UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL

TESIS DOCTORAL

EFECTOS DE LOS FENÓMENOS DE INTERACCIÓN INCLUYENDO LOS FACTORES ESPACIALES Y SEDIMENTOS DE FONDO EN LA RESPUESTA SÍSMICA DE PRESAS BÓVEDA

JUAN JOSÉ AZNÁREZ GONZÁLEZ

Las Palmas de Gran Canaria, Septiembre 2002

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

9/2002-03

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA
UNIDAD DE TERCER CICLO Y POSTGRADO

Reunido el día de la fecha, el Tribunal nombrado por el Excmo. Sr. Rector Magfco. de esta Universidad, el/a aspirante expuso esta TESIS DOCTORAL.

Terminada la lectura y contestadas por el/a Doctorando/a las objeciones formuladas por los señores miembros del Tribunal, éste calificó dicho trabajo con la nota de SOBRESALIENTE

CUM LAUDE POR UNANIMIDAD

Las Palmas de Gran Canaria, a 18 de noviembre de 2002.

El/a Presidente/a: Dr.D. Enrique Alarcón Álvarez,

El/a Secretario/a: Dr.D. Gabriel Winter Althaus,

El/a Vocal: Dr.D. José Domínguez Abascal,

El/a Vocal: Dr.D. Fernando Medina Encina,

El/a Vocal: Dr.D. Francisco Chirino Godoy,

El Doctorando: D. Juan José Aznárez González,

J. Aznárez

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
LAS PALMAS DE G. CANARIA
N.º Documento 258980
N.º Copia 685217

TESIS

EFECTO DE LOS FENÓMENOS DE INTERACCIÓN INCLUYENDO FACTORES ESPACIALES Y SEDIMENTOS DE FONDO EN LA RESPUESTA SÍSMICA DE PRESAS BÓVEDA

Doctorando

Juan José Aznárez González

Director

Dr. Orlando Maeso Fortuny

realizada para la obtención del grado de
Doctor Ingeniero Industrial

Departamento de Ingeniería Civil
Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales
Instituto Universitario de Sistemas Inteligentes y Aplicaciones Numéricas en Ingeniería (IUSIANI)
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

Las Palmas de Gran Canaria, Septiembre de 2002

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

A Inés Gladys
y su paciente impaciencia

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Debe haber un mundo ideal, una especie de paraíso matemático donde todo sucede como en los libros de texto

Bertrand Russell (1872-1970)

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

PRÓLOGO

Esta Tesis ha sido realizada en el Departamento de Ingeniería Civil de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria y en ella se resume el trabajo realizado por su Autor en los últimos años. El objetivo ha sido la formulación e implementación de un código basado en el Método de los Elementos de Contorno (MEC) que permita el estudio de la respuesta dinámica de estructuras sometidas a solicitación sísmica. La aplicación realizada se centra en el análisis de la respuesta sísmica de presas bóveda teniendo en cuenta fenómenos de interacción, carácter de la excitación, geometría de cañón y embalse y la influencia de los sedimentos de fondo considerados éstos como medios de naturaleza poroelástica. Es conocida la especial aptitud del MEC, avalada ya por muchas investigaciones, para este tipo de problemas. Los resultados demuestran la potencia del Método en el tratamiento de estos aspectos de importancia crucial.

Todo ello ha sido posible gracias a la ayuda, consejo, apoyo y amitad de muchas personas. Estas líneas pretenden ser un humilde reconocimiento a todas ellas.

En primer lugar, y de forma especial, al profesor Orlando Maeso, Director de esta Tesis y a quien sobre todo considero mi maestro. Con él he aprendido a estudiar, a enseñar y a disfrutar de este trabajo. Ha sido un privilegio trabajar a su lado durante este tiempo. Estoy seguro que esto es sólo el principio.

Al profesor José Domínguez, fundamentalmente porque la idea es suya. Sus contribuciones a este trabajo están en todas y cada una de sus páginas.

Al profesor Francisco Chirino, en gran medida responsable de que me dedique a esto. Su apoyo y amistad han sido importantes para mí a lo largo de estos años. También a Fermín Romero, mi avalista cuando opté por cambiar de trabajo. Agradecer su aliento y consejos en aquel momento.

A los profesores José Mª Emperador, con quien comencé a estudiar el MEC, y Fidel García, ambos compañeros y sobre todo amigos. Gracias por todo.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

A mis alumnos, a quienes al final dedico este trabajo. En especial a Iker Gracia y Alejandro González que ya han trabajado en el desarrollo de alguna de las líneas marcadas por esta Tesis.

Agradecer también la colaboración del profesor Miguel Ángel Millán en la fase de validación del programa desarrollado y a Francesco Vinciprova su trabajo en la aplicación del mismo a problemas de interacción suelo-estructura, así como a mis compañeros de Departamento y Escuela por su buena disposición en todo momento.

A mis Chicas: Gladys, Lidia, Lola, Marta y la Paula y su sonrisa mentirosa que me ha cambiado la vida.

Por último, debo agradecer la financiación recibida de la Universidad de Las Palmas de G.C., el Ministerio de Ciencia y Tecnología y la Fundación Universitaria de Las Palmas. Sin ella, hubiera sido imposible la realización de nuestro trabajo en estos años.

Juan J. Aznárez

Las Palmas, septiembre de 2002

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Índice General

1. Presentación

1.1. Introducción 1-1
1.2. Alcance y Objetivos 1-3
1.3. Factores que Influyen en la Respuesta Sísmica 1-3
1.4. Técnica Numérica Empleada. El MEC 1-6
1.5. Modelo para el Análisis Sísmico de Presas Bóveda 1-7
1.6. Descripción de Contenidos 1-9
Referencias 1-11

2. Ecuaciones Básicas y Propagación de Ondas en Problemas Escalares, Elásticos y Poroelásticos

2.1. Introducción 2-1
2.2. Ecuaciones Básicas de la Elastodinámica Lineal 2-1
2.3. Propagación de Ondas en Medios Elásticos 2-3
2.4. Ondas de Presión en Fluidos 2-6
2.5. El Medio Poroelástico 2-7
2.6. Caracterización del Medio Poroelástico 2-10
2.7. Ecuaciones de Gobierno 2-12
2.7.1. Ecuaciones de Equilibrio 2-12
2.7.2. Ley de Comportamiento 2-14
2.7.3. Ecuación de Equilibrio en Desplazamientos 2-17
2.8. Significado Físico de las Constantes Poroelásticas 2-18
2.9. Ondas en Medios Poroelásticos 2-21
2.10. Campo de Validez de la Teoría de Biot 2-28
2.11. Ecuaciones de Gobierno en el Dominio de la Frecuencia 2-29
2.12. Analogía Termoelástica en Régimen Armónico 2-32
2.13. Condiciones de Contorno 2-33
Referencias 2-38

3. Formulación Integral y Solución Fundamental Armónica

3.1. Introducción 3-1
3.2. Formulación en Reciprocidad y Representación Integral en Problemas Armónicos 3-1
3.2.1. Poroelasticidad Armónica 3-2
3.2.1.1. Residuos Ponderados de la Ecuación de Gobierno 3-3
3.2.1.2. Teoremas de Reciprocidad 3-9
3.2.2. Elastodinámica Armónica 3-11
3.2.3. Problema Escalar Armónico 3-11

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

3.3. Solución Fundamental Armónica 3-12
3.3.1. Procedimiento para la Obtención de la Sol. Fund. Poroelástica 3-12
3.3.2. Solución Fundamental Elastodinámica 3-19
3.3.3. Solución Fundamental en Problemas Escalares de Propagación de Ondas 3-20
3.4. Comportamiento en el Límite de la Solución Fundamental Poroelastodinámica 3-21
3.5. Formulación Integral en el Contorno 3-25
Referencias 3-29

4. El Método de los Elementos de Contorno en Problemas Armónicos

4.1. Introducción 4-1
4.2. Discretización del Contorno 4-1
4.3. Evaluación de las Integrales en el Contorno 4-4
4.3.1. Evaluación de los Términos Débilmente Singulares 4-6
4.3.2. Evaluación de los Términos Fuertemente Singulares 4-8
4.3.2.1. Problema Elastostático 4-9
4.3.2.2. Problemas Dinámicos Armónicos 4-12
4.4. Imposición de las Condiciones de Contorno en el Modelo Acoplado 4-13
4.5. Estrategia de Colocación No Nodal 4-15
4.6. Algunos Ejemplos Numéricos 4-19
Problema Elastostático 4-19
Problema Poroelastodinámico Monodimensional 4-22
Interacción Poroelástico-Agua. Problema Bidimensional 4-26
Cimentación Superficial Sobre Semiespacio Poroelástico 4-28
Referencias 4-31

5. Efectos de La Distribución Espacial de la Excitación en la Respuesta Sísmica de Presas Bóveda

5.1. Introducción 5-1
5.2. Elementos de Contorno 5-5
5.3. Modelo de la Excitación Sísmica 5-6
5.4. Estudio Numérico 5-8
5.5. Desplazamientos de Campo Libre 5-9
5.6. Respuesta Sísmica de la Presa 5-15
5.6.1. Discretización de la Presa y el Embalse 5-15
5.6.2. Variables Representativas de la Respuesta de la Presa 5-15
5.6.3. Influencia del Ángulo de Incidencia de las Ondas sobre la Respuesta de la Presa 5-16
5.6.3.1. Ondas SH 5-16
5.6.3.2. Ondas P y SV 5-17
5.6.3.3. Ondas de Rayleigh 5-20
5.6.4. Influencia de la Geometría del Cañón Sobre la Respuesta de la Presa 5-23
Referencias 5-27

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

6. Influencia de los Sedimentos de Fondo del Embalse Sobre la Respuesta Sísmica de Presas Bóveda

6.1. Introducción 6-1
6.2. Estudio Numérico Previo. Problema Bidimensional 6-5
6.3. Respuesta Sísmica de la Presa de Morrow Point 6-16
6.3.1. Presa Sobre Base Rígida 6-22
6.3.2. Presa Sobre Base Flexible 6-29
Referencias 6-38

7. Conclusiones y Desarrollos Futuros

7.1. Revisión y Conclusiones 7-1
7.2. Desarrollos Futuros 7-4
Referencias 7-7

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Capítulo 1

Presentación

1.1 Introducción

En los últimos años ha habido un creciente interés por parte de los ingenieros estructurales en el estudio de todos aquellos factores que determinan la respuesta de las construcciones sometidas a acciones dinámicas. Si bien los fundamentos teóricos básicos para su estudio formaban parte del conocimiento humano desde hacía casi cuatro siglos, es en la segunda mitad del XX cuando comienzan a aplicarse al análisis del comportamiento estructural. Se trata, sin duda, de una necesidad vinculada a requeriminetos cada vez más comprometidos y consideraciones de carácter económico y funcional que obligan a diseños más optimizados (estructuras más ligeras, nuevos materiales, etc...). Es en este contexto donde el estudio de la respuesta dinámica estructural ha comenzado a cobrar importancia: el diseño de estructuras de carácter industrial que soportan las vibraciones provocadas por maquinaria y que deben cumplir su función de forma adecuada, o el proyecto de construcciones civiles sometidas a la acción del viento, los sismos, etc... con mayores niveles de seguridad.

Sin duda, debido a los efectos devastadores provocados por la acción de los terremotos, el análisis dinámico de estructuras sometidas a solicitación sísmica ha adquirido más significación y son importantes los progresos realizados en el conocimiento del problema. A pesar de ello, la cuestión esencial y más determinante en la respuesta, esto es la solicitación sísmica en sí misma, es, su vez, la menos conocida. Su carácter aleatorio así como el alto grado de incertidumbre sobre muchos aspectos relacionados con el emplazamiento (propiedades geológicas, presencia de estratos, etc...), complican de forma importante el estudio del problema. Hay autores que llegan a caricaturizar la ingeniería sísmica debido al alto factor de incertidumbre con que debe trabajar. En este sentido, si bien hace algunos años, Newmark y Rosenblueth (1978) se referían a esta disciplina en los siguiente términos: "la ingeniería sísmica es para el resto de las disciplinas de la ingeniería lo que la psiquiatría es para las demás ramas de la medicina".

El nivel de comprensión de los aspectos vinculados al comportamiento estructural ha experimentado importantes avances, en gran medida motivados por el importante desarrollo de herramientas numéricas que permiten cuantificar la respuesta sobre modelos deterministas. En los últimos veinticinco años se han desarrollado modelos progresivamente más sofisticados y complejos que han permitido representar y

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

cuantificar la verdadera importancia de fenómenos como la interacción entre el suelo y la estructura o la estructura y el fluido, la topografía y geología del emplazamiento, el carácter espacial de la excitación, etc... en la respuesta sísmica de las estructuras.

Esta Tesis pretende, modestamente, contribuir en la comprensión de la influencia de estos y otros fenómenos en la respuesta de estructuras sometidas a acciones sísmicas. Representa un paso más en una línea de trabajo llevada a cabo conjuntamente en la universidades de Sevilla y Las Palmas de G.C. y que arranca a finales de la década de los setenta con los trabajos pioneros de los Profesores Enrique Alarcón y José Domínguez en la aplicación de la formulación directa del Método de los Elementos de Contorno (MEC) a problemas dinámicos de interacción suelo-estructura y mecánica de fractura (ver p.e. Domínguez, 1978 y Domínguez y Alarcón, 1981). En los años posteriores, son importantes y muy numerosas las aportaciones del Grupo de Sevilla en esta dirección. Será a finales de la década de los ochenta cuando se publican los primeros trabajos vinculados al problema de interacción suelo-agua-estructura con modelos bidimensionales. Los resultados obtenidos para la respuesta dinámica de presas de gravedad ponen de manifiesto las importantes ventajas del MEC en la consideración de los aspectos que más determinan la respuesta de estas estructuras (ver p.e. Medina, 1987 ó Medina y Domínguez, 1989). El modelo se generaliza pocos años más tarde a problemas tridimensionales (Maeso, 1992, Maeso y Domínguez, 1993 y Domínguez y Maeso, 1993) convirtiéndose en un importante referente para muchos investigadores en el ámbito internacional. El trabajo que aquí se presenta continúa la línea marcada por investigaciones previas incorporando al modelo tridimensional, entre otras cosas, la presencia de sólidos de naturaleza poroelástica.

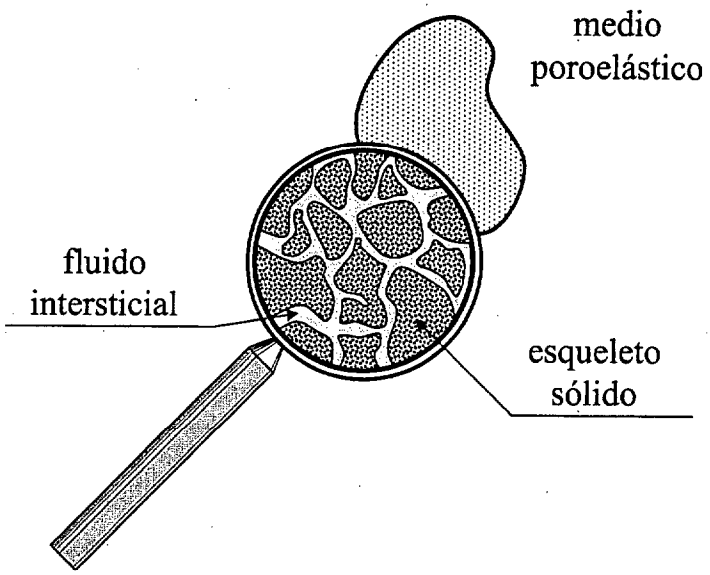

Figura 1.1. Sólido poroelástico de Biot

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Aplicado al análisis sísmico de presas bóveda, estos sólidos poroelásticos permitirán caracterizar el comportamiento de depósitos sedimentarios en el fondo del embalse de forma rigurosa. La teoría que describe la propagación de ondas en un medio de estas características es bastante reciente y se debe a M.A. Biot (1956). El medio poroelástico de Biot es un material constituido por dos fases: un esqueleto sólido y un fluido que puede desplazarse a través del espacio intersticial dibujado por dicho esqueleto (Fig. 1.1). La teoría presenta un comportamiento acoplado de ambas fases que tiene en cuenta la disipación asociada a la viscosidad del fluido.

1.2 Alcance y Objetivos

La Tesis que se presenta tiene por objetivos, en primer lugar, abordar la formulación e implementación del Método de los Elementos de Contorno (MEC) al análisis de medios poroelásticos tridimensionales en el dominio de la frecuencia. Para ello, se hace uso de la formulación integral del problema propuesta por Domínguez (1991) en término de las variables independientes del problema. La aplicación posterior del MEC sobre esta relación integral, requiere disponer de una solución fundamental que pueda tratarse numéricamente de forma sencilla. El análisis de los términos de dicha solución fundamental y la identificación de sus componentes conflictivos, permite generalizar el procedimiento de integración, formulado previamente para el caso elástico, a este tipo de sólidos de manera simple. Los resultados obtenidos con el código de elementos de contorno presentan una elevada fiabilidad incluso en el rango de muy bajas frecuencias donde el comportamiento del medio poroso es básicamente el de un sólido elástico drenado.

Se elabora posteriormente un modelo que permita el acoplamiento de regiones elásticas, fluidas y poroelásticas con un alto grado de generalidad. Dicho modelo se aplica al estudio dinámico del problema de interacción suelo-fluido-sedimento-estructura tridimensional donde la excitación se presenta como un tren de ondas planas armónicas (P, SV, SH y de Rayleigh) con ángulo de incidencia variable. La representación integral del MEC se realiza sobre el campo difractado de forma tal que satisfaga las condiciones de radiación y sólo sea necesario discretizar contornos cercanos al emplazamiento de la estructura.

Específicamente se aborda el problema de la respuesta dinámica de una presa bóveda y se analizan, en fases sucesivas, los distintos factores que determinan su comportamiento. En primer lugar se estudia la influencia en la respuesta del carácter espacial de la excitación, sometiendo al conjunto presa-agua-terreno a ondas incidentes con ángulo variable. Se analizan también factores como la profundidad de cañón y la geometría del embalse. Por último se estudiará la interacción conjunta incluyendo depósitos sedimentarios de naturaleza poroelástica en el fondo del embalse.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

1.3 Factores que Influyen en la Respuesta Sísmica

Como ya se ha comentado, existen multitud de aspectos que tienen gran influencia en la respuesta sísmica del sistema. Se pretende, en lo que sigue, realizar una clasificación en este sentido, si bien, como se verá, estos fenómenos no son absolutamente independientes entre sí.

Factores que influyen sobre los desplazamientos de campo libre. Los desplazamientos de campo libre en puntos de la superficie del terreno son los provocados por la acción de las ondas sísmicas sin tener en cuenta la presencia de la estructura. Si en el modelo analizado los fenómenos de interacción pueden obviarse, el estudio dinámico de la estructura puede realizarse utilizando como excitación sobre la cimentación las expresiones conocidas de este campo de desplazamientos.

Estos desplazamientos de la superficie libre del terreno están influidos de un lado, por la composición de las ondas sísmicas y su ángulo de incidencia. De otra parte, por las características geológicas y topográficas del emplazamiento (*efecto local*). La influencia de este efecto asociado al emplazamiento sobre las variaciones del campo de desplazamientos en la superficie libre ha sido puesta de manifiesto de forma clara por multitud de estudios teóricos y experimentales. Será fundamental, por tanto, caracterizar de forma rigurosa el terreno desde el punto de vista de sus propiedades y la presencia de discontinuidades subterráneas o estratos constituidos por diferentes materiales, así como tener en cuenta la existencia de accidentes topográficos superficiales próximos cuyas dimensiones sean del orden de la longitud de las ondas incidentes sobre el emplazamiento. En la Figura 1.2, por ejemplo, el campo de desplazamientos en la superficie estará determinado por la presencia del desmonte representado. En esta Tesis se presentarán algunos resultados que evidencian las alteraciones del desplazamiento superficial en el entorno de un cañón tridimensional de profundidad variable debido a la difracción de las ondas sísmicas.

El carácter espacial de la excitación. Muy relacionado con lo anterior, este efecto está vinculado al carácter viajero de las ondas sísmicas y al tamaño de la estructura analizada. Así, el análisis convencional de la respuesta sísmica de estructuras considera idéntica excitación que actúa simultáneamente en todos los puntos de la cimentación. Esta hipótesis es admisible en el caso de suelos considerados infinitamente rígidos o que las dimensiones de la estructura sean inferiores a la longitud de onda característica del movimiento sísmico. Este aspecto puede ilustrarse con un ejemplo. Así considérese una onda armónica propagándose en suelo rocoso con propiedades tales que la velocidad de propagación de las ondas de corte sea del orden de 2000 m/s (este medio es muy similar a la base rocosa del modelo presa-terreno-agua-sedimento que se

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

analizará más adelante). Si la frecuencia de la propagación es 5 Hz, la longitud de onda será 400 m. En este caso, para un pórtico simple de diez metros de luz, la respuesta puede calcularse considerando ambas zapatas solicitadas por la misma función temporal del desplazamiento. Por contra, si la estructura es de dimensiones comparables con la longitud de la onda que se propaga (λ) será necesario tener en cuenta la variación del campo de desplazamientos entre las diferentes partes de la cimentación (Figura 1.2). Así, para el ejemplo anterior y en el caso de una presa o un puente de tan sólo 150 m ($\lambda/4$) el campo de desplazamientos en el cimiento varía desde cero hasta el valor máximo.

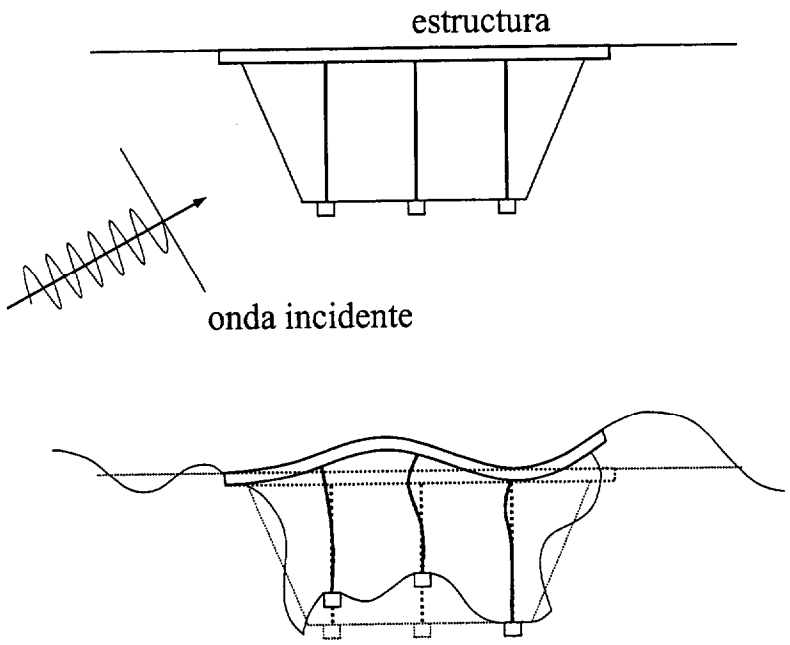

Figura 1.2. Carácter espacial de la excitación sísmica

Además de las propiedades del terreno, la frecuencia y las dimensiones de la estructura, este efecto, como es lógico, dependerá también del ángulo de incidencia de las ondas sísmicas.

Fenómenos de interacción dinámica. Son muy numerosos los estudios que han cuantificado la importancia de los fenómenos de interacción en la respuesta sísmica de sistema. Así, ya en primera instancia los desplazamientos en la superficie del terreno provocados por las ondas sísmicas se verán alterados por la presencia de la estructura. Este efecto está vinculado con la rigidez relativa suelo-estructura y las dimensiones de ésta en relación con la longitud de onda. Así, si el terreno es mucho más rígido que la estructura, los desplazamientos en la base de la misma se corresponden con los de campo libre. No ocurre así cuando

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

se trabaja con suelos más flexibles, ya que en este caso la rigidez de la estructura influye también en los desplazamientos a que se encuentra sometida la interfase entre ambos. Clough y Penzien (1993) denominan al fenómeno descrito *interacción cinemática*. Por otra parte, la consideración del terreno como un medio flexible acoplado con la estructura modifica las frecuencias propias en la respuesta de la estructura y aumenta la energía disipada lo que se traduce en valores de la amplificación inferiores respecto de la situación de base rígida. Resultados en este sentido fueron obtenidos por Maeso y Domínguez (1993) para el estudio dinámico de presas bóveda considerando la interacción presa-terreno. De este primer análisis se deduce la necesidad de incorporar este efecto de interacción en un modelo que pretenda evaluar adecuadamente la respuesta dinámica de la estructura.

Se acentúa la importancia de estos efectos si se incluyen dominios de naturaleza fluida o poroelástica en el modelo analizado. Es el caso del problema que se presenta, donde la respuesta dinámica del conjunto vendrá determinada por las interacciones mutuas entre los distintos medios que lo constituyen. Así, los fenómenos de interacción entre la presa y el fluido embalsado alteran de forma importante las frecuencias propias y los valores de la amplificación de la estructura. Ello es debido al carácter compresible del fluido y está muy determinado por la geometría del vaso (Domínguez y Maeso, 1993). Por último, la presencia de sedimentos altera el perfil de presiones hidrodinámicas del embalse y con ello la respuesta de la estructura, de forma muy especial si dichos sedimentos no están saturados (Cheng, 1986). En el Capítulo 6 de esta Tesis se presentan resultados que avalan esta afirmación.

Como cabe esperar, la interacción conjunta de los cuatro medios la lugar a diferencias significativas en la respuesta sísmica respecto de la obtenida con cualquier otro modelo que no las contemple simultáneamente y de forma rigurosa.

Un modelo, por tanto, que no contemplara adecuadamente todos estos factores estaría representando de forma incompleta el problema real. La consideración, por otra parte, del comportamiento conjunto de todos los medios implicados y la caracterización de la excitación en los términos recogidos en este trabajo, permiten un tratamiento riguroso de todos los fenómenos descritos. El análisis de este modelo acoplado de gran complejidad requiere del empleo de técnicas numéricas que permitan obtener soluciones aproximadas a las ecuaciones de campo. De entre todas las técnicas posibles, el Método de los Elementos de Contorno se presenta como una alternativa con importantes ventajas teniendo en cuenta las características del problema que se trata.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

1.4 Técnica Numérica Empleada. El Método de los Elementos de Contorno

Esta técnica numérica se aplica sobre la formulación integral en el contorno de las ecuaciones de gobierno del problema. Dicha formulación integral relaciona las variables primarias del problema (desplazamientos y/o presiones) y sus derivadas (tensiones y/o derivada de la presión) a través de un problema de referencia (solución fundamental). El tratamiento numérico de estas ecuaciones pasa por discretizar el contorno en elementos y aproximar localmente las variables del problema en función de los valores que adopta en los nodos que definen dicho elemento. Con todo esto y un conjunto de soluciones fundamentales independientes, la igualdad integral en el contorno de partida podrá transformarse en un sistema de ecuaciones algebraicas que permitirá la obtención de una solución aproximada del problema.

Existe una ventaja fundamental del MEC que lo hace especialmente apto para el análisis de problemas como el planteado. En relación con otras técnicas de dominio como el Método de los Elementos Finitos (MEF), el Método de los Elementos de Contorno permite contemplar de forma muy natural dominios infinitos o semi-infinitos. En estos problemas las técnicas numéricas como el MEF se encuentran con la dificultad de cuantificar la porción de dominio a discretizar. Es más, con el inconveniente de definir contornos artificiales que, en problemas dinámicos, provocan reflexiones ficticias de las ondas que contaminan la solución. Tradicionalmente, este inconveniente ha sido minorado desde este método con la introducción de una banda de elementos de cierre (elementos infinitos) acoplados con la malla de elementos finitos cercanos al emplazamiento estudiado, y que intentan simular la radiación hacia el infinito de las ondas sísmicas (ver p.e. Canet y Barbat, 1988). Con todo ello, en un problema de interacción suelo-fluido-estructura-sedimento como el estudiado, el número de grados de libertad a considerar lo hace prácticamente inabordable si no es desde técnicas de subestructuración .

El Método de los Elementos de Contorno, por el contrario, sólo requiere discretizar los contornos de dominio en estudio. En el caso de problemas exteriores (p.e. difracción de ondas provocadas por cavidades o grietas) las condiciones de radiación en el infinito se contemplan de forma automática con lo que el comportamiento de estos modelos será reproducido de forma rigurosa considerando la discretización de los contornos interiores (cavidad). En problemas de interacción suelo-estructura o suelo-fluido-estructura donde el terreno puede ser considerado un semiespacio, el empleo de la solución fundamental para el espacio completo obliga a incorporar al modelo la superficie libre cercana al emplazamiento. Así ocurre en los modelos estudiados en esta Tesis, donde la cantidad necesaria de superficie libre discretizada no es excesiva para representar adecuadamente el carácter no acotado del suelo.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Una interesante revisión de las aplicaciones del MEC a este tipo de problemas puede consultarse en Domínguez (1993).

1.5 Modelo para el Análisis Sísmico de Presas Bóveda

En la Figura 1.3a se presenta el problema fundamental a resolver aplicando el modelo de elementos de contorno desarrollado. En este sistema acoplado existen medios de diferentes características: el hormigón de la presa, el terreno sobre el que se cimenta (normalmente roca), el agua embalsada y los sedimentos en el fondo del vaso. Cada uno de estos medios presenta un comportamiento diferente e interaccionan entre sí de manera que ninguno de ellos puede estudiarse de forma aislada. Asimismo, algunos de estos dominios son muy extensos o prácticamente infinitos (terreno y agua embalsada) lo cual es de importancia determinante en el análisis dinámico del conjunto.

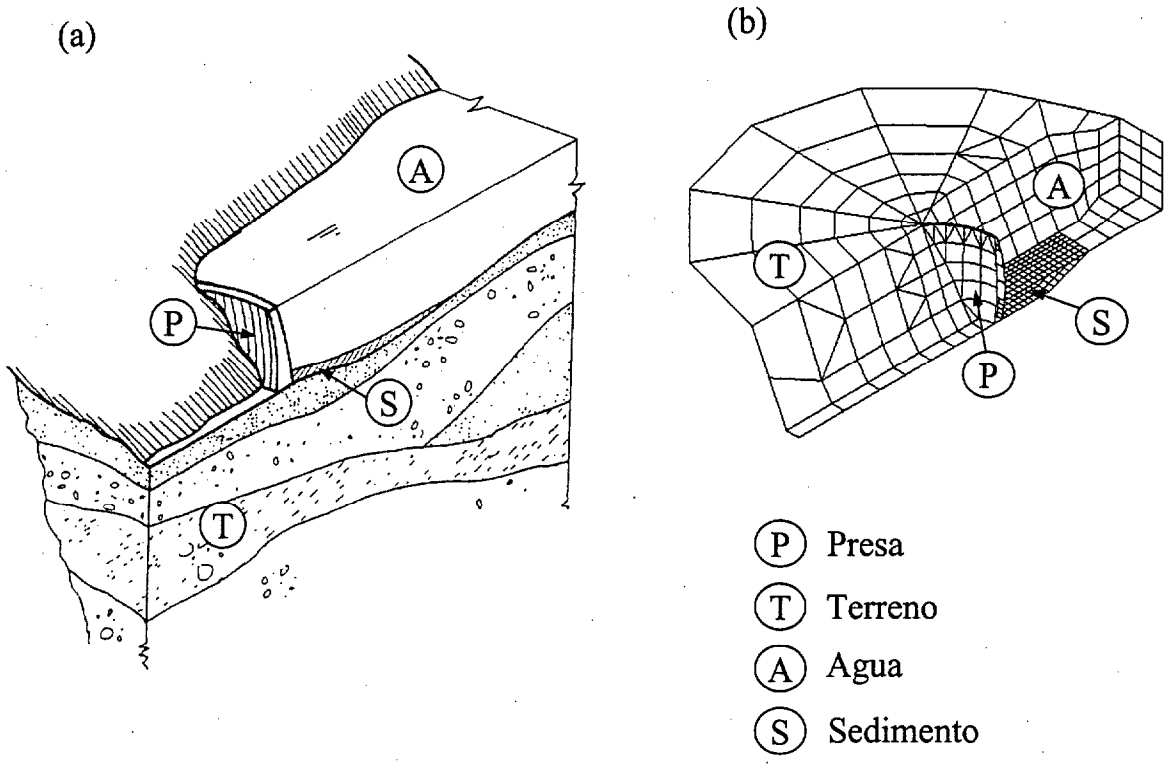

Figura 1.3. (a) Sistema acoplado presa-terreno-agua-sedimento,
(b) modelo de elementos de contorno

En el caso de presas bóveda el problema tiene una geometría que no permite simplificación dimensional alguna y ha de ser estudiado en su carácter tridimensional. El modelo numérico desarrollado permite una representación realista de la geometría del

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

problema y tiene en cuenta, de forma rigurosa, la interacción dinámica entre todas las regiones cuando son alcanzadas por una solicitación sísmica que se propaga a través del suelo. La Figura 1.3b presenta la discretización de elementos de contorno del conjunto. En la misma se utilizan elementos cuadriláteros y triangulares de nueve y seis nodos respectivamente. Dentro de cada uno de ellos se aproxima la geometría y variables de campo de forma parabólica. Hacer notar que el tipo de formulación del MEC utilizada para regiones líquidas hace innecesaria la discretización de la superficie libre de agua embalsada.

En lo que a las características de la regiones implicadas se refiere, la presa y el terreno son considerados medios elásticos, lineales e isótropos con amortiguamiento de tipo histerético. En este último caso, el contorno será discretizado en cantidad suficiente para tener en cuenta los accidentes topográficos cercanos. El agua embalsada se caracteriza de acuerdo al modelo escalar planteado y, por tanto, se considera una masa fluida no viscosa, compresible y sometida a pequeñas perturbaciones dinámicas. La región sedimentaria será tenida en cuenta como un medio poroelástico de acuerdo a la teoría de Biot y que puede presentarse parcialmente saturado de agua.

En el modelo presentado (Fig.1.3b), las ecuaciones del MEC se aplican a cada medio de forma individualizada según sus características para, posteriormente, imponer la interacción entre regiones en los nodos de las superficies de contacto a través de relaciones de compatibilidad y equilibrio entre las variables definidas para cada dominio. Como es lógico, la formulación de dichas ecuaciones dependerá de las características de los medios que delimitan la interfase en cuestión. En la Figura 1.3b se pueden distinguir con claridad las regiones implicadas (presa, terreno, agua y sedimento) y las seis clases de contorno interfase a tener en cuenta, a saber: presa-terreno, presa-agua, presa-sedimento, agua-sedimento, agua-terreno y terreno-sedimento.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

1.6 Descripción de Contenidos

Luego de estas breves notas introductorias, en el Capítulo 2 se revisan las ecuaciones que gobiernan el comportamiento dinámico de los tres tipos de medios implicados en el modelo acoplado, dedicando especial interés al marco teórico que describe el comportamiento acoplado de sólido y fluido en el medio poroelástico de Biot. Se definen las variables de referencia, las constantes del medio, la ley de comportamiento, ecuaciones de compatibilidad y equilibrio y su fusión en ecuaciones de gobierno en desplazamientos del sólido y presión intersticial análogas a las ecuaciones de Navier para dominios de naturaleza elástica. Seguidamente se estudia el fenómeno de propagación de ondas en materiales poroelásticos a la luz del procedimiento utilizado para sólidos elásticos. Se presenta la analogía termo-poroelástica que facilita la obtención de una solución fundamental para el problema de contorno porelastodinámico armónico. Se discuten, para finalizar, las ecuaciones de compatibilidad y equilibrio a imponer en las insterfases de un modelo acoplado que incluya los tres tipos de medios.

La formulación integral en el contorno de Domínguez (1991) para el problema poroelástico armónico se obtiene en el Capítulo 3. Comentada la analogía entre los problemas termoelástico y poroelástico armónicos, la solución fundamental para este último puede obtenerse de acuerdo al procedimiento establecido para el primero (Kupradze et al., 1979). La formulación integral y solución fundamental en problemas elásticos y de propagación de ondas escalares se presentan como particularizaciones del anterior. Un estudio posterior en el límite cuando $\omega r \to 0$ permite identificar el tipo de singularidad inherente a estas soluciones fundamentales lo que será de vital importancia a la hora de elaborar una estrategia numérica que permita evaluar los coeficientes integrales que surgen de la aplicación del MEC a estos problemas.

Los aspectos fundamentales del MEC y su implementación numérica en problemas dinámicos tridimensionales en el dominio de la frecuencia, se estudian en el Capítulo 4. Teniendo en cuenta lo visto en el Capítulo 3, se presenta un procedimiento directo y común para sólidos elásticos y poroelásticos que permite la evaluación numérica de las integrales en el sentido del Valor Principal de Cauchy (VPC) de la solución fundamental. Este procedimiento de integración permite, de forma natural, acometer la formulación del Método con colocación no-nodal. Dicha estrategia es utilizada en este trabajo con un doble objetivo: el tratamiento adecuado de modelos que presentan superabundancia de incógnitas en algún nodo (*problema de esquina*) y la consideración de las discretizaciones no conformes utilizadas en la confección del modelo acoplado que permite estudiar la influencia de los sedimentos de fondo en la respuesta sísmica de presas bóveda. Como conclusión de este Capítulo se presentan algunos resultados numéricos que validarán el código de elementos de contorno desarrollado.

La aplicación del modelo estudiado en los capítulos anteriores al análisis de la respuesta sísmica de presas bóveda se inicia en el Capítulo 5. En el mismo se estudian los efectos del carácter espacial de la excitación y la geometría del conjunto cañón-embalse en la respuesta dinámica del sistema. Se presenta la respuesta dinámica de la presa de Morrow Point (EEUU) ante ondas planas del tipo SH, SV, P o de superficie que se propagan por el terreno y que inciden con ángulo variable sobre el emplazamiento. Se analiza el carácter tridimensional del efecto local asociado a cañones irregulares y la respuesta del conjunto teniendo en cuenta la profundidad de dicho cañón y la geometría del embalse.

La influencia de sedimentos de fondo en la respuesta dinámica del modelo se estudia en el Capítulo 6. La incorporación de un sedimento de naturaleza poroelástica sobre el conjunto presa-terreno-agua dificulta el tratamiento numérico del modelo resultante debido al extraordinario aumento en el número de grados de libertad del problema. Ello justifica la estudio inicial realizado sobre un modelo más reducido en el que se analiza la influencia en la respuesta de aspectos tales como el espesor del sedimento o el grado de saturación. El modelo tridimensional correspondiente a la presa bóveda de Morrow Point se realiza para depósitos sedimentarios con un espesor del orden del 20% de la altura de la presa y para geometrías finitas e infinitas del embalse. Se presentarán resultados que

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

ponen de manifiesto la influencia determinante que el grado de saturación del sedimento tiene en la respuesta anterosterior de la estructura. Asimismo, a lo largo de este Capítulo, se presentan algunos modelos simplificados del sedimento cuya validez será examinada por comparación con los resultados obtenidos considerando el sedimento como una región poroelástica. El objetivo último de estos modelos simplificados es la reducción del número de grados de libertad del modelo tridimensional.

Por último, en el Capítulo 7 se presentan las conclusiones más destacadas obtenidas en esta Tesis y se dibujan las posibles líneas de investigación futuras a partir del trabajo desarrollado.

Referencias

BIOT, M.A., 1956, "The Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-saturated Porous Solid, I. Low Frequency Range", *J. Acoust. Soc. Am.*, **28**, 168-178.

CANET, J.M. y BARBAT, A.H., 1988, "Estructuras Sometidas a Acciones Sísmicas", CIMNE, Barcelona.

CHENG, A.H.D., 1986, "Effects of Sediment on Earthquake Induced Reservoir Hidrodynamic Response", *J. Eng. Mech., ASCE*, **112**(7), 654-665.

CLOUGH, R.W. y PENZIEN, J., 1993, "Dynamics of Structures", McGraw-Hill, NY.

DOMÍNGUEZ, J., 1978, "Dynamic Stiffness of Rectangular Foundations", *Research Report R*78-20, *Dept. of Civil Eng*, M.I.T., Cambridge, Massachussetts.

DOMÍNGUEZ, J. y ALARCÓN, E., 1981, "Elastodynamics", Progress in Boundary Element Methods, C.A. Brebbia Ed., Pentech Press Ltd., Londres.

DOMÍNGUEZ, J., 1991, "An Integral Formulation for Dynamic Poroelasticity", *J. Appl. Mech., ASME*, **58**, 588-591.

DOMÍNGUEZ, J., 1993, "Boundary Elements in Dynamics", Computational Mechanics Publications, Southampton y Elsevier Applied Science, NY.

DOMÍNGUEZ, J. y MAESO, O., 1993, "Earthquake analysis of arch dams. II: Dam-water-foundation interaction", *J. Eng. Mech., ASCE*, **119**(3), 513-530.

KUPRADZE, V.D., GEGELIA, T.G., BASHELEISHVILI, M.O. y BURCHULADZE, T.V., 1979, "Three-dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity", North-Holland, Amsterdam

MAESO, O., 1992, "Modelo para el Análisis Sísmico de Presas Bóveda Incluyendo los Efectos de Interacción Suelo-Agua-Estructura", *Tesis Doctoral*, Univ. de Las Palmas de G.C.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

MAESO, O. y DOMÍNGUEZ, J., 1993, "Earthquake analysis of arch dams. I: Dam-foundation interaction". *J. Eng. Mech., ASCE*, **119**(3), 496-512.

MEDINA, F., 1987, "Análisis de la Respuesta Sísmica de Presas Incluyendo Efectos de Interacción Suelo-Fluido-Estructura", *Tesis Doctoral*, Universidad de Sevilla.

MEDINA, F. y DOMÍNGUEZ, J., 1989, "Boundary Elements for the Analysis of the Seismic Response of Dams Including Dam-Water-Foundation Interaction Effects", *Eng. Anal. with B.E.*, **6**(3), 152-157.

NEWMARK, N.M. y ROSENBLUETH, E., 1978, "Fundamentos de Ingeniería Sísmica", Ed. Diana, México D.F.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Capítulo 2

Ecuaciones Básicas y Propagación de Ondas en Problemas Escalares, Elásticos y Poroelásticos.

2.1 Introducción

En este capítulo se desarrollan las ecuaciones básicas que gobiernan el comportamiento dinámico de los tres tipos de medios implicados en el modelo acoplado que se presenta, a saber: regiones fluidas, sólidos elásticos y medios poroelásticos. Se comienza dedicando el apartado 2.2 a las ecuaciones básicas de la elastodinámica lineal, para luego plantear las ideas básicas relacionadas con la propagación de ondas en sólidos elásticos en el apartado 2.3. El estudio de la propagación de ondas en fluidos no viscosos o propagación escalar, se realiza en el apartado 2.4 como un caso particular del problema elástico en el que el tensor de tensiones se reduce a su componente esférica. El apartado 2.5 se describe el sólido poroelástico como un medio donde coexisten una fase sólida y otra fluida con viscosidad no nula, superpuestas y acopladas. Las variables macroscópicas que caracterizan este medio se describen en el apartado 2.6 y la ecuaciones de gobierno de acuerdo a la teoría de Biot en el apartado 2.7. En 2.8 se analiza la significación de las constantes macroscópicas de Biot y su relación con constantes micromecánicas de ambas fases. Siguiendo un planteamiento análogo al realizado para sólidos elásticos, se analizan las características básicas de las ondas que se propagan en un medio poroelástico en el apartado 2.9. Se reformulan las ecuaciones de gobierno para los tres tipos de medios en el dominio de la frecuencia en el apartado 2.10 y se presenta la analogía entre las formulaciones de los problema poroelástico y termoelástico armónicos en 2.11. La consideración del paralelismo entre ambas formulaciones es de gran utilidad ya que en el problema termoelástico armónico la solución fundamental es conocida. Por último, en el apartado 2.12, se discuten las condiciones de contorno en las interfases del modelo acoplado.

2.2 Ecuaciones Básicas de la Elastodinámica Lineal

Al igual que en problemas estáticos, las ecuaciones de equilibrio en las tres direcciones y la ley de comportamiento del material constituyen las relaciones básicas

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

que gobiernan el comportamiento de sólidos elásticos en regimen dinámico. En este problema, sin embargo, las variables del problema serán funciones con dependencia temporal además de espacial y será necasario incluir las fuerzas de inercia y disipación en las ecuaciones de equilibrio del mismo.

Con todo ello, las relaciones cinemáticas básicas se establecen de igual forma que en elastostática. Así, si **x** representa el vector posición de cualquier punto del sólido Ω en relación a un sistema de referencia cartesiano fijo y t la variable tiempo, a partir de las componentes del vector desplazamiento $u_i(\mathbf{x},t)$ en cada punto del sólido Ω, se define el tensor de pequeñas deformaciones ε_{ij} como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{2.1}$$

obviamente simétrico ($\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$). De otro lado, las ecuaciones de equilibrio a nivel diferencial responden a la ecuación:

$$\sigma_{ij,j} + X_i = \rho \ddot{u}_i \tag{2.2}$$

donde σ_{ij} representa el tensor de tensiones (simétrico del equilibrio de momentos $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$), X_i las componentes de las fuerzas de volumen y ρ la densidad del material.

Por último, la relación entre el tensor de tensiones y el de deformaciones se establece a través de la ley de comportamiento. Esta relación, también llamada ecuación constitutiva, viene dada por la ley de Hooke, que para materiales homogéneos, isótropos con comportamiento elástico y lineal tiene la siguiente expresión:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\upsilon}{E}\sigma_{ij} - \frac{\upsilon}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} \tag{2.3}$$

o bien en forma inversa:

$$\sigma_{ij} = \lambda e \delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{2.4}$$

siendo δ_{ij} la delta de Kronecker. Así, para la hipótesis de partida, la relación tensión-deformación puede expresarse en función de sólo dos constantes (ver p.e. París, 1998): en (2.3) el módulo de elasticidad (E) y el coeficiente de Poisson (υ), mientras en (2.4) el módulo de elasticidad tranversal ($\mu = \frac{E}{2(1+\upsilon)}$) y la constante de Lamé ($\lambda = \frac{2\mu\upsilon}{1-2\upsilon}$). En esta última $e = \varepsilon_{kk}$ representa la dilatación volumétrica del medio.

En algunos casos puede resultar interesante la utilización del módulo de rigidez volumétrica o módulo de compresibilidad (K) como una de las constantes características del medio. Esta constante representa la rigidez de un sólido al cambio de volumen de la misma forma que μ representa la rigidez al cambio de forma. Ambas pueden adoptarse

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

como constantes del medio, la primera relacionada con la componente esférica y la segunda con la desviadora de la ley de comportamiento. Haciendo uso de (2.4) en un problema hidrostático, K será la relación entre la presión y el cambio unitario de volumen provocado por ésta:

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu = \frac{E}{3(1-2\upsilon)} \tag{2.5}$$

En problemas tridimensionales, el conjunto de ecuaciones (2.1), (2.2) y (2.4) consituyen un sistema completo de 15 ecuaciones (6 relaciones cinemáticas deformación-desplazamiento, 3 ecuaciones de equilibrio dinámico y 6 ecuaciones constitutivas) con 15 incógnitas (6 componentes del tensor de tensiones, 6 componentes del tensor de deformaciones y las 3 componentes del vector desplazamiento) todas ellas con dependencia espacial y temporal. Esta dependencia espacio-temporal a la que hemos hecho referencia en varias ocasiones desde el comienzo del apartado, representa físcamente el carácter ondulatorio de la solución del problema. Así, ante una solicitación genérica variable en el tiempo, la respuesta del sistema en desplazamientos, tensión o deformación serán ondas que se propagan en el interior del dominio en estudio.

Con todo, este sistema de ecuaciones planteado puede ser condensado y formular el comportamiento del medio en término de las tres componentes del vector desplazamiento. Así, sustituyendo (2.1) en (2.4) y el resultado en (2.2), podemos expresar las ecuaciones de equilibrio de forma vectorial como sigue (ecuación de Navier):

$$\mu\nabla^2\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\nabla\,\nabla\bullet\mathbf{u} + \mathbf{X} = \rho\ddot{\mathbf{u}} \tag{2.6}$$

expresión que ha de satisfacerse en todos los puntos del dominio en estudio para cada instante de tiempo. La integración de (2.6) y la obtención del campo de desplazamientos en el dominio Ω, requiere la imposición de las restricciones en el contorno Γ de Ω en forma de tensiones y/ó desplazamientos conocidos además de establecer condiciones iniciales en $t = 0$ para las tres componentes del desplazamiento y la velocidad en cada punto del medio. Conocido ya el campo de desplazamientos, el tensor de deformaciones $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x},t)$ puede obtenerse de (2.1) de forma sencilla, y con él el tensor de tensiones $\sigma_{ij}(\mathbf{x},t)$ a partir de la ley de comportamiento (2.4).

2.3 Propagación de Ondas en Medios Elásticos

En este apartado se estudian qué características tienen los fenómenos de propagación de ondas en un medio elástico, homogéneo e isótropo. Partimos, para ello, de las ecuaciones de equilibrio dinámico en desplazamientos (2.6) y del problema que representa su integración teniendo en cuenta que las variables fundamentales (las tres componentes del desplazamiento) se presentan acopladas. En este sentido, los procedimientos que permiten desacoplar este sistema de ecuaciones arrancan de los

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

trabajos de Poisson, si bien es Stockes (Stockes, 1849) el primero que presenta una formulación en términos de la dilatación volumétrica e y el vector rotación $\boldsymbol{\omega}$ que permiten desacoplar estas ecuaciones de modo simple.

$$e = \varepsilon_{kk} = \nabla \bullet \mathbf{u} \tag{2.7.a}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} \tag{2.7.b}$$

En término de estas variables, la laplaciana del campo de desplazamientos puede ser expresada como sigue:

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla e - \nabla \times \boldsymbol{\omega} \tag{2.8}$$

que introducida en el sistema de ecuaciones (2.6), permite escribirlo en los siguientes términos:

$$-\mu \nabla \times \boldsymbol{\omega} + (\lambda + 2\mu) \nabla e = \rho \ddot{\mathbf{u}} \tag{2.9}$$

Aplicando ahora los operadores divergencia y rotacional sobre esta ecuación, en la que para mayor simplicidad se han eliminado las cargas de volumen, y teniendo en cuenta que $\nabla \bullet (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) = 0$ y $\nabla \times (\nabla e) = 0$ además de ser nula la divergencia del vector rotación, podemos escribir respectivamente:

$$\nabla^2 e = \frac{1}{c_P^2} \ddot{e} \tag{2.10.a}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{c_S^2} \ddot{\boldsymbol{\omega}} \tag{2.10.b}$$

donde:

$$c_P^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad \text{y} \quad c_S^2 = \frac{\mu}{\rho} \tag{2.11}$$

Las ecuaciones (2.10.a) y (2.10.b) representan una versión desacoplada de las ecuaciones de Navier (2.6) en términos de la dilatación y las tres componentes del vector rotación. Se trata de ecuaciones de onda, la primera escalar y la segunda vectorial (c_P y c_S tienen dimensiones de velocidad). Así, la componente dilatacional o irrotacional de la perturbación (asociada a cambios de volumen) se propaga con velocidad c_P mientras que la componente rotacional o equivoluminal (asociada a distorsiones en la forma) viaja con velocidad c_S. En un medio homogéneo e isótropo infinito ambas componentes coexisten y se propagan independientemente siendo $c_P > c_S$, razón por la cual en sismología se denomina a las ondas irrotacionales *ondas primarias* (ondas P) y a las equivoluminales *ondas secundarias* (ondas S), ya que las primeras alcanzan la estación en menor tiempo desde el epicentro del seísmo. Esto último justifica la notación utilizada desde el

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

comienzo para ambas.

Utilizando c_P y c_S como constantes características del medio, podemos escribir la ecuación de gobierno del problema (2.9) como sigue:

$$-c_S^2 \nabla \times \boldsymbol{\omega} + c_P^2 \nabla e = \ddot{\mathbf{u}} \tag{2.12}$$

Expresión algo más conveniente para estudiar las características del movimiento de los puntos del sólido bajo el efecto de estas ondas. Para ello, se supone un problema de propagación plana armónica de carácter genérico con velocidad c y dirección determinada por el vector unitario $\mathbf{s}$ (ver p.e. Domínguez,1993). El campo de desplazamientos, en notación compleja y con amplitud unitaria, puede expresarse como sigue:

$$\mathbf{u} = e^{i(\omega t - k\mathbf{s}\bullet\mathbf{x})}\mathbf{d} \tag{2.13}$$

donde k es el número de onda ($\frac{\omega}{c}$), ω la frecuencia angular, $\mathbf{x}$ el vector posición de cualquier punto del medio, $\mathbf{i}$ la unidad imaginaria y $\mathbf{d}$ un vector unitario en la dirección del movimiento. Así, sustituyendo (2.13), cada uno de los términos de (2.12) serán:

$$\nabla \times \boldsymbol{\omega} = -k^2 \mathbf{s} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{d})\, e^{i(\omega t - k\mathbf{s}\bullet\mathbf{x})} \tag{2.14.a}$$

$$\nabla e = -k^2\, (\mathbf{s} \bullet \mathbf{d})\mathbf{s}\, e^{i(\omega t - k\mathbf{s}\bullet\mathbf{x})} \tag{2.14.b}$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = -\omega^2 e^{i(\omega t - k\mathbf{s}\bullet\mathbf{x})}\mathbf{d} \tag{2.14.c}$$

Por tanto, y teniendo en cuenta que $\mathbf{s} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{s} \bullet \mathbf{d})\mathbf{s} - \mathbf{d}$, la ecuación (2.12), en este caso, puede expresarse como sigue:

$$\left(c_S^2 - c^2\right)\mathbf{d} + \left(c_P^2 - c_S^2\right)(\mathbf{s} \bullet \mathbf{d})\mathbf{s} = 0 \tag{2.15}$$

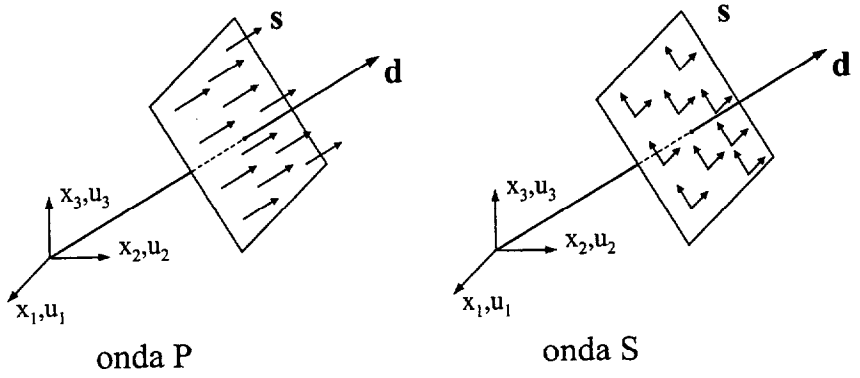

Figura 2.1. Desplazamientos y dirección de propagación. Ondas planas P y S

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Con ello, si (2.13) es una onda S ($c = c_S$), esta relación sólo se verifica si $\mathbf{s} \bullet \mathbf{d} = 0$ y, por tanto, si las direcciones de propagación y desplazamiento son perpendiculares. Se trata de una onda transversal y el vector desplazamiento está contenido en el plano de propagación. Por otra parte, si (2.13) es una onda P ($c = c_P$), el cumplimiento de (2.15) requiere que $\mathbf{s} = \pm\mathbf{d}$ y la dirección de propagación y desplazamiento coinciden. Así, la onda P es una perturbación de carácter longitudinal y el desplazamiento de los puntos del sólido se produce en la dirección de propagación (Figura 2.1). Este planteamiento realizado para ondas armónicas puede generalizarse sin excesiva dificultad a cualquier tipo de perturbación plana.

En este apartado sólo se han tratado los aspectos básicos necesarios para entender lo que sigue en los próximos capítulos. Un tratamiento en profundidad de la teoría de la elastodinámica puede estudiarse en Achenbach (1973) o Eringen y Suhubi (1975).

2.4 Ondas de Presión en Fluidos

En este punto se introducen las ecuaciones que rigen el comportamiento dinámico del agua. Así, será tratada como un fluido compresible y de viscosidad despreciable (fluido perfecto) con comportamiento elástico y lineal que trabaja en un rango de pequeñas perturbaciones.

Todos los fluidos reales tienen viscosidad distinta de cero y los tensores de tensión presentan componentes de cortante no nulas. No obstante, la viscosidad varía entre amplios márgenes para diferentes fluidos de forma tal que, en algunos casos, puede ser despreciada sin que se produzca pérdida de exactitud en los resultados. Así, en las regiones líquidas del modelo que se presenta (agua), los efectos inerciales serán predominantes sobre los viscosos y el fluido podrá considerarse no viscoso. No se tienen en cuenta los efectos provocados por turbulencias. Un fluido perfecto (no viscoso) no soporta tensiones tangenciales y el tensor de tensiones se reduce a su componente esférica:

$$\sigma_{ij} = -p\,\delta_{ij} \tag{2.16}$$

siendo p la presión. El signo negativo indica una tensión de compresión para un valor positivo de la presión. En un rango de pequeñas perturbaciones y teniendo en cuenta el carácter elástico y lineal del modelo, la ley de comportamiento puede plantearse desde la ley de Hooke descrita para sólidos elásticos (2.4) :

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p = K_f\,\varepsilon \tag{2.17.a}$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \tag{2.17.b}$$

donde, si $U_i(\mathbf{x},t)$ son las componentes del campo de desplazamientos en el fluido, $\varepsilon = \varepsilon_{kk} = U_{i,i}$ representa la dilatación volumétrica del mismo. K_f es el módulo de

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

compresibilidad del fluido. También, a partir de las ecuaciones de equilibrio para sólidos elásticos (2.2), puede expresarse el equilibrio en un fluido perfecto de densidad ρ como sigue:

$$\nabla p = \rho \ddot{\mathbf{U}} \tag{2.18}$$

o, haciendo uso de (2.17):

$$K_f \nabla \varepsilon = \rho \ddot{\mathbf{U}} \tag{2.19}$$

La ecuación (2.18) que representa la relación entre la presión y la derivada segunda del desplazamiento, será útil, como se verá, a la hora de establecer las condiciones de contorno en las interfases del modelo. En ambas expresiones del equilibrio no se han tenido en cuenta las cargas de volumen sobre el dominio líquido.

La aplicación de los operadores divergencia y rotacional sobre (2.18) permiten escribir:

$$\nabla^2 \varepsilon = \frac{1}{c^2} \ddot{\varepsilon} \tag{2.20.a}$$

$$\nabla \times \mathbf{U} = \mathbf{0} \tag{2.20.b}$$

Así, con las hipótesis realizadas, el movimiento del líquido está gobernado por la ecuación de onda que rige la dilatación volumétrica en los sólidos elásticos (2.10.a) ($c^2 = \frac{K_f}{\rho}$ es la velocidad de propagación de las ondas longitudinales). Asimismo, el campo de desplazamientos es irrotacional (2.20.b), como es de sobra conocido. No existe onda S en un fluido perfecto.

En términos de la presión, a partir de (2.17), podemos escribir (2.20.a) como sigue:

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \ddot{p} \tag{2.21}$$

Ecuación que gobierna la propagación de ondas de presión y que será utilizada en adelante para caracterizar el comportamiento dinámico de un fluido perfecto, lineal y elástico sometido a pequeñas perturbaciones.

2.5 El Medio Poroelástico

Podemos describir el medio poroelástico como aquel en el que coexisten dos fases, una sólida denominada *esqueleto* o *matriz sólida* y otra fluida que puede ser líquida y/o gaseosa. En lo que a la primera se refiere, la demoninación esqueleto sólido es muy gráfica ya que se trata de un medio sólido provisto de gran número de huecos o *poros*

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

interconectados de forma tal que sea posible el tránsito de la fase fluida de unas zonas a otras del medio. El índice de huecos o *porosidad* es una característica del medio y contabiliza el espacio hueco del esqueleto interconectado ocupado por la fase fluida. Sería más adecuado llamarla porosidad efectiva ya que los poros aislados, ocupados o no por la fase fluida, no son tenidos en cuenta a la hora de elaborar este índice y se consideran parte de la matriz sólida (Fig.2.2).

El análisis de la respuesta dinámica de medios poroelásticos tiene importantes aplicaciones en geofísica, geotecnia, acústica e ingeniería sísmica. Son numerosos los ejemplos de materiales que responden a esta configuración. Podemos mencionar los terrenos bajo el nivel freático, los terrenos donde existen bolsas de petróleo o gas, los fangos en el fondo de depósitos de cualquier líquido, los sedimentos en embalses de agua, recubrimientos absorbentes de ondas acústicas, etc... Si la fase fluida llena completamente los intersticios del esqueleto diremos que el medio poroelástico está *saturado*. Por el contrario, si la fase fluida no ocupa completamente los poros de la matriz sólida nos encontramos ante un medio *cuasisaturado*. Imaginemos, en este caso, un líquido no libre de pequeñas burbujas de aire.

A pesar de esta descripción inicial del medio poroelástico, el tratamiento que se realiza del mismo no implica el estudio a nivel microscópico del comportamiento de cada fase. Pensaremos antes en un medio donde el espacio intersticial está distribuido regularmente y puedan establecerse unas propiedades medias del mismo de forma tal que, desde un punto de vista macroscópico, sean de aplicación las hipótesis de isotropía y homogeneidad clásicas en el estudio de la mecánica del medio continuo. Desde esta óptica, podemos entender el sólido poroelástico Ω como dos medios continuos superpuestos y acoplados: la matriz sólida y el fluido que ocupa los poros interconectados (Coussy y Dangla, 1995) (Fig. 2.2). En cada punto del medio, las variables de campo del problema (desplazamientos de ambas fases, tensiones y presión de fluido en los intersticios) tienen también un carácter promedio y, por tanto, cuantificables de forma experimental. Para los desplazamientos de la fase fluida, este carácter promedio conduce a alguna que otra paradoja que veremos a lo largo de este Capítulo. Asimismo, se considera lineal la relación entre las variables estáticas y cinemáticas y trabajaremos en el rango de pequeñas deformaciones con lo cual será de aplicación el principio de superposición, de gran interés para el enfoque que se realiza del problema dinámico.

El primer modelo que hace uso de una imagen del continuo similar a la expuesta, fue propuesto por Karl Terzaghi (1923,1925) y pretendía explicar el fenómeno de la consolidación de terrenos saturados. Era conocido que terrenos arcillosos bajo carga no sólo sufren una deformación instantánea sino que además se ven sometidos a un proceso de deformación diferida que puede prolongarse durante largos periodos de tiempo. Este proceso está gobernado por dos fenómenos diferentes que se presentan de forma conjunta. De un lado, la expulsión del agua intersticial (consolidación primaria). De otro, un reajuste de las partículas de la matriz sólida (consolidación secundaria). En el modelo de Terzaghi, de carácter monodimensional, el esqueleto sólido y el fluido son

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

incompresibles y el proceso de deformación diferida se produce como consecuencia de la expulsión del fluido de los insterticios del medio debido a la reducción del índice de poros (consolidación primaria). La ecuación diferencial que gobierna este proceso relaciona la derivada espacial de la presión intersticial con la derivada temporal de esta variable a través de un *coeficiente de consolidación* que depende de las propiedades de ambas fases. A pesar de sus simplificaciones, este modelo explica de forma convincente este fenómeno y tuvo una gran acogida en su época, convirtiendose los trabajos de este autor en los primeros tratados de una nueva ciencia, la mecánica de suelos. Otros clásicos de este autor, entre otros, son Terzaghi (1943) y Terzaghi y Peek (1948).

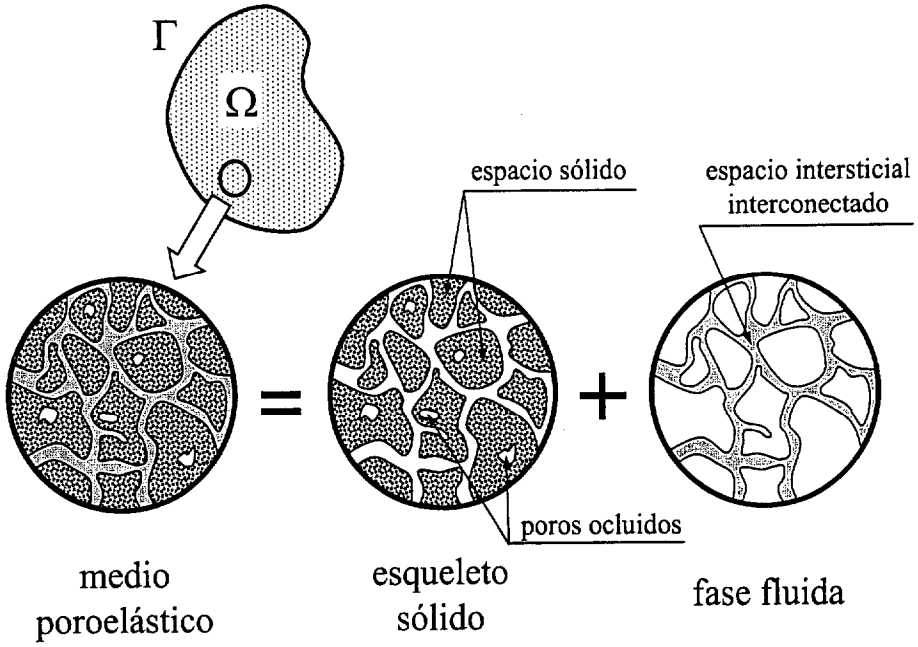

Figura 2.2. El sólido poroelástico entendido como dos medios continuos superpuestos.

En 1941 Maurice A. Biot publica una serie de artículos (Biot, 1941a y b, Biot y Clingan, 1941) en los que se desarrolla la teoría general del comportamiento de sólidos poroelásticos bajo carga estática. El sólido poroelástico de Biot responde a la imagen descrita al principio de este apartado. El medio está constituido por dos fases y la fase fluida ocupa completamente los intersticios de la matriz sólida (medio saturado). Ambas fases, fluido y esqueleto sólido, son compresibles. El medio en su conjunto es homogéneo e isótropo y tiene un comportamiento elástico y lineal en el rango de pequeñas deformaciones. Al igual que en el modelo de Terzaghi, el movimiento del fluido a través de la matriz sólida es gobernado por la ley de Darcy si bien el proceso de consolidación se describe desde un modelo acoplado de tensiones y deformaciones en ambas fases. Algunos años después, el mismo Biot extiende la formulación a medios anisótropos (Biot, 1955 y 1956a) y generaliza la formulación cuasiestática anterior al

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

caso dinámico para sólidos poroelásticos isótropos (Biot, 1956b y c) . En estas últimas publicaciones, y a diferencia de los sólidos elásticos, este autor demuestra la existencia de tres ondas asociadas a cualquier fenómeno de propagación en este tipo de medios. Dos ondas acopladas de caracter irrotacional (longitudinales) y una equivolumial (transversal) independiente de las anteriores. En este Capítulo volveremos sobre este tema con más detalle. Otros trabajos relacionados y de obligada mención de este autor son Biot (1956d, 1962 y 1973) este último relacionado con problemas no lineales y Biot y Willis (1957).

2.6 Caracterización del Medio Poroelástico.

En este apartado se describen las magnitudes geométricas, dinámicas y cinemáticas necesarias para la formulación del problema de acuerdo a los planteamientos de Biot. La estructura de este apartado y la nomenclatura utilizada en el mismo se corresponde con lo escrito por Domínguez (1995). Así, y como ya se ha comentado, la *porosidad* ϕ es quizás la constante más característica de este tipo de medios y representa la fracción del volumen total de material homogéneo ocupada por los intersticios o poros interconectados. Relacionada con esta constante está lo que se denomina *índice de poros* n que representa la relación entre el volumen ocupado por los poros y el ocupado por las partículas sólidas. En la bibliografía específica el índice de poros se representa con la letra e. En este texto será utilizada la letra n (habitualmente utilizada para la porosidad) ya que e la reservaremos para representar la dilatación volumétrica del esqueleto sólido. A partir de las definiciones anteriores, es sencillo obtener la relación entre ambos coeficientes:

$$n = \frac{\phi}{1-\phi} \tag{2.22}$$

De acuerdo a la imagen del medio poroelástico establecida en el apartado anterior, se describen a continuación las variables cinemáticas y dinámicas del problema. Así, sea un punto material o volumen infinitesimal del medio con vector posición $\mathbf{x}$ respecto de un sistema de refrencia fijo. La matriz sólida de este volumen elemental con su configuración intersticial drenada representan el punto o particula del medio asociada a la fase sólida. En el mismo punto geométrico $\mathbf{x}$, el fluido que ocupa los intersticios de este volumen elemental contituye la partícula de fluido. Por tanto, en cada punto geométrico $\mathbf{x}$ y para cada instante de tiempo t, se definen dos vectores desplazamiento, uno asociado a la partícula sólido (esqueleto sólido) $u_i(\mathbf{x},t)$ y otro correspondiente a la partícula fluida $U_i(\mathbf{x},t)$. Como ya se comentó en el apartado anterior, ambos deben entenderse variables promedio. Con esto, se define el tensor de deformaciones en la fase sólida de la forma habitual (2.1):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{2.23}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

De igual manera, las dilataciones volumétricas en ambas fases responden a las expresiones:

$$e = u_{i,i} \qquad \text{esqueleto sólido} \tag{2.24.a}$$

$$\varepsilon = U_{i,i} \qquad \text{fase fluida} \tag{2.24.b}$$

Algunas formulaciones de las ecuaciones de equlibrio utilizan como variable cinemática asociada al fluido, el desplazamiento relativo de éste respecto de la matriz sólida $w_i = U_i - u_i$ (muchos autores denominan desplazamiento relativo al volumen de fluido que abandona el medio por unidad de área $w_i = \phi(U_i - u_i)$ (ver p.e. Cheng et al., 1991). Por otra parte, la primera formulación realizada por Biot de la ley de comportamiento para este tipo de materiales, utilizaba como variable cinemática, junto al tensor de deformaciones del sólido, el incremento de contenido de fluido del material homogéneo ζ. A partir de w_i, se expresa ζ como sigue:

$$\zeta = -\phi w_{i,i} = -\phi(\varepsilon - e) \tag{2.25}$$

De otro lado, otra variable cinemática asociada a la fase fluida que se utilizará más adelante es el *vector de descarga* q_i o volumen de fluido que abandona por unidad de área y tiempo el volumen de referencia:

$$q_i = \phi \dot{w}_i = \phi\left(\dot{U}_i - \dot{u}_i\right) \tag{2.26}$$

En lo que a las variables dinámicas se refiere, se comienza introduciendo el tensor de tensiones sobre el material homogéneo σ_{ij} o tensor de tensiones totales. No existe ninguna diferencia conceptual respecto del tensor de tensiones para sólidos elásticos. Para entender σ_{ij} no es necesario imaginar el sólido poroelástico como un medio bifásico. Para caracterizar completamente el medio, junto al tensor de tensiones totales se introduce una variable dinámica asociada a la fase fluida, la *presión intersticial* o *presión de poro* (p). Su denominación es clarificadora, es la presión del fluido que ocupa los intersticios del esqueleto sólido. En este texto, sin embargo, serán utilizadas como variables dinámicas otras dos relacionadas directamente con las anteriores. A saber:

Tensión equivalente en el fluido (τ): Es la tensión sobre el fluido si se toma como referencia el area total de material homogéneo. Así $\tau = -\phi p$. Aclarar que el signo negativo está relacionado con el convenio de signos adoptado para esta variable: positiva la tracción y negativa la compresión (la presión intersticial positiva representa compresión).

Tensor de tensiones sobre el esqueleto sólido (τ_{ij}): Puede vislumbrarse como la tensión aplicada en la fase sólida del medio tomando como referencia el área total de material homogéneo.

Con ello, el tensor de tensiones sobre el material homogéneo σ_{ij} puede escribirse en

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

término de estas dos nuevas variables como sigue:

$$\sigma_{ij} = \tau_{ij} + \tau \delta_{ij} \tag{2.27}$$

En un próximo apartado será tratado el denominado *tensor de tensiones efectivas* (σ'_{ij}). Esta variable, imprescindible en cualquier tratado relacionado con la mecánica de suelos, se comprende mejor una vez introducida la ley de comportamiento para este tipo de sólidos.

2.7 Ecuaciones de Gobierno

Como en cualquier problema de mecánica del medio continuo, las ecuaciones que gobiernan el comportamiento diferencial de sólidos poroelásticos en régimen dinámico son las ecuaciones de equilibrio, donde habrán de incluirse las fuerzas de inercia y disipación, y una ley de comportamiento que relaciona tensiones y deformaciones en ambas fases del medio. Estas ecuaciones pueden expresarse en términos de cualquiera de las variables dinámicas y cinemáticas descritas en el punto anterior. En este apartado veremos sólo unas pocas expresiones alternativas de estas relaciones. La combinación de ecuaciones de equilibrio y ley de comportamiento permite obtener la ecuación de onda en términos del vector desplazamiento de ambas fases. En próximos apartados estudiaremos los tipos de onda presentes en estos medios a través de esta ecuación.

2.7.1 Ecuaciones de Equilibrio

En términos del tensor de tensiones total sobre el medio poroelástico entendido como un material homogéneo, las ecuaciones de equilibrio tienen una expresión análoga a la correspondiente al sólidos elásticos teniendo en cuenta las fuerzas de inercia de ambas fases:

$$\sigma_{ij,j} + \bar{X}_i = \rho_1 \ddot{u}_i + \rho_2 \ddot{U}_i \tag{2.28}$$

donde $\rho_1 = (1-\phi)\,\rho_s$ y $\rho_2 = \phi\,\rho_f$, siendo ϕ la porosidad, ρ_s la densidad del material que conforma la matriz sólida y ρ_f la densidad del fluido. Así, ρ_1 y ρ_2 son las densidades de la fase sólida y líquida respectivamente referidas al volumen total de material homogéneo. $\bar{X}_i$ es la fuerza por unidad de volumen sobre el medio homogéneo, que constituye un promedio de las fuerzas por unidad de volumen sobre el material que constituye cada fase (F_i: matriz sólida, f_i: fase fluida) a traves de la porosidad del medio (ϕ): $\bar{X}_i = (1-\phi)F_i + \phi f_i$. En esta expresión, cada sumando representa las fuerzas de volumen sobre cada fase referidas al volumen total de material homogéneo (X_i y X'_i).

A la luz de (2.28) el problema parece estar planteado en función de seis variables fundamentales, las tres componentes del desplazamiento en cada fase (u_i y U_i), por tanto

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

será necesario, junto al equilibrio conjunto representado por (2.28), formular, de manera individual, la condición de equilibrio en alguna de las fases integrantes del medio. Centrándonos en la fase líquida, la condición de equilibrio dinámico requiere entender cómo se produce el tránsito de fluido a través de la matriz sólida del medio. En este sentido, el fluido circulará a través del esqueleto siguiendo caminos más o menos tortuosos dependiendo de la geometría de los intersticios, si bien, desde un punto de vista macroscópico y en problemas cuasiestáticos, puede establecerse una relación entre el vector de descarga (q_i) y el gradiente de altura piezométrica (h) en cada punto. Esta relación, de carácter empírico, fue establecida por Henry Darcy (Darcy, 1856) y matemáticamente se espresa como sigue:

$$\mathbf{q} = -\varkappa \nabla h \tag{2.29}$$

siendo $\varkappa$ una constante de proporcionalidad que recibe el nombre de *coeficiente de permeabilidad* y tiene dimensiones de velocidad. En un líquido newtoniano y asumiendo flujo laminar, la ecuación anterior puede escribirse:

$$\mathbf{q} = -\frac{k}{\eta}\gamma_f \nabla h \tag{2.30}$$

donde η representa la viscosidad del fluido, γ_f su peso específico y k la permeabilidad física o intrínseca. Este parámetro tiene dimensiones de área y depende únicamente de la geometría del esqueleto sólido. En este punto existe una importante diferencia respecto del tratamiento dinámico realizado para las regiones fluidas del modelo (ap.2.4). En aquel caso, el planteamiento de la ecuación de onda se realizaba considerando despreciable la viscosidad del líquido. Para un fluido como el agua, la aproximación es aceptable en los modelos que estudiaremos. Diferente tratamiento debe realizarse para el mismo fluido si se presenta ocupando los intersticios de un medio poroelástico. En este caso, la viscosidad del fluido, conjuntamente con la geometría del esqueleto, determinan la permeabilidad del medio y, como veremos, su comportamiento dinámico de forma apreciable.

Retomando (2.30), la altura piezométrica (h) representa la suma de la altura de elevación (z) y la altura de presión ($\frac{p}{\gamma_f}$). La primera vinculada con las fuerzas de volumen gravitatorias sobre el fluido. Así, puede expresarse (2.30) en cada dirección como sigue:

$$q_i = -\frac{k}{\eta}\left(p_{,i} - f_i\right) \tag{2.31}$$

Para el problema dinámico, incluyendo las fuerzas de inercia en (2.31):

$$q_i = -\frac{k}{\eta}\left[p_{,i} - f_i + \rho_f \ddot{U}_i + \frac{\rho_a}{\phi}\left(\ddot{U}_i - \ddot{u}_i\right)\right] \tag{2.32}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

donde aparece el término ρ_a denominado *densidad añadida* que multiplica a la aceleración relativa entre ambas fases. Este parámetro, sobre el que se incide más adelante, depende de la configuración de los intersticios del esqueleto sólido.

En términos de las tensiones equivalentes en ambas fases (2.27), las ecuaciones de equilibrio (2.28) y (2.32) pueden escribirse como sigue:

$$\tau_{ij,j} + X_i = \rho_{11}\,\ddot{u}_i + \rho_{12}\,\ddot{U}_i + b\left(\dot{u}_i - \dot{U}_i\right) \qquad (2.33.a)$$

$$\tau_{,i} + X_i' = \rho_{12}\,\ddot{u}_i + \rho_{22}\,\ddot{U}_i - b\left(\dot{u}_i - \dot{U}_i\right) \qquad (2.33.b)$$

donde $\rho_{11} = \rho_1 - \rho_{12}$, $\rho_{22} = \rho_2 - \rho_{12}$ y $\rho_{12} = -\rho_a$, siendo b una constante relacionada con la permeabilidad de Darcy (k), la viscosidad del fluido (η) y la porosidad (ϕ) de la siguiente forma:

$$b = \frac{\eta \phi^2}{k} \qquad (2.34)$$

Esta constante b se denomina *constante de disipación* y que representa las fuerzas de viscosidad por unidad de volumen y por unidad de velocidad relativa del fluido respecto de la matriz sólida. El término del que forma parte, constituye la componente disipativa que distingue al modelo poroelástico. Esta disipación está vinculada a la velocidad relativa de ambas fases y se anula cuando no existe movimiento relativo entre ellas. Asimismo, existe otra componente de disipación de tipo histerético asociada a la matriz sólida y que se presenta conjuntamente con la anterior. Este modelo de amortiguamiento para el esqueleto del medio es análogo al que se aplica el caso de sólidos elásticos. Su incorporación se estudia para problemas armónicos en un próximo apartado.

2.7.2. Ley de Comportamiento

En este apartado se establecen las relaciones entre las variables estáticas y cinemáticas en el medio poroelástico en la hipótesis de comportamiento elástico y lineal del medio. Como en la teoría de la elasticidad, estableceremos esta relación desde un proceso de deformación cuasiestática reversible. Desde un punto de vista más intuitivo, las constantes que caracterizan el medio se interpretan en estados de reposo una vez que ha transcurrido el tiempo de tránsito necesario.Así, en términos de la tensión equivalente en el sólido y fluido y las deformaciones en ambas fases (Biot, 1956b), la expresión de la ley de comportamiento que se utiliza a lo largo de este trabajo responde a la expresión:

$$\tau_{ij} = \left(\lambda + \frac{Q^2}{R}\right) e\,\delta_{ij} + 2\,\mu\,\varepsilon_{ij} + Q\,\varepsilon\,\delta_{ij} \qquad (2.35.a)$$

$$\tau = Q\,e + R\,\varepsilon \qquad (2.35.b)$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

donde λ, μ, Q y R representan las constantes elásticas del medio o constantes de Biot. De un lado λ y μ son la constante de Lamé y el módulo de elasticidad transversal correspondientes al esqueleto sólido drenado. Las constantes Q y R están relacionadas con el comportamiento acoplado de ambas fases.

Para comprender algo más el sentido de (2.35) quizás debe realizarse una pequeña revisión de la evolución que han seguido estas ecuaciones en las diferentes formulaciones propuestas por el mismo Biot (Domínguez, 1995). Así, en las formulaciones iniciales del problema cuasiestático (Biot,1941a y b) este autor introduce el efecto de la presión de poro en la Ley de Hooke correspondiente a un esqueleto sólido drenado homogéneo, isótropo, elástico y lineal (2.3) a través de una constante que denomina $3H$ por conveniencia. Además de las deformaciones del esqueleto, introduce otra variable cinemática asociada al fluido que se relaciona, en una ecuación adicional, con las tensiones totales y la presión de poro a través de dos nuevas constantes $3H'$ y R'. Esta variable cinemática es la variación del contenido de fluido en el material homogéneo ζ. Así, en términos de la tensión sobre el material homogéneo, la presión intersticial, las deformaciones en la matriz sólida y la variación del contenido de fluido, establece una ley de comportamiento que responde a la expresión:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\upsilon}{E}\sigma_{ij} - \frac{\upsilon}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} + \frac{p}{3H}\delta_{ij} \qquad (2.36.a)$$

$$\zeta = \frac{1}{3H'}\sigma_{kk} + \frac{p}{R'} \qquad (2.36.b)$$

siendo E el módulo de elasticidad y υ el coeficiente de Poisson correspondientes un medio constituido exclusivamente por la matriz sólida (esqueleto sólido drenado). Si $p = 0$ (2.36.a) se convierte en la Ley de Hooke para este medio drenado. A partir de aquí, puede explicarse (2.36) atendiendo a las hipótesis de isotropía y homogeneidad consideradas para el medio poroelástico. Así y debido al caracter esférico de p, ésta afectará sólo a las componentes normales de la deformación y, además, de igual manera. Por la misma razón, ζ sólo se verá alterado por las componentes normales de la tensión total y la presión de poro. Variaciones de la tensión tangencial no provocan cambios en el contenido de fluido del medio.

La relación tensión-deformación, invirtiendo las ecuaciones (2.36), puede escribirse como sigue:

$$\sigma_{ij} = (\lambda + \alpha\alpha' M)\, e\, \delta_{ij} + 2\,\mu\,\varepsilon_{ij} - \alpha M \zeta\, \delta_{ij} \qquad (2.37.a)$$

$$p = M\zeta - \alpha' M e$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

siendo λ la constante de Lame del esqueleto sólido drenado y el resto de constantes:

$$\alpha = \frac{2(1+\upsilon)}{3(1-2\upsilon)}\frac{\mu}{H} \tag{2.38.a}$$

$$\alpha' = \frac{2(1+\upsilon)}{3(1-2\upsilon)}\frac{\mu}{H'} \tag{2.38.b}$$

$$M = \frac{R'H'}{H' - \alpha' R'} \tag{2.38.c}$$

A diferencia de (2.35), hasta ahora en (2.36) o su inversa (2.37) parecen ser necesarias cinco constantes para caracterizar el comportamiento del medio, sin embargo, apelando a la hipótesis de comportamiento elástico, este número puede reducirse a cuatro ya que $\alpha = \alpha'$ y, por tanto, $H = H'$.

Así, en el supuesto de que el medio poroelástico se encuentre sometido a un proceso cuasiestático de carga sin pérdidas y admitiendo el comportamiento elástico del material, podemos concluir que trabajamos con un sistema conservativo. Por tanto, el trabajo externo realizado por las cargas de volumen y de contorno puede escribirse en términos de la variación de una función energía potencia que podrá ser expresada en términos de variables estáticas o cinemáticas del medio. Esta función energía potencial por unidad de volumen o función densidad de energía de deformación U, para sólidos poroelásticos puede ser expresada como sigue:

$$U = \frac{1}{2}(\tau_{ij}\varepsilon_{ij} + \tau\varepsilon) = \frac{1}{2}(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + p\zeta) \tag{2.39}$$

Para esta función U, que puede expresarse en términos de las siete componentes de deformación del medio $(\varepsilon_{ij}, \varepsilon)$ a través de las cinco constantes anteriores $(\lambda, \mu, \alpha, \alpha'$ y $M)$, puede demostrarse (ver Biot,1956b):

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad \text{y} \quad p = \frac{\partial U}{\partial \zeta} \tag{2.40}$$

Teniendo en cuenta la igualdad de derivadas cruzadas de la función U, es sencillo concluir:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \zeta} = \frac{\partial p}{\partial \varepsilon_{ij}} \Rightarrow \alpha = \alpha' \ (H = H') \tag{2.41}$$

con lo que sólo serán necesarias cuatro constantes para establecer el comportamiento del material poroelástico tal y como se adelantaba hace un momento. En (2.36) serán E, υ, H y R', mientras que en su inversa (2.37) son λ, μ, α y M. El procedimiento es análogo al que permite demostrar la simetría de la matriz constitutiva para sólidos elásticos (ver p.e.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

París, 1998). Con todo ello, se escribe nuevamente (2.37):

$$\sigma_{ij} = \left(\lambda + \alpha^2 M\right) e\, \delta_{ij} + 2\,\mu\,\varepsilon_{ij} - \alpha M\,\zeta\,\delta_{ij} \tag{2.42.a}$$

$$p = M\,\zeta - \alpha M\, e \tag{2.42.b}$$

o, invirtiendo (2.42.b) y sustituyendo en (2.42.a) (Biot y Willis, 1957):

$$\sigma_{ij} = \lambda\, e\, \delta_{ij} + 2\,\mu\,\varepsilon_{ij} - \alpha p \delta_{ij} \tag{2.43.a}$$

$$\zeta = \alpha\, e + \frac{1}{M}\, p \tag{2.43.b}$$

En este punto, el tensor de tensiones total σ_{ij} puede expresarse en términos de una nueva variable tensional denominada *tensor de tensiones efectivas* (σ'_{ij}) como sigue:

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - \alpha p \delta_{ij} \tag{2.44}$$

que sustituida en la expresión (2.43.a) de la ley de comportamiento, permite escribir:

$$\sigma'_{ij} = \lambda\, e\, \delta_{ij} + 2\,\mu\,\varepsilon_{ij} \tag{2.45}$$

Así, el tensor de tensiones efectivas σ'_{ij} puede interpretarse como la componente de la tensión total responsable de las deformaciones del esqueleto sólido. Asimismo si $\alpha = 1$, σ'_{ij} coincide con la llamada tensión efectiva de Terzaghi utilizada en mecánica de suelos para caracterizar el fallo de estos materiales. Por lo demás, es habitual la interpretación de esta variable desde una visión microscópica del medio a partir de (2.27) identificada con la tensión equivalente sobre el esqueleto (τ_{ij}) para $\phi = 1$ (ver p.e. Jiménez Salas y De Justo, 1975).

Retomando la expresión (2.42) de la ley de comportamiento, la formulación inicial (2.35) en términos de las tensiones equivalentes y las deformaciones en cada fase, puede obtenerse haciendo uso de (2.25) y (2.27). Las nuevas constantes Q y R tienen las expresiones que siguen en función de las ya conocidas:

$$Q = M\phi(\alpha - \phi) \tag{2.46.a}$$

$$R = M\phi^2 \tag{2.46.b}$$

2.7.3 Ecuación de Equilibrio en Desplazamientos

Sustituyendo (2.35) en (2.33), pueden escribirse las ecuaciones de equilibrio en términos de las tres componentes del desplazamiento en cada fase (u_i, U_i) como sigue:

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

$$\mu\nabla^2 u_i + \left(\lambda + \mu + \frac{Q^2}{R}\right) e_{,i} + Q\,\varepsilon_{,i} + X_i = \rho_{11}\,\ddot{u}_i + \rho_{12}\,\ddot{U}_i + b\left(\dot{u}_i - \dot{U}_i\right) \quad (2.47.a)$$

$$\left(Q\,e + R\,\varepsilon\right)_{,i} + X_i' = \rho_{12}\,\ddot{u}_i + \rho_{22}\,\ddot{U}_i - b\left(\dot{u}_i - \dot{U}_i\right) \quad (2.47.b)$$

o en notación vectorial:

$$\mu\nabla^2\mathbf{u} + \nabla\left[\left(\lambda + \mu + \frac{Q^2}{R}\right)\nabla\bullet\mathbf{u} + Q\,\nabla\bullet\mathbf{U}\right] + \mathbf{X} = $$

$$= \rho_{11}\,\ddot{\mathbf{u}} + \rho_{12}\,\ddot{\mathbf{U}} + b\left(\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{U}}\right) \quad (2.48.a)$$

$$\nabla\left(Q\,\nabla\bullet\mathbf{u} + R\,\nabla\bullet\mathbf{U}\right) + \mathbf{X}' = \rho_{12}\,\ddot{\mathbf{u}} + \rho_{22}\,\ddot{\mathbf{U}} - b\left(\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{U}}\right) \quad (2.48.b)$$

Este sistema de seis ecuaciones diferenciales ha de satisfacerse en todo punto del dominio en estudio y para cada instante de tiempo y junto con las condiciones de contorno e iniciales permite la solución del problema en términos de u_i y U_i. Conocidos los desplazamientos de ambas fases pueden obtenerse las variables cinemáticas deseadas y con ellas, las tensiones en ambas fases a través de cualquiera de las formulaciones de la ley de comportamiento vistas anteriormente.

2.8 Significado Físico de las Constantes Poroelásticas

En apartados anteriores se han introducido las constantes que caracterizan el comportamiento dinámico del sólido poroelástico entendido como un medio homogéneo de acuerdo a la teoría clásica de Biot. Este apartado se centrará en la interpretación física de estas constantes, así como su relación con las propiedades mecánicas de los materiales que constituyen ambas fases. Esto último permitirá entender algo más su significado y comprender cómo varían en función de los valores que adoptan dichas propiedades. Asimismo, se acuerdo a estas relaciones, podrán determinarse las propiedades macroscópicas de medios poroelásticos parcialmente saturados. Sobre el significado físico de estas constantes y su obtención experimental mencionar los trabajos de Biot y Willis (1957), Fatt (1959), Rice y Cleary (1976), Yew y Jogi (1978), Yew et al. (1979), Berryman (1980) y Bourbié et al. (1987)

En relación con la ley de comportamiento, de las cuatro constantes necesarias λ, μ, α y M según (2.42) o λ, μ, Q y R según (2.35), λ y μ son contantes elásticas del esqueleto sólido drenado y su significado es el habitual en la teoría de la elasticidad. Las constantes α y M se comprenden a partir de (2.42):

$$\alpha = \left(\frac{\zeta}{e}\right)_{p=0} \quad \frac{1}{M} = \left(\frac{\zeta}{p}\right)_{e=0} \quad (2.49)$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

BIBLIOTECA GENERAL UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA

Así, α indica la cantidad de fluido expelido del medio para un cambio unitario del volumen del sólido sin alteración de la presión de poro y $\frac{1}{M}$ la cantidad de fluido que, inyectada en el espacio intersticial del esqueleto, provoca una variación unitaria de la presión de poro manteniendo constante el volumen del medio. Por otra parte, de (2.35), la constante R, directamente vinculada con M, es una medida de la tensión equivalente sobre el fluido necesaria para forzar la inyección de cierta cantidad de fluido dentro del medio mientras el volumen se mantiene constante:

$$R = \left(-\frac{\phi\tau}{\zeta}\right)_{e=0} \tag{2.50}$$

Por otra parte, el mismo Biot (Biot, 1956b) se refiere al coeficiente Q como una medida del acoplamiento entre las dilataciones de las fases sólida y fluida del medio a presión de poro constante:

$$Q = \left(R\frac{\varepsilon}{e}\right)_{p=0} \tag{2.51}$$

En lo que a la determinación experimental de estos coeficientes se refiere, no todos pueden obtenerse directamente de ensayos estandar sobre la probeta de material poroso. Así, y a través de ensayos triaxiales sobre probetas drenadas y no drenadas, se determinan directamente el coeficiente de Biot α, los módulos de compresibilidad drenado y no drenado (K_d, K_u) y el denominado coeficiente de Skempton (B) (Skempton, 1954) (ver p.e. Domínguez, 1995). Realizada la medición de μ de un ensayo de cortadura simple, λ puede obtenerse de (2.5) y la constante que resta de (2.42) será:

$$M = \frac{K_u - K_d}{\alpha^2} \tag{2.52}$$

y las constantes de Biot Q y R de la expresión (2.35) de la ley de comportamiento se determinan directamente a partir de (2.46).

Como se comentaba al inicio, pueden relacionarse estos coeficientes con las propiedades elásticas de los materiales que conforman ambas fases. Así, si K_s y K_f representan los módulos de compresibilidad de los componentes sólido y fluido, pueden escribirse los coeficientes α y M en función de estos parámetros como sigue (ver p.e. Domínguez, 1995):

$$\alpha = 1 - \frac{K_d}{K_s} \tag{2.53.a}$$

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{K_s} - \frac{K_d}{K_s^2} + \phi\left(\frac{1}{K_f} - \frac{1}{K_s}\right) = \frac{\alpha - \phi}{K_s} + \frac{\phi}{K_f} \tag{2.53.b}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

y con ello:

$$R = \frac{\phi^2}{\frac{1}{K_s} - \frac{K_d}{K_s^2} + \phi\left(\frac{1}{K_f} - \frac{1}{K_s}\right)} \tag{2.54.a}$$

$$Q = \frac{\phi\left(1 - \phi\frac{K_d}{K_s}\right)}{\frac{1}{K_s} - \frac{K_d}{K_s^2} + \phi\left(\frac{1}{K_f} - \frac{1}{K_s}\right)} \tag{2.54.b}$$

Por tanto, a la vista de estas expresiones, las constantes de Biot α, M o R, Q dependen de la compresibilidad relativa de ambas fases y de la porosidad. Lo habitual, además, es que K_s tenga un valor elevado en relación con la compresibilidad de esqueleto sólido drenado (K_d). En este caso, de (2.53.a) se obtiene $\alpha = 1$ con lo que (2.44) se reduce a la definición de Terzaghi del tensor de tensiones efectivas $\left[\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + p\delta_{ij}\right]$ y (2.54) se simplifica del modo siguiente:

$$R = \phi K_f \qquad Q = (1-\phi)K_f \tag{2.55}$$

En este estado de cosas, es posible otener las propiedades de un sólido poroelástico parcialmente saturado a partir de las correspondientes al medio saturado. Así, sin alterar la hipótesis de homogeneidad a escala macroscópica (piénsese en pequeñas burbujas de aire regularmente distribuidas en el fluido), el carácter cuasisaturado del medio puede tenerse en cuenta considerando un fluido intersticial más compresible que en el caso saturado. Este valor del módulo de compresibilidad para el fluido parcialmente saturado (K'_f) puede obtenerse como sigue (Verruigt, 1969):

$$\frac{1}{K'_f} = \frac{1}{K_f} + \frac{1-s}{p_o} \tag{2.56}$$

donde K_f , como hasta ahora, es el módulo de compresibilidad de líquido puro, s el índice de saturación y p_o la presión intersticial media. En el estudio de la influencia en la respuesta sísmica de presas de los sedimentos depositados en el fondo de embalses, p_o se corresponde con la presión hidrostática media a lo largo del espesor del estrato provocada por la columna de agua embalsada (ver Domínguez et al., 1997). Conocido K'_f, las constantes de Biot Q y R para el problema cuasisaturado se obtienen de forma simple a partir de (2.55).

Por último realizaremos algunas consideraciones relativas a las densidades ρ_{11}, ρ_{22} y ρ_{12} que aparecen en las ecuaciones de equilibrio dinámico. Siguiendo los planteamientos de Biot (Biot, 1956b), considérese, en primer lugar, un problema donde las partículas de sólido y fluido tienen idéntico valor del desplazamiento ($\mathbf{u} = \mathbf{U}$). Obviando las fuerzas

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

de volumen, las ecuaciones de equilibrio (2.28) y (2.33) pueden ser escritas como sigue:

$$\sigma_{ij,j} = (\rho_1 + \rho_2)\,\ddot{u}_i = \rho_h\,\ddot{u}_i \qquad (2.57.a)$$

$$\tau_{ij,j} = (\rho_{11} + \rho_{12})\,\ddot{u}_i = \rho_1\,\ddot{u}_i \qquad (2.57.b)$$

$$\tau_{,i} = (\rho_{12} + \rho_{22})\,\ddot{u}_i = \rho_2\,\ddot{u}_i \qquad (2.57.c)$$

siendo ρ_h la densidad del medio homogéneo. Estas expresiones son perfectamente coherentes con las diferentes versiones del equilibrio que representan. De las mismas, también es sencillo comprobar que $\rho_h = \rho_{11} + 2\rho_{12} + \rho_{22}$, donde $\rho_{12} = -\rho_a$ constituye el término de acoplamiento inercial entre ambas fases. El significado de este término puede visualizarse algo más claramente desde el supuesto en que sólo existe desplazamiento en la fase fluida siendo nulo el desplazamiento de las partículas de sólido ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$). El fluido transita a través de un esqueleto sólido en reposo. En este caso, también obviando las fuerzas de volumen y considerando, para mayor simplicidad, un fluido intersticial no viscoso, las ecuaciones de equilibrio (2.33) pueden expresarse del modo siguiente:

$$\tau_{ij,j} = \rho_{12}\,\ddot{U}_i = -\rho_a\,\ddot{U}_i \qquad (2.58.a)$$

$$\tau_{,i} = \rho_{22}\,\ddot{U}_i = (\rho_2 + \rho_a)\,\ddot{U}_i \qquad (2.58.b)$$

En (2.58.b) se muestra la existencia de una inercia adicional (ρ_a) que tiene en cuenta que el fluido no se mueve de forma natural en la dirección del gradiente macroscópico de presiones sino que se ve obligado a recorrer geometrías intersticiales más o menos tortuosas. El desplazamiento del fluido a través del esqueleto no es uniforme. Por este motivo, y si las particulas del esqueleto han de permanecer con desplazamiento nulo, también aparecen tensiones la matriz sólida con resultante de signo contrario a la aceleración del fluido.

Como puede entenderse en vista de lo comentado, la densidad añadida dependerá fundamentalmente de la configuración de los intersticios del esqueleto y es un parámetro que será determinado de forma experimental (Berryman, 1980, Bonnet y Auriault, 1985). A lo largo de este trabajo, este parámetro será considerado constante si bien algunas investigaciones demuestran cierta dependencia de este parámetro con la frecuencia (Biot, 1956c o Bonnet y Auriault, 1985).

2.9 Ondas en Medios Poroelásticos

Se estudiará en este apartado las características de la propagación de ondas en medios poroelásticos. Así, partiendo de las ecuaciones de equilibrio en ambas fases y realizando un planteamiento análogo al utilizado para el caso de sólidos elásticos, pueden obtenerse las ecuaciones desacopladas que gobiernan las componentes equivolumial e irrotacional de la propagación. Al igual que muchos autores, la

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

nomenclatura utilizada para identificar las ondas presentes en estos medios coincide con la utilizada en elastodinámica.

Así, el primer paso consiste en plantear las ecuaciones (2.48) en términos de la dilatación volumétrica (e,ε) y el vector rotación $(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\Omega})$ de ambas fases (Biot, 1956b):

$$e = \nabla \bullet \mathbf{u} \qquad \varepsilon = \nabla \bullet \mathbf{U} \tag{2.59.a}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} \qquad \boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{U} \tag{2.59.b}$$

Introduciendo estos operadores en (2.48), eliminando las fuerzas de volumen y teniendo en cuenta (2.8), se escribe:

$$-\mu \nabla \times \boldsymbol{\omega} + \nabla\left[\left(\lambda + 2\mu + \frac{Q^2}{R}\right) e + Q\,\varepsilon\right] = \rho_{11}\,\ddot{\mathbf{u}} + \rho_{12}\,\ddot{\mathbf{U}} + b\left(\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{U}}\right) \tag{2.60.a}$$

$$\nabla\left(Q\,e + R\,\varepsilon\right) = \rho_{12}\,\ddot{\mathbf{u}} + \rho_{22}\,\ddot{\mathbf{U}} - b\left(\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{U}}\right) \tag{2.60.b}$$

Aplicando primero el operador divergencia a ambas ecuaciones, se obtiene:

$$\nabla^2\left[\left(\lambda + 2\mu + \frac{Q^2}{R}\right) e + Q\varepsilon\right] = \rho_{11}\,\ddot{e} + \rho_{12}\,\ddot{\varepsilon} + b(\dot{e} - \dot{\varepsilon}) \tag{2.61.a}$$

$$\nabla^2(Qe + R\varepsilon) = \rho_{12}\,\ddot{e} + \rho_{22}\,\ddot{\varepsilon} - b(\dot{e} - \dot{\varepsilon}) \tag{2.61.b}$$

Al igual que en elastodinámica, estas ecuaciones gobiernan la propagación de ondas irrotacionales. A diferencia de aquél, en este caso están implicadas dos ondas longitudinales con diferente velocidad de propagación en las que fluido y matriz sólida se mueven de forma acoplada.

De igual foma, la aplicación del operador rotacional sobre las ecuaciones de equilibrio (2.60), permite escribir:

$$\mu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} = \rho_{11}\,\ddot{\boldsymbol{\omega}} + \rho_{12}\,\ddot{\boldsymbol{\Omega}} + b\left(\dot{\boldsymbol{\omega}} - \dot{\boldsymbol{\Omega}}\right) \tag{2.62.a}$$

$$0 = \rho_{12}\,\ddot{\boldsymbol{\omega}} + \rho_{22}\,\ddot{\boldsymbol{\Omega}} - b\left(\dot{\boldsymbol{\omega}} - \dot{\boldsymbol{\Omega}}\right) \tag{2.62.b}$$

Ecuaciones que gobiernan la componente equivolumial del movimiento (ondas transversales). En ellas también se encuentran acopladas las rotaciones de ambas fases. En lo que sigue, se estudiarán las características de ambos tipos de propagación desde el análisis de estas ecuaciones. A diferencia de Biot (Biot, 1956b), las expresiones se obtendrán desde su formulación general con disipación ($b \neq 0$). A partir de éstas, se estudiará el problema cuando se supone un fluido intersticial no viscoso ($b = 0$).

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Se comienza el estudio con la componente rotacional de la propagación [ec.(2.62)]. Para comprender la física del problema, consideraremos una onda armónica que se propaga con igual velocidad en ambas fases del medio y en sentido positivo del eje z. Así:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{D}_{\omega}\, e^{\mathrm{i}(\omega t - k_S z)} \tag{2.63.a}$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{D}_{\Omega}\, e^{\mathrm{i}(\omega t - k_S z)} \tag{2.63.b}$$

siendo ω la frecuencia angular, k_S el número de onda y $\mathbf{D}_{\omega}$, $\mathbf{D}_{\Omega}$ las amplitudes de la rotación del sólido y fluido respectivamente. Sustituyendo (2.63) en (2.62.b) y tras sencillas operaciones, se obtiene la relación entre la rotación del sólido y la del fluido para este problema. Así:

$$\boldsymbol{\Omega} = \Lambda\, \boldsymbol{\omega} \tag{2.64}$$

siendo:

$$\Lambda = \frac{\mathrm{i}\omega b + \omega^2 \rho_{12}}{\mathrm{i}\omega b - \omega^2 \rho_{22}} \tag{2.65}$$

Esta relación depende de las propiedades inerciales del medio, de la constante de disipación (vinculada a viscosidad del fluido) y de la frecuencia. El carácter complejo de Λ indica que ambos vectores rotación se encuentran desfasados.

Sustituyendo (2.63) y la conclusión (2.64) en (2.62.a), la expresión del número de onda correspondiente será:

$$k_S^2 = \frac{\rho \omega^2}{\mu} \tag{2.66}$$

donde se introduce una variable ρ cuya expresión es:

$$\rho = \frac{\omega^2 \left(\rho_{12}^2 - \rho_{11}\rho_{22}\right) + \mathrm{i}\omega b \left(\rho_{11} + 2\rho_{12} + \rho_{22}\right)}{\mathrm{i}\omega b - \omega^2 \rho_{22}} \tag{2.67}$$

Por tanto, en estos medios existe un sólo tipo de ondas rotacionales que afecta a ambas fases. Al igual que en elastodinámica, son ondas transversales o de corte y su velocidad de propagación puede obtenerse de:

$$c_S^2 = \frac{\omega^2}{k_S^2} \tag{2.68}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Este parámetro no es constante y depende de la frecuencia para sólidos poroelásticos con disipación. Tanto k_S como c_S son números complejos en el caso más general. Así, el número de onda tendrá una expresión del tipo:

$$k_S = k_S^r + \mathrm{i}\, k_S^i \tag{2.69}$$

La única solución de (2.66) que tiene sentido físico para esta variable, es aquella en que parte real e imaginaria son positivas, $k_S^R \geqslant 0$ y $k_S^I \geqslant 0$ en (2.69). Así, por ejemplo, la expresión de la rotación del sólido será, teniendo en cuenta (2.69):

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{D}_{\boldsymbol{\omega}}\, e^{-k_S^i z}\, e^{\mathrm{i}(\omega t - k_S^r z)} \tag{2.70}$$

En esta expresión, el primer término exponencial $\left(k_S^i \geqslant 0\right)$ amortigua la amplitud de la onda en sentido creciente de la coordenada z. El segundo término representa un armónico espacio-temporal que indica que la onda se propaga en dirección positiva de z $(k_S^r \geqslant 0)$ tal y como habíamos establecido desde el comienzo.

Pueden ahora realizarse algunas consideraciones a la vista de las expresiones anteriores. Así, si se considera un medio en el que el fluido que ocupa los intersticios tiene viscosidad nula $(b = 0)$, las expresiones (2.64) y (2.68) adoptan la forma:

$$\boldsymbol{\Omega} = -\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}}\,\boldsymbol{\omega} \tag{2.71}$$

$$c_S^2 = \frac{\mu}{\rho_{11}\left(1 - \frac{\rho_{12}^2}{\rho_{11}\rho_{22}}\right)} \tag{2.72}$$

En este supuesto, teniendo en cuenta que $\rho_{12} \leqslant 0$, el fluido y el sólido rotan en fase y la perturbación se propaga con velocidad constante sin amortiguamiento $(c_S \in \mathbb{R})$. En (2.71) se pone de manifiesto que la rotación del esqueleto sólido induce una rotación de los desplazamientos de la fase fluida a través del parámetro densidad añadida. Hacer notar que en esta expresión se recoge una paradoja interesante que ya se anunció páginas atrás y a la que Biot hace referencia (Biot, 1956b). Así, en (2.71) el movimiento del fluido intersticial no viscoso presenta rotación no nula. Esto puede entenderse teniendo en cuenta el carácter promedio de las variables poroelásticas ya que, a nivel microscópico, el movimiento del fluido intersticial no viscoso es irrotacional. Sólo cuando la masa añadida es nula $(\rho_{12} = 0)$ el movimiento del fluido es irrotacional a nivel macroscópico y la velocidad de propagación de las ondas de corte será, en este caso:

$$c_S^2 = \frac{\mu}{\rho_{11}} = \frac{\mu}{(1-\phi)\,\rho_s} \tag{2.73}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

lo que significa que, a efectos de la onda de corte, el sólido poroelástico se comporta como un medio viscoelástico cuyas propiedades son las correspondientes al esqueleto sólido drenado. En otras palabras, la onda de corte se propaga exclusivamente a través de la matriz sólida. La comparación de (2.72) y (2.73) revela que la existencia de acoplamiento inercial ($\rho_{12} \neq 0$) entre el sólido y fluido, reduce la inercia efectiva del medio para la onda de corte con lo que la velocidad de propagación es mayor en este caso.

En el otro extremo, qué ocurre si se tratase de un medio altamente disipativo ($b \to \infty$). Así, (2.64) y (2.68) se pueden escribir en este caso:

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega} \tag{2.74}$$

$$c_S^2 = \frac{\mu}{\rho_{11} + 2\rho_{12} + \rho_{22}} = \frac{\mu}{(1-\phi)\rho_s + \phi\rho_f} = \frac{\mu}{\rho_h} \tag{2.75}$$

La rotación es igual en ambas fases, siendo la densidad efectiva que determina la velocidad de propagación, la densidad promedio del material poroelástico homogéneo (ρ_h).

Para estudiar la componente irrotacional se ensaya de nuevo un problema monodimensional armónico. Así, suponemos la existencia de una onda plana armónica de frecuencia angular ω que se propaga en sentido positivo de z a través de sólido y fluido, con igual velocidad de propagación en ambas fases. El desplazamiento en esa dirección de las partículas de esqueleto (u_3) y de las correspondientes al fluido intersticial (U_3) pueden escribirse como sigue:

$$u_3 = D_u\, e^{i(\omega t - k_P z)} \tag{2.76.a}$$

$$U_3 = D_U\, e^{i(\omega t - k_P z)} \tag{2.76.b}$$

En este caso, k_P representa el número de onda y D_u, D_U las amplitudes del desplazamiento en sólido y fluido respectivamente. Sustituyendo estas expresiones en las ecuaciones (2.61), se tiene:

$$\left(\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix} - k_P^2 \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} D_u \\ D_U \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{2.77}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

siendo:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \lambda + 2\mu + \frac{Q^2}{R} & \beta_{11} &= \omega^2 \rho_{11} - \mathrm{i}\omega b \\ \alpha_{12} &= Q & \beta_{12} &= \omega^2 \rho_{12} + \mathrm{i}\omega b \\ \alpha_{21} &= \alpha_{12} & \beta_{21} &= \beta_{12} \\ \alpha_{22} &= R & \beta_{22} &= \omega^2 \rho_{22} - \mathrm{i}\omega b \end{aligned} \qquad (2.78)$$

El sistema (2.77) tendrá solución distinta de la trivial si el determinante de la matriz de coeficientes es nulo. Por tanto, la ecuación característica que permitirá obtener los valores de k_P (i.e., autovalores del problema) para los cuales existe la onda supuesta, será:

$$\mathrm{A}\left(k_{\mathrm{P}}^2\right)^2 - \mathrm{B}\,k_{\mathrm{P}}^2 + \mathrm{C} = 0 \qquad (2.79)$$

siendo A, B y C constantes complejas en el caso general como puede verse:

$$\mathrm{A} = \lambda + 2\mu \qquad (2.80.a)$$

$$\mathrm{B} = \rho\omega^2 + \frac{(\omega^2\rho_{22} - \mathrm{i}\omega b)}{R}(\lambda + 2\mu) + \\ - \left[\frac{Q}{R}(\omega^2\rho_{22} - \mathrm{i}\omega b) - (\omega^2\rho_{12} + \mathrm{i}\omega b)\right]\left(\frac{Q}{R} - \frac{\omega^2\rho_{12} + \mathrm{i}\omega b}{\omega^2\rho_{22} - \mathrm{i}\omega b}\right) \qquad (2.80.b)$$

$$\mathrm{C} = \rho\omega^2 \frac{(\omega^2\rho_{22} - \mathrm{i}\omega b)}{R} \qquad (2.80.c)$$

Existen, por tanto, dos raices complejas de la forma:

$$k_{\mathrm{P1}}^2 = \frac{\mathrm{B} - \sqrt{\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC}}}{2\mathrm{A}} \quad ; \quad k_{\mathrm{P2}}^2 = \frac{\mathrm{B} + \sqrt{\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC}}}{2\mathrm{A}} \qquad (2.81)$$

Estas dos raices representan los números de onda (al cuadrado) de dos ondas irrotacionales o longitudinales compatibles con el problema planteado. Las velocidades de propagación serán:

$$c_{\mathrm{P1}}^2 = \frac{\omega^2}{k_{\mathrm{P1}}^2} \quad ; \quad c_{\mathrm{P2}}^2 = \frac{\omega^2}{k_{\mathrm{P2}}^2} \qquad (2.82)$$

A la onda de mayor velocidad de propagación (c_{P1}), que corresponde a la menor de la raices en módulo, se la denomina *onda de primer tipo* (a lo largo de este texto, también nos referiremos a ella como onda P rápida o onda P larga). La más lenta (c_{P2})

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

se denomina *onda de segundo tipo* (onda P corta). Ambas velocidades de propagación son números complejos dependientes de la frecuencia en el caso general. Este carácter complejo, como en el caso anterior, implica que ambas ondas se amortiguan en sentido creciente del eje z. Hacer notar que este amortiguamiento es mucho más acusado en la onda P_2, la cual se atenúa muy rápidamente y sólo puede detectarse en las proximidades de la perturbación. Si la disipación viscosa es nula ($b = 0$), ambos valores de la velocidad son constantes reales positivas. En este caso, obviamente, ambas componentes se propagan sin amortiguarse.

Para cada una de las raices de la ecuación característica (2.79) pueden obtenerse los valores de D_u y D_U (autovectores del problema) a partir de (2.77). Para la menor de ellas en módulo (k_{P1}), $D_u^{(1)}$ y $D_U^{(1)}$ tienen el mismo signo, y por tanto, la fase sólida y el fluido vibran en fase en las ondas de primer tipo. Por el contrario, para las ondas se segundo tipo (k_{P2}), las amplitudes del movimiento de ambas fases $D_u^{(2)}$ y $D_U^{(2)}$ tienen signos contrarios (las partículas de fluido y sólido vibran en contra-fase).

De otra parte, es sencillo comprobar las relaciones de ortogonalidad de estos autovectores respecto de las matrices de (2.77). Así:

$$\alpha_{11}D_u^{(1)}D_u^{(2)} + \alpha_{12}\left[D_u^{(1)}D_U^{(2)} + D_U^{(1)}D_u^{(2)}\right] + \alpha_{22}D_U^{(1)}D_U^{(2)} = 0 \quad (2.83.a)$$

$$\beta_{11}D_u^{(1)}D_u^{(2)} + \beta_{12}\left[D_u^{(1)}D_U^{(2)} + D_U^{(1)}D_u^{(2)}\right] + \beta_{22}D_U^{(1)}D_U^{(2)} = 0 \quad (2.83.b)$$

Esta propiedad permitirá desacoplar la componente irrotacional de la propagación en el dominio de la frecuencia. En el apartado 2.11 se retoma esta cuestión.

Para concluir, digamos que existen medios poroelásticos que, aún considerando fuerzas disipativas en el acoplamiento ($b \neq 0$), las ondas de primer tipo no están amortiguadas ($k_{P1} \in \mathbb{R}$). Estos medios se denominan *compatibles*. La obtención de la relación entre las propiedades elásticas y másicas del medio que permite este comportamiento, se realiza considerando en (2.77) la posibilidad que $D_u^{(1)} = D_U^{(1)}$ y que, por tanto, en la propagación en fase las partículas de sólido y fluido vibren con la misma amplitud (la disipación depende del movimiento relativo entre ambas). Así, debe verificarse:

$$\frac{\beta_{11}+\beta_{12}}{\alpha_{11}+\alpha_{12}} = \frac{\beta_{21}+\beta_{22}}{\alpha_{21}+\alpha_{22}} \quad \text{ó} \quad \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\lambda+2\mu+Q^2/R+Q}{Q+R} \qquad (2.84)$$

y que puede llamarse relación de compatibilidad dinámica (Biot, 1956b). En este caso:

$$k_{P1}^2 = \frac{\beta_{11}+2\beta_{12}+\beta_{22}}{\alpha_{11}+2\alpha_{12}+\alpha_{22}} = \frac{\omega^2(\rho_{11}+2\rho_{12}+\rho_{22})}{\lambda+2\mu+Q^2/R+2Q+R} \in \mathbb{R} \qquad (2.85)$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

La expresión de c_{P1} es inmediata a partir de la anterior. Esto no es óbice para que, en este tipo de materiales, la onda irrotacional de segundo tipo se presenta amortiguada (sólido y fluido vibran en contra-fase). En este caso, la relación entre las amplitudes del desplazamiento en ambas fases, a partir de (2.83), será:

$$\frac{D_u^{(2)}}{D_U^{(2)}} = -\frac{\rho_2}{\rho_1} \tag{2.86}$$

y el número de onda:

$$k_{P2}^2 = \frac{\left[\left(\omega^2\rho_{11} - i\omega b\right)\frac{\rho_2}{\rho_1} - \left(\omega^2\rho_{12} + i\omega b\right)\right]\left(\lambda + 2\mu + Q^2/R + Q\right)}{\lambda + 2\mu} \tag{2.87}$$

constante compleja en general para $b \neq 0$.

2.10 Campo de Validez de la Teoría de Biot

Hasta aquí se ha presentado el cuerpo fundamental de la teoría de Biot para problemas dinámicos. La hipótesis fundamental de partida es la consideración del medio poroelástico bajo los principios de la mecánica del medio contínuo. En problemas dinámicos, teniendo en cuenta que se trata de un medio heterogéneo, esta representación será aplicable dependiendo de la relación entre el tamaño de los poros y la longitud de onda presente.

Otro aspecto a tener en cuenta se centra en el rango de aplicación de la Ley de Darcy, que es parte fundamental del cuerpo teórico planteado. Para que esta ecuación sea de aplicación, el flujo a través del esqueleto ha de tener carácter laminar. Si la frecuencia de excitación supera cierto valor, este comportamiento de la fase fluida se rompe. Biot (1956b) establece dicha frecuencia crítica (f_t) en relación con la viscosidad cinemática $\left(\nu = \frac{\eta}{\rho_f}\right)$ y el diámetro de los poros (d):

$$f_t = \frac{\pi\nu}{4d^2} \tag{2.88}$$

En Lin et al. (2001) puede verse una tabla interesante donde se establecen estas limitaciones para distintos tipos de terrenos. Para estos autores, y en lo que más interesa al modelo acoplado que se presenta, los depósitos arenosos y sedimentos en rios, lagos o embalses bajo solicitación sísmica son medios para los que resulta adecuado el análisis de acuerdo a los postulados de la teoría Biot.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

2.11 Ecuaciones de Gobierno en el Dominio de la Frecuencia

Ya en apartados anteriores se han introducido algunos problemas con dependencia temporal de tipo armónico. Recuérdese la expresión de las ondas planas que permitieron el estudio de las características de las ondas en sólidos elásticos y poroelásticos. En este apartado, se obtienen las ecuaciones que rigen el comportamiento en régimen armónico (dominio de la frecuencia) de los tres tipos de regiones que forman parte del modelo acoplado que se presenta.

Como se verá, este planteamiento en el dominio de la frecuencia conduce a una importante simplificación matemática de las ecuaciones de gobierno. En estas ecuaciones reducidas desaparece la dependencia temporal de las variables fundamentales. En el problema poroelástico, este aspecto permite incluso la reducción del número de variables primarias a considerar.

Este planteamiento reducido también simplifica los procedimientos para la obtención de soluciones al problema. Soluciones armónicas claro está. De cualquier forma, y teniendo en cuenta que las funciones de tipo armónico constituyen un conjunto completo de funciones independientes, puede plantearse cualquier dependencia temporal de la variable como superposición de armónicos de diferente frecuencia de acuerdo a los planteamientos de Fourier. Este último aspecto, si bien sólo aplicable a problemas elásticos y lineales para la obtención de la respuesta temporal, permite comprender el interés que ha tenido el estudio de la formulación reducida de las ecuaciones de gobierno para muchos autores.

Se comienza con el problema elastodinámico armónico. Así, para frecuencia ω, el vector desplazamiento en un punto $\mathbf{x}$ del medio puede ser expresado, en notación compleja, como sigue:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \mathbf{u}(\mathbf{x},\omega)e^{i\omega t} \tag{2.89}$$

siendo $\mathbf{u}(\mathbf{x},\omega)$ un vector de componentes complejas en general. El módulo de las variables complejas en el dominio de la frecuencia representa el valor máximo que adopta esta variable en el dominio del tiempo, mientras que la relación entre las partes imaginaria y real, determina el desfase. Suponiendo también fuerzas de volumen con dependencia armónica, la expresión reducida de las ecuaciones de Navier (2.6) será:

$$\mu\nabla^2\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\nabla e + \mathbf{X} = -\rho\omega^2\mathbf{u} \tag{2.90}$$

A pesar de la coincidencia en la notación con (2.6), se entiende que las variables de (2.90) dependen de la posición y de la frecuencia. En este punto, puede tenerse en cuenta

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

el carácter viscoelástico del medio (disipativo) mediante la consideración de un valor complejo para μ (λ) de la forma:

$$\mu = \mathrm{Re}[\mu](1 + 2\mathrm{i}\xi) \tag{2.91}$$

donde ξ puede entenderse de la misma forma que el factor de amortiguamiento para sistemas de un grado de libertad (ver p.e. Domínguez, 1993).

Para la ecuación que gobierna la propagación de ondas en fluidos perfectos (2.21), el carácter armónico de la presión (p):

$$p(\mathbf{x},t) = p(\mathbf{x},\omega)\, e^{\mathrm{i}\omega t} \tag{2.92}$$

permite escribir la ecuación reducida o ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0 \tag{2.93}$$

donde $k = \frac{\omega}{c}$ es el número de onda. Utilizando como variable primaria la presión, la variable derivada está relacionada con el desplazamiento de las partículas de fluido (U_i) a través de la ecuación de equilibrio (2.18). Así, en puntos del contorno y en la dirección marcada por la normal al mismo, podemos escribir para problemas armónicos:

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = \rho\omega^2 U_n \tag{2.94}$$

donde U_n es el desplazamiento normal al contorno de las partículas de fluido.

Por último, las ecuaciones de gobierno de la poroelasticidad dinámica (2.48) suponiendo un comportamiento armónico del campo de desplazamientos en ambas fases, serán:

$$\mu\nabla^2\mathbf{u} + \nabla\left[\left(\lambda + \mu + \frac{Q^2}{R}\right) e + Q\,\varepsilon\right] + \mathbf{X} = -\omega^2\left(\hat{\rho}_{11}\,\mathbf{u} + \hat{\rho}_{12}\,\mathbf{U}\right) \tag{2.95.a}$$

$$\nabla\left(Q\,e + R\,\varepsilon\right) + \mathbf{X}' = -\omega^2\left(\hat{\rho}_{12}\,\mathbf{u} + \hat{\rho}_{22}\,\mathbf{U}\right) \tag{2.95.b}$$

Donde, para simplificar la formulación, se utilizan unos parámetros de densidad complejos que incorporan la constante de disipación a los términos de densidad conocidos, de la forma siguiente (Norris, 1985):

$$\hat{\rho}_{11} = \rho_{11} - \mathrm{i}\frac{b}{\omega} \quad ; \quad \hat{\rho}_{22} = \rho_{22} - \mathrm{i}\frac{b}{\omega} \quad ; \quad \hat{\rho}_{12} = \rho_{12} + \mathrm{i}\frac{b}{\omega} \tag{2.96}$$

Mientras la formulación general en el dominio del tiempo (2.48) implica a seis

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

variables primarias, las tres componentes de desplazamiento de sólido y fluido respectivamente, la formulación del problema armónico (2.95) puede realizarse en término de sólo cuatro variables fundamentales. En nuestro caso serán las tres componentes del desplazamiento del esqueleto sólido y la tensión equivalente en el fluido. Así, de (2.95.b) y de la ley de comportamiento (2.35.b), el vector desplazamiento en la fase fluida puede escribirse en términos de la tensión equivalente en la misma y del desplazamiento de las partículas de sólido como sigue:

$$\mathbf{U} = -\frac{\nabla\tau + \mathbf{X}' + \omega^2\hat{\rho}_{12}\,\mathbf{u}}{\omega^2\,\hat{\rho}_{22}} \tag{2.97}$$

Sustituyendo ahora esta expresión de los desplazamientos de las partículas de fluido en (2.95.a) se obtienen las tres primeras ecuaciones de equilibrio en terminos de $\mathbf{u}$ y τ. Aplicando ahora el operador divergencia sobre las tres ecuaciones de equilibrio del fluido (2.95.b) y utilizando la ley de comportamiento (2.35.b) para eliminar ε, se obtiene la cuarta ecuación necesaria. El resultado del procedimiento descrito será:

$$\mu\nabla^2\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\,\nabla e + \left(\frac{Q}{R} - \frac{\hat{\rho}_{12}}{\hat{\rho}_{22}}\right)\nabla\tau + \left(\frac{\hat{\rho}_{11}\,\hat{\rho}_{22} - \hat{\rho}_{12}^2}{\hat{\rho}_{22}}\right)\omega^2\,\mathbf{u} + \mathbf{X} - \frac{\hat{\rho}_{12}}{\hat{\rho}_{22}}\mathbf{X}' = \mathbf{0} \tag{2.98.a}$$

$$\nabla^2\tau + \omega^2\frac{\hat{\rho}_{12}}{R}\tau + \omega^2\left(\hat{\rho}_{12} - \frac{Q}{R}\,\hat{\rho}_{22}\right)e + \nabla\bullet\mathbf{X}' = 0 \tag{2.98.b}$$

Estas cuatro ecuaciones y las condiciones de contorno completan la formulación dinámica del medio poroelástico en el dominio de la frecuencia. Hacer notar la posibilidad de considerar disipativo el comportamiento del esqueleto sólido drenado. En este caso, el carácter viscoelástico del sólido se incorpora al modelo a través de constantes de Lamé del tipo (2.91).

Para concluir este apartado, puede hacerse alguna consideración adicional relacionada con la componente irrotacional de la propagación en poroelasticidad armónica. Asi, aplicando el operador divergencia a las ecuaciones (2.95) y obviando las fuerzas de volumen:

$$\nabla^2\left[\left(\lambda + 2\mu + \frac{Q^2}{R}\right)e + Q\,\varepsilon\right] = -\omega^2\left(\hat{\rho}_{11}\,e + \hat{\rho}_{12}\,\varepsilon\right) \tag{2.99.a}$$

$$\nabla^2\left(Q\,e + R\,\varepsilon\right) = -\omega^2\left(\hat{\rho}_{12}\,e + \hat{\rho}_{22}\,\varepsilon\right) \tag{2.99.b}$$

En este punto, las dilataciones del esqueleto sólido y el fluido pueden escribirse como superposición de los dos modos de propagación obtenidos en el apartado 2.9. Así:

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

$$\begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_u^{(1)} & D_u^{(2)} \\ D_U^{(1)} & D_U^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} \tag{2.100}$$

Lo que puede entenderse como un cambio en el sistema de referencia del problema. Este se expresa ahora en término de dos nuevas variables (Y_1, Y_2) respecto de un sistema de referencia ortogonal constituido por los modos de propagación. Esta superposición modal, introducida en (2.99), permite desacoplar la componente irrotacional y escribir esta ecuación del modo que sigue:

$$\nabla^2 Y_1 + k_{p1}^2 Y_1 = 0 \tag{2.101.a}$$

$$\nabla^2 Y_2 + k_{p2}^2 Y_2 = 0 \tag{2.101.b}$$

Ecuaciones de onda escalares tipo Helmholtz para cada tipo de onda longitudinal. Este planteamiento, muy habitual en análisis dinámico, nos permitirá la obtención de soluciones analíticas a algunos problemas simples que serán utilizadas para validar los resultados del modelo numérico desarrollado.

2.12 Analogía Termoelástica en Régimen Armónico

En este punto se pone de manifiesto la analogía entre las formulaciones termoelástica y poroelástica para problemas con dependencia temporal armónica. En (2.102) se escriben las ecuaciones de gobierno del problema termoelástico armónico en notación vectorial (véase Kupradze et al., 1979):

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla e - \gamma \nabla \vartheta + \rho \omega^2 \mathbf{u} + \mathbf{F} = \mathbf{0} \tag{2.102.a}$$

$$\nabla^2 \vartheta - \frac{i\omega}{K} \vartheta - i\omega \eta e + \frac{S}{K} = 0 \tag{2.102.b}$$

En estas expresiones, ϑ es el incremento de temperatura, λ y μ las constantes de Lamé del sólido, $\gamma = (2\mu + 3\lambda)\alpha$, siendo α el coeficiente de dilatación, $\eta = \gamma T/\kappa$, donde T es la temperatura absoluta y κ la conductividad térmica. Por último $K = \kappa/\delta$ siendo δ el calor específico del medio. Obviamente, el término **F** representa el vector de fuerzas de volumen y S/K las fuentes de calor internas.

La equivalencia entre las variables primarias de (2.98) y (2.102) es inmediata. En ambas aparece el vector de desplazamientos (desplazamientos del sólido en poroelasticidad) y puede establecerse una analogía entre ϑ y τ. La equivalencia entre las constantes de ambos problemas se muestra en la Tabla 2.1 (Domínguez, 1992).

Hacer notar que ρ tiene idéntica expresión que en (2.67). Tener en cuenta que, debido a que el problema poroelástico requiere de mayor número de constantes que el

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

termoelástico, dado un problema termoelástico existen multitud de problemas poroelásticos análogos. Sin embargo, existe una ventaja inmediata en este enfoque del problema poroelástico cuando se hace uso de la formulación integral para su resolución, a saber, existe solución fundamental analítica para el problema termoelástico análogo (ver p.e. Kupradze et al.,1979).

Termoelasticidad	Poroelasticidad
μ	μ
λ	λ
γ	$-\frac{Q}{R}+\frac{\hat{\rho}_{12}}{\hat{\rho}_{22}}$
ρ	$\frac{\hat{\rho}_{11}\hat{\rho}_{22}-\rho_{12}^2}{\hat{\rho}_{22}}$
K	$\frac{R}{\mathrm{i}\omega\hat{\rho}_{22}}$
η	$\mathrm{i}\omega\left(\hat{\rho}_{12}-\hat{\rho}_{22}\frac{Q}{R}\right)$
$\mathbf{F}$	$\mathbf{X}-\frac{\hat{\rho}_{12}}{\hat{\rho}_{22}}\mathbf{X}'$
$\frac{S}{K}$	$\nabla\bullet\mathbf{X}'$

Tabla 2.1. Equivalencia termo-poroelástica en régimen armónico.

En adelante, también se hace uso de esta analogía para simplificar la notación de la ecuación reducida (2.98). Así, las variables primarias serán las poroelásticas (u_i,τ) y las constantes las correspondientes al problema termoelástico análogo $(\lambda,\mu,\gamma,\rho,K,\eta)$.

2.13 Condiciones de Contorno

La completa definición del problema dinámico en el dominio de la frecuencia requiere la imposición de las condiciones de contorno en términos de las variables primarias o sus derivadas. En estos problemas, la eliminación de la dependencia temporal en las ecuaciones de gobierno, hace innecesaria la aplicación de condiciones iniciales.

En el caso de sólidos viscoelásticos, se define el vector tensión $\mathbf{t}^s(\mathbf{x},\omega)$ en un punto $\mathbf{x}$ del contorno Γ con normal exterior $\mathbf{n}$ como:

$$t_i^s(\mathbf{x},\omega)=\sigma_{ij}^s(\mathbf{x},\omega)n_j(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x}\in\Gamma \tag{2.103}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

donde σ_{ij}^s es el tensor de tensiones del sólido en $\mathbf{x}$. Para regiones poroelásticas, se define el vector tensión sobre el esqueleto sólido $\mathbf{t}^e(\mathbf{x},\omega)$ en cualquier punto del contorno:

$$t_i^e(\mathbf{x},\omega) = \tau_{ij}(\mathbf{x},\omega)n_j(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Gamma \tag{2.104}$$

siendo τ_{ij} el tensor de tensiones equivalente sobre la matriz sólida. El vector tensión total sobre el material homogéneo, teniendo en cuenta (2.27):

$$t_i^p(\mathbf{x},\omega) = t_i^e(\mathbf{x},\omega) + \tau(\mathbf{x},\omega)n_j(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Gamma \tag{2.105}$$

En general, y estudiando el comportamiento dinámico de cualquiera de los medios tratados, existirá una zona del contorno (Γ_1) donde serán conocidas las variables fundamentales (condiciones de contorno naturales) y una zona complementaria (Γ_2) en la que son dato las variables derivadas (condiciones de contorno esenciales). Para sólidos viscoelásticos:

$$u_i^s = \bar{u}_i^s \quad \text{en } \Gamma_1 \tag{2.106.a}$$

$$t_i^s = \bar{t}_i^s \quad \text{en } \Gamma_2 \tag{2.106.b}$$

siendo $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$ y $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. Para medios fluidos, la presión (p^a) es la variable fundamental. La variable derivada será el flujo de presión en el contorno ($q^a = p_{,n}$) equivalente al desplazamiento normal de las partículas de fluido (U_n^a) a través de (2.94). Así:

$$p^a = \bar{p}^a \quad \text{en } \Gamma_1 \tag{2.107.a}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = \bar{q}^a \quad \text{en } \Gamma_2 \tag{2.107.b}$$

En el caso de sólidos poroelásticos, las variables fundamentales adoptadas serán el vector desplazamiento en el esqueleto sólido ($\mathbf{u}^e$) y la tensión equivalente en el fluido (τ). Las variables derivadas son el vector tensión en el esqueleto ($\mathbf{t}^e$) y el movimiento normal al contorno del fluido (U_n). Asimismo, será interesante distinguir entre contornos permeables e impermeables. Los primeros se caracterizan porque en ellos la presión de poro es nula ($\tau = 0$). En este caso, puede ser conocido el vector desplazamiento de la fase sólida ($u_i^e = \bar{u}_i^e$) o la tensión equivalente sobre ella ($t_i^e = \bar{t}_i^e$). Si el contorno es impermeable, en él son iguales las componentes normales del desplazamiento en ambas fases ($u_n^e = U_n$). Esto último puede ser conocido ($u_n^e = U_n = \bar{u}_n$) y las incógnitas serán las tensiones equivalentes en ambas fases o bien será conocida la tensión total sobre el contorno ($t_i^p = \bar{t}_i^p$) y el desplazamiento incógnita. En ingeniería sísmica pueden plantearse ambos tipos de condición de contorno para la superficie del semiespacio. Ambas representan los dos extremos de la realidad física del problema (ver Deresiewicz y Rice, 1962 y Deresiewicz y Skalak, 1963). En el

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

caso impermeable, puede pensarse que la fase líquida del medio está de alguna forma atrapada en el esqueleto sólido. En este problema $p \neq 0$ en la superficie, lo cual puede dar inicio a un proceso conocido como licuefacción que no es más que la pérdida de tensión efectiva entre las partícular de un esqueleto sólido granular. Interesante es la cuantificación de la influencia de ambas condiciones de contorno para el problema de un semiespacio poroelástico sometido a ondas planas que puede verse en Lin et al. (2001).

El análisis dinámico de modelos donde coexisten los tres tipos de medios (viscoelásticos, escalares y poroelásticos) debe tener en cuenta el efecto de interacción entre ellos a través de las interfases o contornos comunes a dos de estas regiones. Esta interacción se establece matemáticamente a través del cumplimiento de las ecuaciones de equilibrio de tensiones y compatibilidad de desplazamientos de ambos medios en todos los puntos de estos contornos. Existen cinco tipos de interfases en el modelo implementado dependiendo de la naturaleza de los medios que interactúan, a saber: viscoelástico-viscoelástico, fluido-fluido, viscoelastico-fluido, viscoelástico-poroelástico y poroelástico-fluido.

Interfase viscoelástico-viscoelástico: Las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad en este caso son inmediatas. Sean $s1$ y $s2$ las regiones viscoelásticas que determinan el contorno interfase. Así:

1) Equilibrio entre los vectores tensión en ambos medios:

$$\mathbf{t}^{s1} + \mathbf{t}^{s2} = \mathbf{0} \tag{2.108}$$

2) Compatibilidad de los vectores desplazamiento:

$$\mathbf{u}^{s1} = \mathbf{u}^{s2} \tag{2.109}$$

Interfase fluido-fluido: Sean, como antes, $a1$ y $a2$ las regiones fluidas en contacto. Así:

1) Equilibrio. Igualdad de presión hidrodinámica en ambas regiones a la largo de la interfase.

$$p^{a1} = p^{a2} \tag{2.110}$$

2) Compatibilidad. Los desplazamientos normales a cada medio son iguales en valor absoluto y signo contrario. Esta condición se expresa en idénticos términos si la variable elegida es el flujo de presión.

$$U_n^{a1} = -U_n^{a2} \tag{2.111}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Interfase viscoelástico-fluido: Las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad en este tipo de interfases son como sigue:

1) Equilibrio entre el vector tensión en el sólido ($\mathbf{t}^s$) y la presión hidrodinámica (p^a):

$$\mathbf{t}^s - p^a \mathbf{n}^a = \mathbf{0} \tag{2.112}$$

siendo $\mathbf{n}^a$ la normal exterior a la región fluida. De nuevo recordar que una presión positiva representa compresión lo que explica el cambio de signo en relación a (2.108).

2) Compatibilidad entre los desplazamientos normales de sólido (u_n^s) y fluido (U_n^a):

$$u_n^s = u_i^s n_i^s = -U_n^a \tag{2.113}$$

siendo $\mathbf{n}^s$ la normal exterior a la región viscoelástica.

Interfase viscoelástico-poroelástico: En este caso conviene distinguir entre dos situaciones extremas posibles. En primer lugar, se plantean las ecuaciones de restricción para este tipo de interfases cuando podemos asimilar al sólido viscoelástico como un material completamente impermeable. Este ha sido el modelo de interfase utilizado en el estudio dinámico de presas para el contacto entre el sedimento y la presa de hormigón o el fondo rocoso del embalse. Por otra parte, la línea marcada por el nivel freático en un terreno puede ser considerada una interfase permeable. En este caso, el terreno anegado puede considerarse un medio poroelástico y el estrato seco asimilarse a una región de naturaleza viscoelástica.

1) Equilibrio. Si el sólido viscoelástico es impermeable, las ecuaciones de equilibrio se establecen entre el vector tensión en el sólido ($\mathbf{t}^s$) y el vector tensión total en el medio poroelástico ($\mathbf{t}^p$) como sigue:

$$\mathbf{t}^s + \mathbf{t}^p = \mathbf{t}^s + \mathbf{t}^e + \tau \mathbf{n} = \mathbf{0} \tag{2.114}$$

la segunda expresada en términos de la tensiones equivalentes en el esqueleto ($\mathbf{t}^e$) y fluido intersticial (τ). En el caso de una interfase permeable ($\tau = 0$), las ecuaciones de equilibrio serán:

$$\mathbf{t}^s + \mathbf{t}^e = \mathbf{0} \tag{2.115.a}$$

$$\tau = 0 \tag{2.115.b}$$

2) Compatibilidad. Para ambos supuestos serán iguales el vector desplazamiento de las partículas sólidas ($\mathbf{u}^e$) del medio poroso y el correspondiente al medio viscoelástico ($\mathbf{u}^s$). En el caso impermeable habrá de verificarse, además, la igualdad en valor absoluto de desplazamientos normales del medio viscoelástico y del fluido que ocupa los

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

intersticios del medio poroelástico (U_n^p).

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{u}^s \tag{2.116.a}$$

$$u_n^s = -U_n^p \tag{2.116.b}$$

Si la interfase es permeable sólo es de aplicación (2.116.a).

Interfase fluido-poroelástico: En este problema las condiciones de equilibrio y compatabilidad serán:

1) Equilibrio. En primer lugar, valores iguales de la presión hidrodinámica en el fluido (p^a) y la presión intersticial en el poroso (p^p). En segundo lugar, equilibrio entre las tensiones equivalentes en el sólido ($\mathbf{t}^e$) y la presión hidrodinámica de forma análoga a (2.112). Así:

$$p^a = p^p \tag{2.117.a}$$

$$\mathbf{t}^e - (1-\phi)p^a\mathbf{n}^a = \mathbf{0} \tag{2.117.b}$$

Si se tiene en cuenta la primera en la segunda, ésta última puede escribirse como sigue:

$$\mathbf{t}^e + (1-\phi)p^p\mathbf{n}^p = \mathbf{t}^p + p^p\mathbf{n}^p = \mathbf{t}'^p = \mathbf{0} \tag{2.118}$$

siendo $\mathbf{t}'^p$ la tensión efectiva de Terzaghi ($\mathbf{n}^p$ es la normal exterior al medio poroso). Así, las condiciones (2.117) se reducen a la condición de tensión efectiva nula en la región porosa de la interfase.

2) Compatibilidad entre el desplazamiento normal del fluido (U_n^a) y el desplazamiento normal promedio de la región porosa considerada como un medio homogéneo:

$$U_n^a = -(1-\phi)u_n^e - \phi U_n^p \tag{2.119}$$

Las condiciones de interfase discutidas (ver también Domínguez et al., 1997), serán las implementadas en el modelo acoplado de elementos de contorno que se discute en los capítulos 5 y 6 de este trabajo. Como se verá, junto con las ecuaciones del método, estas condiciones de interfase entre medios permiten plantear el problema adecuadamente.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Referencias

ACHENBACH, J.D., 1973, "Wave Propagation in Elastic Solids", North-Holland, Amsterdam.

BERRYMAN, J.G., 1980, "Confirmation of Biot's Theory", *Appl. Phys. Letter*, **34**(4), 382-384.

BIOT, M.A., 1941a, "General Theory of Three-dimensional Consolidation", *J. Appl. Phys.*, **12**, 155-164.

BIOT, M.A., 1941b, "Consolidation Settlement under a Rectangular Load Distribution", *J. Appl. Phys.*, **12**, 426-430.

BIOT, M.A. y CLINGAN, F.M., 1941, "Consolidation Settlement of a Soil with Impervious Top Surface", *J. Appl. Phys.*, **12**, 578-581.

BIOT, M.A., 1955, "Theory of Elasticity and Consolidation for a Porous Anisotropic Solid", *J. Appl. Phys.*, **26**, 182-185.

BIOT, M.A., 1956a, "Theory of Deformation of a Porous Viscoelastic Anisotropic Solid", *J. Appl. Phys.*, **27**, 459-467.

BIOT, M.A., 1956b, "The Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-saturated Porous Solid, I. Low Frequency Range", *J. Acoust. Soc. Am.*, **28**, 168-178.

BIOT, M.A., 1956c, "The Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-saturated Porous Solid, II. Higher Frequency Range", *J. Acoust. Soc. Am.*, **28**, 179-191.

BIOT, M.A., 1956d, "General Solutions of the Equations of Elasticity and Consolidation for a Porous Material", *J. Appl. Mech., ASME*, **23**(1), 91-96.

BIOT, M.A. y WILLIS, D.G., 1957, "The Elastic Coefficients of the Theory of Consolidation", *J. Appl. Mech., ASME*, **24**, 594-601.

BIOT, M.A., 1962, "Mechanics of Deformation and Acoustic Propagation in Porous Media", *J. Appl. Phys.*, **33**, 1482-1498.

BIOT, M.A., 1973, "Nonlinear and Semilinear Rheology of Porous Solids", *J. Geophys. Research*, **78**(23), 4924-4937.

BONNET, G. y AURIAULT, J.L., 1985, "Dynamics of Saturated and Deformable Porous Media: Homogenization Theory and Determination of the Solid-Liquid Coupling Coefficients", *Physics of Finely Divided Matter*, N.Boccara y M.Daoud Ed., 306-316, Springer-Verlag, Berlín.

BOURBIÉ, T., COUSSY, O. y ZINSZNER, B., 1987, "Acoustics of Porous Media", Gulf Publish. Co., Houston, Texas.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

CHENG, A.H.D., BADMUS, T y BESKOS, D.E., 1991, "Integral Equation for Dynamic Poroelasticity in Frequency Domain with BEM Solution", *J. Eng. Mech., ASCE*, **117** (5), 1136-1157.

COUSSY, O. y DANGLA, P., 1995, "The Thermomechanics of Porous Media Considered as Open Continuous Media", *Mechanic of Porous Media*, P. Chalez Ed., 1-20, Balkema, Rotherdam.

DARCY, H., 1856, "Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon", Dalmont, París.

DERESIEWICZ, H. y RICE J.T. 1962, "The Effect of Boundaries on Wave Propagation in Liquid Filled Porous Solid: III Refelection of Plane Waves at a Free Plane Boundary. General Case", *Bull. Seism. Soc. Am.*, **52**(3), 595-625.

DERESIEWICZ, H. y SKALAK, R., 1963, "On the Uniqueness in Dynamic Poroelasticity", *Bull. Seism. Soc. Am.*, **53**(4), 783-788.

DOMÍNGUEZ, J., 1992, "Boundary Element Approach for Dynamic Poroelastic Problems", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **35**, 307-324.

DOMÍNGUEZ, J., 1993, "Boundary Elements in Dynamics", Computational Mechanics Publications, Southampton y Elsevier Applied Science, NY

DOMÍNGUEZ, J., 1995, "Formulación Estática y Dinámica de la Poroelasticidad", E.T.S.I.I. Universidad de Sevilla.

DOMÍNGUEZ, J., GALLEGO, R. y JAPÓN, B.R., 1997, "Effects of Porous Sediments on Seismic Response of Concrete Gravity Dams", *J. Eng. Mech., ASCE*, **123** (4), 302-311.

ERINGEN, A.C. y SUHUBI, E.S., 1975, "Elastodynamics", **2**-Linear Theory, Academic Press, NY.

FATT, I., 1959, "Biot-Willis Elastic Coeficients for Sandstone", *J. Appl. Mech.*, **26**, 296-297.

JIMÉNEZ SALAS, J.A. y DE JUSTO, J.L., 1975, "Geotecnia y Cimientos I. Propiedades de los Suelos y de las Rocas", Rueda, Madrid.

KUPRADZE, V.D., GEGELIA, T.G., BASHELEISHVILI, M.O. y BURCHULADZE, T.V., 1979, "Three-dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity", North-Holland, Amsterdam.

LIN, C.H., LEE, V.W. y TRIFUNAC, M.D., 2001, "On the Reflection of Elastic Waves in a Poroelastic Half-Space Saturated with Non-Viscous Fluid", *Report N. CE* 01-04, *Dept. of Civil Eng*, Univ. of Southern California, Los Angeles, Califonia.

NORRIS, A.N., 1985, "Radiation from a Point Source and Scattering Theory in a Fluid Saturated Porous Solid", *J. Acoust. Soc. Am.*, **77** (6), 2012-2022.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

PARÍS, F., 1998, "Teoría de la Elasticidad", E.T.S.I.I. Universidad de Sevilla.

RICE, J. y CLEARY, M.P., 1976, "Some Basic Stress Diffusion Solutions for Fluid Saturated Porous Media with Compressible Constituents", *Rev. Geophys. Space Phys.*, **14**, 227-241.

SKEMPTON, A.W., 1954, "The Pore Pressure Coefficients A and B", *Géotechnique*, **4**, 143-147.

STOCKES, G.G., 1849, "On the Dynamical Theory of Diffraction", *Trans.Cambridge Philos. Soc.*, **9**, 1-62.

TERZAGHI, K., 1923, "Die Berechnung der Durchlassigkeitzifer des Tones aus dem Verlauf der Hydrodynamischen Spannungserscheinungen", *Sitz. Akad. Wiss.*, Vienna, IIa, **132**, 125-138,

TERZAGHI, K., 1925, "Erdbaumechanik auf Bodenphysikalischer Grundlage", Deuticke, Leipzig.

TERZAGHI, K., 1943, "Theoretical Soil Mechanics", John Wiley, NY.

TERZAGHI, K. y PEEK, R.B., 1948, "Soil Mechanics in Engineering Practice", John Wiley, NY.

VERRUIGT, A., 1969, "Elastic Storage of Aquifers", Flow Through Porous Media, R.J.M. De Wiest Ed., 331-376, Academic Press, NY.

YEW, C.H. y JOGI, P.N., 1978, "The Determination of Biot's Parameters for Sandstones", *Exp. Mech.*, **18**, 167-172.

YEW, C.H., JOGI, P.N. y GRAY, K.E., 1979, "Estimation of the Mechanical Properties of Fluid Saturated Rocks Using the Measured Wave Motions", *J. Energy Res. Tech.*, **101**, 112-116.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Capítulo 3

Formulación Integral y Solución Fundamental Armónica

3.1 Introducción

Una vez presentados los tres tipos de medios implicados en el modelo, este Capítulo se centra en la formulación integral del problema dinámico en el dominio de la frecuencia para cada uno de ellos. Dicha formulación integral se extiende al contorno del dominio en estudio y relaciona las variables de campo del problema a resolver con las correspondientes a un estado virtual con pocas restricciones. La posterior utilidad de esta formulación requiere que las variables de campo del estado virtual de referencia sean perfectamente conocidas.

En el apartado 3.2 se describe de forma pormenorizada los procedimientos que permiten obtener la referida formulación integral para sólidos poroelásticos en régimen armónico en términos de las cuatro variables independientes del problema, a saber, las tres componentes del vector desplazamiento y la tensión equivalente en el fluido (Domínguez, 1991). Posteriormente, y en esta misma sección, la expresión obtenida será particularizada para el caso de sólidos viscoelásticos o medios escalares. En este punto, también se introducen las características del problema virtual empleado. Se trata, más bien, de un conjunto de problemas virtuales (solución fundamental) que permiten plantear un sistema de ecuaciones integrales independientes (y singulares) en el contorno cuya solución se abordará numéricamente mediante el Método de los Elementos de Contorno (MEC) tal y como se describe en el Capítulo 4. Este apartado se ciñe al problema de puntos internos. La formulación singular en el contorno (3.4) es conveniente tratarla una vez sean conocidas las expresiones de la solución fundamental para cada medio, aspecto éste al que se dedica el apartado 3.3 de este Capítulo.

3.2 Formulación en Reciprocidad y Representación Integral en Problemas Armónicos

Bajo este genérico epígrafe se presentan las formulaciones integrales del problema dinámico en el dominio de la frecuencia para medios poroelásticos, viscoelásticos y escalares. Como ya se ha comentado en la introducción del Capítulo, se comienza por

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

obtener las expresiones correspondientes al problema poroelástico que podrán luego ser interpretadas en el límite para obtener las aplicables a sólidos viscoelásticos y problemas de propagación escalares.

Así, el autor ha optado por presentar dos procedimientos a través de los cuales se accede a la formulación integral del problema poroelástico armónico. El primero de ellos parte de la formulación residual de las ecuaciones de gobierno (2.97) (ver p.e. Brebbia y Domínguez, 1992) y es el planteado por Domínguez (1991 y 1992) si bien este autor parte de las ecuaciones de equilibrio del problema. El segundo, atendiendo al carácter lineal y elástico del modelo, hace uso las relaciones de reciprocidad que pueden establecerse entre dos estados de tensión-deformación a que se encuentra sometido el medio (Cheng et al., 1991). En ambos casos, el empleo de técnicas de integración por partes permiten convertir integrales de dominio en integrales extendidas al contorno a través del teorema de la divergencia.

3.2.1 Poroelasticidad Armónica

Las primeras aplicaciones del MEC en poroelasticidad se circunscriben al problema cuasiestático. Destacar en este apartado las aportaciones de Cleary (1977) y Cheng y Liggett (1984) formuladas en términos de las variables independientes del problema, esto es, desplazamiento y presión de poro. Formulaciones integrales del problema dinámico en el dominio transformado de Laplace son presentadas por Predeleanu (1984) y Manolis y Beskos (1989) en términos de los desplazamientos del esqueleto sólido y de la fase fluida (seis variables para el problema 3D). Soluciones fundamentales para la formulación propuesta en el dominio transformado de Laplace son obtenidas también por los referidos Manolis y Beskos (1989) y previamente por Norris (1985) en el dominio de la frecuencia. Teniendo en cuenta la dependencia entre las rotaciones de los desplazamientos en ambas fases del medio, como ya se demostró en el capítulo anterior, este problema puede ser formulado, como en el caso cuasiestatico, en término de cuatro variables independientes en el dominio de la frecuencia, a saber, el vector desplazamiento en la fase sólida y la tensión equivalente en el fluido (Bonnet, 1987 y Boutin et al., 1987). Con esto, es obvio que las formulaciones anteriores pueden optimizarse implicando un menor número de grados de libertad.

En esta dirección y casi de forma simultanea aparecen los trabajos de Cheng et al. (1991) y Domínguez (1991, 1992) para problemas armónicos bidimensionales. Ambos autores trabajan con una ecuaciones integral en el contorno que implica a la variables primarias del problema en los términos expuestos (desplazamientos del sólido y presión de poro o tensión equivalente en el fluido). La diferencia más obvia entre ambas es el tipo de variables derivadas que utilizan. Mientras el primero hace uso del vector tensión sobre el material homogeneo y del desplazamiento normal relativo entre ambas fases, Domínguez (1991) utiliza como variable dinámica el vector tensión sobre el esqueleto sólido y como variable cinemática del fluido el desplazamiento normal absoluto del mismo. Por otra parte, también difiere el procedimiento de obtención de la formulación

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

integral en ambos trabajos. De un lado, en la formulación propuesta por Cheng et al., la ecuación integral se deriva del un teorema de reciprocidad análogo al primer teorema de Betti para elasticidad. En el artículo de Domínguez, por otra parte, se parte de una expresión que anula la integral del resíduo ponderado de las ecuaciones de equilibrio en ambas fases. Ambos planteamientos se convierten en formulaciones en el contorno mediante técnicas de integración por partes y la aplicación del teorema de la divergencia.

En lo que sigue, se obtendrá la formulación integral desde ambos planteamientos en término de las variables del problema utilizadas por Domínguez en los trabajos mencionados. A diferencia de este autor, el planteamiento residual se realizará desde las ecuaciones de gobierno del problema (2.97) (ver p.e. Schanz, 2001).

3.2.1.1 Residuos Ponderados de la Ecuación de Gobierno: Partimos de la ecuación de gobierno del problema. Para mayor sencillez se emplea la notación termoelástica para las constantes del problema. Así:

$$\mu \nabla^2 u_i + (\lambda + \mu)\, e_{,i} - \gamma\, \tau_{,i} + \rho \omega^2 u_i + F_i = 0 \qquad (3.1.a)$$

$$\nabla^2 \tau - \frac{\mathrm{i}\omega}{K} \tau - \mathrm{i}\omega\eta e + X'_{i,i} = 0 \qquad (3.1.b)$$

De forma condensada, como sigue:

$$G_i + F_i = 0 \qquad (3.2.a)$$

$$H + X'_{i,i} = 0 \qquad (3.2.b)$$

Poderamos ahora la ecuación (3.2.a) en cada dirección por una función desplazamiento virtual del esqueleto u_i^* y la ecuación (3.2.b) por una función tensión equivalente en el fluido virtual τ^*, cuyo único requerimiento es que se trate de funciones derivables. Se suman las contribuciones de las cuatro ecuaciones resultantes e integran en todo el dominio en estudio. Así, se escribe:

$$\int_\Omega \left[(G_i + F_i) u_i^* + \left(H + X'_{i,i} \right) \tau^* \right] d\Omega = 0 \qquad (3.3)$$

Algunas de las integrales de volumen a que da lugar (3.3) pueden integrarse por partes dos veces y aplicar sobre el resultado el teorema de la divergencia. Con ello, los términos afectados pueden escribirse del siguiente modo:

$$\int_\Omega \mu \nabla^2 u_i\, u_i^*\, d\Omega = \int_\Gamma \mu \left(u_{i,j}\, u_i^* - u_i\, u_{i,j}^* \right) n_j\, d\Gamma + \int_\Omega \mu\, \nabla^2 u_i^*\, u_i\, d\Omega \qquad (3.4.a)$$

$$\int_\Omega \lambda\, e_{,i}\, u_i^*\, d\Omega = \int_\Gamma \lambda\, e\, \delta_{ij}\, n_j\, u_i^*\, d\Gamma - \int_\Gamma \lambda\, e^*\, \delta_{ij}\, n_j\, u_i\, d\Gamma + \int_\Omega \lambda\, e_{,i}^*\, u_i\, d\Omega \qquad (3.4.b)$$

$$\int_\Omega \mu\, e_{,i}\, u_i^*\, d\Omega = \int_\Gamma \mu\, u_{j,i}\, n_j\, u_i^*\, d\Gamma - \int_\Gamma \mu\, u_{j,i}^*\, n_j\, u_i\, d\Gamma + \int_\Omega \mu\, e_{,i}^*\, u_i\, d\Omega \qquad (3.4.c)$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

$$\int_\Omega \gamma\ \tau_{,i}\ u_i^*\ d\Omega = \int_\Gamma \gamma\ \tau\ \delta_{ij}\ n_j\ u_i^*\ d\Gamma - \int_\Omega \gamma\ \tau\ e^*\ d\Omega \qquad (3.4.d)$$

$$\int_\Omega \nabla^2\tau\ \tau^*\ d\Omega = \int_\Gamma \left(\tau_{,n}\tau^* - \tau^*\tau_{,n}\right) d\Gamma + \int_\Omega \nabla^2\tau^*\ \tau\, d\Omega \qquad (3.4.e)$$

$$\int_\Omega i\omega\eta\ e\ \tau^*\, d\Omega = \int_\Gamma i\omega\eta\ \tau^*\ \delta_{ij}\ n_j\ u_i\, d\Gamma - \int_\Omega i\omega\eta\ \tau^*_{,i}\ u_i\ d\Omega \qquad (3.4.f)$$

donde n_j es la normal al contorno. Sustituyendo (3.4.a) a (3.4.f) en (3.3):

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left[(G_i + F_i)u_i^* + (H + X'_{i,i})\ \tau^*\right] d\Omega = \int_\Gamma \mu\left(u_{i,j}\ u_i^* - u_i\ u^*_{i,j}\right) n_j\ d\Gamma + \\
&+ \int_\Omega \mu\nabla^2 u_i^*\ u_i\ d\Omega + \int_\Gamma \lambda\, e\, \delta_{ij}\ n_j\ u_i^*\, d\Gamma - \int_\Gamma \lambda\, e^*\, \delta_{ij}\ n_j\ u_i\, d\Gamma + \int_\Omega \lambda\, e^*_{,i}\ u_i\ d\Omega + \\
&+ \int_\Gamma \mu\, u_{j,i}\ n_j\ u_i^*\, d\Gamma - \int_\Gamma \mu\, u^*_{j,i}\ n_j\ u_i\, d\Gamma + \int_\Omega \mu\, e^*_{,i}\ u_i\ d\Omega - \int_\Gamma \gamma\ \tau\ \delta_{ij}\ n_j\ u_i^*\, d\Gamma + \\
&+ \int_\Omega \gamma\ \tau\ e^*\, d\Omega + \int_\Omega \rho\omega^2\ u_i\ u_i^*\, d\Omega + \int_\Gamma \tau_{,n}\tau^*\, d\Gamma - \int_\Gamma \tau^*\tau_{,n}\, d\Gamma + \int_\Omega \nabla^2\tau^*\ \tau\, d\Omega - \\
&- \int_\Omega \frac{i\omega}{K}\ \tau\ \tau^*\, d\Omega - \int_\Gamma i\omega\eta\ \tau^*\ \delta_{ij}\ n_j\ u_i\, d\Gamma + \int_\Omega i\omega\eta\ \tau^*_{,i}\ u_i\ d\Omega + \\
&+ \int_\Omega \left(F_i u_i^* + X'_{i,i}\ \tau^*\right)\ d\Omega = 0
\end{aligned} \qquad (3.5)$$

Agrupando y reordenando los términos de (3.5), esta ecuación puede ser escrita como sigue :

$$\begin{aligned}
&\int_\Gamma \left[\lambda e\delta_{ij} + \mu\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) - \gamma\tau\delta_{ij}\right] n_j u_i^*\, d\Gamma - \int_\Gamma \left[\lambda e^*\delta_{ij} + \mu\left(u^*_{i,j} + u^*_{i,j}\right) + i\omega\eta\tau^*\delta_{ij}\right] n_j u_i\, d\Gamma + \\
&+ \int_\Gamma \tau_{,n}\tau^*\, d\Gamma - \int_\Gamma \tau^*\tau_{,n}\, d\Gamma + \int_\Omega \left[\mu\nabla^2 u_i^* + (\lambda+\mu)e^*_{,i} + i\omega\eta\tau^*_{,i} + \rho\omega^2 u_i^*\right] u_i\, d\Omega + \\
&+ \int_\Omega \left(\nabla^2\tau^* - \frac{i\omega}{K}\tau^* - \gamma e^*\right)\tau\, d\Omega + \int_\Omega \left(F_i u_i^* + X'_{i,i}\ \tau^*\right)\ d\Omega = 0
\end{aligned} \qquad (3.6)$$

En esta situación, sustituyendo la expresión de γ en términos de constantes poroelásticas, la ecuación (3.6) puede escribirse del modo siguiente:

$$\begin{aligned}
&\int_\Gamma \left[\lambda e\delta_{ij} + \mu\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) + \frac{Q}{R}\tau\delta_{ij}\right] n_j u_i^*\, d\Gamma + \int_\Gamma Z\,\tau\,\delta_{ij}\,n_j\,u_i^*\,d\Gamma - \\
&- \int_\Gamma \left[\lambda e^*\delta_{ij} + \mu\left(u^*_{i,j} + u^*_{j,i}\right) + i\omega\eta\tau^*\delta_{ij}\right] n_j u_i\, d\Gamma + \int_\Gamma \tau_{,n}\tau^*\, d\Gamma - \\
&- \int_\Gamma \tau^*\tau_{,n}\, d\Gamma + \int_\Omega \left[\mu\nabla^2 u_i^* + (\lambda+\mu)e^*_{,i} + i\omega\eta\tau^*_{,i} + \rho\omega^2 u_i^*\right] u_i\, d\Omega + \\
&+ \int_\Omega \left(\nabla^2\tau^* - \frac{i\omega}{K}\tau^* - \gamma e^*\right)\tau\, d\Omega + \int_\Omega \left(F_i u_i^* + X'_{i,i}\ \tau^*\right)\ d\Omega = 0
\end{aligned} \qquad (3.7)$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

donde:

$$Z = \frac{\mathrm{i}\omega b + \omega^2 \rho_{12}}{\mathrm{i}\omega b - \omega^2 \rho_{22}} = -\frac{\hat{\rho}_{12}}{\hat{\rho}_{22}} \tag{3.8}$$

En este punto puede adoptarse como ecuación de gobierno del problema virtual la que sigue:

$$\mu \nabla^2 u_i^* + (\lambda + \mu)\, e_{,i}^* - \mathrm{i}\omega\eta \tau_{,i}^* + \rho\omega^2 u_i^* + F_i^* = 0 \tag{3.9.a}$$

$$\nabla^2 \tau^* - \frac{\mathrm{i}\omega}{K} \tau^* - \gamma e^* + X_{i,i}'^* = 0 \tag{3.9.b}$$

A diferencia del problema real no existe ninguna restricción sobre el particular para el estado virtual. Lo mismo puede decirse de la ley de comportamiento para este problema. Así, la relación tensión-deformación para ambos estados será:

$$\tau_{ij} = \lambda\, e\, \delta_{ij} + \mu\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) + \frac{Q}{R} \tau \delta_{ij} \tag{3.10.a}$$

$$\tau_{ij}^* = \lambda\, e^* \delta_{ij} + \mu\left(u_{i,j}^* + u_{j,i}^*\right) + \mathrm{i}\omega\eta\, \tau^* \delta_{ij} \tag{3.10.b}$$

Donde (3.10.a) se obtiene de (2.35.a) de forma sencilla. Como puede observarse la ley de comportamiento del problema virtual (3.10.b) no se corresponde tampoco con la utilizada para el problema real, sin embargo esto no resta validez al planteamiento que realizamos. Como puede observarse, el campo de desplazamientos-tensiones correspondiente al problema virtual obedece a ecuaciones diferentes de las correspondientes al problema real en estudio o bien son solución de las ecuaciones de la poroelasticidad sobre un material de diferentes propiedades del analizado para el problema real.

Teniendo en cuenta (3.9) y (3.10) podemos expresar (3.7) en términos del vector tensión en el contorno $t_i = \tau_{ij} n_j$ y del desplazamiento normal al mismo $u_n = u_i \delta_{ij} n_j$, ambas variables de la matriz sólida:

$$\int_\Gamma t_i\, u_i^*\, d\Gamma + \int_\Gamma \tau_{,n}\, \tau^*\, d\Gamma + \int_\Omega \left(F_i u_i^* + X_{i,i}'\, \tau^*\right)\, d\Omega =$$
$$= \int_\Gamma t_i^*\, u_i\, d\Gamma + \int_\Gamma (\tau_{,n}^* - Z u_n^*)\, \tau\, d\Gamma + \int_\Omega \left(F_i^* u_i + X_{i,i}'^*\, \tau\right)\, d\Omega \tag{3.11}$$

Una relación de reciprocidad de estas características para el problema poroelastodinámico en el dominio transformado de Laplace es planteada por Chen (ver Chen,1992 ó Chen y Dargush, 1995) si bien este autor utiliza como variables la tensión total sobre el material homogéneo en lugar de la tensión sobre el esqueleto sólido, la presión de poro en lugar de la tensión equivalente sobre el fluido y el flujo normal de

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

líquido en lugar de la derivada de la tensión equivalente. En cualquier caso, el problema es formulado en términos de cuatro variables independientes, las tres componentes del desplazamiento del esqueleto sólido y la presión de poro.

Domínguez (1991,1992) plantea una formulación integral del problema en la que ambos estados, real y virtual, obedecen a las mismas ecuaciones de gobierno. A esta formulación puede llegarse con relativa facilidad desde (3.7) incorporando nuevas integrales de volumen y contorno que luego serán tratadas de forma adecuada. Así, en primera instancia, puede escribirse (3.7) como sigue:

$$\int_\Gamma \left[\lambda e \delta_{ij} + \mu\left(u_{i,j} - u_{j,i}\right) + \frac{Q}{R}\tau\delta_{ij}\right] n_j u_i^* \, d\Gamma + \int_\Gamma Z\tau\delta_{ij} n_j u_i^* \, d\Gamma -$$
$$- \int_\Gamma \left[\lambda e^* \delta_{ij} + \mu\left(u_{i,j}^* - u_{j,i}^*\right) + \frac{Q}{R}\tau^*\delta_{ij}\right] n_j u_i \, d\Gamma - \boxed{\int_\Gamma \left(i\omega\eta - \frac{Q}{R}\right)\tau^*\delta_{ij} n_j u_i \, d\Gamma} +$$
$$+ \int_\Gamma \tau_{,n}\tau^* \, d\Gamma - \int_\Gamma \tau^*\tau_{,n} \, d\Gamma + \int_\Omega \left[\mu\nabla^2 u_i^* + (\lambda+\mu)e_{,i}^* - \gamma\tau_{,i}^* + \rho\omega^2 u_i^*\right] u_i \, d\Omega +$$
$$+ \boxed{\int_\Omega (i\omega\eta + \gamma)\tau_{,i}^* u_i \, d\Omega} + \int_\Omega \left(\nabla^2\tau^* - \frac{i\omega}{K}\tau^* - i\omega\eta e^*\right)\tau \, d\Omega +$$
$$+ \boxed{\int_\Omega (i\omega\eta + \gamma) e^* \tau \, d\Omega} + \int_\Omega \left(F_i u_i^* + X_{i,i}'\tau^*\right) d\Omega = 0 \qquad (3.12)$$

donde los términos marcados son necesarios si estamos interesados en plantear un sistema virtual que cumpla con las ecuaciones del problema real. Haciendo uso de (3.10.a) para ambos estados y de (3.1) para el estado virtual, puede expresarse (3.12) en términos del vector tensión de la matriz sólida en ambos problemas y de las cargas de volumen para el estado virtual del modo siguiente:

$$\int_\Gamma t_i \, u_i^* \, d\Gamma - \int_\Gamma t_i^* u_i \, d\Gamma + \int_\Gamma \tau_{,n} \, \tau^* \, d\Gamma - \int_\Gamma \tau_{,n}^* \, \tau \, d\Gamma +$$
$$+ \int_\Omega \left(F_i u_i^* + X_{i,i}'\tau^*\right) d\Omega - \int_\Omega \left(F_i^* u_i + X_{i,i}'^* \tau\right) d\Omega +$$
$$+ \int_\Gamma Z\tau\delta_{ij} n_j u_i^* \, d\Gamma - \int_\Gamma \left(i\omega\eta - \frac{Q}{R}\right)\tau^*\delta_{ij} n_j u_i \, d\Gamma +$$
$$+ \int_\Omega (i\omega\eta + \gamma)\tau_{,i}^* u_i \, d\Omega + \int_\Omega (i\omega\eta + \gamma) e^* \tau \, d\Omega = 0 \qquad (3.13)$$

La expresión (3.13) podrá simplificarse integrando por partes y aplicando el teorema de la divergencia sobre una de las nuevas integrales de dominio que han aparecido en el proceso:

$$\int_\Omega (i\omega\eta + \gamma)\tau_{,i}^* u_i \, d\Omega = \int_\Gamma (i\omega\eta + \gamma)\tau^* u_i \delta_{ij} n_j \, d\Gamma - \int_\Omega (i\omega\eta + \gamma)\tau^* e \, d\Omega \qquad (3.14)$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Si $\gamma = -\frac{Q}{R} - Z$ en término de constantes poroelásticas y conocida la relación entre el vector desplazamiento en la matriz sólida y la fase fluida a través de la presión de poro en ambos problemas:

$$Zu_n = Zu_i \delta_{ij} n_j = U_n - J(\tau_{,n} + X_i' n_i)$$
$$Zu_n^* = Zu_i^* \delta_{ij} n_j = U_n^* - J(\tau_{,n}^* + X_i'^* n_i) \qquad (3.15)$$

Teniendo en cuenta, además, que:

$$i\omega\eta + \gamma = (1+J) i\omega\eta \text{ donde } J = \frac{1}{\mathrm{i}\omega b - \omega^2 \rho_{22}} = -\frac{1}{\omega^2 \hat{\rho}_{22}} \qquad (3.16)$$

Puede escribirse (3.13) como sigue:

$$\int_\Gamma t_i\, u_i^*\, d\Gamma - \int_\Gamma t_i^*\, u_i\, d\Gamma - \int_\Gamma \tau^* (U_n - JX_i' n_i)\, d\Gamma + \int_\Gamma \tau (U_n^* - JX_i'^* n_i)\, d\Gamma +$$
$$+ \int_\Gamma (1+J)\tau_{,n}\, \tau^*\, d\Gamma - \int_\Gamma (1+J)\tau_{,n}^*\, \tau\, d\Gamma - \int_\Omega (1+J)\mathrm{i}\omega\eta\, \tau^* e\, d\Omega + \int_\Omega (1+J)\mathrm{i}\omega\eta\, e^*\tau\, d\Omega +$$
$$+ \int_\Omega \left(F_i u_i^* + X_{i,i}' \tau^*\right)\, d\Omega - \int_\Omega \left(F_i^* u_i + X_{i,i}'^* \tau\right)\, d\Omega = 0 \qquad (3.17)$$

Ahora y a la luz de (3.4e):

$$\int_\Gamma (1+J)\left(\tau_{,n}\tau^* - \tau^* \tau_{,n}\right)\, d\Gamma = \int_\Omega (1+J)\left(\nabla^2\tau\ \tau^* - \nabla^2\tau^*\ \tau\right)\, d\Omega \qquad (3.18)$$

Con lo que (3.17) será como sigue:

$$\int_\Gamma t_i\, u_i^*\, d\Gamma - \int_\Gamma t_i^*\, u_i\, d\Gamma - \int_\Gamma \tau^* (U_n - JX_i' n_i)\, d\Gamma + \int_\Gamma \tau (U_n^* - JX_i'^* n_i)\, d\Gamma +$$
$$+ \int_\Omega (1+J)\left(\nabla^2\tau - \mathrm{i}\omega\eta e\right)\, \tau^*\, d\Omega - \int_\Omega (1+J)\left(\nabla^2\tau^* - \mathrm{i}\omega\eta e^*\right)\, \tau\, d\Omega +$$
$$+ \int_\Omega \left(F_i u_i^* + X_{i,i}' \tau^*\right)\, d\Omega - \int_\Omega \left(F_i^* u_i + X_{i,i}'^* \tau\right)\, d\Omega = 0 \qquad (3.19)$$

Llegados a este punto, si el estado virtual verifica (3.1b):

$$\int_\Gamma t_i\, u_i^*\, d\Gamma + \int_\Gamma \tau\ (U_n^* - JX_i'^* n_i)\, d\Gamma + \int_\Omega \left(F_i u_i^* - JX_{i,i}' \tau^*\right)\, d\Omega =$$
$$= \int_\Gamma t_i^*\, u_i\, d\Gamma + \int_\Gamma \tau^* (U_n - JX_i' n_i)\, d\Gamma + \int_\Omega \left(F_i^* u_i - JX_{i,i}'^* \tau\right)\, d\Omega \qquad (3.20)$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Esta ecuación de reciprocidad (Domínguez, 1992) representa el punto de partida para obtener una representación integral del problema real. Así, considerando nulas las fuerzas de volumen en el problemas real, la ecuación integral de los desplazamientos del esqueleto del medio en un punto k interior al dominio Ω, puede obtenerse a partir de esta relación de reciprocidad a través de un estado virtual definido por la solución fundamental correspondiente a una carga concentrada armónica en k según las dirección j actuando en la matriz sólida de un medio infinito, esto es:

$$\begin{aligned} X_i^* &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)\ \delta_{ji} \\ X_i'^* &= 0 \end{aligned} \qquad (3.21)$$

donde $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)$ representa la función delta de Dirac y $\mathbf{x}_k$ el vector posición del punto de aplicación de dicha carga puntual, en principio interno al dominio Ω. Las expresiones (3.21) representan tres cargas puntuales unitarias en la parte sólida del medio actuando en las tres direcciones del espacio mientras que en la fase líquida las fuerzas de volumen son nulas. Con este estado de cargas, la ecuación (3.20) adopta la forma:

$$u_j^k + \int_\Gamma t_{ji}^* u_i \, d\Gamma + \int_\Gamma U_{nj}^* \tau \, d\Gamma = \int_\Gamma u_{ji}^* \, t_i \, d\Gamma - \int_\Gamma \tau_j^* \, U_n \, d\Gamma \qquad (3.22)$$

donde se recogen conjuntamente los tres casos de carga puntual (j=1,2,3) aplicadas en el punto k. Los términos u_{ji}^* y t_{ji}^* constituyen los desplazamientos y tracciones de la matriz sólida en dirección i debidos a la carga puntual aplicada según j. Por otra parte, para la misma carga, τ_j^* y U_{nj}^* representan la tensión equivalente y desplazamiento absoluto normal al contorno de la fase fluida.

En este caso, el campo de desplazamientos y tensiones equivalentes de la solución fundamental habrán de verificar la ecuación de gobierno del problema en los términos conocidos (3.1):

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 u_{ji}^* + (\lambda + \mu)\, e_{j,i}^* - \gamma \tau_{j,i}^* + \rho \omega^2 u_{ji}^* + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)\ \delta_{ji} &= 0 \\ \nabla^2 \tau_j^* - \frac{\mathrm{i}\omega}{K} \tau_j^* - \mathrm{i}\omega\eta e_j^* &= 0 \end{aligned} \qquad (3.23)$$

Por otra parte, la representación integral de la tensión equivalente del fluido en k, cuarta variable primaria, se obtiene de la solución fundamantal correspondiente a las siguientes cargas de volumen:

$$\begin{aligned} F_i^* &= 0 \\ X_{i,i}'^* &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \end{aligned} \qquad (3.24)$$

Teniendo en cuenta lo que representa F_i^* se observa que las cargas de volumen en el

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

esqueleto sólido no son nulas en este caso. En este problema, la solicitación viene representada por una fuente puntual de presión en la fase fluida del medio. Así, con (3.24), (3.20) puede escribirse como sigue:

$$-J\tau^k + \int_\Gamma t^*_{oi} u_i \, d\Gamma - \int_\Gamma (U^*_{no} - JX'^*_i n_i)\ \tau \ d\Gamma = \int_\Gamma u^*_{oi} t_i \, d\Gamma - \int_\Gamma \tau^*_o U_n \ d\Gamma \tag{3.25}$$

Siguiendo la notación de (3.22), el subíncide "o" se corresponde con $j = 4$ para los términos de la solución fundamental correspondiente a este segundo grupo de cargas de volumen. Los términos u^*_{oi} y t^*_{oi} son la componente i de los desplazamientos y tracciones en el esqueleto provocados por la fuente puntual en el fluido. De otro lado, τ^*_o y U^*_{no} la respuesta en tensión equivalente y desplazamiento normal del propio fluido a la misma solicitación. Estos términos de la solución fundamental se obtienen de resolver el sistema de ecuaciones planteado con (3.1) y (3.24):

$$\begin{aligned} \mu\nabla^2 u^*_{oi} + (\lambda+\mu)\, e^*_{o,i} - \gamma\, \tau^*_{o,i} + \rho\omega^2 u^*_{oi} &= 0 \\ \nabla^2\tau^*_o - \frac{\mathrm{i}\omega}{K}\tau^*_o - \mathrm{i}\omega\eta\, e^*_o + \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_k) &= 0 \end{aligned} \tag{3.26}$$

A la resolución de (3.23) y (3.26) se dedicará un próximo apartado de este Capítulo.

3.2.1.2 Teoremas de Reciprocidad: Puede establecerse la igualdad de trabajos internos recíprocos entre dos estados de tensiones-deformaciones armónicos sobre el mismo sólido poroelástico, esto es:

$$\tau_{ij}\ \varepsilon^*_{ij} + \tau\ \varepsilon^* = \tau^*_{ij}\ \varepsilon_{ij} + \tau^*\varepsilon \tag{3.27}$$

Igualdad análoga al primer teorema de Betti en elasticidad, que puede demostrarse de forma inmediata haciendo uso de la expresión de la ley de comportamiento (2.35) para ambos estados. Se cumple también que:

$$\int_\Omega \left(\tau_{ij}\ \varepsilon^*_{ij} + \tau\ \varepsilon^*\right)\ d\Omega = \int_\Omega \left(\tau^*_{ij}\ \varepsilon_{ij} + \tau^*\varepsilon\right)\ d\Omega \tag{3.28}$$

Para cada término de esta ecuación, integrando por partes y aplicando el teorema de la divergencia:

$$\int_\Omega \tau_{ij}\ \varepsilon^*_{ij}\ d\Omega = \int_\Omega \tau_{ij}\ u^*_{i,j}\ d\Omega = \int_\Gamma t_i\ u^*_i\ d\Gamma - \int_\Omega \tau_{ij,j}\ u^*_i\ d\Omega \tag{3.29.a}$$

$$\int_\Omega \tau^*_{ij}\ \varepsilon_{ij}\ d\Omega = \int_\Omega \tau^*_{ij}\ u_{i,j}\ d\Omega = \int_\Gamma t^*_i\ u_i\ d\Gamma - \int_\Omega \tau^*_{ij,j}\ u_i\ d\Omega \tag{3.29.b}$$

$$\int_\Omega \tau\ \varepsilon^*\ d\Omega = \int_\Omega \tau\ U^*_{i,i}\ d\Omega = \int_\Gamma \tau\ U^*_n\ d\Gamma - \int_\Omega \tau_{,i}\ U^*_i\ d\Omega \tag{3.29.c}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

$$\int_\Omega \tau^* \varepsilon \, d\Omega = \int_\Omega \tau^* U_{i,i} \, d\Omega = \int_\Gamma \tau^* U_n \, d\Gamma - \int_\Omega \tau^*_{,i} \, U_i \, d\Omega \qquad (3.29.d)$$

Que sustituidas en (3.28) permiten escribir:

$$\int_\Gamma t_i \, u_i^* \, d\Gamma + \int_\Gamma \tau \, U_n^* \, d\Gamma - \int_\Omega \left(\tau_{ij,j} \, u_i^* + \tau_{,i} \, U_i^*\right) d\Omega =$$
$$\int_\Gamma t_i^* \, u_i \, d\Gamma + \int_\Gamma \tau^* U_n \, d\Gamma - \int_\Omega \left(\tau^*_{ij,j} \, u_i + \tau^*_{,i} \, U_i\right) d\Omega \qquad (3.30)$$

Tomando en consideración que ambos estados verifican las ecuaciones de equilibrio del problema armónico, esto es:

$$\tau_{ij,j} + X_i = \omega^2(\hat{\rho}_{11} u_i + \hat{\rho}_{12} U_i) \qquad \tau^*_{ij,j} + X_i^* = \omega^2(\hat{\rho}_{11} u_i^* + \hat{\rho}_{12} U_i^*)$$
$$\tau_{,i} + X_i' = \omega^2(\hat{\rho}_{12} u_i + \hat{\rho}_{22} U_i) \qquad \tau^*_{,i} + X_i'^* = \omega^2(\hat{\rho}_{12} u_i^* + \hat{\rho}_{22} U_i^*) \qquad (3.31)$$

Debido a la simetría de los parámetros de densidad, las integrales de dominio en (3.30) pueden expresarse en términos de las cargas de volumen, con lo cual esta ecuación puede escribirse:

$$\int_\Gamma t_i \, u_i^* \, d\Gamma + \int_\Gamma \tau \, U_n^* \, d\Gamma + \int_\Omega \left(X_i \, u_i^* + X_i' \, U_i^*\right) d\Omega =$$
$$\int_\Gamma t_i^* \, u_i \, d\Gamma + \int_\Gamma \tau^* U_n \, d\Gamma + \int_\Omega (X_i^* \, u_i + X_i'^* \, U_i) \, d\Omega \qquad (3.32)$$

Relación de reciprocidad de la que puede obtenerse directamente la representación integral del campo de desplazamientos de la matriz sólida (3.22) haciendo uso del primer tipo de cargas de volumen de la solución fundamental (3.21). La expresión análoga para la tensión equivalente en el fluido (3.25) requiere algunas operaciones adicionales sobre (3.32). Así, haciendo uso de (2.96), las integrales de volumen pueden expresarse en función de los desplazamientos del sólido y la tensión equivalente como sigue:

$$\int_\Omega \left(X_i \, u_i^* + X_i' \, U_i^*\right) d\Omega = \int_\Omega \left(X_i \, u_i^* + JX_i' \tau_{,i}^* + JX_i' \, X_i'^* + ZX_i' \, u_i^*\right) d\Omega$$
$$\int_\Omega \left(X_i^* \, u_i + X_i'^* \, U_i\right) d\Omega = \int_\Omega \left(X_i^* \, u_i + JX_i'^* \tau_{,i} + JX_i'^* X_i' + ZX_i'^* \, u_i\right) d\Omega \qquad (3.33)$$

Integrando por partes y aplicando el teorema de la divergencia al término $JX_i'^* \, \tau_{,i}$:

$$\int_\Omega \left(X_i \, u_i^* + X_i' \, U_i^*\right) d\Omega = \int_\Omega \left(X_i \, u_i^* - JX_{i,i}' \tau_{,i}^* + JX_i' \, X_i'^* + ZX_i' \, u_i^*\right) d\Omega + \int_\Gamma JX_i' \, \tau^* n_i \, d\Gamma$$
$$(3.34.a)$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

$$\int_\Omega \left(X_i^* \; u_i + X_i'^* \; U_i\right) \; d\Omega = \int_\Omega \left(X_i^* \; u_i - JX_{i,i}'^* \; \tau_{,i} + JX_i'^* X_i' + ZX_i'^* \; u_i\right) \; d\Omega + \int_\Gamma JX_i'^* \tau \; n_i \; d\Gamma \tag{3.34.b}$$

Así, incorporando (3.34) a (3.32):

$$\int_\Gamma t_i \; u_i^* \, d\Gamma + \int_\Gamma \tau \; (U_n^* - JX_i'^* \, n_i) \, d\Gamma + \int_\Omega \left[(X_i + ZX_i') \, u_i^* - JX_{i,i}' \, \tau^* \right] \, d\Omega =$$
$$= \int_\Gamma t_i^* \, u_i \, d\Gamma + \int_\Gamma \tau^* \, (U_n - JX_i' \, n_i) \, d\Gamma + \int_\Omega \left[(X_i^* + ZX_i'^*) \, u_i - JX_{i,i}'^* \, \tau \right] \, d\Omega \tag{3.35}$$

Es inmediata (3.20) de (3.35) si $F_i = X_i + ZX_i'$ en ambos estados. Sobre esta variante de la ecuación de reciprocidad se considera el segundo tipo de solicitación de la solución fundamental en los términos ya comentados.

3.2.2 Elastodinámica Armónica

En el caso de medios viscoelásticos, el teorema de reciprocidad fue establecido por Graffi (1946) en el dominio del tiempo y generalizado por Wheeler y Sternberg (1968) a dominios no acotados. En el dominio de la frecuencia, la representación integral del campo de desplazamientos en puntos k internos a Ω puede realizarse a partir de (3.22) si pensamos en un medio poroso completamente drenado (τ y τ^* nulas):

$$u_j^k + \int_\Gamma t_{ji}^* u_i \, d\Gamma = \int_\Gamma u_{ji}^* \; t_i \; d\Gamma \tag{3.36}$$

Aquí t_i serán las componentes del tensor de tensiones en el contorno del dominio viscoelástico. Los términos u_{ji}^* y t_{ji}^* los desplazamientos y tracciones de la solución fundamental que verifica la ecuación de Navier:

$$\mu \nabla^2 u_{ji}^* + (\lambda + \mu) \; e_{j,i}^* - \rho \omega^2 \, u_{ji}^* + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \; \delta_{ji} = 0 \tag{3.37}$$

Como sabemos, todas las variables dependen de $\mathbf{x}$ y ω. Obsérvese que, para una frecuencia determinada, la expresión integral (3.36) es idéntica a la obtenida para el problema elastostático.

3.2.3 Problema Escalar Armónico

La representación integral para este problema puede obtenerse a partir de (3.25) si se lleva al límite para un medio poroelástico $\phi = 1$. En este caso no tienen sentido las variables del sólido y se puede escribir:

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

$$p^k + \int_\Gamma \left(\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}\right)^* p \, d\Gamma = \int_\Gamma p^* \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \, d\Gamma \tag{3.38}$$

donde p^k es el valor de la presión en puntos internos y p^* la solución en el contorno de la ecuación de Helmholtz (2.92) para una fuente puntual en k pulsando en un medio infinito con frecuencia ω:

$$\nabla^2 p^* + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 p^* + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) = 0 \tag{3.39}$$

y $\mathbf{n}$ la normal al contorno.

3.3 Solución Fundamental Armónica

En el apartado precedente se han obtenido las formulaciones integrales para los tres tipos de medios implicados en el modelo acoplado que se presenta. Estas expresiones de las variables primarias en Ω a través de integrales en el contorno Γ, se han obtenido a partir de relaciones de reciprocidad en combinación con la respuesta (esto es, el campo de desplazamientos y tensiones) de un medio infinito debida a una carga o fuente puntual según sea el medio estudiado. Como se ha comentado en la introducción, la obtención de la solución a este estado fundamental es de gran importancia en la reducción del problema a un conjunto de ecuaciones integrales en el contorno que luego serán tratadas numéricamente. A la obtención de esta solución fundamental se dedica el apartado. Se ilustrará el procedimiento en el caso de sólidos poroelásticos. Siguiendo la misma metodología puede determinarse también la solución fundamental correspondiente al caso elastodinámico.

3.3.1 Procedimiento para la Obtención de la Solución Fundamental Poroelástica

Se centra este subapartado al procedimiento que permite obtener la solución a las ecuaciones (3.23) y (3.26), en las que, para simplificar la notación, se ha hecho uso de la analogía termo-poroelástica armónica. Así, en virtud de esta correspondencia entre ambos problemas, la solución fundamental que buscamos es análoga a la correspondiente al problema termoelástico (ver Kupradze et al., 1979). Existe, sin embargo, un aspecto a tener en cuenta cuando se emplean las expresiones obtenidas por este autor, a saber, el signo de la exponencial que recoge la dependencia temporal armónica de las variables del problema ($e^{-i\omega t}$). Este detalle es el responsable de los errores que aparecen en la solución fundamental bidimensional poroelástica publicada por Bonnet (1987) y obtenida por este autor siguiendo el procedimiento de Kupradze et al. para el problema termoelástico 3D (ver Domínguez, 1992).

El procedimiento referido se ilustra en lo que sigue para las ecuaciones (3.23) y

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

(3.26) con dependencia temporal del tipo $e^{i\omega t}$ (2.88). Utilizando notación matricial, estas ecuaciones se escriben como:

$$\mathbf{B}\,\mathbf{G} + \mathbf{I}\,\delta(\mathbf{x}-\xi) = \mathbf{0} \tag{3.40}$$

donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad, $\mathbf{B}$ una matriz 4×4 de operadores diferenciales cuyos términos son:

$$B_{lk} = \left[\left(\mu\nabla^2 + \rho\omega^2\right)\delta_{lk} + (1-\delta_{4k})(\lambda+\mu)\frac{\partial^2}{\partial x_l\,\partial x_k} - \delta_{4k}\gamma\frac{\partial}{\partial x_l} \right](1-\delta_{l4}) + \\ + \left[\left(\nabla^2 - \frac{i\omega}{K}\right)\delta_{4k} - (1-\delta_{4k})\alpha\frac{\partial}{\partial x_k} \right]\delta_{l4} \tag{3.41}$$

y $\mathbf{G}$ un tensor cuyos términos representan la solución fundamental en desplazamientos del sólido y tensiones efectivas en el fluido para los dos tipos de carga puntual armónica especificados:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} u^*_{11} & u^*_{21} & u^*_{31} & u^*_{o1} \\ u^*_{12} & u^*_{22} & u^*_{32} & u^*_{o1} \\ u^*_{13} & u^*_{23} & u^*_{33} & u^*_{o1} \\ \tau^*_1 & \tau^*_2 & \tau^*_3 & \tau^*_o \end{pmatrix} \tag{3.42}$$

Con esta notación, el procedimiento de resolución de (3.40) es elegante y sencillo. Así, para cualquier función escalar Λ siempre puede escribirse:

$$\mathbf{B}\,\mathbf{B}^{-1}\Lambda = \mathbf{I}\,\Lambda \tag{3.43}$$

donde $\mathbf{B}^{-1}$ es la matriz inversa de $\mathbf{B}$, y por tanto:

$$\mathbf{B}\,\bar{\mathbf{B}}\,\Lambda = \mathbf{I}\,\det|\mathbf{B}|\,\Lambda \tag{3.44}$$

siendo $\bar{\mathbf{B}}$ la matriz de adjuntos de $\mathbf{B}$. Ahora, y a la vista de (3.40) y (3.44), si se adopta una función Λ tal que:

$$\det|\mathbf{B}|\,\Lambda + \delta(\mathbf{x}-\xi) = 0 \tag{3.45}$$

puede concluirse que el tensor de la solución fundamental $\mathbf{G} = \bar{\mathbf{B}}\Lambda$. El problema se centra ahora en obtener la función Λ que verifique (3.45). Algunas operaciones previas permiten clarificar el procedimiento. En primera instancia, la expresión del determinante

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

de **B** será:

$$\det|\mathbf{B}| = \left(\mu\nabla^2 + \rho\omega^2\right)^2\left[\mathrm{A}\left(\nabla^2\right)^2 + \mathrm{B}\nabla^2 + \mathrm{C}\right] \tag{3.46}$$

donde:

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} &= \lambda + 2\mu \\
\mathrm{B} &= \rho\omega^2 - \frac{\mathrm{i}\omega}{K}(\lambda + 2\mu) - \mathrm{i}\omega\eta\gamma \\
\mathrm{C} &= -\rho\omega^2\,\frac{\mathrm{i}\omega}{K}
\end{aligned} \tag{3.47}$$

y con autovalores que representan los números de onda correspondientes a los tres tipos de onda que aparecen en el medio poroelástico [haciendo uso de la Tabla 2.1 se comprueba la coincidencia entre (3.47) y (2.80)]:

$$\begin{aligned}
k_1^2 = k_{\mathrm{P1}}^2 &= \frac{\mathrm{B} - \sqrt{\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC}}}{2\mathrm{A}} \\
k_2^2 = k_{\mathrm{P2}}^2 &= \frac{\mathrm{B} + \sqrt{\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC}}}{2\mathrm{A}} \\
k_3^2 = k_{\mathrm{S}}^2 &= \frac{\rho\omega^2}{\mu}
\end{aligned} \tag{3.48}$$

En términos de los números de onda, el $\det|\mathbf{B}|$ puede expresarse del siguiente modo:

$$\det|\mathbf{B}| = \mu^2(\lambda + 2\mu)\left(\nabla^2 + k_1^2\right)\left(\nabla^2 + k_2^2\right)\left(\nabla^2 + k_3^2\right)^2 \tag{3.49}$$

Llegados a este punto, y teniendo en cuenta que todos los términos de $\bar{\mathbf{B}}$ contienen el factor $\left(\nabla^2 + k_3^2\right)$, será más cómodo trabajar con una función escalar $\bar{\Lambda}$ de la forma:

$$\bar{\Lambda} = \mu^2(\lambda + 2\mu)\left(\nabla^2 + k_3^2\right)\Lambda \tag{3.50}$$

con lo que (3.45) puede expresarse definitivamente como sigue:

$$\left(\nabla^2 + k_1^2\right)\left(\nabla^2 + k_2^2\right)\left(\nabla^2 + k_3^2\right)\bar{\Lambda} + \delta(\mathbf{x} - \xi) = 0 \tag{3.51}$$

Ahora, si para una ecuación diferencial escalar genérica:

$$\left(\nabla^2 + k_m^2\right)\phi_m + \delta(\mathbf{x} - \xi) = 0 \tag{3.52}$$

la solución fundamental singular en ξ que verifica las condiciones de radiación, es de la

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

forma (ver p.e. Domínguez, 1993):

$$\phi_m = \frac{1}{4\pi} E_m \qquad \text{siendo } E_m = \frac{1}{r} e^{-ik_m r} \quad r = |\mathbf{x} - \xi| \tag{3.53}$$

pueden plantearse, en relación con función $\bar{\Lambda}$ buscada, un conjunto de funciones auxiliares del tipo:

$$\phi_m = \left(\nabla^2 + k_{m+1}^2\right)\left(\nabla^2 + k_{m+2}^2\right)\bar{\Lambda} \quad (m = 1,2,3) \tag{3.54}$$
$$k_4 = k_1 \; ; \; k_5 = k_2$$

con lo que, teniendo en cuenta (3.52) y (3.53), la solución $\bar{\Lambda}$ de (3.51) ha de satisfacer un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\begin{aligned}
\left(\nabla^2 + k_2^2\right)\left(\nabla^2 + k_3^2\right)\bar{\Lambda} &= \frac{1}{4\pi} E_1 \\
\left(\nabla^2 + k_1^2\right)\left(\nabla^2 + k_3^2\right)\bar{\Lambda} &= \frac{1}{4\pi} E_2 \\
\left(\nabla^2 + k_1^2\right)\left(\nabla^2 + k_2^2\right)\bar{\Lambda} &= \frac{1}{4\pi} E_3
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Es sencillo comprobar que las condiciones impuestas por este sistema las verifica una función del tipo:

$$\bar{\Lambda} = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=1}^{3} C_m E_m \tag{3.56}$$

donde:

$$\begin{aligned}
C_m &= \frac{1}{(k_m^2 - k_{m+1}^2)(k_m^2 - k_{m+2}^2)} = \\
&= \frac{(-1)^{m+1}\mu\left(1 + \frac{i\omega/K}{k_m^2}\right)(\delta_{m1} + \delta_{m2}) + (\lambda + 2\mu)\delta_{m3}}{[(k_{2m}^2 - k_m^2)(\delta_{m1} + \delta_{m2}) + k_m^2 \delta_{m3}]\left[(\lambda + \mu)\left(k_m^2 + \frac{i\omega}{K}\right) + i\omega\eta\gamma\right]} \\
&\qquad k_4 = k_1 \; ; \; k_5 = k_2
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Así, conocida $\bar{\Lambda}$ el tensor de la solución fundamental **G** podrá obtenerse de:

$$\mathbf{G} = \frac{1}{\mu(\lambda + 2\mu)} \mathbf{B}^* \bar{\Lambda} \tag{3.58}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

a través de una matriz $\mathbf{B}^* = \mu(\nabla^2 + k_3^2)\bar{\mathbf{B}}$, cuyos términos responden a la expresión:

$$B_{lk}^* = \left\{\left\{(\mu\nabla^2 + \rho\omega^2)\left(\nabla^2 - \frac{i\omega}{K}\right) + \nabla^2\left[(\lambda+\mu)\left(\nabla^2 - \frac{i\omega}{K}\right) - i\omega\eta\gamma\right]\right\}\delta_{lk} - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k}\left[(\lambda+\mu)\left(\nabla^2 - \frac{i\omega}{K}\right) - i\omega\eta\gamma\right]\right\}(1-\delta_{l4})(1-\delta_{4k}) +$$
$$+ \gamma(\mu\nabla^2 + \rho\omega^2)\frac{\partial}{\partial x_l}\delta_{4k}(1-\delta_{l4}) + i\omega\eta(\mu\nabla^2 + \rho\omega^2)\frac{\partial}{\partial x_k}\delta_{l4}(1-\delta_{4k}) +$$
$$+ (\mu\nabla^2 + \rho\omega^2)\left[(\mu\nabla^2 + \rho\omega^2) + (\lambda+\mu)\nabla^2\right]\delta_{l4}\delta_{4k} \tag{3.59}$$

Realizadas estas operaciones, y con la nomenclatura utilizada por Bonnet (1987) o Domínguez (1992), los términos de la matriz **G** serán:

$$G_{lk} = \frac{1}{4\pi}\sum_{m=1}^{3}\left\{\left[\frac{\delta_{m3}\delta_{lk}}{\mu}E_m + a_m E_{m,lk}\right](1-\delta_{l4})(1-\delta_{4k}) + \right.$$
$$\left. + b_m(\gamma E_{m,l}\delta_{4k} + i\omega\eta E_{m,k}\delta_{l4})(1-\delta_{lk}) + c_m E_m \delta_{l4}\delta_{4k}\right\} \tag{3.60}$$

donde:

$$a_m = \frac{(-1)^m\left(1 - \frac{i\omega/K}{k_m^2}\right)}{(\lambda+2\mu)\left(k_1^2 - k_2^2\right)}(\delta_{m1} + \delta_{m2}) + \frac{\delta_{m3}}{\mu k_3^2}$$
$$b_m = \frac{(-1)^m(\delta_{m1} + \delta_{m2})}{(\lambda+2\mu)\left(k_1^2 - k_2^2\right)}$$
$$c_m = \frac{(-1)^{m+1}\left(k_m^2 - \frac{\mu}{\lambda+2\mu}k_3^2\right)(\delta_{m1} + \delta_{m2})}{k_1^2 - k_2^2} \tag{3.61}$$

Evaluando las expresiones de las derivadas incluidas en (3.60) puede obtenerse una expresión de la solución fundamental análoga a las formulaciones clásicas de la misma para los problemas elástodinámicos y escalares armónicos (ver Domínguez, 1993). Este esfuerzo en la búsqueda de analogías formales con las soluciones clásicas tiene especial interés en la identificación de los términos singulares correspondientes. A ello se dedicará un próximo apartado. Así, clarificando el tipo de carga y el significado físico de la respuesta (3.42), los términos de **G** pueden escribirse del siguiente modo (ver Chirino et al., 2000):

a) Carga aplicada en dirección *l* en la matriz sólida. Respuesta en desplazamientos de

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

la misma en dirección k:

$$u^*_{lk}(\mathbf{x},\xi,\omega) = \frac{1}{4\pi\mu}\left(\tilde{\Psi}\,\delta_{lk} - \tilde{\chi}\,r_{,l}\,r_{,k}\right) \tag{3.62}$$

b) Carga aplicada en dirección l en la matriz sólida. Respuesta en tensiones equivalentes de la fase fluida:

$$\tau^*_l(\mathbf{x},\xi,\omega) = \frac{\mathrm{i}\omega\eta}{4\pi}\,\tilde{\varphi}\,r_{,l} \tag{3.63}$$

c) Fuente puntual en la fase líquida. Respuesta en desplazamientos del sólido en dirección k:

$$u^*_{ok}(\mathbf{x},\xi,\omega) = \frac{\gamma}{4\pi}\,\tilde{\varphi}\,r_{,k} \tag{3.64}$$

d) Fuente puntual en el líquido. Tensión equivalente en el mismo:

$$\tau^*_o(\mathbf{x},\xi,\omega) = \frac{1}{4\pi}\,\tilde{\kappa} \tag{3.65}$$

donde:

$$\tilde{\Psi} = \sum_{m=1}^{3}\left[(-1)^m\frac{\mu}{(\lambda+2\mu)z_{21}}\left(\frac{\mathrm{i}\omega}{K}-z_m^2\right)(\delta_{m1}+\delta_{m2})+\delta_{m3}\right]\left(\frac{1}{z_m^2 r^2}-\frac{1}{z_m r}+\delta_{m3}\right)E_m$$

$$\tilde{\chi} = \sum_{m=1}^{3}\left[(-1)^m\frac{\mu}{(\lambda+2\mu)z_{21}}\left(\frac{\mathrm{i}\omega}{K}-z_m^2\right)(\delta_{m1}+\delta_{m2})+\delta_{m3}\right]\left(\frac{3}{z_m^2 r^2}-\frac{3}{z_m r}+1\right)E_m$$

$$\tilde{\varphi} = \sum_{m=1}^{2}\frac{(-1)^{m+1}}{(\lambda+2\mu)z_{21}}z_m\left(\frac{1}{z_m r}-1\right)E_m$$

$$\tilde{\kappa} = \sum_{m=1}^{2}\frac{(-1)^{m+1}}{z_{21}}\left(\frac{\mu}{\lambda+2\mu}z_3^2 - z_m^2\right)E_m \tag{3.66}$$

En todas ellas, $r = |\mathbf{x}-\xi|$, $z_m = -\mathrm{i}k_m$ $(m = 1,2,3)$ $(z_{21} = z_2^2 - z_1^2)$ y, como hasta ahora, $E_m = \frac{1}{r}e^{z_m r}$.

Una vez conocida la respuesta en desplazamientos de la fase sólida y tensiones equivalentes en la fase fluida, pueden obtenerse las componentes del vector tensión en el esqueleto y el desplazamiento normal del fluido asociados a una superficie con normal exterior **n**. Recordar que estas variables derivadas son necesarias en el planteamiento integral del problema [(3.22) y (3.25)].

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Para el vector tensión se hace uso de las expresiones (2.35) de la ley de comportamiento del material y de (2.103). Las ecuaciones resultantes para los dos tipos de carga son las siguientes:

a) Carga aplicada en dirección l en el esqueleto. Componente del vector tensión sobre el mismo en dirección k:

$$t^*_{lk}(\mathbf{x},\xi,\omega) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}}\left(\tilde{A}\delta_{lk} + \tilde{B}r_{,l}\,r_{,k}\right) + \left(\tilde{A}r_{,k}n_l + \tilde{C}r_{,l}n_k\right)\right] \quad (3.67)$$

de formato análogo al clásico para la solución fundamental elastodinámica.

b) Fuente puntual en el fluido. Componente k del vector tensión en el esqueleto:

$$t^*_{ok}(\mathbf{x},\xi,\omega) = \frac{\gamma}{4\pi}\left(\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}}\,\tilde{F}\,r_{,k} + \tilde{G}n_k\right) \quad (3.68)$$

El desplazamiento normal del fluido de la solución fundamental se determina a partir de (2.96) conocidos el desplazamiento del sólido y la tensión equivalente. Como antes:

a) Carga aplicada en el esqueleto según l. En este caso $X'_l = 0$, con lo que:

$$U^*_{nl}(\mathbf{x},\xi,\omega) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}}\,\tilde{D}\,r_{,l} + \tilde{E}n_l\right) \quad (3.69)$$

b) Fuente puntual en el fluido intersticial. En este problema $X'_l \neq 0$, con lo que la aplicación directa de (2.96) conduce a la expresión:

$$U^*_{no} - JX'_l n_l = \frac{1}{4\pi}\,\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}}\,\tilde{H} \quad (3.70)$$

En adelante $\hat{U}^*_{no} = U^*_{no} - JX'_l n_l$ siendo éste el término a considerar en la igualdad integral correspondiente (3.25). Las funciones $\tilde{A},\tilde{B},\tilde{C},\tilde{D},\tilde{E},\tilde{F},\tilde{G}$ y $\tilde{H}$ en función de $\tilde{\Psi},\tilde{\chi},\tilde{\varphi}$ y $\tilde{\kappa}$ se escriben a continuación:

$$\tilde{A} = \frac{d\tilde{\Psi}}{dr} - \frac{\tilde{\chi}}{r} \quad (3.71.a)$$

$$\tilde{B} = 2\left(2\frac{\tilde{\chi}}{r} - \frac{d\tilde{\chi}}{dr}\right) \quad (3.71.b)$$

$$\tilde{C} = \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{d\tilde{\Psi}}{dr} - \frac{d\tilde{\chi}}{dr} - 2\frac{\tilde{\chi}}{r}\right) - 2\frac{\tilde{\chi}}{r} + \frac{Q}{R}\,\mathrm{i}\omega\eta\,\tilde{\varphi} \quad (3.71.c)$$

$$\tilde{D} = \mathrm{i}\omega\eta J\left(\frac{d\tilde{\varphi}}{dr} - \frac{\tilde{\varphi}}{r}\right) - \frac{Z}{\mu}\,\tilde{\chi} \quad (3.71.d)$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

$$\tilde{E} = \mathrm{i}\omega\eta J\frac{\tilde{\varphi}}{r} + \frac{Z}{\mu}\tilde{\Psi} \tag{3.71.e}$$

$$\tilde{F} = 2\mu\left(\frac{d\tilde{\varphi}}{dr} - \frac{\tilde{\varphi}}{r}\right) \tag{3.71.f}$$

$$\tilde{G} = \lambda\left(\frac{d\tilde{\varphi}}{dr} + 2\frac{\tilde{\varphi}}{r}\right) - 2\mu\frac{\tilde{\varphi}}{r} + \frac{Q}{R\gamma}\tilde{\kappa} \tag{3.71.g}$$

$$\tilde{H} = J\frac{d\tilde{\kappa}}{dr} + Z\gamma\,\tilde{\varphi} \tag{3.71.h}$$

3.3.2 Solución Fundamental Elastodinámica

La respuesta en tensiones y desplazamientos de un medio infinito isótropo, elástico y lineal ante una carga puntual aplicada en un punto del mismo, es un problema clásico resuelto por Stockes (1849) en el dominio del tiempo, por Cruse y Rizzo (1968) en el dominio transformado de Laplace y algunos años antes por Kupradze (1963) para problemas armónicos.

Partiendo de las ecuaciones (3.37), el procedimiento es análogo al estudiado en el apartado anterior. La respuesta en desplazamientos en este caso será:

$$u^*_{lk}(\mathbf{x},\xi,\omega) = \frac{1}{4\pi\mu}\left(\psi\,\delta_{lk} - \chi\,r_{,l}\,r_{,k}\right) \tag{3.72}$$

donde:

$$\psi = \sum_{m=1}^{2}\left[1 - \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2\delta_{m1}\right]\left(\frac{1}{z_m^2 r^2} - \frac{1}{z_m r} + \delta_{m2}\right)E_m$$

$$\chi = \sum_{m=1}^{2}\left[1 - \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2\delta_{m1}\right]\left(\frac{3}{z_m^2 r^2} - \frac{3}{z_m r} + 1\right)E_m \tag{3.73}$$

En estas expresiones $z_1 = -\mathrm{i}k_P$ y $z_2 = -\mathrm{i}k_S$ (esto es, los dos tipos de onda que caracterizan el comportamiento dinámico de esta clase de medios).

A partir de estas expresiones y haciendo uso de la ley de comportamiento del material, las tensiones para una superficie de normal **n** serán las conocidas:

$$t^*_{lk}(\mathbf{x},\xi,\omega) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}}\left(A\,\delta_{lk} + B\,r_{,l}\,r_{,k}\right) + \left(A\,r_{,k}\,n_l + C\,r_{,l}\,n_k\right)\right] \tag{3.74}$$

siendo:

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

$$A = \frac{d\Psi}{dr} - \frac{\chi}{r} \tag{3.75.a}$$

$$B = 2\left(2\frac{\chi}{r} - \frac{d\chi}{dr}\right) \tag{3.75.b}$$

$$C = \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{d\Psi}{dr} - \frac{d\chi}{dr} - 2\frac{\chi}{r}\right) - 2\frac{\chi}{r} \tag{3.75.c}$$

de expresión análoga a los términos (3.71.a,b,c) para la solución fundamental poroelástica correspondiente a las tensiones sobre el esqueleto sólido.

3.3.3 Solución Fundamental en Problemas Escalares de Propagación de Ondas

La aplicación de la formulación integral (3.38) a problemas de propagación de ondas de presión en un fluido no viscoso, requiere el conocimiento de la presión en cualquier punto **x** del espacio completo correspondiente a una fuente puntual aplicada en ξ [(3.39)]. Esta solución, ya utilizada dentro del procedimiento que permite obtener la solución fundamental poroelastodinámica, se reproduce aquí para problemas de propagación de ondas de presión en fluidos:

$$p^*(\mathbf{x},\xi,\omega) = \frac{1}{4\pi r} e^{-ikr} \tag{3.76}$$

donde $r = |\mathbf{x} - \xi|$ y $k = \frac{\omega}{c}$, siendo c la velocidad de propagación de las ondas en el medio. La variable derivada, esto es, el flujo de presión en una superficie con normal **n** será:

$$\frac{\partial p^*}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r}\right) e^{-ikr} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \tag{3.77}$$

Hasta ahora, los únicos requerimientos sobre la solución fundamental han sido el cumplimiento de la ecuación diferencial de gobierno y las condiciones de radiación en el infinito. En algunos casos es posible obviar la consideración de algunos contornos en (3.38) si la solución fundamental empleada verifica la condición de contorno del problema real en éstos. Así, en el modelo acoplado que se presenta y en el análisis del comportamiento dinámico de presas bóveda, es posible evitar la discretización de la superficie libre del agua embalsada (Γ_S) haciendo uso de una solución fundamental que verifique la condición de presión nula en los puntos de este contorno. Dicha solución es sencilla. Basta considerar dos fuentes puntuales: una positiva aplicada en el punto de Ω en el que se escribe la ecuación integral y otra negativa aplicada en el punto imagen respecto de la superficie libre del líquido (Figura 3.1). Así, la solución fundamental será:

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

$$\hat{p}^*(\mathbf{x},\xi,\omega) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r}e^{-ikr} - \frac{1}{\bar{r}}e^{-ik\bar{r}}\right) \tag{3.78}$$

donde $\bar{r} = |\mathbf{x} - \bar{\xi}|$. Así, con el empleo de $\hat{p}^*$ la ecuación integral se extiende a Γ_E exclusivamente. El tratamiento numérico del problema se realizará ahora con un considerable ahorro en el número de grados de libertad.

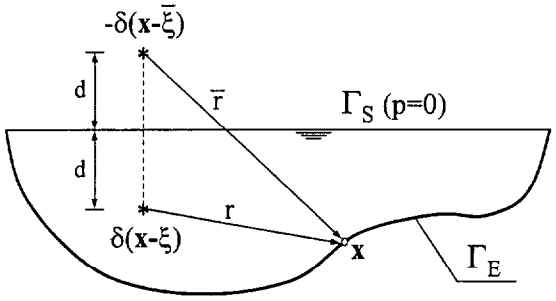

Figura 3.1. Solución fundamental fuente-imagen en problemas

Con el mismo objetivo, pueden también obtenerse formulaciones explícitas de la solución fundamental para el problema escalar que satisfagan condiciones de contorno tipo Robin en superficies planas del modelo. En este sentido, y en problemas bidimensionales de propagación de ondas acústicas, puede consultarse el trabajo de Maeso y Aznárez (2002). Estos autores estudian la eficiencia de barreras acústicas de diferente geometría con un modelo MEC que permite evitar la discretización de contornos absorbentes.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

3.4 Comportamiento en el Límite de la Solución Fundamental Poroelástodinámica.

La obtención en el próximo apartado de la formulación integral en el contorno, requiere previamente el estudio del comportamiento de la solución fundamental en el límite cuando $r = |\mathbf{x} - \xi| \to 0$. Asimismo, las conclusiones de este estudio son de vital importancia en la búsqueda de una estrategia adecuada para el tratamiento numérico de las ecuaciones integrales en el contorno a las que conduce la aplicación del MEC.

Así, en el problema elastodinámico armónico es conocido que los tensores de la solución fundamental pueden expresarse como sigue:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^*(\mathbf{x},\xi,\omega) &= \mathbf{u}^*_S(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^*_R(\mathbf{x},\xi,\omega)\\ \mathbf{t}^*(\mathbf{x},\xi,\omega) &= \mathbf{t}^*_S(\mathbf{x}) + \mathbf{t}^*_R(\mathbf{x},\xi,\omega)\end{aligned} \tag{3.79}$$

donde $\mathbf{u}^*_S(\mathbf{x})$ y $\mathbf{t}^*_S(\mathbf{x})$ son los desplazamientos y tensiones correspondientes a la solución

de Kelvin y constituyen la componente singular de (3.79). Los términos $\mathbf{u}_R^*(\mathbf{x},\xi,\omega) = O(r^o)$ y $\mathbf{t}_R^*(\mathbf{x},\xi,\omega) = O(r^o)$ representan la parte regular de dicha solución fundamental. Ambos términos se anulan en el límite cuando $\omega \to 0$, algo obvio a la vista de (3.79).

El procedimiento que permite entender la solución fundamental elastodinámica en estos términos parte de sustituir las funciones exponenciales de ψ, χ, A, B y C [(3.73) y (3.75)] en el límite ($z_m r \to 0$) por su correspondiente serie de expansión (ver Domínguez y Abascal, 1984).

$$e^{z_m r} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_m r)^n}{n!} \tag{3.80}$$

Para la solución fundamental poroelástica, la sustitución en (3.66) de los términos exponenciales a través de (3.80) permite escribir, luego de algunas operaciones:

$$\tilde{\psi} = \frac{1}{2r}\left[1 + \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\right] + \\ + \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\frac{1}{z_{21}}\left[\sum_{m=1}^{2}(-1)^{m+1}\left(\frac{i\omega}{K} - z_m^2\right) z_m \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+3)}\frac{(z_m r)^n}{n!}\right] \\ + z_3 \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+2}{(n+1)(n+3)}\frac{(z_3 r)^n}{n!} \tag{3.81.a}$$

$$\tilde{\chi} = \frac{1}{2r}\left[1 - \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\right] + \\ + \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\frac{1}{z_{21}}\left[\sum_{m=1}^{2}(-1)^{m}\left(\frac{i\omega}{K} - z_m^2\right) z_m \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+3)}\frac{(z_m r)^n}{n!}\right] \\ + z_3 \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+3)}\frac{(z_3 r)^n}{n!} \tag{3.81.b}$$

$$\tilde{\varphi} = \frac{1}{\lambda+2\mu}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{z_{21}}\left[\sum_{m=1}^{2}(-1)^{m+1} z_m^2 \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}\frac{(z_m r)^n}{n!}\right]\right\} \tag{3.81.c}$$

$$\tilde{\kappa} = \frac{1}{r} + \frac{1}{z_{21}}\left[\sum_{m=1}^{2}(-1)^{m+1}\left(\frac{\mu}{\lambda+2\mu} z_3^2 - z_m^2\right) z_m \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\frac{(z_m r)^n}{n!}\right] \tag{3.81.d}$$

Haciendo uso de estas expresiones, las ecuaciones (3.62) a (3.65) pueden expresarse atendiendo al orden de sus singularidades del modo siguiente:

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

$$u^*_{lk} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\upsilon)}\frac{1}{r}\left[(3-4\upsilon)\delta_{lk} + r_{,l}r_{,k}\right] + O(r^o)$$

$$\tau^*_l = O(r^o) \qquad u^*_{ok} = O(r^o)$$

$$\tau^*_o = \frac{1}{4\pi r} + O(r^o) \tag{3.82}$$

Al igual que en elastodinámica armónica, la componente singular de u^*_{lk} se corresponde con la solución fundamental estática, en este caso para un sólido con las propiedades del esqueleto sólido drenado. Asimismo, la parte singular de τ^*_o representa la solución fundamental que verifica el problema de Laplace en la fase fluida (el problema escalar de propagación de ondas en un fluido tiene idéntico comportamiento). Los términos τ^*_l y u^*_{ok} son completamente regulares.

El análisis de las ecuaciones (3.71) para las variables derivadas (tensión y desplazamiento normal) en los mismos términos, permite expresarlas como sigue:

$$\tilde{A} = -\frac{1}{r^2}\frac{\mu}{\lambda+2\mu} + \\ + \frac{2}{z_{21}}\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\left[\sum_{m=1}^{2}(-1)^{m+1}\left(\frac{i\omega}{K}-z_m^2\right)z_m^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+4)}\frac{(z_m r)^n}{n!}\right] + \\ + z_3^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+4}\frac{(z_3 r)^n}{n!} \tag{3.83.a}$$

$$\tilde{B} = -\frac{3}{r^2}\left(1-\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\right) + \\ + \frac{2}{z_{21}}\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\left[\sum_{m=1}^{2}(-1)^{m+1}\left(\frac{i\omega}{K}-z_m^2\right)z_m^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n-1}{(n+2)(n+4)}\frac{(z_m r)^n}{n!}\right] - \\ - 2z_3^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n-1}{(n+4)(n+2)}\frac{(z_3 r)^n}{n!} \tag{3.83.b}$$

$$\tilde{C} = \frac{1}{r^2}\frac{\mu}{\lambda+2\mu} + \\ + \frac{1}{z_{21}}\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\left\{\sum_{m=1}^{2}(-1)^{m+1}z_m^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{i\omega}{K}-z_m^2\right)\left[\frac{\lambda}{\mu}(n+4)+2\right]-(n+4)\frac{Q}{R\mu}i\omega\eta}{(n+2)(n+4)}\frac{(z_m r)^n}{n!}\right\} \\ - 2z_3^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+4)}\frac{(z_3 r)^n}{n!} \tag{3.83.c}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

$$\tilde{D} = -\frac{1}{2r}\frac{1}{\lambda+2\mu}\left[Z\left(1-\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\right)+\mathrm{i}\omega\eta J\right]+$$
$$+\sum_{m=1}^{2}\left\{(-1)^m\frac{1}{(\lambda+2\mu)z_{21}}\left[Z\frac{\mathrm{i}\omega}{K}-(Z+\mathrm{i}\omega\eta J)z_m^2\right]z_m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+3)}\frac{(z_m r)^n}{n!}\right\}-$$
$$-\frac{Z}{\mu}z_3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+3)}\frac{(z_3 r)^n}{n!} \qquad (3.83.d)$$

$$\tilde{E} = -\frac{1}{2r}\frac{1}{\lambda+2\mu}\left[Z\left(1+\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\right)+\mathrm{i}\omega\eta J\right]+$$
$$+\sum_{m=1}^{2}\left\{(-1)^m\frac{1}{(\lambda+2\mu)z_{21}}\left[Z\frac{\mathrm{i}\omega}{K}-(Z+\mathrm{i}\omega\eta J)z_m^2\right]z_m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+3)}\frac{(z_m r)^n}{n!}\right\}+$$
$$+\frac{Z}{\mu}z_3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+2}{(n+1)(n+3)}\frac{(z_3 r)^n}{n!} \qquad (3.83.e)$$

$$\tilde{F} = -\frac{1}{r}\frac{\mu}{\lambda+2\mu}+\frac{2\mu}{(\lambda+2\mu)z_{21}}\left[\sum_{m=1}^{2}(-1)^m z_m^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+3)}\frac{z_m^{n+1}r^n}{n!}\right] \qquad (3.83.f)$$

$$\tilde{G} = \frac{1}{r}\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\left[\frac{\lambda}{\mu}\left(1+\frac{Q}{R\gamma}\right)+2\frac{Q}{R\gamma}+1\right]+$$
$$+\frac{\mu}{(\lambda+2\mu)z_{21}}\left[\sum_{m=1}^{2}(-1)^m z_m^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(n+1)(n+3)}\frac{z_m^{n+1}r^n}{n!}\right]+$$
$$+\frac{1}{z_{21}}\left[\sum_{m=1}^{2}(-1)^m\left(\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\frac{Q}{R\gamma}z_3^2-z_m^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\frac{z_m^{n+1}r^n}{n!}\right] \qquad (3.83.g)$$

$$\tilde{H} = -J\frac{1}{r^2}+$$
$$\frac{1}{z_{21}}\left\{\sum_{m=1}^{2}(-1)^{m+1}\left[J\left(\frac{\mu}{\lambda+2\mu}z_3^2-z_m^2\right)-Z\gamma\right]z_m^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+2}\frac{(z_m r)^n}{n!}\right\} \qquad (3.83.h)$$

Expresiones éstas que introducidas en las ecuaciones (3.67) a (3.70) permiten escribir la solución fundamental para las variables derivadas, luego de algunas operaciones, como sigue:

$$t^*_{lk} = -\frac{1}{8\pi(1-\upsilon)}\frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}}[(1-2\upsilon)\delta_{lk}+3r_{,l}r_{,k}]+(1-2\upsilon)(r_{,k}n_l-r_{,l}n_k)\right\}+O(r^o)$$
$$t^*_{ok} = -\frac{1}{8\pi(1-\upsilon)}\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}}(1-2\upsilon)\gamma r_{,k}-\left[\gamma+2(1-\upsilon)\frac{Q}{R}\right]n_k\right\}+O(r^o)$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

$$U^*_{nl} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\upsilon)}\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}}[Z-(1-2\upsilon)\mathrm{i}\omega\eta J]r_{,l}+[(3-4\upsilon)Z-(1-2\upsilon)\mathrm{i}\omega\eta J]n_l\right\}+O(r^o)$$

$$\hat{U}^*_{no} = -J\frac{1}{4\pi r^2}\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}}+O(r^o) \qquad (3.84)$$

A la vista de esta expresión, en t^*_{lk} la componente singular de orden $O(\frac{1}{r^2})$ (términos *fuertemente singulares*) coincide con la expresión elástostática de las tensiones sobre un medio elástico con las propiedades del esqueleto sólido drenado. La parte singular de $\hat{U}^*_{no}$ es la correspondiente al flujo para el problema de potencial y de orden $O(\frac{1}{r})$ [tener en cuenta que $\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} = O(r)$]. El tipo de singularidad de respuesta debida al acoplamiento, esto es t^*_{ok} y U^*_{nl}, es, asimismo, $O(\frac{1}{r})$ (términos *débilmente singulares*).

3.5 Formulación Integral en el Contorno

Hasta ahora, las formulaciones integrales del problema [(3.22), (3.25), (3.36) y (3.38)] permiten determinar las variables fundamentales en puntos internos de Ω en función de los valores que adoptan éstas y sus derivadas en puntos del contorno Γ. Obtener una ecuación integral que implique sólo a variables del contorno requiere de la colocación en puntos del mismo. Existen, sin embargo, algunas dificultades asociadas a esta operación teniendo en cuenta que las expresiones de los integrandos son singulares en el punto de colocación.

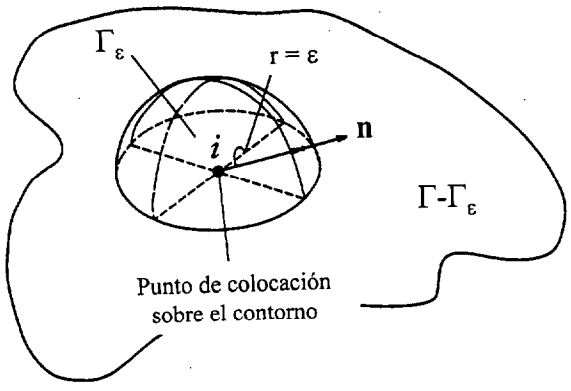

Figura 3.2. Igualdad integral en el contorno

La estrategia que permite "esquivar" esta singularidad a la hora de evaluar estas integrales en el contorno, consiste en recrecer artificialmente el dominio en el entorno del punto de colocación ($\mathbf{x}_i$) a través de un volumen esférico infinitesimal (Fig. 3.2). Con ello, puede pensarse en un punto de colocación interno a Ω. Cada una de las integrales de contorno pueden descomponerse en otras dos extendidas a los contornos $\Gamma - \Gamma_\varepsilon$ y Γ_ε respectivamente. Así, para regiones viscoelásticas puede escribirse (3.36) en

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

estos términos:

$$u_l^i + \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} t_{lk}^* u_k \, d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} t_{lk}^* u_k \, d\Gamma = \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} u_{lk}^* \, t_k \, d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} u_{lk}^* \, t_k \, d\Gamma \tag{3.85}$$

Para que esta igualdad implique sólo variables en el contorno, será necesario estudiar el comportamiento de estas integrales cuando $\varepsilon \to 0$. Así, las integrales sobre $\Gamma - \Gamma_\varepsilon$ no presentan problemas ya que el contorno sobre el que se extienden no incluye la singularidad y en el límite han de entenderse en el sentido del Valor Principal de Cauchy (CPV)(ver p.e. Doblaré y Gracia, 1998) :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} t_{lk}^* u_k \, d\Gamma &= \text{CPV} \int_\Gamma t_{lk}^* u_k \, d\Gamma \\ \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} u_{lk}^* t_k \, d\Gamma &= \text{CPV} \int_\Gamma u_{lk}^* t_k \, d\Gamma \end{aligned} \tag{3.86}$$

Por otra parte, las integrales extendidas al contorno diferencial Γ_ε están perfectamente acotadas en el límite. Para éstas, si $u_{lk}^* = O(\frac{1}{\varepsilon})$ y $t_{lk}^* = O(\frac{1}{\varepsilon^2})$ y puesto que $d\Gamma = O(\varepsilon^2)$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} u_{lk}^* t_k \, d\Gamma = 0 \tag{3.87}$$

$$u_l^i + \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} t_{lk}^* u_k \, d\Gamma = c_{lk}^i u_k^i \tag{3.88}$$

Teniendo en cuenta (3.86),(3.87) y (3.88) puede escribirse (3.85) del modo que sigue:

$$c_{lk}^i u_k^i + \int_\Gamma t_{lk}^* u_k \, d\Gamma = \int_\Gamma u_{lk}^* \, t_k \, d\Gamma \tag{3.89}$$

donde las integrales en el contorno han de entenderse en el sentido del Valor Principal de Cauchy (por comodidad en la notación se omite "CPV" en adelante). Conocido el comportamiento en el límite ($r \to 0$) de t_{lk}^* el *término libre* c_{lk}^i es idéntico al que aparece en elastostática y su valor depende de la geometría del contorno en el punto $\mathbf{x}_i$ y del coeficiente de Poisson del medio (ver p.e. Hartmann, 1981). Como es conocido, si el contorno es "suave" en el punto de colocación (superficie de normal continua) $c_{lk}^i = 0.5\,\delta_{lk}$. Con todo ello, la ecuación integral en el contorno (3.89) para ω dada es formalmente igual a la identidad de Somigliana en elastostática. Obviamente, la solución fundamental es diferente en ambos problemas.

Recogiendo de forma conjunta la colocación en las tres direcciones, (3.89) puede

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

escribirse en notación matricial de la forma siguiente:

$$\mathbf{c}^i \mathbf{u}^i + \int_\Gamma \mathbf{p}^* \mathbf{u}\, d\Gamma = \int_\Gamma \mathbf{u}^* \mathbf{p}\, d\Gamma \tag{3.90}$$

donde **u** y **p** serán los vectores de las variables de campo:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{p} = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} \tag{3.91}$$

$\mathbf{u}^*$ y $\mathbf{p}^*$ los tensores de la solución fundamental:

$$\mathbf{u}^* = \begin{pmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* & u_{13}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* & u_{23}^* \\ u_{31}^* & u_{32}^* & u_{33}^* \end{pmatrix} \quad \mathbf{p}^* = \begin{pmatrix} t_{11}^* & t_{12}^* & t_{13}^* \\ t_{21}^* & t_{22}^* & t_{23}^* \\ t_{31}^* & t_{32}^* & t_{33}^* \end{pmatrix} \tag{3.92}$$

y $\mathbf{c}^i$ el tensor del término libre elastostático en el punto de colocación ($\mathbf{c}^i = \mathbf{I}$ se se trata de puntos internos):

$$\mathbf{c}^i = \begin{pmatrix} c_{11}^i & c_{12}^i & c_{13}^i \\ c_{21}^i & c_{22}^i & c_{23}^i \\ c_{31}^i & c_{32}^i & c_{33}^i \end{pmatrix} \tag{3.93}$$

El procedimiento es idéntico para problemas escalares de propagación de ondas. Así, a partir de (3.38) la identidad integral en el contorno será en este caso:

$$c^i p^i + \int_\Gamma \left(\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \right)^* p\, d\Gamma = \int_\Gamma p^* \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}\, d\Gamma \tag{3.94}$$

siendo $c^i = \dfrac{\theta}{4\pi}$ el término libre en $\mathbf{x}_i$ (θ es el ángulo sólido del contorno en el punto) idéntico al correspondiente al problema de potencial.

Por último, llevando (3.22) y (3.25) al contorno y realizando el estudio en el límite, se obtiene una ecuación matricial del tipo (3.90) para el problema poroelástico en el dominio de la frecuencia. En este caso:

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \tau \end{Bmatrix} \quad \mathbf{p} = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ U_n \end{Bmatrix} \tag{3.95}$$

$$\mathbf{u}^* = \begin{pmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* & u_{13}^* & -\tau_1^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* & u_{23}^* & -\tau_2^* \\ u_{31}^* & u_{32}^* & u_{33}^* & -\tau_3^* \\ u_{o1}^* & u_{o2}^* & u_{o3}^* & -\tau_o^* \end{pmatrix} \quad \mathbf{p}^* = \begin{pmatrix} t_{11}^* & t_{12}^* & t_{13}^* & -U_{n1}^* \\ t_{21}^* & t_{22}^* & t_{23}^* & -U_{n2}^* \\ t_{31}^* & t_{32}^* & t_{33}^* & -U_{n3}^* \\ t_{o1}^* & t_{o2}^* & t_{o3}^* & -\hat{U}_{no}^* \end{pmatrix} \tag{3.96}$$

recuérdese que $\hat{U}_{no}^* = U_{no}^* - JX_i^* n_i$. Teniendo en cuenta el tipo de singularidad asociada a cada término de la solución fundamental, el tensor correspondiente al término libre en el punto $\mathbf{x}_i$ de aplicación de las cargas/fuente puntuales puede escribirse, en función de los conocidos, como sigue:

$$\mathbf{c}^i = \begin{pmatrix} c_{11}^i & c_{12}^i & c_{13}^i & 0 \\ c_{21}^i & c_{22} & c_{23}^i & 0 \\ c_{31}^i & c_{32} & c_{33}^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Jc^i \end{pmatrix} \tag{3.97}$$

Como es fácil comprender, en este problema $\mathbf{c}^i$ dependerá de la geometría del contorno en $\mathbf{x}_i$, del coeficiente de Poisson del material drenado y de J que es un parámetro de caracter dinámico $(\omega, \hat{\rho}_{22})$.

Estas ecuaciones junto con las condiciones de contorno e interfase permiten abordar la solución de cualquier modelo acoplado que incluya estos tres medios en los contornos de los mismos. La solución análitica del problema es inabordable casi en la totalidad de casos interesantes. El planteamiento numérico de estas ecuaciones haciendo uso del MEC será la estrategia más adecuada. A él dedicaremos el próximo Capítulo.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Referencias

BONNET, G., 1987, "Basic Singular Solutions for a Poroelastic Medium in the Dynamic Range", *J. Acoust. Soc. Am.*, **82**, 1758-1762.

BOUTIN, C., BONNET, G. y BARD, P.Y., 1987, "Green Functions and Associated Sources in Infinite and Stratified Poroelastic Media", *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, **90**, 521-550.

BREBBIA, C.A. y DOMÍNGUEZ, J., 1992, "Boundary Elements. An Introductory Course", Computational Mechanics Publications, Southampton y McGraw-Hill, NY.

CHEN, J.,1992, "Fundamental Solutions and Boundary Element Formulations for Dynamic Problems of Poroelasticity and Thermoelasticity", *Ph.D.Thesis*, State University of New York at Buffalo.

CHEN, J. y DARGUSH, G.F., 1995, Boundary Element Method for Dynamic Poroelastic and Thermoelastic Analyses", *Int. J. Solids Struct.*, **32**(15), 2257-2278.

CHENG, A.H.D. y LIGGETT, J.A., 1984, "Boundary Integral Equation Method for Linear Porous Elasticity with Applications to Soil Consolidation", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **20**, 255-278.

CHENG, A.H.D., BADMUS, T y BESKOS, D.E., 1991, "Integral Equation for Dynamic Poroelasticity in Frequency Domain with BEM Solution", *J. Eng. Mech., ASCE*, **117** (5), 1136-1157.

CHIRINO, F., MAESO, O. y AZNÁREZ, J.J., 2000, "Una Técnica Simple para el Cálculo de las Integrales en el Sentido del Valor Principal en el MEC 3D", *Rev. Int. Met. Num. para Cálculo y Diseño en Ing.*, **16**(1), 77-95.

CLEARY, M.P., 1977, "Fundamental Solutions for a Fluid Saturated Porous Solid", *Int. J. Solids Struct.*, **13**, 785-806.

CRUSE, T.A. y RIZZO, F.J., 1968, "A Direct Formulation and Numerical Solution of the General Transient Elastodynamic Problem I", *J. Math. Anal. Appl.*, **22**, 244-259.

DOBLARÉ, M. y GRACIA, L., 1998, "Fundamentos de la Elasticidad Lineal", Síntesis, Madrid.

DOMÍNGUEZ, J., 1991, "An Integral Formulation for Dynamic Poroelasticity", *J. Appl. Mech., ASME*, **58**, 588-591.

DOMÍNGUEZ, J., 1992, "Boundary Element Approach for Dynamic Poroelastic Problems", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **35**, 307-324.

DOMÍNGUEZ, J., 1993, "Boundary Elements in Dynamics", Computational Mechanics Publications, Southampton y Elsevier Applied Science, NY.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

DOMÍNGUEZ, J. y ABASCAL, R., 1984, "On the Fundamental Solutions for the Boundary Integral Equations Method in Static and Dynamic Elasticity", *Eng. Anal.*, **1**(3), 128-134.

GRAFFI, D., 1946, "Sul Teorema di Reciprocitá Nella Dinamica dei Corpi Elastici", *Mem. Accad. Sci. Bologna*, Ser.10, **4**, 103-111.

HARTMANN, F., 1981, "Elastostatics", *Progress in Boundary Element Methods*, C.A. Brebbia Ed., Pentech Press, London.

KUPRADZE, V.D., 1963, "Dynamical Problems in Elasticity", *Progress in Solid Mechanics*, I.N.Sneddon & R. Hill Ed., **3**, North-Holland, Amsterdam.

KUPRADZE, V.D., GEGELIA, T.G., BASHELEISHVILI, M.O. y BURCHULADZE, T.V., 1979, "Three-dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity", North-Holland, Amsterdam.

MAESO, O. y AZNÁREZ, J.J., 2002, "Estrategias para la Reducción del Impacto Acústico en el Entorno de Carreteras. Una Aplicación del Método de los Elementos de Contorno", Univ. de Las Palmas de G.C.

MANOLIS, G.D. y BESKOS, D.E., 1989, "Integral Formulation and Fundamental Solutions of Dynamic Poroelasticity and Thermoelasticity", *Acta Mech.*, **76**, 89-104.

NORRIS, A.N., 1985, "Radiation from a Point Source and Scattering Theory in a Fluid Saturated Porous Solid", *J. Acoust. Soc. Am.*, **77** (6), 2012-2022.

PREDELEANU, M., 1984, "Development of Boundary Element Method to Dynamic Problems for Porous Media", *Appl. Math. Modeling*, **8**, 378-382.

SCHANZ, M., 2001, "Application of 3D Time Domain Boundary Element Formulation to Wave Propagation in Poroelastic Solids", *Eng. Anal.with B.E.*, **25**, 363-376.

STOCKES, G.G., 1849, "On the Dynamical Theory of Diffraction", *Trans.Cambridge Philos. Soc.*, **9**, 1-62.

WHEELER, L.T. y STERNBERG, E., 1968, "Some Theorems in Classical Elastodynamics", *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **31**, 51-90.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Capítulo 4

El Método de los Elementos de Contorno en Problemas Armónicos

4.1 Introducción

Una vez planteadas las ecuaciones integrales en el contorno para los medios implicados en el modelo acoplado y discutidas las características de la solución fundamental en todos los casos, este Capítulo se centra en el procedimiento utilizado para la solución numérica de las mismas. En primer lugar, se resumen los aspectos más generales del Método de los Elementos de Contorno en el dominio de la frecuencia para problemas tridimensionales armónicos. Se introduce la tipología de elementos utilizados para discretizar el contorno en el apartado 4.2. Las estrategias numéricas empleadas para la evaluación directa de las integrales en el sentido del Valor Principal de Cauchy (VPC) de la solución fundamental se discuten en el apartado 4.3. Hasta aquí, el punto de colocación coincide con nodos de la discretización. En el apartado 4.4 se discuten las ventajas de la duplicación de nodos en las fronteras entre contornos como procedimiento que facilita la construcción del modelo acoplado para luego, apartado 4.5, introducir la formulación del MEC con colocación no nodal. Esta estrategia será empleada en problemas que presentan esquinas con superabundancia de incógnitas o modelos donde son necesarias discretizaciones no conformes. Por último se presentan algunos resultados numéricos con solución de referencia, que demuestran la validez de los códigos de elementos de contorno implementados.

4.2 Discretización del Contorno

La ecuación integral en el contorno para problemas armónicos escalares, elásticos y poroelásticos fue presentada en el Capítulo anterior. En notación matricial, reproducimos la ecuación (3.90) como representativa para los tres tipos de medios:

$$\mathbf{c}^i \mathbf{u}^i + \int_\Gamma \mathbf{p}^* \mathbf{u}\, d\Gamma = \int_\Gamma \mathbf{u}^* \mathbf{p}\, d\Gamma \qquad (4.1)$$

con colocación en $\mathbf{x}_i$ sobre el contorno. La dimensión de los tensores de esta expresión dependerá del tipo de problema analizado. Para el planteamiento numérico de esta

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

ecuación, el contorno Γ (Fig. 4.1) se divide en un número *NE* de elementos. Cada elemento *j* contiene *NJ* nodos, de manera que los campos **u** y **p** sobre el mismo pueden interpolarse en función de los valores nodales. Así sobre un elemento genérico *j* se puede escribir:

$$\mathbf{u} = \mathbf{\Phi}\mathbf{u}^j \qquad \mathbf{p} = \mathbf{\Phi}\mathbf{u}^j \tag{4.2}$$

donde $\mathbf{u}^j$ y $\mathbf{p}^j$ representan vecctores de αNJ componentes y $\mathbf{\Phi}$ una matriz de dimensión $(\alpha \times \alpha NJ)$ cuyos términos son las funciones de forma del elemento ($\alpha = 1$ para problemas escalares, 3 en sólidos viscoelásticos y 4 para medios poroelásticos).

La geometría del elemento se aproximará de las misma forma (elemento isoparamétrico):

$$\mathbf{x} = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}^j \tag{4.3}$$

donde $\mathbf{x}^j$ contiene las $3NJ$ coordenadas de los nodos del elemento *j*. Si bien el tratamiento numérico es completamente extrapolable a cualquier tipo de elementos, en el modelo que se presenta se han utilizado elementos cuadráticos cuadriláteros y triangulares de nueve y seis nodos respectivamente (Fig. 4.2). Las funciones de forma de los primeros en coordenadas naturales (ξ_1, ξ_2) se escriben a continuación:

$$\begin{aligned}
&\phi_1 = \frac{1}{4}\xi_1(\xi_1 - 1)\xi_2(\xi_2 - 1) \;\; ; \quad \phi_2 = \frac{1}{2}(1 - \xi_1^2)\xi_2(\xi_2 - 1) \\
&\phi_3 = \frac{1}{4}\xi_1(\xi_1 + 1)\xi_2(\xi_2 - 1) \;\; ; \quad \phi_4 = \frac{1}{2}\xi_1(\xi_1 + 1)(1 - \xi_2^2) \\
&\phi_5 = \frac{1}{4}\xi_1(\xi_1 + 1)\xi_2(\xi_2 + 1) \;\; ; \quad \phi_6 = \frac{1}{2}(1 - \xi_1^2)\xi_2(\xi_2 + 1) \\
&\phi_7 = \frac{1}{4}\xi_1(\xi_1 - 1)\xi_2(\xi_2 + 1) \;\; ; \quad \phi_8 = \frac{1}{2}\xi_1(\xi_1 - 1)(1 - \xi_2^2) \\
&\phi_9 = (1 - \xi_1^2)(1 - \xi_2^2) \qquad\qquad -1 \le \xi_1 \le 1 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -1 \le \xi_2 \le 1
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Para los elementos triangulares las funciones de forma son:

$$\begin{aligned}
&\phi_1 = \xi_1(2\xi_1 - 1) \;\; ; \quad \phi_2 = \xi_2(2\xi_2 - 1) \\
&\phi_3 = \xi_3(2\xi_3 - 1) \;\; ; \quad \phi_4 = 4\xi_1\xi_2 \\
&\phi_5 = 4\xi_2\xi_3 \;\; ; \quad \phi_6 = 4\xi_1\xi_3 \\
&(\xi_3 = 1 - \xi_1 - \xi_2) \qquad 0 \le \xi_1 \le 1 \\
&\qquad\qquad\qquad\quad 0 \le \xi_2 \le 1
\end{aligned} \tag{4.5}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

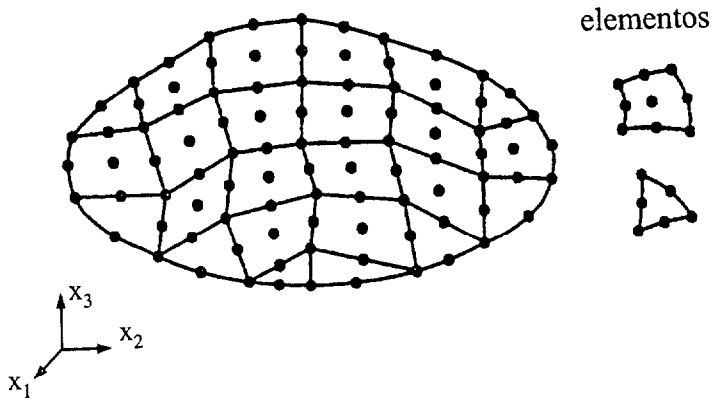

Figura 4.1. Contorno 3-D discretizado con elementos cuadráticos.

Teniendo en cuenta (4.3) y las funciones de forma (4.4) y (4.5) la geometría del contorno se aproxima mediante una superficie cuadrática en (x_1, x_2, x_3).

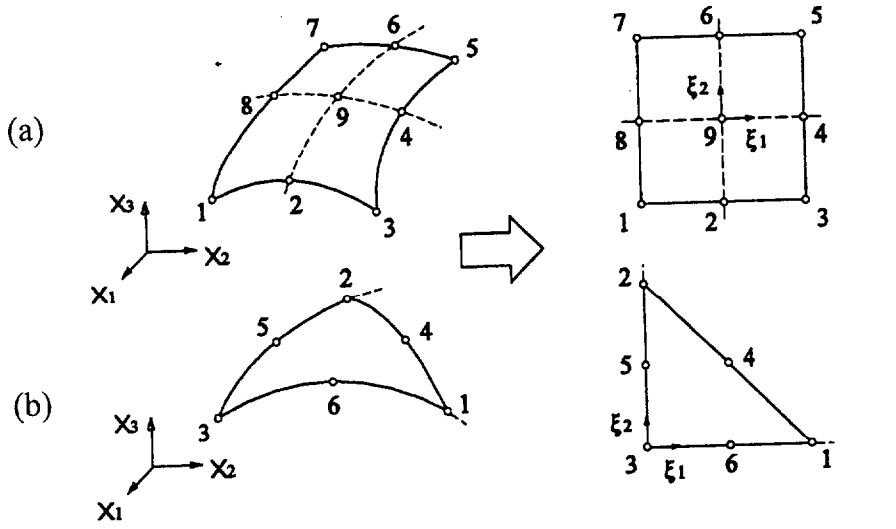

Figura 4.2. Elementos cuadráticos tridimensionales. (a) Cuadriláteros, (b) triangulares

Tras el proceso de discretización [(4.2)] y con colocación en un nodo genérico *i*, la ecuación (4.1) se convierte en:

$$\mathbf{c}^i \mathbf{u}^i + \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^* \Phi \, d\Gamma \right\} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \Phi \, d\Gamma \right\} \mathbf{p}^j \qquad (4.6)$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

siendo Γ_j la superficie del contorno asociado al elemento j genérico. La ecuación (4.6) es ya una ecuación algebraica cuyos coeficientes dependen del nodo de colocación de la solución fundamental. Aplicando la carga/fuente en todos y cada uno de los nodos que constituyen la discretización del contorno, se obtiene un sistema de ecuaciones independientes de la forma:

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{t} \tag{4.7}$$

donde **u** y **p** son los vectores que contienen todos los valores nodales del problema. A los coeficientes de **H** y **G** nos referiremos en adelante como *núcleos de integración* o *coeficientes integrales*. Una vez aplicadas las condiciones de contorno puede reordenarse (4.7) y escribir el sistema resultante:

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{F} \tag{4.8}$$

donde **X** es el vector de incógnitas (componentes de **u** o **p** según el caso) y **F** el vector de coeficientes que se obtiene de multiplicar las correspondientes columnas de **H** y **G** por las componentes conocidas de **u** y **p** respectivamente.

4.3 Evaluación de las Integrales en el Contorno

Durante el desarrollo descrito, las integrales a evaluar sobre cada elemento j con colocación sobre cada nodo i de la discretización son del tipo.

$$\mathbf{G}\mathbf{W}^{ij} = \int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \boldsymbol{\Phi}\, d\Gamma \tag{4.9.a}$$

$$\mathbf{H}\mathbf{W}^{ij} = \int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^* \boldsymbol{\Phi}\, d\Gamma \tag{4.9.b}$$

Cuando el nodo i no forma parte del elemento j sobre el que se integra, las integrales (4.9) pueden ser evaluadas numéricamente haciendo uso de una cuadratura gaussiana estandar sobre elementos rectangulares o triangulares según el caso (ver p.e. Stroud y Secrest, 1966 o Abramovitz y Stegun, 1972). Estas cuadraturas vienen expresadas en función del sistema de referencia intrínseco al elemento (ξ_1, ξ_2) lo cual exige la transformación de las variables geométricas del mismo a este sistema de referencia. Así, el diferencial de superficie $d\Gamma$ podrá expresarse (Fig. 4.3):

$$d\Gamma = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} \right| d\xi_1 d\xi_2 = |J_A|\, d\xi_1 d\xi_2 \tag{4.10}$$

siendo $|J_A|$ el jacobiano de la transformación.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

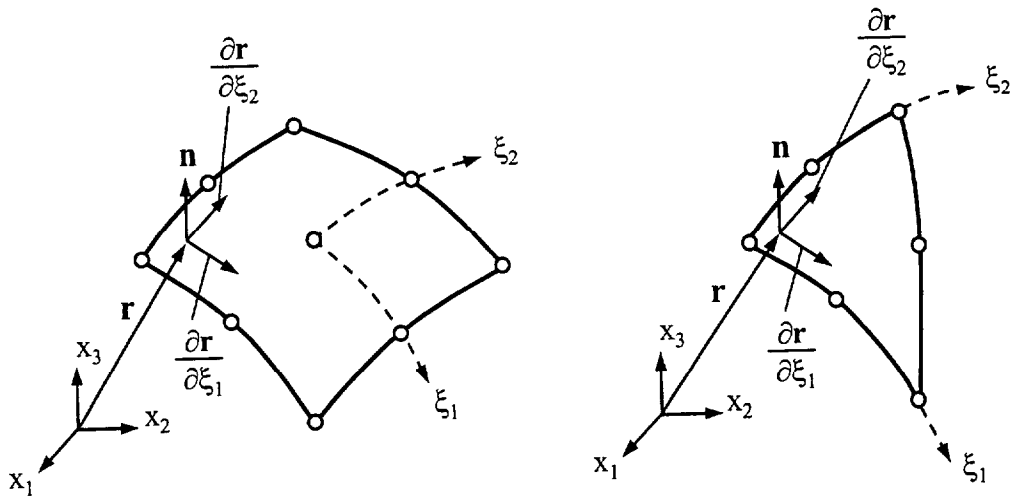

Figura 4.3. Transformación de coordenadas para integración numérica

Teniendo en cuenta la definición de la geometría del contorno a través de (4.3):

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_k} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_k} = \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \xi_k} \mathbf{x}^j \tag{4.11}$$

con lo cual:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{Bmatrix}$$

$$|J_A| = \sqrt{g_1^2 + g_2^2 + g_3^2} \tag{4.12}$$

Con lo visto, las componentes del vector normal en cada punto serán:

$$n_k = \frac{g_k}{|J_A|} \tag{4.13}$$

La expresión del jacobiano en coordenadas intrínsecas puede obtenerse sustituyendo (4.3) en (4.12). Haciendo también uso de (4.3) puede expresarse la derivada de r respecto de la normal al contorno si, como es sabido:

$$\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial r}{\partial x_k} n_k \tag{4.14}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

De esta forma, las integrales sobre cada elemento (4.9) pueden escribirse como sigue:

$$\mathbf{GW}^{ij} = \int_{\xi_1}\int_{\xi_2} \mathbf{u}^* \boldsymbol{\Phi}\, |J_A|\, d\xi_1 d\xi_2 \qquad (4.15.a)$$

$$\mathbf{HW}^{ij} = \int_{\xi_1}\int_{\xi_2} \mathbf{p}^* \boldsymbol{\Phi}\, |J_A|\, d\xi_1 d\xi_2 \qquad (4.15.b)$$

preparadas ya para su evaluación según cuadraturas estandar. Para elementos cuadriláteros los límites de integración serán -1 y 1. Para los elementos triangulares dichos límites serán 0 y 1.

Cuando el punto de colocación *i* forma parte del elemento *j* sobre el que se integra, los núcleos $\mathbf{u}^*$ y $\mathbf{p}^*$ presentan singularidades de $O(\frac{1}{r})$ y $O(\frac{1}{r^2})$ en los términos tratados en el Capítulo anterior. Las singularidades del primer tipo pueden ser tratadas numéricamente mediante un proceso de subdivisión del elemento en triángulos. Para las segundas serán necesarias algunas transformaciones previas a su tratamiento numérico.

4.3.1 Evaluación de los Términos Débilmente Singulares

La técnica que permite integrar numéricamente los términos de $O(\frac{1}{r})$ se basa en la búsqueda de un nuevo sistema de referencia donde el subintegrando sea regular. Para ello el jacobiano de la tranformación entre este sistema de referencia y el sistema de coordenadas homogéneo ha de ser de $O(r)$. Ello se consigue de forma sencilla con un procedimiento muy conocido y habitual en gran parte de la bibliografía sobre el particular. Dicho procedimiento se esquematiza en la Figura 4.4 para un elemento cuadrilátero con colocación en un nodo situado en uno de sus lados.

Asi, se procede a dividir el elemento en subregiones triangulares tomando como vértice común a todos el nodo de colocación. Posteriormente, cada uno de estos triángulos (T1,T2 y T3) son tratados como cuadriláteros degenerados con dos de sus vertices colapsando en el punto de colocación. Se define un sistema (s_1,s_2) donde esta imagen se convierte en regular. La relación entre (ξ_1,ξ_2) y (s_1,s_2) que permite esta conversión es la siguiente:

$$\xi_k = (1-s_1)\xi_k^{(1)} + s_1(1-s_2)\xi_k^{(2)} + s_1 s_2 \xi_k^{(3)} \quad k = 1,2 \qquad (4.16)$$

donde el superíncide (1) se refiere al vértice donde se localiza el punto de colocación. El jacobiano de esta transformación:

$$d\xi_1 d\xi_2 = |J_1|\, ds_1 ds_2 \qquad (4.17)$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

será:

$$|J_1| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial s_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial s_2} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial s_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial s_2} \end{vmatrix} = 2A\, s_1 \tag{4.18}$$

donde A representa el área del triángulo en el sistema de referencia homogéneo (ξ_1, ξ_2). Puede verse cómo $|J_1| \to 0$ cuando $s_1 \to 0$ y nos acercamos al lado determinado por el punto de colocación. Una vez cancelada la singularidad, la integración mediante una cuadratura estándar $(-1, 1)$ puede realizarse con una nueva transformación del tipo:

$$s_k = \frac{t_k + 1}{2} \quad k = 1,2 \tag{4.19}$$

cuyo jacobiano será:

$$ds_1 ds_2 = |J_2|\, dt_1 dt_2 = \frac{1}{4}\, dt_1 dt_2 \tag{4.20}$$

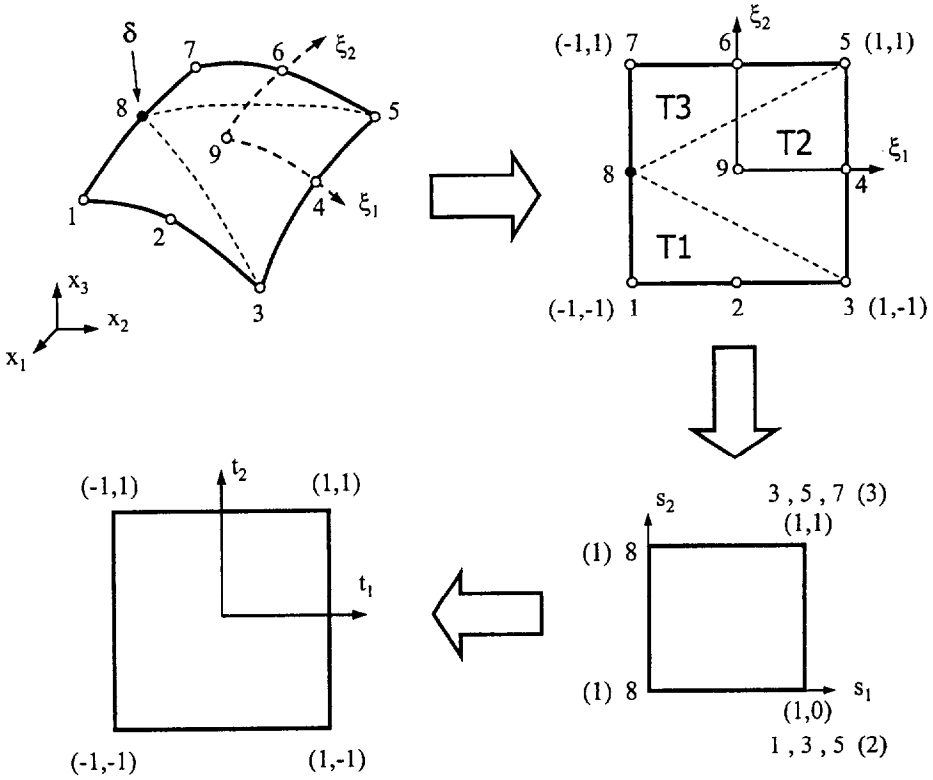

Figura 4.4. Técnica de subdivisión del elemento para integración singularidad débil

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Con todo ello, las integrales (4.15) con este tipo de singularidad, puede evaluarse numéricamente en (t_1, t_2) de forma estándar:

$$\int_{\Gamma_j} u^*_{lk}\phi_q \, d\Gamma = \sum_{n=1}^{n^o\,triángulos} \int_{t_1}\int_{t_2} u^*_{lk}(t_1,t_2)\,\phi_q(t_1,t_2)\,|J_A(t_1,t_2)|\,\frac{A}{4}\,(t_1+1)\,dt_1 dt_2$$

$$\int_{\Gamma_j} p^*_{lk}\phi_q \, d\Gamma = \sum_{n=1}^{n^o\,triángulos} \int_{t_1}\int_{t_2} p^*_{lk}(t_1,t_2)\,\phi_q(t_1,t_2)\,|J_A(t_1,t_2)|\,\frac{A}{4}\,(t_1+1)\,dt_1 dt_2 \qquad (2.21)$$

Esta técnica aplicada aquí a elementos cuadriláteros puede extenderse a elementos triangulares con idéntica sencillez (ver p.e. Domínguez, 1993). Este tipo de estrategias fueron propuestas inicialmente por Lachat y Watson (1976), y revisadas luego por Li et al. (1985), Telles (1987) y Cerrolaza y Alarcón (1989).

4.3.2 Evaluación de los Términos Fuertemente Singulares

Existen en la bibliografía del MEC estrategias indirectas, aunque rigurosas, que evitan el cálculo de las integrales cuyo integrando presenta una singularidad de $O(\frac{1}{r^2})$. Piénsese en el movimiento de sólido rígido (MSR) para el caso elastostático, o el campo equipotencial estático para el problema de potencial (ver p.e. Brebbia y Domínguez, 1992). Estos procedimientos indirectos tienen la ventaja que también evitan el cálculo de los términos libres c_{lk} (problema en absoluto trivial para geometrías 3-D). Sin embargo tienen algunos inconvenientes que no pueden obviarse. No existe, de hecho, un procedimiento general indirecto, y cada problema particular requiere la definición concreta del tipo de estrategia. Por ejemplo, en el caso elástico axilsimétrico es preciso definir un estado de tensiones hidroestático para obtener los términos en dirección radial (Sarihan y Mukherjee, 1982). Aún más, cuando se trata de problemas armónicos, la aplicación de MSR exige combinar las ecuaciones del problema dinámico con las del caso estático (ver Domínguez, 1993), y si además el dominio en estudio es no acotado, se hace necesario *cerrar* la discretización con *elementos ficticios* sobre los que integrar la solución fundamental estática (ver Maeso, 1992). En otros supuestos puede resultar más interesante evaluar directamente las integrales en el sentido del VPC, por ejemplo el caso de elementos discotinuos (nodos situados en el interior del elemento) o la estrategia de colocación no-nodal que se analizará más adelante. En ambos casos, el término libre $c_{lk} = 0.5\,\delta_{lk}$.

La evaluación directa de estas integrales es planteada por Li et al. (1985) para elementos triangulares planos lineales retomando una idea previa de Cruse (1969) quien la aplicó a elementos triangulares planos y aproximación constante (ver también París, 1978). En estos casos, la integración de los términos con singularidad fuerte puede

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

realizarse de forma analítica. Para la aplicación de este procedimiento a elementos de orden superior, la integración ha de abordarse de forma numérica.

Antecedentes más recientes en la evaluación directa de las integrales en el sentido del VPC para elementos curvos son los trabajos de Giuggiani y colaboradores (Giuggiani y Casalini, 1987 o Giuggiani y Gigante, 1990). Estos autores utilizan una estrategia de transformación a polares desde el punto singular, y una expansión asintótica del integrando expresado en el nuevo sistema de coordenadas. Tras algunas operaciones, las integrales singulares de superficie se expresan como suma de integrales regulares.

El procedimiento que se presenta para la evaluación estos términos (ver Chirino et al., 2000) sigue la línea de los anteriores en el sentido de mostrar que la singularidad es realmente *ficticia*, puesto que dicha singularidad se *desvanece* con la contribución de los elementos adyacentes. La técnica es válida para elementos curvos de cualquier orden y tipo y se basa en la identificación concreta de los términos fuertemente singulares, que serán regularizados directamente en coordenadas cartesianas de forma conveniente para obtener una integral de superficie y otra de línea extendida al perímetro del elemento (Cruse, 1969), ambas no singulares y evaluables mediante cuadratura estándar. Este método muestra de forma clara dónde radica la contribución de los elementos adyacentes para cancelar la singularidad en el entorno cercano del punto de colocación. La idea se ilustra abordando en primer lugar el problema elastostático. A continuación se generaliza su aplicación para formulaciones elastodinámicas y poroelastodinámicas en régimen armónico. Como se ha visto, el orden de la singularidad es el mismo en todos los casos.

4.3.2.1 Problema Elastostático: Como es sabido, las integrales correspondientes a la solución fundamental en tensiones serán:

$$\int_{\Gamma_j} p^*_{lk}\phi_q\, d\Gamma = -\frac{1}{8\pi(1-\upsilon)}\left\{\int_{\Gamma_j}\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}}\left[(1-2\upsilon)\delta_{lk}+3r_{,l}r_{,k}\right]\phi_q\, d\Gamma + \right.$$
$$\left. +(1-2\upsilon)\int_{\Gamma_j}\frac{1}{r^2}\left(r_{,k}\,n_l - r_{,l}\,n_k\right)\phi_q\, d\Gamma\right\} \qquad (4.22)$$

Teniendo en cuenta que $\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} = O(r)$, la primera integral es débilmente singular y puede calcularse numéricamente mediante el proceso de subdivisión triangular visto. En la segunda, si $l \neq k$, el subintegrando es de $O\left(\frac{1}{r^2}\right)$ cuando $\phi_q \neq 0$ en el nodo de colocación. El proceso de cancelación de la singularidad se realiza en varias fases. En primer lugar, puede reescribirse el segundo término de (4.22) como sigue:

$$\int_{\Gamma_j}\frac{1}{r^2}\left(r_{,k}\,n_l - r_{,l}\,n_k\right)\phi_q\, d\Gamma = \int_{\Gamma_j}\frac{1}{r^2}\left(r_{,k}\,n_l - r_{,l}\,n_k\right)\left(\phi_q - \phi^i_q\right) d\Gamma +$$
$$+\phi^i_q\int_{\Gamma_j}\frac{1}{r^2}\left(r_{,k}\,n_l - r_{,l}\,n_k\right) d\Gamma = I_1 + I_2 \qquad (4.23)$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

siendo ϕ_q^i el valor de la función de forma en el punto de colocación i ($\phi_q^i = 1$ si la colocación es nodal). Con esta operación previa (ver p.e. Davis y Rabinowitz, 1984) se elimina la función de forma del subintegrando. Así, I_1 es ahora evaluable de forma numérica ya que $(\phi_q - \phi_q^i) = O(r)$ y la singularidad a tratar se concentra en I_2. En este punto, es sencillo comprobar que el subintegrando de I_2 puede escribirse en términos del flujo de la rotación de un campo vectorial definido en el elemento de la forma:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{r}\,\mathbf{e}_m \tag{4.24}$$

siendo $\mathbf{e}_m$ un vector unitario en la dirección de m ($m \neq l, m \neq k$). Así:

$$I_2 = \int_{\Gamma_j} \frac{1}{r^2}\,(r_{,k}\,n_l - r_{,l}\,n_k)\,d\Gamma = \epsilon_{lmk} \int_{\Gamma_j} (\nabla \times \mathbf{B})\,\mathbf{n}\,d\Gamma \tag{4.25}$$

donde ϵ_{lmk} es el tensor de permutación. Aplicando ahora el teorema de Stokes al segundo miembro de (4.25):

$$\int_{\Gamma_j} (\nabla \times \mathbf{B})\,\mathbf{n}\,d\Gamma = \oint_{S_j} \mathbf{B}\,d\mathbf{S} \tag{4.26}$$

donde S_j representa el perímetro del elemento Γ_j en el sentido del VPC (Figura 4.5 con colocación en el nodo 1), se puede escribir:

$$I_2 = \int_{\Gamma_j} \frac{1}{r^2}\,(r_{,k}\,n_l - r_{,l}\,n_k)\,d\Gamma = \epsilon_{lmk} \oint_{S_j} \frac{1}{r}\,\mathbf{e}_m\,d\mathbf{S} = \epsilon_{lmk} \oint_{S_j} \frac{1}{r}\,dx_m \tag{4.27}$$

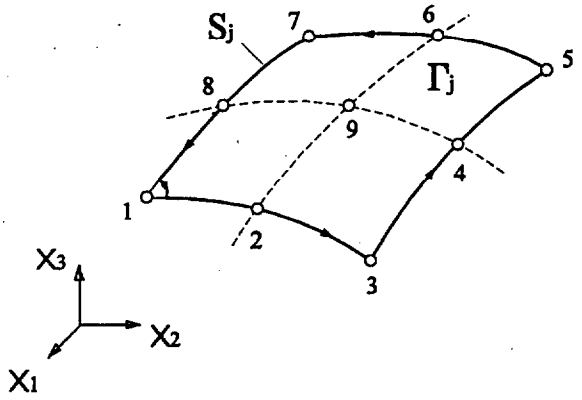

Figura 4.5. Integral curvilínea término singular. Colocación nodo 1

La reducción en una unidad del orden de la singularidad es sólo aparente. Ahora el término singular I_2 se ha convertido en una integral curvilínea extendida al perímetro del

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

elemento y cuyo subintegrando presenta una singularidad fuerte de $O(\frac{1}{r})$. A pesar de ello, el camino para su cancelación ha quedado ya trazado. Así, consideremos el elemento Γ_j y los de su entorno tal y como aparece en la Figura 4.6.

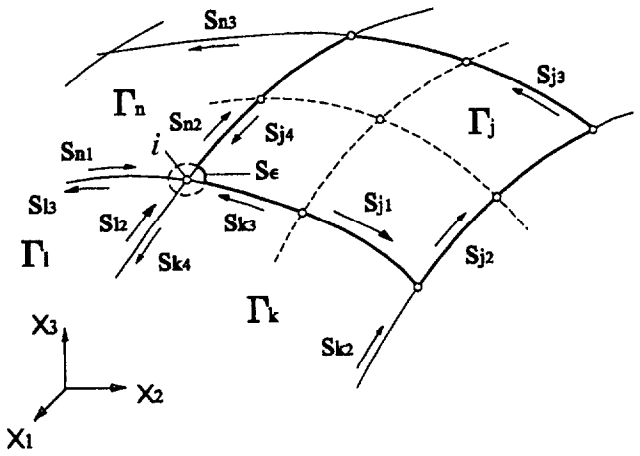

Figura 4.6. Cancelación de la singularidad. Colocación nodo esquina

La integral curvilínea en que ha quedado convertida I_2 sobre Γ_j puede expresarse:

$$\oint_{S_j} \frac{1}{r}\, dx_\alpha = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{S_{j1}-\varepsilon} \frac{1}{r}\, dx_\alpha + \int_{S_{j2}} \frac{1}{r}\, dx_\alpha + \int_{S_{j3}} \frac{1}{r}\, dx_\alpha + \\ + \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{S_{j4}-\varepsilon} \frac{1}{r}\, dx_\alpha + \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{S_{j\varepsilon}} \frac{1}{\varepsilon}\, dx_\alpha \qquad (4.28)$$

extendidas a cada una de las curvas que constituyen el perímetro en el sentido del VPC ($\alpha = 1,2,3$). Las integrales sobre S_{j2} y S_{j3} (curvas que no contienen el punto de colocación) no presentan problemas y pueden ser evaluadas numéricamente de acuerdo a una cuadratura estándar monodimensional. Las extendidas a lo largo de S_{j1} y S_{j4} (singulares) se cancelan con las correspondientes a los elementos Γ_k y Γ_n (recorridos marcados por el sentido de la normal exterior al elemento). Por último, para la integral de línea sobre $S_{j\varepsilon}$, si se considera la aportación conjunta de todos los elementos que confluyen en el punto de colocación ($m = j,k.l,n$) puede escribirse:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left(\sum_m \int_{S_{m\varepsilon}} \frac{1}{\varepsilon}\, dx_\alpha \right) = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} \oint_{S_\varepsilon} dx_\alpha \right) = 0 \qquad (4.29)$$

Por tanto, (4.22) ha sido expresada en término de dos integrales de superficie y una tercera curvilínea, todas ellas regulares y evaluables numéricamente de forma sencilla. En la Figura 4.7 se representa la generalización de este procedimiento para otras localizaciones nodales del punto de colocación. En su fase inicial (4.23) se ha planteado

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

en un supuesto genérico que incluye la posibilidad de que el punto de colocación no se corresponda con ninguno de los nodos de la discretización. Esta técnica es aplicable directamente en este supuesto. También lo es, como ya se ha adelantado, para problemas que impliquen soluciones fundamentales con el mismo tipo de singularidad. El principal inconveniente de este procedimiento directo es la necesidad de obtener el término libre c_{lk} en el punto de colocación. Este problema presenta alguna dificultad en geometrías tridimensionales y puede obviarse con estrategias indirectas (MSR). El procedimiento implementado en el modelo que se presenta para el cálculo de c_{lk} puede consultarse en Hartmann (1980, 1981).

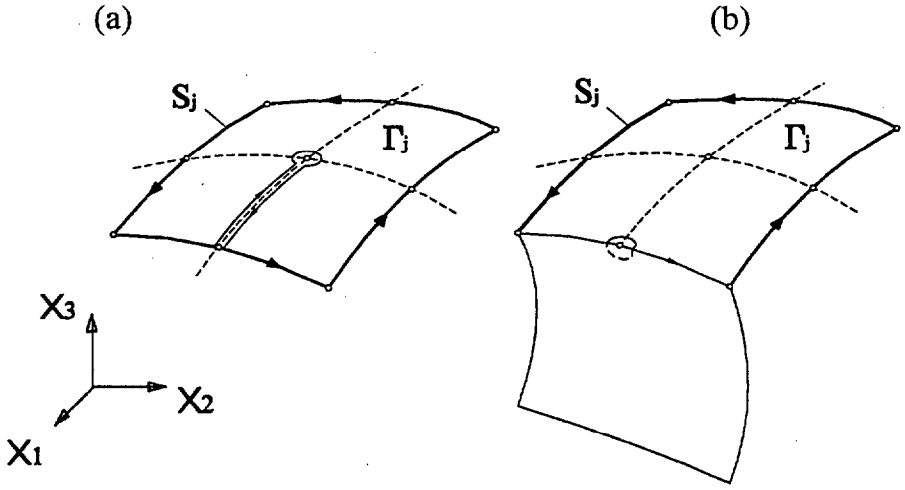

Figura 4.7. Cancelación singularidad. (a) nodo central, (b) nodo borde

4.3.2.2 Problemas Dinámicos Armónicos:En este epígrafe serán tratados de forma conjunta la estrategia de integración de los coeficientes de $O(\frac{1}{r^2})$ en problemas elastodinámicos y poroelastodinámicos armónicos. Como se ha comentado en el capítulo anterior y es bien conocido, la solución fundamental para el problema elástico armónico [(3.72) y (3.74)] presenta una singularidad del mismo tipo que en el problema elastostático. La singularidad fuerte se encuentra, como en el caso anterior, en el segundo término de (3.74). En el caso poroelástico, este tipo de singularidad se localiza en los coeficientes correspondientes a las tensiones sobre el esqueleto sólido cuando la carga puntual actúa en éste e igualmente se encuentra centrada en el segundo término de (3.67). Así, teniendo en cuenta el paralelismo formal entre las expresiones de la solución fundamental de ambos problemas, podrá escribirse:

$$\int_{\Gamma_j} p^*_{lk}\phi_q\, d\Gamma = \frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_j} \underbrace{\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}}(\mathcal{A}\delta_{lk}+\mathcal{B}r_{,l}r_{,k})}_{O(r^{-1})}\phi_q\, d\Gamma + \int_{\Gamma_j} \underbrace{(\mathcal{A}r_{,k}n_l+\mathcal{C}r_{,l}n_k)}_{O(r^{-2})}\phi_q\, d\Gamma \tag{4.30}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

siendo $\mathcal{A}$ (A ó $\tilde{A}$), $\mathcal{B}$ (B ó $\tilde{B}$) y $\mathcal{C}$ (C ó $\tilde{C}$) para problemas elásticos ó poroelásticos respectivamente. Aislada la parte singular de estas funciones [para el problema elástico ver Domínguez y Abascal (1984) y las expresiones (3.83.a,b y c) para medios poroelásticos], puede escribirse el segundo término de (4.30) como sigue (Chirino et al., 2000):

$$\int_{\Gamma_j}(\mathcal{A}r_{,k}n_l + \mathcal{C}r_{,l}n_k)\phi_q d\Gamma = \int_{\Gamma_j}\Big[\overbrace{\Big(\mathcal{A}+\tfrac{1}{r^2}\tfrac{\lambda}{\lambda+2\mu}\Big)r_{,k}n_l + \Big(\mathcal{C}-\tfrac{1}{r^2}\tfrac{\lambda}{\lambda+2\mu}\Big)r_{,l}n_k}^{O(r^o)}\Big]\phi_q d\Gamma$$
$$-\tfrac{\lambda}{\lambda+2\mu}\int_{\Gamma_j}\frac{1}{r^2}(r_{,k}n_l - r_{,l}n_k)\phi_q\, d\Gamma \qquad (4.31)$$

El primer término es absolutamente regular e integrable mediante una cuadratura gaussiana estándar. El segundo puede tratarse teniendo en cuenta la aportación de elementos contiguos tal y como se ha descrito en el subapartado anterior.

4.4 Imposición de las Condiciones de Contorno en el Modelo Acoplado

Como ya se ha comentado en algún momento, el objetivo último de este trabajo consiste en el desarrollo de un modelo de elementos de contorno donde coexistan regiones de naturaleza elástica, poroelástica y fluida con geometría arbitraria. Así, una vez discretizadas las ecuaciones integrales en cada región y estudiadas las estrategias que permiten obtener numéricamente los núcleos de integración en cada medio, en este apartado se apunta un procedimiento que permite simplificar la confección del código de ordenador a la hora de implementar el montaje de la matriz global del sistema.

Las dificultades asociadas a la programación de las rutinas de montaje de la matriz global son obvias. Así, piénsese en una geometría tridimensional donde existen nodos pertenecientes a regiones de distinta naturaleza. Esta confluencia de fases implica asociar un número diferente de grados de libertad según que dicho nodo se considere parte de una interfase u otra. Si se trata además de una situación de borde anguloso (Fig. 4.8), el vector normal asociado a cada uno de los elementos es diferente lo que implica la no continuidad de la derivada de las variables primarias (tracciones o flujos). Como consecuencia, el número de incógnitas de un nodo compartido depende simultáneaente de las condiciones de contorno, tipo de interfase y de la geometría local en el mismo.

Con todo ello, idear un procedimiento que permita tener en cuenta todos los casos posibles a la hora de confeccionar la matriz del sistema, resulta de una complejidad extraordinaria para los modelos que pretenden evaluarse. Una alternativa que facilita esta tarea consiste en duplicar los nodos que confluyen en contornos con diferentes restricciones. Así, en estos bordes se consideran tantos nodos como interfases confluyan

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

(Fig.4.8). Cada uno de estos nodos se considera perteneciente a un sólo contorno con lo que se consigue desvincular los grados de libertad correspondientes a cada interfase. Se logra así una simplificación más que notable del procedimiento de montaje pero existe una desventaja, se duplican incógnitas primarias (desplazamientos y presiones) lo que incrementa la dimensión de la matriz del sistema. Este aspecto, sin embargo, no es importante en exceso para los problemas estudiados ya que el número de nodos en los que se produce esta situación es escaso en relación con el número total de nodos del modelo.

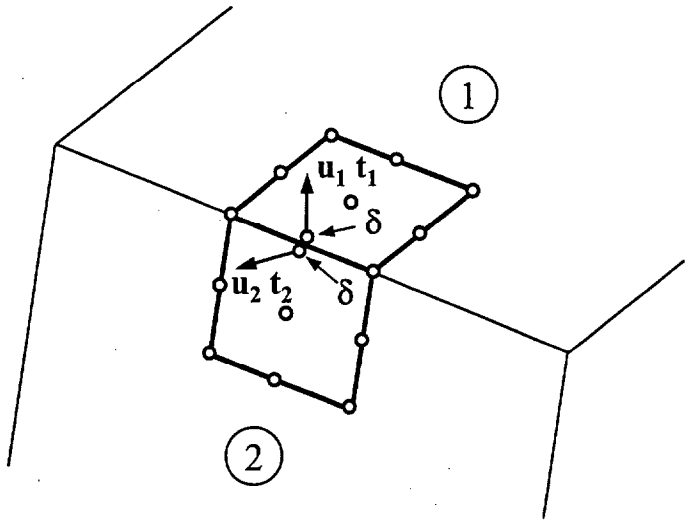

Figura 4.8. Imposición de las condiciones de contorno.
Nodo duplicado en el borde

Este procedimiento ya fue empleado por Medina (1987) en problemas de interacción bidimensionales y por Maeso (1992) en un modelo acoplado tridimensional. Matemáticamente se ilustra el procedimiento a la luz de la Figura 4.8. En ella se pretende representar gráficamente la duplicación del nodo del borde. La variable primaria $\mathbf{u}$ y derivada $\mathbf{t}$ se desdoblan en dicho borde $(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)$ al igual que la ecuación integral discretizada con colocación en el nodo duplicado:

$$\mathbf{h}_{11}\mathbf{u}_1 + \mathbf{h}_{12}\mathbf{u}_2 - \mathbf{g}_{11}\mathbf{t}_1 - \mathbf{g}_{12}\mathbf{t}_2 + \ldots\ldots\ldots = \bar{\mathbf{f}} \qquad (4.32.a)$$

$$\mathbf{h}_{21}\mathbf{u}_1 + \mathbf{h}_{22}\mathbf{u}_2 - \mathbf{g}_{21}\mathbf{t}_1 - \mathbf{g}_{22}\mathbf{t}_2 + \ldots\ldots\ldots = \bar{\mathbf{f}} \qquad (4.32.b)$$

donde el término libre correspondiente se incluye en los coeficientes $\mathbf{h}_{11}$ y $\mathbf{h}_{22}$. En $\bar{\mathbf{f}}$ se recoge el producto de los valores impuestos ($\bar{\mathbf{u}}$ y $\bar{\mathbf{t}}$) en todo el contorno y los coeficientes de integración correspondientes.

En un problema con una sóla región, serán dato dos de las cuatro incógnitas planteadas en el nodo duplicado. Si son conocidas $\mathbf{t}_1$ y $\mathbf{t}_2$, de la resolución de (4.32) permite obtener $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ siendo además iguales. Igualmente, conocidas $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{t}_2$ o viceversa pueden obtenerse las otras dos sin dificultad. El problema surge cuando es dato

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

el desplazamiento $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \bar{\mathbf{u}}$. En este caso las ecuaciones (4.32) son iguales y el sistema es singular. Esta situación se presenta con cierta frecuencia y es conocida como *problema de esquina*. Ha sido ilustrada con el ejemplo más sencillo, pero se presenta también en cualquier esquina que forme parte de contornos interfase en algunos casos de interacción entre regiones de distinta naturaleza.

En este trabajo se ha optado por una técnica, ya empleada por Medina (1987) en problemas 2D, que permite evitar este inconveniente y que se basa en la sustiución de una de las ecuaciones (o ambas) de (4.32) por otra en la que el punto de colocación se encuentre ligeramente desplazado. Así, en este caso, el punto de colocación no coincide con ningún nodo de la discretización, con lo que los coeficientes del sistema serán ligeramente diferentes y el sistema de ecuaciones resultante no será singular. Este procedimiento, al que hemos denominado *colocación no nodal*, exige algunos retoques tanto en la igualdad integral discretizada como en los procedimientos para la evaluación numérica de los coeficientes integrales en el propio elemento y elementos cercanos. Estos aspectos serán discutidos en el próximo aparado.

4.5 Estrategia de Colocación No Nodal

Introducida ya como estrategia que permite evitar los inconvenientes asociados a problemas de esquina, su utilización facilita además, teniendo en cuenta la tipología de elementos utilizados, la consideración de discretizaciones no conformes en el modelo, difíciles de abordar desde procedimiento indirectos (ver Maeso, 1992). En ocasiones, este tipo de mallas son necesarias evitándose con ello costosas transiciones a través de elementos triangulares. En el modelo acoplado presa-terreno-agua-sedimento que se estudia en el Capítulo 6 se hace uso de mallas de este tipo debido a la velocidad de propagación de las ondas en el sedimento poroelástico utilizado, muy inferiores a las correspondientes a los restantes medios implicados en dicho modelo. La Figura 4.9 presenta esta estrategia en ambos casos.

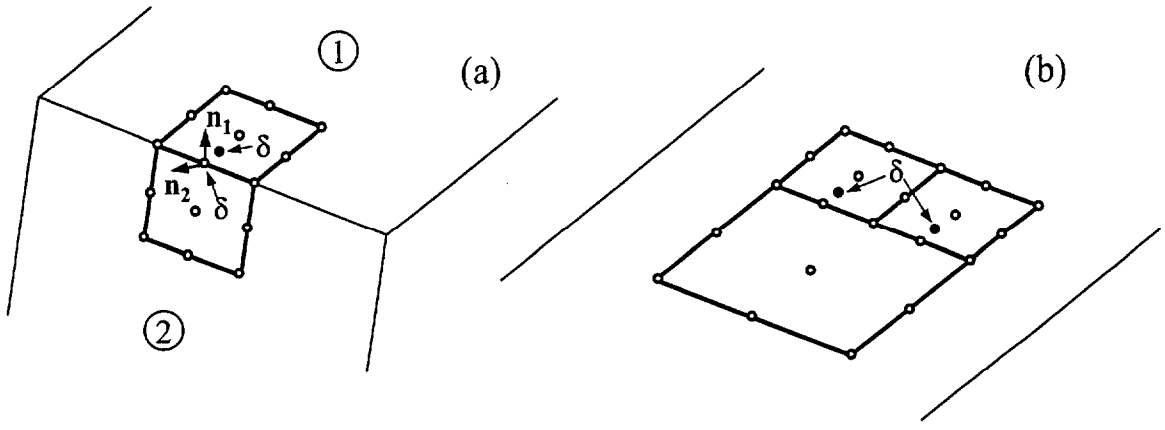

Figura 4.9. Colocación no nodal. (a) Problemas de esquina, (b) discretización no conforme

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

La ecuación integral discretizada (4.6) para un punto de colocación i interior al elemento genérico Γ_k, se altera ligeramente en el sentido que sigue:

$$\mathbf{c}^i \boldsymbol{\Phi} \mathbf{u}^k + \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^* \boldsymbol{\Phi} \, d\Gamma \right\} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \boldsymbol{\Phi} \, d\Gamma \right\} \mathbf{p}^j \qquad (4.33)$$

siendo $\mathbf{u}^k$ el vector de desplazamientos nodales del elemento Γ_k y $\boldsymbol{\Phi}$ la matriz de funciones de forma particularizadas para las coordenadas naturales $(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)$ del punto de colocación. El término libre será siempre en estos casos $c^i_{lk} = 0.5\,\delta_{lk}$.

Dentro del elemento Γ_k, la integración de los términos débilmente singulares se realiza con la técnica de subdivisión del elemento en triángulos descrita en el apartado 4.3.1 para la colocación nodal. La Figura 4.10 describe el procedimiento en este caso.

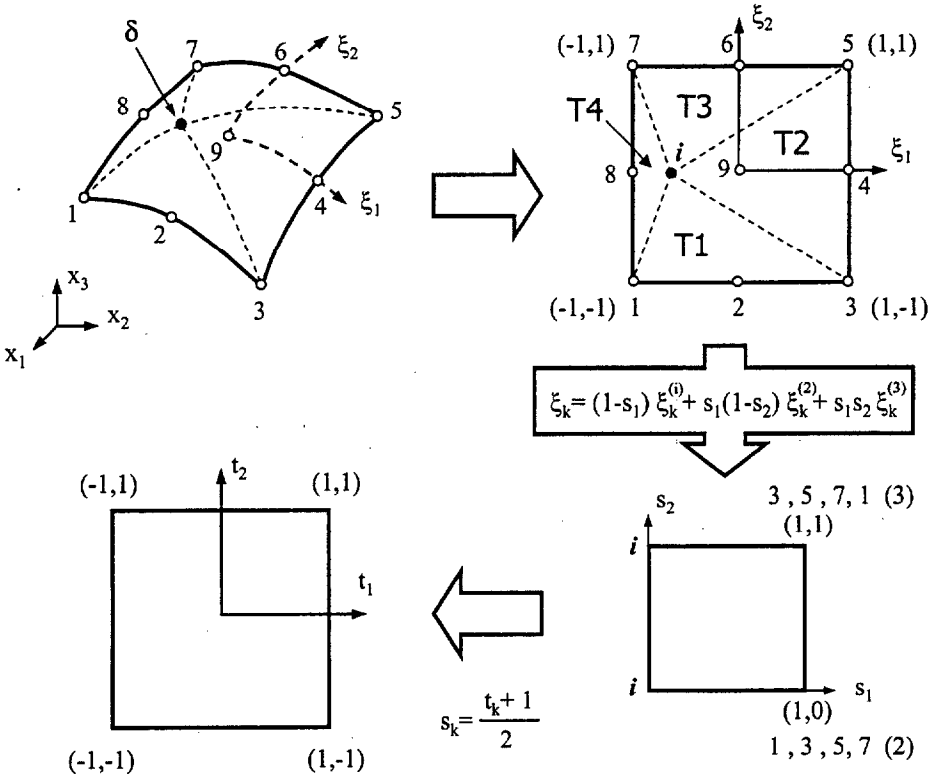

Figura 4.10. Integración singularidad débil. Colocación no nodal

Como ya se ha mencionado en el apartado 4.3.2 el procedimiento para la integración de los términos con singularidad fuerte puede hacerse extensivo a este supuesto sin dificultad. Obviamente, para este caso $\phi^i_q \neq 1$ en (4.23).

Siguiendo esta estrategia de colocación no nodal, se realizaron multitud de pruebas en ejemplos con solución conocida con el objeto de determinar si este hecho afecta a los

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

resultados numéricos y, de ser así, en qué medida puede desplazarse el punto de colocación dentro del elemento sin que la solución se vea alterada en exceso. Los test realizados con discretizaciones no conformes y ejemplos con problemas de esquina, revelaron que colocaciones interiores desplazadas del nodo correspondiente del orden de $0.025L$, siendo L la longitud característica del elemento, dan lugar a resultados aceptables en todos los casos.

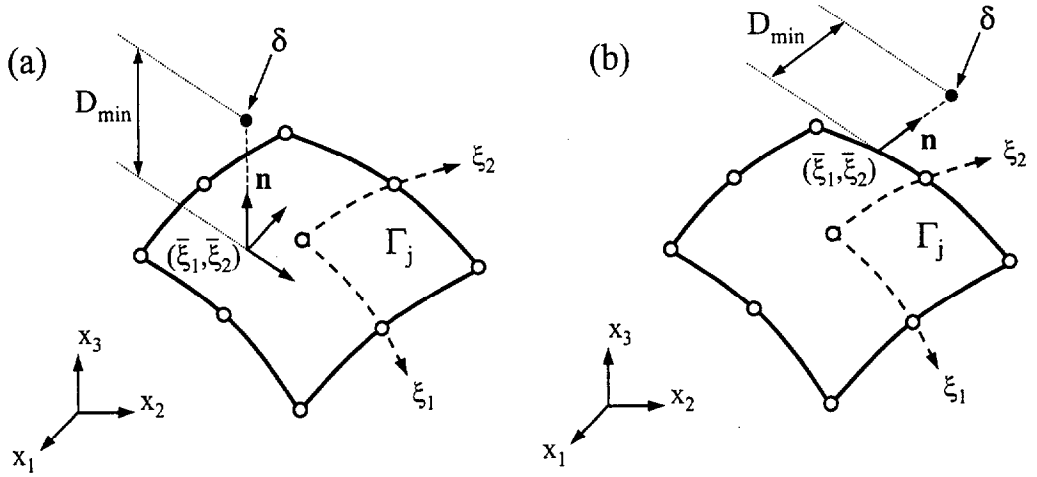

Figura 4.11. Integración exterior cuasi-singular. (a) $(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)$ interior al elemento integrado, (b) $(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)$ en el perímetro del elemento integrado

Esta cercanía del punto de colocación al perímetro del elemento, obliga a prestar atención especial a la integración numérica de la solución fundamental en los elementos contiguos teniendo en cuenta que el punto de colocación es exterior a ellos. En este sentido Telles (1987) propone una transformación de coordenadas cuyo jacobiano sea del orden de la distancia mínima $D_{\min}$ del punto de colocación al elemento (Fig. 4.11). Con ello los subintegrandos de $\mathbf{GW}^{ij}$ y $\mathbf{HW}^{ij}$ serán regularizados lo que permite la evaluación numérica efectiva de los mismos con cuadraturas estándar. Esta relación se establece entre las coordenadas naturales del elemento (ξ_1, ξ_2) y un nuevo sistema coordenado (η_1, η_2) de la forma::

$$\xi_k = a\eta_k^3 + b\eta_k^2 + c\eta_k + d \qquad (k = 1,2) \tag{4.34}$$

donde las constantes a, b, c y d se determinan, para un elemento cuadrilátero, de acuerdo a las siguientes ecuaciones de restricción:

$$\left[\frac{d^2\xi_k}{d\eta_k^2}\right]_{\bar{\xi}_k} = 0$$

$$J(\bar{\eta}_k) = \left[\frac{d\xi_k}{d\eta_k}\right]_{\bar{\xi}_k} = \bar{r}$$

$$\xi_k(-1) = -1 \quad \xi_k(+1) = +1 \tag{4.35}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

donde ahora $(\bar{\xi}_1,\bar{\xi}_2)$ son las coordenadas del punto del elemento más cercano al punto de colocación (Fig. 4.11) y J el jacobiano de la transformación. De otra parte $\bar{r} = \frac{D_{\min}}{L}$, siendo L una dimensión característica del elemento integrado en el espacio tridimensional. La resolución del sistema de ecuaciones obtenido de sustituir (4.34) en (4.35) será:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1-\bar{r}}{S} \\ b &= -\frac{3(1-\bar{r})\bar{\eta}_k}{S} \\ c &= \frac{\bar{r}+3\bar{\eta}_k^2}{S} \\ d &= -b \end{aligned} \tag{4.36}$$

donde:

$$S = 3\bar{\eta}_k^2 + 1 \tag{4.37}$$

y la imagen de $\bar{\xi}_k$ en el nuevo sistema de referencia:

$$\bar{\eta}_k = \left[-q + (p^3+q^2)^{1/2}\right]^{1/3} + \left[-q - (p^3+q^2)^{1/2}\right]^{1/3} + \frac{\bar{\xi}_k}{1+2\bar{r}} \tag{4.38}$$

siendo:

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{3(1+2\bar{r})^2}\left[4\bar{r}(1-\bar{r}) + 3\left(1-\bar{\xi}_k^2\right)\right] \\ q &= \frac{1}{2(1+2\bar{r})^2}\left\{\left[\bar{\xi}_k(3-2\bar{r}) - \frac{2\bar{\xi}_k^3}{1+2\bar{r}}\right]\frac{1}{1+2\bar{r}} - \bar{\xi}_k\right\} \end{aligned} \tag{4.39}$$

En estas expresiones si $\bar{r} \geq 1$ la ecuación (4.34) degenera en $\xi_k = \eta_k$. Por tanto, esta transformación sólo tiene sentido en aquellos casos en los que $0 \leq \bar{r} \leq 1$. Para un elemento triangular el procedimiento es análogo, sólo habrán de modificarse las dos últimas ecuaciones de restricción en (4.35). De esta forma, haciendo uso de esta transformación, las expresiones (4.15) de las integrales exteriores sobre elementos cercanos al punto de colocación se escriben:

$$\mathbf{GW}^{ij} = \int_{\eta_1}\int_{\eta_2} \mathbf{u}^* \boldsymbol{\Phi}\, |J_A|\,|J_T|\, d\eta_1 d\eta_2 \tag{4.40.a}$$

$$\mathbf{HW}^{ij} = \int_{\eta_1}\int_{\eta_2} \mathbf{p}^* \boldsymbol{\Phi}\, |J_A|\,|J_T|\, d\eta_1 d\eta_2 \tag{4.40.b}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

siendo el jacobiano bidimensional $|J_T| = O(\bar{r}^2)$. Teniendo en cuenta (4.35), los límites de integración no se alteran respecto de (4.15) empleándose el mismo tipo de cuadraturas gaussianas que en aquel caso.

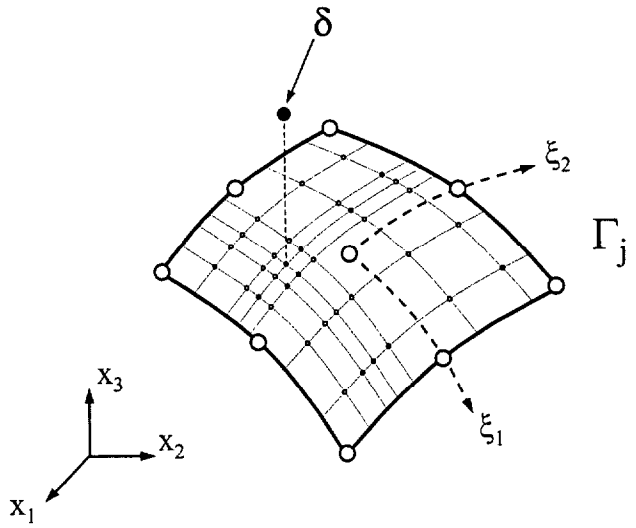

Figura 4.12. Integración cuasi-singular. Agrupamiento de los puntos de integración en el entorno de $(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)$

La Figura 4.12 muestra los efectos de esta transformación en la distribución de los puntos de integración en el espacio tridimensional. Para una distribución de 6 × 6 puntos de integración, puede observase el agrupamiento de los mismos en el entorno del punto del elemento $(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)$ más cercano al punto de colocación respecto de la posición que adoptarían en una cuadratura estándar.

Aún cuando en este texto la técnica ha sido introducida haciendo referencia a la colocación no nodal, ha sido implementada y será empleada en todos aquellos casos en los que el punto de colocación no pertenezca al elemento integrado pero se sitúe a una distancia inferior a la longitud característica del mismo. Así, en la discretización del modelo acoplado presa-terreno-agua esta situación se produce, por ejemplo, en la bóveda de la presa cuando se integran elementos del paramento aguas arriba desde nodos situados en la superficie aguas abajo o viceversa.

4.6 Algunos Ejemplos Numéricos

Problema Elastostático

Para validar el procedimiento de obtención de las integrales singulares en el sentido del VPC, se analiza el sólido tridimensional que aparece en la Figura 4.13 para un problema elastostático. La misma idea y geometría fue empleada por Giuggiani y Gigante (1990) en un test análogo. La discretización consta de 16 elementos

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

cuadriláteros de 9 nodos. Las constantes del material son $\mu = 1$ y $\upsilon = 0.3$.

Los núcleos de integración en el propio elemento correspondientes a las tensiones han sido obtenidos para tres puntos de colocación (1,2 y 3) con distinta geometría local. Los núcleos recogen la aportación de todos los elementos a los que el nodo pertenece. Los resultados obtenidos se comparan con los evaluados de forma indirecta a través de la técnica del movimineto de sólido rígido (MSR) (Tablas 4.1, 4.2 y 4.3). Esta estrategia, como se ha comentado, permite la obtención conjunta de las integrales en el sentido del VPC y el término libre c_{lk}^{i} correspondiente.

En la evaluación directa de los núcleos de integración singulares, las integrales de superficie (con singularidad débil), previa subdivisión en triángulos, se realiza mediante una cuadratura gaussiana estándar con 6×6 puntos. Para las integrales curvilíneas se utiliza una cuadratura monodimensional con seis puntos en cada lado del elemento.

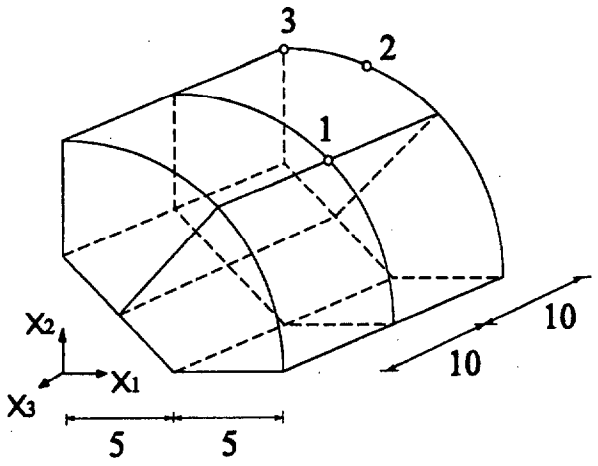

Figura 4.13. Sólido elástico. Geometría y discretización

Núcleo	VPC (1)	c_{lk}^{1} (2)	(1)+(2)	MSR
$h_{11} = h_{22}$	-0.017148	0.495573	0.478425	0.478425
$h_{12} = h_{21}$	0.012660	0.003162	0.015822	0.015825
$h_{13} = h_{31}$	$\simeq 0$	$\simeq 0$	$\simeq 0$	$\simeq 0$
$h_{23} = h_{32}$	$\simeq 0$	$\simeq 0$	$\simeq 0$	$\simeq 0$
h_{33}	-0.014011	0.495573	0.481562	0.481562

Tabla 4.1. Núcleos de integración en el nodo 1 (contorno suave).
Evaluación directa de la integral del VPC y cálculo indirecto con MSR

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Núcleo	VPC (1)	c_{lk}^{2} (2)	(1)+(2)	MSR
h_{11}	-0.024929	0.25	0.225071	0.225093
$h_{12} = h_{21}$	0.008491	0.0	0.008491	0.008492
h_{13}	-0.011095	-0.043504	-0.054599	-0.054623
h_{22}	-0.007947	0.25	0.242053	0.242058
h_{23}	-0.028070	-0.105028	-0.133098	-0.133102
h_{31}	0.011561	-0.043504	-0.031943	-0.031966
h_{32}	0.029196	-0.105028	-0.075832	-0.075836
h_{33}	-0.011937	0.25	0.238063	0.238054

Tabla 4.2. Núcleos de integración en el nodo 2 (borde contorno).
Evaluación directa de la integral del VPC y cálculo indirecto con MSR

Núcleo	VPC (1)	c_{lk}^{3} (2)	(1)+(2)	MSR
h_{11}	-0.007452	0.123096	0.115644	0.115644
h_{12}	0.008317	-0.056830	-0.048513	-0.048513
h_{13}	-0.000717	0.056048	0.055331	0.055330
h_{21}	-0.007874	-0.056830	-0.064704	-0.064704
h_{22}	-0.001121	0.124682	0.123561	0.123562
h_{23}	-0.010433	-0.056836	-0.067269	-0.067268
h_{31}	-0.004972	0.056048	0.051076	0.051075
h_{32}	0.010691	-0.056836	-0.046145	-0.046144
h_{33}	-0.003502	0.123889	0.120387	0.120386

Tabla 4.3. Núcleos de integración en el nodo 3 (esquina contorno).
Evaluación directa de la integral del VPC y cálculo indirecto con MSR

Tal y como se observa en las tablas adjuntas (columnas 3ª y 4ª), los resultados proporcionados por ambas técnicas son prácticamente coincidentes. Como se ha comentado, el procedimiento descrito requiere la obtención del término libre en cada punto de colocación. Los valores de c_{lk}^{i} han de determinarse a partir de la discretización de la geometría a través de (4.3). Dependerá, por tanto, del número y tipo de elemento utilizado para discretizar la misma en el punto de colocación. La utilización de las expresiones de c_{lk}^{i} a partir de la geometría teórica da lugar a resultados incorrectos. Obsérvese que en el nodo 1 (contorno *suave* teóricamente) $c_{lk}^{1} \neq 0.5\delta_{lk}$. En este ejemplo, como es fácil de entender, sólo para el nodo 2 el término libre calculado

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

coincide con el obtenido a partir de la geometría real.

Problema Poroelastodinámico Monodimensional

A la hora de contrastar el procedimiento empleado para la obtención numérica de los coeficientes integrales en problemas dináminos armónicos, se analiza, en primer lugar, el problema de una probeta de material poroelástico saturado confinado entre paredes rígidas, impermeables y sin fricción. La parte superior de la columna está drenada y sometida a una tensión armónica del tipo $P_o e^{i\omega t}$ (Fig.4.14a). Las propiedades del material serán (Rice y Cleary, 1976): $\mu = 6 \times 10^9 \text{N/m}^2$, $\lambda = 4 \times 10^9 \text{N/m}^2$, $\phi = 0.19$, $R = 0.444 \times 10^9 \text{N/m}^2$, $Q = 1.399 \times 10^9 \text{N/m}^2$, $b = 1.9 \times 10^8 \text{Ns/m}^4$, $\rho_s = 2800 \text{ Kg/m}^3$, $\rho_f = 1000 \text{ Kg/m}^3$ y $\rho_a = 150 \text{ Kg/m}^3$.

La configuración propuesta da lugar a una respuesta de carácter monodimensional y la solución exacta al problema puede determinarse de forma sencilla. Entre otros autores, Cheng et al. (1991) hacen uso de este ejemplo para validar su código bidimensional de elementos de contorno al igual que Domínguez (1992). Los primeros aportan también solución analítica explícita haciendo uso de álgebra computacional. Asimismo, Dargush y Chopra (1996) en un artículo centrado en la obtención de la impedancia dinámica de cimentaciones superficiales axilsimétricas, utilizan esta disposición monodimensional para verificar la formulación de elementos de contorno utilizada.

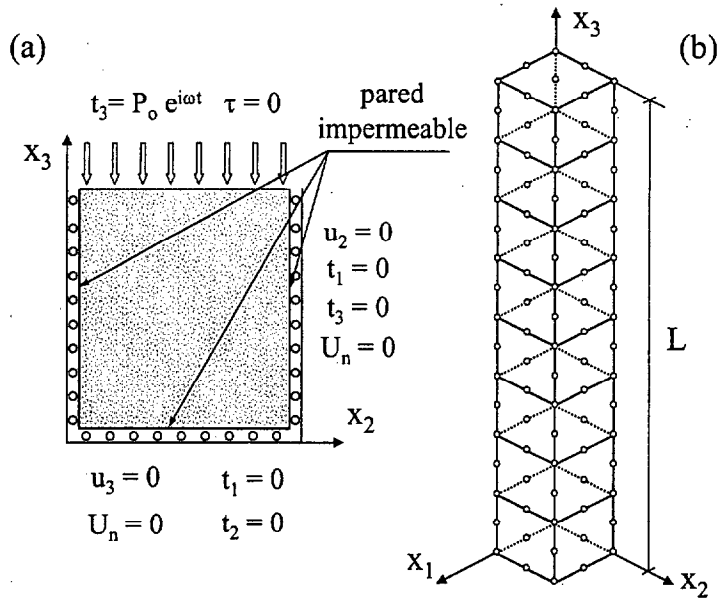

Figura 4.14. Sólido poroelástico monodimensional bajo carga armónica.
(a) Condiciones de contorno, (b) discretización 3D

El modelo tridimensional que se presenta en este trabajo, hace uso de la discretización mostrada en la Figura 4.14b para simular el comportamiento

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

monodimensional del problema. La columna tiene una longitud L = 1m y la discretización consta de 34 elementos cuadriláteros iguales de 9 nodos. Las superficies adicionales necesarias en este modelo se consideran también rígidas, impermeables y sin fricción.

La Figura 4.15 se muestra la evolución con la frecuencia del módulo del desplazamiento del esqueleto sólido en la parte superior de la columna para dos valores de la permeabilidad $\kappa = \frac{k}{\eta}$. El primero dado por las propiedades ya descritas del material $\kappa_1 = 1.9 \times 10^{-10}\text{m}^4/\text{Ns}$. El segundo será un medio con más alta permeabilidad $\kappa_2 = 3.8 \times 10^{-7}\text{m}^4/\text{Ns}$ $\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1} = 2 \times 10^3\right)$. En ambos casos el desplazamiento es normalizado con el correspondiente a un sólido elástico con las propiedades no drenadas del material:

$$u^* = u_3 \frac{\lambda_u + 2\mu}{P_o L} \tag{4.41}$$

siendo:

$$\lambda_u = \frac{2\mu \upsilon_u}{1 - 2\upsilon_u} \tag{4.42}$$

En (4.42) λ_u y υ_u representan la constante de Lamé y el coeficiente de Poisson del medio no drenado. Este último se relaciona con las constantes de Biot que utilizamos del modo que sigue (ver Domínguez, 1995):

$$\upsilon_u = \frac{\lambda + \frac{(Q+R)^2}{R}}{2\left[\lambda + \mu + \frac{(Q+R)^2}{R}\right]} \tag{4.43}$$

Para las propiedades del medio especificadas $\upsilon_u = 0.33$. En abcisas, la frecuencia es adimensionalizada con la frecuencia natural del mismo medio $\omega^* = \frac{\omega}{\omega_1}$, siendo:

$$\omega_1 = \frac{\pi}{2L}\sqrt{\frac{\lambda_u + 2\mu}{\rho}} \qquad \text{donde} \quad \rho = (1-\phi)\rho_s + \phi\rho_f \tag{4.44}$$

Para valores bajos de la permeabilidad κ no existe diferencia entre la respuesta de la probeta poroelástica respecto de aquella constituida por un material elástico con propiedades no drenadas. Con estas propiedades, la perturbación se transmite a lo largo de la columna en forma de ondas de compresión de primer tipo en las que ambas fases del medio vibran en fase. Sólo cuando aumenta la permeabilidad se hace evidente el carácter bifásico del medio con la presencia de picos coincidentes con las frecuencias propias asociadas a la onda de compresión de segundo tipo. Si se incrementa la longitud

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

L de la probeta, estas desviaciones asociadas a la onda corta disminuyen. Con una probeta de longitud suficiente, la onda de segundo tipo puede amortiguarse por completo para el medio más permeable. Ambas curvas se superponen en este caso. En lo que a la solución numérica aportada por el MEC se refiere, en la Figura 4.15 se aprecia una coincidencia total con la solución analítica para ambos valores de κ.

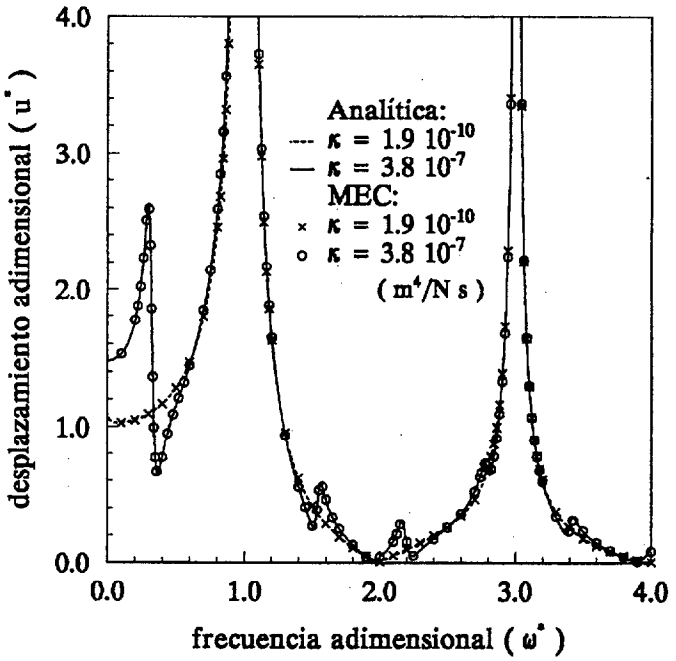

Figura 4.15. Módulo del desplazamiento del esqueleto sólido en la cara superior. Solicitación: tensión normal sobre la cara superior drenada

En este problema existe, sin embargo, un comportamiento interesante a baja frecuencia que no se aprecia en la Figura 4.15. Así, cuando $\omega^* \to 0$ la respuesta en ambos medios se corresponde con la obtenida para un sólido elástico con las propiedades del esqueleto sólido drenado (λ, μ). Este efecto se aprecia con claridad en la Figura 4.16 donde la frecuencia ω^* se presenta en escala logarítmica. A muy bajas frecuencias puede observarse un súbito aumento de la rigidez de la probeta con permeabilidad inferior. El comportamiento estático de ambos medios es el mismo y la respuesta:

$$u^* = \frac{\lambda_u + 2\mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{(1-\upsilon_u)(1-2\upsilon)}{(1-\upsilon)(1-2\upsilon_u)} = 1.478 \qquad (4.45)$$

La Figuras 4.17 muestran el perfil de la presión de poro para cinco frecuencias adimensionales (0.2, 0.5, 0.8, 1.2 y 2.0) a lo largo de la columna. Se presentan la solución analítica y los resultados numéricos obtenidos con el MEC para los dos valores de la permeabilidad κ utilizados. A la vista de las figuras, la concordancia entre la solución exacta y la aportada por el modelo numérico tridimensional es evidente. En este caso, los valores de la presión en puntos internos se obtienen discretizando (3.25). En

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

esta ecuación, la tensión equivalente en el fluido se obtiene a partir de las variables calculadas en el contorno a través de integrales de la solución fundamental sobre dicho contorno. En este caso, los núcleos de integración no son singulares y una cuadratura gaussiana estándar de 6 × 6 es suficiente para su correcta evaluación.

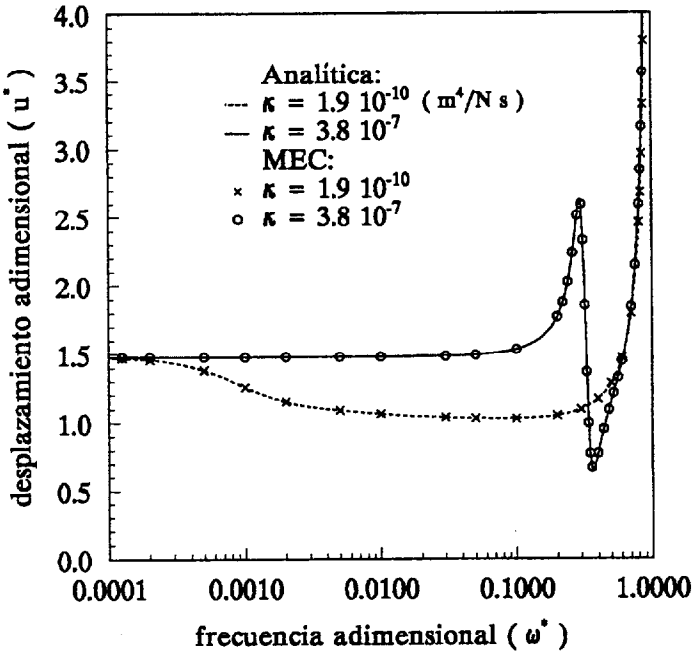

Figura 4.16. Comportamiento a baja frecuencia. Problema monodimensional

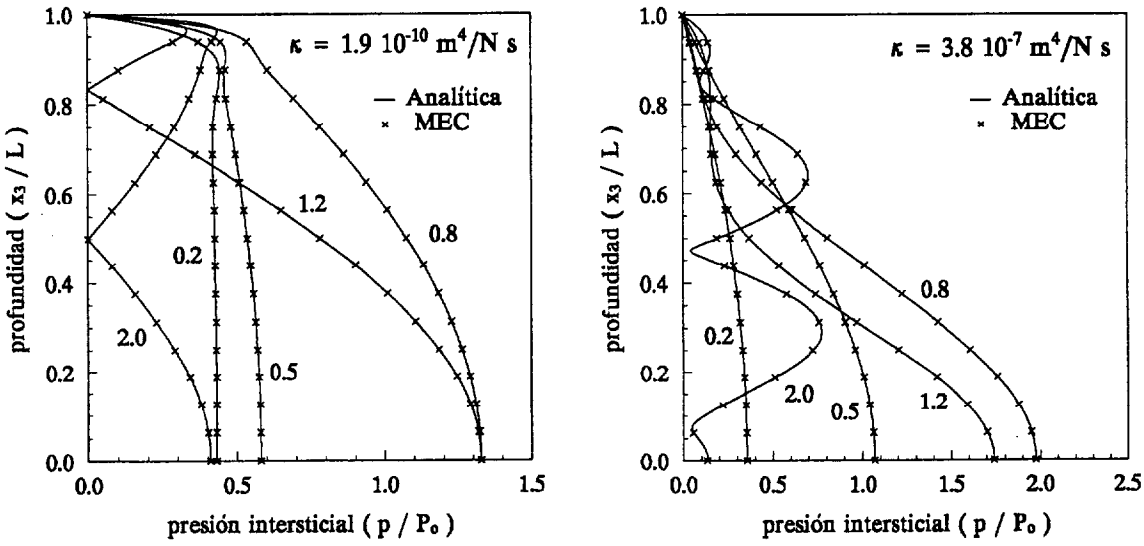

Figura 4.17. Módulo de la presión intersticial a lo largo de la columna para cinco valores de ω^*: 0.2, 0.5, 0.8, 1.2 y 2.0

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Interacción Poroelástico-Agua. Problema Bidimensional

Para el tercer ejemplo se ha adoptado un problema de deformación plana en el se produce interacción entre un sólido poroelástico saturado y un liquido. La geometría y solicitación se describen en la Figura 4.18a. Se trata de una columna poroelástica (P) de 4 m de altura en el interior de un recipiente lleno de líquido (A). Este recipiente se encuentra en reposo y sus paredes son impermeables $\left(q = \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = 0\right)$. La superficie superior de la columna está drenada y libre de tensiones. La discretización utilizada en el modelo tridimensional se muestra en la Figura 4.18b. Al tratarse de un problema con simetría, sólo se representa la mitad de la geometría. En esta discretización serán necesarios contornos adicionales que permiten simular el problema bidimensional. Las condiciones impuestas a estas superficies aparecen en la misma figura. No será necesario, por otra parte, discretizar la superficie libre del líquido ($p = 0$) teniendo en cuenta las características de la solución fundamental empleada para este tipo de medios. La base de la columna es sometida a un desplazamiento armónico de amplitud u_o y será representada la componente horizontal u_1 del desplazamiento del esqueleto sólido en el nodo i localizado en la cara superior de la misma.

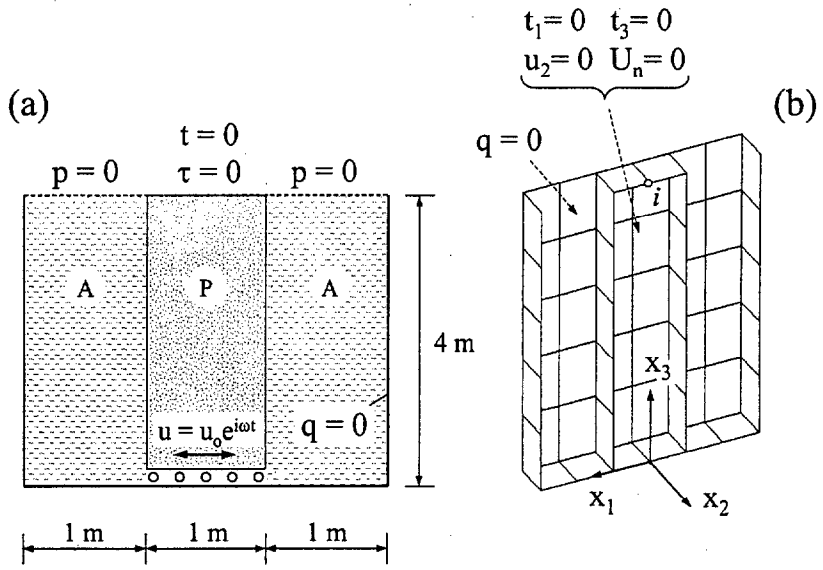

Figura 4.18. Columna bidimensional poroelástica sumergida en un fluido.
(a) Geometría del problema, (b) discretización 3D

Las propiedades del medio poroelástico que constituye la columna son (Domínguez et al, 1997): $\mu = 7.7037 \times 10^6 \text{N/m}^2$, $\lambda = 1.7975 \times 10^7 \text{N/m}^2$ ($\upsilon = 0.35$), $\xi = 0.05$ (factor de amortiguamiento en el esqueleto sólido), $\phi = 0.6$, $R = 1.24416 \times 10^9 \text{N/m}^2$, $Q = 8.2944 \times 10^8 \text{N/m}^2$, $\rho_s = 2640$ Kg/m^3, $\rho_f = 1000$ Kg/m^3 (agua intersticial) y densidad añadida (ρ_a) nula. Se presentan los resultados para cinco valores de la permeabilidad en términos de la constante de disipación b (2.34). El fluido circundante, también agua, se considera compresible y, en este caso, no viscoso con velocidad de

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

propagación de las ondas de presión c = 1440 m/s. El modelo acoplado se formula aplicando las ecuaciones del MEC en ambas regiones, las codiciones de contorno conocidas y las ecuaciones de compatibilidad y equilibrio asociadas al contorno interfase (permeable) entre ambas en los términos expuestos en el apartado 2.13.

Al tratase de un problema sin solución analítica, los resultados del modelo 3D se comparan con los obtenidos de un programa 2D de elementos de contorno que también incorpora la interacción de medios poroelásticos, elásticos y fluidos desarrollado en la Universidad de Sevilla por el Prof. Domínguez y su equipo de colaboradores. Ambos resultados para el desplazamiento horizontal del nodo i con la frecuencia se muestran en la Figura 4.19. La frecuencia es normalizada con la primera frecuencia de la columna en voladizo constituida por un material elástico con las propiedades del esqueleto sólido drenado $(\omega_1 = 8.9056 \text{ rad/s})$.

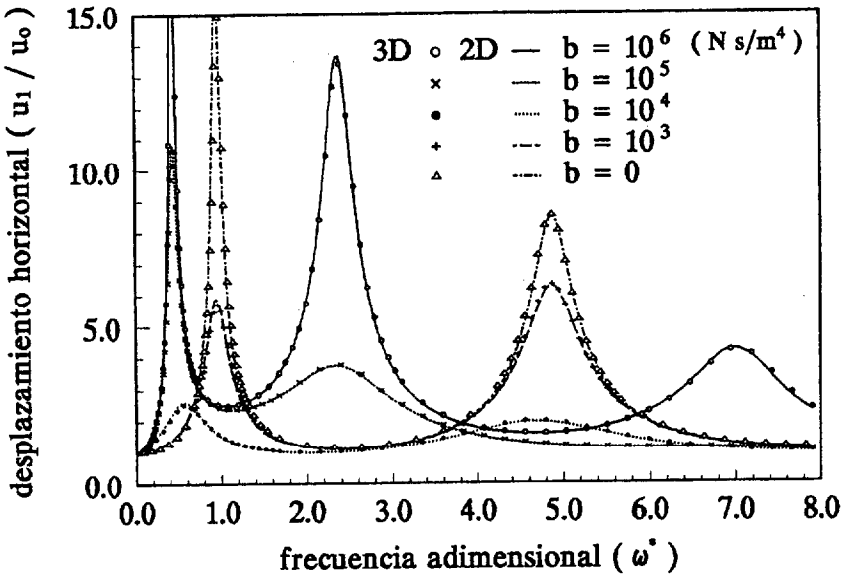

Figura 4.19. Respuesta horizontal columna poroelástica bidimensional sumergida. Validación modelo MEC 3D a través de un modelo MEC 2D (Domínguez et al.)

La coincidencia de la respuesta obtenida desde ambos modelos es muy alta para todos los valores utilizados de la constante de disipación. La interpretación somera de los resultados permite observar la evolución de las frecuencias naturales del modelo acoplado para los diferentes valores de b. Así, para $b \to 0$ las frecuencias del modelo son próximas a las correspondientes a la columna drenada no sumergida. La frecuencia fundamental es prácticamente coincidente en estos casos. La segunda frecuencia, sin embargo, es algo inferior debido a la interacción con el líquido circundante y un progresivo comportamiento no drenado cuando ω aumenta. Para valores crecientes de la constante de disipación (permeabilidad κ decreciente) las frecuencias propias del problema disminuyen y la columna se comporta como un medio elástico sumergido con propiedades no drenadas y contornos impermeables.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Cimentación Superficial Sobre Semiespacio Poroelástico

El último ejemplo estudiado en este Capítulo lo constituye la respuesta de una cimentación superficial circular de radio $\bar{R}$, rígida y sin masa, que descansa sobre un semiespacio poroelástico y sometida a solicitación armónica vertical (Fig.4.19). Las condiciones de contacto entre la cimentación y el semiespacio se consideran relajadas (tensiones rasantes nulas en el esqueleto sólido) y permeables ($\tau = 0$). La solicitación es un desplazamiento vertical armónico de la interfase que afecta al esqueleto sólido exclusivamente mientras la superficie exterior a la cimentación se considera drenada y sin tensiones. Las incógnitas en la interfase serán la componente normal de la tensión sobre el esqueleto y el desplazamiento normal del fluido. Una vez obtenidas las tensiones, éstas serán integradas sobre este contorno para obtener la rigidez o flexibilidad dinámica del conjunto. En la superficie libre, por otra parte, la incógnita es el desplazamiento en ambas fases del medio.

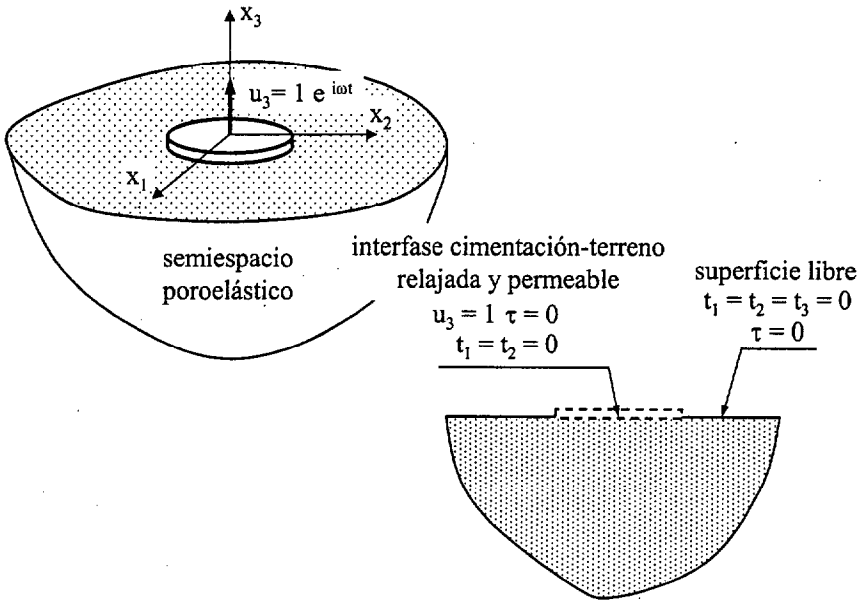

Figura 4.20. Cimentación superficial sobre semiespacio poroelástico

La determinación de la rigidez (flexibilidad) dinámica de cimentaciones superficiales o embebidas en el terreno ha sido un problema muy habitual entre los investigadores del MEC en el campo del análisis estructural. Al margen de trabajos semianalíticos publicados en la primera mitad del siglo XX, las primeras investigaciones que hacen uso del MEC se remontan a las publicaciones de Wong y Luco (1976) o Domínguez (1978) para semiespacios viscoelásticos. En la dirección marcada por estos autores existen multitud de estudios posteriores con valiosas aportaciones realizadas por investigadores nacionales. Entre otros, pueden citarse aquí los trabajos de Gómez-Lera et al. (1985), Abascal y Domínguez (1986), Alarcón et al. (1989), Emperador y Domínguez (1989) o

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Abascal y Domínguez (1990) algunos de los cuales analizan problemas con simetría de revolución con formulaciones del Método adaptadas a esta geometría.

De acuerdo a la teoría de Biot para el semiespacio poroelástico, Halpern y Christiano (1986) obtienen los primeros resultados de flexibilidad para cimentaciones superficiales cuadradas integrando para ello funciones de Green sobre elementos en los que se divide la interfase cimentación-terreno. Posteriormente, aparece un estudio similar para problemas bidimensionales (Kassir y Xu, 1988) y más recientemente, Bougacha et al. (1993) obtienen la impedancia dinámica de cimentaciones superficiales rígidas sobre estratos poroelásticos bidimensionales haciendo uso del MEF. Con la aplicación de la formulación directa del MEC, Chen y Dargush (1995) presentan, entre otros resultados, las curvas de impedancia vertical de una cimentación superficial cuadrada y estudian la influencia de la permeabilidad del medio en esta variable. El mismo año, los ya referenciados Dargush y Chopra (1995) publican resultados de cimentaciones superficiales circulares con un código en el dominio de la frecuencia para geometrías con simetría de revolución. Con la formulación de elementos de contorno utilizada en este trabajo (Domínguez, 1992), ya han sido publicados resultados de cimentaciones superficiales con un modelo acoplado bidimensional (Japón et al., 1997) y algunos resultados tridimensionales de cimentaciones superficiales (Aznárez et al., 1999) y embebidas (Maeso et al., 1999) con el modelo que se presenta en esta Tesis. Un estudio interesante de la influencia de las propiedades del medio y las condiciones de contacto puede verse en el artículo ya citado de Japón et al. (1997) y en un trabajo más reciente para problemas 3D desarrollado en nuestro grupo de trabajo (Gracia, 2002).

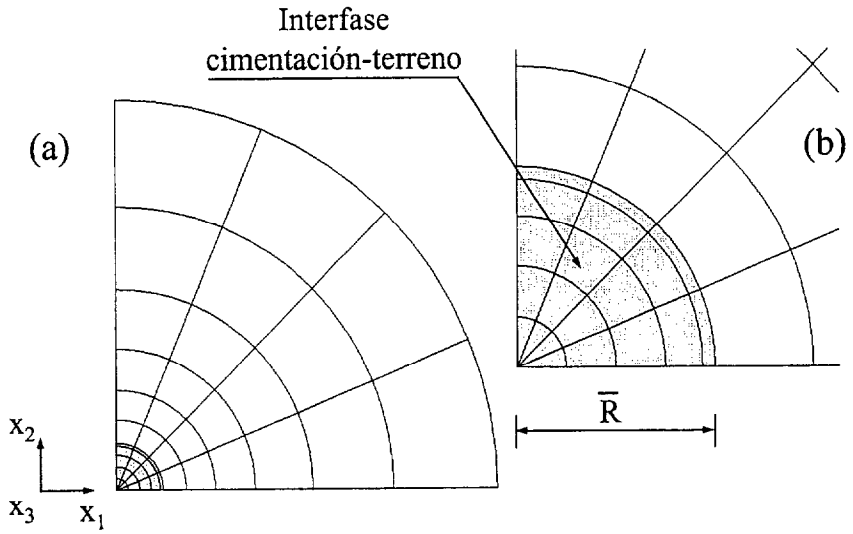

Figura 4.21. Cimentación superficial. Discretización de elementos de contorno

La discretización en elementos de contorno del problema descrito en la Figura 4.20 se presenta en la Figura 4.21. En ella aparecen discretizadas la interfase cimentación terreno (en sombra y en detalle en Fig.4.21b) y la superficie libre drenada en cantidad suficiente $(7\bar{R})$. Debido a la simetría del problema, sólo se discretizará un cuadrante,

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

imponiendo el código las condiciones de simetría en los dos planos ortogonales de forma automática.

Hacer notar que, al tratarse de un problema donde el dominio en estudio es infinito, cualquier técnica indirecta de evaluación de los términos singulares a través del MSR exige *cerrar* el contorno con elementos *ficticios*, esto es, elementos que sólo se emplean para integrar sobre ellos la solución fundamental estática, pero sobre los cuales no se evalúa incógnita alguna. Esto representa una importante desventaja del procedimiento indirecto respecto a la evaluación directa del VPC.

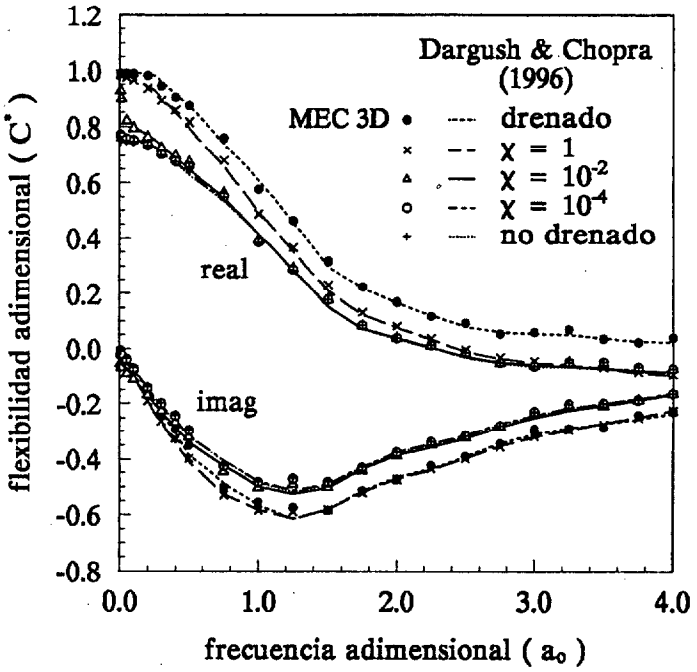

Figura 4.22. Cimentación superficial circular sobre semiespacio poroelástico. Flexibilidad vertical. Partes real e imaginaria

Los resultados de referencia son los publicados por Dargush y Chopra (1996) para este problema haciendo uso de un modelo axilsimétrico. Estos autores utilizan un semiespacio poroelástico con las siguientes propiedades adimensionales: $\mu = 1$, $\upsilon = 1/3$, $\phi = 0.3$, $R = 42.86$, $Q = 100$, $\rho_s = 1.43$, $\rho_f = 0.5$ y $\rho_a = 0$. Representan sus resultados para tres valores de la permeabilidad κ en términos de un parámetro adimensional χ cuya expresión es:

$$\chi = \frac{c_v}{R c_S} \tag{4.46}$$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

siendo c_v el coeficiente de consolidación del medio en el problema cuasiestático que se escribe:

$$c_v = \kappa Q \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda_u + 2\mu} \tag{4.47}$$

y c_S la velocidad de propagación de la onda de corte a través del esqueleto sólido drenado (2.73). Una visión comparativa de los resultados se muestra en la Figura 4.22 donde, además, se representa la flexibilidad para los comportamientos drenado y no drenado ($\upsilon_u = 0.495$) del medio. Hacer notar que los valores obtenidos por estos autores (líneas continuas) se han extraído directamente de las figuras de su artículo y podrían tener pequeñas discrepancias con los resultados numéricos.

En el eje de ordenadas se representa la flexibilidad normalizada con el valor estático para el problema drenado:

$$C^* = \frac{4\mu \bar{R} C}{1 - \upsilon} \tag{4.48}$$

y en abcisas la frecuencia adimensional $a_o = \omega \bar{R}/c_S$. A la vista de la figura se aprecia un buen acuerdo con los resultados obtenidos con el modelo MEC 3D (símbolos) en todo el rango de frecuencias tanto en la componente real como imaginaria de C^*.

Analizando el comportamiento del medio, puede observarse que la respuesta del medio poroelástico transita entre los resultados correspondientes a los dos sólidos elásticos en todo el rango de frecuencias. A bajas frecuencias $(0 - 0.5)$, el caso más permeable ($\chi = 1$) tiene una respuesta próxima al medio drenado. A medida que la frecuencia se incrementa, se produce un acercamiento progresivo al comportamiento no drenado y se hacen coincidentes para valores de $a_o \geq 2.5$. Para el resto de valores de la permeabilidad la respuesta es no drenada en todo el rango salvo un ligero repunte de la curva para $\chi = 10^{-2}$ a muy baja frecuencia. Este comportamiento permite vislumbrar algo ya comentado en el segundo ejemplo de este Capítulo, y que aquí también se produce: en el límite ($a_o \to 0$) la flexibilidad del medio poroelástico para cualquier valor de χ coincide con la correspondiente al semiespacio elástico drenado ($C^* = 1$).

Referencias

ABRAMOWITZ, M. y STEGUN, I., 1972, "Handbook of Mathematical Functions", Dover, NY.

ABASCAL, R. y DOMÍNGUEZ, J., 1986, "Vibrations of Footings on Zoned Viscoelastic Soil", *J. Eng. Mech., ASCE*, **112**, 433-447.

ABASCAL, R. y DOMÍNGUEZ, J., 1990, "Dynamic Response of Two-Dimensional Foundations Allowed to Uplift", *Computers & Geotechnics*, **9**, 113-129.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

ALARCÓN, E., CANO, J.J. y DOMÍNGUEZ, J., 1989, "Boundary Element Approach to the Dynamic Stiffness Functions of Circular Foundations", *Int. J. Num. Anal. Meth. in Geomech.*, **13**, 645-664.

AZNÁREZ, J.J., MAESO, J. y CHIRINO, F., 1999, "Una Técnica Numérica para la Determinación de Rigideces Dinámicas de Cimentaciones sobre Suelos Saturados", *Memorias* 1ER *Congreso Nacional de Ing. Sísmica*, **Ib**, 417-425.

BOUGACHA, S., ROËSSET, J.M. y TASSOULAS, J.L., 1993, "Dynamic Stiffness of Foundations on Fluid-filled Poroelastic Stratum", *J. Eng. Mech., ASCE*, **119**(8), 1649-1662.

BREBBIA, C.A. y DOMÍNGUEZ, J., 1992, "Boundary Elements. An Introductory Course", Computational Mechanics Publications, Southampton y McGraw-Hill, NY.

CERROLAZA, M. y ALARCÓN, E., 1989, "A Bicubic Transformation for the Numerical Evaluation of the Cauchy Principal Value Integrals in Boundary Elements", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **28**, 987-999.

CHEN, J. y DARGUSH, G.F., 1995, "Boundary Element Method for Dynamic Poroelastic and Thermoelastic Analyses", *Int. J. Solid & Struct.*, **32**(15), 2257-2278.

CHENG, A.H.D., BADMUS, T y BESKOS, D.E., 1991, "Integral Equation for Dynamic Poroelasticity in Frequency Domain with BEM Solution", *J. Eng. Mech., ASCE*, **117** (5), 1136-1157.

CHIRINO, F., MAESO, O. y AZNÁREZ, J.J., 2000, "Una Técnica Simple para el Cálculo de las Integrales en el Sentido del Valor Principal en el MEC 3D", *Rev. Int. Met. Num. para Cálculo y Diseño en Ing.*, **16**(1), 77-95.

CRUSE, T.A., 1969, "Numerical Solutions in Three Dimensional Elastostatics", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **5**, 1259-1274.

DARGUSH, G.F. y CHOPRA, M.B., 1996, "Dynamic Analysis of Axisymmetric Foundations on Poroelastic Media", *J. Eng. Mech., ASCE*, **122**(7), 623-632.

DAVIS, P.J. y RABINOWITZ, P., 1984, "Methods of Numerical Integration", Academic Press, Orlando, Florida.

DOMÍNGUEZ, J., 1978, "Dynamic Stiffness of Rectangular Foundations", *Research Report R*78-20, *Dept. of Civil Eng*, M.I.T., Cambridge, Massachussetts.

DOMÍNGUEZ, J., 1992, "Boundary Element Approach for Dynamic Poroelastic Problems", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **35**, 307-324.

DOMÍNGUEZ, J., 1993, "Boundary Elements in Dynamics", Computational Mechanics Publications, Southampton y Elsevier Applied Science, NY.

DOMÍNGUEZ, J., 1995, "Formulación Estática y Dinámica de la Poroelasticidad", E.T.S.I.I. Universidad de Sevilla.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

DOMÍNGUEZ, J. y ABASCAL, R., 1984, "On the Fundamental Solutions for the Boundary Integral Equations Method in Static and Dynamic Elasticity", *Eng. Anal.*, **1**(3), 128-134.

DOMÍNGUEZ, J., GALLEGO, R. y JAPÓN, B.R., 1997, "Effects of Porous Sediments on Seismic Response of Concrete Gravity Dams", *J. Eng. Mech., ASCE*, **123** (4), 302-311.

EMPERADOR, J.M. y DOMÍNGUEZ, J., 1989, "Dynamic Response of Axisymmetric Embebed Foundations", *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, **18**, 1105-1117.

GIUGGIANI, M. y CASALINI, P., 1987, "Direct Computation of Cauchy Principal Value Integrals in Advanced Boundary Elements", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **24**, 1711-1720.

GIUGGIANI, M. y GIGANTE, A., 1990, "A General Algorithm for Multidimensional Cauchy Principal Value Integrals in the Boundary Element Method", *J. Appl. Mech., ASME*, **57**, 906-915.

GÓMEZ-LERA, M.S., DOMÍNGUEZ, J. y ALARCÓN, E., 1985, "On the Use of 3-D Fundamental Solutions for Axisymmetric Steady-State Dynamic Problems", *Proc. 7th. Int. Conf. BEM Eng.*, C.A. Brebbia Ed, **6**, 127-136, Springer-Verlag, Berlín.

GRACIA, I., 2002, "Aplicación del MEC a la Determinación de Rigideces Dinámicas de Cimentaciones sobre Suelos Poroelásticos", *Proyecto Fin de Carrera*, Univ. de Las Palmas de G.C.

HALPERN, M.R. y CHRISTIANO, P., 1986, "Steady-state Harmonic Response of a Rigid Plate Bearing on a Liquid-saturated Poroelastic Halfspace", *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, **14**, 439-454.

HARTMANN, F., 1980, "Computing C-Matrix in Non-Smooth Boundary Points", *New Developments in Boundary Element Methods*, C.A. Brebbia Ed., 367-379, Butterworths, London.

HARTMANN, F., 1981, "The Somigliana Identity on Piecewise Smooth Surfaces", *J. of Elasticity*, **11**, 403-423.

JAPÓN, B.R., GALLEGO, R. y DOMÍNGUEZ, J., 1997, "Dynamic Stiffness of Foundations on Saturated Poroelastic Soils", *J. Eng. Mech., ASCE*, **123**(11), 1121-1129.

KASSIR, M.K. y XU, J., 1988, "Interaction Functions of a Rigid Strip Bounded to Saturated Elastic Halfspace", *Int. J. Solid & Struct.*, **24**, 915-936.

LACHAT, J.C. y WATSON, J.O., 1976, "Effective Numerical Treatment of Boundary Integral Equations", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **10**, 991-1005.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

LI, H.B., HAN, G.M. y MANG, H.A., 1985, "A New Method for Evaluating Singular Integrals in Stress Analysis of Solids by the Direct Boundary Element Method", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **21**, 2071-2098.

MAESO, O., 1992, "Modelo para el Análisis Sísmico de Presas Bóveda Incluyendo los Efectos de Interacción Suelo-Agua-Estructura", *Tesis Doctoral*, Univ. de Las Palmas de G.C.

MAESO, O., AZNÁREZ, J.J. y CHIRINO, F., 1999, "Aplicación del MEC a la Determinación de Rigideces Dinámicas de Cimentaciones Embebidas sobre Suelos Poroelásticos", *Métodos Numéricos en Ingeniería*, R. Abascal, J. Domínguez y G. Bugeda Ed., SEMNI.

MEDINA, F., 1987, "Análisis de la Respuesta Sísmica de Presas Incluyendo Efectos de Interacción Suelo-Fluido-Estructura", *Tesis Doctoral*, Universidad de Sevilla.

PARÍS, F., 1978, "El Método de los Elementos de Contorno en la Teoría del Potencial y la Elasticidad", *Tesis Doctoral*, Univ. Politécnica de Madrid.

RICE, J. y CLEARY, M.P., 1976, "Some Basic Stress Diffusion Solutions for Fluid Saturated Porous Media with Compressible Constituents", *Rev. Geophys. Space Phys.*, **14**, 227-241.

SARIHAN, V. y MUKHERJEE, S., 1982, "Axisymmetric Viscoplastic Deformation by the Boundary Element Method", *Int. J. Solids Struct.*, **18**, 1113-1128.

STROUD, A.H. y SECREST, D., 1966, "Gaussian Quadrature Formulas", Prentice-Hall, NY.

TELLES, J.C., 1987, "A Selfadaptative Coordinate Transformation for Efficient Evaluation of General Boundary Element Integrals", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **24**, 937-959.

WONG, H.L. y LUCO, J.E., 1976, " Dynamic Response of Rigid Foundations of Arbitrary Shape", *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, **4**, 579-587.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Capítulo 5

Efectos de la Distribución Espacial de la Excitación en la Respuesta Sísmica de Presas Bóveda

En el capítulo 2 se han planteado las hipótesis básicas de los modelos y las ecuaciones que gobiernan los diferentes medios que configuran el problema. En el capítulo 3 se introdujo la estructura matemática del procedimiento escogido para la resolución de tales ecuaciones, que consiste en el planteamiento integral del problema en forma apta para ser abordado por medio del Método de los Elementos de Contorno. Finalmente en el capítulo 4 se comentaron los aspectos numéricos asociados, así como la validación numérica del procedimiento. Estamos ya, pues, en disposición de abordar el problema que es el objeto de esta Tesis, y que consiste en el estudio del comportamiento sísmico de presas bóveda, y en concreto en el análisis paramétrico de la influencia que en dicha respuesta tienen los aspectos más relevantes del problema. El estudio se va a desarrollar en dos capítulos sucesivos. En el capítulo presente se analiza la influencia que tienen aspectos relacionados con la naturaleza y definición de la excitación sísmica, con fenómenos locales de amplificación, y con los efectos de interacción mutua suelo-agua-estructura. El contenido y la estructura de este capítulo se ajusta con bastante precisión con un artículo homónimo de reciente publicación (Maeso et al. 2002b) y del que es coautor el firmante de esta Tesis. El próximo capítulo está dedicado al estudio de la posible influencia de los sedimentos de fondo en el embalse, en función de sus características, en el comportamiento dinámico del sistema acoplado.

5.1 Introducción

En muchos casos el tamaño de una presa bóveda es del mismo orden de magnitud que la longitud de las ondas sísmicas en el terreno de cimentación. Como consecuencia, el campo de desplazamientos en los estribos de la presa provocado por un sismo no es uniforme. Así, puntos diferentes en la cimentación de una gran presa bóveda pueden verse sometidos a valores de aceleración distintos (incluso en desfase) en el mismo instante de tiempo. La importancia de este efecto depende del tamaño de la presa, de la longitud de las ondas sísmicas y la dirección de propagación de las mismas, pero en cualquier caso asumir una simplificación de la excitación sísmica que suponga un campo uniforme de desplazamientos-aceleraciones a lo largo de la interfase presa-terreno, no

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

sólo deja de representar los efectos de interacción mutua entre la presa y la base rocosa, sino que también altera la naturaleza real de la solicitación y puede llevar a conclusiones erróneas como quedará de manifiesto a lo largo de este capítulo.

Las presas bóveda están normalmente localizadas en cañones estrechos. Su procedimiento de construcción, el efecto arco y la amplificación de la solicitación sísmica producida por la cerrada del cañón hacen necesario el uso de modelos tridimensionales, y así ha sido puesto de manifiesto por diferentes autores (ver, por ejemplo, Hall y Chopra 1983; Hall 1986). Puede decirse por tanto que el comportamiento sísmico de presas bóveda es claramente tridimensional al contrario que el de presas de gravedad, las cuales están localizadas normalmente en valles más anchos, tienen una geometría uniforme a lo largo de la dirección transversal y en ocasiones cuentan con juntas de contracción. En estos casos puede considerarse que la presas de gravedad presentan un comportamiento de deformación plana y pueden ser estudiadas con modelos bidimensionales como apuntan entre otros Chopra y Chakrabarti (1981), Fenves y Chopra (1985) y Lotfi et al. (1987).

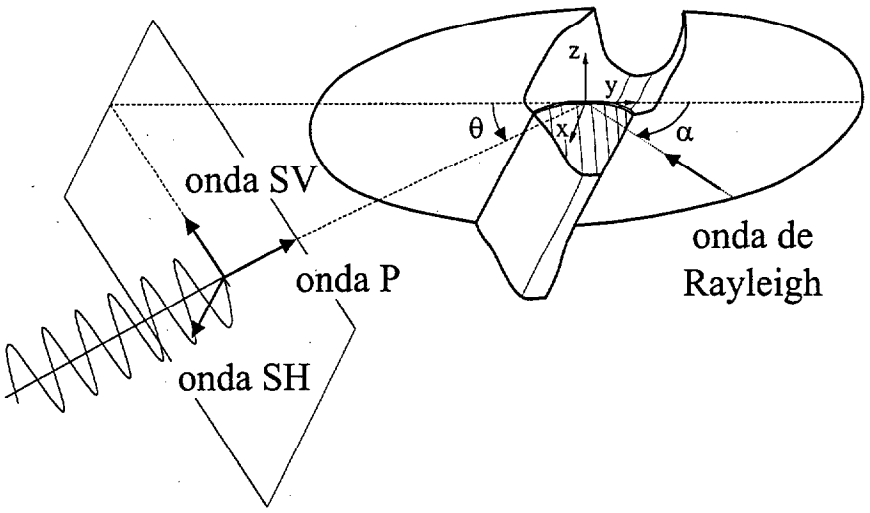

Figura 5.1. Descripción del problema. Respuesta dinámica de presas bóveda.
Onda plana incidente con ángulo variable

La Figura 5.1 muestra el tipo de problema que se pretende resolver. Se trata de una presa bóveda que cierra un cañón cuya geometría será en general irregular. Se van a considerar diversos cañones con diferentes geometrías. El nivel de llenado del embalse podrá asimismo ser variable. Se desea conocer la respuesta dinámica de la presa ante una excitación consistente en una onda armónica plana que incide con ángulo variable desde zonas alejadas. Se trata de un problema tridimensional que involucra medios de diferente naturaleza (presa de hormigón, suelo y agua) para los cuales cabe esperar un comportamiento acoplado muy distinto del que presentarían actuando independientemente. Por tanto, cualquier modelo que pretenda abordar el problema

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

habrá de tener en cuenta la geometría real tridimensional, los efectos de interacción mutua así como la naturaleza espacial de la excitación.

Entre los diferentes modelos numéricos propuestos para abordar el problema cabe destacar los trabajos de Fok y Chopra (1986, 1987). Se trata de un modelo tridimensional de elementos finitos que tiene en cuenta la existencia de los tres medios, la compresibilidad de agua y la flexibilidad del suelo. La presa se representa mediante elementos de lámina gruesa. Mientras la interacción presa-base rocosa se reproduce de forma rigurosa, entre agua y suelo dicha interacción se aproxima a través de un coeficiente de absorción cuyo valor depende de las propiedades del fondo del embalse. El suelo se representa a través de una malla de elementos finitos que se exiende hasta cierta distancia de la presa. Los efectos de reflexión que implican el truncar la discretización de este medio se evitan considerando que sus elementos tienen masa nula. Las principales limitaciones de este modelo derivan precisamente de la representación del suelo como un medio acotado sin masa. Por tanto, y si bien este modelo representó un avance importante en el tratamiento riguroso del problema, las simplificaciones descritas le impiden considerar adecuadamente el efecto de interacción mutua. Asimismo, este modelo no puede tener en cuenta la influencia que en la respuesta tiene la distribución espacial de la excitación. Posteriormente Zhang y Chopra (1991b) y Tan y Chopra (1995a, b) mejoraron el modelo anterior. En esta nueva versión el suelo es representado usando una formulación bidimensional (2D) de elementos de contorno combinada con una serie de expansión según la dirección axial del cañón. De este modo se evitan algunos de los inconvenientes anteriores. Aún así el estudio de la presa y suelo no puede realizarse conjuntamente y además el modelo supone necesariamente una geometría uniforme e indefinida del cañón en dirección longitudinal.

Son pocos los estudios publicados que incluyen una excitación no uniforme para presas bóveda tridimensionales (Chen y Hou 1987; Zhan y Zhao 1988; Nowak y Hall 1990; Camara 2000). Todos coinciden en que los efectos de la variación espacial de las ondas son relevantes pero todos incluyen importantes simplificaciones. Nowak y Hall (1990) estudiaron los efectos de una excitación no uniforme sobre la respuesta sísmica de presas bóveda usando una formulación de elementos finitos donde la masa del suelo de cimentación no era incluida. Ellos consideraron un modelo de elementos de contorno 2D para obtener los desplazamientos de campo libre de un cañón de sección constante bajo los efectos de una onda que se propaga perpendicularmente a su eje. Camara también supone un cañón uniforme. En su modelo acoplado la impedancia de la cimentación se obtiene de una representación 2D de elementos de contorno y el fondo del embalse es rígido. Parámetros relacionados con la no uniformidad de la excitación del sismo y la influencia de la topografía local merecen estudios más profundos.

Una representación tridimensional (3D) de elementos de contorno constituye una alternativa más realista que los elementos finitos sin masa o las formulaciones de contorno 2D. Maeso y Domínguez (1993) y Domínguez y Maeso (1993) presentaron un modelo 3D de elementos de contorno para el problema acoplado presa-suelo-agua. Dicho modelo permite el estudio dinámico simultáneo de regiones sólidas viscoelásticas

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

(presa y suelo) y regiones fluidas compresibles (agua embalsada). Las tres regiones son discretizadas en elementos de contorno y los efectos de interacción entre cualesquiera dos de estos dominios se tienen en cuenta de forma rigurosa imponiendo condiciones de equilibrio y compatibilidad en las interfases. El agua se modela como un fluido compresible, y el suelo como un medio elástico no finito con sus verdaderas propiedades. Para representar la naturaleza no acotada del terreno, en relación con el tamaño de la presa, la malla de elementos de contorno se extiende hasta cierta distancia de aquella, donde se deja abierta. Como sólo es necesario discretizar las superficies de la presa y el terreno, es posible tener en cuenta geometrías irregulares del embalse con un esfuerzo de discretización razonable. Así, el modelo no sólo tiene en cuenta la presencia de desplazamientos diferenciales que son importantes debido al tamaño de la estructura, sino que también permite representar otros factores (topográficos, geológicos, etc) que afectan a la definición de la excitación. Este modelo ha sido recientemente ampliado por Maeso et al. (1999)(2002a,c) y Aznárez et al. (2001) para incluir sedimentos de fondo en el embalse como una nueva región de elementos de contorno con propiedades poroelásticas. De este modo es posible estudiar la influencia de los sedimentos, capaces de absorber cierta cantidad de energía hidrodinámica del sistema, sobre el comportamiento sísmico de la presa. Este estudio será el objeto del próximo capítulo.

En el capítulo presente vamos a analizar la influencia de la naturaleza viajera de las ondas y los efectos de amplificación local, factores ambos que ya hemos identificado como determinantes sobre la respuesta sísmica de presas bóveda. De igual forma que en algunos trabajos recientes (Maeso et al. 2000, 2001 y 2002a,b) un tren de ondas elásticas viajando en el suelo en dirección a la presa se incluye en el modelo 3D de elementos de contorno. Para un mejor entendimiento de los fenómenos de difracción de las ondas sísmicas, antes de analizar propiamente la respuesta de la presa, focalizaremos nuestro análisis en el estudio de la difracción de ondas producida por el cañón, y cómo esto altera los desplazamientos de campo libre en la superficie del suelo. En concreto estudiaremos la influencia de la profundidad y de cambios en la geometría del cañón sobre los desplazamientos de campo libre, contemplando tres geometrías diferentes para aquél. Sólo posteriormente, y ya con el conocimiento de cómo alteraciones topográficas modifican la naturaleza real de la solicitación, abordaremos el análisis en sí de la respuesta de la presa, la influencia del ángulo de incidencia de las ondas, del tipo de éstas, y de la presencia o no de agua en el embalse. El estudio se llevará a cabo para ondas armónicas planas longitudinales, ondas de corte y ondas superficiales de Rayleigh.

Son numerosos los trabajos publicados que demuestran la importancia de los efectos locales de amplificación del movimiento del suelo producidos por la presencia de un cañón o por depósitos aluviales. La mayoría de estos trabajos han empleado modelos bidimensionales: Trifunac (1973) presentó una solución analítica para el caso de ondas SH y cañónes cilíndricos; Dravinsky (1982), Wong (1982), Sanchez-Sesma et al. (1985) y Nowak y Hall (1990) obtuvieron soluciones basadas en formulaciones en ecuaciones integrales para diferentes tipos de ondas que se desplazan en dirección normal al eje del cañón. Existen también algunos estudios tridimensionales pero éstos están limitados a determinadas geometrías regulares (Sanchez-Sesma 1983; Zhang y Chopra 1991a). El

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

modelo que aquí se presenta está basado en la representación tridimensional conjunta de los tres medios (presa, agua y suelo). Por tanto, tanto los efectos de interacción como los efectos espaciales de la solicitación, puede ser contemplados para geometrías irregulares del cañón y del embalse.

5.2 Elementos de Contorno

Las ecuaciones básicas que definen el modelo acoplado de elementos de contorno que permite abordar el problema ya han sido presentadas. Pese a ello, nos parece conveniente revisar brevemente su estructura formal, con el ánimo de dar complitud a este capítulo y para facilitar la lectura del próximo apartado en el que se revisa la formulación para introducir el modelo de excitación sísmica.

El punto de partida para el análisis dinámico en el dominio de la frecuencia mediante el MEC de los medios viscoelásticos presa y terreno, lo constituye la representación integral de desplazamientos en el contorno Γ de cada uno de ellos. En notación vectorial, para cualquier punto i de Γ puede escribirse (3.90):

$$\mathbf{c}^i \mathbf{u}^i + \int_\Gamma \mathbf{t}^* \mathbf{u}\, d\Gamma = \int_\Gamma \mathbf{u}^* \mathbf{t}\, d\Gamma \qquad (5.1)$$

donde, como ya sabemos, $\mathbf{u}$ y $\mathbf{t}$ representan los vectores desplazamiento y tensión en el contorno, siendo $\mathbf{u}^*$ y $\mathbf{t}^*$ los tensores correspondientes a la solución fundamental en los mismos puntos, y $\mathbf{c}^i$ una matriz de coeficientes conocidos que sólo depende de la geometría local en i.

Para el agua embalsada, admitiremos que se trata de un fluido compresible no viscoso, sometido a un estado armónico de pequeñas perturbaciones. Así, la formulación del MEC para el dominio agua (problema escalar) se plantea en términos similares:

$$c^i p^i + \int_{\Gamma^a} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}^* p\, d\Gamma = \int_{\Gamma^a} p^* \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}\, d\Gamma \qquad (5.2)$$

representando p la presión hidrodinámica en los puntos del contorno Γ^adel embalse, p^* la solución fundamental del semiespacio para la misma variable en estos puntos, y donde $\mathbf{n}$ representa la normal unitaria exterior a Γ^a.

La discretización de los contornos de presa, fondo de embalse, y superficie libre del suelo, en elementos (elementos cuadráticos) permite plantear numéricamente estas ecuaciones. Así, el sistema de 3N ecuaciones en que se convierte (5.1) será de la forma:

$$\mathbf{H}\,\mathbf{u} = \mathbf{G}\,\mathbf{t} \qquad (5.3)$$

para las regiones viscoelásticas (presa y suelo), siendo N el número de nodos en el contorno Γ, y donde ahora los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{t}$ contienen todos los valores nodales del problema en desplazamientos y tensiones respectivamente. De forma análoga se plantea

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

el problema escalar en la región fluida. En este caso el sistema de N^aecuaciones en que se convierte (5.2) adopta la forma:

$$\mathbf{H}^a \mathbf{p} = \mathbf{G}^a \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{n}} \tag{5.4}$$

siendo N^ael número de nodos en Γ^a. Los términos de las matrices **H**, **G**, $\mathbf{H}^a$ y $\mathbf{G}^a$ están constituidos por integrales de la solución fundamental correspondiente a cada tipo de medio, en cada elemento. El sistema de ecuaciones que representa el comportamiento dinámico acoplado del sistema presa-suelo-agua se obtiene de las ecuaciones (5.3) y (5.4), y de las condiciones de equilibrio y compatibilidad sobre las interfases entre los medios. Los aspectos numéricos relacionados con la evaluación de los coeficientes de las matrices, así como con la imposición de las condiciones de contorno, ya han sido comentados en los Capítulos 4 y 2, respectivamente.

5.3 Modelo de la Excitación Sísmica.

La excitación sísmica se ha modelado como un campo de ondas armónicas planas en el terreno que incide hacia la zona de localización del embalse desde el infinito. La presencia del sistema cañón-presa-embalse provoca una distorsión del campo de movimientos respecto del producido por el tren de ondas en zonas alejadas del semiespacio. Así, el campo de desplazamientos en el terreno puede considerarse como la superposición de dos problemas (Fig. 5.2). El primero corresponde al campo provocado por el tren de ondas incidente sobre el semiespacio viscoelástico uniforme ($\mathbf{u}_\mathbf{I}^s$) y cuya expresión analítica es perfectamente conocida (ver p.e. Eringen, A.C. y Suhubi, E., 1975). El segundo representa el campo difractado por la presencia del sistema cañón-presa-embalse ($\mathbf{u}_\mathbf{D}^s$). El campo total ($\mathbf{u}_\mathbf{T}^s$) en el terreno será la suma de ambos, incidente y difractado ($\mathbf{u}_\mathbf{T}^s = \mathbf{u}_\mathbf{I}^s + \mathbf{u}_\mathbf{D}^s$) mientras que en la presa y el embalse sólo existe campo difractado ($\mathbf{u}_\mathbf{T}^p = \mathbf{u}_\mathbf{D}^p$, $\mathbf{u}_\mathbf{T}^a = \mathbf{u}_\mathbf{D}^a$).

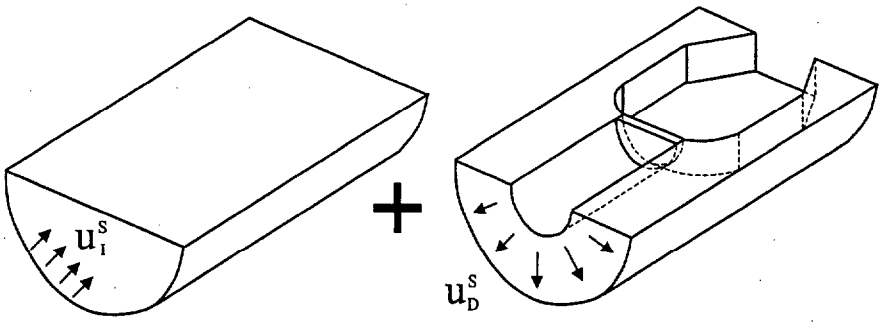

Figura 5.2. Modelo de la excitación sísmica

Siendo conocido explicitamente el campo incidente, el problema se plantea entonces en la evaluación del campo difractado, y para ello empleamos el MEC. Así, el sistema de

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

ecuaciones de elementos de contorno planteado para el campo difractado en las dos regiones sólidas (presa de hormigón y terreno de cimentación) y en la región fluida (agua embalsada) conduce a:

$$\text{Suelo de cimentación} \quad \mathbf{H}^s \mathbf{u}_\mathbf{D}^s = \mathbf{G}^s \mathbf{t}_\mathbf{D}^s \tag{5.5.a}$$

$$\text{Presa bóveda} \quad \mathbf{H}^p \mathbf{u}_\mathbf{D}^p = \mathbf{G}^p \mathbf{t}_\mathbf{D}^p \tag{5.5.b}$$

$$\text{Agua embalsada} \quad \mathbf{H}^a \mathbf{p}_\mathbf{D}^a = \mathbf{G}^a \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{n}} \right)_\mathbf{D}^a \tag{5.5.c}$$

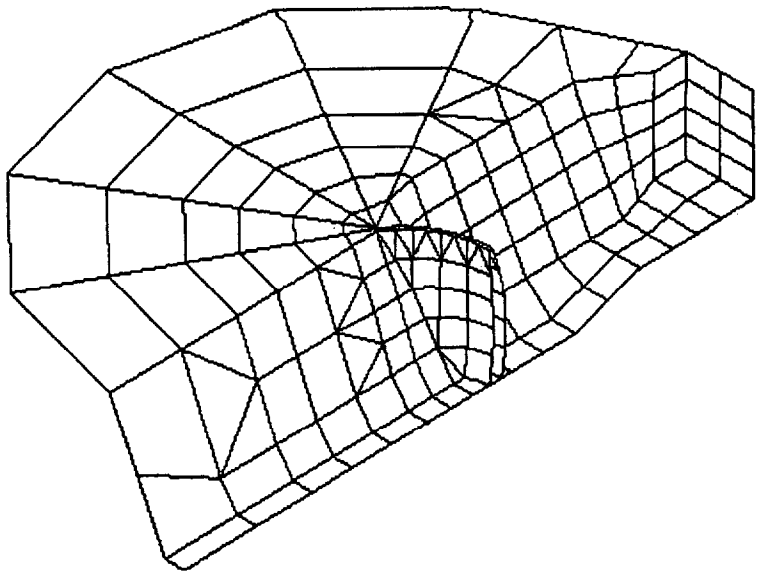

Figura 5.3. Modelo de elementos de contorno para la presa de Morrow Point sobre base flexible, profundidad del cañón: 142 m

La Figura 5.3 muestra una de las mallas de elementos de contorno utilizadas. Se va a resolver un problema simétrico (con respecto al plano vertical que contiene al eje longitudinal del cañón) por lo que sólo se muestra la mitad de la geometría completa. Nótese que si bien la superficie libre del suelo (medio soporte de las ondas excitadoras) se extiende hasta el infinito, la malla de elementos de contorno sólo se extiende hasta cierta distancia desde la presa, dejando la malla del suelo abierta a partir de ese punto. Esto no produce errores significativos debido a que las ecuaciones (5.5) están escritas en términos del campo difractado, el cual satisface las condiciones de radiación. Tan sólo será necesario evaluar mediante una serie de pruebas numéricas la distancia desde la presa que garantice el amortiguamiento del campo difractado, lo cual definirá la distancia de superficie libre a discretizar. Por contra, para poder representar un embalse que se extiende indefinidamente aguas arriba es preciso utilizar un contorno absorbente en el canal de agua (Domínguez y Meise, 1991), y así se ha hecho en la malla de la Fig. 5.3. Geometrías más realistas del embalse, en las que la profundidad del agua decrece

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

aguas arriba con la distancia desde la presa, no necesitan de contornos absorbentes en el agua y pueden ser representadas fácilmente en su geometría real con un modelo de elementos de contorno.

Teniendo en cuenta las consideraciones realizadas para el campo total en cada dominio, la ecuación (5.5) puede re-escribirse en términos del campo total de desplazamientos y tensiones en cada dominio como:

$$\text{Suelo de cimentación} \qquad \mathbf{H}^s \mathbf{u}_\mathbf{T}^s - \mathbf{G}^s \mathbf{t}_\mathbf{T}^s = \mathbf{H}^s \mathbf{u}_\mathbf{I}^s - \mathbf{G}^s \mathbf{t}_\mathbf{I}^s \quad (5.6.a)$$

$$\text{Presa bóveda} \qquad \mathbf{H}^p \mathbf{u}_\mathbf{T}^p - \mathbf{G}^p \mathbf{t}_\mathbf{T}^p = \mathbf{0} \quad (5.6.b)$$

$$\text{Agua embalsada} \qquad \mathbf{H}^a \mathbf{p}_\mathbf{T}^a - \mathbf{G}^a \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{n}} \right)_\mathbf{T}^a = \mathbf{0} \quad (5.6.c)$$

Sobre esta ecuación, ya en términos del campo total, se aplican las condiciones de contorno y las condiciones de interfase. En la superficie libre del terreno y en los paramentos de la presa que no están en contacto con agua se aplica la condición de tensión nula. En los elementos de la interfase presa-terreno se prescribe equilibrio de tensiones y continuidad de desplazamientos. En las interfases entre la región agua y las regiones sólidas se establece la ausencia de tensión tàngencial en el sólido, así como la igualdad de la tensión normal y la presión hidrodinámica en el fluido. La condición cinemática en este caso es la igualdad de desplazamientos en la dirección normal a la interfase.

5.4 Estudio Numérico

Para el análisis realizado se ha elegido la presa de Morrow Point, de 142 m de altura, cuyo comportamiento sísmico ya ha sido estudiado anteriormente por otros autores. Estudiaremos la influencia sobre la respuesta de esta presa que tienen la distribución espacial de la excitación y la geometría del cañón. Datos sobre la geometría de la presa y del cañón pueden encontrarse en Hall y Chopra (1983). Las propiedades de los materiales implicados en el análisis se toman del ya citado artículo de Maeso y Domínguez (1993). La presa de hormigón y el suelo de cimentación se consideran como medios viscoelásticos homogeneos, lineales e isótropos. El hormigón de la presa tiene densidad ρ_p = 2481.5 kg/m^3, coeficiente de Poisson ν_p = 0.2, módulo de elasticidad transversal G_p = 11500 Mpa, y un coeficiente de amortiguamiento interno ξ_p = 0.05. El suelo de cimentación tiene una densidad de ρ_s = 2641.65 kg/m^3, y el mismo módulo de elasticidad, coeficiente de Poisson y coeficiente de amortiguamiento interno que el hormigón. Para el agua se ha adoptado una velocidad de propagación de las ondas de presión de 1438 m/s y una densidad de ρ_a = 1000 kg/m^3.

La Figura 5.3 muestra una de las discretizaciones de elementos de contorno empleadas. Se han utilizado dos tipos de elementos: elementos cuadriláteros de nueve nodos y triangulares de seis. Ambos tienen aproximación parabólica tanto de la

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

geometría como de las variables en el contorno. Teniendo en cuenta el efecto de radiación (y en menor medida el amortiguamiento del suelo) el campo difractado se amortigua a cierta distancia de la presa, con lo que sólo es necesario discretizar una cantidad finita de superficie libre. En el modelo presentado la discretización de la superficie del suelo se extiende del orden de 2.5 veces la altura de la presa. Discretizaciones más extensas no representaron cambios apreciables en los resultados obtenidos. Asimismo, la topografía del cañón aguas abajo a distancias de la presa donde se trunca la discretización no produjeron diferencias significativas.

En lo que al tamaño de los elementos empleados se refiere, éstos no superarán la semi-longitud de la onda excitadora. Sólo para la superficie libre del terreno y en zonas alejadas de la presa, la longitud de los elementos supera esta cantidad. En este estudio se han utilizado discretizaciones más refinadas de la superficie libre pero los resultados no experimentaron cambios significativos.

Los diferentes casos de excitación analizados se esquematizan en la Fig. 5.1. El origen de coordenadas está localizado en el punto medio de la coronación de la presa, con el eje x según el eje del cañón y el plano y-z tangente a la superficie media de la bóveda. Se han considerado distintos tipos de ondas armónicas planas que inciden sobre la localización de la presa desde direcciones contenidas en el plano vertical y-z formando un ángulo θ con la dirección horizontal. Los tres tipos de ondas volumétricas incidentes estudiadas son: ondas de corte cuyos desplazamientos de campo lejano sólo contienen componente anteroposterior (en relación a la dirección x del cañón)(ondas *SH*); ondas transversales cuyos desplazamientos de campo lejano están contenidos en un plano vertical (ondas *SV*), y ondas longitudinales (ondas *P*). También se estudia la influencia de la distribución espacial de ondas superficiales de Rayleigh. Ondas de este tipo propagándose en el plano x-y con diferentes direcciones aguas arriba y aguas abajo formando diferentes ángulos α con el eje del cañón han sido consideradas.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

5.5 Desplazamientos de Campo Libre

Antes de analizar propiamente el comportamiento dinámico de la presa bóveda de Morrow-Point estudiaremos el problema de campo libre para dos geometrías diferentes del cañón. La primera corresponde al cañón de 142 m de profundidad mostrado en la Fig. 5.3; el segundo, de 284 m de profundidad (doble del primero) se muestra en la Fig. 5.4. En ambos casos el material de suelo de cimentación es el mismo, y corresponde al ya definido en el apartado anterior. Las discretizaciones de elementos de contorno empleadas para el análisis de los desplazamientos de campo libre se muestran en las figuras 5.5 y 5.6, donde por razones de simetría sólo se representa la mitad de los modelos.

Se estudiarán los desplazamientos de campo libre cuando ambos cañones se encuentran bajo los efectos de una onda plana armónica *SH* con incidencia vertical. La amplitud de las onda es tal que produciría un desplazamiento horizontal unitario paralelo

al eje x en la superficie libre, en zonas alejadas del cañón. En las figuras 5.5 y 5.6 se muestran dos secciones (en planos paralelos normales al cañón) donde se van a representar los desplazamientos de campo libre. La sección S1 está localizada justo en el punto donde termina la cerrada del cañón, esto es, donde comienza a cambiar la sección para ensancharse aguas arriba). Los estribos de la presa están situados muy próximos a esta sección. Se ha considerado que la sección del cañón es uniforme a partir de S1 en dirección aguas abajo. La sección S2 está en la zona uniforme del cañón a una distancia de S1 aproximadamente igual a la altura de la presa.

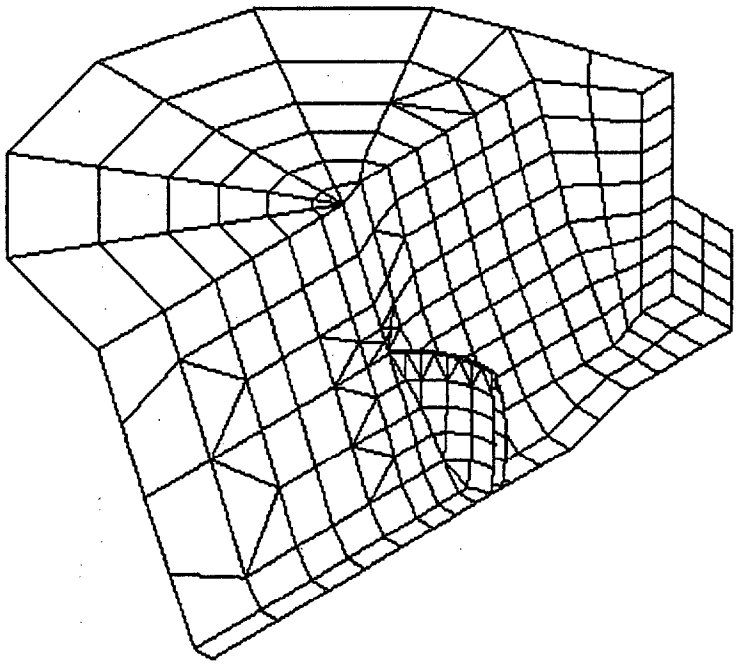

Figura 5.4. Modelo de elementos de contorno para la presa de Morrow Point sobre base flexible, profundidad del cañón: 284 m

En la Fig. 5.7 se muestra la amplitud de la componente anteroposterior de los desplazamientos de los puntos de la sección S1 para el cañón de 142 m de profundidad, para cuatro valores distintos de la frecuencia adimensional $a_o = \omega/\omega_1^s$, donde ω es la frecuencia de excitación y ω_1^s es la frecuencia fundamental de la presa supuesta cimentada sobre una base rígida y en condiciones de embalse vacío, para el modo simétrico (ω_1^s =27.22 rd/s). Se aprecian claramente los cambios de la amplitud de los desplazamientos. La Fig. 5.8 muestra la amplitud de la componente anteroposterior de los desplazamientos para el cañón de 284 m de profundidad. Del análisis de las Fig. 5.7 y 5.8 puede extraerse que la amplitud del desplazamiento presenta oscilaciones de similar longitud y amplitud en ambos casos. Deben esperarse diferencias significativas cuando la incidencia de las ondas no sea vertical, como quedará puesto de manifiesto en apartados posteriores del capítulo.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

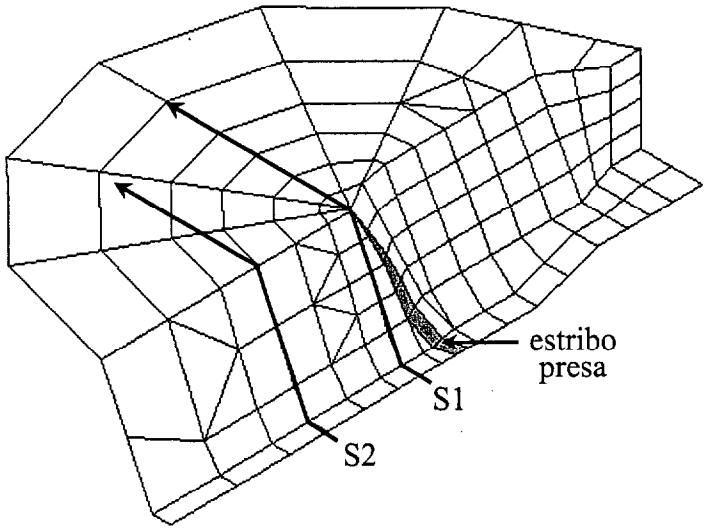

Figura 5.5. Análisis de desplazamientos de campo libre en el cañón.
Discretización de elementos de contorno para cañón de profundidad 142 m

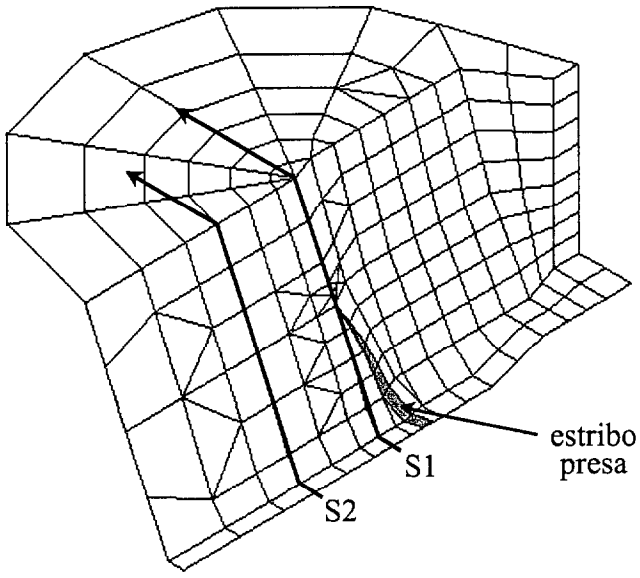

Figura 5.6. Análisis de desplazamientos de campo libre.
Discretización de elementos de contorno para cañón profundidad 284 m

Es importante hacer notar que, incluso en el caso de onda vertical, existen desplazamientos significativos en la dirección transversal y vertical a lo largo de la sección S1, como se muestra en las figuras 5.9 y 5.10, respectivamente. Ambas componentes serían idénticamente nulas en el caso de un cañón de sección uniforme, por

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

lo que se deduce que están ocasionadas por la no uniformidad del cañón. Se trata por tanto de un efecto claramente tridimensional que no es posible abordar con un modelo 2D. En el rango estudiado de frecuencias se aprecian amplitudes del orden del 30% de la componente anteroposterior. Un comportamiento similar puede observarse en la sección S1 del cañón más profundo.

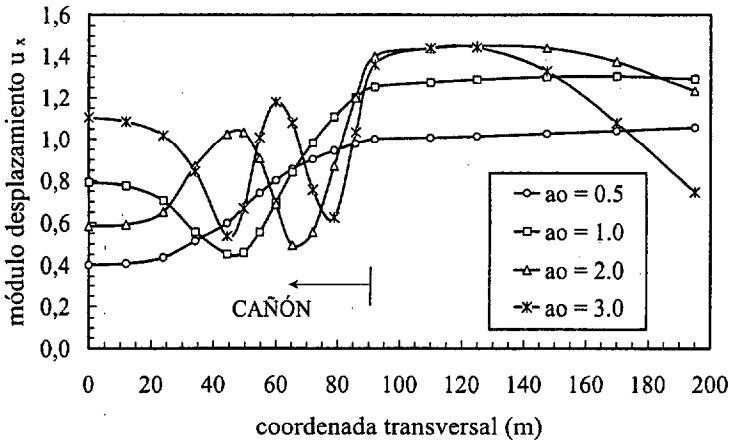

Figura 5.7. Módulo desplazamiento anteroposterior. Onda SH incidencia vertical. Profundidad cañón: 142 m. Sección S1

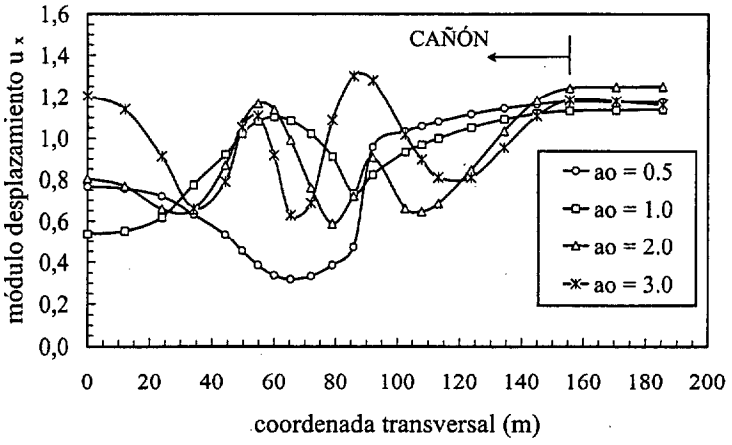

Figura 5.8. Módulo desplazamiento anteroposterior. Onda SH incidencia vertical. Profundidad cañón: 284 m. Sección S1

La amplitud de la componente anteroposterior de los desplazamientos para la sección S1 del cañón profundo (Fig. 5.8) no varía demasiado cuando la sección considerada es la S2, en la parte uniforme del cañón (ver Fig. 5.11). Sin embargo, las componentes transversal y vertical, que eran significativas para la seción S1, se hacen mucho más pequeñas a medida que uno se desplaza hacia la parte uniforme, esto es, se aleja de las

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

irregularidades tridimensionales de la geometría. Esta disminución se observa en las Fig. 5.12 y 5.13 para la sección S2 del cañón profundo. La comparación de las Fig. 5.9 y 5.10 con las Fig. 5.12 y 5.13, respectivamente, muestran claramente este efecto.

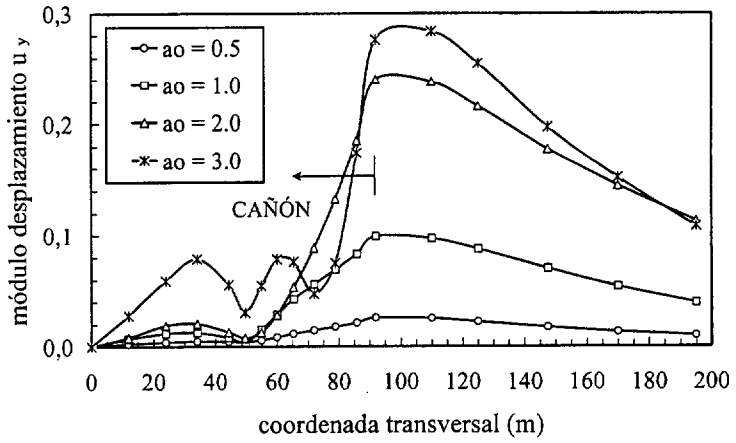

Figura 5.9. Módulo desplazamiento transversal. Onda SH incidencia vertical.
Profundidad cañón: 142 m. Sección S1

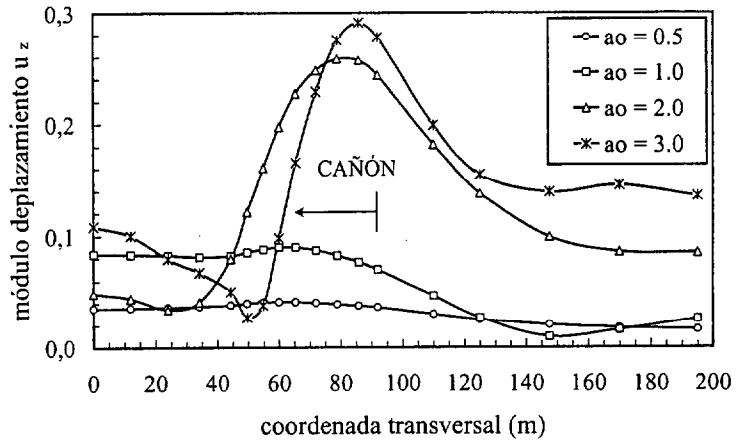

Figura 5.10. Módulo desplazamiento vertical. Onda SH incidencia vertical.
Profundidad cañón: 142 m. Sección S1

La importancia que tiene a topografía local del cañón sobre los desplazamientos de campo libre ha quedado claramente puesta de manifiesto a la luz de las Fig. 5.7 a 5.13. Debemos concluir que para representar adecuadamente estos efectos resulta indispensable utilizar un modelo realista tridimensional, en oposición a los modelos bidimesionales que suponen un cañón de sección constante, y que son incapaces de contemplar cualquier irregularidad geométrica asociada al emplazamiento.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

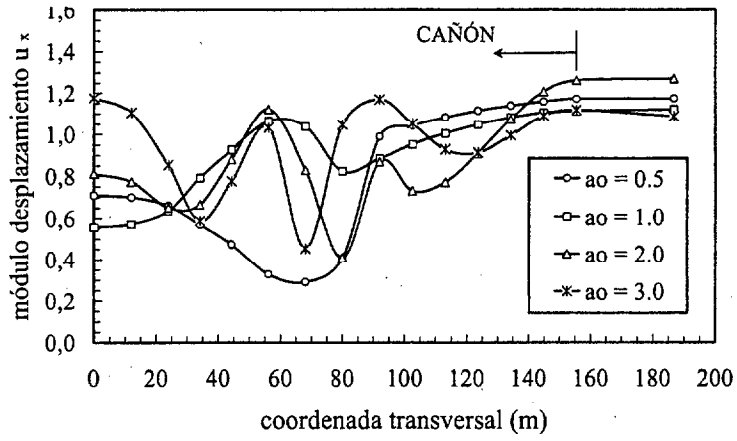

Figura 5.11. Módulo desplazamiento anteroposterior. Onda SH incidencia vertical. Profundidad cañón: 284 m. Sección S2

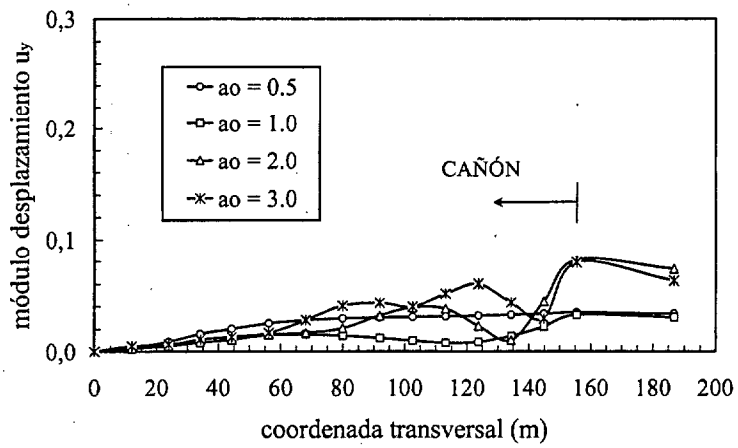

Figura 5.12. Módulo desplazamiento transversal. Onda SH incidencia vertical. Profundidad cañón: 284 m. Sección S2

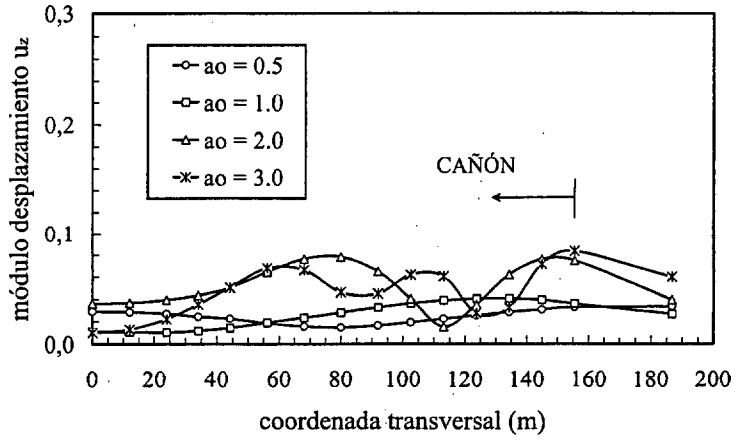

Figura 5.13. Módulo desplazamiento vertical. Onda SH incidencia vertical. Profundidad cañón: 284 m. Sección S2

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

5.6 Respuesta Sísmica de la Presa

5.6.1 Discretización de la Presa y el Embalse

La presa bóveda de hormigón se discretiza con el mismo tipo de elementos cuadráticos para materiales viscoelásticos que para el suelo de cimentación. El dominio fluido (el agua embalsada) se discretiza en elementos de contorno localizados en las interfases agua-presa y agua-terreno (geométricamente, estos elementos son los mismos que para las regiones sólidas). No es necesario discretizar la superficie libre del embalse ya que la solución fundamental empleada para la región agua satisface de forma automática la ausencia de presiones en su superficie. La geometría del embalse escogida en este estudio supone que, tras una zona irregular cercana a la presa (la cual puede ser bastante extensa y debe discretizarse en su geometría real), el embalse se extiende indefinidamente aguas arriba como un canal de sección rectangular uniforme. Es preciso en este caso intoducir un nuevo contorno absorbente, normal al canal, que permite modelar los efectos de radiación de ondas hidrodinámicas de campo lejano (Fig. 5.3), imponiendo en él la relación entre la presión y su derivada longitudinal, que es conocida para un canal rectangular (Domínguez y Meise, 1991). Se ha escogido esta geometría infinita regular para el embalse para poder comparar resultados con otros trabajos previos. Sin embargo otras geometrías más realistas para el embalse en las que la profundidad del agua decrece con la distancia a la presa, no necesitan de contornos absorbentes y sólo precisan discretizar en elementos el fondo del embalse y la interfase con el trasdós de la bóveda. En el próximo capítulo analizaremos algunos modelos cerrados e irregulares de embalse, que son fácilmente contemplados mediante el MEC.

5.6.2 Variables Representativas de la Respuesta de la Presa

Como variable representativa de la respuesta dinámica de la presa se ha escogido la amplitud de la función de respuesta compleja en el dominio de la frecuencia. En concreto, se trata de la amplificación respecto de campo lejano de la aceleración que experientan ciertos puntos situados en la coronación de la presa. O de otro modo, de la aceleración que experimentan estos puntos debido a ondas armónicas que prodicirían una aceleración unitaria en el suelo, en el punto situado en el origen de coordenadas, si el tereno de cimentación fuese un semiespacio viscoelástico regular y uniforme. Para ondas *SH*, ondas *P* y ondas de Rayleigh se mostrará la amplificación anteroposterior (según la dirección longitudinal del cañón) del punto de la coronación de la presa situado en el plano de simetría ($x = y = z = 0$). Cuando la excitación sea ondas *SV* se mostrará la amplificación anteroposterior de un punto de la coronación de la presa cuya localización forma un ángulo de 13.25° con el plano de simetría. Nótese que cuando se considere el caso de ondas *SH* propagándose verticalmente (movimiento transversal) los puntos del plano de simetría solo van a experimentar movimientos antisimétricos. En cada caso la amplitud de la aceleración se representa en un amplio rango de la frecuencia

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

adimensional. Para ondas *SH*, *P* y ondas de Rayleigh la frecuencia adimensional está definida como en el apartado anterior, esto es, $a_o = \omega/\omega_1^s$, donde ω es la frecuencia de excitación y ω_1^s es la frecuencia fundamental de la presa supuesta cimentada sobre una base infinítamente rígida y en condiciones de embalse vacío, para el modo simétrico. Para ondas *SV* la frecuencia adimensional está definida como ω/ω_1^a, donde ω es la frecuencia de excitación y ω_1^a es la frecuencia fundamental de la presa sobre base rígida y en condiciones de embalse vacío, para el modo antisimético.

5.6.3 Influencia del Ángulo de Incidencia de las Ondas Sobre la Respuesta de la Presa

5.6.3.1 Ondas SH

El primer caso analizado del sistema acoplado presa-suelo-embalse corresponde al caso de una onda *SH* incidente con diferentes ángulos θ. La geometría del problema y el modelo de elementos de contorno de esta parte del estudio se ha presentado en la Fig. 5.3. La figura 5.14 presenta la amplificación de la función de respuesta en frecuencias para la situación de embalse vacío. Se ha incluido la respuesta de la presa en la hipótesis de base rígida para poner de manifiesto cómo la inclusión de la flexibilidad del suelo disminuye las frecuencias propias del sistema, al tiempo que reduce las amplitudes máximas en la mayor parte del rango de frecuencias (Maeso y Domínguez, 1993). Nótese que la excitación de base rígida es independiente del ángulo de incidencia y correspondería a un movimiento uniforme del suelo según el curso del rio. La inclusión de la flexibilidad del suelo provoca un doble efecto: por un lado la respuesta tiende a decrecer debido al efecto de interacción suelo-estructura; por otro, la naturaleza espacial de la onda que avanza hace que la excitación no alcance su valor máximo simultaneamente para todos los puntos de la interfase presa-suelo. Este segundo efecto se ve modificado cuando se contemplan diferentes ángulo de incidencia. Los resultados presentados en la Figura 5.14 muestran que la respuesta en la frecuencia fundamental puede cambiar más del 20% debido al efecto del ángulo con que inciden las ondas. Asimismo se aprecia que la influencia de θ sobre la función de respuesta es muy significativa, especialmente en el rango medio de frecuencias.

La figura 5.15 muestra de nuevo la amplificación de la respuesta en frecuencias del movimiento anteroposterior para el mismo tipo de ondas incidentes, pero en este caso los resultados corresponden a la situación de embalse completamente lleno de agua. También se representa la situación correspondiente a base rígida. Es destacable cómo la inclusión de la flexibilidad de la base rocosa provoca una importante reducción de la respuesta en el entorno de la primera frecuencia propia del embalse. Esta reducción es sin embargo ahora similar para los diferentes ángulos de incidencia estudiados. Además, la influencia del ángulo θ para el rango superior de frecuencias no es tan grande como en el caso de embalse vacío.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

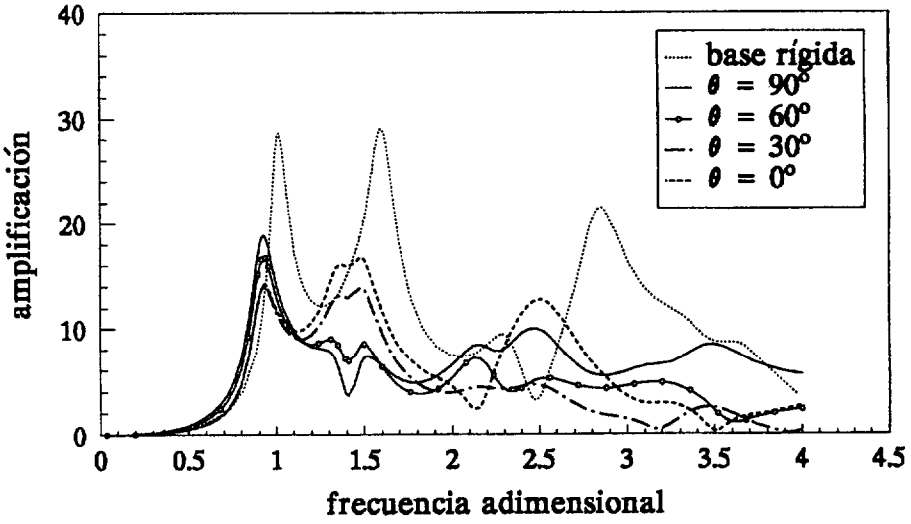

Figura 5.14. Respuesta anteroposterior de la presa en coronación.
Ondas SH, embalse vacío

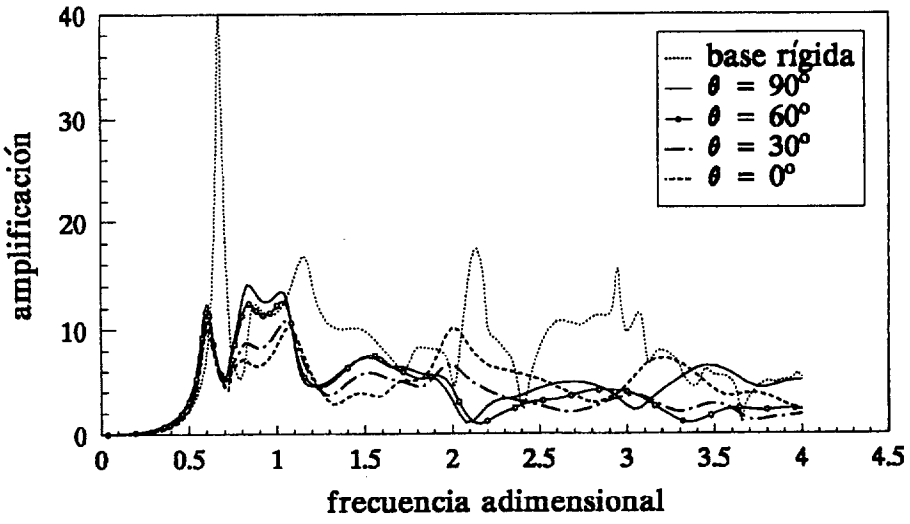

Figura 5.15. Respuesta anteroposterior de la presa en coronación.
Ondas SH, embalse lleno

5.6.3.2 Ondas P y SV

De nuevo en este caso la geometría del modelo corresponde a la mostrada en la Fig. 5.3. Los resultados de la funciones de respuesta cuando sobre la zona de localización de la presa inciden ondas *P* o *SV* con ángulo variable se muestran en las figuras 5.16 a 5.19.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Las amplificaciones del movimiento representadas en estas figuras corresponden, como ya se ha comentado, al punto central de la coronación de la presa cuando se trata de ondas *P* incidentes, y para un punto fuera del plano de simetría cuando se trata de incidencia de ondas *SV*. Los ángulos de incidencia estudiados varían entre $\theta = 90°$ y $\theta = 5°$ en el caso de ondas *P*, y entre $\theta = 90°$ y el ángulo crítico ($\theta = 52°$) en el caso de incidencia de ondas *SV* (52.24° es el ángulo crítico por debajo del cual, para las propiedades adoptadas, aparecen ondas de superficie en la solución del semiespacio). La respuesta del modelo ante ondas de superficie será analizada de forma individual más adelante. Es importante comentar que, en todos los casos presentados en las figuras 5.16-5.19, excepto cuando $\theta = 90°$, el campo total de movimientos de campo libre del semiespacio consiste en una superposición de ondas *P* y *SV*. Se han incluido algunos resultados correspondientes al caso de base infinítamente rígida. Se trata de una excitación vertical uniforme del suelo en las figuras 5.16 y 5.18 (ondas *P*), y de una excitación uniforme transversal al cañón en las figuras 5.17 y 5.19 (ondas *SV*). La influencia de la flexibilidad de la base se pone de manifiesto si se compara el problema sobre base rígida y el caso representado de una onda *P* o una onda *SV*, respectivamente, que incide verticalmente sobre la presa. Se concluye que la consideración de base rígida sobrestima la respuesta de la presa, especialmente en la situación de embalse lleno, al no contemplar ni los efectos de interacción suelo-estructura ni el carácter espacial de la solicitación.

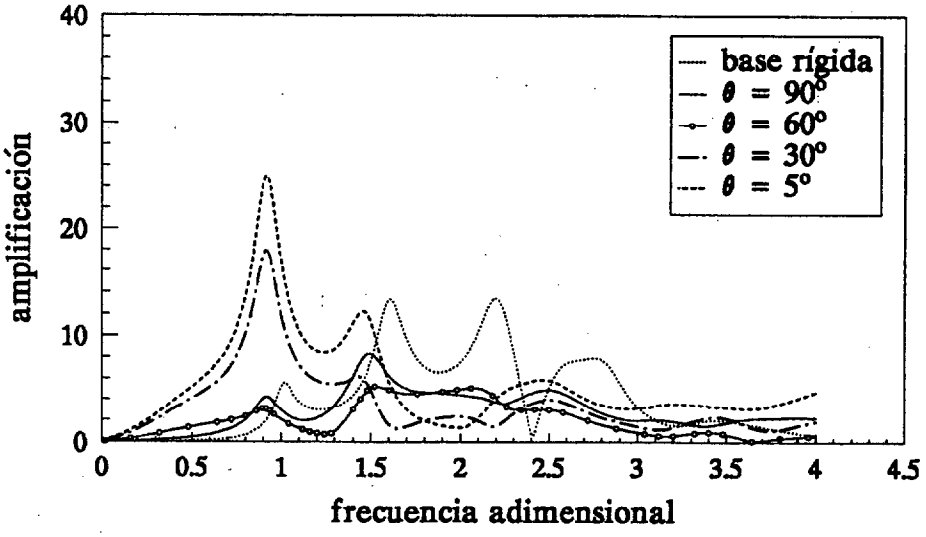

Figura 5.16. Respuesta anteroposterior de la presa en coronación.
Ondas P, embalse vacío

Los resultados para las condiciones de embalse vacío se presentan en las figuras 5.16 y 5.17. Puede observarse la gran influencia del ángulo de las ondas incidenctes sobre la respuesta. A medida que el ángulo θ decrece la respuesta en la frecuencia fundamental se incrementa significativamente, en particular cuando $\theta < 60°$ en el caso de incidencia de

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

ondas *P*, y cuando $\theta < 75°$ en el caso de incidencia de ondas *SV*. Sin embargo los cambios en la parte más alta del rango de frecuencias representado son pequeñas en ambas figuras. La respuesta en la frecuencia fundamental se convierte en claramente dominante a medida que la dirección de incidencia de la onda se acerca a la horizontal. Cuando se trata de incidencia de ondas SV (Fig. 5.17) la frecuencia de excitación está normalizada con la frecuencia natural del primer modo antisimétrico de la presa sobre base rígida. La contribución de los modos simétricos a la respuesta del sistema es idénticamente nula cuando $\theta = 90°$ (con base rígida o flexible), pero otros valores de θ llevan asociados la participación de los modos simétricos sobre la respuesta, y por tanto, conducen a pequeños cambios en cuanto a cuál es frecuencia del primer pico (los valores de las frecuencias naturales del primer modo simétrico y del primer modo antisimétrico de la presa sobre base rígida se diferencian en un 10% el uno del otro).

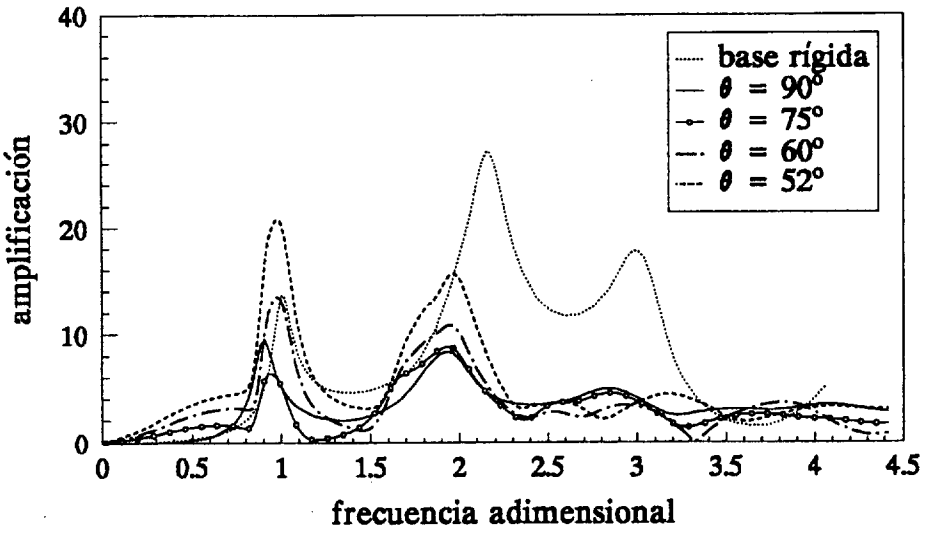

Figura 5.17. Respuesta anteroposterior de la presa en coronación.
Ondas SV, embalse vacío

La influencia de la naturaleza no uniforme de la excitación asociada al caracter espacial de la onda viajera se aprecia, también con claridad, cuando se estudia la situación de embalse lleno, tal y como se desprende de las figuras 5.18 y 5.19. De nuevo se produce un incremento muy importante de la amplificación en la frecuencia fundamental a medida que el ángulo de incidencia disminuye. En el caso de incidencia de ondas longitudinales (ondas *P*), se aprecia que el segundo pico que aparece entre las frecuencias adimensionales 1.5 y 2 decrece significativamente con el ángulo de incidencia θ. La respuesta en la parte más alta del rango de frecuencias representado no muestras cambios importantes con θ. En el caso de ondas *SV* (Fig. 5.19), el efecto del ángulo de incidencia es importante en casi todo el rango de frecuencias representado.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

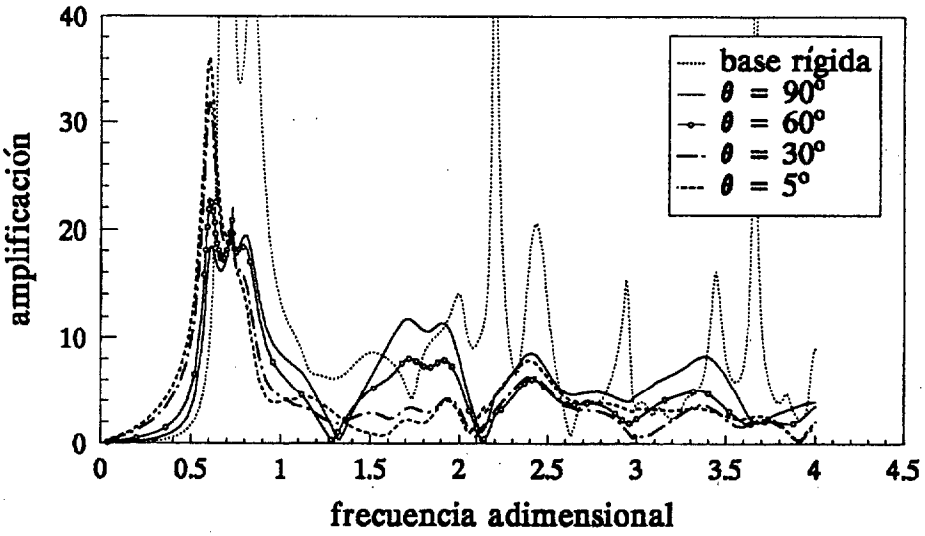

Figura 5.18. Respuesta anteroposterior de la presa en coronación.
Ondas P, embalse lleno

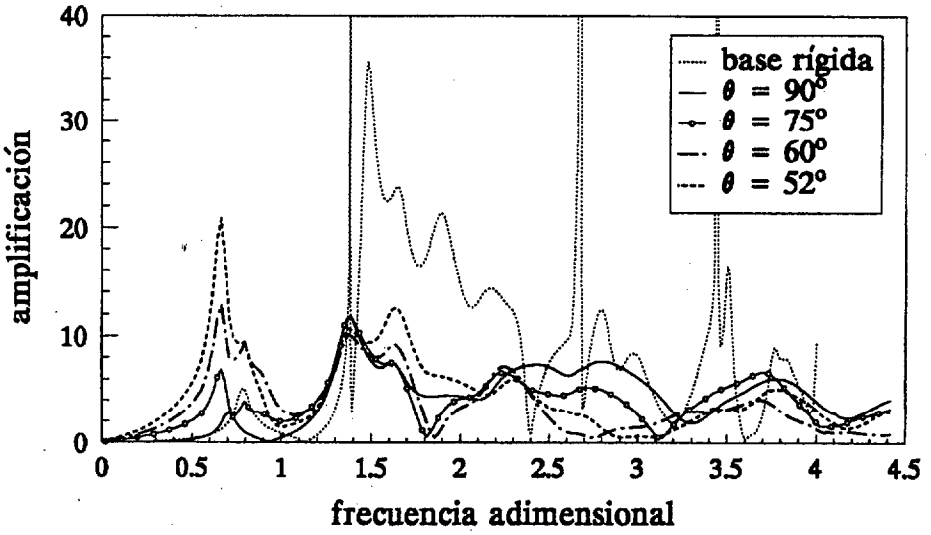

Figura 5.19. Respuesta anteroposterior de la presa en coronación.
Ondas SV, embalse lleno

5.6.3.3 Ondas de Rayleigh

En este apartado estudiaremos la evolución de las funciones de respuesta con la frecuencia cuando el sistema presa-embalse es alcanzado por ondas de Rayleigh propagándose por el terreno en el plano x-y, con una dirección de propagación definida por el ángulo α mostrado en la Fig. 5.1. Se han considerado cinco valores del ángulo de incidencia α, comprendidos entre –90° (ondas propagándose aguas abajo) y 90° (ondas propagándose aguas arriba). Como variable para representar la respuesta se ha escogido

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

la amplitud del desplazameinto anteroposterior en el punto medio de la presa a cota de coronación. La respuesta se ha normalizado con el valor del módulo del desplazamiento vertical de campo libre en dicho punto entendido como perteneciente al semiespacio uniforme, y se presenta en función de la frecuencia adimensional.

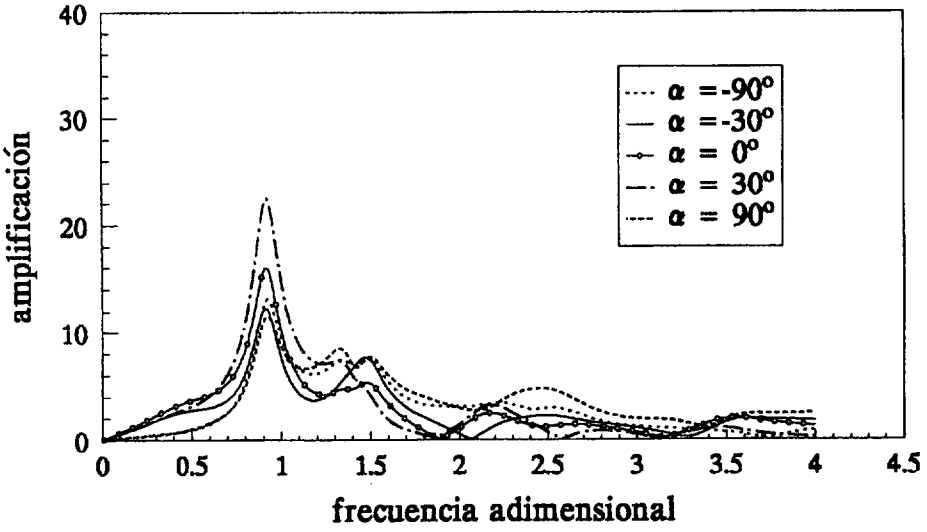

Figura 5.20. Respuesta anteroposterior de la presa en coronación.
Onda de Rayleigh, embalse vacío

La Fig. 5.20 muestra la función de respuesta del sistema para el caso de embalse vacío. Del análisis de los resultados se concluye que la importancia del ángulo de incidencia es variable con el rango de frecuencias. La influencia es predominante en la amplitud del primer pico, esto es, en el entorno de la primera frecuencia fundamental del modelo. A medida que crece la frecuencia se obtienen amplificaciones cada vez menores, al tiempo que disminuye la importancia del valor de α en la respuesta. Este resultado está de acuerdo con la naturaleza de la onda de Rayleigh, que produce un campo de desplazamientos que es máximo en la superficie libre del semiespacio, y que decrece de forma exponencial con la profundidad, más rápido a medida que aumenta la frecuencia. Puede decirse por tanto que, para altas frecuencias, la perturbación provocada por este tipo de ondas está confinada en una capa estrecha bajo la superficie libre, por lo que puntos de los estribos de la presa estarán menos excitados conforme aumente su profundidad, en una proporción que depende de la profundidad del cañón, del coeficiente de Poisson del terreno y de la frecuencia considerada. Este efecto se ilustra en la figura 5.21 donde se dibuja el perfil de la amplitud horizontal y vertical de los desplazamientos de campo libre con la profundidad z/H (siendo H la altura de la presa) en los puntos del semiespacio uniforme, provocados por la onda de Rayleigh. Se han considerado cuatro valores de la frecuencia adimensional $a_o = \omega/\omega_1^s$, y se han comparado los casos correspondientes a $\alpha = 90°$ y $\alpha = -90°$, es decir propagación en la dirección aguas arriba y aguas abajo del cañón, respectivamante. Así por ejemplo se

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

aprecia, para las propiedades adoptadas del suelo, y para frecuencias del orden de 3 veces la frecuencia fundamental simétrica de la presa (a_o = 3), que la amplitud del desplazamiento vertical en la base es aproximadamente el 40% de su valor en la coronación. La amplitud de la componente horizontal de los desplazamientos de campo libre también disminuye rápidamente con la profundidad para el mismo valor de frecuencia.

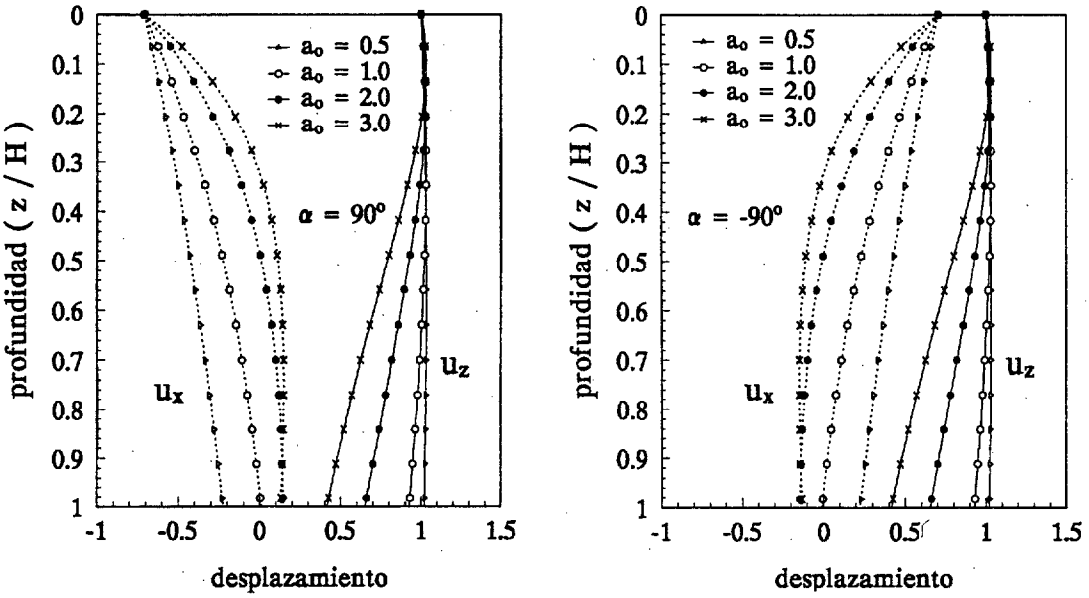

Figura 5.21. Perfil de desplazamientos en el semiespacio con la profundidad provocados por la onda de Rayleigh

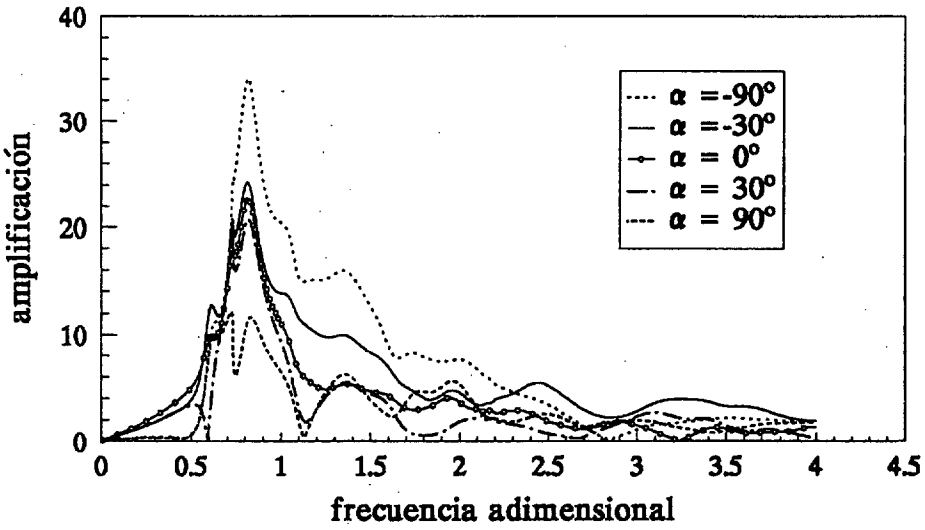

Figura 5.22. Respuesta anteroposterior de la presa en coronación.
Onda de Rayleigh, embalse lleno

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

El efecto del ángulo de incidencia de las ondas de Rayleigh sobre la respuesta de la presa es especialmente importante cuando el embalse está lleno de agua (Fig. 5.22). En el caso de ondas que se propagan aguas abajo ($-90^o < \alpha < 0^o$) la amplitud de movimiento de la presa crece de forma importane a medida que α tiende a -90° para más de la mitad del rango de frecuencias estudiado. En particular para frecuencias cercanas a la fundamental de la presa, y también para el rango $1 < a_o < 2.1$. Para ondas propagándose aguas arriba ($0^o < \alpha$) el efecto del ángulo de incidencia es menor, y se reduce al rango de frecuencias $0 < a_o < 1$. La figura 5.21 ayuda también a entender las sensibles diferencias entre los valores de amplificación en el primer pico. Los valores son especialmente elevados para ángulos de incidencia negativos (aguas abajo). Así, para $\alpha = -90^o$ se presenta el máximo de la respuesta con valores mucho mayores que los correspondientes a la incidencia $\alpha = 90^o$ (aguas arriba). Ambos valores de α producen el mismo campo de desplazamientos verticales de campo libre, que para frecuencias a_o en el rango de 0.5 a 1 (rango de respuesta máxima) es casi uniforme en toda la profundidad de la presa. La componente horizontal de desplazamientos del campo incidente está desfasada 90° respecto a la componente vertical, de manera que la diferencia entre los ángulos de ataque de $\alpha = 90^o$ y $\alpha = -90^o$ consiste en un desfase de 180° en la componente horizontal de desplazamientos. Los efectos de difracción del embalse y el desfase entre las componentes de desplazamientos son distintos en ambos casos, lo cual explica las diferencias encontradas.

5.6.4 Influencia de la Geometría del Cañón Sobre la Respuesta de la Presa

Los efectos de la profundidad del cañón sobre la amplificación local de los desplazamientos de campo libre han sido estudiados en el apartado 5.5, concluyéndose que las irregularidades topográficas cercanas alteran la solicitación sísmica en la zona de interés en una magnitud que en ningún caso puede ser despreciada. Cabe ahora estudiar la influencia de la geometría del cañón sobre la respuesta de la presa, analizando el comportamiento acoplado completo del sistema presa-suelo-embalse lleno de agua. Para hacerlo hemos considerado tres geometrías diferentes del cañón: las dos ya mostradas (Figuras 5.3 y 5.4) y una tercera en la que el ancho del cañón aumenta progresivamente con la distancia aguas arriba a la presa. La Figura 5.23 muestra la malla de elementos de contorno para la mitad de la geometría completa (simétrica) de este último caso. Nótese cómo el embalse va siendo progresivamente más ancho y más somero a medida que se aleja de la presa. A partir del punto donde termina la discretización de la Figura 5.23 se considera que el embalse se extiende indefinidamente aguas arriba como un canal regular rectangular. La profundidad del agua en este punto es aproximadamente la mitad que la que existe en la misma localización para las otras dos geometrías consideradas. Para mayor claridad identificaremos (en el texto y en las figuras) los tres cañones como: cañon 1 (Fig. 5.3), cañón 2 (Fig. 5.4), y cañón 3 (Fig. 5.23). Se han considerado tres excitaciones diferentes, que corresponden a ondas *SH* con ángulos de incidencia 90, 60 y

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

30°, respectivamente, y el análisis se ha llevado a cabo tanto para la situación de embalse vacío como para el caso de embalse lleno.

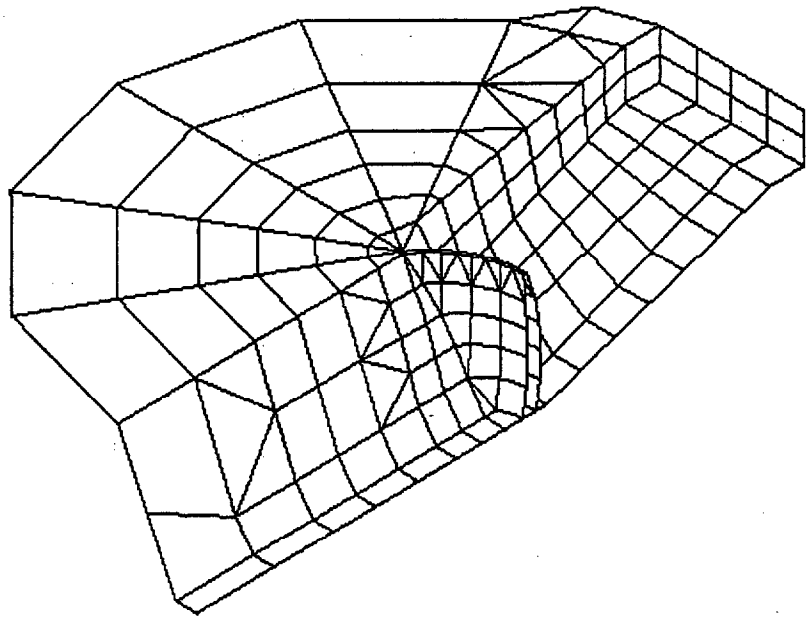

Figura 5.23. Modelo de elementos de contorno para la presa de Morrow Point sobre base flexible. Anchura creciente del embalse aguas arriba.

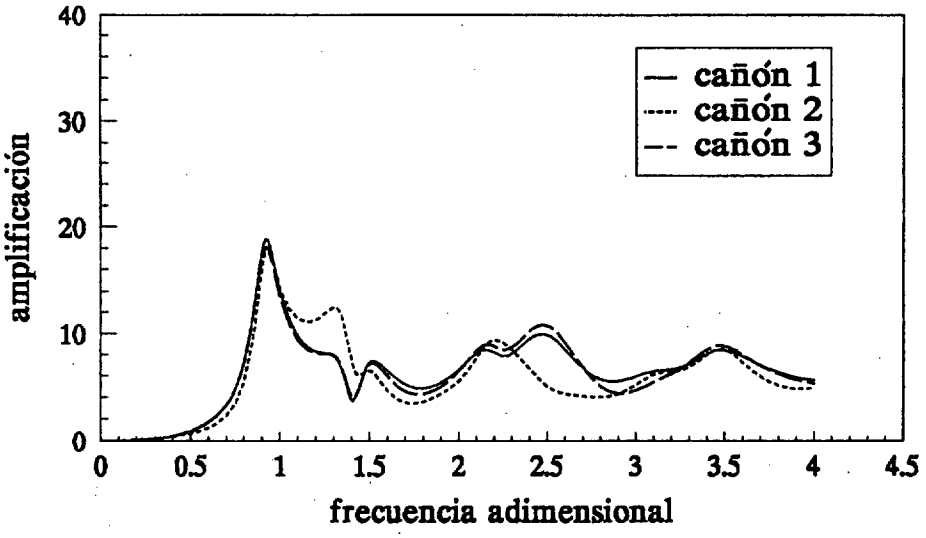

Figura 5.24. Respuesta anteroposterior de la presa en coronación. Onda SH. Influencia de la geometría del cañón, embalse vacío, ángulo de incidencia: $\theta = 90°$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

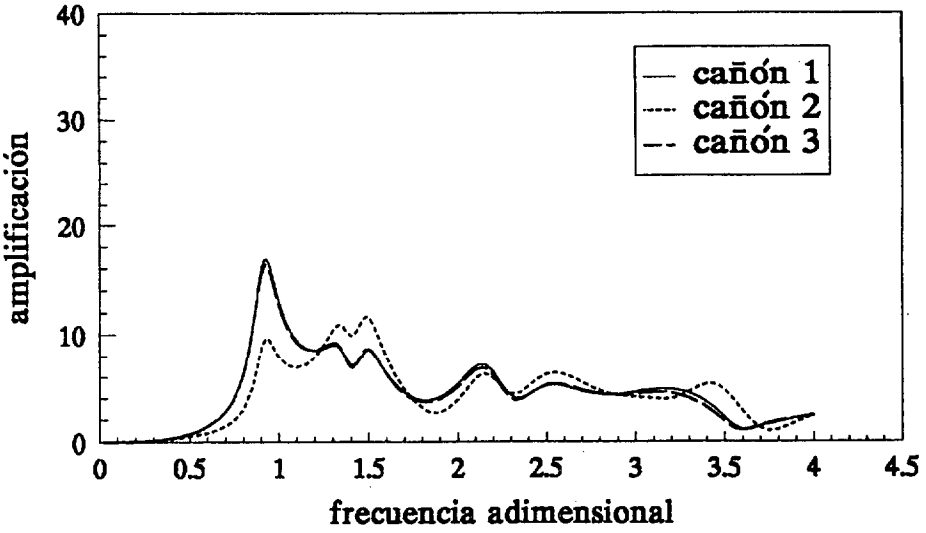

Figura 5.25. Respuesta anteroposterior de la presa en coronación. Onda SH. Influencia de la geometría del cañón, embalse vacío, ángulo de incidencia: $\theta = 60°$

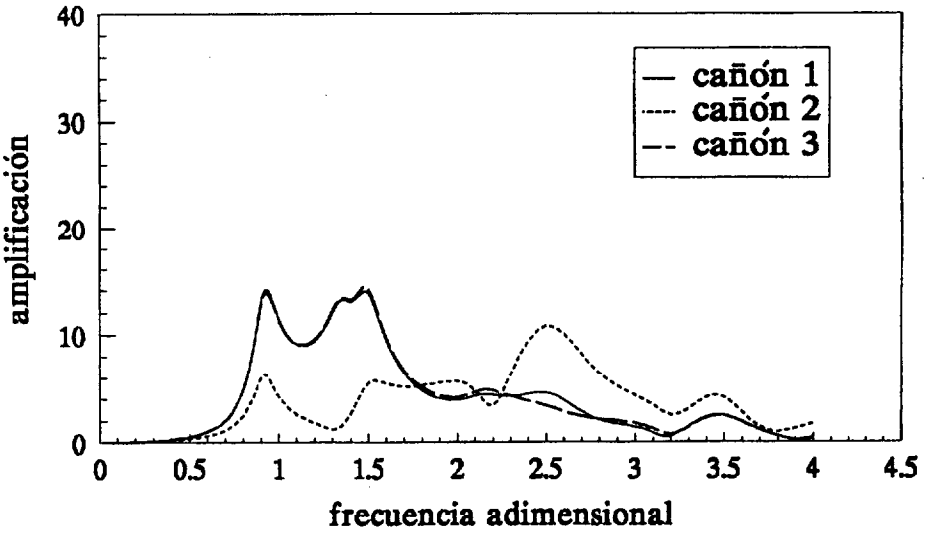

Figura 5.26. Respuesta anteroposterior de la presa en coronación. Onda SH. Influencia de la geometría del cañón, embalse vacío, ángulo de incidencia: $\theta = 30°$

Las figuras 5.24, 5.25 y 5.26 presentan la amplificación en la coronación de la presa para los tres cañones, en condiciones de embalse vacío, y para ángulos de incidencia de θ = 90, 60 y 30°, respectivamente. De las figuras se desprende que la influencia de la geometría real tridimensional del cañón es significativa, especialmente para $\theta = 60°$ y $\theta =$ 30°. Esta influencia se debe principalmente a las diferencias que la topografía local marcan sobre la excitación a lo largo de la interfase presa-base rocosa, debido a la naturaleza viajera de la onda excitadora y a los efectos de amplificación local de los

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

desplazamientos de campo libre. De los resultados se desprende que los cambios en los desplazamientos de campo libre son más importantes por efecto de aumentar la profundidad del cañón (cañón 1) que por efecto de aumentar su ancho en la dirección aguas arriba (cañón 3).

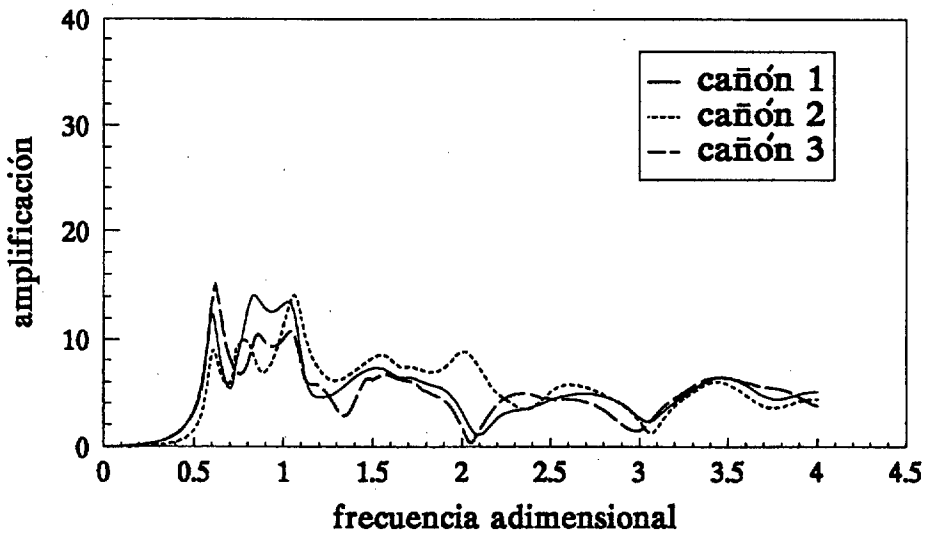

Figura 5.27. Respuesta anteroposterior de la presa en coronación. Onda SH. Influencia de la geometría del cañón, embalse lleno, ángulo de incidencia: $\theta = 90°$

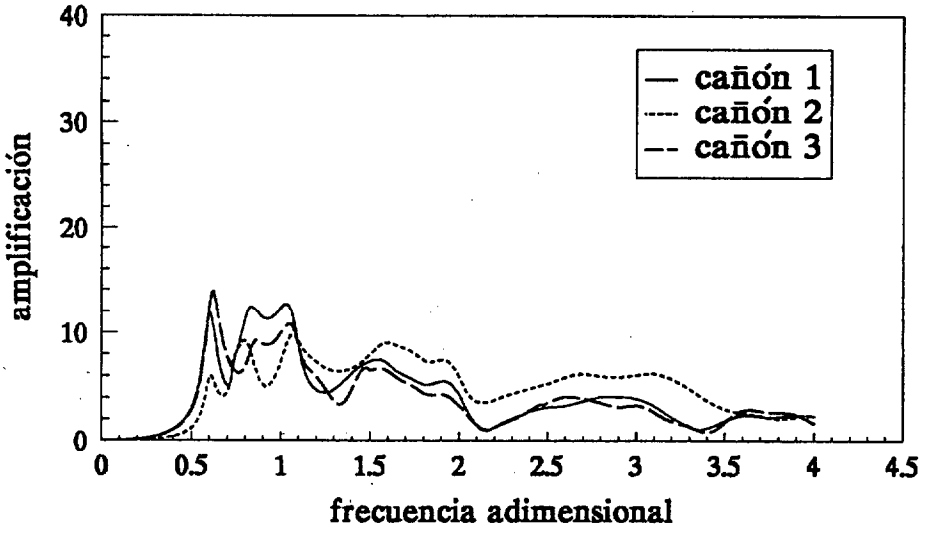

Figura 5.28. Respuesta anteroposterior de la presa en coronación. Onda SH. Influencia de la geometría del cañón, embalse lleno, ángulo de incidencia: $\theta = 60°$

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

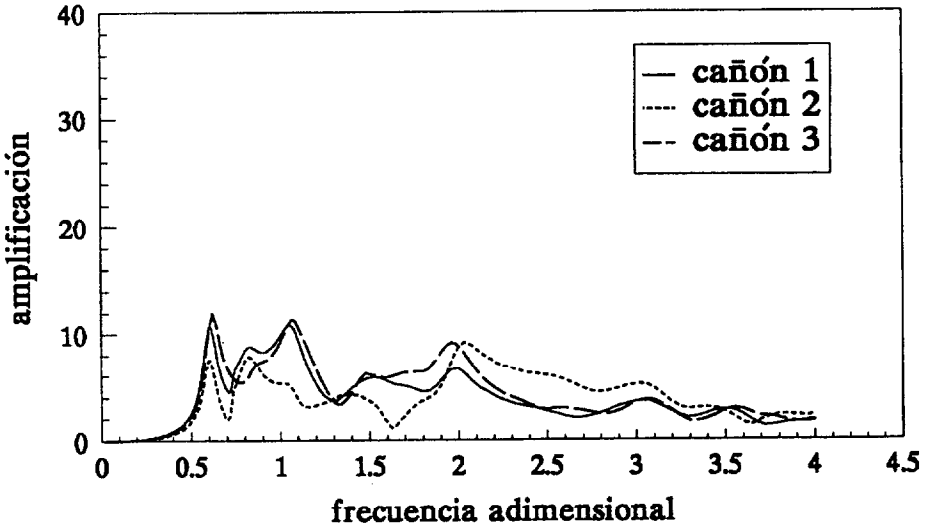

Figura 5.29. Respuesta anteroposterior de la presa en coronación. Onda SH.
Influencia de la geometría del cañón, embalse lleno, ángulo de incidencia: $\theta = 30°$

Las figuras 5.27, 5.28 y 5.29 muestran la amplificación en la coronación de la presa cuando los embalse están completamente llenos, para los mismos ángulos de incidencia que en el caso anterior: $\theta = 90$, 60 y 30°, respectivamente. Como puede verse, también en este caso la influencia de la forma del cañón es muy importante. Debe tenerse en cuenta que la geometrías del embalse son idénticas para el cañón 1 y para el cañón 2, y las diferencias en cuanto a la respuesta de la presa en ambos casos se debe, una vez más, a los efectos de la solicitación no uniforme y a los efectos de amplificación local. La geometría del embalse sí es diferente en el caso del cañón 3. La diferencia principal estriba en la profundidad del embalse a cierta distancia de la presa. Este hecho provoca un cierto aumento en la primera frecuencia natural del sistema para cualquiera de las tres excitaciones consideradas.

Referencias

AZNÁREZ, J.J, MAESO, O. y DOMÍNGUEZ, J., 2001, "A 3-D Boundary Element Model for the Dynamic Analysis of Arch Dams with Porous Sediments". Proc. Earthquake Resistant Engineering Structures III, Benalmádena, España. C.A. Brebbia y A. Corz, (Eds.), WIT Press., Southampton, 713-722.

CAMARA, R.J., 2000, "A Method for Coupled Arch Dam-Foundation-Reservoir Seismic Behaviour Analysis". *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, **29**, 441-460.

CHEN, H., y HOU, S., 1987, "Effect of Seismic Travelling Wave on the Response of Arch Dams". Proc., China-U.S. Workshop on Earthquake Behavior of Arch Dams, Beijing, China. R.W. Clough and Zhang G., Eds., Pergamon Press.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

CHOPRA, A.K. y CHAKRABARTI, P., 1981, "Earthquake Analysis of Concrete Gravity Dams Including Dam-Water-Foundation Rock Interaction". *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, **9**, 363-381.

DOMÍNGUEZ, J. y MEISE, T., 1991, "On the Use of the BEM for Wave Propagation in Infinite Domains". *Eng. Anal. with B.E.*, **8**(3), 132-138.

DOMÍNGUEZ, J., 1993, "Boundary Elements in Dynamics". Computational Mechanics Publications, Southampton and Elsevier, London.

DOMÍNGUEZ, J. y MAESO, O., 1993, "Earthquake Analysis of Arch Dams. II: Dam-Water-Foundation Interaction", *J. Eng. Mech.*, ASCE, **119**(3), 513-530.

DRAVINSKI, M., 1982, "Scattering of SH Waves by Subsurface Topography", *J. Eng. Mech. Div.*, ASCE, **108**, 1-31.

ERIGEN, A.C. y SUHUBI, E., 1975, "Elastodynamics, II, Linear Theory". Academic Press, NY.

FENVES, G. y CHOPRA, A.K., 1985, "Effects of Reservoir Bottom Absortion and Dam-Water-Foundation Rock Interaction on Frequency Response Functions for Concrete Gravity Dams". *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, **13**, 13-31.

FOK, K. y CHOPRA, A.K., 1986, "Earthquake Analysis of Arch Dams Including Dam-Water-Interaction, Reservoir Boundary Absortion and Foundation Flexibility". *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, **14**(2), 155-184.

FOK, K. y CHOPRA, A.K., 1987, "Water Compressibility in Earthquake Response of Arch Dams". *J. Struct. Eng.*, ASCE, 113(5), 958-975.

HALL, J.F., 1986, "Study of the Earthquake Response of Pine Flat Dam". *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, **14**, 281-295.

HALL, J.F., y CHOPRA, A.K., 1983, "Dynamic Analysis of Arch Dams Including Hydrodynamic Effects". *J. Eng. Mech.*, ASCE, **109**(1), 149-163.

LOTFI, V., ROESSET, J.M. y TASSOULAS. J., 1987. "A Technique for the Analysis of the Response of Dams to Earthquakes". *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, **15**, 463-490.

MAESO, O. y DOMÍNGUEZ, J., 1993, "Earthquake Analysis of Arch Dams. I: Dam-Foundation Interaction". *J. Eng. Mech.*, ASCE, **119**(3), 496-512.

MAESO, O., AZNÁREZ, J.J. y DOMÍNGUEZ, J., 1999, "A 3-D Model for the Seismic Analysis of Concrete Dams Including Poroelastic Sediment Effects". *Proc. 13th ASCE Engineering Mechanics Conference*, Johns Hopkins U., N. Jomes and R. Ghanem (Eds.), CD-ROM.

MAESO, O., AZNÁREZ, J.J. y DOMÍNGUEZ, J., 2000, "Travelling Wave Effects on the Seismic Response of Arch Dams". *Proc. 14th ASCE Engineering Mechanics Conference*, University of Texas at Austin, J. L. Tassoulas (Ed.), CD-ROM.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

MAESO, O., AZNÁREZ, J.J. y DOMÍNGUEZ, J., 2001, "Influencia de la Distribución Espacial de la Solicitación en la Respuesta Sísmica de Presas Bóveda". 2° Congreso Iberoamericano de Ingeniería Sísmica. Madrid, España. R. Blazquez Ed. CD-ROM.

MAESO, O., AZNÁREZ, J.J. y DOMÍNGUEZ, J., 2002a, "Análisis de la Respuesta Sísmica de Presas Bóveda Considerando el Carácter Espacial de la Excitación y la Influencia de los Sediementos de Fondo". V Congreso Métodos Numéricos en Ingeniería. Madrid, España. J.M. Goicolea, C. Mota Soares, M. Pastor y G. Bugeda (Eds.). SEMNI. CD-ROM.

MAESO, O., AZNÁREZ, J.J. y DOMÍNGUEZ, J., 2002b, "Effects of the Space Distribution of the Excitaction on the Seismic Response of Arch Dams". *J.Eng.Mech.*, ASCE, **128**(7), 759-768.

MAESO, O., AZNÁREZ, J.J. y DOMÍNGUEZ, J., 2002c, "Numerical Model for Dynamic Behavior of Reservoir Bottom Sediments". *Proc. 2nd Biot Conf. on Poromechanics*, 709-714, J.L. Auriault et al. (Eds.). Balkema, Rotterdam.

NOWAK, P.S. y HALL, J.F., 1990, "Arch Dam Response to Nonuniform Seismic Input". *J. Eng. Mech.*, ASCE, **116**(1), 125-139.

SÁNCHEZ-SESMA, F.J., 1983, "Diffraction of Elastic Waves by Three-Dimensional Surface Topography". *Bull. Seism.Soc.Am.*,**73**,1621-1636.

SÁNCHEZ-SESMA, F.J., BRAVO, M.A. y HERRERA, 1985, "Surface Motion of Topographical Irregularities for Incident P, SV and Rayleigh Waves". *Bull. Seism.Soc.Am.*, **75**, 263-269.

TAN, H. y CHOPRA, A.K., 1995, "Earthquake Analysis of Arch Dam Including Dam-Water-Foundation Rock Interaction". *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, **24**, 1453-1474.

TAN, H. y CHOPRA, A.K., 1995, "Dam-Foundation Rock Interaction Effects in Frequency-Response Functions of Arch Dams". *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, **24**, 1475-1489.

TRIFUNAC, M.D., 1973, "Scattering of Plane SH-Waves by a Semi-Cylindrical Canyon". *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, **1**, 267-281.

WONG, H.L., 1982, "Effect of Surface Topography on the Diffraction of P,SV, and Rayleigh waves". *Bull. Seism.Soc.Am.*, **72**, 1167-1183.

ZHANG, L. y CHOPRA, A.K., 1991a, "Three-Dimensional Analysis of Spatially Varying Ground Motions Around a Uniform Canyon in a Homogeneous Half-Space". *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, **20**(11), 911-926.

ZHANG, L. y CHOPRA, A.K., 1991b, "Impedance Functions for Three-Dimensional Foundation Supported on an Infinitely Long Canyon of Uniform Cross-Section in a Homogeneous Half-Space". *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, **20**(11), 1011-1027.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

ZHANG, C. y ZHAO, C., 1988, "Effects of Canyon Topography and Geological Conditions on Strong Ground Motion". *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, **16**, 81-97.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

BIBLIOTECA CENEBAL UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA

Capítulo 6

Influencia de los Sedimentos de Fondo del Embalse sobre la Respuesta Sísmica de Presas Bóveda

6.1 Introducción

En el capítulo precedente se ha presentado un estudio del comportamiento sísmico de la presa bóveda de Morrow-Point, en el sentido de evaluar la influencia que sobre la respuesta de la presa tienen algunos aspectos del problema. En concreto se ha visto la necesidad de contemplar adecuadamente la naturaleza ondulatoria de la excitación sísmica, por cuanto la consideración de un campo uniforme de movimientos en la base rocosa no representa de una forma realista la excitación en una estructura cuyas dimensiones son, al menos, del mismo orden de magnitud que las ondas sísmicas. Esto a su vez conduce a que, no sólo es preciso contemplar los efectos de interacción mutua entre los diferentes medios (presa-suelo-agua embalsada) considerando adecuadamente la flexibilidad y propiedades dinámicas de cada uno, sino que además cualquier factor que tenga influencia sobre el campo de desplazamientos-aceleraciones en el problema de campo libre necesariamente habrá de ser tenido en cuenta, pues alterará el perfil de la solicitación sobre la interfase entre el suelo (medio que conduce la excitación) y la presa (estructura cuyo comportamiento queremos comprender). Así se ha concluido que factores de tipo geométrico o topográfico en relación con el emplazamiento de la estructura, que producen (como se ha puesto de manifiesto) amplificaciones locales importantes del perfil de desplamientos de campo libre, deberán ser tenidos en cuenta de forma rigurosa. En este aspecto la consideración correcta de la realidad tridimensional del problema es una necesidad que no puede ser obviada. Otros factores como la inclinación del ángulo de incidencia de las ondas sísmicas, así como el tipo de éstas, son importantes sobre la respuesta por cuanto modifican el perfil de la solicitación ondulatoria. Los resultados obtenidos ponen de manifiesto todas estas conclusiones y animan a profundizar en el estudio. Aspectos relacionados con el emplazamiento como son la estratigrafía -y en general las características geotécnicas y geológicas, incluyendo posibles discontinuidades subterráneas-, las propiedades mecánicas del suelo y la topografía cercana, son aspectos que siguen mereciendo nuevos estudios, y que deben tenerse en cuenta como trabajos de ampliación de esta Tesis.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Otro conjunto de factores que tienen una importante influencia sobre la respuesta sísmica de la presa lo constituyen todos aquellos que afectan al campo de presiones hidrodinámicas del agua embalsada. La compresibilidad del agua, los efectos de interacción dinámica entre el agua y las paredes del vaso así como entre el agua y la presa, y la geometría real del vaso, son aspectos que deben ser contemplados de forma rigurosa para reproducir de manera realista los fenómenos de propagación de ondas que se dan en el interior del agua y por tanto de la presión hidrodinámica en el trasdós de la bóveda. La importancia de estos aspectos está recogida en la bibliografía existente (Hall y Chopra 1982,1983; Fenves y Chopra 1985; Fok y Chopra 1987) y ya en el capítulo anterior se han presentado resultados de cómo puede alterarse la respuesta de la presa por la consideración de distintas geometrías para el vaso.

Cualquier cambio en la compresibilidad y/o en la geometría de la masa embalsada tiene una gran influencia. En este sentido la presencia de sedimentos de fondo en el embalse, así como sus propiedades, debe jugar un importante papel, y éste es precisamente el objeto del trabajo que se presenta en este capítulo. Estudios previos demuestran que los sedimentos depositados en el fondo del embalse pueden tener un efecto muy importante sobre el cambio de respuesta de la presa, especialmente si estos sedimentos están parcialmente saturados (Cheng, 1986).

El arrastre y sedimentación de fangos provoca, con el transcurso del tiempo, la existencia en el fondo del embalse de un depósito de material que puede entenderse conformado por un esqueleto sólido compresible (y que por tanto presenta una cierta resistencia al cambio de forma) con una cierta porosidad, y que se encuentra saturado de agua. Los sedimentos -cuyo espesor puede ser en algunos casos del orden de la mitad de la profundidad de la presa-, no sólo modifican el perfil geométrico del fondo, sino que también afectan a la interacción dinámica entre el agua y los contornos que delimitan el vaso, al tiempo que juegan un importante papel al absorber parte de las ondas que llegan al fondo.

El modelo más apropiado para el estudio del comportamiento de los sedimentos es el de un medio poroelástico en el que confluyen dos fases: un esqueleto elástico que representa la matriz sólida y un medio fluido compresible que representa el agua que fluye por los intersticios del esqueleto. El fluido puede además contener o no cierta cantidad de partículas de gas. Sin embargo encontramos en la literatura diversos modelos simplificados que se han propuesto para tener en cuenta la influencia de los sedimentos sobre el carácter dinámico del sistema. Fenves y Chopra (1985) fueron los primeros en presentar un modelo que incluía la absorción en el fondo del embalse para el análisis sísmico de presas de gravedad. Se trata de un modelo bidimensional en el que los autores aproximan la condición de contorno en el fondo mediante un coeficiente de reflexión de acuerdo con la teoría monodimensional de propagación de ondas, correspondiendo a ondas de presión hidrodinámicas propagándose verticalmente en una lámina de agua sobre un semiespacio viscoelástico uniforme. El mismo tipo de simplificación fue empleado, ahora ya para problemas tridimensionales, en el modelo que Fok y Chopra

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

(1986a,b y c) presentaron para el análisis sísmico de presas bóveda. En ambos casos el valor de este coeficiente de reflexión, que debía ser estimado a partir de las propiedades del sedimento y del terreno, introduce inevitablemente una doble fuente de incertidumbre: por un lado acerca de su valor para una situación real concreta, y por otro acerca de la aptitud de este modelo monodimensional de interacción para representar con rigor los fenómenos de interacción entre el embalse y sus contornos para un problema cuyo carácter real es 2D ó 3D. En este sentido Domínguez y Maeso (1993) pusieron de manifiesto serias discrepancias entre los resultados obtenidos por medio de un coeficiente de absorción y los resultantes de un modelo de interacción rigurosa, para el caso de presas bóveda 3D. Aun así, muy recientemente Chuhan et al. (2001) abordan el cálculo de coeficientes de absorción, y proponen de nuevo un modelo monodimensional para una geometría que consiste en una lámina de agua sobre un estrato que representa el sedimento, y que es modelado bien como medio viscoelástico o bien como un medio poroelástico completamente saturado. Los valores obtenidos de dicho coeficiente son utilizados luego por los autores en el código de elementos finitos de Hall y Chopra (1983) para el estudio del efecto de la compresibilidad del embalse en una presa arco de gravedad.

Otro tipo de simplificación la constituye el modelizar el sedimento como un medio monofásico. En un estudio 2D para presas de gravedad, Lofti (1986) y Lofti et al. (1987) consideraron el sedimento como una capa de material viscoelástico cuasi-incompresible que era incluída en un modelo acoplado bidimensional de elementos finitos. En el primero de estos trabajos una capa indefinida de sedimentos descansa sobre un estrato de suelo sobre base rígida. En el segundo el suelo se representa como un semiespacio elástico uniforme y en ambos las interacciones dinámicas entre la presa, el agua, el suelo y el sedimento se imponen de forma rigurosa a través de condiciones de equilibrio y compatibilidad. De manera semejante, también para presas de gravedad, Medina et al. (1990) consideraron el sedimento como un material viscoelástico al que sólo se dotaba de capacidad para transmitir ondas longitudinales. En este estudio todas las regiones del problema (presa, agua, suelo y sedimento) se incorporan en un modelo bidimensional de elementos de contorno en el que se imponen condiciones estáticas y cinemáticas de acoplamiento en las interfases comunes. A diferencia del modelo anterior de elementos finitos, este modelo permitía considerar geometrías irregulares para la capa de sedimentos, el perfil del fondo o la topografía cercana al embalse, pudiendo representar el suelo bien como un medio estratificado o bien como un semiespacio viscoelástico.

Un modelo del sedimento como material poroelástico bifásico lo encontramos en el trabajo ya citado de Cheng (1986), quién estudia la influencia del sedimento y sus propiedades en el perfil de presiones hidrodinámicas sobre la pared de una presa rígida. Se trata de un problema monodimensional que permitió a su autor poner de manifiesto que existen sensibles diferencias en los resultados en función de la compresibilidad del sedimento y su grado de saturación. Bougacha y Tassoulas (1991a,b) presentaron un modelo acoplado 2D de elementos finitos para el análisis dinámico de presas de gravedad, que incorpora una lámina uniforme de sedimento poroelástico que descansa sobre un estrato de suelo elástico con base rígida. En su estudio la interacción entre todos

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

los medios se impone de forma rigurosa. Posteriormente, y como ampliación del modelo ya comentado de Medina et al. (1990), Domínguez et al. (1997) presentaron un modelo para el estudio de la respuesta sísmica de presas de gravedad a través de la modelización de la presa, el agua, el sedimento bifásico poroelástico y el suelo, a través del Método de los Elementos de Contorno, incorporando la presencia de ondas en un suelo viscoelástico homogeneo o estratificado, y condiciones de acoplamiento rigurosas entre todas las regiones. La influencia del grado de saturación y del espesor de la capa de sedimentos sobre la respuesta de la presa fue estudiada por los autores, concluyendo que la respuesta dinámica del sistema puede verse sensiblemente alterada, especialmente cuando el sedimento está parcialmente saturado.

En este capítulo se presenta una ampliación del modelo tridimensional de elementos de contorno presentado en el capítulo anterior, en el sentido de incorporar los sedimentos de fondo que se han incluido como una nueva región de elementos de contorno con propiedades poroelásticas. El comportamiento de los sedimentos se hará a través de una representación rigurosa como medio bifásico poroelástico, de acuerdo con la formulación de Biot (1956). Las ecuaciones de gobierno así como la representación integral en el contorno y las ecuaciones del MEC para este medio ya ha sido introducidas en los capítulos 2, 3 y 4. Tal como se vio entonces, dicha formulación recoge todos los parámetros que definen el carácter dinámico del material, incluyendo la densidad añadida y el coeficiente de disipación. Todas las regiones del problema (presa bóveda, agua embalsada, sedimentos de fondo y suelo de cimentación) se modelan, en cada caso, a través de las ecuaciones del MEC en régimen armónico para medios elásticos (presa de hormigón y suelo), para medios fluidos compresibles (agua) y para medios bifásicos poroelásticos (sedimentos). Las condiciones de contorno en las interfases entre cualesquiera dos de estas regiones se han prescrito imponiendo condiciones de equilibrio y continuidad cinemática en los nodos de los contornos comunes, de acuerdo con las ecuaciones que se presentaron en el capítulo 2, y la excitación sísmica se ha modelado como un tren de ondas elásticas planas que inciden por el suelo desde el infinito hacia la zona de la presa. El modelo así definido ha permitido analizar la respuesta dinámica de la presa, y cómo en dicha respuesta influye la presencia de los sedimentos y las características de éste. El estudio que aquí se expone es una extensión de algunos trabajos ya impresos y que se recogen en las referencias: Maeso et al. (1999) contiene algunos resultados preliminares para el caso de presas sobre base rígida; incluyendo la flexibilidad del suelo y el carácter viajero de la excitación pueden encontrarse resultados del estudio en Aznárez et al. (2001) y Maeso et al. (2002a,b). Es, hasta donde este autor conoce, el único modelo 3D publicado hasta el momento para el análisis sísmico de sistemas presa-suelo-embalse-sedimento que incorpora el depósito como un medio bifásico poroelástico saturado y las interacciones comunes de forma rigurosa, formulando el comportamiento de todas las regiones simultáneamente.

Además del modelo poroelástico en que coexisten la fase sólida (esqueleto) y la fase fluida (el agua que recorre los intersticios), se van a experimentar otros modelos simplificados para analizar el comportamiento del sedimento, de la misma forma que han hecho otros autores como ya se ha comentado. Las alternativas ensayadas son la de

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

considerar el material depositado como un medio viscoelástico (capaz de transmitir ondas longitudinales y de corte) o como un medio escalar compresible (que sólo transporta ondas longitudinales). El objetivo que se persigue es evaluar la buena o mala aptitud de estas simplificaciones en relación con el modelo bifásico poroelástico, investigar la importancia de las diferentes ondas que propaga el medio poroelástico en la respuesta dinámica de la presa para un sedimento con unas determinadas características y, en su caso, determinar el ámbito de aplicación de este tipo de simplificaciones. Habrán de estudiarse situaciones diferentes en cuanto al grado de saturación del sedimento y diferentes geometrías para el embalse. Veremos que es posible encontrar modelos simplificados para el sedimento y que éstos deben estar validados por la comparación con el modelo poroelástico riguroso. Ello supone importantes ventajas computacionales en cuanto a la disminución del número de grados de libertad del problema. Sin embargo esta estrategia se presenta muy comprometida en el caso de que la constante de disipación del medio sea muy baja.

Para realizar este estudio, y antes de abordar el análisis de la presa bóveda de Morrow Point, en el próximo apartado vamos a llevar a cabo un experimento numérico para un problema más sencillo, y de un coste computacional mucho menor. Se trata de un problema bidimensional que ha sido resuelto con el programa de ordenador desarrollado para el caso general 3D. Con él pretendemos entender la importancia de los diferentes factores mencionados en el párrafo anterior al tiempo que ponderar la aptitud de los modelos simplificados del sedimento.

6.2 Estudio Numérico Previo. Problema Bidimensional

La Fig. 6.1 representa un esquema del problema que se pretende resolver. Se trata de un depósito de 100 m de longitud y profundidad uniforme $H = 100$ m. La pared del lado derecho del depósito, así como el fondo, se consideran rígidas y sometidas a un movimiento horizontal armónico uniforme conocido en la dirección longitudinal del depósito. En su lado izquierdo el depósito se cierra con un muro de 20 m de ancho, con las propiedades del hormigón, cuya base está empotrada en un suelo rígido sometido al mismo movimiento que las paredes rígidas del depósito. El recinto así conformado se encuentra completamente lleno de agua y en su fondo existe una lámina de sedimento poroelástico de espesor h constante. Se han adoptado dos valores distintos para el espesor h, a saber $h/H = 0.2$ y 0.4.

El muro se ha modelado como un medio elástico lineal con las mismas propiedades del hormigón de la presa bóveda de Morrow Point: densidad $\rho_p = 2481.5$ kg/m^3, coeficiente de Poisson $\nu_p = 0.2$, módulo de elasticidad transversal $G_p = 11500$ Mpa, y coeficiente de amortiguamiento interno $\xi_p = 0.05$. El agua se comporta como fluido compresible y comportamiento lineal, con una velocidad de propagación de las ondas de presión de 1438 m/s y una densidad de $\rho_a = 1000$ kg/m^3. El material depositado en el fondo se ha considerado como un medio bifásico poroelástico que se comporta de acuerdo con las ecuaciones vistas en capítulos precedentes. En cuanto a sus propiedades,

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

se han tomado las adoptadas por Bougacha y Tassoulas 1991b y Domínguez et al. 1997: porosidad $\phi = 0.6$, módulo de elasticidad transversal del esqueleto sólido $G = 7.7037\times10^6$ N/m^2, coeficiente de Poisson $\nu = 0.35$, coeficiente de amortiguamiento interno del esqueleto $\xi = 0.05$, densidad del esqueleto drenado 2640 kg/m^3, densidad del agua intersticial 1000 kg/m^3, y constantes de Biot $b = 3.5316\times10^6$ Ns/m^4 (constante de disipación que corresponde a una permeabilidad de 10^{-3} m/s), $Q = 8.2944\times10^8$ N/m^2 y $R = 1.24416\times10^9$ N/m^2, correspondiendo estos valores a un sedimento completamente saturado de agua que tiene un módulo de compresibilidad $K_f = 2.0736\times10^9$N/m^2. Para un sedimento parcialmente saturado el coeficiente de compresibilidad del fluido intersticial disminuye (Verruijt 1969):

$$\frac{1}{K_f'} = \frac{1}{K_f} + \frac{1-s}{p_o} \tag{6.1}$$

donde K_f' es el módulo de compresibilidad en la situación parcialmente saturada, s es el grado de saturación y p_o el valor de la presión hidrostática, que ha sido calculada para la profundidad intermedia de la capa de sedimentos en cada uno de los dos casos. Así, admitiendo un grado de saturación del 99.5% se obtienen los valores $Q = 6.50893\times10^7$ N/m^2 y $R = 9.76340\times10^7$ N/m^2 cuando la lámina de sedimentos tiene espesor $h = 0.2H$, y los valores $Q = 5.83661\times10^7$ N/m^2 y $R = 8.75491\times10^7$ N/m^2 en el caso $h = 0.4H$.

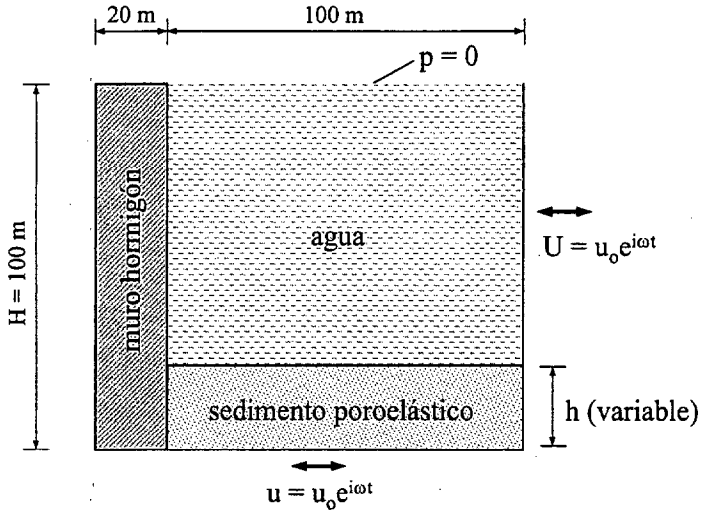

Figura 6.1. Descripción problema bidimensional

La Fig. 6.2a y b muestra las discretizaciones de elementos de contorno que corresponden a cada caso, respectivamente. La discretización se completa haciendo uso de unos contornos laterales que delimitan una anchura de 10 m respecto al plano vertical de simetría. Todos los elementos son cuadriláteros de nueve nodos e interpolación parabólica. Sólo se ha representado la mitad de la discretización completa por razón de la simetría, que se impone de forma automática en el algoritmo implementado. Se ha

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

reproducido una situación bidimensional con condiciones de deformación plana imponiendo en los contornos laterales ausencia de deplazamiento transversal (en relación con la dirección longitudinal del depósito) en las tres regiones (sólido, agua y sedimento) y ausencia de tensiones tangenciales en el sólido y en el esqueleto del sedimento. En la caras izquierda y superior del muro se prescriben tensiones nulas. En la base del muro y en las paredes rígidas del depósito se impone un desplazamiento armónico horizontal, como ya se había comentado. La presión nula en la superficie libre del agua queda recogida de forma implícita en la formulación, pues la solución fundamental utilizada cumple dicha condición. Finalmente, en las interfases entre los tres medios se imponen condiciones de equilibrio y de compatibilidad cinemática, de acuerdo con las ecuaciones presentadas en el apartado 2.13.

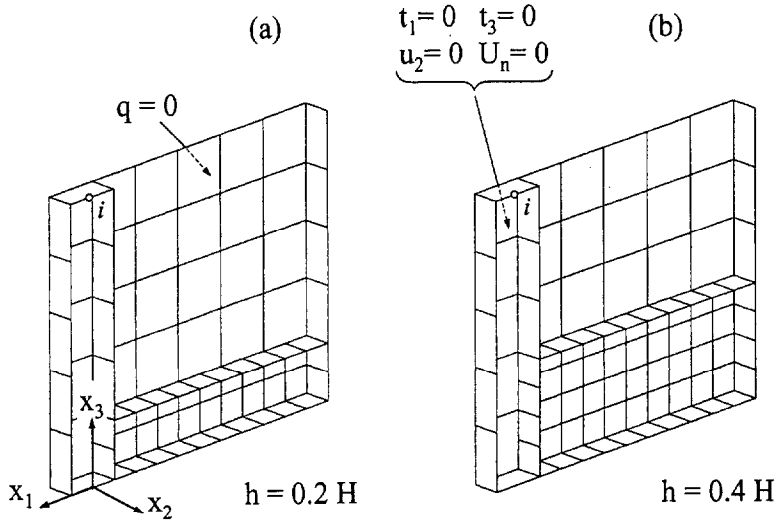

Figura 6.2. Discretización de elementos de contorno, problema bidimensional.
(a) h = 0.2 H, (b) h = 0.4 H

Se quiere conocer el comportamiento dinámico del sistema, así como la influencia que tiene el espesor de la capa de sedimentos y el grado de saturación de éste. Para ello se ha escogido como variable representativa el módulo de la función de respuesta compleja que representa la amplificación del desplazamiento horizontal, respecto a un desplazamiento unitario en la base, del punto central (nodo *i*) en la cara superior del muro de hormigón. Dicha variable se presenta en función de la frecuencia de excitación de la base, adimensionalizada con el valor de la frecuencia fundamental en flexión del muro de hormigón, calculada en ausencia de agua y de capa de sedimentos (ω_1= 6.769 rd/s).

En la Fig. 6.3 se muestra la respuesta para el caso $h/H = 0.2$. Se presentan tres curvas que corresponden a tres situaciones distintas: depósito lleno de agua sin sedimentos, depósito lleno con capa de sedimento completamente saturado y depósito lleno con capa de sedimento parcialmente saturado (s =99.5%). Apreciamos que, para el problema que

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

estamos considerando, la presencia del sedimento no modifica el valor de la frecuencia fundamental del sistema, si bien disminuye levemente la amplitud a esta frecuencia. A partir de aquí observamos que el comportamiento dinámico depende sensiblemente del grado de saturación: si el sedimento saturado retrasa las frecuencias propias superiores -en mayor medida cuanto mayor la frecuencia- respecto de la situación sin sedimento, el sedimento cuasi-saturado hace que se modifiquen drásticamente las frecuencias propias del sistema así como la amplitud de la respuesta en todo el rango. Estos comentarios son extrapolables al caso en que la capa de sedimentos tiene doble espesor $h/H = 0.4$, como se aprecia en la Fig. 6.4. Concluimos que la compresibilidad de la masa de agua embalsada se ve seriamente modificada por la presencia en el fondo de sedimentos con grado de saturación parcial, y con ello el campo de presiones hidrodinámicas, y en definitiva, el comportamiento dinámico del sistema. A estas conclusiones ya habían llegado otros autores, como apuntamos en el apartado precedente.

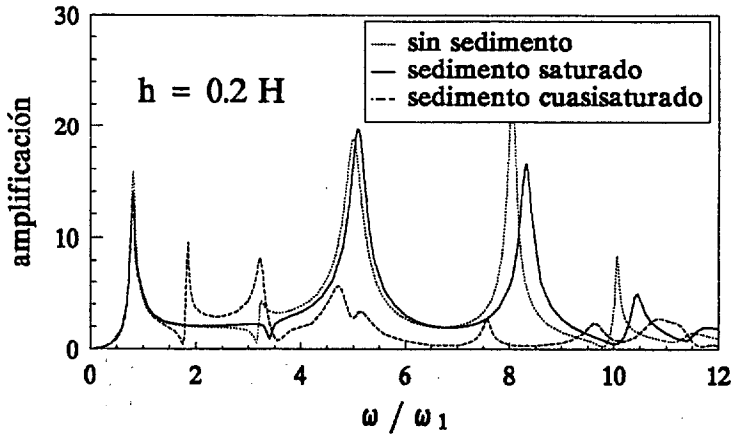

Figura 6.3. Problema bidimensional. Amplificación horizontal (x_1) en coronación. Espesor de la capa de sedimentos h = 0.2 H

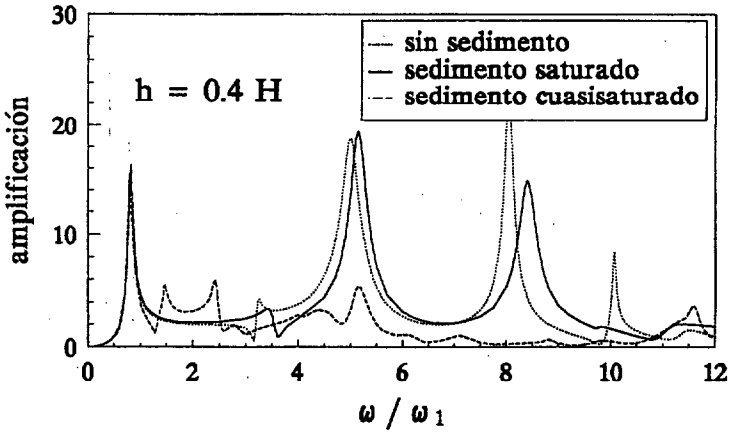

Figura 6.4. Problema bidimensional. Amplificación horizontal (x_1) en coronación. Espesor de la capa de sedimentos h = 0.4 H

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

La validez de estos resultados se ha comprobado por comparación con resultados, para el mismo problema, obtenidos con el programa bidimensional de elementos de contorno desarrollado por Domínguez et al. (1997), que utiliza la misma formulación para las regiones elásticas, fluidas y poroelásticas que la presentada en esta tésis. Con ello hemos conseguido al mismo tiempo obtener información acerca del tamaño que debe adoptarse para los elementos de contorno, en concreto en la región porosa, de forma que se garantice la exactitud de los resultados. En este sentido, el tamaño de los elementos de la región elástica (20 m) recoge sobradamente el comportamiento a flexión del muro en el rango de frecuencias estudiado. Lo mismo puede decirse de los elementos de la región agua (20 m), cuyo tamaño podría haber sido el doble sin que por ello disminuyera la precisión de los resultados (de hecho el tamaño de estos elementos se ha escogido en función de facilitar la generación del fichero de datos). En cuanto a los elementos de la región poroelástica, se han ensayado discretizaciones con elementos de 20 m (igual que los de agua), elementos de 10 m (que son los mostrados en la Fig. 6.2a,b) y elementos de 5 m. De estas pruebas se dedujo que, para las propiedades de los sedimentos considerados y el rango de frecuencias abarcado, elementos de contorno de 10 m son apropiados para simular el comportamiento de los sedimentos. Los resultados prácticamente no se modificaron por refinar la región porosa a elementos de longitud mitad, por lo que todos los resultados que se han mostrado corresponden a las discretizaciones de la Fig. 6.2a,b.

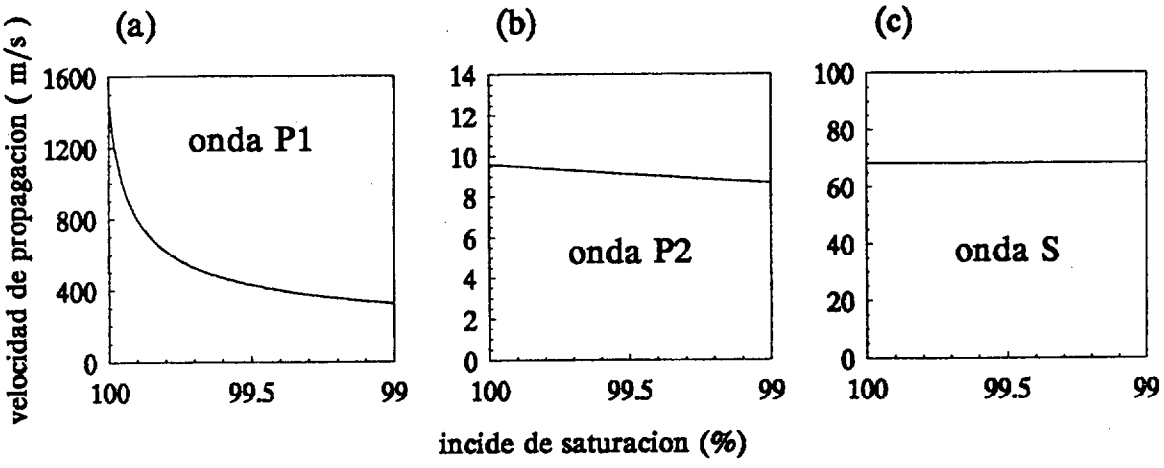

Figura 6.5. Velocidad de propagación de las ondas en el sedimento vs. índice de saturación

Los cambios que experimenta el comportamiento de la región poroelástica en función del grado de saturación se entienden mejor si se estudia cómo afecta el valor de *s* a las velocidades de propagación de las tres ondas que se propagan en dicho medio. Las Fig. 6.5a, b y c muestran, respectivamente, la evolución del módulo de las velocidades de la onda longitudinal de primer tipo, de la onda longitudinal de segundo tipo y de la onda de corte, cuando el índice de saturación pasa del 100% al 99%. Nos hemos

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

concentrado en los valores correspondientes a una frecuencia angular de 27.22 rd/s, valor de especial interés por coincidir con la frecuencia fundamental de la presa bóveda de Morrow Point, cuyo estudio abordaremos en los apartados que están por venir (para el estudio del problema bidimensional que nos ocupa representa una frecuencia adimensional alrededor de 4.0). Se observa que el valor de s afecta sensiblemente al valor de la velocidad de la onda P1 pero muy poco al valor de las otras dos. En concreto, la velocidad de la onda rápida se divide por un factor de 3.38 entre s = 100 y 99.5%, valores del índice de saturación adoptados en nuestro estudio. Parece deducirse, así pues, que los importantes cambios en cuanto al comportamiento dinámico del sistema observados en las Figuras 6.3 y 6.4 relacionados con el valor de s, se deben al cambio que experimenta la onda rápida P1, puesto que el efecto sobre las otras dos es mínimo.

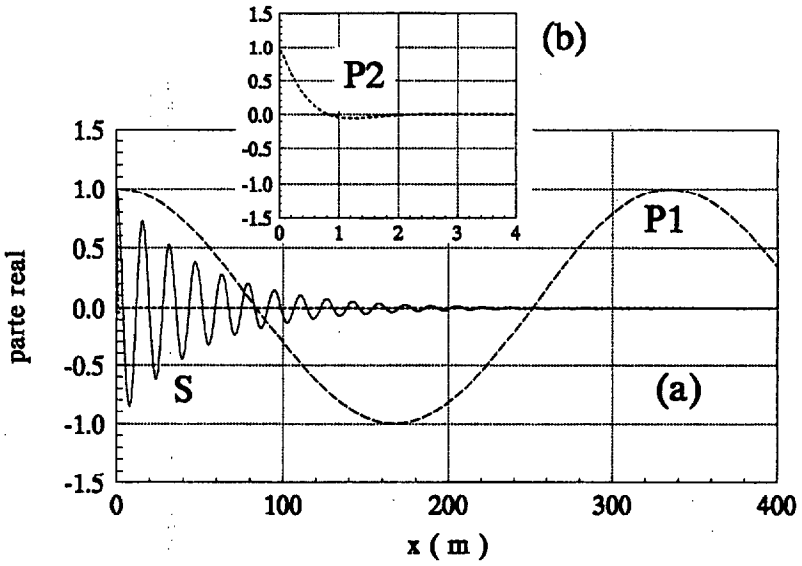

Figura 6.6. Evolución espacial de las tres ondas presentes en el sedimento en un problema de propagación monodimensional.
Índice de saturación = 100%, b = 3.5316×10^6 Ns/m^4

Otro factor decisivo en cuanto al peso específico que cada una de las tres ondas tiene sobre el carácter dinámico del sólido poroelástico es la naturaleza disipativa de este tipo de medios. Merece la pena investigar la importancia que la disipación del medio tiene sobre cada una de las ondas. Para ello hemos estudiado la evolución de las ondas P1, P2 y S en un problema sencillo, que corresponde a un caso de propagación monodimensional (y por tanto sin amortiguamiento por radiación) de tres ondas (una de cada tipo). La Fig. 6.6a muestra la evolución espacial (se muestra la parte real) de tres ondas cuyo módulo en el origen es la unidad, y que se se propagan en la dirección positiva del eje x. Las propiedades del medio poroelástico que se han considerado son las del sedimento que estamos estudiando, con constante de disipación $b = 3.5316\times10^6$ Ns/m^4, amortiguamiento interno del esqueleto de $\xi = 0.05$ y grado de saturación 100%, y

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

los valores se han calculado a una frecuencia de 27.22 rd/s. De la figura se desprende que es la onda longitudinal de primer tipo la que más se deja sentir en el medio. De hecho la onda S y especialmente la onda P2 se disipan rápidamente (la Fig. 6.6b muestra a una escala mayor la evolución de la onda P2), por lo que su influencia debe ser menor en comparación con la onda P1. La variación del grado de saturación hasta el 99.5% modifica, lógicamente, la longitud de la onda P1, pero no altera ninguna de las conclusiones, como se aprecia en la Fig. 6.7.

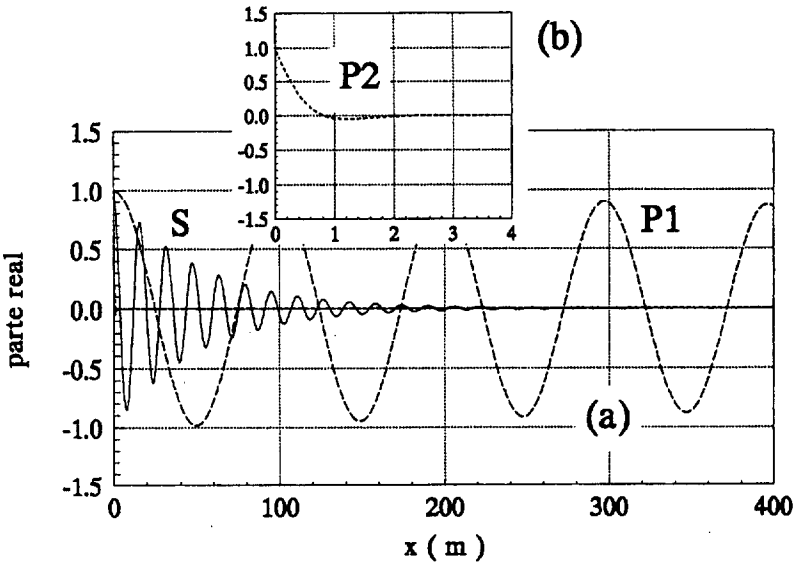

Figura 6.7. Evolución espacial de las tres ondas presentes en el sedimento en un problema de propagación monodimensional.
Índice de saturación = 99.5%, b = 3.5316×10^6 Ns/m^4

Del estudio simultaneo de las Fig. 6.5a,b,c; 6.6a,b y 6.7a,b cabe concluir la hipótesis de que, para las propiedades consideradas en nuestro estudio, resulta ser la onda P1 la que en mayor medida gobierna el carácter dinámico del medio. Este argumento, de ser cierto, anima a considerar modelos simplificados para el análisis dinámico del sedimento, pues ello supone procedimientos más sencillos y una disminución muy significativa en cuanto al número de grados de libertad del problema. La primera simplificación que a uno se le ocurre consiste, como han hecho otros autores, en eliminar las ondas S y P2 y considerar el sedimento como un medio escalar compresible que transmite únicamente una onda longitudinal. Llegados a este punto es importante remarcar dos aspectos. Por un lado debemos recordar que el estudio que perseguimos no es tanto la obtención de variables en la región del sedimento, como evaluar la influencia de un determinado tipo de sedimento sobre el comportamiento dinámico del sistema presa-suelo-embalse y, en definitiva, de la propia presa. Por tanto, cualquier simplificación acerca del modelo de sedimento que no altere los resultados en la respuesta de la presa debe ser adoptada como válida. Por otro lado, adoptar un modelo

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

que 'desprecie' los efectos de determinados tipos de ondas del medio poroelástico sólo estará justificado si las propiedades del medio lo permiten. Queremos con ello decir -y por otro lado resulta evidente- que cambios en las propiedades pueden implicar cambios significativos en las ondas que transmite, con lo que la relación de importancia relativa entre ellas se modifica para un problema concreto. Valga de apunte el estudio que se presenta en la Fig. 6.8, que representa la evolución espacial monodimensional de las tres ondas para un medio cuyas propiedades son las del sedimento saturado de nuestro problema pero con constante de disipación $b = 0$. La comparación con las curvas de la Fig.6.6a,b permite evaluar hasta qué punto se modifica el comportamiento de la onda S y sobre todo de la onda P2, que ahora se deja sentir más que la onda de corte (el amortiguamiento que se aprecia en las curvas se debe únicamente a la consideración de un cierto amortiguamiento interno en el esqueleto). Debemos concluir, por tanto, que cualquier modelo simplificado del sedimento debe estar apoyado por un estudio previo del comportamiento de las ondas en el medio bifásico.

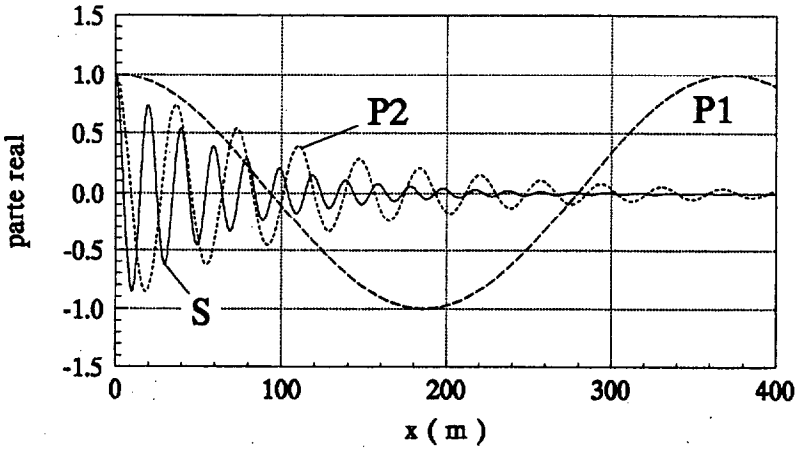

Figura 6.8. Evolución espacial de las tres ondas presentes en el sedimento en un problema de propagación monodimensional.
Índice de saturación = 100%, b = 0

De acuerdo con todo lo anterior, se ha procedido a ensayar un modelo más simple, en el que el sedimento se considera como un medio escalar compresible con unas propiedades tales que la onda de presión que en él se propaga coincide con la onda P1 del medio poroelástico bifásico a cada frecuencia, y con una densidad que es la del sedimento como medio homogéneo. A este modelo lo denominaremos en adelante modelo escalar (1). Las figuras 6.9a y b representan la comparación de los resultados entre el modelo escalar y el modelo poroelástico, en cuanto a la respuesta del problema bidimensional que estamos estudiando, para capas de depósito sedimentario de espesor $h/H = 0.2$ y 0.4, respectivamente, completamente saturado. La discretización empleada para el modelo escalar utiliza elementos de longitud 20 m en la región del sedimento (el doble que la necesaria en el modelo bifásico), por cuanto sólo necesita representar la

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

propagación de una onda que es la más larga de las tres, y cuya semi-longitud de onda para la mayor frecuencia estudiada es de 56 m (podrían haberse empleado perfectamente elementos de longitud doble). Se aprecia que el modelo escalar reproduce con buena precisión el comportamiento dinámico, ajustanto las frecuencias propias, pero sobre-estima la respuesta del sistema en dichas frecuencias. Este resultado parece lógico a la vista de la pequeña influencia que tenía la existencia de sedimento saturado en la base (Figuras 6.3 y 6.4).

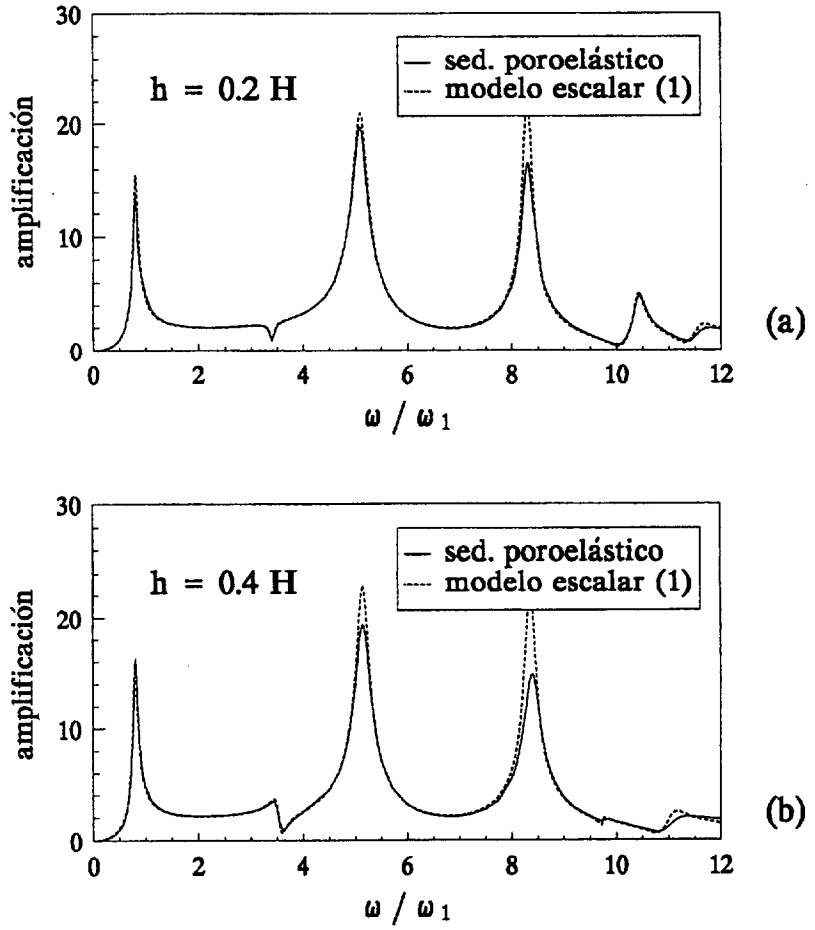

Figura 6.9. Modelo poroelástico del sedimento vs. modelo simplificado escalar (1). Sedimento completamente saturado. Espesor: (a) h = 0.2 H, (b) h = 0.4 H

La comparativa para el caso de sedimento con saturación parcial del 99.5% se presenta en las Fig. 6.10a,b para los casos h/H = 0.2 y 0.4, respectivamente. La discretización del sedimento escalar exige ahora elementos más pequeños puesto que disminuye la longitud de onda (la semi-longitud es 16.6 m para la frecuencia más alta), habiéndose empleado la malla con elementos de 10 m representada en las figuras 6.2a,b. Ahora con mayor claridad se aprecia que el modelo escalar sobre-estima la respuesta para las frecuencia propias del sistema, y es más oscilante en general en todo el rango de

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

frecuencias. A la vista de las figuras deducimos que este modelo, si bien ajusta con precisión los valores de las frecuencia propias independientemente del grado de saturación y del espesor de la capa de sedimentos, infra-valora sin embargo el amortiguamiento del sistema, prediciendo respuestas en las frecuencias propias que están sobre-estimadas con respecto a las del modelo bifásico. Parece, así pues, que el valor del onda longitudinal rápida es la que gobierna cuáles son las frecuencias propias (para las propiedades del sedimento que estamos estudiando), pero la consideración de esta onda como única onda no reproduce el amortiguamiento con precisión. De nuevo las figuras 6.6a,b y 6.7a,b ayudan a encontrar una posible explicación a este fenómeno. Las ondas P1 son las que menos se ven afectadas por la disipación del medio, mientras que las ondas S y P2 se amortiguan rápidamente. Por tanto, suponer que toda la energía contenida en la capa de sedimentos se propaga a través únicamente de ondas P1 significa infra-valorar la disipación. En efecto, parte de la energía en el sedimento se encuentra en las ondas S y P2, que se disipan con rapidez y con ello la energía que transportan.

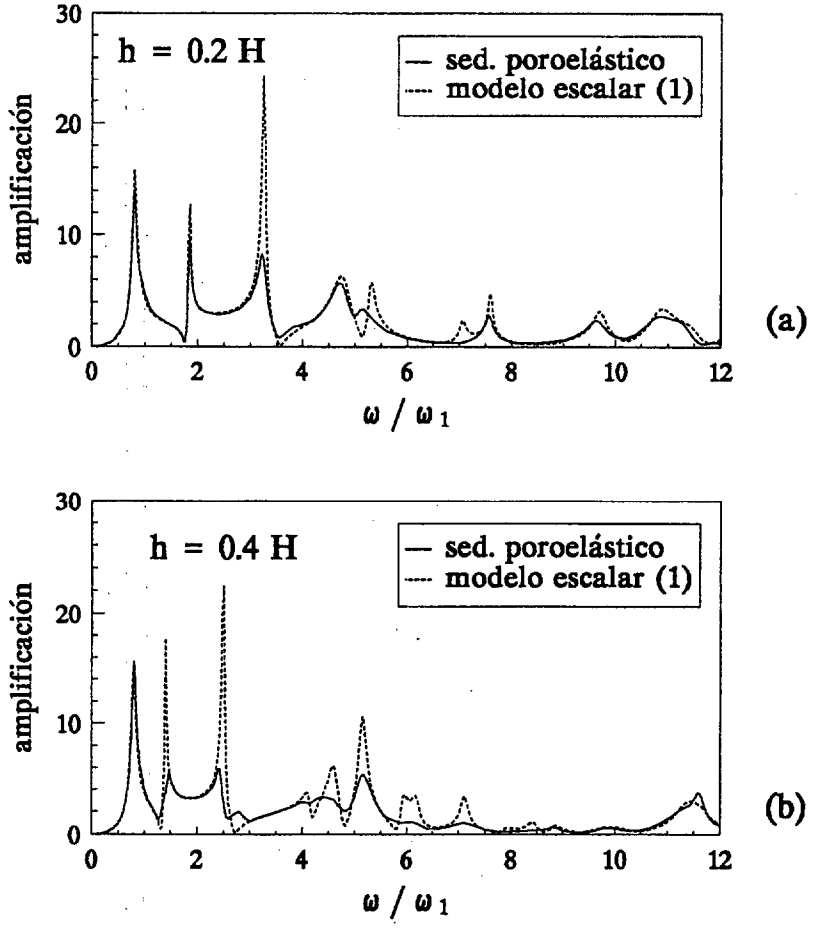

Figura 6.10. Modelo poroelástico del sedimento vs. modelo simplificado escalar (1). Sedimento cuasisaturado (99.5%). Espesor: (a) h = 0.2 H, (b) h = 0.4 H

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Llegados a este punto, y siguiendo el razonamiento anterior, se nos ocurre ensayar un segundo modelo simplificado del sedimento. En esta ocasión eliminaremos exclusivamente la onda más amortiguada (la onda P2), y modelaremos el sedimento como un medio viscoelástico que propaga ondas longitudinales y de corte que son, a cada frecuencia, las ondas P1 y S del medio bifásico, con la densidad del sedimento como medio homogeneo. La discretización empleada es la de las figuras 6.2a,b, puesto que discretizaciones más groseras no reproducen la variación espacial de la onda S. Los resultados para este nuevo modelo (denominado en las figuras modelo viscolelástico) se presentan en las figuras 6.11a,b para saturación 100% y profundidades de estrato h/H = 0.2 y 0.4, respectivamente. En las figuras 6.12a,b se muestran los resultados para índice de saturación s = 99.5%. Se deduce que el modelo viscoelástico proporciona buenos resultados, en comparación con el modelo poroelástico, para ambos grados de saturación y para los diferentes espesores estudiados de la capa de sedimento.

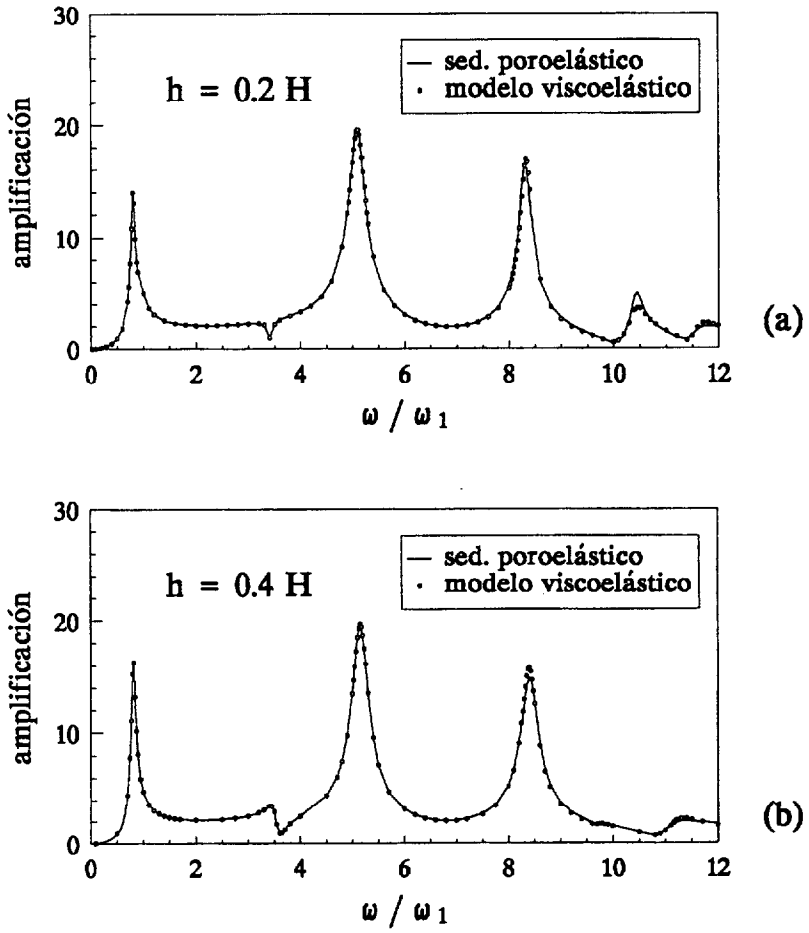

Figura 6.11. Modelo poroelástico del sedimento vs. modelo simplificado viscoelástico. Sedimento completamente saturado. Espesor: (a) h = 0.2 H, (b) h = 0.4 H

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

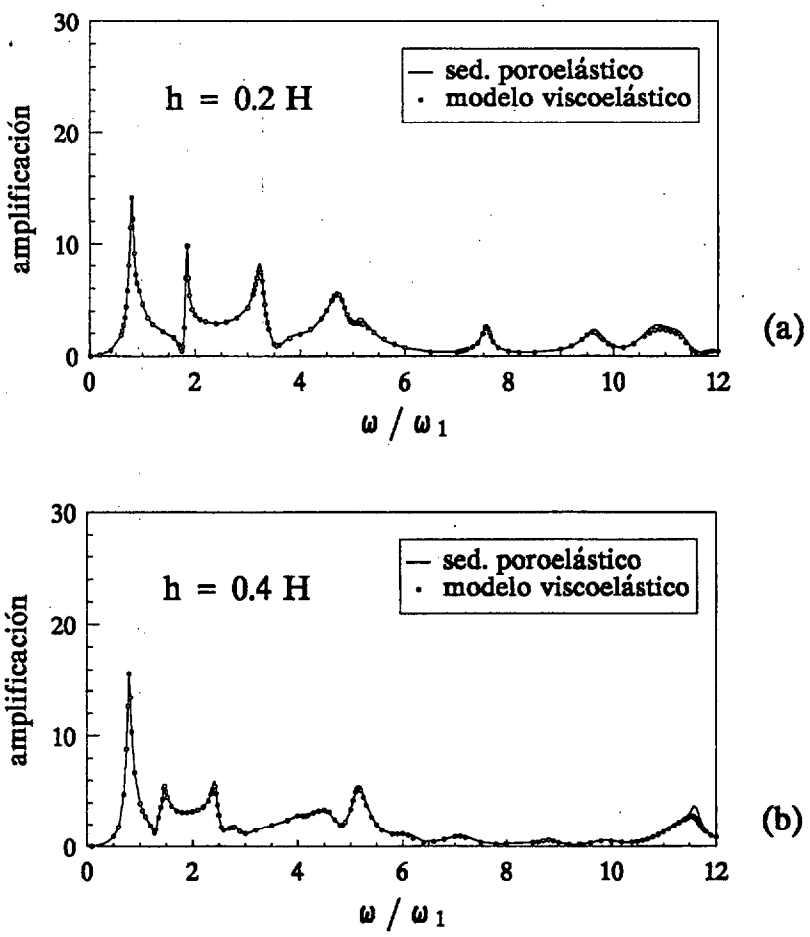

Figura 6.12. Modelo poroelástico del sedimento vs. modelo simplificado viscoelástico. Sedimento cuasisaturado (99.5%). Espesor: (a) h = 0.2 H, (b) h = 0.4 H

Las pruebas numéricas se extendieron a estratos de sedimento de espesor $h/H = 0.6$, con grado de saturación variable, y en condiciones de excitación horizontal y vertical de la base rígida. Los resultados (que hemos omitido por brevedad) ratifican todas las conclusiones anteriores en cuanto al comportamiento de los dos modelos simplificados. Cabe preguntarnos si estas conclusiones son extrapolables de forma directa al caso de un problema 3D como es el de la respuesta sísmica de presas bóveda, pues ello implicaría una simplificación notable del problema. El estudio correspondiente es el objetivo de los próximos apartados.

6.3 Respuesta Sísmica de la Presa de Morrow Point

La formulación en ecuaciones integrales y el modelo tridimensional de elementos de contorno presentado en el Capítulo anterior para el cálculo del comportamiento dinámico acoplado de los medios elásticos y fluidos que conforman el sistema presa-suelo-agua embalsada, ha sido ampliado para incorporar una nueva región que representa los

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

sedimentos de fondo en el embalse, y que a su vez se ha representado a partir de una formulación integral de las ecuaciones de comportamiento y su posterior discretización en un modelo de elementos de contorno. Así, se escriben las ecuaciones de elementos de contorno para la presa y suelo de cimentación como medios elásticos lineales, homogeneos e isótropos, siendo este último de dimensión infinita en comparación con las dimensiones de la presa. Se escriben también las ecuaciones del MEC para el agua embalsada como medio fluido compresible lineal, tomando en consideración una solución fundamental que incorpora la ausencia de presiones en la superficie libre, con lo que no se hace preciso discretizarla. En cuanto al sedimento, se escriben para él las ecuaciones de elementos de contorno correspondientes a un medio poroelástico saturado o parcialmente saturado de agua que cumple las ecuaciones de comportamiento dinámico de Biot (1956).

Para analizar la influencia de los sedimentos de fondo sobre la respuesta de la presa, extendemos el análisis efectuado en el capítulo anterior de la presa bóveda de Morrow Point de 142 m de altura, y estudiamos las diferencias en la respuesta de la presa que produce la existencia de una capa de sedimentos poroelásticos en el fondo del embalse, de un espesor que es el 20% de la altura de la presa, y que se extiende aguas arriba hasta una distancia de 172 m desde la bóveda. Las propiedades de los diferentes medios ya han sido presentadas con anterioridad, pero pasamos, para mayor claridad, a definirlas de nuevo. El hormigón de la presa viene caracterizado por una densidad ρ_p = 2481.5 kg/m^3, coeficiente de Poisson ν_p = 0.2, módulo de elasticidad transversal G_p = 11500 Mpa, y un coeficiente de amortiguamiento interno ξ_p = 0.05. El suelo de cimentación tiene una densidad de ρ_s = 2641.65 kg/m^3, y el mismo módulo de elasticidad, coeficiente de Poisson y coeficiente de amortiguamiento interno que el hormigón. Para el agua se ha adoptado una velocidad de propagación de las ondas de presión de 1438 m/s y una densidad de ρ_a = 1000 kg/m^3. El material depositado en el fondo se ha considerado como un medio bifásico poroelástico con las mismas propiedades que las adoptadas por Bougacha y Tassoulas 1991b y Domínguez et al. 1997 en sus estudios bidimensionales de respuesta sísmica de presas de gravedad: porosidad ϕ = 0.6, módulo de elasticidad transversal del esqueleto sólido G = 7.7037×10^6 N/m^2, coeficiente de Poisson ν = 0.35, coeficiente de amortiguamiento interno del esqueleto ξ = 0.05, densidad del esqueleto drenado 2640 kg/m^3, densidad del agua intersticial 1000 kg/m^3, constante de disipación b = 3.5316×10^6 Ns/m^4 (que corresponde a una permeabilidad de 10^{-3} m/s). Consideraremos dos índices distintos de saturación. Por un lado, un sedimento completamente saturado, para el cual las constantes de Biot son Q = 8.2944×10^8 N/m^2 y R = 1.24416×10^9 N/m^2, correspondiendo estos valores a un fluido con un módulo de compresibilidad K_f = 2.0736×10^{9}N/m^2. También consideraremos un sedimento parcialmente saturado con índice de saturación s = 99.5%, para el que se obtienen unas constantes de Biot Q = 8.9328×10^7 N/m^2 y R = 1.3399×10^8 N/m^2, habiéndose adoptado en este caso en la ecuación (6.1) el valor de la presión absoluta p_o correspondiente a la profundidad media de la capa de sedimentos (127.8 m).

La Figuras 6.13 y 6.14 muestran las discretizaciones de elementos de contorno empleadas en el estudio del sistema completo presa-suelo-agua-sedimento, para el caso

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

de un embalse cuya dimensión aguas arriba es muy grande en comparación con el tamaño de la presa. Como siempre, se dibuja la mitad de la discretización, por cuanto ésta presenta un plano de simetría. En este caso se ha discretizado la zona de geometría irregular cercana a la bóveda. A partir de este punto, como ya apuntamos en el capítulo anterior, un nuevo contorno permite representar los efectos de radiación de ondas hidrodinámicas de campo lejano, modelando el embalse como un canal rectangular uniforme que se extiende indefinidamente. En adelante usaremos la denominación de embalse abierto para referirnos a este caso. Cuando se trate de embalses no muy extensos en dirección aguas arriba es posible representar su geometría real completa con elementos de contorno. A esta situación corresponde la discretización mostrada en la Figura 6.15, cuya geometría es idéntica a la del embalse abierto de las figuras 6.13 y 6.14 hasta una distancia de 212 m desde la presa. A partir de entonces el cañón se cierra mediante una geometría de revolución. A este embalse lo denominaremos embalse cerrado.

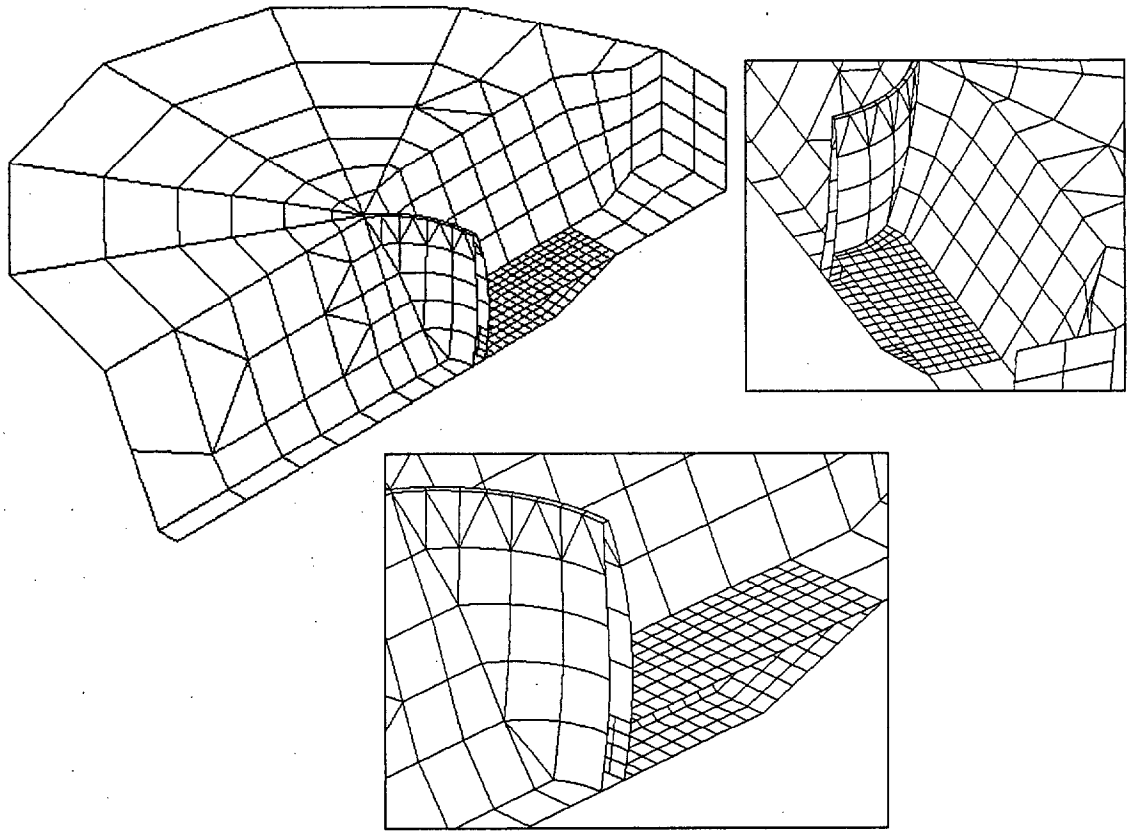

Figura 6.13. Discretización de elementos de contorno del sistema acoplado. Embalse abierto. Tamaño de los elementos en la región sedimento = 10 m

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

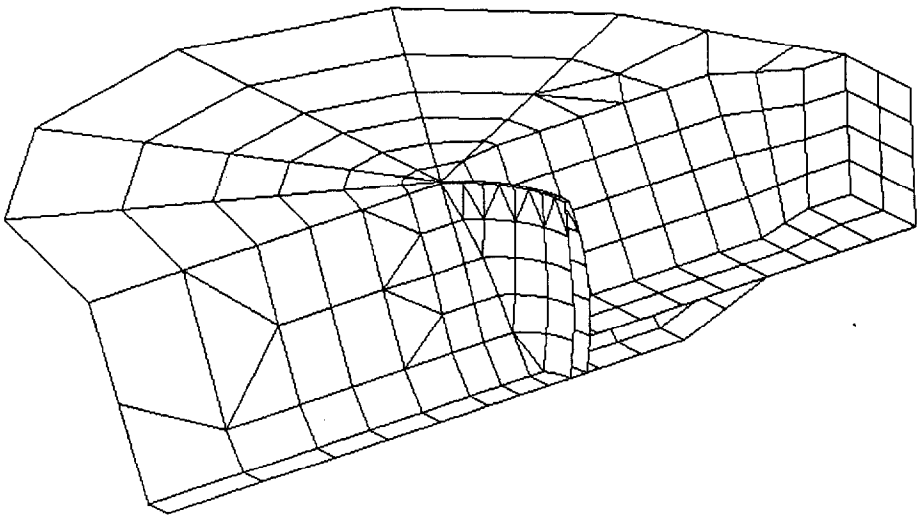

Figura 6.14. Discretización de elementos de contorno del sistema acoplado. Embalse abierto. Tamaño de los elementos en la región sedimento = 40 m

Todos los comentarios relativos a la discretización apuntados en el Capítulo anterior en cuanto a las regiones presa, suelo y agua, son aquí de aplicación. Se han utilizado lo mismos tipos de elementos cuadriláteros de nueve nodos y triangulares de seis, con aproximación parabólica tanto de la geometría como de las variables en los contornos. La geometría de la cerrada del cañón, de la superficie libre del suelo y del cañón aguas abajo es la misma en todos los casos (con la salvedad de una pequeña zona de la superficie libre en el encuentro con el cañón aguas arriba, dependiendo de que se trate del embalse cerrado o abierto). La excitación sísmica se modela a través de un tren de ondas armónicas planas que inciden hacia la presa desde el infinito. Las ecuaciones del MEC se plantean, de manera idéntica a como hicimos en el Capítulo anterior, en términos de campo difractado. De este modo se satisfacen de forma automática las condiciones de radiación por lo que la discretización puede dejarse abierta a partir de cierto punto. Así, la discretización de la superficie libre del suelo se extiende hasta una distancia del orden de 2.5 veces la altura de la presa, aumentando el tamaño de los elementos de contorno a medida que se alejan de la zona de interés. En cuanto al agua, el uso de una solución fundamental que impone la ausencia de presiones en su superficie hace que sólo sea necesario discretizar los restantes contornos que limitan esta región: cara aguas arriba de la bóveda, fondo del cañón e interfase agua-sedimento. En el caso de embalse abierto hay que añadir, como ya hemos apuntado, un contorno en el que se impone la relación entre la presión y su derivada normal correspondiente a un canal regular infinito.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

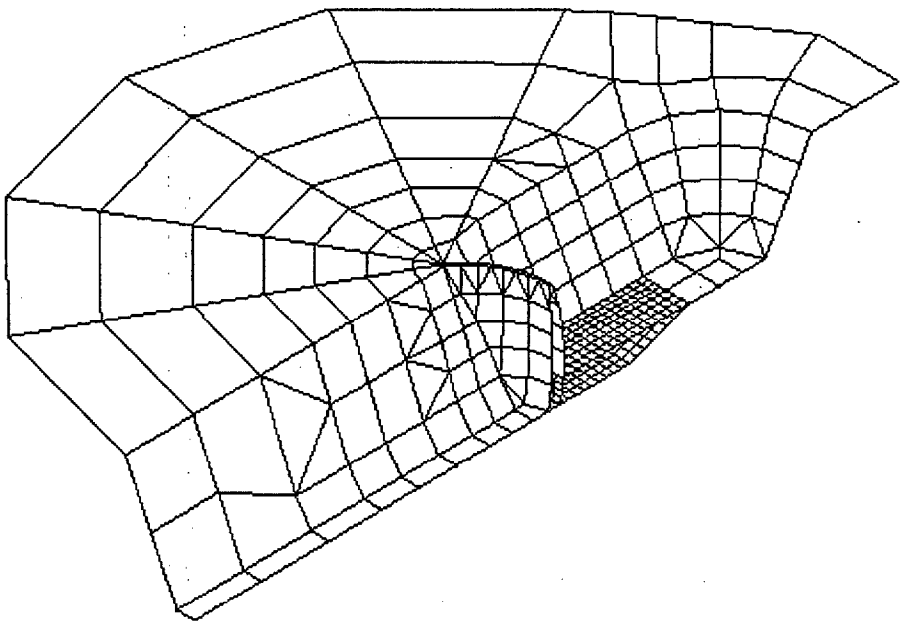

Figura 6.15. Discretización de elementos de contorno del sistema acoplado. Embalse cerrado. Tamaño de los elementos en la región sedimento = 10 m

El tamaño de los elementos de contorno está determinado por la longitud de las ondas en cada medio (salvo en la superficie libre del suelo que se han empleado elementos mayores a medida que se alejan de la zona de estudio). Las propiedades del sedimento poroelástico han forzado a utilizar elementos de menor tamaño para los contornos de sedimento que para los de agua, presa o suelo. En este sentido, y de acuerdo con las conclusiones del apartado anterior, se han utilizado elementos de contorno de 10 m cuando el sedimento se modela de acuerdo con un medio bifásico poroelástico. Las discretizaciones correspondientes se muestran en las Figuras 6.13 y 6.15, para los casos de embalse abierto y cerrado, respectivamente. El uso de elementos no conformes ha facilitado en este caso la elaboración de la malla. Este tamaño de elementos garantiza la convergencia de los resultados obtenidos en un rango de frecuencias que es el estudiado en el apartado anterior, por cuanto en aquél caso el uso de elementos de longitud la mitad no supuso modificación significativa de los mismos. Ello, para el análisis que se va a realizar de la presa de Morrow Point, supone un rango de frecuencia adimensional, aproximadamente, de cero a tres, lo cual recoge suficientemente el rango de frecuencias de interés para la mayoría de los terremotos clásicos de diseño. Aun así el rango de frecuencias estudiado se ha extendido algo más, hasta cuatro veces la frecuencia fundamental de la presa en condiciones de base rígida y embalse vacío, para comparar con resultados previos de la respuesta de la presa con embalse lleno sin sedimentos. Debemos decir que la razón de no emplear elementos de

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

tamaño inferior, en el estudio 3D, para el rango más alto de frecuencias, o incluso discretizaciones con regiones de sedimentos más extensas, radica en la limitación existente en cuanto a los recursos informáticos disponibles. Un dato: la discretización de la figura 6.13 supone gestionar del orden de 9600 grados de libertad, lo que significa montar y resolver una matriz de 1.5 Gb de memoria, lo cual ya dispara los tiempos de computación necesarios. Cuando el sedimento se modela de acuerdo a un comportamiento simplificado como medio escalar, entonces sólo es necesario representar la variación espacial de la onda longitudinal más larga. Cuando se trate de sedimento completamente saturado ello supone que elementos del orden de 40 m, igual que los del agua, (Fig. 6.14) son suficientes, y así se han utilizado en este caso. Cuando el sedimento es parcialmente saturado, la longitud de la onda de primer tipo disminuye sensiblemente como hemos visto en el apartado anterior. En este caso es preciso, para modelarla correctamente, el uso de elementos de 10 m (Figuras 6.13 y 6.15).

En todos los contornos exteriores de sólido, es decir, de presa y de suelo, se imponen condiciones de superficie libre de tensiones. Existen seis contornos intefases entre las distintas regiones del modelo, a saber: presa-suelo, presa-agua, presa-sedimento, suelo-sedimento, agua-sedimento y agua-suelo. En cada una de estas interfases se imponen condiciones de acoplamiento de forma rigurosa por medio de ecuaciones adicionales que establecen el cumplimiento de las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad entre las variables de los nodos perteneciente a dichas interfases. Las ecuaciones correspondientes a cada caso se presentaron en el apartado 2.13.

Por razones de brevedad, y sin pérdida de generalidad, únicamente hemos considerado excitaciones que consisten en la incidencia vertical de ondas *P* o *S*. Así, y en relación con la dirección longitudinal del cañón, se trata de ondas que provocan en el semiespacio movimiento vertical (onda *P*), anteroposterior (onda *SH*) o transversal (onda *SV*). Otras direcciones de incidencia y otros tipos de ondas (en concreto ondas superficiales de Rayleigh) pueden también estudiarse del mismo modo que se hizo en el capítulo anterior. Al igual que entonces, la respuesta de la presa se ha representado a través del valor de la amplitud de la función de respuesta compleja que representa la amplificación del movimiento anteroposterior de ciertos puntos de la coronación de la bóveda, en relación con el de campo libre en zonas infinítamente alejadas del cañón. Para los casos de excitaciones simétricas, anteroposterior (onda *SH*) y vertical (onda *P*), se presenta la amplificación anteroposterior del punto central de la coronación de la presa situado en el plano de simetría. Para el caso excitación antisimétrica (onda *SV*) la respuesta se presenta para un punto de la coronación de la presa situado a un ángulo de 13.25° desde el plano de simetría. En todos los casos la amplitud del movimiento anteroposterior se presenta en el rango ya determinado de la frecuencia adimensional. Para ondas *SH* y ondas *P* la frecuencia adimensional está definida como en el capítulo anterior, esto es, $a_o = \omega/\omega_1^s$, donde ω es la frecuencia de excitación y $\omega_1^s = 27.22$ rd/s es la frecuencia fundamental de la presa supuesta cimentada sobre una base infinítamente rígida y en condiciones de embalse vacío, para el modo simétrico. Para ondas *SV* la frecuencia adimensional está definida como ω/ω_1^a, donde ω es la frecuencia

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

de excitación y $\omega_1^a = 24.65$ rd/s es la frecuencia fundamental de la presa sobre base rígida y embalse vacío, para el modo antisimético.

Para un mejor entendimiento del problema, y con el objeto de desvincular los efectos del sedimento de fondo de los efectos relativos a la flexibilidad de la base rocosa (carácter espacial de la excitación e interacción suelo-presa), los resultados van a presentarse en primer lugar suponiendo que bajo el sistema acoplado presa-embalse existe un suelo infinítamente rígido. En estas condiciones, estamos interesados en conocer cómo modifica la presencia de la capa de sedimentos el comportamiento dinámico del sistema en comparación con la situación de embalse lleno sin sedimentos. Estudiaremos asimismo la influencia de las propiedades del material sedimentario, y en concreto del índice de saturación que, como hemos visto, altera sensiblemente la compresibilidad del medio. Por último, se analizan posibles modelos simplificados del sedimento, en orden a reducir grados de libertad del problema, comparando en cada caso los resultados con los correspondientes al de un medio poroeástico bifásico con todas sus propiedades. Con posterioridad y finalizado este estudio, se presentarán los resultados correspondientes al sistema presa-embalse soportado por un semiespacio elástico con las propiedades anteriormente definidas, cuando éste transporta un tren de ondas planas que incide verticalmente sobre el emplazamiento.

6.3.1 Presa Sobre Base Rígida

En estas circunstancias no existe ningún tipo de interacción presa-suelo, agua-suelo ni sedimento-suelo. Además, la excitación en este caso se reduce a imponer sobre los contornos de presa, sedimento y agua en contacto con la base rocosa, un campo uniforme de desplazamientos con variación armónica, y frecuencia dentro del rango de interés. Así, la incidencia vertical en la base de ondas *P*, *SH* y *SV* se traduce en un campo uniforme de desplazamientos vertical, anteroposterior y transversal, respectivamente, en los contornos del suelo. Con ello estos contornos se tratan como contornos exteriores con condición explícita. El sistema de ecuaciones resultante sólo incorpora las ecuaciones del MEC correspondientes a los dominios presa, agua y sedimento.

El estudio en base rígida se abordará exclusivamente para la tipología de embalse abierto. La discretización utilizada corresponde a la mostrada en la Fig. 6.13, donde hay que eliminar, de acuerdo con el párrafo anterior, los elementos de contorno de suelo en el cañón aguas abajo de la presa y los elemenos de la superficie libre del semiespacio.

Las figuras 6.16 y 6.17 muestran la evolución con la frecuencia adimensional de la amplificación anteroposterior de la coronación de la presa, en el punto contenido en el plano de simetría, para una situación en que el embalse está completamente lleno de agua, y para los casos de exitación anteroposterior y vertical, respectivamente. La Fig. 6.18 muestran asimismo la amplificación del punto de la coronación situado a un ángulo de 13.25° del plano de simetría, para el caso de excitación transversal. Se comparan los resultados para tres condiciones distintas: (1) ausencia de sedimentos de fondo; (2)

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

sedimento completamente saturado con las propiedades descritas; y (3) sedimento parcialmente saturado (s = 99.5%). El espesor del estrato de sedimentos es 0.2 veces la altura de la presa, es decir 28.4 m (Fig. 6.13). De este modo podemos evaluar la influencia del sedimento y su grado de saturación sobre el comportamiento dinámico del sistema. De las figuras se desprende que la existencia de un depósito de sedimento saturado apenas modifica la respuesta con respecto al caso de embalse lleno sin sedimentos: apenas si apreciamos un levísimo retraso de la frecuencia fundamental en los casos de excitaciones simétricas (ondas *SH* y *P* con incidencia vertical), pero el perfil de las curvas de respuesta son muy coincidentes. Por el contrario el efecto del sedimento parcialmente saturado es muy importante, y en este caso la respuesta se ve sensiblemente modificada: decrece la frecuencia fundamental del sistema para las excitaciones simétricas, decrece asimismo la respuesta ante la frecuencia fundamental, se desplazan las restantes frecuencia propias del sistema y cambia la amplitud de la respuesta en muchas de ellas. Debe concluirse que el grado de saturación del sedimento debe ser cuidadosamente evaluado. Todas estas conclusiones se deducían también de los estudios bidimensionales para presas de gravedad llevados a cabo por Bougacha y Tassolulas (1991a,b) y Domínguez et al. (1997).

En el apartado anterior presentamos modelos simplificados alternativos para modelar la capa de sedimentos. Se introdujo entonces un modelo monofásico escalar (modelo escalar (1)), que reproduce el comportamiento de la capa de sedimento como un medio fluido escalar compresible disipativo que transmite únicamente una onda longitudinal que se corresponde con la onda de primer tipo del medio bifásico. Para ello este medio se definía con una velocidad de propagación de la onda de presión que es, a cada frecuencia, la de la onda más rápida del medio poroelástico con sus verdaderas propiedades, y una densidad que es la del material bifásico homogeneo. Los resultados para el problema bidimensional del apartado anterior permitieron deducir que este modelo simplificado representaba adecuadamente las frecuencias propias del sistema tanto en el caso de sedimento saturado como en el de sedimento parcialmente saturado. Por contra, el modelo predecía una respuesta a las frecuencias propias que era invariablemente superior a la obtenida desde el modelo bifásico poroelástico, más realista. Argumentamos entonces que el modelo escalar (1) reproduce un comportamiento del sedimento con un amortiguamiento y disipación inferiores a las que son esperables si se emplea un modelo poroelástico del mismo, con las propiedades y dimensiones del medio que estamos considerando en nuestro problema. Sin embargo, podríamos decir que el camino de búsqueda para encontrar un modelo simplificado escalar que sea útil ha quedado trazado: aumentar el grado de amortiguamiento. Para ello se introduce un segundo modelo escalar compresible que denominaremos modelo escalar (2). En este caso el medio se define con una densidad que es, como en el caso anterior, la del material homogeneo del medio bifásico. En cuanto a la velocidad de la onda de presión que se propaga, ésta es variable con la frecuencia, con una parte real que es exactamente la de la onda de primer tipo del medio poroelástico (y del modelo escalar (1)), pero con una parte imaginaria que se ha aumentado hasta alcanzar la misma proporción que correspondería al amortiguamiento interno del esqueleto sólido (5%). Con este segundo modelo se persigue claramente simular la existencia de un cierto

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

amortiguamiento intrínseco al sedimento, pero manteniendo la parte real correspondiente a la onda longitudinal preponderante.

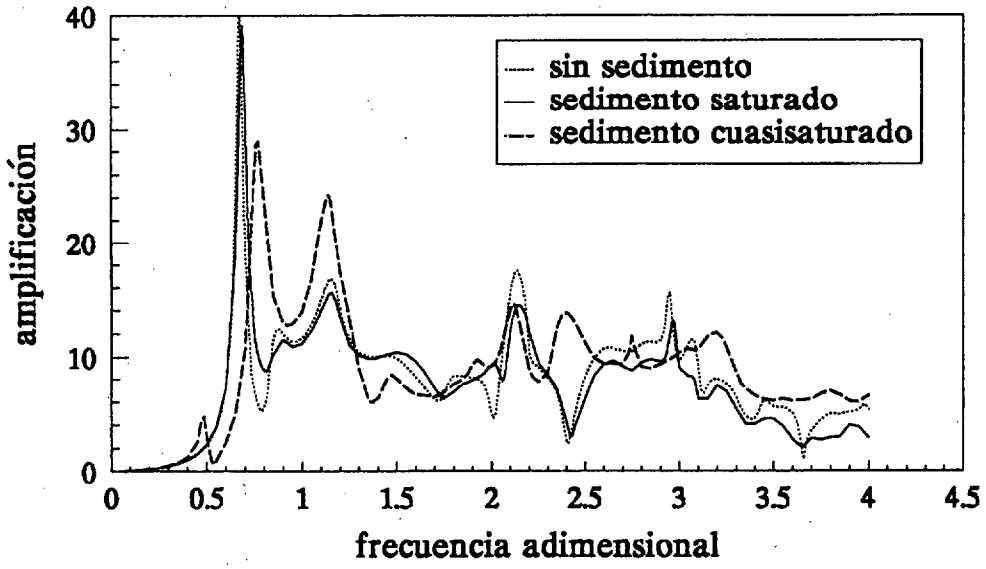

Figura 6.16. Amplificación anteroposterior. Presa-agua-sedimento poroelástico sobre base rígida. Excitación anteroposterior. Embalse abierto

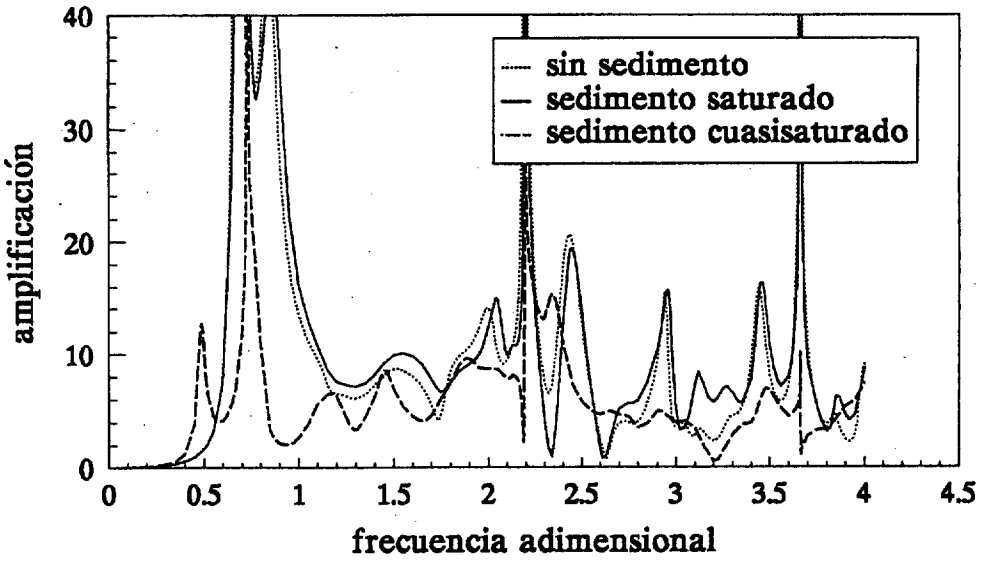

Figura 6.17. Amplificación anteroposterior. Presa-agua-sedimento poroelástico sobre base rígida. Excitación vertical. Embalse abierto

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

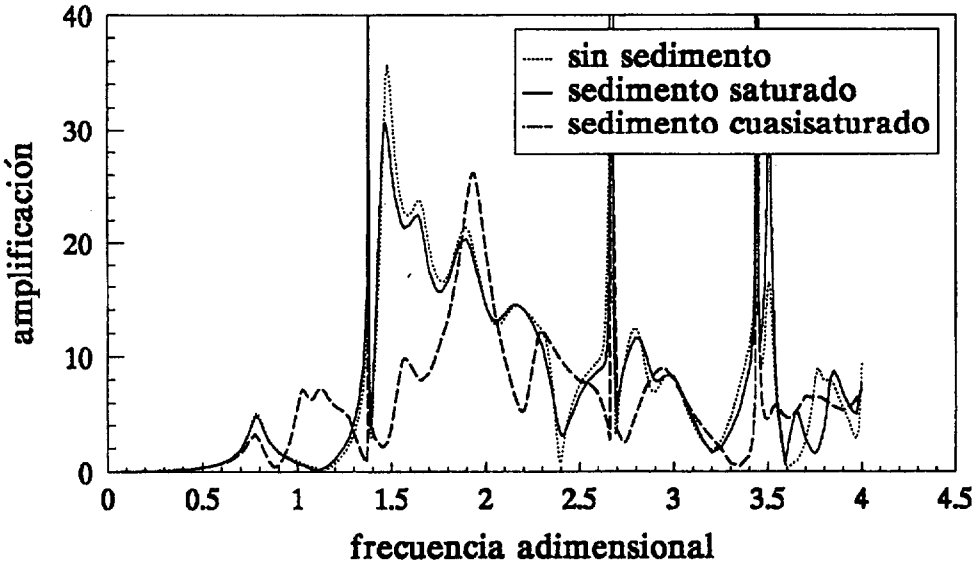

Figura 6.18. Amplificación anteroposterior. Presa-agua-sedimento poroelástico sobre base rígida. Excitación transversal. Embalse abierto

En las figuras 6.19, 6.20 y 6.21 se comparan los resultados de los tres modelos de sedimento -modelo poroelástico bifásico, modelo escalar (1) y modelo escalar (2)- para una lámina de sedimento con saturación completa, correspondiente a los casos de excitación anteroposterior, vertical y transversal respectivamente. La longitud de la onda de presión que caracterizan los dos modelos escalares está perfectamente representada con elementos de contorno del mismo tamaño que los adoptados para el agua del embalse (40 m). La discretización de elementos de contorno utilizada entonces es como la mostrada en la Fig. 6.14, pero sin incluir los elementos del cañón aguas abajo ni los elementos de la superficie libre del suelo. En esta situación (saturación completa) en la que, como hemos visto, la presencia de sedimento apenas si modifica la respuesta dinámica del sistema, los dos modelos simplificados reproducen con buena aproximación la influencia del medio poroelástico. El acuerdo entre los tres modelos es mayor en el caso de excitación anteroposterior (Fig. 6.19). En el caso de excitación vertical (Fig. 6.20) sólo se aprecia una amplitud de respuesta que está sobre-estimada por el modelo escalar (1) para las frecuencias propias adimensionales en el entorno de 2 y 2.9. Lo mismo ocurre para la excitación transversal (Fig. 6.21) en el pico situado a la frecuencia adimensional 1.5.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

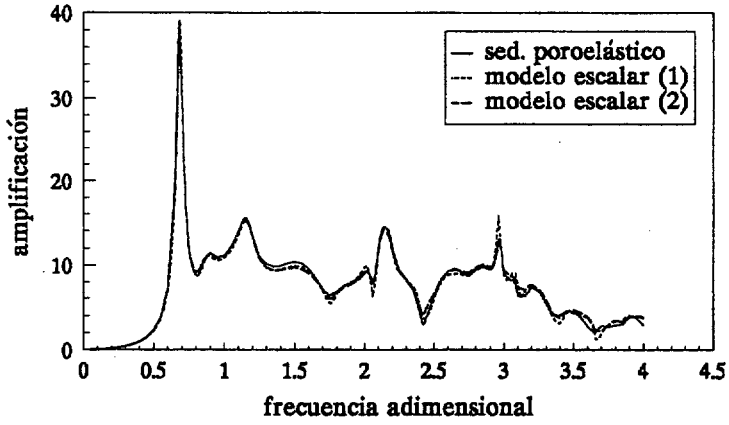

Figura 6.19. Amplificación anteroposterior. Sedimento poroelástico vs. modelos escalares. Sedimento saturado. Excitación anteroposterior. Embalse abierto. Base rígida

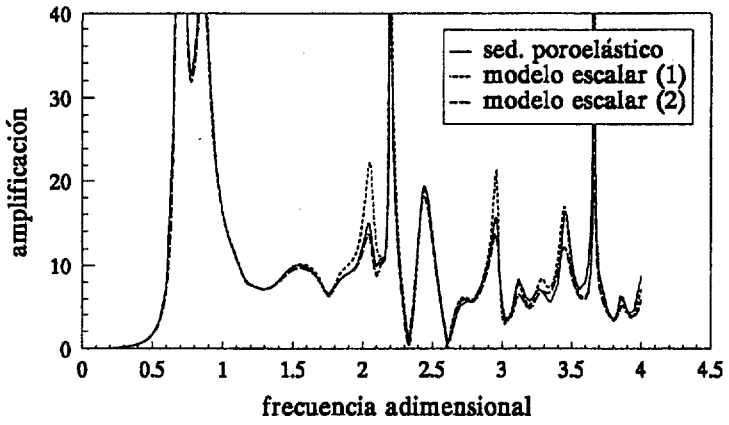

Figura 6.20. Amplificación anteroposterior. Sedimento poroelástico vs. modelos escalares. Sedimento saturado. Excitación vertical. Embalse abierto. Base rígida

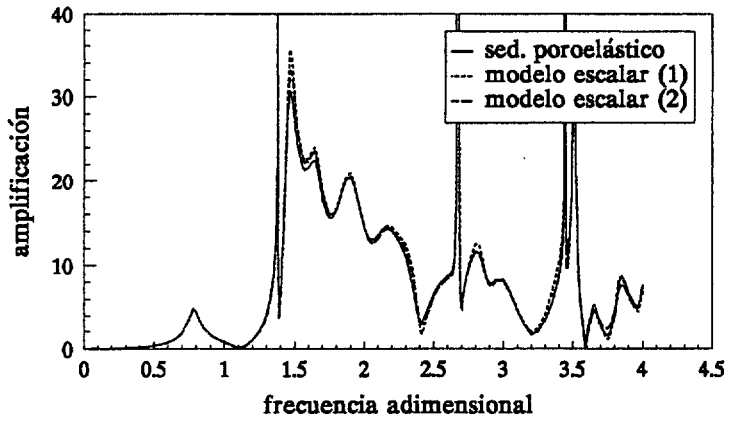

Figura 6.21. Amplificación anteroposterior. Sedimento poroelástico vs. modelos escalares. Sedimento saturado. Excitación transversal. Embalse abierto. Base rígida

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

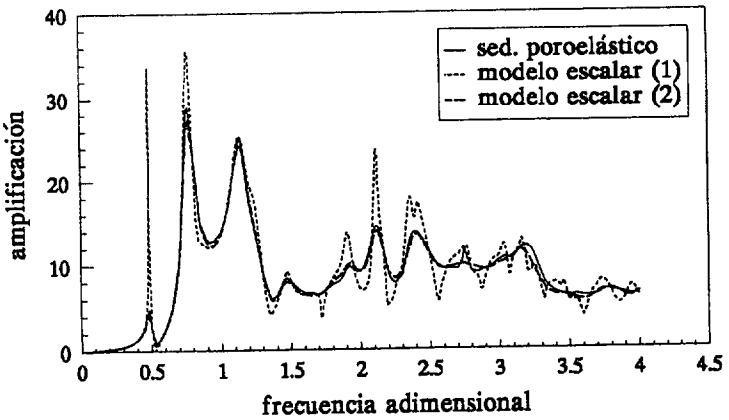

Figura 6.22. Amplificación anteroposterior. Sedimento poroelástico vs. modelos escalares. Sedimento cuasisaturado (99.5%). Excitación anteroposterior. Embalse abierto. Base rígida

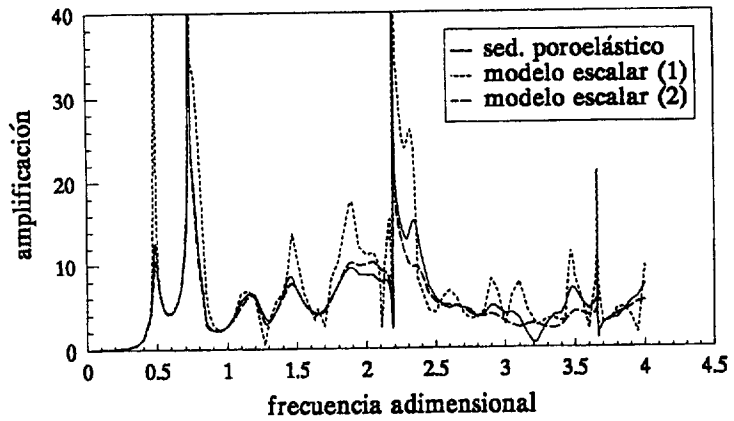

Figura 6.23. Amplificación anteroposterior. Sedimento poroelástico vs. modelos escalares. Sedimento cuasisaturado (99.5%). Excitación vertical. Embalse abierto. Base rígida

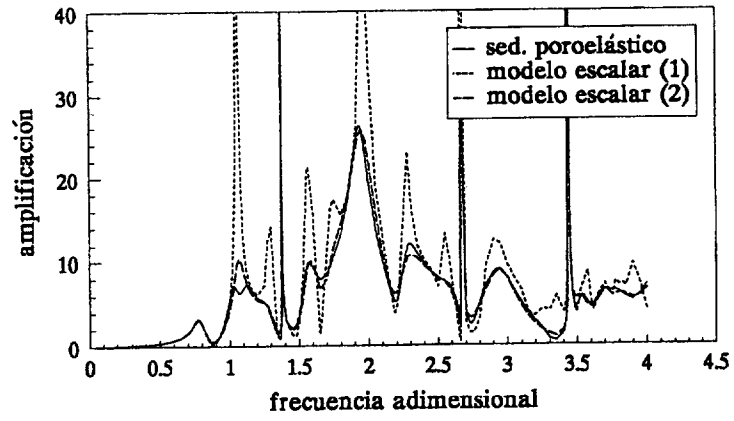

Figura 6.24. Amplificación anteroposterior. Sedimento poroelástico vs. modelos escalares. Sedimento cuasisaturado (99.5%). Excitación transversal. Embalse abierto. Base rígida

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Las conclusiones de la comparativa entre los tres modelos son distintas cuando se estudia la situación de un sedimento parcialmente saturado (s = 99.5%). La longitud de la onda de presión representada es inferior en este caso, habiéndose utilizado elementos de contorno de longitud 10 m para el sedimento, como los mostrados en la Fig. 6.13. Las Figuras 6.22, 6.23 y 6.24 muestran la comparación de resultados para las tres excitaciones, anteroposterior, vertical y transversal, respectivamente. En las figuras se aprecia que el modelo escalar (2) reproduce con una precisión bastante buena la influencia del sedimento en comparación con los resultados del modelo bifásico poroelástico, mientras que el modelo escalar (1), al igual que ocurría en el estudio llevado a cabo en el apartado anterior, presenta oscilaciones espurias y un menor amortiguamiento que el modelo poroso en todo el rango de frecuencias.

Podemos concluir que, para las propiedades del sedimento adoptadas, las dimensiones del problema y el rango de frecuencias abordado, es posible representar con buena precisión la influencia de los sedimentos de fondo por medio de modelos más simples, admitiendo la posibilidad de modelar exclusivamente la onda de primer tipo del medio poroso, y tras evaluar cuidadosamente el grado de amortiguamiento adecuado por comparación con los resultados del modelo bifásico. Se ha comprobado que el amortiguamiento y el grado de disipación del medio poroso (sobre todo si éste está parcialmente saturado) no quedan bien representados cuando se considera que toda la energía en el sedimento se transmite con la onda de primer tipo. Ha sido necesario aumentar su parte imaginaria hasta un valor ficticio, si bien evaluable, de manera que modelemos el nivel de amortiguamiento y de disipación real del medio poroso. Piénsese que la representación del sedimento mediante el MEC como un medio de naturaleza poroelástica supone considerar cuatro ecuaciones por nodo, mientras que su consideración como un medio monofásico escalar simplificado supone escribir una sóla ecuación por nodo. El uso de un modelo escalar supone por tanto una importante ventaja por el ahorro computacional que implica, pero también por la considerable simplificación que conlleva en cuanto a la formulación que representa cada uno de los modelos.

En el apartado 6.2 planteamos también la posibilidad de utilizar un modelo monofásico viscoelástico para representar el sedimento. Dicho medio se caracteriza por una densidad que es la del material bifásico considerado como medio homogeneo, y propaga una onda longitudinal y una onda de corte que son respectivamente la onda de primer tipo y la onda S del modelo bifásico poroelástico. En el problema bidimensional del apartado anterior este modelo aportó resultados precisos en relación con el modelo poroelástico que propaga los tres tipos de onda. Cabe preguntarse si también en el caso tridimensional el modelo viscoelástico reporta buenos resultados. La respuesta es afirmativa. Por razón de brevedad sólo presentamos los resultados correspondientes al caso de excitación anteroposterior y sedimento parcialmente saturado. Estos resultados se muestran en la Fig. 6.25 donde se comparan con los correspondientes del modelo poroelástico, apreciándose un acuerdo excelente entre ambos. El mismo grado de convergencia se ha obtenido para otros tipos de excitación cuyos resultados hemos

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

omitido. Podemos deducir que el modelo viscoelástico del sedimento reproduce adecuadamente su comportamiento para las propiedades consideradas. Tiene la indudable ventaja, frente al modelo escalar (2) que también proporciona buenos resultados, que no requiere alterar los valores de las velocidades de propagación de una forma ficticia, como hacía aquél, y simplemente toma a cada frecuencia los valores de la parte real e imaginaria del medio bifásico disipativo. Por contra, se trata de una formulación, que si bien es más simple que la poroelástica, es más compleja y requiere manejar un número de grados de libertad significativamente mayor que el modelo escalar.

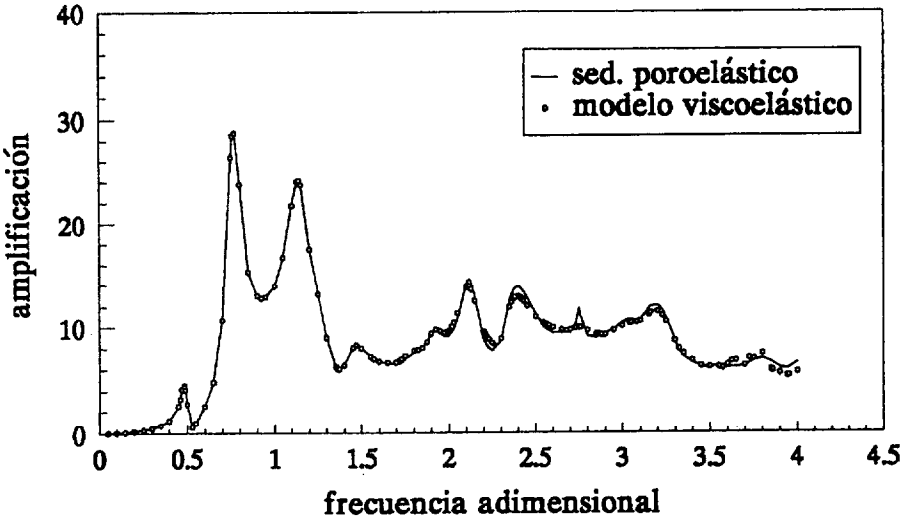

Figura 6.25. Amplificación anteroposterior. Sedimento poroelástico vs. modelo viscoelástico. Sedimento cuasisaturado (99.5%). Excitación anteroposterior. Embalse abierto. Base rígida

6.3.2 Presa Sobre Base Flexible

Se incorpora ahora el efecto de la flexibilidad del suelo sobre el comportamiento del sistema presa-agua-sedimento. Como estudiamos en el capítulo anterior, la flexibilidad de la base rocosa introduce al mismo tiempo dos diferencias con respecto a la consideración de la base rígida: por un lado la existencia de los efectos de interacción suelo-presa, suelo-agua y suelo-sedimento; por otro, la naturaleza espacial de la solicitación, consistente en ondas que se propagan por el suelo. Ambos efectos producen simultáneamente la disminución de las frecuencias propias, al flexibilizar el modelo, y la disminución de la amplitud de la respuesta en las frecuencias propias, ya que el modelo cuenta ahora con el amortiguamiento por radiación de la base y que la distribución de los desplazamientos en los estribos de la presa no es uniforme.

Analizaremos en primer lugar la influencia de los sedimentos sobre la respuesta de la presa que cierra un embalse abierto. La discretización de elementos de contorno del

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

sistema completo acoplado presa-suelo-agua-sedimento poroelástico se ha presentado en la Fig. 6.13. Los resultados de cómo se altera la amplificación anteroposterior del punto central de la coronación de la presa cuando sobre la zona de localización del embalse incide verticalmente una onda *SH* (excitación anteroposterior) o una onda *P* (excitación vertical) se presentan en las figuras 6.26 y 6.27, respectivamente. Los resultados para un punto de la coronación fuera del plano de simetría se presentan en la fig. 6.28 para el caso de incidencia de una onda *SV* (excitación transversal). En estas figuras se comparan tres supuestos: embalse lleno de agua sin sedimento; embalse lleno con una capa de sedimento completamente saturado; y embalse lleno con una capa de sedimento parcialmente saturado. Se aprecia que la presencia en el fondo de sedimentos saturados tiene una influencia muy pequeña sobre la respuesta de la presa. Sólamente se aprecia una leve reducción de la respuesta en la segunda frecuencia propia para la excitación vertical y transversal. Por el contrario los efectos de un sedimento parcialmente saturados son significativos: disminuye la frecuencia fundamental simétrica al tiempo que reduce significativamente la respuesta del sistema a dicha frecuencia. Altera las frecuencias propias superiores y en general disminuye la amplificación correspondiente, excepto en el caso de excitación anteroposterior, donde la respuesta es mayor para el segundo y tercer armónico. Debemos concluir que, aun considerando la flexibilidad de un semiespacio viscoelástico bajo el sistema presa-embalse, la presencia de sedimentos cuasi-saturados en el fondo del embalse altera de manera significativa el campo de presiones hidrodinámicas en el embalse y, por tanto, el comportamiento de la bóveda. Es preciso por tanto, un análisis adecuado de las propiedades del sedimento en cada caso práctico real, y en concreto de su grado de saturación.

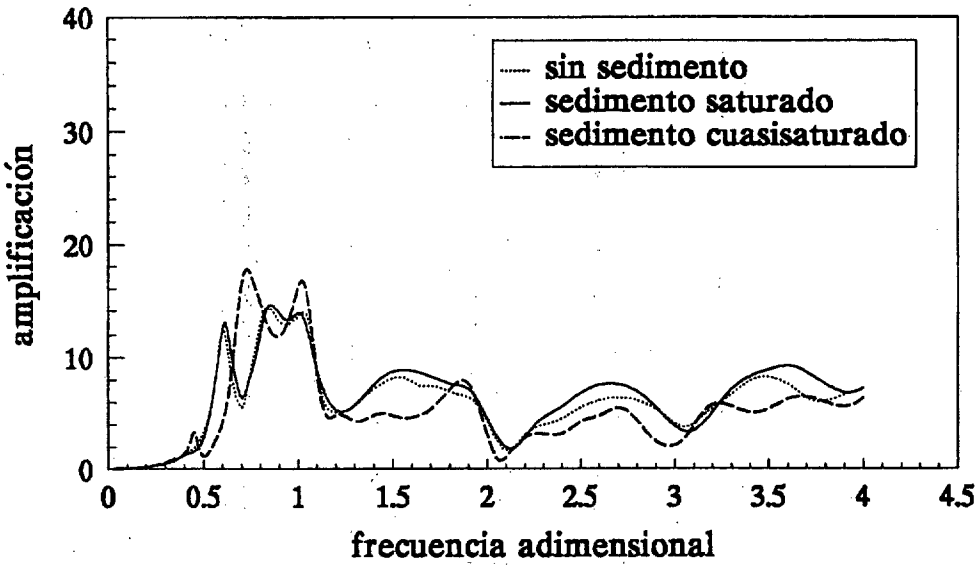

Figura 6.26. Amplificación anteroposterior. Presa-terreno-agua-sedimento poroelástico. Onda SH. Incidencia vertical. Embalse abierto

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

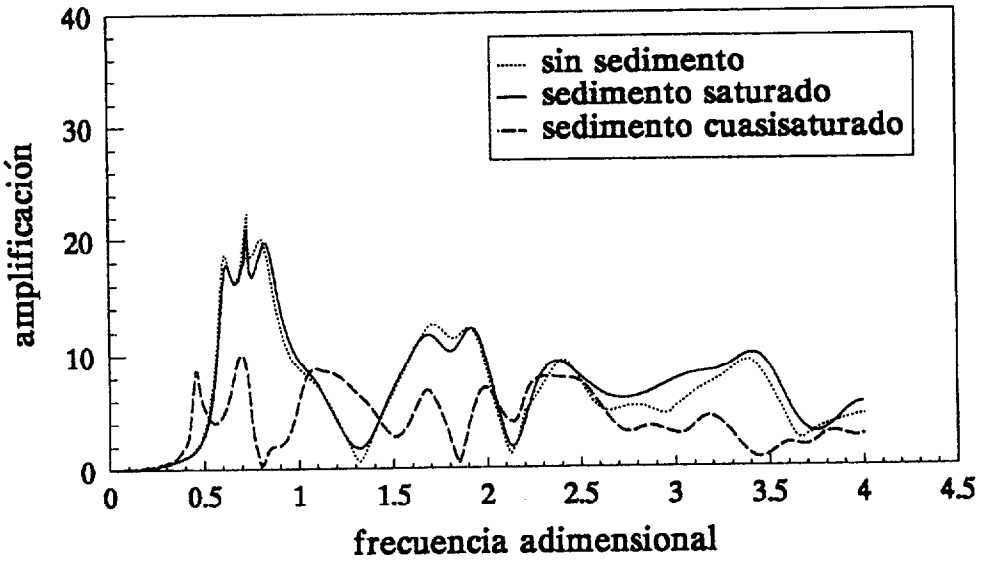

Figura 6.27. Amplificación anteroposterior. Presa-terreno-agua-sedimento poroelástico. Onda P. Incidencia vertical. Embalse abierto

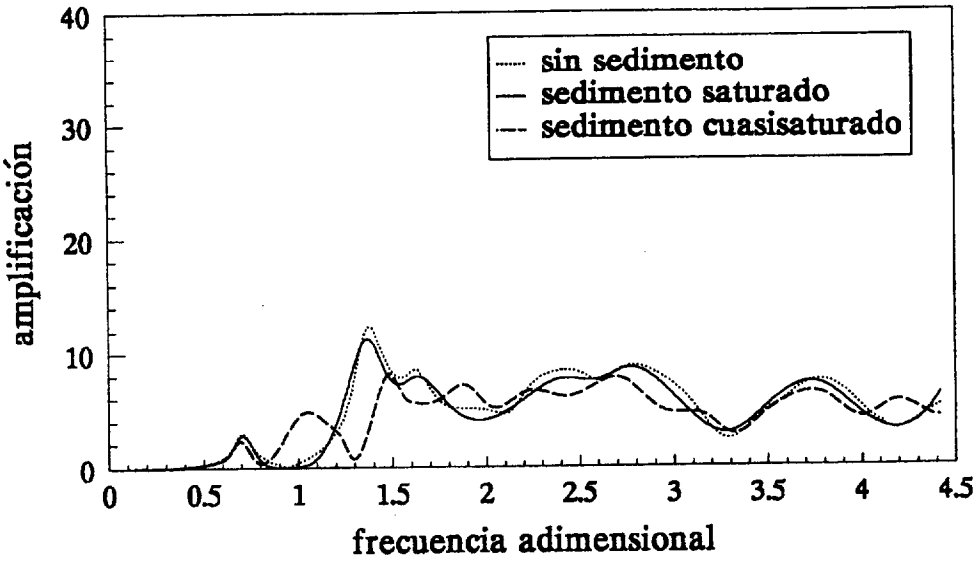

Figura 6.28. Amplificación anteroposterior. Presa-terreno-agua-sedimento poroelástico. Onda SV. Incidencia vertical. Embalse abierto

La buena o mala aptitud para representar el comportamiento del sedimento saturado a través de los modelos escalares (1) y (2) se muestra en las figuras 6.29, 6.30 y 6.31 para los casos de excitación anteroposterior (onda *P*), vertical (onda *P*) y transversal (onda *SV*), respectivamente. La Fig. 6.14 muestra la discretización de elementos de contorno utilizada para los modelos simplificados en este caso. Se aprecia que ambos

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

modelos producen resultados correctos con respcto al modelo poroelástico, lo cual es lógico a la vista de la pequeña influencia que supone la presencia del sedimento saturado. La concordancia es especialmente alta en el caso de excitación anteroposterior (Fig. 6.29). En los casos de excitación vertical (Fig. 6.30) y transversal (Fig. 6.31) sólo existe alguna pequeña discrepancia en cuanto a la respuesta en algun pico de resonancia.

La comparación entre el modelo bifásico poroelástico y los dos modelos escalares, para el caso de sedimento con índice de saturación 99.5% se muestra en las figuras 6.32 (excitación anteroposterior), 6.33 (excitación vertical) y 6.34 (excitación transversal). Ahora es preciso usar una malla más refinada para los modelos escalares, habiéndose utilizado la discretización de la Fig. 6.13. Se aprecia que el modelo escalar (1) conduce a una respuesta infra-amortiguada (especialmente en los casos de excitación vertical y transversal) mientras que el modelo escalar (2) predice resultados coincidentes con los del modelo poroelástico. Son exactamente las mismas conclusiones que las obtenidas del problema sobre báse rígida.

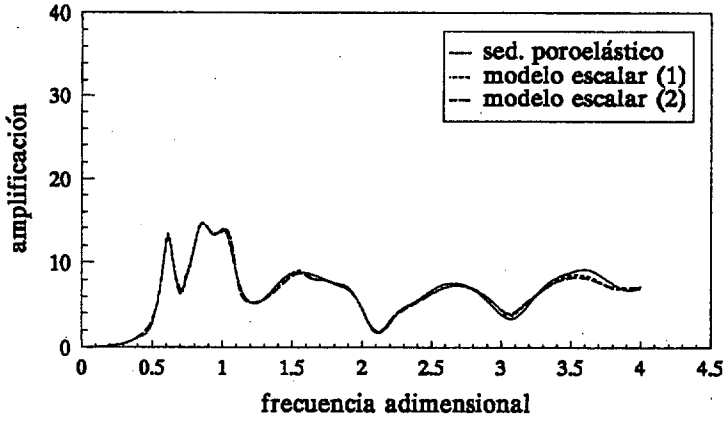

Figura 6.29. Amplificación anteroposterior. Sedimento poroelástico vs. modelos escalares. Sedimento saturado. Onda SH con incidencia vertical. Embalse abierto. Base flexible

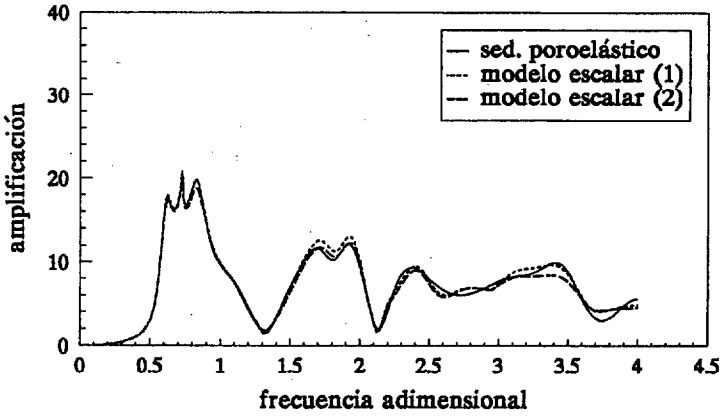

Figura 6.30. Amplificación anteroposterior. Sedimento poroelástico vs. modelos escalares. Sedimento saturado. Onda P con incidencia vertical. Embalse abierto. Base flexible

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

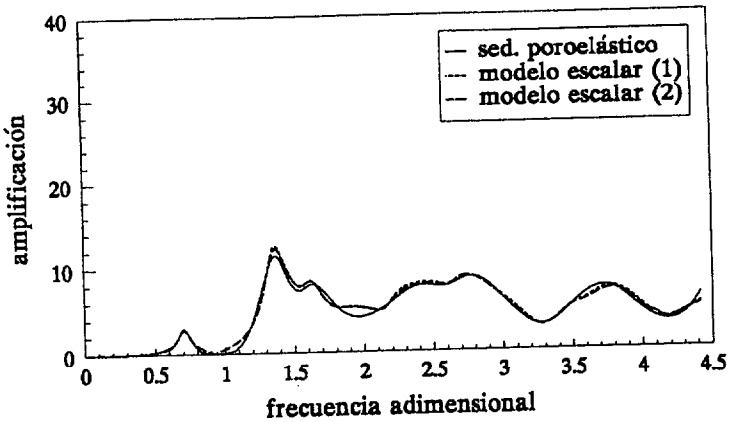

Figura 6.31. Amplificación anteroposterior. Sedimento poroelástico vs. modelos escalares. Sedimento saturado. Onda SV con incidencia vertical. Embalse abierto. Base flexible

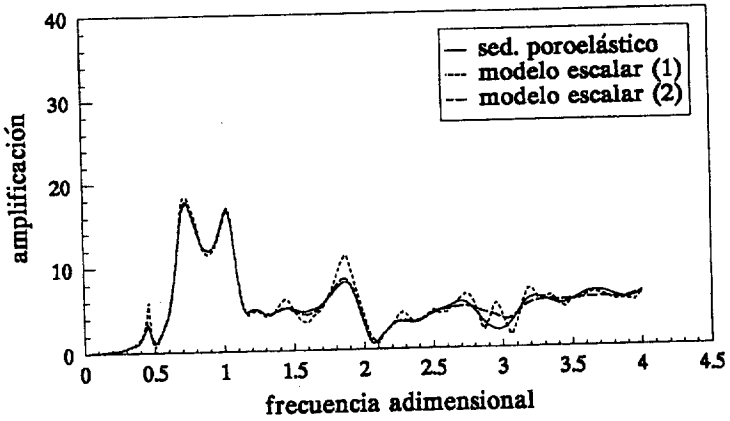

Figura 6.32. Amplificación anteroposterior. Sedimento poroelástico vs. modelos escalares. Sedimento cuasisaturado (99.5%). Onda SH con incidencia vertical. Embalse abierto. Base flexible

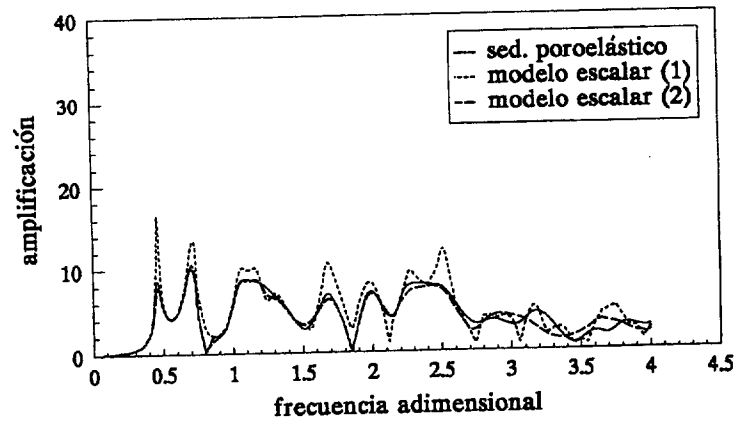

Figura 6.33. Amplificación anteroposterior. Sedimento poroelástico vs. modelos escalares. Sedimento cuasisaturado (99.5%). Onda P con incidencia vertical. Embalse abierto. Base flexible

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

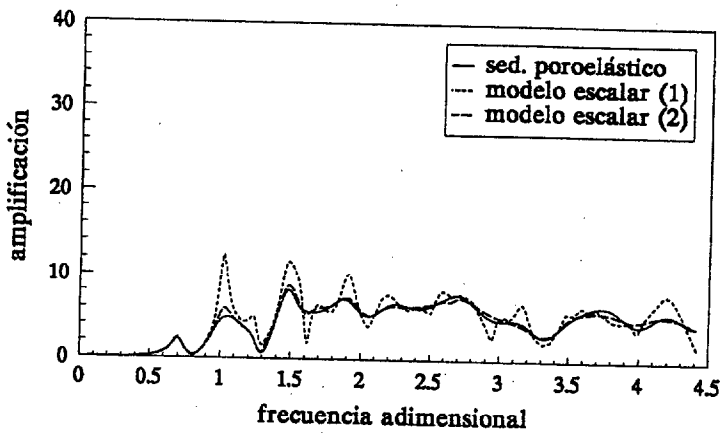

Figura 6.34. Amplificación anteroposterior. Sedimento poroelástico vs. modelos escalares. Sedimento cuasisaturado (99.5%). Onda SV con incidencia vertical. Embalse abierto. Base flexible

Resulta interesante investigar las diferencias que puedan surgir si en lugar de una geometría abierta del embalse, se considera el embalse cerrado. La discretización de elementos de contorno para este caso se muestra en la Fig. 6.15. La amplificación anteroposterior del punto central de la coronación en el plano de simetría se presenta en las Fig. 6.35 y 6.36 para los dos casos de excitación simétrica, esto es, excitación anteroposterior y vertical respectivamente. Se contrastan los resultados del sistema presa-suelo-embalse lleno de agua, con los correspondientes al sistema presa-suelo-embalse-sedimentos. En este último caso, como hasta ahora, se han distinguido las situaciones correspondientes a sedimento saturado y a sedimento parcialmente saturado (s = 99.5%). Se aprecia de las figuras que, a diferencia de lo que ocurría para el embalse abierto (y también en los estudios bidimensionales para presas de gravedad llevados a cabo por Bougacha y Tassolulas (1991b) Domínguez et al. (1997), ambos con geomatrías abiertas del embalse), la existencia en el fondo del embalse de una capa de sedimento saturado modifica claramente el comportamiento dinámico del sistema respecto de la situación de embalse lleno sin sedimento. Se observa un leve retraso en la frecuencia fundamental simétrica, más claro para las restantes frecuencias propias, al tiempo que modifica los valores de amplificación que, en el caso de excitación anteroposterior (Fig. 6.35) son algo mayores en la primera y tercera frecuencia de resonancia. Cabe concluir que la influencia de los sedimentos saturados no puede ser despreciada en el caso de un embalse de geometría irregular con una configuración cerrada. En estos casos debe contemplarse adecuadamente ambos aspectos (dimensión del embalse y geometría real), quedando patente que la existencia del sedimento, aun cuando éste es saturado, altera en una medida nada despreciable el campo de presiones hidrodinámicas en el embalse y la propia respuesta en movimiento de la bóveda.

Las Fig. 6.35 y 6.36 presentan también la respuesta anteroposterior en la coronación cuando bajo el embalse cerrado existe una capa de sedimento parcialmente saturado. De nuevo se aprecian grandes diferencias respecto a la situación de saturación 100%: el sedimento cuasi-saturado disminuye sensiblemente la frecuencia fundamental así como

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

la amplitud a dicha frecuencia, modifica (en general adelanta) las restantes frecuencias propias y provoca una respuesta de menor amplitud en la mayor parte del rango. La diferencia con respecto a la situación sin sedimentos es claramente superior en el caso de saturación parcial y en este sentido, al igual que concluimos en el caso de embalse abierto, debemos señalar la importancia de evaluar correctamente dicho grado de saturación en una situación práctica real.

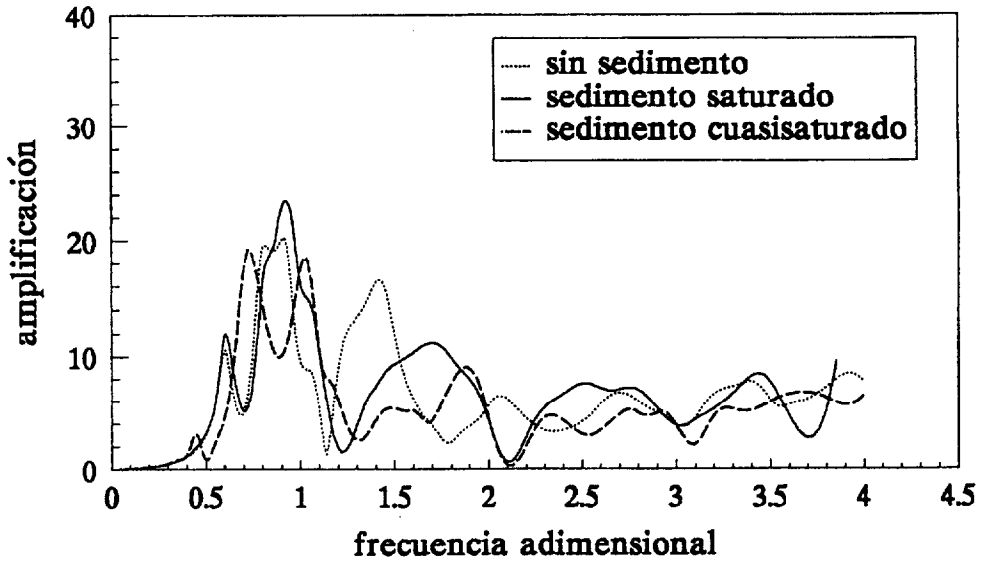

Figura 6.35. Amplificación anteroposterior. Presa-terreno-agua-sedimento poroelástico. Onda SH. Incidencia vertical. Embalse cerrado

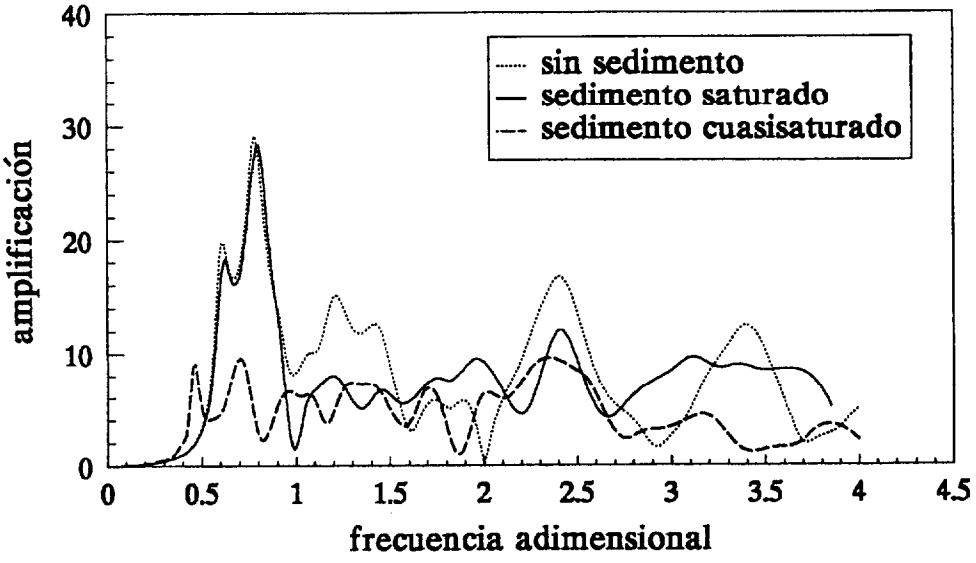

Figura 6.36. Amplificación anteroposterior. Presa-terreno-agua-sedimento poroelástico. Onda P. Incidencia vertical. Embalse cerrado

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Igual que hicimos en el caso de embalse abierto, los resultados de la respuesta en frecuencias considerando el sedimento como medio poroso bifásico se han comparado con los obtenidos mediante los dos modelos simplificados escalares (1) y (2). Las Fig. 6.37 y 6.38 muestran la comparativa cuando se trata de sedimento completamente saturado, para los casos de excitación anteroposterior y vertical, respectivamente. A pesar de que en el caso de embalse cerrado la presencia de sedimento saturado no puede ser despreciada (Fig. 6.35 y 6.36) se observa que, de igual forma que ocurría para el embalse abierto, los dos modelos escalares predicen resultados correctos, si bien el modelo escalar (1) conduce a amplificaciones levemente mayores en algunos picos de resonancia.

La concordancia entre los resultados de los tres modelos desaparece en el caso de sedimento parcialmente saturado, como se aprecia en las figuras 6.39 (excitación anteroposterior) y 6.40 (excitación vertical). Una vez más el modelo escalar (1) se muesta falto de amortiguamiento y conduce a una respuesta que es mayor y mucho más oscilante, especialmente en el caso de excitación vertical. Vemos también que una vez más el modelo escalar (2) proporciona resultados correctos en comparación con los del modelo poroso. Concluimos, así pues, que aun cuando el embalse cerrado provoca un estado de presiones hidrodinámicas que es muy diferente y mucho menos amortiguado que el embalse abierto, es posible en ambos casos modelar la influencia del sedimento, para las propiedades adoptadas y las dimensiones de nuestro problema, por medio de un modelo monofásico escalar. En resumen, se ha comprobado, por tanto, que pueden proponerse modelos simplificados para el sedimento que conducen a resultados que son corcondantes con los del modelo poroelástico. Así, un modelo monofásico escalar que básicamente representa la aportación de la onda longitudinal de primer tipo del medio bifásico, predice resultados correctos en el caso de sedimento saturado. Por el contrario es necesario incorporar un cierto amortiguamiento adicional para reproducir los resultados del modelo poroelástico (más disipativo) si el sedimento no está completamente saturado.

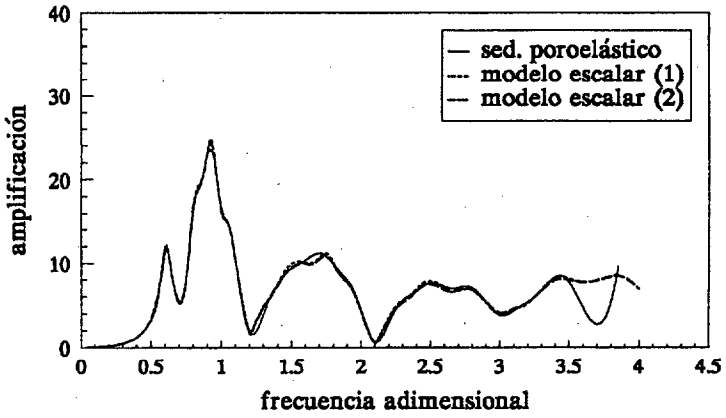

Figura 6.37. Amplificación anteroposterior. Sedimento poroelástico vs. modelos escalares. Sedimento saturado. Onda SH con incidencia vertical. Embalse cerrado. Base flexible

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

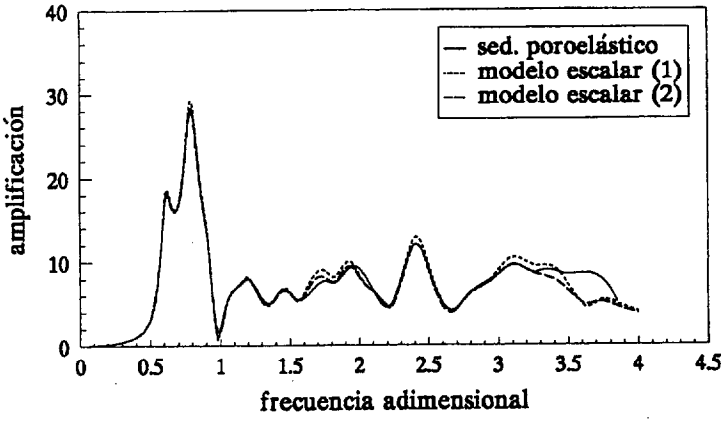

Figura 6.38. Amplificación anteroposterior. Sedimento poroelástico vs. modelos escalares. Sedimento saturado. Onda P con incidencia vertical. Embalse cerrado. Base flexible

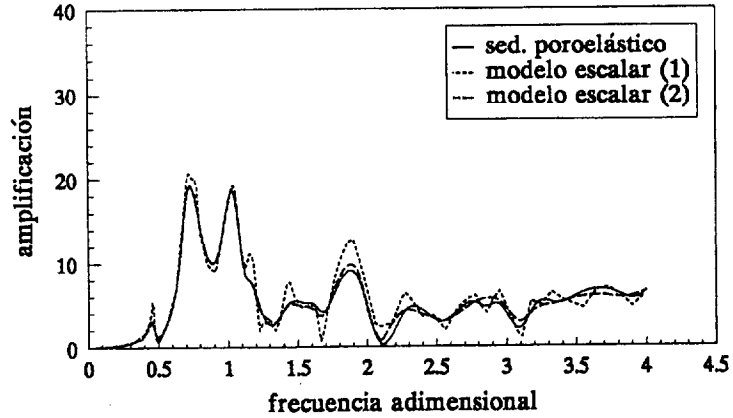

Figura 6.39. Amplificación anteroposterior. Sedimento poroelástico vs. modelos escalares. Sedimento cuasisaturado (99.5%). Onda SH con incidencia vertical. Embalse cerrado. Base flexible

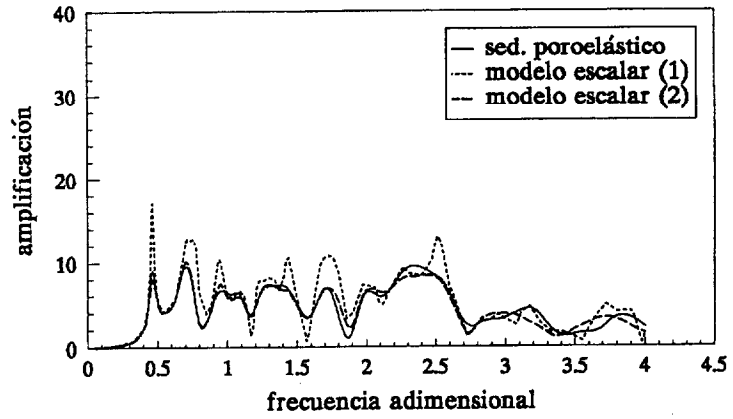

Figura 6.40. Amplificación anteroposterior. Sedimento poroelástico vs. modelos escalares. Sedimento cuasisaturado (99.5%). Onda P con incidencia vertical. Embalse cerrado. Base flexible

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Referencias

AZNÁREZ, J.J, MAESO, O. y DOMÍNGUEZ, J., 2001, "A 3-D Boundary Element Model for the Dynamic Analysis of Arch Dams with Porous Sediments". *Proc. Earthquake Resistant Engineering Structures III*, 713-722, Benalmádena, España. C.A. Brebbia y A. Corz, (Eds.), WIT Press., Southampton,

BIOT, M.A., 1956, "Theory of Propagation of Elastic Waves in Fluid Saturated Porous Solid I. Low Frequency Range". *J. Acoust. Soc. Am.*, **28**(2), 168-178.

BOUGACHA, S. y TASSOULAS, J.L., 1991a, "Seismic Response of Gravity Dams I: Modelling of Sediments". *J. Eng. Mech.*, ASCE, **117**(8), 1826-1837.

BOUGACHA, S. y TASSOULAS, J.L., 1991b, "Seismic Response of Gravity Dams II: Effects of Sediments". *J. Eng. Mech.*, ASCE, **117**(8), 1839-1850.

CHENG, A.H.D., 1986, "Effects of Sediments on Earthquake Induced Reservoir Hydrodynamic Response". *J. Eng. Mech.*, ASCE, **112**(7), 645-665.

CHUHAN, Z., CHENGDA, Y. y GUANGLUN, W., 2001, "Numerical Simulation of Reservoir Sediment and Effects on Hydrodynamic Response of Arch Dams". *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, **30**, 1817-1837.

DOMÍNGUEZ, J., 1991, "An Integral Formulation for Dynamic Poroelasticity". *J.Appl.Mech.*, **58**, 558-591.

DOMÍNGUEZ, J. y MAESO, O., 1993, "Earthquake Analysis of Arch Dams II: Dam-Water-Foundation Interaction". *J. Eng. Mech.*, ASCE, **119**(3), 513-530.

DOMÍNGUEZ, J., GALLEGO, R. y JAPÓN, B.R., 1997, "Effects of Porous Sediments on Seismic Response of Concrete Gravity Dams". *J. Eng. Mech.*, ASCE, **123**(4), 302-311.

FENVES, G. y CHOPRA, A.K., 1985, "Effects of Reservoir Bottom Absorption and Dam-Water-Foundation Rock Interaction on Frequency Response Functions for Concrete Gravity Dams". *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, **13**(1), 13-31.

FOK, K. y CHOPRA, A.K., 1986a, "Earthquake Analysis of Arch Dams Including Dam-Water-Interaction, Reservoir Boundary Absortion and Foundation Flexibility". *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, **14**(2), 155-184.

FOK, K. y CHOPRA, A.K., 1986b, "Frequency Response Functions for Arch Dams: Hydrodynamic and Foundation Flexibility Effects". *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, **14**, 769-795.

FOK, K. y CHOPRA, A.K., 1986c, "Hydrodynamic and Foundation Flexibility Effects in Earthquake Response of Arch Dams". *J. Struct. Eng.*, ASCE, **112**, 1810-1828.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Capítulo 7

Conclusiones y Desarrollos Futuros

7.1 Revisión y Conclusiones

En esta Tesis se ha abordado la formulación e implementación de un modelo tridimensional de elementos de contorno en el dominio de la frecuencia para el estudio de problemas donde coexisten regiones de naturaleza elástica, fluida y poroelástica. Este modelo se ha aplicado con éxito al estudio del comportamiento de presas bóveda sometidas a solicitación sísmica. El sistema en este caso está constituido por la presa, el terreno donde ésta se cimenta y que dibuja el cañón y el vaso, el agua embalsada y los sedimentos que se depositan en el fondo del embalse. Las ecuaciones del MEC se aplican a cada una de las regiones del sistema individualmente. El acoplamiento posterior se realiza en las interfases del modelo de una forma directa y rigurosa a través de ecuaciones adicionales de compatibilidad y equilibrio.

Este trabajo representa la continuación de una línea de investigación dirigida por el Profesor Domínguez y que arranca con la Tesis de Medina (1987) en la que se analiza la respuesta sísmica de presas de gravedad a través de un modelo bidimensional de elementos de contorno donde coexisten regiones viscoelásticas (presa y terreno) y fluidas (agua embalsada) y tiene su principal referente en las investigaciones de Maeso (1992), Maeso y Domínguez (1993) y Domínguez y Maeso (1993) que generalizan esta estrategia a problemas tridimensionales permitiendo en estudio dinámico de presas bóveda. En relación con modelos anteriores, este trabajo puso de manifiesto la importancia de los efectos de interacción mutua entre las regiones que lo constituyen y la potencia del MEC en la caracterización de la verdadera naturaleza del suelo y del carácter espacial de la excitación. La inclusión de los sedimentos de fondo en el modelo bidimensional de Medina se realiza años más tarde por Domínguez et al. (1997). Dichos sedimentos se consideran una región de naturaleza poroelástica de acuerdo a la teoría de Biot y se incorporan al modelo a través de una formulación de elementos de contorno desarrollada por el propio Domínguez (1992). La interacción entre esta nueva región poroelástica y el resto de medios que constituyen el sistema se realiza también de forma rigurosa.

En esta Tesis se amplía la definición de la excitación incluyendo en el modelo la presencia de ondas de volumen y de superficie con ángulos de incidencia variables y se analiza la influencia de la geometría del cañón y embalse en la respuesta sísmica de la presa. Asimismo, se amplía el modelo incorporando la existencia de regiones

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

poroelásticas tridimensionales que permitirán cuantificar la influencia de los sedimentos de fondo en la respuesta del sistema.

La formulación de elementos de contorno empleada para regiones poroelásticas parte también de la ecuación integral en el contorno propuesta por Domínguez (1992) en término de las cuatro variables primarias del problema. En este sentido, al inicio del Capítulo 3 se realiza un ejercicio interesante en el que se accede a dicha igualdad integral a partir del resíduo de las ecuaciones de gobierno en primer lugar, para luego describir el procedimiento desde la relación de reciprocidad, análoga al problema elástico, que pueden establecerse entre dos estados de tensión-deformación en el medio. En ambos casos, el empleo de técnicas de integración por partes permiten convertir integrales de dominio en integrales extendidas al contorno a través del teorema de la divergencia.

A partir de esta igualdad integral en el contorno puede formularse el MEC si se dispone de una solución fundamental para el problema en estudio. También en el Capítulo 3 se desarrolla el procedimiento que permite la obtención de la solución fundamental poroelástica tridimensional siguiendo, para ello, la metodología propuesta por Kupradze et al. (1979) para el caso termoelástico. Esto es posible en virtud de la analogía formal que existe entre las ecuaciones de gobierno de ambos problemas. En poroelasticidad, dicha solución fundamental representa la respuesta del medio infinito ante dos estados de carga: una carga puntual sobre el esqueleto sólido en las tres direcciones coordenadas y una fuente puntual aplicada en el fluido. Las expresiones finalmente implementadas tienen un formato análogo a las conocidas para los problemas elastodinámico y escalar armónicos. Especial esfuerzo se dedicó a esta tarea en las fases iniciales del estudio y no fue en vano ya que, como se ha podido comprobar, la manipulación e interpretación posterior de estas expresiones ha podido realizarse de forma más sencilla. También ha permitido, realizando un estudio en el límite, la identificación clara del tipo de singularidad que subyace a las mismas. Como se ha visto, y era conocido, la componente fuertemente singular coincide con la expresión elástostática de las tensiones sobre un sólido con las propiedades mecánicas correspondientes al esqueleto sólido drenado.

Con todo lo anterior, en el Capítulo 4 se desarrolla el procedimiento que permite evaluar las integrales de contorno en el sentido del Valor Principal de Cauchy (VPC) y que será común a los problemas elástico y poroelástico armónicos. A diferencia del modelo tridimensional de Maeso (1992) la evaluación de estas integrales se realiza mediante un procedimiento directo que permite la cancelación de la singularidad de las tensiones en los nodos del perímetro del elemento con la contribución de los elementos adyacentes. Los núcleos de integración con singularidad fuerte podrán descomponerse en una integral de superficie y otra de línea ambas regulares y evaluables numéricamente con cuadraturas estándar. Esta estrategia presenta ventajas interesantes frente a las técnicas indirectas como el movimiento de sólido rígido para los problemas estudiados. Así, no es necesario cerrar el contorno con *elementos ficticios* en dominios no acotados y permite la implementación sencilla de estrategias de colocación no nodal incorporadas al

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

modelo con una doble utilidad: de un lado permiten incorporar ecuaciones adicionales en nodos con *problema de esquina* y se emplea, por otra parte, en el tratamiento de contornos con discretizaciones no conformes. También en este Capítulo se obtienen resultados para algunos problemas simples con solución de referencia que han permitido la validación del tratamiento numérico desarrollado.

En lo que se refiere a los resultados obtenidos para el sistema acoplado presa-terreno-agua, se ha comentado la existencia de trabajos previos que han puesto de manifiesto la importancia de los fenómenos de interacción, de la geometría y del carácter espacial de la excitación en la respuesta dinámica del conjunto. Ahondando en estos aspectos, en el Capítulo 5 se aporta, en primer lugar, evidencia cuantitativa del efecto local provocado por la presencia del cañón en la respuesta en desplazamientos de campo libre para dos geometrías con diferente profundidad. Se presentan los resultados para ondas planas SH incidentes verticalmente y que provocan desplazamientos en la dirección del eje del cañón para puntos del semiespacio alejados del mismo. De los resultados se desprende que las componentes vertical y transversal del desplazamiento presentan valores muy signifivativos para geometrías del cañón ligeramente irregulares. Este es un efecto claramente tridimensional que no aparece en cañones de sección uniforme sometidos al mismo tipo de solicitación y que sólo puede ser tenido en cuenta con modelos como el que se presenta. En el modelo acoplado, la profundidad del cañón y las alteraciones tridimensionales de la geometría del vaso modifican, además de los desplazamientos de campo libre, la respuesta dinámica del conjunto tanto en la situación de embalse lleno como vacío a la luz de los resultados presentados.

La variación espacial de la excitación se puso más claramente de manifiesto con el estudio de la respuesta de la presa ante ondas armónicas que inciden con ángulo variable sobre el conjunto. Se han obtenido resultados para ondas P, SH, SV y de superficie tipo Rayleigh. La influencia del ángulo de incidencia en la respuesta anteroposterior en coronación de la presa queda reflejada en las curvas presentadas para los cuatro tipos de onda en las situaciones de embalse lleno y vacío. En todos los casos, la respuesta es muy sensible al ángulo de incidencia de las ondas en todo el rango de frecuencias estudiado. Especialmente llamativas son las diferencias provocadas por este efecto viajero de la onda en el entorno de la frecuencia fundamental la cual, como es de sobra conocido, gobierna el comportamiento dinámico del modelo.

El modelo acoplado con la incorporación de los sedimentos de fondo como una región de naturaleza poroelástica es analizado en el Capítulo 6. De los resultados obtenidos se concluye que las propiedades del sedimento, en particular su grado de saturación, tienen una gran influencia en la respuesta del conjunto. En la situación de embalse abierto, para las propiedades del medio utilizadas y los espesores considerados, la respuesta de la presa se ve poco afectada si el sedimento está completamente saturado. No ocurre lo mismo si la geometría del embalse es cerrada.

Por el contrario, con sedimentos parcialmente saturados (se ha considerado un grado de saturación de 99.5%) se producen cambios muy significativos en la respuesta de la

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

presa para las dos geometrías del vaso consideradas. Así, tanto si el embalse es abierto como cerrado se modifican sensiblemente las frecuencias propias del sistema. Se reduce el valor de la frecuencia fundamental y la amplificación correspondiente en todos los supuestos. En algunos casos y para armónicos superiores se aprecian incrementos de la amplificación en relación con la respuesta en ausencia de sedimentos.

Se proponen, por último, algunos modelos simplificados del sedimento que permiten la reducción del número de grados de libertad del problema. En el primer modelo se considera el sedimento como un medio con comportamiento viscoelástico donde las ondas se propagan con las velocidades c_{P1} y c_S correspondientes al modelo poroelástico. En todos los ejemplos estudiados, los resultados obtenidos con este modelo del sedimento son altamente coincidentes con los correspondientes al caso poroelástico para medios saturados y cuasisaturados. Su principal inconveniente, el orden de la matriz resultante del sistema no se ve reducido en exceso. En el segundo modelo propuesto se elimina la onda de corte c_S. En este caso, el sedimento se considera un medio escalar donde las ondas de presión se propagan con velocidad c_{P1}. Para el problema tridimensional, este modelo predice resultados correctos si el sedimento es saturado. Para sedimentos no saturados, es necesario incorporar cierto grado de amortiguamiento adicional para reproducir los resultados del modelo poroelástico.

Como conclusión general del estudio del sistema presa-terreno-agua-sedimento debe destacarse, junto con aspectos tales como la compresibilidad del agua, los fenómenos de interacción y la verdadera naturaleza del terreno, la importante influencia del carácter espacial de la excitación y de la presencia de sedimentos de fondo en la respuesta dinámica de la presa. En este sentido, el modelo de elementos de contorno empleado permite una representación real tridimensional de todos estos fenómenos de forma más directa y sencilla que otros modelos numéricos.

7.2 Desarrollos Futuros

Las posibilidades de desarrollo de la línea de trabajo en que se enmarca esta Tesis son numerosas. Así, de forma inmediata, el código de elementos de contorno desarrollado es lo suficientemente flexible para ser aplicado a otro tipo de problemas también interesantes:

1.) En problemas de interacción suelo-estructura, el cálculo de la impedancia dinámica de cimentaciones sobre suelos elásticos, poroelásticos o terrenos estratificados donde coexisten regiones con estas naturalezas. Si bien en el caso de cimentaciones superficiales y embebidas sobre terrenos de naturaleza elástica, son muy numerosas las investigaciones realizadas en este sentido aplicando el MEC (ver Domínguez, 1993), no ocurre lo mismo si se considera el semiespacio como un medio de naturaleza poroelástica. En este sentido, y haciendo uso del modelo discutido en esta Tesis, ya se han publicado algunos resultados para cimentaciones superficiales y embebidas tridimensionales (Aznárez et al., 1999,

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Maeso et al., 1999 y Gracia, 2002). En esta última referencia se presenta una batería muy completa de resultados y un estudio interesante sobre la influencia de las propiedades del medio poroelástico y de las condiciones de contacto en la respuesta de cimentaciones superficiales y embebidas rígidas.

Por otra parte, ya en la actualidad el programa es utilizado en el estudio de la impedancia vertical, horizontal y de cabeceo de grupos de pilotes embebidos en terrenos elásticos, poroelásticos y estratificados con resultados muy esperanzadores. A medio plazo incluso, será posible la confrontación de los resultados obtenidos con observaciones experimentales. En este modelo, el encepado se considera rígido y el fuste del pilote será discretizado al igual que el semiespacio. La interacción entre ambos se tiene en cuenta de forma rigurosa a través de ecuaciones de equilibrio y compatibilidad.

2.) Cuantificación del efecto local. Vinculado a la topografía y propiedades geológicas del terreno se ha puesto de manifiesto y ha podido cuantificarse en terremotos recientes. En muchos de ellos, este efecto de amplificación a escala local ha sido un factor determinante en el carácter destructivo del sismo. En este sentido es quizás el terremoto de México de 1985 el caso reciente más significativo (Bozzo y Barbat, 2000).

Existen en la bibliografía multitud de estudios analíticos y numéricos que ponen de manifiesto la influencia de las condiciones del emplazamiento en las variaciones del campo de desplazamientos para ondas planas con ángulo de incidencia variable. La mayoría de estos trabajos se centran en problemas bidimensionales con la importante simplificación que ello supone. En este sentido, el modelo propuesto permite la cuantificación de este efecto en su realidad tridimensional como ya ha sido puesto de manifiesto en el Capítulo 5 de esta Tesis.

Además de estos resultados de carácter preliminar, el modelo propuesto ya se ha empleado con éxito en el estudio de este efecto provocado por la presencia de cañones tridimensionales y de valles sedimentarios de geometría genérica (González, 2002) donde además se establecen criterios para optimizar la discretización del modelo. En este caso se ha considerado el depósito como una región de naturaleza elástica. Un aspecto a tener en cuenta de forma inmediata es la naturaleza poroelástica de estos depósitos. El modelo presentado permite este análisis en la actualidad.

3.) Análisis en el dominio del tiempo de la respuesta del sistema acoplado presa-terreno-agua-sedimento. Este aspecto puede ser abordado de forma directa a través de algoritmos de FFT a partir de los resultados presentados en el dominio de la frecuencia. En el trabajo de González (2002) referido anteriormente, ya se presentan algunos resultados en tiempo de la respuesta de la presa de Morrow Point para un acelerograma real. La importancia de los fenómenos de interacción,

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

del carácter espacial de la excitación y la presencia de sedimentos de fondo y su grado de saturación se ponen claramente de manifiesto en la respuesta en tiempo del sistema.

4.) También para el modelo presa-terreno-agua-sedimento, la posibilidad de modelar el terreno de forma más general, incluyendo la presencia de estratos o de cualquier otra discontinuidad, así como la consideración de lechos sedimentarios de mayor espesor lo que permitirá estudiar la influencia en la respuesta de esta variable. Sin embargo, en estos casos el modelo presenta un inconveniente: el elevado número de grados de libertad en juego los hace, por ahora, inabordables con los medios informáicos de que se disponen.

5.) Estudio de la propagación de ondas en el semiespacio poroelástico, analizando las alteraciones provocadas por la presencia de cavidades, inclusiones de otra naturaleza, la topografía superficial, las propiedades del medio y las condiciones de contorno en las superficies implicadas.

Otras líneas de actuación vinculadas a la formulación e implementación del MEC y aspectos relacionados, algunas de las cuales ya están en su fase inicial, serán:

1.) La implementación de algoritmos de resolución de sistemas de ecuaciones que impliquen tiempos de computación más cortos y menores recursos de memoria.

2.) La implementación de una solución fundamental armónica para medios elásticos que verifique las condiciones de contorno en la superficie del semiespacio. Con ello, en el modelo acoplado presa-terreno-agua-sedimento no será necesario discretizar la superficie libre del suelo con las consiguientes ventajas computacionales. El campo de tensiones y desplazamientos provocados por una carga puntual en el interior del semiespacio, tiene formulación explícita en problemas elastostáticos (Mindlin, 1936). En problemas dinámicos transitorios y armónicos existe abundante bibliografía que hace referencia a esta cuestión (Pekeris, 1955; Kobayashi y Nishimura, 1980; Banerjee y Mammon, 1989 y otros), si bien, hasta donde el autor conoce, no existe una formulación cerrada de la solución fundamental para el semiespacio.

3.) La modelización de sedimentos de longitud infinita requiere la formulación de un nuevo tipo de contorno de cierre que incorpone ambas regiones (agua y sedimento) y que simule la radiación de las ondas hacia el infinito.

4.) El desarrollo de un modelo acoplado de elementos finitos y elementos de contorno que combine las ventajas de ambos métodos. De un lado la capacidad del MEC para modelar regiones infinitas. De otra parte las facilidades que ofrece el MEF para modelar medios con leyes de comportamiento más complejas. Ya en la actualidad se desarrolla un modelo en esta dirección.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

Mencionar aquí el interés de un modelo acoplado con elementos finitos tipo barra que permita el análisis sísmico de grandes puentes. En este caso, la aplicación del MEC en la modelización del terreno permite la consideración de los fenómenos espaciales asociados a la excitación sísmica. Para problemas tridimensionales, este modelo ya se elabora en la Universidad de Sevilla bajo la dirección del Profesor Domínguez con resultados preliminares muy esperanzadores.

5.) La utilización del modelo poroelástico de Biot para representar el comportamiento de materiales absorbentes de ruido. Este punto vincula la línea de trabajo que representa esta Tesis con otra desarrollada por el grupo de trabajo al que pertenece el Autor y en la que se estudia la eficiencia de medidas para reducir el impacto acústico haciendo uso del MEC (ver Perdomo et al., 2002).

Referencias

AZNÁREZ, J.J., MAESO, J. y CHIRINO, F., 1999, "Una Técnica Numérica para la Determinación de Rigideces Dinámicas de Cimentaciones sobre Suelos Saturados", *Memorias* 1ER *Congreso Nacional de Ing. Sísmica*, **Ib**, 417-425.

BANERJEE, P.K. y MAMOON, S.M., 1990, "A Fundamental Solution Due to a Periodic Point Force in the Interior of an Elastic Half-Space", *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, **19**, 91-105.

BOZZO, L.M. y BARBAT, A.H., 2000, "Diseño Sismorresistente de Edificios", Reverté, Barcelona.

DOMÍNGUEZ, J., 1992, "Boundary Element Approach for Dynamic Poroelastic Problems", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **35**, 307-324.

DOMÍNGUEZ, J., 1993, "Boundary Elements in Dynamics", Computational Mechanics Publications, Southampton y Elsevier Applied Science, NY.

DOMÍNGUEZ, J. y MAESO, O., 1993, "Earthquake analysis of arch dams. II: Dam-water-foundation interaction", *J. Eng. Mech., ASCE*, **119**(3), 513-530.

DOMÍNGUEZ, J., GALLEGO, R. y JAPÓN, B.R., 1997, "Effects of Porous Sediments on Seismic Response of Concrete Gravity Dams", *J. Eng. Mech., ASCE*, **123** (4), 302-311.

GONZÁLEZ, A., 2002, "Aplicación del MEC a la Obtención de la Respuesta Temporal de una Estructura ante Solicitación Sísmica", *Proyecto Fin de Carrera*, Univ. de Las Palmas de G.C.

GRACIA, I., 2002, "Aplicación del MEC a la Determinación de Rigideces Dinámicas de Cimentaciones sobre Suelos Poroelásticos", *Proyecto Fin de Carrera*, Univ. de Las Palmas de G.C.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004

KOBAYASHI, S. y NISHIMURA, N., 1980, "Greens's Tensors for Elastic Half-Spaces. An Application of Boundary Integral Equation Method", *Mem. Fac. Eng. Kyoto Univ.*, **XLII**, 228-241.

KUPRADZE, V.D., GEGELIA, T.G., BASHELEISHVILI, M.O. y BURCHULADZE, T.V., 1979, "Three-dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity", North-Holland, Amsterdam.

MAESO, O., 1992, "Modelo para el Análisis Sísmico de Presas Bóveda Incluyendo los Efectos de Interacción Suelo-Agua-Estructura", *Tesis Doctoral*, Univ. de Las Palmas de G.C.

MAESO, O. y DOMÍNGUEZ, J., 1993, "Earthquake analysis of arch dams. I: Dam-foundation interaction". *J. Eng. Mech., ASCE*, **119**(3), 496-512.

MAESO, O., AZNÁREZ, J.J. y CHIRINO, F., 1999, "Aplicación del MEC a la Determinación de Rigideces Dinámicas de Cimentaciones Embebidas sobre Suelos Poroelásticos", *Métodos Numéricos en Ingeniería*, R. Abascal, J. Domínguez y G. Bugeda Ed., SEMNI.

MEDINA, F., 1987, "Análisis de la Respuesta Sísmica de Presas Incluyendo Efectos de Interacción Suelo-Fluido-Estructura", *Tesis Doctoral*, Universidad de Sevilla.

MINDLIN, R.D., 1936, "Force at a Point in the Interior of a Semi-Infinite Solid", *Physics*, **7**, 195-202.

PEKERIS, C.L., 1955, "The Seismic Buried Pulse", *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **41**, 629-639.

PERDOMO, F., AZNÁREZ, J.J. y MAESO, O., 2002, "Aplicación del MEC en la Evaluación de Medidas para Reducir el Impacto Acústico en el Entorno de Carreteras", *Revista de Acústica*, **23** (1,2), 13-19.

© Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Biblioteca Digital, 2004