UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA

DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA Y SISTEMAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ANÁLISIS DE BIFURCACIONES EN MODELOS DE CALIDAD AMBIENTAL

JESÚS GARCÍA QUESADA

Tesis Doctoral Las Palmas 2005

A Ana y Eva

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi director de tesis, José Miguel Pacheco Castelao, el haberme sugerido el tema objeto de esta tesis, su constante apoyo y su extraordinaria paciencia y saber hacer que ha mostrado en todas las etapas de la realización.

A Matías García Quesada, Antonio Quesada Quesada, y los compañeros José Fortes Gálvez y Mario Hernández Tejera, por su constante estímulo.

Al personal de la Biblioteca de Informática y Matemáticas y del Servicio de Obtención de Documentos de la Biblioteca Universitaria por el excelente servicio.

A varios investigadores a los que he solicitado material de difícil obtención y que han mostrado generosamente su disposición y amabilidad, en especial a Emilio Freire, Alejandro Rodríguez-Luis y E. Ponce del Departamento de Matemática Aplicada 2 de la Universidad de Sevilla, y a Andrew Edwards, A.J. Homburg, Jean Della Dora, Guoting Chen y Vincent Naudot, de diferentes universidades europeas.

Índice general

Índice de figuras

Índice de tablas

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

1.1. Un enfoque por sistemas dinámicos

El estudio de los puntos singulares, su estabilidad y sus cuencas de atracción forma una parte importante del análisis de sistemas dinámicos. A pesar de tratarse de propiedades locales, se observa que en cierto sentido, los puntos singulares "organizan" el flujo global definido por las ecuaciones del sistema, y dan una idea cualitativa del comportamiento dinámico que se desea analizar.

En general, el cálculo explícito en forma cerrada es imposible en la práctica, por ejemplo, incluso en casos relativamente sencillos como alguno de los modelos planares de Fernández-Pacheco [FP01] no es un asunto elemental. De ahí la necesidad de utilizar técnicas matemáticas no constructivas, o por el contrario, recurrir a la experimentación numérica. En esta memoria se estudiarán las propiedades y adecuación de algunos métodos de esta segunda clase.

Continuando con Fernández-Pacheco [FP01] , intentamos calcular sus estados estacionarios de forma analítica, sin especificar valores numéricos para sus parámetros, pero la no linealidad de las ecuaciones hace que en general no se puedan obtener todos los estados de equilibrio. Entonces se hacen necesarios métodos numéricos para su obtención. Estos requieren la especificación de valores para los parámetros, y se darán unos valores tomados "por defecto", así como también se determinarán unos rangos realistas de variación (véase capítulo 4) de tales parámetros.

Los detalles matemáticos sobre la teoría de sistemas dinámicos se pueden encontrar en [GH90], [Wig90b], [Wig88] y [Kuz98b].

Los estudios numéricos de esta tesis han supuesto una combinación de los paquetes numéricos sobre bifurcación AUTO ([DCF+97], [DPC+01], [DK86]), LOCBIF ([KKLN93]) y CONTENT ([Kuz98a]) para examinar las bifurcaciones, y los paquetes Dstool ([BGMW]) y CONTENT ([Kuz98a]) para integrar y observar las trayectorias. Ocasionalmente, también se han usado XPPAUT [Erm01] y CANDYS/QA [Jan95].

El paquete simbólico y numérico MATHEMATICA©, así como los paquetes Maple© y Maxima[1] se han usado para realizar algunos de los cálculos analíticos más complicados, tales como la determinación de variedades centrales y la obtención auxiliar de la forma normal de Poincaré con diferentes grados de precisión, o la obtención analítica de curvas de bifurcación.

1.2. Objetivos

Los objetivos propuestos y que nos hemos marcado en esta tesis son:

1. Presentar los conceptos, resultados y métodos fundamentales de la teoría de sistemas diferenciales no lineales, pertinentes para el estudio de una categoría de problemas

[1]Maxima es un descendiente del DOE Macsyma, que tuvo sus orígenes a finales de los años sesenta en el MIT. Para más información ver la página web: http://maxima.sourceforge.net.

aplicados.

2. Obtener la dinámica total que pueden presentar cada uno de los modelos matemáticos propuestos en Fernández-Pacheco [FP01] , mediante estudio analítico, numérico o una combinación de ambos, culminando así los trabajos realizados en [GQP02] y en [GQPlN04].

1.3. Resumen de la tesis

Esta tesis contiene resultados sobre la conducta dinámica de cinco modelos matemáticos de complejidad creciente sobre calidad ambiental de asentamientos urbanos. Los modelos fueron propuestos en Fernández-Pacheco [FP01] y en el presente trabajo se completan los estudios sobre bifurcaciones que se iniciaron en dicha publicación. A continuación viene una breve descripción del contenido de los capítulos de la tesis.

Así, en el capítulo 2 se relacionan algunos resultados fundamentales de la teoría de sistemas dinámicos y se ven algunos métodos de simplificación de estudio de dichos sistemas. Posteriormente se establece una taxonomía de las bifurcaciones conocidas de los sistemas continuos, se caracterizan las uniparamétricas y por último se introducen los aspectos numéricos involucrados en el estudio de un sistema, exponiendo brevemente el algoritmo fundamental que permite construir las gráficas de continuación.

En el siguiente capítulo sobre los modelos (3) se presentan los diferentes modelos y se estudia la dinámica que presentan los cuatro modelos planares introducidos en Fernández-Pacheco [FP01] , dando los diagramas de bifurcación donde son necesarios. En la mayoría de los casos es suficiente el estudio analítico, que permite precisar el comportamiento que presentan.

En el capítulo 4 se estudia detalladamente el quinto modelo. En este modelo tridimensional las variables de estado x, y, z representan la calidad, población y mala calidad respectivamente. Consiste en tres ecuaciones diferenciales acopladas. Para cada uno de los parámetros del modelo, se establece un rango de valores numéricos "razonables". Estos rangos reflejan la incertidumbre presente en la estimación de los parámetros, y forman la base de los estudios numéricos. Inicialmente se realiza una aproximación analítica para intentar obtener los puntos de equilibrio y sus estabilidades sin especificar los valores numéricos de los parámetros. Este análisis solo proporciona información limitada sobre el sistema, de forma que se hace necesaria una aproximación numérica. Simulaciones realizadas del sistema prueban que a medida que el tiempo aumenta, x,y, y z pueden o bien converger a un punto de equilibrio, o bien presentar oscilaciones, dependiendo de un cierto parámetro δ . Esto sugiere la presencia de alguna clase de bifurcación de Hopf en uno de los puntos de equilibrio, lo cual se confirma por la obtención de los diagramas de bifurcación. Otros diagramas de igual clase ilustran cómo la región de conducta oscilante (tal como viene definida por la localización en el espacio de parámetros de la bifurcación de Hopf) persiste cuando los otros parámetros se hacen variar, junto con δ.

Se obtienen los puntos singulares y se hace un estudio de su estabilidad. A continuación se estudian las bifurcaciones uniparamétricas y las de ciclos límite resultantes de la bifurcación de Hopf, para posteriormente obtener el comportamiento del sistema respecto al resto de parámetros no vistos hasta el momento. Después de estudiar las bifurcaciones biparamétricas se obtiene el diagrama de bifurcaciones completo respecto al plano de parámetros elegido.

Finalmente, en el capítulo 5 se relacionan las conclusiones del presente trabajo, referidas al estudio realizado en los cinco modelos matemáticos planteados como objetivos en el presente capítulo.

Capítulo 2

ALGUNOS RESULTADOS ACERCA DE SISTEMAS NO LINEALES

2.1. INTRODUCCIÓN

Se dice que un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias es *lineal* si tiene la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} = A\mathbf{x} \tag{2.1.1}$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $A = (a_{ij})_{n\times n}$ es una matriz de tamaño $n\times n$ de coeficientes reales constantes o dependientes de t.

Para el caso autónomo -el más estudiado- en que los elementos de A son constantes, la solución de un sistema lineal del tipo 2.1.1, considerando la condición inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ viene dada por la expresión siguiente, que define el semigrupo de transformaciones de $\mathbb{R}^n$ asociado al sistema dinámico: [1]

$$\mathbf{x}(t) = e^{A\,t}\,\mathbf{x}_0 \tag{2.1.2}$$

donde $e^{A\,t}$ es una matriz de funciones de tamaño $n \times n$ definida por su serie de Taylor:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}, \qquad \text{donde} \qquad t \in \mathbb{R} \tag{2.1.3}$$

Se demuestra que esta solución al problema de valores iniciales es única, lo cual es un tema clásico de los cursos de EDO. Véanse por ejemplo Perko [Per01] o el clásico Coddington-Levinson [CL55].

Si en lugar de tener en la parte derecha la expresión $A\,\mathbf{x}$, se tiene una función general $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ en la que intervienen funciones arbitrarias no lineales estamos entonces ante un sistema no lineal.

2.2. RESULTADOS ANALÍTICOS

2.2.1. Algunos teoremas

Sea el problema de valores iniciales:

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad x(0) = x_0 \tag{2.2.1}$$

y sea $\bar{x}$ un punto singular de (2.2.1), esto es, $f(\bar{x}) = 0$, y queremos caracterizar la conducta de las soluciones en puntos cercanos al $\bar{x}$.

[1] el flujo ϕ_t asociado al sistema dinámico viene definido por las propiedades:

$\phi_t(\phi_s(x)) = \phi_{t+s}(x); \quad \phi_0(x) = x; \quad \phi_t^{-1} = \phi_{-t}.$

Podemos hacerlo linealizando (2.2.1) en $\bar{x}$, mediante el sistema lineal:

$$\dot{\xi} = Df(\bar{x})\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{2.2.2}$$

donde $Df = [\partial f_i/\partial x_j]$ es la matriz jacobiana de la función:

$$f = (f_1(x_1, \ldots, x_n), f_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n))^T,$$

y $x = \bar{x} + \xi, |\xi| \ll 1$.

El siguiente teorema afirma que dado un punto singular de un sistema dinámico, si este punto singular es hiperbólico[2], el comportamiento cualitativo en las proximidades de este punto es el mismo que el del sistema linealizado (2.2.2).

Teorema 2.2.1 (Hartman-Grobman [Kuz98b]). *Si $Df(\bar{x})$ no tiene autovalores en el eje imaginario existe un homeomorfismo local de algún entorno U de $\bar{x}$ en $\mathbb{R}^n$ que transforma órbitas del flujo no lineal ϕ_t de (2.2.1) en órbitas del flujo lineal $e^{tDf(\bar{x})}$ de (2.2.2). El homeomorfismo preserva el sentido de las órbitas y se puede elegir de forma que conserva la parametrización en el tiempo.*

Otro teorema importante en la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales ordinarias es el teorema de la variedad estable, que demuestra la existencia de variedades diferenciables no lineales tangentes a las variedades lineales (asociadas a los vectores propios de la matriz de Jacobi) del sistema (2.2.2) en un punto singular hiperbólico de (2.2.1). Las dimensiones respectivas de dichas variedades coinciden con las de las variedades lineales, o sea, con el número de autovalores con parte real negativa y positiva respectivamente de la matriz de Jacobi que aparece en (2.2.2).

[2] un punto singular se denomina *hiperbólico* si la matriz de Jacobi en este punto no tiene autovalores con parte real nula.

Definimos previamente las variedades estable(s) e inestable(u):

$$W^s_{loc}(\bar{x}) = \{x \in U/\phi_t(x) \to \bar{x} \text{ cuando } t \to \infty, \text{ y } \phi_t(x) \in U, t \geq 0\} \quad (2.2.3)$$

$$W^u_{loc}(\bar{x}) = \{x \in U/\phi_t(x) \to \bar{x} \text{ cuando } t \to -\infty, \text{ y } \phi_t(x) \in U, t \leq 0\} \quad (2.2.4)$$

Teorema 2.2.2 (Teorema de la variedad estable [GH90]). *Si $Df(\bar{x})$ no tiene autovalores en el eje imaginario, existen variedades locales estable e inestable W^s_{loc} y W^u_{loc} tangentes a las variedades lineales $E^s_{\bar{x}}$ y $E^u_{\bar{x}}$ de $Df(\bar{x})$ en el punto $\bar{x}$ y de iguales dimensiones que éstas, siendo ambas variedades W^s_{loc} y W^u_{loc} diferenciables de la misma clase C^k que la función f.*

2.2.2. MÉTODOS DE SIMPLIFICACIÓN DE SISTEMAS

En esta sección se verán algunas técnicas necesarias para el análisis de problemas de bifurcación. El teorema de la variedad central proporciona un medio para reducir sistemáticamente la dimensión del espacio de estados proyectando la dinámica sobre una variedad adecuada llamada "variedad central" y que se corresponde con los autovalores de parte real nula.

Por otra parte, el cálculo de las formas normales permite simplificar los términos no lineales presentes en el sistema diferencial, de forma que el nuevo sistema mantiene sólo aquellos términos que son fundamentales a efectos de determinar la dinámica del sistema.

Supongamos un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias del tipo (2.2.1) tal que $f(0) = 0$. Si la linealización de f en el origen no tiene autovalores imaginarios puros, el teorema de Hartman-Grobman (2.2.1) establece que el número de autovalores con partes reales positivas y negativas determina la equivalencia topológica del flujo cerca del origen. Sin embargo, si la parte lineal tiene autovalores en el eje imaginario, el comportamiento del sistema viene dado por el sistema reducido que se obtiene mediante el cálculo de la variedad central en el punto singular estudiado.

2.2.2.1. LA VARIEDAD CENTRAL

La teoría de la variedad central permite reducir la dimensión de un problema de bifurcación en el entorno de un punto singular, y además se puede probar que *es suficiente restringir el análisis de bifurcación al flujo en la variedad central* [Van89].

Consideremos un sistema dinámico no lineal dependiente de varios parámetros:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{F}(\mathbf{z}, \mu), \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}^p, \tag{2.2.5}$$

donde $\mathbf{z}$ es el vector de las variables de estado y μ es el vector de parámetros. Suponemos que $\mathbf{F}$ es una función de clase $\mathcal{C}^r$ y $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ es un punto singular que satisface $\mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = D\mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$. Podemos considerar al parámetro μ como una nueva variable independiente y convertir el sistema (2.2.5) en otro sin parámetros en dimensión $n + p$:

$$\begin{aligned} \dot{\mu} &= 0 && (2.2.6)\\ \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{F}(\mathbf{z}, \mu). && (2.2.7) \end{aligned}$$

Las partes lineales de este último sistema se pueden simplificar calculando su forma canónica de Jordan, y el sistema resultante se puede escribir como un sistema particionado:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{J}^c\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) && (2.2.8)\\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{J}^s\mathbf{y} + \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s, && (2.2.9) \end{aligned}$$

donde $\mathbf{J}^c$ y $\mathbf{J}^s$ son la formas canónicas de Jordan asociadas a los autovalores con parte real nula y los autovalores con parte real no nula respectivamente. Las funciones $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ son de clase $\mathcal{C}^r$ y satisfacen $\mathbf{f}(0,0) = 0, D\mathbf{f}(0,0) = 0, \mathbf{g}(0,0) = 0, D\mathbf{g}(0,0) = 0$.

Una curva $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$, definida para $|\mathbf{x}|$ pequeño, se llama variedad invariante local para el sistema anterior si la solución $(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$ que pasa por $(0,0)$ permanece en la curva $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$ para t pequeño, o sea, vale localmente la representación $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t))$.

La variedad central es un caso particular de variedad invariante local. Su definición es la siguiente:

Definición 1. *La variedad central del sistema (2.2.8),(2.2.9) se define localmente como:*

$$\mathbf{W}^c(0) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s / \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}),\ \mathbf{h}(0) = 0,\ D\mathbf{h}(0) = 0,\ |\mathbf{x}| < \delta\} \tag{2.2.10}$$

para δ suficientemente pequeño.

La variedad central es tangente al subespacio vectorial E^c engendrado por los autovectores asociados a los autovalores con parte real nula. El teorema de existencia es:

Teorema 2.2.3 (Existencia [Car81]). *Existe una variedad central de clase $\mathcal{C}^r$ del sistema (2.2.8) y (2.2.9) que denotaremos por $\mathbf{W}^c(0)$. El flujo sobre ella viene dado por el sistema de dimensión c:*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}^c\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x})) \tag{2.2.11}$$

El siguiente teorema nos dice que (2.2.11) contiene la información necesaria para determinar el comportamiento asintótico de las soluciones de (2.2.8) y (2.2.9):

Teorema 2.2.4 (Estabilidad [Car81]). *Si la solución nula de (2.2.11) es estable, asintóticamente estable, o inestable, también lo será del mismo tipo la solución nula de (2.2.8) y (2.2.9). Además, supongamos que la solución nula de (2.2.11) es estable. Entonces si*

$(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$ *es una solución de (2.2.8) y (2.2.9) con valor inicial* $(\mathbf{x}(0), \mathbf{y}(0))$ *suficientemente pequeño, existen una solución* $\mathbf{u}(t)$ *de (2.2.11) y una constante* $\gamma > 0$ *tales que cuando* $t \to \infty$ *se verifica:*

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \mathbf{u}(t) + O(e^{-\gamma t}) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{h}(\mathbf{u}(\mathbf{t})) + O(e^{-\gamma t}).\end{aligned}$$

Por tanto, todas las soluciones de (2.2.8) y (2.2.9) tienden a una solución en la variedad central, de forma exponencial. El sistema original formado por (2.2.8) y (2.2.9) es topológicamente equivalente al sistema (2.2.11) en la variedad central, localmente y cerca del punto singular.

Si sustituimos $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}(\mathbf{t}))$ en (2.2.9) obtenemos:

$$\mathbf{h}'(\mathbf{x})[\mathbf{J}^c\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x}))] = \mathbf{J}^s\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x})) \tag{2.2.12}$$

La ecuación anterior, junto con $\mathbf{h}(0) = 0$, $\mathbf{h}'(0) = 0$, define el sistema necesario para obtener la variedad central.

A efectos de calcular la variedad central, sea:

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \tag{2.2.13}$$

Diferenciando respecto al tiempo tenemos:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{Dh}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}}$$

sustituyendo las ecuaciones (2.2.8) y (2.2.9) y teniendo en cuenta (2.2.13) obtenemos:

$$\mathbf{Dh}(\mathbf{x})[\mathbf{J}^c\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x}))] = \mathbf{J}^s\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x}))$$

que podemos reescribir como un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales:

$$\mathbf{Dh}(\mathbf{x})\mathbf{J}^c\mathbf{x} - \mathbf{J}^s\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x})) - \mathbf{Dh}(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x})) \tag{2.2.14}$$

o bien:

$$\mathbf{N}(\mathbf{h}(\mathbf{x})) = \mathbf{Dh}(\mathbf{x})[\mathbf{J}^c\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x}))] - \mathbf{J}^s\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x})) = 0$$

Hallando $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ en la ecuación (2.2.14) podríamos teóricamente obtener la variedad central y el flujo en dicha variedad. Sin embargo, en general no se puede, ya que (2.2.14) es tan difícil de resolver como el sistema original.

El siguiente teorema prueba que, en principio, la variedad central puede ser aproximada a cualquier grado de precisión.

Sea una función $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de clase $\mathcal{C}^1$ en un entorno del origen, definimos:

$$\mathbf{N}(\phi)(\mathbf{x})) = \phi'(\mathbf{x})[\mathbf{J}^c\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x}))] - \mathbf{J}^s\phi(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x})) \tag{2.2.15}$$

Nótese que por (2.2.12) $(\mathbf{N}\phi)(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$

Teorema 2.2.5 (Aproximación [Car81]). *Sea ϕ una función que satisface $\phi(0) = \mathbf{D}\phi(0) = 0$ tal que $\mathbf{N}(\phi) = O(|\mathbf{x}|^q)$ cuando $\mathbf{x} \to 0$ para algún $q > 1$. Entonces se verifica:*

$$|\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{x})| = O(|\mathbf{x}|^q) \tag{2.2.16}$$

En la práctica se usa como aproximación ϕ a la variedad central un polinomio homogéneo de grado q en las m variables $x_1, \ldots, x_m$, donde, si lo que se quiere es realizar un análisis de bifurcación, algunas de las m variables pueden ser parámetros del sistema.

Las demostraciones de los teoremas presentados se pueden encontrar en [Car81], [Sij85], y en [Van89], que ofrecen resultados sobre la existencia local y global de las variedades centrales, así como sobre unicidad y diferenciabilidad de este tipo de variedades. En relación a la diferenciabilidad, el primer ejemplo de un sistema de clase $\mathcal{C}^\infty$ que no tiene una variedad central de la misma clase se puede encontrar en [vS79].

Otras referencias útiles o interesantes son [MM78],[Wig90b], [HKW81], y [Kel67].

También, en [FGPF88] se construye un algoritmo para el cálculo simbólico de variedades centrales partiendo de una idea expuesta en [CH82] para el cálculo de formas normales que amplía el uso de los corchetes de Lie, ya usados en sistemas hamiltonianos.

2.2.2.2. LA FORMA NORMAL

En esta sección veremos un segundo instrumento que se utiliza para la simplificación de un problema de bifurcación: la teoría de la forma normal. La idea básica es realizar transformaciones de coordenadas que hagan que la expresión analítica de una ecuación sea tan sencilla como sea posible; esta forma simplificada de la ecuación se llama *forma normal*.

En términos generales, la forma normal de un sistema de ecuaciones diferenciales es el elemento *más simple* de una clase de equivalencia de sistemas diferenciales que poseen el mismo comportamiento cualitativo. Por ejemplo, consideremos la familia de todos los sistemas lineales descritos por $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, donde A es una matriz real de orden $n \times n$ con autovalores diferentes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Como A es diagonalizable, la conducta cualitativa de la familia estudiada es idéntica a la de $\dot{\mathbf{x}} = \Lambda\mathbf{x}$, donde Λ es la matriz diagonal con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ en su diagonal. En este caso, decimos que $\Lambda\mathbf{x}$ es la forma normal de la clase de equivalencia de sistemas diferenciales lineales.

Claramente, es mucho más sencillo investigar la conducta cualitativa de esta familia de sistemas diferenciales trabajando con $\Lambda\mathbf{x}$ que con $A\mathbf{x}$.

Veamos los conceptos y resultados fundamentales de la teoría clásica de las formas normales.

Sea K un cuerpo conmutativo de característica cero (en la práctica $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$). Denotamos con $K[[\mathbf{x}]]$ el álgebra de las series formales de potencias en n variables con coeficientes en el cuerpo K. Consideramos el sistema dinámico (o su campo vectorial asociado)

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \tag{2.2.17}$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ y $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_n(\mathbf{x}))^t$ con $f_j(\mathbf{x}) \in K[[\mathbf{x}]]$ y $\mathbf{F}(\mathbf{0}) = 0$. Entonces podemos escribir $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \sum_{k\geqslant 1} \mathbf{F}^k(\mathbf{x})$, donde $\mathbf{F}^k(\mathbf{x})$ es un vector de polinomios homogéneos de grado k y $\mathbf{F}^1(x) = A\mathbf{x}$, siendo $A \in GL(n, K)$ la parte lineal del sistema , donde $GL(n, K)$ denota el conjunto de las matrices de orden $n \times n$ con coeficientes en K. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ los autovalores de A, llamamos $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ y supongamos que A está en la forma canónica de Jordan con $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ en la diagonal principal. Sea $q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{N}^n$ con:

$$|q| = q_1 + \cdots + q_n \geqslant 2.$$

Definimos ahora $\mathbf{x}^q = x_1^{q_1} \cdots x_n^{q_n}$. Un monomio $a_q\mathbf{x}^q$ de $f_j(\mathbf{x})$ se llama resonante de orden $|q|$ si $\lambda_j = q.\lambda = q_1\lambda_1 + \cdots + q_n\lambda_n$. Los términos resonantes serán los que queden después de haber realizado el cambio de variables: si el punto singular fuese hiperbólico se podrían eliminar todos. Para una excelente exposición y justificación, véase [GH90]. El teorema de la forma normal de Poincaré-Dulac establece lo siguiente:

Teorema 2.2.6 (Poincaré-Dulac). *Consideremos un sistema dinámico de la forma (2.2.17) donde $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \cdots$ es un vector expresado como serie formal de potencias,*[3]

[3] no existen términos constantes: $\mathbf{F}(\mathbf{0}) = 0$ y se puede escribir $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \sum_{k\geq 1} \mathbf{F_k}(\mathbf{x})$, donde $\mathbf{F_k}(\mathbf{x})$ es un vector de polinomios homogéneos de grado k. Es $\mathbf{F_1}(\mathbf{x}) = Ax$, siendo $A \in M(n, n)$ la parte lineal del sistema, donde $M(k, m)$ denota el espacio vectorial de las matrices de orden $k \times m$ con coeficientes en K.

y A está en la forma canónica de Jordan. Entonces (2.2.17) se puede reducir a una forma normal $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + h(\mathbf{y})$ por un cambio de variables "próximo a la identidad" de la forma $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \varphi(\mathbf{y})$, donde $\varphi(\mathbf{y})$ es un vector expresado en serie formal de potencias sin término constante ni término lineal, y $h(\mathbf{y})$ contiene sólo monomios resonantes.

En la práctica se usa el teorema de Poincaré-Dulac para obtener una forma normal hasta un cierto orden N:

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + z(\mathbf{y}) + \mathcal{O}(\|\mathbf{y}\|^{N+1}) \tag{2.2.18}$$

donde $z(\mathbf{y})$ es un polinomio de grado menor o igual a N sin términos constante ni lineal, y $\mathcal{O}(\|\mathbf{y}\|^{N+1})$ representa términos de orden mayor o igual a $N+1$.
Más concretamente, sea

$$\dot{\mathbf{x}} = F(x) = A\mathbf{x} + F^2(\mathbf{x}) + F^3(\mathbf{x}) + \cdots, \quad \mathbf{x} \in K^n \tag{2.2.19}$$

donde F^k denota la parte homogénea de grado k de F, $F^k \in H_k^n$, el espacio de los polinomios homogéneos de grado k en n variables con coeficientes en K.
Consideramos inicialmente una transformación lineal

$$\mathbf{x} = \varphi^1(\mathbf{y}) = P\mathbf{y} \tag{2.2.20}$$

donde P es una matriz inversible con coeficientes en K. Obtenemos entonces un nuevo sistema con la misma forma: $\dot{\mathbf{y}} = P^{-1}AP\mathbf{y} + \cdots$. Está claro que podemos elegir una matriz P tal que A esté en alguna forma canónica (en los métodos clásicos se elige la forma canónica de Jordan).
Consideramos a continuación una transformación formal(un cambio de coordenadas próxi-

mo a la identidad)

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \varphi(\mathbf{y}) \tag{2.2.21}$$

donde $\varphi(\mathbf{y})$ no tiene términos constantes ni lineales. Sustituyendo en (2.2.19) obtenemos:

$$\dot{\mathbf{y}} = (I + \partial_y \varphi)^{-1} F(\mathbf{y} + \varphi(\mathbf{y})) \tag{2.2.22}$$

donde $\partial_y \varphi$ denota la matriz de Jacobi de φ con respecto a $(y_1, \ldots, y_n)$. Por tanto podemos escribir el nuevo sistema en la forma:

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + G(\mathbf{y})$$

y diremos que este nuevo sistema es equivalente al sistema original (2.2.19) por un cambio formal de variables próximo a la identidad.

El objetivo es construir una sucesión de cambios de variables como los (2.2.20) y (2.2.21) tales que el sistema transformado quede en la forma más simple posible. Esta simplificación se obtendrá, hasta un cierto orden, mediante cambios de coordenadas próximos a la identidad de la forma $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \varphi^k(\mathbf{y})$, donde $\varphi^k(\mathbf{y})$ es un vector de polinomios homogéneos de grado $k \geqslant 2$. Tenemos entonces:

$$(I + \partial_y \varphi^k(\mathbf{y}))^{-1} = I - \partial_y \varphi^k(\mathbf{y}) + \mathcal{O}(\|\mathbf{y}\|^{2k-2})$$

donde $\mathcal{O}(\|\mathbf{y}\|^m)$ denota términos de orden mayor o igual que m. Sustituyendo en (2.2.22) obtenemos:

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + \cdots + F^{k-1}(\mathbf{y}) + \{F^k(\mathbf{y}) - [\partial_y \varphi^k(\mathbf{y})A\mathbf{y} - A\varphi^k(\mathbf{y})]\} + \mathcal{O}(\|\mathbf{y}\|^{k+1}) \tag{2.2.23}$$

Tenemos entonces la ecuación:

$$F^k(\mathbf{y}) - [\partial_y \varphi^k(\mathbf{y})A\mathbf{y} - A\varphi^k(\mathbf{y})] = G^k(\mathbf{y}) \tag{2.2.24}$$

que se llama ecuación homológica de orden k. A efectos de obtener una G^k que contenga el menor número de monomios posible debemos elegir una $\varphi^k(\mathbf{y})$ conveniente. Introducimos para cada $k \geqslant 2$ un operador lineal $L_A^k : H_k^n \to H_k^n$ definido por:

$$(L_A^k \varphi^k)(\mathbf{y}) = \partial_y \varphi^k(\mathbf{y})A\mathbf{y} - A\varphi^k(\mathbf{y}), \quad \varphi^k \in H_k^n.$$

y entonces (2.2.23) se puede expresar como:

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + \cdots + F^{k-1}(\mathbf{y}) + [F^k(\mathbf{y}) - L_A^k \varphi^k(\mathbf{y})] + \mathcal{O}(\|\mathbf{y}\|^{k+1})$$

y si llamamos $\mathcal{R}^k$ al subespacio vectorial imagen de H_k^n mediante L_A^k en H_k^n, y $\mathcal{S}^k$ a un subespacio suplementario de $\mathcal{R}^k$ en H_k^n, tenemos:

$$H_k^n = \mathcal{R}^k \oplus \mathcal{S}^k. \tag{2.2.25}$$

La idea fundamental de la teoría clásica de las formas normales está en el siguiente teorema debido a Takens, que es una mejora del teorema de Poincaré-Dulac.

Teorema 2.2.7 (Takens). *Consideremos un sistema dinámico de la forma (2.2.19) y supongamos que hemos realizado la descomposición (2.2.25) para $k = 2, \ldots, N$. Entonces existe una sucesión de cambios de variable próximos a la identidad $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \varphi^k(\mathbf{y})$ donde $\varphi^k(\mathbf{y}) \in H_k^n$ tal que el sistema dinámico (2.2.19) se transforma en:*

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + G^2(\mathbf{y}) + \ldots + G^N(\mathbf{y}) + \mathcal{O}(\|\mathbf{y}\|^{N+1})$$

donde $G^k \in \mathcal{S}^k$ para $k = 2, \ldots, N$.

El teorema nos garantiza que los términos no lineales que nos quedan después de los cambios de variable son (y se pueden elegir así) elementos (generadores) de los subespacios vectoriales suplementarios en H_k^n de los subespacios imagen $L_A^k(H_k^n)$. Como en general la elección de esos elementos que constituyen base de $\mathcal{S}^k$ no es única, la forma normal no será única.

Para detalles se pueden consultar [GH90], [Wig90b], así como [CH82] y [CK89].

La literatura sobre formas normales es vasta y los enfoques de resolución también variados. A modo de síntesis, como referencias generales están [Nay93, GH90, Arn88], [CH82, CDW90, Wig90b] y [CLW94]. Los excelentes artículos que recogen la evolución del concepto son [Tak73a, Tak74b, Ush84, CK88, CK89].

Todas estas referencias parten en general de la forma normal de Jordan y utilizan los corchetes de Lie como motor de resolución. Más recientemente se han publicado trabajos con otros enfoques, como [Gae99] y sobre todo [CD99], que utiliza la linealización de Carleman [Car32] y la forma normal de Frobenius [Oze87] como elementos de cálculo. Trabajos posteriores que continúan esta línea son [CD00b, CD00a, Che01, CWW02].

2.3. TAXONOMIA DE LAS BIFURCACIONES EN SISTEMAS CONTINUOS

El análisis de la dinámica de las formas normales nos proporciona el comportamiento cualitativo de los flujos para cada tipo de bifurcación.

En esta sección se verán algunos tipos de bifurcaciones de puntos singulares, y sus formas normales cuando sea posible. Sólo se verán bifurcaciones de sistemas continuos. El diagrama que aparece en la figura (2.3) representa las dependencias entre los tipos de bifurcaciones, en el sentido de que es posible detectar un tipo determinado de bifurcación si se "continúa" alguna de las curvas que aparecen en el nivel inferior k de codimensión. La continuación es el procedimiento básico que permite construir diagramas de bifurcación, y para su puesta en marcha es necesario disponer de elementos previamente calculados: por ejemplo, para obtener una curva de puntos singulares al variar uno de los parámetros se necesita conocer un valor del parámetro y de las variables de estado para los cuales hay un punto singular. A medida que se construye la curva por continuación (ver apartado más adelante), se exploran simultáneamente la existencia de posibles bifurcaciones uniparamétricas, como la del tipo silla-nodo (si se anula el jacobiano) o de Hopf (si aparecen dos autovalores conjugados imaginarios puros). Estos cálculos se realizan para cada nuevo punto que se obtiene en la curva, lo que garantiza que se trata de una bifurcación del punto singular del cual se partió. Después, partiendo de los posibles valores en los cuales hay bifurcación, se pueden construir otras curvas (de sillas-nodo, Hopf, o de codimensión superior), etc.

Al estar orientado a la exploración numérica, en el diagrama aparecen algunos tipos de bifurcaciones que no son tal, sino casos particulares en que se anulan determinadas funciones llamadas "test", que son las que nos informan del valor de sus autovalores (o combinaciones de ellos) de cada nuevo punto calculado.

La figura aparece en [KKLN93] y también parcialmente en [Khi90].

2.3.1. Bifurcaciones uniparamétricas

Las bifurcaciones más sencillas son las que dependen de un solo parámetro, y son las siguientes:

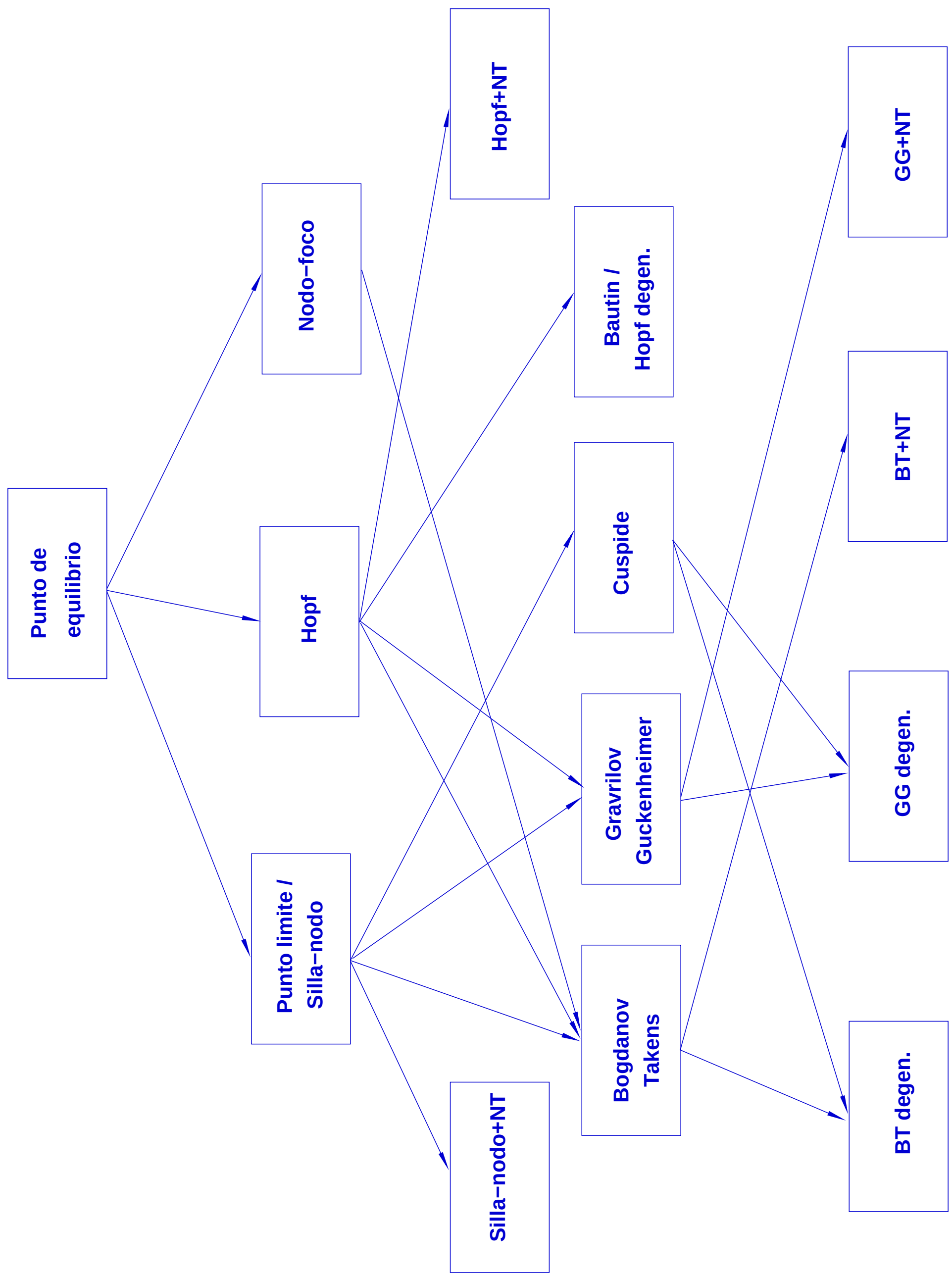


Figura 2.3.1: Grafo de adyacencias de las bifurcaciones de sistemas continuos.

2.3.1.1. Bifurcación tipo silla-nodo

Es el tipo de bifurcación que se presenta cuando al cruzar el parámetro un determinado valor aparecen dos nuevos puntos singulares.

Está representada por la ecuación diferencial:

$$\dot{x} = \mu - x^2$$

y como se ha dicho, representa la desaparición o aparición simultánea de dos nuevos puntos singulares al cruzar el parámetro un determinado valor(cero, en la forma normal). En el caso de la ecuación diferencial anterior, no existen puntos singulares si $\mu < 0$, uno si $\mu = 0$ y dos si $\mu > 0$.

Sea un sistema de ecuaciones de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mu), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R} \tag{2.3.1}$$

y f suficientemente diferenciable. Supongamos que en $\mu = \mu_0, \mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, la ecuación (2.3.1) tiene un punto singular para el cual la matriz de la linealización tiene un autovalor nulo. Generalmente, este cero es simple, y el teorema de la variedad central nos permite reducir el estudio de este tipo de bifurcación a otro donde $\mathbf{x}$ es unidimensional.

El siguiente teorema establece las condiciones bajo las que existe la bifurcación.

Teorema 2.3.1 (silla-nodo). *Sea $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mu)$ un sistema de ecuaciones diferenciales en $\mathbb{R}^n$ que depende de un solo parámetro μ. Supongamos que cuando $\mu = \mu_0$, existe un equilibrio en $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ que satisface las siguientes condiciones:*

(SN1) *$D_x f(\mathbf{x}_0, \mu_0)$ tiene un autovalor simple nulo, k autovalores con parte real negativa y $(n - k - 1)$ autovalores con parte real positiva (contando multiplicidades).*

(SN2) $(\partial f / \partial \mu)(\mathbf{x}_0, \mu_0) \neq 0$

(SN3) $D_x^2 f(\mathbf{x}_0, \mu_0) \neq 0$

Entonces existe una curva de puntos singulares en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ *que pasa por* $(\mathbf{x}_0, \mu_0)$ *tangente al hiperplano* $\mathbb{R}^n \times \{\mu_0\}$*. Dependiendo de los signos de las expresiones en (SN2) y (SN3), no existen equilibrios cerca de* $(\mathbf{x}_0, \mu_0)$ *cuando* $\mu < \mu_0 (\mu > \mu_0)$ *y dos equilibrios cerca de* $(\mathbf{x}_0, \mu_0)$ *para cada valor del parámetro* $\mu > \mu_0 (\mu < \mu_0)$*. Los dos equilibrios de* $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mu)$ *cerca de* $(\mathbf{x}_0, \mu_0)$ *son hiperbólicos y tienen variedades estables de dimensiones* k *y* $k+1$ *respectivamente. El conjunto de ecuaciones* $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mu)$ *que satisface (SN1)-(SN3) es abierto y denso en el espacio de clase* $\mathcal{C}^\infty$ *de las familias uniparamétricas de campos vectoriales con un equilibrio en* $(\mathbf{x}_0, \mu_0)$ *y con un autovalor nulo.*

La bifurcación de tipo silla-nodo está asociada con el hecho de que uno de los autovalores "cruza" el valor cero. Existen otras dos bifurcaciones que tienen esta misma caracterización: son la bifurcación *transcrítica* y la bifurcación tipo *tridente*. Ambas pueden darse sólo en condiciones especiales.

2.3.1.2. Bifurcación transcrítica

Este tipo de bifurcación sólo se da cuando el sistema tiene un punto singular que existe para todos los valores del parámetro y que nunca puede ser destruído. Cuando este punto singular "colisiona" con otro también singular, ambos puntos intercambian sus estabilidades respectivas, y continúan existiendo ambos despues de la bifurcación.

La ecuación diferencial es en este caso:

$$\dot{x} = \mu x - x^2$$

y representa el cambio de estabilidad del punto singular cuando el parámetro pasa por un determinado valor.

Verifica las condiciones:

(T1) $D_x f(\mathbf{x}_0, \mu_0)$ tiene un autovalor simple nulo, k autovalores con parte real negativa y $(n-k-1)$ autovalores con parte real positiva (contando multiplicidades).

(T2) $(\partial/\partial\mu) D_x f(\mathbf{x}_0, \mu_0) \neq 0$

(T3) $D_x^2 f(\mathbf{x}_0, \mu_0) \neq 0$

2.3.1.3. Bifurcación tipo tridente

Este tipo de bifurcación sólo existe cuando hay simetría respecto a la variable x, o sea, sustituyendo x por $-x$, se obtiene la misma ecuación.

Ahora la ecuación diferencial es:

$$\dot{x} = \mu x \pm x^3$$

y representa el cambio de estabilidad del punto singular junto con la aparición de dos nuevos puntos singulares.

Verifica las condiciones:

(P1) $D_x f(\mathbf{x}_0, \mu_0)$ tiene un autovalor simple nulo, k autovalores con parte real negativa y $(n-k-1)$ autovalores con parte real positiva (contando multiplicidades).

(P2) $(\partial/\partial\mu) D_x f(\mathbf{x}_0, \mu_0) \neq 0$

(P3) $(\partial^3 f/\partial x^3)(\mathbf{x}_0, \mu_0) \neq 0$

Cuando el término cúbico es $-x^3$, decimos que es una bifurcación tipo tridente *supercrítica*; mientras que cuando es $+x^3$ decimos que es *subcrítica*.

2.3.1.4. Bifurcación de Hopf o Poincaré-Andronov-Hopf

Estas bifurcaciones sólo pueden aparecer cuando la dimensión del sistema es al menos dos. En este tipo de bifurcación[4] un punto singular estable cambia su estabilidad y aparece un ciclo límite estable rodeando el punto singular (caso supercrítico). Están en el origen del desencadenamiento de comportamientos periódicos de los sistemas.

Consideremos un sistema de la forma (2.3.1) y un valor del parámetro μ_0 y un punto $\mathbf{x}_0(\mu_0)$ donde Df_{μ_0} tiene un par (simple) de autovalores imaginarios puros $\pm i\omega$, y no tiene otros autovalores con parte real nula.

Teorema 2.3.2. *[Hop42] Supongamos que el sistema* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_\mu(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}$ *tiene un equilibrio* $(\mathbf{x}_0, \mu_0)$ *en el que se satisfacen las siguientes condiciones:*

(H1) $D_x f_{\mu_0}(\mathbf{x}_0)$ *tiene sólo un par de autovalores imaginarios puros, y no tiene otros autovalores con parte real nula.*

Entonces existe una curva de equilibrios $(\mathbf{x}(\mu), \mu)$ *con* $\mathbf{x}(\mu_0) = \mathbf{x}_0$. *Los autovalores* $\lambda(\mu), \bar{\lambda}(\mu)$ *de* $D_x f_{\mu_0}(\mathbf{x}(\mu))$ *que son imaginarios en* $\mu = \mu_0$ *varían diferenciablemente con* μ. *Si además se verifica:*

(H2)

$$\frac{d}{d\mu}(\mathbf{Re}\lambda(\mu))|_{\mu=\mu_0} = d \neq 0, \tag{2.3.2}$$

entonces existe una variedad central tridimensional que pasa por $(\mathbf{x}_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ *y un cambio de coordenadas diferenciable (preservando los planos* $\mu =$*constante) para*

[4] Según Wiggins[Wig03]: Usualmente el resultado se ha conocido con el nombre "teorema de bifurcación de Hopf". Sin embargo, Arnold [Arn88] ha insistido en que ejemplos de este tipo se pueden encontrar en Poincaré(1892). El primer estudio específico y la primera formulación se debió a Andronov(1929), aunque sus trabajos y los de Poincaré se hicieron para dimensión dos, el teorema debido a Hopf [Hop42] es válido en n dimensiones, y además se hizo antes de que se conociera el teorema de la variedad central.

los que el desarrollo de Taylor de orden 3 en la variedad central viene dado por:

$$\dot{x} = (d\mu + a(x^2+y^2))x - (\omega + c\mu + b(x^2+y^2))y \tag{2.3.3}$$

$$\dot{y} = (\omega + c\mu + b(x^2+y^2))x + (d\mu + a(x^2+y^2))y \tag{2.3.4}$$

Estas dos ecuaciones se pueden expresar en coordenadas polares como:

$$\dot{r} = (d\mu + ar^2)r \tag{2.3.5}$$

$$\dot{\theta} = (\omega + c\mu + br^2) \tag{2.3.6}$$

y como en la primera ecuación de 2.3.5 no aparece la variable θ, vemos que existen órbitas periódicas de 2.3.3 que son circunferencias $r =$ constante obtenidas de las soluciones no nulas de $\dot{r} = 0$ en 2.3.5.

2.3.2. Bifurcaciones en dos parámetros

Consideramos ahora un sistema bi-paramétrico:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mu), \tag{2.3.7}$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$, $\mu = (\mu_1, \mu_2)^t \in \mathbb{R}^2$, y f una función suficientemente diferenciable.

Supongamos que en $\mu = \mu_0$, el sistema (2.3.7) tiene un punto singular en $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ para el que se cumplen las condiciones de existencia de una bifurcación silla-nodo o bien de tipo Hopf. Entonces, existe una "curva de bifurcación" $\mathcal{B}$ en el plano (μ_1, μ_2) a lo largo de la cual el sistema tiene un equilibrio del mismo tipo.

Entonces, si los parámetros (μ_1, μ_2) se hacen variar simultáneamente con la intención de trazar la curva de bifurcación $\mathcal{B}$, y se observa lo que ocurre con el punto singular no hiperbólico, puede ocurrir que para algunos valores de los parámetros:

1. otros autovalores se aproximen al eje imaginario, cambiando de esta forma la dimensión de la variedad central W^c,

2. puedan incumplirse algunas de las condiciones genéricas para la existencia de una bifurcación de codimensión 1.

Sigamos en primer lugar una curva de bifurcación de sillas-nodo. Un punto de esta curva define un equilibrio con un autovalor simple $\lambda_1 = 0$ y no hay más autovalores sobre el eje imaginario. La restricción del sistema (2.3.7) a la variedad central W^c tiene la forma:

$$\dot{\xi} = a\xi^2 + O(\xi^3) \tag{2.3.8}$$

en la que el coeficiente $a \neq 0$ si se trata de una bifurcación silla-nodo no degenerada. Mientras se calcula la curva, se pueden dar las siguientes singularidades:

1. Otro autovalor real λ_2 se aproxima al eje imaginario, y W^c se convierte en bidimensional:

   $$\lambda_{1,2} = 0$$

   Estas son las condiciones para la bifurcación de *Bogdanov-Takens* o también *doble-cero*. Para que se dé, es necesario que $n \geqslant 2$.

2. Otros dos autovalores complejos $\lambda_{2,3}$ se acercan al eje imaginario, y W^c se convierte en tridimensional:

   $$\lambda_1 = 0,\ \ \lambda_{2,3} = \pm i\omega_0$$

   con $\omega_0 > 0$. Estas condiciones corresponden a la bifurcación de *Gavrilov-Guckenheimer* o también *cero-par* o *silla-nodo-Hopf (fold-Hopf)*. Para que se produzca, se ha de verificar que $n \geqslant 3$.

3. El autovalor λ_1 permanece simple y es el único sobre el eje imaginario ($dimW^c = 1$), pero el coeficiente a de la forma normal en (2.3.8) se anula:

$$\lambda_1 = 0, \;\; a = 0$$

   Estas son las condiciones de una bifurcación tipo *cúspide* que es posible en sistemas con $n \geqslant 1$.

Sigamos ahora una curva de bifurcaciones de Hopf del sistema (2.3.7). En un punto cualquiera de esta curva, el sistema tiene un equilibrio con sólo un par de autovalores imaginarios puros $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_o$, $\omega_o > 0$, y no hay más autovalores con parte real nula. La variedad central es por tanto bidimensional y en coordenadas polares (ρ, θ), la restricción de (2.3.7) a esta variedad se puede expresar como:

$$\dot{\rho} \;\; = \;\; l_1\rho^3 + O(\rho^4) \tag{2.3.9}$$

$$\dot{\theta} \;\; = \;\; 1 + O(\rho^3) \tag{2.3.10}$$

siendo l_1 por definición el primer coeficiente de Lyapunov, [5] no nulo si se trata de una bifurcación de Hopf no degenerada. Mientras nos movemos por la curva de puntos de Hopf, nos podemos encontrar con las siguientes posibilidades:

1. Otros dos autovalores complejos conjugados $\lambda_{3,4}$ se aproximan al eje imaginario, y W^c se convierte en tetra-dimensional:

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0, \;\; \lambda_{3,4} = \pm i\omega_1$$

   con $\omega_{0,1} > 0$. Estas condiciones definen a la bifurcación de tipo *doble-Hopf* o *Hopf-Hopf*. Es posible sólo si $n \geqslant 4$.

[5] véase Kuznetsov [Kuz98b] por ejemplo; en el cálculo de la forma normal de la bifurcación de Hopf no todos los autores optan por el mismo enfoque.

2. El coeficiente l_1 se hace cero mientras que $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ permanece simple, y por tanto, $\dim W^c = 2$:

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0, \;\; l_1 = 0.$$

   En este punto, una bifurcación de Hopf subcrítica se convierte en supercrítica o viceversa. A esta bifurcación se la llama de *Bautin*, y a menudo también es conocida como *Hopf generalizada* o *Hopf degenerada*. Es posible si $n \geqslant 2$.

Claramente, la bifurcación de Bogdanov-Takens puede localizarse a lo largo de la curva de Hopfs, cuando ω_0 se aproxima a cero. En este punto, dos autovalores imaginarios puros coalescen y tenemos un autovalor nulo doble. Análogamente ocurre para la bifurcación de Gavrilov-Guckenheimer.

Referencias importantes en el estudio de las bifurcaciones son los libros [GH90, Kuz98b, CH82, CLW94, MM78, HKW81]. Estudios de tipos particulares de bifurcaciones aparecen en [Bog81a, Bog81b], [Hop42], [Tak74a] y [DRS87].

2.4. ASPECTOS NUMÉRICOS

Cuando se estudia un sistema dinámico ocurre con mucha frecuencia que se puede hacer un estudio analítico sólo parcialmente debido a la no linealidad de las ecuaciones del propio sistema. O incluso si se pudiera hacer el estudio en su mayor parte, siempre interesará dar valores concretos a los parámetros y a las condiciones iniciales y ver la forma del diagrama de fases (y esto lo haremos con algoritmos de integración numérica de ecuaciones diferenciales). Después interesará cambiar los valores de parámetros y condiciones iniciales y detectar cambios en el comportamiento de las soluciones (simulación), y determinar valores precisos de los parámetros que originan esa diversidad de patrones topológicos en su comportamiento (continuación y bifurcación).

Todos estos aspectos del estudio de un sistema dinámico necesitan de un conjunto de algoritmos numéricos que realicen la tarea de forma fiable y precisa. Su estudio comenzó en los años setenta del pasado siglo y hoy se dispone de una familia de algoritmos que resuelven una parte importante de este tipo de problemas.

La obtención de un punto singular del sistema se puede hacer analíticamente, por simulación, o incluso mediante algoritmos probabilísticos. Una vez se tiene un punto singular nos puede interesar cómo varía ese punto singular al modificarse los parámetros del sistema. Los algoritmos que nos permiten obtener la curva, su forma y campo de existencia al variar el parámetro se llaman algoritmos de *continuación*.

En esta sección veremos someramente los métodos numéricos de continuación que se utilizan para analizar el comportamiento de una solución del sistema dinámico n-dimensional:

$$\mathbf{x}'(t) = f(\mathbf{x}(t), \mu) \tag{2.4.1}$$

Dependiendo del contexto, μ denota uno o más parámetros.

El énfasis de esta sección es en métodos numéricos de continuación, en contraposición a métodos de simulación. La integración numérica de un sistema dinámico proporciona bastantes pistas sobre cómo se comporta su solución. Sin embargo, una vez se ha calculado un determinado tipo de solución,por ejemplo, una solución estacionaria (punto singular) o una solución periódica (ciclo), se hacen necesarios métodos de continuación para determinar cómo varía esta solución según el parámetro μ. Además, se pueden usar las mismas técnicas de continuación cuando las soluciones no son asintóticamente estables. Conocer las soluciones inestables es a menudo crucial para entender la dinámica global del sistema. Veremos sólo técnicas básicas de continuación para soluciones estacionarias de familias del tipo (2.4.1) con un solo parámetro. Existen algoritmos para la detección de bifurcaciones de codimensión 1, o sea, las de tipo nodo-silla y Andronov-Hopf, así como métodos para la localización de puntos de ramificación. También técnicas de salto entre ramas de soluciones[6]. Una vez se ha localizado una bifurcación de codimensión 1, ésta puede seguirse en dos parámetros, $\mu \in \mathbb{R}^2$ en la ecuación (2.4.1).

En muchos casos, la detección de bifurcaciones de codimensión superior requiere el cálculo de ciertas *formas normales* para las ecuaciones, éstas restringidas a *variedades centrales* en los valores críticos de los parámetros. Existen fórmulas explícitas para los coeficientes que intervienen en las bifurcaciones de puntos singulares de codimensión 1 y 2. Por último, hay técnicas sobre cómo comenzar la continuación de bifurcaciones locales y globales de codimensión 1 a partir de algunas singularidades de equilibrios de codimensión 2.

Una introducción excelente al tema de métodos numéricos para la continuación y bifurcación está en el artículo de Keller [Kel77]. Para introducciones de tipo "tutorial", véanse [Bey91], [Doe99], [DKK91a], [DKK91b].

[6] allí donde existen puntos de ramificación

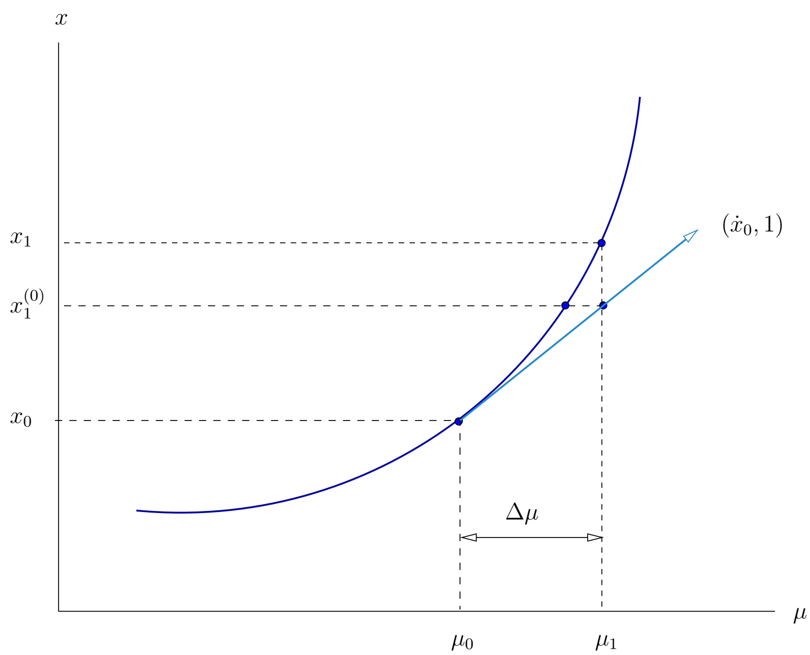


Figura 2.4.1: Interpretación gráfica de la continuación en un parámetro

2.4.1. Continuación

Consideramos el cálculo de familias uniparamétricas de equilibrios de (2.4.1), o sea, soluciones de:

$$f(x, \mu) = 0 \tag{2.4.2}$$

A un continuo de soluciones de esta clase se le llama una *rama de soluciones*. Con $\mu \in \mathbb{R}$ y $X = X(x, \mu)$, la ecuación se puede escribir como:

$$f(X) = 0$$

donde $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$. Una solución $X_0 = (x_0, \mu_0)$ de $f(X) = 0$ se llama *regular* si $f_x(x_0, \mu_0)$ tiene rango máximo, o sea, si $\mathrm{rang}(f_x(x_0, \mu_0)) = n$. Se verifica que cerca de una solución regular no existe sino una única rama de soluciones.

2.4.1.1. Continuación en el parámetro

Tomamos μ como parámetro de continuación. Supongamos que tenemos una solución $\mathbf{x}_0$ de (2.4.2) en μ_0, así como sus derivadas $\dot{\mathbf{x}}_0$ con respecto al parámetro μ, y que queremos calcular la solución $\mathbf{x}_1$ en $\mu_1 \equiv \mu_0 + \Delta\mu$ (véase la figura (2.4.1) para la interpretación gráfica). Para encontrar $\mathbf{x}_1$, resolvemos $f(\mathbf{x}_1, \mu_1) = 0$ para $\mathbf{x}_1$ por el método de Newton:

$$f_x(\mathbf{x}_1^{(k)}, \mu_1)\Delta\mathbf{x}_1^{(k)} = -f(\mathbf{x}_1^{(k)}, \mu_1), \quad \mathbf{x}_1^{(k+1)} = \mathbf{x}_1^{(k)} + \Delta\mathbf{x}_1^{(k)},\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

con $\mathbf{x}_1^{(0)} = \mathbf{x}_0 + \Delta\mu\,\dot{\mathbf{x}}_0$. Si $f_x(\mathbf{x}_1, \mu_1)$ es no singular y $\Delta\mu$ suficientemente pequeño, la teoría del método de Newton garantiza que éste esquema iterativo convergerá. Después de la convergencia, el nuevo vector derivada $\dot{\mathbf{x}}_1$ se puede obtener resolviendo:

$$f_x(\mathbf{x}_1, \mu_1)\dot{\mathbf{x}}_1 = -f_\mu(\mathbf{x}_1, \mu_1).$$

Esta ecuación resulta de diferenciar $f(\mathbf{x}(\mu), \mu) = 0$ con respecto a μ en $\mu = \mu_1$. En la práctica, el cálculo de $\dot{\mathbf{x}}_1$ se realiza con un coste computacional despreciable, ya que se puede volver a usar la descomposición numérica de la matriz de Jacobi final $f_x(\mathbf{x}_1, \mu_1)$ que aparece en el método de Newton.

2.4.1.2. Continuación con pseudo-longitud de arco

Este método, debido a Keller [Kel77], permite la continuación de cualquier solución regular, incluyendo sillas-nodo y considerado geométricamente, es el método de continuación más natural. Supongamos que tenemos una solución $(\mathbf{x}_0, \mu_0)$ de $f(\mathbf{x}, \mu) = 0$, así como del vector de dirección normalizado $(\dot{\mathbf{x}}_0, \dot{\mu}_0)$ de la rama de soluciones en $(\mathbf{x}_0, \mu_0)$. El método consiste en resolver las siguientes ecuaciones para $\mathbf{x}_1$ y μ_1:

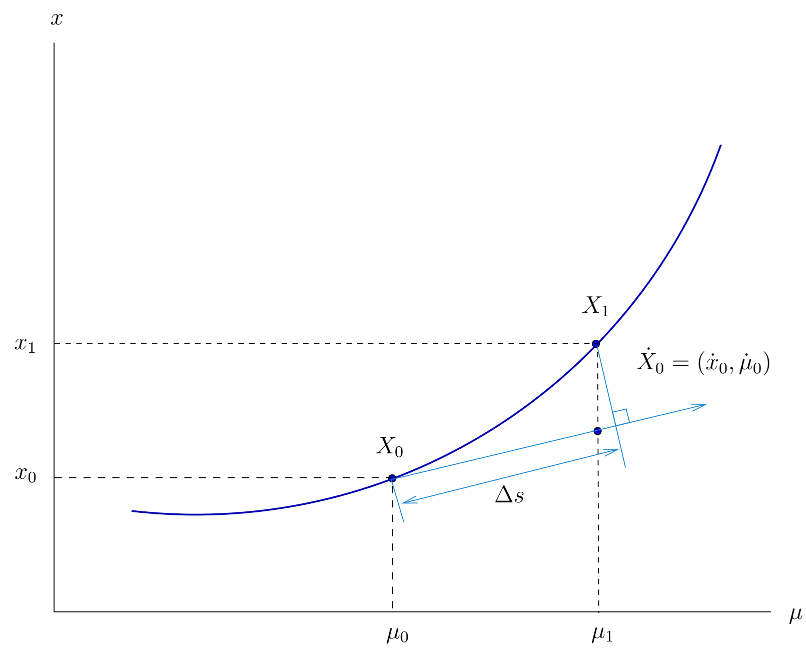


Figura 2.4.2: Interpretación gráfica del método de Keller [Kel77]

$$f(\mathbf{x}_1, \mu_1) = 0, \quad (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)\dot{\mathbf{x}}_0 + (\mu_1 - \mu_0)\dot{\mu}_0 - \Delta s = 0.$$

El método de Newton aplicado para resolver estas ecuaciones produce:

$$\begin{pmatrix} (f_x^1)^{(k)} & (f_\mu^1)^{(k)} \\ \dot{\mathbf{x}}_0 & \dot{\mu}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{x}_1^{(k)} \\ \Delta \mu_1^{(k)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f(\mathbf{x}_1^{(k)}, \mu_1^{(k)}) \\ (\mathbf{x}_1^{(k)} - \mathbf{x}_0)\dot{\mathbf{x}}_0 - (\mu_1^{(k)} - \mu_0)\dot{\mu}_0 - \Delta s \end{pmatrix}. \tag{2.4.3}$$

Establecida la convergencia, el siguiente vector de dirección se puede calcular a partir de:

$$\begin{pmatrix} f_x^1 & f_\mu^1 \\ \dot{\mathbf{x}}_0 & \dot{\mu}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mu}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nótese que en la práctica, la matriz jacobiana de la iteración final de Newton se puede volver a usar para calcular el nuevo vector dirección. Además, la normalización $\dot{\mathbf{x}}_0\dot{\mathbf{x}}_1 + \dot{\mu}_0\dot{\mu}_1 = 1$ asegura que la orientación de la rama se conserva si Δs es suficientemente pequeño. El nuevo vector de dirección ha de ser reescalado para que sea unitario. En la práctica, el paso Δs se actualiza durante el cálculo de la rama de soluciones. En el caso más simple, la elección del nuevo paso Δs se basa en la convergencia de la iteración de Newton (2.4.3).

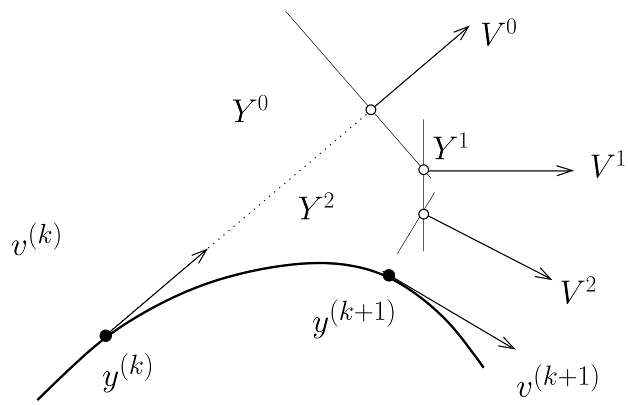


Figura 2.4.3: Gráfica de continuación del CONTENT

Por último, en la figura 2.4.3 aparece el método predictor-corrector usado en el software CONTENT [KL97],[Kuz98a] para la continuación. Dado un punto $y^{(k)}$ de la curva de continuación y el vector tangente normalizado $v^{(k)}$ en este punto, el punto siguiente $y^{(k+1)}$ y su vector asociado $v^{(k+1)}$ se calculan de la siguiente forma:

En la etapa de predicción se hacen

$$Y^0 = y^{(k)} + h_k\, v^{(k)}, \quad V^0 = v^{(k)}$$

donde h_k es el tamaño de paso actual. Luego se realizan una serie de correcciones Y^i, V^i para $i = 0, 1, \ldots, N$, donde N es el número máximo de iteraciones por Newton (fijado de antemano), lo que supone que en cada etapa de la corrección hay que reevaluar la matriz de Jacobi del sistema. Para los detalles se pueden consultar los manuales y la ayuda en línea de CONTENT.

El método de discretización para problemas de contorno en ecuaciones diferenciales ordinarias que más se usa es el de colocación ortogonal con polinomios a trozos, ya que su alta precisión [dBS73] y sus técnicas adaptativas del mallado de discretización [RC78] lo hacen particularmente conveniente para problemas que presentan dificultades en su resolución. Este método se usa en los paquetes de continuación que se han usado en la elaboración de esta memoria AUTO [DK86], [DCF+97], y CONTENT [KL97].

Capítulo 3

UNA CLASE DE MODELOS MATEMÁTICOS DE LA CALIDAD AMBIENTAL

3.1. Introducción

La mayor parte de este capítulo es una reelaboración del trabajo de Fernández-Pacheco [FP01] , donde se establecen varios modelos matemáticos de complejidad creciente sobre la calidad ambiental urbana. En cada nuevo modelo se introducen aspectos no contemplados en los modelos anteriores, de forma que se enriquece la dinámica encontrada hasta el momento.

Se plantean cinco modelos sobre la calidad ambiental, los primeros cuatro de dimensión dos y el último de dimensión tres. En todos los casos se realiza un escalado de forma que se reduzca el número de parámetros que aparecen en el modelo y que sea suficiente estudiar las variables de estado en el intervalo unidad $[0, 1]$.

Para los primeros cuatro modelos se realiza un estudio completo de la dinámica que presentan, mientras que el quinto y último modelo sólo se plantea y se dan algunas gráficas, dejando su estudio para el siguiente capítulo.

3.2. Los diferentes modelos

Estudiaremos la relación entre las ideas de ecosistema, calidad y "mala" calidad como un instrumento para la comprensión del desarrollo de los asentamientos urbanos. La relación se presenta como una familia de modelos matemáticos de complejidad creciente, cuyo estudio constituye la línea conductora de este trabajo.

Desde los años 1920 la llamada escuela de Chicago [Bet98], [Bru97] ha defendido la teoría de que el desarrollo urbano, su crecimiento y su evolución pueden describirse con los instrumentos de la ecología. En este sentido, afirman que las ciudades son casos particulares de ecosistemas. Más recientemente, a mediados de los años 1990 se desarrolló la ecología urbana [Bet98] como ciencia más o menos independiente (véase también [FPZ+98]) para el análisis urbano.

Con vistas a clarificar nuestro propósito, comentaremos brevemente la definición de un ecosistema. Desde un punto de vista funcional existen cuatro características principales [Fer98] de un ecosistema:

1. Tiene una duración espacio-temporal definida.
2. En su interior existen flujos de energía.
3. El flujo de nutrientes se da dentro del sistema y entre el sistema y el exterior.
4. Existe una variedad de procesos que establecen las relaciones entre los diferentes (sub)sistemas.

Estas características están íntimamente relacionadas y lo corroboran ejemplos muy conocidos proporcionados por el estudio de las ecologías insulares o por el diseño de reservas naturales y parques. Bajo hipótesis apropiadas, la mayoría de los ecosistemas naturales se las arreglan más o menos para mantenerse a sí mismos en un cierto equilibrio dinámico.

Por otra parte, sistemas artificiales como la distribución urbana y las actividades en las ciudades y áreas muy urbanizadas son candidatos naturales a denominarse ecosistemas. En efecto, existen fuertes opiniones que afirman que incluso estos artefactos hechos por el hombre son también sistemas naturales [MB99]. Puede establecerse una analogía con los ecosistemas naturales mediante una traducción adecuada de las características citadas antes:

1. Abarcan un área y permanecen durante algún tiempo.

2. La distribución de las rentas desempeña el papel de los flujos de energía.

3. La contrapartida a la circulación de nutrientes viene dada por el intercambio de actividades funcionales heterogéneas.

4. Se pueden establecer conexiones de varios tipos entre éstos y otros sistemas, tanto artificiales como naturales.

Sin embargo, la analogía dista de ser completa salvo si se modula por algunas definiciones nítidas en la teoría de ecosistemas naturales y sus correspondientes para sistemas urbanos. La diferencia esencial entre ecosistemas naturales y sistemas urbanos está en la habilidad del hombre de explotar y gestionar cantidades considerables de energía de una forma consciente, con vistas a superar y modificar la conducta de la Naturaleza. Desde una perspectiva global, esto podría ser una actividad despreciable en los tiempos pasados, pero ya no es el caso. Surgen serias interferencias por el hecho de que sistemas creados por el hombre crecen y evolucionan independientemente de su entorno natural. El descubrimiento de las primeras técnicas de agricultura hace unos 20000 años fué la primera intervención a gran escala del hombre sobre los asuntos de la Naturaleza, y el resultado fué que aparecieron muchos sistemas de poca diversidad en forma de áreas cultivadas o de campos de pasto para rebaños de ganado. Algunas veces la influencia del hombre se invirtió: cultivos y campos de pasto fueron abandonados una vez su diversidad fué demasiado baja, para producir nuevas direcciones de evolución [Mar64]. Un ejemplo bien conocido de un gran ecosistema natural con origen humano son las áreas de sabana en Africa [TK75].

En cualquier caso, áreas de poca diversidad pueden sobrevivir sólo si existen algunos flujos entrantes de energía y nutrientes. La sobreespecialización es sólo factible bajo la hipótesis de que la supervivencia está garantizada, una idea que está en el centro del siguiente argumento: Un número de áreas de baja diversidad pueden sobrevivir si se complementan entre sí y construyen una entidad más compleja en la cual esté asegurada una diversidad superior. Este es el nacimiento de los primeros asentamientos urbanos como espacios para el intercambio de mano de obra, ganado, semillas y habilidades de oficios [SdM99]. Por tanto, originalmente las áreas urbanas fueron resultado de la búsqueda de una mayor heterogeneidad y, en cierto sentido, podrían ser así consideradas como ecosistemas. Por otra parte, la presente evolución de áreas urbanas hacia núcleos aislados y conectados muy homogéneamente (y también separados unos de otros) por una complicada red de comunicaciones muestra muy poca disposición para llegar a ser verdaderos ecosistemas. Más bien, encontramos sistemas casi parásitos cuyo rango de influencia puede ser mucho más lejano que el entorno geográfico usual [Bru97].

Además de las consideraciones expuestas, observamos que la mayoría de los habitantes urbanos suelen pensar en sus viviendas en términos de una cierta calidad para sus vidas.

Esta es una idea compleja que merece alguna atención.

3.3. Sobre la definición de calidad

Intuitivamente, la calidad es una medida de la posibilidad de que un gran número de procesos influyan en la evolución y desarrollo de los constituyentes del sistema. Por lo tanto, un gran número de procesos disponibles significa un sistema más rico. En términos biológicos, esta idea de calidad es representada por una gran diversidad bioquímica, hecho que ha sido señalado antes. La idea tras este concepto de calidad es que con muchas especies bioquímicas se pueden construir redes más complejas, robustas y estables ([RCM98], [Smi96]). Hasta ahora, el análogo de la diversidad bioquímica podría ser la heterogeneidad urbana, pero la analogía no es completa debido a varios aspectos o dimensiones que se pueden apreciar cuando intentamos establecer una noción de calidad para áreas urbanas. Podemos identificar cuatro dimensiones principales [Fer98]:

1. la dimensión legal: viene dada una lista de parámetros ambientales relevantes y sus valores umbral.

2. la dimensión científica: un conjunto de acuerdos obtenido a partir de las opiniones de los especialistas: esta es la más ampliamente aceptada para la definición de calidad de áreas urbanas.

3. la dimensión económica: las regulaciones sobre la disponibilidad de recursos y sus usos. El suelo es el recurso principal, cuya gestión económica es la piedra angular del desarrollo urbano.

4. la dimensión de la realización objetiva: la eficacia y la eficiencia forman la base de una definición operativa de la calidad urbana. Esta es la dimensión más empleada por políticos y planificadores.

En la práctica, los habitantes de áreas urbanas definen la calidad por la dimensión de la satisfacción de objetivos, mientras que las dimensiones legal y económica proporcionan instrumentos de planificación; y la dimensión científica actuaría como una especie de control externo. Así, supondremos que *"la calidad de un sistema urbano viene dada por el conjunto de las características que aseguran la satisfacción de las necesidades de la ciudadanía"*. Aquí incluimos las necesidades básicas de supervivencia tales como alojamiento, agua, alimentos, energía, etc. y también otras condiciones estéticas y espirituales. La definición anterior es cualitativa, y en orden a realizar un proceso razonable de modelización, hay que traducirlo a una tabla cualitativa ([Kau95], [Mer96]) con varias entradas que permitan la comparación entre diferentes sistemas urbanos.

Como regla general, todas las características son reducidas a una unidad común[Fer94], en términos de área o cantidad de suelo. Por ejemplo, la legislación española establece los siguientes estándares de calidad:

1. número de casas/viviendas por hectárea: entre 32 y 100.
2. equipamiento urbano tal como aparece en la tabla 3.1.
3. áreas de aparcamiento: 1 automóvil/100 m2 de vivienda.

Estos valores, aunque permiten grandes variaciones en densidad de población, pueden ser considerados razonables. Podemos reducir la tabla a un solo índice sumando todos los items y suponiendo una composición porcentual análoga a la descrita por la tabla. La suma ideal, 60 m^2/unidad de vivienda, será considerada como el óptimo deseable. Las unidades de vivienda pueden ser traducidas en población considerando que una unidad de vivienda iguala a k personas, donde k se encuentra entre 3 y 6. Un valor aceptable para la mayoría de los casos es $k = 4$.

Item	m^2/unidad de vivienda
Áreas de jardin	15
Patios de recreo	6
Áreas educacionales	14
Canchas deportivas	8
Áreas comerciales	4
Equipamiento social	6
Otras	7

Tabla 3.1: Regulaciones españolas sobre la definición de calidad urbana, expresada en metros cuadrados por unidad de vivienda

3.4. Modelos sobre la evolución de la calidad

Una vez ha sido expresada cuantitativamente la calidad, podemos comenzar el proceso de modelización. En lo que sigue, desarrollaremos una sucesión de modelos de complejidad creciente sobre la interacción entre población y calidad.

3.4.1. El modelo más simple

Nuestro primer modelo refleja una aproximación puramente legislativa: la evolución en el tiempo de la calidad (medida en m^2 de servicios por unidad de vivienda) es independiente del crecimiento de la población. En áreas suburbanas modernas, planificadas como nuevos asentamientos urbanos, esto es un ejemplo frecuente. Así escribiremos dos ecuaciones de variables separadas describiendo las evoluciones en el tiempo de la calidad y la población. De aquí en adelante $x(t)$ representará la calidad e $y(t)$ la población. Nuestro modelo será entonces:

$$\begin{aligned} x' &= f(x) \\ y' &= g(y) \end{aligned}$$

Para comenzar, elegiremos formas logísticas para la evolución de ambas variables. Podemos justificar esta elección principalmente porque ambas variables tienden a la saturación:

$$\begin{aligned} x' &= r_1\, x\, (1 - \frac{x}{K}) \\ y' &= r_2\, y\, (1 - \frac{y}{C}) \end{aligned}$$

K es el óptimo ideal de $60\, m^2$ por unidad de vivienda para áreas de servicio, y C es la población máxima para la que el asentamiento fué planeado. Si escalamos x por K, y por C, y el tiempo por $1/r_1$, el sistema se puede escribir en forma adimensional, donde ambas variables de estado x e y tienen su rango entre 0 y 1:

$$\begin{aligned} x' &= x\, (1 - x) \\ y' &= \alpha\, y\, (1 - y) \end{aligned}$$

dependiendo del único parámetro adimensional $\alpha = r_2/r_1$. Si $\alpha = 1$, tanto la calidad como la población crecen a la par hacia sus valores límites. Si $\alpha < 1$ la tasa de crecimiento de la población es menor que la tasa de crecimiento del área de equipamiento, lo que significa una planificación razonable. Por otra parte, $\alpha > 1$ significará una mala política de planificación que podría dar lugar a problemas sociales si no es corregida apropiadamente. Véanse las figuras 3.4.1 y 3.4.2.

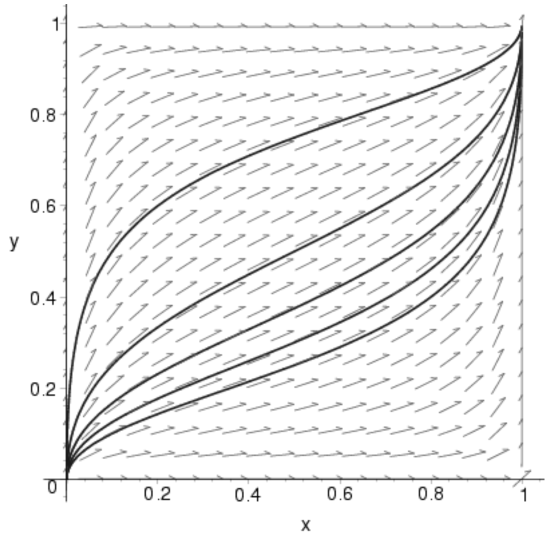


Figura 3.4.1: Plano de fases del primer modelo($\alpha = 0{,}5$): ambas variables, población y calidad, tienden al límite 1 independientemente de las condiciones iniciales y del parámetro α.

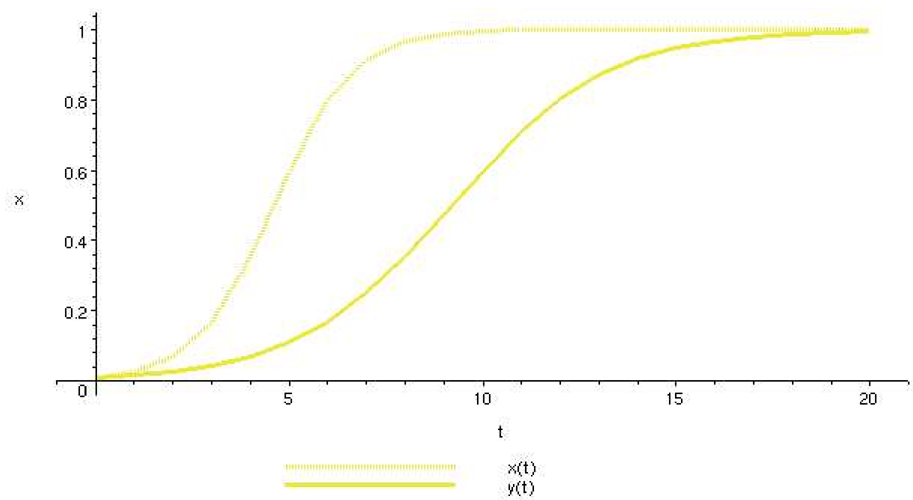


Figura 3.4.2: Series temporales para el primer modelo($\alpha = 0{,}5$)

La solución analítica del sistema anterior es la siguiente:

$$x\,(t) = \frac{1}{1 + C_1\,e^{-t}}, \quad y\,(t) = \frac{1}{1 + C_2\,e^{-\alpha\,t}}$$

de la cual se puede inferir trivialmente el comportamiento asintótico citado.

3.4.2. Una hipótesis más realista

Vamos ahora a modificar el modelo anterior básico considerando que la tasa de crecimiento de la calidad no puede ser independiente de la población. Por lo tanto, modificamos el término constante r_1 cambiándolo por $r_1(y) = \dfrac{r_1}{1 + M\,y}$, elección que se puede justificar como sigue: A medida que la población crece, una cierta cantidad de recursos necesarios para el crecimiento de la calidad irán (inevitablemente) a servir a otras áreas previamente existentes, y este resultado bajará el valor de r_1. M puede ser interpretado como un parámetro educacional, una medida de cuán respetuosos son los habitantes con su entorno. Valores grandes indicarán poco o ningún respeto, mientras que valores pequeños significarán una ciudadanía bien educada. El modelo resultante es:

$$
\begin{aligned}
x' &= r_1 \frac{1}{1 + My}\, x\,(1 - \frac{x}{K}) \\
y' &= r_2\, y\,(1 - \frac{y}{C})
\end{aligned}
$$

Como regla, el crecimiento de nuevos asentamientos de población sigue una curva logística abrupta, así que mantendremos la expresión logística para y. La misma elección de unidades usada en el primer modelo produce una forma no dimensional dependiente de dos parámetros adimensionales $\alpha = r_2/r_1$ y $\beta = M\,C$:

$$
\begin{aligned}
x' &= x\, \frac{1}{1 + \beta y}\,(1 - x) \\
y' &= \alpha\, y\,(1 - y)
\end{aligned}
$$

El análisis del plano de fases de este sistema diferencial proporciona algunas conclusiones interesantes:

1. En ausencia de población $y = 0$, la calidad tiende a su valor máximo 1 (adimensional). En efecto, los planificadores pueden estar convencidos de que ¡la mejor forma de lograr la máxima calidad es prohibir a la gente asentarse en las nuevas urbanizaciones!

2. En ausencia de calidad ($x = 0$), la población tenderá al valor límite 1. Esto coincide con la observación empírica de que el asentamiento de la población es, a largo plazo, independiente de las consideraciones de calidad. Ello se puede observar en núcleos de chabolas o infraviviendas de muchas áreas, previos a la urbanización planificada.

3. El sistema tiene cuatro puntos de equilibrio: $(0,0), (1,0), (0,1)$, y $(1,1)$, y las trayectorias con condiciones iniciales en el primer cuadrante no pueden abandonarlo. El origen es un nodo inestable, $(1,0)$ y $(0,1)$ son puntos de silla (ya que se suponen $\alpha, \beta > 0$) cuyas variedades estables son respectivamente, el eje$-x$ y el eje$-y$. Las variedades inestables son las rectas $x = 1$ e $y = 1$. Finalmente, el punto $(1,1)$ es un nodo estable cuya cuenca de atracción es el primer cuadrante completo. En efecto, podríamos restringirnos al producto cartesiano $[0,1] \times [0,1]$ en el espacio de fases y observar que cualquier condición inicial en el interior $(0,1) \times (0,1)$ evoluciona hacia el nodo estable $(1,1)$ determinando en todos los casos una trayectoria heteroclínica que une el origen y el nodo estable.

Así, vemos que para cualquier condición inicial no nula en ambas coordenadas, a la larga se pueden aproximar lo que se quiera tanto la capacidad de crecimiento para la población como la estándar para la calidad. Cuánto se tarda en alcanzar valores razonables próximos al nodo estable y, por lo tanto, cuán realista es el modelo, dependerá de los valores particulares de los parámetros α, β, y de las condiciones iniciales. En cualquier caso, el diagrama de fases es muy parecido al del modelo más simple. Véanse las figuras 3.4.3 y 3.4.4.

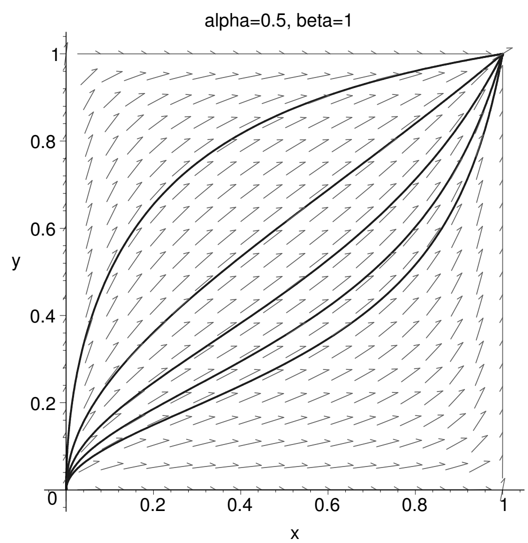


Figura 3.4.3: Plano de fases del segundo modelo($\alpha = 0{,}5$, $\beta = 1$): obsérvese la misma conducta cualitativa que la de la figura 3.4.1.

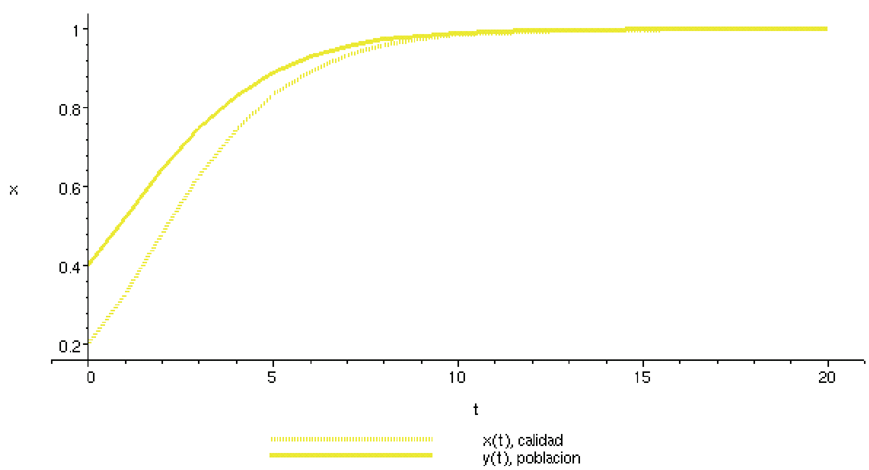


Figura 3.4.4: Series temporales para el segundo modelo($\alpha = 0{,}5$, $\beta = 1$)

Analíticamente, las soluciones de este sistema vienen dadas por:

$$y(t) = \frac{1}{1 + C_2\, e^{-\alpha\, t}}, \quad x(t) = \frac{\mathbf{e}^{\displaystyle\int \frac{1}{1+\beta\, y(t)} dt}}{\mathbf{e}^{\displaystyle\int \frac{1}{1+\beta\, y(t)} dt} + C_1} \tag{3.4.1}$$

de donde se pueden extraer las conclusiones ya expuestas.

3.4.3. La población destruye la calidad. Algunas bifurcaciones existentes

La interacción entre población y calidad puede tomar una forma mucho más directa. Este hecho es representado por un "término destructivo"$-d\, x\, y$ en forma de acción de masas añadido a la ecuación de la calidad:

$$\begin{aligned} x' &= r_1\, \frac{1}{1+My}\, x\, (1 - \frac{x}{K}) - d\, x\, y \\ y' &= r_2\, y\, (1 - \frac{y}{C}) \end{aligned}$$

El mismo escalado usado en el modelo anterior produce la forma no dimensional con tres parámetros adimensionales $\alpha = r_2/r_1$, $\beta = M\, C$, $\gamma = \dfrac{d\, C}{r_1}$:

$$\begin{aligned} x' &= x\, \frac{1}{1+\beta y}\, (1 - x) - \gamma\, x\, y \\ y' &= \alpha\, y\, (1 - y) \end{aligned}$$

El análisis lineal del plano de fases exhibe una conducta similar, pero más rica, que la del caso anterior, debido al término $\gamma\, x\, y$:

1. En ausencia de población $y = 0$, la calidad tiende nuevamente a su valor máximo 1 (adimensional). En efecto, los planificadores ¡están ya convencidos de que la mejor

forma de lograr la máxima calidad es prohibir a la gente asentarse en las nuevas urbanizaciones!

2. En ausencia de calidad ($x = 0$), la población tenderá nuevamente al valor límite 1.

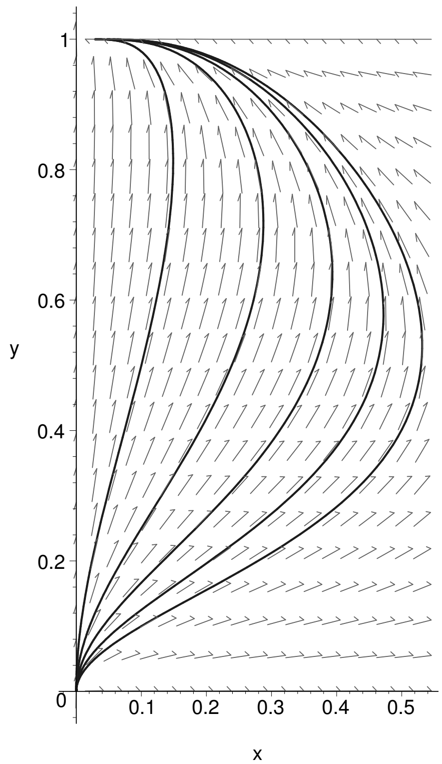


Figura 3.4.5: Plano de fases del tercer modelo($\alpha = 0{,}5$, $\beta = 1$, $\gamma = 0{,}4$)

3. El sistema tiene cuatro puntos de equilibrio: $P_1(0,0), P_2(1,0), P_3(0,1)$, y $P_4(1-\gamma\,(1+\beta),1)$. Como en el caso anterior, las trayectorias con condiciones iniciales en el primer cuadrante no pueden salir de él. El origen es un nodo inestable($\alpha > 0$), $(1,0)$ y $(0,1)$ son puntos de silla cuyas variedades estables son respectivamente, el eje$-x$ y el eje$-y$. La variedad inestable de $(0,1)$ es la recta $x = 1$, pero la variedad inestable en $(1,0)$ es una curva tangente a la variedad inestable lineal $y = 0$ en $(1,0)$. El cuarto punto $P = (1-\gamma\,(1+\beta),1)$ requiere un análisis especial. Para P interior al primer cuadrante,

debe satisfacerse la condición $\gamma(1+\beta) < 1$, o de forma equivalente, $\gamma < \dfrac{1}{1+\beta}$. Podríamos restringirnos al producto cartesiano $[0,1] \times [0,1]$ en el espacio de fases y observar de nuevo que cualquier condición inicial en el interior de este cuadrado evoluciona hacia el nodo estable. La principal diferencia con el modelo anterior es que las trayectorias son heteroclínicas sólo si la condición inicial está en la variedad inestable de $(1,0)$ o bien a su izquierda. Véanse las figuras 3.4.5 y 3.4.6.

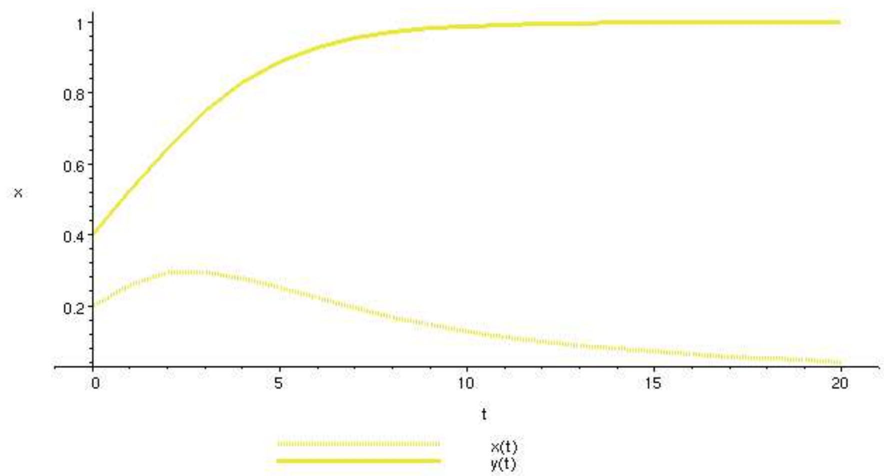


Figura 3.4.6: Series temporales para el tercer modelo($\alpha = 0{,}5$)

4. El siguiente análisis de bifurcación es interesante: Cuando $\gamma(1+\beta) \to 1$, P coalesce con $(0,1)$ y todas las trayectorias, cualesquiera que sean sus puntos iniciales, tenderán hacia $(0,1)$. Esto significa que si permitimos crecer a γ (lo que significa una política de protección ambiental descuidada) la calidad desaparecerá mientras la población se acerca a su capacidad de carga en un entorno cada vez más degradado. Por otra parte, disminuir el valor de γ (una política ambiental más protectora) trasladará P a lo largo de la recta $y = 1$ hacia $(1,1)$. En el caso de que γ no pueda ser adecuadamente modificada, entonces aún podemos hacer $\beta \to 0$ para impedir que P se

aproxime a $(0,1)$: esto significa que se ha de llevar a cabo algún tipo de política de educación ambiental: Es interesante hacer notar que este modelo indica que endurecer la protección ambiental es mucho más efectivo que la educación ambiental.

La matriz de Jacobi del sistema resulta ser:

$$\begin{bmatrix} -y\gamma + \frac{1-2x}{1+y\beta} & -x\gamma - \frac{(-1+x)x\beta}{(1+y\beta)^2} \\ 0 & \alpha(1-y) - \alpha y \end{bmatrix}$$

con autovalores simples:

$$-\frac{(\beta y+1)\beta\gamma + 2x - 1}{\beta y + 1}, \quad \alpha(1-2y)$$

que en los puntos $P_i, 1 \leqslant i \leqslant 4$ resultan ser, respectivamente:

$$\{\alpha, 1\}, \quad \{\alpha, -1\}, \quad \{-\frac{(\beta+1)\gamma - 1}{\beta+1}, -\alpha\}, \quad \{\frac{(\beta+1)\gamma - 1}{\beta+1}, -\alpha\}$$

Dado que:

$$\alpha > 0 \tag{3.4.2}$$

se deduce entonces de inmediato que $P_1(0,0)$ es un nodo inestable, y que $P_2(1,0)$ es un punto de silla.

Por otra parte, como $P_4(1-\gamma(\beta+1), 1)$ ha de estar en el primer cuadrante, se había impuesto la condición:

$$\gamma(\beta+1) < 1 \tag{3.4.3}$$

y por tanto $P_3(0,1)$ tiene autovalores de signo contrario, con lo que también es un punto de silla. Por la misma razón, al tener ahora ambos autovalores negativos, queda P_4 como el único punto estable del sistema.

Continuando con el estudio, como polinomio característico se obtiene:

$$\lambda^2 + (y\gamma + \frac{2x-1}{\beta y+1} + 2\alpha y - \alpha)\lambda + (2\alpha y^2\gamma - \alpha y\gamma + \frac{4\alpha xy - 2\alpha y - 2\alpha x + \alpha}{\beta y+1})$$

que evaluado en los cuatro puntos críticos obtenidos, tienen como término independiente (coincide con el valor del jacobiano) los valores:

$$\alpha, \quad -\alpha, \quad \alpha\gamma - \frac{\alpha}{\beta+1}, \quad -\frac{\alpha(\beta+1)\gamma - \alpha}{\beta+1}$$

y de nuevo, al verificarse tanto 3.4.2 como 3.4.3, tendremos que no se anula ninguno de ellos, con lo que el sistema no presenta bifurcaciones de tipo silla-nodo, transcríticas o de tipo tridente en ninguno de los puntos de equilibrio.

Un estudio análogo para intentar determinar las posibles bifurcaciones de Hopf al variar alguno de los parámetros (resolviendo para α, por ejemplo) prueba que es imposible si se dan ambas relaciones 3.4.2 y 3.4.3, dando lugar a condiciones contradictorias del tipo $\alpha < 0$, entre otras.

Por tanto, el sistema no presenta bifurcaciones de codimensión uno en el espacio de parámetros, partiendo de cualquiera de los puntos de equilibrio del sistema. Y por tanto, tampoco pueden darse bifurcaciones de codimensión superior.

La dinámica completa del sistema es la descrita en los párrafos anteriores.

3.4.4. La calidad y su precio. Análisis de bifurcaciones

Hasta ahora, los modelos han sido formulados suponiendo que la población siempre alcanza su capacidad de crecimiento con independencia de la evolución de la calidad. Desde un punto de vista teórico esto puede parecer no realista, aunque existen ejemplos reales de áreas urbanas que confirman este hecho. Incluso peor, a menudo la capacidad límite de crecimiento es superada con creces. Supondremos que para mantener la calidad en un nivel razonable, se han de pagar algunos impuestos. Si éstos son elevados, esto puede ser considerado como un disuasivo para disminuir la población. Nuestro siguiente modelo incorpora esto con un término de interacción$-g\,x\,y$ añadido a la ecuación de la población.

$$\begin{aligned} x' &= r_1 \frac{1}{1+My} x\,(1-\frac{x}{K}) - d\,x\,y \\ y' &= r_2\, y\,(1-\frac{y}{C}) - g\,x\,y \end{aligned}$$

El mismo escalado usado antes en el modelo anterior produce la forma no dimensional dependiente de tres parámetros adimensionales, $\alpha = r_2/r_1$, $\beta = M\,C$, $\gamma = \dfrac{d\,C}{r_1}$ y $\delta = \dfrac{g\,K}{r_1}$:

$$\begin{aligned} x' &= x\,\frac{1}{1+\beta y}\,(1-x) - \gamma\,x\,y \\ y' &= \alpha\,y\,(1-y) - \delta\,x\,y \end{aligned}$$

Un análisis lineal del plano de fases prueba que:

1. Como en los modelos anteriores, en ausencia de población $y = 0$, la calidad, nuevamente, tiende a su valor máximo 1 (adimensional), y también en ausencia de calidad ($x = 0$), la población tenderá nuevamente a la capacidad de crecimiento 1.

2. El sistema tiene como puntos de equilibrio: los habituales $P_1(0,0), P_2(1,0), P_3(0,1)$ y posiblemente otros dos no triviales $P_4(x_1, y_1)$ y $P_5(x_2, y_2)$ que son las soluciones del sistema:

$$\begin{aligned} \frac{(1-x)}{1+\beta y} - \gamma\,y &= 0 \\ \alpha\,(1-y) - \delta\,x &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema, tenemos que reordenando y asociando convenientemente, las dos soluciones se pueden expresar como:

$$x_{1,2} = \left(\pm\alpha\sqrt{A} + (2\alpha\beta + \alpha)\delta\gamma - \alpha^2\right)/(B\delta) \tag{3.4.4}$$

$$y_{1,2} = \left(\mp\sqrt{A} - \delta\gamma + \alpha\right)/B \tag{3.4.5}$$

siendo $A = (\delta\gamma - \alpha)^2 + 4\beta\delta\gamma(\delta - \alpha)$, $B = 2\beta\delta\gamma$.

Si es $\alpha = \delta$, se obtiene como punto P_5:

$$x_2 = \frac{\gamma(\beta + 1) - 1}{\beta\gamma} = 1 - \frac{1-\gamma}{\beta\gamma}, \quad y_2 = \frac{1-\gamma}{\beta\gamma}$$

que define un punto válido sólo si $0 < \gamma < 1 < \gamma(1 + \beta)$.

Además, en este caso se da la circunstancia de que el punto P_4 coincide con el $P_2(1, 0)$.

Si además es $\gamma = 1$ se tiene $P_4 = P_5 = (1, 0)$.

Si $\gamma = \dfrac{1}{1+\beta}$, uno de los puntos no triviales, el P_4, se convierte en el $(0, 1)$.

3. La matriz de Jacobi de este sistema resulta ser:

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} -\frac{\beta y^2\gamma + y\gamma + 2\,x - 1}{1 + y\,\beta} & -\frac{x(\beta^2 y^2\gamma + 2\beta\mathbf{y}\gamma + \gamma - \beta x + \beta)}{(1 + y\,\beta)^2} \\ -\delta y & -(2\alpha y + \delta x - \alpha) \end{bmatrix} \tag{3.4.6}$$

con polinomio característico:

$$\lambda^2 - tr(J)\,\lambda + \Delta = 0 \tag{3.4.7}$$

siendo $tr(J)$ la traza de la matriz de Jacobi:

$$tr(J) = y\gamma + \frac{2x - 1}{\beta y + 1} + 2\alpha y + \delta x - \alpha \tag{3.4.8}$$

y Δ su determinante:

$$\Delta = 2\alpha y^2\gamma - \alpha y\gamma + \frac{\beta\delta xy(x-1)}{(\beta y+1)^2} + \frac{4\alpha xy - 2\alpha y + 2\delta x^2 - \delta x - 2\alpha x + \alpha}{\beta y + 1} \tag{3.4.9}$$

4. En el caso del punto $P_1(0,0)$, sus autovalores son $\{\alpha, 1\}$ y al ser $\alpha > 0$, se trata de un nodo inestable.

5. Para el $P_2(1,0)$, éste tiene los autovalores $\{\alpha - \delta, -1\}$, por lo que será un punto de silla en el caso $\alpha > \delta$, siendo un punto estable si $\alpha < \delta$. Si $\alpha = \delta$, deberemos construir la variedad central que nos permita la determinación de la estabilidad.

   Llevamos primeramente el punto al origen realizando el cambio de variables:

$$u = x - 1, \qquad v = y$$

   con lo que el sistema queda:

$$\begin{aligned} u' &= -\frac{(u+1)(\beta v^2\gamma + v\gamma + u)}{1+\beta v} \\ v' &= -\alpha\, v\,(v+u) \end{aligned}$$

   Tomando la aproximación lineal $u = 0$ para la variedad central, tenemos que el flujo resultante sería:

$$\frac{dv}{dt} = -\alpha v^2$$

   por lo que el punto es estable para $\delta = \alpha$, supuesto que $\alpha > 0$ y que las condiciones iniciales están en el primer cuadrante.

6. El análisis del punto $P_3(0,1)$ es parecido: sus autovalores son $\{-\alpha, \frac{1-(\beta+1)\gamma}{\beta+1}\}$. Por tanto, se trata de un punto estable si $(\beta+1)\gamma > 1$ y de un punto silla si $(\beta+1)\gamma < 1$. Entonces, la curva $\gamma = \dfrac{1}{\beta+1}$ es de bifurcaciones transcríticas en el plano de parámetros $\beta - \gamma$. Esto quedará patente más adelante cuando se obtengan las curvas de bifurcación correspondientes (véanse las gráficas 3.4.8 y 3.4.10).

   Si es $(\beta+1)\gamma = 1$ necesitamos de nuevo obtener una estimación del flujo en la variedad central para determinar su estabilidad.

   Llevando el punto al origen mediante el cambio de variables:

$$u = x, \qquad v = y - 1$$

   el sistema queda, después de algunas operaciones:

$$\begin{aligned} u' &= -\frac{u(\beta v^2 + 2\beta v + v + \beta u + u)}{(1+\beta)(\beta v + \beta + 1)} \\ v' &= -(v+1)(\alpha\, v + \delta u) \end{aligned}$$

   Tomando la aproximación lineal $v = 0$ para la variedad central, tenemos que el flujo resultante sería:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{u^2}{\beta+1}$$

   por lo que el punto es estable para $\gamma = 1/(\beta+1)$, supuesto que $\beta > -1$ y que las condiciones iniciales están en el primer cuadrante.

   Si $\gamma = 1/(\beta+1)$ el punto no trivial P_4 coincide con el $(0,1)$.

7. Dependiendo de los diferentes valores que pueden adoptar los parámetros es preciso decir que en la práctica sólo uno de los puntos P_4 o P_5 es un punto crítico, cayendo

el otro fuera del rango significativo de valores de las variables de estado, o bien coincidiendo con uno de los puntos críticos triviales.

Análisis de bifurcaciones

Partiendo de la expresión de la matriz de Jacobi $J(x, y)$ obtenida en 3.4.6 y de los valores de la traza y el determinante dados respectivamente por 3.4.8 y 3.4.9, queremos inicialmente obtener condiciones para la existencia de bifurcaciones de codimensión uno del tipo silla-nodo, transcríticas o de tipo tridente, para lo cual la matriz de Jacobi ha de admitir un autovalor nulo. Aplicando entonces la condición necesaria $\Delta = 0$, con los puntos críticos obtenidos resultan las siguientes condiciones:

Para $P_1(0, 0)$ la matriz de Jacobi sería:

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

la condición sería $\alpha = 0$, con lo cual este punto no presenta bifurcaciones de codimensión uno.

Para $P_2(1, 0)$ tenemos:

$$J(1,0) = \begin{bmatrix} -1 & -\gamma \\ 0 & \alpha - \delta \end{bmatrix}$$

y la condición nos resulta $\delta - \alpha = 0$ con lo que en el plano de parámetros $\alpha - \delta$, la recta $\delta = \alpha$ es de bifurcaciones transcríticas para este punto; ya visto con anterioridad porque al cruzar la recta cambia la estabilidad del punto.

Análogamente, para $P_2(0, 1)$ obtenemos:

$$J(0,1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta+1} - \gamma & 0 \\ -\delta & -\alpha \end{bmatrix}$$

y resulta:

$$\alpha\,\gamma - \frac{\alpha}{\beta+1} = 0$$

de donde es $\alpha = 0$ ó $\gamma = \frac{1}{\beta+1}$ y por tanto la curva $\gamma = \frac{1}{\beta+1}$ es de bifurcaciones transcríticas en el plano de parámetros $\beta - \gamma$.

Para las bifurcaciones de Hopf, con el polinomio característico dado por 3.4.7, la condición de existencia es $tr(J) = 0$, y $\Delta > 0$.

Pues bien, ninguno de los puntos presenta bifurcaciones de Hopf, ya que las condiciones de existencia originan contradicciones en relaciones o bien en rangos de valores de los parámetros. Por ejemplo, para $P_3(0,1)$ se tiene la expresión matricial de $J(0,1)$ que aparece anteriormente y las condiciones son:

$$-\alpha - \gamma + \frac{1}{\beta+1} = 0 \quad \text{y} \quad -\alpha\left(\frac{1}{\beta+1} - \gamma\right) > 0$$

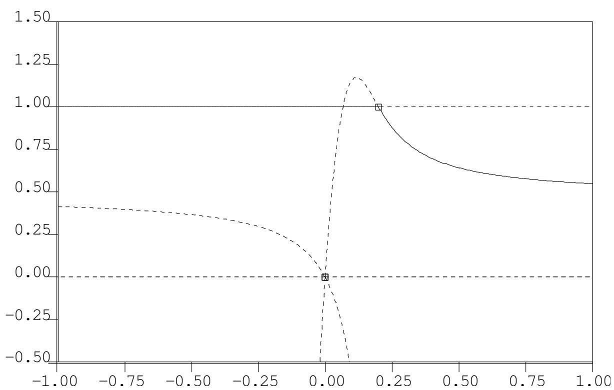
y como $\alpha > 0$ por la segunda condición, ha de ser $\frac{1}{\beta+1} - \gamma < 0 \Longrightarrow -\alpha - \gamma + \frac{1}{\beta+1} < 0$, en contradicción con la primera de las condiciones.

Esto completa el estudio analítico del sistema. Un estudio numérico intensivo sólo corrobora los resultados obtenidos en el analítico, como se ve en el párrafo siguiente.

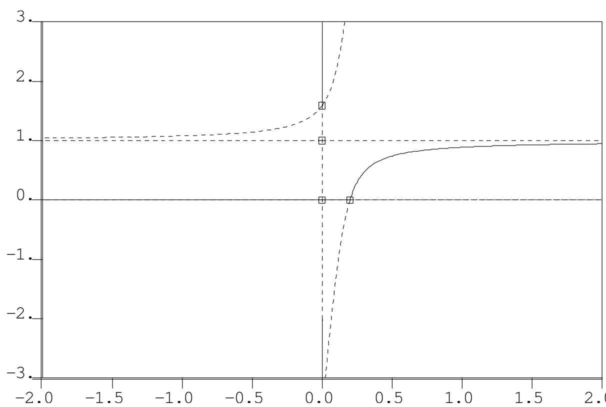
Las figuras 3.4.7, 3.4.8, 3.4.10 y 3.4.9 se han obtenido variando cada uno de los cuatro parámetros del sistema a efectos de obtener las curvas de puntos singulares no triviales. En dichas figuras se puede observar claramente cómo aparecen las bifurcaciones transcríticas que sufre el punto $(1,0)$ para el caso de las curvas 3.4.7 y 3.4.9 que involucran a loa parámetros α y δ y la que sufre el punto $(0,1)$ en el caso de las figuras 3.4.8 y 3.4.10, que se refieren a los parámetros β y γ. En cada caso, el punto trivial $(1,0)$ ó $(0,1)$ intercambia su estabilidad con uno de los puntos no triviales obtenidos.

Aparecen otras bifurcaciones transcríticas en alguna de las figuras, pero son de puntos singulares fuera del cuadrado unidad.

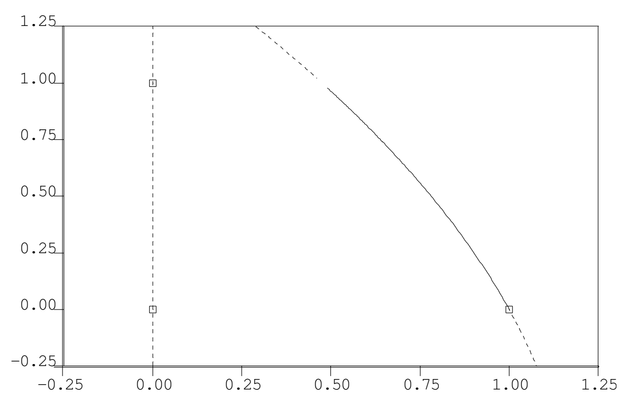
Si bien los algoritmos numéricos de continuación utilizados detectan algún tipo de bifurcación de codimensión uno, esto ocurre solamente para valores de las variables de estado que no tienen significación alguna, ya que son valores muy grandes o incluso negativos. La totalidad de la dinámica detectada numéricamente ya aparece en el estudio analítico.



(a) Comportamiento de la componente x y estabilidad del punto.

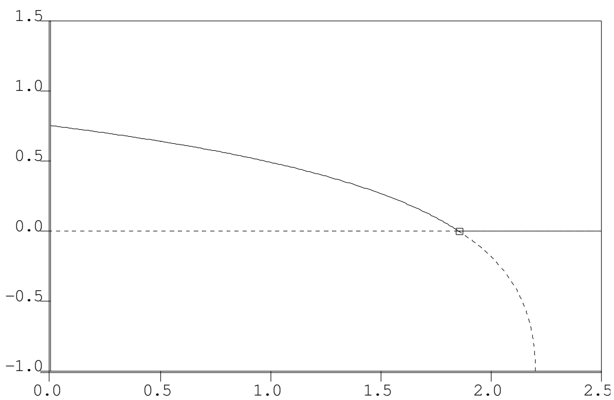


(b) Comportamiento de la componente y y estabilidad del punto.

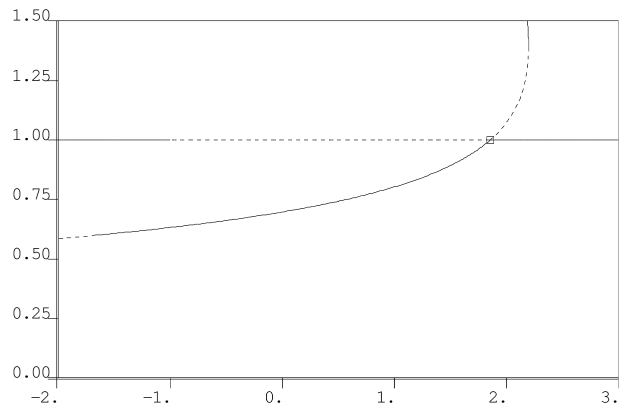


(c) Diagrama en el plano $x - y$.

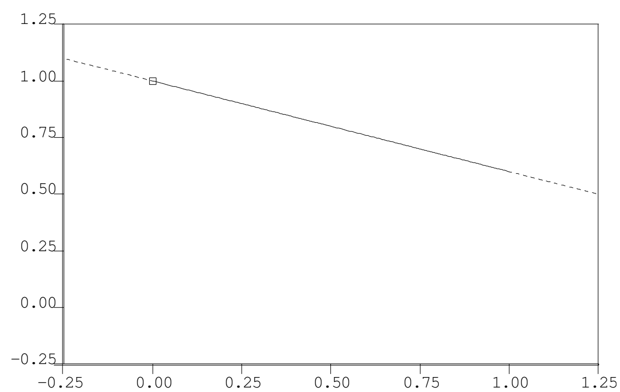
Figura 3.4.7: Diagramas de puntos singulares al variar el parámetro α (otros parámetros con valores $\beta = 0{,}5$, $\gamma = 0{,}35$, $\delta = 0{,}2$). Las lineas de trazo discontinuo denotan puntos inestables, siendo estables en las continuas.



(a) Comportamiento de la componente x y estabilidad del punto.

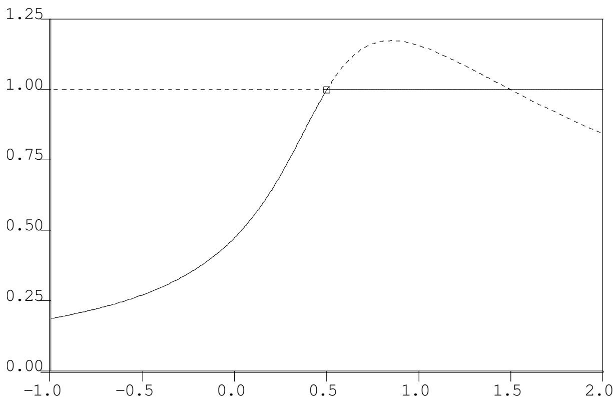


(b) Comportamiento de la componente y y estabilidad del punto.

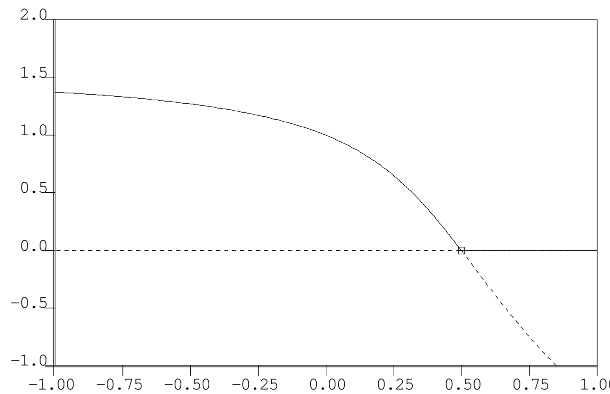


(c) Diagrama en el plano $x - y$.

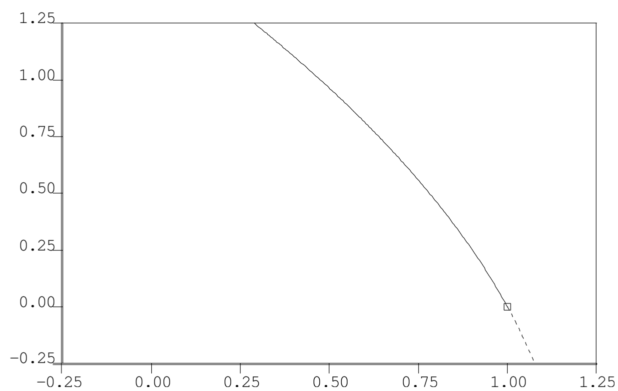
Figura 3.4.8: Diagramas de puntos singulares al variar el parámetro β (otros parámetros con valores $\alpha = 0{,}5$, $\gamma = 0{,}35$, $\delta = 0{,}2$).



(a) Comportamiento de la componente x y estabilidad del punto.

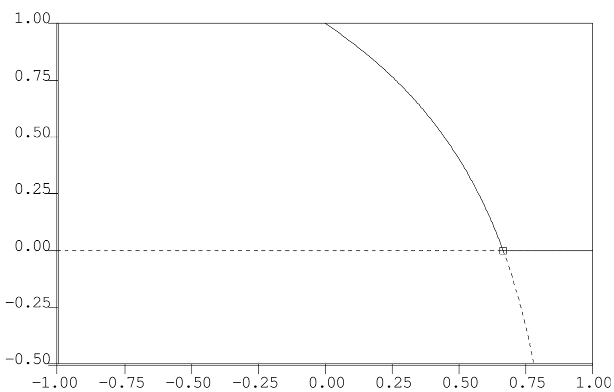


(b) Comportamiento de la componente y y estabilidad del punto.

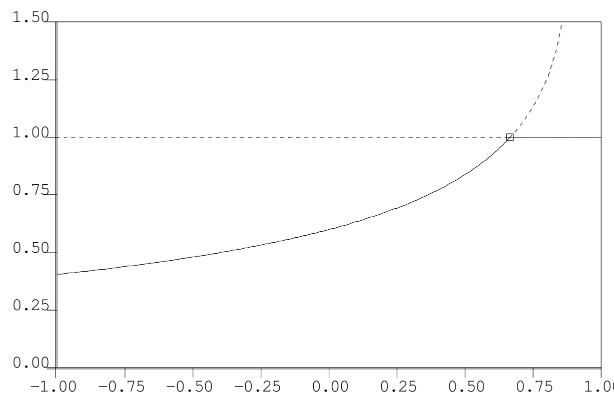


(c) Diagrama en el plano $x - y$.

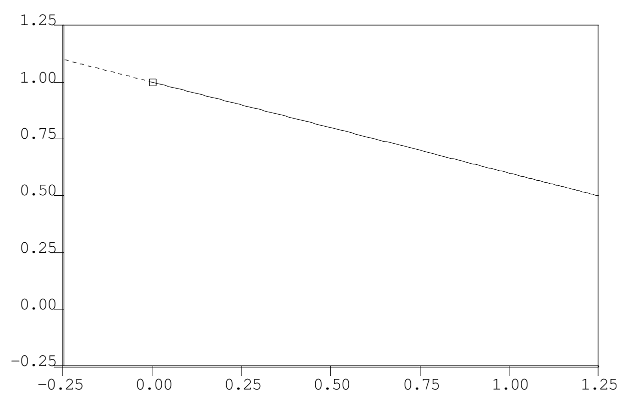
Figura 3.4.9: Diagramas de puntos singulares al variar el parámetro δ (otros parámetros con valores $\alpha = 0{,}5$, $\beta = 0{,}5$, $\gamma = 0{,}35$).



(a) Comportamiento de la componente x y estabilidad del punto.

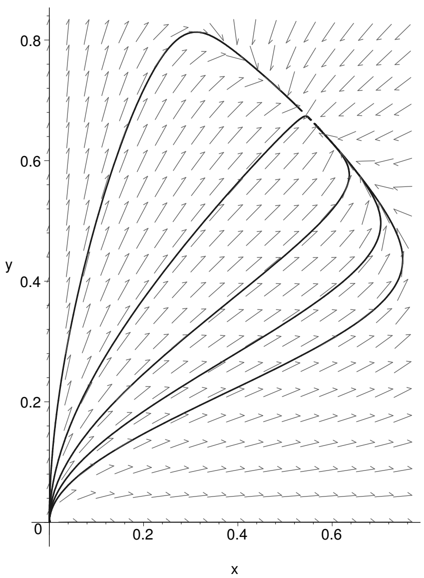


(b) Comportamiento de la componente y y estabilidad del punto.

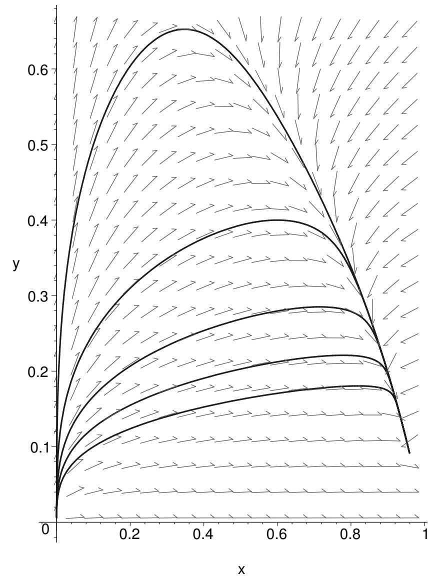


(c) Diagrama en el plano $x - y$.

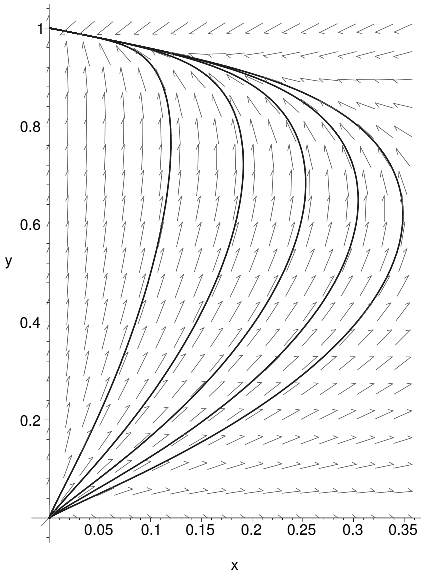
Figura 3.4.10: Diagramas de puntos singulares al variar el parámetro γ (otros parámetros con valores $\alpha = 0{,}5$, $\beta = 0{,}5$, $\delta = 0{,}2$).



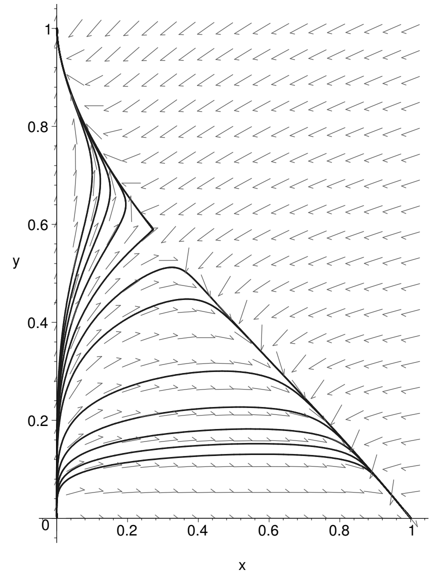
(a) $\alpha = 0{,}5, \beta = 1, \gamma = 0{,}4, \delta = 0{,}5$



(b) $\alpha = 0{,}3, \beta = 1, \gamma = 0{,}4, \delta = 0{,}8$

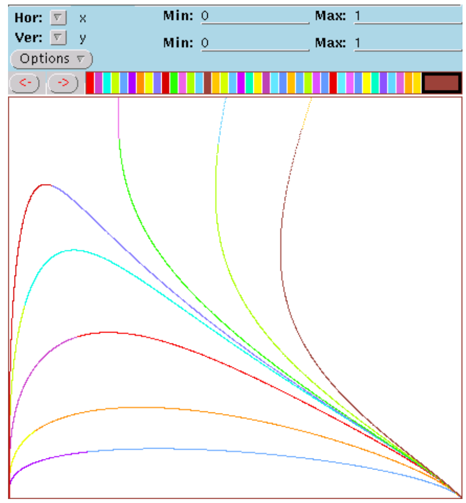


(c) $\alpha = 0{,}9, \beta = 1, \gamma = 0{,}65, \delta = 0{,}3$



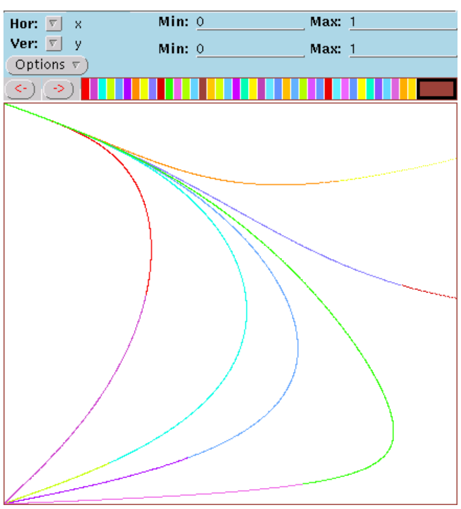
(d) $\alpha = 0{,}2, \beta = 0{,}4, \gamma = 1, \delta = 0{,}3$

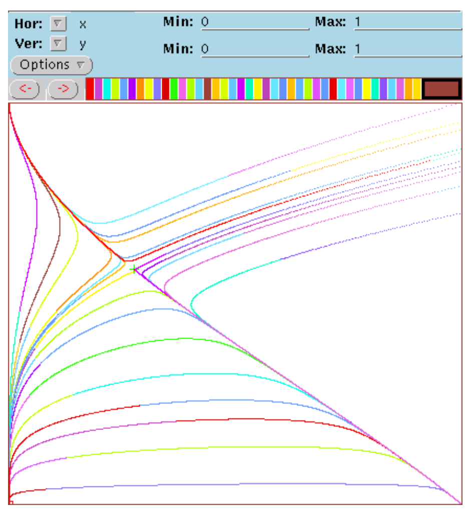
Figura 3.4.11: Diferentes planos de fases del cuarto modelo



(a) $\alpha = 0{,}5$, $\beta = 1$, $\gamma = 0{,}4$, $\delta = 0{,}5$

(b) $\alpha = 0{,}3$, $\beta = 1$, $\gamma = 0{,}4$, $\delta = 0{,}8$





(c) $\alpha = 0{,}9$, $\beta = 1$, $\gamma = 0{,}65$, $\delta = 0{,}3$

(d) $\alpha = 0{,}2$, $\beta = 0{,}4$, $\gamma = 1$, $\delta = 0{,}3$

Figura 3.4.12: Diferentes planos de fases del cuarto modelo (DSTOOL)

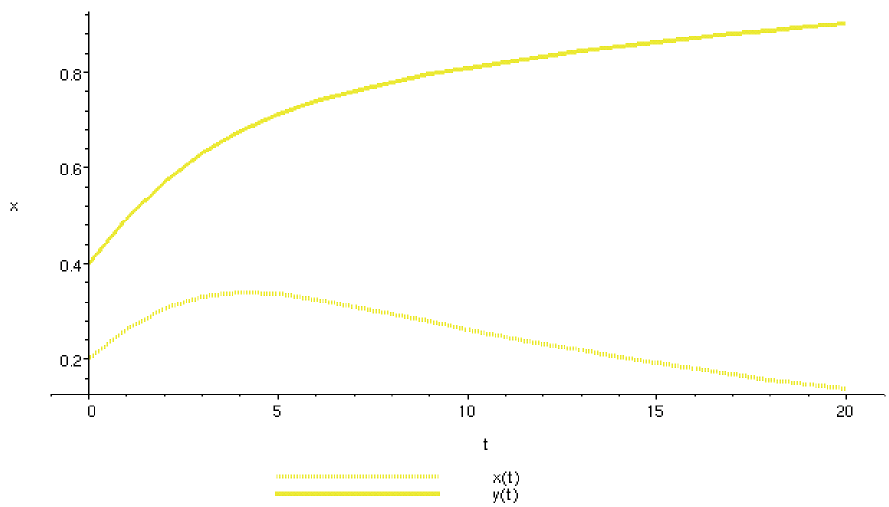


Figura 3.4.13: Series temporales para el cuarto modelo($\alpha = 0{,}5$, $\beta = 1$, $\gamma = 0{,}4$, $\delta = 0{,}3$)

3.4.5. ¿Es calidad siempre sinónimo de buena calidad?

Desde el punto de vista psicológico existe un esquema de valoración positiva tras la palabra "calidad". Aunque se tenga la tentación de hacerla equivalente a "buena calidad", se ha de considerar también el concepto de "mala calidad". Esta nueva idea está relacionada íntimamente con la obsolescencia, inadecuación, o también con viviendas y equipamiento construidos sin cuidado. La mala calidad no es lo opuesto de calidad: por ejemplo, un patio de recreo puede tener algunos columpios mal instalados (por ahorrar tiempo o dinero) así que el patio, aunque existe y se extiende a lo largo de algunos metros, es inútil.

Podemos introducir la mala calidad en nuestros modelos añadiendo la evolución de una nueva variable $z(t)$ a las ecuaciones de la calidad y de la población. Aquí está el nuevo modelo:

$$\begin{aligned} x' &= r_1 \frac{1}{1+My}\, x\,(1-\frac{x}{K}) - d\,x\,y \\ y' &= r_2\, y\,(1-\frac{y}{C}) - g\,y\,(x-z) \\ z' &= d^*\,x\,y - h\,y\,\frac{z}{p+z} \end{aligned}$$

donde hemos introducido la ecuación de la mala calidad y también una pequeña modificación en el último término de la ecuación de la población. La tasa de crecimiento lineal r_1 de la calidad es modulada por la expresión $\dfrac{1}{1+My}$ y tiene un significado *educacional*. K es la calidad estándar fijada por ley, y el término de interacción d^*xy se interpreta como un término *destructivo* debido al uso del equipamiento por la población. También r_2 es la tasa de crecimiento lineal de la población, C su capacidad de carga, mientras que la expresión $-gy(x-z)$ representa el *coste de mantenimiento* de la calidad. El término $d^*\,x\,y$ significa que alguna parte de la calidad destruída se vuelve mala calidad (por lo tanto

$d^* < d$) mientras que el término $-h\, y \dfrac{z}{p+z}$ denota que alguna parte de la población puede aún considerar que la mala calidad es utilizable si está gestionada adecuadamente. La p es una constante de semi-saturación. Hemos cambiado $g\, x\, y$ por $g\, y\, (x - z)$ en la ecuación de la población para señalar que alguna población puede ser atraída por el hecho de que la mala calidad suele implicar menores impuestos ambientales y una vida más barata.
Si escalamos x y z por K, y por C, y el tiempo por $\dfrac{1}{r_1}$, el sistema se puede escribir en forma adimensional como:

$$
\begin{aligned}
x' &= x \frac{1}{1+\beta y} (1 - x) - \gamma\, x\, y \\
y' &= \alpha\, y\, (1 - y) - \delta\, y\, (x - z) \\
z' &= \xi\, x\, y\, - \eta\, y \frac{z}{\phi + z}
\end{aligned}
$$

con los siete parámetros adimensionales $\alpha = r_2/r_1$, $\beta = M\, C$, $\gamma = \dfrac{d\, C}{r_1}$, $\xi = \dfrac{d^*\, C}{r_1}$, $\delta = \dfrac{g\, K}{r_1}$, $\eta = \dfrac{h\, C}{r_1\, K}$, y $\phi = \dfrac{p}{K}$. Es inmediato ver que en el espacio xyz el punto $(0, 0, 1)$ es un punto de equilibrio: un barrio de chabolas continuará como tal. También, todo punto de las rectas $\{x = 0, y = 0\}$ y $\{x = 1, y = 0\}$ es singular. La interpretación es sencilla. Un argumento más complicado prueba que existe un punto singular (x^*, y^*, z^*) en el cubo unidad y que es estable, como se verá en el próximo capítulo. Por lo tanto, la calidad absoluta es deseable, aunque sea un ideal inalcanzable: siempre se va a producir alguna mala calidad, y la calidad no significa siempre buena calidad, véase 3.4.5. El valor relativo de las variables x y z es, por tanto, un índice de calidad más fino que cualquiera de ellos por sí mismos. El siguiente capítulo está dedicado íntegramente al estudio de este modelo.

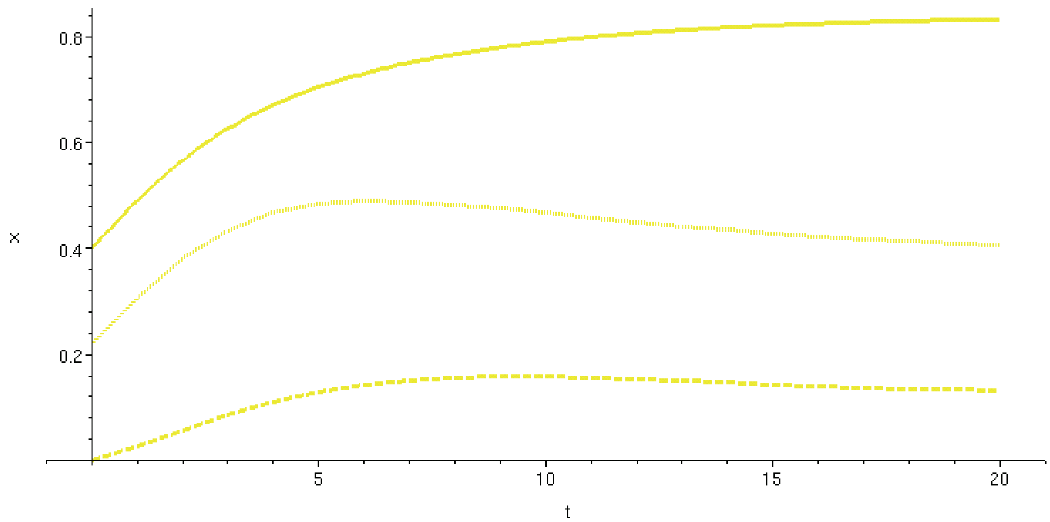
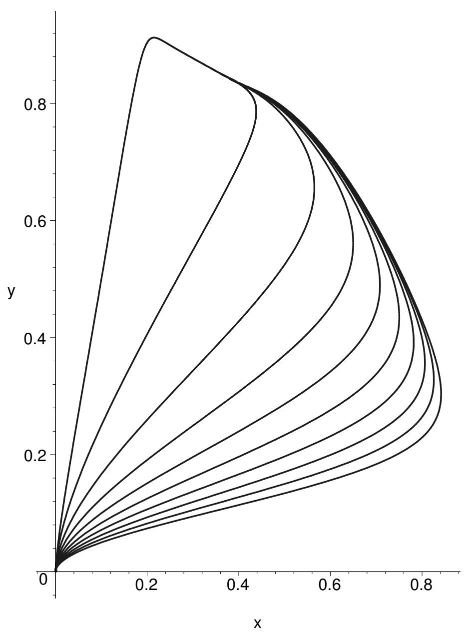
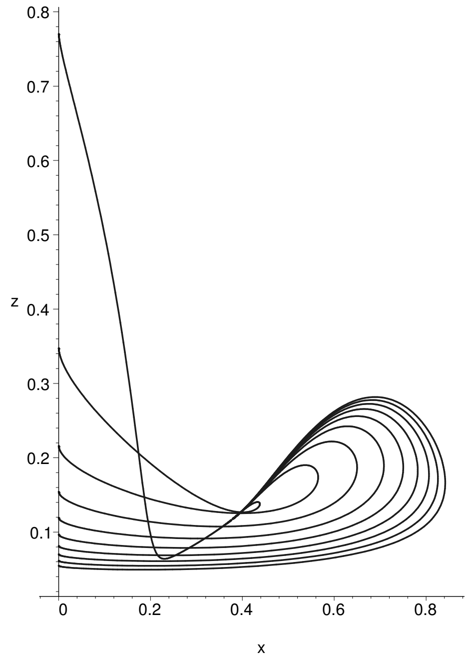


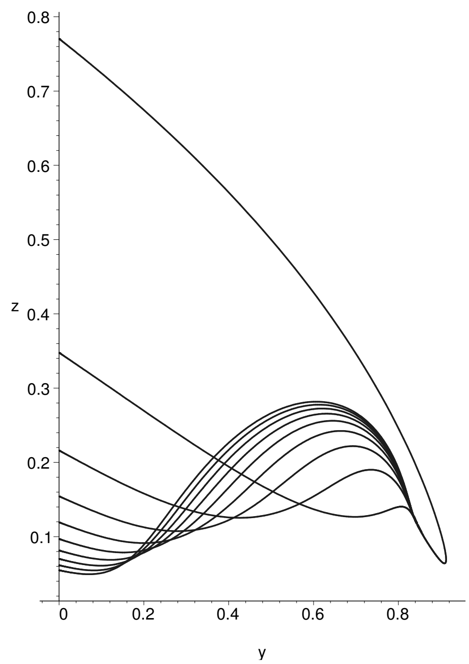
Figura 3.4.15: Series temporales para el quinto modelo ($\alpha = 0{,}5$, $\beta = 1$, $\gamma = 0{,}4$, $\delta = 0{,}3$, $\xi = 0{,}3$, $\eta = 0{,}5$, $\phi = 0{,}4$), partiendo de $(0{,}22, 0{,}4, 0{,}0)$.



(a) Proyección en el plano xy

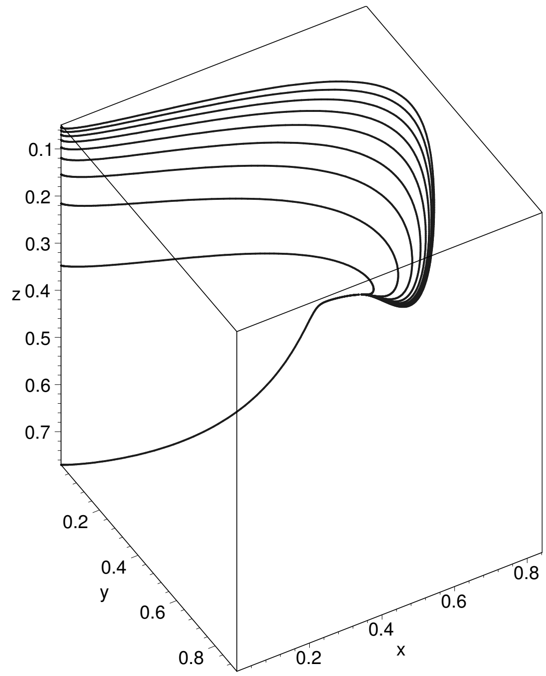


(b) Proyección en el plano xz

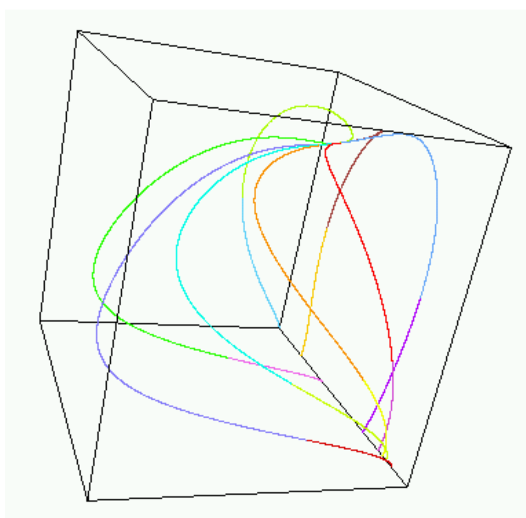


(c) Proyección en el plano yz

Figura 3.4.14: Curvas 3D descritas por el sistema ($\alpha = 0{,}5$, $\beta = 1$, $\gamma = 0{,}4$, $\delta = 0{,}3$, $\xi = 0{,}3$, $\eta = 0{,}5$, $\phi = 0{,}4$)

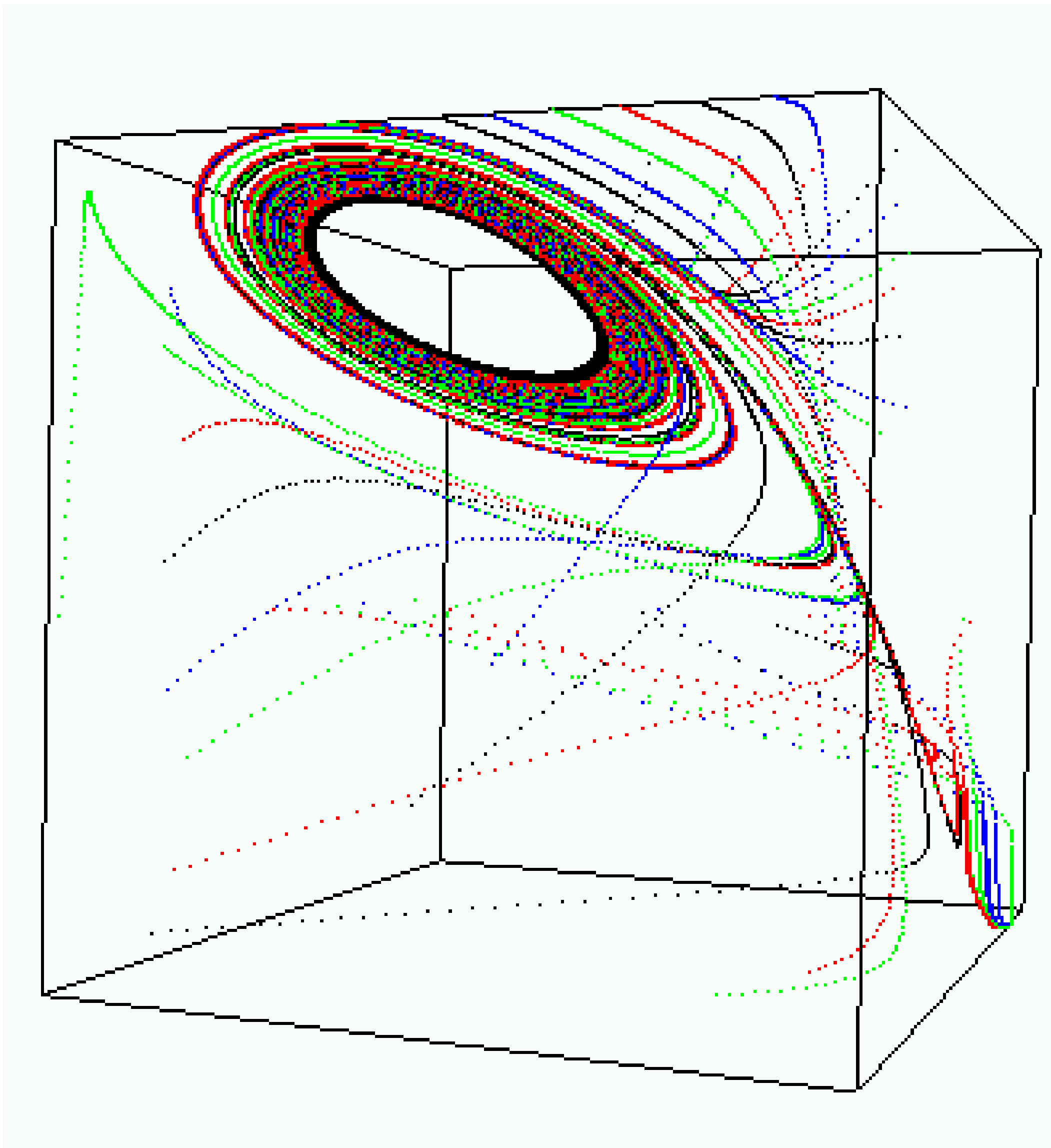


(a) Obtenida con Maple



(b) Obtenida con Dstool[BGMW]

Figura 3.4.16: Curvas integrales 3D descritas por el sistema ($\alpha = 0{,}5$, $\beta = 1$, $\gamma = 0{,}4$, $\delta = 0{,}3$, $\xi = 0{,}3$, $\eta = 0{,}5$, $\phi = 0{,}4$)



(a) Quinto modelo con $\delta = 0{,}28$

Figura 3.4.17: Curvas 3D descritas por el sistema obtenidas con Dstool ($\alpha = 0{,}5$, $\beta = 1$, $\gamma = 0{,}4$, $\xi = 0{,}3$, $\eta = 0{,}5$, $\phi = 0{,}4$)

Capítulo 4

ESTUDIO DEL QUINTO MODELO

4.1. Introducción

Ahora investigaremos el comportamiento dinámico del quinto modelo formulado en el capítulo anterior. Procederemos inicialmente de forma analítica, sin sustituir los parámetros por sus valores por defecto en las ecuaciones del sistema. Los puntos de equilibrio del sistema serán calculados en la sección 4.2, algunos de ellos se pueden dar explícitamente y de otros, sin embargo, se puede probar su existencia, pero serán necesarios métodos numéricos para su obtención.

Cuando sea posible, en la sección 4.3 se hará un análisis de bifurcaciones de codimensión uno en los puntos singulares obtenidos en la sección 4.2, obteniendo expresiones analíticas para la existencia de bifurcaciones de tipo silla-nodo y de Hopf.

En la sección 4.4 comienza el estudio numérico partiendo de los valores por defecto dados de los parámetros que intervienen en el sistema, partiendo de uno de los puntos singulares no triviales obtenidos en la sección 4.2. Aumentando lo suficiente el valor del parámetro δ, se determina la existencia de una bifurcación de Hopf al variar dicho parámetro y encontrarnos con comportamiento periódico en las series temporales de las variables de estado cuando se traspasa el valor en el que se produce la bifurcación.

A continuación, en la sección 4.5 se estudia la localización de puntos singulares al variar el parámetro δ, quedando patente en primer lugar la existencia de una bifurcación de tipo silla-nodo a partir de la cual surgen dos puntos singulares no triviales, obteniéndose para un valor posterior del parámetro una bifurcación de Hopf supercrítica que engendra una familia de ciclos límite estables hasta un cierto valor del parámetro en el cual se produce una coalescencia con uno de los puntos silla triviales, generándose un ciclo homoclínico.

En la siguiente sección 4.6 se construyen el resto de diagramas uniparamétricos, obteniéndose el comportamiento del sistema al variar los otros parámetros, así como las posibles bifurcaciones de codimensión uno que se producen.

En la sección 4.7 se estudia cómo varían los diagramas uniparamétricos obtenidos en la sección 4.5 cuando se considera la variación simultánea de otros parámetros del sistema, obteniéndose también las bifurcaciones de codimensión dos. En el plano de parámetros $\delta - \phi$ aparece en particular una bifurcación de Bogdanov-Takens alrededor de la cual se organiza la dinámica del sistema.

Por último, en la sección 4.9 se construye el diagrama de bifurcaciones completo a la luz de los resultados teóricos sobre despliegue de bifurcaciones del tipo Bogdanov-Takens y del estudio numérico simultáneo que permite la construcción de determinadas curvas de bifurcaciones de codimensión uno y de tipo homoclínico. Se obtiene así el comportamiento local y global en el plano de parámetros elegido.

Las ecuaciones del modelo, tal como se formularon en el capítulo 3 son:

	Definición	Valor	Rango
α	ratio de crecimiento relativo de la población	0.1	0–1
β	parámetro educacional	0.5	0–2
γ	ratio de destrucción de la calidad	1.0	0–1.5
δ	efecto de los impuestos	0.16667	0–2
η	usable por cierta parte de la población	1.0	0–2
ϕ	constante de semi-saturación media	0.1	0–0.5
ξ	fracción de calidad destruída que se vuelve inusable o de mala calidad	1.0	0–1

Tabla 4.1: Parámetros adimensionales, valores por defecto y rango de variación.

$$x' = \frac{x}{1+\beta y}(1-x) - \gamma xy \tag{4.1.1}$$

$$y' = \alpha y(1-y) - \delta y(x-z) \tag{4.1.2}$$

$$z' = \xi xy - \eta \frac{yz}{\phi + z} \tag{4.1.3}$$

en las que aparecen siete parámetros adimensionales con el siguiente significado: α es la tasa de crecimiento relativo de la población, β es el parámetro educacional, γ es la tasa de destrucción de la calidad, δ mide el efecto de los impuestos, η indica que una parte de la mala calidad se puede considerar usable por cierta parte de la población, ϕ es una constante de semi-saturación, y ξ es obviamente la fracción de calidad destruída que se vuelve inusable o de mala calidad.

4.2. Puntos singulares y estabilidad

Análisis de estabilidad

Calculemos los puntos de equilibrio del sistema y su estabilidad. En primer lugar realizamos el estudio analítico, y para los puntos singulares que no admiten una forma cerrada calculamos numéricamente el comportamiento bifurcacional utilizando valores concretos para los parámetros.

Un punto de equilibrio o punto singular es una solución (x, y, z) del sistema $dx/dt = dy/dt = dz/dt = 0$. Puntos singulares triviales resultan ser: los puntos del eje -z, o sea, los puntos $(0, 0, z)$ que se corresponden con la situación trivial de ser nulas tanto la población como la calidad, anulándose las tres ecuaciones simultáneamente.

Otro punto de equilibrio trivial se corresponde con cualquiera de la recta $(1, 0, z)$, que representa la situación de ausencia de población, siendo la calidad el máximo permitido y pudiendo variar la mala calidad de forma arbitraria.

Y por último, el tercer punto trivial es el $(0, 1, 0)$, que representa la situación en el que la población alcanza su capacidad de carga, en ausencia de calidad y mala calidad.

Dependiendo de los valores de los parámetros, pueden existir también hasta cuatro puntos de equilibrio de la forma (x_1^*, y_1^*, z_1^*), (x_2^*, y_2^*, z_2^*), (x_3^*, y_3^*, z_3^*) y (x_4^*, y_4^*, z_4^*), donde y_1^* , y_2^* , y_3^* e y_4^* son las soluciones de la ecuación de cuarto grado que resulta de considerar el sistema no lineal:

$$\begin{aligned} x + \gamma y + \gamma\beta y^2 &= 1 \\ \delta x + \alpha y - \delta z &= \alpha \\ \xi\phi x + \xi x z - \eta z &= 0 \end{aligned}$$

que da origen al polinomio:

$$a_4 y^4 + a_3 y^3 + a_2 y^2 + a_1 y + a_0 = 0 \tag{4.2.1}$$

donde:

$$\begin{aligned}
a_4 &= \xi\,\gamma^2 \beta^2 \delta \\
a_3 &= \beta\,\gamma\,\xi\,\left(-\alpha + 2\,\gamma\,\delta\right) \\
a_2 &= \gamma\,\left(-\alpha\,\xi + \alpha\,\beta\,\xi - 2\,\beta\,\xi\,\delta + \gamma\,\xi\,\delta + \beta\,\delta\,\eta - \beta\,\xi\,\delta\,\phi\right) \\
a_1 &= \alpha\,\xi + \alpha\,\gamma\,\xi - 2\,\gamma\,\xi\,\delta - \alpha\,\eta + \gamma\,\delta\,\eta - \gamma\,\xi\,\delta\,\phi \\
a_0 &= \alpha\,\xi - \xi\,\delta - \alpha\,\eta + \delta\,\eta - \xi\,\delta\,\phi
\end{aligned}$$

siendo los valores de x y z los siguientes:

$$x = 1 - \gamma y - \gamma \beta y^2, \quad z = -\frac{\alpha - \delta + (\delta\gamma - \alpha)y + \delta\gamma\beta y^2}{\delta} \;\; (\delta \neq 0) \tag{4.2.2}$$

El hecho de que el polinomio 4.2.1 que nos da los valores de la variable de estado que representa a la población sea de grado cuatro nos asegura la existencia de una expresión analítica para sus raíces, aunque dicha expresión carezca de valor al presentar una complejidad tal que hace impracticable la obtención de conclusiones a partir de ellas.

En la práctica existen como máximo sólo dos puntos de equilibrio al considerar valores de los parámetros en un rango razonable, cuando se consideran conjuntamente las relaciones 4.2.1 y 4.2.2 que nos proporcionan los valores de las variables de estado del punto singular.

Este hecho se constata también al realizar el estudio numérico, en el que al aplicar los algoritmos de continuación de puntos de equilibrio o bifurcaciones de diferente codimensión, aparecen como máximo dos puntos singulares no triviales.

Analicemos entonces la estabilidad de los puntos singulares obtenidos. La estabilidad de un punto de equilibrio viene determinada por los autovalores de la matriz de Jacobi, que en este caso viene dada por:

$$\begin{bmatrix} \frac{1-2\,x}{1+y\,\beta} - y\,\gamma & \frac{(-1+x)\,x\,\beta}{(1+y\,\beta)^2} - x\,\gamma & 0 \\ -y\,\delta & \alpha - 2\,y\,\alpha + (z-x)\,\delta & y\,\delta \\ y\,\xi & x\,\xi - \frac{z\,\eta}{z+\phi} & -\frac{y\,\eta\,\phi}{(z+\phi)^2} \end{bmatrix}$$

evaluada en los puntos de equilibrio resultantes.

Dado que existe un punto de equilibrio de la forma $(x, y, z) = (0, 0, z^*)$ para cualesquiera valores de los parámetros, siendo z^* cualquier valor real, la matriz de Jacobi en este punto es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha + \delta\,z^* & 0 \\ 0 & -\frac{\eta\,z^*}{\phi+z^*} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.2.3}$$

con polinomio característico:

$$\lambda^3 - (\delta\,z^* \,+ \alpha\, + 1)\lambda^2 + (\delta\,z^* \,+ \alpha)\,\lambda = 0 \tag{4.2.4}$$

Se puede ver que sus autovalores son $\{0, 1, \alpha + \delta z^*\}$, y como consideramos sólo valores no negativos para las variables de estado es $z^* \in [0, 1]$ y además los parámetros que intervienen en el modelo se suponen positivos con lo que $\alpha, \delta > 0$ y entonces el tercer autovalor toma valores en el intervalo $[\alpha, \alpha + \delta]$ y por tanto tendremos que el valor de $\alpha + \delta z^*$ es estrictamente positivo, con lo cual el punto singular es un nodo inestable (o fuente) para cualquier valor de z^*. Por tanto, este punto es siempre inestable. Los autovectores asociados son, respectivamente:

$$\{(0,0,1),\ (1,0,0),\ (0,1,-\frac{\eta z^*}{\delta(z^*)^2+(\delta\phi+\alpha)z^*+\alpha\phi})\} \tag{4.2.5}$$

Realizando el cambio:

$$u = x, \quad v = y, \quad w = z - z^*$$

para llevar al origen el punto crítico, el sistema 4.1.1-4.1.3 queda transformado en el siguiente:

$$u' = -\frac{u\,(\beta\,v^2\,\gamma + v\,\gamma + u - 1)}{\beta\,v + 1} \tag{4.2.6}$$

$$v' = v\,(\delta\,z^* + \delta\,w - \alpha\,v - \delta\,u + \alpha) \tag{4.2.7}$$

$$w' = \frac{v\,(u\,\xi\,z^* - \eta\,z^* + u\,w\,\xi + \phi\,u\,\xi - \eta\,w)}{z^* + w + \phi} \tag{4.2.8}$$

cuya matriz de Jacobi evaluada en el punto $(u, v, w) = (0, 0, 0)$, nos da la matriz 4.2.3 con autovectores 4.2.5. Realizamos entonces el cambio de coordenadas:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\frac{\eta\,z^*}{\delta\,(z^*)^2+(\delta\,\phi+\alpha)\,z^*+\alpha\,\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{4.2.9}$$

o también:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\eta\,z^*}{\delta\,(z^*)^2+(\delta\,\phi+\alpha)\,z^*+\alpha\,\phi} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \tag{4.2.10}$$

con lo que el sistema 4.2.6 -4.2.8 queda con su parte lineal en forma canónica de Jordan, verificando las condiciones de punto límite, con lo que la recta de puntos $(0, 0, z^*)$ es una recta de puntos silla-nodo.

Otro punto de equilibrio trivial es $(1, 0, z^*)$, también para cualesquiera valores de los parámetros. La matriz de Jacobi es en éste caso:

$$\begin{bmatrix} -1 & -\gamma & 0 \\ 0 & \alpha - \delta\,(1 - z^*) & 0 \\ 0 & \xi - \frac{\eta\, z^*}{\phi + z^*} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.2.11}$$

con polinomio característico:

$$\lambda^3 - (\delta\, z^* \ - \delta \ + \alpha \ - 1)\lambda^2 - (\delta\, z^* \ - \delta \ + \alpha)\,\lambda = 0 \tag{4.2.12}$$

que tiene por autovalores $\{-1, \alpha - \delta + \delta z^*, 0\}$, siendo entonces su estabilidad indeterminada. Como antes, $z^* \in [0, 1]$ y entonces el segundo autovalor puede tomar valores entre $\alpha - \delta$ y α, con lo que si $\alpha < \delta$ tendría dos autovalores negativos, y si $\alpha > \delta$ sería un punto de silla. Por tanto, la recta $\alpha = \delta$ es de bifurcaciones transcríticas en el plano de parámetros $\alpha - \delta$. Tendremos que construir la variedad central correspondiente para determinar el tipo de estabilidad que presenta el punto.

Los autovectores asociados a los autovalores dados son, respectivamente:

$$\{(1, 0, 0),\ (1, -\frac{\delta z^* - \delta + \alpha + 1}{\gamma}, -\frac{(\delta z^* - \delta + \alpha + 1)(\xi z^* - \eta z^* + \phi\xi)}{(z^* + \phi)(\delta z^* - \delta + \alpha)\gamma}),\ (0, 0, 1)\} \tag{4.2.13}$$

y construimos la matriz:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{\delta z^* - \delta + \alpha + 1}{\gamma} \\ 1 & 0 & -\frac{(\delta z^* - \delta + \alpha + 1)(\xi z^* - \eta z^* + \phi \xi)}{(z^* + \phi)(\delta z^* - \delta + \alpha)\gamma} \end{bmatrix} \tag{4.2.14}$$

con

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\xi z^* - \eta z^* + \phi \xi}{(z^* + \phi)(\delta z^* - \delta + \alpha)} & 1 \\ 1 & \frac{\gamma}{\delta z^* - \delta + \alpha + 1} & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma}{\delta z^* - \delta + \alpha + 1} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.2.15}$$

Realizando el cambio:

$$u = x - 1, \quad v = y, \quad w = z - z^*$$

para llevar al origen el punto crítico, el sistema 4.1.1-4.1.3 queda transformado en el siguiente:

$$u' = -\frac{(u+1)(\beta\, v^2\, \gamma + v\, \gamma + u)}{\beta\, v + 1} \tag{4.2.16}$$

$$v' = v\, (\delta\, z^* + \delta\, w - \alpha\, v - \delta\, u - \delta + \alpha) \tag{4.2.17}$$

$$w' = \frac{v\, (u\, \xi\, z^* + \xi z^* - \eta\, z^* + u\, w\, \xi + w\xi + \phi\, u\, \xi + \phi\xi - \eta\, w)}{z^* + w + \phi} \tag{4.2.18}$$

cuya matriz de Jacobi evaluada en el punto $(u, v, w) = (0, 0, 0)$, nos da la matriz 4.2.3 con autovectores 4.2.5. Realizando el cambio de coordenadas:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{\delta z^* - \delta + \alpha + 1}{\gamma} \\ 1 & 0 & -\frac{(\delta z^* - \delta + \alpha + 1)(\xi z^* - \eta z^* + \phi \xi)}{(z^* + \phi)(\delta z^* - \delta + \alpha)\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{4.2.19}$$

o también:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\xi z^* - \eta z^* + \phi\xi}{(z^*+\phi)(\delta z^* - \delta + \alpha)} & 1 \\ 1 & \frac{\gamma}{\delta z^* - \delta + \alpha + 1} & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma}{\delta z^* - \delta + \alpha + 1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \tag{4.2.20}$$

con lo que el sistema 4.2.16 -4.2.18 queda con su parte lineal en forma canónica de Jordan, y como antes, se verifica que la recta de puntos $(1, 0, z^*)$ es de puntos silla-nodo.

Un tercer punto de equilibrio trivial es $(0, 1, 0)$, también para cualesquiera valores de los parámetros. La matriz de Jacobi es en éste caso:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{1+\beta} - \gamma & 0 & 0 \\ -\delta & -\alpha & \delta \\ \xi & 0 & -\frac{\eta}{\phi} \end{bmatrix} \tag{4.2.21}$$

con polinomio característico:

$$\lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3 = 0 \tag{4.2.22}$$

donde:

$$\begin{aligned} p_1 &= -\left(\frac{1-\gamma(\beta+1)}{\beta+1} - \alpha - \frac{\eta}{\phi}\right) \\ p_2 &= -\left(\frac{\eta}{\phi}\frac{(1-\gamma-\beta\gamma)}{\beta+1} - \frac{\alpha\eta}{\phi} + \frac{\alpha}{\beta+1}(1-\gamma-\beta\gamma)\right) \\ p_3 &= -\frac{\alpha\eta}{\phi}\left(\frac{1-\gamma-\beta\gamma}{\beta+1}\right) \end{aligned}$$

que tiene por autovalores $\{-\frac{(-1+\gamma+\gamma\beta)}{1+\beta}, -\alpha, -\frac{\eta}{\phi}\}$, siendo entonces su estabilidad estable si se verifican las condiciones:

$$\alpha, \beta, \gamma, \eta, \phi > 0, \quad \gamma(1+\beta) > 1$$

y un punto de silla si $\gamma(1+\beta) < 1$. Por tanto, se produce un cambio de estabilidad al cruzar la curva $\gamma = \dfrac{1}{1+\beta}$ por lo que esta curva es de bifurcaciones transcríticas en el plano de parámetros $\beta - \gamma$ (véanse en la siguiente sección 4.3 el análisis de bifurcación y las gráficas que aparecen más adelante en las figuras 4.6.2 y 4.6.3).

4.3. Análisis de bifurcaciones

En primer lugar estudiaremos la posibilidad de bifurcaciones de tipo silla-nodo en alguno de los puntos críticos obtenidos. La condición necesaria de existencia de un bifurcación genérica de tipo silla-nodo viene dada por la anulación del término independiente del polinomio característico. Por bifurcación genérica de este tipo se entiende una bifurcación silla-nodo propiamente dicha, y también las de tipo transcrítico y tipo tridente.

En el caso de uno de los puntos triviales del tipo $(x, y, z) = (0, 0, z^*)$, ya se vió que su matriz de Jacobi viene dada por 4.2.3, siendo su polinomio característico el dado por 4.3.1:

$$\lambda^3 - (\delta z^* + 1 + \alpha)\lambda^2 + (\alpha + \delta z^*)\lambda = 0 \tag{4.3.1}$$

Por otra parte, dado el polinomio característico general de grado tres:

$$\lambda^3 + p_1\lambda + p_2\lambda + p_3 = 0 \tag{4.3.2}$$

la condición necesaria de existencia de bifurcación de Hopf en el caso tridimensional viene dada por las condiciones:

$$p_2 > 0, \qquad p_1 p_2 = p_3 \tag{4.3.3}$$

lo cual se traduce en las relaciones:

$$\alpha + \delta z^* > 0, \qquad (\delta z^* + 1 + \alpha)(\alpha + \delta z^*) = 0$$

por lo cual $\delta z^* + 1 + \alpha = 0$ de donde la componente z del punto singular donde se produzca la bifurcación ha de cumplir:

$$z^* = -\frac{\alpha + 1}{\delta} < 0$$

ya que se suponen positivos los parámetros que intervienen en el sistema. Esto se contradice con el hecho de que las componentes han de estar en el cuadrante positivo. Por tanto, no existen bifurcaciones de Hopf.

Para el caso de los puntos singulares triviales del tipo $(1, 0, z^*)$ se obtuvo en 4.2.11 su matriz de Jacobi siendo su polinomio característico el dado por 4.3.4:

$$\lambda^3 - (\delta\, z^* - \delta + \alpha - 1)\lambda^2 - (\delta\, z^* - \delta + \alpha)\, \lambda = 0 \tag{4.3.4}$$

que también admite siempre el autovalor nulo.

Aplicando las condiciones necesarias de existencia de la bifurcación de Hopf 4.3.3 tenemos:

$$\delta\, z^* - \delta + \alpha > 0, \quad \text{y} \quad (\delta\, z^* - \delta + \alpha - 1)(\delta\, z^* - \delta + \alpha) = 0$$

con lo cual:

$$\delta\, z^* - \delta + \alpha - 1 = 0, \quad z^* > 1 - \frac{\alpha}{\delta}$$

de donde:

$$z^* = 1 + \frac{1 - \alpha}{\delta}$$

y para que z^* esté en el cubo unidad debe ser $\frac{1-\alpha}{\delta} < 0$ y entonces $\alpha > 1$, lo cual no es realista para el modelo planteado, ya que supondría una tasa de crecimiento de la población desmesurada. Por tanto, no se dan bifurcaciones de Hopf para este punto singular.

Otro punto singular es el $(0, 1, 0)$, se obtuvo su matriz de Jacobi en 4.2.21 y el polinomio característico correspondiente 4.2.22:

$$\lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3 = 0$$

donde:

$$\begin{aligned}
p_1 &= -(\frac{1-\gamma(\beta+1)}{\beta+1} - \alpha - \frac{\eta}{\phi}) \\
p_2 &= -(\frac{\eta}{\phi}\frac{(1-\gamma-\beta\gamma)}{\beta+1} - \frac{\alpha\eta}{\phi} + \frac{\alpha}{\beta+1}(1-\gamma-\beta\gamma)) \\
p_3 &= -\frac{\alpha\eta}{\phi}(\frac{1-\gamma-\beta\gamma}{\beta+1})
\end{aligned}$$

con lo que se produce una bifurcación genérica de tipo silla-nodo para los valores:

$$\alpha = 0 \tag{4.3.5}$$

$$\eta = 0 \tag{4.3.6}$$

$$\gamma = \frac{1}{\beta+1} \tag{4.3.7}$$

Las dos primeras curvas no las consideramos por ser valores no admisibles para los parámetros y nos quedamos sólo con la tercera de ellas.

Se trata de una curva de bifurcaciones transcríticas en el plano de parámetros $\beta - \gamma$, lo que supone que el punto $(0, 1, 0)$ intercambia su estabilidad con otro punto singular, que ha de ser forzosamente uno de los no triviales ya que hasta ahora no han aparecido bifurcaciones de los puntos singulares triviales, siendo el actual $(0, 1, 0)$ el último de los triviales a considerar.

En efecto, esto quedará patente más adelante cuando se estudien las curvas de continuación de puntos singulares no triviales, en particular, en las que se haga variar el parámetro β (ver figura 4.6.2) o el parámetro γ (ver figura 4.6.3). Cuando el parámetro que se hace variar alcanza el valor que verifica la ecuación $\gamma = \dfrac{1}{\beta+1}$, se aprecia claramente un intercambio de estabilidades con el punto singular no trivial (recuérdese que el otro parámetro tiene en ese momento el valor fijo por defecto: 0.5 para β y 1 para δ).

Para la obtención de las bifurcaciones de Hopf, aplicando de nuevo las condiciones necesarias 4.3.3 obtenemos:

$$\frac{\eta}{\phi}\frac{(1-\gamma-\beta\gamma)}{\beta+1} + \frac{\alpha\eta}{\phi} - \frac{\alpha}{\beta+1}(1-\gamma-\beta\gamma)) > 0 \tag{4.3.8}$$

$$\frac{(\alpha\phi+\eta)[(\beta+1)\gamma+\alpha(\beta+1)-1][\phi((\beta+1)\gamma-1)+\eta(\beta+1)]}{(\beta+1)^2\phi^2} = 0 \tag{4.3.9}$$

Resolviendo inicialmente 4.3.9 para ϕ y para γ se obtienen las soluciones:

$$\phi = -\frac{(\beta+1)\eta}{(\beta+1)\gamma-1} \tag{4.3.10}$$

$$\phi = -\frac{\eta}{\alpha} \tag{4.3.11}$$

$$\gamma = -\frac{\alpha(\beta+1)-1}{\beta+1} \tag{4.3.12}$$

y evaluando la expresión 4.3.8 con estos tres valores se obtienen, respectivamente:

$$\begin{aligned} -\frac{((\beta+1)\gamma-1)^2}{(\beta+1)^2} &\leqslant 0 \\ -\alpha^2 &< 0 \\ -\alpha^2 &< 0 \end{aligned}$$

y al no ser ninguna de las expresiones estrictamente positiva se puede asegurar que en el punto $(0,1,0)$ no existen bifurcaciones de Hopf.

Para los puntos singulares no triviales obtenidos, el estudio de las bifurcaciones de codimensión uno lo haremos numéricamente al resultar intratables analíticamente las expresiones correspondientes.

4.4. Series temporales y diagramas de fase

En la figura 4.4.1 se presentan las series temporales y la trayectoria en xyz del sistema con la condición inicial $(0{,}48, 0{,}23, 0{,}27)$, con todos los parámetros fijos en sus valores por defecto. Se puede ver que x, y y z convergen a un punto de equilibrio no trivial con los valores $(0{,}734780, 0{,}237109, 0{,}277046)$ tras un período transitorio de 20–25 unidades de tiempo adimensional.

Comenzando en un cierto rango de otras condiciones iniciales, las trayectorias también convergen al mismo punto de equilibrio después de haber transcurrido aproximadamente el mismo tiempo. Sustituyendo los valores por defecto de los parámetros en las ecuaciones 4.1.1, 4.1.2 y 4.1.3 y resolviendo numéricamente la ecuación de cuarto grado resultante 4.2.1 se puede ver que éste es uno de los dos puntos de equilibrio existentes con valores estrictamente positivos para x, y y z, siendo el otro $(0{,}333730, 0{,}527266, 0{,}0500893)$.

En la figura 4.4.2 incrementamos el valor del parámetro δ desde $1/6$ hasta $0{,}28$ y rearrancamos el sistema con los mismas condiciones iniciales. Se aprecia ahora que tras un período de tiempo el sistema converge a una órbita periódica o ciclo límite. Se aprecia claramente en las gráficas de las series temporales el comportamiento periódico que presentan las variables de estado, y dado que el ciclo límite es estable, la dinámica es capturada por este ciclo en una determinada cuenca de atracción, mientras que el punto singular estable que presenta la bifurcación es ahora un punto de silla inestable, tal como predicen y establecen los teoremas de Hopf.

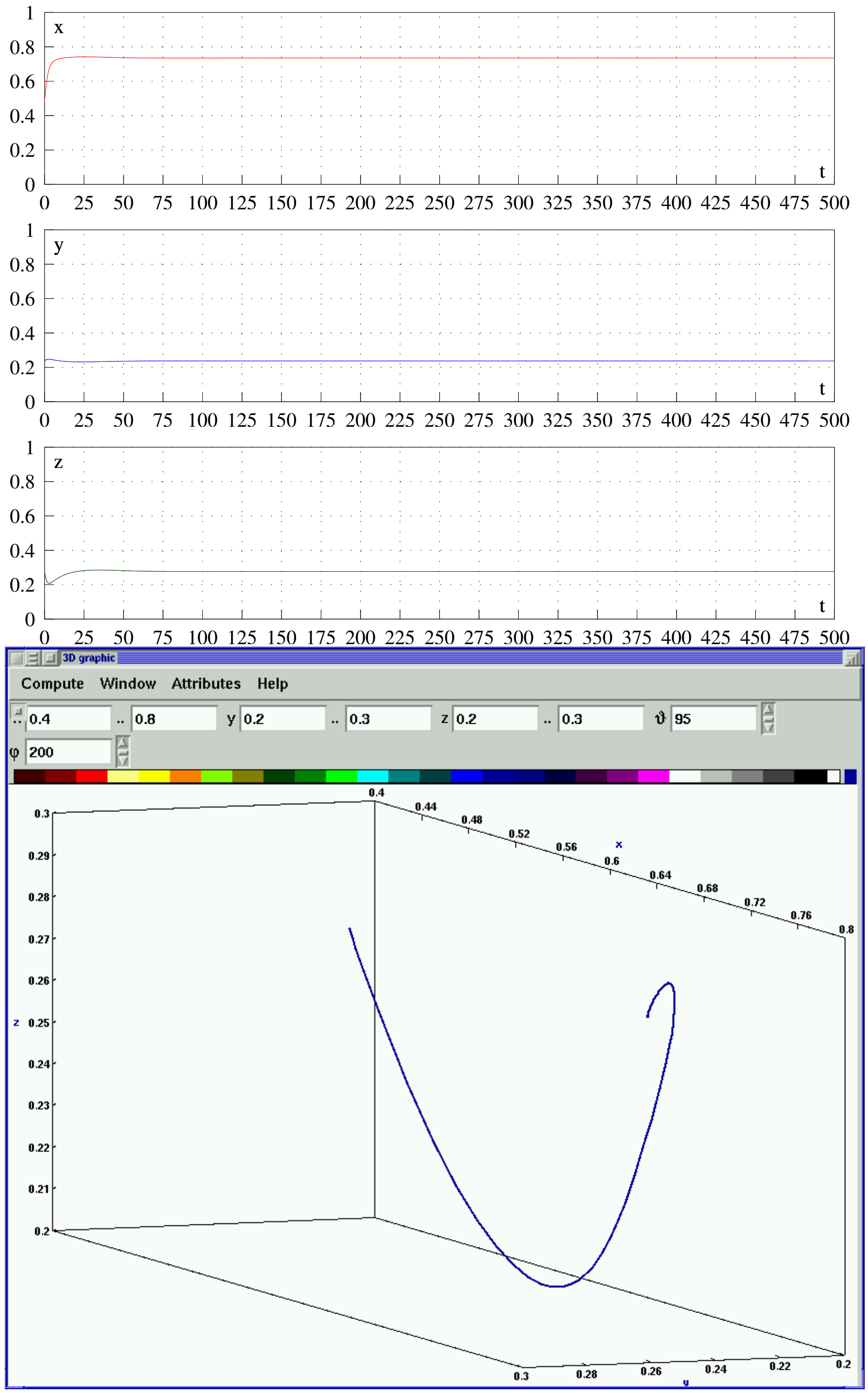


Figura 4.4.1: Series temporales y órbita 3D para $\delta = 1/6$.

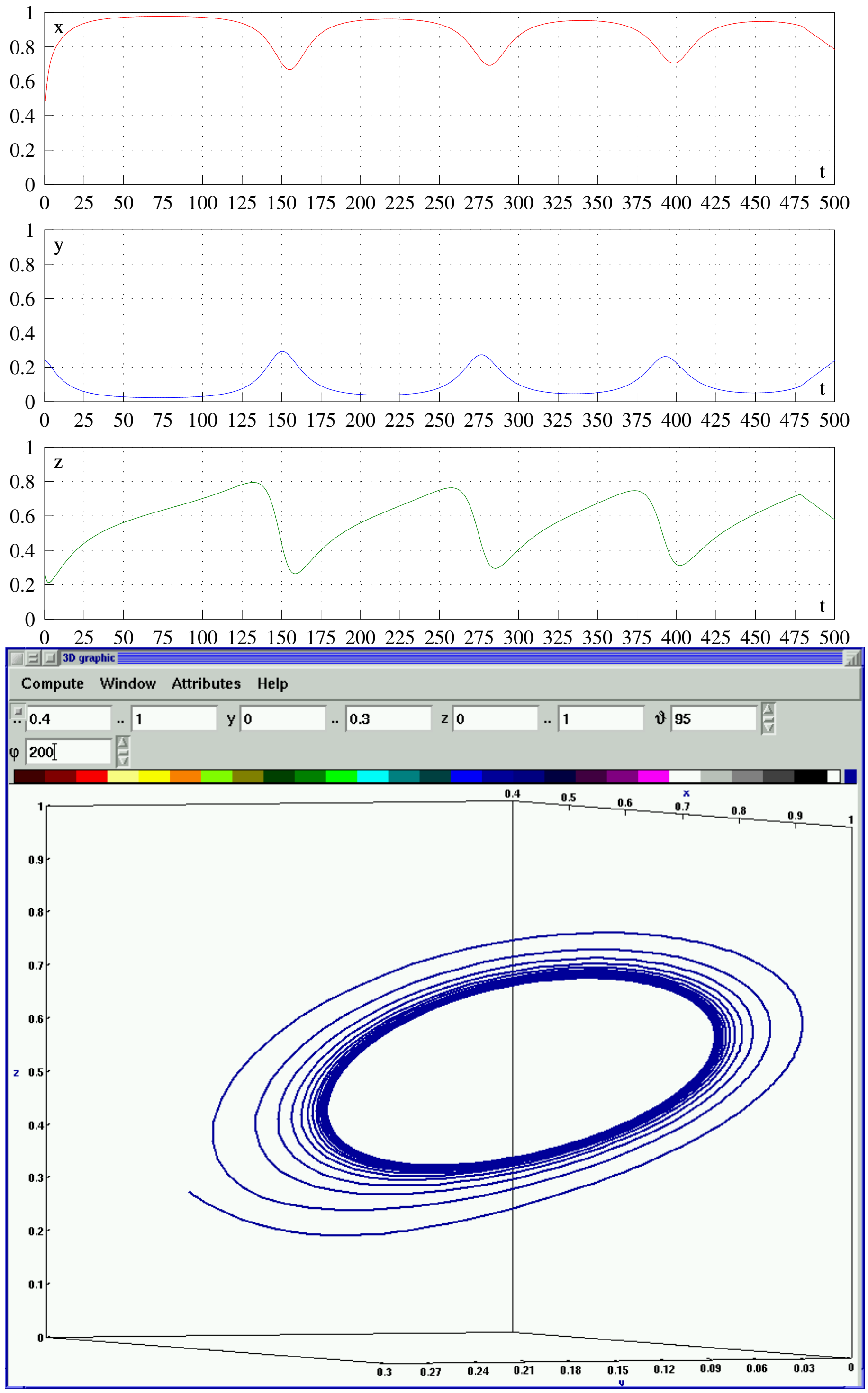


Figura 4.4.2: Series temporales y órbita 3D para $\delta = 0{,}28$. Obsérvense las *oscilaciones de relajación* que presenta el comportamiento de la componente z, en las que se produce un paulatino crecimiento de su valor, para luego darse una rápida caída desde su valor máximo.

4.5. Bifurcaciones dependientes de un parámetro

Claramente existe una diferencia cualitativa entre las figuras 4.4.1 y 4.4.2: en el primer caso existe convergencia hacia un punto de equilibrio y en el segundo tenemos una conducta oscilante por la cual el sistema describe periódicamente órbitas cada vez más próximas al ciclo límite a medida que se aumentan los valores del tiempo t. Este cambio de comportamiento del sistema sugiere la existencia de una bifurcación de Hopf para algún valor de δ entre $1/6$ y 0.28. Vamos a construir, pues, diagramas de bifurcación en los que δ varíe de forma continua, indicando el valor exacto para el cual ocurre la bifurcación de Hopf y señalando los valores de los puntos de equilibrio y rangos de ciclos límite de x, y y z siendo δ el único parámetro variable.

En la figura 4.5.1 aparecen las gráficas de localización de puntos singulares del sistema cuando se hace variar al parámetro δ, manteniéndose el resto de parámetros a los valores por defecto.

En las gráficas se observa que para valores de δ inferiores a donde se produce la bifurcación de tipo silla-nodo ($\delta = 0,1453$) no existen puntos críticos no triviales, teniendo uno en dicho punto y dos para valores superiores del parámetro δ. De estos dos, uno de ellos es estable y el otro inestable, hasta llegar al punto en que se produce la bifurcación de Hopf, para $\delta = 0,2722$. Surge entonces un ciclo límite estable y el punto crítico pasa a ser inestable, existiendo entonces dos puntos singulares inestables, que se mantienen para valores superiores de δ.

Las ecuaciones que representan a las coordenadas (x, y, z) en función del parámetro δ vienen dadas por la particularización de las ecuaciones 4.2.1 y 4.2.2 para los valores por defecto dados del resto de parámetros que aparecen en la tabla 4.1.

La figura 4.5.1(a) indica, en un punto singular, cómo se comporta la variable de estado que representa a la calidad, definida como x, cuando se hace variar al parámetro δ, mientras el resto de parámetros se mantiene a sus valores por defecto. Para $\delta = 1/6$, uno de sus valores es $x_1 = 0,73478$ como se indicó anteriormente y es un punto estable según indica la línea continua, siendo el otro $x_2 = 0,33373$, que es inestable y viene reflejado por la línea de puntos.

Cuando disminuye el valor de δ, el punto x_1 se mantiene estable hasta alcanzar el valor de $\delta = 0,1453$ (análogamente, partiendo de x_2 e incrementando el valor del parámetro, se alcanza el mismo punto, ya que ambos colapsan en uno sólo). Este valor de δ representa la existencia de una bifurcación de tipo silla-nodo y representa el valor mínimo del parámetro para que exista un punto singular no trivial, existiendo dos para valores superiores y ninguno para valores inferiores. El valor que proporciona CONTENT [KL97] para el valor que aparece en la forma normal de este tipo de bifurcaciones es $a = 0,1391$ (véase [Kuz98b]).

De forma análoga, cuando se incrementa el valor de δ, el punto x_1 se mantiene estable hasta alcanzar el valor $\delta = 0,2722$ (cuadrado macizo en la gráfica) en el cual se produce una bifurcación de Hopf, a partir de la cual el punto ya se mantiene inestable para valores superiores del parámetro. La bifurcación de Hopf es supercrítica (primer coeficiente de Lyapunov, $\ell_1 = -1{,}75648$), lo que significa que la familia de ciclos límite que surge del punto singular es estable, y coexisten con el punto singular que cambia su estabilidad a inestable.

En la figura 4.5.1(a) aparecen con puntos circulares negros algunas soluciones calculadas por AUTO [DK86], [DCF$^+$97], [DPC$^+$01] de los ciclos límite que surgen a partir de la bifurcación.

Las figuras 4.5.1(b) y 4.5.1(c) son los diagramas equivalentes para la población y la mala calidad, que tienen valores iniciales respectivamente de $y_1 = 0,2371;\ z_1 = 0,2770$ y $y_2 =$

$0,5273;\ z_2 = 0,0501.$

Los valores de las variables de estado cuando se produce la bifurcación de tipo silla-nodo son $(0,5527, 0,3765, 0,1235)$ y para el caso de la bifurcación de Hopf son $(0,8407, 0,1483, 0,5278)$.

La familia de proyecciones sobre el plano x, y de los ciclos límite resultantes de la bifurcación de Hopf, al variar el parámetro δ, se puede ver en la figura 4.5.2 y en 4.5.3 aparece el valor del periodo del ciclo límite a medida que se aumenta el valor de δ, representando un ejemplo clásico del comportamiento homoclínico ya que para δ acercándose a 0,3 el valor del periodo del ciclo se dispara a infinito al producirse una coalescencia del ciclo límite con uno de los puntos singulares triviales, dando origen a una curva homoclínica.

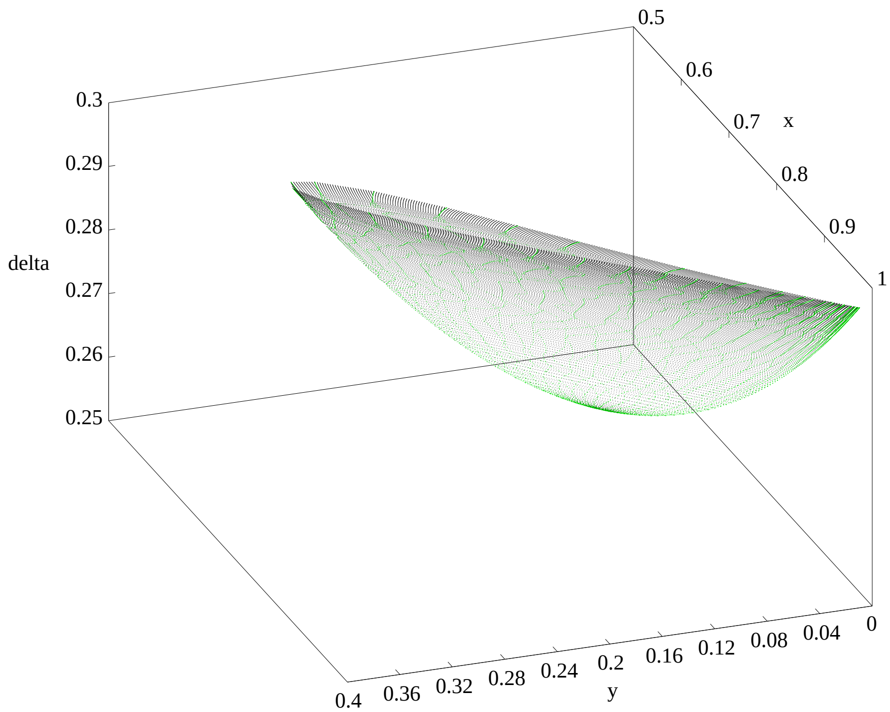


Figura 4.5.2: Ciclos límite emanantes de la bifurcación de Hopf. Se ha obtenido con CONTENT [Kuz98a] y lo que se obtiene es un paraboloide por el valor del tamaño de paso en el eje δ.

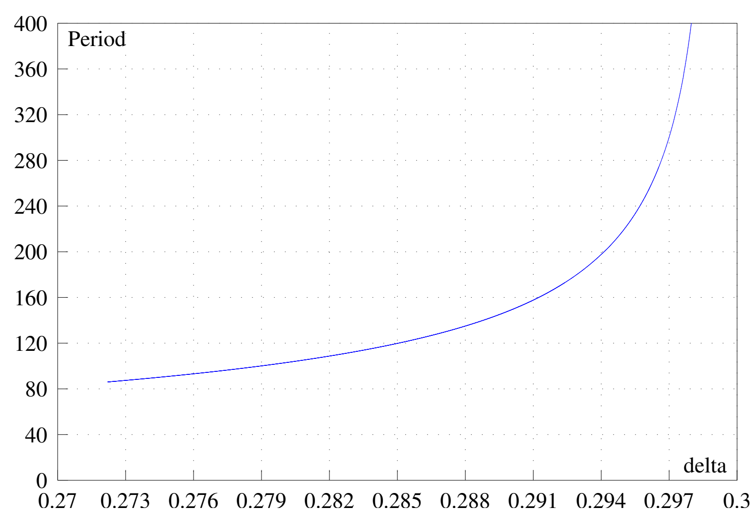
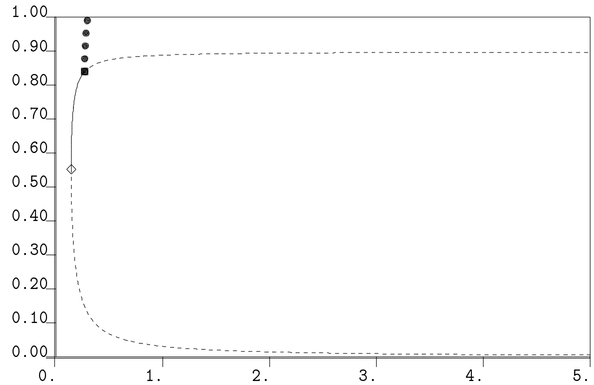
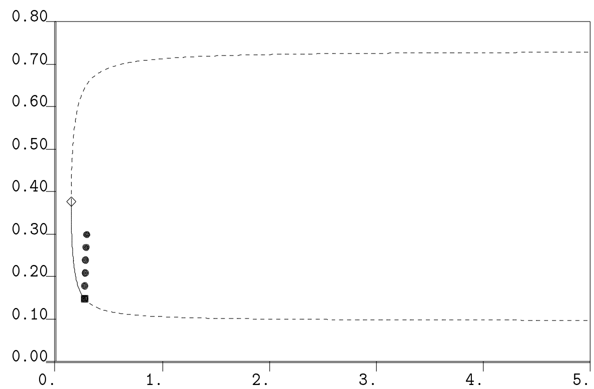


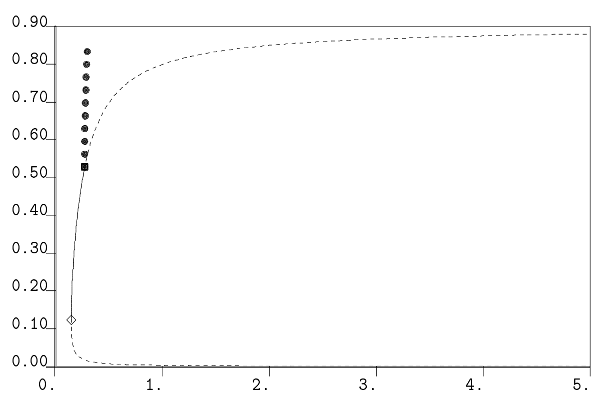
Figura 4.5.3: Periodo del ciclo límite frente a δ



(a) Componente x del punto singular



(b) Componente y del punto singular



(c) Componente z del punto singular

Figura 4.5.1: Localización de puntos singulares y ciclos al variar el parámetro δ.

4.6. Comportamiento respecto a otros parámetros

En esta sección veremos qué ocurre cuando se hacen variar cada uno de los parámetros distintos al δ, manteniendo el resto en sus valores por defecto. Es interesante notar que en todos los casos se producen bifurcaciones de codimensión uno, en particular, las de tipo silla-nodo y de Hopf, lo que indica cierta riqueza de comportamientos *para cada uno* de los parámetros del sistema.

Con respecto al parámetro α se presenta una bifurcación de Hopf para el valor $\alpha = 0{,}03885$, que es de tipo supercrítico ($\ell_1 = -1{,}03024$) en el punto singular $(0{,}8693, 0{,}1232, 0{,}6649)$. Esta bifurcación de Hopf se mantiene para valores superiores del parámetro δ, según se puede observar en la figura 4.7.3, en la gráfica correspondiente al parámetro α. También sufre una bifurcación tipo silla-nodo para el valor $\alpha = 0, 1147$, que es el valor máximo de α para el cual siguen existiendo dos puntos singulares estables no triviales. Por encima de ese valor desaparecen ambos puntos singulares. Esta bifurcación sigue existiendo para valores superiores de δ como se puede observar en la figura 4.7.1, en la que se ve el crecimiento prácticamente lineal que presenta la curva de sillas-nodo continuada en los parámetros $\delta - \alpha$.

Para el valor $\alpha = 0$ se produce una bifurcación transcrítica, ya detectada en el estudio analítico (véanse las ecuaciones 4.3.7 y el párrafo siguiente). Mediante esta bifurcación, el punto singular trivial $(0, 1, 0)$ intercambia su estabilidad con el punto singular no trivial, lo que justifica la existencia parcial de curvas en 4.6.1. Para $\alpha < 0$, el $(0, 1, 0)$ es inestable mientras que para $\alpha > 0$ es estable y recíprocamente para el punto singular no trivial.

El parámetro β presenta un comportamiento similar: para el valor $\beta = -1{,}4065$ presenta una bifurcación de tipo silla-nodo (con $a = 0{,}351035$) en el punto $(0{,}8323, 0{,}4402, 0{,}4964)$ que se corresponde con el valor mínimo que ha de tener el parámetro para que existan uno o dos puntos singulares no triviales. Por debajo de este valor no hay puntos singulares no triviales, uno en este valor y dos puntos para valores superiores del parámetro, uno de ellos es estable y el otro inestable, existiendo ambos salvo en el intervalo $[-1, 0]$ de valores negativos del parámetro β en el cual la variable y que representa a la población, tiene valores superiores a la unidad. Para valores positivos de β vuelven a existir dos puntos singulares no triviales, uno de ellos estable y el otro inestable, hasta llegar al valor $\beta = 2{,}4891$ a partir del cual sólo existe un punto singular no trivial inestable. Para $\beta = 0$ se presenta un bifurcación transcrítica del punto $(0, 1, 0)$ y del punto singular no trivial, por la cual ambos puntos intercambian sus respectivas estabilidades. La razón por la cual se produce es que el parámetro γ tiene en este caso su valor por defecto, o sea, $\gamma = 1$ y por tanto se produce un cruce con la curva $\gamma = \dfrac{1}{1+\beta}$, que ya había aparecido en el estudio analítico (véanse ecuaciones 4.3.7) como una curva de transcríticas para el punto $(0, 1, 0)$ en el plano $\beta - \gamma$. La bifurcación de Hopf que se aprecia en las gráficas de la figura 4.6.2 se produce para valores de las variables de estado fuera del cubo unidad y carecen de interés.

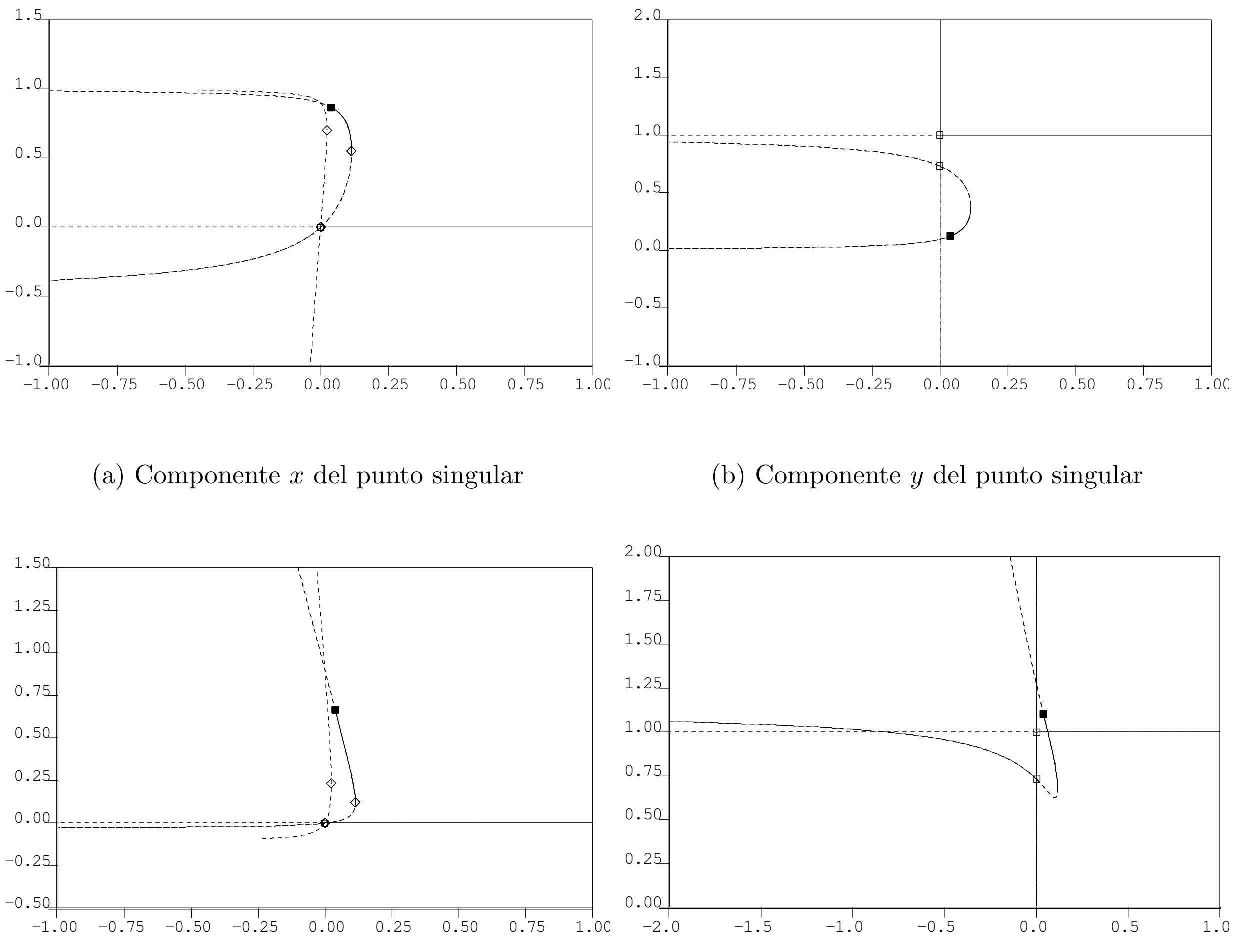
Con respecto al parámetro γ se observa la existencia de una bifurcación de tipo silla-nodo para el valor $\gamma = 1{,}4245$, valor máximo en este caso que alcanza el parámetro, por encima del cual dejan de existir los puntos singulares no triviales, si se mantienen los valores por defecto del resto de parámetros. La bifurcación silla-nodo se produce para el punto singular $(0, 6111, 0, 2434, 0, 1572)$, existiendo para valores inferiores del parámetro dos puntos singulares no triviales, uno de ellos estable y el otro inestable. Para el valor del parámetro $\gamma = 2/3$, se produce una bifurcación transcrítica al colapsar el punto singular estable con el punto singular $(0, 1, 0)$, que hasta ese momento era inestable e intercambiándose entonces sus estabilidades, de forma que el $(0, 1, 0)$ permanece estable para valores superiores del parámetro $(\gamma > 2/3)$, mientras que el singular no trivial se mantiene inestable. Para un valor menor de γ se produce una bifurcación de Hopf que es ya para el punto

$(-0,225, 1{,}3444, -0,0184)$, carente de interés en nuestra discusión.

El comportamiento del parámetro ξ y restantes es más sencillo que el de los precedentes ya que presenta una bifurcación de Hopf para el valor $\xi = 0{,}8$ en el punto singular $(1, 0, 0{,}4)$ que es estable y continúa así hasta alcanzar el valor $\xi = 1{,}2097$, en el que sufre una bifurcación de tipo silla-nodo en el punto $(0{,}4510, 0{,}4485, 0{,}1200)$, siendo este el valor máximo del parámetro para el cual existen puntos singulares no triviales. Sólo existe un punto estable (y el otro inestable) dentro del intervalo del parámetro que va de la bifurcación de Hopf a la silla-nodo; fuera de este intervalo ambos puntos singulares no triviales son inestables.

Para el parámetro η la situación es análoga, ya que sólo existen dos puntos singulares no triviales (uno estable y otro inestable) entre los valores del parámetro que van desde la bifurcación silla-nodo para el valor $\eta = 0{,}8266$ en el punto $(0{,}4509, 0{,}4485, 0{,}1200)$ hasta la bifurcación de Hopf para el valor $\eta = 1{,}25$ y punto singular $(1, 0, 0{,}4)$. El valor $\eta = 0{,}8266$ representa el valor más pequeño que puede tener el parámetro η para que exista al menos un punto singular no trivial. Fuera del intervalo entre ambas bifurcaciones, los puntos singulares son inestables.

Por último, para el parámetro ϕ, existe un valor $\phi = 0{,}1486$ en el que presenta una bifurcación de tipo silla-nodo, de forma que no existen puntos singulares no triviales por encima de ese valor. Para valores inferiores del parámetro existen dos bifurcaciones de Hopf para los valores $\phi = 0{,}0122519$ y $\phi = 0$ en los puntos respectivos $(0{,}9693, 0{,}0302, 0{,}3875)$ y $(1, 0, 0{,}4)$. Entre la primera de las bifurcaciones de Hopf y la bifurcación silla-nodo coexisten dos puntos singulares no triviales, uno de ellos estable y el otro inestable, siendo ambos inestables si están entre ambas bifurcaciones de Hopf. Existen algunas otras bifurcaciones de tipo silla-nodo, pero para valores fuera del cubo unidad.



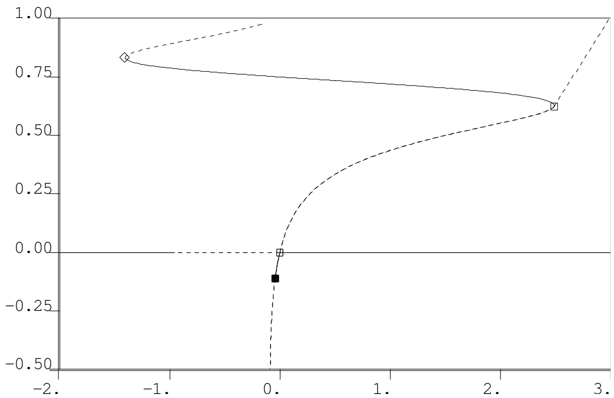
(a) Componente x del punto singular

(b) Componente y del punto singular

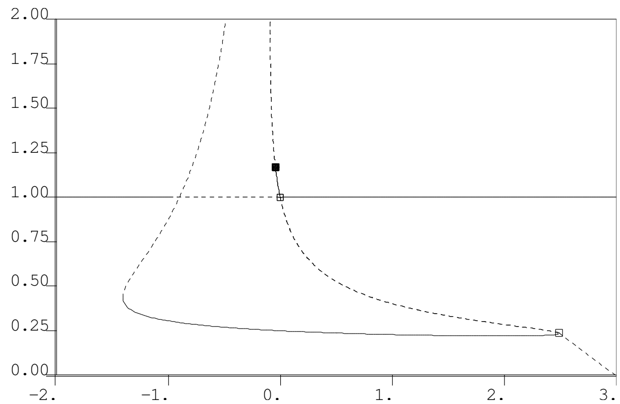
(c) Componente z del punto singular

(d) Variación de la norma euclídea $L2$

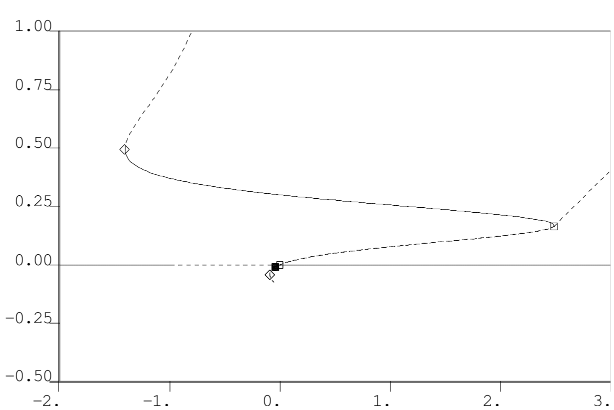
Figura 4.6.1: Localización de puntos singulares al variar el parámetro α.



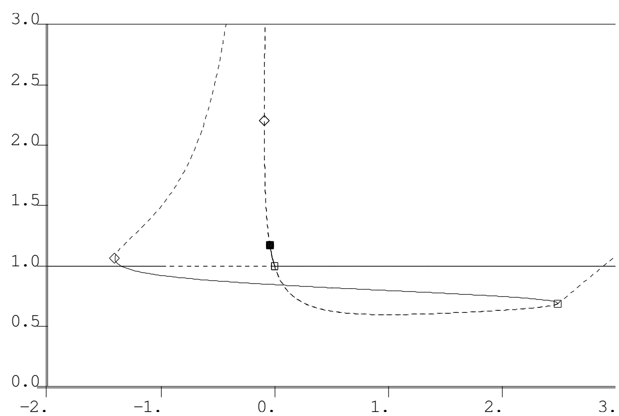
(a) Componente x del punto singular



(b) Componente y del punto singular

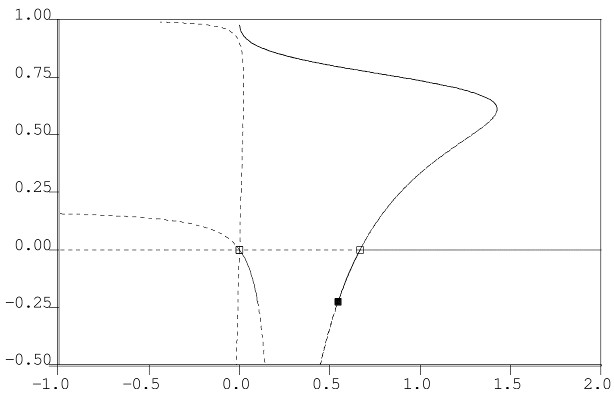


(c) Componente z del punto singular

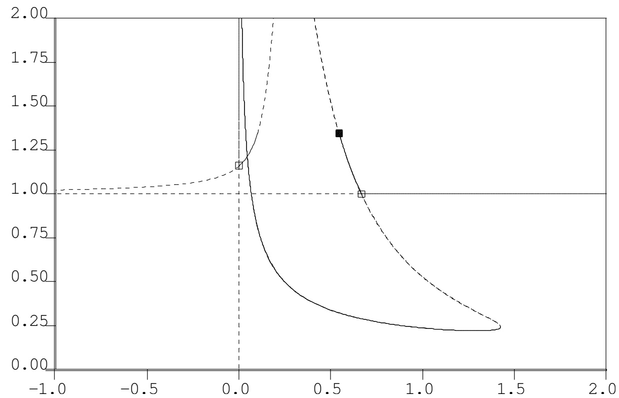


(d) Variación de la norma euclídea $L2$

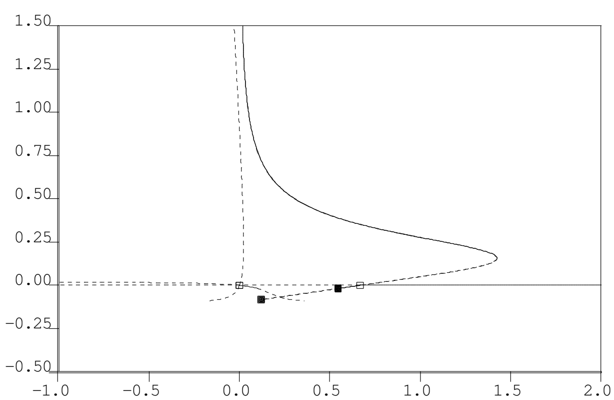
Figura 4.6.2: Localización de puntos singulares al variar el parámetro β.



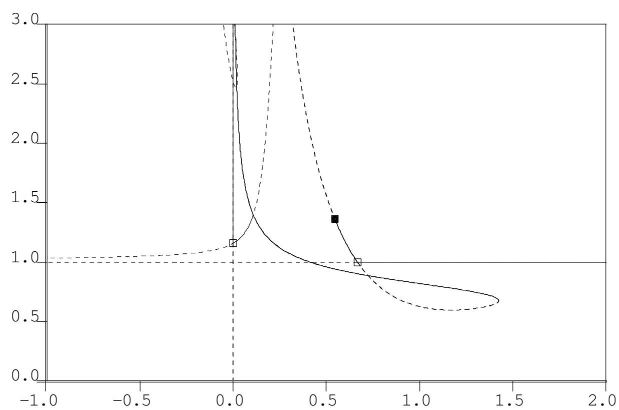
(a) Componente x del punto singular



(b) Componente y del punto singular

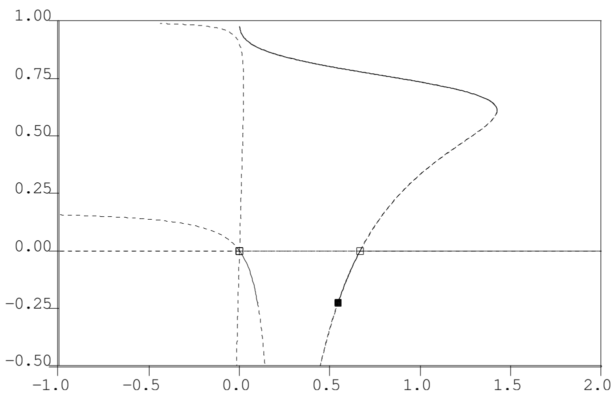


(c) Componente z del punto singular

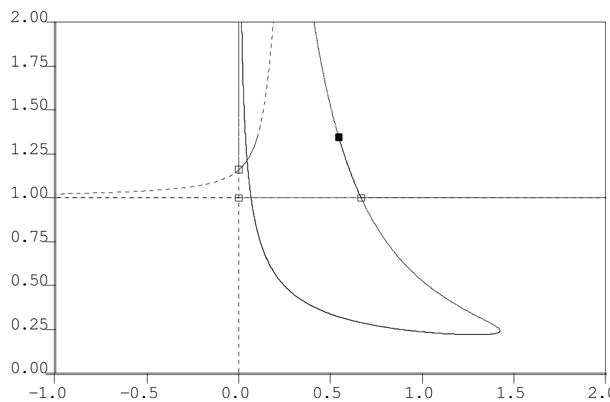


(d) Variación de la norma euclídea $L2$

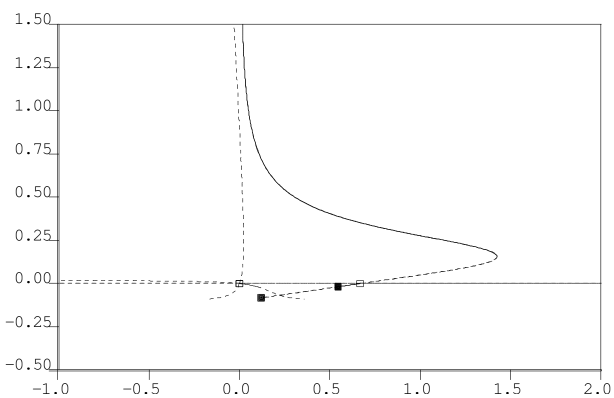
Figura 4.6.3: Localización de puntos singulares al variar el parámetro γ.



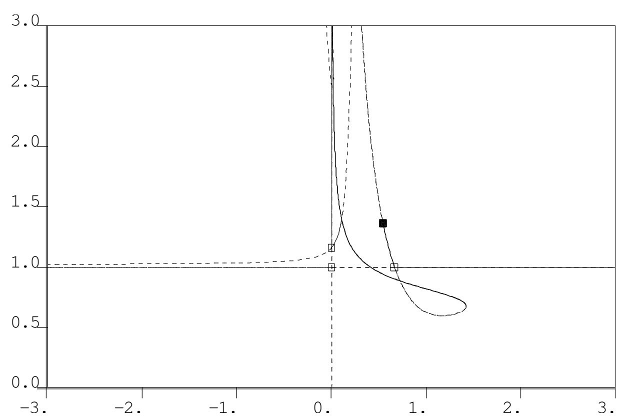
(a) Componente x del punto singular



(b) Componente y del punto singular

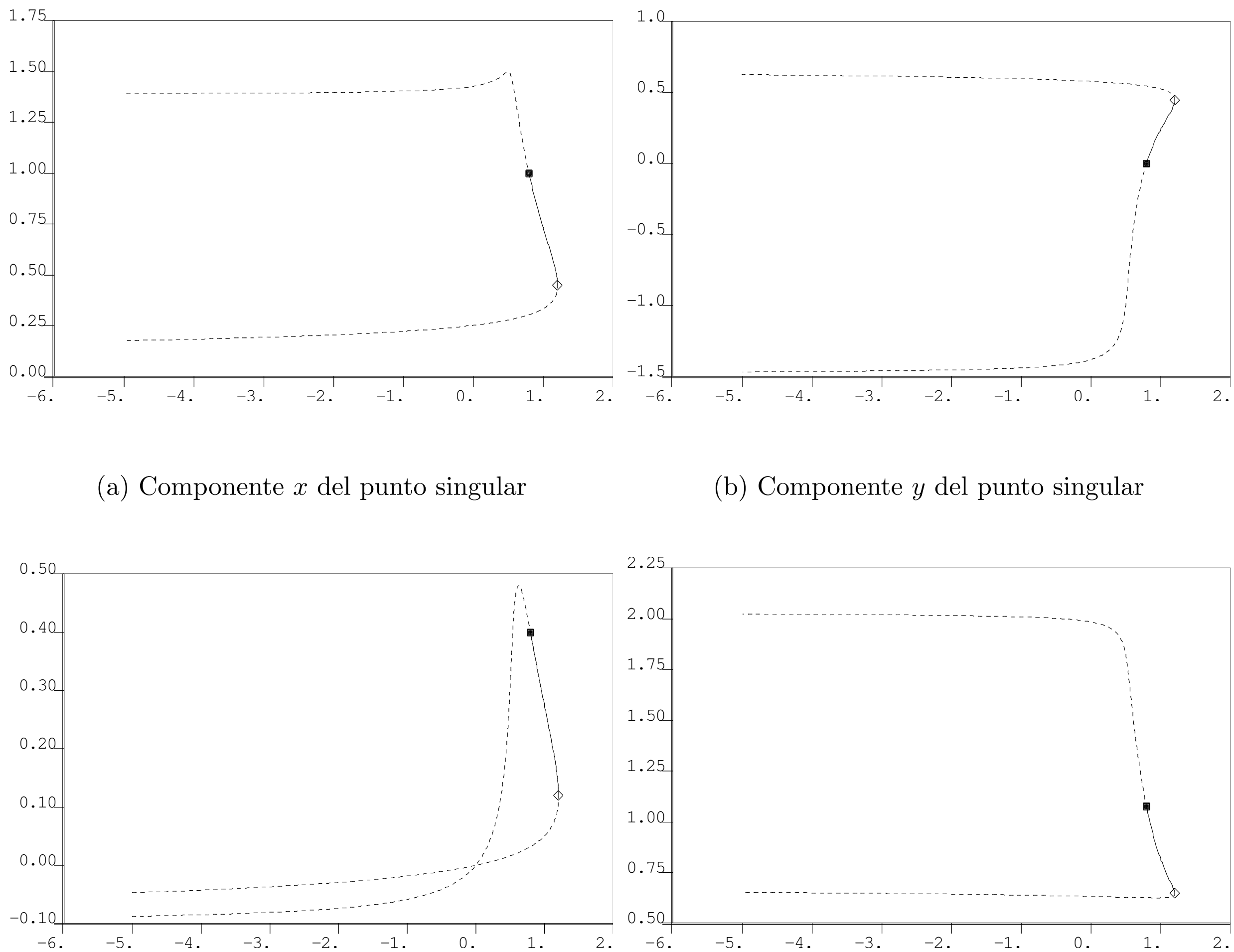


(c) Componente z del punto singular



(d) Variación de la norma euclídea $L2$

Figura 4.6.4: Localización de puntos singulares al variar el parámetro γ, sin puntos límite



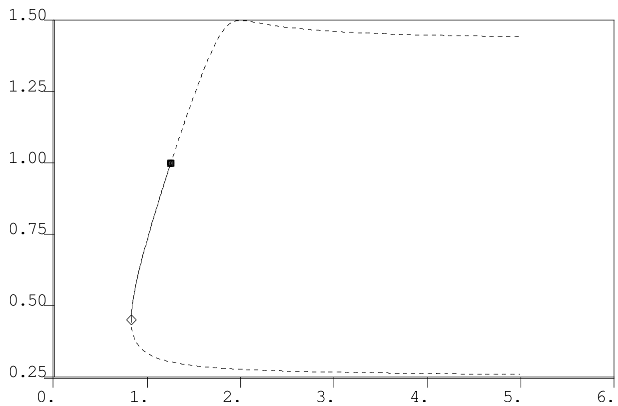
(a) Componente x del punto singular

(b) Componente y del punto singular

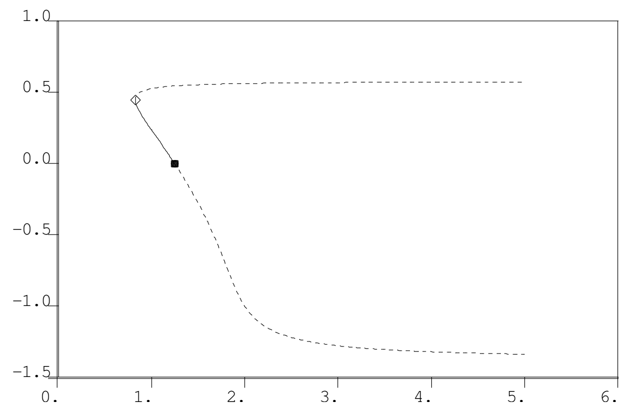
(c) Componente z del punto singular

(d) Variación de la norma euclídea $L2$

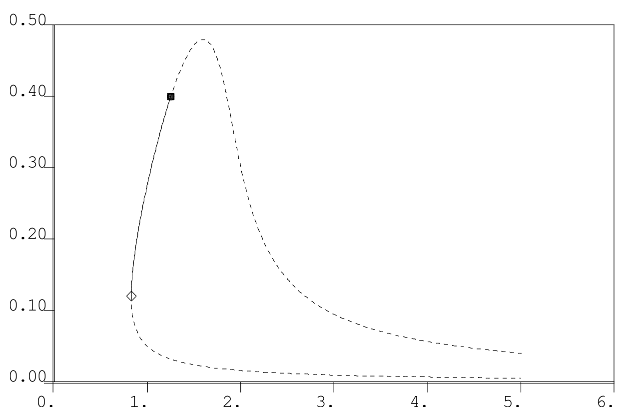
Figura 4.6.5: Localización de puntos singulares al variar el parámetro ξ.



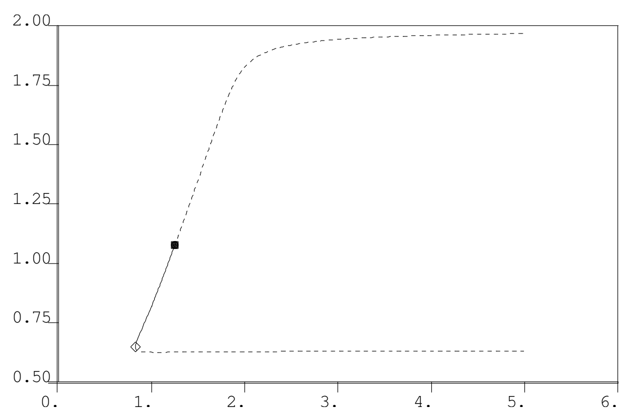
(a) Componente x del punto singular



(b) Componente y del punto singular

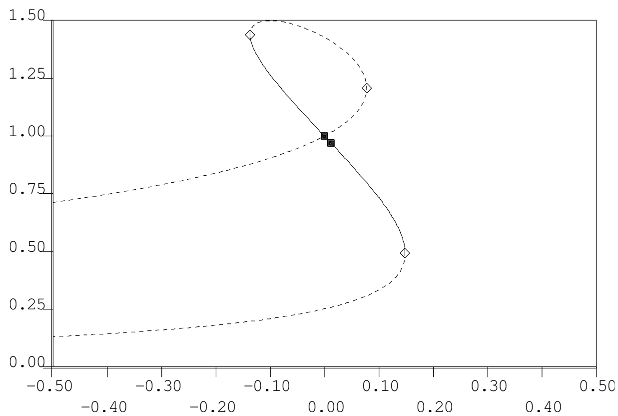


(c) Componente z del punto singular

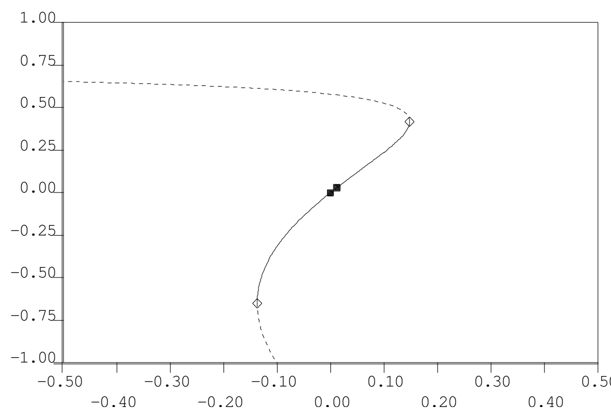


(d) Variación de la norma euclídea $L2$

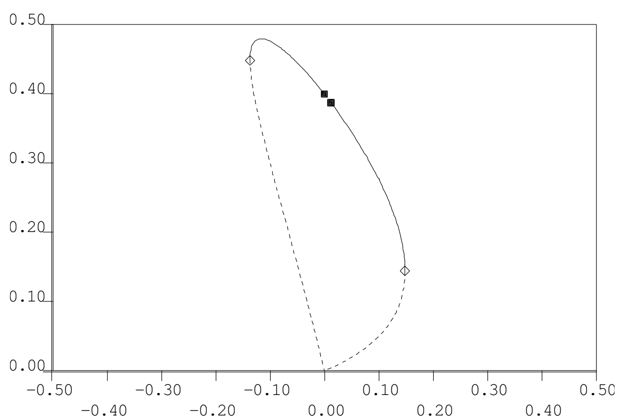
Figura 4.6.6: Localización de puntos singulares al variar el parámetro η.



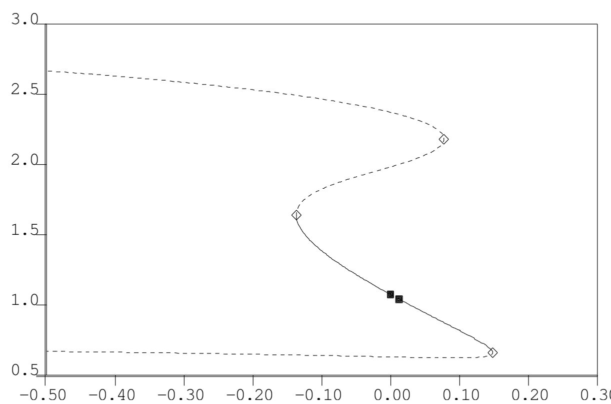
(a) Componente x del punto singular



(b) Componente y del punto singular



(c) Componente z del punto singular



(d) Variación de la norma euclídea $L2$

Figura 4.6.7: Localización de puntos singulares al variar el parámetro ϕ.

4.7. Bifurcaciones en dos parámetros

En las gráficas que aparecen a continuación se ha realizado una continuación en dos de los parámetros: uno fijo, el parámetro δ, que es nuestro principal parámetro de bifurcación a lo largo del estudio del quinto modelo, y del resto de parámetros del modelo. Así, partiendo de la bifurcación de tipo silla-nodo que se presenta para el valor del parámetro $\delta = 0{,}1453$, se realiza la continuación de ésta bifurcación haciendo variar simultáneamente al resto de parámetros. El resultado son las curvas de localización de puntos silla-nodo al variar los parámetros α, β, γ que aparecen en la gráfica 4.7.1 y las curvas de situación de puntos límite en los parámetros η, ϕ, ξ que aparecen en la gráfica 4.7.2.

Con respecto al parámetro α se observa que el punto límite existe para cualquier valor positivo del parámetro δ, de forma que se podría decir que ambos parámetros "van a la par" en el sentido que dado un valor para δ siempre vamos a encontrar un valor para α que establezca los límites de existencia de los puntos singulares no triviales del sistema.

La situación es diferente para los parámetros β y γ, ya que ahora las curvas de puntos silla-nodo tienen forma parabólica y están restringidos los valores del parámetro δ para los que existe curva, ya que sólo existe curva para valores de δ comprendidos entre 0 y 0,2 aproximadamente (salvo que se varíen los otros valores por defecto del resto de parámetros). Por otra parte, para cada valor fijo de los parámetros β y δ es posible encontrar dos valores de δ para los cuales existe un punto silla-nodo.

En el caso del parámetro η se observa que si bien existe un valor de este parámetro para cualquier valor de δ que determine la bifurcación de tipo silla-nodo, ocurre que para valores superiores a $\delta = 1$, los valores de η se van acercando progresivamente a cero. Sin embargo, si se hace disminuir a δ hasta aproximarlo a cero, el valor del punto límite se dispara y existe para valores grandes del parámetro η.

La forma de las curvas de puntos límite para los parámetros ϕ y ξ es bastante parecida, aunque el crecimiento para el mismo rango de valores de δ es mucho mayor en el caso del parámetro ξ. En ambos casos, si se aumenta δ es posible obtener un valor para el que existe una bifurcación de tipo silla-nodo, tendiendo hacia el valor 0,9 en el caso del parámetro ϕ y hacia el valor aproximado de 7 en el caso del parámetro ξ, dados los valores por defecto del resto de parámetros. En cualquier caso, está claro que no es posible encontrar un δ razonable dado un valor cualquiera de los parámetros ϕ ó ξ.

Para la obtención de curvas de Hopf se ha procedido como en la situación anterior: partiendo de la bifurcación de Hopf que existe para el valor del parámetro $\delta = 0{,}2722$, se continúan a partir de aquí el resto de parámetros. El resultado son las curvas de bifurcaciones de Hopf en los parámetros α, β, γ que aparecen en la gráfica 4.7.3 y las curvas correspondientes para los parámetros η, ϕ, ξ que aparecen en la gráfica 4.7.4.

Con respecto al parámetro α, si se fija el valor del parámetro δ, podemos obtener un valor para el que existe una bifurcación de Hopf. Y recíprocamente, fijado α podremos siempre obtener un valor de δ en el que se produce una bifurcación de Hopf. Ambos parámetros están relacionados de tal forma que existe una expresión prácticamente lineal que los liga. Esto significa que se podrá siempre obtener comportamiento periódico del sistema (si se desea así), una vez fijado uno de estos parámetros.

En los parámetros β y γ la situación es diferente ya que presentan comportamiento hiperbólico respecto al parámetro δ: si δ tiende a cero, los valores de ambos parámetros han de ser grandes para que exista presencia de una bifurcación de Hopf, mientras que si el valor del parámetro δ es grande (mayor que 1, por ejemplo) es necesario disminuir el valor de γ a valores próximos a cero o incluso a valores negativos próximos a $-2{,}5$ en el caso del parámetro β.

Para el parámetro η la curva de Hopfs es parecida, aunque tiende a cero más rápidamente para valores de δ mayores que 1. Y para valores de δ próximos a cero, el valor de η se incrementa rápidamente hasta alcanzar el valor 0,9 aproximadamente, a partir del cual comienza de nuevo a crecer pero de forma mucho más lenta.

En el caso del parámetro ϕ podemos encontrar una bifurcación de Hopf para valores del parámetro $\delta > 0{,}1$, aunque los valores de ϕ crecen de forma más lenta que los de δ, hasta alcanzar aproximadamente de 0,7 que ejerce de cota en la práctica, si se consideran los rangos usuales para los parámetros. Para los valores $\delta = 1{,}0416$, $\phi = 0{,}6572$ el sistema presenta una bifurcación de Bogdanov-Takens que determina la dinámica local y global (véase la sección 4.9).

Por último, la curva de bifurcaciones de Hopf para el parámetro ξ tiene un comportamiento parecido a la de ϕ, aunque el crecimiento de ξ es sensiblemente mayor. Existe para valores mayores para el que se produce la bifurcación de Hopf para el parámetro δ (0.2722) y en la práctica valores $\xi \geq 1$, existiendo una bifurcación de este tipo cuando se ha fijado el valor de uno de los parámetros con las restricciones expuestas.

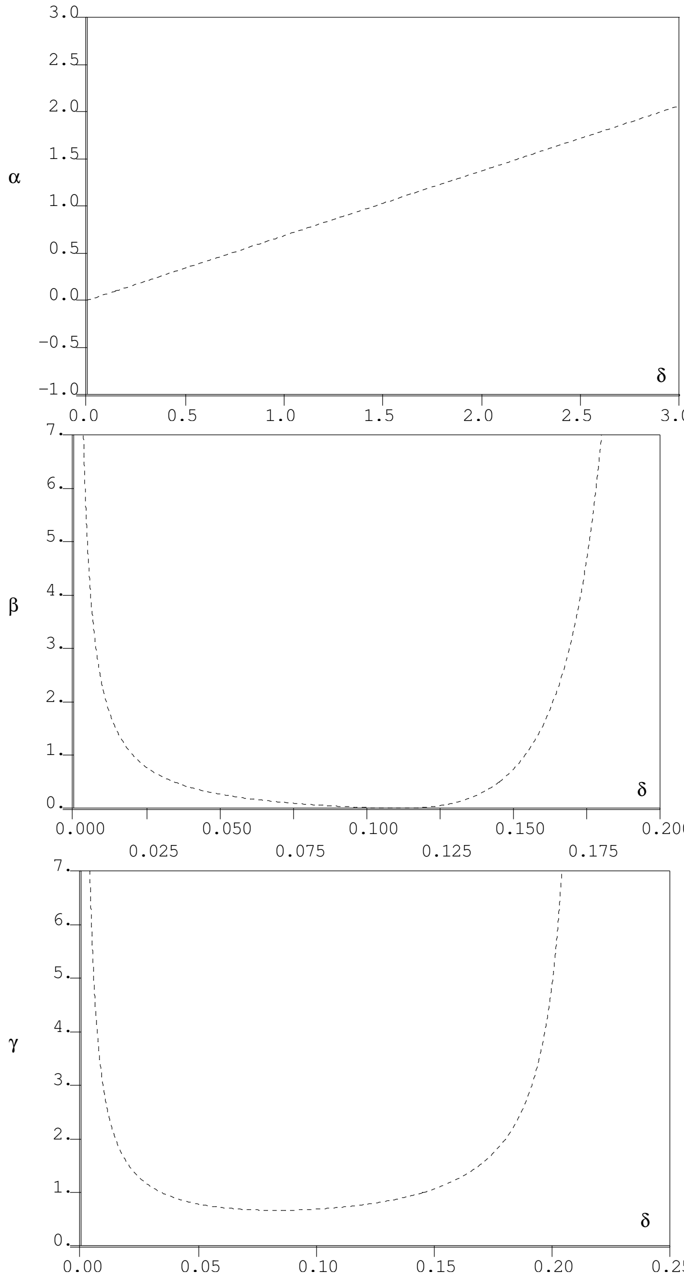


Figura 4.7.1: Diagramas de puntos límite según los diferentes parámetros α, β, γ

.

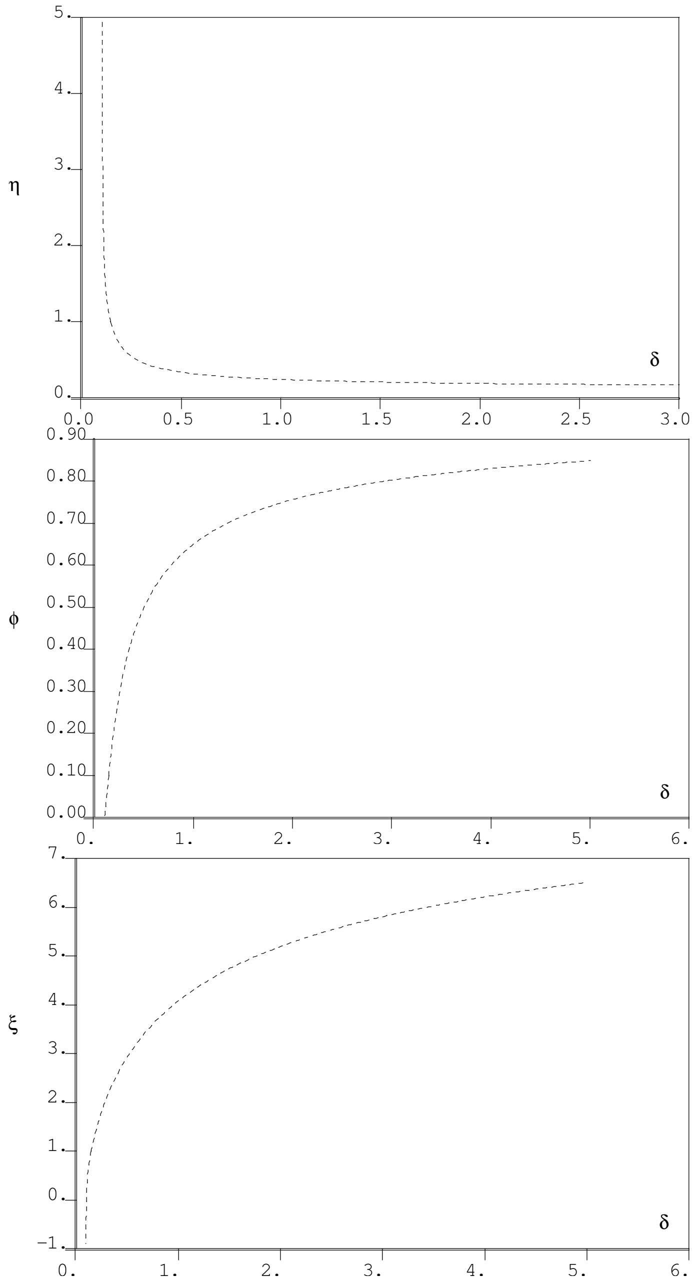


Figura 4.7.2: Diagramas de puntos límite según los diferentes parámetros η, ϕ, ξ

.

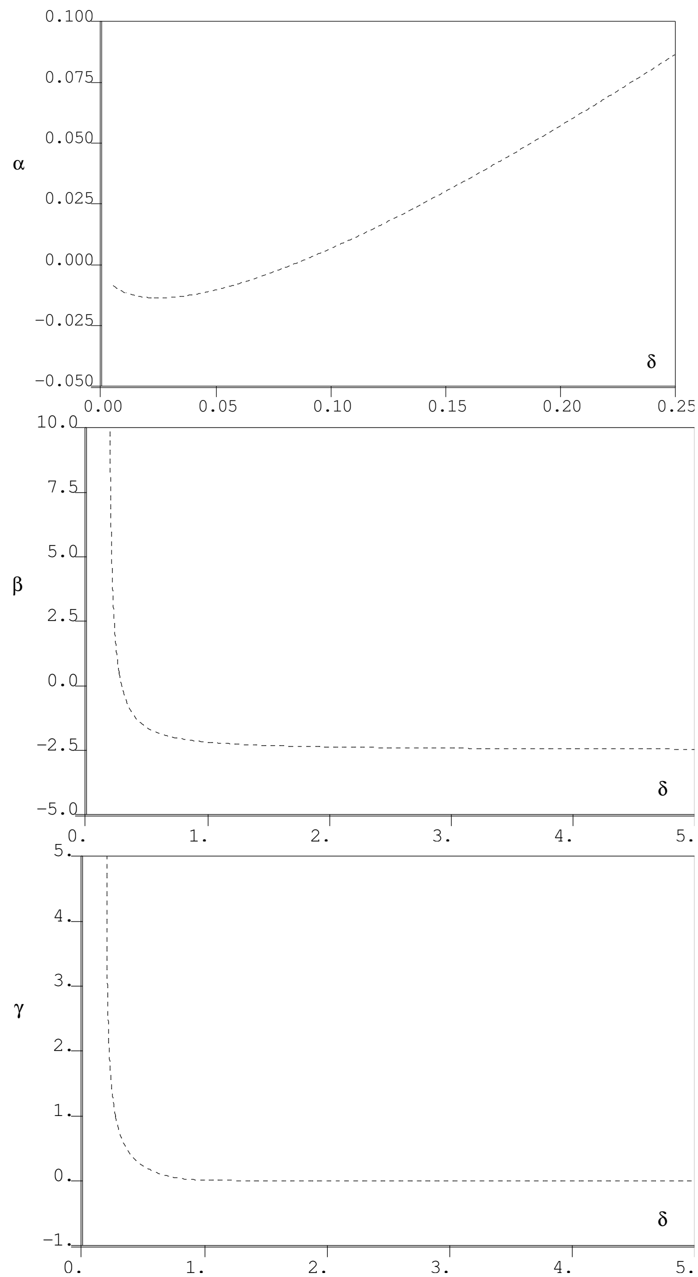


Figura 4.7.3: Diagramas de bifurcaciones de Hopf según los diferentes parámetros α, β, γ

.

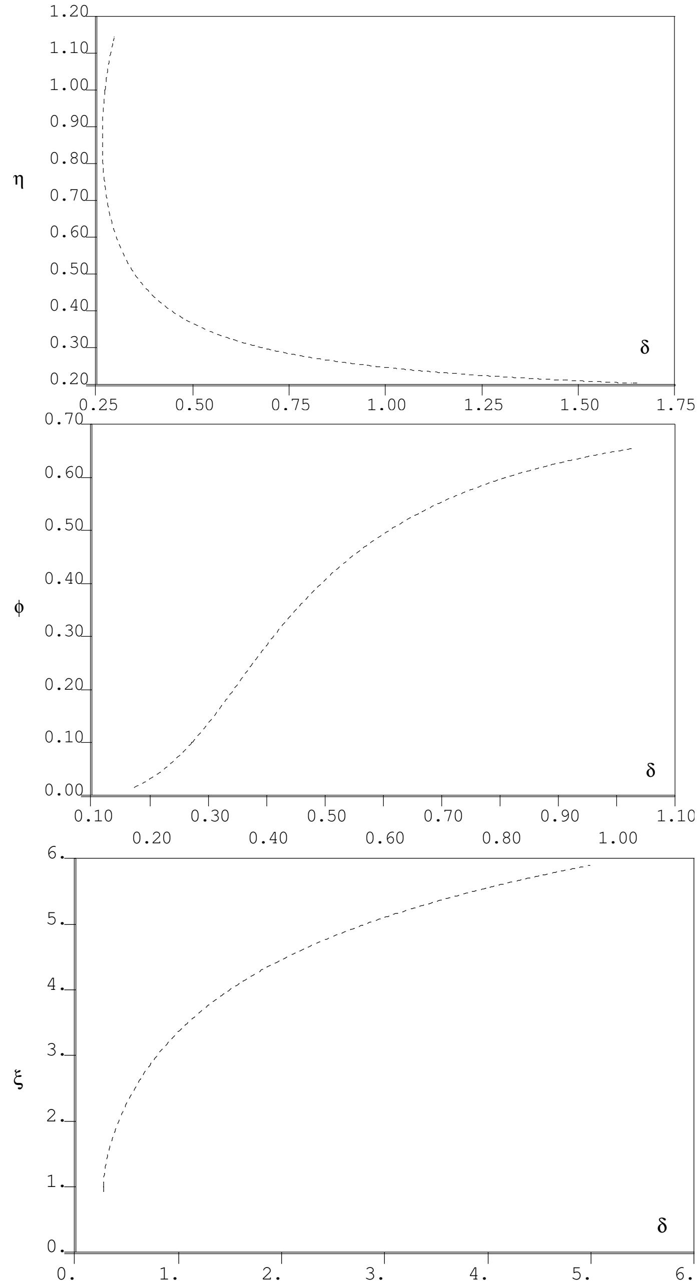


Figura 4.7.4: Diagramas de bifurcaciones de Hopf según los diferentes parámetros η, ϕ, ξ

.

4.8. Bifurcaciones de ciclos límite.

Se ha realizado una exploración numérica mediante la ejecución de AUTO [DK86], [DCF+97], [DPC+01] para la búsqueda de soluciones periódicas en la que se ha seleccionado la obtención de soluciones especiales. El resultado producido es que no se han detectado bifurcaciones de ciclos límite del tipo silla-nodo, flip o Neimark-Sacker.

4.9. Diagrama de bifurcaciones completo

En la presente sección se pretende describir el comportamiento del modelo en el plano de parámetros $\delta-\phi$, plano que se ha elegido en función del interés que presentan los parámetros que intervienen en el modelo en estudio. Haremos una síntesis de los resultados obtenidos con respecto a las bifurcaciones en dicho plano de parámetros, en el cual la dinámica se organiza en torno al punto de bifurcación de tipo Bogdanov-Takens obtenido en las gráficas de bifurcación de continuación de puntos silla-nodo y continuación de bifurcaciones de Hopf. Los resultados teóricos sobre el despliegue de tal tipo de puntos aparecen extensamente en la literatura especializada (véanse por ejemplo, [GH90], también [Kuz98b] y [Wig90b].
En el despliegue indicado, el punto de bifurcación de Bogdanov-Takens se produce para $\delta = 1{,}0416$, $\phi = 0{,}6572$ y es el punto de encuentro de una curva de bifurcaciones de Hopf con una curva de bifurcaciones de sillas-nodo, teniendo el punto singular dos autovalores idénticamente nulos que es lo que caracteriza tal tipo de bifurcación. En el diagrama 4.9.1 construido aparecen claramente las diferentes curvas de bifurcación y su intersección en el Bogdanov-Takens (BT). Siguiendo el despliegue, de este punto surge una curva de órbitas homoclínicas que justifica la desaparición de la familia de curvas periódicas que surgen de las bifurcaciones de Hopf. Esta bifurcación es de tipo global, ya que se han considerado

previamente todas las bifurcaciones locales que pudieran darse mediante la variación de los parámetros considerados en el estudio.

En el diagrama aparecen delimitadas cuatro regiones (I,II,III,IV). La zona indicada por I se corresponde con aquella parte del plano de parámetros en la que todavía no se ha alcanzado la curva de sillas-nodo. En esta zona no existen puntos singulares no triviales, por lo que sólo aparecen los puntos singulares triviales obtenidos en la sección 4.2. Los puntos de la recta $(0, 0, z)$ son inestables al ser $\alpha, \delta > 0$, y como $\alpha < \delta$, el punto $(1, 0, z)$ es estable. El punto $(0, 1, 0)$ es estable al ser $\gamma(1 + \beta) > 1$.

En la propia curva SN de sillas-nodo, la situación es idéntica salvo que aparece un punto singular no trivial inestable.

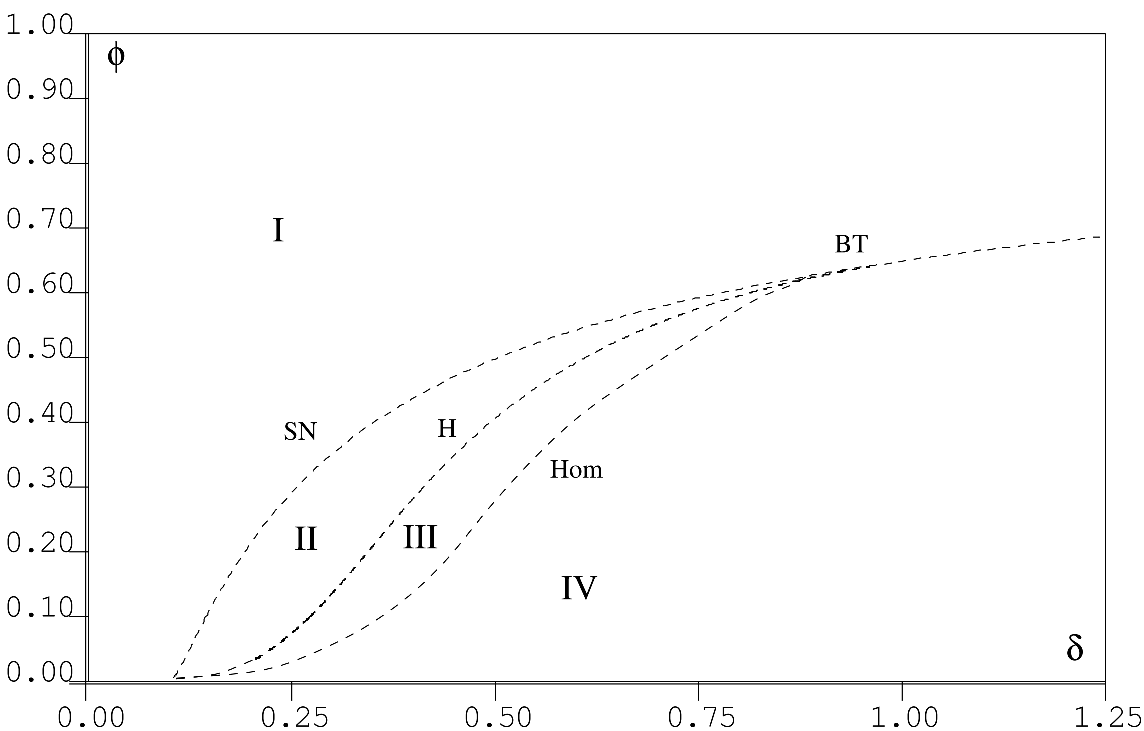


Figura 4.9.1: Diagrama completo de bifurcaciones en el plano de parámetros $\delta - \phi$. Los valores de los parámetros son: $\alpha = 0{,}1,\ \beta = 0{,}5,\ \gamma = 1{,}0,\ \eta = 1{,}0,\ \xi = 1{,}0$.

En la región II la situación es la misma que la de la región I salvo que ahora existen dos puntos singulares adicionales no triviales, uno de ellos es un nodo espiral estable y el otro es un punto de silla.

En la curva H de bifurcaciones de Hopf el punto estable se vuelve inestable y surge un ciclo límite estable.

En la región III los dos puntos singulares no triviales son inestables, existiendo una familia de ciclos límite estables para cada valor fijo de ϕ y haciendo variar δ en un cierto intervalo, hasta que se encuentra con la curva Hom de bifurcaciones homoclínicas.

En esta curva Hom se produce la destrucción del ciclo límite estable y aparece un curva de período infinito, desapareciendo entonces el movimiento periódico estable.

Por último, en la región IV ya no existe comportamiento homoclínico, estando la dinámica determinada solamente por los puntos singulares existentes.

Capítulo 5

CONCLUSIONES

1. Se ha realizado el análisis completo de la dinámica que presentan los cuatro modelos planares. Se concluye que para rangos admisibles de valores de los parámetros que intervienen en dichos modelos, sólo se dan bifurcaciones transcríticas que involucran a un par de puntos singulares en el cuarto de los modelos, mediante la cual ambos puntos se intercambian sus respectivas estabilidades. Se da la circunstancia de que uno de dichos puntos singulares es siempre el origen.

2. Se ha realizado el estudio analítico y numérico del quinto modelo, tridimensional. Se comprueba que presenta una gran riqueza de comportamientos al variar la mayoría de los parámetros del sistema.

3. Una vez elegido δ como principal parámetro de bifurcación, se han determinado los valores para los cuales presenta bifurcaciones de codimensión uno, resultando una bifurcación de tipo silla-nodo, que determina el valor a partir del cual surgen los dos puntos singulares no triviales. Para un valor ligeramente mayor del parámetro, se produce una bifurcación de tipo Poincaré-Andronov-Hopf, que da origen a un ciclo

límite estable y comportamiento periódico del sistema.

4. Partiendo de la bifurcación de Hopf supercrítica, se ha determinado la familia de ciclos límite estables que resultan y su posterior desaparición al colapsar con otro punto singular trivial.

5. Se ha comprobado que entonces desaparece el movimiento periódico estable en una bifurcación de "período infinito" que representa la transición a la inexistencia de movimiento estable en las proximidades [CK94].

6. Se ha comprobado que la aparición de la bifurcación del tipo Bogdanov-Takens a lo largo de la curva de bifurcaciones de Hopf (y también a lo largo de la curva de sillas-nodo) determina el punto de organización de la dinámica en el plano de parámetros. Tanto partiendo de la forma normal que obtuvo Bogdanov como de la que obtuvo Takens, este tipo de bifurcación permite un estudio analítico detallado (véanse [GH90],[Kuz98b],[Wig90b]) que se conoce con el nombre de despliegue ("unfolding") que determina las curvas de bifurcación existentes, las regiones de interés y la dinámica existente en las mismas.

7. No se ha observado comportamiento caótico durante el estudio numérico del sistema.

Capítulo 6

REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFÍA

Bibliografía

[AFGRL98] A. Algaba, E. Freire, E. Gamero, y A.J. Rodríguez-Luis, *Analysis of Hopf and Takens-Bogdanov bifurcations in a modified van der Pol-Duffing oscillator*, Nonlinear Dynamics **16** (1998), no. 4, 369–404.

[AG90] E. Allgower y K. Georg, *Numerical continuation methods. An introduction*, Springer-Verlag, New York, 1990.

[AG93] ———, *Continuation and path following*, Acta Numerica, Cambridge University Press (1993), 1–64.

[AP90] D. K. Arrowsmith y C. M. Place, *An introduction to dynamical systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990, (reprinted 1994).

[Arn88] V. I. Arnold, *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*, second ed., Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[BCD$^+$02] W. J. Beyn, A. Champneys, E. Doedel, W. Govaerts, Yu. A. Kuznetsov, y B. Sandstede, *Numerical continuation and computation of normal forms*, Handbook of Dynamical Systems: Vol 2 (B. Fiedler, G. Iooss, y N. Kopell, editores lit.), Elsevier, 2002, pp. 149–219.

[Bet98] V. Bettini, *Elementos de ecología urbana*, Ed. Trotta, Madrid, 1998.

[Bey84] W.-J. Beyn, *Defining equations for singular solutions and numerical applications*, Numerical Methods for Bifurcation Problems (Basel) (T. Küpper, H.D. Mittelmann, y H. Weber, editores lit.), ISNM 70, Birkhäuser Verlag, 1984, pp. 42–56.

[Bey90a] ______, *Global bifurcations and their numerical computation*, Continuation and Bifurcations: Numerical Techniques and Applications (Dordrecht) (D. Roose, B. De Dier, y A. Spence, editores lit.), NATO ASI Series C, Vol. 313, Kluwer Academic Publishers, 1990, pp. 169–182.

[Bey90b] ______, *The numerical computation of connecting orbits in dynamical systems*, IMA J. Numer. Anal. **9** (1990), 379–405.

[Bey91] ______, *Numerical methods for dynamical systems*, Advances in Numerical Analysis, Vol. I, Nonlinear Partial Differential Equations and Dynamical Systems (W. Light, editor lit.), Oxford University Press, 1991, pp. 175–236.

[Bey94] ______, *Numerical analysis of homoclinic orbits emanating from a Takens-Bogdanov point*, IMA J. Numer. Anal. **14** (1994), 381–410.

[BG94] L. Brenig y A. Goriely, *Painlevé analysis and normal forms*, Computer Algebra and Differential Equations (E. Tournier, editor lit.), Cambridge University Press, 1994, pp. 143–184.

[BGMW] A. Back, J. Guckenheimer, M. Myers, y P. Worfolk, *Dstool: Dynamical systems toolkit with interactive graphic interface, user's manual*, Cornell University.

[Bog81a] R. Bogdanov, *Bifurcations of a limit cycle for a family of vector fields on the plane*, Selecta Math. Soviet. **1** (1981), 373–388.

[Bog81b] ———, *Versal deformations of a singular point on the plane in the case of zero eigenvalues*, Selecta Math. Soviet. **1** (1981), 389–421.

[BR89] G. Birkhoff y G.-C. Rota, *Ordinary differential equations*, fourth ed., John Wiley & Sons, New York, N.Y., 1989.

[Bra93] M. Braun, *Differential equations and their applications*, fourth ed., Springer-Verlag, New York, 1993.

[Bru97] J. Bru, *Medio ambiente: poder y espectáculo*, Icaria, Barcelona, 1997.

[BS90] L. Belyakov y L. Shil'nikov, *Homoclinic curves and complex solitary waves*, Selecta Mathematica Sovietica **9** (1990), 219–228.

[BY98] Q. Bi y P. Yu, *Computation of normal forms of differential equations associated with non-semisimple zero eigenvalues*, International Journal of Bifurcation and Chaos **8** (1998), no. 12, 2279–2319.

[Car32] T. Carleman, *Application de la théorie des équations intégrales linéaires aux systèmes d'équations différentielles nonlinéaires*, Acta Math. **59** (1932), 63–68.

[Car81] J. Carr, *Applications of centre manifold theory*, Springer-Verlag, New York, 1981.

[CC01] J. Chattopadhday y S. Chatterjee, *Cross diffusional effect in a Lotka-Volterra competitive system*, Nonlinear Phenomena in Complex Systems **4** (2001), no. 4, 364–369.

[CD99] G. Chen y J. Della Dora, *Rational normal form for dynamical systems via Carleman linearization*, Proceedings of ISSAC-99 (Vancouver), ACM Press-Addison Wesley, 1999, pp. 165–172.

[CD00a] ______, *An algorithm for computing a new normal form for dynamical systems*, J. Symbolic Computation **29** (2000), 393–418.

[CD00b] ______, *Further reductions of normal forms for dynamical systems*, J. Differential Equations **166** (2000), 79–106.

[CDW90] S.N. Chow, B. Drachman, y D. Wang, *Computation of normal forms*, J. Comput. Appl. Math. **29** (1990), 129–143.

[CH82] S.N. Chow y J. K. Hale, *Methods of bifurcation theory*, Springer-Verlag, New York, 1982.

[Che01] G. Chen, *Further reduction of normal forms for vector fields*, Numerical Algorithms **25** (2001), 1–33.

[CK88] L. O. Chua y H. Kokubu, *Normal forms for nonlinear vector fields, Part I:theory and algorithm*, IEEE Trans. Circuits and Systems **35** (1988), no. 7, 863–880.

[CK89] ______, *Normal forms for nonlinear vector fields, Part II:applications*, IEEE Trans. Circuits and Systems **36** (1989), no. 1, 51–70.

[CK94] A. R. Champneys y Yu. A. Kuznetsov, *Numerical detection and continuation of codimension-two homoclinic bifurcations*, Int. J. of Bifurcation and Chaos **4** (1994), no. 4, 785–822.

[CKS96] A. R. Champneys, Yu. A. Kuznetsov, y B. Sandstede, *A numerical toolbox for homoclinic bifurcation analysis*, Int. J. of Bifurcation and Chaos **6** (1996), no. 5, 867–887.

[CL55] E. A. Coddington y N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, Krieger Publishing Co., Malabar, Florida,1984, 1955, (reprint of McGraw-Hill edition).

[CLW94] S.N. Chow, C. Li, y D. Wang, *Normal forms and bifurcation of planar fields*, Cambridge University Press, New York, 1994.

[CWW02] G. Chen, D. Wang, y X. Wang, *Unique normal forms for nilpotent planar vector fields*, International Journal of Bifurcation and Chaos **12** (2002), 2159–2174.

[dBS73] C. de Boor y B. Swartz, *Collocation at gaussian points*, SIAM J. Numer. Anal. **10** (1973), no. 4, 582–606.

[DCF+97] E. J. Doedel, A.R. Champneys, T. F. Fairgrieve, Yu. A. Kuznetsov, B. Sanstede, y X. Wang, *AUTO97: Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations (with HomCont): User's Manual*, Concordia University, Montreal, Canada, 1997.

[Den90] B. Deng, *Homoclinic bifurcations with nonhyperbolic equilibria*, SIAM J. Math. Anal. **21** (1990), 693–720.

[DFM94] E. J. Doedel, M. Friedman, y A. Monteiro, *On locating connecting orbits*, Applied Mathematics and Computation **65** (1994), 231–239.

[DHR81] C. Den Heijer y W. C. Rheinboldt, *On steplength algorithms for a class of continuation methods*, SIAM J. Numer. Anal. **18** (1981), no. 5, 925–948.

[DK86] E. J. Doedel y J. P. Kernévez, *AUTO: Software for continuation and bifurcation problems in ordinary differential equations*, Applied mathematics report, California Institute of Technology, Pasadena CA 91125, 1986.

[DKK91a] E. Doedel, H. B. Keller, y J. P. Kernévez, *Numerical analysis and control of bifurcation problems (I) bifurcation in finite dimensions*, Int. J. of Bifurcation and Chaos **1** (1991), no. 3, 493–520.

[DKK91b] ———, *Numerical analysis and control of bifurcation problems (II) bifurcation in infinite dimensions*, Int. J. of Bifurcation and Chaos **1** (1991), no. 4, 745–772.

[Doe97] E. Doedel, *Nonlinear numerics*, Int. J. of Bifurcation and Chaos **7** (1997), no. 9, 2127–2143.

[Doe99] E. J. Doedel, *Numerical analysis of bifurcation problems*, Technical report, Hamburg-Harburg Summer Schools, 1997, 1999.

[DP01] M. Droz y A. Pekalski, *Different strategies of evolution in a predator-prey system*, Physica A **298** (2001), 545–552.

[DPC+01] E. J. Doedel, R.C. Paffenroth, A.R. Champneys, T. F. Fairgrieve, Yu. A. Kuznetsov, B. Sanstede, y X. Wang, *AUTO2000: Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations (with HomCont)*, California Institute of Technology, 2001.

[DRS87] F. Dumortier, R. Roussarie, y J. Sotomayor, *Generic 3-parameter families of vector fields on the plane, unfolding a singularity with nilpotent linear part. the cusp case of codimension 3.*, Ergodic Theory & Dynamical Systems **3** (1987), 375–413.

[DS94] J. Della Dora y L. Stolovitch, *Normal forms of differential systems*, Computer Algebra and Differential Equations (E. Tournier, editor lit.), Cambridge University Press, 1994, pp. 143–184.

[DS95] B. Deng y K. Sakamoto, *Shil'nikov-Hopf bifurcations*, J. Differential Equations **119** (1995), no. 1, 1–23.

[DS01] K. Das y A.K. Sarkar, *Stability and bifurcation of two interacting species with time delay*, Nonlinear Phenomena in Complex Systems **4** (2001), no. 4, 406–411.

[DS02] ______, *Qualitative analysis of resource-based autotroph-hervibore model with delayed nutrient cycling*, Nonlinear Phenomena in Complex Systems **5** (2002), no. 1, 33–38.

[DWF98] E. Doedel, X. Wang, y T. Fairgrieve, *AUTO: Software for continuation and bifurcation problems in ordinary differential equations*, Tech. report, Applied Mathematics Report, CA, California Institute of Technology, 1998.

[EB96] A. M Edwards y J. Brindley, *Oscillatory behaviour in a three-component plankton population model*, Dyn. Stab. Syst.. **11** (1996), 347–370.

[EB99] ______, *Zooplankton mortality and the dynamical behaviour of plankton population models*, Bull. of Mathematical Biology **61** (1999), 303–339.

[EB01] A. M. Edwards y M. A. Bees, *Generic dynamics of a simple plankton population model with a non-integer exponent of closure*, Chaos Solitons and Fractals **12** (2001), no. 2, 289–300.

[Edw97] A. M. Edwards, *A rational dynamical-systems approach to plankton population modelling*, Tesis Doctoral, University of Leeds, U.K., 1997.

[Edw01] A. M. Edwards, *Adding detritus to a nutrient–phytoplankton–zooplankton model: a dynamical-systems approach*, Journal of Plankton Research **23** (2001), no. 4, 389–413.

[Ell91] S. Ellner, *Detecting low-dimensional chaos in population dynamics data: A critical review*, Chaos and Insect Ecology (A. Logan y F. P. Hain, editores lit.), Univ. Virg. Press, Blacksburg, VA, 1991, pp. 65–92.

[Erm01] Bard Ermentrout, *Xppaut 5.0*, Disponible en la dirección World Wide Web `http://www.math.pitt.edu/~bard/xpp/xpp.html`., 2001.

[Fer94] I. Fernández, *Metodología de medidas de calidades ambientales*, Seminario sobre el territorio litoral y su ordenación (J. Martínez y D. Casas, editores lit.), Ediciones de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, 1994, pp. 85–94.

[Fer98] ______, *La calidad de un ecosistema urbano. Su modelización*, preprint, 1998, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.

[FGP90] E. Freire, E. Gamero, y E. Ponce, *Symbolic computation and bifurcation methods*, Continuation and Bifurcations: Numerical Techniques and Applications (Dordrecht) (D. Roose, B. De Dier, y A. Spence, editores lit.), NATO ASI Series C, Vol. 313, Kluwer Academic Publishers, 1990, pp. 105–122.

[FGP05] I. Fernández, J.L. García, y J.M. Pacheco, *Bifurcation and Turing instabilities in a reaction-diffusion system with time-dependent diffusivities*, Rev. Acad. Canaria de Ciencias (2005), (aparecerá).

[FGPF88] E. Freire, E. Gamero, E. Ponce, y L. G. Franquelo, *An algorithm for symbolic computation of center manifolds*, Symbolic and Algebraic Computation (P.Gianni, editor lit.), vol. LNCS 358, Springer-Verlag, 1988, pp. 218–230.

[FJ91] T. Fairgrieve y A. Jepson, *O.K. Floquet multipliers*, SIAM J. Numer. Anal. **28** (1991), 1446–1462.

[FP01] I. Fernández y J.M. Pacheco, *Some mathematical aspects in the modelling of urban environmental quality*, Integrative approaches to natural and social dynamics (M. Matthies, H. Malchow, y W. Kriz, editores lit.), Springer Verlag, Berlin, 2001, pp. 235–248.

[FPZ+98] A. Flores, S. Pickett, W. Zipperer, R. Pouyat, y R. Pirani, *Adopting a modern ecological view of the metropolitan landscape: the case of a greenspace system for the New York City region*, Landsc. Urb. Plan. **39** (1998), no. 4, 295–308.

[FRLGP93] E. Freire, A. Rodríguez-Luis, E. Gamero, y E. Ponce, *A case study for homoclinic chaos in an autonomous electronic circuit: A trip from Takens-Bogdanov to Hopf- Shil'nikov*, Physica D **62** (1993), 230–253.

[FSEB99] H. Freedman, M. Singh, A. Easton, y I. Baggs, *Mathematical models of population distribution within a culture group*, Math. Comput. Model. **29** (1999), 57–67.

[Gae99] G. Gaeta, *Poincaré renormalized forms*, Ann. Inst. Henri Poincaré Phys. Théor. **70** (1999), 461–514.

[Gas93] P. Gaspard, *Local birth of homoclinic chaos*, Physica D **62** (1993), 94–122.

[GG83] P. Gaspard y G.Nicolis, *What can we learn from homoclinic orbits in chaotic dynamics?*, J. Stat. Phys. **31** (1983), 499–518.

[GH90] J. Guckenheimer y P. Holmes, *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, third ed., Springer-Verlag, Berlin, 1990, (corrected seventh printing, 2002).

[GH91] K. Gatermann y A. Hohmann, *Symbolic exploitation of symmetry in numerical path following*, Impact of Computing in Science and Engineering **3** (1991), no. 4, 330–365.

[GKG84] P. Gaspard, R. Kapral, y G.Nicolis, *Bifurcation phenomena near homoclinic systems: a two-parameter analysis*, J. Stat. Phys. **35** (1984), 697–727.

[Gle88] P. Glendinning, *Global bifurcations in flows*, New directions in dynamical systems (T. Bedford y J. Swift, editores lit.), London Math. Soc. Lecture Note Ser. , Vol. 127, Cambridge University Press, Cambridge, 1988, pp. 120–149.

[GM96] J. Guckenheimer y M. Myers, *Computing Hopf bifurcations II*, SIAM J. Sci. Comp. **17** (1996), no. 6, 1275–1301.

[GMS97] J. Guckenheimer, M. Myers, y B. Sturmfels, *Computing Hopf bifurcations I*, SIAM J. Num. Anal. **34** (1997), no. 1, 1–21.

[GQP02] J. García-Quesada y J.M. Pacheco, *Análisis de bifurcaciones en modelos de calidad ambiental urbana*, Congreso de la Real Sociedad Matemática Española, 2002.

[GQPlN04] J. García-Quesada, J.M. Pacheco, y I. Fernández De la Nuez, *Bifurcaciones en modelos de calidad ambiental urbana*, Congreso Nolineal 2004, 2004.

[GR83] A. Griewank y G. W. Reddien, *The calculation of Hopf points by a direct method*, IMA J. Numer. Anal. **3** (1983), 295–303.

[Gra02] P. Grassberger, *Critical behaviour of the drossel-schwabl forest fire model*, New Journal of Physics **4** (2002), 17.1–17.15.

[Gru92] J. Gruewdler, *Homoclinic solutions of autonomous dynamical systems in arbitrary dimensions*, SIAM J. Math. Anal. **23** (1992), 702–722.

[GS84] P. Glendinning y C. Sparrow, *Local and global behaviour near homoclinic orbits*, J. Stat. Phys. **35** (1984), no. 5/6, 645–696.

[GW93] J. Guckenheimer y P. Worfolk, *Dynamical systems: some computational problems*, Bifurcations and Periodic Orbits of Vector Fields (Dordrecht) (D. Schlomiuk, editor lit.), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., Kluwer, 1993, pp. 241–278.

[Has80] B. Hassard, *Computation of invariant manifolds*, New Approaches to Nonlinear Problems in Dynamics (Philadelphia, PA) (P. Holmes, editor lit.), SIAM, 1980, pp. 27–42.

[HK84] M. Holodniok y M. Kubiček, *Continuation of periodic solutions in ordinary differential equations-numerical algorithm and application to Lorenz model*, Numerical Methods for Bifurcation Problems (Basel) (T. Küpper, H.D. Mittelmann, y H. Weber, editores lit.), ISNM 70, Birkhäuser Verlag, 1984, pp. 181–194.

[HK93] P. Hirschberg y E. Knobloch, *Shil'nikov-Hopf bifurcations*, Physica D **62** (1993), 202–216.

[HKK93] A. Homburg, H. Kokubu, y M. Krupa, *The cusp horseshoe and its bifurcations in the unfolding of an inclination-flip homoclinic orbit*, (technical report) Department of Math., Univ. of Groningen, 1993.

[HKK94] ______, *The cusp horseshoe and its bifurcations in the unfolding of an inclination-flip homoclinic orbit*, Erg. Th. Dyn. Syst. **14** (1994), 667–693.

[HKW81] B. D. Hassard, N. D. Kazarinoff, y Y.-H. Wan, *Theory and applications of Hopf bifurcation*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1981.

[Hol65] C. S. Holling, *The functional response of predators to prey density and its role in mimicry and population regulation*, Mem. Entomol. Soc. Can. **45** (1965), 5–60.

[Hop42] E. Hopf, *Bifurcation of a periodic solution from a stationary solution of a system of differential equations*, Ber. Math. Phys. Klasses Sachs. Akad. Wiss. **94** (1942), 3–22.

[HS74] M. Hirsch y S. Smale, *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*, Academic Press, New York, 1974.

[Jan95] W. Jansen, *CANDYS/QA algorithms, programs and user's manual*, Interdisziplinäres Zentrum für Nichtlineare Dynamik, Universität Potsdam, 1995.

[JS99] D. W. Jordan y P. Smith, *Nonlinear ordinary differential equations*, third ed., Oxford University Press, Oxford, 1999.

[Kau95] R. Kaufmann, *The economic multiplier of environmental life support: can capital substitute for a degraded environment?*, Ecol. Econ. **12** (1995), no. 1, 67–79.

[KDFR01] Yu. A. Kuznetsov, O. De-Feo, y S. Rinaldi, *Belyakov homoclinic bifurcations in a tritrophic food chain model*, SIAM J. Appl. Math. **62** (2001), no. 2, 462–487.

[Kel67] A. Kelley, *The stable, center stable, center, center unstable and unstable manifolds*, J. Differential Equations **3** (1967), 546–570.

[Kel77] H. B. Keller, *Numerical solution of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems*, Applications of bifurcation theory (P. Rabinowitz, editor lit.), Academic Press, New York, 1977, pp. 359–384.

[KH84] M. Kubiček y M. Holodniok, *Numerical determination of bifurcation points in steady state and periodic solutions-numerical algorithms and examples*, Numerical Methods for Bifurcation Problems (Basel) (T. Küpper, H.D. Mittelmann, y H. Weber, editores lit.), ISNM 70, Birkhäuser Verlag, 1984, pp. 247–270.

[Khi90] A. I. Khibnik, *LINLBF:A program for continuation and bifurcation analysis of equilibria up to codimension three*, Continuation and Bifurcations: Numerical Techniques and Applications (Dordrecht) (D. Roose, B. De Dier, y A. Spence, editores lit.), NATO ASI Series C, Vol. 313, Kluwer Academic Publishers, 1990, pp. 283–296.

[KJ84] H.B. Keller y A.D. Jepson, *Steady state and periodic solution paths: their bifurcations and computations*, Numerical Methods for Bifurcation Problems (Basel) (T. Küpper, H.D. Mittelmann, y H. Weber, editores lit.), ISNM 70, Birkhäuser Verlag, 1984, pp. 219–246.

[KKK90] M. Kleczka, W. Kleczca, y E. Kreuzer, *Bifurcation analysis: a combined numerical and analytical approach*, Continuation and Bifurcations: Numerical Techniques and Applications (Dordrecht) (D. Roose, B. De Dier, y A. Spence, editores lit.), NATO ASI Series C, Vol. 313, Kluwer Academic Publishers, 1990, pp. 123–138.

[KKLN92] A. I. Khibnik, Yu. A. Kuznetsov, V. V. Levitin, y E. V. Nikolaev, *Interactive LOCcal BIFurcation analyzer*, Computer Algebra Netherlands, 1992, (LOCBIF version 2.2).

[KKLN93] ———, *Continuation techniques and interactive software for bifurcation analysis of ODEs and iterated maps*, Physica D **62** (1993), 360–371.

[KL97] Yu. A. Kuznetsov y V.V. Levitin, CONTENT-*a multiplataform environment for analyzing dynamical systems*, Dynamical Systems Laboratory, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam, 1997.

[KLSD90] J. P. Kernevez, Y. Lui, M.L. Seoane, y E.J. Doedel, *Optimization by continuation*, Continuation and Bifurcations: Numerical Techniques and Applications (Dordrecht) (D. Roose, B. De Dier, y A. Spence, editores lit.), NATO ASI Series C, Vol. 313, Kluwer Academic Publishers, 1990, pp. 349–362.

[KMR92] Yu. A. Kuznetsov, S. Muratori, y S. Rinaldi, *Bifurcations and chaos in a periodic predator-prey model*, Int. J. of Bifurcation and Chaos **2** (1992), no. 1, 117–128.

[KR95] Yu. A. Kuznetsov y S. Rinaldi, *Remarks on food chains dynamics*, Tech. report, CWI Report AM-R9513, 1995.

[KS97] H. Kantz y Th. Schreiber, *Nonlinear time series analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1997.

[Kuz90] Yu. A. Kuznetsov, *Computation of invariant manifold bifurcations*, Continuation and Bifurcations: Numerical Techniques and Applications (Dordrecht) (D. Roose, B. De Dier, y A. Spence, editores lit.), NATO ASI Series C, Vol. 313, Kluwer Academic Publishers, 1990, pp. 183–196.

[Kuz98a] ———, CONTENT-*integrated environment for analysis of dynamical systems. Tutorial*, Institute of Mathematical Problems of Biology, Russian Academy of Sciences, 1998.

[Kuz98b] Yu. A. Kuznetsov, *Elements of applied bifurcation theory*, second ed., vol. 112 of Applied Mathematical Sciences, Springer, New York, 1998.

[Kuz99] ———, *Numerical normalization techniques for all codim 2 bifurcations of equilibria in ODE's*, SIAM J. Numer. Anal. **36** (1999), no. 4, 1104–1124.

[Lin90] X.-B. Lin, *Using Melnikov's method to solve Shil'nikov's problems*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh A, vol. 116, 1990, pp. 295–325.

[Lor63] E. N. Lorenz, *Deterministic nonperiodic flow*, J. Atmos. Sci. **20** (1963), 130–141.

[Lor64] ______, *The problem of deducing the climate from the governing equations*, Tellus **16** (1964), no. 1, 1–11.

[LT85] P. Lancaster y M. Tismenetsky, *The theory of matrices*, Academic Press, S. Diego, 1985.

[Mar64] G. Marsh, *Man and nature*, The Belknap Press, Cambridge, Mass., 1864, 1965 edition.

[MB99] G. McIsaac y M. Brün, *Natural environment and human culture: defining terms and understanding world views*, J. Environ. Qual. **28** (1999), 1–10.

[MC79] A. I. Mees y L. O. Chua, *The Hopf bifurcation theorem and its applications to nonlinear oscillations in circuits and systems*, IEEE Trans. Circ. and Systems CAS **26** (1979), 235–254.

[Mer96] J. Merrifield, *A market approach to conserving biodiversity*, Ecol. Econ. **16** (1996), no. 3, 217–226.

[Mey94] K. R. Meyer, *Perturbation analysis of nonlinear systems*, Computer Algebra and Differential Equations (E. Tournier, editor lit.), Cambridge University Press, 1994, pp. 103–140.

[MGS90] G. Moore, T.J. Garrat, y A. Spence, *The numerical detection of Hopf bifurcations points*, Continuation and Bifurcations: Numerical Techniques and Applications (Dordrecht) (D. Roose, B. De Dier, y A. Spence, editores lit.), NATO ASI Series C, Vol. 313, Kluwer Academic Publishers, 1990, pp. 227–246.

[Mit84] H.D. Mittelmann, *Continuation near simmetry-breaking bifurcation points*, Numerical Methods for Bifurcation Problems (Basel) (T. Küpper, H.D. Mittelmann, y H. Weber, editores lit.), ISNM 70, Birkhäuser Verlag, 1984, pp. 319–334.

[MM78] J. E. Marsden y M. McCracken, *The Hopf bifurcation and its applications*, Springer-Verlag, New York, 1978.

[Moo80] Moore, *The numerical treatment of non-trivial bifurcation point*, Numer. Funct. Anal. and Optimiz. **2** (1980), no. 6, 441–472.

[Moo95] G. Moore, *Computation and parametrisation of periodic and connecting orbits*, IMA J. Numer. Anal. **15** (1995), 319–331.

[MS77] K.R. Meyer y D.S. Schmidt, *Entrainment domains*, Funkcialaj Ekvacioj **20** (1977), 171–192.

[Mul93] T. Mullin, *A multiple bifurcation point as an organizing centre for chaos*, The Nature of Chaos, Oxford University Press, 1993, pp. 51–68.

[MY95] K. MacCann y P. Yodzis, *Bifurcation structure of a three-species food chain model*, Theoretical Population Biology **48** (1995), no. 2, 93–125.

[Nay93] A. H. Nayfeh, *Method of normal forms*, John Wiley & Sons, New York, 1993.

[NR95] P. Nijkamp y A. Regiani, *Non-linear evolution of dynamic spatial systems: the relevance of chaos and ecologically based models*, Reg. Sci. Urban Econ. **25** (1995), no. 2, 183–210.

[Oze87] P. Ozello, *Calcul exact des formes de Jordan et de Frobenius d'une matrice*, Tesis Doctoral, Université de Grenoble 1, France, 1987.

[Pac96] J.M. Pacheco, *Reaction-diffusion equations and economic cycles*, J. Inst. Math. Comp. Sci. **9** (1996), no. 2, 137–144.

[Pat01] A. K. Pattanayak, *Characterizing the metastable balance between chaos and diffusion*, Physica D **148** (2001), 1–19.

[Pav85] R. Pavelle, editor lit., *Applications of computer algebra*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1985.

[Per01] L. Perko, *Differential equations and dynamical systems*, 3 ed., Springer-Verlag, New York, 2001.

[PRF97] J. M. Pacheco, C. Rodríguez, y I. Fernández, *Hopf bifurcations in a predator-prey model with social predator behaviour*, Ecological Modelling **105** (1997), 83–87.

[RA87] R. H. Rand y D. Ambruster, *Perturbation method, bifurcation theory and computer algebra*, Appl. Math. Sci, no. 65, Springer-Verlag, 1987.

[Rad98] B. Radtke, *Bifurkationen in einem modell mariner planktondynamik*, Master's thesis, Universität Osnabrück, 1998.

[RC78] R. D. Russell y J. Christiansen, *Adaptive mesh selection strategies for solving boundary value problems*, SIAM J. Numer. Anal. **15** (1978), 59–80.

[RCM98] D. Rapport, R. Costanza, y A. McMichael, *Assesing ecosystem health*, Trends Ecol. Evol. **13** (1998), no. 10, 397–402.

[RL91] A. J. Rodríguez-Luis, *Bifurcaciones multiparamétricas en osciladores autónomos*, Tesis Doctoral, 1991.

[RLFP90] A. J. Rodríguez-Luis, E. Freire, y E. Ponce, *A method for homoclinic and heteroclinic continuation in two and three dimensions*, Continuation and Bifurcations: Numerical Techniques and Applications (Dordrecht) (D. Roose, B. De Dier, y A. Spence, editores lit.), NATO ASI Series C, Vol. 313, Kluwer Academic Publishers, 1990, pp. 197–210.

[Rod99] J. Rodríguez, *Ecología*, Ediciones Pirámide, Madrid, 1999.

[RRS90] W.C. Rheinboldt, D. Roose, y R. Seydel, *Aspects of continuation software*, Continuation and Bifurcations: Numerical Techniques and Applications (Dordrecht) (D. Roose, B. De Dier, y A. Spence, editores lit.), NATO ASI Series C, Vol. 313, Kluwer Academic Publishers, 1990, pp. 261–268.

[RS01] V. Rai y W. M. Schaffer, *Chaos in ecology*, Chaos, Solitons and Fractals **12** (2001), 197–203.

[RSD90] D. Roose, A. Spence, y B. De Dier, editores lit., *Continuation and bifurcations: Numerical techniques and applications*, Kluwer, Dordrecht, 1990.

[San94] J. Sanders, *Versal normal form computation and representation theory*, Computer Algebra and Differential Equations (E. Tournier, editor lit.), Cambridge University Press, 1994, pp. 185–210.

[San97] B. Sandstede, *Convergence estimates for the numerical approximation of homoclinic solutions*, IMA J. Numer. Anal. **17** (1997), 437–462.

[SdM99] I. Sánchez de Madariaga, *Introducción al Urbanismo*, Alianza Editorial, Madrid, 1999.

[Sey79] R. Seydel, *Numerical computation of branch points in nonlinear equations*, Numer. Math. **33** (1979), 339–352.

[Sey84] ______, *A continuation algorithm with step control*, Numerical Methods for Bifurcation Problems (Basel) (T. Küpper, H.D. Mittelmann, y H. Weber, editores lit.), ISNM 70, Birkhäuser Verlag, 1984, pp. 480–494.

[Sey91] ______, *Tutorial on continuation*, Int. J. of Bifurcation and Chaos **1** (1991), no. 1, 3–11.

[Shi65] L. Shil'nikov, *A case of existence of a countable number of periodic motions*, Soviet Math. Dokl **6** (1965), 163–166.

[Shi66] ______, *On the generation of a periodic motion from a trajectory which leaves and re-enters a saddle-saddle state of equilibrium*, Soviet Math. Dokl. **7** (1966), 1155–1158.

[Shi67a] ______, *The existence of a denumerable set of periodic motions in four-dimensional space in a extended neighborhood of a saddle-focus*, Soviet Math. Dokl. **8** (1967), 54–58.

[Shi67b] ______, *On a Poincaré-Birkhoff problem*, Math. USSR-Sb **3** (1967), 353–371.

[Shi69] ______, *On a new type of bifurcation of multidimensional dynamical systems*, Soviet Math. Dokl **10** (1969), 1368–1371.

[Shi76] I. P. Shil'nikov, *Theory of the bifurcation of dynamical systems and dangerous boundaries*, Sov. Phys. Dokl. **20** (1976), no. 10, 674–676.

[Sij85] J. Sijbrand, *Properties of center manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **289** (1985), 431–464.

[Sma67] S. Smale, *Differentiable dynamical systems*, Bull. Am. Math. Soc. **73** (1967), 747–817.

[Smi96] F. Smith, *Biological diversity, ecosystem stability and economic development*, Ecol. Econ. **16** (1996), no. 3, 191–203.

[Son01] M. Sonis, *Socio-spatial dynamics and control of bifurcations*, Nonlinear Phenomena in Complex Systems **4** (2001), no. 3, 264–279.

[SPM$^+$01] W. M. Schaffer, B.S. Pederson, B.K. Moore, O. Skarpans, A.A. King, y T.V. Bronnikova, *Sub-harmonic resonance and multi-annual oscillations in northern mammals: a non-linear dynamical systems perspective*, Chaos, Solitons and Fractals **12** (2001), 251–264.

[Str94] S. H. Strogatz, *Nonlinear dynamics and chaos*, Perseus Publishing, Cambridge, Massachussets, 1994.

[SWW01] K. Sznajd-Weron y R. Weron, *A new model of mass extinctions*, Physica A **293** (2001), 559–565.

[Tak73a] F. Takens, *Normal forms for certain singularities of vector fields*, Ann. Inst. H. Fourier **23** (1973), 163–195.

[Tak73b] ———, *Unfoldings of certain singularities of vector fields : Generalized Hopf bifurcations*, J. Differential Equations **14** (1973), 476–493.

[Tak74a] ———, *Forced oscillations and bifurcations*, Com. Math. Inst., Rijk Universiteit Utrecht **3** (1974), 1–59.

[Tak74b] F. Takens, *Singularities of vector fields*, Publ. Math. IHES **43** (1974), 47–100.

[TB94] J.E. Truscott y J. Brindley, *Equilibria, stability and excitability in a general class of plankton population models*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A **347** (1994), 703–718.

[TK75] L. Talbot y R. Kesel, *The tropical savannah ecosystem*, Geosci. Man. **10** (1975), 15–26.

[Tre84a] C. Tresser, *About some theorems by L. P. Shil'nikov*, Ann. Inst. H. Poincaré **40** (1984), 441–461.

[Tre84b] ______, *Homoclinic orbits for flows in* $\mathbb{R}^3$, J. Phys. Lett. Paris **45** (1984), no. 5, 837–841.

[Tru95] J.E. Truscott, *Environmental forcing of simple plankton models*, Journal of Plankton Research **17** (1995), no. 12, 2207–2232.

[TS95] D. Turaev y L. Shil'nikov, *Blue sky catastrophes*, Dokl Math. **51** (1995), 404–407.

[UR01] R. K. Upadhyay y V. Rai, *Crisis-limited chaotic dynamics in ecological systems*, Chaos, Solitons and Fractals **12** (2001), 205–218.

[Ush84] S. Ushiki, *Normal forms for singularities of vector fields*, Japan J. Appl. Math. **1** (1984), 1–34.

[Van89] A. Vanderbauwhede, *Center manifolds, normal forms and elementary bifurcations*, Dynamics Reported **2** (1989), 89–169.

[Ver90] F. Verhulst, *Nonlinear differential equations and dynamical systems*, Springer-Verlag, New York, 1990.

[vS79] S. van Strien, *Center manifolds are not* C^∞, Mat. Z. **166** (1979), 143–145.

[VSB01] J. Vandermeer, L. Stone, y B. Blasius, *Categories of chaos and fractal basin boundaries in forced predator-prey models*, Chaos, Solitons and Fractals **12** (2001), 265–276.

[Was71] E. Wasserstrom, *Root finding of polynomials as an initial value problem*, J. Computational Phys. **8** (1971), 304–308.

[Wer84] B. Werner, *Regular systems for bifurcation points with underlying symmetries*, Numerical Methods for Bifurcation Problems (Basel) (T. Küpper, H.D. Mittelmann, y H. Weber, editores lit.), ISNM 70, Birkhäuser Verlag, 1984, pp. 562–574.

[Wig88] S. Wiggins, *Global bifurcations and chaos (analytical methods)*, Springer-Verlag, New York, 1988.

[Wig90a] ______, *Introduction to applied dynamical systems and chaos*, Springer-Verlag, New York, 1990.

[Wig90b] ______, *Introduction to applied non-linear dynamical systems and chaos*, Springer-Verlag, New York, 1990.

[Wig03] ______, *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, second ed., Springer-Verlag, New York, 2003.

[Yu99] P. Yu, *Simplest normal forms of Hopf and generalized Hopf bifurcations*, Int. J. of Bifurcation and Chaos **9** (1999), no. 10, 1917–1939.

[Zhe89] M. Zhen, *A numerical approximation for the simple bifurcation problems*, Numer. Funct. Anal. and Optimiz. **10** (1989), no. 3 and 4, 383–400.