_{\delta_1} \subset F'_{\delta_2}$ para $0 < \delta_1 < \delta_2$, F'_δ es cerrado y convexo y como E es un μ-LUC espacio, obtenemos que

$$\lim_{n \to \infty} \mu(F'_{\delta_n}) \leq \lim_{n \to \infty} \mu(F(f, \delta_n)) = 0$$

Como μ satisface la condición de Cantor, es

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F'_{\delta_n} \neq \emptyset$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Sea, $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F'_{\delta_n}$ es decir $f(y) = 1$ y como $y \notin B(x, \frac{\epsilon}{2})$, $y \neq x$.
Por lo tanto, x no es un punto expuesto de B_E por f lo cual es una contradicción. Esto completa la demostración.

Este teorema generaliza un resultado que aparece en [?]

1.3 SOBRE LA TEORÍA DE LA RENORMACIÓN

Antes de plantear la cuestión que vamos a tratar en esta sección, haremos un breve repaso en el contexto clásico que nos dará la motivación del problema a tratar.

En la teoría clásica, se puede probar que la definición de espacios uniformemente convexos (UC) dada en la introducción, se puede expresar en términos de sucesiones de la siguiente manera :

$$\text{E es UC} \Leftrightarrow (\forall (x_n), (y_n) \subset S_E : \lim_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| = 2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0).$$

Hacer notar que en la literatura, la definición anterior aparece con el nombre de uniformemente rotundo (UR).

La definición anterior se puede localizar de la siguiente manera, dando lugar a lo que se conoce como espacios localmente uniformemente rotundos (LUR) :

$$\text{E es LUR} \Leftrightarrow (\forall (x_n) \subset S_E \text{ y } \forall x \in S_E : \lim_{n\to\infty} \|x_n + x\| = 2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0).$$

Obviamente, se tiene la implicación $UR \Rightarrow LUR$. Además, la implicación inversa no tiene por qué verificarse. De hecho, en [Lovaglia, 1955] se prueba que el clásico espacio l^1 se puede renormar equivalentemente con una norma $|||.|||$ de tal manera que $(l^1, |||.|||)$ es LUR y, consecuentemente, este espacio no puede ser UR ya que éstos son reflexivos. Este ejemplo

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

nos permite afirmar que existen espacios LUR que no se pueden renormar equivalentemente de tal manera que sean UR.

La versión débil de las definiciones anteriores permite introducir lo que en la literatura se conoce como espacios débilmente uniformemente rotundos (WUR) y débilmente localmente uniformemente rotundos (LWUR) y que vienen definidos por

$$\text{E es WUR} \iff (\forall (x_n), (y_n) \subset S_E : \lim_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| = 2 \Rightarrow x_n - y_n \xrightarrow{w} 0)$$

$$\text{E es LWUR} \iff (\forall (x_n) \subset S_E \text{ y } \forall x \in S_E : \lim_{n\to\infty} \|x_n + x\| = 2 \Rightarrow x_n - x \xrightarrow{w} 0)$$

Evidentemente se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} UR & \Rightarrow & WUR \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ LUR & \Rightarrow & WLUR \end{array}$$

Hacer notar que existen ejemplos de espacios de Banach WUR que no se pueden renormar equivalentemente de tal manera que con esta nueva norma sean UR. En los últimos, años han aparecido numerosos artículos con la intención de probar si el resultado arriba mencionado es cierto para la versión local. Más concretamente, si existen espacios de Banach WLUR que no se pueden renormar equivalentemente de tal manera que sean LUR. En un artículo reciente de Moltó, Orihuela, Troyanski y Valdivia se da una respuesta negativa a esta cuestión. Más precisamente, se prueba que si E es un espacio WLUR, entonces existe una norma equivalente en E que lo hace LUR. La demostración de este resultado se hace utilizando técnicas de σ-fragmentabilidad introducidas en [75].

En el caso de la convexidad no compacta, que es la convexidad introducida por la medida de no compacidad de Hausdorff , nosotros tenemos que

$$\text{E es } \chi - UC \Rightarrow \text{E es } \chi - LUC$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

La versión débil de esta definición sería de forma natural la convexidad inducida por la medida de no compacidad débil de De Blasi β que ha sido estudiada en [23] y, además, como $\beta \leq \chi$ se tendría el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccc} \chi - UC & \Rightarrow & \beta - UC \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \chi - LUC & \Rightarrow & \beta - LUC \end{array}$$

Pues bien, nosotros nos planteamos si en este contexto de convexidad no compacta se siguen verificando los resultados anteriores relativos al caso clásico. Más concretamente, podemos plantearnos las dos cuestiones siguientes relacionadas con la teoría de la renormación:

1. ¿Se puede renormar equivalentemente cualquier espacio β-UC para que sea χ-UC?
2. ¿Se puede renormar equivalentemente todo espacio β-LUC para que sea χ-LUC?

Antes de contestar a estas cuestiones, haremos un breve estudio de la convexidad inducida por la medida de no compacidad débil de De Blasi .

Evidentemente, como la medida de no compacidad débil de De Blasi se anula en los espacios reflexivos, tenemos la siguiente cadena de implicaciones:

$$\text{Reflexividad} \Rightarrow \beta - UC \Rightarrow \beta - LUC$$

Por otra parte, como la medida de no compacidad débil de De Blasi es cantoriana, resultará por el teorema 1.2.3 que todo espacio β-LUC es reflexivo. Resumiendo, tenemos la siguiente caracterización:

$$\beta - UC \Leftrightarrow \beta - LUC \Leftrightarrow Reflexivo$$

En virtud de esta equivalencia, la cuestión 1 anterior se podría expresar de la siguiente manera:

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

¿Se puede renormar equivalentemente cualquier espacio reflexivo para que sea χ-UC?.

Tener en cuenta que un espacio E es χ-UC si y sólo si E es reflexivo y uniformemente Kadec-Klee (UKK), ver [46], donde la condición UKK está definida de la siguiente manera:
E es UKK $\Leftrightarrow$ $\forall \epsilon > 0, \exists \delta < 1$ tal que si $\|x_n\| \leq 1$ y $x_n \xrightarrow{w} x$ con $\inf\{\|x_n - x_m\| : m \neq n\} \geq \epsilon \Rightarrow \|x\| < \delta$

Por tanto, la cuestión anterior se puede expresar así:

¿Se puede renormar equivalentemente cualquier espacio reflexivo para que sea UKK?.

En [46, Theorem 4] se prueba que el espacio reflexivo $l^2(l^2, l^3, l^4, \ldots)$, no se puede renormar equivalentemente para que sea UKK. Por tanto, este ejemplo prueba que existen espacios de Banach β-UC que no se pueden renormar equivalentemente para que sean χ-UC, como en el caso clásico.

Respecto a la segunda cuestión, ésta se podría reformular de esta otra manera:

¿Se puede renormar equivalentemente cualquier espacio reflexivo para que sea χ-LUC?.

Esta cuestión quedará contestada afirmativamente en el siguiente teorema.

1.3.1 Teorema

Cualquier espacio reflexivo se puede renormar equivalentemente para que sea χ-LUC.

Demostración.
Sea E un espacio de Banach reflexivo. Entonces B_E es débilmente compacto y como $E =< B_E >$, E será un espacio débilmente compactamente generado. Por un teorema de Troyanski sobre renormación [75], E tiene una norma

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

$|||.|||$ equivalente LUR. Como E es reflexivo, E con esta nueva norma $|||.|||$ será reflexivo y LUR. Por un resultado que aparece en [74], la condición LUR juntamente con la reflexividad implica que E sea α-LUC, donde α es la medida de no compacidad de Kuratowski. Como la medida de Kuratowski es una cantidad conjuntista menos fina que la medida de no compacidad de Hausdorff (en realidad son equivalentes) [11] resultará por la proposición 1.1.5 que E es χ-LUC [2].

1.4 RELACIÓN ENTRE LAS DISTINTAS PROPIEDADES ASOCIADAS A LA μ-CONVEXIDAD

En la observación inmediatamente posterior a la definición 1.1.3, se daba la cadena de implicaciones

$$\mu\text{-UC} \Rightarrow \mu\text{-LUC} \Rightarrow \mu\text{-SC}$$

y se planteaba la cuestión de saber si las implicaciones inversas se verificaban o no, dándose un ejemplo de cantidad conjuntista para las que no se verificaban (χ, medida de no compacidad de Hausdorff) y otro ejemplo de una cantidad conjuntista (β, medida de no compacidad débil de De Blasi) en la que las clases μ-UC y μ-LUC coincidían, verificándose que la clase de los μ-SC contiene estrictamente a la clase de los μ-LUC.

En esta sección nos planteamos averiguar bajo qué condiciones respecto a la cantidad conjuntista μ se puede encontrar siempre un espacio que sea μ-SC y que no sea μ-LUC generalizando de esta manera el resultado mencionado

[2]Notar que parte de esta sección ha sido presentada como ponencia en el Congreso Internacional de Análisis Funcional celebrado en Valencia en julio de 2000 en honor del profesor D. Manuel Valdivia [23]

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

anteriormente. En orden a buscar estas condiciones, recordemos algunos conceptos y resultados obtenidos con anterioridad.

1.4.1 Definición

Un espacio de Banach E se dice que es estrictamente convexo (SC) si, dados dos elementos distintos cualesquiera $x, y \in S_E$ se verifica que $\|x + y\| < 2$. Desde un punto de vista geométrico, un espacio de Banach estrictamente convexo es aquél cuya esfera unidad no contiene segmentos rectilíneos.

A continuación recordemos un resultado que aparece en [22, Proposición 1.4.2] y que utilizaremos más adelante.

1.4.2 Proposición

Sea E un espacio de Banach estrictamente convexo y sea $f \in S_{E^*}$. Si F(f,0) no es vacío, entonces F(f,0) posee un único elemento.

En virtud de esta proposición, si μ es una cantidad conjuntista que se anula en los conjuntos unipuntuales , se tiene el siguiente resultado de prueba inmediata.

1.4.3 Teorema

Sea μ una cantidad conjuntista que contiene en su núcleo a los conjuntos formados por un único elemento y sea E un espacio de Banach estrictamente convexo. Entonces E es μ-SC.

El resultado siguiente se debe a Clarkson [25] y será utilizado posteriormente en esta memoria.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

1.4.4 Teorema

Todo espacio de Banach separable puede ser renormado equivalentemente con una norma estrictamente convexa.

Por tanto, ya tenemos las herramientas necesarias para contestar a la pregunta planteada al comienzo de esta sección.

1.4.5 Teorema

Sea μ una cantidad conjuntista cantoriana que se anula en los conjuntos unipuntuales . Entonces, existe al menos un espacio de Banach que es μ-SC y no es μ-LUC.

Demostración.

Sea E un espacio de Banach separable y no reflexivo, por ejemplo, c_0, l^1, $\mathcal{J}$. Por el teorema de Clarkson, existe una norma equivalente en dicho espacio tal que E con esta norma es estrictamente convexo. Por otra parte, como por hipótesis, la cantidad conjuntista μ es cantoriana, por el teorema 1.2.3 si E fuera μ-LUC tendría que ser reflexivo, lo cual contradice la elección del espacio E de partida. Queda así demostrado el teorema.

Como comentábamos al comienzo de esta sección, existen cantidades conjuntistas μ para las que hay espacios que son μ-LUC y no μ-UC y existen cantidades conjuntistas para las que no existen espacios que sean μ-LUC y no μ-UC. El ejemplo en este último caso es el de la medida de no compacidad débil de De Blasi que es cantoriana [22]. Más adelante veremos que el hecho de ser cantoriana no es esencial. Más concretamente, daremos un ejemplo de cantidad conjuntista no cantoriana para la que las clases μ-LUC y μ-UC son coincidentes.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Otro hecho a tener en cuenta es que si μ es una cantidad conjuntista cantoriana que se anula en una clase de espacios de Banach M, por el teorema 1.2.3 esta clase M estaría contenida en la clase de los reflexivos y se tendría entonces el siguiente corolario.

1.4.6 Corolario

Sea μ una cantidad conjuntista cantoriana que se anula en una clase de espacios de Banach $\mathcal{M}$. Entonces

$$\begin{array}{c} \mathcal{M} \Rightarrow \mu - UC \ \Rightarrow \mu - LUC \ \Rightarrow \mu - SC \\ \Downarrow \\ Reflexivo \end{array}$$

1.5 MÓDULO DE μ-CONVEXIDAD

En esta seccion definiremos un módulo que nos permitirá caracterizar a los espacios μ-UC. Este módulo estará definido de modo análogo al módulo de convexidad no compacto [8].

1.5.1 Definición

Se define el módulo de μ-convexidad de un espacio E como la función $W_\mu : [0, \mu(B_E)] \to R^+$ definida por $W_\mu(\epsilon) = inf\{1 - dist(\theta, X) : X \subset B_E,\ X = Conv\ X, \mu(X) \geq \epsilon\}$

Téngase en cuenta que:

a) El módulo de μ-convexidad no tiene por qué estar definido en cualquier espacio de Banach E. Por ejemplo, si la cantidad conjuntista μ es nula en un cierto espacio de Banach E, entonces la definición anterior carece de sentido.

b) La función W_μ es creciente.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

1.5.2 Definición

La característica de μ-convexidad de un espacio E se indica por $\epsilon_\mu(E)$ y se define como $\epsilon_\mu(E) = sup\{\epsilon \geq 0 : W_\mu(\epsilon) = 0\}$.

Si definimos un espacio de Banach E como W_μ-uniformemente convexo si $W_\mu(\epsilon) > 0$ para $\epsilon > 0$, entonces tenemos el siguiente resultado inmediato.

1.5.3 Corolario

Un espacio de Banach E es W_μ-uniformemente convexo si y sólo si $\epsilon_\mu(E) = 0$.

El resultado principal de esta sección es probar que las condiciones de μ-UC y W_μ-uniformemente convexo son equivalentes. Se generalizaría así el resultado dado por Rolewicz [68] de que la clase de los espacios NUC y la clase de los espacios Δ-uniformemente convexos son la misma. Para ello definimos a continuación una función auxiliar que nos será muy útil para obtener el resultado anteriormente mencionado.
Consideremos la función $\beta_E^\mu : [0,1] \to [0, \mu(B_E)]$ dada por

$$\beta_E^\mu(t) = sup\{\mu(X) : X \subset B_E,\ X = Conv\ X,\ dist(\theta, X) \geq 1 - t\}$$

Lema 1 *β_E^μ es creciente*

Demostración.
Sean $t_1 < t_2,\ X \subset B_E,\ X = Conv\ X,\ dist(\theta, X) \geq 1 - t_1$.
Evidentemente, $dist(\theta, X) \geq 1 - t_1 \geq 1 - t_2$ y por tanto, por definición de $\beta_E^\mu(t_2)$, resultará que $\mu(X) \leq \beta_E^\mu(t_2)$. Como esto se ha hecho para cualquier X que verifique las condiciones iniciales, resultará que $\beta_E^\mu(t_1) \leq \beta_E^\mu(t_2)$, lo que demuestra el lema.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Este lema nos permite afirmar que existe $\lim_{t\to 0}\beta_E^{\mu}(t)$ y lo indicaremos por

$$\lim_{t\to 0}\beta_E^{\mu}(t) = \beta_0^{\mu}(E)$$

A continuación demostraremos un lema consecuencia del teorema de Hahn-Banach, que nos permitirá caracterizar a los espacios μ-SC en términos de la función β_E^{μ} definida anteriormente.

1.5.4 Lema

Si A es un conjunto convexo no vacío contenido en la esfera unidad S_{E^*}, entonces A está contenido en algún F(f,0) para cierto $f \in S_{E^*}$.
Demostración.
Sea $B_0 = \{x \in E : \|x\| < 1\}$. Como B_0 es abierto y A convexo y no vacío y verifica que $A \cap B_0 = \emptyset$, se tendrá, por el teorema de separación consecuencia del teorema de Hahn-Banach, que existe un $f \in S_{E^*}$ que verifica que

$$sup\{f(x) : x \in B_0\} \leq inf\{f(x) : x \in A\} \tag{1.1}$$

Evidentemente, $sup\{f(x) : x \in B_0\} = \|f\|$, ya que si $x \in B_0$, $f(x) < 0$, entonces, como $-x \in B_0$, es $f(-x) > 0$ y $f(x) < f(-x) \leq sup\{f(x) : x \in B_0\}$.
Por otra parte, y en virtud de (1.1), para $y \in A \subset S_E$ se tiene que
$\|f\| = sup\{f(x) : x \in B_0\} \leq inf\{f(x) : x \in A\} \leq f(y) \leq \|f\|$, de donde se deduce que $f(y) = \|f\| = 1$ para $y \in A$ arbitrario.
En consecuencia, $A \subset F(f, 0)$ como se quería demostrar.

A continuación demostraremos el teorema anteriormente mencionado.

1.5.5 Teorema

Un espacio de Banach E es μ-SC si y sólo si $\beta_E^{\mu}(0) = 0$.
Demostración.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

$\Rightarrow$) Sea $\beta_E^\mu(0) > 0$ y tomemos $0 < \delta < \beta_E^\mu(0)$.
Entonces, por la definición de β_E^μ esto significará que existe un $X = Conv\ X,\ X \subset B_E,\ 1 \leq dist(\theta, X)$ que verifica que $\delta < \mu(X)$.
Como $X \subset B_E,\ 1 \leq dist(\theta, X)$, es obvio que $X \subset S_E$. Como X es convexo y no vacío, por el lema anterior existirá un $f \in S_{E^*}$ tal que $X \subset F(f, 0)$.
Finalmente, como $\mu(X) > 0$, se tendrá que $\mu(F(f, 0)) > 0$ y, en consecuencia, E no es μ-SC.
$\Leftarrow$) Sea $f \in S_{E^*}$ y consideremos el slice $F(f, 0) = \{x \in S_E : f(x) = 1\}$.
Como F(f,0) es un conjunto convexo no vacío y $F(f, 0) \subset S_E$, resultará que $dist(\theta, F(f, 0)) = 1$ y, por definición de β_E^μ, $\mu(F(f, 0)) \leq \beta_E^\mu(0) = 0$.
Por tanto, $\mu(F(f, 0)) = 0$ y E es μ-SC.

En el siguiente teorema, probamos que la característica de μ-convexidad de un espacio de Banach E coincide con la cantidad $\beta_0^\mu(E)$ anteriormente mencionada.

1.5.6 Teorema

$\beta_0^\mu(E) = \epsilon_\mu(E)$
Demostración.
Veamos que $\epsilon_\mu(E) \leq \beta_0^\mu(E)$.
Supongamos que $0 < \epsilon_\mu(E)$ y tomemos $0 < \epsilon < \epsilon_\mu(E)$. Por definición de la característica de μ-convexidad, esto significará que $W_\mu(\epsilon) = 0$.
Por lo tanto, para cada $\delta > 0$, existe $X \subset B_E,\ X = Conv\ X,\ \mu(X) \geq \epsilon$ que verifica que $1 - dist(\theta, X) \leq \delta$, o lo que es lo mismo, $dist(\theta, X) \geq 1 - \delta$.
En consecuencia, $sup\{\mu(Y) : Y \subset B_E,\ Y = Conv\ Y,\ dist(\theta, Y) \geq 1 - \delta\} \geq \epsilon$, y por lo tanto, $\beta_E^\mu(\delta) \geq \epsilon$. Como $\delta \in [0, 1)$ es arbitrario, resultará que $\beta_E^\mu(E) \geq \epsilon$ para todo $\delta \in [0, 1)$ y de aquí se deduce que

$$\beta_0^\mu(E) = \lim_{\delta \to 0} \beta_E^\mu(\delta) \geq \epsilon$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Finalmente, como ϵ es arbitrario y $0 < \epsilon < \epsilon_\mu(E)$, resulta que $\beta_0^\mu(E) \geq \epsilon_\mu(E)$.

Para probar la otra desigualdad, supongamos que $\beta_0^\mu(E) > \epsilon_\mu(E)$. Tomamos $\delta > 0$ tal que $\beta_0^\mu(E) > \delta > \epsilon_\mu(E)$. Por definición de $\beta_0^\mu(E)$, y teniendo en cuenta que $\beta_E^\mu(t)$ es creciente, se tiene que $\beta_E^\mu(t) > \delta$ para todo $t \in (0, 1]$. Esto significará, por definición de β_E^μ, que para cada $t \in (0, 1]$, existe un convexo cerrado $X_t \subset B_E$ que verifica que $dist(\theta, X_t) \geq 1 - t$, $\mu(X_t) > \delta$. En consecuencia, por definición de W_μ, resultará que $W_\mu(\delta) \leq t$ y esto se verifica para todo $t \in (0, 1]$, por lo que $W_\mu(\delta) = 0$. Luego, $\epsilon_\mu(E) \geq \delta$, lo que es absurdo puesto que $0 < \delta < \epsilon_\mu(E)$.

En virtud del corolario 1.5.3 y del teorema anterior, tenemos la siguiente caracterización de los espacios W_μ-uniformemente convexos en términos de la cantidad $\beta_0^\mu(E)$

1.5.7 Corolario

E es W_μ-uniformemente convexo si y sólo si $\beta_0^\mu(E) = 0$

Con el siguiente resultado daremos una caracterización de los espacios μ-UC análoga al corolario anterior y que nos permitirá deducir que la clase de las espacios μ-UC y la clase de los espacios W_μ-uniformemente convexos, coinciden.

1.5.8 Teorema

E es un espacio μ-UC si y sólo si $\beta_0^\mu(E) = 0$

Demostración.

$\Rightarrow$) Supongamos que E es un espacio μ-UC. Esto significará que

$$\lim_{\epsilon \to 0} sup\{\mu(F(f, \epsilon)) : f \in S_{E^*}\} = 0$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

o lo que es lo mismo, para $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < \delta' < \delta$ verifica que $sup\{\mu(F(f, \delta')) : f \in S_{E^*}\} < \epsilon$.
Sea $X \subset B_E$, $X = Conv\ X$, $dist(\theta, X) \geq 1 - \delta'$ con $0 < \delta' < \delta$.
Entonces $X \cap Int\ B(\delta, 1-\delta') = \emptyset$ siendo $Int\ B(\delta, 1-\delta')$ el interior de la bola de centro δ y radio $1 - \delta'$. Como X es convexo y no vacío , por el teorema de separación, existirá $g \in S_{E^*}$ tal que
$sup\{g(x) : x \in Int\ B(\delta, 1-\delta')\} \leq inf\{g(x) : x \in X\}$.
Por otra parte,

$$\begin{aligned} &sup\{g(x) : x \in Int\ B(\delta, 1-\delta') = sup\{g(x) : x \in (1-\delta')Int\ B_E\} \\ &= sup\{g(x) : \tfrac{x}{1-\delta'} \in Int\ B_E\} = sup\{(1-\delta')g\left(\tfrac{x}{1-\delta'}\right) : \tfrac{x}{1-\delta'} \in Int\ B_E\} \\ &= (1-\delta')sup\{g(y) : y \in Int\ B_E\} = (1-\delta')\|g\| = 1 - \delta' \end{aligned}$$

con lo que resultará que $1 - \delta' \leq inf\{g(x) : x \in X\}$. Luego $X \subset F(g, \delta')$ y en consecuencia se tiene que

$$\mu(X) \leq \mu(F(g, \delta') \leq sup\{\mu(F(f, \delta')) : f \in S_{E^*}\} < \epsilon$$

Por lo tanto, por definición de $\beta_E^\mu(t)$ resultará que
$\beta_E^\mu(\delta') \leq sup\{\mu(F(f, \delta')) : f \in S_{E^*}\} < \epsilon$, de donde se deduce que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \beta_E^\mu(t) = 0$$

En consecuencia, $\beta_0^\mu(E) = 0$
$\Leftarrow$) Supongamos que E no es μ-UC. Esto implica la existencia de $\epsilon_0 > 0$ y una sucesión de funcionales continuos de norma uno $(f_n) \subset S_{E^*}$ y una sucesión de números positivos δ_n con $\delta_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ tales que $\mu(F(f_n\delta_n)) \geq \epsilon_0$.
Teniendo en cuenta que si $x \in F(f, \delta)$ entonces $f(x) \geq 1 - \delta$ y como $f \in S_{E^*}$ y $1 - \delta \leq f(x) \leq \|f\|.\|x\| = \|x\|$, resultará que $dist(\theta, F(f_n, \delta_n)) \geq 1 - \delta_n$.
Como los slices $F(f_n, \delta_n)$ son convexos, cerrados y contenidos en B_E, se tendrá por definición de β_E^μ que $\beta_E^\mu(\delta_n) \geq \epsilon_0$ para todo $n \in N$.
Como $\delta_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, resultará que

$$\beta_0^\mu(E) = \lim_{n \to \infty} \beta_E^\mu(\delta_n) \geq \epsilon_0$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

lo que contradice la hipótesis.

El siguiente teorema establece que la clase de los espacios W_μ-uniformemente convexos y la clase de los espacios μ-UC son la misma clase y es consecuencia inmediata del corolario 1.5.7 y del teorema 1.5.8.

1.5.9 Teorema

Un espacio de Banach E es W_μ-uniformemente convexo si y sólo si E es μ-UC.

A continuación, estudiamos el módulo de μ-convexidad para el caso particular de que μ sea la medida de no compacidad débil de De Blasi . Tener en cuenta que este módulo estará definido únicamente para los espacios no reflexivos. Veamos cuál es la expresión de este módulo para los clásicos espacios de Banach no reflexivos.

1.5.10 Teorema

$$W_\beta = 0 \text{ en el espacio } c_0$$

Demostración.
Consideremos la sucesión $(x_n) \subset c_0$ definida por $x_n^k = 1$ si $k \leq n$ y $x_n^k = 0$ si $k > n$. Obviamente, $(x_n) \subset S_{c_0}$.
Veamos a continuación que $conv(\{x_n : n \in N\}) \subset S_{c_0}$.
En efecto: Sea

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_{n_i} \text{ con } \lambda_i \geq 0, \ \sum_{1}^{p} \lambda_i = 1 \text{ y } n_1 < n_2 < \cdots < n_p.$$

Entonces,
$x =$

$$\lambda_1(1,1,\ldots,\overset{n_1}{\smile}{1},0,0,\ldots)+\lambda_2(1,1,\ldots,\overset{n_2}{\smile}{1},0,0,\ldots)+\cdots+\lambda_p(1,1,\ldots,\overset{n_p}{\smile}{1},0,0,\ldots) =$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

$$\left(\sum_1^p \lambda_i, \ldots, \overbrace{\sum_1^p \lambda_i}^{n_1}, \sum_2^p \lambda_i, \ldots, \overbrace{\sum_2^p \lambda_i}^{n_2}, \ldots, \sum_{p-1}^p \lambda_i, \ldots, \overbrace{\sum_{p-1}^p \lambda_i}^{n_{p-1}}, \lambda_p, \ldots, \overbrace{\lambda_p}^{n_p}, 0, \ldots\right) =$$

$= (1, 1, \ldots, 1, \sum_2^p \lambda_i, \ldots)$
y, evidentemente, $x \in S_{c_0}$
Por otra parte, en [5, Proposition 5.10] se prueba que $\beta(\{x_n\}) = 1$. En consecuencia, $W_\beta(1) = 0$ y, en virtud de que el módulo W_β es creciente, se deduce que $W_\beta = 0$ en c_0, como se quería probar.

A continuación pasamos a estudiar este módulo en el espacio l^1. Tener en cuenta que en l^1, al ser un espacio de Schur, los conjuntos relativamente compactos y los conjuntos relativamente débilmente compactos coinciden y, en consecuencia, $\chi = \beta$, y, por tanto, $W_\beta(\epsilon) = W_\chi(\epsilon)$.

En [41] se prueba que el módulo de convexidad no compacto en l^1 es idénticamente igual a cero y, por lo tanto, se tiene el siguiente resultado.

1.5.11 Teorema

$$W_\beta = 0 \text{ en el espacio } l^1$$

En el siguiente teorema estudiamos W_β en el espacio $L^1(0, 1)$ de las funciones reales integrables Lebesgue en el intervalo $(0, 1)$ con la norma estándar

$$\|x\| = \int_0^1 |x(t)| dt$$

1.5.12 Teorema

$$W_\beta = 0 \text{ en el espacio } L^1(0, 1)$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Demostración.

Consideremos el conjunto $X \subset S_{L^1(0,1)}$ formado por las funciones x_δ con $0 < \delta < 1$ y definidas por

$$x_\delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\delta} & \text{si } t \in (0,\delta) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se prueba en [13, Teorema 3] que $\beta(X) = 1$.

Por otra parte, veamos que $Conv\ X \subset S_{L^1(0,1)}$. En efecto: Sean

$$\lambda_i \geq 0 \text{ y } \sum_{1\leq i\leq n} \lambda_i = 1 \text{ y consideremos la función } x = \sum_{1\leq i\leq n} \lambda_i x_{\delta_i}$$

Como $x \geq 0$ se tiene que

$$\int_0^1 |x|dt = \int_0^1 |\sum_{1\leq i\leq n} \lambda_i x_{\delta_i}|dt = \int_0^1 \left(\sum_{1\leq i\leq n} \lambda_i x_{\delta_i}\right) dt = \sum_{1\leq i\leq n} \lambda_i \int_0^{\delta_i} \frac{1}{\delta_i} dt = 1$$

y, por tanto, $x \in S_{L^1(0,1)}$. En consecuencia, $Conv\ X \subset S_{L^1(0,1)}$. De aquí se deduce que $W_\beta = 0$ en $L^1(0,1)$, como queríamos probar.

A continuación estudiamos el módulo W_β en el espacio de $\mathcal{J}$ James. Recordemos que este espacio está formado por las sucesiones

$$x = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) \text{ tal que } \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \text{ y que además verifican que}$$

$$\|x\| = sup \left\{ \left(\sum_{1\leq i\leq m} |a_{p_{i+1}} - a_{p_i}|^2 \right)^{1/2} : m \in N,\ p_1 < p_2 < \cdots < p_m \right\} < \infty$$

Entre las propiedades más interesantes de este espacio podemos destacar que es isométrico a su bidual (no por la isometría canónica), que no es reflexivo, no contiene copias de c_0 ni de l^1 y que además, $dim\ \mathcal{J}^{**}/\mathcal{J} = 1$ [60, Example 1.d.2]. En consecuencia, este espacio es un espacio no reflexivo más cercano a los reflexivos.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

1.5.13 Teorema

$$W_\beta = 0 \text{ en el espacio } \mathcal{J}$$

Demostración.

Consideremos los elementos de la forma

$$f_n = (1, 1, \ldots, \overset{\overset{n}{\smile}}{1}, 0, \ldots)$$

Los vectores f_n tienen todos norma unidad y no tienen $w-$límite en $\mathcal{J}$ [60, Example 1.d.2]. Veamos que $\beta(D) = 1$ en $\mathcal{J}$, donde $D = \{f_n : n \in N\}$. De hecho, como D es un subconjunto de la bola unidad cerrada de $\mathcal{J}$, basta probar que $\beta(D) \geq 1$.

Supongamos que $D \subset H + rB_{\mathcal{J}}$, donde $H \subset \mathcal{J}$ es relativamente débilmente compacto y que $0 < r < 1$. Entonces, para todo $n \in N$ hay un vector $g_n \in H$ tal que $||g_n - f_n|| \leq r$.

Puesto que $\{g_n : n \in N\} \subset H \subset \mathcal{J}$ y H es relativamente débilmente compacto, el conjunto $\{g_n : n \in N\}$ tiene un punto de acumulación $g \in \mathcal{J}$. Ahora bien, para cada $x \in \mathcal{J}^*$ con $||x|| = 1, \epsilon > 0$ y $p \in N$ existe un entero $n > p$ tal que $| < f_n - g, x > | \leq | < f_n - g_n, x > | + | < g_n - g, x > | \leq r + \epsilon$. En particular, si escogemos que x sea la función x_p definida como $x_p(y_n) = y_n^p$ para $y_n \in \mathcal{J}$, obtenemos la desigualdad

$| < g, x_p > | =$

$| < g - f_n, x_p > + < f_n, x_p > | \geq | < f_n, x_p > | - | < g - f_n, x_p > | = 1 - (r + \epsilon)$

En otras palabras, $g \notin \mathcal{J}$ ya que $g_n \to 0$. Esta contradicción origina que $\beta(D) \geq 1$.

Vamos a probar ahora que $Conv\ D \subset S_{\mathcal{J}}$.

Sea z tal que $z \in Conv\ D$. Esto quiere decir que

$$z = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_{n_i} \text{ con } \lambda_i \geq 0 \text{ y } \sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i = 1$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Sin que por ello se pierda generalidad, podemos suponer que $n_1 < n_2 < \ldots < n_p$. Entonces

$$z = (\lambda_1, \ldots, \overset{n_1}{\smile}{\lambda_1}, 0, \ldots) + (\lambda_2, \ldots, \overset{n_2}{\smile}{\lambda_2}, 0, \ldots) + \cdots + (\lambda_p, \ldots, \overset{n_p}{\smile}{\lambda_p}, 0, \ldots) =$$

$$= (1, \ldots, \overset{n_1}{\smile}{1}, \sum_{2 \leq i \leq p} \lambda_i, \ldots, \overset{n_2}{\smile}{\sum_{2 \leq i \leq p}} \lambda_i, \ldots, \overset{n_{p-1}}{\smile}{\sum_{p-1 \leq i \leq p}} \lambda_i, \lambda_p, \ldots, \overset{n_p}{\smile}{\lambda_p}, 0, \ldots)$$

Tomando $p_1 = 1$ y $p_2 = n_p + 1$ se obtiene

$$||z|| \geq (|z_1 - z_{n_p+1}|^2)^{1/2} = (|1-0|^2)^{1/2} = 1$$

Obviamente, como por otra parte $f_n \in S_{\mathcal{J}}$ es $||z|| \leq 1$. En consecuencia, $z \in S_{\mathcal{J}}$ y hemos probado que $Conv\ D \subset S_{\mathcal{J}}$.
Luego, $W_\beta = 0$ en el espacio $\mathcal{J}$.

Notar que $W_\chi \leq W_\beta$ por lo que tenemos el siguiente corolario.

1.5.14 Corolario

$$W_\chi(\mathcal{J}) = 0$$

1.5.15 Definición

Por $I(A)$ se indica la medida de no compacidad de Istratescu que se define en la forma siguiente:

$$I(A) = \sup_{(x_n) \subset A} \{\inf\{||x_n - x_m|| : n \neq m,\ n, m = 1, 2, \ldots\}\}$$

La cantidad $I(B_E)$ se llama constante de Kottman del espacio E y también se indica como $K(E)$.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

El módulo de convexidad no compacta fue introducido por Goebel y Sekowski [41] y se define como la función $\bar{\Delta}_E : [0,2] \longrightarrow [0,1]$ dada por

$$\bar{\Delta}_E(\epsilon) = \inf\{1 - dist(\theta, X) : \; X \subset B_E, \; X = Conv\ X, \; \alpha(X) \geq \epsilon\}$$

donde $Conv\ X$ indica la clausura convexa cerrada del conjunto X. Obviamente $\bar{\Delta}_E$ es una función no decreciente. El número $\bar{\epsilon}_1(E)$ definido como

$$\bar{\epsilon}_1(E) = \sup\{\epsilon \geq 0, \bar{\Delta}_E(\epsilon) = 0\}$$

es el coeficiente de convexidad no compacta y los espacios en los que se verifica que $\bar{\epsilon}_1(E) = 0$ se llaman espacios $\bar{\Delta}$-uniformemente convexos.

Sea Δ_E una función cuya definición se obtiene a partir de la definición de $\bar{\Delta}_E$ reeemplazando la medida de Kuratowski α por la medida de Hausdorff de no compacidad, χ. Notar que la función Δ_E se define en el intervalo $[0,1]$. Análogamente, indicamos por $\epsilon_1(E)$ el coeficiente de convexidad no compacta asociado a Δ_E. Notemos que las desigualdades $\chi(A) \leq \alpha(A) \leq 2\chi(A)$ para todo conjunto acotado A antes mencionada, dan ahora

$$\bar{\Delta}_E(\epsilon) \leq \Delta_E(\epsilon) \leq \bar{\Delta}_E(2\epsilon), \text{ para } \epsilon \in [0,1]$$

y, en consecuencia, $\epsilon_1(E) \leq \bar{\epsilon}_1(E) \leq 2\epsilon_1(E)$.

A continuación probaremos unlema que será herramienta principal para los resultados posteriores.

1.5.16 Lema

Existe un sucesión (f_n) en el espacio $\mathcal{J}$ tal que

$$\|f_n\| = 1, \; Conv\ (\{f_n : n \in N\}) \subset S_{\mathcal{J}} \text{ y } \|f_n - f_m\| = \sqrt{2} \text{ para } n \neq m$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Demostración.

Consideremos la sucesión de elementos de la forma $f_n = (1, 1, \ldots, \underset{\smile}{\overset{n}{1}}, 0, 0, \ldots)$. Entonces, como vimos en el teorema 1.5.13, $\|f_n\| = 1$ y $Conv\,(\{f_n : n \in N\} \subset S_{\mathcal{J}}$.

A continuación probaremos que $\|f_n - f_m\| = \sqrt{2}$ para $n \neq m$.

Supongamos que $n < m$. Entonces

$$f_m - f_n = (0, 0, \ldots, \overset{n+1}{1}, \ldots, \overset{m}{1}, 0, 0, \ldots) \tag{1.2}$$

Tomando $p_1 = n$, $p_2 = n+1$ y $p_3 = m+1$ en la definición de la norma $\|f_m - f_n\|$ tenemos

$$\begin{aligned} \|f_m - f_n\| &\geq \left(\sum_{i=2}^{3} |a_{p_{i-1}} - a_{p_i}|^2\right)^{1/2} = \left(|a_{p_1} - a_{p_2}|^2 + |a_{p_2} - a_{p_3}|^2\right)^{1/2} = \\ &= (|0-1|^2 + |1-0|^2)^{1/2} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Para probar la desigualdad opuesta, empezaremos indicando por $A_1 = \{1, 2, \ldots, n\}$, $A_2 = \{n+1, \ldots, m\}$ y $A_3 = \{m+1, m+2, \ldots\}$.

Teniendo en cuenta la ecuación (1.2), obviamente

$$\left(\sum_{2 \leq i \leq m} |a_{p_{i-1}} - a_{p_i}|^2\right)^{1/2} \tag{1.3}$$

será mayor cuando tomemos $p_1 \in A_1$. Si $p_2 \in A_1$ o $p_2 \in A_3$, su contribución en $\|f_n - f_m\|$ es nulo y por lo tanto $p_2 \in A_2$ es la mejor elección. Análogamente es la mejor elección $p_3 \in A_3$. Otra elección de p_i hace que (1.3) sea más pequeña.

Por lo tanto, la mejor elección se hace cuando $p_1 \in A_1$, $p_2 \in A_2$ y $p_3 \in A_3$ y esto hace que

$$\left(|a_{p_1} - a_{p_2}|^2 + |a_{p_2} - a_{p_3}|^2\right)^{1/2} = \left(|0-1|^2 + |1-0|^2\right)^{1/2} = \sqrt{2}$$

En consecuencia, $\|f_m - f_n\| = \sqrt{2}$ para $n \neq m$ y la demostración se ha completado.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Respecto al coeficiente de convexidad no compacta asociado a la medida de no compacidad de Kuratowski en el espacio de James, como $\epsilon_1(\mathcal{J}) = 1$ y $\bar{\epsilon}_1(\mathcal{J}) \geq \epsilon_1(\mathcal{J})$ podemos obtener la siguiente estimación, $\bar{\epsilon}_1(\mathcal{J}) \geq 1$.

En el teorema siguiente, mejoraremos la estimación anterior.

1.5.17 Teorema

$$\bar{\epsilon}_1(\mathcal{J}) \geq \sqrt{2}$$

Demostración.
Tomamos la misma sucesión anterior (f_n). Es evidente que $\alpha(D) \geq \sqrt{2}$ donde $D = \{f_n : n \in N\}$ en virtud de la definición de medida de no compacidad de Kuratowski y el hecho de que $\|f_n - f_m\| = \sqrt{2}$ para $n \neq m$. Como $\alpha(D) = \alpha(Conv\ D) = \sqrt{2}$ y también es $Conv\ D \subset S_{\mathcal{J}}$ tenemos que $\overline{\Delta}_{\mathcal{J}}(\sqrt{2}) = 0$ y, en consecuencia, $\bar{\epsilon}_1(\mathcal{J}) \geq \sqrt{2}$.

Existe un problema abierto que es conocer el valor exacto de $\bar{\epsilon}_1(\mathcal{J})$.

Finalmente, teniendo en cuenta la definición de medida de no compacidad de Istratescu y el lema 1.5.16, es $K(J) \geq \sqrt{2}$.

Otra interesante cuestión es calcular el valor exacto de $K(J)$ [3].

En vista de estos últimos teoremas podemos plantearnos la siguiente cuestión:

[3] Esta cuestión ha quedado resuelta recientemente en un artículo de Prus en Proceedings of the AMS [54]

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

¿Existe algún espacio de Banach no reflexivo tal que su módulo W_β no sea idénticamente nulo en él?

1.6 LA $\mu\beta$-PROPIEDAD

En esta sección generalizamos la llamada propiedad β de Rolewicz [69] que es una propiedad que se encuentra entre la convexidad uniforme clásica (UC) y la χ-UC propiedad, siendo χ la medida de no compacidad de Hausdorff . A continuación, comentaremos los resultados de Rolewicz antes citados.

En el mismo se prueba que la norma es uniformemente convexa si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $1 < \|x\| < 1 + \delta$, entonces $diam(R(x)) < \epsilon$, donde el conjunto $R(x)$ viene dado por $R(x) = D(x, B_E)\backslash B_E$ siendo $D(x, B_E) = Conv\ (\{x\} \cup B_E)$.

La caracterización anterior sugirió a Rolewicz que en lugar de utilizar el diámetro para medir un conjunto acotado, podría utilizar la medida de no compacidad de Kuratowski y de esta manera surge la propiedad β, generalmente llamada β-propiedad.

Decimos que un espacio de Banach E posee la β-propiedad si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $1 < \|x\| < 1 + \delta$, entonces $\alpha(R(x)) < \epsilon$, siendo α la medida de no compacidad de Kuratowski.

Asimismo, Rolewicz prueba que

$$\text{UC} \Rightarrow \ \beta\text{-propiedad} \Rightarrow \text{NUC}$$

En [22] se hace un estudio de lo que allí se llama la $w\beta$-propiedad, que está definida de forma idéntica a la β-propiedad, con la salvedad de que en lugar de la medida de no compacidad de Kuratowski, se usa la medida de no compacidad débil de De Blasi .

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Nosotros generalizaremos esta definición utilizando una cantidad conjuntista general y así tendremos la siguiente definición.

1.6.1 Definición

Un espacio de Banach E verifica la $\mu\beta$-propiedad, donde μ es una cantidad conjuntista cualquiera, si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $1 < \|x\| < 1 + \delta$ entonces $\mu(R(x)) < \epsilon$.

Observación.

Notar que si ν es una cantidad conjuntista menos fina que μ (definición 1.1.4), entonces la condición de $\nu\beta$-propiedad implica la $\mu\beta$-propiedad. En particular, en virtud de la proposición 1.1.9, si μ es una cantidad conjuntista cuyo núcleo contiene a los conjuntos unipuntuales , entonces se verifica que la $\chi\beta$-propiedad implica la $\mu\beta$-propiedad, donde, como es habitual, χ es la medida de no compacidad de Hausdorff .

Sin embargo, en las mismas condiciones acerca de la cantidad conjuntista μ, la $\mu\beta$-propiedad no tiene por qué implicar la $\chi\beta$-propiedad como se prueba en [22, Proposición 3.1.2].

El resultado principal de esta sección es demostrar que una condición suficiente para que un espacio de Banach sea μ-UC es que verifique la $\mu\beta$-propiedad, generalizándose así el resultado dado por Rolewicz [69].

Antes de probar este resultado daremos un lema auxiliar que se usará en la demostración del resultado anteriormente citado.

1.6.2 Lema

Sea $f \in S_{E^*}$ y $\delta > 0$.
Entonces, existe un $x \in E$ tal que $f(x) = 1 + 2\delta$ y $1 + 2\delta \leq \|x\| \leq 1 + 3\delta$.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Demostración.
Como $f \in S_{E^*}$, existirá un $x_0 \in S_E$ que verifique que $1 - \epsilon < f(x_0) \leq 1$, donde ϵ se determinará más adelante.
Consideremos la aplicación $\phi : [1 + 2\delta, 1 + 3\delta] \to R$ tal que $\phi(r) = rf(x_0)$.
Obviamente, ϕ es continua y, además, se tiene que
$\phi(1 + 2\delta) = (1 + 2\delta)f(x_0) \leq 1 + 2\delta$, puesto que $f(x_0) \leq 1$.
Por otra parte, pretendemos encontrar un $x \in E$ tal que $f(x) = 1 + 2\delta$ y una forma de encontrarlo sería aplicar el teorema de los valores intermedios para funciones continuas a la aplicación ϕ y, por lo tanto, deberá verificarse que $1 + 2\delta \leq \phi(1 + 3\delta) = (1 + 3\delta)f(x_0)$ y, en consecuencia,

$$\frac{1 + 2\delta}{1 + 3\delta} \leq f(x_0)$$

Como $1 - \epsilon < f(x_0)$, el ϵ buscado deberá verificar que

$$\frac{1 + 2\delta}{1 + 3\delta} = 1 - \epsilon, \text{ de donde } \epsilon = \frac{\delta}{1 + 3\delta}$$

Por lo tanto, para este valor de ϵ se tiene que $\phi(1 + 2\delta) \leq 1 + 2\delta < 1 + 3\delta)$. En consecuencia, por el teorema de los valores intermedios para funciones continuas, existe $r \in [1 + 2\delta, 1 + 3\delta]$ que verifica que $\phi(r) = rf(x_0) = 1 + 2\delta$. Y con esto se obtiene el x buscado que sería $x = rx_0$, ya que como $x_0 \in S_{E^*}$ se tiene que $\|rx_0\| = r$ y $1 + 2\delta \leq \|rx_0\| = r \leq 1 + 3\delta$.

A continuación pasamos a enunciar y demostrar el teorema citado anteriormente.

1.6.3 Teorema

Si el espacio E verifica la $\mu\beta$-propiedad, entonces E es un espacio μ-UC, siendo μ una cantidad conjuntista que contiene en su núcleo a los conjuntos

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

unipuntuales .

Demostración.

Supongamos que el espacio E no es μ-UC. Esto significará que existe un $\epsilon_0 > 0$ y una sucesión de funcionales lineales y continuos de norma uno $(f_n) \subset S_{E^*}$ y una sucesión de números positivos $\delta_n \to 0$ tales que $\mu(F(f_n, \delta_n)) \geq \epsilon_0$.
Tomemos los $x_n \in E$ que verifiquen $1 + 2\delta_n \leq \|x_n\| \leq 1 + 3\delta_n$,
$f_n(x_n) = 1+2\delta_n$ cuya existencia queda garantizada por el lema anterior 1.6.2, y consideremos los elementos de la forma $(x_n + y)/2, \ y \in F(f_n, \delta_n)$.
Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} f_n(\frac{x_n+y}{2}) &= \frac{1}{2}f_n(x_n) + \frac{1}{2}f_n(y) = \frac{1}{2}(1+2\delta_n) + \frac{1}{2}f_n(y) \\ &\geq \frac{1}{2}(1+2\delta_n) + \frac{1}{2}(1-\delta_n) = 1 + \frac{1}{2}\delta_n > 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, como $f_n \in S_{E^*}$, $\frac{1}{2}(x_n + y) \notin B_E$.
Por otra parte, teniendo en cuenta que $y \in B_E$ ya que $y \in F(f_n, \delta_n)$ y que $x_n \in D(x_n, B_E) = Conv\ (\{x_n\} \cup B_E\})$, resultará que $\frac{1}{2}(x_n + y) \in D(x_n, B_E)$.
Luego, $\frac{1}{2}(x_n + y) \in R(x_n)$ y, en consecuencia, $A_n = \{\frac{1}{2}(x_n + y) : y \in F(f_n, \delta_n)\} \subset R(x_n)$.
Por otra parte, $\mu(A_n) = \mu(\frac{1}{2}(\{x_n\} + F(f_n, \delta_n))) = \frac{1}{2}\mu(\{x_n\} + F(f_n, \delta_n))$.
Como μ es una cantidad conjuntista cuyo núcleo contiene a los conjuntos unipuntuales , resultará que $\mu(A_n) = \frac{1}{2}\mu(F(f_n, \delta_n))$ (ver nota posterior).
Como $\mu(F(f_n\delta_n)) \geq \epsilon_0, \ A_n \subset R(x_n)$, resultará que
$\epsilon_0\frac{1}{2} \leq \mu(A_n) = \frac{1}{2}\mu(F(f_n\delta_n)) \leq \mu(R(x_n))$.
A su vez, como $1 + 2\delta_n \leq \|x_n\| \leq 1 + 3\delta_n$ y $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ y, además $\mu(R(x_n)) \geq \epsilon_0/2$, esto implicará que el espacio E no posee la $\mu\beta$-propiedad, con lo que acaba la demostración.

Observación

En el último teorema se ha probado que $\mu\beta$-propiedad $\Rightarrow$ μ-UC siempre que μ sea una cantidad conjuntista que se anula en los conjuntos unipuntua-

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

les La verificación o no de la implicación contraria depende de la cantidad conjuntista en cuestión.

Así si μ es la medida de no compacidad de Hausdorff , Kutzarova prueba que existen espacios χ-UC que no verifican la $\chi\beta$-propiedad. Sea $\Gamma = \Pi_{i=2}^{\infty}\{1, 2, \ldots, i\}$, es decir, Γ es la familia de todas las sucesiones $\gamma = \{\gamma^i\}_{i=1}^{\infty}$ de enteros positivos tales que $1 \leq \gamma^i \leq i + 1$. Sea ϕ_Γ la familia de todos los subconjuntos finitos de Γ con la propiedad de que si $A \in \phi_\Gamma$ existe un entero positivo m tal que si $\gamma_k = \{\gamma_k^i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\gamma_l = \{\gamma_l^i\}_{i=1}^{\infty}$ son elementos diferentes de A, entonces $\gamma_k^m \neq \gamma_l^m$ y $\Gamma_k^i = \gamma_l 1$ para $1 \leq i \leq m - 1$.

Sea X el espacio de las funciones reales sobre Γ tal que

$$\|x\| = \sup\{\sum_{n\in N}\left(\sum_{\gamma\in A_n}|x(\gamma)|^2\right)^{1/2}\} < \infty$$

donde el supremo es tomado sobre todos los sistemas finitos $\{A_n\}_{n\in N}$ con $A_n \in \phi_\Gamma$ y $A_i \cup A_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

A su vez, en [22] se prueba que si μ es la medida de no compacidad débil de De Blasi , la clase de los espacios que verifican la $\mu\beta$-propiedad coincide con la clase de los espacios β-UC.

Por otra parte, si además la cantidad conjuntista μ es cantoriana, entonces, en virtud del teorema 1.2.3 la $\mu\beta$-propiedad implica la reflexividad. Más concretamente, se tiene el siguiente corolario.

1.6.4 Corolario

Si la cantidad conjuntista μ contiene a los conjuntos unipuntuales en su núcleo y además es cantoriana, entonces se tiene que

$$\mu\beta\text{-propiedad} \Rightarrow \text{reflexividad}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

1.7 μ-LISURA

En esta sección estudiaremos el concepto de μ-lisura que generaliza la lisura no compacta y la lisura no débilmente compacta.

Más concretamente, con ayuda de una cantidad conjuntista μ definiremos los espacios μ-uniformemente lisos (que serán indicados por μ-US) que generalizan a los casi uniformemente lisos (NUS) ya conocidos en la literatura y a los débilmente casi uniformemente lisos (WNUS) recientemente introducidos en [22], localizaremos la definición anterior y aparecerán los espacios μ-LUS y, finalmente, introduciremos la definición de espacio μ-S. Estos espacios generalizan a sus homólogos obtenidos usando la medida de no compacidad de Hausdorff y la medida de no compacidad débil de De Blasi .
En lo que sigue supondremos que μ es una cantidad conjuntista definida en un espacio de Banach E.

1.7.1 Definición

Un espacio de Banach E se dice que es μ-uniformemente liso y lo indicaremos por μ-US, si verifica que

$$\lim_{\epsilon\to 0} sup\{\mu(F^*(x,\epsilon)) : x \in S_E\} = 0$$

siendo $F^*(x,\epsilon) = \{f \in B_{E^*} : f(x) \geq 1 - \epsilon\}$

Observación.
Téngase en cuenta que si la cantidad μ es la medida de no compacidad de Hausdorff , entonces la definición anterior se corresponde con la de los espacios NUS [7], y si μ es la medida de no compacidad débil de De Blasi , entonces la noción de μ-US se corresponde con la de los espacios WNUS introducidos en [22].

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Si localizamos la definición anterior, obtenemos la de espacio μ-localmente uniformemente liso (μ-LUS). Más concretamente, tenemos la siguiente definición.

1.7.2 Definición

Un espacio de Banach E se dice que es μ-localmente uniformemente liso y lo indicamos por μ-LUS, si para cada $x \in S_E$ se verifica que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \mu(F^*(x, \epsilon)) = 0$$

Siguiendo las mismas pautas que en el caso de la μ-convexidad analizada en la sección 1.1, tenemos la siguiente definición.

1.7.3 Definición

Un espacio de Banach E se dice que es μ-liso y lo indicamos por μ-S, si $F^*(x, 0)$ es un elemento de $Ker\ \mu$, para cada $x \in S$, es decir, si $\mu(F^*(x, \epsilon)) = 0$.

Observación.

Evidentemente se tiene la cadena de implicaciones

$$\mu\text{-US} \Rightarrow \mu\text{-LUS} \Rightarrow \mu\text{-S}$$

Una cuestión natural que se plantea es saber si las inversas de las implicaciones anteriores se verifican o no.

Sabemos que en el caso en que μ es la medida de no compacidad de Hausdorff , existen ejemplos que demuestran que las implicaciones inversas de la cadena anterior no se verifican [7, 8, 9].

En el caso de que μ sea la medida de no compacidad débil de De Blasi no sabemos nada acerca de estas implicaciones inversas. No obstante, en [22] se

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

dan algunas pautas para estudiar esta cuestión.

A continuación, veremos cómo está relacionada la propiedad μ-S con la llamada aplicación de dualidad que se utiliza con frecuencia en la teoría de las ecuaciones integrales y diferenciales en espacios de Banach porque permite formular las llamadas condiciones disipativas [32, 57].

Comenzaremos con la definición de la aplicación de dualidad en un espacio de Banach .

1.7.4 Definición

Se llama aplicación de dualidad en un espacio de Banach E, a la aplicación $F : E \to 2^{E^*}$ definida por $F(x) = \{f \in E^* : f(x) = \|x\|^2 = \|f\|^2\}$.
Para las propiedades de la misma, ver [32, 57].

En el siguiente teorema se da una caracterización de la propiedad μ-S en términos de la aplicación de dualidad.

1.7.5 Teorema

Un espacio de Banach E es μ-S si y sólo si la aplicación de dualidad en E toma valores en subconjuntos que pertenecen al núcleo de μ, suponiendo que μ contiene a los conjuntos unipuntuales
Demostración.
Obviamente, por definición de la aplicación de dualidad, se tiene que si $f \in F(x)$, $x \neq 0$, entonces $\|f\| = \|x\|$.
Por lo tanto, para $x \neq 0$ se tiene las siguientes igualdades:

$$F(x) = \{f \in E^* : f(x) = \|x\|^2 = \|f\|^2\} = \{f \in E^* : (\tfrac{f}{\|f\|})(x) = \|x\| =$$
$$= \|f\|\} = \{\|x\|g : g \in S_{E^*} : g(x) = \|x\|\} = \|x\|\{g \in S_{E^*} : g(x) = \|x\|\} =$$
$$= \|x\|\{g \in S_{E*} : g(\tfrac{x}{\|x\|}) = 1\} = \|x\|F^*(\tfrac{x}{\|x\|}, 0)$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Por otra parte, como $F(0) = \{0\}$, y dado que la cantidad μ contiene a los conjuntos unipuntuales , el teorema resulta obvio.

La propiedad de que la aplicación de dualidad tome valores en conjuntos pertenecientes a una clase relevante de subconjuntos acotados de E^*, ha sido utilizada en la literatura con frecuencia. Así, podemos mencionar que Giles-Gregory-Sims [40], probaron que si un espacio de Banach E es "bastante suave" (ver [40] para la definición y más detalles) y si la aplicación de dualidad toma valores débilmente compactos, entonces E es un espacio de Asplund, es decir, que subespacios cerrados separables tienen duales separables.

Por otra parte, W. Y. Zhan [76] probó que si un espacio de Banach E es "bastante suave", tiene predual, y la aplicación de dualidad toma valores débilmente compactos, entonces E es reflexivo.

Veamos ahora algunos resultados que relacionan nuestros conceptos con otros que aparecen en la geometría de los espacios de Banach , como son la diferencial de Gateaux y la subdiferencial fuerte. Estos resultados tienen como objetivo fundamental dar algunas pautas para resolver la cuestión anteriormente planteada acerca de la veracidad o no de las implicaciones inversas en la cadena

$$\mu\text{-US} \Rightarrow \mu\text{-LUS} \Rightarrow \mu\text{-S}$$

Comenzamos definiendo la diferencial de Gateaux.

1.7.6 Definición

Decimos que la norma del espacio de Banach E es Gateaux diferenciable si para cada $x \in S_E$, el conjunto $F^*(x, 0)$ es unipuntual.

Por tanto, obviamente, se tiene la siguiente proposición.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

1.7.7 Proposición

Si la cantidad conjuntista μ contiene a los conjuntos unipuntuales en su núcleo y la norma de E es Gateaux diferenciable, entonces E es μ-S.

En general, el recíproco no es cierto.
Para demostrarlo, tomemos el siguiente ejemplo que aparece en [26].
En ddicho artículo se prueba que la aplicación de dualidad en el espacio c_0 viene dada para $x = (x_n) \in S_{c_0}$ por

$$F^*(x,0) = \left\{ \sum_{n\in\Lambda(x)} \alpha_n x_n e_n : \alpha_n \geq 0, \sum_{n\in\Lambda(x)} = 1, \right\}$$

donde $\Lambda(x) = \{n \in N : |x_n| = 1\}$ y $\{e_n\}$ la base canónica de l^1.
Por lo tanto, si $\Lambda(x)$ tiene más de un elemento, como por ejemplo si $x = (1,1,0,0,\ldots)$, entonces *card* $F^*(x,0) > 1$ y, en consecuencia, la norma de c_0 no es Gateaux diferenciable.
Por otra parte, en [8] se prueba que c_0 es NUS, o, en nuestra nomenclatura, $\chi-$US, donde χ es la medida de no compacidad de Hausdorff y, por lo tanto, c_0 es $\chi - S$.

A continuación, daremos la definición de subdiferenciabilidad fuerte que nos permitirá dar una condición suficiente para que un espacio E que sea μ-S sea también μ-LUS.

Existen distintas definiciones equivalentes de la subdiferenciabilidad fuerte, pero nosotros daremos la que será más útil para nuestros propósitos y que aparece en [22, Proposición 1.12]

1.7.8 Definición

Diremos que la norma del espacio E es fuertemente subdiferenciable en $x \in S_E$ si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $F^*(x,\delta) \subset F^*(x,0) + \epsilon B_{E^*}$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

En el resultado siguiente se da la condición suficiente anteriormente mencionada.

1.7.9 Teorema

Sea E un espacio μ-S. Si la norma de E es fuertemente subdiferenciable en cada $x \in S_E$, entonces E es un espacio μ-LUS.
Demostración.
Sea $x \in S_E$. Como la norma de E es fuertemente subdiferenciable en x, se tiene que para $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $F^*(x, \delta) < F^*(x, 0) + \epsilon B_{E^*}$.
Como por hipótesis E es μ-S, aplicando a la relación anterior la cantidad conjuntista μ y, teniendo en cuenta las propiedades de una cantidad conjuntista se tiene que

$$\mu(F^*(x, \delta)) \leq \mu(F^*(x, 0) + \epsilon B_{E^*}) \leq \mu(F^*(x, 0) + \epsilon\mu(B_{E^*}) = \epsilon\mu(B_{E^*})$$

y como ϵ es arbitrario, se deduce que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \mu(F^*(x, \epsilon)) = 0 \text{ y, en consecuencia, E es un espacio } \mu\text{-LUS}$$

Observación.

Tener en cuenta que en este teorema no hay ninguna restricción acerca de la cantidad conjuntista μ. Es decir, μ no tiene por qué contener en su núcleo a los conjuntos unipuntuales .

Teniendo en cuenta que todo espacio de Banach separable de dimensión infinita admite una norma equivalente que es Gateaux diferenciable [26], podemos dar el siguiente resultado.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

1.7.10 Teorema

Sea μ una cantidad conjuntista que contiene en su núcleo a los conjuntos unipuntuales y sea E un espacio de Banach separable. Entonces, existe en E una norma equivalente que lo hace μ-S.

Por otra parte, apoyándonos en un resultado que aparece en [26, Corolario 1.2.2] y que establece que en todo espacio de Banach de dimensión infinita existe una norma equivalente que no es fuertemente subdiferenciable, podemos probar que el recíproco de este último teorema no tiene por qué verificarse.

1.7.11 Teorema

Existe un espacio de Banach que es μ-LUS y que su norma no es fuertemente subdiferenciable en cada $x \in S_E$.

Demostración.

Tomamos como μ la medida de no compacidad débil de De Blasi y como E un espacio de Banach reflexivo de dimensión infinita. Por el resultado anteriormente mencionado, existe una norma equivalente $|||.|||$ en E que no es fuertemente subdiferenciable.

Consideremos $(E, |||.|||)$ con esta nueva norma. Como la reflexividad es una propiedad topológica, $(E, |||.|||)$ sigue siendo reflexivo y, en consecuencia, E es β-LUS y, en cambio, por la forma en que hemos elegido $|||.|||$, esta norma no es fuertemente subdiferenciable en cada $x \in S_E$.

1.8 MÓDULO DE μ-LISURA

En esta seccion definiremos un módulo que nos permite caracterizar a los espacios μ-US. Comenzaremos con la siguiente definición.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

1.8.1 Definición

Se define el módulo de μ-lisura de un espacio de Banach E como la función

$$\Sigma_E^\mu : [0, \mu(B_E)] \to R^+ \text{ tal que } \Sigma_E^\mu(\epsilon) = sup\{\mu(F^*(x, \epsilon)) : x \in S_E\}$$

Evidentemente se tiene el siguiente resultado que caracteriza a los espacios μ-S

1.8.2 Teorema

$$\Sigma_E^\mu(0) = 0 \text{ si y sólo si E es } \mu - S$$

Por otra parte, teniendo en cuenta la definición de espacio μ-US, obviamente se tiene la siguiente caracterización de los espacios μ-US en términos de dicho módulo.

1.8.3 Teorema

$$\text{E es } \mu - \text{US si y sólo si } \lim_{\epsilon \to 0} \Sigma_E^\mu(\epsilon) = 0$$

A continuación trataremos de relacionar los módulos de μ-convexidad y μ-lisura, pero previamente daremos un lema que nos será útil para nuestros propósitos y que nos da una expresión de la función β_E^μ que aparece en la sección 1.5 en términos de slices.

1.8.4 Lema

$$\beta_E^\mu(\epsilon) = sup\{\mu(F(f, \epsilon)) : f \in S_{E^*}\}$$

Demostración.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Recordemos que la definición de la función $\beta_E^\mu(\epsilon)$ es

$$\beta_E^\mu(\epsilon) = sup\{\mu(X) : X \subset B_E,\ X = Conv\ X,\ dist(\theta, X) \geq 1 - \epsilon\}$$

Por tanto, como para $f \in S_{E^*}$ es $F(f,\epsilon)$ un subconjunto de B_E, obviamente convexo, y además $dist(\theta, F(f,\epsilon)) \geq 1 - \epsilon$ ya que si $x \in F(f,\epsilon)$ entonces $f(x) \geq 1 - \epsilon$ y como $f \in S_{E^*}$, entonces es $\|x\| \geq 1 - \epsilon$
Por lo tanto, $sup\{\mu(F(f,\epsilon)) : f \in S_{E^*}\} \leq \beta_E^\mu(\epsilon)$.
Para la otra desigualdad, sea $X \subset B_E$, $X = Conv\ X$, $dist(\theta, X) \geq 1 - \epsilon$.
Como $dist(\theta, X) \geq 1 - \epsilon$ esto significa que $X \cap Int\ B(0, 1-\epsilon) = \emptyset$.
Como $Int\ B(0, 1-\epsilon)$ es abierto y convexo y X es convexo y no vacío con $X \cap Int\ B(0, 1-\epsilon) = \emptyset$, se tendrá, por el teorema de separación, consecuencia del teorema de Hahn-Banach, que existe un $f \in S_{E^*}$ que verifica que $sup\{f(x) : x \in Int\ B(0, 1-\epsilon)\} \leq inf\{f(x) : x \in X\}$. Evidentemente

$$\begin{aligned} &sup\{f(x) : x \in Int\ B(0, 1-\epsilon)\} = sup\{f(x) : x \in (1-\epsilon) Int\ B(0,1)\} = \\ &= sup\{f(1-\epsilon)z) : z \in Int\ B(0,1)\} = \\ &= (1-\epsilon) sup\{f(z) : z \in Int\ B(0,1)\} = (1-\epsilon)\|f\| = 1 - \epsilon \end{aligned}$$

por un razonamiento análogo al del lema 1.1.
Por lo tanto, $1 - \epsilon \leq inf\{f(x) : x \in X\}$.
Luego, para todo $x \in X$ es $1 - \epsilon \leq f(x)$ y por lo tanto, $X \subset F(f,\epsilon)$, de donde se deduce que $\mu(X) \leq \mu(F(f,\epsilon)) \leq sup\{\mu(F(f,\epsilon)) : f \in S_{E^*}\}$, y en consecuencia, $\beta_E^\mu(\epsilon) \leq sup\{\mu(F(f,\epsilon)) : f \in S_{E^*}\}$.

A continuación, impondremos alguna condición suplementaria a la cantidad conjuntista . Por una parte, se sabe que existen cantidades conjuntistas como la medida de no compacidad de Hausdorff que verifican que su valor en un subconjunto C y en el transformado de C por una isometría son cantidades equivalentes. Más concretamente, si $I : E \to F$ es una isometría, entonces existen constantes k y k' tales que para cualquier subconjunto acotado C de

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

E se verifica que $k\chi(C) \leq \chi(I(C)) \leq k'\chi(C)$.
Y por otra parte, se sabe que existen cantidades conjuntistas que no verifican la condición anterior, como probaron Astala y Tylli con la medida de no compacidad débil de De Blasi [4].

A las cantidades conjuntistas que verifican la condición anterior las llamaremos cantidades conjuntistas equivalentes por isometrías.

Más precisamente se tiene la siguiente definición.

1.8.5 Definición

Una cantidad conjuntista μ se dice que es equivalente por isometrías si para cualquier isometría $I : E \to F$ existen constantes k y k' dependientes de la isometría tales que para cualquier $C \in P_b(E)$ se verifica que $k\mu(C) \leq \mu(I(C)) \leq k'\mu(C)$

A continuación daremos un teorema que relaciona los módulos de μ-convexidad y μ-lisura y que generaliza el resultado que aparece en [9, Teorema 4]

1.8.6 Teorema

Sea μ una cantidad conjuntista equivalente por isometrías tal que para la isometría canónica $I : E \to E^{**}$ existan las constantes k y k' que verifican que para cualquier $C \in P_b(E)$ es $k\mu(C) \leq \mu(I(C)) \leq k'\mu(C)$.
Entonces se verifica que

$$k\beta^{\mu}_{E}(\epsilon) \leq \Sigma^{\mu}_{E^*}(\epsilon)$$

Demostración.
En virtud del lema 1.8.4 se verifica que

$$\beta^{\mu}_{E}(\epsilon) = sup\{\mu(F(f,\epsilon)) : f \in S_{E^*}\}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Tomemos $f \in S_{E^*}$. Entonces $I(F(f,\epsilon)) \subset F^{**}(f,\epsilon)$, donde $F^{**}(f,\epsilon)$ es el slice medido en E^{**}.
En consecuencia, $k\mu(F(f,\epsilon)) \leq \mu(I(F(f,\epsilon))) \leq \mu(F^{**}(f,\epsilon)) \leq \sum_{E^*}(\epsilon)$ y por tanto $k\ sup\{\mu(F(f,\epsilon)) : f \in S_{E^*}\} \leq \sum_{E^*}(\epsilon)$ o, de forma equivalente, $k\beta_E^{\mu}(\epsilon) \leq \sum_{E^*}(\epsilon)$

Observación

Tener en cuenta que en este teorema es suficiente con la condición de que $k\mu(C) \leq \mu(I(C))$ para cualquier $C \in P_b(E)$ para su verificación.

Teniendo en cuenta los teoremas 1.5.5 y 1.8.2 se obtiene como corolario de este teorema el siguiente resultado.

1.8.7 Corolario

Si E^* es μ-S entonces E es μ-SC.

Por otra parte, teniendo en cuenta que $\lim_{\epsilon \to 0} \beta_E^{\mu}(\epsilon) = \beta_0^{\mu}(E)$, el corolario 1.5.7 y los teoremas 1.5.9 y 1.8.3, obtenemos este nuevo resultado como corolario de este último teorema.

1.8.8 Corolario

Si E^* es μ-US entonces E es μ-UC.

Veremos a continuación que el teorema 1.8.6 se mejora bajo la condición de que E sea reflexivo.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

1.8.9 Teorema

Supongamos que μ es una cantidad conjuntista que verifica la condición del teorema 1.8.6 y supongamos además que E es reflexivo. Entonces

$$\Sigma^{\mu}_{E^*}(\epsilon) \leq k'\beta^{\mu}_{E}(\epsilon)$$

Demostración.
Tomemos $f \in S_{E^*}$. Entonces, en virtud de la reflexividad de E, obviamente se verifica que $I(F(f,\epsilon)) = F^{**}(f,\epsilon)$. Por lo tanto, $\mu(I(F(f,\epsilon))) = \mu(F^{**}(f,\epsilon)) \leq k'\mu(F(f,\epsilon)) \leq k'\beta^{\mu}_{E}(\epsilon)$ y, en consecuencia, $sup\{\mu(F^{**}(f,\epsilon)) : f \in S_{E^*}\} \leq k'\beta^{\mu}_{E}(\epsilon)$ de donde resulta, finalmente, $\Sigma_{E^*}(\epsilon) \leq k'\beta^{\mu}_{E}(\epsilon)$

Por lo tanto, bajo la condición de que E sea reflexivo, teniendo en cuenta el teorema anterior y los corolarios 1.8.7 y 1.8.8 se deduce el siguiente resultado.

1.8.10 Corolario

Si E es reflexivo, entonces

E es μ-UC $\Leftrightarrow$ E^* es μ-US

E es μ-SC $\Leftrightarrow$ E^* es μ-S

Este corolario generaliza el corolario 3 de [9].

Como observamos respecto a la relación de dualidad entre la propiedad μ-LUS y la propiedad μ-LUC, no hemos obtenido con esta técnica ningún resultado. Esto es debido a que los módulos anteriormente citados de μ-convexidad y de μ-lisura únicamente permiten caracterizar a los espacios μ-UC, μ-SC y a los espacios μ-US y μ-S respectivamente.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Veremos utilizando otra técnica, que tenemos un resultado homólogo a los corolarios 1.8.7 y 1.8.8 para las propiedades μ-LUS y μ-LUC.

Para ello daremos previamente el siguiente lema.

1.8.11 Lema

Sea $J : E \to E^{**}$ la inyección canónica de un espacio de Banach en su bidual, y sean $0 \leq \epsilon \leq 1$ y $f \in S_{E^*}$. Consideremos los slices $F(f,\epsilon) = \{x \in B_E : f(x) \geq 1-\epsilon\}$
y $F^*(f,\epsilon) = \{x^{**} \in B_{E^*} : x^{**}(f) \geq 1-\epsilon\}$.
Entonces se tiene que $J(F(f,\epsilon)) \subset F^*(f,\epsilon)$.
Demostración.
Si $x \in F(f,\epsilon)$, entonces $J(x) = x^{**} \in B_{E^{**}}$ por ser J isometría y, además, $J(x)(f) = x^{**}(f) = f(x) \geq 1-\epsilon$ con lo que queda demostrado el lema.

A continuación probaremos el resultado anteriormente mencionado.

1.8.12 Teorema

Sea μ una cantidad conjuntista equivalente por isometrías. Si E^* es μ-LUS, entonces E es μ-LUC.
Demostración.
Sea $f \in E^*$. Por el lema anterior, se tiene que $J(F(f,\epsilon)) \subset F^*(f,\epsilon)$.
Aplicando la cantidad conjuntista μ a esta inclusión, se tiene que $\mu(J(F(f,\epsilon))) \leq \mu(F^*(f,\epsilon))$.
Como μ es una cantidad conjuntista equivalente por isometrías (ver definición 1.8.5), existirá un $k > 0$ tal que $k\mu(F(f,\epsilon)) \leq \mu(J(F(f,\epsilon)))$.
En consecuencia, $k\mu(F(f,\epsilon)) \leq \mu(F_{E^*}(f,\epsilon))$.
Como E^* es μ-LUS, es decir, $\lim_{\epsilon\to 0} \mu(F_{E^*}(f,\epsilon)) = 0$, resultará que

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

$\lim \mu(F(f,\epsilon)) = 0$ y por lo tanto, E es μ-LUC.
Nótese que la técnica usada en este teorema también nos habría permitido obtener los corolarios 1.8.7 y 1.8.8.

Tener en cuenta que si E es reflexivo, entonces, dado un $f \in S_{E^*}$ y $0 \leq \epsilon \leq 1$ es evidente que $J(F(_E(f,\epsilon))) = F^*(f,\epsilon)$ y además, si la cantidad conjuntista es equivalente por isometrías, obtendríamos que si E es μ-LUC, entonces E^* es μ-LUS.

Más concretamente, se tendría el siguiente resultado.

1.8.13 Teorema

Sea μ una cantidad conjuntista equivalente por isometrías y supongamos que E es reflexivo. Entonces E es μ-LUC $\Leftrightarrow$ E^* es μ-LUS

1.9 HERENCIA DE LAS PROPIEDADES A SUBESPACIOS

En esta sección analizaremos la herencia de las propiedades definidas con anterioridad a subespacios cerrados. Comenzaremos con la herencia de las propiedades relacionadas con la μ-convexidad. Empezaremos probando que la propiedad de μ-SC se hereda a subespacios cerrados. Esto se probará con la restricción de que μ sea una cantidad conjuntista equivalente por isometrías (ver definición 1.8.5). Entonces, en todo lo que sigue se verificará la condición anteriormente reseñada, salvo que se especifique lo contrario.

1.9.1 Teorema

Si E es un espacio μ-SC y M un subespacio cerrado de E, entonces M es μ-SC.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Demostración.

Sea $f \in S_{M^*}$ y consideremos el slice $F_M(f,0) = \{x \in S_M : f(x) = 1\}$ que suponemos no vacío . Por el teorema de Hahn-Banach, existe un $\hat{f} \in E^*$, extensión de f, que conserva la norma, es decir: $\hat{f}_{|M} = f$, siendo además $\|\hat{f}\| = \|f\| = 1$.

Por otra parte, la aplicación $i : M \to E$ es la inclusión canónica que, por supuesto, es una isometría y se tiene que $i(F_M(f,0)) \subset F(\hat{f},0)$. Como μ es una cantidad conjuntista equivalente por isometrías, para $i : M \to E$ existirán las constantes k y k' tales que para todo $C \in P_b(M)$ se tiene que $k\mu(C) \leq \mu(i(C)) \leq k'\mu(C)$ y, particularmente, para $F_M(f,0)$ se tendrá que $k\mu(F_M(f,0)) \leq \mu(i(F_M(f,0))) \leq \mu(F(\hat{f},0))$. En consecuencia, como E es μ-SC, resultará que $\mu(F(\hat{f},0)) = 0$ y por tanto $\mu(F_M(f,0)) = 0$, como queríamos probar.

Con una línea de argumentación semejante a la anterior se puede probar que las propiedades μ-LUC y μ-UC se heredan a subespacios cerrados.

1.9.2 Teorema

Si E es un espacio μ-LUC y M es un subespacio cerrado de E, entonces M es μ-LUC.

1.9.3 Teorema

Si E es un espacio μ-UC y M es un subespacio cerrado de E, entonces M es μ-UC.

Observación.

En el supuesto de que la cantidad conjuntista no sea equivalente por isometrías, no hemos sido capaces de encontrar unas hipótesis generales para

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

que estos tres últimos teoremas sigan siendo válidos.

No obstante, en [22] se prueba el primero de ellos para una cantidad conjuntista que no es equivalente por isometrías, como es la medida de no compacidad débil de De Blasi . El razonamiento utilizado en esta demostración está íntimamente ligado al núcleo de la cantidad conjuntista reseñada y al llamado criterio de compacidad débil del límite doble de Eberlein [22].

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Capítulo 2

CANTIDADES CONJUNTISTAS Y TEORIA DE OPERADORES

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

2.1 μ-VARIACIÓN DE UN OPERADOR

En esta sección, partiendo de una cantidad conjuntista μ definida en la familia de los espacios de Banach , asociamos a cada operador $T \in \mathcal{L}(E, F)$ un número relacionado con la cantidad conjuntista μ, de manera análoga a como se define la medida de no compacidad de Hausdorff o de Kuratowski de un operador [4].

Analizaremos además algunas propiedades de esta variación.

Comenzamos definiendo la μ-variación de un operador, siendo μ una cantidad conjuntista cualquiera.

2.1.1 Definición

Sea T un operador lineal y continuo entre dos espacios de Banach E y F, es decir, $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Definimos la μ-variación de T, y la denotamos por $\mu(T)$, como el número que viene dado por $\mu(T) = \mu(T(B_E))$.

Hay que tener en cuenta que en el caso particular de que μ sea la medida de no compacidad de Hausdorff o la medida de no compacidad débil de De Blasi , la definición anterior coincide con la medida de no compacidad de Hausdorff o con la medida de no compacidad débil de De Blasi de un operador, respectivamente.

2.1.2 Proposición

Sean $T, R \in \mathcal{L}(E, F)$. Entonces:

$$\begin{array}{ll} a) & \mu(T+R) \leq \mu(T) + \mu(R) \\ b) & \mu(\lambda T) = |\lambda|\mu(T) \\ c) & \mu(T) \leq \|T\|\mu(B_F) \end{array}$$

Demostración.
a) y b) son evidentes a partir de las propiedades de una cantidad conjuntista
Para demostrar la propiedad c), hay que tener en cuenta que $T(B_E) \subset \|T\|B_E$ y la monotonía de una cantidad conjuntista .

Vamos a estudiar el subconjunto de $\mathcal{L}(E, F)$ (donde E y F son espacios de Banach), definido por $\mu(E, F) = \{T \in \mathcal{L}(E, F) : \mu(T) = 0\}$ y lo llamaremos conjunto de operadores de μ-variación nula.

2.1.3 Proposición

$\mu(E, F)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{L}(E, F)$.
Demostración.
Es obvio que $\mu(E, F)$ es subespacio de $\mathcal{L}(E, F)$.
Veamos que $\mu(E, F)$ es cerrado en $\mathcal{L}(E, F)$.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

En efecto: consideremos $T_n \in \mu(E,F)$ y $T_n \to T$ en norma $\|.\|$ y veamos que $T \in \mu(E,F)$. Teniendo en cuenta las propiedades de una cantidad conjuntista y el apartado a) de la proposición 2.1.2, se tiene que $\mu(T) = \mu(T - T_n + T_n) \leq \mu(T - T_n) + \mu(T_n)$. Como $T_n \in \mu(E,F)$ es $\mu(T_n) = 0$ y, por el apartado c) de la proposición 2.1.2, $\mu(T) \leq \mu(T - T_n) \leq \|T - T_n\|\mu(B_F)$. Como $T_n \to T$ en norma $\|.\|$, es $\|T - T_n\| \to 0$ cuando $n \to \infty$ y por lo tanto, $\mu(T) = 0$, es decir que $T \in \mu(E,F)$.

A continuación relacionaremos los conjuntos $\mu(E,F)$ con la teoría de ideales de operadores. Empezaremos dando la siguiente notación. Dados $f \in E'$ e $y \in F$, denotamos por $f \otimes y$ al operador de $\mathcal{L}(E,F)$ definido por $f \otimes y : E \to F/(f \otimes y)(x) = f(x)y$. Es evidente que $f \otimes y \in \mathcal{L}(E,F)$.

2.1.4 Definición [3]

Una clase $\mathcal{A}$ de operadores es un ideal si para cada par de espacios de Banach E y F, el conjunto $\mathcal{A}(E,F) = \mathcal{A} \cap \mathcal{L}(E,F)$ satisface las siguientes condiciones:

(a) Para todo $f \in E'$, $y \in F$ es $f \otimes y \in \mathcal{A}(E,F)$

(b) $\mathcal{A}(E,F)$ es un subespacio de $\mathcal{L}(E,F)$

(c) Si $T \in \mathcal{A}(E,F)$ y $S \in \mathcal{L}(F,G)$ entonces $ST \in \mathcal{A}(E,G)$

(d) Si $T \in \mathcal{L}(E,F)$ y $S \in \mathcal{A}(F,G)$ entonces $ST \in \mathcal{A}(E,G)$

Como ejemplos de ideales de operadores podemos mencionar la clase de los operadores compactos y la clase de los operadores débilmente compactos.

Si $\mathcal{A}(E,F)$ es cerrado en $\mathcal{L}(E,F)$ diremos que el ideal de operadores es cerrado.

Seguidamente veremos que, bajo ciertas condiciones sobre la cantidad conjuntista μ, el conjunto de los operadores entre espacios de Banach con

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

μ-variación nula, constituye un ideal de operadores. Más concretamente, tenemos el siguiente resultado.

2.1.5 Proposición

Si μ es una cantidad conjuntista que contiene a los conjuntos unipuntuales y además, los elementos de $Ker\ \mu$ se preservan por operadores lineales y continuos, entonces el conjunto de los operadores entre espacios de Banach con μ-variación nula constituyen un ideal cerrado de operadores.
Demostración.

a) Veamos que se cumple la condición a) de la definición 2.1.4.
Sean $f \in F'$, $y \in F$. Vamos a demostrar que el operador $f \otimes y : E \to F$ tal que $(f \otimes y)(x) = f(x)y$ tiene μ-variación nula.
En efecto: $(f \otimes y)(B_E) = \{f(x)y : x \in B_E\} \subset Conv\ \{-\|f\|y, \|f\|y\}$.
Luego $\mu((f \otimes y)(B_E) \leq \mu(Conv\ \{-\|f\|y, \|f\|y\}$. Como $Ker\ \mu$ contiene a los conjuntos unipuntuales , $Conv\ \{-\|f\|y, \|f\|y\} \in Ker\ \mu$ y, en consecuencia $\mu((f \otimes y)(B_E)) = 0$ por lo que $f \otimes y \in \mu(E, F)$.

b) Para la condición b), basta tener en cuenta la proposición 2.1.2.

c) Veamos que si $T \in \mu(E, F)$ y $S \in \mathcal{L}(E, F)$ entonces $ST \in \mu(F, G)$.
En efecto: $(ST)(B_E) = S(T(B_E))$. Como $T \in \mu(E, F)$, entonces $T(B_E) \in Ker\ \mu$ y, como por hipótesis los elementos de $Ker\ \mu$ se preservan por operadores continuos, resultará que $S(T(B_E)) \in Ker\ \mu$ o lo que es lo mismo, $ST \in \mu(F, G)$.

d) Para probar d), consideremos $T \in \mathcal{L}(E, F)$ y $S \in \mu(E, F)$.
Entonces, como $T(B_E) \subset \|T\|B_F$, resultará que $ST(B_E) \subset \|T\|S(B_F)$.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Y como $S \in \mu(F, G)$ es $\mu(S(B_F)) = 0$ y por lo tanto, $\mu(ST(B_E)) = 0$ o, lo que es lo mismo, $ST \in \mu(F, G)$.
Notar que la condición d) se verifica para una cantidad conjuntista en general, sin las hipótesis consideradas en esta proposición.
Además, por la proposición 2.1.2, como $\mu(E, F)$ es cerrado, el conjunto de operadores con μ-variación nula constituye un ideal cerrado de operadores.

A continuación relacionaremos la llamada variación de Astala asociada a un ideal de operadores con la distancia de Hausdorff al núcleo de una cantidad conjuntista .

Comenzaremos dando la definición de la variación de Astala asociada a un ideal de operadores.

2.1.6 Definición

Sea $\mathcal{A}$ un ideal de operadores, E un espacio de Banach y $C \in P_b(E)$.
Definimos la $\mathcal{A}$-variación de C y lo denotamos por $\eta_{\mathcal{A}}(C)$ al número que viene definido como

$\eta_{\mathcal{A}}(C) = inf\{\epsilon > 0 :$ existe un espacio de Banach F y un $T \in \mathcal{A}(E, F)$ con $C \subset TB_F + \epsilon B_E\}$

En [3], Astala probó que si $\mathcal{A}$ es el ideal de los operadores compactos o el ideal de los operadores débilmente compactos, entonces $\eta_{\mathcal{A}}$ coincide con la medida de no compacidad de Hausdorff o con la medida de no compacidad débil de De Blasi , respectivamente.

Supondremos en lo que sigue que μ es una cantidad conjuntista que contiene a los conjuntos unipuntuales y que además, los elementos de $Ker\ \mu$ son preservados por operadores lineales y continuos. Entonces, como vimos en la

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

proposición 2.1.5, los operadores con $\mathcal{A}$-variación nula constituyen un ideal cerrado de operadores que denotaremos por $\mathcal{A}$. Por lo tanto, dado el espacio de Banach E y $C \in P_b(E)$, podremos hablar de la $\mathcal{A}$-variación de C indicada por $\eta_{\mathcal{A}}(C)$, y de la distancia de Hausdorff de C a los elementos de $Ker\ \mu$, indicada como $H_{Ker\ \mu}(C)$.

Vamos a probar que ambas cantidades coinciden, pero antes daremos el siguiente lema.

2.1.7 Lema

Sea E un espacio de Banach y $C \in P_b(E)$. Entonces $\eta_{\mathcal{A}}(C) = 0$ si y sólo si $C \in Ker\ \mu$.

Demostración.

Supongamos que $\eta_{\mathcal{A}}(C) = 0$; esto significará que para cada $\epsilon > 0$ existirá un espacio de Banach F y un operador $T \in \mu(F, E)$ tal que $C \subset T(B_F) + \epsilon B_E$. Aplicando la cantidad conjuntista μ y teniendo en cuenta que se verifica que $\mu(T(B_F)) = 0$ y las propiedades de μ, obtenemos entonces que $\mu(C) \leq \mu(T(B_F)) + \epsilon\mu(B_E) = \epsilon\mu(B_E)$.

Y como esto es válido para cualquier $\epsilon > 0$, resultará que $\mu(C) = 0$, o lo que es lo mismo, $C \in Ker\ \mu$.

Supondremos en lo que sigue que $C \in Ker\ \mu$.

Consideremos el conjunto

$$l^1(C) = \{f : C \to R / \sum_{x \in C} |f(x)| < \infty\}$$

que, por supuesto, es un espacio vectorial sobre R, y consideremos en $l^1(C)$ la norma

$$||f|| = \sum_{x \in C} |f(x)|$$

Se puede probar que $l^1(C)$, dotado de esta norma, es un espacio de Banach real. Hagamos $F = (l^1(C), ||.||)$ y consideremos ahora los elementos de

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

$l^1(C)$, f_x para $x \in C$, definidos por $f_x : C \to R$ de forma que $f_x(x) = 1$ y $f_x(y) = 0$ si $y \neq x$.
Entonces, es trivial que $f_x \in B_F$ para cada $x \in C$. Además, notar que dado un $f \in F$ es $F = \sum_{x \in C} f(x).f_x$. Luego, para definir un operador en F basta definirlo sobre los f_x y extenderlo por linealidad a todos los elementos de $f \in F$.
Consideremos, pues, el operador $K : F \to E/K(f_x) = x$.
Por lo tanto $C \subset K(B_F) \subset AConv(C)$ donde, $AConv(C)$ indica la envolvente absolutamente convexa y cerrada de C. Como $C \in Ker\ \mu$, por las propiedades del núcleo de μ es $\mu(Conv\ (C)) = \mu(C) = 0$ y por lo tanto, $\mu(K(B_F)) = 0$, es decir, $K \in \mu(F, E)$.
Luego, como $C \subset K(B_F)$, dado un $\epsilon > 0$ existe un espacio de Banach $F = l^1(C)$ y $K \in \mu(F, E)$ tales que $C \subset K(B_F) \subset K(B_F) + \epsilon B_E$ y por lo tanto, $\eta_{\mathcal{A}}(C) = 0$.

Veamos a continuación el resultado anteriormente mencionado que afirma que la $\mathcal{A}$-variación de C coincide con la distancia de Hausdorff de C a $Ker\ \mu$.

2.1.8 Teorema

Sea E un espacio de Banach y $C \in P_b(E)$. Entonces $H_{Ker\ \mu}(C) = \eta_{\mathcal{A}}(C)$.
Demostración.
Si $C \in Ker\ \mu$, el resultado es obvio, debido al lema anterior.
Supongamos que $C \notin Ker\ \mu$. Entonces, por el lema anterior, sea $\eta_{\mathcal{A}}(C) = r$ y $\epsilon > 0$. Por definición de la $\mathcal{A}$-variación de C, existirá un espacio de Banach F y un operador $T \in \mu(F, E)$ tales que $C \subset T(B_F) + (r + \epsilon)B_E$. Aplicando $H_{Ker\ \mu}$ y teniendo en cuenta que $T(B_F) \in Ker\ \mu$, resultará que $H_{Ker\ \mu}(C) \leq H_{Ker\ \mu}(T(B_F)) + (r+\epsilon)H_{Ker\ \mu}(B_E) = (r+\epsilon)H_{Ker\ \mu}(B_E)$. Como $C \notin Ker\ \mu$,$H_{Ker\ \mu}(B_E) = 1$ y resultará que $H_{Ker\ \mu}(C) \leq r + \epsilon$. Y como

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

ϵ es arbitrario, se obtiene finalmente que $H_{Ker\ \mu}(C) \leq \eta_{\mathcal{A}}(C)$.
Veamos a continuación la otra desigualdad.
Supongamos que $H_{Ker\ \mu}(C) = r$ y sea $\epsilon > 0$. Por definición de la distancia de Hausdorff, esto significa que existe $P \in Ker\ \mu$ tal que $C \subset P + (r+\epsilon)B_E$. Siguiendo la misma argumentación que en el lema anterior, existirá para $P \in Ker\ \mu$ un espacio de Banach $F = (l^1(P), \|.\|)$ y un operador $F \in \mu(F, E)$ tal que $P \subset K(B_F)$. En consecuencia, se verifica que $C \subset P + (r+\epsilon)B_E \subset K(B_F) + (r+\epsilon)B_E$ de donde, por definición de la $\mathcal{A}$-variación de C, resultará que $\eta_{\mathcal{A}} \leq r + \epsilon$ y, como ϵ es arbitrario, es $\eta_{\mathcal{A}}(C) \leq r = H_{Ker\ \mu}(C)$, como se quería demostrar.

Finalmente, observar que este teorema generaliza el resultado obtenido por Astala en [3] para el ideal de los operadores compactos y para el ideal de los operadores débilmente compactos.

2.2 LA PROPIEDAD DE APROXIMACIÓN

Un clásico resultado en Análisis Funcional afirma que si un espacio de Banach Y posee base de Schauder, entonces cada operador compacto T de $\mathcal{L}(X, Y)$ es el límite en la norma de $\mathcal{L}(X, Y)$ de operadores de rango finito. Pues bien, los espacios de Banach que verifican esta propiedad se dice que tienen la propiedad de aproximación (AP). Algunas variantes de la propiedad de aproximación aparecieron en la literatura, fundamentalmente para resolver algunas cuestiones relacionadas con la separabilidad de un espacio de Banach y el hecho de poseer o no base de Schauder.

Por otra parte, Astala y Tylli caracterizaron en [5] algunas variantes de esta propiedad de aproximación en términos de medida de no compacidad

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

de Hausdorff y de medida de no compacidad débil de De Blasi de operadores. En esta sección pretendemos generalizar los resultados obtenidos en [5] a operadores de μ-variación nula, donde μ es una cantidad conjuntista . Comenzaremos relacionando la μ-variación de un operador $T \in \mathcal{L}(E,F)$ con su distancia en $\mathcal{L}(E,F)$ al subespacio cerrado de los operadores de μ-variación nula. Más concretamente, supongamos que $T \in \mathcal{L}(E,F)$ y consideremos la distancia de T al subespacio μ(E,F) o, lo que es lo mismo, la norma de T en el espacio de Banach cociente $\mathcal{L}(E,F)/\mu(E,F)$ definido como $||T||_\mu = dist(T,\mu(E,F)) = inf\{||T-P|| : P \in \mu(E,F)\}$.
En este apartado, salvo que se diga lo contrario, μ es una cantidad conjuntista general.

La siguiente proposición nos relaciona la μ-variación del operador $\mu(T)$ con $||T||_\mu$. Más concretamente, se tiene el siguiente resultado.

2.2.1 Proposición

Sea $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Entonces $\mu(T) \leq ||T||_\mu \mu(B_F)$.
Demostración.
Si $T \in \mu(E,F)$, el resultado es trivial.
Supongamos que $T \in \mathcal{L}(E,F) - \mu(E,F)$ y tomemos un $P \in \mu(E,F)$.
Entonces, teniendo en cuenta las propiedades de una cantidad conjuntista , el hecho de que $P \in \mu(E,F)$ y el apartado c) de la proposición 2.1.2, se tiene que $\mu(T) = \mu(T-P+P) \leq \mu(T-P) + \mu(P) = \mu(T-P) \leq ||T-P||\mu(B_F)$.
Como $T(B_E) \notin Ker\ \mu$, $\mu(T) > 0$, y por tanto, $\mu(B_F) > 0$. En consecuencia $\frac{\mu(T)}{\mu(B_F)} \leq ||T-P||$, y como esto se verifica para cualquier $P \in \mu(E,F)$, resultará que $\frac{\mu(T)}{\mu(B_F)} \leq ||T||_\mu$ de donde se obtiene el resultado que queríamos probar.

Particularizando el resultado de esta proposición a la cantidad conjuntista $H_{Ker\ \mu}$ suponiendo que ésta no es idénticamente nula, es decir, que

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

$H_{Ker\ \mu}(B_F) = 1$, nos da el siguiente corolario.

2.2.2 Corolario

Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$ y supongamos que $H_{Ker\ \mu}$ no es idénticamente nula en $P_b(F)$. Entonces $H_{Ker\ \mu}(T) \leq \|T\|_\mu$

Notar que si tomamos como cantidad conjuntista la medida de no compacidad de Hausdorff χ, entonces el corolario anterior se traduce en la forma $\chi(T) \leq \|T\|_\mu = dist(T, K(E, F))$ donde $K(E, F)$ es el conjunto de los operadores compactos.

De la misma forma, si tomamos como cantidad conjuntista la medida de no compacidad débil de De Blasi β, entonces $\beta(T) = \|T\|_\mu = dist(T, W(E, F))$ donde $W(E, F)$ es el conjunto de los operadores débilmente compactos.

A continuación recordaremos unas variantes de la llamada propiedad de aproximación que aparecen en [5]. Así, diremos que un espacio de Banach E tiene la propiedad de aproximación λ-compacta, y lo indicaremos por λ-CAP, si para cada subconjunto $D \subset E$ compacto y para cada $\epsilon > 0$, existe un operador compacto $K \in \mathcal{L}(E)$ que verifica que

$$\sup_{x \in D} \|Kx - x\| \leq \epsilon \text{ y } \|K - I\| \leq \lambda$$

donde I es el operador identidad en E. Si un espacio de Banach E tiene la λ-CAP propiedad para algún $\lambda \geq 1$, entonces diremos que E tiene la propiedad de aproximación acotada compacta (BCAP).

A continuación generalizaremos la definición anterior.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

2.2.3 Definición

Se dice que un espacio de Banach E tiene la μ-propiedad de aproximación λ y lo indicaremos en la forma $\lambda - \mu$AP, donde μ es una cantidad conjuntista cualquiera, si para cada $D \subset E$, $D \in Ker\ \mu$ y para cada $\epsilon > 0$, existe un operador $K \in \mu(E, E)$ que verifica que

$$\sup_{x \in D} \|Kx - x\| \leq \epsilon \text{ y } \|K - I\| \leq \lambda$$

En particular, si E tiene la $\lambda - \mu$AP para algún $\lambda \geq 1$, diremos que E tiene la μ-propiedad de aproximación acotada (μ-BAP).

En [58], Lebow y Schechter probaron que si χ es la medida de no compacidad de Hausdorff y $T \in \mathcal{L}(E, F)$, donde F tiene la $\lambda - \chi$AP, entonces $\|T\|_\chi = dist(T, K(E, F)) \leq \lambda\chi(T)$.

A continuación probaremos que este resultado se verifica en un contexto más general. Más concretamente, se tiene el siguiente teorema.

2.2.4 Teorema

Sea F un espacio de Banach con la $\lambda - \mu$AP. Entonces
$\|T\|_\mu = dist(T, \mu(E, F)) \leq \lambda H_{Ker\mu}$ (T) para cualquier $T \in \mathcal{L}(E, F)$.
Demostración.
Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Si T es tal que $H_{Ker\mu}$ (T)=0, entonces se verifica que $T(B_E) \in Ker_{H_{Ker\ \mu}} = Ker\ \mu$ y por lo tanto $T \in \mu(E, F)$ y el resultado es trivial.
Supongamos entonces que $H_{Ker\ \mu}(T) > 0$ y consideremos $\delta > H_{Ker\ \mu}(T)$.
Por definición de $H_{Ker\mu}$ (T), existirá $W \subset F$ y $W \in Ker\ \mu$ tal que

$$TB_E \subset W + \delta B_F \tag{2.1}$$

Por otra parte, como F tiene la $\lambda - \mu$AP, existirá λ tal que para $W \subset F$ y $W \in Ker\ \mu$ y para cada $\epsilon > 0$, existirá un operador $R \in \mu(F, F)$ que verifica

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

que

$$\sup_{x \in W} ||x - Rx|| \leq \epsilon \text{ y } ||I - R|| \leq \lambda$$

Por (2.1) se tiene que si $x \in B_E$, entonces existe $z \in W$ que cumple que $||Tx - z|| \leq \delta$. Por tanto, para $x \in B_E$ se tiene que
$||Tx - RTx|| \leq ||Tx - z - RTx + Rz|| + ||z - Rz|| =$
$||(I - R)(Tx - z)|| + ||z - Rz|| \leq ||I - R||.||Tx - z|| + ||z - Rz|| \leq \lambda\delta + \epsilon$ de donde resultará que $||I - RT|| \leq \lambda\delta + \epsilon$.
Como probamos en la proposición 2.1.5, al ser $R \in \mu(F, F)$ y $T \in \mathcal{L}(E, F)$, $RT \in \mu(E, F)$ para una cantidad conjuntista general, resultará que

$$||T||_\mu = dist(T, \mu(E, F)) = inf\{||T-P|| : P \in \mu(E, F)\} \leq ||T-RT|| \leq \lambda\delta+\epsilon$$

Y como ϵ es arbitrario, se tiene que $||T||_\mu \leq \lambda\delta$. Y dado que esto se verifica para cualquier $\delta > H_{Ker\ \mu}(T)$ se tendrá finalmente que $||T||_\mu \leq \lambda H_{Ker\ \mu}(T)$, como queríamos demostrar.

Probemos ahora la implicación inversa de este teorema.

2.2.5 Teorema

Sea F un espacio de Banach tal que μ no se anula en $P_b(F)$.
Si $||T||_\mu \leq \lambda H_{Ker\ \mu}(T)$ se verifica para cualquier operador $T \in \mathcal{L}(E, F)$ y para cada espacio de Banach E, entonces F tiene la $\lambda - \mu$AP.
Demostración.
Supongamos que F no tiene la $\lambda - \mu$AP. Esto quiere decir que para $n \in N$ existe $D_n \subset F$ con $D_n \in Ker\ \mu$ y $\epsilon_n > 0$ tal que si $R \in \mathcal{L}(F, F)$ y verifica que

$$\sup_{x \in D_n} ||x - Rx|| \leq \epsilon_n \text{ y } ||I - R|| \leq n, \text{ entonces } R \notin \mu(F, F)$$

Téngase en cuenta que podemos tomar D_n cerrado y absolutamente convexo puesto que la clausura cerrada y absolutamente convexa de un conjunto de

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

$Ker\ \mu$ pertenece a $Ker\ \mu$ por las propiedades que verifica una cantidad conjuntista .

Consideremos a continuación el funcional de Minkowski, definido en la forma $|x|_n = inf\{t > 0 : x \in tA_n\}$ donde A_n es el conjunto $A_n = \frac{\epsilon_n}{n}B_F + D_n$ que, por supuesto, es acotado, cerrado, absolutamente convexo y absorbente.

Veamos que $|x|_n$ define una norma equivalente en F.

En efecto, si $x \in F$, entonces $\frac{x}{||x||} \in B_F$. Luego, como D_n es absolutamente convexo y, por lo tanto, contiene al origen, resultará que $\frac{\epsilon_n}{n}\frac{x}{||x||} \in \frac{\epsilon_n}{n}B_F + D_n = A_n$, de donde $x \in \frac{n}{\epsilon_n}||x||A_n$ y en consecuencia $|x|_n \leq \frac{n}{\epsilon_n}||x||$.

Por otra parte, para $\delta > 0$ y por definición de funcional de Minkowski, se tiene para $x \in F$ que $x \in (|x|_n + \delta)(\frac{\epsilon_n}{n}B_F + D_n)$.

Luego, como D_n es acotado, si hacemos $M_n = sup\{||d_n|| : d_n \in D_n\}$, entonces $||x|| \leq (|x|_n + \delta)(\frac{\epsilon_n}{n} + M_n) = (|x|_n + \delta)\gamma_n$, representando por $\gamma_n = \frac{\epsilon_n}{n} + M_n$.

Como esto se verifica para $\delta > 0$ arbitrario, resultará que $||x|| \leq \gamma_n|x|_n$.

Por tanto, y en resumen, se tiene que para cualquier $x \in F$ se verifica que $\frac{\epsilon_n}{n}|x|_n \leq ||x|| \leq \gamma_n|x|_n$, siendo $\gamma_n > 0$.

Luego $|x|_n$ define una norma equivalente en F.

Sea, a continuación, $E_n = (F, |.|_n)$ y sea T_n la identidad de E_n en F que, evidentemente, es un operador continuo en virtud de las equivalencias de las normas $||.||$ y $|.|_n$.

Veamos, entonces, que $||T_n||_\mu \geq \epsilon_n$ para cada $n \in N$.

En efecto, sea $R \in \mathcal{L}(E_n, F)$ tal que $||T_n - R|| \leq \epsilon_n$. Teniendo en cuenta que A_n es la bola unidad cerrada de la norma $|.|_n$, resultará que

$$\sup_{x\in D_n} ||x-(R\circ T_n^{-1})(x)|| = \sup_{x\in D_n} ||x-Rx|| \leq \sup_{x\in A_n} ||x-Rx|| = \sup_{x\in A_n} ||T_nx-Rx|| =$$

$$= S = ||T_n - R|| \leq \epsilon_n S.$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Por otra parte, como

$$\begin{aligned}
&\|I - R\circ T_n^{-1}\|_{\mathcal{L}(F)} = sup\{\|(I - R\circ T_n^{-1})(x)\| : x \in B_F\} = \\
&= \tfrac{n}{\epsilon_n} sup\{(I - R\circ T_n^{-1})(x)\| : x \in \tfrac{\epsilon_n}{n} B_F\} \leq \\
&\leq \tfrac{n}{\epsilon_n} sup\{\|(I - R\circ T_n^{-1})(x)\| : x \in {}_n\} = \tfrac{n}{\epsilon_n} sup\{\|x - Rx\| : x \in A_n\} = \\
&= \tfrac{n}{\epsilon_n} sup\{\|T_n x - Rx\| : x \in A_n\} \leq \tfrac{n}{\epsilon_n} |T_n - R| \leq n
\end{aligned}$$

Por lo tanto, por nuestra suposición de partida, $R\circ T_n^{-1} \notin \mu(F,F)$.

Veamos que, bajo nuestras condiciones, $R \notin \mu(E_n, F)$.
En efecto: si $R \in \mu(E_n, F)$, esto significará que $\mu(R(B_{E_n})) = \mu(R(A_n)) = 0$ y por lo tanto
$\mu(R\circ T_n^{-1}) = \mu(R\circ T_n^{-1})(B_F) = \mu(R(T_n^{-1}(B_F))) = \mu(R(B_F)) = \frac{n}{\epsilon_n}\mu(R(\frac{n}{\epsilon_n}B_F))$
$\leq \frac{\epsilon_n}{n}\mu(R(A_n)) = 0$ puesto que $\frac{\epsilon_n}{n}B_F \subset A_n$.
Entonces $R\circ T_n^{-1} \in \mu(F,F)$ lo cual es absurdo ya que hemos visto que $R\circ T_n^{-1} \notin \mu(F,F)$.
En resumen, si $R \in \mathcal{L}(E_n, F)$ y verifica que $\|T_n - R\| \leq \epsilon_n$, entonces $R \notin \mu(E_n, F)$. En consecuencia, $\|T_n\|_\mu = dist(T_n, \mu(E_n, F)) \geq \epsilon_n$.
Además, $H_{Ker\ \mu}(T_n) = H_{Ker\ \mu}(T_n(B_{E_n})) = H_{Ker\ \mu}(T_n(A_n)) = H_{Ker\ \mu}(A_n) =$
$= H_{Ker\ \mu}(\frac{\epsilon_n}{n}B_F + D_n) \leq \frac{\epsilon_n}{n} + H_{Ker\ \mu}(D_n) = \frac{\epsilon_n}{n}$ puesto que $D_n \in Ker\ \mu$.
Luego $H_{Ker\ \mu}(T_n) \leq \frac{\epsilon_n}{n} \leq \frac{1}{n}\|T_n\|_\mu$.

Veamos ahora que $H_{Ker\ \mu}(T_n) > 0$.
En efecto: si fuera $H_{Ker\ \mu}(T_n) = 0$, esto querría decir que
$0 = H_{Ker\ \mu}(T_n) = H_{Ker\ \mu}(T_n(B_{E_n})) = H_{Ker\ \mu}(T_n(A_n)) = H_{Ker\ \mu}(A_n)$.
Y como $\frac{\epsilon_n}{n}B_F \subset A_n$, resultará que $H_{Ker\ \mu}(B_F) = 0$ y, por consiguiente, la cantidad conjuntista es idénticamente nula en $P_b(B_F)$ en contra de nuestra hipótesis.
En consecuencia, hemos obtenido que $0 < H_{Ker\ \mu}(T_n) \leq \frac{1}{n}\|T_n\|_\mu$.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Por otra parte, consideremos el espacio de Banach $E = c_0(E_n)$ con las proyecciones canónicas $\pi_n : E \to E_n$, es decir $\pi_n((x)) = x_n$ y las inclusiones $i_n : E_n \to E$ definidas por $i_n(x_n) = (0, 0, \ldots, 0, x_n, 0, \ldots, 0)$
Consideremos los operadores $S_n = \|T_n\|_\mu^{-1} T_n \pi_n \in \mathcal{L}(E, F)$.
Entonces se tiene que para $x_n \in E_n$ es

$$(S_n \circ i_n)(x_n) = S_n(0, 0, \ldots, 0, x_n, 0, \ldots, 0) =$$
$$= \|T_n\|_\mu^{-1} T_n \pi_n(0, 0, \ldots, 0, x_n, 0, \ldots, 0) = \|T_n\|_\mu^{-1} T_n(x_n)$$

Luego $\|T_n\|_\mu^{-1} i_n = S_n \circ i_n$
Veamos a continuación que $\|S_n\|_\mu \geq 1$.
En efecto, como $\|S_n\|_\mu = dist(S_n, \mu(E, F)) = inf\{\|S_n - P\| : P \in \mu(E, F)\}$ tomamos $P \in \mu(E, F)$ y entonces, por la proposición 2.1.5, se verifica que $P \circ i_n \in \mu(E_n, F)$ y, por lo tanto nos encontramos que $\|S_n \circ i_n\|_\mu \leq \|S_n \circ i_n - P \circ i_n\| \leq \|S_n - P\| \cdot \|i_n\|$. Como $\|i_n\| = 1$, resultará que $\|S_n \circ i_n\| \leq \|S_n - P\|$ y como esto es cierto para cada $P \in \mu(E, F)$, resulta que $\|S_n \circ i_n\| \leq \|S_n\|_\mu$. Por otra parte, y como ya hemos visto, $\|T_n\|_\mu^{-1} T_n = S_n \circ i_n$ y por lo tanto $\|S_n \circ i_n\|_\mu = \|T_n\|_\mu^{-1} \|T_n\|_\mu = 1$. Por tanto, como $\|S_n \circ i_n\|_\mu \leq \|S_n\|_\mu$, podemos obtener que $\|S_n\|_\mu \geq 1$, como queríamos demostrar.
A su vez, la distancia de Hausdorff de los operadores S_n al núcleo de μ es $H_{Ker\ \mu}(S_n) = \|T_n\|_\mu^{-1} H_{Ker\ \mu}(T_n \circ \pi_n) = \|T_n\|_\mu^{-1} H_{Ker\ \mu}((T_n \circ \pi_n)(B_E))$ y dado que $\pi_n(B_E) \subset B_{E_n}$ resultará que $T_n \circ \pi_n(B_E) \subset T_n(B_{E_n})$ y, en consecuencia, $H_{Ker\ \mu}((T_n \circ \pi_n)(B_E)) \leq H_{Ker\ \mu}(T_n(B_{E_n})) = H_{Ker\ \mu}(T_n)$.
Por lo tanto, teniendo en cuenta que $H_{Ker\ \mu}(T_n) \leq \frac{1}{n} \|T_n\|_\mu$ es

$$H_{Ker\ \mu}(S_n) = \|T_n\|_\mu^{-1} H_{Ker\ \mu}((T_n \circ \pi_n)(B_E)) \leq \|T_n\|_\mu^{-1} H_{Ker\ \mu}(T_n) \leq$$
$$\leq \frac{1}{n} \|T_n\|_\mu \|T_n\|_\mu^{-1} = \frac{1}{n}$$

Resumiendo, hemos encontrado un espacio de Banach E y una sucesión de operadores $S_n \in \mathcal{L}(E, F)$ que verifican que $\|S_n\| \geq 1$ y $H_{Ker\ \mu}(S_n) \leq \frac{1}{n}$ y, en virtud de la hipótesis, tendría que verificarse que $1 \leq \|S_n\|_\mu \leq \frac{\lambda}{n}$ para cada $n \in N$, o lo que es lo mismo, $\lambda \geq n$ para todo $n \in N$, lo cual no puede

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

ser.
Por lo tanto F tiene la $\lambda - \mu$AP.

Tener en cuenta que en el espacio de Banach $\mathcal{L}(E,F)/\mu(E,F)$, la cantidad $||T||_\mu$ es, precisamente, la norma en este espacio.

A continuación definimos en este espacio la cantidad

$$\tilde{\mu}(T + \mu(E,F)) = H_{Ker\ \mu}(T)$$

2.2.6 Proposición

$\tilde{\mu}$ es una norma en el espacio cociente $\mathcal{L}(E,F)/\mu(E,F)$.
Demostración.
Veamos que $\tilde{\mu}$ está bien definida. Para ello tenemos que demostrar que si $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E,F)$ y $T_1 - T_2 \in \mu(E,F)$, entonces $H_{Ker\ \mu}(T_1) = H_{Ker\ \mu}(T_2)$.
En efecto, como $T_1 = T_1 - T_2 + T_2$, resultará que

$$H_{Ker\ \mu}(T_1) \leq H_{Ker\ \mu}(T_1 - T_2) + H_{Ker\ \mu}(T_2) = H_{Ker\ \mu}(T_2)$$

puesto que $\mu(T_1 - T_2) = 0$ y por consiguiente $H_{Ker\ \mu}(T_1 - T_2) = 0$.
Por lo tanto, $H_{Ker\ \mu}(T_1) \leq H_{Ker\ \mu}(T_2)$.
Un razonamiento análogo nos daría la otra desigualdad.
El resto de las propiedades de una norma son inmediatas.

Teniendo en cuenta el corolario 2.2.2 y el teorema 2.2.4, se obtiene el siguiente resultado.

2.2.7 Teorema

Sea F un espacio de Banach con la $\lambda - \mu$AP. Entonces, para cualquier espacio de Banach E, las normas $||.||$ y $\tilde{\mu}$ en $\mathcal{L}(E,F)/\mu(E,F)$ son equivalentes, siendo

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

la relación de equivalencia $H_{Ker\ \mu}(T) \leq ||T||_\mu \leq \lambda H_{Ker\ \mu}(T)$.

Por otra parte, en base al corolario 2.2.2 y al teorema 2.2.5, se tiene el siguiente teorema.

2.2.8 Teorema

Sea F un espacio de Banach tal que μ no se anule en $P_b(F)$. Si $||T||_\mu \leq \lambda H_{Ker\ \mu}(T)$ para cualquier $T \in \mathcal{L}(E, F)$ y para cada espacio de Banach E, es decir que $||.||_\mu$ y $\tilde{\mu}$ son normas equivalentes en $T \in \mathcal{L}(E, F)/\mu(E, F)$ siendo la relación de equivalencia $||T||_\mu \leq \lambda H_{Ker\ \mu}(T)$, entonces F tiene la $\lambda - \mu$AP.

El siguiente resultado nos dará una condición suficiente para que un espacio de Banach no tenga la $\lambda - \mu$AP. En este caso, habrá que exigirle alguna condición extra a la cantidad conjuntista μ. Esta condición será que el $Ker\ \mu$ contenga a las sucesiones débilmente convergentes. Nos planteamos la pregunta de si existen cantidades conjuntistas que verifiquen esta condición. En el próximo capítulo daremos ejemplos de cantidades conjuntistas no triviales que sí la verifican.
Por otra parte, necesitaremos la definición de operadores completamente continuos.

2.2.9 Definición

Un operador $T \in \mathcal{L}(E, F)$ se dice que es completamente continuo si para cada sucesión (x_n) débilmente convergente en E, la sucesión (Tx_n) es convergente en norma.
Con V(E,F) denotaremos la clase de los operadores completamente continuos.

Estamos, pues, en disposición de dar el siguiente resultado.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

2.2.10 Teorema

Sea E un espacio de Banach sin la propiedad de Schur y supongamos que μ es una cantidad conjuntista cuyo núcleo contiene a las sucesiones débilmente convergentes y supongamos además que $\mu(E, E) \subset V(E, E)$.
Entonces E no tiene la $\lambda - \mu$AP.
Demostración.
Como E no tiene la propiedad de Schur, podemos encontrar una sucesión $(x_n) \subset B_E$ que es débilmente convergente y que no converge en norma, por lo que no es de Cauchy. Es decir, que existe un $c > 0$ y una subsucesión de (x_n) que denotaremos igual, tal que

$$\|x_n - x_m\| \geq c \text{ si } n \neq m \tag{2.2}$$

Pasando a $x_n - x$, si x es el límite débil de (x_n), podemos considerar que la sucesión (x_n) es débilmente convergente a 0.
Supongamos que E tiene la $\lambda - \mu$AP y tomemos $0 < \epsilon < c/3$ y, como $K = \{x_n : n \in N\} \cup \{0\} \in Ker\ \mu$, por hipótesis, existirá $R \in \mu(E, E)$ tal que

$$\sup_{x \in K} \|Rx - x\| \leq \epsilon, \ \|R - I\| \leq \lambda$$

Como $R \in \mu(E, E) \subset V(E, E)$, y $x_n \xrightarrow{w} 0$, entonces (Rx_n) es convergente en norma. Por tanto, será de Cauchy, y por consiguiente, para el ϵ dado, se tendrá que $\|Rx_n - Rx_m\| < \epsilon$ para n y m suficientemente grandes. Además, se tiene que
$\|x_n - x_m\| \leq \|x_n - Rx_n\| + \|Rx_n - Rx_m\| + \|Rx_m - x_m\| \leq \epsilon + \epsilon + \epsilon = 3\epsilon < c$
lo cual es una contradición con (2.2). Por lo tanto E no tiene la $\lambda - \mu$AP.

2.3 OPERADORES μ-TAUBERIANOS

Los operadores tauberianos fueron introducidos por Kalton y Wilansky en [50] y aparecen en la literatura con el objetivo de responder a un conjun-

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

to de cuestiones relacionadas con la sumabilidad [65] y la factorización de operadores [27]; en la preservación de propiedades por isomorfismos en espacios de Banach , etc. En [50, Theorem 2.2] se caracterizan los operadores tauberianos de la siguiente forma, y éste será nuestro punto de partida.

Un operador $T \in \mathcal{L}(E,F)$ se dice que es tauberiano, y lo denotaremos por $T \in \tau(E,F)$, si para cualquier $C \in P_b(E)$ con T(C) relativamente débilmente compacto , se tiene que C es relativamente débilmente compacto .

Esta definición se puede generalizar al contexto de las cantidades conjuntistas apareciendo lo que llamaremos operadores μ-tauberianos. Más concretamente, se tiene la siguiente definición.

2.3.1 Definición

Un operador $T \in \mathcal{L}(E,F)$ se dice que es μ-tauberiano, donde μ es una cantidad conjuntista y lo denotaremos en la forma $T \in \tau_\mu(E,F)$, si para cualquier $C \in P_b(E)$ con T(C) relativamente débilmente compacto se tiene que $C \in Ker\ \mu$.

En la siguiente proposición veremos cómo los operadores μ-tauberianos se preservan por perturbaciones débilmente compactas, como en el caso clásico de los operadores tauberianos.

2.3.2 Proposición

Sea $T \in \tau_\mu(E,F)$ y K un operador débilmente compacto. Entonces $T+K \in \tau_\mu(E,F)$.

Demostración.

Sea $C \in P_b(E)$ y consideremos que $(T+K)(C)$ es relativamente débilmente compacto . Como K es un operador débilmente compacto, K(C) será relativamente débilmente compacto y como $T(C) \subset (T+K)(C) - K(C)$, teniendo en cuenta las propiedades de la medida de no compacidad débil de De Blasi

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

se tendrá que $\beta(T(C)) \leq \beta((T+K)(C)) + \beta(K(C)) = 0$ y, en consecuencia, T(C) es relativamente débilmente compacto . Dado que $T \in \tau_\mu(E,F)$, resultará que $C \in Ker\ \mu$, como queríamos probar.

Una de las propiedades más interesantes de los operadores tauberianos es que sus núcleos son reflexivos. Pongamos de manifiesto algunas relaciones con este hecho.

En [23] se prueba que para la cantidad conjuntista β, medida de no compacidad débil de De Blasi , la clase de los espacios β-UC y la clase de los espacios β-LUC coinciden con la clase de los reflexivos. Téngase en cuenta que la clase de los espacios reflexivos coincide precisamente con la clase de los espacios de Banach para los que la medida de no compacidad débil de De Blasi se anula.

Por otra parte, tener en cuenta que existen cantidades conjuntistas para las cuales no existen espacios de Banach infinito dimensionales en los que dicha cantidad se anule. Tomemos por ejemplo la cantidad conjuntista χ medida de no compacidad de Hausdorff , que se anula únicamente en los espacios finito dimensionales. Veremos más adelante que existen cantidades conjuntistas distintas a la medida de no compacidad de Hausdorff y a la medida de no compacidad débil de De Blasi que verifican uno u otro hecho, primordial en el desarrollo que queremos hacer.

Retomando de nuevo la cuestión que nos concierne y teniendo en cuenta lo dicho anteriormente, la propiedad de que los núcleos de operadores tauberianos sean reflexivos se puede traducir diciendo que si T es un operador tauberiano de E en F, entonces su núcleo $Ker\ T$ es un espacio para el cual se anula la cantidad β, medida de no compacidad débil de De Blasi .
Esto significa en particular que $Ker\ T$ es un espacio β-UC. El siguiente teorema generaliza precisamente este hecho.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

2.3.3 Teorema

Si T es un operador μ-tauberiano de E en F, entonces $Ker\ T$ es un espacio de Banach para el cual se anula la cantidad μ y, por lo tanto, es un espacio μ-UC.

Demostración.

Supongamos que $T \in \tau_\mu(E, F)$ y sea $A \in P_b(Ker\ T)$.

Como $A \subset Ker\ T$, resulta que $T(A) = 0$, es decir, que T(A) es relativamente débilmente compacto . Como T es μ-tauberiano, resulta que $A \in Ker\ \mu$, o lo que es lo mismo, $\mu(A) = 0$. Por lo tanto, la cantidad μ se anula en $Ker\ T$, como queríamos probar.

Este teorema tiene como corolario el resultado ya conocido para los operadores tauberianos y mencionado con anterioridad.

2.3.4 Corolario

Si T es un operador β-tauberiano (es decir, si $T \in \tau_\beta(E, F)$ donde β indica la medida de no compacidad débil de De Blasi), entonces $Ker\ T$ es reflexivo.

La prueba es inmediata, pues basta con tener en cuenta que los espacios para los que se anula la medida de no compacidad débil de De Blasi son los reflexivos.

Notar que si μ es una cantidad conjuntista para la cual no existen espacios de Banach infinito dimensionales en los que se anule, tenemos el siguiente corolario al teorema 2.3.3.

2.3.5 Corolario

Sea μ una cantidad conjuntista para la que no existen espacios de Banach infinito dimensionales en los que se anule y sea T un operador μ-tauberiano

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

de E en F. Entonces $Ker\ T$ es de dimensión finita.

En particular, como la medida de no compacidad de Hausdorff χ, verifica la hipótesis de este corolario, tenemos también el siguiente.

2.3.6 Corolario

Sea T un operador χ-tauberiano de E en F. Entonces $Ker\ T$ es finito dimensional.

Para el siguiente resultado exigiremos alguna condición adicional a la cantidad conjuntista μ. Por esta razón, empezamos con la siguiente definición necesaria para continuar nuestro desarrollo.

2.3.7 Definición

Sea E un conjunto y $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de E. Diremos que $\mathcal{A}$ está sucesionalmente determinada si para cada $A \subset E$, se verifica que $A \in \mathcal{A}$ si y sólo si para cualquier sucesión $(x_n) \subset A$, el conjunto $\{x_n : n \in N\} \in \mathcal{A}$.

Ejemplos de familias sucesionalmente determinadas son la de los conjuntos relativamente compactos y la de los relativamente débilmente compactos de un espacio de Banach E.

Con el siguiente resultado obtendremos una caracterización algebraica de los operadores μ-tauberianos.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

2.3.8 Teorema

Sea μ una cantidad conjuntista tal que $Ker\ \mu$ está sucesionalmente determinado. Entonces, un operador $T : E \to F$ es μ-tauberiano si y sólo si dado un espacio de Banach G y un operador $L : G \to E$ tal que $T \circ L$ es débilmente compacto, entonces L tiene μ-variación nula.

Demostración.

Supongamos que $T : E \to F$ es μ-tauberiano y sea $L : G \to E$ un operador tal que $T \circ L$ es débilmente compacto. En virtud de la débil compacidad de $T \circ L$ se tiene que $(T \circ L)(B_E)$ es relativamente débilmente compacto , o lo que es lo mismo, $T(L(B_G))$ es relativamente débilmente compacto . Como T es μ-tauberiano, $L(B_G) \in Ker\ \mu$ y en consecuencia, L tiene μ-variación nula, como queríamos probar.

Veamos la otra implicación. Supongamos que T no es μ-tauberiano. Esto significa que existe $A \in P_b(E)$ con T(A) relativamente débilmente compacto y $A \notin Ker\ \mu$.

Como la cantidad conjuntista μ verifica que su núcleo $Ker\ \mu$ está sucesionalmente determinado, resultará que existe $(x_n) \subset A$ por lo que también $\{x_n : n \in N\} \notin Ker\ \mu$.

Consideremos a continuación el operador $L : l^1 \to E$ definido por $L(e_n) = x_n$. Como $(T \circ L)(e_n) \subset T(A)$, resultará que $(T \circ L)(B) \subset AConv(T(A))$, donde $AConv(T(A))$ indica la clausura absolutamente convexa de T(A) que es relativamente débilmente compacto por serlo T(A). Por lo tanto, $T \circ L$ es débilmente compacto y, por nuestra hipótesis, $\mu(L(B)) = 0$.

Por otra parte, como $\{x_n : n \in N\} \subset L(B_1^1)$ y $\{x_n : n \in N\} \notin Ker\ \mu$ resultará que $\mu(L(B_1^1)) > 0$, lo cual es absurdo.

En particular, como los operadores tauberianos son precisamente los β-tauberianos, donde β es la medida de no compacidad débil de De Blasi , y

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

como la familia de los relativamente débilmente compactos está sucesionalmente determinada, se puede obtener el siguiente resultado como corolario del teorema anterior.

2.3.9 Corolario

Un operador $T : E \to F$ es tauberiano si y sólo si dado un espacio de Banach G y un operador $L : G \to E$ que verifica que $T \circ L$ es débilmente compacto, entonces L es débilmente compacto.

Quizás una de las principales razones para el estudio de los operadores tauberianos fue la herencia de propiedades isomórficas de los espacios de Banach . Así, tenemos que si $T : E \to F$ es un operador tauberiano y F tiene la propiedad de reflexividad (cuasi-reflexividad, débil secuencialmente completo, etc.), entonces E también la posee.

En nuestro contexto de operadores μ-tauberianos tenemos, en cierta medida, algunas propiedades homólogas y, para ello, hay que tener en cuenta que los espacios reflexivos son aquéllos en los que se anula la medida de no compacidad débil de De Blasi .

2.3.10 Teorema

Si existe $T : E \to F$ μ-tauberiano y F es reflexivo, entonces la cantidad conjuntista μ se anula en E.

Demostración.

Sea $A \in P_b(E)$. Entonces, como F es reflexivo, resultará que T(A), al ser acotado, será relativamente débilmente compacto . Teniendo en cuenta que T es tauberiano, resulta entonces que $A \in Ker\ \mu$. En consecuencia, μ se anula en E, como queríamos probar.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

En particular, si aplicamos este teorema a la cantidad conjuntista la medida de no compacidad débil de De Blasi , obtenemos el resultado ya conocido de los operadores tauberianos clásicos.

Más concretamente, se tiene el siguiente resultado.

2.3.11 Corolario

Si existe $T : E \to F$ tauberiano y F es reflexivo, entonces E es reflexivo.

Téngase en cuenta que si para la cantidad conjuntista μ no existen espacios infinito dimensionales para los cuales se anula, el teorema 2.3.10 nos permite obtener el siguiente corolario.

2.3.12 Corolario

Sean E y F espacios de Banach reales de dimensión infinita. Supongamos que μ no se anula en espacios infinito dimensionales y que F es reflexivo. Entonces, no existen operadores μ-tauberianos de E en F. Es decir $\tau_\mu(E, F) = \emptyset$.

En particular, tomando la medida de no compacidad de Hausdorff , se tiene el corolario siguiente.

2.3.13 Corolario

Si F es reflexivo, entonces $\tau_\chi(E, F) = \emptyset$.

Bajo la hipótesis de que los conjuntos relativamente débilmente compactos están contenidos en $Ker\ \mu$, se tiene el siguiente corolario.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

2.3.14 Corolario

Si $P_{rwc}(E) \subset Ker\ \mu$, entonces $I_E \in \tau_\mu(E, E)$.

Asimismo, por el teorema 2.3.10, se tiene la consecuencia siguiente.

2.3.15 Corolario

Si E es un espacio de Banach para el cual no se anula la cantidad conjuntista μ, entonces ningún $f \in E^*$ es tauberiano.

Como ejemplo, vamos a estudiar el conjunto $\tau_\mu(l^\infty, c_0)$.
En [59, 2-f-43], se prueba que todo operador $T : l^\infty \to c_0$ es débilmente compacto. Basándonos en este hecho, probaremos el siguiente resultado.

2.3.16 Teorema

Sea μ una cantidad conjuntista cantoriana. Entonces $\tau_\mu(l^\infty, c_0) = \emptyset$.
Demostración.
Supongamos que $T \in \tau_\mu(l^\infty, c_0)$. Por lo dicho anteriormente, T es débilmente compacto, o lo que es lo mismo, para cualquier $A \in P_b(l^\infty)$ es T(A) relativamente débilmente compacto . Como T es μ-tauberiano, $A \in Ker\ \mu$ y en consecuencia, la cantidad conjuntista μ se anula en l^∞. Por lo tanto, en particular, l^∞ es μ-LUC. Por el teorema 1.2.2, como μ es una cantidad cantoriana, resultaría que l^∞ es reflexivo, lo que es absurdo.
Por lo tanto $\tau_\mu(l^\infty, c_0) = \emptyset$.

Este teorema generaliza el resultado ya conocido de que no existe un operador tauberiano de l^∞ en c_0, ya que la medida de no compacidad débil de De Blasi es cantoriana.

Más concretamente, se tiene el siguiente corolario.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

2.3.17 Corolario

No existe un operador tauberiano de l^∞ en c_0.

Un hecho también fundamental en la teoría de los operadores tauberianos es que si T^{**} es tauberiano, entonces T es tauberiano, no verificándose la implicación inversa [2].

Veremos que este resultado se cumple en el contexto de los operadores μ-tauberianos, aunque con ciertas restricciones para la cantidad conjuntista μ.

2.3.18 Teorema

Supongamos que la cantidad conjuntista μ es equivalente por isometrías (ver definición 1.8.5). Si T^{**} es μ-tauberiano, entonces T es μ-tauberiano.
Demostración.
Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & F \\ i\downarrow & & i\downarrow \\ E^{**} & \xrightarrow{T^{**}} & F^{**} \end{array}$$

donde i es la inyección canónica de un espacio en su bidual y supongamos que T^{**} es tauberiano.
Sea $A \in P_b(E)$ y T(A) relativamente débilmente compacto . Como todo operador lineal y continuo transforma conjuntos relativamente débilmente compactos en conjuntos relativamente débilmente compactos , resultará que $i(T(A))$ es relativamente débilmente compacto . En virtud de la conmutatividad del diagrama anterior, $T^{**}(i(A))$ es relativamente débilmente compacto. Como T^{**} es μ-tauberiano, entonces $i(A) \in Ker\ \mu$. Teniendo en cuenta la hipótesis de que la cantidad μ es equivalente por isometrías, resultará que

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

$A \in Ker\ \mu$ y, en consecuencia, T es μ-tauberiano.

Hay que hacer notar que el resultado anterior para los clásicos operadores tauberianos no se puede deducir como corolario de este teorema, ya que, como probaron Astala y Tylli [5], la medida de no compacidad débil de De Blasi no es equivalente por isometrías. No obstante, notar que en este último teorema, lo esencial es que el $Ker\ \mu$ se preserva por isometrías, o en forma equivalente, $A \in Ker\ \mu \Leftrightarrow I(A) \in Ker\ \mu$ para cualquier isometría I. Por tanto, ésta sería la hipótesis suficiente para este teorema. Esta hipótesis sí es verificada por la medida de no compacidad débil de De Blasi , en virtud del llamado criterio de Eberlein [57, pág. 159].

En la literatura, algunas subclases de la clase de los operadores tauberianos clásicos, son también interesantes [65].

A continuación, estudiaremos algunas subclases de los operadores μ-tauberianos. Empezaremos dando las definiciones de las subclases objeto de estudio.

$$\begin{aligned}
&\tau_{+}^{\mu}(E,F) = \{T \in \mathcal{L}(E,F)/c\ H_{Ker\ \mu}(B) \leq \beta(T(B)) \text{ para algún } c > 0 \\
&\quad \text{y para todo } B \in P_b(E)\} \\
&\tau_{\gamma}^{\mu}(E,F) = \{T \in \mathcal{L}(E,F)/c\ H_{Ker\ \mu}(B) \leq \chi(T(B)) \text{ para algún } c > 0 \\
&\quad \text{y para todo } B \in P_b(E)\} \\
&\tau_{l}^{\mu}(E,F) = \{T \in \mathcal{L}(E,F)/\exists R \in \mathcal{L}(F,E) \text{ y } W \in \mu(E,E) \\
&\quad \text{con } RT = Id_E + W\}
\end{aligned}$$

Notar que $\tau_l^{\mu}(E,F)$ es la clase de los operadores invertibles a izquierda, módulo los operadores de μ-variación nula.

El siguiente resultado, nos da algunas relaciones de inclusión entre estas clases.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

2.3.19 Teorema

Sean E y F dos espacios de Banach . Entonces tenemos:
$\tau_+^\mu(E,F) \subset \tau_\gamma^\mu(E,F)$
$\tau_+^\mu(E,F) \subset \tau_\mu(E,F)$
Además, la inclusión, en general, es estricta.
Demostración.
La primera inclusión es evidente en virtud de que la medida de no compacidad débil de De Blasi está mayorada por la medida de no compacidad de Hausdorff .
La segunda es obvia a partir de la definición de $\tau_+^\mu(E,F)$.
El que la inclusión es estricta, está probado en [4] para los operadores tauberianos clásicos, y por tanto, en general, las inclusiones son estrictas.

Bajo la hipótesis de que $H_{Ker\mu}$ se anula en los conjuntos relativamente débilmente compactos , tenemos el siguiente resultado.

2.3.20 Teorema

Si $P_{rwc}(F) \subset Ker\ \mu$, entonces $\tau_l^\mu(E,F) \subset \tau_+^\mu(E,F)$
Demostración.
Sea $T \in \tau_l^\mu(E,F)$. Entonces, por definición de la clase $\tau_l^\mu(E,F)$ existen $R \in \mathcal{L}(F,E)$ y $W \in \mu(E,E)$ tales que $RT = Id_E + W$.
Sea ahora $B \in P_b(E)$. Como $H_{Ker\mu}$ es invariante por perturbaciones de elementos del núcleo, tenemos que $H_{Ker\ \mu}(B) = H_{Ker\ \mu}(Id_E(B)) = H_{Ker\ \mu}((Id_E + W)(B)) = H_{Ker\ \mu}(RT)(B)$.
Teniendo en cuenta el apartado (c) de la proposición 2.1.2,
$H_{Ker\ \mu}(B) = H_{Ker\ \mu}((RT)(B)) \leq ||R||H_{Ker\ \mu}(T(B))$. Como $P_{rwc}(F) \subset Ker\ \mu$, resultará que $H_{Ker\ \mu}(T(B)) \leq \beta(T(B))$ y por tanto $H_{Ker\ \mu}(B) \leq ||R||H_{Ker\ \mu}(T(B)) \leq ||R||\beta(T(B))$. Y, en consecuenia, $T \in \tau_+^\mu(E,F)$, como

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

queríamos demostrar.

En [4] se prueba que $\tau_l^\beta(c_0, l^\infty) = \emptyset$. En el contexto de los operadores μ-tauberianos, tenemos el siguiente resultado.

2.3.21 Teorema

Sea μ una cantidad conjuntista que no se anula en c_0 y supongamos que $P_{rwc}(c_0) \subset Ker\ \mu$. Entonces $\tau_l^\mu(c_0, l^\infty) = \emptyset$.
Demostración.
Sea $T \in \tau_l^\mu(c_0, l^\infty)$. Entonces, existe $R : l^\infty \to c_0$ y $W \in \mu(c_0, c_0)$ que verifican que $RT = Id_{c_0} + W$. Como ya comentamos, cualquier operador de l^∞ en c_0 es débilmente compacto y, en virtud de nuestra hipótesis $P_{rwc}(c_0) \subset Ker\ \mu$, resultará que R es de μ-variación nula. Por la proposición 2.1.5, $RT \in \mu(c_0, c_0)$, por lo que, de $RT = Id_{c_0} + W$ y $W \in \mu(c_0, c_0)$, resultará que $Id_{c_0} \in \mu(c_0, c_0)$ y, en consecuencia, μ se anula en c_0, en contra de nuestra hipótesis. Por lo tanto, $\tau_l^\mu(c_0, l^\infty) = \emptyset$.

Para finalizar esta sección daremos una representación para operadores con μ-variación no nula, análogo al que aparece en [19].

Para un espacio de Banach E, denotaremos por l_E^∞ el espacio de las sucesiones en E acotadas con la norma del supremo y por $G_\mu(E)$ al subespacio $G_\mu(E) = \{(x_n) \in l_E^\infty : \{x_n,\ n \in N\} \in Ker\ \mu\}$

2.3.22 Proposición

Sea μ una cantidad conjuntista tal que $\mu(B_E) = 1$.
Entonces $G_\mu(E)$ es un subespacio cerrado de l_E^∞.
Demostración.
Es obvio que $G_\mu(E)$ es un subespacio por las propiedades de $Ker\ \mu$.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Veamos que es cerrado. Sea $(x^k) \subset G_\mu(E)$ y supongamos que $x^k \to y$ en la norma del supremo. Como $x^k \in G_\mu(E)$, será de la forma $x^k = (x_n^k)$ y si $x^k \to y$, esto significará que, dado $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in N$ tal que para todo $k \geq k_0$ es $\|x^k - y\| < \epsilon$ o, en forma equivalente, si $y = (y_n)$ entonces $sup\|x_n^k - y_n\| < \epsilon$ para $k \geq k_0$.
Veamos que $\{y_n, n \in N\} \in Ker\ \mu$.
En efecto, como $\{y_n, n \in N\} \subset \{y_n - x_n^{k_0}, n \in N\} + \{x_n^{k_0}, n \in N\}$, aplicando la cantidad conjuntista μ, se tiene que
$\mu(\{y_n, n \in N\}) \leq \mu(\{y_n - x_n^k, n \in N\}) + \mu(\{x_n^{k_0}, n \in N\}) =$
$= \mu(\{y_n - x_n^{k_0}, n \in N\})$ porque es un punto.
Como $\mu(A) \leq \|A\|\mu(B_E) = \|A\|$ ya que $\mu(B_E) = 1$, resultará que

$$\mu(\{y_n, n \in N\}) \leq \mu(\{y_n - x_n^{k_0}, n \in N\}) \leq \|\{y_n - x_n^{k_0}, n \in N\}\| =$$
$$= sup\{\|y_n - x_n^{k_0}\|, n \in N\} \leq \epsilon$$

Por lo tanto, como esto se verifica para cada $\epsilon > 0$ es $\{y_n, n \in N\} \in Ker\ \mu$, como queríamos probar.

A continuación, consideremos el espacio cociente $Q_\mu(E) = l_E^\infty / G_\mu(E)$. Para $T \in \mathcal{L}(E, F)$ definimos la aplicación $Q_\mu(T) : Q_\mu(E) \to Q_\mu(F)$: $Q_\mu(T)((x_n) + G_\mu(E)) = (Tx_n) + G_\mu(F)$

2.3.23 Proposición

El operador $Q_\mu(T)$ está bien definido siempre que $Ker\ \mu$ se preserve por operadores.
Demostración.
Sean (x_n) e (y_n) dos elementos de l_E^∞ tales que $(x_n) - (y_n) = (x_n - y_n) \in G_\mu(E)$. Esto significa que $(x_n - y_n) \in Ker\ \mu$. Como $Ker\ \mu$ se preserva por operadores, esto significa que $T(\{x_n - y_n, n \in N\}) \in Ker\ \mu$ o, lo que es lo mismo, que $\{Tx_n - Ty_n, n \in N\} \in Ker\ \mu$ y, en consecuencia,

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

$(Tx_n) - (Ty_n) \in G_\mu(F)$.
Veamos ahora que $Q_\mu(T)$ es un operador continuo.
La linealidad es obvia.
Veamos la continuidad: $||(Tx_n) + G_\mu(F)|| = inf\{||(Tx_n) + (y_n)||, (y_n) \in G_\mu(F)\}$. Sea $(x_n) + (y_n) \in (x_n) + G_\mu(E)$. Entonces, como $(Tx_n) + (Ty_n) \in (Tx_n) + G_\mu(F) \leq ||(Tx_n) + G_n(F)|| \leq ||(Tx_n) + (Ty_n)|| = ||T(x_n + y_n)|| = sup\{||T(x_n + y_n)||, n \in N\} \leq ||T||sup\{||x_n + y_n||, n \in N\} = ||T||.||(x_n) + (y_n)||$.
Luego, $||(Tx_n) + G_\mu(F)||.||T||^{-1} \leq ||(x_n) + (y_n)||$ y esto es para todo $(x_n) + (y_n) \in (x_n) + G_\mu(F)$.
Por lo tanto $||(Tx_n)+G_\mu(F)||.||T||^{-1} \leq ||(x_n)+G_\mu(F)||$ y por tanto $||Q_\mu(T)|| \leq ||T||$ como queríamos probar.

Finalmente, consideremos la siguiente representación de los operadores de E con μ-variación no nula. Sea $T + \mu(E, \epsilon) \in \mathcal{L}(E, E)/\mu(E, E)$ y definamos $\tilde{Q}_\mu(T + \mu(E, \epsilon)) = Q_\mu(T) \in \mathcal{L}(Q_\mu(E), Q_\mu(F))$

2.3.24 Teorema

El operador $\tilde{Q}_\mu : \mathcal{L}(E, E)/\mu(E, E) \to \mathcal{L}(Q_\mu(E), Q_\mu(E))$ es inyectivo si $Ker\ \mu$ está sucesionalmente determinado.
Demostración.

Veamos que $\tilde{Q}_\mu$ está bien definido. Sean $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E, E)$ tales que $T_1 - T_2 \in \mu(E, F)$. Veamos que $Q_\mu(T_1) = Q_\mu(T_2)$. En efecto: sea $(x_n) + G_\mu(E)$. Entonces $Q_\mu(T_1)((x_n) + G_\mu(E)) = (T_1 x_n + G_\mu(E))$. Como $T_1 - T_2 \in \mu(E, E)$, resultará que $\{(T_1 - T_2)(x_n), n \in N\} \in Ker\ \mu$ o lo que es lo mismo $\{T_1(x_n) - T_2(x_n), n \in N\} \in Ker\ \mu$. Luego $(T_1 x_n) - (T_2 x_n) \in G_\mu(E)$, por lo que $\tilde{Q}_\mu$ está bien definido.

La linealidad es obvia.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Veamos la continuidad. Sea $T + \mu(E,E) \in \mathcal{L}(E,E)/\mu(E,E)$. Como $\|T+\mu(E,E)\| = inf\{T+K\|, K \in \mu(E,E)\} = dist(T, \mu(E,E))$, supongamos que $K \in \mu(E,E)$. Por la proposición anterior y como $Q_\mu(T+K) = Q_\mu(T)$ ya que $K \in \mu(E,E)$, se tiene que $Q_\mu(T) = Q_\mu(T+K) \leq \|T+K\|$ y, en consecuencia, como esto es válido para todo $K \in \mu(E,E)$, resultará que $Q_\mu(T) \leq inf\{\|T+K\|, K \in \mu(E,E)\} = \|T+\mu(E,E)\|$. Por tanto $\tilde{Q}_\mu(T) \leq \|T+\mu(E,E)\|$.

Finalmente, veamos la inyectividad. Si $\tilde{Q}_\mu(T+\mu(E,E)) = 0$, es decir, si $Q_\mu(T) = 0$, esto quiere decir que para $(x_n) \in l_E^\infty, \{Tx_n, n \in N\} \in Ker\ \mu$. Por tanto, como $Ker\ \mu$ está sucesionalmente determinado, entonces $TB_E \in Ker\ \mu$ por lo que $T \in \mu(E,E)$, como queríamos demostrar.

2.4 POTENCIA DE OPERADORES DE μ-VARIACIÓN NULA

Tacon, en su artículo [73], usando técnicas de análisis no estándar, probó que si $T : E \to E$ es un operador en un espacio de Banach E, entonces T es una potencia compacta (es decir, que T^m es un operador compacto para algún $n \in N$) si y sólo si para cada sucesión acotada $(x_n) \subset E$ existe un $p \in N$ tal que el conjunto $\{T^p x_n\}$ es relativamente compacto.

Barría por su parte, usando técnicas estándar, prueba en su trabajo [15], el resultado anterior en el caso de que E sea un espacio de Hilbert.

A su vez, Buoni, Klein, Scott y Wadhwa [20], probaron los resultados de Tacon y análogos resultados para la clase de los operadores completamente continuos, débilmente completamente continuos y de Rosenthal.

González y Martinón, en su trabajo [42], prueban los resultados anteriores y, además, para algunas otras clases de operadores como los operadores V, los Dunford-Pettis, los de Grothendieck, etc. usando la $\mathcal{A}$-variación de Astala asociada a un ideal de operadores.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

En esta sección intentaremos generalizar estos resultados a operadores con μ-variación nula, siendo μ una cantidad conjuntista . Empezaremos traduciendo a nuestro lenguaje el teorema de Tacon.

Si tomamos como cantidad conjuntista la medida de no compacidad de Hausdorff χ, entonces, el teorema de Tacon se puede traducir diciendo que si $T : E \to E$ es un operador, entonces existe un $m \in N$ tal que T^m es un operador de χ-variación nula si y sólo si para cada sucesión acotada $(x_n) \subset E$, existe $p \in N$ tal que $\{T^p x_n : n \in N\} \in Ker\ \chi$.
Para nuestro resultado supondremos que el $Ker\ \mu$ está sucesionalmente determinado (ver definición 2.3.7).
Así tenemos el siguiente resultado.

2.4.1 Teorema

Supongamos que $Ker\ \mu$ está sucesionalmente determinado y sea $T_n : E \to F$ una sucesión de operadores entre los espacios de Banach E y F. Entonces existe un $m \in N$ tal que T_m es de μ-variación nula, si y sólo si para cada sucesión acotada $(x_n) \subset E$ existe $p \in N$ tal que $\{T_p x_n : n \in N\} \in Ker\ \mu$.
Demostración.
Supongamos que existe $m \in N$ tal que T_m es de μ-variación nula. Esto significa que $T_m(B_E) \in Ker\ \mu$. Sea $(x_n) \subset E$ una sucesión acotada, es decir, que $\|x_n\| \leq K$. Entonces, la sucesión (x_n/K) está contenida en B_E, y por las propiedades del núcleo $Ker\ \mu$, se deduce que $\mu(T_m\{x_n/K : n \in N\}) \leq \mu(T_m(B_E)) = 0$ y, en consecuencia, $\left\{\frac{T_m(x_n)}{K}, n \in N\right\} \in Ker\ \mu$. Por lo tanto, $\{T_m(x_n) : n \in N\} \in Ker\ \mu$ por lo que $p = m$ nos serviría.

Supongamos a continuación que se verifica que para cualquier $(x_n) \subset E$ acotada, existe $p \in N$ que verifica que $\{T_p x_n : n \in N\} \in Ker\ \mu$. Supongamos, por reducción al absurdo, que para cada $m \in N$, T_m no tiene μ-variación nula. Esto significaría que para cada $m \in N$, $T_m(B_E) \notin Ker\ \mu$. Como $Ker\ \mu$ está sucesionalmente determinado, esto significará que para cada $m \in N$,

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

existirá una sucesión $(x_n^m)_{n\in N} \subset B_E$ tal que $T_m\{x_n^m : n \in N\} \notin Ker\ \mu$. Consideremos el conjunto

$$\bigcup_{m\in N} \{x_n^m : n \in N\}$$

que, evidentemente, es numerable por ser unión numerable de numerables. Tras previa reordenación, este conjunto determina una sucesión $(y_n) \subset B_E$. Como (y_n) es acotada, existirá, por hipótesis, $p \in N$ tal que $\{T_p x_n : n \in N\} \in Ker\ \mu$. En particular, como $\{x_n^p\} \subset \{y_n : n \in N\}$, entonces $\{T_p x_n^p : n \in N\} \in Ker\ \mu$, lo cual es absurdo debido a la elección de (x_n^p).

Como corolario de este teorema se deduce la ya mencionada generalización del teorema de Tacon para operadores con μ-variación nula.

2.4.2 Corolario

Sea μ una cantidad conjuntista tal que su núcleo $Ker\ \mu$, está sucesionalmente determinado y sea $T : E \to F$ un operador. Entonces, existe $m \in N$ tal que T^m es un operador con μ-variación nula si y sólo si para cada sucesión acotada $(x_n) \subset E$, existe $p \in N$ tal que $\{T^p x_n : n \in N\} \in Ker\ \mu$.
Demostración.
Basta aplicar el teorema anterior a la sucesión de operadores $T^m : E \to E$ cuando $m \in N$.

Tener en cuenta que si tomamos la medida de no compacidad de Hausdorff χ, entonces su núcleo (los conjuntos relativamente compactos) está sucesionalmente determinado, ya que un conjunto A es relativamente compacto en un espacio E si y sólo si cada sucesión contenida en A es relativamente compacta. Análogamente, si tomamos la medida de no compacidad débil de De Blasi β, como un conjunto acotado A es relativamente débilmente com-

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

pacto si y sólo si cada sucesión contenida en A es relativamente débilmente compacta, resultará que su núcleo está sucesionalmente determinado.

Por tanto, teneindo en cuenta lo anteriormente dicho, tenemos los corolarios siguientes.

2.4.3 Corolario

Sea $T_n : E \to F$ una sucesión de operadores entre dos espacios de Banach E y F para $n = 1, 2, \ldots$. Entonces, existe $m \in N$ tal que T_m es compacto si y sólo si para cada sucesión acotada $(x_n) \subset E$, existe $p \in N$ tal que $\{T_p x_n : n \in N\}$ es relativamente compacto.

2.4.4 Corolario

Sea $T : E \to E$ un operador. Entonces T es una potencia compacta si y sólo si para cada sucesión $(x_n) \subset E$, existe $p \in N$ tal que el conjunto $\{T^p x_n : n \in N\}$ es relativamente compacto.

2.4.5 Corolario

Sea $T_n : E \to F$ una sucesión de operadores entre dos espacios de Banach E y F para $n = 1, 2, \ldots$. Entonces, existe $m \in N$ tal que T_m es débilmente compacto si y sólo si para cada sucesión acotada $(x_n) \subset E$, existe $p \in N$ tal que $\{T_p x_n : n \in N\}$ es relativamente débilmente compacto .

2.4.6 Corolario

Sea $T : E \to E$ un operador. Entonces T es una potencia débilmente compacta si y sólo si para cada sucesión $(x_n) \subset E$, existe $p \in N$ tal que el conjunto $\{T^p x_n : n \in N\}$ es relativamente débilmente compacto .

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

En el próximo capítulo veremos algunas cantidades conjuntistas distintas a las anteriores y que también tienen núcleos sucesionalmente determinados.

Finalizaremos este capítulo indicando que parte de esta sección forma el artículo [37]

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Capítulo 3

EJEMPLOS DE CANTIDADES CONJUNTISTAS

En este capítulo daremos algunos ejemplos de cantidades conjuntistas y analizaremos, además, la convexidad deducida a partir de ellas.

3.1 CONJUNTOS CONDICIONALMENTE DÉBILMENTE COMPACTOS

En esta sección, probaremos que los conjuntos condicionalmente débilmente compactos constituyen el núcleo de una cantidad conjuntista y estudiaremos la convexidad deducida por la cantidad conjuntista dada por la distancia de Hausdorff a esta clase de conjuntos acotados.

El resultado principal de esta sección es dar una caracterización de los espacios de Banach que no contienen copias de l^1.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

3.1.1 Definición

Una sucesión (x_n) en un espacio de Banach E se dice que es débilmente de Cauchy en E si la sucesión $(f(x_n))$ es convergente para cualquier $f \in E^*$.

3.1.2 Definición

Decimos que un subconjunto C de un espacio de Banach E es condicionalmente débilmente compacto , (abreviadamente *cwc*), si cada sucesión de C contiene una subsucesión débilmente de Cauchy.

En [17] se prueba que todo conjunto *cwc* de un espacio de Banach es acotado. En lo que sigue, recordaremos un conjunto de resultados sobre conjuntos *cwc* que aparecen en [70].

Indicaremos por $P_{cwc}(E)$ la familia de los conjuntos *cwc* no vacíos de un espacio de Banach E.

3.1.3 Proposición [70]

$P_{cwc}(E)$ satisface las siguientes propiedades:

1. $P_{cwc}(E) \neq \emptyset$
2. $C, D \in P_{cwc}(E) \Leftrightarrow C \neq \emptyset, D \neq \emptyset$, y $C \cup D \in P_{cwc}(E)$
3. $\lambda \in R, C \in P_{cwc}(E) \Rightarrow \lambda C \in P_{cwc}(E)$
4. $C, D \in P_{cwc}(E) \Rightarrow C + D \in P_{cwc}(E)$
5. $C \in P_{cwc}(E) \Rightarrow Conv\ C \in P_{cwc}(E)$
6. $P_{cwc}(E)$ es cerrado en la topología definida por la distancia de Hausdorff en $P_b(E)$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Demostración.

Las propiedades 1 a 4 son inmediatas. La propiedad 5 se demuestra en [17]. Para demostrar la propiedad 6, tomamos $A \in P_b(E)$ con $A \notin P_{wcc}(E)$. Por el teorema de Rosenthal, esto significa que $l^1[A] \neq \emptyset$ y en consecuencia, $\delta(A) > 0$. Consideremos ahora la bola $B(A, \frac{\delta(A)}{2})$, en la métrica de Hausdorff. Llamamos la atención en el hecho de que $B(A, \frac{\delta(A)}{2}) \cap P_{wcc}(E) = \emptyset$. Supongamos que $C \in B(A, \frac{\delta(A)}{2}) \cap P_{wcc}(E)$. Teniendo en cuenta la definición de la métrica de Hausdorff, esto significa que

$$A \subset C + \frac{\delta(A)}{2} B_E \tag{3.1}$$

Tomamos $(x_n) \in l^1[A]$ con $\delta_1((x_n)) > \frac{\delta(A)}{\sqrt{2}}$. Entonces, en virtud de (3.1), existen las sucesiones $(y_n) \subset C$ y $(b_n) \subset B_E$ tales que

$$x_n = y_n + \frac{\delta(A)}{2} b_n$$

Ahora probaremos que (y_n) es una l^1-base de C.

Para ello, tomamos una familia finita de escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y entonces podemos obtener

$$\begin{aligned} &\|\sum_{k=1}^{n} a_k y_k\| = \|\sum_{k=1}^{n} a_k (x_k - \frac{\delta(A)}{2} b_k)\| \\ &= \|\sum_{k=1}^{n} a_k x_k - \frac{\delta(A)}{2} \sum_{k=1}^{n} a_k b_k\| \geq \|\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\| - \frac{\delta(A)}{2} \|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\| \\ &\geq \frac{\delta(A)}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{n} |a_k| - \frac{\delta(A)}{2} \sum_{k=1}^{n} |a_k| = \left(\frac{\delta(A)}{\sqrt{2}} - \frac{\delta(A)}{2} \right) \sum_{k=1}^{n} |a_k| \end{aligned}$$

Como la familia de escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ es arbitraria, deducimos que $(y_n) \subset C$ es una l^1-base, pero esto contradice el hecho de que $C \in P_{wcc}(E)$ según el teorema de Rosenthal.

En consecuencia, $B(A, \frac{\delta(A)}{2}) \cap P_{wcc}(E) = \emptyset$ y $P_{wcc}(E)$ satisface la propiedad 6 del teorema 3.1.3

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

En virtud de la proposición 0.2.4 y del teorema 0.2.5, podemos considerar la distancia de Hausdorff a la familia de los conjuntos condicionalmente débilmente compactos que denotaremos por H_{cwc} y que será una cantidad conjuntista . A continuación, trataremos de relacionar la presencia de copias de l^1 en un espacio de Banach E y los conjuntos condicionalmente débilmente compactos .

Previamente daremos unas definiciones y una serie de resultados concernientes a este hecho y que aparecen en [70].

3.1.4 Definición

Sea (x_n) una sucesión acotada en un espacio de Banach E.
Diremos que (x_n) es una l^1-base de E, si existe un $\delta > 0$ tal que

$$\|\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\| \geq \delta \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

para cualquier familia finita de escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Notar que si (x_n) es una l^1-base de E, entonces el subespacio cerrado generado por $\{x_n : n \in N\}$ es isomorfo a l^1 [17]. Inversamente, si un espacio de Banach E posee una copia de l^1, entonces existe una l^1-base en E.

El resultado fundamental que relaciona la presencia de copias de l^1 y los conjuntos condicionalmente débilmente compactos es debido a Rosenthal [45] y cuyo enunciado exponemos a continuación.

3.1.5 Teorema de Rosenthal

Sea (x_n) una sucesión acotada en un espacio de Banach E. Entonces (x_n) posee una subsucesión (x_{n_k}) que satisface una y sólo una de las dos condiciones siguientes:

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

(a) (x_{n_k}) es una l^1-base de E

(b) (x_{n_k}) es una sucesión débil de Cauchy

En virtud de este teorema, podemos obtener la siguiente caracterización de espacios de Banach que no contienen copias de l^1 en términos de la distancia de Hausdorff a los conjuntos condicionalmente débilmente compactos

3.1.6 Teorema

E no contiene copias de l^1 si y sólo si $H_{cwc} = 0$.
Demostración.
Supongamos que E no contiene copias de l^1. Entonces, si probamos que B_E es condicionalmente débilmente compacto se verificará por (3) del teorema 0.2.5, que $H_{cwc} = 0$.
En efecto: sea $(x_n) \subset B_E$. Entonces, por el anterior teorema 3.1.5, (x_n) contiene una subsucesión que es, o una l^1-base de E o es débil de Cauchy. Como E no contiene copias de l^1, esta subsucesión tendrá que ser débil de Cauchy y, como esto se ha hecho para cualquier sucesión $(x_n) \subset B_E$, resultará que B_E es *cwc*.

Recíprocamente, supongamos que $H_{cwc} = 0$ y además, que E contiene copias de l^1. Entonces existe $(x_n) \subset E$ acotada que es una l^1-base de E. A su vez, como (x_n) es acotada, resultará que $H_{cwc}(\{x_n : n \in N\}) = 0$ o, en forma equivalente, $\{x_n : n \in N\} \in P_{cwc}(E)$ que es el núcleo de H_{cwc}. Por definición de conjunto condicionalmente débilmente compacto , existirá una subsucesión (x_{n_k}) que es débil de Cauchy. A su vez, como las subsucesiones de las l^1-bases son l^1-bases [48], resultará que (x_{n_k}) es también una l^1-base. Por lo tanto, (x_{n_k}) es débil de Cauchy y l^1-base, simultáneamente, lo que contradice el teorema de Rosenthal. Po tanto, E no contiene compias de l^1.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

A continuación, estudiaremos la convexidad inducida por la cantidad conjuntista H_{cwc}.

En primer lugar, y como consecuencia de este teorema 3.1.6, tenemos las siguientes consecuencias que presentamos como corolarios.

3.1.7 Corolario

Si E no contiene copias de l^1, entonces E es H_{cwc}-UC

3.1.8 Corolario

Si E no contiene copias de l^1, entonces E es H_{cwc}-LUC

BIBLIOTECA GENERAL · UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA

3.1.9 Corolario

Si E no contiene copias de l^1, entonces E es H_{cwc}-SC

A continuación, pasaremos a estudiar las dos cuestiones que se plantearon en el capítulo 1 y que aparecen inmediatamente después del teorema 1.2.4 y que, recordemos, eran las siguientes:

1. ¿Existe una cantidad conjuntista que no sea cantoriana?
2. ¿Existe una cantidad conjuntista μ y un espacio de Banach E tales que E sea μ-LUC y no sea reflexivo?

Respondamos en primer lugar a la segunda cuestión.

3.1.10 Teorema

Existe una cantidad conjuntista μ y un espacio de Banach E tales que E es μ-LUC y no es reflexivo.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Demostración.
Consideremos la cantidad conjuntista H_{cwc} y un espacio de Banach E no reflexivo y que no contenga copias de l^1 (por ejemplo, c_0 o el espacio J de James). Por no contener copias de l^1, el corolario 3.1.8 nos da que E es H_{cwc}-LUC y no reflexivo. En consecuencia, se prueba lo deseado.

En el siguiente resultado, contestaremos afirmativamente a la primera cuestión planteada.

3.1.11 Teorema

H_{cwc} es una cantidad conjuntista no cantoriana.
Demostración.
Hemos visto en el teorema anterior 3.1.10 que existen espacios H_{cwc}-LUC y no reflexivos. Por el teorema 1.2.3, se deduce que H_{cwc} no puede ser cantoriana.

A continuación, recordamos el siguiente resultado que aparece en [70].

3.1.12 Proposición

Todo conjunto relativamente débilmente compacto es condicionalmente débilmente compacto .

En consecuencia, en virtud de la proposición 3.1.3, tenemos el siguiente corolario.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

3.1.13 Corolario

H_{cwc} contiene en su núcleo a los conjuntos unipuntuales .

Por otra parte, el corolario 3.1.7 nos da la implicación de que si E no contiene copias de l^1, entonces E es E_{cwc}-UC.

Pero estamos interesados en ver si la implicación inversa es cierta o no. Empezaremos probando que el clásico espacio l^1 no es H_{cwc}-UC.

3.1.14 Definición

Un espacio de Banach E se dice que tiene la propiedad de Schur si las sucesiones débilmente convergentes, convergen en norma.
Un ejemplo típico de espacio de Schur es l^1.

El siguiente resultado nos indica que un espacio de Schur no es H_{cwc}-UC.

3.1.15 Teorema

Si E es un espacio de Schur, entonces E no es H_{cwc}-UC.
Demostración.
Si E es un espacio de Schur, entonces los conjuntos condicionalmente débilmente compactos coinciden con los relativamente compactos [17], y, en consecuencia, $H_{cwc} = \chi$ en E, siendo χ la medida de no compacidad de Hausdorff . Como se sabe, los espacios de Schur no son χ-UC porque no son reflexivos y por tanto no pueden ser H_{cwc}-UC.

Como corolario, tenemos el siguiente resultado.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

3.1.16 Corolario

El espacio l^1 no es H_{cwc}-UC

A continuación, veremos algunos resultados sobre el comportamiento de las l^1-bases y de la cantidad conjuntista H_{cwc} frente a isometrías.

3.1.17 Lema

Sea $I : E \to F$ una isometría y sea (x_n) una l^1-base.
Entonces $I(x_n)$ es una l^1-base.
Demostración.
La prueba es inmediata en base a las definiciones de l^1-base y de isometría.

Veamos a continuación que la cantidad H_{cwc} es equivalente por isometrías.

3.1.18 Proposición

Sea $I : E \to F$ una isometría y sea $A \in P_b(E)$.
Entonces $H_{cwc}(A) = H_{cwc}(I(A))$.
Demostración.
La desigualdad $H_{cwc}(I(A)) \leq H_{cwc}(A)$ se deduce fácilmente a partir de la definición y teniendo en cuenta el lema anterior.
Veamos a continuación la otra desigualdad.
Sea $H_{cwc}(I(A)) = r$. Entonces, para $\epsilon > 0$, existirá un $C \in P_{cwc}(E)$ tal que $I(A) \subset C + (r + \epsilon)B_F$. Aplicando la isometría inversa, se tendrá que $I^{-1}(I(A)) \subset I^{-1}(C) + (r + \epsilon)I^{-1}(B_F)$. Como $A \subset I^{-1}(I(A))$ e $I^{-1}(C)$ es *cwc* en E ya que de lo contrario existiría una l^1-base (x_n) en $I^{-1}(C)$ y por tanto, por el lema 3.1.17, $I(x_n)$ sería una l^1-base en C y C es *cwc* en F, lo cual es absurdo. Además, como I es una isometría, es $I^{-1}(B_F) \subset B_E$ y por tanto $A \subset I^{-1}(C) + (r + \epsilon)B_E$ y como $I^{-1}(C)$ es *cwc* en E, se tendrá que

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

$H_{cwc}(A) \leq r + \epsilon$ de donde, como esto es cierto para todo $\epsilon > 0$, se tiene que $H_{cwc}(A) \leq H_{cwc}(I(A))$.
Y como consecuencia se obtiene el resultado deseado.

Teniendo en cuenta esta proposición, la cantidad H_{cwc} es una cantidad invariante por isometrías (ver la definición 1.8.5) y, teniendo en cuenta además el teorema 1.8.3, se tiene el siguiente resultado.

3.1.19 Proposición

Si E es una espacio H_{cwc}-UC y M es un subespacio cerrado de E, entonces M es H_{cwc}-UC.

A continuación indicamos sin demostración un resultado bien conocido.

3.1.20 Proposición

Sean E y F dos espacios de Banach . Si E contiene una copia de F, entonces se puede definir en F una norma equivalente de tal manera que F sea isométrico con esta nueva norma a un subespacio cerrado de E.

Estamos en condiciones de probar el resultado más importante de esta sección.

3.1.21 Teorema

Si E es un espacio de Banach que contiene copias de un espacio de Schur y F es H_{cwc}-UC, entonces E no es H_{cwc}-UC.
Demostración.
Sea F un espacio de Schur y supongamos que E contiene una copia de F. Por

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

la proposición 3.1.20, se puede definir en F una norma equivalente tal que F, con esa norma, sea isométrico a un subespacio cerrado de E que indicaremos por E_1. Por la proposición 3.1.19, E_1 es H_{cwc}-UC y como F con esa norma es isométrico a E_1, resultará que F con esa norma es H_{cwc}-UC. Como la propiedad de ser Schur es topológica, F, con esa nueva norma, sigue siendo Schur y, además es H_{cwc}-UC, lo que contradice el teorema 3.1.15. Por lo tanto E no es H_{cwc}-UC.

Como l^1 es un espacio de Schur, se tiene el siguiente corolario.

3.1.22 Corolario

Si E es un espacio que contiene copia de l^1, entonces E no es H_{cwc}-UC.

Resumiendo, los corolarios 3.1.7 y 3.1.22 nos permiten dar la siguiente caracterización de los espacios de Banach que no contienen copias de l^1.

3.1.23 Teorema

E no contiene copia de l^1 si y sólo si E es H_{cwc}-UC.

Siguiendo las mismas pautas anteriores, se puede probar de forma análoga el siguiente teorema.

3.1.24 Teorema

E no contiene copia de l^1 si y sólo si E es H_{cwc}-LUC.

Teniendo en cuenta las definiciones de H_{cwc}-LUC, tenemos la siguiente caracterización.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

3.1.25 Teorema

E no contiene copia de l^1 si y sólo si para cada $f \in S_{E^*}$ se verifica que

$$\lim_{\epsilon \to 0} H_{cwc}(F(f, \epsilon)) = 0$$

Resumiendo todos estos resultados, tenemos la siguiente cadena de equivalencias e implicaciones:

$$\text{E es } H_{cwc} - UC \Leftrightarrow \text{ E es } H_{cwc} - LUC \Rightarrow \text{ E es } H_{cwc} - SC$$

Veamos que la última implicación es simple y no doble, es decir, que la recíproca de la última implicación no tiene por qué verificarse.

3.1.26 Teorema

Existen espacios H_{cwc}-SC que no son H_{cwc}-LUC.
Demostración.
Por el teorema 1.4.4, al ser l^1 separable, admite una norma equivalente que lo hace estrictamente convexo. Esto quiere decir, en virtud de la proposición 1.4.2, que sus slices $F(f, 0)$ son no vacíos donde $f \in (l^1)^*$, siendo $(l^1)^*$ el dual de l^1 con la nueva norma, son unipuntuales y, en consecuencia, condicionalmente débilmente compactos. Luego l^1, con esta nueva norma, es un espacio H_{cwc}-SC. Pero l^1 con esta norma no es $H_{cwc} - LUC$ ya que contiene una copia de l^1.

Finalmente, teniendo en cuenta la definición de la propiedad $(H_{cwc} - \beta)$ (ver definición 1.6.1) y el teorema 3.1.16, se tiene el siguiente resultado.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

3.1.27 Proposición

Si un espacio de Banach E no contiene copias de l^1, entonces E tiene la $(H_{cwc} - \beta)$-propiedad.

Por otra parte, como H_{cwc} es una cantidad conjuntista que contiene en su núcleo a los conjuntos unipuntuales (ver corolario 3.1.13), resultará por el teorema 1.6.3 que se tiene el siguiente resultado.

3.1.28 Teorema

Si un espacio de Banach E verifica la $(H_{cwc} - \beta)$-propiedad, entonces E es un espacio H_{cwc}-UC.

Por lo tanto, por el teorema 3.1.23 y la proposición 3.1.27, se tiene la siguiente caracterización de los espacios de Banach que no contienen copia de l^1.

3.1.29 Teorema

E no contiene copia de l^1 (E no tiene la $(H_{cwc} - \beta)$-propiedad) si y sólo si para cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $1 < \|x\| < 1 + \delta$, entonces se verifica que es $H_{cwc}(R(x)) < \epsilon$, siendo $R(x) = D(x, B_E) - B_e$ y $D(x, B_E) = Conv(\{x\} \cup B_E)$.

De todo lo que hemos visto hasta ahora se deduce que la convexidad inducida por H_{cwc} es similar a la inducida por la medida de no compacidad débil de De Blasi como se prueba en [23], donde se demuestra que

$$\text{E es } \beta - UC \Leftrightarrow \text{ E es } \beta - LUC \Rightarrow \text{ E es } \beta - SC$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Por otra parte, y en virtud de la proposición 3.1.12, se tiene evidentemente que para cualquier espacio de Banach E y $C \in P_b(E)$ es $H_{cwc}(C) \leq \beta(C)$. Es decir, que la medida de no compacidad débil de De Blasi es menos fina que H_{cwc}.

Además, como los espacios β-UC y β-LUC son los mismos que los reflexivos [23], y los H_{cwc}-UC y H_{cwc}-LUC son los espacios de Banach que no contienen copia de l^1, basta con tomar un espacio de Banach E no reflexivo y que no contenga copia de l^1 (por ejemplo, c_0 o el espacio J de James) y este espacio sería un ejemplo de espacio H_{cwc}-UC (respectivamente, H_{cwc}-LUC) y que no serí β-UC (respectivamente H_{cwc}-LUC).
Abundando en el tema, en [23, Teorema 1.4.8], se prueba que c_0 no es β-SC, y como c_0 no contiene copia de l^1, sería H_{cwc}-SC y por lo tanto, tenemos también un ejemplo de espacio H_{cwc}-SC que no es β-SC.
Estos ejemplos nos prueban que las implicaciones inversas en la proposición 1.1.5 no tienen por qué verificarse.

Veamos a continuación algunos otros ejemplos.

3.1.30 Definición

Un espacio de Banach E se dice que es un espacio sucesionalmente débilmente completo (WSC), si cada sucesión débil de Cauchy es débilmente convergente.

En [17] se prueba que la clase de los conjuntos condicionalmente débilmente compactos coincide con la clase de los relativamente débilmente compactos en los espacios sucesionalmente débilmente completos.
Por lo tanto, tenemos el siguiente corolario inmediato.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

3.1.31 Corolario

Si E es un espacio WSC, entonces $H_{cwc} = \beta$, donde β es la medida de no compacidad débil de De Blasi .

En el teorema siguiente probaremos que el clásico espacio $L^1(0,1)$ no es H_{cwc}-SC. Recordemos que $L^1(0,1)$ está definido como $L^1(0,1) = \{f : (0,1) \to C$, medibles con $\int_0^1 |f(t)|dt < \infty\}$ donde en (0,1) se considera la σ-álgebra de los borelianos y la medida tomada es la de Lebesgue.
Este espacio, dotado de la norma $||f|| = \int_0^1 |f|dt < \infty$ es un espacio de Banach [45]

3.1.32 Teorema

El espacio $L^1(0,1)$ no es H_{cwc}-SC.
Demostración.
En [45, Corollary IV.2.6] se prueba que $L^1(0,1)$ es un espacio WSC y, en consecuencia, $H_{cwc} = \beta$ por el corolario 3.1.30.
Por otra parte, en [23, Teorema 1.4.10] se prueba que $L^1(0,1)$ no es β-SC y, en consecuencia, como $\beta = H_{cwc}$, se deuce que $L^1(0,1)$ no es H_{cwc}-SC.

Al mismo tiempo, como un espacio reflexivo no contiene copias de l^1, tenemos, en virtud del teorema 3.1.23, la siguiente consecuencia.

3.1.33 Corolario

Si E es reflexivo, entonces E es H_{cwc}-UC.
En particular, como los espacios l^p para $1 < p < \infty$, los espacios de Hilbert, los $L^p(0,1)$ para $1 < p < \infty$ son reflexivos, se tiene que todos estos espacios son H_{cwc}-UC.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Pasemos a continuación a estudiar la lisura inducida por la cantidad H_{cwc}. En virtud de la proposición 3.1.18, la cantidad conjuntista H_{cwc} es equivalente por isometrías y podemos aplicarle los corolarios 1.8.7 y 1.8.8 y el teorema 1.8.11, con lo que obtenemos el siguiente resultado.

3.1.34 Teorema

$$\begin{aligned} \text{Si } E^* \text{ es } H_{cwc} - S &\Rightarrow \text{E es } H_{cwc}\text{-SC} \\ \text{Si } E^* \text{ es } H_{cwc} - LUS &\Rightarrow \text{E es } H_{cwc}\text{-LUC} \\ \text{Si } E^* \text{ es } H_{cwc} - US &\Rightarrow \text{E es } H_{cwc}\text{-UC} \end{aligned}$$

Una cuestión natural a la vista de este teorema es preguntarse si se verifican las implicaciones contrarias. Sabemos que una condición suficiente para que se verifiquen estas implicaciones contrarias son, por el corolario 1.8.10 y el teorema 1.8.13, que el espacio sea reflexivo.

Veamos que, en general, las implicaciones contrarias del teorema 3.1.34 no tienen por qué darse.

3.1.35 Teorema

Existen espacios de Banach que son H_{cwc}-SC y tales que sus respectivos duales E^* no son H_{cwc}-S.
Demostración.
Tomamos $E = c_0$, que, como no contiene copia de l^1, por el teorema 3.1.28 es H_{cwc}-UC y, por lo tanto, H_{cwc}-SC.
Su dual, $E^* = l^1$, verifica que los conjuntos condicionalmente débilmente compactos coinciden con los relativamente compactos [17] y por lo tanto en l^1 se verifica que la cantidad H_{cwc} coincide con la medida de no compacidad de Hausdorff . Pero si l^1 fuese H_{cwc}-S, en virtud de lo anterior, l^1 sería χ-S y, en consecuencia, como la medida de no compacidad de Hausdorff es equivalente por isometrías [17], por el corolario 1.8.7, c_0 sería χ-SC y esto es falso,

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

como se prueba en [70, Teorema 3.2.5].

El mismo ejemplo y la misma argumentación nos serviría para los otros dos casos ya que si l^1 no es χ-S no sería χ-LUS ni χ-US.
Por tanto concluímos dando los siguientes teoremas que contestan negativamente a las preguntas planteadas con anterioridad.

3.1.36 Teorema

Existen espacios de Banach E que son H_{cwc}-LUC y tales que sus respectivos duales E^* no son H_{cwc}-LUS

3.1.37 Teorema

Existen espacios de Banach E que son H_{cwc}-UC y tales que sus respectivos duales E^* no son H_{cwc}-US

Por otra parte, por el corolario 3.1.13 y por la proposición 1.1.9, se deduce que la medida de no compacidad de Hausdorff es menos fina que H_{cwc}, verificándose además que $H_{cwc} \leq H_{cwc}(B_E)\chi$ para cualquier espacio de Banach E.

En consecuencia, si E es un espacio χ-US (respectivamente χ-LUS o χ-S), entonces E es H_{cwc}-US (respectivamente H_{cwc}-LUS o H_{cwc}-S).

En particular, como c_0 es χ-US (respectivamente χ-LUS o χ-S), entonces c_0 es un ejemplo de espacio no reflexivo que es H_{cwc}-US (respectivamente H_{cwc}-LUS o H_{cwc}-S).

Por otra parte, c_0 carece de predual. Entonces una cuestión natural es saber si existen espacios no reflexivos y con predual que sean H_{cwc}-US (respectivamente H_{cwc}-LUS o H_{cwc}-S).

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

El ejemplo que nos resolverá la cuestión planteada será el espacio de James [59].
A continuación daremos su definición y algunas de sus propiedades más relevantes.
El espacio $\mathcal{J}$ es el conjunto de todas las sucesiones de escalares $x = (a_n)$ tales que siendo

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

se verifica que

$$\|x\| = sup\left\{ \left(\sum_{1 \leq i \leq n} |a_{p_i - 1} - a_{p_i}|^2 \right)^{1/2}, \ n \in N, \ p_1 < p_2 < \cdots < p_n \right\} < \infty$$

Este espacio, dotado de la norma anterior, verifica que es isométrico a su bidual $\mathcal{J}^{**}$ y no es reflexivo. Además no contiene copias de c_0 ni de l^1.

3.1.38 Teorema

Existen espacios no reflexivos y con predual tales que son H_{cwc}-US (respectivamente H_{cwc}-LUS y H_{cwc}-S).
Demostración.
Consideremos el espacio $\mathcal{J}^*$ que no es reflexivo por no serlo $\mathcal{J}$ y tiene predual $\mathcal{J}$. Su dual, $\mathcal{J}^{**}$, al ser isométrico a $\mathcal{J}$ no contiene copias de c_0 ni de l^1. Entonces, por el teorema 3.1.6, $H_{cwc} = 0$ en $\mathcal{J}^{**}$ y, en consecuencia, $\mathcal{J}^*$ es H_{cwc}-US, como queríamos probar.

Una cuestión que dejamos abierta era saber si las implicaciones inversas de la cadena $H_{cwc} - US \Rightarrow H_{cwc} - LUS \Rightarrow H_{cwc} - S$ eran ciertas o no . Veamos qué ocurre con el espacio l^∞.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

3.1.39 Teorema

l^∞ no es H_{cwc}-S (y por lo tanto tampoco es H_{cwc}-LUS ni H_{cwc}-US).
Demostración.
En efecto. Si l^∞ fuera H_{cwc}-S, por el teorema 3.1.33, l^1 sería H_{cwc}-SC. Pero como en l^1, $H_{cwc} = \chi$ [17], resultaría que l^1 sería también χ-SC, lo cual es falso como se prueba en [41].

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

Bibliografía

[1] AKHMEROV R. R., KAMENSKII M. I., POTAPOV A. S., RODKINA A. E. y SADOVSKII B. N.: *Measures of Noncompactness and Condensing operators*, Operator theory: Advances and Applications, 55, Birkäuser Basel-Boston, Berlin, (1992)

[2] ALVAREZ T. y GONZALEZ M.: *Some examples of tauberian operators*, Extracta Math. 4, (1989)

[3] ASTALA K.: *On measures of noncompactness and ideal variations in Banach spaces*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Serv. A. I. Math. Dissertations, 29, (1980), 1-42

[4] ASTALA K. y TYLLI H. O.: *On the bounded compact approximation property and measures of noncompactness*, J. Funct. Analy. 70 (1987), 388-401

[5] ASTALA K. y TYLLI H. O.: *Seminorms related to weak compactness and to tauberian operators*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 107 (1990), 367-375

[6] BANAS J.: *On modulus of noncompact convexity and its properties*, Can. Math. Bull. 30 (1987), 186-192

[7] BANAS J.: *On drop property and nearly uniformly smooth Banach spaces*, Nonlin. Anal. T. M. A. 14 (1990), 927-933

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

[8] BANAS J.: *Compactness conditions in the geometric theory of Banach Spaces*, Nonlin. Anal. T. M. A. 16 (1991), 669-682

[9] BANAS J. y FRACZEK K.: *Conditions involving compactness in geometry of Banach spaces*, Nonlin. Anal. T. M. A. 20 (1993), 1217-1230

[10] BANAS J. y FRACZEK K.: *Locally nearly uniformly smooth Banach spaces*, Collect. Math. 44 (1993), 13-22

[11] BANAS J. y GOEBEL K.: *Measures of noncompactness in Banach spaces*, Lecture Notes in Pure and Applied Math. 60, Marcel Dekker, New York-Basel, (1980)

[12] BANAS J. and MARTINON A.: *Some properties of the Hausdorff distance in metric spaces*, Bull. Austral. Math. Soc. 42 (1990), 511-516

[13] BANAS J., MARTINON A. y SADARANGANI K.: *Set quantities related to the Hausdorff distance in Banach spaces*, Indian J. Pure Appl. Math. 28 (10), 1421-1433

[14] BANAS J. y RIVERO J.: *On measures of weak noncompactness*, Ann. Math. Pura Appl. 151 (1988), 213-214

[15] BARRIA J.: *On power compact operators*, Proc. Amer. Math. Soc. 80 (1980), 123-124

[16] BISHOP E. y PHELPS R. R.: *The support functional of a convex set*, Convexity, Pro. Symp. Pure Math. 7 (1963), 27-35

[17] BOURGAIN J.: *New Classes of $\mathcal{L}^p$-spaces*, Lectures Notes in Math. 889, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1981

[18] BOURGAIN J. y DIESTEL J.: *Limited operators and strict cosingularity*, Math. Nachr. 119 (1984), 55-58

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

[19] BUONI J. J. y KLEIN A.: *The generalized Calkin algebra*, Pacific J. Math. 80 (1979), 9-12

[20] BUONI J. J., KLEIN A. SCOTT B. M. y WADHWA: *On power compactness in a Banach space*, Indian Univ. Math. J. 32 (1983), 177-185

[21] BUONI J. J., KLEIN A. SCOTT B. M. y WADHWA: *Compact-like operators and the Baire category theorem*, Int. Eq. and Oper. Theory 7 (1984), 10-26

[22] CABRERA I.: *Medidas de no compacidad débil y geometría de espacios de Banach* , Tesis, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, 1999

[23] CABRERA I., FALCON S. y SADARANGANI K.: *On weakly locally nearly uniformly convex Banach space*, Ponencia en el congreso Functional Analysis, Valencia 2000 (3-7 julio 2000)

[24] CABRERA I., FALCON S. y SADARANGANI K.: *El módulo de débil no compacidad en el espacio de James*, Ponencia en el congreso COMAT'99, Matanzas (Cuba), 8-12 noviembre 1999

[25] CLARKSON J. A.: *Uniformly convex spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 40 (1936), 396-414

[26] CONTRERAS M. D.: *Continuidad de la función de dualidad de un espacio de Banach* , Tesis, Universidad de Granada, 1993

[27] CUI Y., HUDZIK H. y PLUCIENNIK R.: *Weak orthogonality and weak property (β) in some Banach sequences spaces*, Czes. Math. Journ. 49 (124), 303-316 (1999)

[28] DAVIS W. J., FIGIEL T., JOHNSON W. B. y PELCZYNSKI A.: *Factoring weakly compact operators*, J. Funct. Anal. 17 (1974), 311-327

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

[29] DAY M. M.: *Reflexive Banach spaces not isomorphic to uniformly convex spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 47 (1941), 313-317

[30] DAY M.M.: *Normed Linear Spaces*, Springer, Berlín (1973)

[31] DE BLASI F. S.: *On a property of the unit sphere in a Banach space*, Bull. Mat. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie, 21 (1977), 259-262

[32] DEIMLING K.: *Nonlinear Functional Analysis*, Springer Verlag (1987)

[33] DIESTEL J.: *Sequences and series in Banach spaces*, Springer, New York (1984)

[34] FALCÓN S., LÓPEZ B. y SADARANGANI K.: *On noncompact convexity in the James space*, Congreso Functional Analysis, Valencia 2000 (3-7 julio 2000)

[35] FALCÓN S. y SADARANGANI K.: *Variation of an operator related to a set quantity*, 2nd Croatian Mathematical Congress, 15 al 17 de junio de 2000, Zagreb (Croacia)

[36] FALCÓN S. y SADARANGANI K.: *Convexity induced by a set quantity*, Commentatione Mathematicae, 2001

[37] FALCÓN S. y SADARANGANI K.: *A note on a theorem of Tacon*, Rendiconti di Circolo di Palermo, 2001

[38] FALCÓN S. y SADARANGANI K.: *Convexity and Reflexivity*, Enviado a Proc. in Math. Sci. (en fase de revisión)

[39] GARLING D. J. H. and WILANSKI A.: *On a summability theorem of Berg, Crawford and Whitley*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 71 (1972), 495-495

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

[40] GILES J. R., GREGORY D. A. y SIMS B.: *Geometric implications of upper semicontinuity of the duality mapping on a Banach space*, Pacific J. Math. 79 (1978), 99-108

[41] GOEBEL K. y SEKOWSKI T.: *The modulus of noncompact convexity*, Amer. Univ. Marie Curie-Skoldowska, Sect. A 38 (1984), 41-48

[42] GONZALEZ M.: *Properties and applications of tauberian operators*, Extracta Math. 5,3 (1990), 91-107

[43] GONZALEZ M. y MARTINÓN A.: *On operator ideals determined by sequences*, Bull. Austral. Math. Soc. 44 (1991), 285-295

[44] GONZALEZ M. y ONIEVA V. M.: *Characterizations of tauberian operators and other semigroups of operators*, Proc. Amer. Math. Soc. 108 (1990), 399-340

[45] GUERRE-DE LA BRIERE S.: *Classical sequences in Banach spaces*, Lecture Notes in Pure and Applied Math. 169, M. Dekker, New York, Basel, Hong-Kong, 1992

[46] HUFF, R.: *Banach spaces which are nearly uniformly convex*, Rocky Mountain J. Math. 10 (1980), 743-749

[47] JAMES R. C.: *Uniformly non-square Banach spaces*, Ann. of Math. 80 (1964), 542-550

[48] JAMES R. C.: *Reflexivity and the supremum of linear functionals*, Israel, J. Math. 13 (1972), 289-300

[49] JAYNE J.E., NAMIOKA I. y ROGERS C.A.: *σ-Fragmentable Banach spaces*, Mathematika 39 (1992), 161-188, 197-215

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

[50] KALTON N. y WILANSKI A.: *Tauberian operators on Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 57 (1976), 251-255

[51] KELLEY J. L. y NAMIOKA I.: *Linear Topological Spaces I*, Van Nostrand (1963)

[52] KIRK W.A.: *Fixed point theory for nonexpansive mappings II*, Contemp. Math. 18 (1983), 121-140

[53] KOTHE G.: *Topological Vector Spaces I*, Springer (1969)

[54] KRYCZKA A. y PRUS S.:*Separated sequences in nonreflexive Banach spaces.* Proceedings of the Amer. Math. Soc., publicada electrónicamente el 21 de junio de 2000

[55] KUTZAROVA D.N.: *A sufficient condition for the drop property*, Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences, 39, 7 (1986), 17-20

[56] KUTZAROVA D.N. y PAPINI P. L.: *On a characterization of property β and LUR*, Bolletino UMI (7), 6-A (1992), 209-214

[57] LAKSHMIKHANTAM V. y LEELA S.: *Nonlinear Differential Equations in Abstract spaces*, Pergamon Press, 1981

[58] LEBOW A. y SCHECHTER M.: *Semigroups of operators and measures of noncompactness*, J. Funct. anal. 7 (1971), 1-26

[59] LINDENSTRAUSS J.: *On the modulus of smoothness and divergent series in Banach spaces*, Mich. Math. J. 10 (1963), 241-246

[60] LINDENSTRAUSS J. y TZAFRIRI L.: *Classical Banach spaces*, Springer, Berlin (1973)

[61] LOVAGLIA A.R.: *Locally uniformly convex Banach sapces*, Trans. Amer. Math. Soc. 78 (1955), 225-238

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

[62] MILMAN D. P.: *On some criteria for the regularity of spaces of type B*, Dok. Akad. Nank. SSSR 20 (1938), 243-246

[63] MOLTÓ A., ORIHUELA J., TROYANSKI S. y VALDIVIA M.: *On weakly locally uniformly rotund Banach spaces*, Journal of Functional Analysis 163 (1999), 252-271

[64] MONTESINOS V.: *Drop property equals reflexivity*, Studia Math. 87 (1987), 93-100

[65] NEIDINGER R. D.: *Properties of tauberian operators on Banach spaces*, Ph. D. Thesis, University of Texas and Austin, 1984

[66] PETTIS B. J.: *A proof that every uniformly convex space is reflexive*, Duke Math. J. S. (1939), 249-253

[67] PRUS S.: *Banach spaces with the uniform Opial property*, Nonlinear Anal. 18 (1992), 697-704

[68] ROLEWICZ S.: *On drop property*, Studia math. 85 (1987)

[69] ROLEWICZ S.: *On Δ-uniform convexity and drop property*, Studia Math. 87 (1987), 181-191

[70] SADARANGANI K.: *Medidas de no compacidad y geometría de espacios de Banach* , Tesis, Universidad de La Laguna, 1995

[71] SEKOWSKI T. y STACHURA A.: *Noncompact smoothness and noncompact convexity*, Atti. Sem. Math. Fis. Univ. Modena 36 (1988), 329-338

[72] SMULYAN V. L.: *Sur la derivabilité de la norme dans l'espace de Banach*, Cp. (Doklady) Acad. Sc. URSS, 27 (1940), 643-648

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

[73] TACON D. G.: *Two characterizations of power compact operators*, Proc. Amer. Soc. 73 (1979), 356-360

[74] TORREGROSA J.R.: *Las propiedades $(L\beta)$ y $(S\beta)$ en un espacio de Banach*, Collect. Math. 43, 3 (1993), 203-216

[75] TROYANSKI S.L.: *On locally uniformly convex and differentiable norms in certain nonseparable Banach spaces*, Studia Math. 37 (1971), 173-180

[76] ZHANG W.: *On weakly very smooth Banach spaces*, Dongbei Shuzue, (1987), 140-142

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2003

BIBLIOTECA GENERAL UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA