

**UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA**

**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**



**TESIS DOCTORAL**

**CONTRIBUCIÓN AL ESTUDIO MATEMÁTICO DE  
CIERTAS ESTRUCTURAS SEDIMENTARIAS  
PRIMARIAS**

**JOSÉ MARÍA LÓPEZ MELÉNDEZ**

Las Palmas de Gran Canaria, Abril de 1995



33/1994-95  
UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA  
UNIDAD DE TERCER CICLO Y POSTGRADO

Reunido el día de la fecha, el Tribunal nombrado por el Excmo. Sr. Rector Magfco. de esta Universidad, el aspirante expuso esta TESIS DOCTORAL.

Terminada la lectura y contestadas por el Doctorando las objeciones formuladas por los señores jueces del Tribunal, éste calificó dicho trabajo con la nota de Apdo. Cum Laude  
Las Palmas de G. C., a 26 de mayo de 1995.  
El Presidente: Dr. ~~D. Fernando de Arriaga Gómez,~~

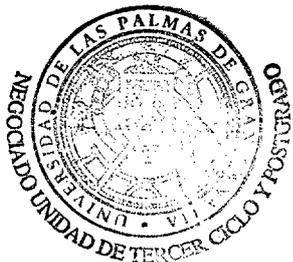
El Secretario: Dr. ~~D. Pedro Almeida Benítez.~~

El Vocal: Dr. D. Alfonso Casal Piga,

La Vocal: Dr<sup>a</sup> D<sup>a</sup> Isabel Fernández de la Nuez,

El Vocal: Dr. D. ~~Alejandro Pérez Suéllar,~~

El Doctorando: D. José M<sup>a</sup> López Meléndez,



BIBLIOTECA UNIVERSITARIA	
LAS PALMAS DE G. CANARIA	
N.º Documento	<u>342.010</u>
N.º Copia	<u>342.015</u>

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
PROGRAMA DE MÉTODOS MATEMÁTICOS EN LAS CIENCIAS DE LA NATURALEZA

TESIS DOCTORAL  
CONTRIBUCIÓN AL ESTUDIO MATEMÁTICO DE CIERTAS ESTRUCTURAS  
SEDIMENTARIAS PRIMARIAS

Memoria presentada por D. José M<sup>a</sup> López Meléndez  
para optar al título de doctor en Ciencias Matemáticas.

Dirigida por el Doctor D. José Miguel Pacheco Castelao

El Director

El Doctorando

Las Palmas de Gran Canaria, a 4 de Abril de 1995

## AGRADECIMIENTOS:

*Expreso mi agradecimiento a todas aquellas personas que de un modo u otro han contribuido a que esta tesis llegara a su punto final. En especial:*

*A José Miguel Pacheco Castelao, director y artífice de esta tesis que, con su apoyo, dedicación y amistad ha estado en todo momento animándome para que este trabajo llegara a su culminación.*

*A César Mielgo Rodríguez que con su " ven cuando quieras" me ha alentado y animado en todo momento.*

*A Ángelo Santana del Pino, experto en informática , por su gran ayuda en las simulaciones y decirle que en él se personifica el dicho de que "el hombre domina a la máquina".*

*A Esperanza, mi mujer, por su paciencia, comprensión y ánimos para terminar mi carrera académica.*

*A mis hijas Silvia y Laura para que comprendan que nunca es tarde cuando se tiene voluntad.*

*Las Palmas de Gran Canaria, a 3 de Abril de 1995*

*La Mar, aunque indómita, cautiva.*

*A mi padre*

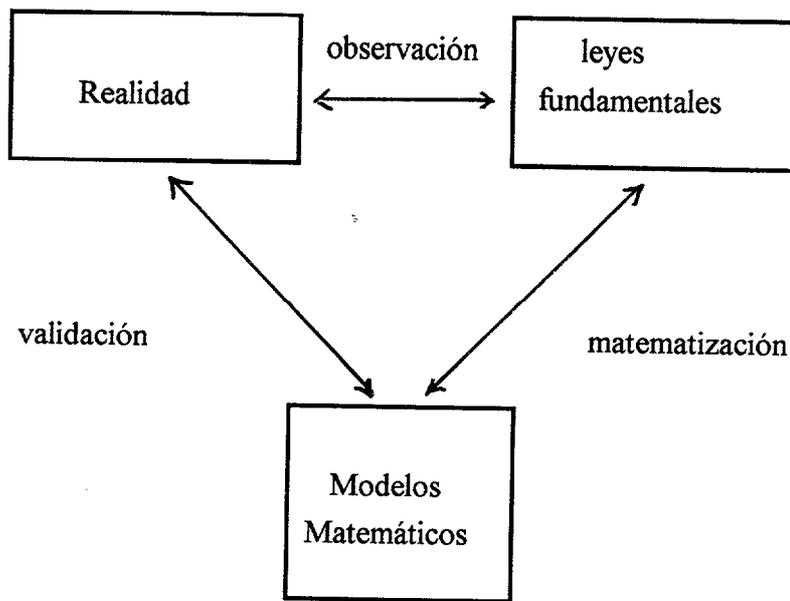
## ÍNDICE

INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS.....	I-V
<b>CAPÍTULO I: GENERALIDADES SOBRE ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCÁSTICAS.</b>	
1.1. Breve análisis de los distintos tipos de convergencia.....	1
1.2. Formulación de un problema de valores iniciales para ecuaciones diferenciales estocásticas.....	8
1.3. Fórmula de Itô e Integral de Itô.....	16
1.4. Teoría básica de ecuaciones diferenciales estocásticas.....	26
1.5. Ecuaciones diferenciales lineales estocásticas. Reso- lución de ecuaciones lineales y no lineales.....	34
<b>CAPÍTULO II: SERIES ESTOCÁSTICAS Y ESQUEMAS NUMÉRICOS.</b>	
2.1. Series de Itô-Taylor.....	45
2.2. Aproximaciones fuertes de Itô-Taylor.....	52
2.3. Esquemas numéricos para la resolución de ecuaciones diferenciales estocásticas:	
- El esquema de Euler-Maruyama.....	55
- El esquema de Milstein.....	59
- El esquema de Runge-Kutta de orden 3/2.....	64
<b>CAPÍTULO III: ESTRUCTURAS GEOMORFOLÓGICAS</b>	
3.1. Estructuras Sedimentarias.....	67
3.2. Clasificación de los Rill-Marks.....	73

<b>CAPÍTULO IV: MODELO Y APLICACIONES</b>	
4.1. Modelo matemático para la morfología de los Rill-Marks.....	79
4.2. Existencia de Soluciones.....	87
4.3. Aplicación de los métodos numéricos a la resolución del problema.....	90
4.4. Comparación y análisis de los métodos aplicados.....	93
CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS.....	103
APÉNDICE A: Integrales Estocásticas Múltiples.....	104
APÉNDICE B: Teorema de existencia y unicidad para soluciones de una EDE de Itô.....	114
BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS.....	129

## INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

Uno de los aspectos más importantes de las Matemáticas Aplicadas es la modelización. Esta consiste en formular mediante ecuaciones de diversos tipos las leyes que rigen la descripción y evolución de diferentes clases de fenómenos provenientes de muchos campos del conocimiento. Además de la formulación, se dispone de toda la maquinaria de las Matemáticas para obtener resultados teóricos, que pueden después contrastarse con la experimentación. De esta manera se obtiene el siguiente ciclo básico de la modelización:



Las dobles flechas indican que entre los diferentes bloques existe una realimentación que actúa de manera constante, permitiendo así el perfeccionamiento de la técnica de modelización.

En resumen, un modelo no es sino una descripción - en algún lenguaje formalizado- de la realidad observada. Tal descripción siempre implica pérdida de alguna información (recordamos que modelo proviene del latín *modulus* o "medida pequeña" : de ahí el uso habitual de "modelos " a escala en ingeniería y arquitectura, etc.), por lo

que el ajuste del modelo con la realidad puede no ser automático y exige, como se dijo en el párrafo anterior , unas etapas de mejora y adaptación.

La formulación de modelos puede hacerse con multitud de lenguajes más o menos sofisticados, la mayor parte de los cuales pertenecen al ámbito de las Matemáticas. Para cuestiones de tipo dinámico, donde se intenta seguir la evolución de alguna variable, las Matemáticas más adecuadas proceden del siglo XVII del Cálculo Infinitesimal. En Particular, las ecuaciones diferenciales - tanto ordinarias como en derivadas parciales- constituyen el marco más habitual en el que se ha formulado la inmensa mayoría de la Física como una sucesión de modelos para explicar y predecir los distintos fenómenos que interesan a los científicos. Existe una tradición que divide los modelos en "pronósticos" , si se utilizan para predecir, y "diagnósticos", si su intención es describir el estado de un sistema en un instante dado. De todas maneras, esta distinción no es rígida y caben muchas situaciones intermedias, cuyo carácter depende esencialmente de la interpretación que se dé a las variables.

El uso de las ecuaciones diferenciales presenta unas características especiales, que podemos resumir muy brevemente señalando que una ecuación diferencial modeliza la evolución de una magnitud macroscópica que resume en sí los efectos de otras magnitudes de menor escala. Un ejemplo simple es la temperatura de un cuerpo (propiedad macroscópica observada ) que es el aspecto sensible de millones de impactos ( propiedad microscópica) entre las partículas constituyentes del mismo: La ecuación del calor es el correlato macroscópico y determinista de un conjunto de efectos de carácter aleatorio, las colisiones debidas a movimientos brownianos. Podemos asegurar, por tanto, que a ciertas escalas observables la modelización dinámica más adecuada está dada por las Ecuaciones Diferenciales.

La idea de escala debe considerarse con algún detalle al intentar la construcción de modelos: En otras palabras, los modelos deben de plantearse como interrelaciones entre magnitudes cuyas escalas propias sean de órdenes similares. Como ejemplo podemos tomar la dinámica marina en Oceanografía: En relación a movimientos de gran

longitud de onda ( p. ej. Km. ), otras oscilaciones pequeñas, del orden de milímetros (por ej. viscosidades, tensión superficial,..) no se consideran como magnitudes con vida propia y se incorporan globalmente como perturbaciones o parámetros en las ecuaciones para las magnitudes seleccionadas. También es conocido este fenómeno en el ámbito del cálculo numérico: cuando en una ecuación coexisten escalas muy dispares, la ecuación es rígida ( o "stiff") y plantea problemas a la hora de su resolución y análisis.

Con frecuencia, efectos de pequeña escala, considerados de forma conjunta, pueden originar términos en las ecuaciones cuya naturaleza exacta no se explica con facilidad, pero que alcanzan una escala suficiente para competir con las magnitudes macroscópicas. En estos casos, las ecuaciones diferenciales deterministas dejan paso a ecuaciones con términos aleatorios, donde estos últimos representan aquellas causas o efectos que aunque no admitan una interpretación clara desde el punto de vista físico, sí pueden ser tratados rigurosamente desde el punto de vista matemático. De hecho, existe toda una teoría- en constante desarrollo- para el análisis de ecuaciones diferenciales con términos estocásticos, que contempla desde los análogos a los teoremas clásicos hasta los esquemas asociados a métodos numéricos de resolución aproximada.

De los párrafos anteriores se deduce que la elección de uno u otros modelos depende mucho del origen del problema tratado. Las Ciencias de la Naturaleza - Biología, Geología y sus múltiples combinaciones - indican claramente que, según el grado de finura de los métodos de observación, la selección de las variables significativas es una tarea no siempre fácil.

En este trabajo se ha considerado la modelización de ciertos fenómenos geológicos efímeros que aparecen en la arena de las playas: Se tiene una situación en la que la influencia de la granulometría es decisiva, siendo éste un campo donde la irregularidad geométrica es más la norma que la excepción. Por tanto, aparecen movimientos que, en cierto sentido, tienen una componente elevada de aleatoriedad, desembocando así en ecuaciones diferenciales estocásticas. Hay que señalar aquí el hecho de que se intenta una modelización puramente matemática, dejando al margen

muchas consideraciones de índole física que por su complejidad escapan a un estudio de carácter general. Para las estructuras sedimentarias cuyo estudio se realiza, la naturaleza física de la fase agua- arena, así como los mecanismos de transporte de los granos de arena, no son analizados físicamente, sino que se suponen sólo como condiciones a priori que facilitan la formulación de las ecuaciones. Por tanto, se insiste en los aspectos de existencia y unicidad de las soluciones a las ecuaciones del modelo, así como en los problemas de la simulación numérica de trayectorias de procesos estocásticos. Además de ello, se ponen de relieve las etapas básicas de la modelización tal como se exponían al principio de esta Introducción - para establecer la validación del modelo.

El problema geomorfológico analizado, los Rill-Marks, no ha sido estudiado matemáticamente de manera sistemática, que sepamos, aunque sí se conocen intentos de analizar fenómenos más complejos, tales como los meandros, deltas de los ríos y otras estructuras trenzadas. Las referencias básicas se hallan en los textos de Allen (1986) y Anderson (1988) citados en la bibliografía, así como en el trabajo de Pacheco (1992). En esencia se obtiene una descripción en la línea del texto de Lord y Wilson (1986), de carácter más estético que explicativo.

Finalizamos esta introducción comentando sucintamente los objetivos planteados en este trabajo destacando los aspectos más importantes de cada capítulo.

En el primer capítulo analizamos, básicamente, las integrales y ecuaciones diferenciales de Itô, que nos determinan un enfoque nuevo de cálculo diferencial, necesario para el desarrollo del modelo planteado. Comenzamos por formular los distintos tipos de convergencia en el campo aleatorio, analizamos y demostramos un teorema de existencia y unicidad que posteriormente se aplicará al sistema del modelo. Terminaremos el capítulo dando ciertas técnicas de resolución analítica de varios tipos de ecuaciones diferenciales estocásticas.

El capítulo segundo tiene como objetivo la deducción de esquemas numéricos basados en las series de Itô-Taylor tomando como referencia la convergencia fuerte.

Por supuesto, existen otras alternativas para la formulación de esquemas numéricos (ver Sancho 1982), sin embargo, consideramos que el método de obtención de los esquemas que presentamos sigue un procedimiento lógico- deductivo parecido al que se sigue en las EDO. La novedad de estos esquemas radica en que los órdenes de algunos truncamientos son de tipo fraccionario  $n/2, n \in \mathbb{N}$ .

Las estructuras geomorfológicas las analizamos en el capítulo tercero, en donde se expone una clasificación de los tipos de estructuras sedimentarias que aparecen en nuestras playas.

El cuarto capítulo tiene como objetivo la elaboración de un modelo matemático necesario para reproducir, mediante simulaciones por ordenador, las figuras de los Rill-marks. Acomodamos el teorema de existencia a nuestro modelo garantizando su aplicabilidad. Establecemos los esquemas necesarios para resolver numéricamente el sistema no lineal, obteniéndose las representaciones como superposición de un número finito de trayectorias. Se observa, por los gráficos obtenidos, el alto grado de aproximación de las figuras simuladas y las reales, confirmando así la eficacia del modelo en el diseño de las estructuras sedimentarias primarias estudiadas.

## CAPÍTULO I

### 1. GENERALIDADES SOBRE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCÁSTICAS

#### 1.1 BREVE ANÁLISIS DE LOS DISTINTOS TIPOS DE CONVERGENCIA.

Como se sabe, para desarrollar una teoría en el campo del Análisis, tenemos que definir una topología, que nos determinará la convergencia y permitirá formular adecuadamente las generalizaciones de los conceptos clásicos de límites, continuidad, derivabilidad e integrabilidad. En los casos prácticos, de más interés, esta topología viene definida por algún tipo de norma, que induce una noción de distancia.

Introduciremos, en primer lugar, los tipos de convergencia en el campo determinista y, posteriormente, ver si existen analogías en el campo estocástico.

#### CONVERGENCIA EN EL CAMPO DETERMINISTA

Convergencia en casi todos los puntos.- Una sucesión  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , con  $f_n: E \rightarrow \mathfrak{R}$ , se dice que converge en casi todos los puntos hacia  $f$ , si se verifica:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \text{ en casi todos los puntos } x \in E$$

Ello significa que el conjunto de puntos donde no converge tiene medida nula.

Convergencia en medida.- Sea  $(E, \mu)$  un espacio dotado de una medida. Se dice que una sucesión de funciones reales medibles  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en medida hacia la función  $f$  si se verifica:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = 0$$

Esto es, la medida del conjunto de valores  $x$  que verifican la desigualdad es nula.

Convergencia cuadrática.- Sean  $f_n: E \rightarrow \mathfrak{R} / \mu(E) < \infty$ ,  $f_n$  medibles y definidas en  $E$ . Definimos la convergencia cuadrática en la forma:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \text{ en c.c.} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E [f_n(x) - f(x)]^2 d\mu = 0$$

Convergencia en media.- Definimos la convergencia media en  $L_1(E)$  (funciones integrables) de la forma:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \text{ c.m.} \Leftrightarrow \int_E |f_n(x) - f(x)| d\mu = 0$$

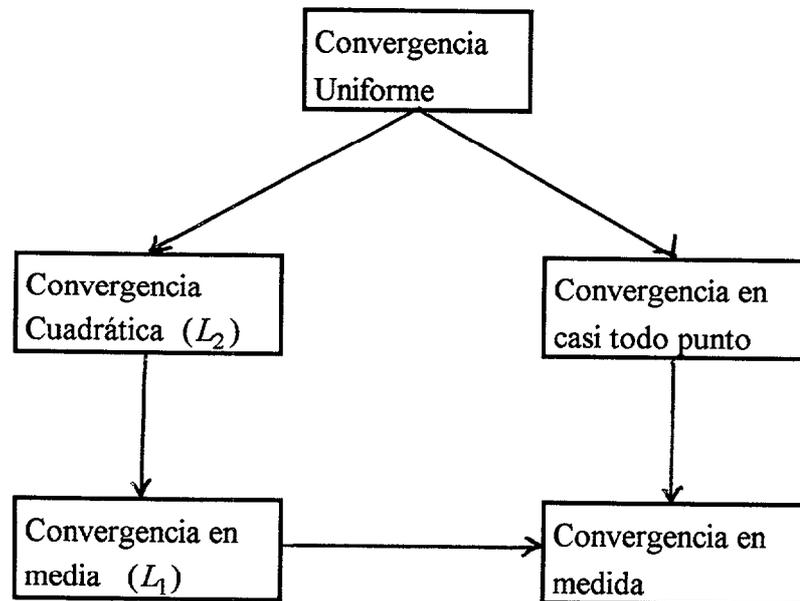
Convergencia uniforme.- Es el criterio más fuerte en el campo determinista y se define de la forma:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \text{ c.u.} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) / \forall x, \forall n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

o también:

$$\|f_n(x) - f(x)\| = \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$$

Se pueden demostrar las implicaciones que se observan en el siguiente diagrama (cuadro 1):



cuadro 1

Desde un punto de vista general, si tenemos los espacios normados  $(E, \| \cdot \|_1)$  y su dual  $(E^*, \| \cdot \|_2)$  podemos definir las convergencias siguientes:

a) Si  $((x_n), x) \in E^N \times E$ , decimos que  $(x_n)$  converge á  $x$  en sentido fuerte si  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in N / \forall n > n_0 \Rightarrow \|x_n - x\|_1 < \varepsilon$ .

b) Si  $((x_n), x) \in E^N \times E$ , decimos que  $(x_n)$  converge á  $x$  en sentido débil si  $\forall f \in E^*$  se cumple:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) / \forall n > n_0 \Rightarrow \|f(x_n) - f(x)\|_2 < \varepsilon$$

Se observa que, por lo general, se denomina convergencia débil a aquella que utiliza elementos exteriores al espacio para su definición. Esto es, en lugar de trabajar con  $x \in E$ , trabajamos con los valores  $f(x)$  - que podrían considerarse como observaciones efectuadas sobre  $x$ - donde interviene la función  $f$ , ajena a  $x$ .

Como veremos más adelante, la convergencia débil tiene su análoga en el campo aleatorio y se puede tomar como base para obtener métodos numéricos para la resolución de ecuaciones diferenciales estocásticas.

## CONVERGENCIA EN EL CAMPO ALEATORIO

Dada una sucesión de variables aleatorias  $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t), \dots$  nos interesa conocer su comportamiento en el límite, es decir, si existe, bajo qué condiciones y qué significa una variable aleatoria  $X(t)$  tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(t) = X(t)$$

En las aplicaciones nos encontramos con la necesidad de manejar realizaciones de procesos aleatorios ( un proceso estocástico o aleatorio es una función de dos variables  $X: T \times \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$  donde  $T$  es un conjunto de parámetros que designa el tiempo y  $\Omega$  es el espacio muestral correspondiente a un espacio de probabilidad  $(\Omega, A, P)$ . En un proceso  $X(t, \omega)$  cuando fijamos  $t$ , obtenemos una variable aleatoria y, cuando fijamos  $\omega$  tenemos una realización o trayectoria). Por tanto, los dos conceptos de convergencia que utilizaremos son los siguientes: una, cuando son las trayectorias individuales los elementos utilizados en la aproximación y la denominaremos convergencia fuerte, otra, que llamaremos convergencia débil, se define a través de grupos de trayectorias

analizando las propiedades estadísticas del grupo mediante estadísticos como la media, varianza, momentos de segundo orden etc..

También se puede definir mediante la distribución de probabilidad o la función de distribución. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que las variables aleatorias están todas definidas en el mismo espacio de probabilidad.

### CRITERIOS DE CONVERGENCIA FUERTE

Convergencia con probabilidad 1.- Si  $\omega$  es un punto del espacio muestral  $\Omega$  definimos esta convergencia de la forma:

$X_n$  converge a  $X$  con probabilidad 1, cuando

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega / \lim_{n \rightarrow \infty} |X_n(\omega) - X(\omega)| = 0\right\}\right) = 1$$

que se conoce, también, como convergencia segura.

Convergencia en media cuadrática.- Suponemos que  $\forall n, E(X_n^2) < \infty$  y  $E(X^2) < \infty$ , entonces, se dice que  $X_n \xrightarrow{\text{m.c.}} X$  cuando:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [E|X_n - X|^2]^{1/2} = 0$$

Convergencia fuerte.- Si  $\forall n, E(|X_n|) < \infty$  y  $E(|X|) < \infty$ , entonces, se dice que  $X_n \rightarrow X$  fuertemente si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(|X_n - X|) = 0$$

Esta definición es una generalización directa de su análoga determinista y es la que utilizaremos para el análisis de la convergencia en los métodos numéricos.

Convergencia en probabilidad.- Si  $\omega \in \Omega$  (espacio muestral), diremos que  $X_n \rightarrow X$  en probabilidad si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left\{\omega \in \Omega / |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\right\}\right) = 0$$

Se la llama también convergencia estocástica. Se puede demostrar que esta convergencia es equivalente a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left( \frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|} \right) = 0$$

y la expresión  $d(X, Y) = E \left( \frac{|Y - X|}{1 + |Y - X|} \right)$  define una métrica o distancia entre variables

aleatorias. Esta convergencia es la más débil de las cuatro expuestas anteriormente.

Son válidos los siguientes teoremas:

**Teorema 1:**

La convergencia con probabilidad 1 o casi segura implica la convergencia en probabilidad o estocástica.

En efecto, de forma intuitiva podemos indicar que si  $X_n - X \xrightarrow{c.s.} 0$ , la probabilidad de que, al menos, una de las variables aleatorias  $|X_k - X|$ , para  $k$  suficientemente grande, es muy pequeña, por tanto  $X_n - X \xrightarrow{p} 0$ .

**Teorema 2:**

La convergencia en media cuadrática implica la convergencia en probabilidad o estadística.

En efecto, de la desigualdad de Chebichev:

$$P \left( \left\{ \omega / |X(\omega)|^2 \geq a \right\} \right) \leq \frac{1}{a} E(X^2), \forall a > 0$$

se tiene que:

$$P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = P(|X_n - X|^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E(|X_n - X|^2)$$

**Teorema 3:**

La convergencia en media cuadrática implica la convergencia fuerte.

La demostración se sigue de la aplicación directa de la desigualdad de Liapunov:

$$E(|X_n - X|) \leq \sqrt{E(|X_n - X|^2)}$$

Generalmente, se puede demostrar con contraejemplos y con el ordenador que otros tipos de implicaciones no se verifican.

Se observa cierta similitud entre la convergencia  $L_2$  en el campo determinista con el cuadrado de la convergencia media cuadrática en el campo aleatorio. También, existe cierto parecido entre la convergencia  $L_1$  con la convergencia fuerte en el campo estocástico. La diferencia estriba en que en el campo aleatorio se toma como norma la esperanza, que también es una integral en donde se toma, como función, la densidad de probabilidad.

## 2.2 CRITERIOS DE CONVERGENCIA DÉBIL

Para este tipo de convergencia necesitamos la función de distribución o bien la función de densidad.

Convergencia en distribución.- Se dice que  $X_n \rightarrow X$  en distribución si es cierto que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

para todo punto de continuidad de la función  $F$ . Se conoce, también, como convergencia en ley y requiere, como hemos dicho antes, conocer las distribuciones de las variables aleatorias  $X_n(t)$  y  $X(t)$

Convergencia débil.- De forma general podemos definirla de la siguiente forma.

Decimos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(t) = X(t)$  débilmente si se verifica:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dF_{X_n}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dF(x)$$

donde  $f(x)$  son funciones test continuas, decrecientes y acotadas en el intervalo temporal.

Si utilizamos la función de densidad, tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) p_n(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) p(x) dx$$

cuando  $f(x)=x$  se obtiene el momento de primer orden, que denominaremos convergencia débil (debe entenderse así en el cuadro 2) y que se puede utilizar para ver la eficacia de los métodos numéricos (aproximación de momentos).

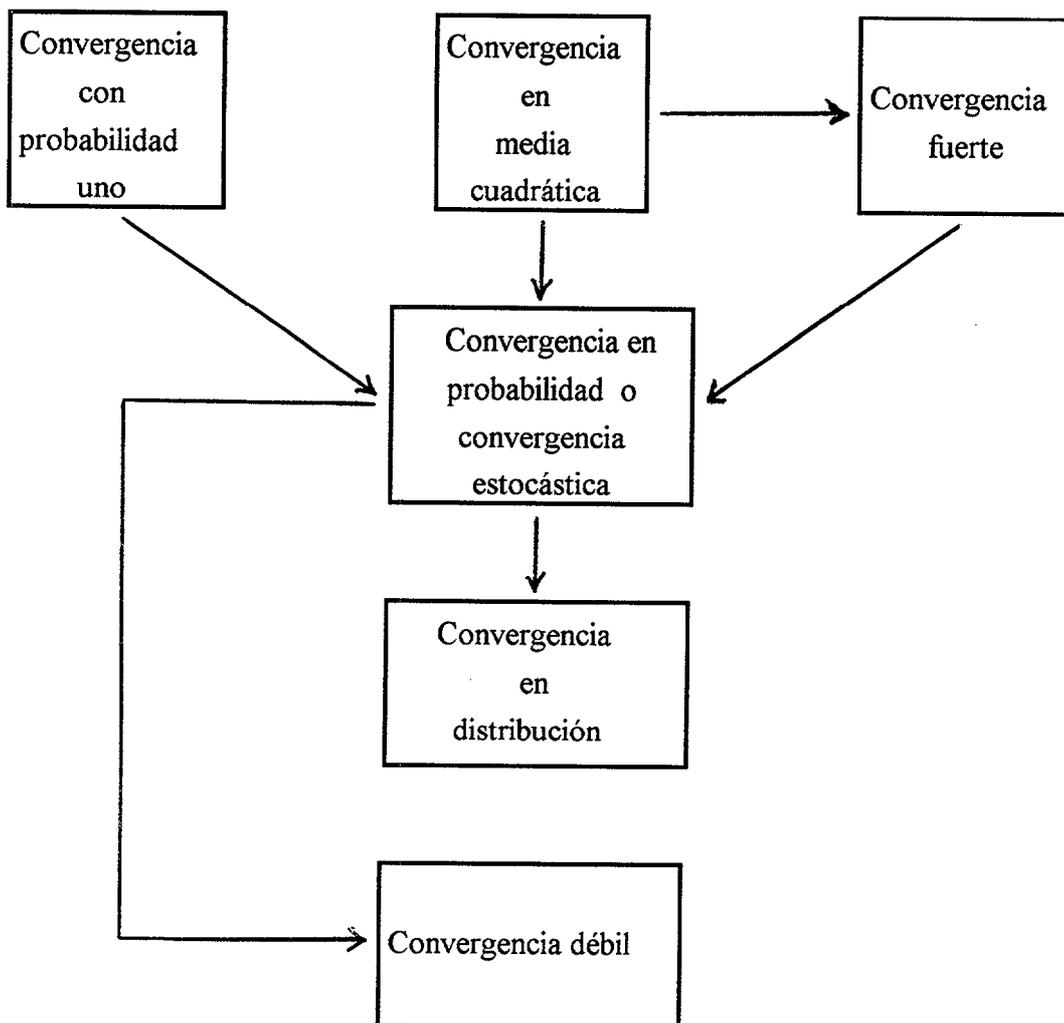
#### TEOREMA 4

Este teorema relaciona las dos clases de convergencia y se formula de la siguiente forma:

Si una sucesión  $(x_n)$  uniformemente integrable converge en probabilidad hacia  $x$ , entonces converge débilmente, es decir,  $\lim_{n \rightarrow \infty} Ex_n = Ex$

La demostración se basa en la desigualdad  $|Ex_n - Ex| \leq E|x_n - x|$ .

A continuación se presenta un diagrama (cuadro 2) que relaciona los distintos tipos de convergencia en el campo aleatorio donde se observa las implicaciones entre ellas.



cuadro 2

El teorema anterior asegura que la convergencia en probabilidad garantiza la convergencia débil siempre que se verifique las siguientes condiciones: que la sucesión sea uniformemente integrable, es decir, que la sucesión de esperanzas  $(E|x_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  esté acotada y que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} |x_n| dP = 0$  para toda sucesión  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de sucesos que satisfaga  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0$ .

## 1.2 FORMULACIÓN DE UN PROBLEMA DE VALORES INICIALES PARA ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCÁSTICAS

Consideramos la ecuación vectorial:

$$\begin{aligned} X'(t) &= h[X(t), Y(t), t] \\ X(t_0) &= X_0 \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $X(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t))^t$ ,  $Y(t) = (Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_m(t))^t$  y las condiciones iniciales  $X(t_0) = X_0 = (X_{10}(t), \dots, X_{n0}(t))^t$ . Analizaremos este sistema cuando los elementos que la forman son procesos estocásticos dando, para cada caso, el tipo de solución adecuado.

### CONCEPTO DE SOLUCIÓN

Lógicamente, tendremos que matizar el tipo de convergencia para poder definir la solución de un sistema de EDE. Todos los resultados en este apartado se referirán a la convergencia en media cuadrática, por ser la que más se parece a la convergencia en el campo determinista y la más tratada en la literatura sobre EDE. Nos interesa, inicialmente, conocer las soluciones sin, de momento, formalizar los teoremas de existencia para cada caso particular. En el siguiente capítulo demostraremos un teorema de existencia de soluciones de la EDE que nos interesa en este trabajo.

Decimos que el proceso estocástico  $X(t)$  es solución de (1) si se verifican las siguientes condiciones:

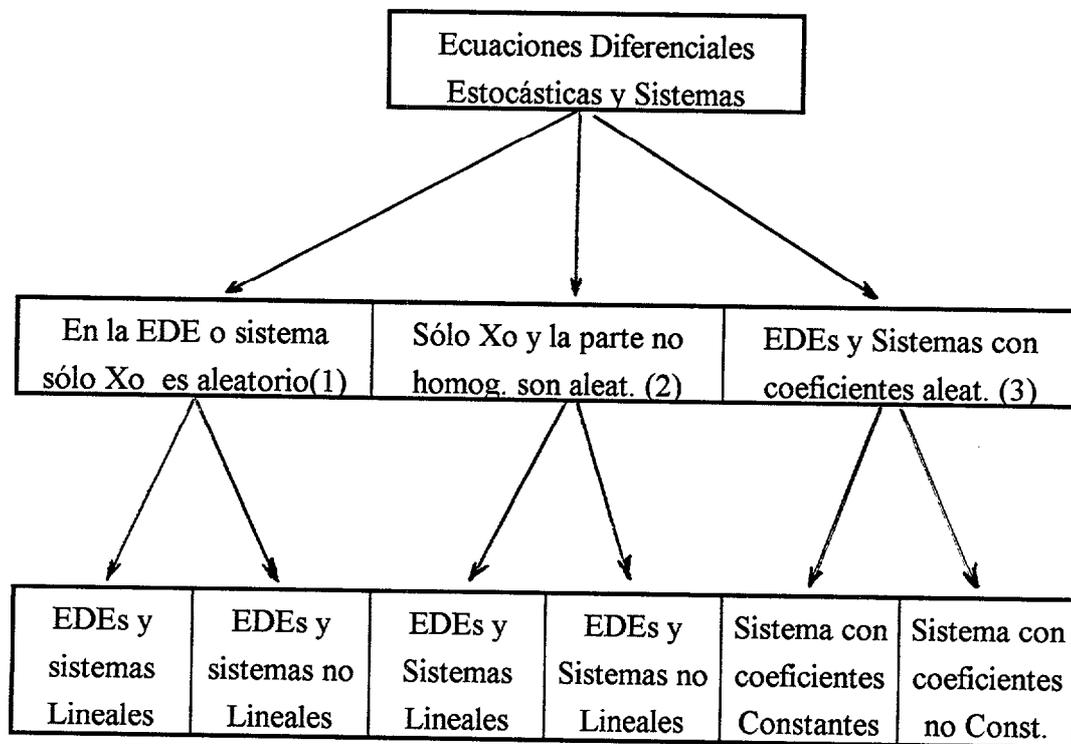
- $X(t)$  es continua en media cuadrática.
- $X(t_0) = X_0$
- $h(X(t), Y(t), t)$  es la derivada, según el criterio de convergencia elegido (m.c.) en  $t_0$ .

Como la solución  $X(t)$  es un proceso estocástico, sólo estará bien definida cuando se conozca la función de distribución conjunta:

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{X(t_1), \dots, X(t_n)}(x_1, \dots, x_n) = P[X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n]$$

expresión difícil de obtener en la mayoría de los casos, ya que, en la práctica, no tenemos información de las condiciones iniciales ni de los procesos  $Y(t)$ .

Veamos algunos tipos de sistemas de ecuaciones diferenciales estocásticas, cuya estructura representamos en el siguiente diagrama (cuadro 3).



cuadro 3

### 1. Sistemas donde sólo las condiciones iniciales son aleatorias

Son los del tipo:

$$\begin{aligned} X'(t) &= h(t, X(t)) \\ X(t_0) &= X_0 \end{aligned} \quad (2)$$

donde, únicamente,  $X_0$  es una variable aleatoria.

El problema consiste en hallar las propiedades estadísticas de  $X(t)$  en  $t \in [t_0, T]$  como función de las propiedades estadísticas de  $X_0$ . La solución de este caso es fácil de obtener, ya que, para cada valor de la variable aleatoria de entrada  $X_0$  el problema se reduce a uno determinista. Veamos los dos casos que se pueden presentar:

**Caso lineal.**

$$\begin{aligned} X'(t) &= G(t)X(t) \\ X(t_0) &= X_0 \end{aligned} \quad (3)$$

donde  $t \in [t_0, T]$ ,  $X(t)$  es un vector  $n$ -dimensional y  $G(t)$  es una matriz cuadrada de orden  $n$  con coeficientes continuos. Si se considera el sistema (3) determinista, sabemos que para obtener una solución basta con conseguir una matriz fundamental asociada a  $G(t)$ , y que llamaremos  $\phi(t)$ , siendo la solución:

$$X(t) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)X_0 \quad (4)$$

En nuestro caso, si  $G(t)$  cumple ciertas condiciones, la solución en el campo aleatorio resulta la misma que en el campo determinista con la única diferencia que  $X_0$  es una variable aleatoria lo que conduce a que  $X(t)$  sea también estocástica.

Ejemplo:

En el caso bidimensional el sistema quedaría de la forma:

$$\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} g_{11}(t) & g_{12}(t) \\ g_{21}(t) & g_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix}$$

y la solución apoyándonos en el campo determinista resultaría:

$$\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} = \phi(t)\phi^{-1}(t_0) \begin{pmatrix} X_1^0 \\ X_2^0 \end{pmatrix}$$

siendo  $\phi(t)$  una matriz fundamental de orden 2.

**Teorema:**

Existe una solución única en media cuadrática del sistema en el caso lineal, siendo la solución la establecida en (4).

Se observa, que el concepto lineal es el mismo que en las ecuaciones diferenciales ordinarias, es decir, las funciones que multiplican a  $X_i(t)$  dependen sólo de  $t$ .

### Caso no lineal.

Sea el sistema de EDEs no lineal:

$$\begin{aligned} X'(t) &= f(X(t), t) \\ X(t_0) &= X_0 \end{aligned} \quad (5)$$

Teorema:

Si la correspondiente solución determinista del sistema anterior tiene la forma:

$$x(t) = F(t, x_0)$$

entonces, la solución en media cuadrática del sistema aleatorio viene dada por la expresión:

$$X(t) = F(t, X_0)$$

se observa que el teorema no habla de la existencia y unicidad de la solución, sólo nos garantiza cómo es, en caso de existir la solución.

Puesto que, en la última ecuación,  $F$  representa una transformación del vector aleatorio  $X_0$ , podemos conocer las propiedades estadísticas de  $X(t)$  conocidas las del valor inicial. En efecto, supongamos que se verifican las condiciones:

- a)  $F$  es continua en la variable  $X_0$ .
- b)  $F$  admite derivadas parciales continuas en la variable  $X_0$ .
- c)  $F$  es biyectiva y por lo tanto admite inversa local.

entonces, obtenemos:

$$g(x, t) = g_0(x_0) |J|, \text{ donde } x_0 = F^{-1}(x, t)$$

siendo  $g(x, t)$  la función de densidad conjunta de los procesos del vector  $X(t)$  y  $g_0$  la de  $X_0$ .

Un ejemplo clásico es el estudio de la ecuación del oscilador armónico con condiciones iniciales aleatorias:

$$\begin{aligned} X''(t) + \omega^2 X(t) &= 0, t \geq 0 \\ X(0) &= X_0 \\ X'(0) &= X'_0 \end{aligned} \quad (6)$$

si se conoce la función de densidad conjunta de las condiciones iniciales  $X_0, X'_0$  podemos conocer la de la solución  $X(t)$ .

En efecto, si llamamos  $Z(t) = (X(t), X'(t))^t$ , podemos escribir la ecuación (6) de la forma:

$$Z'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} Z(t) \quad \text{o bien} \quad \begin{pmatrix} X(t) \\ X'(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(t) \\ X'(t) \end{pmatrix}$$

que, como se puede observar, es del tipo anterior y por tanto la solución es:

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \frac{1}{\omega} \operatorname{sen} \omega t \\ -\omega \operatorname{sen} \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \phi^{-1}(t_0) X_0 \quad (7)$$

la inversa de la matriz fundamental es:

$$\phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\frac{1}{\omega} \operatorname{sen} \omega t \\ \omega \operatorname{sen} \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \quad (8)$$

que particularizada en  $t_0 = 0$  se obtiene:

$$\phi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y sustituyendo en (7) resulta:

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \frac{1}{\omega} \operatorname{sen} \omega t \\ -\omega \operatorname{sen} \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} X_0 \quad (9)$$

por tanto, teniendo en cuenta (9), se tiene:

$$X_0 = \phi^{-1}(t) X(t) \Rightarrow J = \left| \frac{\partial X_0}{\partial X} \right| = \left| \phi^{-1}(t) \right| = 1$$

y la función de densidad queda:

$$\begin{aligned} g(xt, x't) &= g(x, t) = g_0(x_0 = \phi^{-1}(t)x) |J| = \\ &= g_0\left(x \cos \omega t - \frac{x'}{\omega} \sin \omega t, \omega \sin \omega t + x' \cos \omega t\right) \end{aligned}$$

Otra forma, más general, de obtener la función de densidad conjunta del proceso solución es aplicando el siguiente teorema de Liouville.

**Teorema:**

Si el proceso solución de (6) existe en media cuadrática, entonces la función de densidad conjunta  $f(x,t)$  de  $X(t)$  verifica la ecuación de Liouville, que no es sino una ecuación de continuidad

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\text{Div}_x(f)$$

siendo  $x^t = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , y  $(f(x,t))^t = (f_1, \dots, f_n)$ . Este resultado nos dice que la función de densidad conjunta se obtiene, también, resolviendo un problema de valores iniciales en derivadas parciales de primer orden, siendo la condición inicial la función de densidad de la variable aleatoria  $X_0$ .

**2. Sistemas de EDEs donde  $X_0$  y el término no homogéneo son aleatorios.**

**a) Ecuaciones lineales:**

Son las ecuaciones o sistemas del tipo:

$$\left. \begin{aligned} X'(t) &= G(t)X(t) + W(t) \\ X(t_0) &= X_0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

siendo  $G(t)$  una matriz de orden  $n$  y de clase uno en  $t$  y  $X_0, W(t)$  son variables aleatorias.

La resolución de este sistema, que se obtiene con ayuda de la fórmula de Itô (que se verá más adelante), viene dada formalmente por la fórmula de variación de constantes:

$$X(t) = \phi(t_0, t) \left( X_0 + \int_{t_0}^t \phi^{-1}(t, s) dW(s) \right) \quad (11)$$

Donde  $\phi$  es una matriz fundamental asociada a  $G(t)$  y la integral es estocástica.

Si queremos obtener propiedades estadísticas del proceso solución basta con calcular en el campo determinista las funciones esperanza y autocorrelación.

Cuando el proceso estocástico es de Markov, podemos obtener la función de densidad del proceso mediante una ecuación parabólica en derivadas parciales.

### **Ecuación de Fokker-Planck.**

La propiedad que caracteriza a un proceso de Markov es que, el conocimiento de lo que haya ocurrido con anterioridad, no nos aporta nueva información sobre el comportamiento en el futuro. Se conoce como el principio de independencia entre el pasado y futuro cuando se conoce el presente. Podemos expresarlo, en términos probabilístico de la siguiente forma:

$$\{X_t; t \geq 0\} \text{ es de Markov si } P(X_t / X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}) = P(X_t / X_{t_n})$$

En las ecuaciones diferenciales estocásticas anteriores, si el proceso  $X(t)$  es de Markov podemos hallar la densidad de probabilidad de transición mediante la ecuación de Fokker-Planck:

$$\frac{\partial p(x, t / y, s)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [f(t, x)p] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [g^2(x)p] \quad (\text{Itô})$$

asociada a la EDE:

$$X(t) = X_0 + \int_0^t f(s, X(s)) ds + \int_0^t g(s, X(s)) dW(s)$$

En la mayoría de los casos, la ecuación de Fokker-Planck no posee solución analítica y tenemos que resolverla mediante métodos numéricos.

#### **b) Ecuaciones no lineales:**

Para este tipo de ecuaciones existen algunos métodos de resolución analítica basados en la aplicación de la fórmula de Itô y que veremos en los apartados que siguen. Sin embargo, nosotros resolveremos estas ecuaciones o sistemas mediante los esquemas numéricos que establecemos en este trabajo (véase capítulo 4).

**Ecuaciones diferenciales con coeficientes aleatorios.**

Son las del tipo:

$$\left. \begin{array}{l} X'(t) = G(t)X(t) + W(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{array} \right\} t \in [t_0, T]$$

donde  $G(t)$  es una matriz de coeficientes cuyas componentes son variables aleatorias,  $W(t)$  y  $X_0$  son, también, variables aleatorias.

Analíticamente sólo se han resuelto muy pocos casos de este tipo, sólo los que se reducen a casos anteriores.

Este tipo de ecuaciones caen fuera del ámbito de este trabajo, por tanto no será objeto de estudio.

### 1.3 FÓRMULA DE ITÔ e INTEGRAL DE ITÔ.

En el Cálculo Diferencial Clásico hacemos uso de la regla de la cadena para obtener la diferencial de una función compuesta. En el Cálculo Diferencial de Itô aparece una nueva expresión para determinar la diferencial de procesos estocásticos compuestos. La nueva fórmula permitirá movernos en el ámbito de los procesos continuos y obtener resultados tanto en la teoría como en la práctica, sobre todo en la resolución explícita de ecuaciones diferenciales estocásticas lineales y las reducibles a lineales. Obtendremos dicha expresión recurriendo a las herramientas típicas del Cálculo Diferencial habitual.

Consideramos la ecuación diferencial estocástica (de Itô) para un proceso unidimensional:

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t \quad (12)^*$$

y sea  $g(t, x)$  una función no aleatoria de forma que  $g \in C^2([0, \infty) \times \mathfrak{R})$ .

Deduciremos, seguidamente, la forma de la ecuación diferencial del proceso transformado:

$$Y_t = g(t, X_t)$$

Consideramos el intervalo  $[t_0, T]$  en donde establecemos una partición  $t_0 < t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < \dots < t_n^{(n)} = T$  indicando el superíndice que la partición se hace más fina conforme  $n$  aumenta. No obstante, para no cargar demasiado la notación suprimiremos los superíndices.

Teniendo en cuenta las condiciones enunciadas de  $g$ , podemos escribir:

$$g(t, X_t) = g(t_0, X_{t_0}) + \sum_{j=0}^{n-1} \Delta g(t_j, X_j) \quad (13)$$

siendo:  $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$  ;  $\Delta X_j = X_{t_{j+1}} - X_{t_j}$  ;  $\Delta g(t_j, X_j) = g(t_{j+1}, X_{j+1}) - g(t_j, X_j)$

Aplicando la fórmula de Taylor al incremento de  $g$  en la ecuación (13), tenemos:

$$g(t, X_t) = g(t_0, X_{t_0}) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial t} \Delta t_j + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial x} \Delta X_j + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} (\Delta t_j)^2 +$$

(\*) En realidad, lo que se usa es la expresión incremental  $\Delta X_t = a(t, X_t)\Delta t + b(t, X_t)\Delta W_t$ .

$$+ \sum_{j=0}^n \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial x}(\Delta t_j)(\Delta X_j) + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\Delta X_j)^2 + R_j \quad (14)$$

siendo el resto un infinitésimo de la forma  $R_j = o\left[|\Delta t_j|^2 + |\Delta x_j|^2\right] \quad \forall j$

Teniendo en cuenta el concepto de integral de Riemann:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta t_j \rightarrow 0}} \sum_{j=0}^n \frac{\partial g}{\partial t}(\Delta t_j) = \int_{t_0}^t \frac{\partial g}{\partial t}(s, X_s) ds \quad (15)$$

Utilizando (12)\*, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n \frac{\partial g}{\partial x}(t_j, X_j) \Delta X_j &= \sum_{j=0}^n \frac{\partial g}{\partial x}(t_j, X_j) [a(t_j, X_j) \Delta t_j + b(t_j, X_j) \Delta W_j] = \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{\partial g}{\partial x}(t_j, X_j) a(t_j, X_j) \Delta t_j + \sum_{j=0}^n \frac{\partial g}{\partial x}(t_j, X_j) b(t_j, X_j) \Delta W_j \end{aligned}$$

Veamos el valor de estos dos sumatorios en el límite:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta t_j \rightarrow 0}} \sum_{j=0}^n \frac{\partial g}{\partial x}(t_j, X_j) a(t_j, X_j) \Delta t_j = \int_{t_0}^t \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s) a(s, X_s) ds$$

El segundo sumatorio define la integral estocástica con respecto al proceso de Wiener y converge, teniendo en cuenta que se eligen los puntos de los subintervalos en los extremos, a la integral de Itô:

$$\int_{t_0}^t \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s) b(s, X_s) dW \quad (16)$$

Veamos los términos de segundo orden:

$$\sum_{j=0}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} (\Delta X_j)^2 = \sum_{j=0}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} a_j^2 (\Delta t_j)^2 + 2 \sum_{j=0}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} a_j b_j (\Delta t_j) (\Delta W_j) +$$

$$+ \sum_{j=0}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} b_j^2 (\Delta W_j)^2.$$

El primer sumando tiende a cero. En efecto, tomando la partición equidistante, tenemos:

$$\sum_{j=0}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} a_j (\Delta t) (\Delta t) \rightarrow 0. \int_{t_0}^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} (s, X_s) a(s, X_s) ds = 0$$

El segundo sumando también se anula cuando el incremento del tiempo tiende a cero. En efecto, veamos que tiende a cero en media cuadrática:

$$E \left[ \left( \sum_{j=0}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} a_j b_j (\Delta t_j) (\Delta W_j) \right)^2 \right] = \sum_{j=0}^n E \left[ \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} a_j b_j \right)^2 \right] (\Delta t_j)^3 = 0,$$

cuando  $\Delta t_j \rightarrow 0$ . La razón última de esta convergencia radica en la igualdad siguiente:

$$E[\Delta W_i \Delta W_j] = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \Delta t_j & \text{si } i = j \end{cases} \quad (17)$$

(ver momentos de integrales estocásticas, apéndice A)

Veamos, por último, que el tercer sumando converge a la integral:

$$\int_{t_0}^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} b(s, X_s) ds$$

para probar esta afirmación hagamos  $k(t) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} (t, X_t) b(t, X_t)$ ,  $k_j = k(t_j)$

y calculemos la convergencia en media cuadrática:

$$E \left[ \left( \sum_{j=0}^n k_j (\Delta W_j)^2 - \sum_{j=0}^n k_j \Delta t_j \right)^2 \right] = \sum_{i,j} E \left[ k_i k_j ((\Delta W_i)^2 - \Delta t_i) ((\Delta W_j)^2 - \Delta t_j) \right]$$

Cuando  $i < j$ , las variables aleatorias  $k_i k_j ((\Delta W_i)^2 - \Delta t_i)$  y  $((\Delta W_j)^2 - \Delta t_j)$

son independientes por tanto la esperanza anterior se reduce a cero.

En el caso de que  $i > j$ , tenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n E \left[ k_j^2 \left( (\Delta W_j)^2 - \Delta t_j \right)^2 \right] &= \sum_{j=0}^n E \left[ k_j^2 \right] \cdot E \left[ (\Delta W_j)^4 - 2(\Delta W_j)^2 \Delta t_j + (\Delta t_j)^2 \right] = \\ &= \sum_{j=0}^n E \left[ k_j^2 \left( 3(\Delta t_j)^2 - 2(\Delta t_j)^2 + (\Delta t_j)^2 \right) \right] = 2 \sum_{j=0}^n E \left[ k_j^2 \right] (\Delta t_j)^2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta los resultados anteriores, podemos escribir:

$$g(t, X_t) = g(t_0, X_{t_0}) + \int_{t_0}^t \left[ \frac{\partial g}{\partial s} + a \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right] ds + \int_{t_0}^t b \frac{\partial g}{\partial x} dW_s$$

y diferenciando, tenemos:

$$\begin{aligned} dg(t, X_t) &= \left[ \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t) + a(t, X_t) \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t) b^2(t, X_t) \right] dt + \\ &+ b(t, X_t) \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t) dW_t. \end{aligned} \quad (18)$$

que representa la fórmula de Itô en el caso unidimensional.

De forma análoga, pero más laboriosa, podemos demostrar el teorema que determina la fórmula de Itô en el caso multidimensional:

### TEOREMA

Sean  $dX_i(t) = a_i(t, X_t)dt + b_i(t, X_t)dW_t$ ,  $1 \leq i \leq m$  y  $g(t, x_1, x_2, \dots, x_m)$  una función continua en  $(x, t)$ , donde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathcal{R}^m$ ,  $t \geq 0$  con derivada primera respecto de  $t$  y derivada segunda respecto de  $x$ . Entonces la función  $g(t, X_1(t), X_2(t), \dots, X_m(t))$  tiene la diferencial estocástica:

$$\begin{aligned}
 dg(t, X_t) = & \left[ \frac{\partial g}{\partial t} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial x_i} a_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} b_i b_j \right]_{(t, X_t)} dt + \\
 & + \sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial x_i}(t, X_t) b_i(t, X_t) dW_i \quad (19)
 \end{aligned}$$

de forma más simplificada podemos expresarla así:

$$dg(t, X_t) = \left[ \frac{\partial g}{\partial t} + a^T \nabla g + \frac{1}{2} \text{tr}(bb^T H(g)) \right] dt + \nabla g^T b dW_t \quad (20)$$

donde  $\nabla$  es el operador gradiente,  $T$  representa la transpuesta,  $\text{tr}$  la traza de una matriz y  $H(g)$  la matriz hessiana.

## INTEGRALES ESTOCÁSTICAS

En las deducciones anteriores se ha utilizado informalmente la idea de integral estocástica. Es el momento de formalizar tal idea.

Sea  $f \in L_T^2$  (clase de funciones estocásticas, medibles en las variables temporal y aleatoria,  $\forall t, E(f(t, \cdot)^2) < \infty$  y  $\int_0^T E(f(t, \cdot)^2) dt < \infty$ ).

Definimos la integral de Itô:

$$\int_0^T f(t, \omega) dW_t(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(\xi_j^{(n)}, \omega) \left\{ W_{t_{j+1}^{(n)}} - W_{t_j^{(n)}} \right\} \quad (21)$$

con valores en los puntos  $\xi_j^{(n)} = t_j^{(n)}$  para las particiones del intervalo  $[0, T]$ ,

$0 = t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < \dots < t_{n+1}^{(n)} = T$  con diámetro  $\delta^{(n)} = \max\{t_{j+1}^{(n)} - t_j^{(n)}\} \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Se pueden seleccionar puntos distintos en  $t_j^{(n)} \leq \xi_j^{(n)} \leq t_{j+1}^{(n)}$  que generalmente conducen a diferentes variables aleatorias cuando se pasa al límite. Por ello, vamos a considerar los puntos:

$$\xi_j^{(n)} = (1-\lambda)t_j^{(n)} + \lambda t_{j+1}^{(n)} \quad (22)$$

que para cada valor fijo del parámetro  $\lambda$  conduce a límites que llamaremos:

$$(\lambda) \int_0^T f(t, \omega) dW_t(\omega) \quad (23)$$

observamos que para  $\lambda = 0$  obtenemos la definición de la integral de Itô, ya que se toman los puntos de cada subintervalo en el extremo izquierdo y si  $\lambda = \frac{1}{2}$  se tiene otra definición de la integral estocástica según Stratonovich.

Cuando la función integrando  $f$  es diferenciable podemos hacer:

$$f[(1-\lambda)t_j + \lambda t_{j+1}] = (1-\lambda)f(t_j) + \lambda f(t_{j+1}) + o(|t_{j+1} - t_j|) \quad (24)$$

y por tanto, podemos escribir una aproximación de la suma:

$$\bar{S}_n = \sum_{j=1}^n \left\{ (1-\lambda)f(t_j^{(n)}, \omega) + \lambda f(t_{j+1}^{(n)}, \omega) \right\} \left\{ W_{t_{j+1}^{(n)}} - W_{t_j^{(n)}} \right\} \quad (25)$$

Veamos ahora como varían las  $\lambda$ -integrales cuando  $f(t, \omega) = W_t(\omega)$ . Se verifica la siguiente igualdad:

$$(\lambda) \int_0^T W_t dW_t = \frac{1}{2} W_T^2 + \left( \lambda - \frac{1}{2} \right) T \quad (26)$$

En efecto, sea el intervalo  $[a, b]$  y los subintervalos  $[t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)}]$  de longitud equidistante

$$\frac{b-a}{2^n} \text{ donde } t_k^{(n)} = a + k \frac{b-a}{2^n} \text{ con } k = 1, 2, 2^2, \dots, 2^n.$$

Definimos:

$$S_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 - (b-a) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \left[ \Delta_{n,k} - \frac{b-a}{2^n} \right] \quad (27)$$

donde  $\Delta_{n,k} = (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2$ . Elevando al cuadrado (27), tenemos:

$$S_n^2 = \left[ \sum_{k=0}^{2^n-1} \left( \Delta_{n,k} - \frac{b-a}{2^n} \right) \right]^2 = \sum_{k=0}^{2^n-1} \Delta_{n,k}^2 - 2 \sum_{k=0}^{2^n-1} \Delta_{n,k} \frac{b-a}{2^n} + \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{(b-a)^2}{2^{2n}}$$

y tomando esperanzas para averiguar la convergencia en media cuadrática:

$$E(S_n^2) = \sum_{k=0}^{2^n-1} E(\Delta_{n,k}^2) - \sum_{k=0}^{2^n-1} E\left(\Delta_{n,k} \frac{b-a}{2^{n-1}}\right) + \sum_{k=0}^{2^n-1} E\left[\frac{(b-a)^2}{2^{2n}}\right] \quad (28)$$

Veamos el valor de cada sumando de la igualdad anterior:

i)  $\sum_{k=0}^{2^n-1} E(\Delta_{n,k}^2) = E(\Delta_{n,0}^2) + E(\Delta_{n,1}^2) + \dots + E(\Delta_{n,2^n-1}^2)$ ; estos términos se anulan en el paso

al límite ya que los procesos de Wiener son independientes.

ii) El segundo sumatorio también es nulo, por la misma razón que en la anterior.

iii)  $E(S_n^2) = \sum_{k=0}^{2^n-1} E\left[\frac{(b-a)^2}{2^{2n}}\right] = \frac{(b-a)^2}{2^{2n}} 2^n = \frac{(b-a)^2}{2^n} \rightarrow 0$

por tanto se verifica que  $S_n$  converge a cero en media cuadrática.

Por la desigualdad de Markov, tenemos:

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega / |S_n(\omega)| \geq \varepsilon\right\}\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E(S_n^2) \leq \frac{(b-a)^2}{2^n \varepsilon^2}$$

y la serie con término general la probabilidad anterior está mayorada por una serie armónica convergente por lo que, aplicando el teorema de Borel-Cantelli se deduce que el conjunto de sucesos  $\left\{\omega \in \Omega / |S_n(\omega)| \geq \varepsilon\right\}$  ocurre en un número finito de casos, de donde  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$  c.p.1, es decir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 = b - a \quad (29)$$

Veamos ahora la relación (26):

$$\sum_{j=1}^n W_{t_{j+1}}^{(n)} \left\{ W_{t_{j+1}}^{(n)} - W_{t_j}^{(n)} \right\} = \sum_{j=1}^n \left( W_{t_{j+1}}^{(n)} - W_{t_j}^{(n)} \right)^2 + \sum_{j=1}^n W_{t_j}^{(n)} \left\{ W_{t_{j+1}}^{(n)} - W_{t_j}^{(n)} \right\}$$

calculando ambos sumandos por separado.

El primer sumando se halla por la fórmula (29) y su valor en el intervalo  $[0, T]$  es  $T$ .

El segundo sumando lo calculamos resolviendo una ecuación diferencial estocástica sencilla:

Sea la EDE  $dY_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t$ , si hacemos  $a=0$  y  $b=1$ , tenemos la ecuación:

$$dY_t = dW_t$$

haciendo el cambio  $Y_t = X_t^2$  por la fórmula de Itô, tenemos:

$$d(X_t^2) = dt + 2X_t dW_t$$

y si  $X_t = W_t$ , resulta  $d(W_t^2) = dt + 2W_t dW_t$  de donde:

$$W_t dW_t = \frac{1}{2} dW_t^2 - \frac{1}{2} dt$$

integrando tenemos:

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2} W_t^2 - \frac{1}{2} t$$

por tanto podemos concluir que:

$$\sum_{j=1}^n W_{t_{j+1}^{(n)}} \left\{ W_{t_{j+1}^{(n)}} - W_{t_j^{(n)}} \right\} \rightarrow T + \frac{1}{2} W_t^2 - \frac{1}{2} T = \frac{1}{2} W_t^2 + \frac{1}{2} T$$

utilizando la expresión (25), tenemos:

$$\begin{aligned} \bar{S}_n &= \sum_{j=1}^n \left\{ (1-\lambda) f(t_j^{(n)}, \omega) + \lambda f(t_{j+1}^{(n)}, \omega) \right\} \left\{ W_{t_{j+1}^{(n)}} - W_{t_j^{(n)}} \right\} = \\ &= \sum_{j=1}^n (1-\lambda) f(t_j^{(n)}) \left\{ W_{t_{j+1}^{(n)}} - W_{t_j^{(n)}} \right\} + \sum_{j=1}^n \lambda f(t_{j+1}^{(n)}) \left\{ W_{t_{j+1}^{(n)}} - W_{t_j^{(n)}} \right\} = (f \equiv W) = \\ &= \sum_{j=1}^n (1-\lambda) W_{t_j^{(n)}} \left\{ W_{t_{j+1}^{(n)}} - W_{t_j^{(n)}} \right\} + \sum_{j=1}^n \lambda W_{t_{j+1}^{(n)}} \left\{ W_{t_{j+1}^{(n)}} - W_{t_j^{(n)}} \right\} = \\ &= (1-\lambda) \sum_{j=1}^n W_{t_j^{(n)}} \left\{ W_{t_{j+1}^{(n)}} - W_{t_j^{(n)}} \right\} + \lambda \sum_{j=1}^n W_{t_{j+1}^{(n)}} \left\{ W_{t_{j+1}^{(n)}} - W_{t_j^{(n)}} \right\} + \lambda W_{t_{n+1}} \left\{ W_{t_{n+1}} - W_{t_n} \right\} = \\ &= \sum_{j=1}^n W_{t_j} \left\{ W_{t_{j+1}} - W_{t_j} \right\} + \lambda W_{t_{n+1}} \left\{ W_{t_{n+1}} - W_{t_n} \right\} \rightarrow \frac{1}{2} W_t^2 - \frac{1}{2} T + \lambda T = \\ &= \frac{1}{2} W_t^2 + \left( \lambda - \frac{1}{2} \right) T \end{aligned}$$

Como hemos dicho anteriormente hay dos casos importantes:

a) Cuando  $\lambda = 0$ , se tiene la integral:

$$\int_0^T W dW = \frac{1}{2} W^2 - \frac{1}{2} T \quad (\text{It}\delta)$$

b) Cuando  $\lambda = \frac{1}{2}$ , se tiene:

$$\int_0^T W dW = \frac{1}{2} W^2 \quad (\text{Stratonovich})$$

Estos casos muestran la diferencia existente entre el Cálculo Diferencial habitual y el de procesos estocásticos. En el caso de Itô, no se conservan las leyes habituales, cosa que sí ocurre en el de Stratonovich. De todas formas, es posible demostrar que ambos cálculos ( Itô, Stratonovich) son equivalentes (véase Kloeden and Platen, 1992).

## 1.4 TEORÍA BÁSICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCÁSTICAS.

Para demostrar un teorema de existencia y unicidad de procesos para ecuaciones diferenciales estocásticas, seguiremos un camino análogo al del teorema de Picard para las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Recordemos que para una ecuación diferencial ordinaria  $y'=a(x,y)$ , este método exige que la función  $a$  sea continua en un dominio de  $\mathcal{R}^2$  y que exista un entorno de las condiciones iniciales  $U(x_0, y_0)$  donde se verifique una condición de Lipschitz para la segunda variable, es decir,  $|a(x, y_1) - a(x, y_2)| \leq k|y_1 - y_2|$ . El teorema afirma, entonces, que existe una sola solución  $y(x)$  que pasa por el punto  $(x_0, y_0)$ . La demostración de este teorema radica en la aplicación del teorema del punto fijo sobre aplicaciones contractivas, por lo que se construye una sucesión  $(\varphi_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  mediante la fórmula de recurrencia:

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x a(t, \varphi_{n-1}(t)) dt$$

Se demuestra, aplicando acotaciones pertinentes, que dicha sucesión converge a  $y(x)$  uniformemente con lo que se prueba - además - que dicha función límite es continua en el intervalo considerado.

En el caso que nos ocupa, los presupuestos cambian sustancialmente ya que, lo que antes eran funciones reales, ahora son procesos estocásticos sujetos a las leyes del Cálculo de Probabilidades. Lógicamente, como los objetos matemáticos varían, la hipótesis y la tesis del nuevo teorema sufren una ampliación en sus contenidos y, si la generalización es correcta, particularizando posteriormente al caso determinista, el teorema anterior mantiene su vigencia.

## EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES PARA UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL ESTOCÁSTICA DE ITÔ.

Por solución  $X(t)$  de una ecuación diferencial estocástica, como ya se vio anteriormente,

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t) \quad (30)$$

se entiende un proceso  $X(t)$  que verifica dicha ecuación. De forma equivalente, para todo  $t$  en algún intervalo  $[0, T]$ ,  $X(t)$  satisface la ecuación integral:

$$X(t) = X_0 + \int_0^t f(s, X(s))ds + \int_0^t g(s, X(s))dW(s) \quad (31)$$

donde  $X_0$  es el valor inicial  $X(0)$ , la primera integral en (31) es una integral ordinaria en el intervalo considerado, y la segunda es una integral estocástica de Itô. Daremos un teorema de existencia y unicidad para las soluciones.

Por necesidad en la demostración del teorema de existencia, veremos antes los siguientes lemas.

### LEMA 1:( desigualdad de Bellman-Gronwall)

Si  $a(t)$  y  $b(t)$  son funciones acotadas y medibles, tal que para algún  $L > 0$  es  $a(t) \leq b(t) + L \int_0^t a(s)ds$ , entonces se verifica que:

$$a(t) \leq b(t) + L \int_0^t e^{L(t-s)} b(s)ds$$

la interpretación de esta relación se reduce a que la acotación que figura en la hipótesis se puede expresar en función de  $b$  y por tanto simplifica muchos resultados como veremos en el apéndice B.

### LEMA 2:( sobre la acotación de momentos de segundo orden)

Supongamos que  $f$  y  $g$  satisfacen las condiciones:

1. Las funciones  $f(t, x)$  y  $g(t, x)$  son medibles con respecto a  $t$  y  $x$ .
2. Existe una constante  $K > 0$  tal que  $\forall t \in [0, T]$  y  $(x, y) \in \mathfrak{R}^2$  es:
  - a)  $|f(t, x) - f(t, y)| + |g(t, x) - g(t, y)| \leq K|x - y|$ .

$$b) |f(t, x)|^2 + |g(t, x)|^2 \leq K^2(1 + |x|^2).$$

3. La  $\sigma$ -álgebra generada por  $Y_i(s)$  y  $W(s)$ ,  $s \leq t$  es independiente del incremento  $W(t+r) - W(t)$ ,  $r > 0$ .

$$4. \sup_{[0, T]} E Y_i^2(t) < \infty.$$

Si el proceso  $Z_i$  está definido sobre  $[0, T]$  por:

$$Z_i(t) = X_0 + \int_0^t f(s, Y_i(s)) ds + \int_0^t g(s, Y_i(s)) dW(s) \quad (32)$$

entonces existe una constante  $L > 0$  tal que:

$$E[Z_1(t) - Z_2(t)]^2 \leq L \int_0^t E[Y_1(s) - Y_2(s)]^2 ds \quad (33)$$

Veamos la interpretación de este lema: las dos primeras condiciones hacen referencia a dos propiedades que deben cumplir las funciones reales  $f$  y  $g$  conocidas en el campo determinista; la tercera condición involucra dos procesos estocásticos que generan un campo de actuación donde se impone la independencia de los procesos a partir de un cierto valor temporal; la cuarta condición dice que los momentos de segundo orden están acotados y la tesis asegura que el error medio al cuadrado de la diferencia de procesos  $Z_i$  está acotado por medio de una integral de los procesos  $Y_i$ .

Este lema nos facilitará la demostración del teorema de existencia ya que los  $Z_i$  se convertirán en aproximaciones de la solución de la ecuación diferencial estocástica dada.

### TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES PARA ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCÁSTICAS

Supongamos que:

1) Las funciones  $f(t, x)$  y  $g(t, x)$  son medibles en  $[0, T] \times \mathcal{R}$ .

2)  $\exists K > 0 / \forall t \in [0, T]$  y  $(x, y) \in \mathcal{R}^2$ , se cumple:

$$a) |f(t, x) - f(t, y)| + |g(t, x) - g(t, y)| \leq K|x - y| \quad (\text{condición conjunta de}$$

Lipschitz).

$$b) |f(t, x)|^2 + |g(t, x)|^2 \leq K^2(1 + |x|^2) \text{ (condición de crecimiento conjunto).}$$

3)  $X_0$  es independiente de  $W(t)$ , para  $t > 0$ , y  $EX_0^2 < \infty$ .

Entonces, existe una solución  $X(t)$  de la ecuación:

$$X(t) = X_0 + \int_0^t f(s, X(s))ds + \int_0^t g(s, X(s))dW(s) \quad (34)$$

definida en  $[0, T]$ , que es continua con probabilidad 1 y que:

$$\sup_{[0, T]} EX^2(t) < \infty$$

Además, una solución con esas propiedades es única, y si existe otra solución  $Y(t)$  de (30) se verifica :

$$\forall t \in [0, T], P(\sup |X(t) - Y(t)| = 0) = 1$$

Demostración:

Vamos a utilizar una variante del punto fijo de Picard (Lipschitz 1876) con el fin de realizar una demostración de tipo constructivo.

Como en el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias, consideramos la sucesión de aproximaciones  $\{X_n\}$  definidas por:

$$X_n(t) = X_0 + \int_0^t f(s, X_{n-1}(s))ds + \int_0^t g(s, X_{n-1}(s))dW(s) \quad (35)$$

$$X_0(t) = X_0$$

y tenemos que demostrar que dicha sucesión converge a la solución única  $X(t)$ .

Haremos la demostración verificando los siguientes apartados:

- i) La sucesión  $\{X_n\}$  es uniformemente acotada en media cuadrática sobre el compacto  $[0, T]$ .
- ii)  $\{X_n\}$  converge uniformemente en media cuadrática.
- iii)  $\{X_n\}$  es uniformemente convergente con probabilidad 1.
- iv)  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n$  es una solución de (30).

v) Dos soluciones cualesquiera de (30) se aproximan con probabilidad 1.

i) Para empezar, demostraremos que la sucesión es uniformemente acotada, esto es, para alguna constante  $M$  y todo número natural  $n$  se cumple:

$$\text{Sup}_{[0,T]} EX_n^2(t) \leq M < \infty \quad (36)$$

esta exigencia es razonable ya que asegura que los infinitos procesos de la sucesión tienen una desviación acotada, es decir, como mínimo los procesos son funciones estocásticas bien definidas y con un posible límite. La demostración de este apartado es bastante laboriosa y puede verse en el apéndice B.

El segundo apartado (ii) indica que la sucesión de procesos  $\{X_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente en media cuadrática, es decir:

$$\text{Sup}_{[0,T]} E[X_{n+1}(t) - X_n(t)]^2 \rightarrow 0$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ . Esta propiedad asegura que dicha sucesión es fundamental, es decir, es una sucesión de procesos convergente. En el apéndice B se demuestra que, recurriendo al segundo de los lemas previos, se obtiene:

$$\text{Sup}_{[0,T]} E[X_{n+1}(t) - X_n(t)]^2 \leq C \frac{(LT)^n}{n!} \quad (37)$$

donde se observa que el segundo miembro tiende a cero cuando  $n$  tiende a infinito.

Seguidamente pasamos a justificar el apartado (iii), que nos asegura la convergencia uniforme de  $\{X_n\}$  con probabilidad 1 (véase pág. 4).

Consideramos la sucesión  $\{Y_n\}$  dada por:

$$Y_n = \text{Sup}_{[0,T]} |X_{n+1}(t) - X_n(t)|$$

aplicando la fórmula (35), es decir, sustituyendo los valores de  $X_{n+1}(t), X_n(t)$ , usando expresiones algebraicas y tomando esperanzas resulta, junto a condiciones contenidas en la hipótesis:

$$\begin{aligned}
EY_n^2 &\leq 2K^2T \int_0^T E[X_n(s) - X_{n-1}(s)]^2 ds + 8K^2 \int_0^T E[X_n(s) - X_{n-1}(s)]^2 ds \leq \\
&\leq \frac{C_1(LT)^{n-1}}{(n-1)!} \tag{38}
\end{aligned}$$

donde  $C_1 = [2T + 8]CK^2$ .

Seguidamente tenemos que hacer uso de relaciones probabilísticas para obtener la convergencia en probabilidad.

Aplicando a continuación el teorema:

Si  $f \in L^2$  y  $X(t) = \int_a^t f(s)dW(s)$ , entonces se verifica:

$$P\left(\text{Sup}_{[a,b]} |X(t)| > r\right) \leq \left(\frac{1}{r^2}\right) E\left(\int_a^b f^2(t) dt\right)$$

tenemos:

$$P\left(Y_n(t) > \frac{1}{n^2}\right) = P\left(\text{Sup}_{[a,b]} |X_{n+1}(t) - X_n(t)| > \frac{1}{n^2}\right) \leq \frac{1}{n^2} E\left(\int_0^T |X_{n+1}(t) - X_n(t)|^2 dt\right)$$

de donde se deduce:

$$\sum_1^\infty P\left(Y_n(t) > \frac{1}{n^2}\right) \leq \sum_1^\infty \frac{C_1(LT)^{n-1}}{(n-1)!} n^4$$

siendo esta una mayorante convergente de la primera.

Utilizando el lema de Borel-Cantelli, que dice:

" Si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de sucesos y la serie  $\sum_1^\infty P(A_n)$  converge,

entonces  $P\left(\text{Lím Sup}_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = 0$ ."

tenemos para nuestro caso:

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} Y_n(t) > \frac{1}{n^2}\right) = 0 \Rightarrow P\left[\limsup_{n \rightarrow \infty} |X_{n+1}(t) - X_n(t)| \leq \frac{1}{n^2}\right] = 1$$

Por tanto, la convergencia uniforme de  $X_n(t) = X_0 + \sum_{k=1}^n [X_k(t) - X_{k-1}(t)]$  con

probabilidad 1 a  $X(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [X_n(t) - X_{n-1}(t)]$  está asegurada.

Veamos el apartado iv).

Debemos probar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(t)$  es solución de la ecuación diferencial estocástica de Itô. En efecto, tomando límites en la ecuación (35), tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(t) = X_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t f(s, X_{n-1}(s)) ds + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t g(s, X_{n-1}(s)) dW(s)$$

$$X(t) = X_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t f(s, X_{n-1}(s)) ds + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t g(s, X_{n-1}(s)) dW(s)$$

tenemos, por último, que demostrar los siguientes límites:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t f(s, X_{n-1}(s)) ds = \int_0^t f(s, X(s)) ds$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t g(s, X_{n-1}(s)) dW(s) = \int_0^t g(s, X(s)) dW(s)$$

La demostración del primer apartado es muy sencilla, basta aplicar la propiedad 2a de la hipótesis.

El segundo apartado se demuestra aplicando la convergencia en media cuadrática y usando, también, la propiedad 2a.

Finalmente, queda por demostrar el apartado (v). Supongamos que  $X(t)$  e  $Y(t)$  son soluciones de (30), por lo que son continuos con probabilidad 1 y acotado en media cuadrática sobre  $[0, T]$ . La función  $E[X(t) - Y(t)]^2$  es una función medible y acotada que, además, verifica el segundo lema, luego:

$$E[X(t) - Y(t)]^2 \leq L \int_0^t E[X(s) - Y(s)]^2 ds \quad (39)$$

de donde, por el lema primero, se tiene,  $E[X(t) - Y(t)]^2 = 0$ . Así, para  $\forall t \in [0, T]$ , la probabilidad de que ocurra ambos es 1, es decir  $P[X(t)=Y(t)]=1$ , y también para cualquier subconjunto numerable  $B \subseteq [0, T]$ :

$$P[X(t) = Y(t), t \in B] = 1$$

Tomando  $B$  denso y haciendo uso de la continuidad c.p.1 de  $X$  e  $Y$ ,

$$P\left(\sup_{[0, T]} |X(t) - Y(t)| > 0\right) = 0 \quad (40)$$

Por tanto de (40) obtenemos la unicidad:

$$X(\cdot) = Y(\cdot) \quad \text{c.p.1}$$

queda, así, completada la demostración (cuya versión íntegra se puede ver en el apéndice B) del teorema de existencia y unicidad de soluciones de EDEs.

### 1.5. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES ESTOCÁSTICAS

Como en las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, la solución general de una ecuación diferencial estocástica lineal se puede obtener explícitamente. El método de resolución involucra, también, un factor integrante o, de forma equivalente, una solución fundamental de la ecuación diferencial homogénea asociada.

La forma general de una ecuación diferencial estocástica lineal es:

$$dX_t = (a_1(t)X_t + a_2(t))dt + (b_1(t)X_t + b_2(t))dW_t \quad (40)$$

donde los coeficientes  $a_1, a_2, b_1, b_2$  son funciones del tiempo o constantes.

Si los coeficientes son medibles en sentido de Lebesgue y acotados en el intervalo  $0 \leq t \leq T$ , se puede aplicar el teorema de existencia y unicidad, que asegura la existencia de soluciones fuertes  $X_t$  sobre  $t_0 \leq t \leq T$  para cada  $0 \leq t_0 \leq T$  y cada valor inicial  $X_{t_0}$  correspondiente a un proceso de Wiener dado  $\{W_t / t \geq 0\}$  y asociado a una familia de  $\sigma$ -álgebras  $\{\mathcal{A}(t) / t \geq 0\}$ .

Cuando los coeficientes son todos constantes, la EDE se llama autónoma, las soluciones existen para todo  $t$  positivo, y se llaman procesos homogéneos de Markov. En este caso se puede considerar  $t_0 = 0$ . Cuando  $a_2(t)$  y  $b_2(t)$  son nulos, la EDE anterior se reduce a:

$$dX_t = a_1(t)X_t dt + b_1(t)X_t dW_t \quad (41)$$

que es lineal homogénea.

Obviamente,  $X_t \equiv 0$  es una solución de la homogénea. Es de gran importancia la solución fundamental  $\phi_{t,t_0}$  que satisface la condición inicial  $\phi_{t_0,t_0} = 1$ , pues toda otra solución puede ser expresada en función de ella. El problema se reduce a encontrar dicha solución fundamental.

Cuando  $b_1(t) \equiv 0$ , la ecuación (40) tiene la forma:

$$dX_t = [a_1(t)X_t + a_2(t)]dt + b_2(t)dW_t \quad (42)$$

donde aparece el ruido en forma aditiva. En este caso podemos decir que la EDE es lineal en sentido estricto.

La ecuación homogénea obtenida de (41) es una EDO:

$$\frac{dX_t}{X_t} = a_1(t)dt$$

cuya solución es

$$\phi_{t,t_0} = \exp\left(\int_{t_0}^t a_1(s)ds\right)$$

Aplicando la fórmula de Itô a la transformación  $U(t, x) = \phi_{t,t_0}^{-1} x$ , obtenemos:

$$d(\phi_{t,t_0}^{-1} X_t) = \left( \frac{d\phi_{t,t_0}^{-1}}{dt} X_t + (a_1(t)X_t + a_2(t))\phi_{t,t_0}^{-1} \right) + b_2(t)\phi_{t,t_0}^{-1} dW_t$$

$$= a_2(t)\phi_{t,t_0}^{-1} dt + b_2(t)\phi_{t,t_0}^{-1} dW_t \quad (43)$$

Teniendo en cuenta que  $\frac{d\phi_{t,t_0}^{-1}}{dt} = -\phi_{t,t_0}^{-1} a_1(t)$  la igualdad anterior queda:

$$d(\phi_{t,t_0}^{-1} X_t) = a_2(t)\phi_{t,t_0}^{-1} dt + b_2(t)\phi_{t,t_0}^{-1} dW_t \quad (44)$$

y se observa que el segundo miembro sólo contiene funciones conocidas, por tanto, integrando, tenemos:

$$\phi_{t,t_0}^{-1} X_t = \phi_{t_0,t_0}^{-1} X_{t_0} + \int_{t_0}^t a_2(s)\phi_{s,t_0}^{-1} ds + \int_{t_0}^t b_2(s)\phi_{s,t_0}^{-1} dW_s. \quad (45)$$

y como  $\phi_{t_0,t_0}^{-1} = 1$ , la solución viene dada por:

$$X_t = \phi_{t,t_0} \left( X_{t_0} + \int_{t_0}^t a_2(s)\phi_{s,t_0}^{-1} ds + \int_{t_0}^t b_2(s)\phi_{s,t_0}^{-1} dW_s \right) \quad (46)$$

que es la solución de la EDE lineal.

La solución (46) es un proceso gaussiano para cada valor inicial  $X_{t_0}$  constante o aleatorio.

El caso general lineal es más complicado porque la ecuación homogénea asociada (41) es una EDE. La solución fundamental satisface la EDO  $d(\phi_{t,t_0}) = a_1(t)dt$ .

Usando esto como argumento, podemos concluir por la fórmula de Itô que el proceso transformado  $L\phi_{t,t_0}$  para la solución fundamental  $\phi_{t,t_0}$  satisface la ecuación homogénea.

$$\begin{aligned} d(L\phi_{t,t_0}) &= \left( a_1(t)\phi_{t,t_0}\phi_{t,t_0}^{-1} - \frac{1}{2}b_1^2(t)\phi_{t,t_0}^2\phi_{t,t_0}^{-2} \right) dt + b_1(t)\phi_{t,t_0}^{-1} dW_t = \\ &= \left( a_1(t) - \frac{1}{2}b_1^2(t) \right) dt + b_1(t)dW_t. \end{aligned}$$

que contiene sólo funciones conocidas de  $t$  y  $W$ . Integrando la ecuación anterior, tenemos:

$$L\phi_{t,t_0} = \int_{t_0}^t \left( a_1(s) - \frac{1}{2}b_1^2(s) \right) ds + \int_{t_0}^t b_1(s)dW_s$$

y teniendo en cuenta que  $\phi_{t_0,t_0} = 1$ , tenemos la solución:

$$\phi_{t,t_0} = \exp \left( \int_{t_0}^t \left( a_1(s) - \frac{1}{2}b_1^2(s) \right) ds + \int_{t_0}^t b_1(s)dW_s \right)$$

De forma análoga, aplicando la fórmula de Itô a:

$$\phi_{t,t_0}^{-1} = \exp \left\{ - \left[ \int_{t_0}^t \left( a_1(s) - \frac{1}{2}b_1^2(s) \right) ds + \int_{t_0}^t b_1(s)dW(s) \right] \right\}$$

tenemos:

$$d(\phi_{t,t_0}^{-1}) = \left[ -a_1(t) + b_1^2(t) \right] \phi_{t,t_0}^{-1} dt - b_1(t)\phi_{t,t_0}^{-1} dW(t)$$

entonces, como en el caso considerado anteriormente, el proceso  $\phi_{t,t_0}^{-1} X_t$  para una solución  $X_t$  de la EDE lineal (40) tiene una solución explícita.

La solución de la ecuación lineal general (40) se obtiene por medio de la fórmula vectorial de Itô:

$$dY_t = \left[ \frac{\partial U}{\partial t} + a(t)^T \nabla U + \frac{1}{2} \text{tr} \left( b(t)b(t)^T \nabla(\nabla U) \right) \right] dt + \nabla U^T b(t) dW(t)$$

donde  $^T$  indica la matriz transpuesta,  $\nabla$  es el gradiente,  $\nabla(\nabla U)$  representa la matriz hessiana y  $\text{tr}$  es la traza de la matriz resultante en el paréntesis.

Aplicando la fórmula 20 a la transformación  $Y_t = U(X_1, X_2) = X_1 X_2$  en donde  $X_1 = \phi_{t,t_0}^{-1}$  y  $X_2 = X_t$  del sistema formado por las dos diferenciales:

$$d \begin{pmatrix} \phi_{t,t_0}^{-1} \\ X_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-a_1(t) + b_1^2(t))\phi_{t,t_0}^{-1} \\ a_1(t)X_t + a_2(t) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} -b_1(t)\phi_{t,t_0}^{-1} \\ b_1(t)X_t + b_2(t) \end{pmatrix} dW(t)$$

donde:

$$a(t) = \begin{pmatrix} (-a_1 + b_1^2)\phi^{-1} \\ a_1 X_t + a_2 \end{pmatrix}, \quad \nabla U = \left( \frac{\partial U}{\partial X_1}, \frac{\partial U}{\partial X_2} \right) = (X_2, X_1) = (X_t, \phi_{t,t_0}^{-1}),$$

$$b(t) = \begin{pmatrix} -b_1\phi^{-1} \\ b_1 X_t + b_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad MH(U) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial X_1^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial X_1 \partial X_2} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial X_1 \partial X_2} & \frac{\partial^2 U}{\partial X_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

tenemos, sustituyendo en la ecuación vectorial de Itô:

$$\begin{aligned} d(\phi_{t,t_0}^{-1} X_t) &= [(-a_1(t) + b_1^2(t))X_t + (a_1(t)X_t + a_2(t))]\phi_{t,t_0}^{-1} dt - \\ &- b_1(t)[b_1(t)X_t + b_2(t)]\phi_{t,t_0}^{-1} dt + [-b_1(t)\phi_{t,t_0}^{-1} X_t + (b_1(t)X_t + b_2(t))\phi_{t,t_0}^{-1}] dW(t) = \\ &= (a_2(t) - b_1(t)b_2(t))\phi_{t,t_0}^{-1} dt + b_2(t)\phi_{t,t_0}^{-1} dW(t) \end{aligned}$$

Integrando y teniendo en cuenta que  $\phi_{t_0,t_0} = 1$ , obtenemos:

$$\phi_{t,t_0}^{-1} X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t (a_2(s) - b_1(s)b_2(s))\phi_{s,t_0}^{-1} ds + \int_{t_0}^t b_2(s)\phi_{s,t_0}^{-1} dW(s)$$

y despejando:

$$X_t = \phi_{t,t_0} \left( X_{t_0} + \int_{t_0}^t (a_2(s) - b_1(s)b_2(s))\phi_{s,t_0}^{-1} ds + \int_{t_0}^t b_2(s)\phi_{s,t_0}^{-1} dW(s) \right)$$

que es la solución de la ecuación diferencial estocástica lineal completa (40).

Para constatar que esta solución es correcta, vamos a obtener las soluciones de los dos casos anteriores.

a) Cuando  $a_1(t) \equiv a = \text{Cte.}$  ,  $b_1(t) \equiv b = \text{Cte.}$   $a_2(t) = b_2(t) = 0$  tenemos la ecuación diferencial homogénea:

$$dX_t = aX_t dt + bX_t dW_t$$

la solución es:

$$X_t = X_0 \phi(t) = X_0 \exp \left\{ \left( a - \frac{1}{2} b^2 \right) t + bW(t) \right\}$$

b) Cuando  $b_1(t) \equiv 0$ , tenemos la ecuación diferencial:

$$dX_t = [a_1(t)X_t + a_2(t)]dt + b_2(t)dW(t)$$

y la solución es, teniendo en cuenta que  $\phi(t) = \exp \int_0^t a_1(s) ds$  :

$$X_t = \phi(t) \left[ X_0 + \int_0^t a_2(s) \phi_s^{-1} ds + \int_0^t b_2(s) \phi_s^{-1} dW_s \right]$$

que es la solución obtenida anteriormente.

Para completar el estudio de las ecuaciones diferenciales estocásticas lineales, podemos indicar que la media y el momento de segundo orden del proceso solución se obtienen fácilmente mediante la resolución de dos ecuaciones diferenciales ordinarias lineales.

En efecto, integrando la ecuación diferencial lineal general:

$$dX_t = [a_1(t)X_t + a_2(t)]dt + [b_1(t)X_t + b_2(t)]dW_t$$

tenemos.

$$X_t = \int_{t_0}^t [a_1(s)X_s + a_2(s)]ds + \int_{t_0}^t [b_1(s)X_s + b_2(s)]dW_s$$

y como el proceso  $X_t$  es independiente del proceso de Wiener, la segunda integral se anula, de donde se deduce:

$$E(X_t) = \int_{t_0}^t [a_1(s)E(X_s) + a_2(s)]ds$$

y derivando se obtiene:

$$dE(X_t) = [a_1(t)E(X_t) + a_2(t)]dt$$

o bien, llamando a  $E(X_t) = m(t)$ , tenemos:

$$m'(t) = a_1(t)m(t) + a_2(t)$$

que es una ecuación diferencial lineal ordinaria no homogénea.

Para obtener el momento de segundo orden y, como consecuencia, la desviación típica del proceso, tenemos que aplicar, previamente, la fórmula de Itô a la ecuación diferencial estocástica con el fin de obtener el cuadrado del proceso estocástico. Si aplicamos la fórmula de Itô a la función  $U = X^2$ , tenemos:

$$\begin{aligned} dU = d(X_t^2) &= \left[ \frac{\partial U}{\partial t} + a \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right] dt + b \frac{\partial U}{\partial x} dW_t = \\ &= \left[ (a_1 X_t + a_2) 2X_t + \frac{1}{2} (b_1 X_t + b_2)^2 2 \right] dt + (b_1 X_t + b_2) 2X_t dW(t) = \\ &= \left[ 2(a_1 X_t + a_2) X_t + b_1^2 X_t^2 + 2b_1 b_2 X_t + b_2^2 \right] dt + (b_1 X_t + b_2) 2X_t dW(t) \end{aligned}$$

integrando:

$$X_t^2 = \int_{t_0}^t \left[ (2a_1 + b_1^2) X_t^2 + 2(a_2 + b_1 b_2) X_t + b_2^2 \right] dt + \int_{t_0}^t 2X_t (b_1 X_t + b_2) dW(t)$$

tomando esperanzas:

$$E(X_t^2) = \int_{t_0}^t \left[ (2a_1 + b_1^2) E(X_t^2) + 2(a_2 + b_1 b_2) E(X_t) + b_2^2 \right] dt$$

y diferenciando:

$$dE(X_t^2) = \left[ (2a_1(t) + b_1^2(t)) E(X_t^2) + 2(a_2(t) + b_1(t)b_2(t)) E(X_t) + b_2^2(t) \right] dt$$

y haciendo  $P(t) = E(X_t^2)$ , tenemos la ecuación:

$$P'(t) = \left[ (2a_1(t) + b_1^2(t)) P(t) + 2m(t)(a_2(t) + b_1(t)b_2(t)) + b_2^2(t) \right]$$

que también es una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden no homogénea de fácil resolución.

## RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCÁSTICAS LINEALES Y NO LINEALES.

Con un cambio de variables  $X_t = U(t, Y_t)$  ciertas ecuaciones diferenciales estocásticas no lineales:

$$dY_t = a(t, Y_t)dt + b(t, Y_t)dW_t \quad (47)$$

pueden ser reducidas a una EDE lineal en  $X_t$ :

$$dX_t = [a_1(t)X_t + a_2(t)]dt + [b_1(t)X_t + b_2(t)]dW_t \quad (48)$$

Si  $\frac{\partial U}{\partial y}(t, y) \neq 0$  el teorema de la función inversa asegura la existencia local de la inversa,  $y = V(t, x)$  de  $x = U(t, y)$  que verifica  $x = U(t, V(t, x))$  e  $y = V(t, U(t, y))$ . Una solución de (47) tiene la forma  $Y_t = V(t, X_t)$  donde  $X_t$  viene dado por (48) para coeficientes apropiados  $a_1, a_2, b_1, b_2$ . Por la fórmula de Itô:

$$dU(t, Y_t) = \left[ \frac{\partial U}{\partial t} + a \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right] dt + b \frac{\partial U}{\partial y} dW_t$$

donde los coeficientes y las derivadas parciales son evaluadas en  $(t, Y_t)$ .

La última ecuación coincide con una EDE de la forma (48) si:

$$\frac{\partial U}{\partial t}(t, y) + a(t, y) \frac{\partial U}{\partial y}(t, y) + \frac{1}{2} b^2(t, y) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(t, y) = a_1(t)U(t, y) + a_2(t) \quad (49)$$

$$b(t, y) \frac{\partial U}{\partial y}(t, y) = b_1(t)U(t, y) + b_2(t) \quad (50)$$

En el caso en que  $a_1(t) \equiv b_1(t) \equiv 0$  y escribiendo  $a_2(t) = \alpha(t)$ ;  $b_2(t) = \beta(t)$ , obtenemos de (49):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial y}(t, y) = - \frac{\partial}{\partial y} \left[ a(t, y) \frac{\partial U}{\partial y}(t, y) + \frac{1}{2} b^2(t, y) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(t, y) \right]$$

y de (50), tenemos:

$$b(t, y) \frac{\partial U}{\partial y}(t, y) = \beta(t)$$

derivando con respecto a  $t$ , tenemos:

$$\frac{\partial b}{\partial t}(t, y) \frac{\partial U}{\partial y}(t, y) + b(t, y) \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial t}(t, y) = \beta'(t)$$

asumimos, por ahora, que  $b(t, y) \neq 0$ . Eliminando  $U$  y sus derivadas, tenemos:

$$\beta'(t) = \beta(t)b(t, y) \left[ \frac{1}{b^2(t, y)} \frac{\partial b}{\partial t}(t, y) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{a(t, y)}{b(t, y)} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 b(t, y)}{\partial y^2} \right] \quad (51)$$

como se observa el segundo miembro es independiente de  $y$ , por tanto:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial y}(t, y) = 0$$

siendo:

$$\gamma(t, y) = \frac{1}{b(t, y)} \frac{\partial b}{\partial t}(t, y) - b(t, y) \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{a(t, y)}{b(t, y)} - \frac{1}{2} \frac{\partial b}{\partial y}(t, y) \right]$$

esta es una condición suficiente para reducir la EDE no lineal a una EDEL y por lo tanto integrable:

$$dX_t = \alpha(t)dt + \beta(t)dW_t \quad (52)$$

por medio de la transformación o cambio de variable dado por la ecuación  $x=U(t, y)$ .

De (49) y (50) podemos escribir nuestro caso de la forma:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + a \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \alpha(t)$$

$$b \frac{\partial U}{\partial y} = \beta(t)$$

de (51) tenemos:

$$\beta(t) = C \exp \left( \int_0^t \gamma(s, y) ds \right)$$

de donde:

$$b \frac{\partial U}{\partial y} = C \exp \left( \int_0^t \gamma(s, y) ds \right) \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial y} = C \exp \left( \int_0^t \gamma(s, y) ds \right) \frac{1}{b(t, y)}$$

e integrando con respecto a  $y$ , obtenemos:

$$U(t, y) = C \exp\left(\int_0^t \gamma(s, y) ds\right) \int_0^y \frac{1}{b(t, z)} dz$$

Observamos que este método puede ser también usado para reducir ciertas ecuaciones diferenciales estocásticas lineales de la forma (52).

Una variación del procedimiento se aplica para reducir las ecuaciones diferenciales estocásticas autónomas no lineales:

$$dY_t = a(Y_t)dt + b(Y_t)dW_t \quad (53)$$

a la ecuación autónoma lineal:

$$dX_t = (a_1 X_t + a_2)dt + (b_1 X_t + b_2)dW_t \quad (54)$$

por medio del cambio  $X_t = U(Y_t)$ , independiente del tiempo. En este caso la igualdades (49) y (50), toman la forma:

$$a(y) \frac{\partial U}{\partial y}(y) + \frac{1}{2} b^2(y) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(y) = a_1 U(y) + a_2 \quad (55)$$

$$b(y) \frac{\partial U}{\partial y}(y) = b_1 U(y) + b_2 \quad (56)$$

asumiendo que  $b(y) \neq 0$  y  $b_1 \neq 0$ , se sigue de (56) que:

$$U(y) = C \exp(b_1 B(y)) - \frac{b_2}{b_1} \quad (57)$$

donde:

$$B(y) = \int_{y_0}^y \frac{ds}{b(s)}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores por  $U(y)$  en (55), nos da:

$$\left[ b_1 A(y) + \frac{1}{2} b_1^2 - a_1 \right] C \exp(b_1 B(y)) = a_2 - a_1 \frac{b_2}{b_1} \quad (58)$$

donde:

$$A(y) = \frac{a(y)}{b(y)} - \frac{1}{2} \frac{db}{dy}(y)$$

Diferenciando (48), multiplicando el resultado por  $b(y)\exp(-b_1B(y))/b_1$  y diferenciando otra vez, obtenemos la relación:

$$b_1 \frac{dA}{dy} + \frac{d}{dy} \left( b \frac{dA}{dy} \right) = 0 \quad (59)$$

y esta igualdad se cumple si  $\frac{dA}{dy} = 0$  ó si :

$$\frac{d}{dy} \left[ \frac{\frac{d}{dy} \left( b \frac{dA}{dy} \right)}{\frac{dA}{dy}} \right] = 0$$

donde  $b_1$  tiene la forma:

$$b_1 = - \frac{\frac{d}{dy} \left( b \frac{dA}{dy} \right)}{\frac{dA}{dy}}$$

Si  $b_1 \neq 0$  la transformación apropiada es:

$$U(y) = C \exp(b_1 B(y))$$

y si  $b_1 = 0$  toma la forma:

$$U(y) = b_2 B(y) + C \quad (60)$$

cuando  $b_2$  se toma de forma que satisfaga (56).

### EJEMPLO:

Para la EDE no lineal:

$$dY_t = -\frac{1}{2} \exp(-2Y_t) dt + \exp(-Y_t) dW_t$$

$$a(y) = -\frac{1}{2} \exp(-2y) \quad , \quad b(y) = \exp(-y), \text{ luego } A(y) = \frac{-\frac{1}{2} e^{-2y}}{e^{-y}} - \frac{1}{2} (-1) e^{-y} =$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-y} + \frac{1}{2} e^{-y} = 0, \text{ por tanto (59) se cumple para algún } b_1.$$

Para  $b_1 = 0, b_2 = 1$  una solución de (56) es:

$$b(y) \frac{\partial U}{\partial y}(y) = 1$$

y por (60) una solución de la ecuación diferencial anterior es:

$$U(y) = e^y$$

sustituyendo en (55), tenemos:

$$a(y) \cdot e^y + \frac{1}{2} b^2(y) e^y = a_1 e^y + a_2$$

de donde se deduce que  $a_1 = a_2 = 0$ .

La transformación del cambio es por tanto:

$$U = e^y \Rightarrow X_t = e^{Y_t} \Rightarrow Y_t = L X_t \Rightarrow dX_t = dW_t \Rightarrow X_t = W_t + X_0$$

de donde  $X_t = e^{Y_0 + W_t}$ , siendo la solución de la ecuación original:

$$Y_t = L [W_t + e^{Y_0}]$$

Se observa cierto paralelismo con el método de los factores integrantes para las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Como ocurre en la Teoría de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, muchas ecuaciones estocásticas no lineales se pueden resolver analíticamente reduciéndolas a lineales mediante la teoría dada anteriormente. Sin embargo, otras ecuaciones no reducibles hay que resolverlas aplicando métodos numéricos adaptados a este tipo de ecuaciones. Algunos esquemas numéricos serán desarrollados en los siguientes capítulos.

## CAPÍTULO II

### SERIES ESTOCÁSTICAS Y ESQUEMAS NUMÉRICOS

#### 2.1 SERIES DE ITO-TAYLOR

##### DESARROLLO DETERMINISTA DE TAYLOR.

El desarrollo determinista de Taylor será muy útil para las aplicaciones en el campo aleatorio. Lo revisaremos usando una terminología que nos facilitará la presentación de resultados para procesos estocásticos. Para empezar, consideramos la solución  $X = \{X_t / t \in [t_0, T]\}$  de una EDO unidimensional:

$$\frac{d}{dt} X_t = a(X_t) \quad (1)$$

con valor inicial  $X_{t_0}$ , para  $t \in [t_0, T]$  donde  $0 \leq t_0 \leq T$ , y que se puede escribir de forma equivalente por:

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(X_s) ds \quad (2)$$

Para justificar las construcciones que siguen, necesitamos que la función  $a(\cdot)$  satisfaga propiedades adecuadas, por ejemplo, ser diferenciable y acotada.

Sea  $f: \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{R}$  una función de clase 1. Por la regla de la cadena podemos escribir:

$$\frac{d}{dt} f(X_t) = \frac{df}{dX_t} \frac{dX_t}{dt} = a(X_t) f'(X_t) \quad (3)$$

y definiendo el operador  $Lf = af'$ , donde  $f'$  indica la derivada con respecto de  $x$ , podemos escribir (3) mediante la relación integral:

$$f(X_t) = f(X_{t_0}) + \int_{t_0}^t Lf(X_s) ds \quad (4)$$

ya que integrando  $\frac{d}{dt} f(X_t) = a(X_t) f'(X_t) = Lf(X_t)$ , tenemos la relación (4).

Cuando  $f(x) \equiv x$  tenemos  $Lf = a$ ,  $L^2 f = La$ ,  $L^3 f = L^2 a, \dots, L^{n+1} f = L^n a$  y (4) se reduce a la fórmula (2)

Si, ahora, aplicamos la relación (4) a la función  $f=a$  y la introducimos en (2), obtenemos:

$$\begin{aligned} X_t &= X_{t_0} + \int_{t_0}^t \left[ a(X_{t_0}) + \int_{t_0}^s La(X_z) dz \right] ds = \\ &= X_{t_0} + a(X_{t_0}) \int_{t_0}^t ds + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s La(X_z) dz ds = \\ &= X_{t_0} + a(X_{t_0})(t - t_0) + R_2. \end{aligned} \quad (6)$$

que es el desarrollo de Taylor de  $X_t$  con un resto en forma integral:

$$R_2 = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s La(X_z) dz ds \quad (7)$$

Podemos aplicar (4) de nuevo a la función  $f=La$  y sustituyendo en la integral doble de (6), obteniéndose:

$$\begin{aligned} X_t &= X_{t_0} + a(X_{t_0}) \int_{t_0}^t ds + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \left[ La(X_{t_0}) + \int_{t_0}^z L^2 a(X_u) du \right] ds dz = \\ &= X_{t_0} + a(X_{t_0}) \int_{t_0}^t ds + La(X_{t_0}) \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s ds dz + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \int_{t_0}^z L^2 a(X_u) du dz ds = \\ &= X_{t_0} + \frac{L^0 a(X_{t_0})}{1!} (t - t_0) + \frac{L^1 a(X_{t_0})}{2!} (t - t_0)^2 + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \int_{t_0}^z L^2 a(X_u) du dz ds \end{aligned}$$

que es el desarrollo de Taylor de  $X_t$  con resto integral:

$$R_3 = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \int_{t_0}^z L^2 a(X_u) du dz ds \quad (8)$$

Aplicando el método de inducción, tenemos la siguiente formulación del desarrollo de Taylor en el campo determinista:  $\forall t \in [t_0, T]$  y  $r = 1, 2, 3, \dots$

$$f(X_t) = f(X_{t_0}) + \sum_{k=1}^r \frac{L^k f(X_{t_0})}{k!} (t - t_0)^k + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{s_1} \dots \int_{t_0}^{s_r} L^{r+1} f(X_{s_i}) ds_1 \dots ds_{r+1} \quad (9)$$

donde hemos utilizado el resultado inmediato:

$$\int_{t_0}^t \int_{t_0}^{s_1} \dots \int_{t_0}^{s_{k-1}} ds_1 ds_2 \dots ds_k = \frac{1}{k!} (t - t_0)^k$$

## DESARROLLO DE ITÔ-TAYLOR

La fórmula de Taylor (9) es una buena herramienta en las investigaciones teóricas y prácticas. Particularmente, tiene una aplicación muy amplia en el análisis numérico. Este nuevo desarrollo depende de los valores de la función y de algunas de sus derivadas junto a sus correspondientes integrales múltiples que dependen del tiempo. Además, aparece un resto que contiene integrales múltiples de mayor orden, que dependen también del tiempo.

Deseamos, ahora, mediante un estudio paralelo al caso determinista, obtener una serie que represente un proceso estocástico, más concretamente el proceso estocástico solución de una ecuación diferencial estocástica de Itô. Este desarrollo, que denominaremos de Itô-Taylor nos servirá, como ocurre en el caso determinista, para obtener esquemas numéricos y aplicarlos a problemas reales en donde aparecen ecuaciones o sistemas que no son resolubles analíticamente. Hay varias posibilidades de introducción de la fórmula de Taylor en este nuevo campo de estudio. Nosotros analizaremos la que está basada en la aplicación iterada de la fórmula de Itô, que llamaremos, como hemos indicado anteriormente, desarrollo de Itô-Taylor. La expondremos aquí para deducir la solución  $X_t$  de una EDE de Itô unidimensional:

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(X_s) ds + \int_{t_0}^t b(X_s) dW_s \quad (10)$$

para  $t \in [t_0, T]$ , donde la segunda integral es una integral de Itô, y los coeficientes  $a(\cdot)$  y  $b(\cdot)$  son funciones diferenciables reales y como consecuencia de ello, son continuas y acotadas en cualquier compacto. Debemos, a continuación, obtener la expresión de  $f(X_t)$ , siendo  $f$  una función arbitraria con ciertas condiciones y  $X_t$  la solución de la EDE (10).

Para cualquier función  $f: \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{R}$  de clase  $C^2$ , la fórmula de Itô establece en relación con la ecuación diferencial:

$$dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dW(t)$$

el resultado que construimos a continuación. Sobre  $U = f(X_t)$  aplicamos la fórmula de Itô:

$$dU = \left[ \frac{\partial U}{\partial t} + a \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} b^2 \right] dt + b \frac{\partial U}{\partial x} dW(t) \quad (11)$$

de donde:

$$df(X_t) = \left[ af'(X_t) + \frac{1}{2} b^2 f''(X_t) \right] dt + bf'(X_t)dW(t)$$

escribiendo  $f' = \frac{\partial f}{\partial x}$  y  $f'' = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ . Integrando ahora entre  $t_0$  y  $t$ , obtenemos:

$$f(X_t) = f(X_{t_0}) + \int_{t_0}^t \left[ a(X_s)f'(X_s) + \frac{1}{2} b^2(X_s)f''(X_s) \right] ds + \int_{t_0}^t b(X_s)f'(X_s)dW_s = f(X_{t_0}) + \int_{t_0}^t L^0 f(X_s) ds + \int_{t_0}^t L^1 f(X_s) dW_s, \text{ o bien:}$$

$$f(X_t) = f(X_{t_0}) + \int_{t_0}^t L^0 f(X_s) ds + \int_{t_0}^t L^1 f(X_s) dW_s \quad (12)$$

$\forall t \in [t_0, T]$ . Aquí hemos introducido los operadores siguientes:

$$L^0 f = af' + \frac{1}{2} b^2 f'' \quad (13)$$

$$L^1 f = bf' \quad (14)$$

Obviamente, para  $f(x) \equiv x$ , tenemos las igualdades,  $L^0 f = a$ ,  $L^1 f = b$ , reduciéndose la ecuación (12) a la ecuación original de Ito para  $X_t$ :

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(X_s) ds + \int_{t_0}^t b(X_s) dW_s \quad (15)$$

Por analogía con los desarrollos deterministas anteriores, si aplicamos la fórmula (12) a las funciones  $f=a$  y  $f=b$ , obtenemos:

$$a(X_t) = a(X_{t_0}) + \int_{t_0}^t L^0 a(X_s) ds + \int_{t_0}^t L^1 a(X_s) dW(s)$$

$$b(X_t) = b(X_{t_0}) + \int_{t_0}^t L^0 b(X_s) ds + \int_{t_0}^t L^1 b(X_s) dW(s)$$

y sustituyendo estas expresiones en (15), tenemos:

$$\begin{aligned} X_t &= X_{t_0} + \int_{t_0}^t \left[ a(X_{t_0}) + \int_{t_0}^s L^0 a(X_z) dz + \int_{t_0}^s L^1 a(X_z) dW_z \right] ds + \\ &+ \int_{t_0}^t \left[ b(X_{t_0}) + \int_{t_0}^s L^0 b(X_z) dz + \int_{t_0}^s L^1 b(X_z) dW_z \right] dW_s = \\ &= X_{t_0} + a(X_{t_0}) \int_{t_0}^t ds + b(X_{t_0}) \int_{t_0}^t dW_s + R_1, \text{ es decir} \end{aligned}$$

$$X_t = X_{t_0} + a(X_{t_0}) \int_{t_0}^t ds + b(X_{t_0}) \int_{t_0}^t dW_s + R_1 \quad (16)$$

que es el desarrollo de Itô-Taylor para  $X_t$  con un resto que se compone de varias integrales dobles:

$$\begin{aligned} R_1 &= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^0 a(X_z) dz ds + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^1 a(X_z) dW_z ds + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^0 b(X_z) dz dW_s + \\ &+ \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^1 b(X_z) dW_z dW_s \end{aligned} \quad (17)$$

Podemos observar que el truncamiento del desarrollo lo componen dos integrales, una determinista, y otra estocástica con respecto al proceso de Wiener con integrando constante. El resto lo forman desde integrales de orden superior de funciones deterministas hasta integrales múltiples estocásticas

Podemos repetir el procedimiento anterior aplicando la fórmula de Itô (12) a  $f = L^1 b$  y sustituyendo en el resto de (16):

$$X_t = X_{t_0} + a(X_{t_0}) \int_{t_0}^t ds + b(X_{t_0}) \int_{t_0}^t dW_s + L^1 b(X_{t_0}) \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s dW_z dW_s + R_2 \quad (18)$$

Siendo ahora:

$$R_2 = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^0 a(X_Z) dz ds + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^1 a(X_Z) dW_Z ds + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^0 b(X_Z) dz dW_s + \\ + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \int_{t_0}^z L^0 L^1 b(X_u) du dW_Z dW_s + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \int_{t_0}^z L^1 L^1 b(X_u) dW_u dW_Z dW_s \quad (19)$$

Podemos ver que el truncamiento de la serie contiene las integrales

$$\int_{t_0}^t ds, \quad \int_{t_0}^t dW_s, \quad \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s dW_Z dW_s$$

y el resto lo forman integrales de órdenes igual o mayor que la última del truncamiento de Itô-Taylor.

Podemos ampliar la serie aplicando la fórmula de Itô (12) a la función  $f = L^1 L^1 b$ , es decir:

$$(L^1 L^1 b)(X_t) = (L^1 L^1 b)(X_{t_0}) + \int_{t_0}^t L^0(L^1 L^1 b) ds + \int_{t_0}^t L^1 L^1 L^1 b dW_s \quad (20)$$

y sustituyendo en la última integral triple del resto  $R_2$ , tenemos:

$$\int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \int_{t_0}^z \left[ (L^1 L^1 b)(X_{t_0}) + \int_{t_0}^u L^0(L^1 L^1 b) dv + \int_{t_0}^u L^1 L^1 L^1 b dW_v \right] dW_u dW_Z dW_s = \\ (L^1 L^1 b)(X_{t_0}) \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \int_{t_0}^z dW_u dW_Z dW_s + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \int_{t_0}^z \int_{t_0}^u L^0 L^1 L^1 L^1 b dv dW_u dW_Z dW_s + \\ + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \int_{t_0}^z \int_{t_0}^u (L^1)^4 (b(X_v)) dW_v dW_u dW_Z dW_s \quad (21)$$

por tanto, el nuevo truncamiento de la serie será:

$$X_t = X_{t_0} + a(X_{t_0}) \int_{t_0}^t ds + b(X_{t_0}) \int_{t_0}^t dW_s + L^1 b(X_{t_0}) \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s dW_Z dW_s + \\ + L^1 L^1 b(X_{t_0}) \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \int_{t_0}^z dW_u dW_Z dW_s + R_3 \quad (22)$$

donde  $R_3$  está formado por las cuatro integrales de  $R_2$  más las dos últimas de (21).

Como conclusión de este apartado podemos indicar que el truncamiento de la serie de Itô-Taylor de un orden cualquiera tiene una expresión de fácil formación, y su cálculo será posible siempre que podamos hallar las integrales estocásticas múltiples con integrandos constantes que aparecen en el desarrollo.

Aunque a simple vista parece que este desarrollo nada tiene que ver con el determinista, podemos adelantar que, como caso particular de la fórmula general (ver apéndice A), cuando  $b(x,t)=0$  y  $X_t = t$ , se obtiene el desarrollo de Taylor determinista clásico.

Siguiendo el proceso, observamos que el desarrollo de Itô-Taylor está formado por el desarrollo determinista de orden 1 más diversas integrales, algunas de las cuales son estocásticas.

Si se intenta llevar más adelante la analogía para obtener un desarrollo del tipo (22) generalizado hay que proceder al estudio de las integrales estocásticas múltiples que se puede ver en el apéndice A.

## 2.2 APROXIMACIONES FUERTES DE ITÔ-TAYLOR

En este apartado usaremos los desarrollos de Itô-Taylor para obtener aproximaciones discretas con respecto al criterio de convergencia fuerte y que llamaremos "aproximaciones fuertes de Taylor". Veremos, para un esquema determinado, su orden y el orden del error que se comete al efectuar un truncamiento de la serie.

Al referirnos al orden de convergencia en este capítulo, lo entenderemos según el criterio de convergencia fuerte:

" Un método de aproximación  $Y^\delta$  de paso  $\delta$ , converge fuertemente con orden de aproximación  $\gamma > 0$ , si existe una constante  $C$  que no depende de  $\delta$  y un  $\delta_0 > 0$  tal que:

$$\varepsilon(\delta) = E\left(\left|X_T - Y^\delta(T)\right|\right) \leq C\delta^\gamma$$

para cada  $\delta \in (0, \delta_0)$ .

De acuerdo con los desarrollos en series y las integrales múltiples definidas en el apéndice A, tomamos:

$$f_\alpha(t, x) = L^{j_1} \dots L^{j_\lambda - 1} b^{j_\lambda}(t, x) \quad (23)$$

para todo  $(t, x) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}^d$  y todos los multiíndices  $\alpha = (j_1, \dots, j_\lambda) \in M$ . Se observa (por el teorema general de la convergencia) que los esquemas fuertes de Itô-Taylor de

órdenes  $\gamma = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$  están asociados al conjunto de multiíndices (ver apéndice A):

$$A_\gamma = \left\{ \alpha \in M / \lambda(\alpha) + n(\alpha) \leq 2\gamma, \text{ ó, } \lambda(\alpha) = n(\alpha) = \gamma + \frac{1}{2} \right\} \quad (24)$$

Así se puede construir los siguientes conjuntos jerárquicos:

$A_0 = \{v\}$ , que corresponde al primer término de la serie, es decir, al valor inicial.

$A_{1/2} = A_0 \cup \{(0), (1)\}$  que corresponde a los términos que contienen las integrales  $I_{(0)}, I_{(1)}$  ( este conjunto genera el truncamiento de Euler)

$A_1 = A_{1/2} \cup \{(1,1)\}$  que corresponde al truncamiento que de los términos que contienen las integrales  $I_{(0)}, I_{(1)}, I_{(1,1)}$  ( este conjunto genera el truncamiento de Milstein ).

$A_{3/2} = A_1 \cup \{(0,1), (1,0), (0,0), (1,1,1)\}$  (genera el truncamiento fuerte de Taylor de orden  $3/2$ ).

$A_2 = A_{3/2} \cup \{(0,1,1), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1,1)\}$  (genera el truncamiento fuerte de Itô - Taylor de orden 2, y así sucesivamente).

Supongamos una discretización  $(\tau)_\delta = \{\tau_0, \tau_1, \dots\}$  del intervalo con paso  $\delta$ , esto

es  $\forall i, \tau_{i+1} - \tau_i = \delta$ . Para  $\gamma = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$ , en el caso multidimensional  $d, m=1, 2, \dots$

definimos el esquema fuerte de Itô-Taylor de orden  $\gamma$  por la ecuación vectorial:

$$Y_{n+1} = \sum_{\alpha \in A_\gamma} f_\alpha(\tau_n, Y_n) I_\alpha \quad (25)$$

donde las integrales estocásticas que aparecen en la serie están definidas sobre el intervalo  $[\tau_n, \tau_{n+1}]$ .

Estos esquemas generan por recurrencia valores del proceso de Itô en los tiempos de discretización y, mediante fórmulas de interpolación deterministas, se consigue con ellos una visualización de las trayectorias.

### TEOREMA GENERAL DE CONVERGENCIA

Sea  $Y^\delta = \{Y^\delta(t) / t \in [0, T]\}$  una aproximación fuerte de Itô-Taylor de un orden

$\gamma = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$  correspondiente a una discretización  $(\tau)_\delta$  con  $\delta \in (0, 1)$ . Suponemos,

además, que las funciones coeficientes  $f_\alpha$  verifican:

a)  $\forall \alpha \in A_\gamma, t \in [0, T]$  y  $x, y \in \mathfrak{R}^d \Rightarrow |f_\alpha(t, x) - f_\alpha(t, y)| \leq k_1 |x - y|$

b)  $\forall \alpha \in A_\gamma \cup B(A_\gamma) \Rightarrow f_{-\alpha} \in C^{1,2}$  y  $f_\alpha \in H_\alpha$ .

c)  $\forall \alpha \in A_\gamma \cup B(A_\gamma), t \in [0, T], x \in \mathfrak{R}^d \Rightarrow |f_\alpha(t, x)| \leq k_2 (1 + |x|)$

Entonces, podemos afirmar que:

$$E\left(\text{Sup}_{0 \leq t \leq T} |X_t - Y^\delta(t)|^2\right) \leq k_3(1+|X_0|^2)\delta^{2\gamma} + k_4|X_0 - Y^\delta(0)|^2 \quad (26)$$

donde todas las constantes son independientes del paso de la discretización.

La demostración se obtiene expresando el desarrollo de Itô-Taylor:

$$X_\tau = \sum_{\alpha \in A_\gamma} I_\alpha[f_\alpha(\rho, X_\rho)]_{\rho, \tau} + \sum_{\alpha \in B(A_\gamma)} I_\alpha[f_\alpha(\cdot, X(\cdot))]_{\rho, \tau} \quad (27)$$

que, mediante el proceso de discretización, podemos escribir:

$$Z(t) = E\left(\text{Sup}_{0 \leq s \leq t} |X(s) - Y^\delta(s)|\right) \leq C_3 \left( |X(0) - Y^\delta(0)|^2 + \sum_{\alpha \in A_\gamma - \{v\}} R_t^\alpha + \sum_{\alpha \in B(A_\gamma)} U_t^\alpha \right)$$

donde el primer sumatorio está extendido al conjunto jerárquico y el segundo al residual.

Para el primero se deduce la siguiente cota:

$$R_t^\alpha \leq C_4 k_1^2 \int_0^t Z(u) du \quad (28)$$

y para el segundo:

$$U_t^\alpha \leq C_5(1+|X_0|^2)\delta^{\Phi(\alpha)} \quad \text{con} \quad \Phi(\alpha) = \begin{cases} 2(\lambda(\alpha) - 1) & \text{si } \lambda(\alpha) = n(\alpha) \\ \lambda(\alpha) + n(\alpha) - 1 & \text{si } \lambda(\alpha) \neq n(\alpha) \end{cases}$$

cuando  $\lambda(\alpha) \geq \gamma + 1$  en el primer caso y  $\lambda(\alpha) + n(\alpha) \geq 2\gamma + 1$  en el segundo.

podemos escribir, entonces:

$$U_t^\alpha \leq C_5(1+|X_0|^2)\delta^{2\gamma} \quad (29)$$

Finalmente, combinando las cotas anteriores y aplicando el lema de Gronwall, tenemos:

$$Z(T) = k_3(1+|X_0|^2)\delta^{2\gamma} + k_4|X_0 - Y^\delta(0)|^2$$

Se observa que la demostración se ha hecho con el cuadrado de la convergencia cuadrática. Para obtener una cota para la convergencia fuerte es necesario probar un corolario:

### COROLARIO

Si al teorema anterior añadimos las siguientes hipótesis:

$$d) E(|X_0|^2) < \infty$$

$$e) \sqrt{E(|X_0 - Y^\delta(0)|^2)} \leq k_5 \delta^\gamma$$

Entonces, por la desigualdad de Liapunov (ver página 5), se tiene que:

$$E\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t - Y^\delta(t)|\right) \leq \sqrt{E\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t - Y^\delta(t)|^2\right)} \leq k_6 \delta^\gamma$$

Este resultado nos va a indicar el tipo de truncamiento que debemos tratar para un  $\gamma$  dado, por ejemplo, si  $\gamma = 3/2$ , para que la convergencia de  $Y$  a  $X$  en sentido fuerte sea de ese orden, debemos tomar como conjunto jerárquico  $A_{3/2}$ , eligiéndose de la serie de Itô-Taylor sólo los términos que contienen las integrales cuyos subíndices están en dicho conjunto.

### 2.3 ESQUEMAS NUMÉRICOS PARA LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCÁSTICAS.

#### EL ESQUEMA DE EULER

Este esquema, llamado también de Euler-Maruyama, es el más sencillo y equivale al de una aproximación de Taylor de orden de convergencia fuerte  $\gamma = 1/2$ . En efecto, si en el teorema general de convergencia tomamos ese valor (1/2) y formamos el truncamiento correspondiente a  $A_{1/2}$ , es decir:

$$X_t = X_{t_0} + aI_{(0)} + bI_{(1)}$$

obtenemos, sustituyendo las integrales, la ecuación (30).

Para el caso unidimensional  $d=m=1$  (donde aparece sólo un proceso de Wiener) el esquema de Euler tiene la forma:

$$Y_{n+1} = Y_n + a\Delta + b\Delta W \quad (30)$$

donde  $\Delta = \tau_{n+1} - \tau_n = I_{(0)}$  en el subintervalo de discretización  $[\tau_n, \tau_{n+1}]$ , y  $\Delta W = W_{\tau_{n+1}} - W_{\tau_n} = I_{(1)}$  es el incremento del proceso de Wiener  $W(t)$ , que se obtiene mediante la distribución normal  $N(0, \Delta)$ .

En el caso multidimensional con ruido escalar,  $d=1,2,\dots$  y  $m=1$ , la componente  $k$ -ésima del esquema de Euler viene dada por:

$$Y_{n+1}^k = Y_n^k + a^k \Delta + b^k \Delta W \quad (31)$$

para  $k=1,2,\dots,d$  y donde los coeficientes de deriva y difusión  $a^k, b^k$  son vectores  $d$ -dimensionales  $a = (a^1, a^2, \dots, a^d)$  y  $b = (b^1, b^2, \dots, b^d)$ . Notemos que las diferentes componentes de la aproximación discreta  $Y$  son  $d$ -uplas que representan los coeficientes de deriva y difusión continuas en las diferentes ecuaciones diferenciales estocásticas. Como ejemplo, en el caso bidimensional tenemos:

$$\begin{pmatrix} Y_{n+1}^1 \\ Y_{n+1}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_n^1 \\ Y_n^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^1(t_n, Y_n^1, Y_n^2) \\ a^2(t_n, Y_n^1, Y_n^2) \end{pmatrix} \Delta + \begin{pmatrix} b^1(t_n, Y_n^1, Y_n^2) \\ b^2(t_n, Y_n^1, Y_n^2) \end{pmatrix} \Delta W \quad (32)$$

Para el caso general multidimensional con  $d, m=1,2,3,\dots$  la  $k$ -ésima componente del esquema de Euler tiene la forma:

$$Y_{n+1}^k = Y_n^k + a^k \Delta + \sum_{j=1}^m b^{k,j} \Delta W^j \quad (33)$$

siendo:

$$\Delta W^j = W_{\tau_{n+1}}^j - W_{\tau_n}^j = I_{(j)} \quad (34)$$

que es el incremento de la distribución  $N(0, \Delta)$  de la  $j$ -ésima componente del proceso  $m$ -dimensional de Wiener  $W$  sobre  $[\tau_n, \tau_{n+1}]$ , y  $\Delta W^{j_1}, \Delta W^{j_2}$  son independientes para  $j_1 \neq j_2$ . El coeficiente  $b = (b^{k,j})$  es una matriz de orden  $d \times m$ . Como ejemplo veamos el caso bidimensional:

$$\begin{pmatrix} Y_{n+1}^1 \\ Y_{n+1}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_n^1 \\ Y_n^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix} \Delta + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta W_1 \\ \Delta W_2 \end{pmatrix} \quad (35)$$

En el teorema siguiente, veremos de forma particular, asumiendo las condiciones de la acotación lineal y de Lipschitz de los coeficientes  $a$  y  $b$ , que la aproximación de Euler tiene el orden de convergencia fuerte  $\gamma = 0,5$ , como sugiere el teorema general de convergencia fuerte.

Generalmente, el esquema de Euler da buenos resultados numéricos cuando los coeficientes  $a^k, b^k$  son casi constantes. En otros casos los resultados no son particularmente satisfactorios y se recomienda el uso de otros esquemas con orden de aproximación más alto (ver Platen, 1992).

### TEOREMA (sobre el orden del método de Euler)

Supongamos que:

$$E(|X_0|^2) < \infty$$

$$E(|X_0 - Y_0^\delta|)^2 \leq K_1 \delta^2$$

$$|a(t, x) - a(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq K_2 |x - y|$$

$$|a(t, x)| + |b(t, x)| \leq K_3 (1 + |x|)$$

$$|a(s, x) - a(t, x)| + |b(s, x) - b(t, x)| \leq K_4 (1 + |x|) |s - t|^{1/2}$$

$\forall s, t \in [0, T]$  y  $x, y \in \mathbb{R}^d$ , donde las constantes  $K_1, K_2, K_3, K_4$  no dependen de  $\delta$ .

Entonces, para una aproximación de Euler  $Y^\delta$ , se verifica:

$$E(|X_T - Y^\delta(T)|) \leq K_5 \delta^{1/2} \quad (36)$$

se observa en la tesis que el error se ha calculado globalmente.

Se demuestra el teorema verificando la desigualdad:

$$E(|X_T - Y(T)|^2) \leq k\delta$$

y teniendo en cuenta la desigualdad de Liapunov, obtenemos:

$$E(|X_T - Y(T)|) \leq k_1 \delta^{1/2}$$

La demostración del teorema es similar a la anterior, de la convergencia general en sentido fuerte.

En la práctica la representación de los procesos continuos se hace mediante las aproximaciones discretas en el tiempo. Para obtener esta aproximación consideramos el proceso de Itô  $X = \{X_t / t_0 \leq t \leq T\}$  que satisface la ecuación diferencial estocástica escalar:

$$\begin{aligned} dX_t &= a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t \\ X(t_0) &= X_0 \end{aligned} \quad (37)$$

Para una discretización dada  $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n < \dots < \tau_N = T$  una aproximación de Euler es un proceso estocástico continuo en el tiempo  $Y = \{Y(t) / t_0 \leq t \leq T\}$  que satisface el esquema iterativo:

$$Y_{n+1} = Y_n + a(\tau_n, Y_n)(\tau_{n+1} - \tau_n) + b(\tau_n, Y_n)(W_{\tau_{n+1}} - W_{\tau_n})$$

para  $n=0,1,2,\dots,N-1$ , con valor inicial  $Y_0 = X_0$  e  $Y_n = Y(\tau_n)$ . También escribiremos  $\Delta_n = \tau_{n+1} - \tau_n$  para el enésimo incremento del tiempo y llamaremos  $\delta = \max(\Delta_n)$  el máximo paso de tiempo. Normalmente elegiremos discretizaciones de tiempo equidistantes,  $\tau_n = t_0 + n\delta$  donde  $\delta = \Delta_n = \Delta = \frac{T-t_0}{N}$  para algún  $N$  lo suficientemente grande tal que  $\delta \in (0,1)$ .

La única diferencia con el caso determinista consiste en que ahora necesitamos generar los incrementos aleatorios  $\Delta W_n$  para  $n=0,1,\dots,N-1$  de un proceso de Wiener  $W = \{W_t / t \geq 0\}$  que, como se sabe son variables aleatorias independientes obtenidas a partir de una distribución gaussiana de media:

$$E(W_n) = 0$$

y varianza:

$$E((W_n)^2) = \Delta_n$$

donde la desviación típica es la raíz cuadrada del paso.

Para una discretización del tiempo dada, el esquema de Euler determina valores por el proceso de aproximación sólo en los tiempos de discretización. Para representar las trayectorias del proceso es preciso aplicar un método de interpolación determinista, siendo el más usado la interpolación lineal:

$$Y(t) = Y_{n_t} + \frac{Y_{n_t+1} - Y_{n_t}}{\tau_{n_t+1} - \tau_{n_t}} (t - \tau_{n_t})$$

### EL ESQUEMA DE MILSTEIN

El esquema propuesto por Milstein es precisamente el esquema fuerte de Taylor-Itô de orden  $\gamma = 1$

Tomando el conjunto jerárquico  $A_1 = A_{1/2} \cup \{(1,1)\}$ , o bien desarrollado  $A_1 = \{v, (0), (1), (1,1)\}$ , elegimos del desarrollo en serie los términos siguientes:

$$X_t = X_{t_0} + aI_{(0)} + bI_{(1)} + bb'I_{(1,1)}$$

siendo la última integral de la forma:

$$I_{(1,1)} = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s dW_u^1 dW_s^1$$

y aplicando los polinomios formales de Hermite, tenemos:

$$I_{(1,1),t} = \frac{1}{2!} \left( I_{(1),t}^2 - t \right) \quad (38)$$

obteniéndose el esquema de Milstein:

$$Y_{n+1} = Y_n + a\Delta + b\Delta W + \frac{1}{2} bb' \left\{ (\Delta W)^2 - \Delta \right\} \quad (39)$$

en el caso multidimensional con  $m=1$  (contiene sólo un proceso de Wiener) y  $d=1,2,3,\dots$ , la  $k$ -ésima componente es:

$$Y_{n+1}^k = Y_n^k + a^k \Delta + b^k \Delta W + \frac{1}{2} \left( \sum_{p=1}^d b^p \frac{\partial b^k}{\partial x^p} \right) \left\{ (\Delta W)^2 - \Delta \right\} \quad (40)$$

estableciéndose para el caso bidimensional la siguiente expresión:

$$\begin{pmatrix} Y_{n+1}^1 \\ Y_{n+1}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_n^1 \\ Y_n^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \Delta + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Delta W + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} b_1 \frac{\partial b_1}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial b_1}{\partial x_2} \\ b_1 \frac{\partial b_2}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial b_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \{(\Delta W)^2 - \Delta\} \quad (41)$$

b) En el caso de un proceso de Wiener multidimensional, la  $k$ -ésima componente tiene la forma siguiente:

$$Y_{n+1}^k = Y_n^k + a_k \Delta + \sum_{j=1}^m b_{k,j} \Delta W_j + \sum_{j_1, j_2} L^{j_1} b_{k, j_2} I_{(j_1, j_2)} \quad (42)$$

Observamos que en caso de ruido aditivo el esquema de Milstein se transforma en uno de Euler.

Una modificación del esquema de Milstein consiste en buscar una aproximación para el término  $b \frac{\partial b}{\partial x}$ , y que es la siguiente:

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \{b(\tau_n, \Psi_n) - b(\tau_n, Y_n)\}$$

siendo  $\Delta$  el incremento del paso y  $\Psi_n = Y_n + a\Delta + b\sqrt{\Delta}$ . Esta afirmación se puede demostrar de la siguiente forma:

$$b(t_n, Y_n + a\Delta + b\sqrt{\Delta}) - b(t_n, Y_n) = b'(a\Delta + b\sqrt{\Delta}) = b'a\Delta + b'b\sqrt{\Delta}$$

y dividiendo por  $\sqrt{\Delta}$ , obtenemos:

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \{b(\tau_n, \Psi_n) - b(\tau_n, Y_n)\} = b'a\sqrt{\Delta} + b'b \approx b'b$$

el esquema de Milstein queda, sin derivadas, de la forma:

$$Y_{n+1} = Y_n + a\Delta + b\Delta W + \frac{1}{2\sqrt{\Delta}} \{b(\tau_n, \Psi_n) - b(\tau_n, Y_n)\} \{(\Delta W)^2 - \Delta\}$$

con  $\Psi_n = Y_n + a\Delta + b\sqrt{\Delta}$  (43)

En el caso multidimensional para  $m=1$  ( es decir para ruido escalar) y  $d=1,2,\dots,k$  la  $k$ -ésima componente del esquema de Milstein tiene la forma:

$$Y_{n+1}^k = Y_n^k + a^k \Delta + b^k \Delta W + \frac{1}{2\sqrt{\Delta}} \{b^k(\Psi_n) - b^k(Y_n)\} \{(\Delta W)^2 - \Delta\}.$$

y para el caso bidimensional, tenemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} Y_{n+1}^1 \\ Y_{n+1}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_n^1 \\ Y_n^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix} \Delta + \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix} \Delta W + \frac{1}{2\sqrt{\Delta}} \begin{pmatrix} b^1(\Psi_n) - b^1(Y_n) \\ b^2(\Psi_n) - b^2(Y_n) \end{pmatrix} \{(\Delta W)^2 - \Delta\} \quad (44)$$

donde  $\bar{a} = (a^1, a^2)$  y  $\bar{b} = (b^1, b^2)$ .

si queremos compararlo con esquemas deterministas, podemos indicar que este método podría ser el equivalente al de Heun, aunque el parecido no concuerde con una extensión formal al campo estocástico de dicho método que, como se sabe, tiene la forma:

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{1}{2} \{a(\Psi_n) + a(Y_n)\} \Delta_n + \frac{1}{2} \{b(\Psi_n) + b(Y_n)\} \Delta W_n$$

con  $\Psi_n = Y_n + a(Y_n) \Delta_n + b(Y_n) \Delta W_n$

sin embargo, se puede demostrar analítica y heurísticamente que este esquema no es consistente según el criterio de convergencia fuerte y por tanto no es convergente. En efecto, la condición necesaria y suficiente para que un esquema numérico estocástico sea consistente en sentido fuerte es que se verifiquen las condiciones siguientes (ver Platen, 1992):

$$a) \ E \left( \left| E \left( \frac{Y_{n+1}^\delta - Y_n^\delta}{\Delta_n} \right) - a(Y_n^\delta) \right|^2 \right) = c(\delta)$$

$$b) \ E \left( \frac{1}{\Delta_n} \left| Y_{n+1}^\delta - Y_n^\delta - E(Y_{n+1}^\delta - Y_n^\delta) - b(Y_n^\delta) \Delta_n \right|^2 \right) = c_1(\delta)$$

donde las funciones  $c(\delta)$  y  $c_1(\delta)$  tienden a cero cuando el paso  $\delta \rightarrow 0$ .

En el caso del esquema numérico de Heun extendido formalmente al caso estocástico, se demuestra fácilmente que ambas funciones toman los valores:

$$c(\delta) = \left( \frac{1}{2} b'(Y_n) \cdot b(Y_n) \right)^2 + o(\Delta_n) \quad \text{y} \quad c_1(\delta) = o(\Delta_n)$$

y para que tiendan a cero con el paso  $\Delta_n$ , se tiene que cumplir que  $b(t,x)$  sea una función constante. En otros casos el método extendido de Heun no es eficaz para resolver ecuaciones diferenciales estocásticas.

De lo expuesto anteriormente se deduce que no podemos generalizar formalmente los esquemas deterministas al campo aleatorio. El camino a seguir es aplicar el teorema de la convergencia fuerte y obtener así los esquemas según el orden requerido y seleccionando el conjunto jerárquico correspondiente para extraer el truncamiento que determina el teorema. Posteriormente se eliminan las derivadas para deducir definitivamente los métodos numéricos que aplicaremos en la práctica.

### EL ESQUEMA FUERTE DE TAYLOR-ITÔ DE ORDEN $\gamma = 3/2$

Para este orden construimos el conjunto jerárquico según el teorema de la convergencia fuerte:

$$A_\gamma = \{v, (0), (1), (1,1), (0,1), (1,0), (0,0), (1,1,1)\}$$

y el truncamiento correspondiente en el caso de la ecuación autónoma con  $d=m=1$ , es:

$$X_t = X_{t_0} + aI_{(0)} + bI_{(1)} + \left( aa' + \frac{1}{2} b^2 a'' \right) I_{(0,0)} + \left( ab' + \frac{1}{2} b^2 b'' \right) I_{(0,1)} + \\ + a'bI_{(1,0)} + bb'I_{(1,1)} + b[(b')^2 + bb'']I_{(1,1,1)}$$

Por fórmulas anteriores podemos calcular las integrales múltiples que aparecen en dicho truncamiento:

$$I_{(0)} = \Delta, \quad I_{(1)} = \Delta W, \quad I_{(0,0)} = \frac{1}{2} \Delta^2, \quad I_{(1,0)} = \Delta Z = \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \int_{\tau_n}^{s_2} dW_s ds_2$$

$$I_{(0,1)} = I_{(0)}I_{(1)} - I_{(1,0)} = \Delta(\Delta W) - \Delta Z, \quad I_{(1,1,1)} = \frac{1}{3!} [I_{(1)}^3 - 3\Delta I_{(1)}]$$

sustituyendo estas integrales en el desarrollo anterior, tenemos la siguiente discretización:

$$\begin{aligned}
Y_{n+1} = & Y_n + a\Delta + b\Delta W + \frac{1}{2}bb'\{(\Delta W)^2 - \Delta\} + a'bI_{(1,0)} + \frac{1}{2}\left(aa' + \frac{1}{2}b^2a''\right)\Delta^2 + \\
& + \left(ab' + \frac{1}{2}b^2b''\right)\{(\Delta W)\Delta - I_{(1,0)}\} + \frac{1}{2}b(bb'' + (b')^2)\left\{\frac{1}{3}(\Delta W)^2 - \Delta\right\}\Delta W. \quad (45)
\end{aligned}$$

Podemos conocer la variable aleatoria  $\Delta Z$ , ya que está normalmente distribuida con los siguientes valores ( que han sido hallados, como aplicación, en el apartado de los momentos de las integrales múltiples del apéndice A):

$$E(I_{(1,0)}) = \int E(W)ds = 0$$

$$E(I_{(1,0)}^2) = E\left(\left[\Delta I_{(1)} - I_{(0,1)}\right]^2\right) = \Delta^2 E(I_{(1)}^2) - 2\Delta E(I_{(1)}I_{(0,1)}) + E(I_{(0,1)}^2) = \frac{1}{3}\Delta^3$$

ya que:

$$E(I_{(0,1)}^2) = E\left(\int sdW, \int sdW\right) = \int s^2 ds = \frac{1}{3}\Delta^3$$

$$E(I_{(1)}I_{(0,1)}) = E\left(\int dW, \int sdW\right) = \int s ds = \frac{1}{2}\Delta^2$$

## ESQUEMAS DE RUNGE KUTTA PARA ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCÁSTICAS

Los esquemas llamados de Runge-Kutta que tratamos seguidamente evitan el uso de las derivadas. Se obtienen a partir de los esquemas fuertes de Itô-Taylor, sustituyendo las derivadas por las diferencias finitas y los llamaremos esquemas fuertes explícitos de Runge-Kutta, advirtiéndose que no son simples adaptaciones heurísticas de las EDO a las EDEs.

Siguiendo un paralelismo con el análisis de los métodos de Runge-Kutta en el campo determinista, podríamos empezar por el orden más bajo que es el método de Euler de orden  $\gamma = 1/2$ . seguido del esquema de Milstein de orden  $\gamma = 1$  que ya hemos tratado en el apartado anterior. Estos esquemas corresponden, en el campo determinista

al método de Euler de orden uno y, como hemos dicho anteriormente, al método de Heun de orden dos. Veamos, ahora, el correspondiente esquema de R-K de orden 3/2.

### EL ESQUEMA FUERTE DE RUNGE-KUTTA DE ORDEN 3/2.

Como hemos hecho anteriormente, podemos obtener esquemas fuertes de orden 3/2 por sustitución de las correspondientes derivadas por sus diferencias finitas en el esquema fuerte de Itô-Taylor de orden 3/2.

En el caso autónomo unidimensional  $d=m=1$  el esquema resultante tiene la forma:

$$\begin{aligned}
 Y_{n+1} = & Y_n + b\Delta W + \frac{1}{2\sqrt{\Delta}} \{a(\Psi_+) - a(\Psi_-)\} \Delta Z + \frac{1}{4} \{a(\Psi_+) + 2a + a(\Psi_-)\} \Delta + \\
 & + \frac{1}{4\sqrt{\Delta}} \{b(\Psi_+) - b(\Psi_-)\} \{(\Delta W)^2 - \Delta\} + \frac{1}{2\Delta} \{b(\Psi_+) + b(\Psi_-) - 2b\} \{(\Delta W)\Delta - \Delta Z\} + \\
 & + \frac{1}{4\Delta} \{b(\Phi_+) - b(\Phi_-) - b(\Psi_+) + b(\Psi_-)\} \left\{ \frac{1}{3} (\Delta W)^2 - \Delta \right\} \Delta W \quad (46)
 \end{aligned}$$

$$\text{siendo } \Psi_{\pm} = Y_n + a\Delta \pm b\sqrt{\Delta} \quad \text{y} \quad \Phi_{\pm} = \Psi_{\pm} \pm b(\Psi_{\pm})\sqrt{\Delta}$$

Para obtener la expresión anterior hemos sustituido las derivadas por las siguientes aproximaciones:

$$a' \approx \frac{a(x_{n+1}) - a(x_n)}{x_{n+1} - x_n} \quad \text{y} \quad a'' \approx \frac{a(x_{n+1}) + a(x_{n-1}) - 2a(x_n)}{(x_{n+1} - x_n)^2}$$

$$\text{donde } \Psi_n = x_{n+1} = x_n + a\Delta + b\sqrt{\Delta}.$$

$$bb' \approx \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \{b(\Psi_n) - b(Y_n)\} ; \quad a'b \approx \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \{a(\Psi_n) - a(Y_n)\}.$$

$$aa' \approx \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \{a(\Psi_n) - a(Y_n)\} ; \quad b^2 a'' \approx \frac{1}{\Delta} \{a(\Psi_n) + a(\Psi_{n-1}) - 2a(Y_n)\}.$$

$$ab' \approx \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \frac{a}{b} \{b(\Psi_n) - b(Y_n)\} ; \quad b^2 b'' \approx \frac{1}{\Delta} \{b(\Psi_n) + b(\Psi_{n-1}) - 2b(Y_n)\}$$

$$bb'' \approx \frac{1}{b\Delta} \{b(\Psi_n) + b(\Psi_{n-1}) - 2b(Y_n)\} ; \quad (b')^2 \approx \frac{1}{b^2 \Delta} \{b^2(\Psi_n) - 2b(\Psi_n)b(Y_n) + b^2(Y_n)\}$$

En este esquema observamos que la función de deriva se evalúa en tres puntos, mientras que la función difusión se hace en cuatro puntos.

En el caso de que el coeficiente de difusión  $b(t,x)$  sea nulo, la expresión anterior se reduce a uno de los esquemas determinista de Runge-Kutta de tercer orden.

En el caso bidimensional, para un proceso con ruido escalar ( $m=1$ ), la expresión toma la forma:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} Y_{n+1}^1 \\ Y_{n+1}^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Y_n^1 \\ Y_n^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1(Y_n^1, Y_n^2) \\ b^2(Y_n^1, Y_n^2) \end{pmatrix} \Delta W + \frac{1}{2\sqrt{\Delta}} \begin{pmatrix} a^1(\Psi_+, \Psi_+) - a^1(\Psi_-, \Psi_-) \\ a^2(\Psi_+, \Psi_+) - a^2(\Psi_-, \Psi_-) \end{pmatrix} \Delta Z + \\
&+ \frac{1}{4} \begin{pmatrix} a^1(\Psi_+, \Psi_+) + 2a^1(Y_n^1, Y_n^2) + a^1(\Psi_-, \Psi_-) \\ a^2(\Psi_+, \Psi_+) + 2a^2(Y_n^1, Y_n^2) + a^2(\Psi_-, \Psi_-) \end{pmatrix} \Delta + \frac{1}{4\sqrt{\Delta}} \begin{pmatrix} b^1(\Psi_+) - b^1(\Psi_-) \\ b^2(\Psi_+) - b^2(\Psi_-) \end{pmatrix} \{(\Delta W)^2 - \Delta\} + \\
&+ \frac{1}{2\sqrt{\Delta}} \begin{pmatrix} b^1(\Psi_+, \Psi_+) - 2b^1(Y_n^1, Y_n^2) + b^1(\Psi_-, \Psi_-) \\ b^2(\Psi_+, \Psi_+) - 2b^2(Y_n^1, Y_n^2) + b^2(\Psi_-, \Psi_-) \end{pmatrix} \{(\Delta W)\Delta - \Delta Z\} + \\
&+ \frac{1}{4\Delta} \begin{pmatrix} b^1(\Phi_+, \Phi_+) - b^1(\Phi_-, \Phi_-) - b^1(\Psi_+, \Psi_+) + b^1(\Psi_-, \Psi_-) \\ b^2(\Phi_+, \Phi_+) - b^2(\Phi_-, \Phi_-) - b^2(\Psi_+, \Psi_+) + b^2(\Psi_-, \Psi_-) \end{pmatrix} \left\{ \frac{1}{3}(\Delta W)^2 - \Delta \right\} \Delta W.
\end{aligned} \tag{47}$$

donde:

$$\begin{pmatrix} \Psi_{\pm}^1 \\ \Psi_{\pm}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_n^1 \\ Y_n^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^1(t_n, Y_n^1, Y_n^2) \\ a^2(t_n, Y_n^1, Y_n^2) \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b^1(t_n, Y_n^1, Y_n^2) \\ b^2(t_n, Y_n^1, Y_n^2) \end{pmatrix} \Delta W_n$$

$$\begin{pmatrix} \Phi_{\pm}^1 \\ \Phi_{\pm}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_+^1 \\ \Psi_+^2 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b^1(\Psi_+, \Psi_+) \\ b^2(\Psi_+, \Psi_+) \end{pmatrix} \sqrt{\Delta}$$

Se observa que, en el caso de ruido aditivo, los tres últimos términos de la fórmula (47) se anulan.

## CAPÍTULO III

### ESTUDIO DE ALGUNAS ESTRUCTURAS GEOMORFOLÓGICAS

#### 3.1 ESTRUCTURAS SEDIMENTARIAS

Analizaremos, únicamente, las *estructuras sedimentarias primarias* entendiendo por *primarias* las que se originan en el momento de la deposición y son consecuencia directa de un fenómeno climatológico.

Las estructuras primarias comprenden todo lo relacionado con la estratificación, especialmente la forma externa del estrato, su continuidad y uniformidad, los hieroglifos o marcas que determinan en los planos interfaciales o de estratificación.

Las estructuras sedimentarias, por ser el resultado de procesos naturales, son comunes en cualquier parte de mundo, por ello, la comunidad científica internacional trata de unificar las investigaciones de estos fenómenos. Los geólogos han descrito y analizado estas estructuras geomorfológicas y los matemáticos intentan buscar modelos que reproduzcan, lo más fielmente posible, y mediante simulaciones por ordenador, estas estructuras.

En este trabajo excluirémos las *estructuras secundarias* que consisten básicamente en el resultado originado por los movimientos tectónicos, por la acción del congelamiento y por procesos de carácter biológicos.

#### **CLASIFICACIÓN DE LAS ESTRUCTURAS SEDIMENTARIAS PRIMARIAS.**

Por la dificultad que encierra la comprensión de estos fenómenos, no existe una clasificación exacta que comprenda todas las estructuras sedimentarias. Hay sin embargo- en la literatura de esta disciplina- diversas clasificaciones particulares que responden a grupos de investigadores. Sobre la estratificación primaria aparecen clasificaciones personales de los autores Andrée (1915), Bruns (1954), Botvinkina (1960), donde tienen en cuenta la forma externa, la interna y el tiempo de secuencia de la estructura. Otras clasificaciones parciales vinculadas a los hieroglifos figuran en los trabajos de Gráf (1932) y Vassoevich (1953). Se han publicado también clasificaciones

sobre las *óndulas y estratificación entrecruzada* que tratan sobre los sedimentos granulares de tipo arenoso.

Aunque no es nuestro propósito analizar las clasificaciones conocidas sobre las estructuras sedimentarias, relataremos lo más importantes con el fin de ubicar el tipo de estructura sedimentaria primaria que trataremos desde el punto de vista matemático.

Clasificamos las estructuras sedimentarias en cuatro grupos según los aspectos que se citan:

- 1) Formas externas de la estratificación.
- 2) Ordenamiento interno y estructura de la estratificación.
- 3) Marcas e irregularidades en los planos de estratificación.
- 4) Deformaciones y perturbaciones de la estratificación.

Aunque se sabe en la actualidad que no todas las estructuras sedimentarias están comprendidas en esta clasificación, seguiremos la establecida por F.J. Pettijohn (1964) por ser la más completa.

Analizaremos de forma sucinta los cuatro apartados que generan la clasificación aludida.

1) La unidad básica es un estrato o unidad sedimentaria y se define como el espesor de sedimentos depositados en condiciones físicas constantes, es decir, en fluctuaciones de período corto. Las propiedades fundamentales de una unidad sedimentaria son:

- a) Espesor.
- b) Dimensiones laterales.
- c) Estructura interna.

Con respecto al espesor, se considera la estratificación según Payne (1942), en estratificación muy fina (1 a 5 cm.), fina (de 5 a 60 cm.), gruesa (de 60 a 120 cm.) y muy gruesa (mayor de 120 cm.). Actualmente, debido a la imposibilidad de que se conserven medidas uniformes se considera que la mejor clasificación sobre la espesura es la dada por el *espesor medio* acompañada de la *desviación standar* o del *coeficiente de variación*.

Además del espesor, un estrato está caracterizado por sus variaciones en sentido lateral, aunque su clasificación es aún más difícil que en el caso anterior.

Existe una clasificación según la forma externa de la estructura sedimentaria:

Clase A:

- Estratos de espesores constantes o aproximadamente constantes.
- Estratos de espesores laterales uniformes.
- Estratos continuos.

Clase B:

- Estratos de espesores desiguales.
- Estratos de espesores lateralmente uniformes.
- Estratos continuos.

Clase C:

- Estratos de espesores desiguales.
- Estratos de espesores lateralmente variables.
- Estratos continuos.

Clase D:

- Estratos de espesores desiguales.
- Estratos de espesores lateralmente variables.
- Estratos discontinuos.

**2) El ordenamiento interno de un estrato es tan importante como su forma externa.**

Entre los principales tipos de este grupo figuran:

Clase A: Masiva (en el sentido de maciza)

Clase B: Laminada

- Laminación horizontal.
- Laminación entrecruzada.

Clase C: Granada.

Clase D: Imbricada (gravas)

Clase E: Estructuras de crecimiento (calizas)

Un estrato se llama *masivo* si no tiene estructura interna. En recientes trabajos, y empleando técnicas como los rayos X, se ha comprobado que algunos estratos masivos están formado por estructuras laminares.

Los estratos que presentan *laminación* reflejan las fluctuaciones de las condiciones físicas reinantes durante su deposición. La laminación es principalmente paralela entre sí con relación a los planos que la limitan. En estratos de tipo arenoso la laminación aparece inclinada con respecto a las superficies limitantes de los estratos; esta distribución suele denominarse *estratificación entrecruzada*. Se produce este tipo de estrato a pequeñas y grandes escalas.

Otra característica de ciertos sedimentos es la *gradación* que consiste en una variación regular de la textura. Estos sedimentos tienen lugar en gravas, arenas y limos, siendo muy común en las llamadas turbiditas arenosas. Aunque la *estratificación gradada* y la *entrecruzada* se forman separadamente, existen estratos en los que ambas aparecen juntas, de tal forma que la gradada se observa en la parte inferior y la entrecruzada en la superior.

**3)** Muchos planos de *estratificación* muestran una gran variedad de estructuras que pueden clasificarse de acuerdo a su ubicación en la base, techo o interior del estrato. Podemos hacer la siguiente clasificación:

Clase A: En la base del estrato.

- Estructuras de carga.
- Estructuras de corriente (marcas labradas).
- Marcas producidas por organismos.

Clase B: Dentro del estrato ( lineación por corriente)

Clase C: En el techo del estrato.

- Ondulas u ondulitas
- Marcas de erosión ( marcas de escurrimiento, calco en herradura)\*
- Hoyos y pequeñas marcas (hoyos de burbujéo, marcas de lluvia, etc.)
- Grietas de desecación ( de hielo, de sal etc.)

- Marcas producidas por organismos (rastros, pisadas, etc.)

Las *marcas de base* se encuentran en las areniscas y calizas originándose por la resistencia a la compresión por parte de los sedimentos, por la acción de las corrientes sobre la superficie de los sedimentos y por la actividad biológica.

Las *estructuras de carga* se forman como resultado del asentamiento de arenas y se presentan en varias escalas de tamaño. Normalmente estas estructuras aparecen como irregularidades bulbosas en la base del estrato pero el perfil es claramente sinusoidal, reciben también el nombre de *estructuras flamiformes*.

Las marcas originadas por corrientes se dividen a su vez en dos grupos: las debidas a la corriente, y las formadas por los cuerpos transportados. Las primeras se denominan *marcas de desbastes* (a este grupo pertenecen los *turboglifos* que se encuentran en la base de ciertas areniscas y calizas siendo sus dimensiones variables). Por otra parte, las del segundo tipo o *marcas labradas* se presentan de forma muy variada debido a los múltiples cuerpos que las producen por el contacto directo sobre el sedimento sobre el cual se desplazan. Incluyen las *estriaciones y surcos* y son marcas análogas a las producidas por fragmentos incluidos en un glaciar en movimiento.

Una estructura diferente es la denominada *calco de deslizamiento* formada por deslizamientos de masas compuestas por restos de plantas, fango o materiales semejantes. Aparecen como estriaciones múltiples y paralelas originadas al mismo tiempo por un cuerpo en conjunto y no por movimiento individual de partículas.

Ciertas areniscas se hienden fácilmente a lo largo de planos de estratificación. En tales planos suelen aparecer estructuras llamadas *lineación por corrientes* debidas a discontinuidades en la deposición orientada del material granular y también la estructura de *costillas y surcos* (Stokes , 1953) que refleja el aspecto en planta de la *laminación entrecruzada*.

En las superficies superiores de los estratos se encuentra una gran variedad de estructuras, entre ellas diversos diseños de ondulaciones pequeñas y grandes. Los primeros incluyen las de *oscilación*, de *interferencia* y las *linguoides* ( menos regulares)

originados por corrientes. De mayor tamaño son las ondulaciones gigantes de ambientes fluviales y marinos como las ondas de arena de corta duración y cuyo único rasgo conservado es la estratificación entrecruzada (en perfil).

Deben citarse también, entre las estructuras de superficie, los *cuspiditos* de existencia efímera. Las *marcas de escurrimiento* o *Rill-Marks* que aparecen cuando baja la marea en las playas y cuya duración es la de una carrera de marea aproximadamente. Las *marcas y calcos de herradura* así como las *marcas de resaca* son otras formas de estructuras sedimentarias que aparecen en las playas cuando baja la marea.

Entre las estructuras sedimentarias de corta duración analizaremos las marcas de escurrimiento llamadas Rill-Marks desde el punto de vista matemático, tras plantear un modelo físico simple.

4) Los sedimentos suelen mostrar diversas estructuras atribuibles a la deformación debida a los procesos tectónicos tales como asentamiento, gravedad y deslizamiento. Las estructuras de deformación pueden agruparse en las siguientes clases:

Clase A: Estructuras de carga

Clase B: Estratificación intraplegada.

Clase C: Estructuras de deslizamiento ( pliegues, fallas y brechas).

Clase D: Estructuras de inyección (diques sedimentarios, filones y capas)

Clase E. Estructuras por actividad biológica.

Las deformaciones pueden ser originadas por desplazamientos verticales o laterales. En la primera categoría figura la estructura *almohadillada* que tiene lugar tanto en arenas finas como en depósitos calcáreos. Una estructura de origen incierto es la *estratificación intraplegada* que se desarrolla en ciertas capas limosas o arenosas finas, en forma de pliegues sin fallas y limitada a un sólo estrato.

Bajo ciertas condiciones las arenas y limos saturados de agua adquieren un estado por el cual se comportan como fluidos no newtonianos, que penetran en sedimentos adyacentes. Las estructuras originadas por estos desplazamientos constituyen los *diques clásticos*, *filones capas* y *volcanes de arena*. Los diques clásticos pueden ser de paredes

regulares y tabulares, o bien, pueden presentarse con formas muy irregulares. Los volcanes de arena componen un tipo de estructura relativamente rara que ha sido descrita como formas superpuestas a mantos deslizados.

Como se puede observar, la clasificación de las estructuras sedimentarias es un proceso en constante revisión por la dificultad que ofrece el estudio de la naturaleza, que está en continua evolución.

Desde el punto de vista matemático, existen algunos modelos que rigen los fenómenos sedimentarios. Mencionamos, sin profundizar, algunos de ellos con el fin de adentrarnos en el modelo que motiva la realización de este trabajo.

### **3.2 LAS ESTRUCTURAS DE ESCURRIMIENTO: LOS RILL-MARKS**

Los rill marks son bifurcaciones dendríticas talladas en la superficie por el efecto de la erosión. Los rill-marks están formados por un flujo de estrechas capas de agua sobre sedimentos en la superficie que tiene lugar en las playas cuando baja el nivel del agua.

#### **CLASIFICACIÓN DE LOS RILL-MARKS.**

Los rill-marks pueden tomar diversas formas que se producen principalmente por la morfología local del terreno, por la pendiente de la superficie y por el tamaño de los granos de arena (Cepek y Reineck, (1970)). Se forman sobre superficies con distinta inclinación, incluso con pendientes pequeñas de sólo 2° .

Desde principio de siglo, varios autores han estudiado las estructuras sedimentarias primarias efímeras y han dado diversos tipos de clasificaciones (Rijchter,(1935)), Shiroch (1948), Hatai (1960). Recientemente, los geólogos Cêjek y Reineck (1979) han elaborado una clasificación de los rill-marks basada principalmente en su morfología. Se clasifican en:

- 1) *Tooth-Shaped rill-marks*.- Son estructuras en forma de diente y se desarrollan de forma escalonada, separados y de dimensiones casi uniformes.
- 2) *Comb-Shaped rill-marks*.- Tienen una forma semejante a un peine y se desarrollan en delgados cantos escalonados. Aquí, cada diente puede tomar otras dimensiones, incluso

hasta 45 cm. mayor. Ocasionalmente se encuentran bifurcados. Se encuentran entre dos riachuelos en forma de lengua con dimensiones de unos 6 cm. de ancho y 2 de profundidad.

3) *Fringy rill-marks*.- Tienen forma de franja y se ubican en espacios cerrados y estrechos, mostrando riachuelos en bifurcación dando un carácter de franjas finas. Sus proporciones son de 1 a 3 cms. de ancho, 4 de largo y de 1 a 6 de profundidad.

4) *Conical rill-marks*.- Aparecen en forma de depresiones cónicas cuya pared son esculpidas por finos riachuelos que producen la forma de cono. Los conos pueden ser de hasta 20 cms.

5) *Branching rill-marks*.- Están formados por pequeños sistemas de riachuelos que se juntan para formar un canal de deposición más ancho. Se observa que adquieren una forma dendrítica. La bifurcación se produce en sentido contrario a la corriente de los riachuelos.

6) *Meandering rill-marks*.- Los sistemas de riachuelos aparecen en forma de meandros o figuras sinusoidales y después de un cierto tiempo muestran bifurcaciones y canales.

7) *Bifurcating rill-marks*.- Los dibujos muestran fuertes bifurcaciones en la dirección de la orilla del mar formando en algunos casos meandros. Están ligados directamente con los meandering rill-marks.

En las páginas siguientes se muestran Estructuras Sedimentarias Primarias de tipo C (rill-marks) que aparecen en la playa de Las Canteras y que fueron tomadas en los años 1994 y 1995.

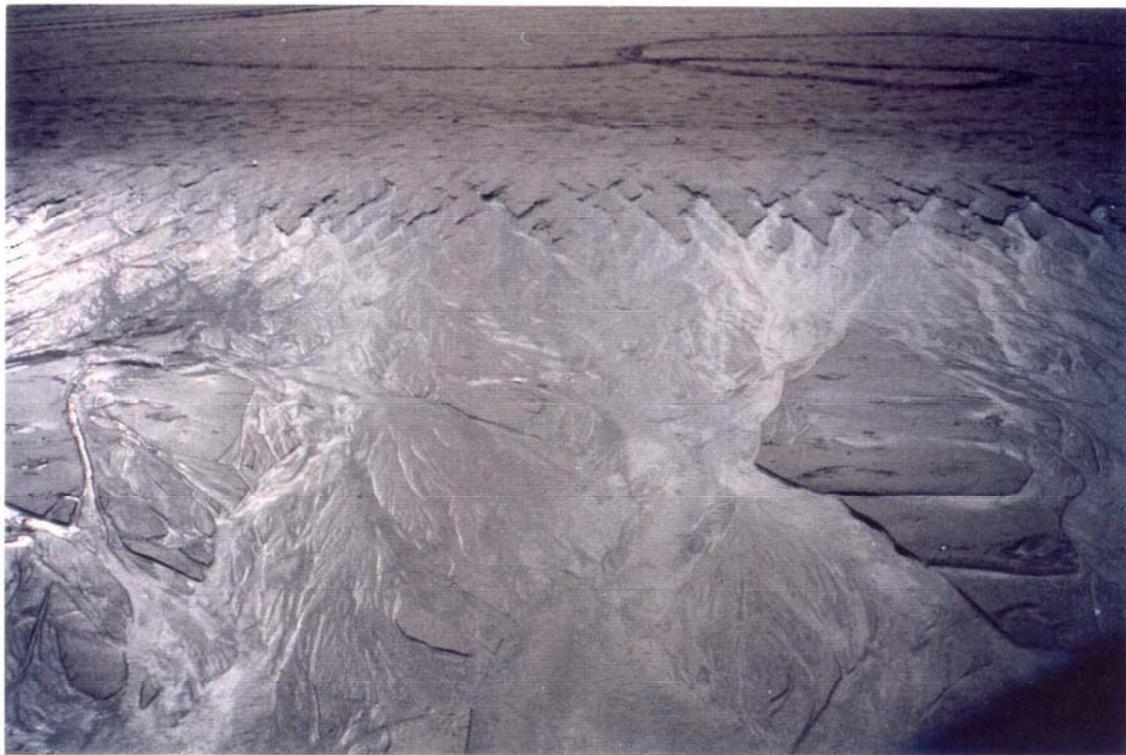


Fig. 1: Tooth-Shaped rill-marks  
( Playa Las Canteras, Las Palmas de G.C ,1994 )



Fig. 2: Comb-Shaped rill-marks  
(Playa Las Canteras, Las Palmas de G.C.,1995)



Fig. 3: Fringy rill-marks  
(Playa Las Canteras, Las Palmas de G.C., 1995)



Fig 4: Conical rill-marks  
(Playa Las Canteras, Las Palmas de G.C., 1995)



Fig. 5: Branching rill-marks (←).  
(Playa Las Canteras, Las Palmas de G.C., 1994)



Fig. 6: Branching rill-marks  
(Playa Las Canteras, Las Palmas de G.C., 1995)

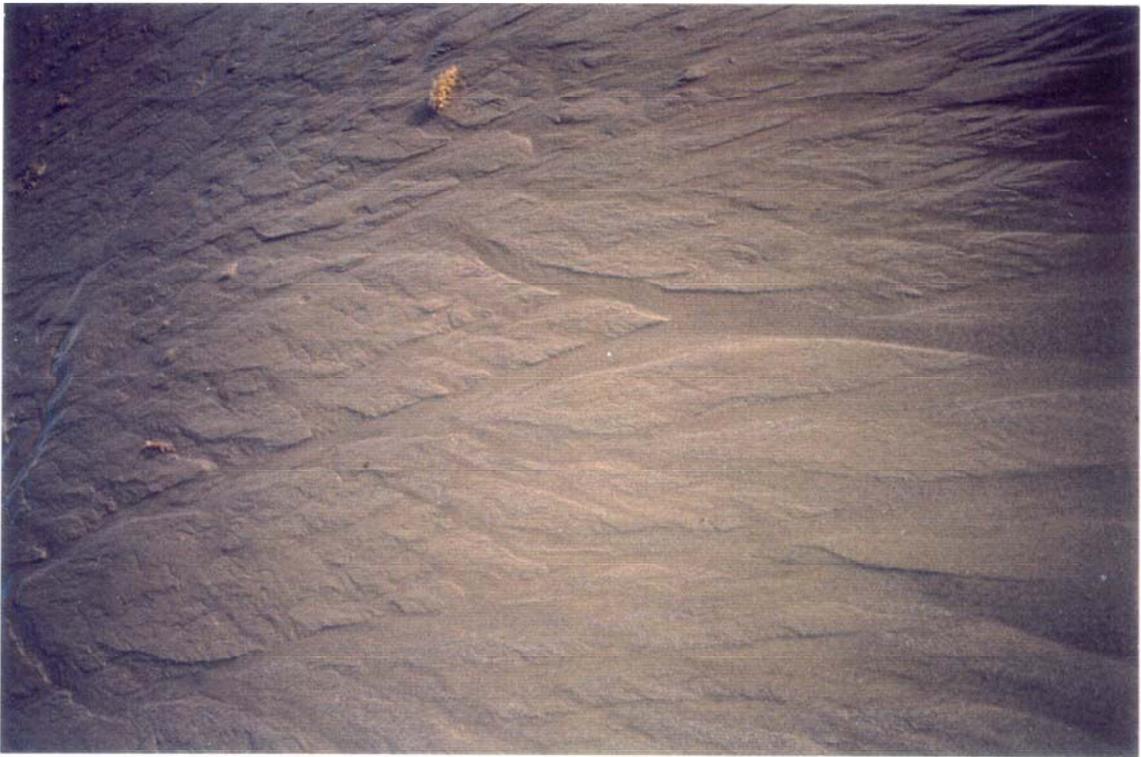


Fig. 7: Bifurcating rill-marks (←).  
(Playa Las Canteras, Las Palmas de G.C., 1995)



Fig. 8: Meandering rill-marks (←).  
(Playa Las Canteras, Las Palmas de G.C., 1995)

## CAPÍTULO IV

### MODELO Y APLICACIONES

#### 4.1 MODELO MATEMÁTICO PARA LA MORFOLOGÍA DE LOS RILL-MARKS.

Presentamos un modelo matemático para la descripción de algunas estructuras dendríticas trenzadas, denominadas científicamente Rill-Marks. Estos fenómenos se originan en playas arenosas y se detectan cuando baja la marea.

Cuando la marea sube, el agua penetra en la arena, formándose una mezcla de arena y agua ( fluido no newtoniano) cuya separación, cuando baja la marea, es la que determina dicho fenómeno. El agua que queda bajo la superficie rezuma al exterior por la acción de la gravedad. El peso de la arena desaloja el agua, que fluye en la superficie produciendo en la playa unas figuras dendríticas ondulares. Debido a la rugosidad e inclinación del lecho, las estructuras resultantes son figuras irregulares cuyo aspecto induce a pensar que tienen una gran carga de aleatoriedad.

Estos fenómenos fueron ya descritos por Williamson en 1887 y posteriormente por Allen (1986). En este trabajo construiremos un modelo matemático original para simular por ordenador este tipo de estructura sedimentaria. Notemos, de paso, que el modelo presentado entra en la categoría de modelos "estéticos", en el sentido dado en Lord y Wilson (1988), y que sus bases físicas deben ser exploradas en otros contextos científicos.

Los Rill-Marks constituyen ejemplos interesantes de comportamientos complejos no lineales en los sistemas naturales, que pueden ser estudiados y modelizados empleando las técnicas del análisis de oscilaciones. Tras su formación, estas estructuras se mantienen visibles en la playa varias horas, por ello la observación favorece su estudio. Los meandros de los ríos son otro ejemplo de la complejidad del problema ya que aparecen expresiones no lineales. En Pacheco (1992) se comenta la semejanza entre

la amplitud de un oscilador de Van der Pol y el aspecto de los meandros de los ríos (Allen 1986).

Veamos, ahora, algunas consideraciones físicas previas para la formulación del modelo matemático:

a) El agua rezuma de la arena empapada y fluye erosionando un cauce bajo la acción de la gravedad. Esto significa que la trayectoria del flujo y las partículas de arena transportadas permanecen marcando el cauce. No tomaremos en consideración el verdadero mecanismo de transporte de sedimento aunque sea importante en la formación de las figuras trazadas en la playa.

Normalmente, las figuras observadas adquieren formas dendríticas con aspecto de árbol en que las ramas son pequeñas corrientes de agua, que convergen, más abajo, en un tronco común.

Estas estructuras sedimentarias están encuadradas en el tercer grupo, Clase C de la clasificación presentada en el capítulo anterior. Corresponde al grupo determinado por las Marcas e irregularidades en el plano superior de la estratificación .

b) Cuando el agua empieza a manar se producen complejas interacciones mecánicas con las partículas de arena; así, se puede observar como la trayectoria se desvía apareciendo oscilaciones alrededor de un eje rectilíneo ideal con desplazamientos debido a la curvatura de la superficie de la playa y de la saturación de la arena húmeda.

El seguimiento de las trayectorias constituye el elemento observable de estas estructuras trenzadas.

Las consideraciones expresadas anteriormente puede traducirse en un modelo matemático que reproduzca las figuras observadas. La variable del modelo es la distancia ortogonal del filamento de flujo hasta el eje o tronco de la estructura.

Según se observa en la figura 1 ( fotografía tomada en una de las playas de Fuerteventura), podemos tomar como eje  $x(t)$  -de las ordenadas- una recta paralela a la orilla de la playa, en donde se produce mayoritariamente la salida a la superficie de las partículas de agua y que se detecta fácilmente por ser la zona donde el movimiento es

más errático ( parte superior de la figura). Como eje temporal tomaremos una línea en dirección al agua y perpendicular al eje de las ordenadas, quedando la figura centrada según dicho eje.

En la figura 2 hemos dibujado algunas trayectorias de partículas de agua obtenidas de la figura 1 y que representa de forma empírica el tipo de gráficos que queremos simular.

Según una muestra de 80 fotografías tomadas en las distintas playas de nuestro Archipiélago, las dimensiones de estas estructuras varían desde tres metros a pocos centímetros por lo que, en muchos casos, pueden pasar desapercibidas a simple vista. Además, estas figuras contienen en su estructura otras similares y así sucesivamente dando una característica de tipo fractal que puede ser objeto de estudio en otra tesis doctoral.

Fig.1: Branching rill-marks  
(Playa El Cotillo, Fuerteventura, 1993)

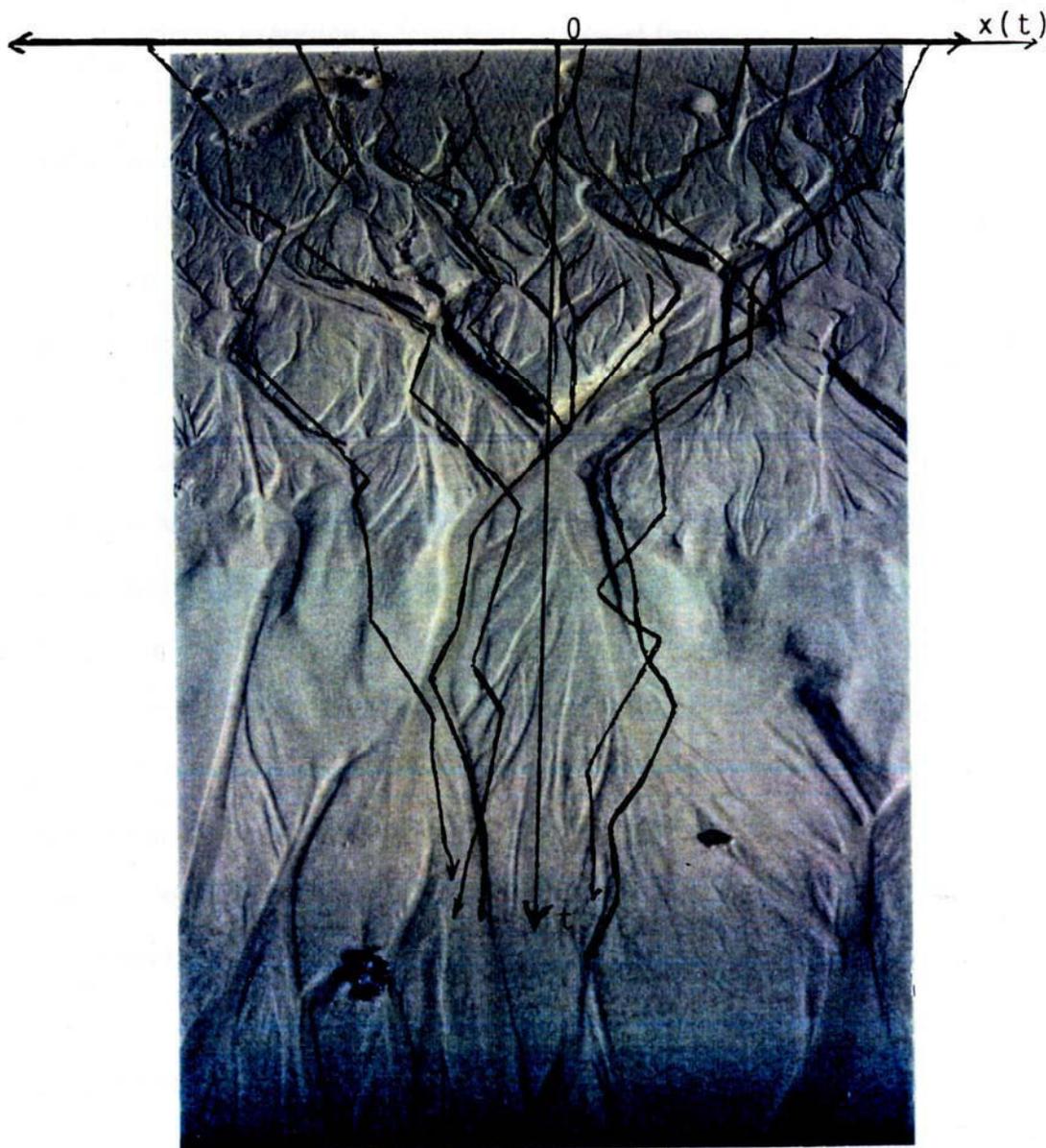


Fig. 2

$X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t), \dots$  son soluciones o realizaciones del proceso estocástico determinado por la ecuación diferencial estocástica:

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dW(t).$$

## MODELO MATEMÁTICO

El oscilador armónico simple :

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0 \quad (1)$$

sería la primera expresión a considerar ya que el fenómeno es de tipo oscilatorio. Sin embargo, la amplitud de las oscilaciones en las trayectorias debidas al movimiento de las partículas se amortigua, lo que se modeliza, como es clásico, con un término de fricción o disipativo, dependiente de  $x'$ . Entre estas características microscópicas, difíciles de cuantificar, figura, entre otras, la forma de las partículas de arena. La ecuación quedaría en la forma (ecuación de Liénard):

$$x''(t) + f(x(t), x'(t))x'(t) + \omega^2 x(t) = 0 \quad (2)$$

para el coeficiente  $f$  de  $x'$  existen varias alternativas: la más sencilla es el caso lineal donde se reduce a un valor numérico  $\alpha$ . Combinaciones apropiadas de  $\alpha$  y  $\omega$  dan estructuras oscilatorias con amplitud tendente a cero. Una elección no lineal del coeficiente de  $f(x, x')$  produce comportamientos oscilatorios de forma más compleja (véase Jordan y Smith (1987)).

Como en el proceso de formación de los Rill-Marks aparecen otras fuerzas que representan las condiciones ambientales que actúan sobre el sistema en escalas pequeñas y que no pueden ser descritas, incluimos un término de ruido, convirtiéndose en una ecuación estocástica o de Langevin:

$$x''(t) + f(x(t), x'(t))x'(t) + \omega^2 x(t) = \varepsilon(t) \quad (3)$$

pudiéndose escribir dicha ecuación mediante el sistema:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\omega^2 x - f(x, y)y + \varepsilon(t) \end{cases} \quad (4)$$

La parte determinista del sistema (4) es un caso particular del siguiente sistema más general:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\frac{\partial V(x)}{\partial x} - yf(x,y) \end{cases} \quad (5)$$

en donde la función potencial  $V(x)$  representa las características macroscópicas, en este caso la curvatura de la sección transversal del cauce.

El término  $yf(x,y)$  representa los efectos a escalas más pequeñas, cuya interpretación física es algún tipo de fricción. En un oscilador simple, como el que se ha discutido hasta llegar a (4), la forma del potencial es  $V(x) = \frac{1}{2}\omega^2 x^2$  (un cauce) donde  $\omega$  es la frecuencia natural del fenómeno.

Para nuestro trabajo, además de potenciales de sólo un cauce, utilizaremos potenciales dobles y múltiples, es decir, potenciales de tipo polinómico:

$$V(x) = \prod_{i=1}^r (x - a_i)^{m_i} .$$

que presentan la ventaja de poder describir más de un canal de deposición final. Si se emplean sistemas no autónomos introduciendo el tiempo en la función potencial  $V(x,t)$ , se puede obtener una descripción más ajustada a la realidad mediante cálculos numéricos.

El sistema (5) es autónomo, en general no lineal y admite un estudio analítico. Los puntos de equilibrio son del tipo  $(x,0)$ , donde  $x$  es cualquier número real que anule  $\frac{\partial V(x)}{\partial x}$ , por tanto el análisis específico del sistema depende de las expresiones que tomen  $V(x)$  e  $yf(x,y)$ .

En el entorno de los puntos singulares es de esperar que el comportamiento sea similar al del sistema linealizado, que viene descrito por los autovalores del jacobiano en  $(x,0)$ , es decir las raíces del polinomio:

$$\lambda^2 - \lambda \left[ f(x,0) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x,0) \right] + \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2}(x,0) + y \frac{\partial f}{\partial x}(x,0) \quad (6)$$

Por otra parte, la búsqueda de órbitas cerradas o ciclos límite en el plano de fases deberá hacerse en las zonas del plano de fases donde se satisfaga el teorema de Bendixson, es decir, donde el signo de la suma:

$$\frac{\partial f}{\partial y} + f(x, y)$$

no sea constante, o ésta no sea nula.

Es de esperar, por consideraciones físicas, que el modelo que proponemos no tendrá soluciones periódicas.

Para el caso de un potencial armónico  $V(x) = \frac{\omega^2 x^2}{2}$ , hay solamente un punto de equilibrio en el origen, y los autovalores del sistema linealizado son las raíces del polinomio  $\lambda^2 + \lambda f(0,0) + \omega^2$ .

Aparecen oscilaciones amortiguadas si  $f(0,0) > 0$  y si el discriminante de la ecuación es negativo. Esto sucede siempre que la frecuencia natural satisfaga  $\omega > \frac{f(0,0)}{2}$ .

Las características fractales de las partículas y su influencia en el sistema, parecen tener un papel importante en la formación del dibujo que genera la corriente. Por tanto, un término de fuerza  $G(t)$  puede representar las condiciones ambientales que actúan sobre el sistema, que como se intuye, son valores pequeños y serán considerados como ruidos.

Con las consideraciones aducidas anteriormente podemos escribir el sistema en la forma:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\frac{\partial V(x)}{\partial x} - yf(x, y) + G(t) \end{cases} \quad (7)$$

con  $G(t) = \varepsilon(t) = \eta(t)\xi(t)$ , donde  $\xi(t)$  es un ruido blanco y  $\eta(t)$  una medida de su intensidad o varianza.

La elección de un ruido blanco es un hecho que simplifica la formulación del problema, aunque no siempre sea el más interesante desde el punto de vista físico. Consideraremos, en adelante, el ruido blanco gaussiano.

Las trayectorias que definen nuestro modelo son realizaciones concretas de un proceso estocástico que es solución de un sistema no lineal. En nuestro caso, el modelo matemático nos dice que el sistema observable puede ser descrito como superposición de cierto número de realizaciones.

#### 4.2. EXISTENCIA DE SOLUCIONES

Dada la ecuación diferencial estocástica:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW_t$$

si se cumplen las hipótesis:

- 1) Las funciones  $f(t, x)$  y  $g(t, x)$  son medibles en las dos variables reales.
- 2)  $\exists k > 0 / \forall t \in [0, T]$  ,  $(x, y) \in \mathfrak{R}^2$  , se verifican las siguientes condiciones de tipo

Lipschitz:

- a)  $|f(t, x) - f(t, y)| + |g(t, x) - g(t, y)| \leq k|x - y|$ .
- b)  $|f(t, x)|^2 + |g(t, x)|^2 \leq k^2(1 + |x|^2)$ .

- 3)  $X_0$  es independiente de  $\{W(s); s \leq t\}$ ,  $\forall t$  y  $EX_0^2 < \infty$ .

Entonces el teorema de existencia y unicidad nos garantiza la solución de la ecuación diferencial estocástica.

En el modelo matemático, desarrollado anteriormente, aparece un sistema de primer orden que podemos escribir en forma vectorial:

$$X'(t) = F(t, X(t)) + G(t, X(t))W_t.$$

o bien, en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} f_1(t, x, y) \\ f_2(t, x, y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(t, x, y) \\ g_2(t, x, y) \end{pmatrix} W_t$$

donde  $F(t, \bar{x}) = (f_1(t, \bar{x}), f_2(t, \bar{x}))^T$  y  $G(t, \bar{x}) = (g_1(t, \bar{x}), g_2(t, \bar{x}))^T$ ,  $\bar{x} = (x, y)$ .

En el problema que nos ocupa, las funciones anteriores toman los siguientes valores:

$$F(t, \bar{x}) = \left( -\frac{\partial V}{\partial x} - yf(x, y) \right) \quad ; \quad G(t, \bar{x}) = \left( \frac{0}{\sqrt{\eta(t)}} \right).$$

siendo  $V = \prod_{i=1}^r (x - a_i)^{m_i}$ ,  $f(x, y) = 1 + \alpha x^2$  y  $\forall t \in [t_0, T]$ ,  $\eta(t) > 0$ .

Veremos, con los datos anteriores, si nuestro problema verifica las hipótesis del teorema de existencia.

1)  $F(t, X(t))$  y  $G(t, X(t))$  son medibles en sentido de Lebesgue ya que las funciones componentes son integrables en cualquier dominio acotado  $[0, T] \times D$  con  $D = [a, b] \times [c, d]$ . Se observa que todas las funciones son de tipo polinómico en las variables temporal y espacial.

2) Debe existir una constante  $k$  que verifique:

$$a) \quad \|F(\bar{x}_1, t) - F(\bar{x}_2, t)\| + \|G(\bar{x}_1, t) - G(\bar{x}_2, t)\| \leq k \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|.$$

$$b) \quad \|F(\bar{x}, t)\|^2 + \|G(\bar{x}, t)\|^2 \leq k^2 (1 + \|\bar{x}\|^2).$$

En esta demostración las normas utilizadas vienen definidas de la forma siguiente:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right\} \quad \text{que es una norma matricial inducida por} \quad \|\bar{x}\|_2 = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

Aplicando estas normas a nuestro problema, tenemos:

$$a) \quad \|F(t, \bar{x}_1) - F(t, \bar{x}_2)\|_1 = \left\| \left( \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)_{(\bar{x}_2)} - \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)_{(\bar{x}_1)} + y_2 f(x_2, y_2) - y_1 f(x_1, y_1) \right) \right\|_1 =$$

$$= |y_1 - y_2| + \left| \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)_{(\bar{x}_2)} - \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)_{(\bar{x}_1)} + y_2 f(x_2, y_2) - y_1 f(x_1, y_1) \right| \leq |y_2 - y_1| +$$

$$\begin{aligned}
& +|y_2 - y_1| + \left| (\bar{x}_2 - \bar{x}_1) \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)_{(x_0)} \right| + |y_2 f(x_2, y_2) - y_1 f(x_1, y_1)| \leq \\
& \leq |y_2 - y_1| \left( 2 + \left| \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right|_{(x_0)} + |\alpha x_1^2| \right) + |x_2 - x_1| \left( \left| \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right|_{(x_0)} + |\alpha y_2 (x_1 + x_2)| \right) \leq \\
& \leq k_1 |y_2 - y_1| + k_2 |x_2 - x_1| \leq k_3 \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|_2.
\end{aligned}$$

donde se han utilizado las siguientes expresiones:

$$k_1 = \text{Máx}_{[0, T] \times D} \left\{ 2 + \left| \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right|_{(x_0)} + |\alpha x_1^2| \right\}; \quad k_2 = \text{Máx}_{[0, T] \times D} \left\{ \left| \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right|_{(x_0)} + |\alpha y_2 (x_1 + x_2)| \right\}$$

$$k_3 = \text{máx}\{k_1, k_2\}$$

$$y_2 f(x_2, y_2) - y_1 f(x_1, y_1) = (y_2 - y_1) + \alpha [(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + x_1^2 (y_2 - y_1)].$$

$$\|G(t, \bar{x}_1) - G(t, \bar{x}_2)\| = 0.$$

b) Veamos la relación  $\|F(t, \bar{x})\|_1^2 + \|G(t, \bar{x})\|_1^2 \leq k^2 (1 + \|\bar{x}\|_3^2)$

$$\begin{aligned}
\|F(t, \bar{x})\|_1^2 &= \left\| \left( -\frac{\partial V}{\partial x} - y f(x, y) \right) \right\|_1^2 = \left| y - \frac{\partial V}{\partial x} - y f(x, y) \right|^2 = \left| y - \frac{\partial V}{\partial x} - y(1 + \alpha x^2) \right|^2 = \\
&= \left| \frac{\partial V}{\partial x} + \alpha y x^2 \right|^2 = \left| \alpha \left| \frac{\partial V}{\partial x} \frac{1}{\alpha} + x^2 y^2 \right| \right|^2 \leq \left( \text{tomando } M = \text{máx}_{[0, T] \times D} \left\{ \frac{1}{\alpha} \frac{\partial V}{\partial x} \right\} \right) \\
&\leq |\alpha| |M + x^2 y^2|^2 = |\alpha| |M^2 + 2Mx^2 y^2 + x^4 y^4| \leq |\alpha| |C(x, y)(x^2 + y^2) + R(y)| \leq \\
&\leq |\alpha| |N(x^2 + y^2) + N| = |\alpha N| |1 + x^2 + y^2| = |\alpha N| (1 + \|\bar{x}\|_3^2) = k_4^2 (1 + \|\bar{x}\|_3^2).
\end{aligned}$$

donde se ha utilizado las siguientes igualdades:

$$(x^4 y^4 + 2Mx^2 y^2 + M^2) = (x^2 + y^2)(x^2 y^4 + 2My^2 - y^6) + (y^8 - 2My^4 + M^2)$$

$$N = \text{Máx}_{[0, T] \times D} \{C(x, y), R(y)\}.$$

$$\|(x,y)\|_3 = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Por otro lado, tenemos que acotar la función  $G(t,X)$ .

$$\|G(t,\bar{x})\|_1^2 = \left\| \left( \begin{array}{c} 0 \\ \sqrt{\eta(t)} \end{array} \right) \right\|_1^2 = |\sqrt{\eta(t)}|^2 = \eta(t) \leq \underset{[0,T]}{\text{Máx}}\{\eta(t)\} (1 + \|\bar{x}\|_3^2) \leq k_5^2 (1 + \|\bar{x}\|_3^2)$$

tomando  $k = \text{máx}\{k_3, k_5^2\}$  tenemos demostrada la segunda propiedad.

3) Este apartado establece las condiciones que debe cumplir la variable aleatoria, o valor inicial,  $X_0$ . En nuestro problema dicha variable tiene una distribución gaussiana  $N(0,4)$  y por tanto verifica la condición de que la dispersión es finita, es decir,  $EX_0^2 < \infty$ . Los valores de  $X_0$  se simulan independientemente del movimiento browniano  $W(t)$ .

#### 4.3. APLICACIÓN DE MÉTODOS NUMÉRICOS A LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA

Para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales no lineal, establecido en nuestro modelo matemático, emplearemos los tres métodos numéricos deducidos en la teoría, es decir, el de Euler-Maruyama, de Milstein y el de Runge-Kutta de orden 3/2.

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\frac{\partial V(x)}{\partial x} - yf(x,y) + \varepsilon(t) \end{cases} \quad (8)$$

El término de amortiguamiento lo tomaremos del tipo polinómico en las variables del espacio de fases  $f(x,y)=p(x,y)$  (lógicamente, partimos de la base que otra función representativa sería aproximada mediante un polinomio). Con el fin de seguir la huella heurística elegimos el polinomio de Van der Pol  $1 + \alpha x^2$ , donde  $\alpha$  es un valor estimado empíricamente. Un valor conveniente para dicho valor es 0,1.

Para  $x(0)$  se toma un valor aleatorio en la distribución normal  $N(0,4)$  en cada ejecución, esto suponiendo que el brote de las partículas de agua tengan lugar ortogonalmente al eje del tronco. Esta idealización es consistente con las observaciones porque en la última parte de las trayectorias la corriente es más regular ya que existe más

agua, sin embargo, al principio (ramas) al ser las corrientes más débiles el comportamiento es errático. Para  $Y(0)$  puede tomarse cualquier valor de ruido porque los filamentos de agua muestran un comportamiento aleatorio en los primeros instantes. Para simplificar, el valor  $y(0)=0$  será el más usado en las aplicaciones numéricas.

El término de ruido tiene una intensidad  $\eta(t) = \frac{1}{(a + ct^b)}$  y es decreciente en el tiempo. Esto es consistente con las observaciones ya que al final de las trayectorias el flujo se estabiliza y sólo se observan pequeñas desviaciones de la corriente central, mientras que al principio de las ramas, las corrientes, al ser más débiles, muestran un comportamiento más errático. El término  $\eta(t)$  se ajusta bastante bien a las propiedades antedichas. En las simulaciones numéricas usaremos los valores  $a=0,2$  ;  $b=2$  ;  $c=0,001$  dando un comportamiento asintótico para la amplitud decreciente de 5 a 0.

Con los datos anteriores, los experimentos se hicieron con potenciales de uno y doble pozo  $V(x) = k(x - x_0)^2(x - x_1)^2$ , en los casos siguientes:

- i) Con  $x_0, x_1$  fijas.
- ii) Con  $x_0(t), x_1(t)$  funciones del tiempo.

#### *Aplicación del método de Euler-Maruyama*

El método, aplicado al sistema del problema que nos ocupa, tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} X_{n+1} \\ Y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_n \\ -V_x(X_n) - Y_n f(X_n, Y_n) \end{pmatrix} (\Delta t_n) + \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\eta(t_n)} \end{pmatrix} \Delta W_n.$$

ya que los coeficientes son:

$$\bar{a} = (a^1(t, x, y), a^2(t, x, y)) = (y, -V_x(x) - yf(x, y))$$

$$\bar{b} = (b_1, b_2) = (0, \sqrt{\eta(t)})$$

El incremento del proceso de Wiener  $\Delta W_n$  lo genera el programa en cada paso.

Se ha resuelto el sistema según los valores y casos enunciados anteriormente.

*Aplicación del método de Milstein*

$$\begin{pmatrix} X_{n+1} \\ Y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_n \\ -V_x(X_n) - Y_n f(X_n, Y_n) \end{pmatrix} (\Delta t_n) + \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\eta(X_n, Y_n, t_n)} \end{pmatrix} \Delta W_n + \\ + \frac{1}{2\sqrt{\Delta t_n}} \left( \sqrt{\eta(\Psi_n^1, \Psi_n^2, t_n)} - \sqrt{\eta(X_n, Y_n, t_n)} \right) \{ (\Delta W_n)^2 - \Delta \}$$

donde:

$$\begin{pmatrix} \Psi_n^1 \\ \Psi_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_n \\ -V_x(X_n, Y_n) - Y_n f(X_n, Y_n) \end{pmatrix} \Delta t_n + \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\eta(X_n, Y_n, t_n)} \end{pmatrix} \sqrt{\Delta t_n}$$

en nuestro sistema estocástico se observa que el ruido es aditivo, es decir, el coeficiente de difusión no depende de la variable espacial, por ello, el esquema de Milstein se reduce al de Euler-Maruyama.

*Aplicación del método de Runge-Kutta de orden 3/2*

Utilizando la fórmula (47) y teniendo en cuenta que el coeficiente de difusión depende sólo de  $t$  ( $b(x,y,t)=b(t)$ ), es decir, la ecuación diferencial estocástica tiene ruido aditivo, el esquema toma la forma:

$$\begin{pmatrix} X_{n+1} \\ Y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\eta(t_n)} \end{pmatrix} \Delta W + \frac{1}{2\sqrt{\Delta t_n}} \left( -V_x(\Psi_+^1) - \Psi_+^2 f(\Psi_+^1) + V_x(\Psi_-^1) + \Psi_-^2 f(\Psi_-^1) \right) \Delta Z \\ + \frac{1}{4} \left( -V_x(\Psi_+^1) - \Psi_+^2 f(\Psi_+^1) - 2V_x(X_n) - 2Y_n f(X_n) - V_x(\Psi_-^1) - \Psi_-^2 f(\Psi_-^1) \right) \Delta t_n.$$

donde:

$$\begin{pmatrix} \Psi_{n(\pm)}^1 \\ \Psi_{n(\pm)}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_n \\ -V_x(X_n, Y_n) - Y_n f(X_n, Y_n) \end{pmatrix} \Delta t_n \pm \begin{pmatrix} 0 \\ \eta(X_n, Y_n, t_n)^{1/2} \end{pmatrix} \sqrt{\Delta t_n}.$$

estando la variable aleatoria  $\Delta Z$  normalmente distribuida con media  $E(\Delta Z) = 0$ ,

varianza  $E((\Delta Z)^2) = \frac{1}{3} \Delta^3$  y covarianza  $E(\Delta Z \Delta W) = \frac{1}{2} \Delta^2$ . La variable aleatoria

conjunta  $(\Delta W \Delta Z)$  normalmente distribuida se puede obtener, en nuestro caso, mediante las expresiones  $\Delta W = U_1 \sqrt{\Delta}$  y  $\Delta Z = \frac{1}{2} \Delta^{3/2} \left( U_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} U_2 \right)$ , siendo  $U_1, U_2$  variables aleatorias independientes  $N(0,1)$ .

Para el método de Runge-Kutta necesitamos hacer pequeñas correcciones ya que el sistema propuesto no es autónomo ( en los esquemas tratados anteriormente no afecta este factor debido a que el ruido es aditivo) por ello, la ecuación (45) quedará de la siguiente forma:

a) En el caso de pozos constantes, el coeficiente de deriva no depende de  $t$ , por tanto, la ecuación quedaría así:

$$X_t = X_{t_0} + aI_{(0)} + bI_{(1)} + \left( aa' + \frac{1}{2} b^2 a'' \right) I_{(0,0)} + \frac{\partial b}{\partial t} I_{(0,1)} + ba' I_{(1,0)}$$

b) En el caso de pozos que varían con el tiempo  $a=a(t,x)$ , por tanto, la ecuación que se obtiene será:

$$X_t = X_{t_0} + aI_{(0)} + bI_{(1)} + \left( \frac{\partial a}{\partial t} + aa' + \frac{1}{2} b^2 a'' \right) I_{(0,0)} + \frac{\partial b}{\partial t} I_{(0,1)} + ba' I_{(1,0)}$$

en ambas debemos tener en cuenta que el coeficiente de difusión depende sólo de  $t$ , por ello, hemos suprimido los términos donde aparece  $b'$ . Para obtener las gráficas hemos considerado estas correcciones. Téngase en cuenta que en nuestro problema, como hemos visto anteriormente,  $a = (y, -V_x(x) - yf(x, y))$  y  $b = (0, \sqrt{\eta(t)})$ .

#### 4.4. COMPARACIÓN Y ANÁLISIS DE LOS MÉTODOS APLICADOS.

Aplicaremos un criterio rígido en las simulaciones de los rill-marks, es decir, daremos los mismos valores de los parámetros en los tres esquemas de aplicación. El objetivo de esta estrategia consiste en observar la respuesta de cada esquema y su posible validación en la reproducción de las figuras de las estructuras sedimentarias. Posteriormente, y en función de la respuesta obtenida, variaremos los parámetros en el modelo con el fin de establecer, a partir de los esquemas, el mejor diseño posible. En

todos los casos realizaremos diez trayectorias que creemos suficientes para sacar las conclusiones necesarias.

Estudiaremos dos casos, que corresponden a perfiles de los pozos múltiples con valores de  $k=0,1$  y  $k=0,01$  (casi plano) y que se debe interpretar de la siguiente forma: en el primer caso las partículas de agua tendrán más dificultad para pasar de un canal a otro ya que los obstáculos son mayores. Para pozos casi planos se trasladan con más facilidad y en las simulaciones se observa que hay más cruzamientos de trayectorias en el primer tercio de la figura. Otro parámetro que controla el modelo es el número de pozos, que como se ven en las fotografías pueden ser varios.

Otra magnitud que afecta a la forma de la figura es la intensidad de ruido, es decir, el coeficiente de difusión  $\eta(t)$  que influye en las simulaciones haciendo que aparezcan los canales de deposición después de un tiempo deseado. Si dicho valor tiende a cero más rápidamente los canales aparecen antes. La expresión de dicho coeficiente varía de 5 a 0 pero pueden elegirse otros valores de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  para hacer esta convergencia más o menos rápida.

Para el coeficiente de amortiguamiento que, como se ha dicho anteriormente, se modela mediante una función de la forma  $f(x,y)$ , se adecúa bien la expresión dada por Van der Pol  $f(x,y) = 1 + \alpha x^2$ . Esta función, que corresponde al frenado de las partículas de agua en contacto con la arena, tiene la virtud de que al aumentar  $x$  con el tiempo, el efecto que produce en las moléculas de agua y las partículas de arena es la deposición y ajuste de los granos de arena sobre el lecho de la playa, configurando así los canales de deposición y ayudando decisivamente en la formación de las estructuras dendríticas. Necesariamente, y con respecto a la función anterior, tenemos que hacer la siguiente observación: se puede probar en el modelo cualquier otra función, no obstante, partiendo de que deben admitir un desarrollo en serie, hemos probado todo tipo de funciones polinómicas de grado dos en las dos variables, de donde se obtiene, heurísticamente, que la función anterior es la que mejor se adapta a nuestros fines.

El coeficiente alfa del polinomio amortiguador se añade a placer para que sus efectos no anulen a los de otros parámetros. En nuestro caso, y después de hacer la pruebas pertinentes, tomamos dicho valor del orden de una décima o más pequeño.

Otro rasgo a considerar en la ecuación es el valor de "y" que representa la velocidad de las partículas de agua y, como se deduce de las observaciones, brotan a velocidades difíciles de determinar. Daremos, inicialmente, el valor cero debido a que las partículas tienen una velocidad pequeña cuando aparecen en la superficie, resulta, por tanto coherente asignarle ese valor en las iteraciones de los métodos numéricos.

El último elemento a considerar en la ecuación es el término aleatorio, que como se sabe, convierte el sistema en un proceso estocástico y que es el factor básico que marca la dirección de este trabajo. El proceso de Wiener o movimiento browniano se considera en los métodos de Euler -Maruyama y Milstein como procesos independientes y en el método de Runge-Kutta aparece correlado a la integral múltiple  $\Delta Z$ . La influencia del término aleatorio en el sistema es decisiva en los primeros momentos de iniciarse el proceso, ya que origina el movimiento errático o más irregular suavizándose posteriormente en los canales de deposición.

Como se puede ver en las simulaciones, los resultados obtenidos mediante los tres esquemas responden en gran medida a nuestros objetivos.

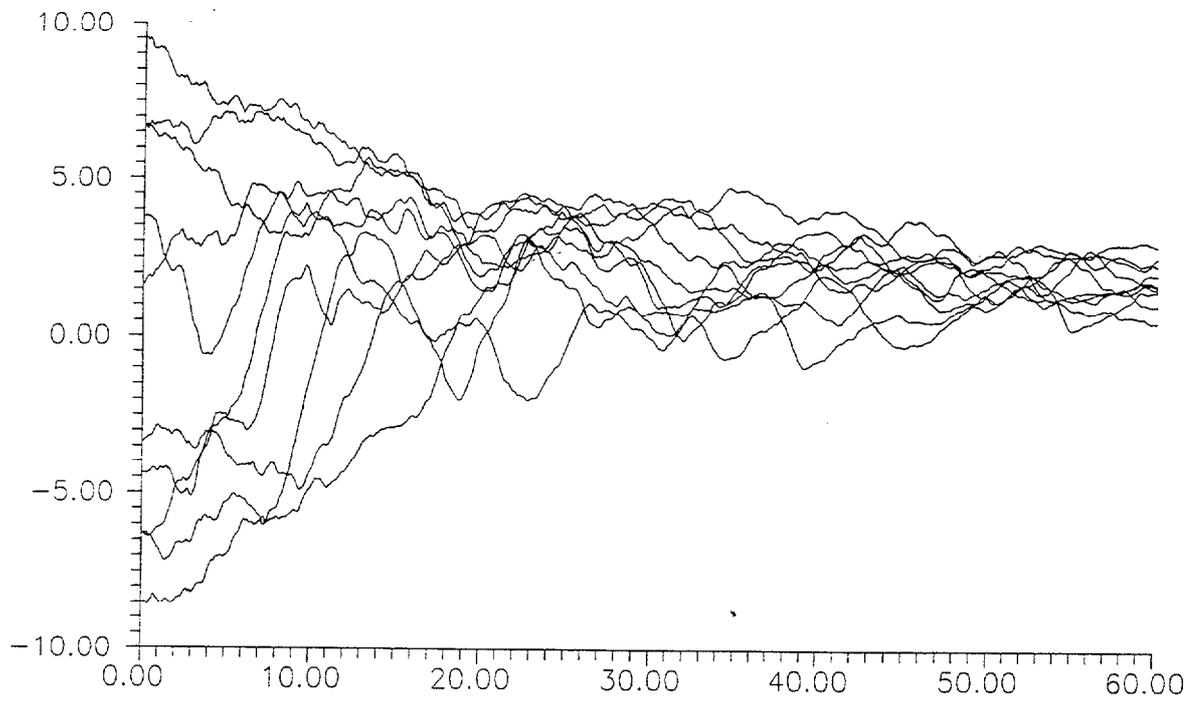


Fig. 1. Aproximación de Euler-Maruyama

$$k=0,1 ; \Delta = 0,1 ; N(0,4) ; V(x) = k(x-2)^2$$

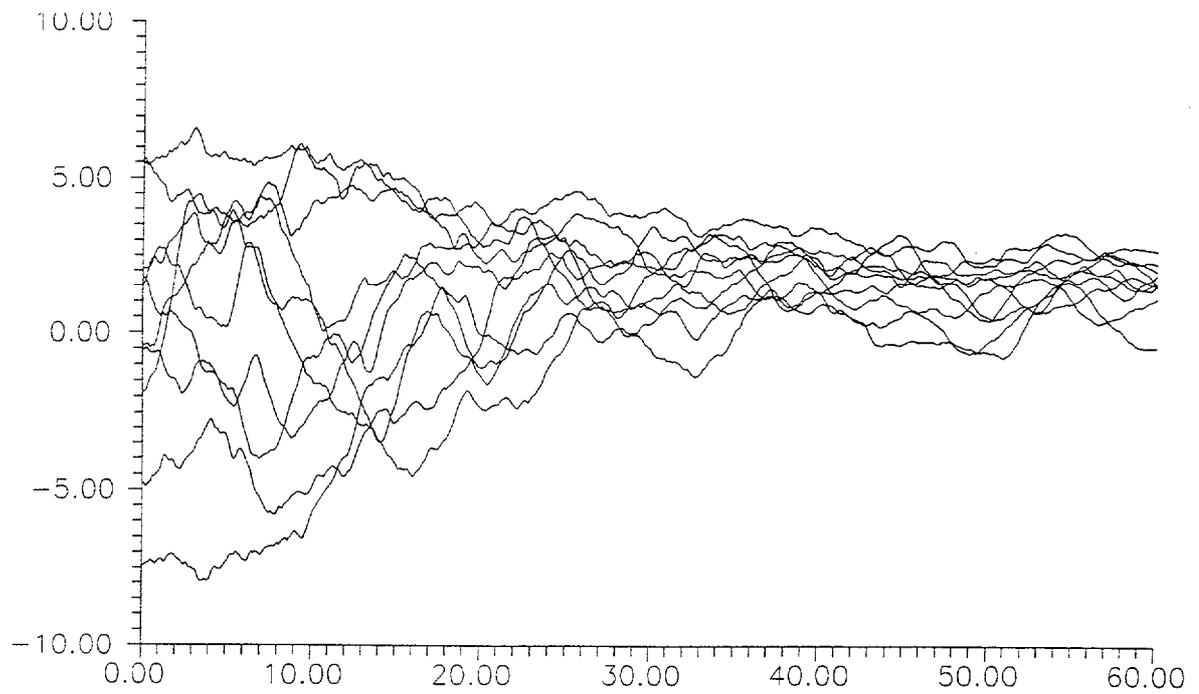


Fig.2: Aproximación de Milstein

$$k=0,1 ; \Delta = 0,1 ; N(0,4) ; V(x) = k(x-2)^2$$

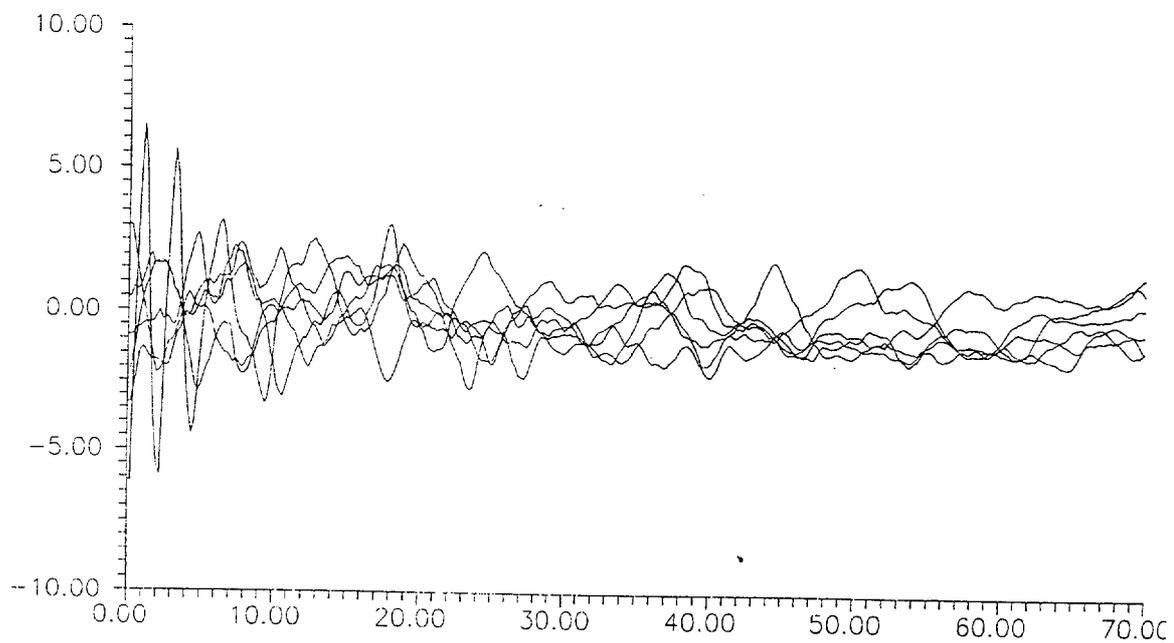


Fig. 3. Aproximación de Euler-Maruyama

$$k=0,1 ; \Delta = 0,1 ; N(0,4) ; V(x) = k(x-1)^2(x+1)^2$$

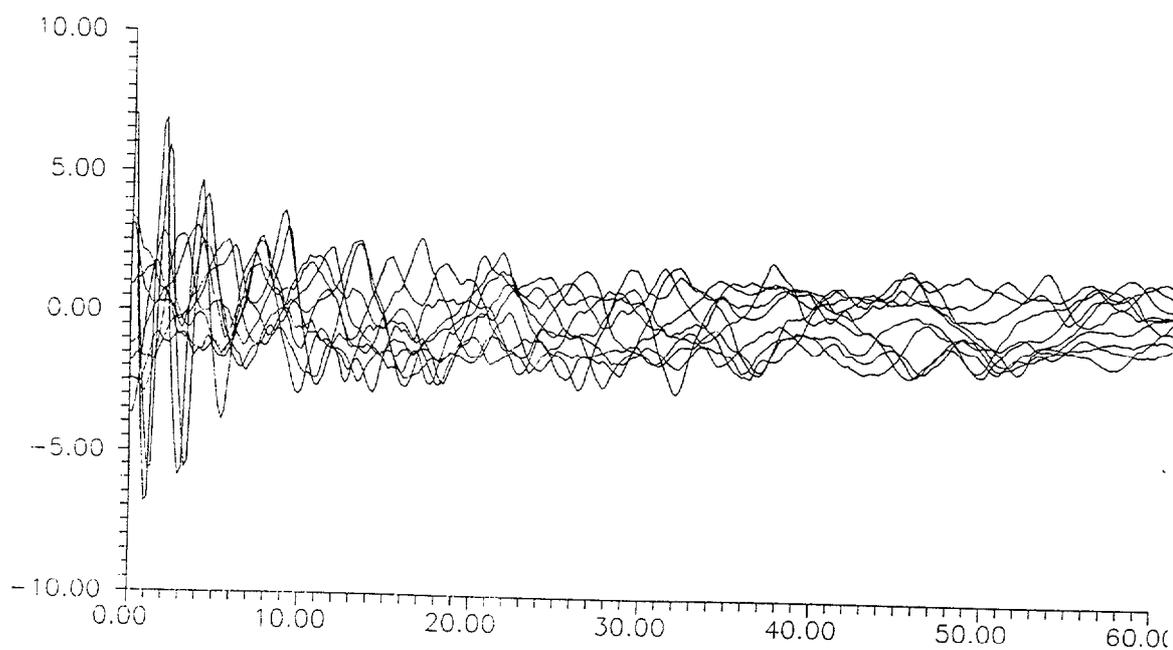


Fig.4: Aproximación de Milstein

$$k=0,1 ; \Delta = 0,1 ; N(0,4) ; V(x) = k(x-1)^2(x+1)^2$$

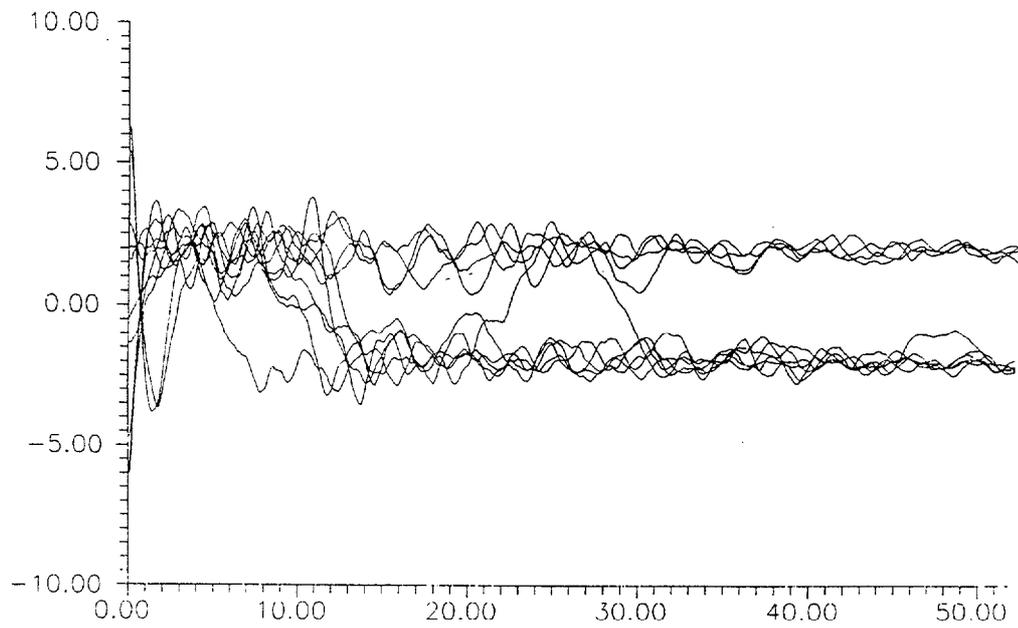


Fig. 5. Aproximación de Euler-Maruyama

$$k=0,1 ; \Delta = 0,1 ; N(0,4) ; V(x) = k(x-2)^2(x+2)^2$$

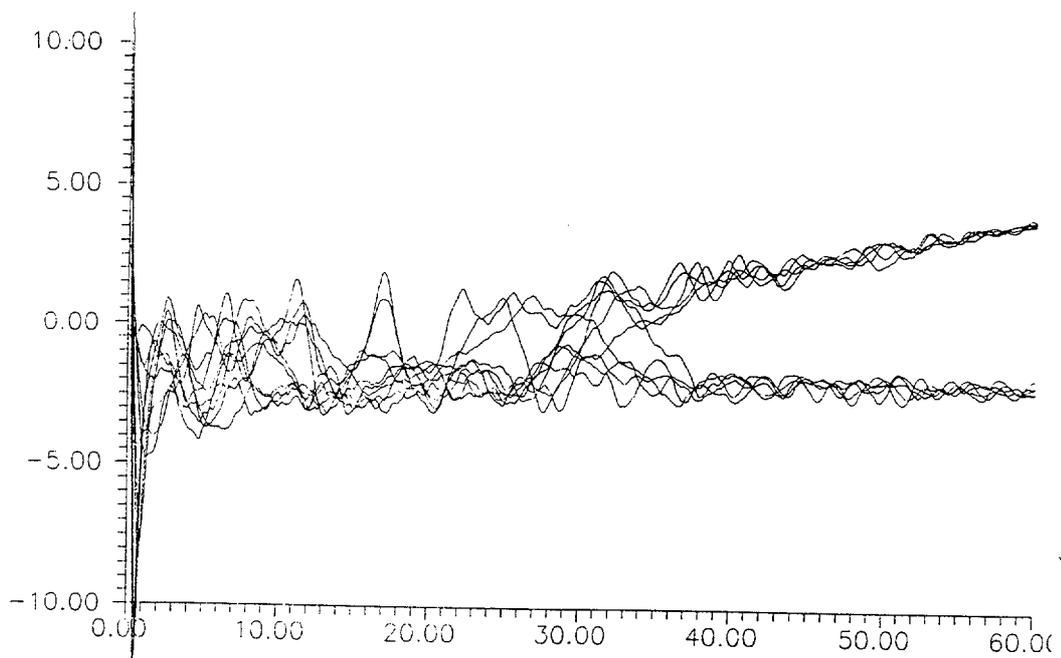


Fig.6: Aproximación de Euler-Maruyama

$$k=0,1 ; \Delta = 0,1 ; N(0,4) ; V(t,x) = k(x-x_0)^2(x+2)^2$$

$$x_0 = -2 + t/10$$

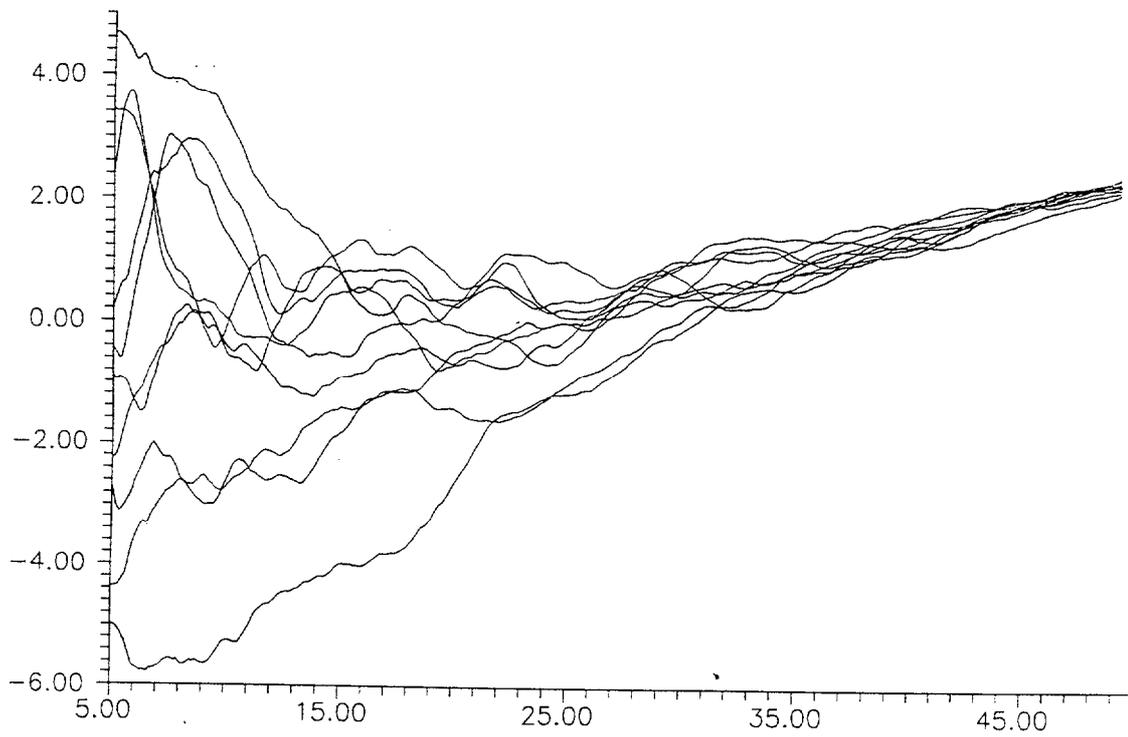


Figura 7. Aproximación de Runge-Kutta

$$V(x) = k(x - x_0)^2, \Delta = 0,1, t=50, N(0,4)$$

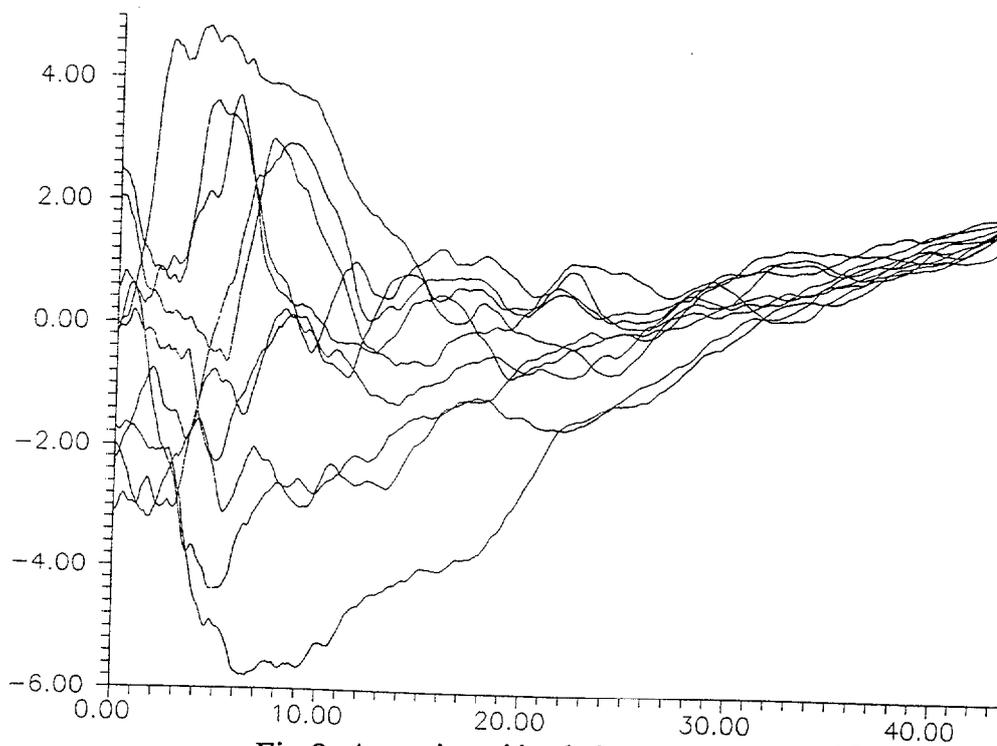


Fig.8: Aproximación de Runge-Kutta (t=45)

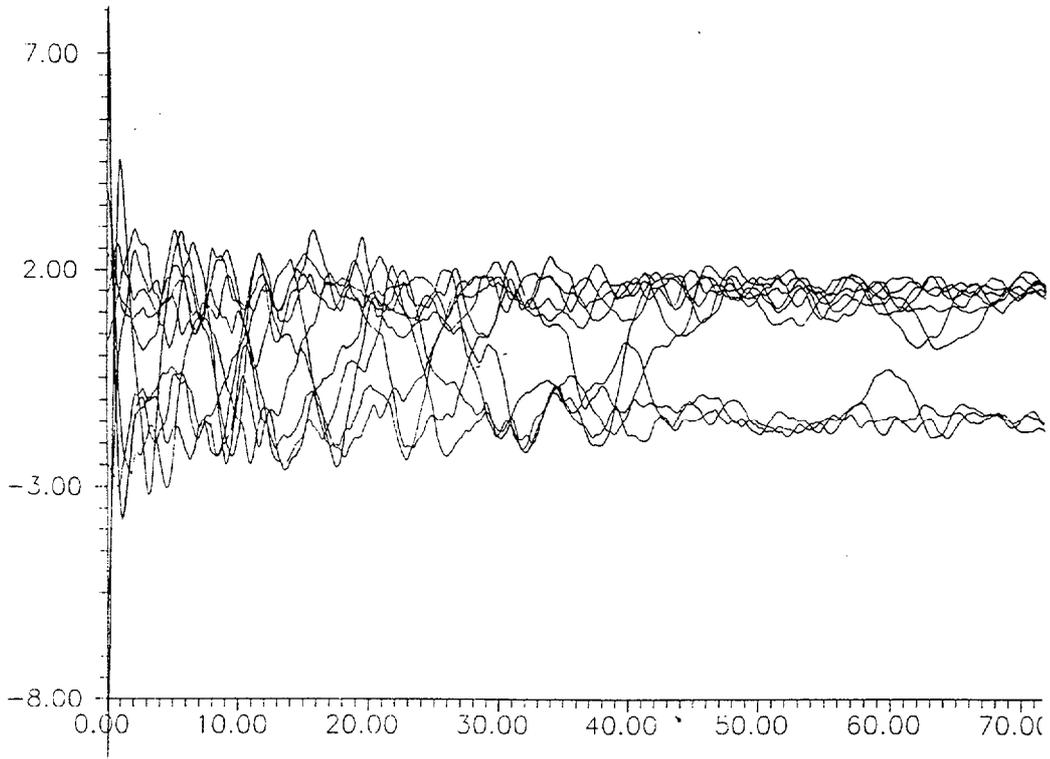


Figura 9. Aproximación de Runge-Kutta

$$V(x) = k(x - x_0)^2(x - x_1)^2, \Delta = 0,1, t=70, N(0,6), x_0 = -1,5; x_1 = 1,5$$

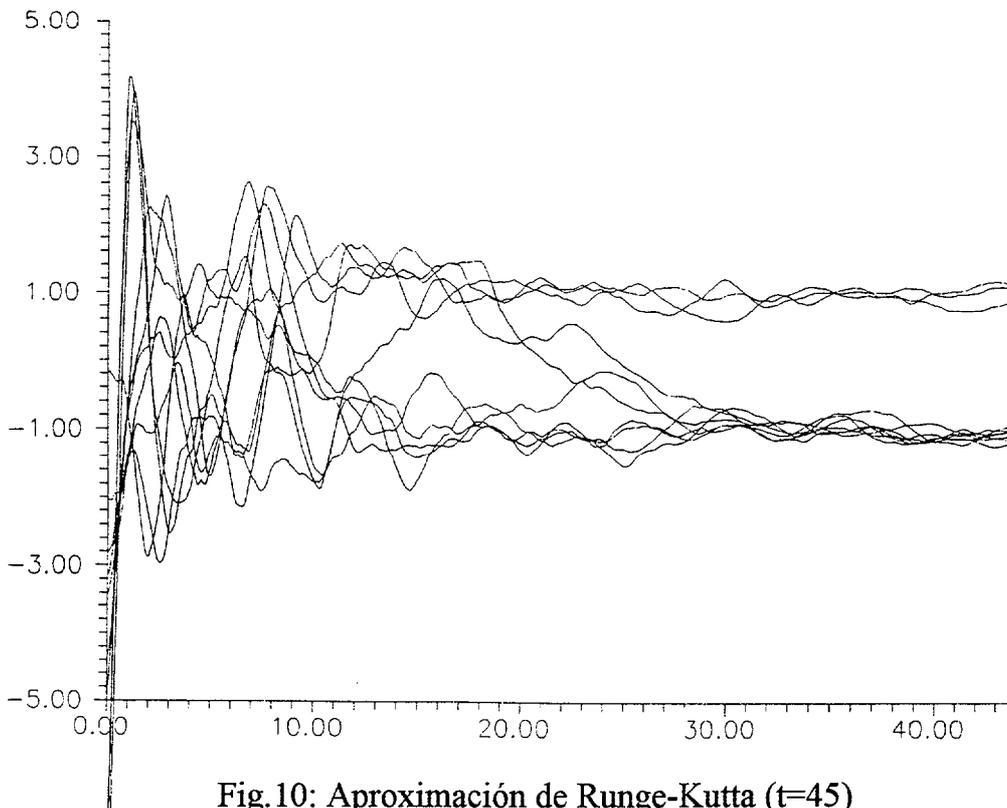


Fig.10: Aproximación de Runge-Kutta (t=45)

$$V(x) = k(x - x_0)^2(x - x_1)^2, \Delta = 0,1, N(0,4), t=45, x_0 = -1, x_1 = 1$$

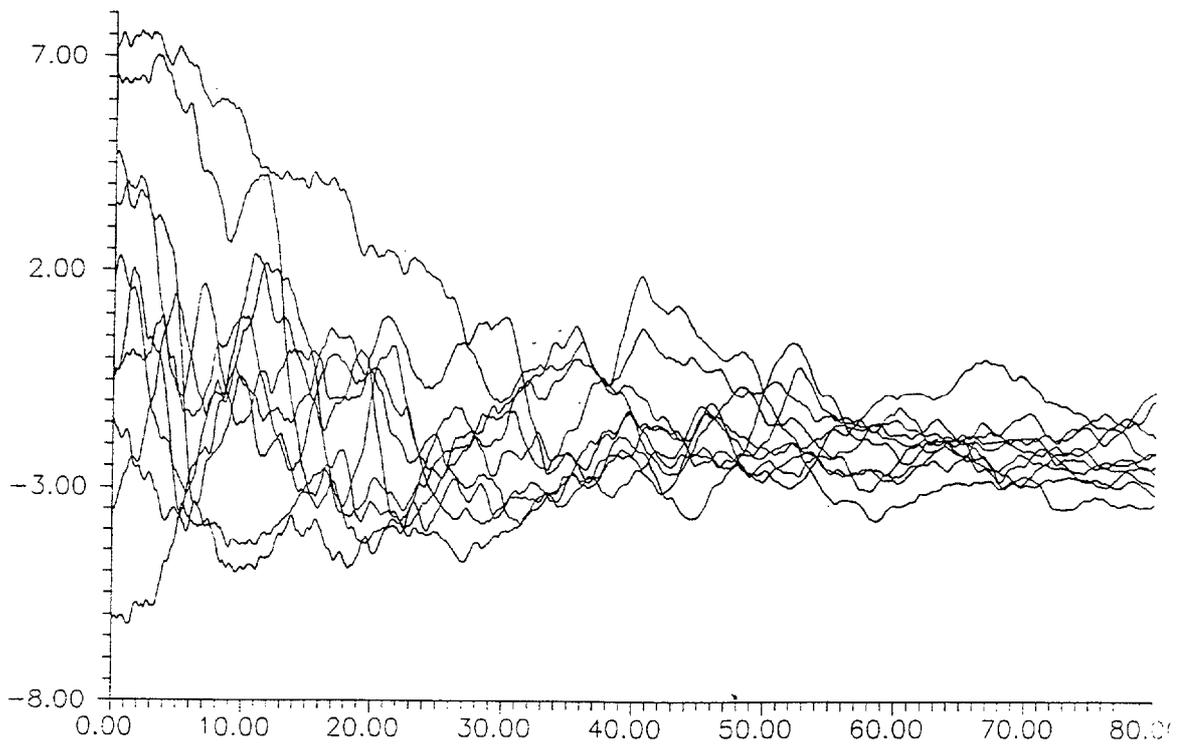


Figura 11. Aproximación de Runge-Kutta

$$V(x) = k(x - x_0)^2, \Delta = 0,01, t=80, N(0,4)$$

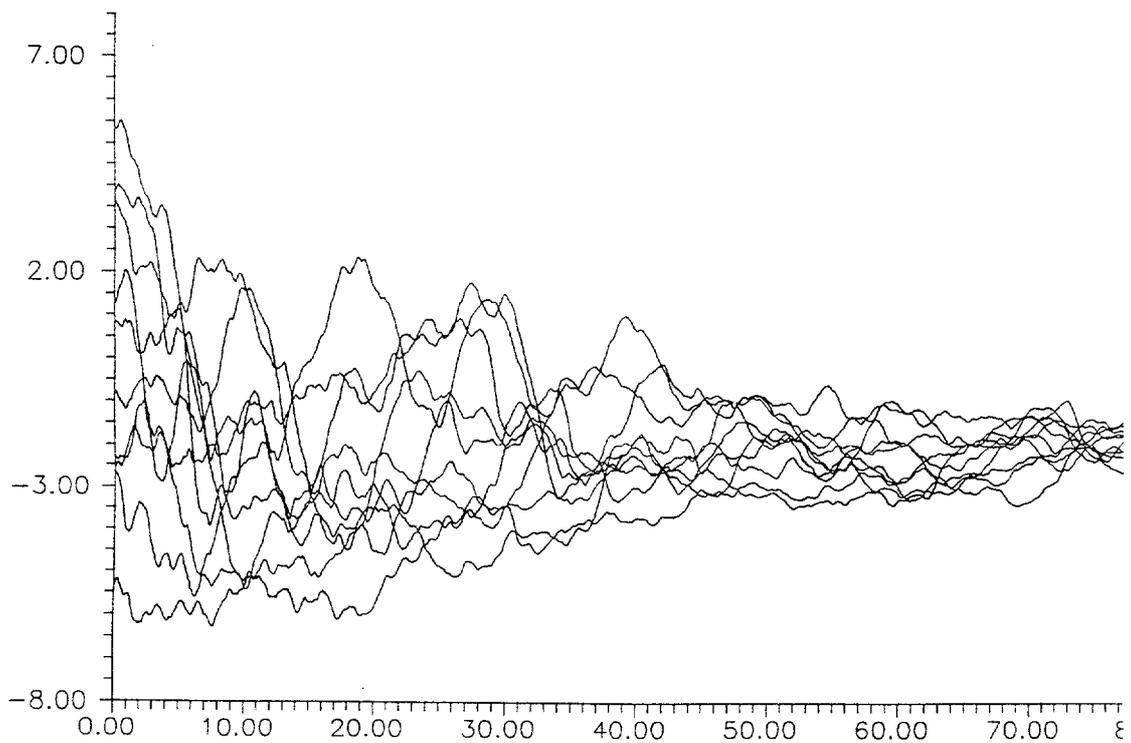


Fig.12: Aproximación de Runge-Kutta

$$V(x) = k(x - x_0)^2, \Delta = 0,1, N(0,4), t=80$$

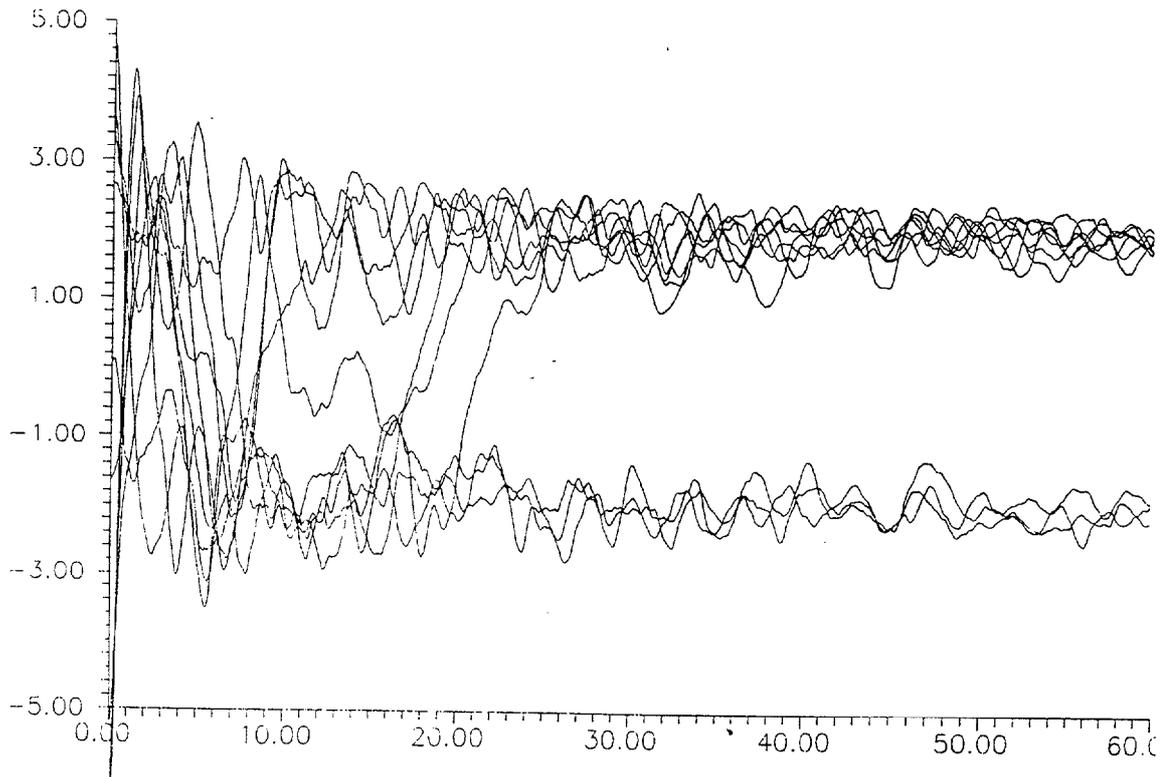


Figura 13. Aproximación de Runge-Kutta

$$V(x) = k(x - x_0)^2(x - x_1)^2, \Delta = 0,01, t=80, N(0,6)$$

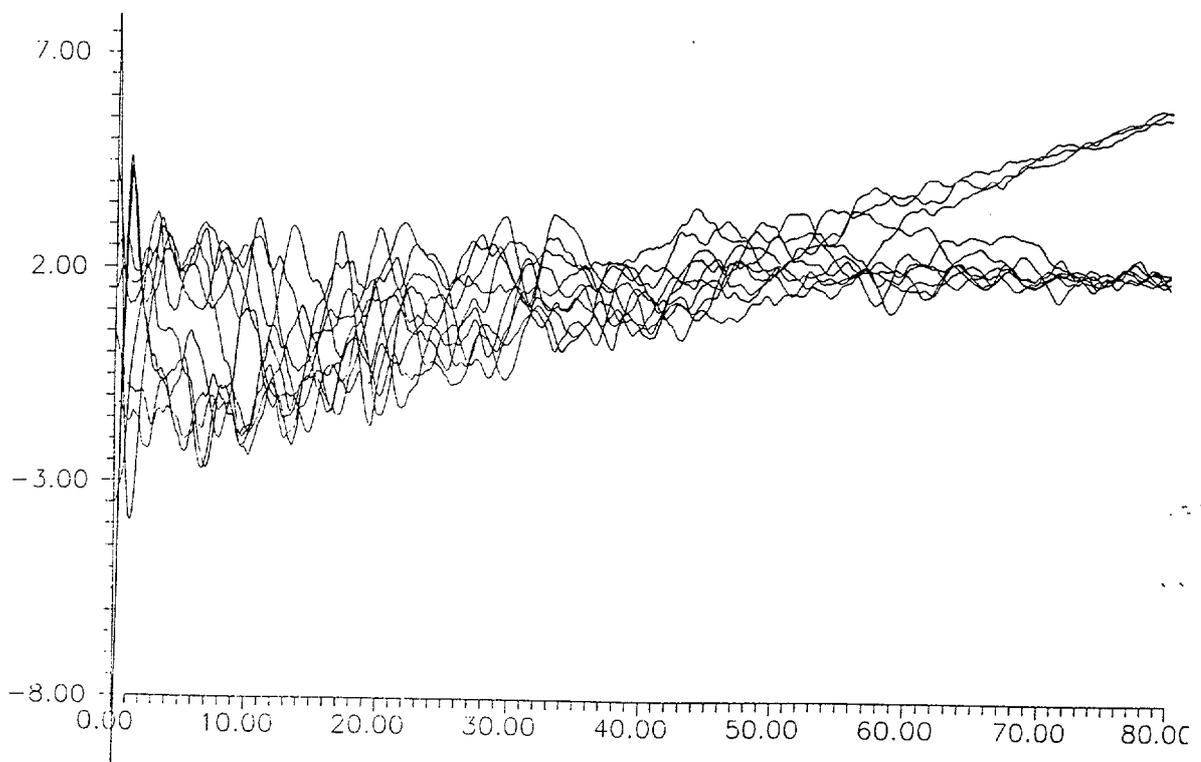


Fig.14: Aproximación de Runge-Kutta

$$V(x, t) = k(x - x_0)^2(x - x_1)^2, \Delta = 0,1, N(0,6), t=80$$

## CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Las conclusiones que podemos extraer de nuestro trabajo se pueden resumir en los siguientes puntos:

1.- Siguiendo las orientaciones del Gard (1988), demostramos un teorema de existencia y unicidad para las ecuaciones diferenciales estocásticas.

Se demuestra que el teorema anterior lo verifica el sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas del modelo matemático que presentamos, por tanto, tenemos asegurada la bondad del modelo.

2.- Formulamos un modelo matemático para obtener los Rill-Marks mediante simulaciones por ordenador.

3.- Para el caso del esquema numérico de Runge-Kutta hemos hecho las correcciones pertinentes para adaptarlo a nuestro modelo. Se observa que aparece: en el primer caso, un término más; y en el segundo, dos términos correspondientes a las derivadas con respecto a variable temporal.

4.- Se crean las bases para la modelización de otras estructuras sedimentarias primarias, por ejemplo, las Conical rill-marks que se tendrían que simular en un espacio de tres dimensiones y los Meandering rill-marks cuyo modelo sería un sistema con sólo las condiciones iniciales aleatorias.

5.- Otro aspecto interesante para investigaciones futuras será el enfoque fractal de los rill-marks. Se puede observar, en la figura 6 del capítulo 3, que la imagen de la fotografía aparece en una de las ramas, y a su vez ésta aparece en una subrama y así sucesivamente. Se puede intuir que en este futuro trabajo se mantendría la componente aleatoria.

6.- Desde un punto de vista ecológico, y basado solamente en las observaciones sobre el terreno, podemos asegurar que en las playas limpias se detectan más estructuras sedimentarias (rill-marks) que en playas sucias. Esta observación, sin base científica,

podría ser objeto de un trabajo de investigación en donde jugaría, también, un papel importante, otros factores no considerados en el presente trabajo como, por ejemplo, la inclinación del subsuelo correspondiente a la capa impermeabilizada.

7.- Un aspecto importante que debemos considerar en un futuro trabajo es la validación puramente estadística del fenómeno. Aquí, podemos proceder de la siguiente forma:

- a) Obtenemos una muestra, suficientemente amplia, de las medidas básicas de los rill-marks, que pueden ser la anchura de las ramas, la distancia hasta que aparece el tronco común y el canal de deposición. Con los datos anteriores deducimos la figura "media" que configura dicha muestra.
- b) De forma análoga, obtenemos igual número de simulaciones para contrastar las medidas (proporcionales) con las obtenidas sobre el terreno.
- c) El esquema estadístico a seguir podría ser un test de hipótesis de diferencia de medias con un nivel de confianza del 95% ( para contrastar parejas de medias). También, se puede aplicar un análisis de la varianza de un sólo factor con tres muestras simultáneas, recurriendo a la prueba de Tukey (para muestras de igual tamaño) en caso de que exista alguna discrepancia en alguna diferencia de medias.

## APÉNDICE A

### INTEGRALES ESTOCÁSTICAS MÚLTIPLES

Se puede formular la teoría de las integrales estocásticas múltiples de un modo muy elegante utilizando una ordenación filtrante en el conjunto  $M$  de todos los multiíndices  $\alpha = (j_1, j_2, \dots, j_\lambda)$ , donde  $j_i \in \{0, 1, \dots, m\}$  para  $i \in \{1, 2, \dots, \lambda\}$ ,  $m=1, 2, 3, \dots$  y  $\lambda \equiv \lambda(\alpha) \in \{1, 2, \dots\}$ , indicando  $m$  el número de componentes del proceso de Wiener considerado y  $\lambda(\alpha)$  la longitud de  $\alpha$ . Llamaremos  $\nu$  al multiíndice de longitud 0. Denotaremos por  $n(\alpha)$  el número de componentes de  $\alpha$  nulos.

El conjunto de los multiíndices lo denotamos por:

$$M = \{(j_1, j_2, \dots, j_\lambda) / j_i \in \{0, 1, 2, \dots, m\}, i \in \{1, 2, \dots, \lambda\}, \lambda = 1, 2, \dots\} \cup \{\nu\}$$

Para  $\alpha \in M$  con  $\lambda(\alpha) \geq 1$  el símbolo  $-\alpha$  indica que se suprime la primera componente y  $\alpha -$  que se suprime la última.

#### Integrales múltiples de Itô.

Sean  $f = \{f(t) / t \geq 0\}$  procesos estocásticos continuos. Definimos los siguientes conjuntos:

$$a) H_\nu = \{f / \forall t \geq 0, |f(t, w)| < \infty \text{ c.p.1}\}$$

$$b) H_{(0)} = \left\{ f / \forall t \geq 0, \int_0^t |f(s, w)| ds < \infty \text{ c.p.1} \right\}$$

$$c) H_{(1)} = \left\{ f / \forall t \geq 0, \int_0^t |f(s, w)|^2 ds < \infty \text{ c.p.1} \right\}$$

Además, definimos  $H_{(j)} = H_{(1)}$  para  $j \in \{2, \dots, m\}$  si  $m \geq 2$ .

Para  $\alpha = (j_1, j_2, \dots, j_\lambda)$  con  $\lambda \geq 2$  definimos el conjunto  $H_\alpha$  como el conjunto de los procesos continuos  $f = \{f(t) / t \geq 0\}$  tales que el proceso integral  $\{I_{\alpha-}[f(\cdot)]_{\rho, t}, t \geq 0\}$  considerado como función de  $t$  verifica  $I_{\alpha-}[f(\cdot)]_{\rho, \cdot} \in H_{(j_\lambda)}$ .

Sean  $\rho$  y  $\tau$  dos valores temporales tales que  $0 \leq \rho \leq \tau \leq T$ . Para un multiíndice  $\alpha = (j_1, j_2, \dots, j_\lambda) \in M$  y un proceso  $f \in H_\alpha$ , definimos la integral múltiple de Itô con la siguiente fórmula de recurrencia:

$$I_\alpha[f]_{\rho,\tau} = \begin{cases} f(\tau) & \text{si } \lambda = 0 \\ \int_\rho^\tau I_{\alpha-}(f)_{\rho,s} ds & \text{si } \lambda \geq 1, j_\lambda = 0 \\ \int_\rho^\tau I_{\alpha-}(f)_{\rho,s} dW_s^{j_\lambda} & \text{si } \lambda \geq 1, j_\lambda \geq 1 \end{cases} \quad (1)$$

Como ejemplo, aplicando las relaciones anteriores se puede ver que:

$$I_{(0,2,1)}[f(\cdot)]_{0,t} = \int_0^t \int_0^{s_3} \int_0^{s_2} f(s_1) ds_1 dW_{s_2}^2 dW_{s_3}^1 \quad (2)$$

Cuando  $f(t)=1$ , tenemos la simplificación  $I_{\alpha,t} = I_\alpha[1]_{0,t}$  y  $W_t^0 = t$ , que nos dan las integrales de diversos órdenes del proceso de Wiener.

Es válido el siguiente teorema (véase Platen, 1992)

### TEOREMA

Supongamos que  $\alpha = (j_1, j_2, \dots, j_\lambda)$  con  $j_1 = j_2 = \dots = j_\lambda = j \in (0, 1, \dots, m)$  con  $\lambda \geq 2$ . Entonces para  $t \geq 0$  se verifica:

$$I_{\alpha,t} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda!} t^\lambda & j=0 \\ \frac{1}{\lambda} (W_t^j I_{\alpha-,t} - t I_{(\alpha-),t}) & j \geq 1 \end{cases} \quad (3)$$

la fórmula (3) nos traduce las integrales del tipo  $I_{(j,j,\dots,j)}t$  como un polinomio de Hermite en  $I_{(j),t}$  donde  $j \in \{1, \dots, m\}$ . En particular, tenemos:

$$I_{(j,j),t} = \frac{1}{2!} (I_{(j),t}^2 - t)$$

$$I_{(j,j,j),t} = \frac{1}{3!} (I_{(j),t}^3 - 3t I_{(j),t})$$

$$I_{(j,j,j,j),t} = \frac{1}{4!} \left( I_{(j),t}^4 - 6tI_{(j),t}^2 + 3t^2 \right)$$

$$I_{(j,j,j,j,j),t} = \frac{1}{5!} \left( I_{(j),t}^5 - 10tI_{(j),t}^3 + 15t^2I_{(j),t} \right)$$

$$I_{(j,j,j,j,j,j),t} = \frac{1}{6!} \left( I_{(j),t}^6 - 15tI_{(j),t}^4 + 45t^2I_{(j),t}^2 - 15t^3 \right)$$

## FUNCIONES COEFICIENTES

En este apartado introduciremos los operadores que aparecerán en el desarrollo general de las series estocásticas de Itô-Taylor obtenidas de la ecuación multidimensional de Itô:

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(s, X_s) ds + \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^t b^j(s, X_s) dW_s^j \quad (4)$$

Definimos los operadores:

$$L^0 = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^d a^k \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \sum_{k,\lambda=1}^d \sum_{j=1}^m b^{k,j} b^{\lambda,j} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_\lambda} \quad (5)$$

y para  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$  introducimos :

$$L^j = \sum_{k=1}^d b^{k,j} \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (6)$$

Para cada  $\alpha = (j_1, j_2, \dots, j_\lambda)$  y  $f \in C^h(\mathfrak{R}^+ \times \mathfrak{R}^d, \mathfrak{R})$  con  $h = \lambda(\alpha) + n(\alpha)$  definimos por recurrencia la función coeficiente de Itô:

$$f_\alpha = \begin{cases} f & \text{si } \lambda = 0 \\ L^{j_1} f_{-\alpha} & \text{si } \lambda \geq 1 \end{cases} \quad (7)$$

En el caso 1-dimensional  $d=m=1$  y para  $f(t,x)=x$ , tenemos:

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(s, X_s) ds + \int_{t_0}^t b(s, X_s) dW_s \quad (8)$$

$$L^0 = \frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \text{y} \quad L^1 = b \frac{\partial}{\partial x}$$

de donde se deducen las funciones:

$$f_{(0)} = a, \quad f_{(1)} = b, \quad f_{(1,1)} = bb', \quad f_{(0,1)} = ab' + \frac{1}{2} b^2 b''$$

$$f_{(0,1)} = L^0 f_{(1)} = L^0 b = ab' + \frac{1}{2} b^2 b'', \quad f_{(1,0)} = ba' \quad \text{y} \quad f_{(1,1,1)} = b[(b')^2 + bb'']$$

donde la derivada se entiende con respecto a  $x$ .

### CONJUNTOS JERÁRQUICOS Y RESIDUALES.

Sea  $A \subset M$  un conjunto que verifica las siguientes propiedades:

- $A \neq \emptyset$ .
- Los multiíndices de  $A$  están acotados en longitud, es decir:

$$\sup_{\alpha \in A} \lambda(\alpha) < \infty$$

- $\forall \alpha \in A - \{v\} \Rightarrow -\alpha \in A$

Se observa que el conjunto  $A = \{v, (0), (1), (1,1)\}$  es un conjunto jerárquico ya que verifica las condiciones anteriores.

Para todo conjunto jerárquico, definimos su conjunto residual por:

$$B(A) = \{\alpha \in M - A / -\alpha \in A\}$$

Como aplicación, podemos indicar que el residual del conjunto  $A$  del ejemplo anterior es:

$$B(A) = \{(0,0), (0,1), (1,0), (0,11), (1,1,1)\}$$

### DESARROLLO GENERALIZADO DE ITÔ-TAYLOR.

Expresamos, ahora, el desarrollo de Itô-Taylor para un proceso  $d$ -dimensional de Itô:

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(s, X_s) ds + \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^t b^j(s, X_s) dW_s^j \quad (9)$$

donde  $t \in [t_0, T]$ ,  $X_t$  es un proceso de dimensión  $d$  y  $a(t, X_t)$  es un vector de dimensión  $d$ .

**TEOREMA.**

Sean  $\rho, \tau$  dos valores de tiempo tales que  $t_0 \leq \rho \leq \tau \leq T$  en  $[t_0, T]$ ,  $A \subset M$  un conjunto jerárquico y  $f: \mathcal{R}^+ \times \mathcal{R}^d \rightarrow \mathcal{R}$ . Entonces el desarrollo de Itô-Taylor toma la forma:

$$f(\tau, X_\tau) = \sum_{\alpha \in A} I_\alpha [f_\alpha(\rho, X_\rho)]_{\rho, \tau} + \sum_{\alpha \in B(A)} I_\alpha [f_\alpha(\cdot, X)]_{\rho, \tau} \quad (10)$$

suponiendo que todos los elementos que involucra esta fórmula existan.

Aplicando la fórmula (10) al caso unidimensional  $d=m=1$ , para  $f(t, x)=x$ ,  $\rho = t_0, \tau = t$  y el conjunto jerárquico  $A = \{\alpha \in M / \lambda(\alpha) \leq 3\}$ , y teniendo en cuenta la ecuación autónoma de Itô con  $a=a(x)$ ,  $b=b(x)$ , tenemos:

$$\begin{aligned} X_t = & X_{t_0} + aI_{(0)} + bI_{(1)} + \left( aa' + \frac{1}{2} b^2 a'' \right) I_{(0,0)} + \left( ab' + \frac{1}{2} b^2 b'' \right) I_{(0,1)} + \\ & + ba' I_{(1,0)} + bb' I_{(1,1)} + \left[ a \left( aa'' + (a')^2 + bb'a'' + \frac{1}{2} b^2 a''' \right) + \frac{1}{2} b^2 (aa''' + 3a'a'') \right. \\ & + \left. \left( (b')^2 + bb'' \right) a'' + 2bb'a''' + \frac{1}{4} b^4 a^{(4)} \right] I_{(0,0,0)} + \left[ a \left( a'b' + ab'' + bb'b'' + \frac{1}{2} b^2 b''' \right) \right. \\ & + \left. \frac{1}{2} b^2 \left( a''b' + 2a'b'' + ab''' + \left( (b')^2 + bb'' \right) b'' + 2bb'b''' + \frac{1}{2} b^2 b^{(4)} \right) \right] I_{(0,0,1)} + \\ & + \left[ a(b'a' + ba'') + \frac{1}{2} b^2 (b''a' + 2b'a'' + ba''') \right] I_{(0,1,0)} + \\ & + \left[ a \left( (b')^2 + bb'' \right) + \frac{1}{2} b^2 (b'b'' + 2bb'' + bb''') \right] I_{(0,1,1)} + \\ & + b \left( aa'' + (a')^2 + bb'a'' + \frac{1}{2} b^2 a''' \right) I_{(1,0,0)} + b \left( ab'' + a'b' + bb'b'' + \frac{1}{2} b^2 b''' \right) I_{(1,0,1)} + \\ & + b(a'b' + a''b) I_{(1,1,0)} + b \left( (b')^2 + bb'' \right) I_{(1,1,1)} + R \end{aligned}$$

Este truncamiento será el que alumbre los esquemas numéricos según el criterio de la convergencia fuerte.

El siguiente ejemplo muestra que el desarrollo de Itô-Taylor generaliza de modo natural la fórmula de Itô. Para ello, sea el conjunto jerárquico  $A=\{v\}$  siendo su conjunto residual:

$$B(A)=\{(0),(1),(2),\dots,(m)\}$$

Entonces, la fórmula (10) toma la forma:

$$\begin{aligned} f(\tau, X_\tau) &= I_v[f_v(\rho, X_\rho)]_{\rho, \tau} + \sum_{\alpha \in B(A)} I_\alpha[f_\alpha(\cdot, X)]_{\rho, \tau} = \\ &= f(\rho, X_\rho) + \int_\rho^\tau L^0 f(s, X_s) ds + \sum_{j=1}^m \int_\rho^\tau L^j f(s, X_s) dW_s^j \end{aligned} \quad (11)$$

que es la fórmula de Itô, y se observa que el resto tiene sólo integrales de Itô de multiplicidad 1.

Como hemos indicado anteriormente, el desarrollo de Itô-Taylor así definido puede considerarse como una generalización de la fórmula determinista de Taylor. Para ilustrar este hecho, podemos establecer el caso particular  $d=1$ ,  $f(t,x)=f(x)$ ,  $a=1$ ,  $b=0$ ,  $\rho=0$ ,  $\tau=t \in [0, T]$ . También vamos a considerar el proceso de Itô:

$$X_t \equiv t \quad \forall t \in [0, T] \quad (12)$$

con el fin de obtener la fórmula de Taylor en la variable tiempo.

Teniendo en cuenta (7) y los operadores  $L^0$  y  $L^j$ , las funciones coeficientes de Itô con multiíndices  $\alpha = (j_1, j_2, \dots, j_\lambda)$ , desaparecen cuando  $j_i \geq 1$ , quedando:

$$f_\alpha = \begin{cases} f & \text{si } \alpha = v \\ f^{(\lambda)} & \text{si } \lambda \geq 1 \text{ y } j_1 = \dots = j_\lambda = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Para cada valor de  $\lambda$  tomamos el siguiente conjunto jerárquico:

$$\Gamma_\lambda = \{\alpha \in M / \lambda(\alpha) \leq \lambda\} \quad (14)$$

y su complementario:

$$B(\Gamma_\lambda) = \{\alpha \in M / \lambda(\alpha) = 1 + \lambda\} \quad (15)$$

entonces por la definición de integral múltiple (1), tenemos:

$$I_\alpha[f(X)]_{t_0, t} = \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^{s_2} f(s_1) ds_1 \dots ds_k$$

para  $0 \leq t_0 \leq t < \infty$ ,  $\alpha = (j_1, \dots, j_k)$ ,  $j_1 = \dots = j_k = 0$  y  $k = 1, 2, \dots$  y  $f \in H_\alpha$ . Teniendo en cuenta las expresiones anteriores, el desarrollo de Itô-Taylor (10) se reduce a:

$$\begin{aligned} f(t) &= f(X_{t_0}) + \sum_{\alpha \in \Gamma_k - \{v\}} I_\alpha[f_\alpha(X_{t_0})]_{t_0, t} + \sum_{\alpha \in B(\Gamma_k)} I_\alpha[f_\alpha(X)]_{t_0, t} = \\ &= \sum_{i=0}^k \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^{s_2} f^{(i)}(X_{t_0}) ds_1 \dots ds_i + \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^{s_2} f^{(k+1)}(X_{s_1}) ds_1 \dots ds_{k+1} = \\ &= f(t_0) + \sum_{i=1}^k \frac{1}{i!} f^{(i)}(t_0)(t - t_0) + \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^{s_2} f^{(k+1)}(s_1) ds_1 \dots ds_{k+1} \end{aligned}$$

que es el desarrollo de Taylor en el campo determinista.

### MOMENTOS DE LAS INTEGRALES MÚLTIPLES

Para aplicar los desarrollos estocásticos de Ito-Taylor es preciso conocer los momentos de primero y segundo órdenes, así como las covarianzas que aparecen en dichos desarrollos.

Para obtener las expresiones de los momentos es necesario tener en cuenta que las integrales múltiples dependen del proceso de Wiener y por tanto sabemos que  $E(\Delta W) = 0$ ,  $E(\Delta W^2) = \Delta$ .

Son válidos los siguientes lemas (véase [25]):

LEMA 1:

Sea  $\alpha \in M - \{v\}$  con  $\lambda(\alpha) \neq n(\alpha)$ ,  $f \in H_\alpha$  y  $t_0 \leq \rho \leq \tau \leq T$ . Entonces se verifica:

$$E(I_\alpha[f]_{\rho, \tau}) = 0 \quad \text{c.p.1}$$

LEMA2:

Sean  $\alpha, \beta \in M$ ,  $f \in H_\alpha$ ,  $g \in H_\beta$  y  $0 \leq \rho \leq \tau \leq T$ . Entonces se verifica la siguiente relación:

$$E(I_\alpha(f)I_\beta(g)) \begin{cases} = 0 & \text{si } \alpha^+ \neq \beta^+ \\ \leq K_{f,g} \frac{(\tau - \rho)^{\omega(\alpha, \beta)}}{\omega(\alpha, \beta)!} \prod_{i=0}^{\lambda(\alpha^+)} C_{k_i(\alpha) + k_i(\beta)}^{k_i(\alpha)} & \text{si } \alpha^+ = \beta^+ \end{cases}$$

Siendo:

$\alpha^+$  la n-upla que resulta de suprimir los ceros en  $\alpha$

$k_0(\alpha)$  el número de componentes de  $\alpha$  iguales a cero anterior a la primera componente no nula.

$k_i(\alpha)$  es el número de componentes de  $\alpha$  entre la componente i-ésima no nula y la i+1-ésima no nula i toma los valores de 1 hasta  $\lambda(\alpha^+)$ .

$$C_i^k = \frac{i!}{k!(i-k)!} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

$$\omega(\alpha, \beta) = \lambda(\alpha^+) + \sum_{i=0}^{\lambda(\alpha^+)} [k_i(\alpha) + k_i(\beta)]$$

$K_{f,g} = \text{Sup}_{s_1, s_2 \in [\rho, \tau]} E(|f(s_1)g(s_2)|)$ . Si las funciones  $f \equiv g \equiv 1$  (que son las integrales que nos interesan) se produce la igualdad.

Como aplicación de estos lemas podemos calcular la media, varianza y covarianza de la integral que aparece en el esquema fuerte de Itô-Taylor de orden 3/2, que

$$\text{designamos por } \Delta Z = I_{(1,0)} = \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \int_{\tau_n}^{s_2} dW_{s_1} ds_2.$$

$$E(I_{(1,0)}) = [1(\alpha) - n(\alpha)] = 0$$

$$E(I_{(0,1)}^2) = E(I_{(0,1)}I_{(0,1)}) = \left[ \begin{array}{l} \alpha = (0, 1) \Rightarrow \alpha^+ = (1) \\ k_0(\alpha) = 1; k_1(\alpha) = 0, k_0(\beta) = 1 \end{array} \right] = \frac{\Delta^3}{3!} \prod_{i=0}^1 C_{k_i(\alpha) + k_i(\beta)}^{k_i(\alpha)} = \frac{\Delta^3}{3}$$

ya que  $\omega(\alpha, \beta) = 1 + \sum_{i=0}^1 [k_i(\alpha) + k_i(\beta)] = 3$ .

$$E(I_{(1)}I_{(0,1)}) = \frac{\Delta^2}{2!} \prod_{i=0}^1 C_{k_i(\alpha)+k_i(\beta)}^{k_i(\alpha)} = \frac{1}{2} \Delta^2, \quad \alpha = (1) = \alpha^+ \Rightarrow l(\alpha^+) = 1, k_0(\alpha) = 0$$

y  $\beta = (0,1) \Rightarrow \beta^+ = (1), \lambda(\beta^+) = 1, k_0(\beta) = 1, k_1(\beta) = 0$  y  $\omega(\alpha, \beta) = 2$ . Podemos hallar también el producto de las combinaciones:

$$\prod_{i=0}^1 C_{k_i(\alpha)+k_i(\beta)}^{k_i(\alpha)} = C_{k_0(\alpha)+k_0(\beta)}^{k_0(\alpha)} C_{k_1(\alpha)+k_1(\beta)}^{k_1(\beta)} = C_1^0 C_0^0 = 1.$$

$$\begin{aligned} E(I_{(1,0)}^2) &= E\left(\left[\Delta I_{(1)} - I_{(0,1)}\right]^2\right) = \Delta^2 E(I_{(1)}^2) - 2\Delta E(I_{(1)}I_{(0,1)}) + E(I_{(0,1)}^2) = \\ &= \Delta^2 \Delta - 2\Delta \frac{1}{2} \Delta^2 + \frac{1}{3} \Delta^3 = \frac{1}{3} \Delta^3. \end{aligned}$$

Por tanto, la variable aleatoria  $\Delta Z$  está normalmente distribuida con los siguientes momentos:

$$E(\Delta Z) = 0, \quad E(\Delta Z^2) = \frac{1}{3} \Delta^3, \quad E(\Delta W \Delta Z) = \frac{1}{2} \Delta^2. \quad (16)$$

### ORDEN DE ERROR EN LOS TRUNCAMIENTOS DE LOS DESARROLLOS DE ITÔ-TAYLOR.

En los desarrollos deterministas de Taylor sabemos que el error local en un esquema numérico es el obtenido del primer término despreciado y el error global es una unidad inferior.

En el caso estocástico el resultado anterior no es válido debido a que el desarrollo de Itô-Taylor involucra términos aleatorios cuyos órdenes tienen que ser valorados según teoremas establecidos en la teoría de las ecuaciones diferenciales estocásticas. En nuestro caso, enunciaremos, sin demostración, un teorema sencillo:

#### TEOREMA

Supongamos que la función  $f \in L^2$  en  $[t_0, T]$ . Entonces :

a)  $E[I_\alpha(f, t_0, T)] = 0$ .

$$b) E[I_{\alpha}^2(f, t_0, T)] = O(T - t_0)^{[\lambda(\alpha) + n(\alpha)]}.$$

Estos resultados están establecidos mediante la convergencia en media cuadrática; por tanto, en el caso de la convergencia fuerte, la tesis del teorema queda en la forma:

$$a) E[I_{\alpha}(f, t_0, T)] = 0.$$

$$b) \sqrt{E[I_{\alpha}^2(f, t_0, T)]} = O(T - t_0)^{\frac{1}{2}[\lambda(\alpha) + n(\alpha)]}.$$

Como aplicación del teorema consideramos el esquema numérico de Euler-Maruyama:

$$X_t = X_{t_0} + aI_{(0)} + bI_{(1)} + R.$$

y se tiene, según la convergencia fuerte con  $\Delta = T - t_0$ , los valores:

$$E(I_{(0)}^2) = O(\Delta^1) \quad \text{y} \quad E(I_{(1)}^2) = O(\Delta^{1/2}).$$

y el resto contiene las integrales del tipo  $I_{(0,0)}, I_{(0,1)}, I_{(1,0)}, I_{(1,1)}$ , siendo sus órdenes según la convergencia fuerte:

$$E(I_{(0,0)}^2) = O(\Delta^2) \quad , \quad E(I_{(1,0)}^2) = O(\Delta^{3/2}).$$

$$E(I_{(0,1)}^2) = O(\Delta^{3/2}) \quad , \quad E(I_{(1,1)}^2) = O(\Delta^1).$$

Observamos que el orden de truncamiento es  $1/2$ , mientras que el orden del error de truncamiento global es  $1$ .

## APÉNDICE B

### EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES PARA UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL ESTOCÁSTICA DE ITÔ.

Para demostrar un teorema de existencia y unicidad de procesos para ecuaciones diferenciales estocásticas, seguiremos un camino análogo al del teorema de Picard para las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Por solución  $X(t)$  de una ecuación diferencial estocástica:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t) \quad (1)$$

como ya hemos visto anteriormente, se entiende un proceso  $X(t)$  que verifica dicha ecuación. De forma equivalente, para todo  $t$  en algún intervalo  $[0, T]$ ,  $X(t)$  satisface la ecuación integral:

$$X(t) = X_0 + \int_0^t f(s, X(s))ds + \int_0^t g(s, X(s))dW(s) \quad (2)$$

donde  $X_0$  es el valor inicial  $X(0)$ , la primera integral en (2) es una integral ordinaria en el intervalo considerado, y la segunda es una integral estocástica de Itô. Daremos un teorema de existencia y unicidad para las soluciones.

Por necesidad en la demostración del teorema de existencia, veremos antes los siguientes lemas.

#### **LEMA 1:( desigualdad de Bellman-Gronwall)**

Si  $a(t)$  y  $b(t)$  son funciones acotadas y medibles, tal que para algún  $L > 0$  es  $a(t) \leq b(t) + L \int_0^t a(s)ds$ , entonces se verifica que:

$$a(t) \leq b(t) + L \int_0^t e^{L(t-s)} b(s)ds$$

**Demostración:**

Hagamos la demostración del caso general:

$$a(t) \leq b(t) + \int_0^t W(s)a(s)ds \Rightarrow a(t) \leq b(t) + \int_0^t W(s)b(s)e^{\int_s^t W(\tau)d\tau}$$

para alguna función adecuada de peso,  $W(s)$ .

(En nuestro caso, hacemos  $W(s)=L$  y  $\int_s^t W(\tau)d\tau = L \int_s^t d\tau = L(t-s)$ )

En efecto: Si llamamos  $M(t) = \int_0^t W(s)a(s)ds$ , derivando queda

$$M'(t) = W(t)a(t) \leq W(t)[b(t) + M(t)]$$

de donde:

$$\frac{d}{dt} \left[ M(t)e^{-\int_0^t W(\tau)d\tau} \right] \leq e^{-\int_0^t W(\tau)d\tau} W(t)b(t)$$

e integrando se obtiene la conclusión del teorema.

**LEMA 2:( sobre la acotación de momentos de segundo orden)**

Supongamos que  $f$  y  $g$  satisfacen las condiciones:

1. Las funciones  $f(t,x)$  y  $g(t,x)$  son medibles con respecto a  $t$  y  $x$ .
2. Existe una constante  $K>0$  tal que  $\forall t \in [0, T]$  y  $(x,y) \in \mathfrak{R}^2$  es:
  - a)  $|f(t,x) - f(t,y)| + |g(t,x) - g(t,y)| \leq K|x - y|$ .
  - b)  $|f(t,x)|^2 + |g(t,x)|^2 \leq K^2(1 + |x|^2)$ .
3. La  $\sigma$ -álgebra generada por  $Y_i(s)$  y  $W(s)$ ,  $s \leq t$  es independiente del incremento  $W(t+r)-W(t)$ ,  $r>0$ .
4.  $\sup_{[0,T]} EY_i^2(t) < \infty$ .

Si el proceso  $Z_i$  está definido sobre  $[0, T]$  por:

$$Z_i(t) = X_0 + \int_0^t f(s, Y_i(s))ds + \int_0^t g(s, Y_i(s))dW(s) \quad (3)$$

entonces existe una constante  $L>0$  tal que:

$$E[Z_1(t) - Z_2(t)]^2 \leq L \int_0^t E[Y_1(s) - Y_2(s)]^2 ds \quad (4)$$

Veamos la interpretación de este lema: las dos primeras condiciones hacen referencia a dos propiedades que deben cumplir las funciones reales  $f$  y  $g$  conocidas en el campo determinista. La tercera condición involucra dos procesos estocásticos que generan un campo de actuación donde se impone la independencia de los procesos a partir de un cierto valor temporal. La cuarta condición dice que los momentos de segundo orden están acotados. La tesis asegura la acotación del momento de la diferencia de procesos  $Z_i$  a través de la integral de los procesos  $Y_i$ .

Este lema nos facilitará la demostración del teorema de existencia ya que los  $Z_i$  se convertirán en aproximaciones de la solución de la ecuación diferencial estocástica dada.

demostración:

De la relación (3), tenemos:

$$Z_1(t) - Z_2(t) = \int_0^t [f(s, Y_1(s)) - f(s, Y_2(s))] ds + \int_0^t [g(s, Y_1(s)) - g(s, Y_2(s))] dW(s)$$

de donde, teniendo en cuenta la relación  $2pq \leq p^2 + q^2$ :

$$[Z_1(t) - Z_2(t)]^2 \leq 2 \left[ \int_0^t [f(s, Y_1(s)) - f(s, Y_2(s))] ds \right]^2 + 2 \left[ \int_0^t [g(s, Y_1(s)) - g(s, Y_2(s))] dW(s) \right]^2 \quad (5)$$

y usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\left[ \int_0^t h(s) ds \right]^2 \leq \int_0^t 1^2 ds \int_0^t h^2(s) ds = t \int_0^t h^2(s) ds$$

en el primer término del segundo miembro de (5) junto con la suposición de 2a sobre  $f$ , obtenemos:

$$\left[ \int_0^t (f(s, Y_1(s)) - f(s, Y_2(s))) ds \right]^2 \leq K^2 t \int_0^t [Y_1(s) - Y_2(s)]^2 ds. \quad (6)$$

puesto que  $E \int_0^t [g(s, Y_1(s)) - g(s, Y_2(s))]^2 ds \leq K^2 E \int_0^t [Y_1(s) - Y_2(s)]^2 ds < \infty$ , se tiene que,  $g(\cdot, Y_1(\cdot)) - g(\cdot, Y_2(\cdot)) \in L^2$ . Por lo tanto:

$$E \left[ \int_0^t [g(s, Y_1(s)) - g(s, Y_2(s))] dW(s) \right]^2 = \int_0^t E [g(s, Y_1(s)) - g(s, Y_2(s))]^2 ds \quad (7)$$

Tomando esperanzas en (5), tenemos:

$$\begin{aligned} E[Z_1(t) - Z_2(t)]^2 &\leq 2E \left[ \int_0^t [f(s, Y_1(s)) - f(s, Y_2(s))] \right]^2 + \\ &\quad + 2E \left[ \int_0^t [g(s, Y_1(s)) - g(s, Y_2(s))] dW(s) \right]^2 \leq \\ &\leq 2K^2 E \left[ \int_0^t [Y_1(s) - Y_2(s)]^2 ds \right] + 2 \int_0^t E [g(s, Y_1(s)) - g(s, Y_2(s))]^2 ds \leq \\ &\leq 2K^2 T E \int_0^t [Y_1(s) - Y_2(s)]^2 ds + 2 \int_0^t E [g(s, Y_1(s)) - g(s, Y_2(s))]^2 ds = \\ &== 2K^2 T \int_0^t E [Y_1(s) - Y_2(s)]^2 ds + 2 \int_0^t E [g(s, Y_1(s)) - g(s, Y_2(s))]^2 ds \leq \\ &\leq (2K^2 T + 2K^2) \int_0^t E [Y_1(s) - Y_2(s)]^2 ds, \text{ de donde se deduce la tesis teniendo en cuenta} \end{aligned}$$

que  $L = 2(T+1)K^2$ .

### TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES ESTO-CÁSTICAS

Supongamos que:

1) Las funciones  $f(t, x)$  y  $g(t, x)$  son medibles en  $[0, T] \times \mathfrak{R}$ .

2)  $\exists K > 0 / \forall t \in [0, T]$  y  $(x, y) \in \mathfrak{R}^2$ , se cumple:

$$a) |f(t, x) - f(t, y)| + |g(t, x) - g(t, y)| \leq K|x - y|. \quad (\text{condición conjunta de}$$

Lipschitz).

$$b) |f(t, x)|^2 + |g(t, x)|^2 \leq K^2(1 + |x|^2). \quad (\text{condición de crecimiento conjunto}).$$

3)  $X_0$  es independiente de  $W(t)$ , para  $t > 0$ , y  $EX_0^2 < \infty$ .

Entonces, existe una solución  $X(t)$  de la ecuación:

$$X(t) = X_0 + \int_0^t f(s, X(s))ds + \int_0^t g(s, X(s))dW(s) \quad (8)$$

definida en  $[0, T]$ , que es continua con probabilidad 1 y tal que:

$$\text{Sup}_{[0, T]} EX^2(t) < \infty$$

Además, una solución con esas propiedades es única, y si existe otra solución  $Y(t)$  de (1) se verifica :

$$\forall t \in [0, T], P(\text{Sup}|X(t) - Y(t)| = 0) = 1$$

Demostración:

Vamos a utilizar una variante del punto fijo de Picard (Lipschitz 1876).

Como en el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias, consideramos la sucesión de aproximaciones  $\{X_n\}$  definidas por:

$$X_n(t) = X_0 + \int_0^t f(s, X_{n-1}(s))ds + \int_0^t g(s, X_{n-1}(s))dW(s) \quad (9)$$

$$X_0(t) = X_0$$

y tenemos que demostrar que dicha sucesión converge a la solución única  $X(t)$ .

Haremos la demostración verificando los siguientes apartados:

- i) La sucesión  $\{X_n\}$  es uniformemente acotada en media cuadrática sobre el compacto  $[0, T]$ .
- ii)  $\{X_n\}$  converge uniformemente en media cuadrática.
- iii)  $\{X_n\}$  es uniformemente convergente con probabilidad 1.
- iv)  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n$  es una solución de (1).
- v) Dos soluciones cualesquiera de (1) se aproximan con probabilidad 1.

i) Para empezar, demostraremos que la sucesión es uniformemente acotada, esto es, para alguna constante  $M$  y todo número natural  $n$  se cumple:

$$\sup_{[0,T]} EX_n^2(t) \leq M < \infty \quad (10)$$

Elevando la primera ecuación de (9) al cuadrado, usando la desigualdad  $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$  y tomando posteriormente esperanza en los dos miembros, se tiene:

$$EX_n^2(t) \leq 3 \left\{ EX_0^2 + E \left[ \int_0^t f(s, X_{n-1}(s)) ds \right]^2 + E \left[ \int_0^t g(s, X_{n-1}(s)) dW(s) \right]^2 \right\}$$

observando el segundo lema, tenemos

$$\left[ \int_0^t h(s) ds \right]^2 \leq t \int_0^t h^2(s) ds$$

de donde se tiene las expresiones:

$$E \left[ \int_0^t f(s, X_{n-1}(s)) ds \right]^2 \leq t E \int_0^t f^2(s, X_{n-1}(s)) ds$$

$$E \left[ \int_0^t g(s, X_{n-1}(s)) dW_s \right]^2 = E \int_0^t g^2(s, X_{n-1}(s)) ds$$

de donde se obtiene la desigualdad:

$$EX_n^2(t) \leq 3 \left\{ EX_0^2 + TE \int_0^t f^2(s, X_{n-1}(s)) ds + E \int_0^t g^2(s, X_{n-1}(s)) ds \right\}$$

y teniendo en cuenta la condición 2b) de la hipótesis, resulta:

$$EX_n^2(t) \leq 3 \left\{ EX_0^2 + TE \int_0^t k^2 (1 + |X_{n-1}(s)|^2) ds + E \int_0^t k^2 (1 + |X_{n-1}(s)|^2) ds \right\}$$

Aplicando el teorema de Fubini y usando  $E(X(t) + f(t)) = EX(t) + f(t)$ , con  $f$  no aleatoria, obtenemos:

$$EX_n^2(t) \leq 3 \left\{ EX_0^2 + TK^2 \int_0^t [1 + EX_{n-1}^2(s)] ds + K^2 \int_0^t [1 + EX_{n-1}^2(s)] ds \right\}$$

$$EX_n^2(t) \leq 3 \left\{ EX_0^2 + k^2(T+1) \int_0^t [1 + EX_{n-1}^2(s)] ds \right\}, \text{ de donde:}$$

$$EX_n^2(t) \leq 3 \left\{ EX_0^2 + Mt + M \int_0^t EX_{n-1}^2(s) ds \right\} \quad (11)$$

aquí hemos tomado  $M = k^2(T+1)$  siendo  $T$  el extremo superior del intervalo  $[0, T]$ .

Iterando (11):

$$\begin{aligned} EX_n^2(s) &\leq 3 \left\{ EX_0^2 + Mt + M \int_0^t \left( EX_0^2 + Ms + M \int_0^s EX_{n-2}^2(r) dr \right) ds \right\} = \\ &= 3 \left\{ EX_0^2 + Mt + 3M \int_0^t EX_0^2 ds + 3M^2 \int_0^t s ds + 3M^2 \int_0^t \int_0^s EX_{n-2}^2(r) dr ds \right\} \\ &= 3 \left\{ (1 + 3Mt) EX_0^2 + Mt + 3M^2 \frac{t^2}{2} + 3M^2 \int_0^t (t-s) EX_{n-2}^2(s) ds \right\} \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la igualdad  $\int_0^t \int_0^s EX_{n-2}^2(r) dr ds = \int_0^t (t-s) EX_{n-2}^2(s) ds$

Haciendo  $n-1$  iteraciones a la desigualdad:

$$EX_n^2(t) \leq 3 \left\{ (1 + 3Mt) EX_0^2 + Mt + 3M^2 \frac{t^2}{2} + 3M^2 \int_0^t (t-s) EX_{n-2}^2(s) ds \right\}$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} EX_n^2(t) &\leq 3 \left\{ \left( 1 + 3Mt + \dots + \frac{1}{(n-1)!} (3Mt)^{n-1} \right) EX_0^2 \right\} + 3Mt + \dots + \frac{1}{n!} (3Mt)^n + \\ &+ (3M)^n \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} EX_0^2 ds \left\} \leq \\ &3 \left\{ \left( 1 + 3Mt + \dots + \frac{(3Mt)^{n-1}}{(n-1)!} \right) EX_0^2 + \left( 1 + 3Mt + \dots + \frac{(3Mt)^n}{n!} \right) + \frac{(3Mt)^n}{n!} EX_0^2 \right\} \leq \\ &\leq 3(EX_0^2 + 1)e^{3TM} \end{aligned}$$

aquí hemos empleado la igualdad:

$$\int_0^t (t-s)^n \int_0^s h(r) dr ds = \int_0^t \frac{(t-s)^{n+1}}{n+1} h(s) ds \quad (12)$$

y como se verifica en todo el intervalo, podemos escribir:

$$\text{Sup}_{[0,T]} EX_n^2(t) \leq (3EX_0^2 + 1)e^{3LT} \quad (13)$$

observando que el segundo miembro de (13) es constante. Por lo tanto, el paso (i) se verifica, es decir, que la sucesión de las aproximaciones está uniformemente acotada.

Para probar el paso (ii), tenemos que recurrir al segundo de los lemas previos. En efecto, teniendo en cuenta la relación (9), resulta:

$$\begin{aligned} X_{n+1}(t) - X_n(t) &= \int_0^t [f(s, X_n(s)) - f(s, X_{n-1}(s))] ds + \\ &+ \int_0^t [g(s, X_n(s)) - g(s, X_{n-1}(s))] dW(s) \end{aligned} \quad (14)$$

Elevando al cuadrado, tomando esperanzas y aplicando el lema citado tenemos:

$$E[X_{n+1}(t) - X_n(t)]^2 \leq L \int_0^t E[X_n(s) - X_{n-1}(s)]^2 ds \quad (15)$$

Iterando en (44):

$$\begin{aligned} E[X_{n+1}(t) - X_n(t)]^2 &\leq L \int_0^t \left[ L \int_0^s E[X_{n-1}(r) - X_{n-2}(r)]^2 dr \right] ds \leq \\ &\leq L^2 \int_0^t \int_0^s E[X_{n-1}(r) - X_{n-2}(r)]^2 dr ds = L^2 \int_0^t (t-s) [E(X_{n-1}(s) - X_{n-2}(s))]^2 ds \end{aligned}$$

y haciendo uso de (1.11), llegamos a:

$$E[X_{n+1}(t) - X_n(t)]^2 \leq L^n \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} E[X_1(s) - X_0(s)]^2 ds \quad (16)$$

Procediendo, ahora, directamente desde el caso  $n=1$  en (38), haciendo uso de la hipótesis 2b y teniendo en cuenta el apartado anterior, tenemos:

$$E[X_1(t) - X_0(t)]^2 \leq L \int_0^t [1 + EX_0^2] ds \leq LT [1 + EX_0^2] = C$$

De (45) se sigue que para todo natural  $n$  es:

$$\sup_{[0, T]} E[X_{n+1}(t) - X_n(t)]^2 \leq C \frac{(LT)^n}{n!} \quad (17)$$

La desigualdad anterior establece la convergencia uniforme en media cuadrática de la sucesión  $\{X_n\}$ , por lo tanto queda demostrado el apartado (ii).

Seguidamente pasamos a demostrar el apartado (iii), que nos asegura la convergencia uniforme de  $\{X_n\}$  con probabilidad 1. Consideramos la sucesión  $\{Y_n\}$  dada por:

$$Y_n = \sup_{[0, T]} |X_{n+1}(t) - X_n(t)|$$

de donde:

$$Y_n = \sup_{[0, T]} \left| \int_0^t [f(s, X_n(s)) - f(s, X_{n-1}(s))] ds + \int_0^t [g(s, X_n(s)) - g(s, X_{n-1}(s))] dW(s) \right|$$

y de aquí:

$$Y_n \leq \int_0^T |f(s, X_n(s)) - f(s, X_{n-1}(s))| ds + \sup_{[0, T]} \left| \int_0^t [g(s, X_n(s)) - g(s, X_{n-1}(s))] dW(s) \right|$$

(18)

para continuar necesitamos hacer uso de los siguientes hechos:

$$1) \left[ \int_0^t 1 \cdot h(s) \right]^2 \leq \int_0^t 1 \cdot \int_0^t h^2(s) = t \cdot \int_0^t h^2(s) ds$$

$$2) \left[ \sup_{[0,T]} \left| \int_0^t (g(s, X_n(s)) - g(s, X_{n-1}(s))) dW(s) \right| \right]^2 \leq \\ \leq \sup_{[0,T]} \left| \int_0^t [g(s, X_n(s)) - g(s, X_{n-1}(s))] dW(s) \right|^2$$

3) teniendo en cuenta que  $2ab \leq a^2 + b^2$ , tenemos:

$$2 \left( \int_0^T |f(s, X_n(s)) - f(s, X_{n-1}(s))| ds \right) \left( \sup_{[0,T]} \left| \int_0^t [g(s, X_n(s)) - g(s, X_{n-1}(s))] dW(s) \right| \right) \leq \\ \leq \left[ \int_0^T |f(s, X_n(s)) - f(s, X_{n-1}(s))| ds \right]^2 + \left[ \sup_{[0,T]} \left| \int_0^t [g(s, X_n(s)) - g(s, X_{n-1}(s))] dW(s) \right| \right]^2$$

Elevando (18) al cuadrado y haciendo uso de las desigualdades vistas anteriormente, tenemos:

$$Y_n^2(t) \leq 2T \int_0^T [f(s, X_n(s)) - f(s, X_{n-1}(s))]^2 ds + \\ + 2 \sup_{[0,T]} \left| \int_0^t [g(s, X_n(s)) - g(s, X_{n-1}(s))] dW(s) \right|^2$$

y tomando esperanzas en ambos miembros:

$$E(Y_n^2(t)) \leq 2TE \int_0^t [f(s, X_n(s)) - f(s, X_{n-1}(s))]^2 ds + \\ + 2E \left[ \sup_{[0,T]} \left| \int_0^t [g(s, X_n(s)) - g(s, X_{n-1}(s))] dW(s) \right|^2 \right]$$

haciendo uso del siguiente teorema :

Si  $f \in \mathcal{L}^2$  y  $X(t) = \int_0^t f(s) dW(s)$  entonces se verifica,

$$E \left[ \sup_{[0, T]} |X(t)|^2 \right] \leq 4E \left[ \int_0^t f^2(t) dt \right]$$

aplicando la condición 2a de la hipótesis:

$$\begin{aligned} EY_n^2 &\leq 2K^2T \int_0^T E[X_n(s) - X_{n-1}(s)]^2 ds + 8K^2 \int_0^T E[X_n(s) - X_{n-1}(s)]^2 ds \leq \\ &\leq \frac{C_1(LT)^{n-1}}{(n-1)!} \end{aligned} \quad (19)$$

donde  $C_1 = [2T + 8]CK^2$ .

Aplicando a continuación el teorema:

Si  $f \in L^2$  y  $X(t) = \int_a^t f(s)dW(s)$ , entonces se verifica:

$$P \left( \sup_{[a, b]} |X(t)| > r \right) \leq \left( \frac{1}{r^2} \right) E \left( \int_a^b f^2(t) dt \right)$$

tenemos:

$$\begin{aligned} P \left( Y_n(t) > \frac{1}{n^2} \right) &= P \left( \sup_{[a, b]} |X_{n+1}(t) - X_n(t)| > \frac{1}{n^2} \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{n^2} E \left( \int_0^T |X_{n+1}(t) - X_n(t)|^2 dt \right) \end{aligned}$$

de donde se deduce:

$$\sum_1^\infty P \left( Y_n(t) > \frac{1}{n^2} \right) \leq \sum_1^\infty \frac{C_1(LT)^{n-1}}{(n-1)!} n^4 \quad \text{siendo esta una mayorante convergente}$$

de la primera

Utilizando el lema de Borel-Cantelli, que dice:

" Si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de sucesos y la serie  $\sum_1^{\infty} P(A_n)$  converge,

entonces  $P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = 0$ ."

tenemos para nuestro caso:

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} Y_n(t) > \frac{1}{n^2}\right) = 0 \Rightarrow P\left[\limsup_{n \rightarrow \infty} |X_{n+1}(t) - X_n(t)| \leq \frac{1}{n^2}\right] = 1$$

Por tanto, la convergencia uniforme de  $X_n(t) = X_0 + \sum_{k=1}^n [X_k(t) - X_{k-1}(t)]$  con

probabilidad 1 á  $X(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [X_n(t) - X_{n-1}(t)]$  está asegurada.

Veamos el apartado iv).

Debemos probar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(t)$  es solución de la ecuación diferencial estocástica de Itô. En efecto, tomando límites en la ecuación (38), tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(t) = X_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t f(s, X_{n-1}(s)) ds + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t g(s, X_{n-1}(s)) dW(s)$$

$$X(t) = X_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t f(s, X_{n-1}(s)) ds + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t g(s, X_{n-1}(s)) dW(s)$$

tenemos, por último, que demostrar los siguientes límites:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t f(s, X_{n-1}(s)) ds = \int_0^t f(s, X(s)) ds$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t g(s, X_{n-1}(s)) dW(s) = \int_0^t g(s, X(s)) dW(s)$$

La demostración del primer apartado es muy sencilla, basta aplicar la propiedad 2a de la hipótesis.

El segundo apartado se demuestra aplicando la convergencia en media cuadrática y usando, también, la propiedad 2a.

Finalmente, queda por demostrar el apartado (v). Supongamos que  $X(t)$  e  $Y(t)$  son soluciones de (1), por lo que son continuos con probabilidad 1 y acotado en media cuadrática sobre  $[0, T]$ . La función  $E[X(t) - Y(t)]^2$  es medible y acotada, y además verifica el segundo lema, por lo que:

$$E[X(t) - Y(t)]^2 \leq L \int_0^t E[X(s) - Y(s)]^2 ds \quad (20)$$

Por el lema primero  $E[X(t) - Y(t)]^2 = 0$ . Así, para  $\forall t \in [0, T]$ , la probabilidad de que ocurra ambos es 1, es decir  $P[X(t) = Y(t)] = 1$ , y también para cualquier subconjunto numerable  $B \subseteq [0, T]$ :

$$P[X(t) = Y(t), t \in B] = 1$$

Tomando  $B$  denso y haciendo uso de la continuidad c.p.1 de  $X$  e  $Y$ ,

$$P\left(\sup_{[0, T]} |X(t) - Y(t)| > 0\right) = 0 \quad (21)$$

Por tanto de (21) obtenemos la unicidad:

$$X(\cdot) = Y(\cdot) \quad \text{c.p.1}$$

queda, así, completada la demostración del teorema de existencia y unicidad de soluciones de EDEs.

Esta versión del teorema de existencia y unicidad incluye en la hipótesis un apartado (2) que lo hace muy restrictivo, aunque tiene la ventaja de que facilita una demostración elemental siguiendo una demostración análoga a la prueba clásica de las iteraciones de Picard para ecuaciones diferenciales ordinarias. El lema de Borel-Cantelli es la herramienta probabilística empleada para tratar la ecuación con términos aleatorios. Nótese que si la condición de Lipschitz (2a) se mantiene para la función  $f$  y si  $f$  es independiente de  $t$  o para algún  $t$ ,  $f$  es acotado en  $x$ , entonces  $f$  satisfará la condición 2b. También la condición 2a puede ser sustituida por la condición local de Lipschitz:

2a') Para cada  $N > 0$ , existe una constante positiva  $K(N)$  tal que  $\forall t \in [0, T]$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  con  $|x| \leq N, |y| \leq N$ , se tiene:

$$|f(t, x) - f(t, y)| + |g(t, x) - g(t, y)| \leq K(N)|x - y|$$

### TEOREMA

El resultado del teorema de existencia y unicidad se mantiene si en la hipótesis cambiamos 2a) por 2a'). La demostración es similar y se realiza por truncamientos. Los detalles se pueden ver en Gihman y Skorohod (1971).

El propósito de 2b, es garantizar la existencia de la solución en el intervalo entero  $[0, T]$ . No obstante, Protter (1977) ha demostrado que la situación, en este caso, es análoga al caso de las EDO, esto es, el teorema de existencia y unicidad es válido, incluso, si la condición 2b se elimina; la condición de Lipschitz 2a es suficiente para garantizar la unicidad y existencia de la solución global. Esta demostración utiliza una herramienta probabilística adicional, que es la de un proceso estacionario. La condición de Lipschitz, por supuesto, no es suficiente para dar la existencia global de la solución en nuestro caso. De modo que la condición 2b no puede suprimirse en el presente teorema. En efecto, el problema del valor inicial EDO:

$$dX = X^2 dt, \quad X(0) = X_0$$

tiene como solución:

$$X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } X_0 = 0 \\ \left( \frac{1}{X_0} - t \right)^{-1} & \text{si } X_0 \neq 0 \end{cases} \quad (22)$$

que se hace infinito para valores  $\frac{1}{X_0}$ . Considerando (22) como una EDE  $f(t, x) = x^2$ , y  $g(t, x) = 0$ , observamos que las condiciones este teorema, excepto la condición de acotación, se cumplen en todo el intervalo  $[0, T]$ , y ya no se puede conocer la existencia en alguno de tales intervalos (independencia de  $X(0)$ ).

La existencia y unicidad local puede ser establecida bajo condiciones débiles como hemos citado anteriormente. Skorohod (1965) ha demostrado la existencia si  $f$  y  $g$  son continuas en ambas variables.

Watanabe y Yamada (1971) han dado condiciones de existencia y unicidad mediante condiciones débiles de continuidad sobre  $f$  y  $g$  en la segunda variable como la condición de Lipschitz. El ejemplo de Girsanov:

$$X(t) = \int_0^t |X(s)|^\alpha dW(s)$$

que tiene una solución para  $\alpha \geq \frac{1}{2}$  y valores infinitos para  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ , ilustra que tales condiciones son necesarias para la unicidad. También este ejemplo ilustra que la unicidad requerirá condiciones de continuidad sobre  $f$  y  $g$  ya que, para algún  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , la ecuación

$$X(t) = \int_0^t |X(s)|^\alpha ds$$

tiene la familia de soluciones:

$$X_\tau(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq \tau \\ [(1-\alpha)(t-\tau)]^{(1-\alpha)^{-1}} & \text{si } t > \tau \end{cases}$$

Otras consideraciones sobre los teoremas de existencia pueden verse en la bibliografía [17], [25],[44].

**BIBLIOGRAFÍA**

- [1] Allen J.R.L. [1986]: *Sedimentary Structures, their character and Physical Basis*. Elsevier. Amsterdam (two vls.).
- [2] Amillo J.M. and Arriaga F. [1987] : *Análisis Matemático con aplicaciones a la computación*. McGRAW-HILL. España
- [3] Anderson M.G. [1988]: *Modelling Geomorphological Systems*. J. Wiley and Sons. Chichester. U.K.
- [4] Arnold, L [1974] : *Stochastic Differential Equation*. Wiley. New York.
- [5] Boyce W and Diprima R. [1991] : *Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores de frontera*. Limusa. México.
- [6] Burden R. and Faires D. [1985] : *Análisis Numérico*. Grupo Editorial Iberoamericana. México.
- [7] Butcher, J.C. [1987] : *The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equation. Runge-Kutta and General Linear Methods*. Wiley. Chirchester.
- [8] Chapra S. and Canale R. [1990] : *Métodos Numéricos para ingenieros con aplicaciones en computadores personales*. McGRAW-HILL. México.
- [9] Dahlquist, G. and Bjorck, A. [1974] : *Numerical Methods*. Prentice-Hall. New York.
- [10] Demidovich B.P. and Maron I. A. [1980] : *Métodos Numéricos de Análisis*. Paraninfo. Madrid.
- [11] Derrick W. and Grossman S. [1981] : *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones*. Fondo Educativo Interamericano. México.
- [12] Elliot, R. C. [1980] : *Stochastic Calculus and Applications*. Springe Verlag. Berlin.

- [13] Feistel R,W. Ebeling [1989] : *Evolution of complex Systems*. Kluwer. Dordrecht. Netherlands.
- [14] Francis Ph. D [1991] : *Métodos Numéricos*. McGRAW-HILL. México.
- [15] Friedman, A. [1975] : *Stochastic Differential Equations and Applications*. Academic Press. New York.
- [16] Gaines J. G. and Lyons T.J. [1994]: Random generation of sthochastic area integrals. *Siam J. Appli. Maht. Vol. 4*, pp 1132-1146.
- [17] Gard, T.C. [1988]: *Introduction to Stochastic Diferential Equations*. Marcel Dekker. New York.
- [18] Gardiner C. W. [1983] : *Handbook of Stochastic Methods*. Springer Verlag. Berlin
- [19] Glorennec, P. Y. [1977] : Estimation a priori des erreurs dans la résolution numérique d'équations différentielles stochastiques. *Séminaire de Probabilité. Univ. Rennes, Fascicule 1*, pp 57-93.
- [20] Hernández, D.B. and Spigler [1990] : *Numerical stability of implicit Runge-Kutta methods for stochastic differential equations*. Preprint. University of Padua.
- [21] Ito, K. [1951] : Multiple Wiener integrals. *J. Mathematic Soc. Japan* 3, pp 157-169.
- [22] Janssen, R. [1984b] : Discretization of the Wiener proces in difference methods for stochastic differential equations. *Stoch. Processes Appl.* 18 pp 361-369.
- [23] Jordan D., P. Smith [1987] : *Nonlinear Ordinary Diferential Equations*. Oxford University. Press. U.K.

- [24] Klauder, J.R. and Petersen, W.P. [1985a] : Numerical integration of multiplicative noise stochastic differential equations. *SIAM J. Numer. Anal.* 22, pp 1153-1166.
- [25] Kloeden P.E , Platen E [1992]: *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer-Verlag. Berlin
- [26] Kloeden P.E., Platen E. and Schurz H. [1992]: *Numerical Solution of SDE Through Computer Experiments*. Springer-Verlag. Berlin
- [27] Kohler, W. E. and Boyce, W. E. [1974] : A numerical analysis of some first order stochastic initial value problems. *SIAM J. Appl. Math.* 27, pp 167-179.
- [28] Kolgomorov A.N. and Fomin S.V.[1975]: *Elementos de la teoría de funciones y del Análisis Fincional*. Mir. Moscú.
- [29] Kramer S. and Marder M. [1992]: Evolution of river Networks. *Department of Physics and Center for Nonlinear Dynamics, The University of Texas, Austin, Texas 78712, pp. 205-208.*
- [30] Krickeberg K. [1973] : *Teoría de la Probabilidad*. Teide. Barcelona.
- [31] Loève M. [1976] : *Teoría de la Probabilidad*. Tecnos. Madrid.
- [32] López J.M., Padilla I., Pacheco J.M. [1993] : Estudio de simulaciones discretas para procesos estocásticos en modelos geomorfológicos. *XIII C.E.D.Y.A. Universidad Politécnica . Madrid.*
- [33] Lord E., C. Wilson [1985] : *The Mathematical Description of Shape and Form*. Ellis Horwood. Chichester. U.K.
- [34] Margalef R. [1991] : *Ecología*. Editorial Planeta. Barcelona
- [35] Meyer, P. A. [1976] : Théorie des Intégrales Stochastiques. *In Séminaire de Probabilités X. Springer Lecture Notes in Mathematics* Vol. 511, pp 245-400.
- [36] Oksendal,B [1985]: *Stochastic Differential Equations*. Springer-Verlag

- [37] Pacheco J. [1992] : A simple modelling of braid-like structures (rill marks) appearing on sandy beaches. *Revista de Geofísica* 48, 159-164.
- [38] Pacheco J., I. Fernández [1988]: *Modelling and computing sttling times for suspended particles in the ocean*. In Schrefler B., and O. Zienkiewicz. *Computer Modelling in Ocean Engineering*, 369-374. A.A. Balkema. Rotterdam.
- [39] Pacheco J. , Mendoza I. , López J.M. [1992] : Modelización de ciertas estructuras sedimentarias primarias en playas arenosas. *SEMNI (Sociedad Española de Métodos Numéricos en Ingeniería)* pp 1386-1395. Madrid.
- [40] Pettijohn F. , Potter P. [1988] : *Atlas and Glosary of Primary Sedimentary Structures*. Springer-Verlag. New York
- [41] Ramos A. [1990a]: Introducción a los sistemas aluviales, en Avances en Sedimentología. *Csic* pp 53-56. Madrid
- [42] Ramos A. [1990b]: Sistemas aluviales braided, en Avances en Sedimentología. *Cesic*, pp 67-80. Madrid.
- [43] Richmond B, et al. [1987]: *An Academic User's Guide to STELLA, High Performance Systems*. Lyme. New York.
- [44] Rubin David M. [1992]: Use of forecasting signatures to help distinguish periodicity, randomness, and chaos in ripples and other spatial patterns. *U.S. Geological Survey, Menlo Park, California 94025*, pp. 525-535.
- [45] Sancho J.M. et al. [1982]: Analytical and numerical studies of multiplicative noise. *Phys. Review A*. 26(3), pp 1589-1609.
- [46] Srinivasan S.K., Mehata K.M. [1988]: *Stochastic Processes*. Tata McGraw-Hill. Delhi.
- [47] Talay D [1982a]: Convergence pour chaque trajectoire d'un schéme d'approximation des EDS. *Comptes Rendus Acad. Sc. Paris. Série I*, 295, 249-252.

- [48] Thornes J. [1990]: Big rills have little rills ... *Nature (geomorphology)* vol 345 pp 764-765.
- [49] Wong W., Aebersold B., Norwich K. [1993]: Density Fluctuation in Brownian Motion and its Significance in Olfaction. *Mathl. Comput. Modelling*, vol 18, n° 5 pp. 19-30
- [50] Zhang Yi-Cheng and Sornette D. [1992]: Non-Linear Langevin Model of Geomorphic Erosion Processes. *Institut de Physique Théorique, Université de Fribourg, CH- 1700 Switzerland.*
- [51] Zeide B. [1991]: Quality as a characteristic of ecological models. *Ecological Modelling* , 55, 161-174.