

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Programa de doctorado:
Física, Matemáticas, Geología y Clima

ANÁLISIS FRACTAL DE
PROCESOS DINÁMICOS EN
EL OCÉANO



Laura Cabrera Brito
Las Palmas de G.C.
29 de Octubre, 2015



**D^a ÁNGELES MARRERO DÍAZ SECRETARIA DEL
DEPARTAMENTO DE FÍSICA DE LA UNIVERSIDAD DE LAS
PALMAS DE GRAN CANARIA,**

CERTIFICA,

Que el Consejo de Doctores del Departamento en su sesión de fecha.....tomó el acuerdo de dar el consentimiento para su tramitación, a la tesis doctoral titulada “Análisis fractal de procesos dinámicos en el océano” presentada por el/la doctorando/a D/D^a Laura Cabrera Brito y dirigida por los Doctores Germán A. Rodríguez Rodríguez y Luís F. García Weil.

Y para que así conste, y a efectos de lo previsto en el Artº 6 del Reglamento para la elaboración, defensa, tribunal y evaluación de tesis doctorales de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, firmo la presente en Las Palmas de Gran Canaria, a de Octubre de dos mil quince.

Anexo II

Departamento/Instituto/Facultad **257-FÍSICA**

Programa de doctorado **FÍSICA, MATEMÁTICAS, GEOLOGÍA Y CLIMA**

Título de la Tesis

ANÁLISIS FRACTAL DE PROCESOS DINÁMICOS EN EL OCÉANO

Tesis Doctoral presentada por D^a Laura Cabrera Brito

Dirigida por el Dr. D. Germán A. Rodríguez Rodríguez

Codirigida por el Dr. D. Luís F. García Weil

El Director,

(firma)

El Codirector,

(firma)

El Doctorando,

(firma)

Las Palmas de Gran Canaria, a 29 de Octubre de 2015

Resumen

La mayoría de los procesos que se dan en la naturaleza son el resultado de las interacciones lineales y no lineales entre diversas contribuciones operando a diferentes escalas espaciales y temporales. En particular, el sistema atmósfera-océano representa un ejemplo claro de un sistema fuertemente acoplado y complejo, caracterizado por su dinámica turbulenta, con fluctuaciones que cubren un amplio rango de escalas. El conocimiento del comportamiento de los procesos naturales y en especial de los fluidos ambientales, atmósfera y océano, es fundamental para el ser humano, así como para el resto de seres vivos, dado que gracias a ellos es posible la vida y en ellos el hombre desarrolla infinidad de actividades. No obstante, la complejidad de dichos procesos hace que su estudio se deba abordar en el dominio de los procesos estocásticos, atendiendo particularmente a las características relativas a la correlación entre observaciones separadas por diferentes intervalos de tiempo que, salvo casos excepcionales, es un rasgo común en los procesos naturales. En este sentido, la dependencia a largo plazo implica la presencia de correlaciones que se atenúan muy lentamente, siguiendo una ley de potencias, permitiendo que el pasado lejano influya el futuro. En general, el comportamiento siguiendo leyes de potencias en los estadísticos empleados para describir los patrones de las fluctuaciones temporales de un proceso indica la presencia de una estructura fractal con invarianza de escalas del sistema examinado, y se manifiesta a través de comportamientos auto- semejantes que bajo ciertas condiciones implican dependencias a largo plazo. En este contexto, el concepto de geometría fractal adaptado al estudio de series temporales proporciona un marco atractivo para el análisis de fenómenos naturales en numerosas ramas de la ciencia. El objetivo principal del presente trabajo consiste en identificar la existencia, o no, de comportamientos estadísticamente auto- semejantes y de dependencia a largo plazo en series temporales de procesos físicos en el océano, mediante el análisis de la estructura monofractal y multifractal de las mismas. Para ello se emplean las metodologías de análisis de fluctuaciones sin tendencias (*DFA*) y su extensión multifractal (*MF DFA*).

Abstract

Most natural processes lead to complexity as a consequence of the effects of linear and non-linear interactions over different spatial and temporal scales. A good example of a complex system is the coupled ocean-atmosphere system, characterized by its turbulence dynamics, which fluctuations cover a wide range of scales.

Knowledge on natural systems behaviour, especially on environmental fluid dynamics, is essential for human beings as well as for the rest of living organisms. Many human activities take place on the oceans and thanks to them life is possible on Earth. However, complexity forces the research perspective to be within the framework of stochastic processes, specially attending to correlation properties among observations separated by different temporal periods, which, except for some rare cases, is a common characteristic of natural phenomena.

Long range correlations refer to the slow decay of the temporal correlation function, allowing the far away past to influence the future, rather than being independent of it. In general, processes with power law decaying statistics point to fractal structures with scale invariance that reveals itself through self-similar behaviours, which under certain circumstances are long range dependent. In the time series analysis context, fractal geometry provides an interesting framework to study natural phenomena.

The aim of the present work consists on identifying statistical self-similar behaviours and long range correlations in time series resulting from physical processes in the ocean, through the analysis of mono- and multifractal structures by means of the detrended fluctuation analysis, *DFA*, and its multifractal extension, *MF DFA*.

Agradecimientos

Nunca estuvo en mis planes continuar estudiando y mucho menos hacer un doctorado, por eso todavía me sorprende, cuando lo pienso, haber llegado hasta el final con esta tesis. Por un lado, me parece que fue ayer cuando llegué de Valencia, pero por otro tengo la sensación de llevar toda la vida en ese despacho del Departamento de Física discutiendo y dándole vueltas a los fractales con Germán. Lo he disfrutado mucho e incluso, podría decir que encontré en mi una vocación investigadora y un gusto por aprender más totalmente inesperado. Todavía alguno se ríe cuando digo que ahora me sacarían la carrera de Matemáticas y alguna más ... No sé que pasará a partir de ahora, pero estoy segura de que siempre me acordaré de esta época con mucho cariño.

Mi tutor, Germán Rodríguez Rodríguez, quien sin duda me ha contagiado su gusto por pensar, por saber más, por la investigación. Luís García Weil, cotutor, siempre disponible y sin duda, un apoyo en los momentos más estresantes. Tampoco puedo dejar de nombrar a mi familia, en especial a mis padres, que han tirado de mí en los malos ratos y no me han permitido tirar la toalla. A Cecita. Mis hermanos, a veces lejos a veces cerca, pero siempre conmigo. Ana, que es la única que entiende mis depresiones de 15 minutos. Los ánimos que me han llegado desde Málaga y Londres, Carlos y Ale gracias. Mis niñas todas, Rakel y David, gracias por los ratitos buenos y las cañas a tiempo. Y Edu, gracias por cogerme de la mano, gracias por darme la razón cuando no la tengo, gracias por las batallas campales.

A todos, mil gracias

Gracias al Departamento de Física de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria y en particular al grupo de investigación de Física Marina y Teledetección Aplicada (FIMATA), que me ha facilitado todo lo necesario para realizar esta tesis y donde me han acogido estos últimos años. Gracias al Leibniz-Institute of Marine Science (Kiel-Alemania), en particular a Joanna J. Waniek, por proporcionar los datos de corriente empleados en el capítulo 3, sección 3.

Índice general

1. Introducción	1
2. Fenómenos de escala: Análisis Monofractal y Multifractal	5
2.1. Fundamentos Teóricos	6
2.1.1. Procesos estocásticos	6
2.1.2. Estacionariedad y ergodicidad	10
2.1.3. Auto-semejanza	15
2.1.4. Estructura fractal	18
2.1.5. Dependencia a largo plazo	21
2.1.6. Colas pesadas	23
2.2. Origen de la multifractalidad	24
2.2.1. Evaluación de la componente lineal	26
2.2.2. Evaluación de la componente no lineal	26
2.3. Metodologías de análisis clásicas y modernas	29
2.3.1. Análisis R/S	31
2.3.2. Detrended Fluctuation Analysis, DFA	36
2.3.3. Multifractal Detrended Fluctuation Analysis, MFDFA	40
2.3.4. Ventajas e Inconvenientes, DFA-MFDFA	42
3. Propiedades fractales de procesos físicos en el océano	47
3.1. Fractalidad de la Temperatura Superficial del Mar	49
3.1.1. Zona de estudio	52
3.1.2. Base de datos	58
3.1.3. Resultados y Discusión	65
3.1.4. Conclusiones	85

3.2.	Estructura fractal de la Energía Cinética Turbulenta	87
3.2.1.	Zona de Estudio y Datos	93
3.2.2.	Resultados y Discusión	100
3.2.3.	Conclusiones	110
3.3.	Propiedades fractales y multi-fractales de las Corrientes Marinas . . .	112
3.3.1.	Zona de estudio y datos	114
3.3.2.	Resultados y Discusión	120
3.3.3.	Conclusiones	127
3.4.	Propiedades de escala de la altura de ola significativa	129
3.4.1.	Zona de estudio y Datos	134
3.4.2.	Resultados y Discusión	139
3.4.3.	Conclusiones	143
4.	Conclusiones y líneas de investigación futuras	145
	Bibliografía	148

Capítulo 1

Introducción

La mayoría de los procesos naturales son el resultado de interacciones lineales y no lineales entre numerosas contribuciones, o componentes, operando a diferentes escalas espaciales y temporales. Por ello, en general, los procesos naturales presentan patrones de comportamiento muy complejos. En particular, el sistema atmósfera-océano representa un ejemplo típico de sistema fuertemente acoplado y se caracteriza por exhibir una dinámica turbulenta, de modo que los procesos físicos que ocurren en dichos fluidos ambientales tienen un carácter intrínsecamente turbulento, con fluctuaciones que cubren un rango amplio y prácticamente continuo de escalas espaciales (desde la escala global hasta la disipativa) y temporales (desde fracciones de segundo hasta décadas). Lo anterior es particularmente cierto en la superficie del océano, interfase entre estos dos medios, donde su acoplamiento mutuo es especialmente notable.

El avance en el conocimiento del comportamiento de estos medios fluidos resulta de enorme importancia para el ser humano, así como para el resto de los seres vivos, dado que gracias a ellos es posible la vida y en ellos el hombre desarrolla infinidad de actividades. No obstante, la citada complejidad de los procesos naturales, en particular, de los procesos físicos que tienen lugar en la atmósfera y en el océano, hace que su estudio mediante el uso de modelos deterministas, derivados a partir de las leyes fundamentales de la mecánica de los fluidos geofísicos, no resulte una vía especialmente útil. En consecuencia, la aproximación más común para su estudio es la de obtener series de observaciones experimentales a lo largo del tiempo y examinar sus características en el dominio de los procesos estocásticos, considerando

dichas series como representativas del proceso bajo las suposiciones de ergodicidad y estacionaridad.

Las principales características de la componente estocástica de una serie temporal, obtenida tras eliminar las tendencias y patrones cíclicos presentes en la misma, son la función de densidad de probabilidad y la correlación entre observaciones separadas por diferentes intervalos de tiempo. La función de densidad de probabilidad aporta información sobre la frecuencia de ocurrencia de los diferentes valores adoptados por la variable observada, pero carece de información relativa a la posible dependencia entre tales valores. Salvo en casos muy excepcionales, las series temporales de procesos naturales presentan un cierto grado de dependencia entre valores adyacentes, que puede ser de carácter débil, fenómeno conocido como dependencia a corto plazo, o fuerte, caso en el que se habla de dependencia a largo plazo, correlación a largo plazo, o persistencia. Las correlaciones a corto plazo indican una disminución de la dependencia entre valores con la separación, o desfase, temporal entre estos, llegando a ser nula más allá de un cierto tiempo de relajación. Por el contrario, la dependencia a largo plazo implica la presencia de correlaciones que se atenúan muy lentamente, permitiendo que el pasado lejano influya el futuro. Así, en general, un proceso con dependencia a largo plazo se caracteriza por tener una función de auto-correlación que obedece a una ley de potencias para desfases temporales largos o, lo que es equivalente, la función de densidad espectral de varianzas sigue asintóticamente una ley de potencias, definida por un exponente de escala, para las frecuencias cercanas a cero.

En general, el comportamiento siguiendo leyes de potencias en los estadísticos empleados para describir los patrones de las fluctuaciones temporales del proceso indica la presencia de una estructura fractal con invarianza de escalas del sistema examinado (Gouyet 1996; Turcotte 1997), aunque pueden encontrarse situaciones particulares en las que existe una ley de potencias no relacionada con la geometría fractal subyacente. La invarianza de escalas, entendida de forma no rigurosa, significa que dentro de un cierto rango de escalas, acotado por un límite superior y otro inferior, no es posible identificar una escala característica o que desempeñe un papel preponderante. Los comportamientos a diferentes escalas son en cierto sentido equivalentes, y pueden ser expresados por una propiedad de invarianza de escalas u

operación de renormalización.

La invarianza de escalas se puede manifestar a través de comportamientos auto-
semejantes (dos subconjuntos de un todo observados a diferentes escalas son idénti-
cos, bien de forma exacta o estadísticamente) que bajo ciertas condiciones implican
dependencias a largo plazo.

No obstante, aunque la auto-
semejanza estadística, o invarianza de las propie-
dades estadísticas de un proceso con la escala, es un rasgo distintivo de los procesos
fractales, no representa un requerimiento. Además, la auto-
semejanza de un proceso no implica la existencia de dependencias a largo plazo en el mismo, ni la depen-
dencia a largo plazo conlleva necesariamente asociada la auto-
semejanza del mismo. Sin embargo, Mandelbrot & Van Ness (1968), proporcionaron la conexión entre los
procesos auto-
semejantes y la dependencia a largo plazo en series estacionarias.

En definitiva, el concepto de geometría fractal adaptado al estudio de series
temporales está fuertemente relacionado con la invarianza de escalas y la existencia
de dependencias a largo plazo y proporciona un marco atractivo para el análisis de
fenómenos naturales en numerosas ramas de la ciencia. No obstante, es importante
tener en cuenta que aunque para caracterizar el comportamiento de determinados
procesos es suficiente con un único exponente de escala, en cuyo caso se habla de
proceso monofractal, en las dos últimas décadas se ha puesto de manifiesto que
para describir unívocamente las características de escala de series temporales de
numerosos procesos naturales se requiere el uso de múltiples exponentes de escala,
indicando una naturaleza multifractal del proceso.

Durante las tres últimas décadas, el número de trabajos examinando la existen-
cia de estructura fractal en series temporales correspondientes a una gran cantidad
de procesos naturales, así como en las ciencias sociales, ha aumentado significativa-
mente. En particular, esto ha ocurrido en varias áreas de la Geofísica, tales como
la Sismología, la Hidrología, la Meteorología y la Climatología. Sin embargo, no ha
ocurrido lo mismo en el campo de la Dinámica Marina.

En consecuencia, el objetivo principal del presente trabajo consiste en identificar
la existencia, o no, de comportamientos estadísticamente auto-
semejantes y de depen-
dencia a largo plazo en series temporales de procesos físicos en el océano, sobre
diferentes escalas temporales, mediante el análisis de la estructura monofractal y

multifractal de las mismas. Los procesos examinados son la temperatura superficial del mar, en la región oceanográfica del Sureste del Atlántico Norte, la energía cinética turbulenta, en la zona del Giro Subtropical situada bajo la influencia directa de la Corriente de Canarias, la intensidad de las corrientes, en una estación de medida localizada en la llanura abisal de Madeira, y la altura de ola significativa, en el Mar de Noruega. La selección de estos fenómenos obedece a su importancia relativa en el contexto de la dinámica oceánica y al reducido número de contribuciones sobre las mismas en este contexto.

Para ello se emplean las metodologías de análisis de fluctuaciones sin tendencias (*DFA*) y su extensión multifractal (*MF DFA*), que son aplicadas en el dominio del tiempo y representan procedimientos bien establecidos y aceptados como adecuados para tal fin. Con el fin de examinar la importancia relativa de los efectos de persistencia y la de posibles efectos no lineales en el comportamiento multifractal, se examinan las características de réplicas de las series temporales analizadas, generadas mediante procedimientos de aleatorización, o desordenamiento, de series temporales, aleatorización de las fases en el dominio frecuencial, además de examinar el comportamiento de versiones diferenciadas de las series originales denominadas series de volatilidades.

El trabajo está organizado del siguiente modo. En el siguiente capítulo, se presentan de forma breve los fundamentos básicos de la teoría de los procesos estocásticos, los conceptos de fractalidad, auto-semejanza, dependencia a largo plazo y multifractalidad en series temporales. En el capítulo 3 se examina la existencia de comportamiento fractal, en términos de auto-semejanza estadística, o de invarianza de escalas, de diversos procesos físicos oceánicos. En concreto, se examinan las características fractales de la temperatura superficial del mar (sección 3.1), la energía cinética turbulenta (sección 3.2), la intensidad de las corrientes marinas (sección 3.3), y la altura de ola significativa (sección 3.4). En cada una de estas secciones se incluyen los resultados y conclusiones alcanzadas, que se presentan de forma general en el capítulo 4, conjuntamente con las sugerencias de posibles trabajos futuros que se podrían abordar.

Capítulo 2

Fenómenos de escala: Análisis Monofractal y Multifractal

Desde la antigüedad, la necesidad de explicar y entender el mundo que nos rodea llevó a generar herramientas y modelos simplificados de la realidad, reduciendo más y más el nivel de detalle para así abordar el entendimiento de nuestro entorno. Sin embargo, no se debe obviar que la realidad de los sistemas y fenómenos naturales es mucho más compleja. Los sistemas complejos son dinámicos, no estacionarios y evolucionan de manera no lineal, tal que su comportamiento está basado no en un patrón determinado, sino en la interacción de los procesos que lo conforman. Generalmente, se asumen restricciones lineales, aunque el sistema sea no lineal, ya que los modelos lineales son más fáciles de trabajar, y consecuentemente son los más utilizados. Sin embargo, se ha demostrado que en la modelización de procesos complejos, donde un fenómeno macroscópico puede ser el resultado de la interacción de varios procesos microscópicos, se requiere de un nuevo marco que permita plantear modelos válidos de evolución y desarrollo a lo largo del tiempo, capaces de lidiar con estas características particulares (Stanley 1999).

Debido a la naturaleza aleatoria y la alta complejidad que presentan la mayor parte de los fenómenos que se dan en la naturaleza, una caracterización determinística de los mismos no resulta apropiada. En general, para abordar el tratamiento de variables aleatorias que evolucionan a lo largo del tiempo, o del espacio, de acuerdo a unas leyes no determinísticas, es necesario recurrir a la teoría de los procesos estocásticos (Bendat 1971).

2.1. Fundamentos Teóricos

En esta sección se detalla el tratamiento de este tipo de procesos y se establece los criterios bajo los cuales se puede considerar que un proceso estocástico natural es estacionario. Asimismo se introduce el concepto de auto- semejanza, que describe el fenómeno por el cual ciertas propiedades de un proceso estocástico no cambian estadísticamente, independientemente de la escala espacial o temporal. A su vez, este concepto está íntimamente ligado con la estructura fractal de las series temporales y con la dependencia a largo plazo o persistencia, nociones que se detallan al final de esta sección.

2.1.1. Procesos estocásticos

A partir de lo anteriormente comentado, resulta razonable considerar las fluctuaciones de las variables oceanográficas en un punto e instante dados,

$$X(x_0, y_0, t_i) \equiv X(t_i)$$

como variables aleatorias. Es decir, al medir, por ejemplo, el valor de la temperatura de la superficie del mar en un instante t_i se obtiene un valor que no es más que uno de los infinitos posibles valores que se podían haber observado, de entre el espacio muestral de la variable. En consecuencia, al medir un registro de temperaturas durante un periodo de tiempo determinado se obtiene una sucesión de valores, $X^{(i)}(t)$, que representa una de las infinitas posibles secuencias que se podían haber dado, tal como se ilustra en la figura 2.1. Cada una de estas secuencias recibe el nombre de *realización* del proceso, y el conjunto de todas las realizaciones recibe el nombre de *ensemble*.

Una definición más estricta de proceso estocástico (en adelante, *p.e.*) puede obtenerse teniendo en cuenta que en el conjunto de realizaciones mostrado en la figura 2.1, para cualquier valor dado de t se tiene una variable aleatoria (en adelante, *v.a.*). Así, un *p.e.* denotado por $\{x(t), t \in \mathcal{T}\}$, puede ser definido como una familia de variables aleatorias $x(t)$, donde el parámetro t pertenece a un determinado conjunto índice \mathcal{T} . Nótese que, aunque a lo largo de este documento el parámetro t representa el tiempo, en general éste puede ser otro parámetro, o conjunto de parámetros.

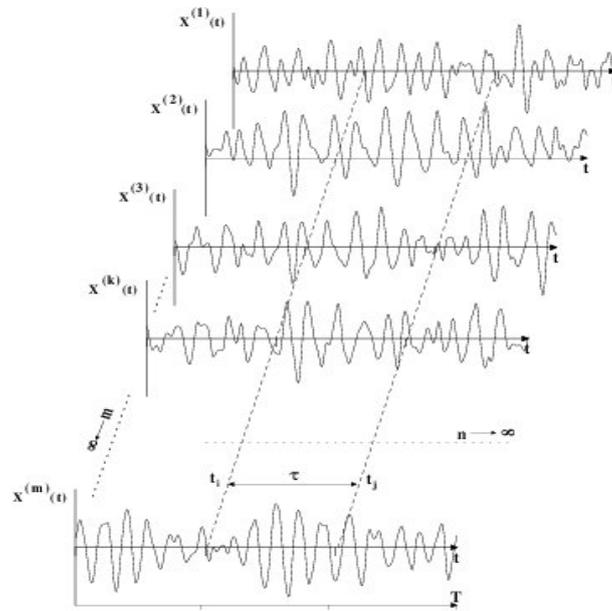


Figura 2.1: Ilustración del conjunto de realizaciones de un proceso estocástico.

Para caracterizar la variación espacial y temporal de cualquier variable oceanográfica, el *p.e.* a tener en cuenta será $X(\vec{x}, t)$; $\vec{x} \in \mathcal{X}, t \in \mathcal{T}$, donde \vec{x} representa el vector de posición. Es importante mencionar que si el parámetro considerado, t , tiene como rango de existencia toda la recta real, el *p.e.* recibe el nombre de proceso de parámetro continuo (tiempo continuo), mientras que si sólo toma un conjunto discreto de valores es denominado como *p.e.* de parámetro discreto (tiempo discreto). Además, las *v.a.* definidas para cada valor de t pueden ser discretas o continuas. En consecuencia, podemos distinguir cuatro tipos de *p.e.*: (a) discretos de variable discreta, (b) discretos de variable continua, (c) continuos de variable discreta y (d) continuos de variable continua.

La mayoría de los procesos aleatorios encontrados en geofísica son *p.e.* continuos de variable continua. Sin embargo, el almacenamiento de las observaciones en soporte digital y su procesamiento mediante técnicas computacionales hace necesario discretizar las señales analógicas correspondientes, convirtiéndose así en *p.e.* discreto de variable continua.

En principio, las propiedades estadísticas de un fenómeno aleatorio deben ser obtenidas con respecto al *ensemble*. Sin embargo, resulta evidente que al realizar medidas experimentales sólo se puede obtener una de las posibles realizaciones del

proceso, es decir, en cada instante se obtiene un único valor. No obstante, admítase por un momento que se han obtenido todas las posibles realizaciones de un *p.e.* $\{x(t)\}$, con realizaciones $X^{(i)}(t)$, ($i = 1, 2, \dots, \infty$), tal como el ejemplo ilustrado en la figura 2.1. En un instante dado, $t = t_i$, el proceso se convierte en una *v.a.* continua, $X(t_i)$, denotada como X_i , y en cualquier otro instante, $t = t_j$, se tendrá otra *v.a.*, $X(t_j)$, designada por X_j . El comportamiento estadístico de cualquiera de las *v.a.*, por ejemplo X_i , está gobernado por su *función de distribución de probabilidad acumulada* (*FDP*), o simplemente *función de distribución*, dada por

$$F(x) = \text{Prob}[X_i \leq x] \quad (2.1)$$

o, de forma equivalente, por la *función de densidad de probabilidad* (*fdp*), $f(x)$, definida por

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx \quad (2.2)$$

A partir de la cual es posible definir el *momento de orden r respecto al origen* ($x = 0$) de dicha *v.a.* como

$$m_r = E[X_i^r] = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)dx \quad (2.3)$$

donde $E[]$ representa el operador esperanza matemática, e implícitamente expresa promedios calculados a través del conjunto de realizaciones. De especial interés son los momentos de orden uno y dos. El primero de ellos, representa el *valor medio* de X_i , designado por μ_x

$$\mu_x = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx \quad (2.4)$$

El segundo, es el *valor medio cuadrático* de X ,

$$E[X_i^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx \quad (2.5)$$

cuya raíz cuadrada positiva recibe el nombre de *raíz media cuadrática*.

De modo análogo, se definen los *momentos respecto a la media*, o *momentos centrales*, de orden r como

$$\mu_r = E[(X_i - \mu_x)^r] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^r f(x) dx \quad (2.6)$$

En particular, el momento central de orden dos es la *varianza*, designada por σ_x^2

$$\sigma_x^2 = \mu_2 = E[(X_i - \mu_x)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 f(x) dx \quad (2.7)$$

Por otro lado, el comportamiento estadístico conjunto de dos *v.a.*, $X(t_i) \equiv X_i$ y $X(t_j) \equiv X_j$, (*v.a. bidimensional*), queda caracterizado por su *función de distribución de probabilidad conjunta (FDPC)*, *bidimensional*, dada por

$$F(X_i, X_j) = \text{Prob}[X_i \leq x_i, X_j \leq x_j] \quad (2.8)$$

o por su *función de densidad de probabilidad conjunta (fdpc) bidimensional*, $f(x_i, x_j)$, definida por

$$F(X_i, X_j) = \int_{-\infty}^{x_j} \int_{-\infty}^{x_i} f(x_i, x_j) dx_i dx_j \quad (2.9)$$

a partir de la cual se definen los *momentos de orden q y r* , respecto al origen ($x_i = 0, x_j = 0$), de una *v.a. bidimensional*, como

$$m_{qr} = E[X_i^q X_j^r] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_i^q x_j^r f(x_i, x_j) dx_i dx_j \quad (2.10)$$

y los *momentos centrales de orden q y r* como

$$\mu_{qr} = E[(X_i - \mu_{x_i})^q (X_j - \mu_{x_j})^r] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \mu_{x_i})^q (x_j - \mu_{x_j})^r f(x_i, x_j) dx_i dx_j \quad (2.11)$$

Un caso particular de especial interés es el momento central de órdenes $q = r = 1$, que recibe el nombre de *covarianza*, denotada por $Cov[X_i, X_j]$, o simplemente como $C(X_i, X_j)$, y viene dada por

$$\mu_{11} = C(X_i, X_j) = E [(X_i - \mu_{x_i}) (X_j - \mu_{x_j})] \quad (2.12)$$

o bien, en función de los momentos respecto al origen,

$$C(X_i, X_j) = E [(X_i - \mu_{x_i}) (X_j - \mu_{x_j})] = E[X_i X_j] - \mu_{x_i} \mu_{x_j} = m_{11} - m_{10} m_{01} \quad (2.13)$$

Dado que el *p.e.* $\{X(t)\}$, está constituido por un conjunto de n *v.a.*, asociadas a los instantes, t_1, t_2, \dots, t_n ($n \rightarrow \infty$), cada una de las cuales está gobernada por su correspondiente *fdp*, el *p.e.* quedará completamente especificado, en sentido estadístico, si la *FDPC n-dimensional*,

$$F[x_1, x_2, \dots, x_n] = Prob[X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n] \quad (2.14)$$

o bien la *fdpc n-dimensional*,

$$f[x_1, x_2, \dots, x_n] \quad (2.15)$$

de las n *v.a.* $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ es conocida para todos los instantes t_1, t_2, \dots, t_n . En consecuencia, en general, la especificación completa de un proceso estocástico es extremadamente compleja, si no imposible.

En definitiva, a la hora de caracterizar un *p.e.* se plantean dos problemas principales. En primer lugar, su completa caracterización implica la determinación de la *fdpc n-dimensional*. Por otro lado, las distintas *fdp*, tanto univariadas como conjuntas (de orden $1, 2, \dots, n$) deben ser evaluadas haciendo uso de todas las posibles realizaciones del proceso, mientras que en la práctica sólo se puede disponer de una de ellas, la observada experimentalmente. Esta realización tendrá duración finita y, en general, estará compuesta por valores para instantes de tiempo discretos, $\{t_0, t_1, t_2, \dots, t_N\}$, de modo que $t_{i+1} = t_i + \Delta t$, donde Δt es un valor constante. En tal caso, la realización está representada por una serie temporal de valores equidistantes.

2.1.2. Estacionariedad y ergodicidad

No obstante, además de en función de la continuidad, o no, del parámetro independiente, t , y la *v.a.*, los *p.e.* pueden ser clasificados en términos de su *regularidad*

estadística. Según esta clasificación los procesos aleatorios pueden ser *estacionarios* y *no estacionarios*.

De acuerdo con lo comentado anteriormente, la *FDPC* de orden n de un *p.e.* $F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$ posee, en general, una dependencia explícita con los valores de los parámetros temporales t_1, t_2, \dots, t_n . Es decir, el comportamiento estadístico del proceso es función del origen absoluto de tiempos considerado. Esta clase de *p.e.* recibe el calificativo de *no estacionarios*. Es importante resaltar que la mayor parte de los fenómenos físicos de naturaleza aleatoria pertenece a este grupo. En particular, las variables oceanográficas que se estudian en este trabajo suelen comportarse como un proceso no estacionario. Sin embargo, bajo determinadas condiciones, las propiedades estadísticas de los fenómenos aleatorios, no varían significativamente en función del tiempo, al menos en un intervalo temporal adecuado. Es decir, a pesar de su naturaleza aleatoria, las distribuciones de probabilidad asociadas no se ven sustancialmente modificadas por una traslación arbitraria respecto al parámetro tiempo. Este tipo de procesos recibe el nombre de *estacionarios*.

La definición estricta de estacionariedad requiere que las *FDPC*, o equivalentemente las *fdpc*, del proceso sean invariantes en el tiempo. Es decir,

$$F(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n); t_1, t_2, \dots, t_n) = \tag{2.16}$$

$$F(X(t_1 + \tau), X(t_2 + \tau), \dots, X(t_n + \tau); t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau)$$

para cualquier instante t e intervalo temporal τ . En otras palabras, para un *p.e.* estacionario la dependencia de sus *FDPC* con el tiempo es únicamente a través de sus diferencias, τ , pero no del origen absoluto de dicho parámetro. Cuando un *p.e.* verifica dicha condición se dice que es *estrictamente estacionario*, o *fuertemente estacionario*.

La independencia respecto al origen de t debe verificarse para las sucesivas *FDPC* de orden superior. Sin embargo, ya se ha indicado que para un problema físico dado, el cálculo de las *FDPC* hasta el orden n -ésimo es difícilmente realizable.

Así, para poder abordar el problema desde un punto de vista práctico se suele suavizar esta condición introduciendo el concepto de estacionariedad en sentido

amplio o de segundo orden.

En particular, la estacionariedad de primer orden implica que

$$f(x(t_i)) = f(x(t_i + \tau)) = f(x) \quad (2.17)$$

para cualquier valor de τ . Es decir, la *fdp* univariada es equivalente para cualquier instante de tiempo. Por otro lado la estacionariedad de segundo orden implica que

$$f(x(t_i), x(t_j)) = f(x(t_i + \tau), x(t_j + \tau)) \quad (2.18)$$

para cualquier valor de τ . Nótese que la condición anterior no implica una independencia de la *fdp* de segundo orden respecto al tiempo. La independencia es con relación al origen de tiempos, pero no con respecto a las diferencias temporales τ . Así, considerando dos instantes de tiempos cualesquiera, t_p y t_q , tales que $t_q - t_p = t_j - t_i = \tau$, se deberá verificar que

$$f(x(t_i), x(t_j)) = f(x(t_p), x(t_q)) \quad (2.19)$$

Condición que sólo es cierta si la *fdpc* únicamente es función de τ , es decir

$$f(x(t_i), x(t_j)) = f(x(t_p), x(t_q)) = f(x_i, x_j, \tau) \quad (2.20)$$

Un proceso que verifica las condiciones dadas por 2.19 y 2.20, se dice estacionario de segundo orden. No obstante, en la práctica, la condición de estacionariedad se suele establecer atendiendo únicamente a los momentos de primer y segundo orden. Naturalmente, para un *p.e.* $\{x(t)\}$ que satisface la condición 2.19 se tiene que

$$E[x(t_i)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_i f(x(t_i)) dx_i = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx_i = E[x] = \mu_x \quad (2.21)$$

y también

$$E[(x(t_i) - E[x(t_i)])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} [(x(t_i) - \mu_{x_i})^2] f(x(t_i)) dx_i = \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \mu_{x_i})^2 f(x_i) dx_i = \sigma_{x_i}^2 \quad (2.22)$$

Si dicho *p.e.* satisface, además, la condición 2.20 se tendrá que,

$$\begin{aligned}
C(x(t_i), x(t_j)) &= E [(x(t_i) - \mu_x) (x(t_j) - \mu_x)] \\
&= \mu_x^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t_i)x(t_j)f(x(t_i), x(t_j))dx_i dx_j \\
&= \mu_x^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_i x_j f(x_i, x_j, \tau) dx_i dx_j \\
&= C(\tau) = R(\tau) - \mu_x^2
\end{aligned} \tag{2.23}$$

para todo τ , donde la función de *auto-correlación*, $R(\tau)$, es definida como

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_i x_j f(x_i, x_j, \tau) dx_i dx_j = C(\tau) + \mu_x^2 \tag{2.24}$$

De acuerdo con los resultados anteriores, si para un proceso aleatorio se verifican las siguientes condiciones

$$\left\{ \begin{array}{l} |E \{x(t_i)\}| = \mu_x \text{ constante} < \infty \\ E [(x(t_i) - \mu_x) (x(t_j) - \mu_x)] = \sigma_x^2 \text{ constante} < \infty \\ E \{x(t_i)x(t_j)\} = R(t_j - t_i) = R(\tau) < \infty \end{array} \right. \tag{2.25}$$

éste recibe el nombre de *p.e. débilmente estacionario, estacionario en sentido amplio, o estacionario en la covarianza*.

Es obvio que cualquier *p.e.* estacionario en sentido estricto, es decir, que verifique la condición 2.17, y cuyos momentos hasta el segundo orden existen (son finitos), es también débilmente estacionario. Sin embargo, en general, la relación inversa no es cierta. En realidad, ésta sólo es cierta en casos muy particulares, tal como en el caso de los procesos aleatorios Gaussianos, cuyas *fdpc* quedan determinadas para cualquier orden sólo con la media y la covarianza.

Es decir, un proceso estocástico débilmente estacionario y Gaussiano también es estrictamente estacionario.

En definitiva, admitiendo la estacionariedad del proceso, al menos en sentido amplio, el problema de la estimación de la función de densidad de probabilidad conjunta n-dimensional, se reduce a la obtención de los momentos estadísticos de primer, μ_x , y segundo orden, σ_x^2 , y $C(\tau)$.

Estos estadísticos deben ser estimados mediante promedios aplicados sobre el conjunto de realizaciones, o *ensemble*, del proceso en instantes específicos de tiempo. Sin embargo, ya se ha indicado que, en la práctica, sólo es posible obtener una de las posibles realizaciones. El procedimiento usual para aliviar este problema consiste en admitir que el registro temporal (realización) obtenido experimentalmente corresponde a un *p.e. ergódico*. De forma simple, un proceso ergódico es aquel para el cual los estadísticos obtenidos mediante promedios temporales sobre una única muestra del proceso son aproximadamente iguales a los obtenidos mediante promedios sobre el *ensemble*. En otras palabras, los estadísticos calculados sobre diferentes realizaciones no difieren.

De forma intuitiva, puede decirse que en un proceso ergódico la realización observada $x^{(k)}$ es estadísticamente representativa de todas las demás del *ensemble*. En consecuencia, en un proceso ergódico, $x(t)$, el valor medio temporal, la varianza y la covarianza, así como otras propiedades obtenidas mediante promedios temporales, son iguales a los correspondientes promedios evaluados sobre el *ensemble*. Es importante notar que si un proceso es ergódico también debe ser estacionario, pero un proceso aleatorio estacionario no tiene por qué ser ergódico.

Los procesos ergódicos son una clase bastante especial dentro del conjunto de los *p.e.*, dado que todas sus propiedades pueden ser determinadas realizando promedios sobre una única muestra. Afortunadamente, en la práctica los datos aleatorios que representan fenómenos físicos estacionarios son generalmente ergódicos. Por ello, en general, en el análisis de datos experimentales correspondientes a procesos físicos se asume la ergodicidad del proceso subyacente, de modo que las propiedades estadísticas del mismo pueden ser evaluadas a partir de un único registro. En consecuencia, en lo sucesivo los registros experimentales medidos y simulados serán considerados como muestras de un proceso ergódico.

Es necesario destacar que en procesos reales, la no estacionariedad suele ser la regla y la estacionariedad la excepción. Nótese que, generalmente, los parámetros que gobiernan los procesos naturales dependen del tiempo y, aunque esta dependencia sea muy débil y se haya hecho lo posible por eliminarla, son procesos no estacionarios. Por otro lado, teniendo en cuenta que, para una serie temporal finita, la estacionariedad estricta no se puede probar analíticamente por lo comentado

anteriormente, lo natural sería admitir no estacionariedad.

2.1.3. Auto-semejanza

El concepto de estacionariedad, que implica invarianza temporal de los estadísticos de un proceso, es básico en el estudio de los *p.e.* Asimismo, la invarianza de escala o auto-semejanza también está presente en muchos fenómenos y procesos naturales (textura del paisaje, fenómenos de turbulencia, transmisión de información en redes de comunicación, etc.).

Los procesos auto-semejantes son procesos estocásticos invariantes en su distribución bajo un cambio adecuado de escala temporal y/o espacial, lo cual implica la preservación de algún tipo de patrón de comportamiento a través de varios órdenes de magnitud. Esta invarianza de escala se pone de manifiesto cuando algún observable sigue una ley probabilística de potencias. Las leyes de potencia a su vez, al permanecer invariantes bajo cambios de escala, hacen que todas las escalas participen en la dinámica de dichos sistemas o procesos.

Los primeros artículos que trataron este tipo de procesos dándoles un tratamiento probabilístico riguroso se deben a Lamperti (1962), quien introdujo el concepto de proceso *semi-estable*. Posteriormente, a finales de los años 60, Mandelbrot rebautizó este tipo de proceso como proceso *auto-semejante*, y fue pionero en su aplicación al estudio de fenómenos invariantes en escala.

Estrictamente un *p.e.*, $\{x(t), t \geq 0\}$, es auto-semejante, (en adelante *s.s.*) si para cualquier constante $a > 0$, existe $b > 0$ tal que

$$x(at) \stackrel{d}{=} bx(t) \quad (2.26)$$

donde $\stackrel{d}{=}$ implica igualdad de las distribuciones de probabilidad finito dimensionales. Por otro lado, se dice que $\{x(t), t \geq 0\}$ es estocásticamente continuo en t si para cualquier $\epsilon > 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} P \{|x(t+h) - x(t)| > \epsilon\} = 0 \quad (2.27)$$

Por tanto, según Lamperti (1962), si $\{x(t), t \geq 0\}$ es estocásticamente continuo en $t = 0$ y *s.s.*, entonces existe un único exponente $H \geq 0$ tal que b en la ecuación

2.26 se puede expresar como $b = a^H$. Además, $H > 0$ si y solo si $X(0) = 0$.

Generalmente, un *p.e.*, $\{x(t), t \geq 0\}$, continuo es exactamente *s.s.* si existe $H > 0$ tal que para cualquier $a > 0$,

$$x(at) \stackrel{d}{=} a^H x(t) \quad (2.28)$$

donde H es el índice de auto-semejanza, que también se denomina *exponente de escala* del proceso, o *exponente de Hurst*, en honor al hidrólogo británico H.E. Hurst. Obviamente un proceso que satisface la ecuación 2.28 nunca será estacionario ya que esto implicaría $x(t) = x(at)$. Generalmente se asume que el *p.e.* $x(t)$ tiene incrementos estacionarios.

No obstante, las series temporales reales medidas en la naturaleza constituyen procesos discretos. En este caso la auto-semejanza se define de la siguiente manera (Adler et al. 1998). Sea una secuencia de valores estacionaria, $Y = \{Y(i), i \geq 1\}$, y sus correspondientes secuencias agregadas con nivel de agregación m ,

$$Y^{(m)}(k) = \frac{1}{m} \sum_{i=(k-1)m+1}^{km} Y(i), \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.29)$$

obtenidas a través de la división de la serie original, Y , en segmentos no solapados de igual longitud, m , y promediando sobre cada uno de ellos. Si Y es el proceso formado a partir de los incrementos de otro *p.e. s.s.* definido como en 2.28, entonces

$$Y \stackrel{d}{=} m^{1-H} Y^{(m)}, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (2.30)$$

Es decir, una secuencia discreta $Y = \{Y(i), i \geq 1\}$ se denomina exactamente *s.s.* si satisface la ecuación 2.30 para cualquier nivel de agregación m . Por otro lado, una secuencia estacionaria como la anterior, se dice que es exactamente *s.s.* de segundo orden, (Cox, 1984), si $m^{1-H} Y^{(m)}$ e Y son indistinguibles al menos con respecto a sus propiedades de segundo orden para todo m . De forma análoga, una secuencia estacionaria es asintóticamente *s.s.* de segundo orden si $m^{1-H} Y^{(m)}$ tiene la misma varianza y función de auto-correlación que Y , para $m \rightarrow \infty$,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} R^{(m)}(\tau) = R(\tau) \quad (2.31)$$

Es importante destacar que los procesos estocásticos asintóticamente *s.s.* de segundo orden reciben también el nombre de procesos con dependencia a largo plazo en

adelante *d.l.p.* Se debe resaltar que esto es cierto sólo para procesos asintóticamente auto-semejantes de segundo orden y no para todo tipo de procesos *s.s.* Esta idea es fundamental ya que las propiedades de auto-semejanza y de dependencia a largo plazo no son equivalentes, aunque en numerosas ocasiones se usan de forma errónea como si lo fueran (Leland et al. 1994).

En este caso, los procesos agregados, $Y^{(m)}$, poseen una estructura de correlación no degenerada si $m \rightarrow \infty$, o dicho de otro modo, la función de auto-correlación se preserva independientemente de la escala temporal. Para series temporales, todo lo anterior se traduce en que la distribución de un segmento de serie puede obtenerse a través de un intervalo que cubra un lapso de tiempo menor, al multiplicarlo por una razón de proporcionalidad.

Un modo alternativo de definir los procesos estocásticos asintóticamente *s.s.* de segundo orden es en términos de su función de densidad espectral (Davis et al. 1994). En tal caso, un proceso estocástico se dice asintóticamente *s.s.* de segundo orden si su función de densidad espectral satisface

$$S(f) \approx |f|^{-\beta} \quad (2.32)$$

Luego, dependiendo de si el proceso estocástico considerado es estacionario o no, la relación entre el exponente de escala, H , con β será diferente. Así para procesos no estacionarios (Gilmore et al. 2002),

$$S(f) \approx |f|^{2H+1}, \quad 1 < \beta = 2H + 1 < 3 \quad (2.33)$$

mientras que para procesos estacionarios,

$$S(f) \approx |f|^{2H-1}, \quad -1 < \beta = 2H - 1 < 1 \quad (2.34)$$

Un ejemplo típico de proceso *s.s.* es el denominado proceso de tipo $f^{-\beta}$, introducido por Mandelbrot & Van Ness (1968) quienes lo denominaron ruido tipo $1/f$ o *ruido fraccionario*. La forma que adopta la función de densidad espectral de potencia depende del valor de β . Así, $\beta \sim 1$ se corresponde con un ruido rosa, $\beta \sim 2$ con un ruido marrón, denominado así en honor a Robert Brown (1828) y $\beta \sim 0$ con un ruido blanco.

2.1.4. Estructura fractal

Un fractal es, por definición, un conjunto cuya dimensión de Hausdorff-Besicovitch es estrictamente mayor que su dimensión euclídea.

Benoît Mandelbrot (1967)

Básicamente, el término fractal se refiere en primera instancia a la dependencia existente entre una medida y la escala utilizada para obtenerla. La dimensión fractal, D , será, por lo tanto, una estimación del grado de irregularidad de un determinado objeto o proceso. Un objeto, sistema o proceso se considera que es un fractal si posee: dimensión fractal y auto-semejanza. En la literatura científica al respecto, los conceptos de auto-semejanza y fractalidad se emplean, generalmente, como si fueran sinónimos, no obstante cabe destacar que la auto-semejanza no es más que una característica que presentan los fractales. La mayoría de estructuras o procesos que existen en la naturaleza son estocásticos y poseen, dimensión fractal y auto-semejanza.

La dimensión fractal a diferencia de la dimensión topológica, está determinada por cómo un objeto llena su propio espacio. En el caso de una curva, sería una forma de medir su rugosidad. Su valor puede ser entero, en cuyo caso es equivalente a la dimensión euclídea, pero en general, será un valor fraccionario, de ahí el origen del término. La dimensión fractal puede ser definida analíticamente mediante la expresión,

$$N(\varepsilon) \propto \varepsilon^{-D}, \quad \varepsilon \mapsto 0 \quad (2.35)$$

donde N es el número de fragmentos con una dimensión característica ε (Mandelbrot 1982). En general, todas las dimensiones fractales, i.e. euclídea, Hausdorff-Besicovitch, Minkowski, etc, son conceptualmente equivalentes, sin embargo las metodologías para su obtención difieren, lo que puede hacer que existan ligeras variaciones entre unos resultados y otros. La dimensión de Hausdorff-Besicovitch es para la mayoría de fractales coincidente con las demás dimensiones, que además son más sencillas de calcular.

Un ejemplo clásico de una estructura fractal en una dimensión se muestra en la figura 2.2, la isla de Koch. Para su construcción se parte de una estructura elemen-

tal, aquí un triángulo equilátero. Luego, cada lado del triángulo se divide en 3 partes iguales y el segmento central se reemplaza por dos segmentos de igual longitud haciendo un ángulo de 60° , formando de nuevo un triángulo equilátero como el inicial pero más pequeño. La operación se repite sucesivamente, de forma que, el número de elementos crece un factor 4 con cada iteración, mientras que cada segmento se hace 3 veces menor, así

$$D = -\frac{\log(N)}{\log(\varepsilon)} = \frac{\log(4)}{\log(3)} \sim 1,26 \quad (2.36)$$

Desde el punto de vista del concepto de la auto semejanza, la isla de Koch presenta una similitud a diferentes escalas que es exacta. Por el contrario, en el caso de la longitud de la costa de Fuerteventura, figura 2.3, esta similitud es estadística. Es decir, un trozo del perímetro de la isla de Koch es idéntico al todo, independientemente de la escala. En el caso de Fuerteventura existen límites, el máximo es el tamaño de la isla frente al caso de Koch, donde la construcción puede extenderse hasta el infinito. Esto es una característica que diferencia a los procesos fractales naturales de los ideales. Al medir el perímetro de, por ejemplo la costa mayorera, obtendremos un valor u otro dependiendo del instrumento de medida. La isla de Koch encierra un área finita en un perímetro infinito.

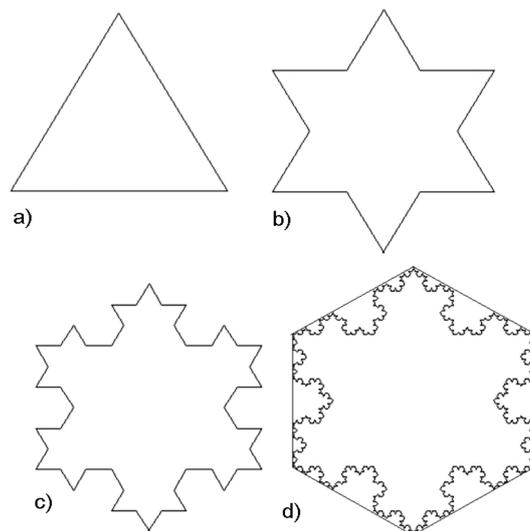


Figura 2.2: Ilustración de la construcción de la isla de Koch. (Papadopoulos et al. 2007)

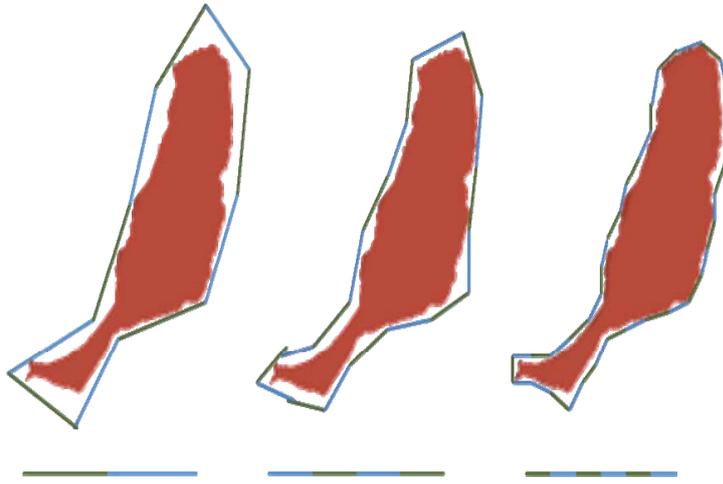


Figura 2.3: Ilustración de la medida del perímetro de la costa de Fuerteventura con tres escalas diferentes.

Rigurosamente hablando, el concepto de auto-semejanza se aplica sólo a fractales matemáticos que surgen de la iteración de fórmulas sencillas pero que llevan a estructuras muy complejas, como la isla de Koch. Por otro lado, en los fractales que se encuentran en la naturaleza se aplica el concepto de auto-afinidad, ya que su estructura fractal es solamente estadística y poseen, en consecuencia, una escala que no tiene las mismas propiedades en todas las dimensiones de análisis, es decir, es anisotrópica (Feder 1988). En el caso de series temporales deterministas se debe hablar de auto-semejanza, mientras que al usar series de origen estocástico se debe hablar de auto-afinidad. Sin embargo, generalmente se emplea el término auto-semejanza aún cuando se hace referencia a series temporales de procesos reales, así se hará también en este trabajo.

Teniendo lo anterior en mente y de forma análoga, un proceso fractal será aquel en el que un mismo proceso elemental tiene lugar a distintas escalas temporales. Así, para el intervalo de escalas analizadas, los estadísticos del proceso siguen una o varias leyes de potencias caracterizadas por uno o varios exponentes. En consecuencia, se distingue entre procesos *monofractales* y *multifractales*. Los primeros presentan auto-semejanza en toda la estructura temporal del proceso y ésta viene descrita por una ley de potencia con un único exponente de escala global, mientras que las series de

tiempo multifractales presentan diferentes estructuras auto-semejantes a intervalos temporales locales diferentes, y vienen descritas mediante un espectro de exponentes de escala. Además, cuando los estadísticos auto-semejantes son precisamente los de segundo orden, entonces se habla de procesos fractales auto-semejantes con *d.l.p.*

En general, no existe ningún proceso o fenómeno en el universo que exhiba la misma dimensión fractal en todas las escalas temporales posibles. De hecho, lo normal es que éstos se generen a partir de distintos procesos que además operan en rangos temporales diferentes. Los multifractales presentan una dimensión fractal que no es constante como en la ecuación 2.35, sino que, como se ya se comentó, tienen un amplio rango de valores, que en el límite, dan como resultado un espectro de dimensiones $D(\alpha)$,

$$N(\varepsilon) \propto \varepsilon^{-D(\alpha)} \quad (2.37)$$

donde α se denomina exponente de singularidad o de Hölder (Falconer 1997).

En el contexto del análisis de fenómenos naturales complejos, fue Kolmogorov (1941) uno de los primeros en establecer una conexión entre la auto-semejanza, la estructura fractal y la *d.l.p.*, para explicar la evolución de fenómenos turbulentos.

2.1.5. Dependencia a largo plazo

En apartados anteriores se comentó que los *p.e.* asintóticamente *s.s.* de segundo orden presentan *d.l.p.*, propiedad que también recibe el nombre de persistencia. No obstante, es importante destacar que esta propiedad no se verifica para todo tipo de procesos *s.s.* (Cont 2005). Es decir, las propiedades de *s.s.* y de *d.l.p.*, o persistencia, no son equivalentes, aunque en numerosas ocasiones se usan de forma errónea como si lo fueran, (Gong et al. 2005). Así de la misma manera que existen *p.e. s.s.* que no presentan *d.l.p.*, también los procesos con *d.l.p.* pueden existir sin necesidad de que presenten auto-semejanza. En particular, la persistencia puede ser definida como el agrupamiento temporal no periódico de eventos similares (Outcalt et al. 1997). Como se ha visto, un *p.e.s.s.* presenta bajo ciertas condiciones *d.l.p.*, lo que implica que la función de auto-correlación se preserva independientemente de la escala temporal, ecuación 2.31. Por tanto, estas características permiten, a través de métodos estadísticos adecuados, obtener información sobre las propiedades de

correlación de una serie haciendo uso de sus series agregadas, (Peng et al. 1995). Dada su definición, resulta lógico que la propiedad de memoria larga, o persistencia, se relacione con el comportamiento que muestran las auto-correlaciones muestrales de ciertas series temporales estacionarias que decrecen a un ritmo muy lento. Formalmente, siguiendo la notación de Robinson (1994) y Baillie (1996), se dice que una serie temporal estacionaria, x_t , con función de auto-correlación $R(\tau)$ y densidad espectral $S(f)$, tiene memoria larga o *d.l.p.* si,

- las auto-correlaciones no son absolutamente sumables, es decir, $\sum |R(\tau)| = \infty$
- la función de densidad espectral $S(f)$, no está acotada a bajas frecuencias, y por tanto $\lim_{f \rightarrow 0^+} S(f) = \infty$,

donde $f \rightarrow 0^+$.

Existen otras formas de definir la propiedad de memoria larga. Así por ejemplo, Brockwell & Davies (1991) y Beran (1994) consideran que un proceso estacionario con función de auto-correlación $R(\tau)$ y densidad espectral $S(f)$ tiene *d.l.p.* si existe un número real $0 < \gamma < 1$ tal que,

$$R(\tau) \approx |\tau|^{-\gamma} \quad \tau \rightarrow \infty \quad (2.38)$$

o equivalentemente, si existe un número real $0 < \beta < 1$ tal que

$$S(f) \sim |f|^{-\beta} \quad \beta \rightarrow 0^+ \quad \text{donde} \quad \gamma = 1 - \beta. \quad (2.39)$$

En términos de $R(\tau)$, si las auto-correlaciones son absolutamente sumables se dice que hay dependencia a corto plazo, mientras que en series temporales puramente aleatorias cada evento ocurre de manera independiente de sus predecesores, como sucede al lanzar una moneda de forma consecutiva. En este tipo de proceso, que suele recibir el nombre de *ruido blanco* la función de auto-correlación es nula para todo $\tau \neq 0$. La caracterización de la *d.l.p.* es importante para entender tanto las propiedades estadísticas de un proceso como la dinámica básica que lo rige. Mandelbrot & Van Ness (1968) establecen la conexión entre procesos auto- semejantes y la dependencia a largo plazo en series temporales estacionarias a través de ruidos Gaussianos fraccionarios. Este tipo de ruidos presenta una contribución significativa

en el rango de bajas frecuencias, de modo que su función de auto-correlación decrece a un ritmo muy lento. Este comportamiento no es compatible con los modelos estacionarios auto-regresivos y de medias móviles (AR, MA, ARMA y ARIMA), que imponen un decrecimiento exponencial en las auto-correlaciones, así como la independencia de los incrementos y por tanto, no incorporan el efecto de *d.l.p.*. Granger (1980), Granger & Joyeux (1980) y Hosking (1981) proponen una clase de procesos intermedios en los que el orden de integración es fraccionario. Se trata de los procesos auto-regresivos y de medias móviles fraccionalmente integrados, ARFIMA. En general, el proceso ARFIMA(p,d,q) proporciona una gran flexibilidad en la modelización del comportamiento dinámico de una serie temporal, ya que permite describir simultáneamente las propiedades dinámicas a largo plazo, a través del parámetro d, y la correlación a corto plazo, a través de los parámetros de la parte ARMA del modelo. Además de estos, existen otros modelos paramétricos capaces de producir memoria larga, como el ruido Gaussiano fraccionario de Mandelbrot & Van Ness (1968), que se obtiene como los incrementos de procesos auto-semejantes, o el modelo exponencial fraccionario (FEXP), propuesto por Bloomfield (1973). El desarrollo y análisis de estas herramientas se encuentra lejos de los objetivos de este trabajo, no obstante una descripción de éstos y otros modelos para generar y caracterizar procesos con memoria larga puede encontrarse en Beran (1994).

En este contexto, también cabe mencionar que la *d.l.p.* está íntimamente ligada a las distribuciones de cola pesada, las cuales serán mencionadas en algún momento a lo largo de este trabajo.

2.1.6. Colas pesadas

Dentro del marco teórico de este trabajo, cabe mencionar que el concepto de *d.l.p.* también está íntimamente ligado a las distribuciones de cola pesada. Baillie (1996) señala que las densidades de probabilidad que presentan colas pesadas son auto-semejantes con respecto al comportamiento de su cola, y por tanto siguen una ley de potencias. En cambio, en distribuciones como la Gaussiana, las distribuciones de las colas decaen mucho más rápido, siguiendo una ley exponencial (Sheluhin et al. 2007).

En general, una variable con una distribución de cola pesada muestra una va-

rianza infinita. Una distribución de este tipo es por ejemplo, la distribución de Pareto-Levy. Así, estas distribuciones juegan un papel similar en estadística al de la distribución Gaussiana, con la diferencia de que poseen colas que decaen muy lentamente y momentos de orden dos infinitos (Lévy 1937; Feller 1971).

La familia de distribuciones estables de Lévy resulta de la suma de variables con probabilidad proporcional a $x^{-\Gamma-1}$ para x grandes, siendo Γ el denominado índice de Lévy ($0 < \Gamma \leq 2$) o exponente de la distribución. Básicamente, no son más que el resultado de la generalización del Teorema Central del Límite (Samorodnitsky & Taqqu 1994).

Una *v.a.* positiva X con función de *distribución de probabilidad* F y cola a la derecha, se dice que es de cola pesada, si para $x > 0$ la función de probabilidad de excedencia, $\bar{F} = 1 - F$ verifica que,

$$Prob[X > x] = \bar{F}(x) = x^{-\Gamma} L(x) \quad (2.40)$$

donde $\Gamma \in (0, 2)$ y $L(x)$ es una función que varía lentamente, tal que para todo $t > 0$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L(tx)}{L(t)} = 1 \quad (2.41)$$

A medida que $t \rightarrow \infty$, aumenta la probabilidad de tomar un valor de la cola de la distribución, de modo que la media tiende a crecer, no converge. Además, si $\Gamma = 2$ la distribución se reduce al caso particular de una normal.

2.2. Origen de la multifractalidad

La mayoría de procesos naturales exhiben, generalmente, un comportamiento complejo que se relaciona con la invarianza de ciertas estructuras a lo largo del tiempo. Parte de la complejidad de dicho comportamiento se suele atribuir a la presencia de correlaciones a largo plazo en la serie temporal, sin embargo, para poder caracterizar de forma más adecuada las propiedades del sistema es necesario acudir a estadísticos de orden superior, que proporcionan información sobre efectos no lineales. Así, se distingue entre monofractales, cuyo comportamiento se analiza

con respecto a sus estadísticos de segundo orden, y multifractales, que requieren de estadísticos de varios órdenes para su caracterización (Kalisky et al. 2005).

El comportamiento de procesos multiescala es debido, además, a dos tipos diferentes de multifractalidad, por un lado a una contribución lineal y por otro, a una contribución no lineal.

Schreiber & Schmitz (2000) consideran que un proceso es lineal, si es posible reproducir las propiedades estadísticas del mismo a partir, únicamente, del espectro de potencia y de su distribución de probabilidad. Si no, éste es no lineal. Así, las series temporales con propiedades fractales muestran, generalmente, un comportamiento gobernado por las dos contribuciones (Kantelhardt et al. 2002). La parte lineal es consecuencia, fundamentalmente, de la presencia de correlaciones a largo plazo en las fluctuaciones, y la no lineal está relacionada con el ancho de la distribución de probabilidad, o distribuciones de cola pesada. Además, ambas pueden ser eliminadas de la serie original individualmente y así, cuantificar el grado de influencia que ejerce cada una en el comportamiento de escala de la señal. El efecto lineal se puede filtrar mediante el método de *shuffling* o de reordenación aleatoria de los datos, mientras que en el segundo caso, es necesario acudir a técnicas de análisis estadístico no lineal. Generalmente, ambas contribuciones están presentes en la serie temporal.

No obstante, el origen de la multifractalidad se ha discutido intensamente en la última década, y la literatura existente resulta cuanto menos variada y dispar en las conclusiones al respecto. Así, Lee & Chang (2015), Lin et al. (2013), Kumar & Deo (2009), Ashkenazy et al. (2003a) demuestran que tanto la distribución de probabilidad como las correlaciones a largo plazo conducen a propiedades multifractales. Zunino et al. (2009) y Barunik et al. (2012), por otro lado, afirman que las distribuciones de cola pesada son la causa principal de la multifractalidad. Kwapien et al. (2005), Drozd et al. (2009), Oh et al. (2012), Zhou (2012), De Souza et al. (2013) y Movahed et al. (2006) aseguran que en realidad, son las correlaciones a largo plazo las responsables del comportamiento multifractal. Además, Drozd et al. (2009) analizan como las series temporales que no son lo suficientemente largas, pueden conducir a una interpretación errónea de los resultados, confundiendo la presencia de un efecto multifractal. Por último, Drozd et al. (2009) y Zhou (2012) también demuestran que las propiedades de la función de distribución de probabilidad afec-

tan a la multifractalidad de la serie sólo cuando ésta presenta correlaciones a largo plazo.

2.2.1. Evaluación de la componente lineal

Peters (1996) sugiere un test sencillo para comprobar el grado de importancia de la componente lineal en una serie temporal. Esta técnica también se emplea en el análisis monofractal, para evaluar la fiabilidad de las estimaciones del exponente de escala.

El método se denomina *shuffling* o *scrambling* y consiste en alterar el orden de los datos de una serie temporal de forma aleatoria. Los datos son los mismos, por tanto la distribución de frecuencias no cambia, pero la estructura temporal de la serie sí. En estos casos, el resultado esperado al ejecutar el análisis monofractal, es una serie sin memoria, por tanto incorrelacionada, con un exponente de escala igual a 0,5, análogo al caso de un ruido blanco. Si se realiza un análisis multifractal, el espectro tiende a centrarse en $\alpha \sim 0,5$ y a estrecharse. Estos efectos serán más evidentes cuando la componente lineal sea la que domine el comportamiento del sistema o proceso. La contribución no lineal, si está presente, permanece y por tanto, no se ve afectada por este procedimiento y, por tanto, permanece. Una forma de llevar a cabo este método se basa en generar un ruido blanco y posteriormente reordenar los valores, por ejemplo, de mayor a menor. Luego, se toma la serie temporal a la que se le desee realizar el proceso de *shuffling* y se reordenan las observaciones según el orden del ruido blanco generado anteriormente.

2.2.2. Evaluación de la componente no lineal

Generación de series subrogadas

Uno de los procedimientos más utilizados para comprobar la existencia de un efecto no lineal en un proceso, es el de la generación de series de datos subrogados. Este procedimiento, desarrollado inicialmente por Theiler et al. (1992), consiste en la generación, a partir de una serie temporal inicial, de un conjunto de series aleatorias de manera que éstas conserven algunas propiedades de la serie original en el dominio temporal, pero de las que se ha eliminado la posible dependencia no lineal (Govindan

et al. 1998).

Por definición, una serie subrogada tiene el mismo espectro de potencia y la misma distribución que los datos originales, pero sus fases de Fourier están reordenadas aleatoriamente, de tal manera que los posibles efectos no lineales desaparecen.

Los métodos más empleados para generar series subrogadas para el análisis estadístico de series no lineales son el *Amplitude Adjusted Fourier Transform*, *AAFT*, y su modificación *iterative Amplitude Adjusted Fourier Transform*, *iAAFT* (Schreiber & Schmitz 1996). Éste último es precisamente el que se emplea en este trabajo. Una revisión detallada de estas técnicas se puede encontrar también en Kaplan & Glass (2012), Venema et al. (2006), Dolan & Spano (2001) y Schreiber & Schmitz (2000).

Básicamente, la idea para la generación de series subrogadas es conservar las propiedades lineales de la serie original destruyendo al mismo tiempo la estructura no lineal. En particular, el método de Schreiber & Schmitz (1996) permite obtener series subrogadas con la misma distribución de probabilidad y prácticamente el mismo espectro de potencia que los datos originales. La metodología se puede resumir en tres pasos, que se ilustran en la figura 2.4. Estos son:

1. Los valores de la serie original se reescalan, de forma que los datos estén distribuidos según una normal.
2. Mediante la transformada de Fourier se subroga la serie obtenida en el paso anterior. La serie resultante mantiene el espectro de potencia.
3. Finalmente, la serie normalizada y subrogada se reescala de nuevo para que ésta tenga la misma distribución de amplitudes que la original, mediante una transformada de Fourier inversa.

Los pasos 2 y 3 se repiten para asegurar que los cambios en las amplitudes al realizar las transformadas de Fourier sean los mínimos posibles. Schreiber & Schmitz (1996) demuestran que con cada iteración, el espectro de la serie resultante tiende a converger al espectro de potencia de la serie original. Sin embargo, cabe destacar que si la serie temporal no es continua y la distribución de los datos presenta singularidades o transiciones abruptas, los resultados pueden ser impredecibles y por tanto, éstos se deben interpretar con precaución (Dolan & Spano 2001).

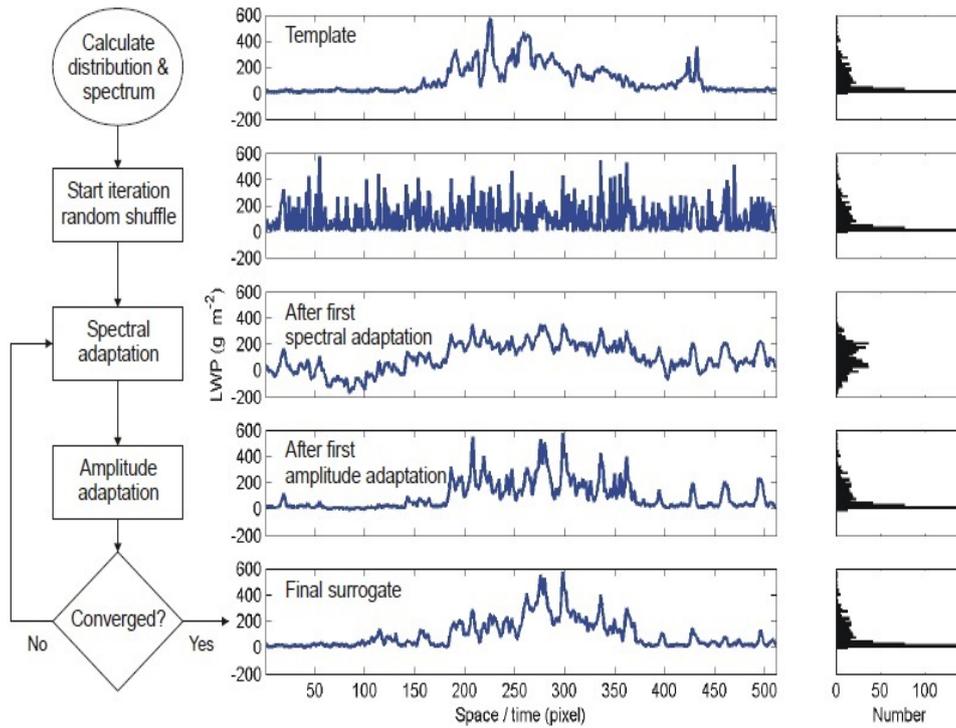


Figura 2.4: Ilustración esquemática del algoritmo iAAFT para series temporales correspondientes al contenido de agua líquida en nubes. La columna de la izquierda es el diagrama de flujo, en la parte central se muestra el ejemplo completo del proceso, y a la derecha están los histogramas de las series temporales correspondientes (Venema et al. 2006).

Test de Volatilidad

La volatilidad es un término derivado de la economía que representa la magnitud de cambio de una serie temporal (Liu et al. 1999). Básicamente, dada una serie temporal x_i , la serie de volatilidad se define como el valor absoluto de los incrementos de la serie original, es decir, $|\Delta x_i| = |x_{i-1} - x_i|$. Resulta obvio que generar series de volatilidad implica filtrar de la serie original las correlaciones a corto plazo.

Se ha demostrado que las correlaciones de la volatilidad de una serie, que a su vez, presenta correlaciones a largo plazo, reflejan el grado de no linealidad de la serie original (Ashkenazy et al. 2003b). Esto es, las series de volatilidad asociadas a series no lineales con correlaciones a largo plazo, según un análisis monofractal, poseen también correlaciones a largo plazo. En la mecánica para cuantificar, mediante el

test de volatilidad, la contribución no lineal en una serie temporal, se consideran los siguientes aspectos:

1. Si la serie es en su origen monofractal y presenta *d.l.p.*, entonces las series de volatilidad no presentarán *d.l.p.*.
2. Si la serie es en su origen multifractal y según un análisis monofractal presenta *d.l.p.*, entonces las series de volatilidad presentarán también *d.l.p.*.
3. Para confirmar el punto 2, se subrogan las volatilidad de forma que, si realmente existe una componente no lineal, ésta debe desaparecer en los resultados del análisis monofractal.

2.3. Metodologías de análisis clásicas y modernas

En esta sección, se presentan algunas de las metodologías clásicas más relevantes para el estudio de procesos estocásticos con propiedades fractales, haciendo especial énfasis en los procedimientos empleados en este trabajo.

En su origen, las técnicas empleadas asumían que las series temporales eran periódicas y lineales y así, la gran mayoría de estudios relacionados estuvieron centrados, básicamente, en el análisis y detección de efectos de memoria en forma de dependencias lineales. En este contexto, la presencia de *d.l.p.* en *p.e.s.s.* indica que individualmente las correlaciones a largo plazo son pequeñas pero su efecto acumulado no es despreciable y produce situaciones que no se pueden afrontar con los modelos de dependencia a corto plazo. Dicho de otra manera, todos los procesos que presentan dependencias a corto plazo están caracterizados por una función de auto-correlación que decae exponencialmente, en cambio los procesos con *d.l.p.* exhiben una atenuación de las correlaciones mucho más lenta, de modo que, en general su función de auto-correlación obedece una ley potencial.

Los métodos convencionales para el análisis de series temporales requieren además que las observaciones separadas por intervalos de tiempo largos sean independientes. No obstante, con frecuencia, las series temporales correspondientes a procesos reales no cumplen este requisito y presentan *d.l.p.* Por tanto, para entender el comportamiento de este tipo de procesos, resulta fundamental conocer las propiedades

de atenuación de las funciones de auto-correlación de las correspondientes series temporales.

La intensidad de la dependencia a largo plazo puede ser examinada mediante el uso de diferentes metodologías, que generalmente, se basan en el concepto de auto-semejanza, además de asumir estacionariedad y que el tamaño de la serie de tiempo se extiende hasta el infinito. Una evaluación estadística de algunos de estos métodos se puede encontrar en Beran (1994) y Taqqu & Teverovsky (1998). De entre estos modelos clásicos destacan, la estimación directa de la función de auto-correlación $R(\tau)$, (Box et al. 1976), que está limitada a τ pequeños (Beran 1994), y la determinación de la función de densidad espectral a través del periodograma (Brockwell & Davies 1991; Schepers et al. 1992), que está afectada por notables incertidumbres estadísticas en el rango de bajas frecuencias, que es donde se reflejan las propiedades de memoria larga. Ambas técnicas son sólo adecuadas para señales estacionarias (Malamud & Turcotte 1999; Talkner & Weber 2000).

En particular, los métodos espectrales para el estudio de series temporales, se basan en que un proceso físico puede ser descrito en el dominio de las frecuencias mediante el uso de la transformada de Fourier. Una revisión completa al respecto se puede encontrar en Priestley (1981), Percival & Walden (1993) y Press et al. (1994). El análisis del espectro de potencia, o más correctamente la función de densidad espectral de varianzas, es probablemente la técnica clásica que más se ha empleado en la detección de patrones espaciales y/o temporales en series temporales naturales. Formalmente hablando, el espectro de potencia se define como el cuadrado de la amplitud de la transformada de Fourier, por tanto se puede considerar como la varianza del proceso a diferentes escalas (espaciales o temporales).

En general, el análisis espectral representa una herramienta útil para extraer la información contenida en una señal en el dominio de la frecuencia. Sin embargo, no resulta útil para la localización de eventos en el dominio del tiempo y la frecuencia simultáneamente y además, viene afectado por la presencia de no estacionaridades. Al contrario ocurre en el caso de los métodos de análisis tiempo-frecuencia, entre los que se destaca el análisis *wavelet*, que conjuntamente con los métodos de análisis de fluctuaciones sin tendencia empleados en este trabajo, es de las herramientas más potentes para el estudio de series temporales no periódicas con propiedades fractales.

Por otro lado, están los análisis en el dominio exclusivamente temporal, como el *análisis R/S*, que se detalla a continuación. Éste constituye el primer desarrollo estadístico que proporciona una aproximación para el análisis y caracterización de series temporales que no presentan periodicidad, pero retienen términos de correlación a largo plazo. Este análisis constituye una conexión entre los procesos estocásticos auto- semejantes y los procesos con memoria larga.

2.3.1. Análisis R/S

El *análisis R/S* fue propuesto por Hurst y colaboradores en 1965 dentro del campo de la hidrología. Posteriormente, se demostró como este fenómeno aparecía también en otras áreas como la geofísica (Mandelbrot & Wallis 1969), el cambio climático (Bloomfield 1992), la economía y la comunicación (Willinger et al. 1995), etc.

El comportamiento del caudal del río Nilo fue extensamente estudiado por su comportamiento característico de largo alcance, de manera que largos periodos de sequía eran seguidos por otros periodos de inundaciones. Este comportamiento fue históricamente y de manera especulativa descrito en la Biblia (Génesis 41, 29 - 30): "Vendrán siete años de gran abundancia en toda la tierra de Egipto, y detrás de ellos vendrán siete años de escasez, que harán se olvide toda la abundancia en la tierra de Egipto, y el hambre consumirá la tierra". Como consecuencia histórica además de los estudios y resultados obtenidos por Hurst, y posteriormente por Mandelbrot & Wallis (1969) se denominó a este fenómeno *efecto Joseph*.

Hurst dedicó gran parte de su vida a la investigación de los registros temporales del flujo del río Nilo (figura 2.5) durante su participación en el proyecto destinado al diseño y control de reserva de la presa de Assuan, Hurst (1951). El problema consistía en determinar la capacidad de almacenamiento dependiente del flujo que entra al río proveniente de diferentes elementos como lluvias y riachuelos, y un flujo controlado de salida del río utilizado principalmente para el riego. Con anterioridad, otros hidrólogos habían supuesto este comportamiento como un proceso aleatorio, una suposición que era razonable cuando se trabajaba en un ecosistema complejo. Al estudiar los registros históricos (de 622 D.C. a 1469 D.C.) que mantenían los egipcios (Hurst 1951) observó que en el proceso, flujos más grandes que el promedio

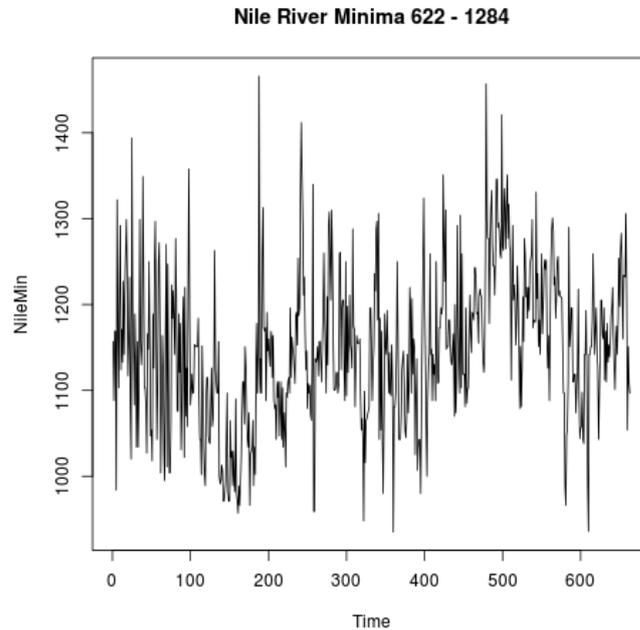


Figura 2.5: Registro del nivel mínimo anual del río Nilo. (Beran 1994)

eran seguidos por flujos aún mayores. Inesperadamente el proceso cambiaba a flujos menores que el promedio y eran seguidos por flujos todavía menores que los anteriores. Aparentemente el comportamiento presentaba ciclos, sin embargo su longitud no era periódica. Un análisis estándar no revelaba la existencia de una correlación estadísticamente significativa entre las observaciones, por lo que Hurst desarrolló su propia metodología.

Por otra parte, Hurst estaba enterado del trabajo de Einstein (1905) sobre el movimiento browniano. A grandes rasgos, el *movimiento browniano* está caracterizado fundamentalmente por dos de las propiedades de sus incrementos, la independencia y la normalidad de su distribución. Es decir, el *movimiento browniano* es un *p.e.* que posee incrementos estacionarios e independientes, los cuales están idénticamente distribuidos según una normal con media cero y varianza proporcional al incremento temporal. Es, básicamente, una generalización del random walk cuando el paso tiende a cero. Además es un caso de proceso auto-semejante que no presenta *d.l.p.* Luego, para poder aplicar este concepto a series de tiempo que no fueran movimientos brownianos, se debía considerar una ecuación, que tomara en consideración,

que los componentes de las series de tiempo no son independientes. A partir de las investigaciones de Hurst, Mandelbrot & Wallis (1969) encuentran la siguiente expresión que generaliza la teoría de Einstein,

$$(R/S)_n = cn^H, \quad (2.42)$$

donde R/S se conoce como rango reescalado, c es una constante y n es el valor que indica el nivel de agregación de la serie temporal. R/S tiene media cero, se expresa en términos de la desviación estándar y su valor se incrementa, en general, con n . Esta es la primera conexión del fenómeno de Hurst con el concepto de auto-semejanza y por tanto, con la geometría fractal.

Desarrollo analítico

Sea una serie temporal Y de tamaño n con una media muestral \bar{Y}_n y varianza muestral $S^2(n) = (1/n) \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}_n)^2$. El estadístico R/S de Y viene dado por el cociente

$$\frac{R(n)}{S(n)} = \frac{\max(W_i : i = 1, 2, \dots, n) - \min(W_i : i = 1, 2, \dots, n)}{S(n)} \quad (2.43)$$

donde $W_i = \sum_{k=1}^i (Y_k - \bar{Y}_n)$.

Es decir, dada una serie de longitud d ($Y_j : j = 1, 2, \dots, d$), se subdivide la serie en K bloques de tamaño $[d/K]$. Entonces para cada bloque $n = [d/K]$, se calcula la media, la desviación estándar $S(t_i, n)$ y la serie acumulada W_i , así como el rango $R(t_i, n)$, que es precisamente la diferencia entre el valor máximo y mínimo de la serie acumulada. Luego cada $R(t_i, n)$ se reescala normalizándolo por medio de su desviación estándar $S(t_i, n)$ y se van obteniendo los cocientes $R(t_i, n)/S(t_i, n)$, donde t_i representa el punto inicial del bloque de datos n . De esta forma se dispone de K estimaciones de $R(n)/S(n)$ para cada valor de n . Escogiendo para n valores logarítmicamente espaciados y representando $\log[R(t_i, n)/S(t_i, n)]$ frente a $\log(n)$ se obtiene el gráfico R/S . Se realiza un ajuste por mínimos cuadrados, de forma que la pendiente de la línea de regresión proporciona una estimación del parámetro de Hurst.

$$\log(R(t_i, n)/S(t_i, n)) = \log(c) + H \log(n) \quad (2.44)$$

Los valores más bajos de n deben descartarse, ya que éstos están dominados por la dependencia a corto plazo. Tampoco se suelen emplear los valores más extremos, ya que unos pocos puntos en dicha zona pueden hacer que la estimación sea poco fiable. En síntesis, este análisis mide el rango de las desviaciones de las sumas parciales de una serie temporal respecto de su media, reescalado por la desviación típica de la serie.

Si el sistema tuviera la característica de independencia entonces $H = 0.5$, que es lo que Hurst supuso como hipótesis nula en un principio. Sin embargo, como resultado de su investigación encontró un coeficiente de $H = 0.9$ y precisamente la diferencia entre este valor de H con el de la hipótesis inicial fue lo que se denominó, posteriormente, el *efecto Hurst*. Más tarde, Mandelbrot demostró empíricamente que las series de tiempo cuyas observaciones son independientes, $H = 0.5$, corresponden a un evento aleatorio puro.

Entonces dependiendo del valor del *factor de escala*, H ,

- $H = 0.5$ implica un proceso independiente.
- $0.5 < H < 1.0$ implica series de tiempo persistentes (*efecto Joseph*), caracterizadas por efectos de memoria a largo plazo. Se ha comprobado que las series persistentes son las más comunes en la naturaleza.
- $0 < H < 0.5$ significa antipersistencia en la serie de tiempo, y está relacionado con la probabilidad de presentación de eventos extremos y distribuciones de probabilidad de cola pesada.

El *análisis R/S* es una herramienta útil y robusta no solo para detectar *d.l.p* en una serie temporal, sino para distinguir entre series aleatorias de las que no lo son, incluso si las series aleatorias son no Gaussianas. Es decir, como el *análisis R/S* es un método no paramétrico, no requiere que la distribución subyacente siga una distribución normal (Peters 1994). Otra ventaja es la baja dificultad computacional que se requiere para su aplicación.

Nótese cómo, en principio, la dimensión fractal y el exponente de Hurst son independientes el uno del otro, es decir, mientras que D es una propiedad local del proceso o sistema, la dependencia a largo plazo, caracterizada por H , es una propiedad global. No obstante, en el caso que exista auto-semejanza, las propiedades locales se reflejarán en las globales, tal que $D + H = n + 1$, en un espacio n -dimensional. Así, se deduce de la relación anterior que la *d.l.p.* está asociada al caso $0,5 < H < 1$ y por tanto a dimensiones fractales pequeñas, mientras que el caso contrario, antipersistencia, está asociado a dimensiones fractales mayores (Gneiting & Schlather 2004; Turcotte 1997; Peitgen & Saupe 1988).

Algunas desventajas de este método se resumen en Devynck et al. (2000) y en Rangarajan & Ding (2000). Por un lado, se ha visto como la existencia de no estacionariedades puede llevar a interpretaciones erróneas de H y como esta interpretación requiere alguna evidencia de que la serie temporal representa un proceso estacionario y auto-semejante (Caccia et al. 1997). Por otro lado, el análisis R/S no es fiable cuando se trata con series de tiempo que no son lo suficientemente largas. En estos casos es difícil distinguir los efectos de memoria larga de los de memoria corta ya que lo normal es que estos efectos se encuentren solapados (Teverovsky et al. 1999; Katsev & L'Heureux 2003; Coronado & Carpena 2005). Otras teorías consideran que el efecto Hurst es un comportamiento preasintótico, es decir, que la convergencia al valor $H = 0.5$ es extremadamente lenta y por tanto las observaciones para registros finitos dan como resultado valores del exponente de Hurst mayores que 0.5 (Lloyd 1967). También la presencia de tendencias, causadas generalmente por procesos externos, puede llevar a sobreestimaciones del factor de escala o que datos que no están correlacionados aparenten lo contrario (Bhattacharya et al. 1983; Rangarajan & Ding 2000; Koscielny-Bunde et al. 2006). No obstante, eliminar tendencias presentes en una serie temporal a través de métodos convencionales como los de media móvil (MA) no es posible, ya que este tipo de métodos destruye las correlaciones a largo plazo. También cabe destacar la dificultad que presenta la distinción entre tendencias y *d.l.p.* (Kantelhardt et al. 2006). Por último, obsérvese que esta metodología permite únicamente la determinación de un único exponente de escala, es decir, no tiene en cuenta la posibilidad de que el proceso presente un comportamiento multifractal.

En definitiva, debido a las limitaciones que presentan las metodologías clásicas, en las últimas décadas se han desarrollado otras herramientas que en mayor o menor medida, son capaces de lidiar de forma más adecuada con registros provenientes de procesos naturales. Las técnicas modernas de análisis más empleadas son aquellas basadas en el análisis *wavelet* (Arneodo et al. 1995), y las basadas en el análisis de fluctuaciones sin tendencia, empleadas en este trabajo (Peng et al. 1994; Kantelhardt et al. 2002). Principalmente se diferencian en la forma en la que se determinan las fluctuaciones y en el tipo de tendencia que se elimina en cada intervalo temporal. Más detalles y aplicaciones de estas técnicas a datos climáticos, meteorológicos, biológicos, fisiológicos, etc. se puede encontrar en Peng et al. (1994), Taqqu et al. (1995), Bunde et al. (2000), Kantelhardt et al. (2001), Abry & Veitch (1998), Kantelhardt et al. (2003), Király & János (2005), Varotsos et al. (2013), Zhang & Zhao (2015), etc.

2.3.2. Detrended Fluctuation Analysis, DFA

Muchos de los problemas encontrados a la hora de determinar si existe *d.l.p.* en series temporales naturales suelen estar ligados a la presencia de no estacionariedades, como por ejemplo tendencias, y a la posibilidad de que éstas estén causadas por efectos externos o estén relacionadas con las características intrínsecas del proceso. Por tanto, el mayor problema que presentan los métodos convencionales radica en diferenciar las características de escala inherentes a la dinámica subyacente que rige el proceso, de las características de escala que podrían ser causadas por no estacionariedades debidas a efectos externos. Además, en ocasiones, no es fácil eliminar las tendencias de las series temporales sin que la correlación a largo plazo se vea afectada. Según Ossadnik et al. (1994) y Peng et al. (1995) ésta es justamente una de las ventajas que presenta el análisis de fluctuaciones sin tendencia, o detrended fluctuation analysis, en adelante *DFA*, dado que sistemáticamente elimina tendencias polinómicas de diferentes órdenes. Su antecesor fue el análisis *FA* que está afectado por no estacionariedades, de la misma manera que el análisis *R/S*, o el análisis de densidad espectral de potencia.

El método *DFA* está basado en la teoría del paseo aleatorio (Schlesinger et al. 1987) y en el concepto de auto- semejanza, de modo similar al análisis *R/S* (Feder

1988; Kantelhardt et al. 2001). Por tanto, dado que en los métodos basados en la teoría del paseo aleatorio se trabaja sobre las sumas acumuladas de las series temporales, la medida del exponente de escala de la serie integrada nos puede decir cuales son las propiedades de correlación a largo plazo de la serie de tiempo original (Peng et al. 1995), reduciendo a su vez el nivel de ruido de los registros. En otras palabras, recordando que, si una secuencia discreta es indistinguible de sus secuencias agregadas con respecto a sus propiedades estadísticas, se tiene un *p.e.s.s.* Además si estas propiedades estadísticas son las de segundo orden, el *p.e.s.s.* posee *d.l.p.*

En síntesis, el método *DFA* permite detectar correlaciones que siguen una ley de potencias en señales con tendencias polinómicas integradas que, a su vez, pueden enmascarar las verdaderas correlaciones en las fluctuaciones de la señal. Estudios recientes han demostrado que este método supera a las técnicas convencionales ya que cuantifica de forma precisa las propiedades de correlación sobre un amplio rango de escalas.

El método *DFA* fue propuesto por Peng et al. (1994) y ha sido implementado con éxito en numerosos trabajos que abarcan diferentes campos de interés como el clima (Koscielny-Bunde et al. 1998; Talkner & Weber 2000; Pattantyus-Abraham et al. 2004; etc.), la actividad solar (Ogurtsov 2004), fluctuaciones en temperatura superficial del mar, (Monetti et al. 2003; Fraedrich & Blender 2003), señales sísmicas (Telesca et al. 2004), economía (Liu et al. 1997), fisiología (Peng et al. 1994), e incluso en música (Streich & Herrera 2005), entre otros, y es empleado en este trabajo para examinar la presencia de correlaciones a largo plazo en series temporales de procesos oceánicos.

Desarrollo analítico

Teniendo en cuenta que las series temporales que se emplean en este trabajo se corresponden con registros diarios a lo largo de R años y con el fin de desestacionalizar dichas series tanto en la media como en la varianza, se determina $\hat{m}(j)$, $j = 1, \dots, 365$, que son los 365 valores medios correspondientes a cada día del año y la correspondiente desviación estándar.

$$\hat{m}(j) = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R S(i, j) \quad j = 1, \dots, M = 365 \quad i = 1, \dots, R \quad (2.45)$$

$$\sigma_{m_j} = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R \sqrt{\text{Var}(S(i, j))}$$

donde $S(i, j)$ indica el dato de la serie temporal correspondiente al día j en el i –ésimo año. R es el número de años de los que se dispone y $M = 365$ días por año.

A continuación, se resta a cada registro de la serie original su promedio diario anual y el resultado se divide entre la desviación estándar correspondiente. Luego se calcula el perfil como la suma acumulada de los valores obtenidos,

$$Y_k = \sum_{i=1}^R \sum_{j=1}^M \frac{S_k - \hat{m}_j}{\sigma_{m_j}} \quad (2.47)$$

donde $k = j + (i - 1) * 365$; $k = 1, \dots, N = 365 * R$.

$$\Delta Y_r = \sum_{k=1}^r Y_k \quad (2.48)$$

Haciendo uso de la Teoría del paseo aleatorio, el perfil se puede considerar como la posición de una persona después de dar k pasos en direcciones aleatorias. Así, el resultado de la integración de Y_k resulta ser un proceso con carácter auto-semejante, es decir, un proceso tipo movimiento browniano. Generalmente, la forma del perfil suele ser similar a una parábola cóncava (convexa), lo que puede estar indicando la presencia de una tendencia lineal positiva (negativa) en los datos. Sin embargo, se ha demostrado que también datos sin tendencias puramente correlacionados pueden mostrar un perfil con esta forma (Monetti et al. 2003).

A partir de la ecuación 2.48, se divide el perfil en s segmentos no solapados de igual longitud n , tal que $s = 1, \dots, N/n$ y posteriormente, a cada segmento se le ajusta una función polinómica de orden l . En el caso del método *FA*, en lugar de ajustar un polinomio simplemente se obtiene el cuadrado de las fluctuaciones como $F_s^2(n) = (Y_{(s+1)n} - Y_{sn})^2$, donde Y_{sn} y $Y_{(s+1)n}$ son los valores del perfil al principio y final de cada segmento k , respectivamente.

Existen diferentes órdenes del *DFA* que se distinguen en la forma en que las tendencias son eliminadas de la serie temporal. Por ejemplo, para $l = 1$ se ajustará una línea recta a cada segmento del perfil, eliminando así la influencia de posibles tendencias lineales a escalas mayores que n . En general, es posible ir ajustando polinomios

de orden superior, de forma que el algoritmo se denota como $DFA-l$. Entonces, para un segmento dado de longitud n , definimos el valor del DFA como la varianza entre el perfil y el mejor ajuste en los intervalos:

$$F^l(n) = \sqrt{\frac{1}{n[N/n]} \sum_{r=1}^{n[N/n]} (\Delta Y_{r,s} - f_s^l(r))^2} \quad r = 1, \dots, N. \quad (2.49)$$

donde N es el número tal de datos.

Repitiendo este cálculo para todos los posibles valores de n , se obtiene una relación entre la fluctuación media, DFA_n^l , y el tamaño del segmento n de manera que,

$$F^l(n) \propto n^H \quad (2.50)$$

Naturalmente, las fluctuaciones del perfil para diferentes valores de n están relacionadas con la función de auto-correlación en series con *d.l.p.*.

Generalmente, $F^l(n)$ crecerá con n y las fluctuaciones pueden ser caracterizadas por el exponente de escala que será precisamente la pendiente de la recta al ajustar $\log(F^l(n))$ frente a $\log(n)$, de forma análoga a como se hizo para el *análisis R/S*.

Para un ruido blanco $H = 0,5$, para procesos persistentes $H > 0,5$ y lo contrario se cumple para $H < 0,5$, antipersistencia. Para $H > 1$ la correlación existe pero ya no es de la forma de una ley de potencias (Talkner & Weber 2000; Chen et al. 2005), y $H = 1,5$ indica un movimiento browniano (Peng et al. 1995). El caso particular de $H = 1$, o ruido tipo $1/f$, ha generado una gran variedad de opiniones diferentes en la literatura. Así, según algunos autores este comportamiento está relacionado con sistemas críticamente auto-organizados, *SOC*, (Bak et al. 1987 y 1988), que se encuentran en un punto donde las dependencias a corto y largo plazo son indistinguibles, o dicho de otro modo, no se diferencian las contribuciones de las frecuencias más altas de las más bajas. Bak et al (1988) consideran además que el fenómeno *SOC* es uno de los mecanismos por los que surge la complejidad en la naturaleza, no obstante no existe un conjunto de características que garanticen que el comportamiento de un sistema o proceso vaya a presentar criticalidad auto-organizada. La naturaleza evoluciona a estados críticos donde pequeñas perturbaciones pueden inducir grandes cambios en el sistema. Es decir, la respuesta del sistema no tiene porque ser proporcional a la magnitud de la perturbación. Se ha comprobado

que ciertos procesos naturales, tales como avalanchas de nieve, deslizamientos de tierra, terremotos, etc., no sólo pueden sufrir grandes alteraciones bajo los efectos de grandes perturbaciones, sino también por otras prácticamente imperceptibles. El estado crítico se alcanza debido a la naturaleza dinámica de las interacciones entre los componentes individuales del propio sistema, por lo que el estado particular que se alcanza es auto-organizado así como independiente de cualquier agente exterior (Aschwanden 2011). Por otro lado, otros autores sugieren que las fluctuaciones que se comportan según un ruido $1/f$, pueden ser consecuencia de la interacción de muchos procesos a diferentes escalas temporales, es decir, son consecuencia de una naturaleza multiescala del sistema o proceso. De hecho, se ha demostrado que ciertas distribuciones de escalas temporales pueden llevar a un comportamiento tipo $1/f$ (Schlesinger & West 1988; Beran 1994; Hausdorff & Peng 1996).

2.3.3. Multifractal Detrended Fluctuation Analysis, MFDFA

El análisis de fluctuaciones sin tendencia multifractal, en adelante *MF DFA*, no es más que una generalización del *DFA*, donde en lugar de obtener la varianza de la función de fluctuación, se obtiene los momentos de orden q de la varianza de la misma función. Fue propuesto por Kantelhardt et al. en 2002 partiendo de la idea de que, en general, los fenómenos naturales poseen más de un exponente de escala. Es decir, son fenómenos complejos en los que participan varios procesos a la vez con una alta probabilidad de que lo hagan a lo largo de diferentes escalas temporales, o dicho de otro modo, exhiben auto-semejanza a diferentes escalas temporales. Por tanto, el fenómeno presenta un comportamiento que requiere la obtención de más de un exponente de escala para su completa caracterización.

Desarrollo analítico

El desarrollo analítico está basado en el formalismo de la función de partición estándar para medidas normalizadas y estacionarias. Los primeros pasos en el procedimiento son idénticos al *DFA*, sin embargo aquí la ecuación 2.49 se reescribe, para cada segmento, como

$$F_{r,q}(n) = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=(r-1)n+1}^{rn} |y(k) - y_p(k)|^q \right)^{1/q} \quad (2.51)$$

donde q sólo toma valores reales y debe tomar tanto valores positivos como negativos con el fin de evaluar la función de fluctuaciones para periodos temporales largos y cortos. O dicho de otro modo, la función de fluctuación se evalúa no sólo para la varianza como en se hace en el *DFA*, $q = 2$, sino que lo hace para estadísticos de orden tanto inferior como superior. Por último se promedia sobre todos los segmentos

$$F_q(n) = \frac{1}{N_b} \sum_{r=1}^{N_b} F_{r,q}(n) \quad (2.52)$$

donde $F_q(n)$ es la función de fluctuación media de orden q . De esta manera, se calculan los diferentes exponentes de escala mediante el análisis de las gráficas log-log de $F_q(n)$ frente a n para cada valor de q . En general, $F_q(n)$ se incrementará a medida que se incremente el valor de n siguiendo una ley de potencias, tal que

$$F_q(n) \sim n^{H_q} \quad (2.53)$$

donde H_q es el exponente de Hurst generalizado, que describe el comportamiento de escala de la función de fluctuación para diferentes valores de q . Así, para $q > 0$, se tienen valores bajos de H_q que caracterizan segmentos con fluctuaciones largas, mientras que para $q < 0$, H_q presenta valores elevados que describen segmentos con pequeñas fluctuaciones. El caso particular de $q = 2$ reproduce el procedimiento estándar *DFA* y por tanto $H_q = H$.

Una forma alternativa de caracterizar la estructura multifractal de una serie temporal es mediante el cálculo de otros parámetros como el espectro singular, $D(\alpha)$. Se relaciona comúnmente con H_q a través del clásico exponente de escala multifractal, conocido como índice de Renyi, $\tau_q = qH_q - 1$. A su vez, éste también se emplea en el cálculo del exponente de singularidad, o exponente de Hölder, a través de la transformada de Legendre (Feder 1988)

$$\alpha = \tau'_q = H_q + qH'_q \quad (2.54)$$

A partir de la expresión anterior es posible obtener el espectro multifractal mediante

$$D(\alpha) = q\alpha - \tau_q = q(\alpha - H_q) + 1 \quad (2.55)$$

La gráfica de $D(\alpha)$ frente a α tiene un aspecto típico en forma de parábola cóncava cuyo máximo corresponde a $q = 0$. El ancho representa las desviaciones respecto a la estructura fractal media, dada por el exponente de escala del análisis monofractal, DFA , y generalmente, se mide como $\alpha_{max} - \alpha_{min}$. No obstante, cuando aparecen espectros que no son simétricos el ancho se calcula como el doble de la distancia que existe entre el α correspondiente a la cola más corta de la parábola y el α correspondiente al pico máximo, donde $D(\alpha) = 1$. En estos casos, para $q < 0$ el espectro tendrá la cola izquierda más larga que la derecha, lo que implica que la serie presenta un comportamiento multifractal dominado por las fluctuaciones a largo plazo. Para $q > 0$ ocurrirá lo contrario y el comportamiento multifractal estará dominado por las fluctuaciones a corto plazo. Una serie monofractal, donde $q = 2$, tendrá un espectro de ancho prácticamente nulo y centrado en $\alpha = H_q = 0,5$. Por tanto, D_q es una función que se mantiene constante independientemente del valor de q , es decir, si una serie posee una estructura monofractal pura basta con estudiar el momento $q = 2$ ya que el estudio de órdenes superiores no aporta nueva información.

2.3.4. Ventajas e Inconvenientes, DFA-MFDFA

En comparación con los métodos convencionales, incluyendo el análisis propuesto por Hurst, así como otros procedimientos más actuales, el DFA y su generalización, el $MFDFA$, presentan ciertas ventajas:

- Muestran una convergencia mucho más rápida a valores válidos y precisos del exponente de escala (Weron 2002; Ogursov 2004).
- Pueden distinguir entre tendencias lentas y correlaciones a largo plazo, de este modo son más adecuados para el análisis de series de datos no estacionarios.
- Son herramientas efectivas para clarificar si valores del exponente de escala superiores a 0,5 obtenidos mediante otros métodos realmente implican la existencia de *d.l.p.* o si son el resultado de efectos transitorios o no estacionariedades del proceso.

- Se consideran de los métodos más fiables para estimar *d.l.p.*, porque proveen de resultados precisos casi independientemente del tamaño de la serie temporal y de la fuerza de las correlaciones presentes en la señal. No obstante, para series temporales extremadamente cortas, $N < 1000$, y para valores muy bajos de α , los efectos de tamaño pueden afectar al análisis y dar lugar a malas interpretaciones del exponente de escala como se detalla a continuación, (Chen et al. 2002; Coronado & Carpena 2005).
- La implementación de los algoritmos en comparación con el análisis wavelet, es rápida y computacionalmente no supone grandes dificultades.
- En el caso particular del análisis multifractal, Oswiecimka et al. 2005 y 2006 demuestran que, en general, el análisis *MF DFA* da mejores resultados en la mayoría de los casos que el análisis wavelet.

Sin embargo, en todo procedimiento de análisis de datos es necesario tener presentes las limitaciones del mismo y las precauciones que se deben tener en su aplicación. En este sentido, las series temporales obtenidas al examinar fenómenos naturales suelen presentar diferentes tipos de no estacionaridades o deficiencias que, de no ser consideradas adecuadamente, pueden inducir a resultados y conclusiones incorrectas. Uno de los principales obstáculos al analizar series temporales, especialmente en el caso de series temporales de procesos físicos oceánicos, es que con gran frecuencia los registros obtenidos experimentalmente están incompletos. Las razones de este hecho pueden ser variadas, aunque algunas de las causas más frecuentes son la interrupción de las medidas por fallo o mantenimiento de los dispositivos de medida, pérdidas accidentales de datos o la necesidad de descartar datos claramente erróneos. La presencia de huecos en la serie limita considerablemente, y en ocasiones anula, la capacidad de las técnicas de análisis utilizadas para extraer información de las mismas y, en consecuencia, fuerza el uso de diferentes procedimientos de relleno de huecos. El uso de cualquier tipo de técnica de relleno implica ciertas ventajas pero también la introducción de incertidumbre sobre los resultados, puesto que el verdadero comportamiento de la serie durante el periodo en que no existen datos es desconocido. Este hecho adquiere una importancia creciente al aumentar la duración y frecuencia de los huecos en la serie. Entre las diferentes metodologías empleadas

para rellenar huecos en series temporales cabe citar el uso de técnicas de interpolación, modelos de series temporales (AR, ARMA, etc.) o la simple sustitución por valores medios correspondientes a ciclos promedio detectados en la serie.

En el caso particular del método *DFA* Chen et al. (2002), con el fin de evitar introducir información desconocida mediante el relleno de huecos, sugieren juntar los trozos sin rellenar los espacios vacíos en la serie y observan que este procedimiento no afecta significativamente a las propiedades de escala, incluso cuando se elimina el 50% de los datos, si $H > 0,5$. Dichos autores denominan este procedimiento *stitching*, y será el empleado en el presente trabajo en las series incompletas.

Otro problema que se suele presentar al analizar series temporales, especialmente aquellas asociadas a procesos hidro-meteorológicos, es la presencia de ciclos o patrones periódicos, o no periódicos, denominados de forma genérica como tendencias y que deben ser distinguidas y aisladas de las fluctuaciones intrínsecas del proceso para poder obtener resultados coherentes, puesto que éstas introducen no estacionariedades en la señal. Esto es particularmente importante para la identificación de dependencias a largo plazo en un proceso dado. Entre las señales periódicas que se pueden detectar en las series hidro-meteorológicas destacan el ciclo anual, inducido fundamentalmente por el ciclo solar, directa o indirectamente. No obstante, en determinados fenómenos también pueden estar inmersos patrones cíclicos de duración diaria, mensual, etc.

Es importante resaltar que los problemas antes citados no son exclusivos de las metodologías empleadas en el presente trabajo, sino que cada uno de ellos afecta, en mayor o menor medida, a cualquier metodología de análisis empleada para el estudio de las características fractales del proceso en cuestión. Así, por ejemplo, la presencia de un ciclo periódico en una serie temporal se ve reflejada en toda la estructura de la función de auto-correlación y del perfil de dicha serie, como una banda de energía en la escala correspondiente en el espectro wavelet y como un pico en la función de densidad espectral. No obstante, mientras la separación de determinados tipos de tendencias es relativamente simple, como es el caso de tendencias lineales, polinómicas o incluso periódicas, otras resultan prácticamente imposibles de eliminar correctamente, tal es el caso en el que la serie presenta un patrón cíclico complejo, resultante de la combinación de diversos factores, que representa el caso más común

en las series temporales registradas en la naturaleza.

Varios estudios recientes han demostrado que el análisis *DFA* a pesar de ser un método práctico y sencillo para analizar la *d.l.p.* en series temporales, presenta cierta susceptibilidad a la presencia de no estacionariedades (Xu et al. 2009; Nagarajan & Kavasseri 2005; Hu et al. 2001). La presencia de tendencias puede inducir la presencia de cruces en las gráficas logarítmicas de la función de fluctuaciones frente a la escala de tiempo, n , y reflejar la existencia, aparente o no, de más de un exponente a diferentes escalas temporales. En efecto, los valores del exponente de escala pueden estar condicionados por efectos externos, pudiendo provocar, por ejemplo, diferentes tipos de tendencias (lineales, polinómicas, sinusoidales o exponenciales). Asimismo, se suelen presentar otro tipo de no estacionariedades que pueden ser intrínsecas a los procesos naturales observados o inducidas por los métodos de preprocesado a los que se somete a las series temporales.

Chen et al. (2002) realizan un estudio detallado del efecto de no estacionariedades sobre el método *DFA*, demostrando que, en general, el efecto de las no estacionariedades es mayor cuando las señales están inicialmente correlacionadas negativamente.

Por otro lado, tras el estudio del efecto de transformaciones, lineales y no lineales, sobre las propiedades de escala en el análisis *DFA*, Chen et al. (2005) concluyen que las propiedades de correlación cambian al aplicar transformaciones polinómicas y que además, estos cambios dependen del tipo de correlación, persistente o antipersistente, que presente la señal, así como del orden de la transformación polinómica (par o impar) que se haga.

En la misma línea, Nagarajan & Kavasseri (2005) analizan la aparición de cruces en las gráficas $\log(F(n))$ vs. $\log(n)$, resultado de cambios en las propiedades de escala sobre diferentes rangos temporales, concluyendo que se debe tener especial cuidado en los tratamientos previos al análisis *DFA* que se hagan a la serie temporal, ya que las propiedades de correlación podrían verse modificadas. Asimismo, Nagarajan & Kavasseri (2005) y Xu et al. (2009) estudian los efectos de tendencias de tipo sinusoidal y exponencial respectivamente, y proponen técnicas de minimización y suavizado de estos efectos sobre las propiedades de correlación de la señal.

Tanto en la aplicación del método *DFA* como *MF DFA* es necesario tener en cuenta ciertos criterios a la hora de eliminar las tendencias de la serie temporal. Se

establece que para un segmento de perfil dado, de longitud n , el valor del DFA se define según la ecuación 2.49, y luego se repite este cálculo para todos los posibles valores de n , este paso es igual para el $MF DFA$. Según Rybsky et al.(2008), la precisión del análisis decrecerá a medida que n aumenta, por tanto, se admite que como máximo $n \leq N/4$ para garantizar que los resultados sean razonables. Por otro lado, el valor mínimo de n también se debe elegir de tal manera que los resultados no estén afectados por correlaciones a corto plazo.

Asimismo, se requiere especial precaución en la elección del rango de variación del orden q en el análisis multifractal, ya que un rango muy amplio puede llevar a resultados erróneos. Así, los resultados obtenidos para $|q|$ muy grandes pueden introducir errores numéricos que desestabilizan el resultado final, F_q . Nótese que el rango de variación dependerá también del tamaño de la serie temporal (Ihlen 2012).

Como aspecto más relevante de lo anteriormente comentado cabe destacar las implicaciones que los ciclos anuales o la variación estacional tienen en el análisis de series temporales medidas en la naturaleza. Tal como se ha comentado, el patrón de variación anual suele presentar una estructura bastante compleja, lejos del ideal comportamiento periódico sinusoidal, presentando variaciones intra-anuales e inter-anuales que hacen prácticamente imposible detectar con exactitud y eliminar dicho ciclo de las fluctuaciones que caracterizan la naturaleza aleatoria del fenómeno. Existen numerosos trabajos en el contexto del análisis de series temporales en los que se sugieren diferentes metodologías para sustraer la componente estacional (Weron 2006). No obstante, en este trabajo se utiliza uno de los métodos más empleados en la práctica, considerado entre los más efectivos, en el cual se eliminan tanto el ciclo promedio anual como la varianza asociada al mismo, transformando la serie original tal como sigue (Dahlstedt & Jensen 2005),

$$x = \frac{x_i - \bar{x}_{dia}}{\sqrt{\bar{x}_{dia}^2 - \bar{x}_{dia}^2}}. \quad (2.56)$$

Capítulo 3

Propiedades fractales de procesos físicos en el océano

De forma semejante a lo que ocurre con la atmósfera, el océano constituye un fluido ambiental que posee una dinámica de carácter turbulento, con numerosos fenómenos dinámicos operando e interactuando entre sí sobre intervalos temporales diferentes. En consecuencia parece razonable examinar la existencia de comportamientos de escala y posibles efectos de persistencia en los fenómenos observados en dicho medio.

En este capítulo se analiza la naturaleza del comportamiento a largo plazo de cuatro variables, que presentan un interés destacable en el contexto de la dinámica oceánica, empleando las técnicas *DFA* y *MF DFA*, y se estructura tal como sigue. La primera sección se centra en el estudio de la variabilidad temporal de la temperatura superficial del mar en el noreste del océano Atlántico, en términos de la longitud y la latitud, así como de la extensión de las ventanas espaciales empleadas para extraer las series temporales. En la segunda sección se examina el comportamiento de escala de la denominada energía cinética turbulenta en seis áreas oceanográficas con características diferenciadas, ubicadas dentro del margen oriental del Giro Subtropical. La sección tres aborda el estudio fractal de la variabilidad de la intensidad de las corrientes marinas y su comportamiento a diferentes profundidades en un punto localizado en la llanura abisal de Madeira, al noroeste de las Islas Canarias. Por último, la sección cuatro recoge el análisis de series temporales de altura de ola significativa, uno de los mecanismos más importantes en el control de la transferen-

cia de energía y materia en la interfase entre la atmósfera y el océano, así como con grandes implicaciones desde el punto de vista socioeconómico.

3.1. Fractalidad de la Temperatura Superficial del Mar

La temperatura superficial del mar, en adelante *SST*, es una de las variables oceanográficas más utilizadas como indicador ambiental, ya que está relacionada con una gran variedad de fenómenos físicos como son las corrientes y la intensidad de los vientos superficiales, la precipitación, la intensidad de la radiación solar, afloramientos y fluctuaciones del nivel medio del mar. Por otro lado, ejerce un importante impacto sobre los ciclos de vida, metabolismo, y en general sobre toda la actividad biológica. Por esta razón, el estudio de su variabilidad espacial y temporal resulta de gran interés, tanto desde un punto de vista físico como desde una perspectiva ecológica y medioambiental.

De la misma manera que se ha demostrado la existencia de fenómenos de persistencia en temperaturas atmosféricas sobre tierra (Koscielny-Bunde et al. 1996; Koscielny-Bunde et al. 1998; Eichner et al. 2003; Király & Jánosi 2005; Talkner & Weber 2000; Weber & Talkner 2001; Király et al. 2006; Varotsos et al. 2013; Varotsos & Efstathiou 2013; Luo et al. 2014) y dada la estrecha relación existente entre los comportamientos térmicos de la atmósfera y la superficie del mar, parece razonable pensar que en los océanos debe ocurrir algo parecido. Los océanos cubren, prácticamente, las tres cuartas partes del planeta y sobre todo poseen una alta capacidad para almacenar energía. Esta propiedad sugiere que debe existir una persistencia significativa en los registros de temperaturas superficiales del mar. Además, esta variable depende de multitud de procesos que interactúan entre ellos en el tiempo y el espacio a diferentes escalas, hecho que se traduce en un comportamiento altamente complejo de las series temporales de la misma.

Entre los primeros estudios sobre las variaciones en la temperatura superficial del mar en términos de anomalías en largos periodos de tiempo, se encuentra el Atlas Global de Temperaturas Superficiales del Mar llevado a cabo por Bottomley et al. (1990), que contiene una recopilación de datos globales recogidos por barcos desde 1851 a 1995 y un estudio de la climatología de la temperatura superficial del mar basada en dichos datos. Posteriormente, Parker et al. (1994) y Kaplan et al. (1998), utilizando datos globales superficiales, tanto terrestres como oceánicos, de

los registros de temperatura históricos de la Oficina Meteorológica del Reino Unido, confirman la existencia a lo largo de varias décadas de ciertas persistencias que denominan eventos fríos y cálidos.

Varios estudios han demostrado que las persistencias que muestran los registros de temperatura son de carácter más fuerte sobre los océanos que sobre tierra (Monetti et al. 2003; Alvarez-Ramirez et al. 2008; Bunde & Lennartz 2012). En particular, Monetti et al. (2003) emplean el análisis monofractal, *DFA*, para analizar registros de temperaturas superficiales del mar en varias regiones de los océanos Atlántico y Pacífico. Haciendo uso de la base de datos de *SST* mensuales obtenida por Kaplan et al. (1998), con una resolución espacial de $5^\circ \times 5^\circ$, obtienen valores del exponente de escala, H , que revelan la existencia de un claro efecto de memoria larga en la *SST*. Resultados similares han sido obtenidos por Bunde & Havlin (2002).

En este mismo contexto, Blender & Fraedrich (2003), Fraedrich & Blender (2003), Rybski et al. (2008) y Fraedrich et al. (2009), utilizan modelos de circulación atmósfera-océano para simular series temporales de *SST*. A partir de esta información evalúan las correlaciones a largo plazo empleando el método *DFA* y examinan la distribución espacial a escala global de H , con una resolución espacial de aproximadamente $4^\circ \times 4^\circ$. De la misma manera, Zhang & Zhao (2015) mediante el uso de registros reales de *SST*, provenientes de UK Met Office Hadley Centre pero con una resolución espacial de $1^\circ \times 1^\circ$, reproducen el mismo comportamiento en la distribución global de H . En particular, para el norte del océano Atlántico, observan un aumento de H con la distancia a la costa, mientras que en torno a $50^\circ N$ y por debajo de $20^\circ N$ obtienen un claro aumento del exponente hasta valores cercanos a 1. Cabe señalar que en los estudios elaborados por Rybski et al. (2008) y por Luo et al. (2015), se señala una clara disminución del exponente de escala con la latitud, disminuyendo hacia el Ecuador, detalle que no se observa en los demás estudios mencionados. En esta misma línea, Gan et al. (2007) demuestran que las anomalías de *SST* en el Sur del Mar de China presentan correlaciones temporales débiles cerca de la costa y relativamente fuertes lejos de esta. La dependencia geográfica del valor del exponente de escala está también de acuerdo con los resultados obtenidos en las distribuciones globales de H citados anteriormente.

Es interesante notar que, los estudios sobre la estructura fractal de la *SST* citados

previamente, asumen que un único exponente de escala es suficiente para caracterizar la dinámica de dicha variable. Sin embargo, ya se ha mencionado, que en registros provenientes de procesos naturales, generalmente, esto no es cierto. No obstante, la realidad es que los estudios sobre la naturaleza multifractal de la *SST* son escasos. Así, uno de los primeros estudios que demuestra la presencia de un efecto multifractal en campos de temperatura, fue el elaborado por Seuront et al. (1996), en el Mar del Norte. También Lewis & Ray (1997), abordan la complejidad de la evolución temporal de la *SST*, a partir de series temporales diarias registradas a lo largo de 20 años en la costa de California, y demuestran la existencia, no sólo de propiedades de *d.l.p.*, sino también de efectos a lo largo de múltiples escalas temporales y efectos no lineales mediante modelos auto-regresivos no lineales. Casi una década después, Álvarez-Ramírez et al. (2008) analizan las correlaciones en series temporales promedio de temperatura, tanto oceánicas como continentales en los hemisferios Norte y Sur, durante 125 años, haciendo uso de los registros mensuales proporcionados por el centro estadounidense National Climatic Data Center (*NCDC*). El estudio demuestra la existencia de un comportamiento multifractal, que refleja la naturaleza no lineal de los registros de temperatura, y el hecho de que este comportamiento es el resultado de muchas contribuciones que interactúan entre sí. Más recientemente, Luo et al. (2013) y Luo et al. (2015), investigan y verifican la presencia de correlaciones a largo plazo para la series temporales mensuales de *SST* mediante el análisis *DFA*, e indican que la serie exhibe un comportamiento multifractal sin profundizar en el origen de este comportamiento.

Esta sección analiza la existencia de correlaciones a largo plazo en registros de temperaturas superficiales del mar, en la región oceanográfica correspondiente al Sureste del Atlántico Norte, empleando el método *DFA*. En concreto, se examina la variabilidad de la persistencia y el comportamiento fractal de dicha variable oceanográfica en función de la latitud y la longitud, considerando factores como la distancia a la costa africana, los efectos de su geometría y la presencia de islas. Asimismo, se examina el efecto de la extensión de las ventanas espaciales para obtener las series temporales de temperatura analizadas. Por último, haciendo uso del método multifractal, *MF DFA*, se discute el comportamiento multifractal de los registros temporales y se examina cual puede ser el origen de este comportamiento. El análisis

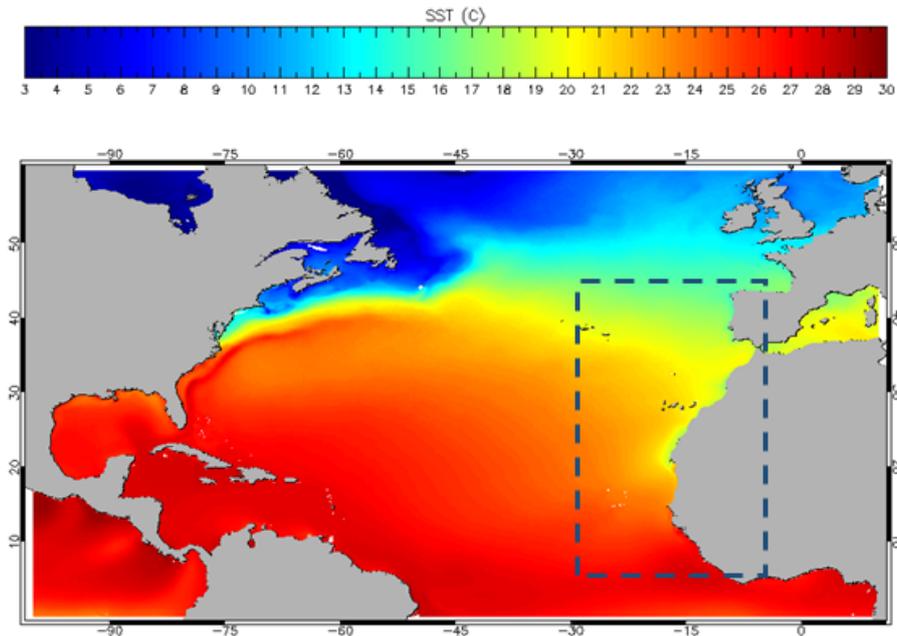


Figura 3.1: Imagen de la temperatura superficial del mar del Atlántico Norte. El recuadro con línea discontinua indica la posición de la zona de estudio.

sis se centra en las variaciones de las características particulares que presentan los espectros multifractales en función de la localización oceanográfica.

3.1.1. Zona de estudio

El área de estudio de esta sección se extiende desde 5°N hasta 45°N y desde 5°O hasta 30°O . Este área se muestra superpuesta sobre una imagen promedio de *SST* del Atlántico Norte obtenida con el sensor remoto AVHRR (Advanced Very High Resolution Radiometer), figura 3.1. La figura 3.2 muestra el valor medio de la *SST* durante el periodo 1986-2009 superpuesta con los sistemas de corriente dominantes en la zona de estudio. El primer rasgo destacable que se observa es el aumento de la temperatura en la dirección norte-sur. Este hecho guarda una estrecha relación con el flujo de radiación solar de onda corta incidente que varía con la latitud desde la zona ecuatorial, donde el flujo de radiación incidente es mayor, hasta la zona templada, donde es bastante menor.

Como se puede apreciar en la figura 3.2, también hay cambios en la *SST* en la dirección zonal, los cuales están vinculados a la dinámica oceanográfica y atmosférica

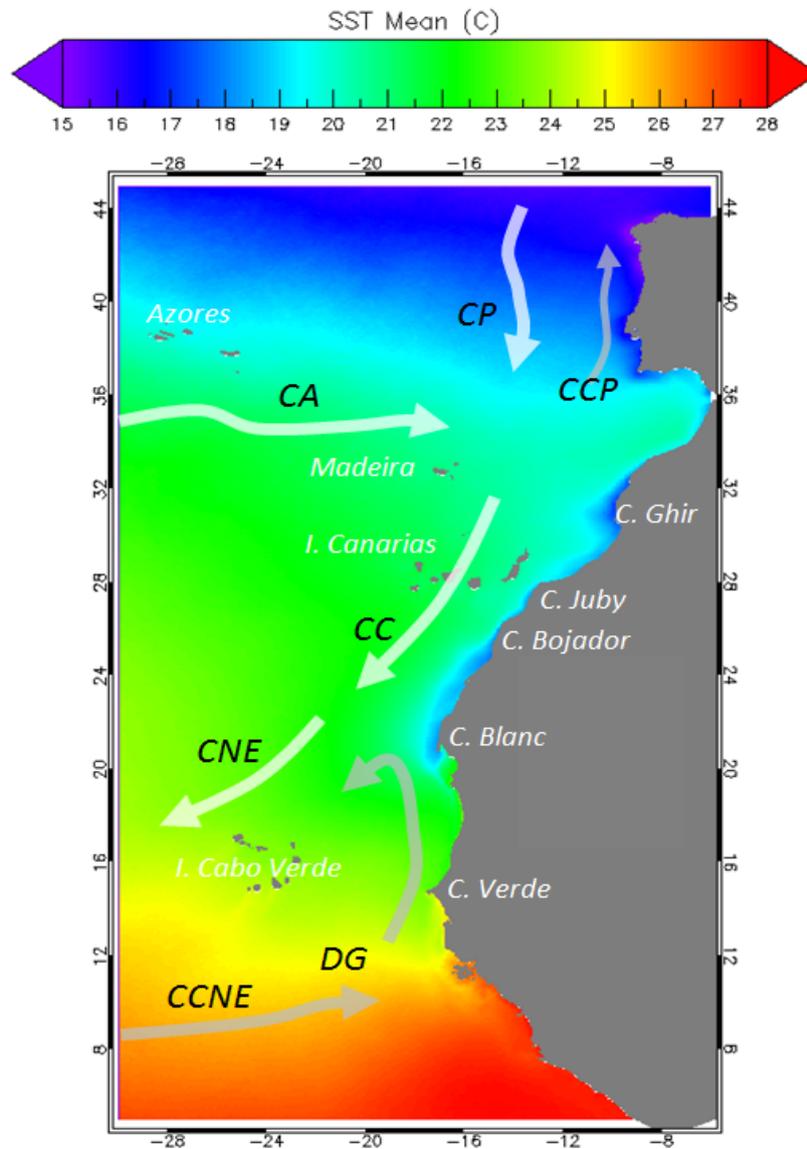


Figura 3.2: Imagen de la temperatura superficial del mar en la zona de estudio, superpuestos están los principales sistemas de corrientes (en blanco las corrientes permanentes y en gris las corrientes estacionales). Abreviaturas: CP-Corriente de Portugal, CCP-Contracorriente Costera de Portugal, CA-Corriente de Azores, CC-Corriente de Canarias, CNE-Corriente Norecuatorial, CCNE-Contracorriente Norecuatorial, DG-Domo de Guinea.

de la región estudiada. En consecuencia, resulta conveniente mencionar los principales aspectos de la circulación oceánica superficial en la región de interés que pueden afectar a la distribución de *SST*. El área de estudio se encuentra bajo la influencia de varios sistemas de corrientes oceánicas, algunos de ellos con presencia permanente y otros con un marcado carácter estacional. Situada más al norte, se encuentra la Corriente de Portugal, que como otros sistemas de corrientes de límite oriental se caracteriza por ser amplio, débil y por fluir hacia el sur. Esta corriente, que se extiende desde 36°N hasta 46°N y desde la costa de la Península Ibérica hasta 24°O, se haya en un área de circulación débil que limita al norte con la Corriente Noratlántica y al sur con la Corriente de Azores, que son dos ramas en las que se divide la Corriente del Golfo al propagarse hacia el este. Si se considera a la Corriente Noratlántica y a la Corriente de Azores como parte de los límites de los giros subpolar y subtropical, entonces la Corriente de Portugal estaría situada en una zona entre giros (Pollard et al. 1996). En otoño y a comienzos del invierno, cuando las condiciones para el afloramiento no son favorables cerca de la costa oriental de la Península Ibérica, se desarrolla allí una corriente que se dirige hacia el norte, denominada Contracorriente Costera de Portugal.

Al sur de la Corriente de Portugal y lindando con el continente africano se encuentra la Corriente de Canarias, que también es una corriente de límite oriental y fluye hacia el Ecuador, formando parte en este caso del Giro Subtropical. En su límite norte, la Corriente de Canarias se conecta con una de las ramas de la Corriente de Azores, que al aproximarse al continente se ve forzada a dirigirse hacia el sur por la acción de la costa y los vientos alisios. Entre 20°N y 25°N, la Corriente de Canarias se despega del margen continental y gira de forma gradual en dirección Oeste formando parte de la Corriente Norecuatorial.

El límite inferior de la zona de estudio se encuentra bajo la influencia de la Contracorriente Norecuatorial que de forma periódica aparece en esta región y que se caracteriza por desarrollar un flujo intenso que conduce hacia el este el agua de la zona ecuatorial. Cuando este flujo se aproxima al continente africano parte de él se desvía hacia el norte al actuar este como barrera, constituyendo una corriente superficial cálida próxima a la costa que se conoce con el sobrenombre de Corriente de Mauritania. Esta corriente avanza hacia el norte hasta alcanzar las inmediaciones

de Cabo Blanco donde coincide con el área de despegue de la Corriente de Canarias hacia el oeste. Una estructura oceanográfica importante, estrechamente ligada a estos sistemas de corrientes ecuatoriales presente en el límite sur de esta región, es el Domo de Guinea, denominado así porque las isotermas ascienden y generan una estructura similar a un domo térmico, que puede ejercer su influencia sobre la temperatura superficial del mar.

Cerca de la costa, la dinámica oceánica se modifica como resultado de la dirección meridional del viento, conociéndose a la circulación resultante con el nombre de afloramiento costero. La acción de los vientos alisios, que soplan paralelos a la costa durante gran parte del año, provocan que la masa de agua más cercana a dicha costa sea transportada hacia el océano (transporte de Ekman) dando lugar al surgimiento de las aguas profundas, frías y ricas en nutrientes, que ocupan el lugar de las primeras. Bajo estas condiciones, se generan valores de *SST* más bajos cerca de la costa que los observados en océano abierto. Lejos de ser un fenómeno homogéneo, la variabilidad espacial de los vientos y las irregularidades de la topografía del fondo y de la geometría de la costa, dan lugar a la presencia de lugares donde el afloramiento costero aparece intensificado, denominados centros de afloramiento, que están asociados a los valores más bajos de *SST* cercanos a costa. Como ejemplos en la región de estudio y en las cercanías de Cabo Ghir y Cabo Bojador se sitúan dos de estos centros de afloramiento, figura 3.2.

El límite entre ambas zonas, la costera correspondiente al afloramiento y la oceánica, se denomina zona de transición costera, suele ser bastante brusco en forma de zona frontal y presenta, además, una alta variabilidad. Esta se manifiesta a través de la presencia de remolinos fríos (cyclónicos) y cálidos (anticiclónicos) de diferentes tamaños y a través de unas estructuras estrechas y elongadas conocidas como filamentos de afloramiento, los cuales conducen las aguas frías del afloramiento hasta el océano abierto, pudiendo adentrarse hasta cientos de kilómetros. Estos filamentos han sido observados y estudiados en su propagación desde la costa hacia las aguas de la Corriente de Canarias (Van Camp et al. 1991; Barton et al. 2004) y Portugal (Haynes et al. 1993; Barton et al. 2000 y 2001). Algunos de estos filamentos aparecen de forma recurrente e intensificados en el lugar ocupado por cabos en la costa y cambios en la topografía del fondo, como ocurre con el filamento situado en Cabo

Ghir (Hagen et al. 1996).

También son fuente de variabilidad espacial de la temperatura superficial del mar en la zona de estudio, la presencia de los archipiélagos de Azores, Madeira, Canarias y Cabo Verde, que afectan a la dinámica del océano y la atmósfera en la región de interés. Las islas actúan como obstáculos para el flujo de las corrientes y vientos incidentes sobre ellas dando origen, cuando estos son lo suficientemente intensos, a la presencia de remolinos ciclónicos y anticiclónicos a sotacorriente de las mismas (García-Weil et al. 2014; Caldeira et al. 2014). De igual manera, las islas con suficiente altura, al bloquear la libre circulación de la atmósfera, crean a sotavento de las mismas zonas protegidas en las que el flujo de calor se ve reducido en comparación con las zonas expuestas a la acción del viento. Esto favorece la formación de estelas de agua caliente que pueden observarse en imágenes de satélite de temperatura de la superficie del mar (Barton et al. 2004).

Además de una notable variación espacial, que abarca un amplio rango de escalas espaciales en estrecha relación con las causas que las producen, la *SST* muestra también una extensa variabilidad en el dominio temporal. El hecho de que la *SST* sea una componente esencial en el sistema acoplado atmósfera-océano, implica que esta mantiene una importante relación con el clima que se reflejan en el Atlántico en cambios de baja frecuencia relacionados con variaciones decadales e interanuales (Carton et al. 1996). También la *SST* exhibe una fuerte señal estacional, figura 3.3, aunque las causas responsables de este efecto no son únicas. Así, para aguas del océano abierto situadas en latitudes superiores a los 10°N es el ciclo estacional de la radiación solar el factor principal que la controla. Sin embargo, en la zona ecuatorial y cerca de la costa, es notable la influencia de los vientos, en particular en la zona costera a través de su relación con el fenómeno del afloramiento, figura 3.3(b).

Precisamente, la periodicidad de los vientos alisios ligada a la migración en la dirección norte-sur de los sistemas de presión atmosférica, determina la estacionalidad y el reforzamiento de la subida de aguas profundas y frías cerca de la costa. Esto condiciona la presencia del afloramiento, que ocurre solo en verano en la parte norte de la región de interés, persiste durante todo el año en Cabo Blanco, que ocupa la posición central de la región, y se desarrolla en invierno al sur de Cabo Blanco. Esta migración de los sistemas de presión atmosférica también está ligada a la estaciona-

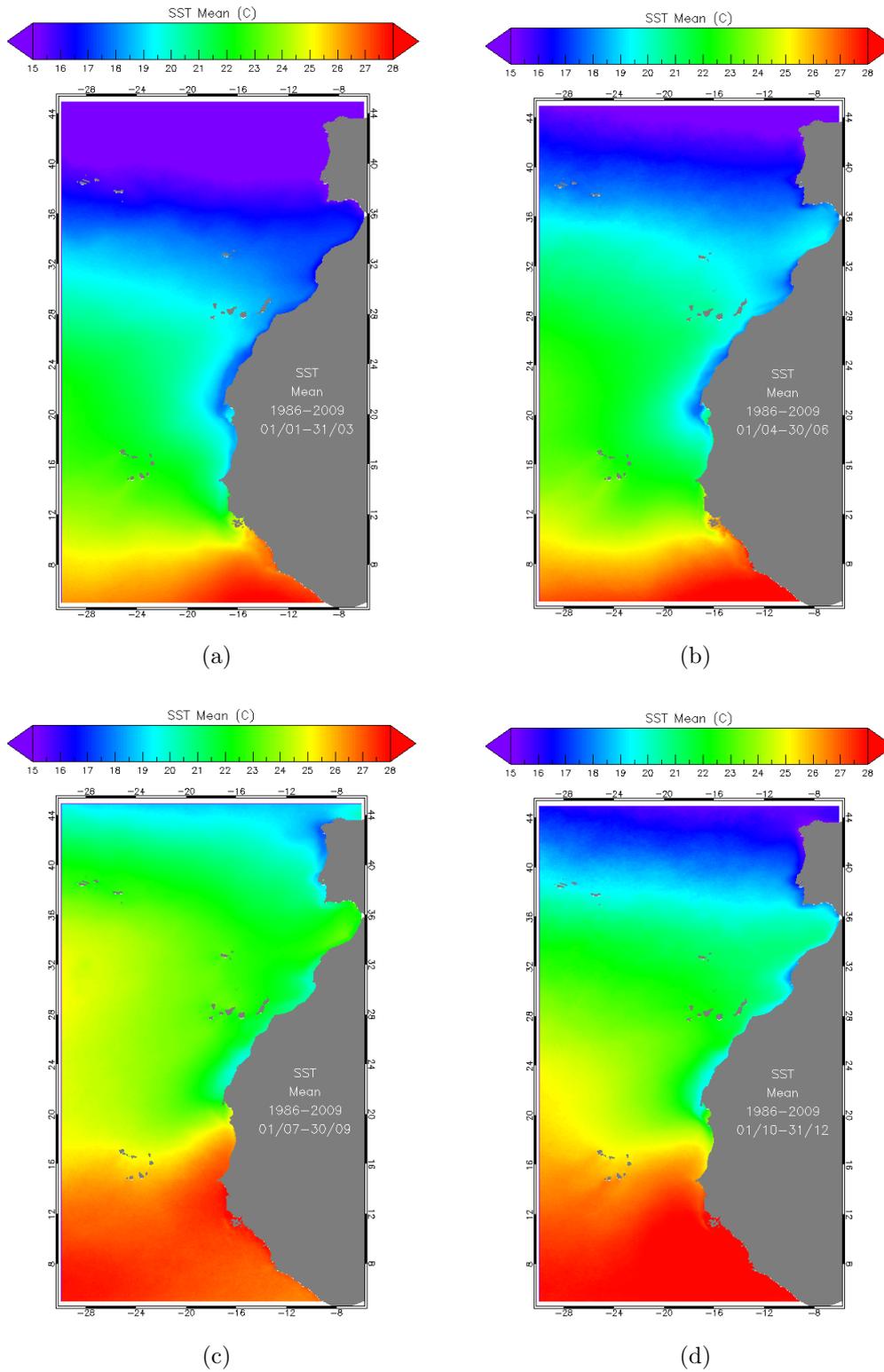


Figura 3.3: Imágenes promedio de SST del sensor AVHRR para el periodo 1986-2009 y los meses enero a marzo (a), abril a junio (b), julio a septiembre (c) y octubre a diciembre (d).

lidad de algunas corrientes que se observan en la región de estudio. Así durante el invierno, cuando los alisios son débiles en el norte de la zona de interés, aparece la Contracorriente Costera de Portugal que dirige su flujo hacia el norte. Análogamente, al sur de Cabo Blanco, el momento en que los alisios son más débiles durante el verano en estas latitudes coincide con la presencia de la Corriente de Mauritania, que también dirige su flujo hacia el norte.

La variación espacio-temporal de todos los factores anteriormente expuestos (la forma de la costa y la presencia de las islas, la circulación oceánica, el viento, los afloramientos costeros, las estructuras oceanográficas mesoescalares y la radiación de onda corta) contribuyen de un modo u otro a generar un patrón de variabilidad de la *SST* sustancialmente complejo.

3.1.2. Base de datos

Los datos de temperatura superficial del mar empleados en este trabajo fueron adquiridos por el sensor AVHRR de la serie de satélites meteorológicos polares de la NOAA (National Oceanic and Atmospheric Administration). Estos proceden del proyecto Pathfinder, cuyo objetivo es obtener campos fiables y consistentes de *SST* para todo el globo terrestre a partir de las medidas realizadas por los 5 canales del sensor *AVHRR* (<http://www.nodc.noaa.gov/SatelliteData/pathfinder4km>). En concreto, se han usado los datos de la versión 5 de este proyecto (Pathfinder V5), en los que estos han sido reprocesados utilizando una versión mejorada del algoritmo empleado en versiones anteriores del proyecto Pathfinder. Como resultado se obtuvieron los campos globales de la *SST* con una resolución espacial de, aproximadamente, 4×4 km² para el periodo comprendido desde el año 1981 hasta la actualidad. Una revisión de las versiones anteriores del algoritmo del proyecto Pathfinder, así como una discusión sobre los criterios de calidad impuestos a los datos se puede encontrar en Kilpatrick et al. (2001). En la tabla 3.1 se describe la serie de satélites de la NOAA que registraron los datos en este proyecto.

La estimación de la *SST* mediante sensores instalados en satélites se basa en la medida de la energía que proviene de la radiación emitida por el océano en la región del infrarrojo (8-14 μm). El sensor AVHRR incorpora cinco bandas localizadas en dicha región espectral, así, los valores de radiancia medidos por éste se convierten

Satélite	Año/Día	Año/Mes/Día	Órbita
NOAA-7	1981/236-1985/003	81/08/24-85/01/03	Tarde
NOAA-9	1985/004-1988/312	85/01/04-88/11/07	Tarde
NOAA-11	1988/313-1994/256	88/11/08-94/09/13	Tarde
NOAA-9	1994/257-1995/021	94/09/14-95/01/21	Tarde
NOAA-14	1995/022-2000/285	95/01/22-00/10/11	Tarde
NOAA-14	1995/022-2000/285	95/01/22-00/10/11	Tarde
NOAA-17	2003/001-2005/155	03/01/01-05/06/04	Mañana
NOAA-18	2005/156-2006/365	05/06/05-06/12/31	Tarde

Cuadro 3.1: Satélites del NOAA que se utilizaron en la versión 5 del proyecto Pathfinder. (National Oceanographic Data Center, NODC)

en temperaturas mediante la fórmula del cuerpo negro de Planck. No obstante, la temperatura radiativa así obtenida es en realidad una temperatura aparente, puesto que el efecto de absorción del vapor de agua en la atmósfera hace que la radiación que sale de los canales 4 (10.3-11.3 μm) y 5 (11.5-12.5 μm) del sensor esté parcialmente atenuada, aún cuando estos intervalos espectrales estén dentro de una ventana atmosférica, que es aquella zona del espectro en que la radiación emitida o reflejada por la superficie terrestre puede atravesar la atmósfera. Como consecuencia, la temperatura obtenida es algo menor que la *SST* real y por tanto, es necesario realizar una serie de correcciones debida a este efecto atmosférico.

El algoritmo para la generación de los campos de *SST* se basa en la combinación de los datos obtenidos simultáneamente por los canales 4 y 5, correspondientes a la misma ventana de transmisión atmosférica (Casey & Cornillon 1999),

$$SST = \alpha + \beta(T_4) + \gamma(T_4 + T_5)T_g + (T_4 + T_5) + \delta(\sec \theta - 1) \quad (3.1)$$

donde T_4 y T_5 representan las temperaturas del cuerpo negro correspondientes a las radiancias de los canales 4 y 5 del radiómetro AVHRR, T_g es una primera aproximación del valor de la *SST* basado en análisis semanales objetivos de campos de *SST* (Reynolds & Smith 1994) y α , β , γ y δ son coeficientes determinados empíricamente. Para un estudio más detallado del algoritmo véase Casey & Cornillon (1999).

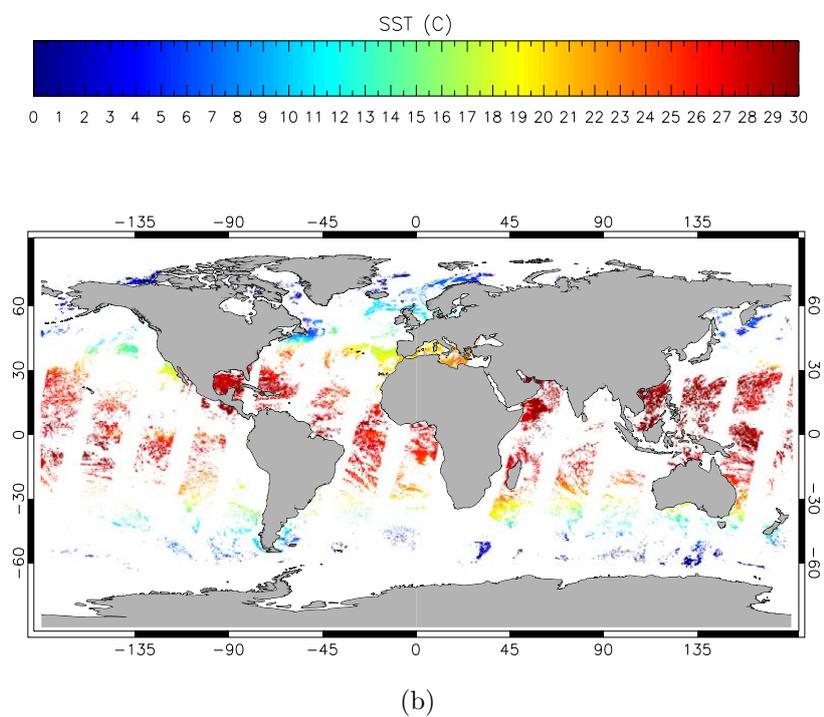
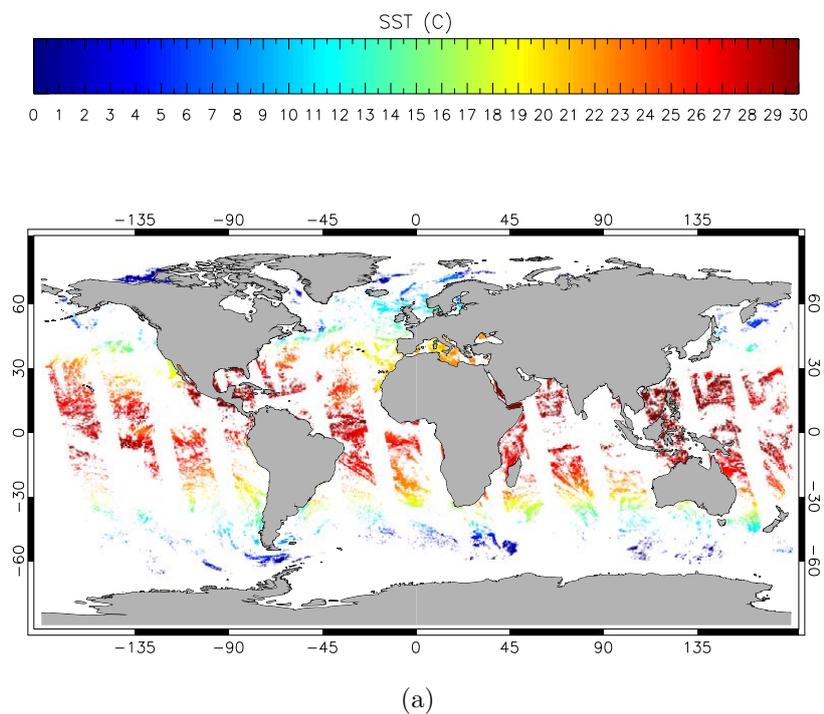


Figura 3.4: Campo global de la *SST*. (a) Pase satelital diurno. (b) Pase satelital nocturno.

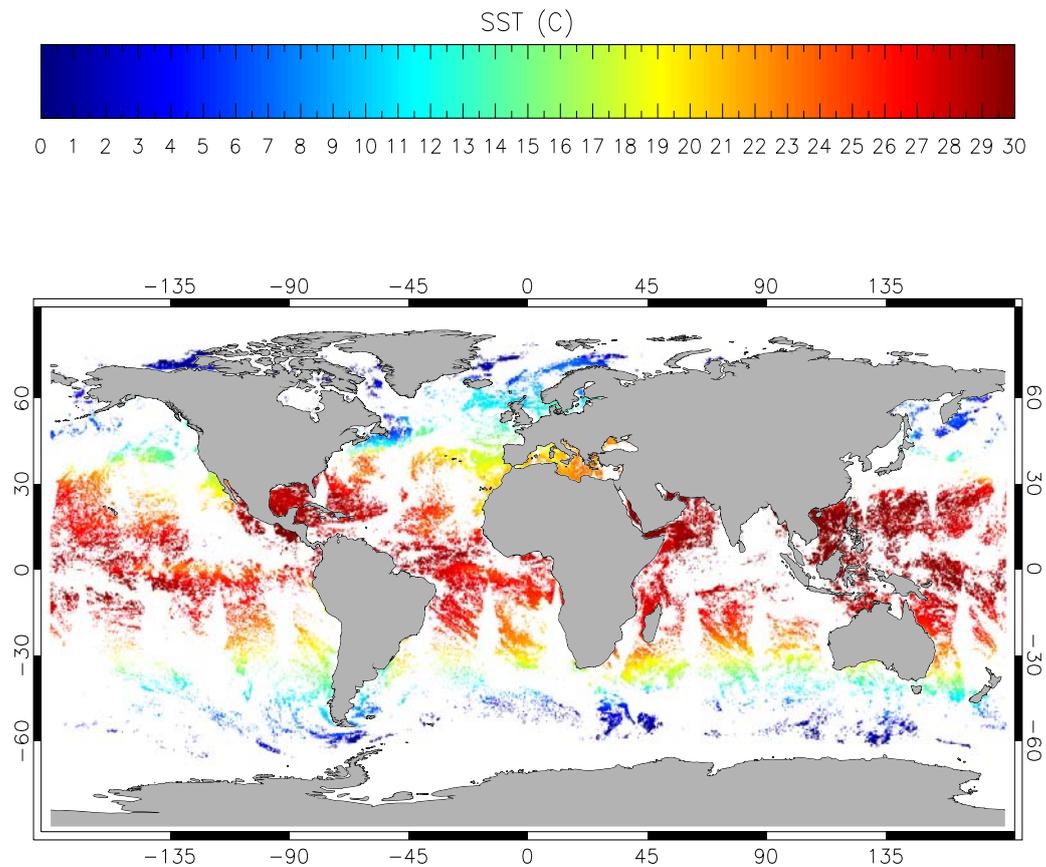


Figura 3.5: Campo global promedio de la *SST*, incluyendo conjuntamente los pases nocturnos y diurnos.

El proyecto Pathfinder oferta al usuario distintos productos en concordancia con sus necesidades. Una de las opciones es emplear campos globales de *SST*, en donde las observaciones satelitales diurnas y nocturnas se tratan por separado generando dos campos globales de *SST* al día (figura 3.4). La otra posibilidad es la que se utiliza en este trabajo, consiste en el empleo de un solo campo global de *SST* al día que incluye el promedio de los pases satelitales diurnos y nocturnos (figura 3.5). Así se maximiza el número total de observaciones diarias disponibles. En general, los datos se presentan en una malla que cubre toda la superficie oceánica con una resolución de algo más de $4 \times 4 \text{ km}^2$ por píxel. La serie temporal correspondiente a la zona de estudio cubre un período de muestreo de 21 años, desde 1986 hasta 2009. Con el fin de trabajar con una cobertura temporal adecuada, las ventanas en las que se divide

toda la zona de interés tienen una resolución espacial de 15×15 píxeles. Asimismo, se seleccionaron 19 áreas distribuidas dentro de la región de estudio tal como se muestra en la figura 3.6(a). En cada una de ellas se emplean series temporales correspondientes a ventanas espaciales cuadradas de 45×45 píxeles, o lo que es lo mismo, ventanas espaciales con un tamaño de $180 \times 180 \text{ km}^2$. Además, con el fin de examinar los efectos de la dimensión de la ventana espacial sobre la que se promedia para obtener la serie temporal de valores de *SST*, se ha seleccionado una ventana centrada en el punto de coordenadas $20.2^\circ N$ y $17.5^\circ O$, y cuya dimensión espacial adopta los valores 3×3 , 9×9 y 15×15 píxeles, ver figura 3.6(b)

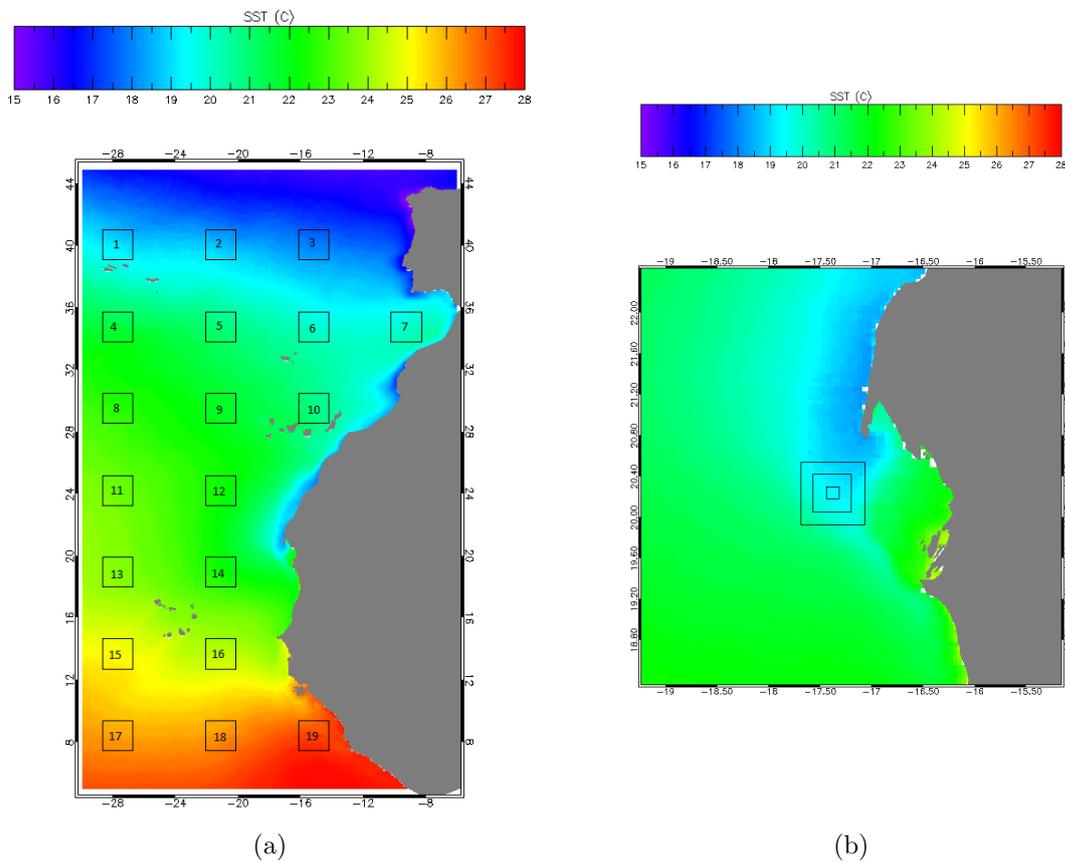


Figura 3.6: (a) Localización de las 19 ventanas seleccionadas, con una resolución espacial de 45×45 píxeles, $180 \times 180 \text{ km}^2$, superpuestas sobre el campo global promedio de la *SST*. (b) Ventana adicional, centrada en el punto $20.2^\circ N$ y $17.5^\circ O$, dibujada con diferentes coberturas espaciales, 3×3 , 9×9 y 15×15 píxeles, superpuesta sobre el campo global promedio de la *SST*.

En cuanto a la cobertura temporal de los datos, en la figura 3.7 en la que se muestra el número total de pixels por trimestre, se puede comprobar cómo las imágenes trimestrales son similares a la imagen anual, ver 3.8, con diferencias debidas a la migración de los sistemas de nubes a lo largo del año. La mayor cobertura se observa en el área de la costa africana, al sur de España y detrás de las islas, donde la geografía propia de la región provoca un efecto de pantalla resultando en una menor ausencia de datos. Este mismo efecto es notable también en las imágenes trimestrales entre Marzo y Septiembre. Por último, cabe destacar una ligera disminución de datos con la distancia a la costa, igual que en las regiones norte y sur del área de interés, fenómeno probablemente debido a una mayor presencia de nubes en estas zonas. En este sentido, las series temporales de *SST* extraídas presentan periodos en los que no existe información. Tal como se mencionó en la sección 2.3.4, en el presente trabajo se sigue la recomendación de Chen et al. (2002), uniendo los segmentos de serie útiles para eliminar la presencia de huecos.

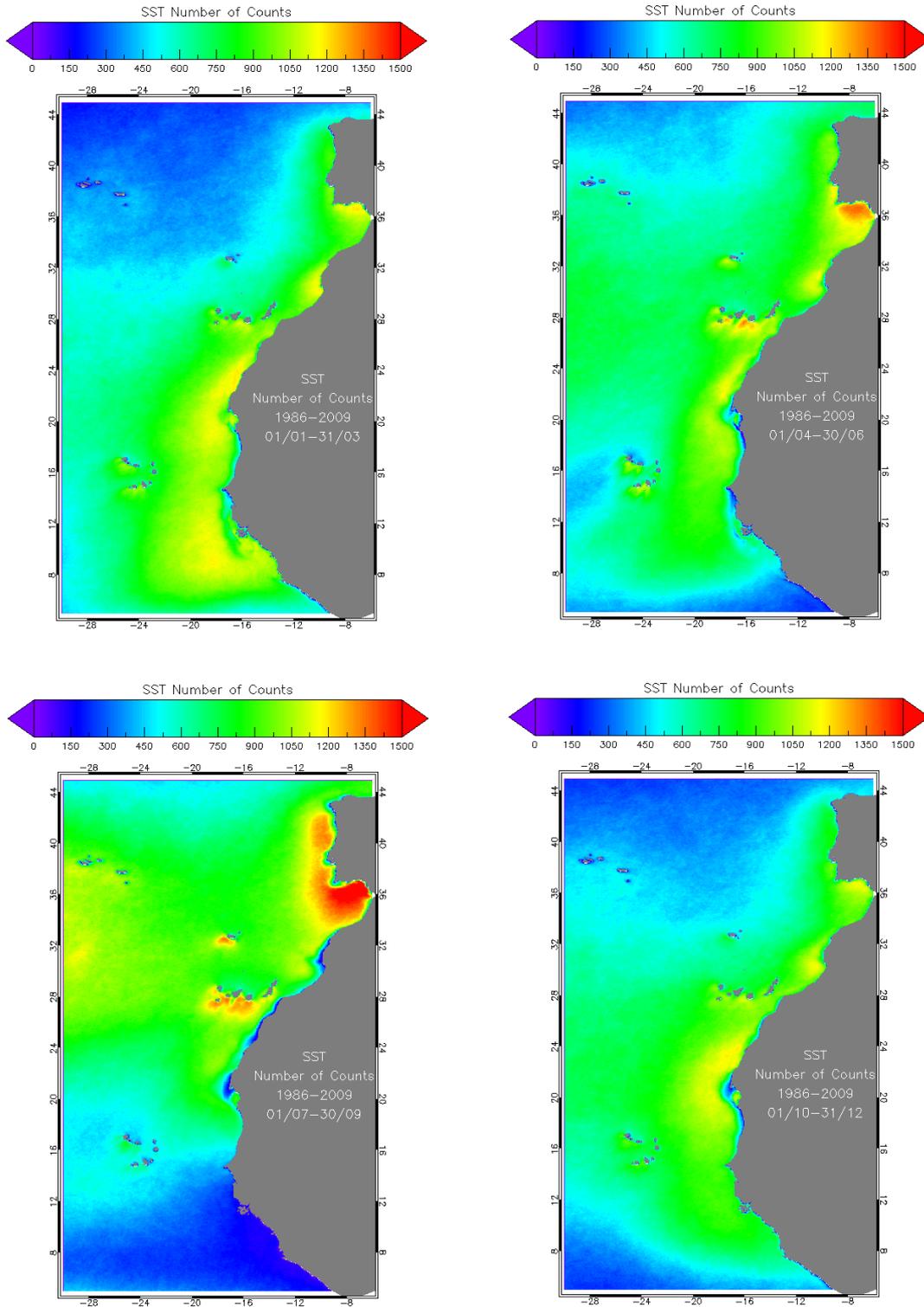


Figura 3.7: Imágenes trimestrales de pixels con datos disponibles de las series temporales de *SST* en la zona de estudio, para el periodo 1986-2009. (a) De enero a marzo, (b) de abril a junio, (c) de julio a septiembre y (d) de octubre a diciembre.

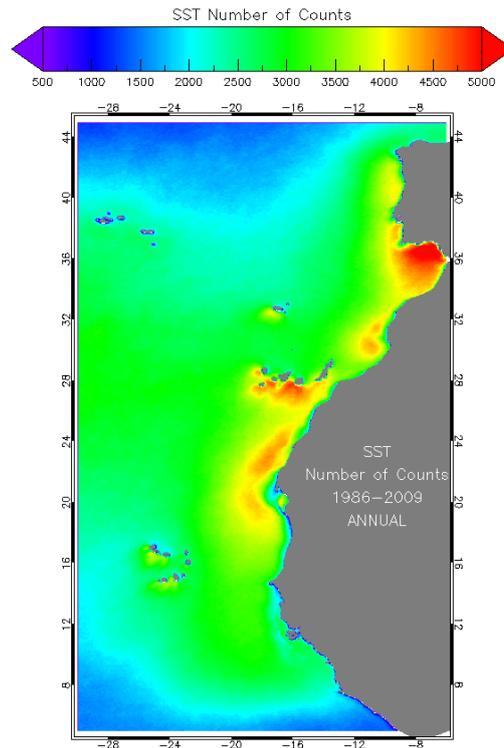


Figura 3.8: Imagen de la cobertura total de datos disponibles en las series temporales de *SST* para el periodo desde 1986 hasta 2009 en la zona de estudio.

3.1.3. Resultados y Discusión

Análisis Monofractal

En este apartado, se presentan y discuten los resultados del análisis de las fluctuaciones de las series temporales diarias de *SST*, ya descritas, mediante el análisis monofractal.

La información derivada del *DFA* aplicado a las series temporales de las ventanas espaciales de 15×15 pixels, que cubren toda el área de interés, está representada en la figura 3.9, donde se muestra la distribución continua de los exponentes de escala, o de Hurst, obtenidos. El patrón de comportamiento presenta claras variaciones tanto en términos de la latitud como de la longitud geográfica. Por un lado, nótese como los valores de H parecen estar distribuidos según 3 regiones diferenciadas, que además coinciden con zonas donde existen gradientes notables de temperatura

(figura 3.6). Así, al norte, entre 39°N y 44°N, el exponente H se distribuye de manera relativamente homogénea en longitud y toma valores en torno a 0,8 y 1. En la zona localizada más al sur, entre 4°N y 8°N, el comportamiento de H es similar al anterior. Además, en la zona sur y cerca de la costa, es donde se obtienen los valores más bajos de H , ligeramente por debajo de 0,8. En latitudes medias bajas, entre 12°N y 38°N, H presenta los valores máximos, que llegan a estar por encima de 1 en áreas alejadas de la costa. Su rango de variación longitudinal, es claramente superior al latitudinal, reflejando una distribución de los exponentes de escala más heterogénea. Asimismo, en las regiones próximas a las islas también se observan exponentes de escala por encima de 1, que en la figura 3.9 vienen representados en tonos amarillos. Nótese la forma en que se distribuyen los valores de H en las proximidades de las Islas Canarias. La presencia de éstas parece crear un efecto pantalla, tal que los valores más elevados de H se distribuyen detrás del archipiélago y hacia el suroeste. En este tramo, los valores del exponente de escala se hacen máximos en torno a 16-21°N 28°O alcanzando valores en torno a 1,2. Este hecho puede estar relacionado con los efectos dinámicos mesoescales generados por la perturbación del flujo, consecuencia de la presencia de las islas y las variaciones en intensidad y dirección de los Alisios.

En principio, cabe esperar que los resultados derivados del análisis monofractal de las series temporales correspondientes a las 19 ventanas indicadas en la figura 3.6(a), cuya extensión es de 45×45 pixels, sean parecidos a los mostrados en la figura 3.9.

En este caso como paso intermedio, se examinan además los perfiles obtenidos para cada ventana, figura 3.10. En general todos presentan un aspecto similar, en forma de parábola cóncava, que son algo menos pronunciadas en las ventanas correspondientes a la zona norte y sur. Este tipo de formas puede indicar tanto la existencia de correlaciones a largo plazo o la presencia de una tendencia lineal positiva en los registros temporales (Monetti et al. 2003). Sin embargo, las series originales no presentan, a primera vista, ninguna tendencia clara, como se puede apreciar en la figura 3.11, que no es más que un ejemplo de la evolución temporal de la *SST* para una de las ventanas elegida aleatoriamente.

Tres de los ajustes polinómicos obtenidos al aplicar el *DFA* a las fluctuaciones de

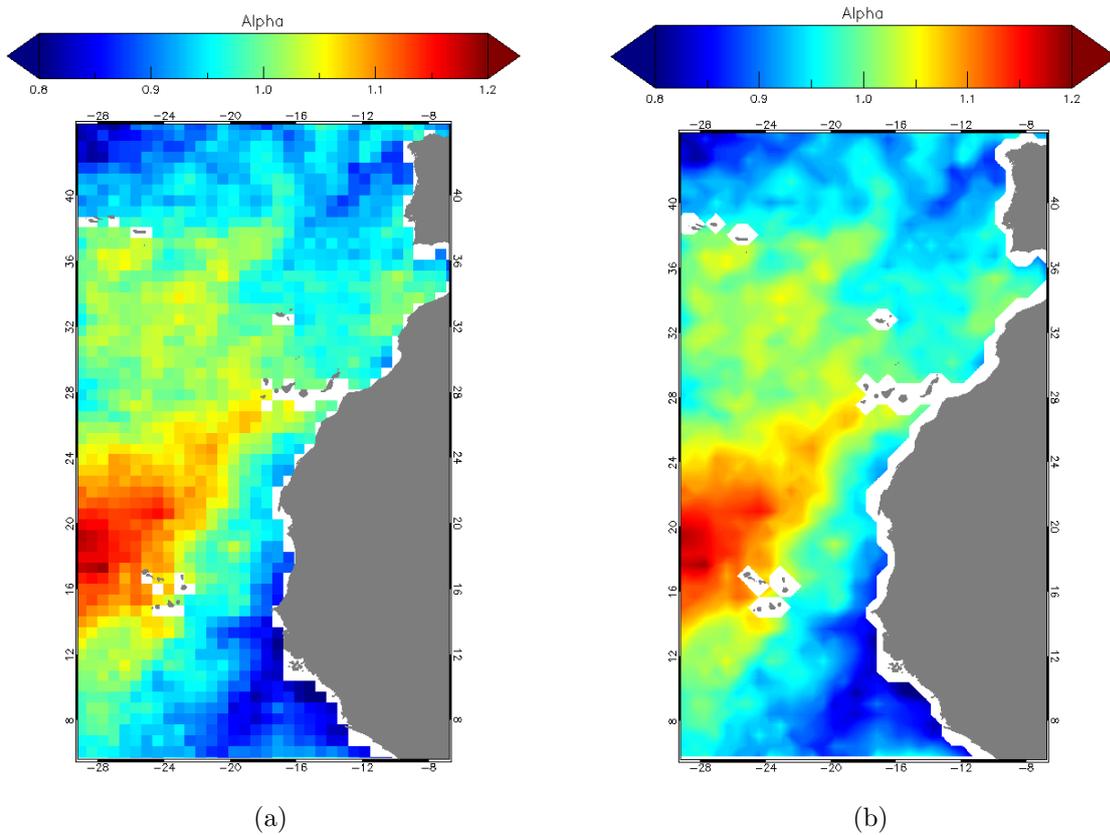


Figura 3.9: (a) Imagen de los exponentes de escala derivados del *DFA* obtenidos en el área de interés, para ventanas espaciales de 15×15 pixels. (b) Versión suavizada de lo mostrado en (a).

las series de *SST*, están representados, a modo de ejemplo en la figura 3.12, que en escala $\log - \log$ muestran el valor de la función de fluctuaciones frente al tamaño, n , de los s segmentos en los que se subdivide el perfil. Como ya se comentó, la pendiente de dichos ajustes es precisamente el exponente de escala, H . Se considera que los ejemplos son representativos del resto, no mostrados. En general, los ajustes son adecuados, aunque es notable como para escalas superiores a aproximadamente 1.7 años, $\log(n) \sim 2,8$, la dispersión de los datos aumenta y, en consecuencia el ajuste tiende a ser de peor calidad. Es importante destacar que, debido a las restricciones impuestas en la elección del tamaño de los segmentos, n , indicadas en la sección 2.4.5, las escalas temporales cubiertas en el estudio se extienden, aproximadamente, desde dos meses hasta 2.7 años.

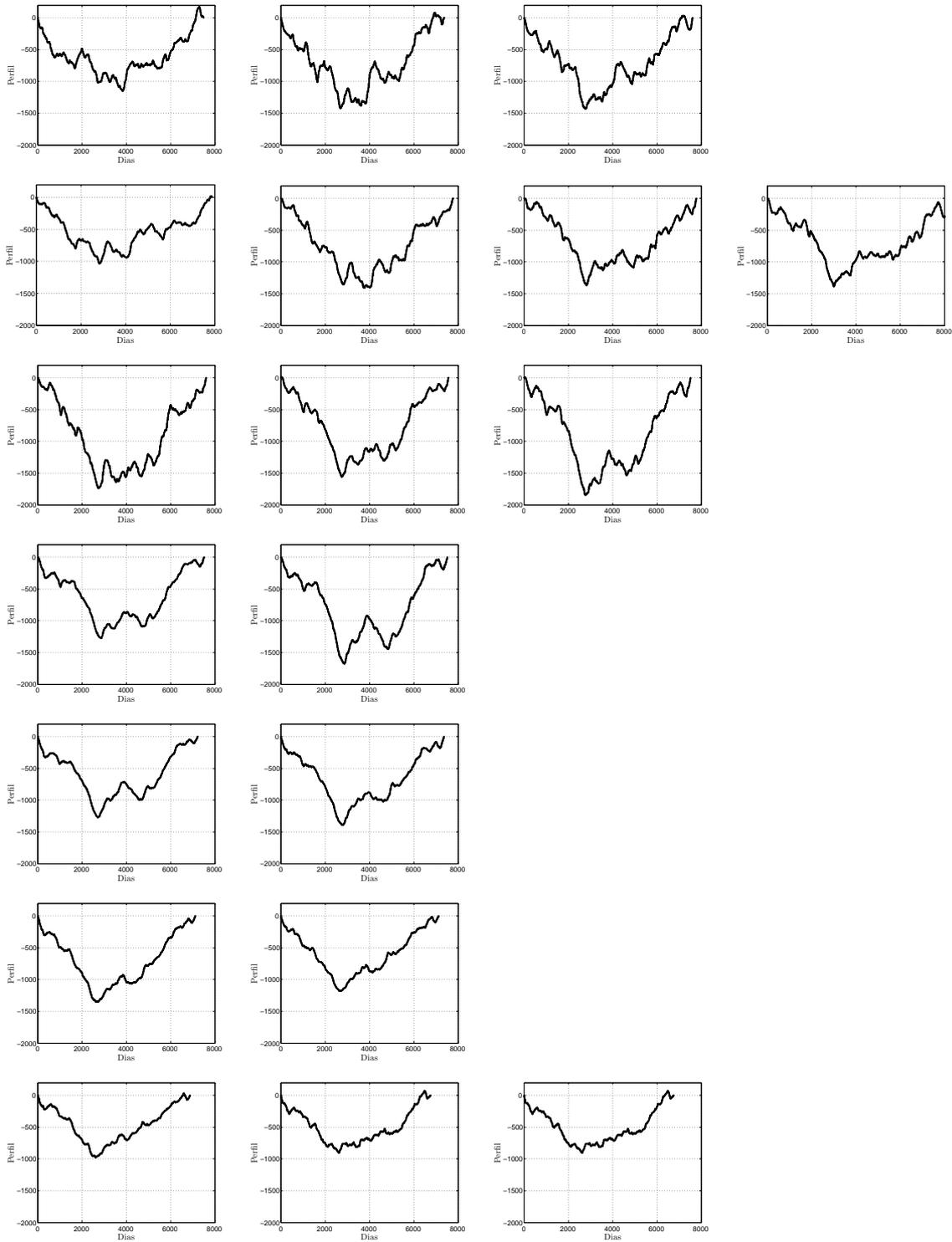


Figura 3.10: Perfiles de las series temporales de *SST* correspondientes a las 19 ventanas seleccionadas ordenados de norte a sur. Cada fila y cada columna corresponden a ventanas ubicadas en la misma latitud y longitud, respectivamente.

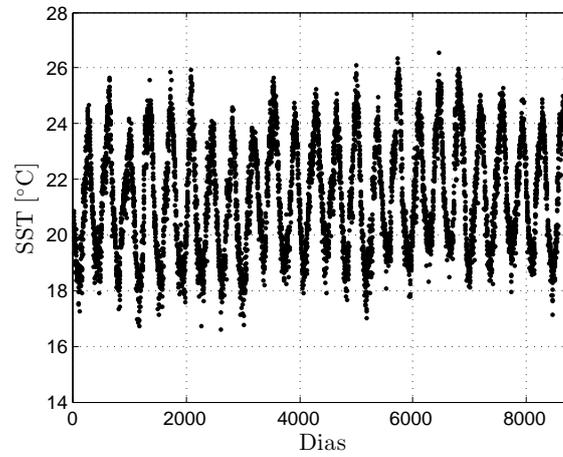


Figura 3.11: Evolución temporal de la SST para una de las 19 ventanas, elegida aleatoriamente.

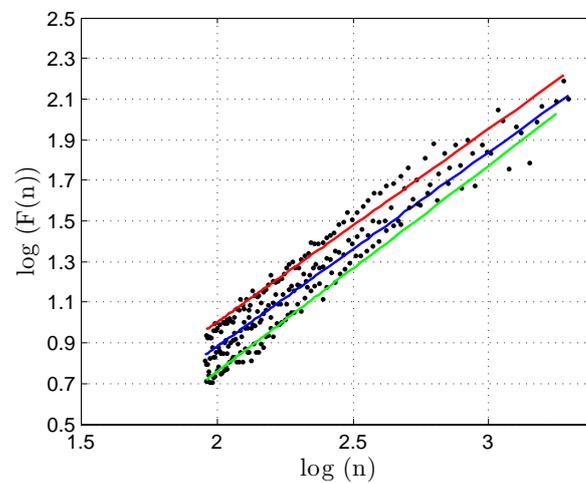


Figura 3.12: Ejemplo de ajustes lineales de las fluctuaciones de las series de SST frente al tamaño, n , de los s segmentos en los que se subdivide el perfil, en escala $\log - \log$. La línea azul se corresponde con el ajuste realizado para la ventana 4, la roja con la ventana 9 y la verde con la ventana 15.

Los exponentes de escala resultado del análisis monofractal para cada una de las 19 ventanas espaciales se indican de manera visual en la figura 3.13, que con el fin de facilitar su interpretación se muestran superpuestos al campo global promedio de la *SST*. A grandes rasgos, se observa un aumento de H con la distancia a la costa, así como variaciones claras en latitud. Además, es fácil comprobar, como los valores mínimos de H que aparecen al norte y sur, coinciden con perfiles suaves, mientras que los máximos, en latitudes medias entre 20° y 24°N , muestran perfiles más irregulares.

Un análisis conjunto del comportamiento de H , tanto en la figura 3.9 como en la figura 3.13, revela como los valores de este se distribuyen prácticamente igual en ambos casos. Lo que resulta lógico, si se tiene en cuenta que, aún cuando las 19 ventanas no cubren toda la región oceanográfica de interés, éstas están lo suficientemente bien distribuidas, como para esperar que los resultados sean comparables. No obstante, sí es cierto, que los valores de H son ligeramente superiores en el segundo caso, probablemente debido al proceso de promediar espacialmente sobre muchos más datos. Este procedimiento de promediado introduce dos efectos diferentes en las series temporales. Por un lado, se reduce el número de huecos, o de datos perdidos, minimizando así el efecto de las discontinuidades en la serie temporal. Por otra parte, se asigna a cada valor instantáneo de la serie un promedio espacial que elimina las diferencias en las propiedades físicas de pixels vecinos, considerando que toda la región es homogénea. En principio, este segundo efecto introduce un suavizado en la serie temporal que aumenta con el tamaño de la ventana espacial considerado. En términos de la función de densidad espectral, esto implica que las componentes de altas frecuencias desaparecen y, por tanto, la pendiente del espectro, β , y consecuentemente, el exponente H aumentan. En definitiva, los valores de H asociados a ventanas de menores dimensiones estarán más afectados por los posibles efectos introducidos por las discontinuidades presentes en las series y la menor longitud de las mismas. En cambio, los valores de H asociados a ventanas mayores estarán más afectados por los posibles efectos generados por el suavizado inherente al promediado espacial.

En relación con los valores absolutos del exponente de escala obtenidos tanto para el estudio global como local (19 ventanas), se observa como éste se encuentra siempre

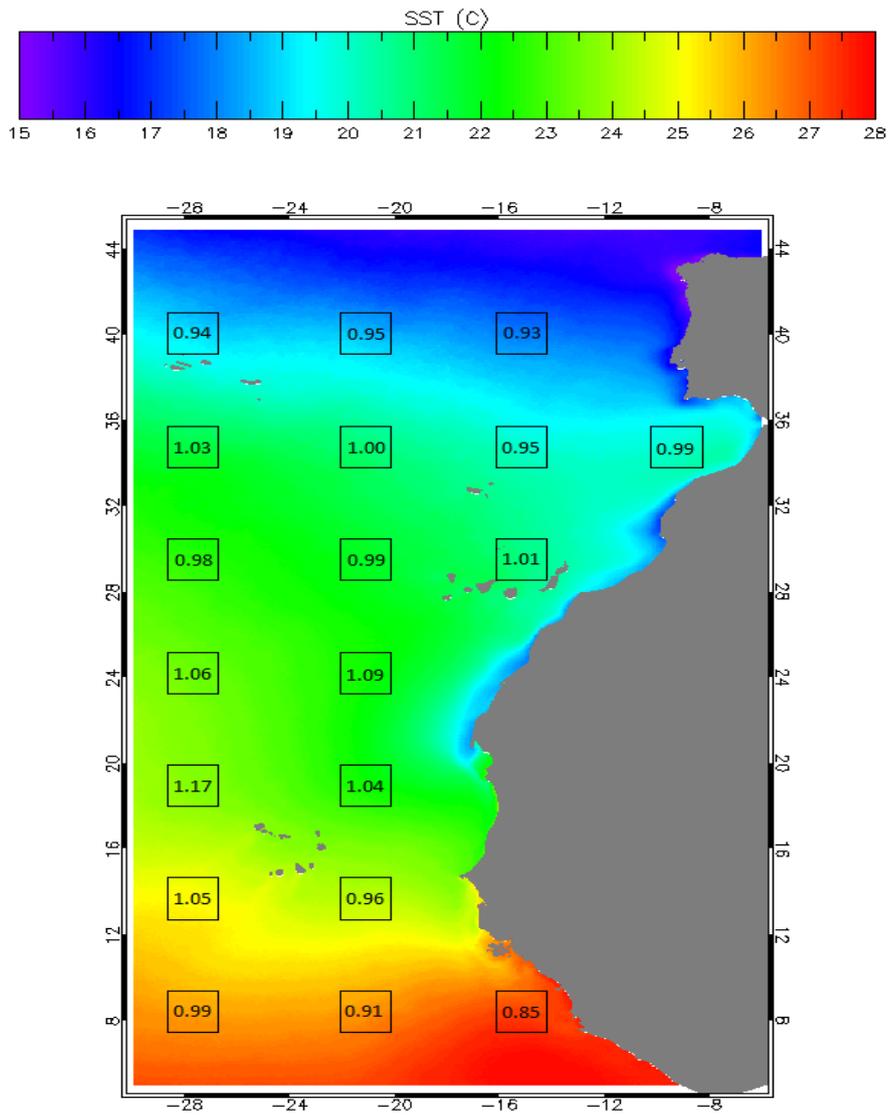


Figura 3.13: Exponentes de escala, derivados del *DFA*, obtenidos para las 19 ventanas seleccionadas superpuestas sobre el campo global promedio de la *SST*.

bastante próximo a 1, llegando a ser ligeramente superior en latitudes medias-bajas alejadas de la costa y con valores mínimos, en torno a 0,8, en las zonas al norte y al sur del área considerada. Además, el hecho de que el exponente de escala tome valores entorno a 1 e incluso mayores, es propio de procesos que presentan correlaciones a largo plazo, pero que ya no siguen una ley de potencias. Talkner & Weber (2000) y Chen et al. (2005) aseguran que cuando $1 < H < 1,5$, las correlaciones no sólo están presentes sino que incluso son más fuertes. No obstante, en la bibliografía existe una importante disparidad de criterios al respecto. Como ya se comentó, $H = 1$ es un caso especial donde la serie temporal corresponde a un ruido tipo $1/f$. Esto está relacionado, según algunos autores, con sistemas críticamente auto-organizados, *SOC*, donde las dependencias a corto y largo plazo tienen el mismo peso y según otros, con la naturaleza multifractal de las series temporales (ver sección 2.4.3).

En consecuencia, teniendo en mente todo lo anterior, se puede admitir que toda la zona oceanográfica presenta, en general e independientemente de la extensión espacial empleada y de la localización geográfica, un efecto de memoria larga o *d.l.p.*, aunque este no esté siempre descrito por correlaciones que decaen según una ley de potencias. Los valores $H \sim 1$ en regiones lejos de la costa que presentan un comportamiento tipo ruido $1/f$ están de acuerdo con lo obtenido por Fraedrich & Blender (2003) en el Atlántico Norte. Rybski et al. (2008), Fraedrich et al. (2009) y Zhang & Zhao (2015), en los mapas de distribución global de los exponentes de escala correspondientes a sus estudios, obtienen valores entre 0,7 y 0,9 en la región oceanográfica relativa a este trabajo, valores que son ligeramente inferiores a los aquí obtenidos. Por otro lado, Rybski et al. (2008) señalan que existe una clara disminución de H con la latitud, hacia el Ecuador, lo que coincide en parte con la tendencia observada en la zona de estudio, en cuanto a la disminución de valores de H desde latitudes en torno a 36° hacia el sur. Monetti et al. (2003) obtienen un valor aproximado de $H \sim 0,8$ en una región del Atlántico Norte, de aproximadamente $5^\circ \times 5^\circ$, empleando también el método *DFA*. Asimismo, es evidente, según las figuras 3.9 y 3.13, que H no es independiente de la localización geográfica, hecho que también está en concordancia con los resultados obtenidos por Fraedrich & Blender (2003), Blender & Fraedrich (2003), Rybski et al. (2008) y Fraedrich et al. (2009).

Es importante señalar que todos los estudios citados anteriormente se llevan a

cabo sobre zonas sustancialmente más extensas, con resoluciones espaciales de aproximadamente $5^\circ \times 5^\circ$. Gan et al. (2007) emplean series temporales con resoluciones espaciales que son del mismo orden que en este trabajo y obtienen resultados similares en cuanto al incremento de H con la distancia a la costa. No obstante, el contraste de los resultados en cuanto a las variaciones del exponente de escala con respecto a la latitud, carece de sentido debido a que el estudio se realiza en un mar cerrado donde la costa ejerce efectos importantes, tanto en dirección zonal como en dirección meridional.

Finalmente, se aplica el *DFA* a las series temporales correspondientes a la ventana especial centrada en el punto 20.2°N y 17.5°O , figura 3.6(b). Para este caso particular, se evaluó el efecto del tamaño de la ventana sobre el comportamiento del perfil y sobre el exponente de escala. En la figura 3.14, se muestran los perfiles y en la tabla 3.2 se resumen los resultados correspondientes al análisis monofractal. El valor de H aumenta a medida que se incrementa el área de la ventana como consecuencia del efecto que tiene, sobre la serie temporal, promediar sobre un número creciente de datos, como ya se ha comentado. No obstante, el patrón de los perfiles no varía significativamente al aumentar la ventana, lo que respalda la idea de que el comportamiento de escala es similar tanto para ventanas de 3×3 como para ventanas de 15×15 . En estudios previos, (Cabrera 2012), se ha observado que H tiende a estabilizarse en torno a un valor a medida que se aumenta el tamaño de la ventana, y que esto ocurre más rápidamente en zonas donde los gradientes de temperatura no son muy significativos.

Hasta ahora el estudio se ha centrado en el análisis monofractal de los registros temporales de la *SST* revelando la presencia de un posible efecto de memoria a largo plazo. Una manera para verificar estos resultados es mediante el método de reordenación aleatoria de dichos registros. La figura 3.15 muestra los perfiles correspondientes a las series temporales desordenadas aleatoriamente de las 19 ventanas seleccionadas. En la mayor parte de los casos se ha perdido la forma típica de parábola, además su variación es notablemente menor que en la figura 3.10 sobre todo en longitudes medias y en la zona sur. Así, romper la estructura temporal provoca un suavizado evidente en los perfiles, que sugiere que las correlaciones a largo plazo influyen significativamente en el comportamiento de escala de las fluctuaciones de

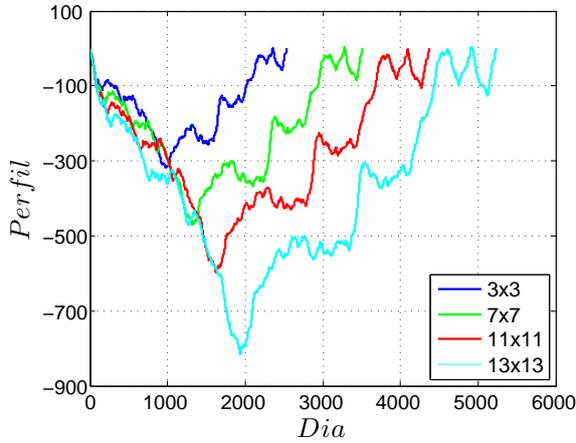


Figura 3.14: Perfiles correspondientes a la ventana localizada en 20°N , -17°O , a partir de datos promediados sobre ventanas de 3×3 , 7×7 , 11×11 y 15×15

Tamaño	NºDatos	Exp.Hurst
3x3 pixels	2536	0.83
7x7 pixels	3513	0.81
11x11 pixels	4370	0.87
15x15 pixels	5230	0.91

Cuadro 3.2: Dependencia del tamaño de la ventana con H , en una ventana localizada en 20°N , -17°O .

SST y que, por tanto, la forma de los perfiles no es consecuencia de la presencia de tendencias en los datos.

El análisis *DFA* aplicado a las series temporales, después del proceso de reordenación aleatoria, muestra exponentes de escala que varían dentro del rango $0,45 < H < 0,55$, como cabía esperar, los valores de las nuevas series no muestran dependencia estadística. En la figura 3.16 se muestran, a modo de ejemplo, los ajustes lineales correspondientes a la ventana 9 obtenidos tanto para la serie original, donde $H \sim 1$, como para la aleatoria, donde $H \sim 0,5$. El mismo procedimiento se llevó a cabo para todas las ventanas consideradas, obteniendo resultados similares, no mostrados. En este contexto, Efstathiou et al. (2011) aplica esta misma técnica sobre datos globales mensuales de temperaturas superficiales de tierra-océano, obteniendo los mismos resultados. Aunque, el origen de los datos no sea el mismo, ni tampoco las resoluciones espaciales y temporales, esto se podría considerar un indicio de la fuerte influencia de las correlaciones a largo plazo en el comportamiento de escala de las temperaturas.

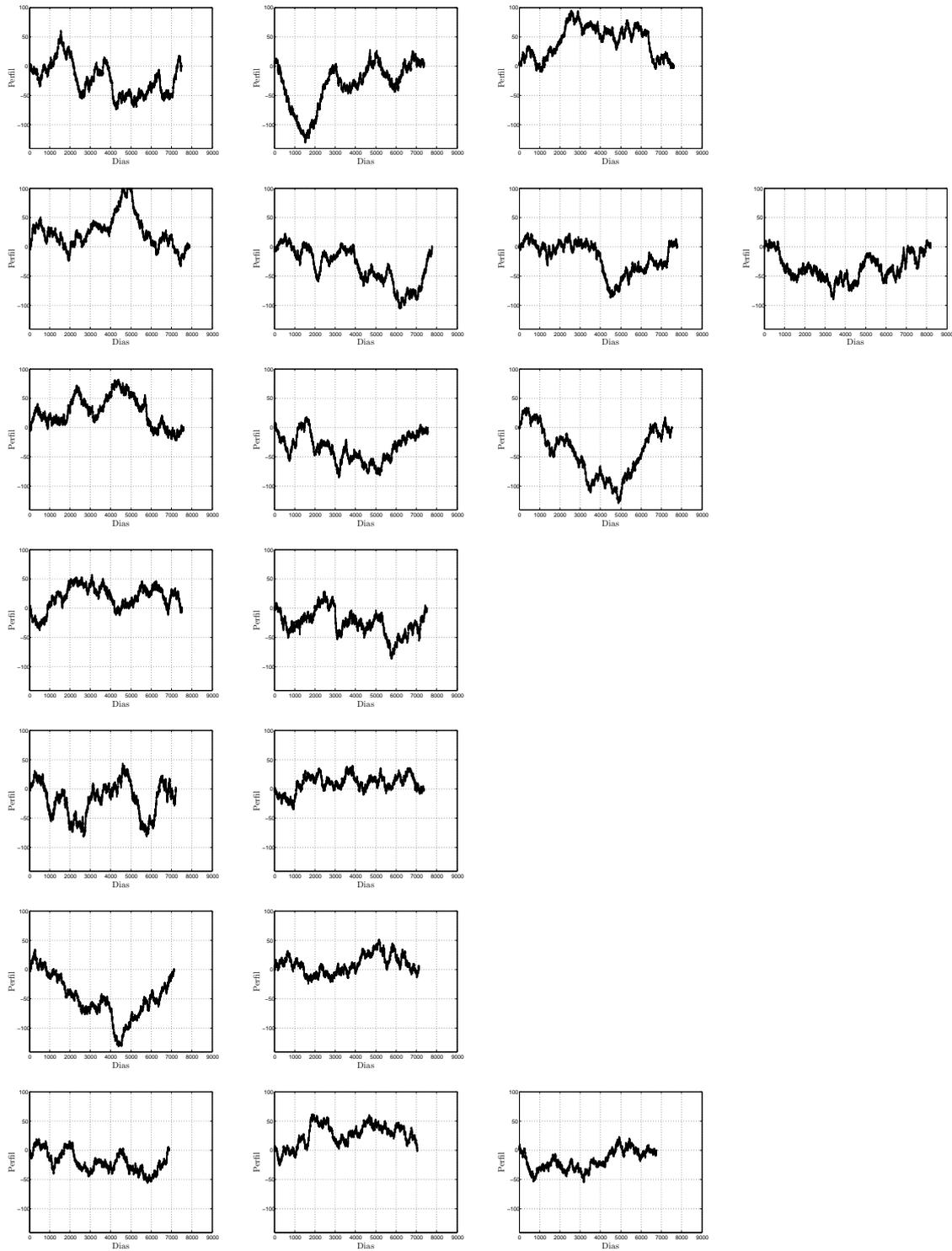


Figura 3.15: Perfiles de las series temporales de *SST* sometidas a *shuffling* correspondientes a las 19 ventanas, donde cada una cubre 24 años de datos diarios. Los perfiles están ordenados de norte a sur, en filas de ventanas de igual latitud.

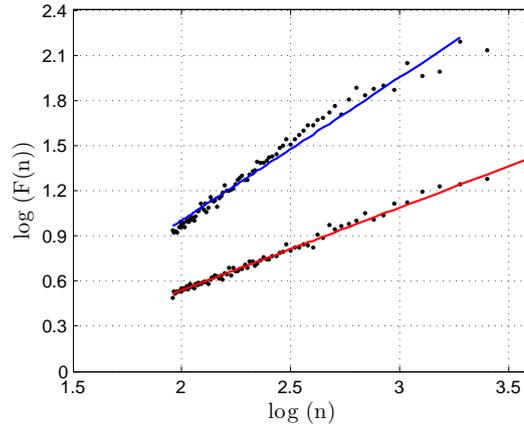


Figura 3.16: Ejemplo de los ajustes lineales obtenidos mediante el *DFA* de la serie temporal correspondiente a la ventana 9. La línea azul es el ajuste para la serie original, con una pendiente $H = 0,98$ y la línea roja representa el de la serie aleatoria, con una pendiente $H \sim 0,5$.

Análisis Multifractal

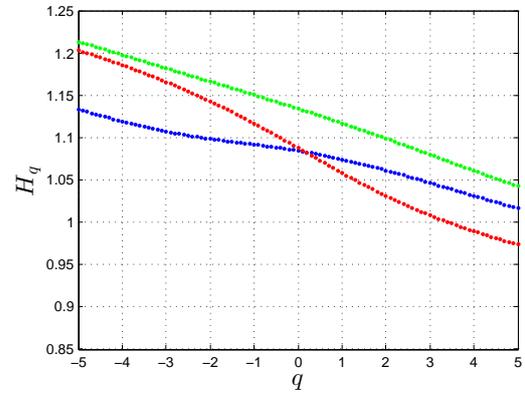
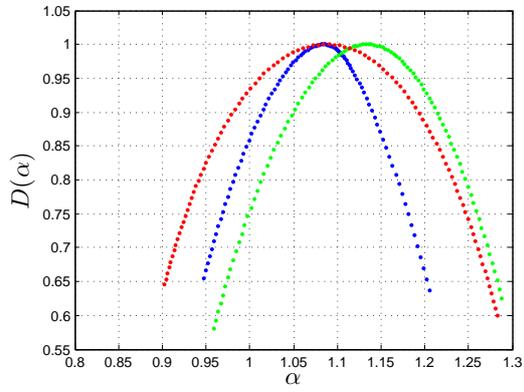
Generalmente, los procesos naturales requieren de más de un exponente de escala para su caracterización completa, para lo que se emplean técnicas de análisis como el *MF DFA*.

Los resultados obtenidos mediante dicha técnica, *MF DFA*, de los registros temporales de *SST* para las 19 ventanas seleccionadas, distribuidas según la figura 3.6(a), se presentan en la figura 3.17. En la columna de la izquierda están representados los espectros multifractales correspondientes a cada una de las ventanas oceanográficas seleccionadas. En cada gráfica, se muestran los resultados obtenidos para ventanas ubicadas en regiones de igual latitud. En la columna de la derecha y en el mismo orden, están representadas las dependencias del exponente generalizado de Hurst, H_q , con q . Los parámetros característicos de los espectros multifractales se presentan en la tabla 3.3, donde α_{right} y α_{left} son los límites del espectro a la derecha y a la izquierda, $\alpha_{q=0}$ es el valor de α para el cual $D(\alpha)$ alcanza su máximo y $\Delta\alpha$ se corresponde con el ancho del espectro multifractal.

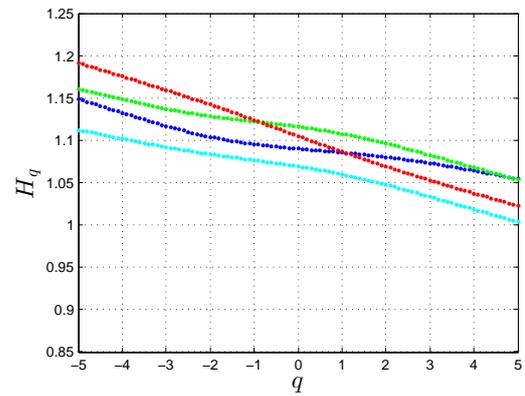
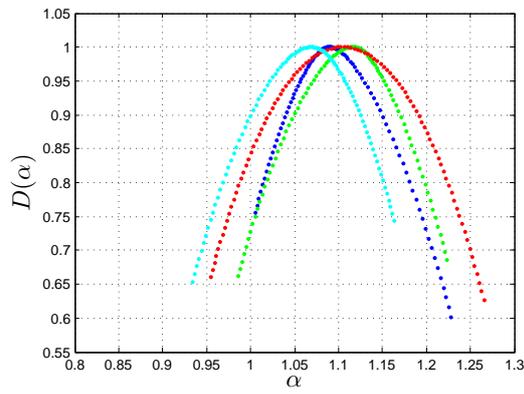
En general, los espectros muestran un perfil típico en forma de parábola invertida, y a excepción de algún caso aislado como por ejemplo el espectro de la ventana 13

Ventana	α_{right}	α_{left}	$\alpha_{q=0}$	$\Delta\alpha$
1	1.21	0.95	1.08	0.26
2	1.29	0.96	1.13	0.34
3	1.28	0.90	1.08	0.40
4	1.23	1.01	1.09	0.16
5	1.22	0.99	1.12	0.26
6	1.27	0.96	1.10	0.28
7	1.16	0.93	1.07	0.18
8	1.28	0.98	1.10	0.24
9	1.28	0.99	1.12	0.26
10	1.26	0.96	1.07	0.22
11	1.20	0.98	1.10	0.20
12	1.18	1.02	1.06	0.08
13	1.17	1.02	1.05	0.07
14	1.09	0.98	1.04	0.10
15	1.06	0.99	1.02	0.06
16	1.10	0.93	1.02	0.16
17	1.06	0.95	1.01	0.11
18	1.12	0.88	1.01	0.22
19	1.13	0.82	0.98	0.24

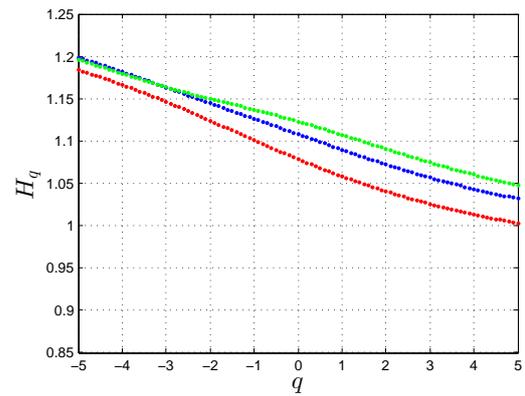
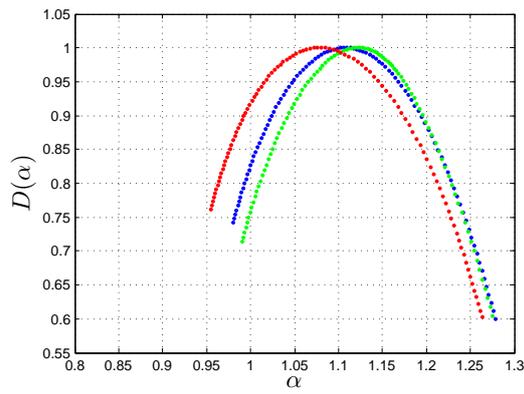
Cuadro 3.3: Medidas características de los espectros multifractales, obtenidas mediante el análisis *MF DFA* de las series temporales de *SST* de las 19 ventanas seleccionadas. α_{right} y α_{left} son los límites del espectro, $\alpha_{q=0}$ es donde $D(\alpha)$ alcanza su máximo y $\Delta\alpha$ es el ancho del espectro.



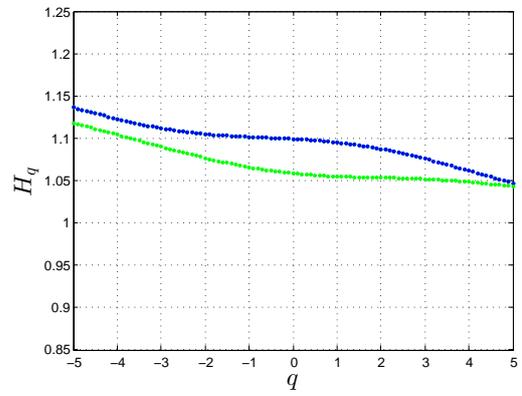
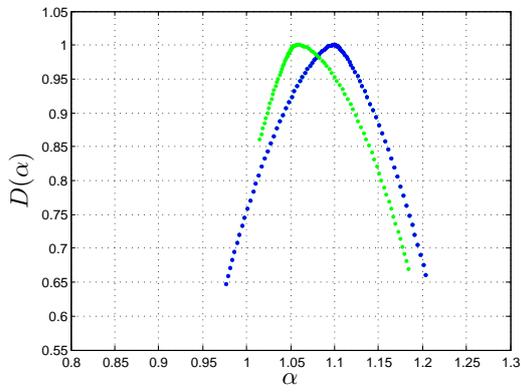
(a)



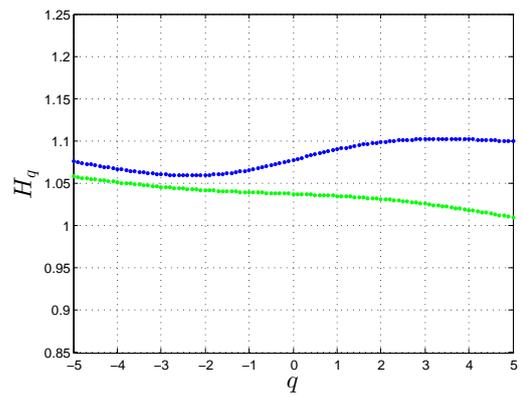
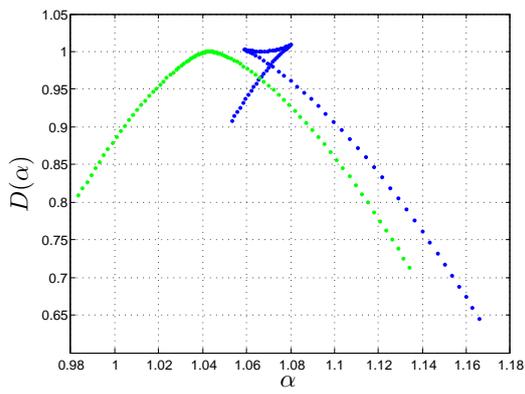
(b)



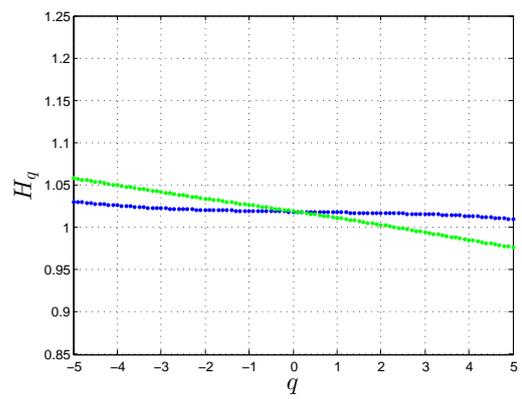
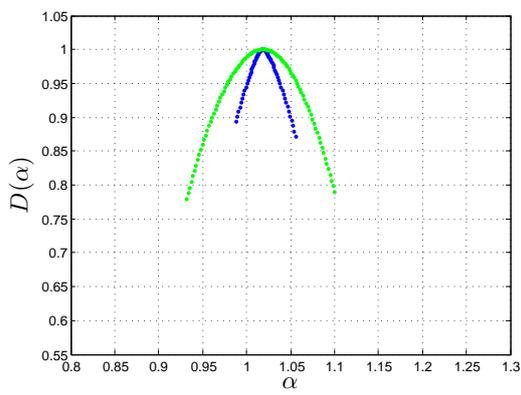
(c)



(d)



(e)



(f)

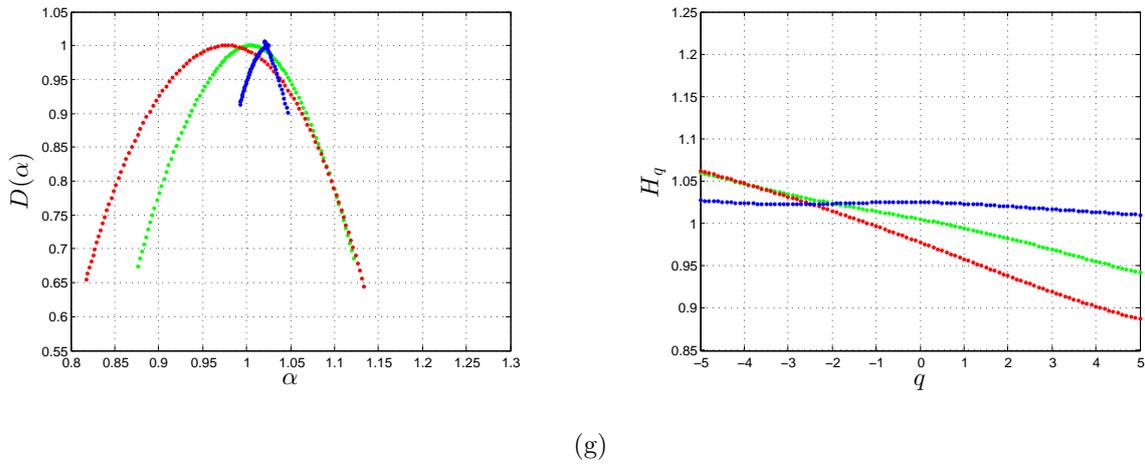


Figura 3.17: Análisis multifractal de las series temporales de *SST* en el área del Atlántico Norte. La columna de la izquierda contiene los espectros multifractales y la columna de la derecha las respectivas variaciones de H_q con q . Cada gráfica contiene ventanas ubicadas a igual latitud, ordenadas según (a) 1-3, (b) 4-8, (c) 9-10, (d) 11-12, (e) 13-14, (f) 15-16 (g) 17-19. Las líneas azules se refieren a ventanas alejadas de la costa, las verdes son las que corresponden a ventanas en longitudes medias y, las rojas y celestes representan a las ventanas más cerca de la costa.

que se comentará más adelante, son relativamente simétricos. La posición del valor de α asociado al máximo del espectro, $\alpha_{q=0}$, tienden a disminuir ligeramente con la latitud. Así, en zonas situadas al norte, $\alpha_{q=0}$ toma valores entre 1,05 y 1,15, y a partir de las ventanas 13 y 14, por debajo de 20°N , el máximo del espectro se sitúa entre 0,95 y 1,05.

Los valores absolutos de $\alpha_{q=0}$ se pueden, además, comparar con los resultados obtenidos en el análisis monofractal, ya que para $q = 2$ el análisis *DFA* es un caso particular del *MF DFA*, es decir, $\alpha_{q=2} = H$. En general, en la literatura también se suele admitir que $\alpha_{q=0} \sim \alpha_{q=2}$. Con esto en mente, un análisis conjunto de los resultados obtenidos revela que los valores de $\alpha_{q=0}$ son superiores a los correspondientes al análisis monofractal y, en todas las ventanas consideradas, son superiores a 1. Además, el rango de variación de los valores es menor en relación a los exponentes H obtenidos a través del *DFA*. No obstante, el patrón de comportamiento es el mismo de modo que los valores más bajos de $\alpha_{q=0}$ aparecen localizados al sur, mien-

tras que en latitudes medias se encuentran los valores máximos. Asimismo, tanto en el análisis *DFA* como en el *MF DFA* ($q=0$), los valores mínimos del exponente de escala aparecen cerca de la costa. Sin embargo, existen pequeñas diferencias, sobre todo al norte en longitudes intermedias, donde mediante el análisis multifractal se obtuvieron valores de $\alpha_{q=0}$ más elevados que en el análisis monofractal.

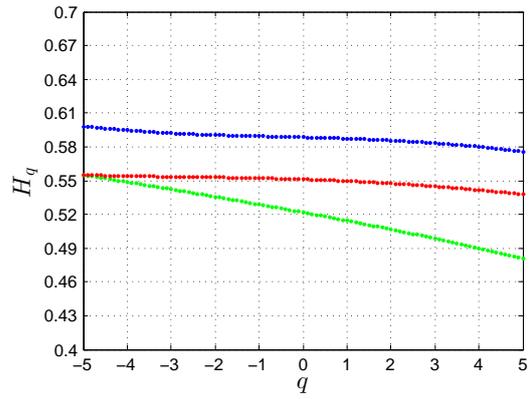
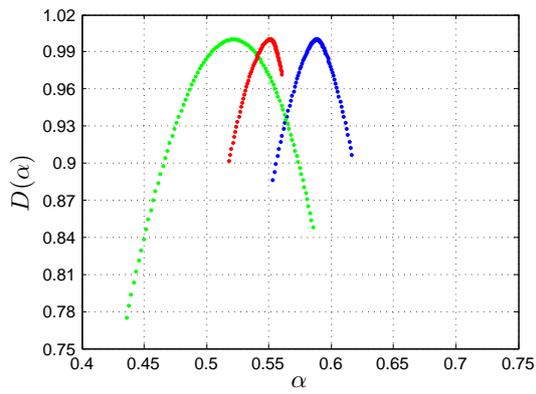
En relación al ancho del espectro, $\Delta\alpha$, medido como el doble de la distancia de la cola más corta al centro del espectro, los resultados se resumen en la última columna de la tabla 3.3. Nótese como los espectros son relativamente anchos y simétricos, a excepción de las ventanas de la 12 a la 17 donde tienden a ser más estrechos, ligeramente asimétricos e incluso, en algún caso cruzados. Esto sugiere que, las zonas localizadas al norte y sur de las ventanas citadas presentan un espectro multifractal tal que las fluctuaciones a corto y largo plazo influyen en el comportamiento de las series temporales con la misma intensidad. Por otro lado, las ventanas 8, 9, 10 y 11, figura 3.17(c) y (d), ubicadas a 24-30°N, muestran un espectro asimétrico en sus colas, que por su forma, implica un comportamiento dominado por las fluctuaciones a corto plazo. También se observa como a partir de las ventanas 11 y 12 hacia el sur, los espectros de las regiones alejadas de la costa (figura 3.17(d)-(f) línea azul) tienden a ser más estrechos, por lo que aparentemente, el comportamiento tiende a ser más monofractal, con valores de $\Delta\alpha$ que varían entre 0,06 y 0,10. Estos resultados están respaldados por la gráfica de variación de H_q frente a q , las gráficas a la derecha de la figura 3.17, donde se puede observar como la variación del exponente de Hurst generalizado, H_q , es notable en el caso de las ventanas cuyo espectro es ancho y, como ésta misma variación disminuye hacia el sur.

Por otro lado, en relación con la variación en latitud, el ancho del espectro parece disminuir a medida que nos alejamos de la costa. Así, se puede diferenciar un comportamiento en zonas cercanas a esta, caracterizado por un comportamiento multiescalar y otro para zonas alejadas, marcado por un carácter que tiende a ser más monofractal. El aumento en la variabilidad de la dinámica inducido por las irregularidades de la geometría de la costa y la topografía del fondo podría explicar este hecho.

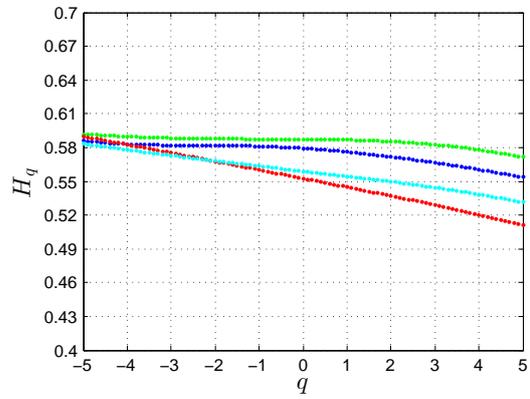
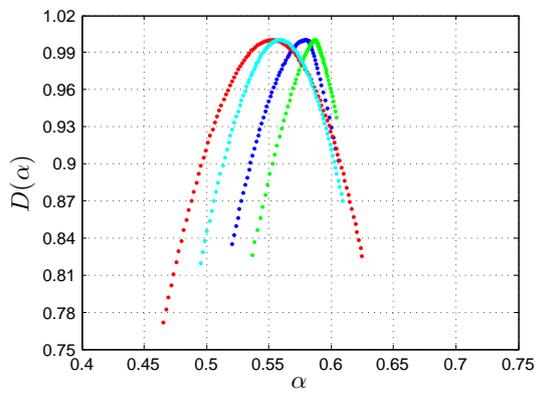
El caso particular de la ventana 13, localizada aproximadamente a 18N°N, que presenta un espectro cruzado, es consecuencia del procedimiento analítico, que pa-

ra valores cercanos a cero, provoca este tipo de formas extrañas en el espectro multifractal. Es decir, esto ocurre cuando la parte derecha del espectro multifractal es significativamente más larga que la izquierda, $q < 0$, lo que implica que las fluctuaciones a corto plazo son las que están dominando el comportamiento de las fluctuaciones de la serie temporal. En estos casos, basta con transformar el espectro mediante conversiones simétricas para poder evaluar las cantidades características necesarias para la descripción del espectro (Makowiec & Fulinski 2010).

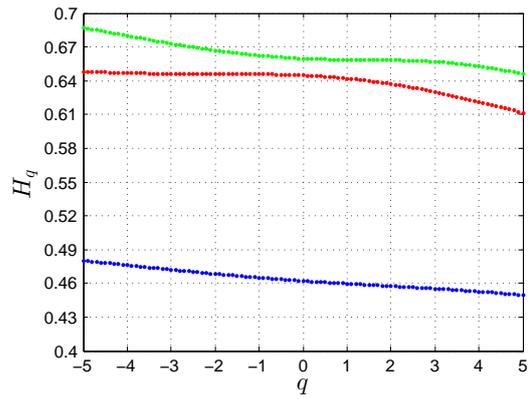
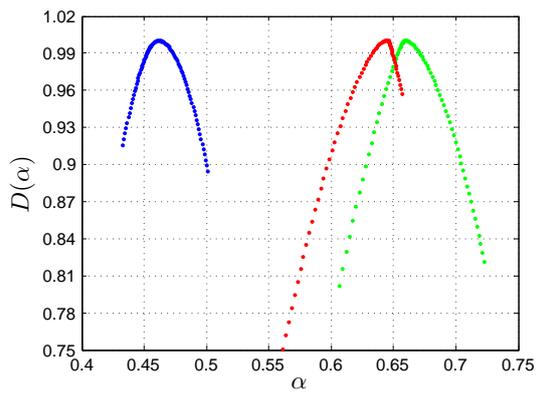
Con el fin de examinar la importancia relativa de la *d.l.p.* y la de posibles efectos no lineales, se analizan a continuación los espectros multifractales correspondientes a las series de *SST* desordenadas de manera aleatoria. La figura 3.18 muestra los resultados obtenidos al aplicar el análisis *MF DFA* a dichos registros. Se destaca como, en general, los espectros multifractales tienden a centrarse en torno a 0,5 y a estrecharse considerablemente, con la excepción de las ventanas 3, 7, 9 y 10. Esto sugiere que la región norte de las Islas Canarias, donde se localizan dichas ventanas, lo cual puede estar relacionado con la salida de aguas del Mediterráneo y las estructuras oceanográficas asociadas. Asimismo, atendiendo a la posición de los máximos, se observa como las ventanas alejadas de la costa están claramente dominadas por su componente lineal, mientras que las influenciadas por esta exhiben un comportamiento que parece indicar un aumento relativo de la contribución no lineal. En consecuencia, se puede decir, que el origen del comportamiento de escala de las fluctuaciones de *SST* es debido, casi por completo, a los efectos de dependencia a largo plazo. No obstante, las ventanas en las proximidades de Canarias y cercanas a la costa parecen estar afectadas también por un efecto de tipo no lineal, seguramente consecuencia de las perturbaciones propias de la zona. Álvarez-Ramírez et al. (2008), Luo et al. (2013) y (2015) obtienen resultados similares, y aseguran que las series de *SST* presentan un comportamiento claramente multifractal. No obstante, la literatura al respecto del comportamiento multiescala de la *SST* es más bien escasa, y se reduce a verificar que las fluctuaciones de *SST* efectivamente exhiben un comportamiento multifractal, sin profundizar en el origen de dicha multifractalidad.



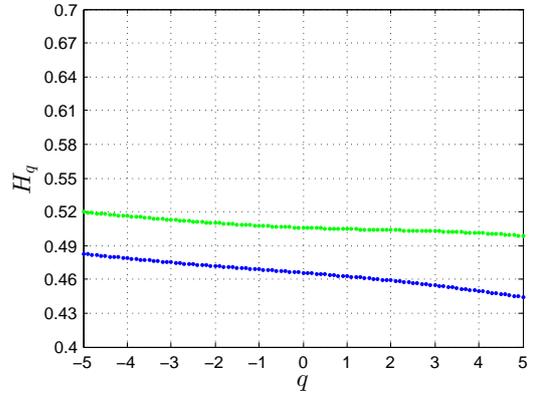
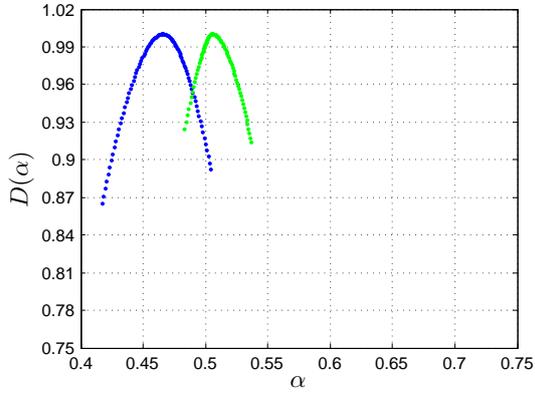
(a)



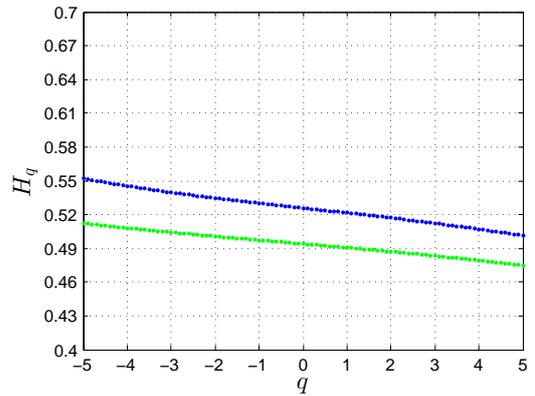
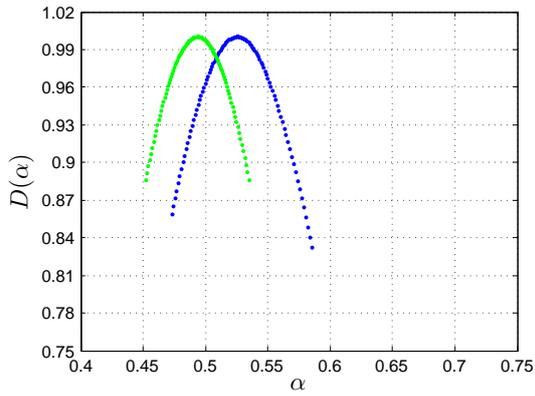
(b)



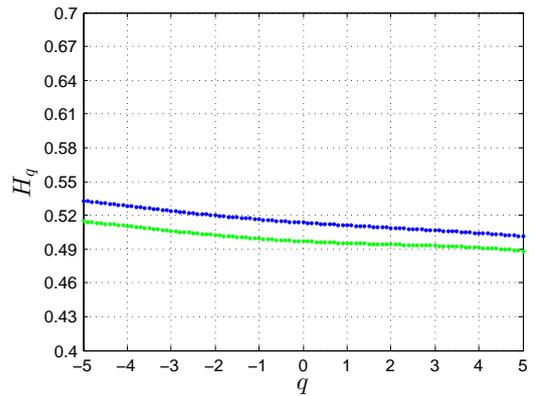
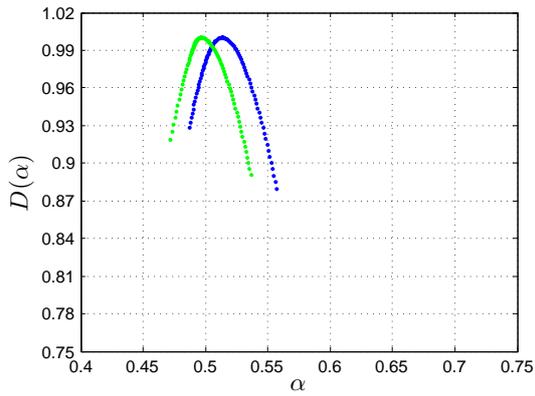
(c)



(d)



(e)



(f)

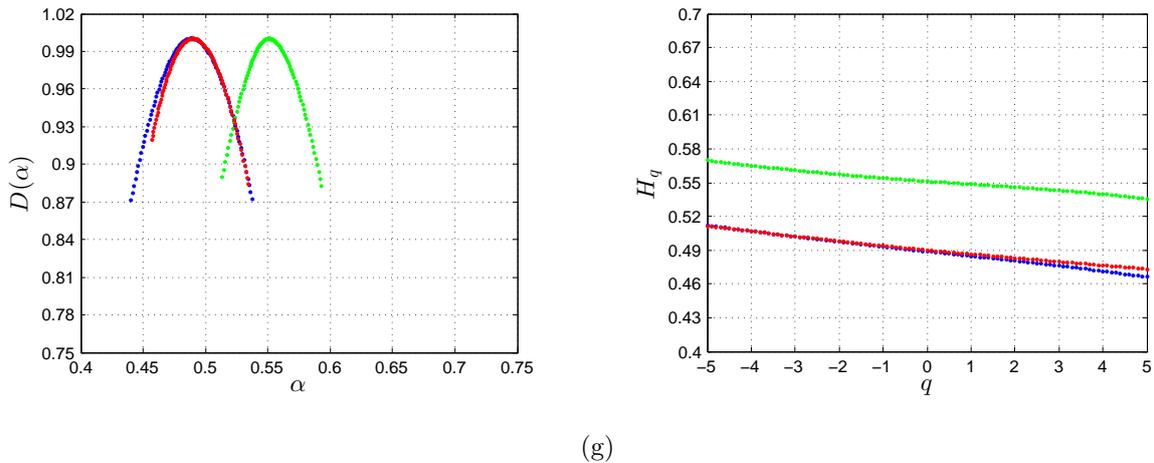


Figura 3.18: Análisis multifractal de las series temporales de *SST* desordenadas. La primera columna contiene los espectros multifractales y la columna de la derecha las respectivas variaciones de H_q con q . Cada gráfica contiene ventanas ubicadas a igual latitud, ordenadas según (a) 1-3, (b) 4-8, (c) 9-10, (d) 11-12, (e) 13-14, (f) 15-16 (g) 17-19. Las líneas azules se refieren a ventanas alejadas de la costa, las verdes son las que corresponden a ventanas en longitudes medias y, las rojas y celestes representan a las ventanas más cerca de la costa.

3.1.4. Conclusiones

Los resultados del análisis monofractal ponen de manifiesto una dependencia del exponente de escala con la localización geográfica. Los valores máximos se observan, en general, en zonas alejadas de la costa, en áreas cercanas a las islas y sobre todo, en la región localizada a 18°N y -28°O .

Existe un efecto evidente sobre los valores de H producido por la presencia del archipiélago canario, que se refleja en la forma en que se distribuyen los valores máximos por detrás de la islas y hacia el suroeste del área de interés, probablemente relacionado con las variaciones en intensidad y dirección de los vientos Alisios.

El comportamiento del exponente H es el mismo independientemente del tamaño de la ventana espacial. Por tanto, se puede admitir que la elección del tamaño de la ventana espacial no afecta, cualitativamente, al comportamiento a largo plazo de las series temporales de *SST*. En general, el nivel de datos perdidos aumenta al disminuir el tamaño de la ventana espacial empleada para promediar, no obstante

la similitud de los resultados obtenidos constituye un respaldo a las conclusiones de Chen et al. (2002) en relación con la presencia de huecos y el efecto de "pegado" de las series sobre los resultados del *DFA*.

En general, los valores del exponente de escala se encuentran próximos a 1, menos al norte y al sur del área de interés, indicando un posible comportamiento de la *SST* del tipo mostrado por sistemas críticamente auto-organizados o un indicio de que el proceso está gobernado por más de una escala temporal, es decir, las fluctuaciones de *SST* tienen un comportamiento multifractal.

El análisis multifractal revela también una dependencia con la localización geográfica que afecta a la forma de los espectros multifractales. De esta forma, al norte y al sur las fluctuaciones de la *SST* están dominadas por numerosos procesos que ocurren a diferentes escalas temporales e interactúan entre ellos, haciendo que el comportamiento sea más complejo. En cambio, hacia el sur, los procesos implicados en las fluctuaciones de la *SST* tienden a ser más monofractales, lo que se refleja en la disminución del ancho del espectro multifractal. Los espectros también se estrechan ligeramente en función de la distancia a la costa, aunque estas variaciones son menos evidentes que las observadas en función de la latitud.

La evaluación de la componente lineal pone de manifiesto que el origen del comportamiento de escala de las fluctuaciones de *SST* parece estar principalmente debido a los efectos de *d.l.p.* en toda el área oceanográfica de interés, a excepción de las ventanas 9 y 10, donde los máximos de los espectros multifractales correspondientes a las series desordenadas aleatoriamente no se centran en $\alpha = 0,5$, lo que sugiere la presencia de contribuciones no lineales que afectan al comportamiento de escala y que no tienen que ver con *d.l.p.*

3.2. Estructura fractal de la Energía Cinética Turbulenta

A gran escala, los aspectos energéticos de los océanos que tradicionalmente han tenido poco interés, se han convertido en un nuevo foco de atención ya que constituyen una pieza fundamental para la comprensión de la circulación general y las consecuencias que sus variaciones pueden tener (Wunsch & Ferrari 2004).

El océano, de la misma manera que la atmósfera, es un sistema dinámico con energía interna, cinética y potencial, donde se producen cambios o transformaciones de un tipo de energía en otro. Hoy en día, existen aún numerosos aspectos del balance energético de los océanos relacionados con sus fuentes y sumideros, así como las rutas de transferencia, que no se conocen de forma completa (Ferrari & Wunsch 2009). Dada la complejidad del tema, este trabajo solo trata con la componente de la energía involucrada directamente en el movimiento, mezcla y transporte de las masas de agua del océano, esto es, la energía cinética, y más concretamente, se centra en el análisis de algunos aspectos de la denominada energía cinética turbulenta, cuyo significado se explica a continuación.

Dado el reconocido carácter turbulento del océano, es práctica habitual expresar su velocidad, u , como la suma del promedio temporal, \bar{u} , y la desviación, u' ,

$$u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v' \quad (3.2)$$

De este modo, es posible dividir la energía cinética total del océano en dos componentes que se corresponden con la energía cinética del flujo medio por unidad de masa, conocida como *MKE* (Mean Kinetic Energy), y la energía cinética turbulenta o *EKE* (Eddy Kinetic Energy),

$$MKE = \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2), \quad EKE = \frac{1}{2}(u'^2 + v'^2) \quad (3.3)$$

De acuerdo con lo anterior, la energía cinética turbulenta, en adelante *EKE*, es aquella parte de la energía cinética relacionada con la variabilidad de los océanos. La caracterización de esta componente de la energía cinética es de suma importancia ya que, en la mayor parte de los océanos, la *EKE* es como mínimo un orden de magnitud mayor que la *MKE* (Wyrтки et al. 1976; Scharffenberg & Stammer 2010).

Además, la *EKE* no solo es la componente dominante de la energía cinética, sino que también juega un papel relevante en la transferencia de energía en el océano. Así, a través de los procesos de inestabilidad, principalmente baroclínica pero también barotrópica, la energía cinética y potencial del flujo medio se convierte en energía turbulenta. A su vez, esta *EKE* se puede transferir a escalas cada vez más pequeñas convirtiéndose finalmente en energía interna, o bien al contrario, dentro del contexto de la turbulencia geostrofica, puede aumentar su escala y crecer para alimentar de nuevo al flujo medio y contribuir a la circulación profunda del océano.

Las primeras medidas de *EKE* a escala global que muestran su distribución espacial en el océano fueron realizadas con datos de deriva tomados por buques mercantes (Wyrski et al. 1976). Estas medidas de deriva surgen de la diferencia vectorial entre la velocidad real de un barco, determinada a partir de dos posiciones fijas, y el promedio de la velocidad hipotética que recorrería la nave en el agua durante el mismo intervalo de tiempo. Esta diferencia vectorial sería entonces la velocidad de la corriente, que promediada espacial y temporalmente, permitiría obtener la velocidad media y su desviación, y a partir de estas entonces la *MKE* y la *EKE*. Sin embargo, el hecho de que estos datos de deriva se obtengan habitualmente con velocidades calculadas sobre un periodo de un día o sobre distancias del orden de 400 kilómetros, que son superiores a las dimensiones de los remolinos oceánicos mesoescalares, hacen que estos no queden bien representados en los valores de la energía cinética.

Estimaciones más precisas de la *EKE* se han logrado empleando boyas a la deriva que transmiten su posición, así como otros datos oceanográficos, vía satélite. A partir de las sucesivas medidas de la posición de las boyas y los tiempos en que estas se tomaron, se calculan las velocidades de las boyas y de nuevo promediando en el espacio y el tiempo se obtienen la *MKE* y la *EKE*. Este tipo de datos se ha usado en multitud de estudios (Richardson 1983; Ishikawa et al. 1997; Oliveira et al. 2009), a pesar de que el número de observaciones no es homogéneo en el espacio (algunas regiones han sido más muestreadas con este dispositivo que otras) y en el tiempo (el empleo de este tipo de datos se ha incrementado con el tiempo desde 1980 hasta superar las 1250 observaciones en un instante concreto a escala global en el momento actual). Para esto, existen técnicas que permiten tratar datos oceanográficos no homogéneos con áreas escasamente muestreadas que se aplican a los datos de boyas

a la deriva (Lumpkin & Johnson 2013).

Pero la EKE puede medirse no solo a través de dispositivos de medida in-situ, sino también utilizando datos de la altura del nivel del mar que se obtienen a través del sensor remoto altímetro. Una de las principales ventajas de este tipo de datos es que desde el año 1993 y de forma ininterrumpida hasta hoy día, ha habido al menos dos altímetros a bordo de sus respectivos satélites que han muestreado de forma continua y regular los océanos. Este tipo de datos son los que se han empleado en este trabajo utilizando la metodología que se describe posteriormente.

Hay distintos estudios en los que se ha obtenido la distribución de la EKE a escala global empleando alguna de las fuentes de datos antes mencionadas (Wyrki et al. 1976; Ishikawa et al. 1997; Ducet et al. 2000; Scharffenberg & Stammer, 2010; Xu et al. 2014). En particular, se destaca el trabajo desarrollado por Scharffenberg & Stammer (2010) con datos del sensor altímetro. En la figura 3.19(b) se reflejan, mediante los altos valores de MKE , aquellos lugares donde se sitúan los principales sistemas de corrientes como son la Corriente del Golfo, la Corriente de Kuroshio, la zona de confluencia Brasil-Malvinas, la Corriente de Angulhas, la Corriente Circumpolar Antártica y los sistemas de Corrientes Ecuatoriales. Se observa, al comparar esta imagen a escala global con la figura 3.19(a), como EKE y MKE están asociados, observándose valores elevados de EKE que superan los $300 \text{ cm}^2/\text{s}^2$ y que pueden llegar hasta los $4500 \text{ cm}^2/\text{s}^2$ allí donde se sitúan estos importantes sistema de corrientes. Todo esto parece indicar que en los océanos, a nivel global, la principal fuente de energía cinética turbulenta procede de los procesos de inestabilidad (principalmente baroclínica) del flujo de estas corrientes intensas. Además, si se comparan ambas energías cinéticas a través de su cociente, figura 3.19c), se aprecia que globalmente la EKE es varios órdenes de magnitud mayor que la MKE y en algunas regiones, como la parte occidental del Pacífico y el Atlántico Subtropical del hemisferio norte, la diferencia es más que notable. De todo lo anterior, se deriva la importancia que tiene la EKE en el balance energético de los océanos.

La figura 3.20, obtenida por Brachet et al. (2004), muestra con un mayor grado de detalle la distribución promedio de la EKE en el Atlántico Norte a partir de datos de altímetro para un periodo que se extiende desde el año 2000 hasta el 2005. A primera vista, destaca el fuerte contraste que hay entre los valores de EKE del margen oriental

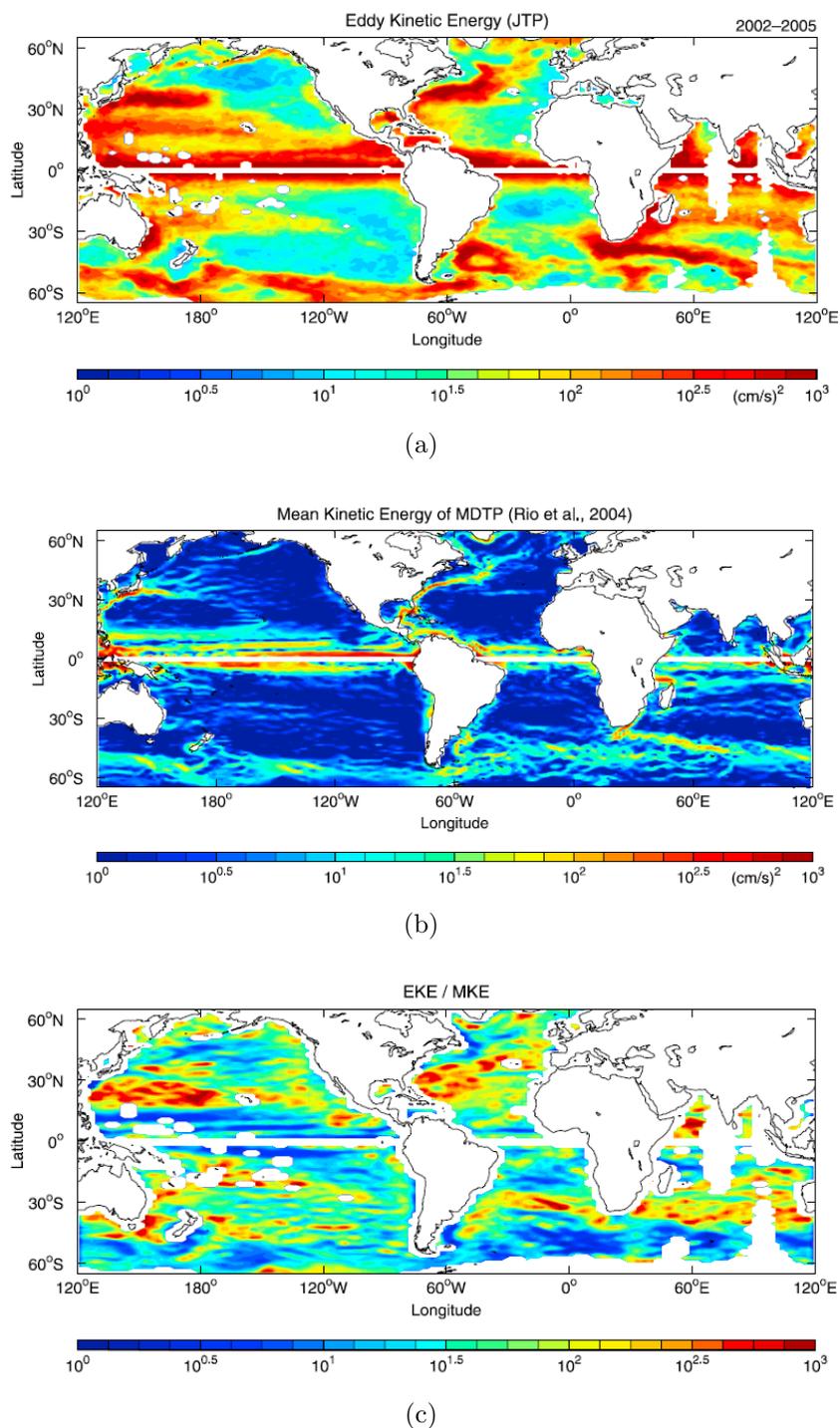


Figura 3.19: (a) *EKE* a escala global calculada para el periodo 2002-2005, (b) *MKE* a escala global calculada de la topografía dinámica promedio de Rio & Hernández (2004), (c) Razón entre *EKE* y *MKE* (Scharffenberg & Stammer 2010).

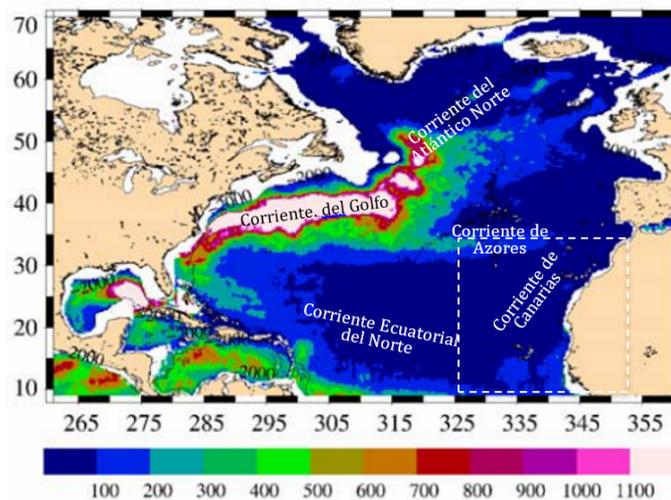


Figura 3.20: Distribución espacial promedio de la EKE en el Atlántico Norte para el periodo 2000-2005 (Brachet et al. 2004).

y occidental del océano Atlántico, que estaría vinculado a la intensidad relativa del flujo de los sistemas de corrientes. Se puede observar claramente, como los valores más altos de la EKE están asociados a la Corriente del Golfo, que conforma el límite occidental del Giro Subtropical del Atlántico Norte. La distribución de la EKE pone de manifiesto la bifurcación de esta corriente al este de $312^{\circ}E$ en dos ramas con altos valores de energía, una de ellas con dirección norte que se conoce como Corriente del Atlántico Norte y otra que se extiende hacia el sureste formando el límite norte del Giro Subtropical, denominada Corriente de Azores.

La parte más oriental de la Corriente de Azores, alimenta a la Corriente de Canarias, que al ser una corriente de frontera oriental débil y extensa dirigida hacia el sur, presenta, salvo excepciones, valores bajos de la EKE en comparación con las corrientes anteriores. La Corriente de Canarias, que también forma parte del Giro Subtropical, sería la corriente principal del área de estudio de este trabajo, que se indica en la figura 3.20 con una línea blanca discontinua. Parte de la excepción en relación a los valores bajos de la EKE , se debe a la influencia de las islas presentes en la zona de interés, que suponen un obstáculo para el flujo incidente generando inestabilidad y valores relativamente elevados de la EKE a sotacorriente de las mismas (Tejera et al. 2002; Lázaro et al. 2005). También, cerca de la costa africana,

entre las aguas frías del afloramiento costero y aquellas cálidas del océano abierto, se encuentra una región de transición costera altamente inestable, dominada por la presencia de remolinos y filamentos de agua fría, que presenta por tanto valores de EKE más elevados que las aguas del interior del Giro. Por otro lado, al sur de la zona de estudio y cerca de la costa africana, los valores altos de EKE que se observan estarían relacionados con la presencia de la Corriente de Mauritania (Lázaro et al. 2005) que periódicamente fluye hacia el norte hasta alcanzar las inmediaciones de Cabo Blanco. Esta corriente está asociada con la Contracorriente Ecuatorial del Norte, que es una corriente intensa que viaja hacia el este hasta alcanzar la costa situándose entre 5 y 10°N y que se caracteriza, también, por tener altos valores de la EKE como se muestra en la figura 3.19(a).

Con los datos de sensores remotos actualmente disponibles es posible analizar las variaciones de la EKE para distintas escalas temporales (Stammer & Wunsch 1999). De este modo, hay un cierto número de estudios que han analizado las variaciones estacionales tanto a escala global (Scharffenberg & Stammer 2010) como local en el Atlántico Norte (Brachet et al. 2004), tratando de establecer los factores que pueden generar dichas variaciones. También, se ha abordado el análisis de las variaciones interanuales de la EKE sobre todo para los sistemas de corrientes más intensos como son, en el Atlántico Norte, los casos de la Corriente del Golfo (Volkov 2005), la Corriente del Atlántico Norte (Volkov 2004), la Corriente de Azores (Volkov & Fu 2011) y la Contracorriente Ecuatorial del Norte (Lázaro et al. 2005). En estos trabajos se ha podido observar correlaciones entre estas variaciones, como también cambios en la circulación y forzamiento atmosférico.

La literatura en relación al análisis del comportamiento de escala de la EKE es inexistente, hasta donde se conoce. Sin embargo, la alta variabilidad de la zona de interés conjuntamente con el hecho de que la EKE es precisamente la componente turbulenta de la velocidad, sugiere que el análisis de las series temporales correspondientes, probablemente refleje un comportamiento complejo, gobernado por múltiples procesos que están interactuando a diferentes escalas temporales.

3.2.1. Zona de Estudio y Datos

La zona de estudio de este trabajo ocupa el margen oriental del Giro Subtropical que se encuentra bajo la influencia principal de la Corriente de Canarias. Las subáreas que se han escogido para obtener la estructura fractal de la *EKE* se indican en la figura 3.21 y se han seleccionado teniendo en cuenta que presentan, en promedio, valores moderados y altos de la *EKE* en comparación con otras zonas situadas en latitudes similares. Como se puede ver, tres de las subáreas están ubicadas al sur de los archipiélagos de Madeira, Canarias y Cabo Verde (subáreas 1, 3 y 5). En particular, los dos últimos parecen ejercer un control notable sobre la *EKE*, observándose en las zonas cercanas a ellos los valores más altos, en algunos casos son superiores a $200 \text{ cm}^2/\text{s}^2$, hecho que también queda reflejado en la figura 3.22, donde se muestra la evolución temporal de la *EKE*, el correspondiente ciclo anual y la evolución temporal desestacionalizada para cada una de las subáreas seleccionadas. Las otras tres subáreas (subáreas 2, 4 y 6) se encuentran próximas al continente africano, en la zona de transición costera que separa las aguas del afloramiento costero y aquellas situadas en océano abierto. Las situadas más al norte cerca de Cabo Ghir y Cabo Blanco respectivamente, se encuentran bajo el dominio de la Corriente de Canarias, mientras que la que se sitúa más al sur, próxima a Dakar, se ve afectada por la presencia de la Corriente de Mauritania.

En la figura 3.22, nótese también, como los casos al sur de Canarias y cerca de la costa de Dakar presentan un ciclo anual similar y característico, con valores mínimos durante la primera parte del año y a la inversa en la segunda mitad del año. Esto está de acuerdo con las imágenes promedio de la *EKE* por trimestres, figura 3.23, donde se ilustra la variabilidad estacional. Estas tendencias, anuales y estacionales de los valores de EKE en las diferentes subáreas, están en concordancia con lo observado por distintos investigadores (Le Traon & Morrow 2001; Tejera et al. 2002; Lázaro et al. 2005). Asimismo, a parte de las variaciones estacionales, la presencia de variaciones interanuales también se puede apreciar en cada una de las zonas.

En cuanto a las características de los datos utilizados, los valores de la *EKE* que se emplean proceden de medidas realizadas a través del sensor remoto conocido como altímetro. Genéricamente, el altímetro situado a bordo de plataformas satelitales, es un sensor que emite pulsos regulares de microondas hacia el océano en la dirección

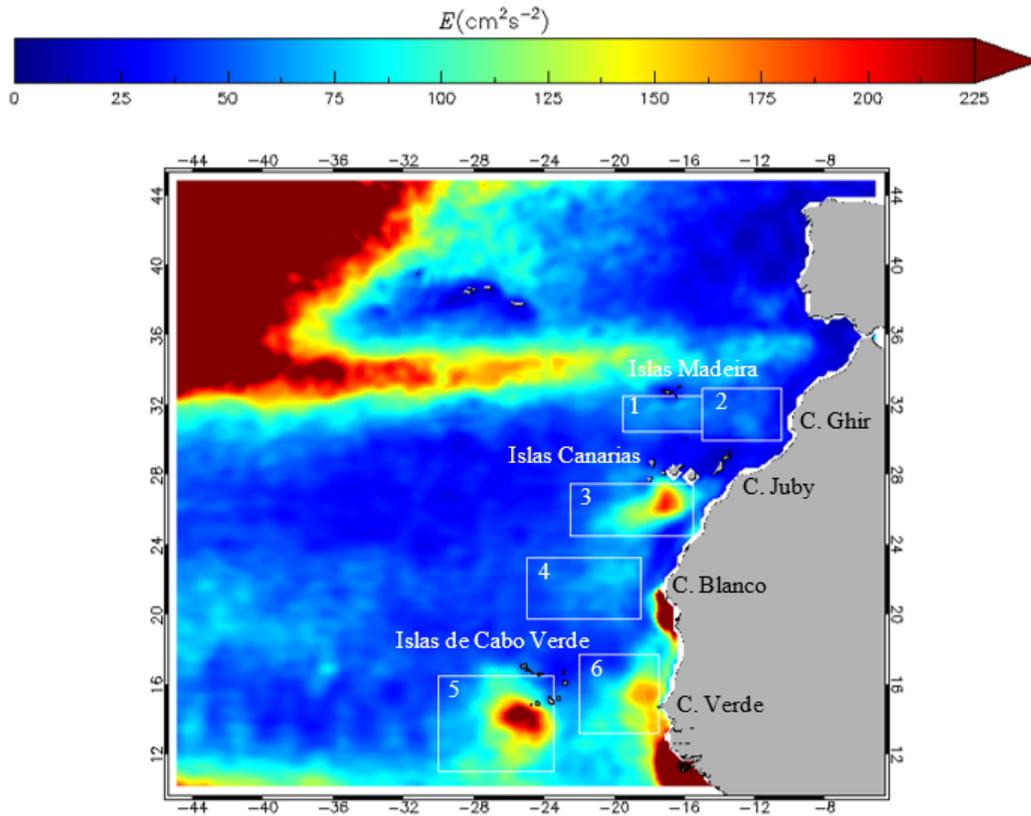
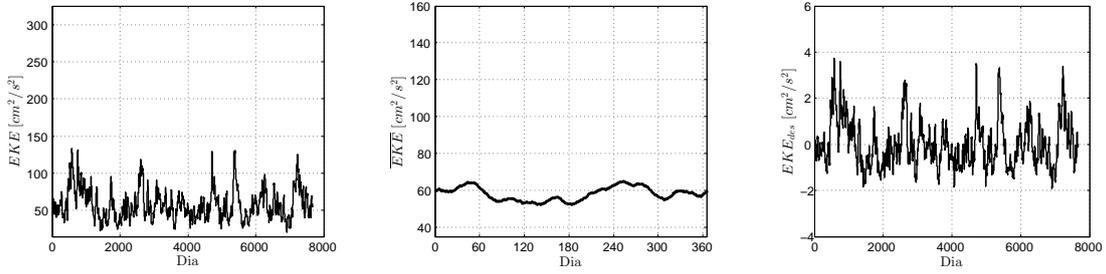


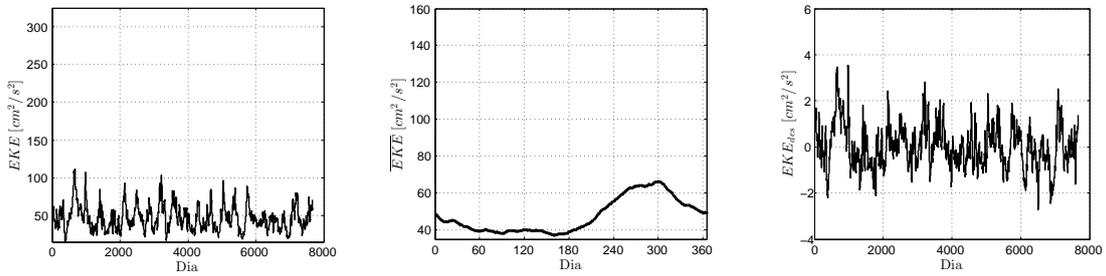
Figura 3.21: Región de interés donde se muestran superpuestas las subáreas escogidas para estudiar la estructura fractal de la energía cinética turbulenta.

del nadir, registrando el tiempo de viaje, la magnitud, y la forma que tiene la señal de retorno después de haber sufrido la reflexión sobre la superficie del océano. Es precisamente este tiempo que tarda la señal emitida por el altímetro en volver al sensor, lo que permite calcular la distancia, conocida como rango R , que hay entre el sensor y la superficie del mar después de corregir algunas perturbaciones que afectan a la propagación (el efecto de la troposfera que se divide en seco y húmedo, y el efecto de la ionosfera) y la reflexión en el océano (influencia de las ondas oceánicas que producen el denominado sesgo del estado del mar) de la señal de microondas. De este modo, conociendo la posición del satélite respecto del elipsoide de referencia, H , a través de alguno de los medios existentes (Robinson 2004), se determina la altura de la superficie del mar, h , respecto de dicho marco de referencia, figura 3.24,

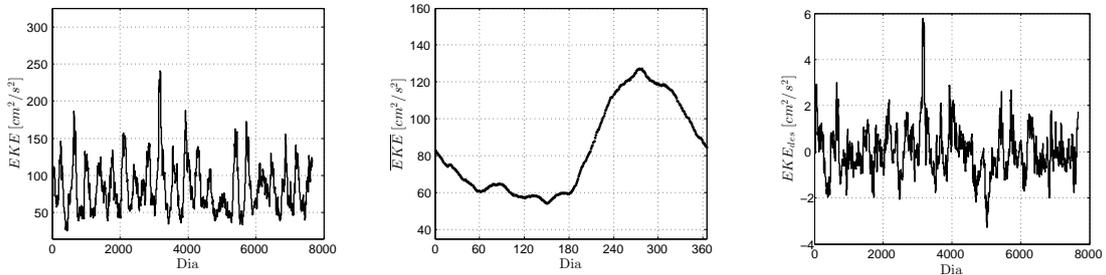
$$h = H - R \quad (3.4)$$



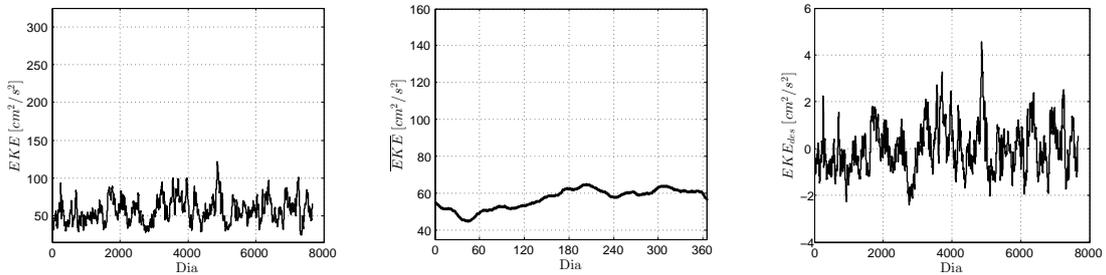
(a)



(b)



(c)



(d)

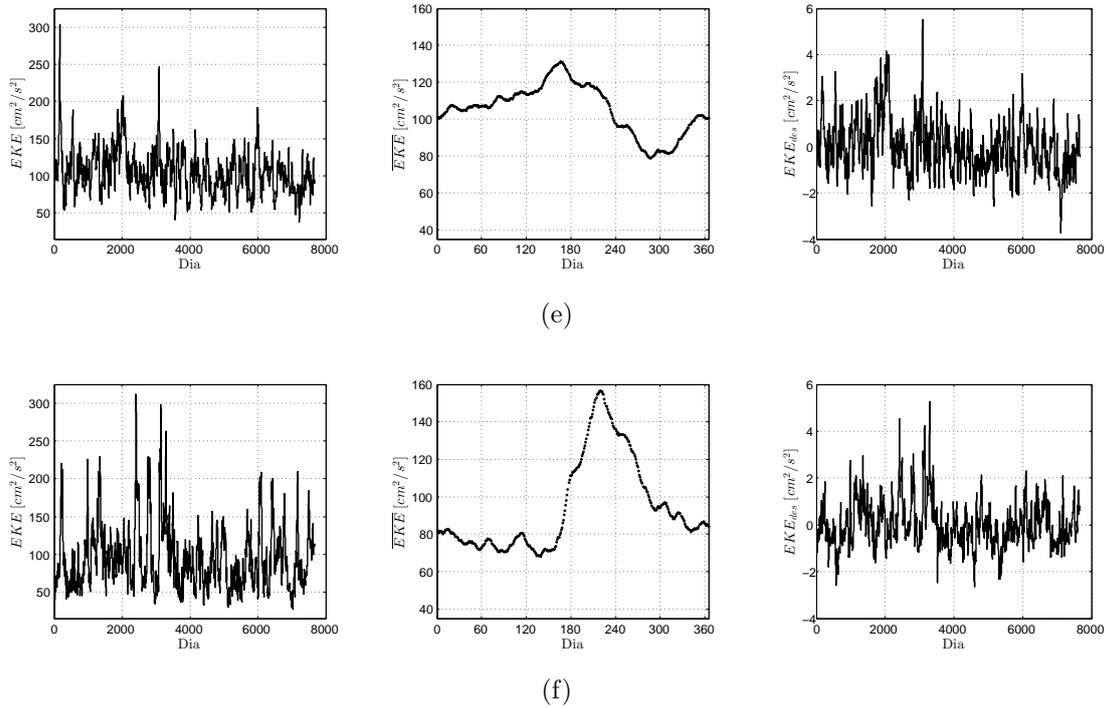


Figura 3.22: Evolución temporal, ciclo anual y serie desestacionalizada de los registros temporales de EKE . Las gráficas se corresponden con: (a) sur de Madeira, (b) Cabo Ghir, (c) sur de Canarias, (d) Cabo Blanco, (e) sur de Cabo Verde y (f) costa de Dakar.

Sin embargo, hay que considerar que el valor de h se debe a la contribución de un cierto número de efectos geofísicos. Además de las variaciones producidas por las corrientes geostróficas, lo que se conoce en términos oceanográficos como altura dinámica h_d , la altura de la superficie del mar, h , también se ve afectada por el efecto de las ondulaciones del geode h_g , la influencia de las mareas h_t , y la respuesta del océano a cambios en la presión atmosférica h_a , que se denomina efecto barométrico invertido. Así, h se puede expresar como $h = h_g + h_d + h_t + h_a + \epsilon$, donde ϵ se refiere a los errores del dispositivo altímetro.

Por otro lado, de forma similar a la velocidad, la altura dinámica se puede expresar como

$$h_d = \bar{h}_d + h'_d \quad (3.5)$$

donde \bar{h}_d y h'_d son las alturas media y la respectiva componente variable, conocida

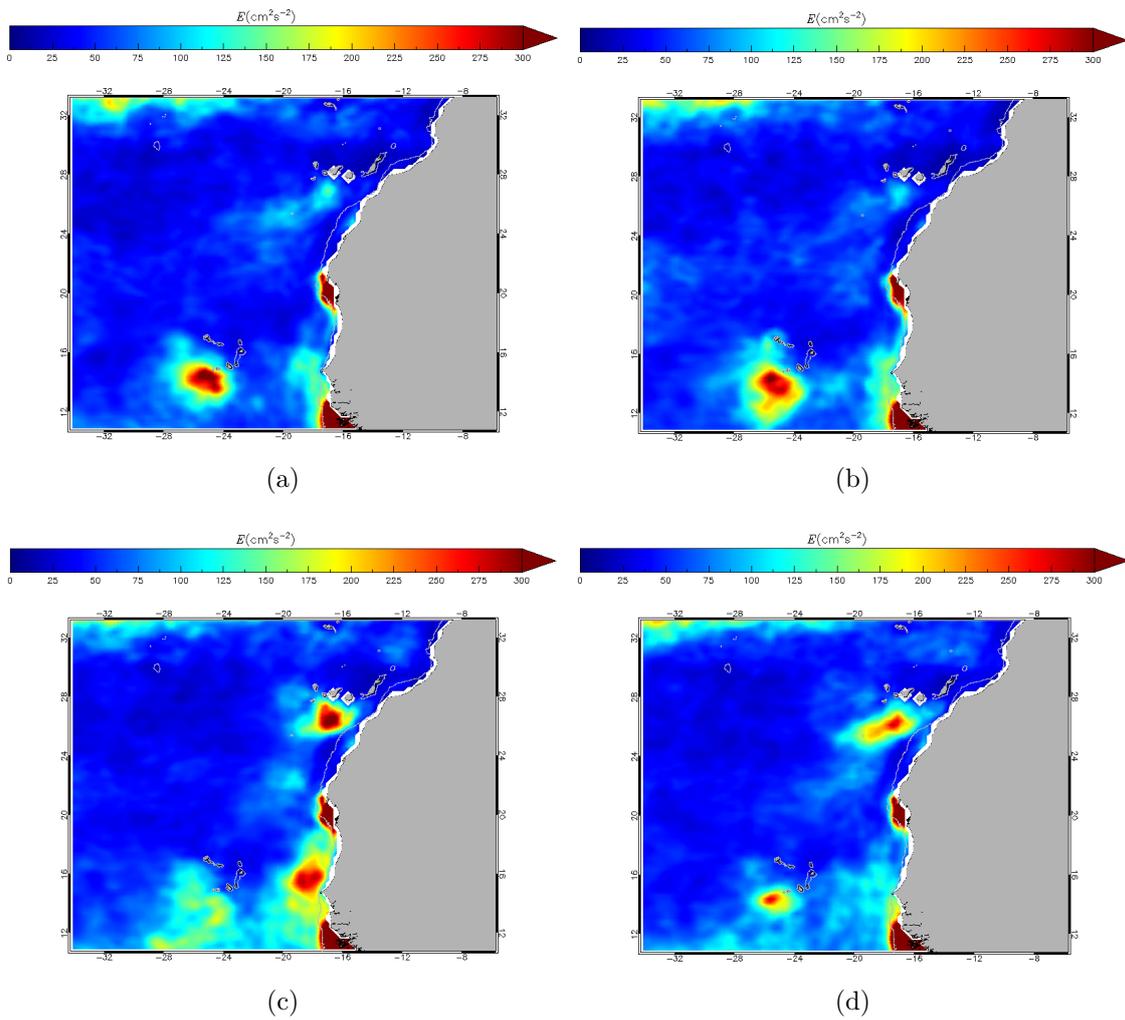


Figura 3.23: Imágenes trimestrales promedio de EKE para el periodo 1993-2013. (a) De enero a marzo, (b) de abril a junio, (c) de julio a septiembre y (d) de octubre a diciembre.

como *Sea Level Anomaly*, en adelante SLA , o anomalía del nivel del mar, que además estará relacionada con la desviación de la velocidad y por tanto, con la EKE .

El efecto sobre h de las mareas, h_t , se corrige a partir de los propios datos del altímetro, mientras que la corrección del efecto barométrico invertido se realiza a través de datos de presión atmosférica que proceden de modelos de predicción meteorológica. Utilizando además otras técnicas, como por ejemplo el filtrado de paso bajo para minimizar el error instrumental, ϵ , se tiene, después de eliminar todas estas componentes:

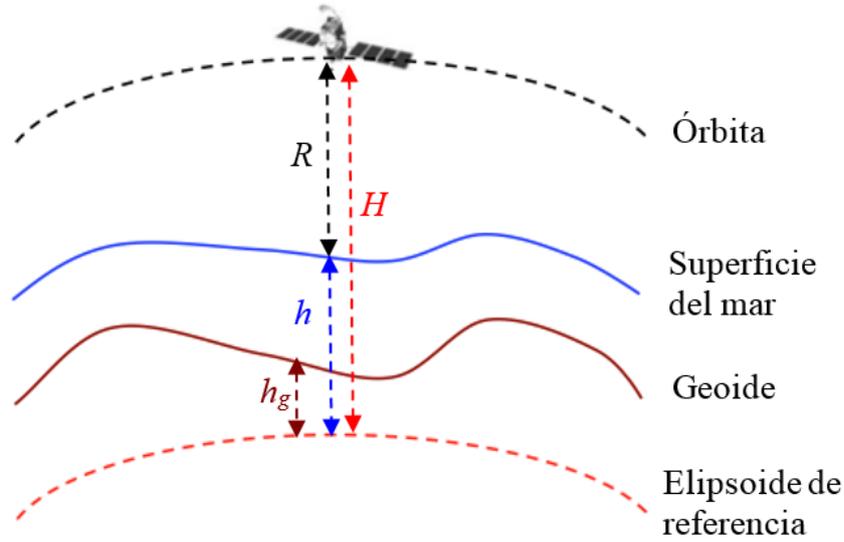


Figura 3.24: Relación entre la distancia medida por el altímetro, R , y la altura de la superficie del mar, h .

$$h_r = h - h_t - h_a - \epsilon = h_g + h_d = h_g + \bar{h}_d + h'_d \quad (3.6)$$

Sin embargo, la corrección de la señal del geoide h_g aún no está resuelta, ya que aún hoy en día no se conoce el geoide con la suficiente exactitud como para estimar de forma global de la altura dinámica, a pesar de los avances tecnológicos en dicho campo (Rio & Hernández 2004; Knudsen et al. 2011).

A pesar de no poder separar la señal del geoide, h_g , del total de la altura dinámica, h_d , con exactitud, sí que es posible extraer la parte de la anomalía del nivel del mar h'_d , ya que tanto el geoide como la componente media de la altura dinámica h_d constituyen la parte estacionaria de la señal del altímetro, h_e , que se puede determinar promediando los sucesivos pases del altímetro cuando sobrevuela una posición geográfica concreta. De este modo, la anomalía del nivel del mar se obtiene de la siguiente manera,

$$h'_d = h_r - h_e = h_r - h_g - \bar{h}_d \quad (3.7)$$

La conexión entre la altura dinámica y las corrientes en el océano viene dada a través de la aproximación geostrofica, que establece que en el interior del océano e ignorando cualquier efecto viscoso o de fricción, existe un balance entre la fuerza de

Coriolis y el gradiente de presiones horizontales,

$$\begin{aligned} f v'_g &= g \frac{\partial h'_d}{\partial x} \\ f u'_g &= -g \frac{\partial h'_d}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde u'_g y v'_g son las componentes de la anomalía de la velocidad geostrófica. Entonces, a partir de estas componentes la energía cinética turbulenta vendrá dada por

$$EKE = \frac{1}{2}(u'^2 + v'^2) \quad (3.9)$$

Los valores de *EKE* empleados se obtienen en base a los datos de anomalía de la velocidad geostrófica suministrados por el servicio francés AVISO (Archiving, Validation and Interpretation of Satellite Oceanographic Data) perteneciente al CNES/CLS. Estas velocidades se calculan usando las mejoras propuestas por Arbic et al. (2012) para el cálculo de las corrientes a partir de mapas de *SLA*, que se obtienen combinando las medidas de varios altímetros.

En relación a estos mapas de *SLA*, es necesario tener en cuenta, que el altímetro es un radar que no forma imágenes y que únicamente obtiene un perfil de altura del nivel del mar, justo debajo de la posición del satélite a lo largo de su órbita. Por consiguiente, para tratar de suplir la escasez de datos suministrada por uno solo de estos sensores, se combinan las medidas tomadas por varios de ellos para así generar un mapa de *SLA* donde aparezca reflejada la variabilidad mesoescalar del océano.

La fusión de los datos procedentes de varios altímetros no es una tarea sencilla. Requiere, en primer lugar, la homogenización e intercalibrado del conjunto de datos que proceden de distintos altímetros, empleando correcciones geofísicas similares para todos ellos (Le Traon & Ogor 1998). El siguiente paso es la extracción de *SLA* de las distintas misiones altimétricas usando una superficie de referencia común. Por último, se combinan todos estos datos y se representan sobre una malla regular, en un mapa, usando técnicas de análisis objetivo espacio-temporal, que requieren tener un conocimiento previo de las escalas espaciales y temporales de la señal oceánica para interpolar en el espacio y el tiempo. En el caso del método desarrollado para el altímetro, este es capaz de corregir además los errores asociados al proceso de observación, especialmente el error de longitud de onda larga (Le Traon et al. 1998).

Dadas las características de este trabajo, que requiere una serie temporal de datos lo más larga posible, de todos los productos que AVISO oferta, se optó por emplear

aquel que realiza sus cálculos en diferido (DT de Delayed Time) combinando como máximo los datos de dos altímetros al mismo tiempo. El producto en diferido proporciona una serie temporal intercalibrada, sin huecos y larga, que se extiende desde 1993 hasta 2013, y que posee una precisión mejor que el producto en tiempo casi real (NRT de Near Real Time). Por otro lado, la selección de la opción de dos altímetros para todo el periodo analizado, le confiere homogeneidad y estabilidad a la serie. Por último, los mapas analizados tienen una resolución espacial de $0.25^\circ \times 0.25^\circ$ y una resolución temporal de un día, aunque conviene puntualizar que en la elaboración de estos mapas diarios se emplea una ventana temporal de computación centrada que emplea los datos recogidos seis semanas antes y seis semanas después de la fecha concreta del mapa.

3.2.2. Resultados y Discusión

Análisis Monofractal

En esta sección se presentan y discuten los resultados obtenidos al aplicar el análisis monofractal, *DFA*, a las series temporales de *EKE*, ya descritas.

La figura 3.25 muestra los perfiles obtenidos para cada una de las seis subáreas de interés. En general, se puede observar como éstos tienen una forma irregular, a excepción del sur de Cabo Verde y la costa de Dakar, donde los perfiles parecen tender más a una parábola convexa. Como ya se comentó en secciones anteriores, Monetti et al. (2003) sugieren que este tipo de formas parabólicas pueden estar indicando la existencia de una tendencia lineal negativa propia de los datos originales o bien, la presencia de un efecto de persistencia. Sin embargo, la estructura de estos perfiles no permite inferir de forma simple comportamientos de escala o la presencia de tendencias en el fenómeno analizado.

En la figura 3.26 se presentan los ajustes lineales de las fluctuaciones de las series de *EKE* frente al intervalo temporal, obtenidos mediante el *DFA*, asimismo los valores de las pendientes correspondientes se resumen en la tabla 3.4. Un análisis general revela como las fluctuaciones, en las 6 regiones consideradas, se ajustan mediante 3 líneas rectas, con pendientes significativamente diferentes, que en principio indica una variación en el comportamiento de escala para diferentes rangos temporales.

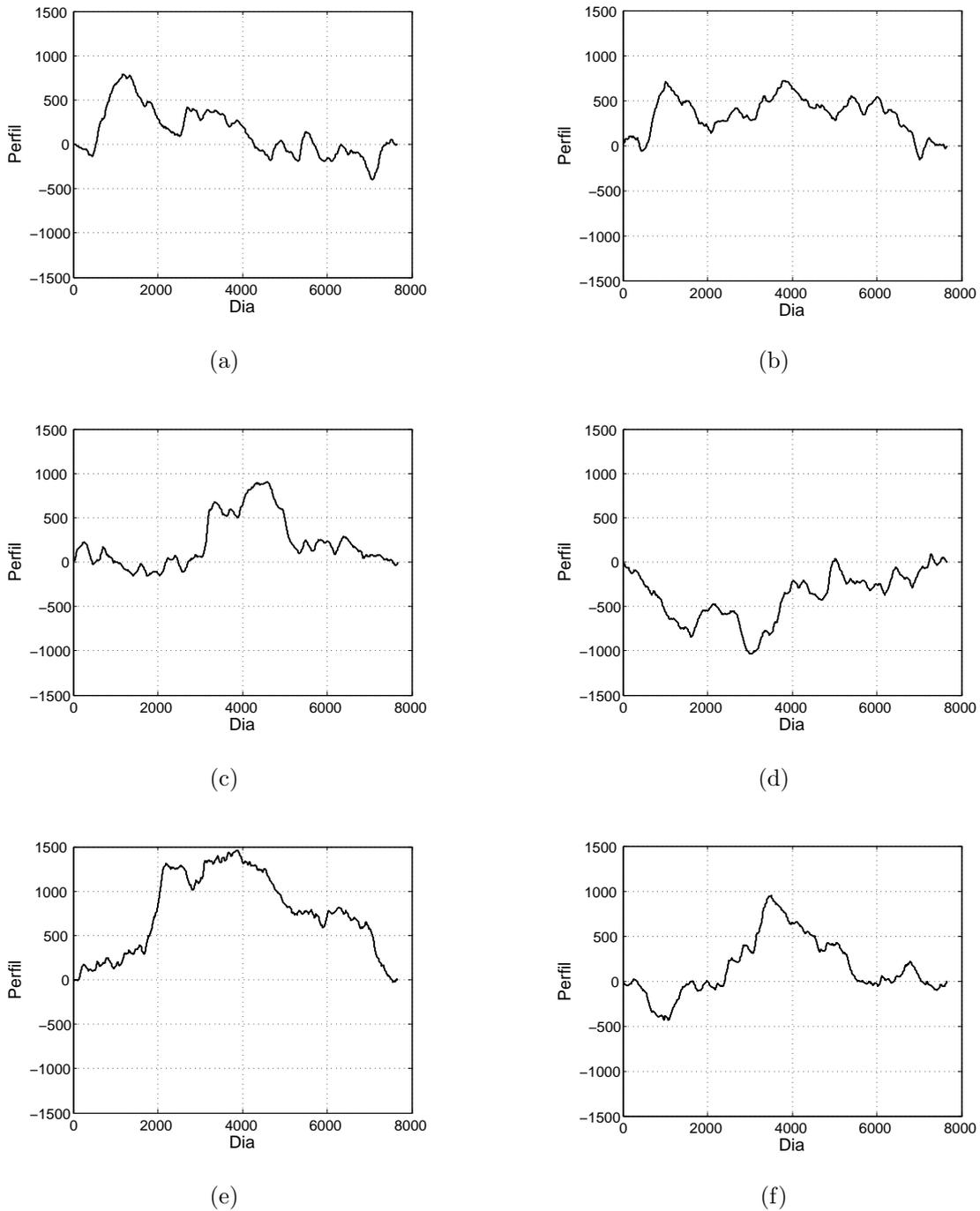


Figura 3.25: Perfiles de las series temporales de EKE ordenados de norte a sur: sur de Madeira (a), Cabo Ghir (b), sur de Canarias (c), Cabo Blanco (d), sur de Cabo Verde (e) y costa de Dakar (f).

Área	H_3	H_2	H_1
Sur de Madeira	1.86	1.31	0.87
Cabo Ghir	1.79	1.21	0.82
Sur de Canarias	1.77	1.31	0.70
Cabo Blanco	1.82	1.31	0.78
Sur de Cabo Verde	1.77	1.12	0.83
Costa de Dakar	1.73	1.15	0.85

Cuadro 3.4: Exponentes de escala obtenidos mediante el análisis *DFA* en las series temporales de *EKE* de las 6 áreas ubicadas en el área del Atlántico Norte.

Los instantes donde aparecen estas transiciones vienen señalados por los cambios de pendiente en los ajustes de las fluctuaciones de *EKE* frente a las escalas temporales, en escala log-log. Así, es posible deducir a partir de las gráficas 3.26 como la primera transición ocurre en torno a algo más de 30 días y la segunda en torno a 315 días en la zona norte, es decir al sur de Madeira y Canarias, como también cerca de los Cabos Ghir y Blanco, y aproximadamente a 200 días en las regiones ubicadas más al sur, Cabo Verde y cerca de la costa de Dakar.

En cuanto a los valores absolutos de H , se puede ver como las fluctuaciones de las series temporales de *EKE* exhiben, a largo plazo (entre 1 y 7 años), un exponente de escala $0,7 < H_1 < 0,9$. Mientras que las fluctuaciones para escalas temporales intermedias, en un rango aproximado de entre 1 mes y 1 año, presentan $1,1 < H_2 < 1,3$. Por último, las fluctuaciones a escalas temporales entre 7 días y un mes presentan $H_3 > 1,7$. Asimismo, cabe destacar como $H_1 < H_2 < H_3$, es decir, existe un claro incremento de H a intervalos de tiempo menores, y como por debajo de 1 año el exponente de escala siempre satisface $H > 1$. Estos resultados se traducen en la posible existencia de un efecto de *d.l.p.* para intervalos de tiempo por encima de 1 año, donde el comportamiento de escala de las fluctuaciones de *EKE* sigue una relación tal como en la ecuación 2.50. Sin embargo, para escalas de tiempo inferiores, donde $H > 1$, el efecto de *d.l.p.* sigue estando presente, e incluso cabe la posibilidad que lo esté con mayor intensidad, pero su correlación temporal ya no sigue una ley de potencias (Peng et al. 1995; Varotsos et al. 2013). No obstante, la presencia de cruces en los resultados del análisis monofractal debe ser analizada con

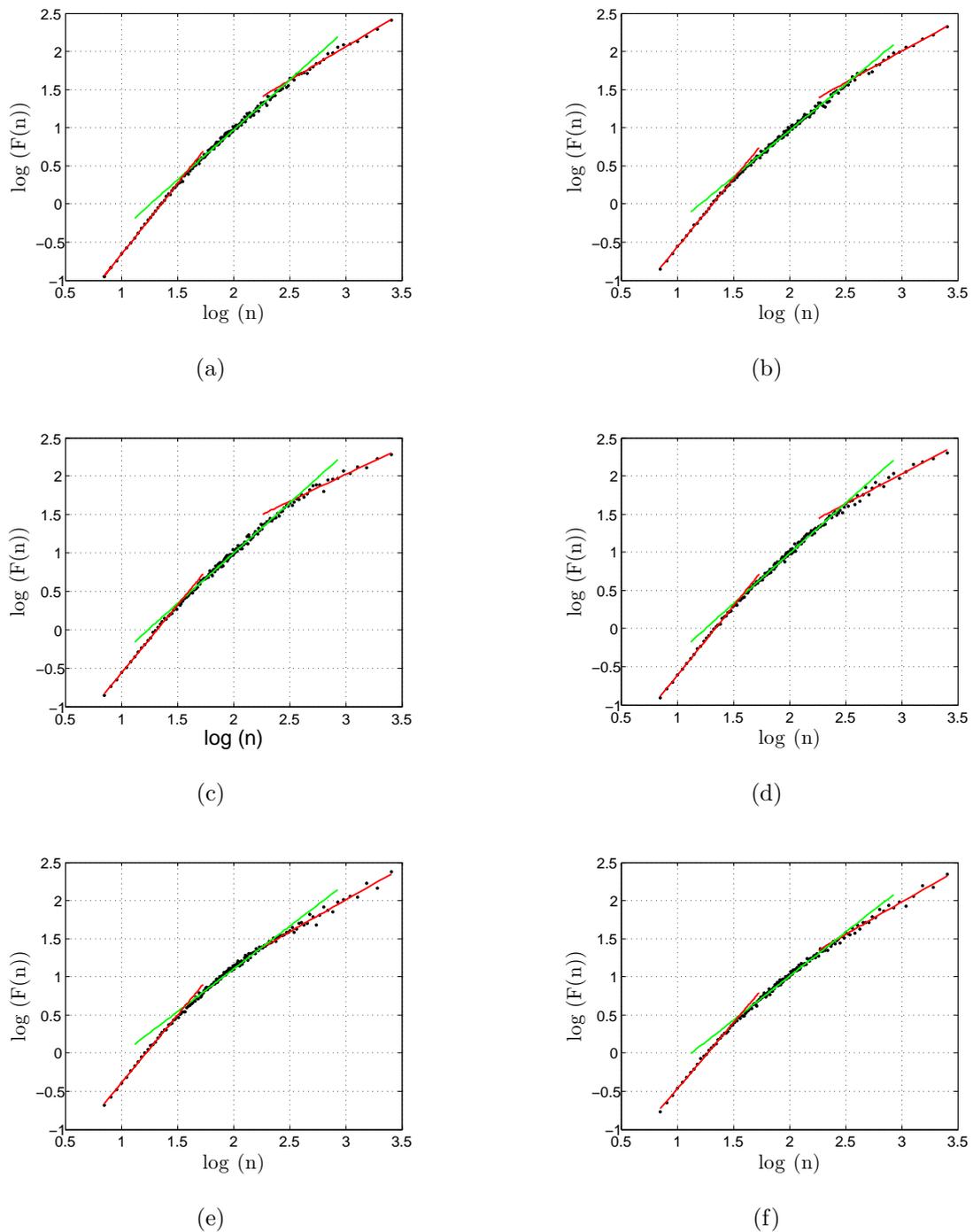


Figura 3.26: Ajustes lineales obtenidos mediante el *DFA* de las series temporales de *EKE* ordenados de norte a sur: sur de Madeira (a), Cabo Ghir (b), sur de Canarias (c), Cabo Blanco (d), sur de Cabo Verde (e) y costa de Dakar (f).

precaución, ya que éstos también pueden ser consecuencia de tendencias externas u otro tipo de no estacionaridades intrínsecas en los registros temporales (Hu et al. 2001).

La distribución espacial de los valores de H muestra valores similares en las 6 subáreas de interés a excepción del descenso que se observa a escalas intermedias en las regiones cercanas a Cabo Verde y Dakar. Por otro lado, en el intervalo aproximado entre 1 y 7 años se comprueba como al sur de Madeira, sur de Cabo Verde y en la costa de Dakar los resultados parecen indicar un efecto de *d.l.p.* ligeramente superior al de las demás zonas, con $H > 0,8$, sin embargo las diferencias no son muy significativas.

La evaluación de la componente lineal de las series temporales de *EKE*, se realiza a través del análisis *DFA* aplicado a las mismas series desordenadas de manera aleatoria. Los ajustes lineales correspondientes, no mostrados, revelan un comportamiento, que en todas las regiones consideradas es prácticamente igual al de un ruido blanco, es decir, exhiben un exponente de escala $H \sim 0,5$. En primera instancia, esto parece indicar que las dependencias a largo plazo, incluso aquellas que no siguen una ley de potencias, son las que dominan el comportamiento de escala de las fluctuaciones de *EKE*.

Análisis Multifractal

Los resultados obtenidos mediante el análisis multifractal, *MF DFA*, de los registros temporales de *EKE* para las 6 subáreas consideradas, se presentan en la figura 3.27, donde se muestran los espectros multifractales, $D(\alpha)$, junto con las respectivas dependencias del exponente generalizado de Hurst, $H(q)$, con q . Asimismo, en la tabla 3.5 se resumen las medidas características realizadas sobre los espectros para su caracterización.

Se observa como la posición del máximo del espectro multifractal cambia en función del área que se analiza, así, $\alpha_{q=0}$ es menor para las zonas ubicadas más al sur, como en Cabo Verde donde $\alpha_{q=0} = 1,13$ y en la costa de Dakar donde $\alpha_{q=0} = 1,25$, mientras que para la región al sur de Madeira, Cabo Ghir, Cabo Blanco y al sur de Canarias $\alpha_{q=0}$ tiene un valor que está por encima de 1,3.

Además, los espectros presentan una forma típica de parábola convexa, ligera-

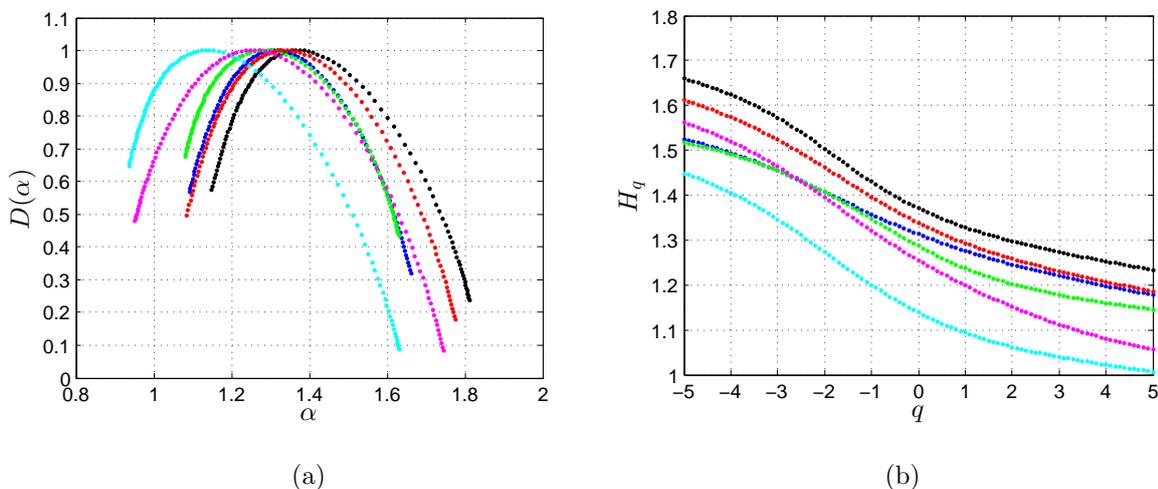


Figura 3.27: Análisis multifractal de las series temporales de *EKE*. (a) Espectros multifractales y (b) variaciones de H_q con q . Sur de Madeira (línea negra), Cabo Ghir (línea verde), sur de Canarias (línea azul), Cabo Blanco (línea roja), sur de Cabo Verde (línea celeste) y costa de Dakar (línea rosa).

mente asimétrica, con la cola derecha más larga. Generalmente, esto indica que el comportamiento multifractal de las series temporales está dominado por las fluctuaciones a corto plazo, es decir cuando $q < 0$. En cuanto a los valores obtenidos para el ancho de $D(\alpha)$, medido como el doble de la distancia de la cola más corta al centro del espectro, muestran valores en torno a 0,4, a excepción de Cabo Blanco y la costa de Dakar que exhiben los valores máximos, 0,48 y 0,6 respectivamente. Estas observaciones vienen respaldadas por la gráfica de la variación de H_q con q , figura 3.27(b), donde se puede ver como el rango de variación es mayor en la costa de Dakar (línea rosa), seguido por Cabo Blanco (línea roja). Teniendo en mente que el ancho del espectro, $\Delta\alpha$, es un reflejo del grado de complejidad de un proceso, los resultados obtenidos indican que las regiones ubicadas al sur y cerca de la costa presentan, en principio, un comportamiento ligeramente más multifractal que las demás subáreas, aunque las diferencias no son muy significativas.

La evaluación de las contribuciones lineal y no lineal en el comportamiento de escala se realiza de manera conjunta en la figura 3.28, obtenida mediante el análisis multifractal de las series temporales de *EKE* originales, reordenadas aleatoriamente y subrogadas. En general, los cambios más evidentes en los espectros se observan

Área	α_{right}	α_{left}	$\alpha_{q=0}$	$\Delta\alpha$
Sur de Madeira	1.81	1.15	1.37	0.44
Cabo Ghir	1.63	1.08	1.28	0.40
Sur de Canarias	1.66	1.10	1.31	0.42
Cabo Blanco	1.78	1.09	1.33	0.48
Sur de Cabo Verde	1.63	0.94	1.13	0.40
Costa de Dakar	1.75	0.95	1.25	0.60

Cuadro 3.5: Medidas características de los espectros, obtenidas mediante el análisis *MF DFA* de las series temporales de *EKE* de las 6 áreas ubicadas en el área del Atlántico Norte. α_{right} y α_{left} son los límites del espectro, $\alpha_{q=0}$ es donde $D(\alpha)$ alcanza su máximo y $\Delta\alpha$ es el ancho del espectro.

al reordenar la serie aleatoriamente (líneas en rojo), y muestran como dichos espectros se centran en, aproximadamente, $\alpha = 0,5$. En cambio, al subrogar las series temporales las variaciones en el espectro (líneas en verde), son prácticamente inexistentes, a excepción de Cabo Ghir (figura 3.28(b)). También se destacan los casos correspondientes al sur de Canarias y de Cabo Verde (figura 3.28(c) y (e)), donde los espectros multifractales correspondientes a las series desordenadas de manera aleatoria, aunque se estrechan, mantienen un $\Delta\alpha \neq 0$. El comportamiento general de las variaciones observadas en los espectros multifractales indica que es la influencia de la componente lineal la que domina el comportamiento fractal de las series temporales de *EKE*.

Sin embargo, para cuantificar la intensidad del efecto no lineal en el comportamiento de escala de las series temporales de *EKE*, se aplica el *DFA* a las series de volatilidad obtenidas a partir de los registros. Los resultados verifican que la serie es en su origen es multifractal, y que en principio la intensidad de la contribución no lineal depende de la región considerada.

Los ajustes derivados del *DFA* para el test de volatilidad se muestran en la figura 3.29 y las correspondientes pendientes se resumen en la tabla 3.6. En general, los ajustes son adecuados, aunque cabe destacar que a escalas por encima de ~ 315 días la dispersión aumenta y, en consecuencia, el ajuste es de menor calidad.

Nótese que, por un lado, sólo hay un exponente de escala y por otro, que éste

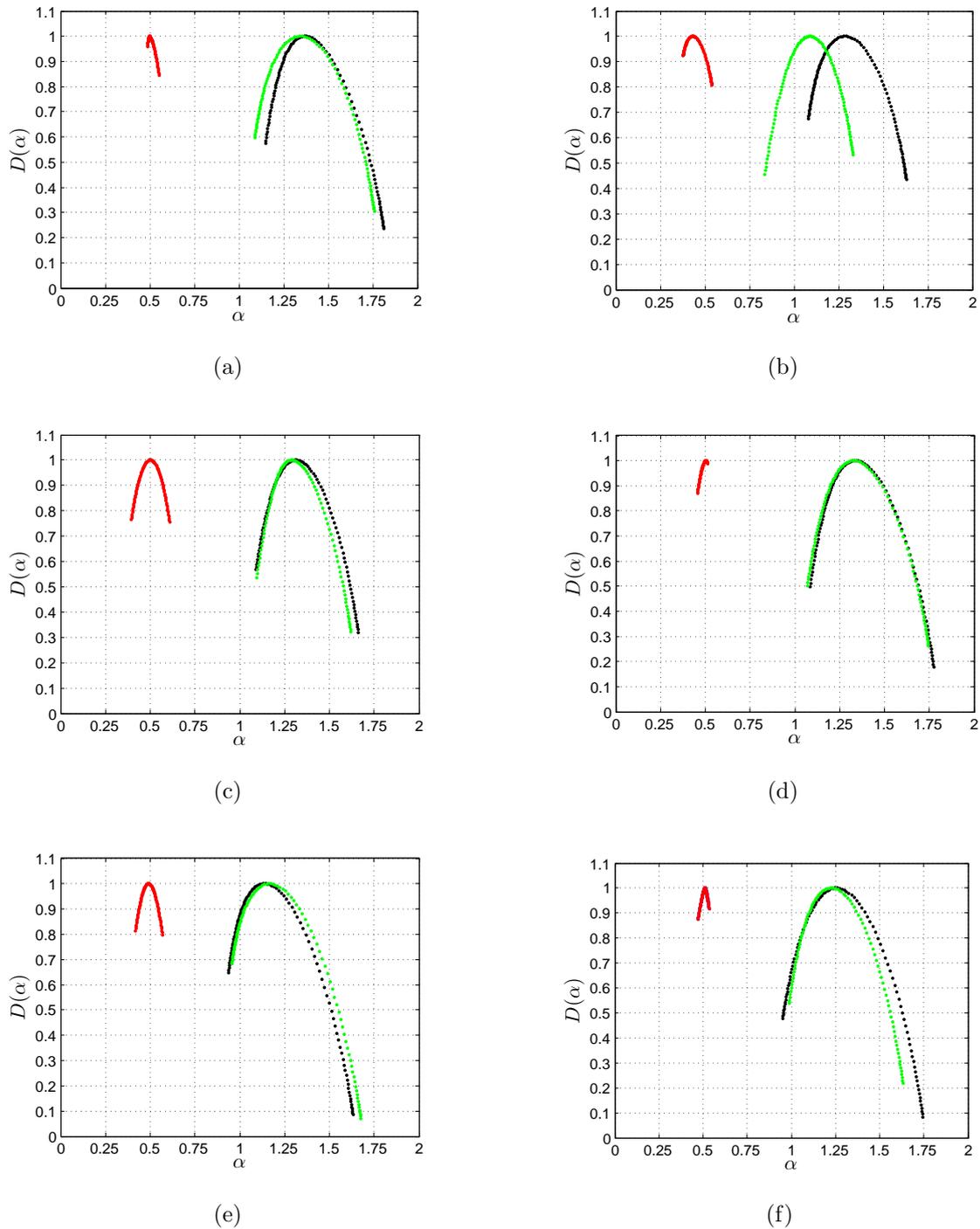
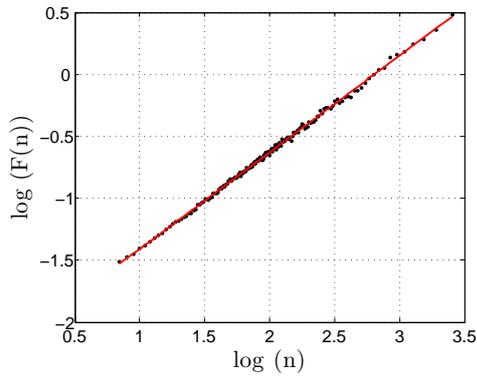
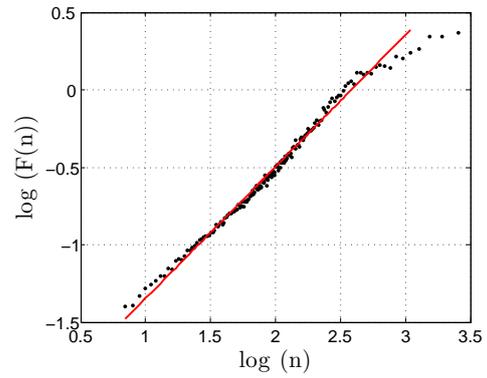


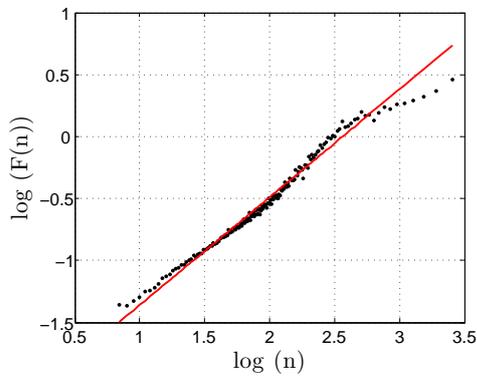
Figura 3.28: Espectros multifractales de las series temporales correspondientes, ordenados de norte a sur, sur de Madeira (a), Cabo Ghir (b), sur de Canarias (c), Cabo Blanco (d), sur de Cabo Verde (e) y costa de Dakar (f) respectivamente. Los espectros son obtenidos a partir de los datos originales (línea negra), a partir de los datos desordenados aleatoriamente (línea roja) y a partir de datos subrogados (línea verde).



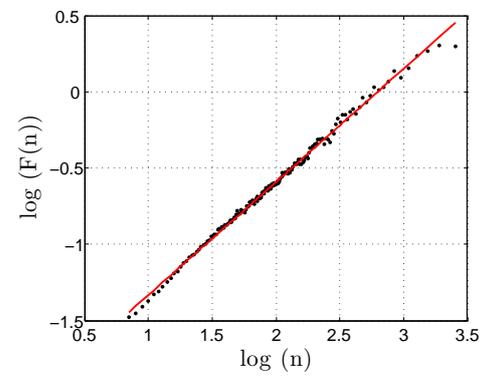
(a)



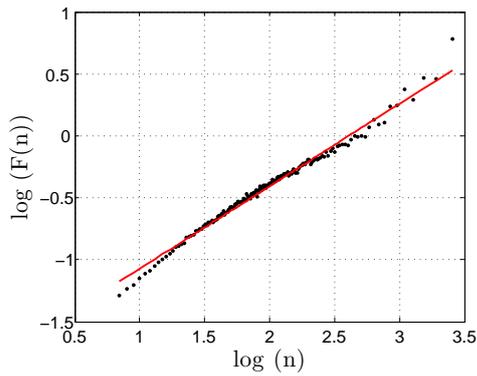
(b)



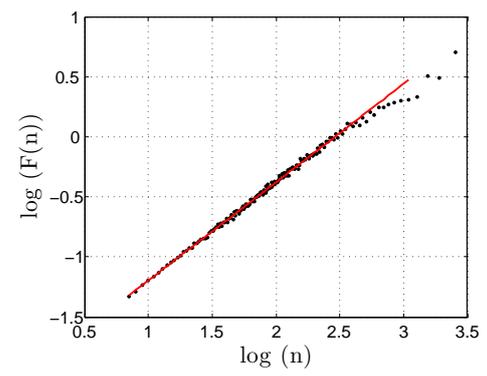
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 3.29: Ajustes lineales obtenidos mediante el *DFA* de las series de volatilidad correspondientes, ordenados de norte a sur, sur de Madeira (a), Cabo Ghir (b), sur de Canarias (c), Cabo Blanco (d), sur de Cabo Verde (e) y costa de Dakar (f) respectivamente.

Área	H^{volat}	H_{surr}^{volat}
Sur de Madeira	0.78	0.75
Cabo Ghir	0.85	0.78
Sur de Canarias	0.87	0.81
Cabo Blanco	0.74	0.70
Sur de Cabo Verde	0.67	0.63
Costa de Dakar	0.82	0.73

Cuadro 3.6: Exponentes de escala obtenidos mediante el análisis *DFA* de las series de volatilidad y volatilidad subrogadas obtenidas a partir de las series temporales de *EKE* correspondientes a las 6 áreas ubicadas en el área del Atlántico Norte.

está en todos los casos por encima de 0,5. En consecuencia, se verifica el hecho de que, en todas las regiones consideradas independientemente de la localización geográfica, las series temporales de *EKE* presentan un comportamiento que requiere de más de un exponente de escala para su caracterización, y que por tanto, los cruces obtenidos en el análisis monofractal de las series originales, figura 3.26, no son resultado de tendencias externas u otras no estacionaridades intrínsecas de los registros temporales. Sin embargo, cabe destacar el valor del exponente de las series de volatilidades obtenido para Cabo Verde, notablemente menor al de las demás subáreas, lo que es coherente si se tiene en cuenta la longitud de la cola derecha del espectro, que refleja, en este caso particular, una contribución especialmente importante de las dependencias a corto plazo. También cabe la posibilidad de que esta región presente una contribución no lineal que no se detectó en el análisis de las series subrogadas y que afecte particularmente a las fluctuaciones a corto plazo.

Los exponentes de escala obtenidos para las series de volatilidad subrogadas, segunda columna de la tabla 3.6, siguen mostrando $H > 0,5$. Las variaciones máximas de H fueron observadas para los casos correspondientes a Cabo Ghir, sur de Canarias y Dakar y sugieren la presencia de una contribución no lineal al comportamiento de escala de los registros de *EKE*. En consecuencia, según los resultados obtenidos se puede admitir que el comportamiento de escala de las fluctuaciones de las series temporales de *EKE* está fuertemente influenciado por las correlaciones a largo plazo, aunque se aprecia que existe un efecto no lineal, menos intenso, pero que en algunos

casos no es despreciable.

3.2.3. Conclusiones

La dinámica que rige el comportamiento de las series temporales de *EKE*, en base a los resultados obtenidos en el análisis monofractal, revela que existe un comportamiento de las fluctuaciones diferente a escalas temporales diferentes, con $H_3 > H_2 > H_1$ para las 6 subáreas seleccionadas. Así, a escalas por debajo de un año se obtiene $1 < H < 2$, sugiriendo que las correlaciones temporales no sólo están presentes sino que incluso son más fuertes, pero ya no siguen una ley de potencias. Para escalas entre, aproximadamente, 1 y 7 años, $0,7 < H < 0,9$, lo que indica correlaciones a largo plazo que siguen una ley de potencias. Estos resultados se confirmaron eliminando el orden temporal de las observaciones originales y obteniendo $H \sim 0,5$, revelando un comportamiento de escala fuertemente influenciado por la presencia de *d.l.p.* A escalas por encima de un año, los valores absolutos del exponente de escala indican que el efecto de *d.l.p.* es mayor en las regiones localizadas al norte (sur de Madeira y Cabo Ghir), y en las localizadas más al sur (Cabo Verde y costa de Dakar).

El análisis *MF DFA* revela un comportamiento multifractal que está dominado por las correlaciones a corto plazo, especialmente al sur de Cabo Verde. Se observa un desplazamiento del espectro hacia valores de α más bajos con la latitud. La costa de Dakar exhibe el máximo ancho de espectro, $\Delta\alpha = 0,6$, seguido por Cabo Blanco, $\Delta\alpha = 0,48$ y el sur de Madeira con $\Delta\alpha = 0,44$, lo que sugiere un comportamiento más complejo en estas zonas. La variabilidad de los parámetros característicos de los espectros multifractales de las series de *EKE* para las diferentes subáreas, pone de manifiesto que existe una dependencia de la localización geográfica y, consecuentemente, de los procesos oceanográficos predominantes en cada región.

La evaluación de las contribuciones lineal y no lineal en el comportamiento de escala de las series de *EKE* obtenido para cada una de las 6 áreas seleccionadas, realizado a partir de las series temporales subrogadas y desordenadas de manera aleatoria, indica que el efecto lineal predomina dicho comportamiento. Hecho respaldado por el test de volatilidad, que por un lado verifica que el comportamiento general de las series temporales de *EKE* es multifractal y que además, está fuer-

temente influenciado por las correlaciones temporales. No obstante, este test pone de manifiesto la presencia de una pequeña contribución no lineal sobre todo en las regiones de Cabo Ghir, sur de Canarias y Dakar que afecta a las propiedades de escala del fenómeno.

3.3. Propiedades fractales y multi-fractales de las Corrientes Marinas

Tal como se comentó en la sección 3.1, el océano posee una gran capacidad para almacenar calor, el cual puede ser transportado de unas zonas a otras por las corrientes marinas, esto convierte a la circulación oceánica en un actor con un papel determinante en la moderación del clima del planeta.

Cabe destacar, que las masas de agua oceánicas contienen además partículas en suspensión y disueltas, así como organismos vivos, por tanto, las corrientes son responsables del transporte tanto de materia como de energía. En consecuencia, además de ser esencial en el control del clima del planeta tiene también numerosas implicaciones ecológicas.

En términos de la profundidad de la columna de agua sobre la que se producen, se pueden distinguir dos tipos de corrientes en el océano. En la parte superior se producen las corrientes superficiales, que afectan al aproximadamente 10 % del agua del océano y se encuentran entre la superficie y en torno a los 400 metros de profundidad. Por debajo se encuentran las corrientes profundas, que afectan al 90 % restante de las aguas oceánicas. Mientras que las primeras se deben fundamentalmente a la acción directa del viento, recibiendo el nombre de circulación inducida por el viento, las corrientes profundas se originan como consecuencia de las diferencias en la densidad de las masas de agua, causadas no solo por la variación en la salinidad, sino también por el descenso de temperaturas en las zonas profundas del océano (Pinet 2009). Este tipo de flujo recibe el nombre de circulación termohalina. En la figura 3.30 se muestra una ilustración que representa esta circulación. Aunque con frecuencia son considerados separadamente, ambos procesos no son independientes el uno del otro (Van Aken 2007).

Los flujos de agua en el océano son no estacionarios, turbulentos y muestran variabilidades sobre múltiples escalas espaciales y temporales. Así, en el dominio espacial las escalas pueden ir desde la escala de las cuencas oceánicas hasta escalas moleculares en las que la energía es disipada en forma de calor. En el dominio temporal, las variaciones observadas en la circulación oceánica se extienden desde los pocos segundos hasta las décadas o incluso más. En consecuencia, la circula-

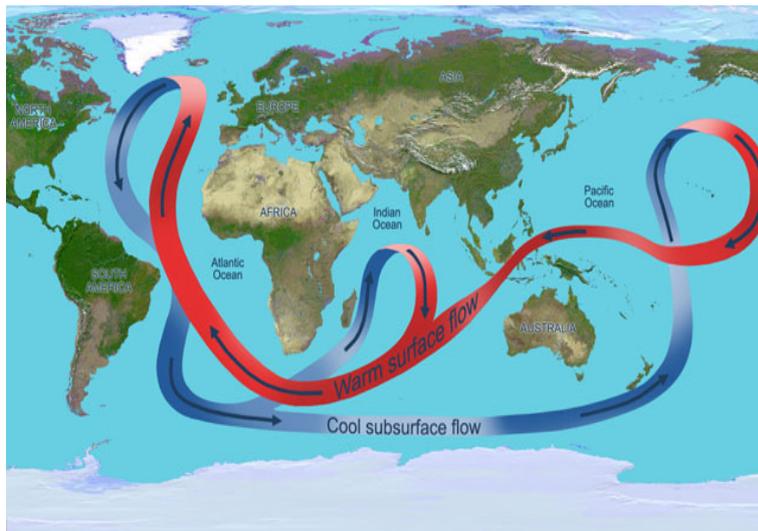


Figura 3.30: Ilustración que representa la circulación termohalina mundial. En el Océano Atlántico, la circulación superficial lleva aguas cálidas (flechas rojas) hacia el norte, y las aguas frías profundas (flechas azules) hacia el sur. (NASA/JP)

ción oceánica es un proceso inherentemente complejo, resultado del acoplamiento de múltiples procesos no lineales que actúan a diferentes escalas espaciales y temporales. Por tanto, la complejidad del proceso resultante es un factor limitante a la hora de entender y caracterizar el mismo de manera adecuada (Wells 2001). En este sentido Press (1978) examina el espectro de potencia de varios tipos de procesos geofísicos e identifica a las corrientes oceánicas como un proceso cuyo espectro de potencia sigue un comportamiento de escala. En concreto, observa que el espectro de potencia, para una serie temporal de velocidades de corriente registrada en aguas profundas del Pacífico central durante 152 días, (Taft et al. 1974), exhibe una dependencia en forma de ley de potencias inversa a la frecuencia, con $\beta \sim 1$, figura 3.31. No obstante, la única contribución publicada, en nuestro conocimiento, en la que se aborda el estudio de la dependencia a largo plazo en corrientes oceánicas, es debida a Ashkenazy & Gildor (2009). Estos autores estudian la existencia de correlaciones a largo plazo en corrientes, empleando datos registrados mediante un radar de alta frecuencia a lo largo de un año en el Golfo de Eilat. Observan, mediante el uso del *DFA* y el espectro de Fourier, que las velocidades de corriente muestran persistencia a lo largo del tiempo, cubriendo escalas que van desde unas pocas horas hasta varios

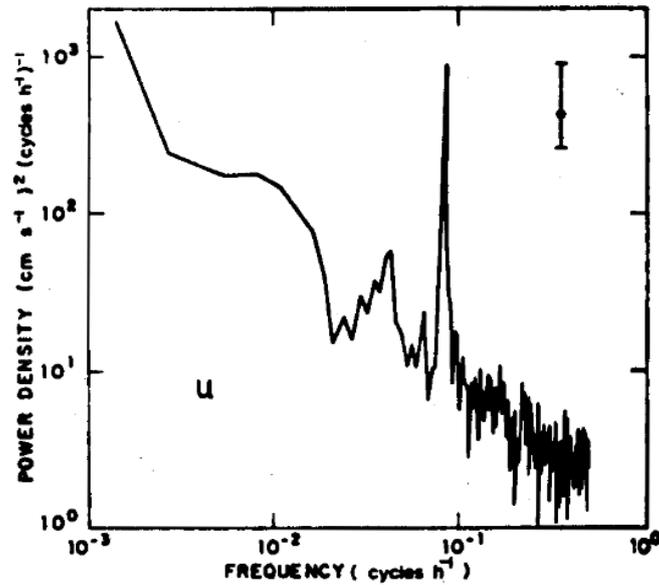


Figura 3.31: Espectro de potencia de la velocidad oceánica, componente este-oeste, a 3100 metros de profundidad en torno a 1°S, 150°O (Press 1978)

meses. Además, evalúan el efecto de la componente no lineal en las series temporales, concluyendo que ésta influye en el comportamiento de escala observado. Estos autores sugieren que dicho comportamiento no es debido únicamente al viento, sino a las mareas, la batimetría de la zona, y en general a los términos de advección de las ecuaciones que gobiernan el proceso. Los resultados obtenidos, se refieren a la capa superficial del océano y están limitados a observaciones experimentales que cubren un periodo corto de tiempo, si bien presentan una buena cobertura espacial.

El objetivo de esta sección es analizar el comportamiento temporal de intensidad de las corrientes oceánicas, comprobando la existencia de correlaciones a través del análisis *DFA* y su generalización, *MF DFA*, haciendo uso de series temporales experimentales obtenidas durante largos periodos de tiempo y a diferentes profundidades.

3.3.1. Zona de estudio y datos

Las observaciones de intensidad de corriente examinadas en esta sección fueron registradas en la estación KIEL276 (33°N y 22°O) localizada en la llanura abisal de Madeira, en el océano Atlántico, al noroeste de las Islas Canarias, figura 3.32.



Figura 3.32: Ubicación de la estación de medida KIEL276 en el entorno de la llanura abisal de Madeira, 33°N y 22°O. (GoogleEarth)

La estación KIEL276 se encuentra situada en el giro subtropical del Atlántico Norte, muy cerca de la posición media de la Corriente de las Azores que constituye su límite superior. El transporte medio de esta corriente hacia el este es cercano a los 10 Sv ($1 \text{ Sv} = 10^6 \text{ m}^3/\text{s}$) en los primeros 800 metros (Klein & Siedler 1989) y mediante observaciones quasi-sinópticas se ha estimado que la anchura de la misma alcanza los 150 kilómetros (Pérez et al. 2003). La Corriente de Azores se encuentra asociada a un frente termohalino conocido como Frente de las Azores caracterizado por su alta actividad mesoescalar. Esta viene determinada por la inestabilidad baroclínica de la corriente (Alves & Colin de Verdière 1999) y se caracteriza por tanto, por mostrar fuertes meandros y remolinos que al desprenderse del frente se propagan hacia el oeste (Pingree & Sinha 2001), al igual que lo hacen algunas perturbaciones que han sido identificadas como ondas de Rossby (Cipollini et al. 1997).

En esta zona, por debajo de la capa superficial y para el rango de profundidades comprendido entre 600 y 1300 metros, se observa la influencia del agua mediterránea que se extiende hacia el interior del Océano Atlántico como una lengua que sale a través del Estrecho de Gibraltar, figura 3.33. Este flujo de agua mediterránea también muestra un carácter variable e incluye la presencia de meddies o remolinos,

con un diámetro aproximado de 100 kilómetros que giran anticiclónicamente y que se caracterizan por contener un alto contenido salino.

Distintos trabajos ponen de manifiesto una marcada variabilidad estacional e interanual de la corriente en cuanto a su posición e intensidad. Mediante un estudio con datos históricos de temperatura, salinidad, densidad y oxígeno disuelto, Klein & Siedler (1989) observan como la Corriente de Azores se estrecha en verano y migra hacia el sur, mostrando mayor variabilidad en este periodo del año. Sin embargo, en estudios posteriores desarrollados por Le Traon & De Mey (1994) y Tokmakian & Challenor (1993), realizados con datos de altímetro, se observó que la variabilidad aumentaba de verano a invierno, y además en el primero, no se observó el desplazamiento estacional de la corriente. Se ha argumentado, que esta discrepancia puede deberse a que la señal de la corriente que predomina, frente a la señal promedio, sea consecuencia de la variabilidad mesoescalar.

Sin embargo, con respecto a la variabilidad interanual, el monitoreo con correntímetros (Müller & Siedler 1992) o con datos del altímetro (Volkov 2005), ha puesto de relieve cambios en el transporte hacia el este y en la energía cinética turbulenta de la corriente para estas escalas temporales. Factores como el ajustamiento de la Corriente de Azores al forzamiento atmosférico y la masa de agua intercambiada a través del Estrecho de Gibraltar influyen en la variabilidad interanual de la corriente (Volkov & Fu 2011). Precisamente, Siedler et al. (2005), con los datos de KIEL276 a lo largo de 20 años, mostraron como la frecuencia de meddies, que dejan su señal en los datos de esta estación, está relacionada con los variaciones de largo término experimentadas por la Corriente de Azores, figura 3.33.

Las series temporales fueron registradas por el Institut für Meereskunde (ahora Leibniz-Institute of Marine Science), en KIEL, Alemania. Constituyen las series temporales más largas registradas en el océano Atlántico, cubriendo desde el año 1980 hasta el 2011, aproximadamente unos 31 años (Müller & Waniek 2013).

Lejos de la influencia atmosférica directa sobre la superficie del mar, los datos se registraron mediante el uso de correntímetros situados a lo largo de toda la columna de agua, atendiendo a características oceanográficas determinadas por las principales masas de agua: Agua Central Noratlántica entre 200 y 700 metros, salientes del Mediterráneo alrededor de 1000 metros, Agua Profunda del Atlántico Norte a 1500

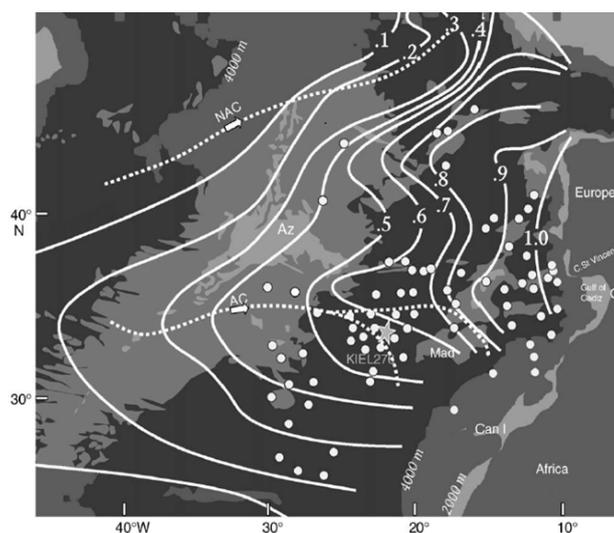


Figura 3.33: Representación gráfica de la masa de agua saliente del Mediterráneo (línea blanca). Los puntos blancos indican la posición de meddies o remolinos de agua mediterránea y la estrella la situación de la estación KIEL 276. Las líneas de puntos discontinuas muestran la posición de la Corriente Noratlántica (NAC) y de Azores (AC). También se indica la situación de los archipiélagos de Azores (Az), Madeira (Mad) y Canarias (CanI). (Siedler et al. 2005)

y 3000 metros y por último, masas de aguas localizadas a unos 50 metros por encima del fondo marino.

Cabe destacar que las profundidades cambian ligeramente a lo largo del tiempo debido a variaciones en diseño de los dispositivos de medida, variaciones en los anclajes de éstos e incluso por fenómenos meteorológicos adversos. No obstante, se llevaron a cabo las correcciones y controles de calidad pertinentes para garantizar la consistencia y continuidad de las series temporales. La instrumentación empleada consistió en correntímetros tipo Aanderaa RCM4/5, figura 3.34 (a). Posteriormente y desde 1989, los anteriores fueron sustituidos por una versión más moderna, RCM7/8, figura 3.34 (b). El proceso de sustitución de unos dispositivos por otros se prolongó hasta 1993.

Atendiendo principalmente a la cobertura temporal de los datos disponibles, figura 3.35, para esta sección se seleccionaron dos de las series temporales disponibles más completas. Estas son las correspondientes a 1000 y a 3000 metros de profun-

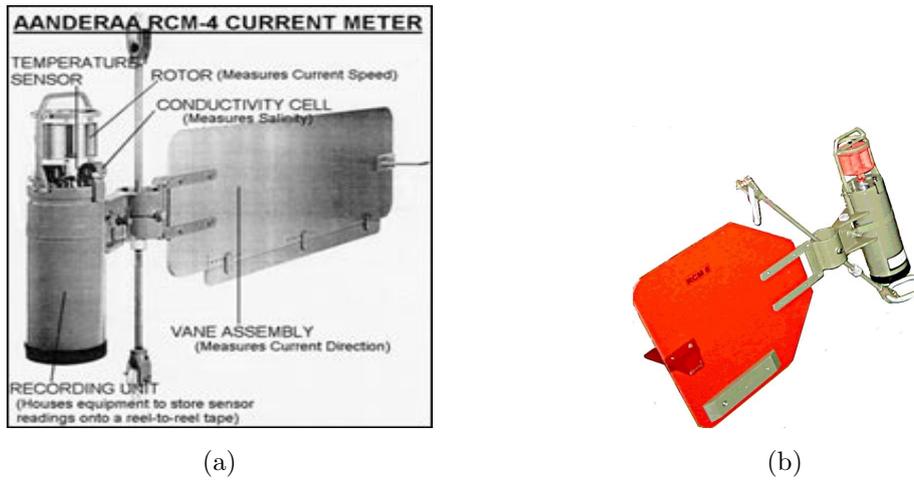


Figura 3.34: Correntímetros tipo Aanderaa RCM4/5 y RCM8. (Aanderaa Instruments)

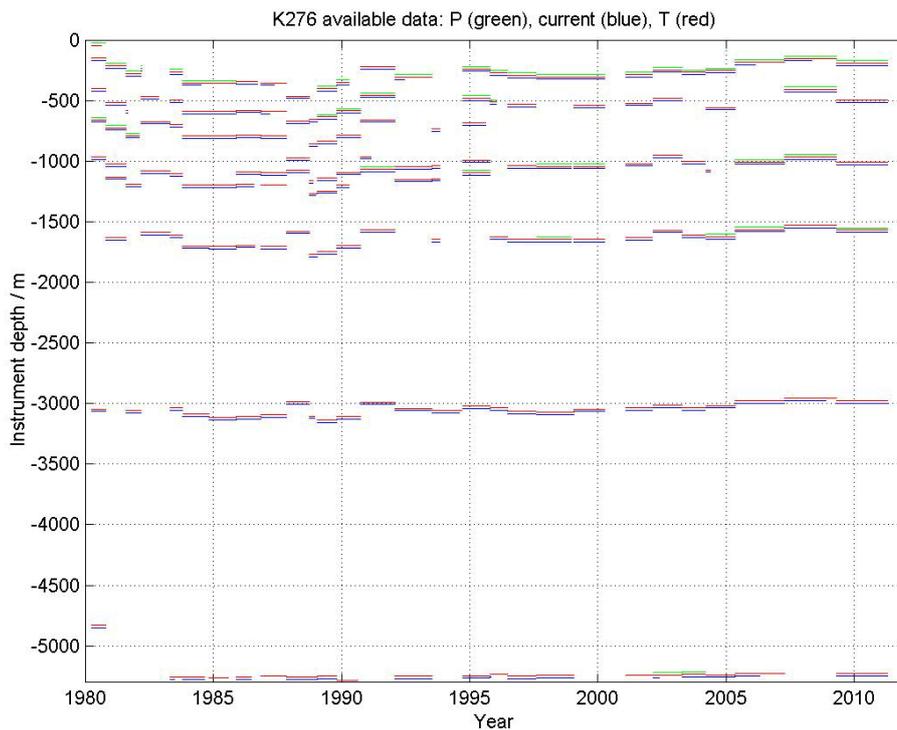


Figura 3.35: Cobertura temporal de los datos registrados en la estación KIEL276 entre 1980 y 2011. Datos de presión (en verde), vector de corriente (en azul), temperatura (en rojo) (Müller & Waniek 2013).

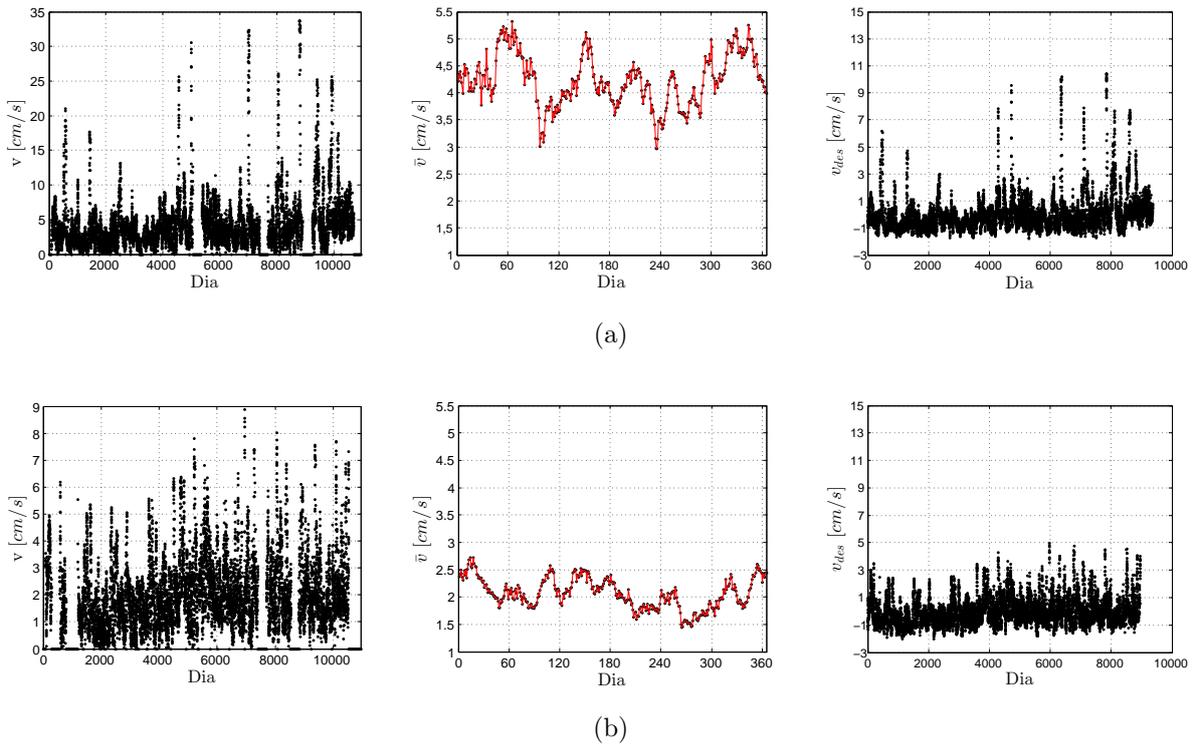


Figura 3.36: Evolución temporal, ciclo anual y serie desestacionalizada de los registros temporales de intensidad de corriente: (a) 1000 metros y (b) 3000 metros.

didad, que cubren un intervalo aproximado de 30 años, desde Abril de 1980 hasta Diciembre de 2009. En este trabajo se siguen las recomendaciones de Chen et al. (2002), y en lugar de rellenar los huecos en los registros temporales mediante algoritmos de interpolación, se juntan los trozos de la serie sin rellenar los huecos (ver sec. 2.4.5).

En la figura 3.36 se muestra la evolución temporal, el ciclo anual y la evolución temporal desestacionalizada de las series de intensidad de velocidad de corriente, a 1000 y 3000 metros de profundidad. Es evidente que los valores de la velocidad a menor profundidad son más elevados, así como su variabilidad, que es significativamente mayor a 1000 metros.

Esto pone de manifiesto una clara disminución progresiva, con la profundidad, de la importancia relativa de los procesos físicos que operan y se manifiestan en las capas superficiales del océano.

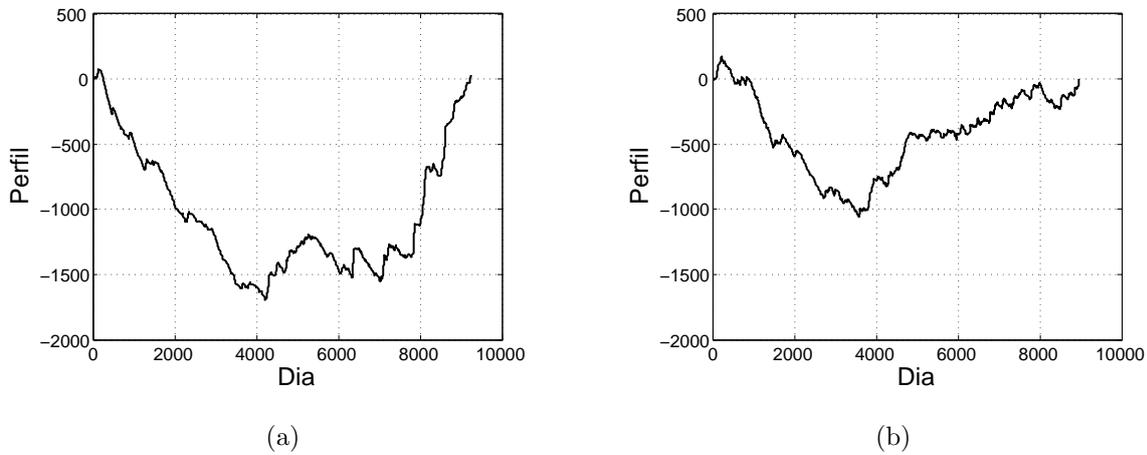


Figura 3.37: Perfiles de las fluctuaciones de las series temporales de los datos correspondientes a intensidades de velocidad de corriente a (a) 1000 metros y (b) 3000 metros de profundidad.

3.3.2. Resultados y Discusión

A continuación, se presentan los resultados del análisis fractal de las series temporales de corriente, que se ha llevado a cabo mediante el uso de los métodos *DFA* y *MFDFA*.

La figura 3.37 muestra los perfiles correspondientes a los datos de velocidad de corriente recogidos en la estación oceanográfica KIEL276. Es evidente como a 1000 metros de profundidad las variaciones son mucho más pronunciadas que a 3000 metros. Esto parece razonable, teniendo en cuenta lo comentado anteriormente, en cuanto a que la variabilidad de la velocidad de la corriente es superior a medida que nos acercamos a la superficie, donde el efecto de los procesos físicos involucrados es más relevante. En ambos casos el perfil tiene una forma cóncava, lo que según Monetti et al. (2003), puede ser un indicio tanto de la presencia de una tendencia lineal positiva como de un efecto de persistencia. En principio, el análisis previo de la evolución temporal de los datos de velocidad de corriente, no mostró una tendencia clara a lo largo del tiempo.

En el análisis monofractal, mostrado en la figura 3.38, se observa que hay un comportamiento diferente a dos escalas temporales diferentes, esto ocurre tanto para los resultados obtenidos a 1000 metros de profundidad como a 3000. Los cruces en

los ajustes lineales, se corresponden con instantes de tiempo en torno a 55 y 50 días respectivamente, y los exponentes de escala, H , que son precisamente las pendientes de dichos ajustes, se resumen en la tabla 3.7. Obsérvese como a escalas temporales entre 50 – 55 días y 7,7 años, las fluctuaciones de las velocidades de corriente se comportan como un proceso con $0,5 < H_2 < 1$, lo que es un indicio de la presencia de *d.l.p.* A escalas más pequeñas, entre 7 y 50 – 55 días, donde $H > 1$, es posible admitir que las correlaciones temporales existen pero que ya no siguen una ley de potencias. En particular, a 3000 metros de profundidad, donde $1 < H_1 < 1,5$, se puede asegurar que las correlaciones no sólo están presentes sino que incluso son más fuertes (Talkner & Weber 2000; Chen et al. 2005). Sin embargo, a 1000 metros $H_1 \sim 1,5$, que se corresponde con un movimiento tipo browniano, esto es un proceso que presenta *s.s.* pero no *d.l.p.* (Peng et al. 1995).

En cuanto a los valores absolutos de H obtenidos, es significativo el hecho de que los exponentes de escala obtenidos a 3000 metros de profundidad sean menores que los correspondientes a 1000 metros, lo cual puede estar relacionado con el cambio del número de procesos físicos involucrados, operando sobre diferentes escalas temporales, en cada caso. Ashkenazy & Gildor (2009) obtienen en cambio, un único exponente de escala al realizar el mismo análisis en series temporales correspondiente a intensidades de velocidad de corriente superficial, aproximadamente a 700 metros de profundidad. El exponente de escala que obtienen está en torno a $H \sim 0,8$. Sin embargo, la zona de estudio, el golfo de Eilat, es un mar cerrado que se comunica con el Mar Rojo, donde las condiciones oceanográficas son muy diferentes y la influencia de la costa muy importante. Además, el periodo de estudio es solo de un año y los datos tienen una resolución temporal de media hora, por lo que resulta razonable que los resultados no sean comparables.

Los resultados del análisis multifractal se muestran en la figura 3.39, donde se puede ver los espectros y las variaciones del exponente generalizado de Hurst con q correspondientes a las intensidades de la velocidad de corrientes a 1000 y 3000 metros de profundidad. Además, las medidas características realizadas sobre el espectro se resumen en la tabla 3.8. Un análisis general revela que efectivamente las series temporales de corriente exhiben un comportamiento que está gobernado por más de una escala temporal y que por tanto, los cruces observados en el análisis monofractal,

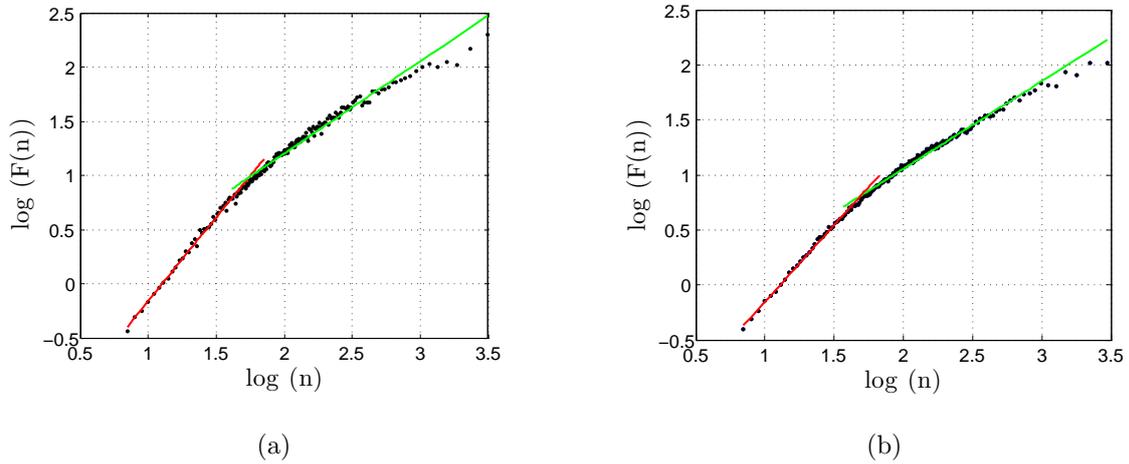


Figura 3.38: Ajustes lineales obtenidos mediante el análisis *DFA* de las series temporales de los datos correspondientes a intensidades de velocidad de corriente a (a) 1000 metros y (b) 3000 metros de profundidad.

Profundidad (metros)	1000	3000
H_1	1.54	1.39
H_2	0.85	0.79

Cuadro 3.7: Exponentes de escala obtenidos mediante el análisis *DFA* de las series temporales de los datos correspondientes a velocidades de corriente a 1000 y 3000 metros de profundidad, respectivamente.

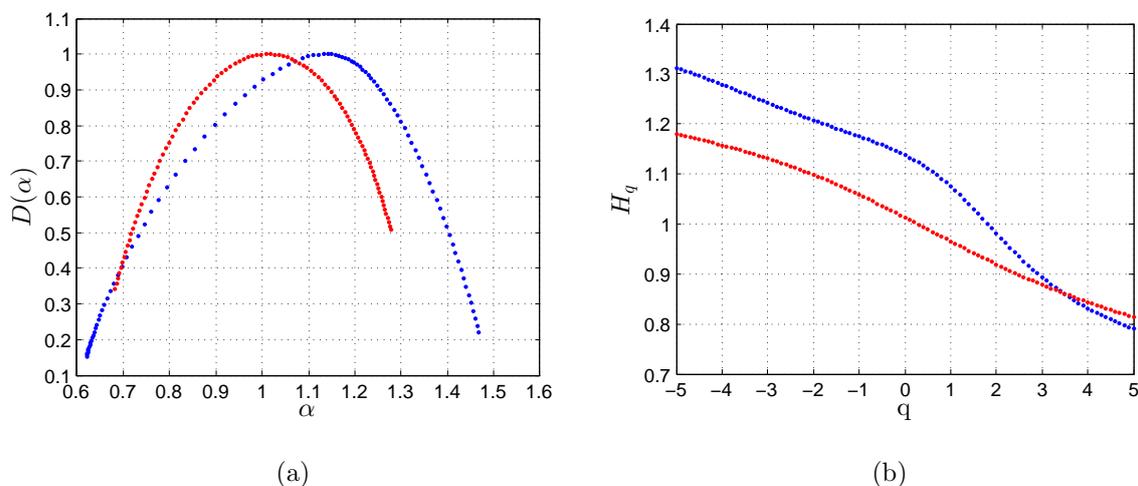


Figura 3.39: Análisis multifractal de las series temporales de los datos correspondientes a velocidades de corriente a 1000 y 3000 metros de profundidad, en azul y rojo respectivamente. (a) Espectros multifractales y (b) respectivas variaciones de H_q con q .

no se corresponden con efectos de tendencias externas u otras no estacionaridades.

Atendiendo ahora a los valores obtenidos para $\alpha_{q=0}$, se observa como la localización del máximo del espectro multifractal disminuye ligeramente con la profundidad, de forma similar a la disminución que se observó en H , en el caso del análisis *DFA*, con la profundidad.

Por otro lado, aún cuando los espectros tienen una forma similar, el correspondiente a 3000 metros de profundidad es más simétrico y menos ancho, $\Delta\alpha \sim 0,4$, mientras que a 1000 metros $\Delta\alpha \sim 0,66$. Esto respalda la idea de que el proceso es más complejo a menor profundidad, como consecuencia de la presencia de un mayor número de procesos físicos interaccionando entre sí. Hecho que también se puede apreciar en las variaciones observadas en la figura 3.39(b), donde es notable como a 3000 metros de profundidad el rango de variación de H_q es menor que a 1000 metros.

En relación a la asimetría que presentan los espectros multifractales, estos exhiben colas que son ligeramente más cortas por la parte derecha, efecto que es más significativo a 3000 metros de profundidad, lo cual es un indicio de un comportamiento multifractal que está dominado por las fluctuaciones a largo plazo.

Como ya se ha comentado en secciones anteriores, el comportamiento multifrac-

Serie Temporal	1000 m	3000 m
α_{right}	1.50	1.28
α_{left}	0.62	0.68
$\alpha_{q=0}$	1.14	1.08
$\Delta\alpha$	0.66	0.40

Cuadro 3.8: Medidas características de los espectros, obtenidas mediante el análisis *MF DFA* de los datos correspondientes a velocidades de corriente a 1000 y 3000 metros de profundidad. α_{right} y α_{left} son los límites del espectro, $\alpha_{q=0}$ es donde $D(\alpha)$ alcanza su máximo y $\Delta\alpha$ es el ancho del espectro.

tal puede ser consecuencia de contribuciones de origen lineal y/o no lineal. Así, para comprobar la intensidad de cada una sobre el comportamiento de escala de las series temporales de corriente, se emplea, en primer lugar, el método de reordenación aleatoria, con el que se eliminan las *d.l.p.* y consecuentemente, el efecto de la contribución lineal.

Los ajustes correspondientes al análisis *DFA*, figura 3.40, para las fluctuaciones de las series temporales desordenadas aleatoriamente presenta, para ambas profundidades, exponentes de escala prácticamente iguales a 0,5, por tanto las dependencias a largo plazo han desaparecido.

Para evaluar conjuntamente la importancia de las contribuciones lineal y no lineal sobre el comportamiento de escala de las intensidades de velocidad de corriente, los resultados obtenidos mediante el análisis multifractal, se presentan tanto para las fluctuaciones de la serie original, como para las series desordenadas aleatoriamente y subrogadas, figuras 3.41 y 3.42. El análisis revela que los espectros de las series desordenadas aleatoriamente, para ambas profundidades, se estrechan de manera significativa, y como la localización de los máximos de los espectros se centra en 0,5, efecto que es más evidente a 3000 metros de profundidad. En cambio, los espectros multifractales de las series subrogadas no presentan cambios tan significativos en comparación con los espectros correspondientes a las series originales. Sin embargo, en la figura 3.41(b), donde se muestran las variaciones de H_q con q , se observa como, sobre todo, para $q > 0$ existen diferencias entre las variaciones obtenidas

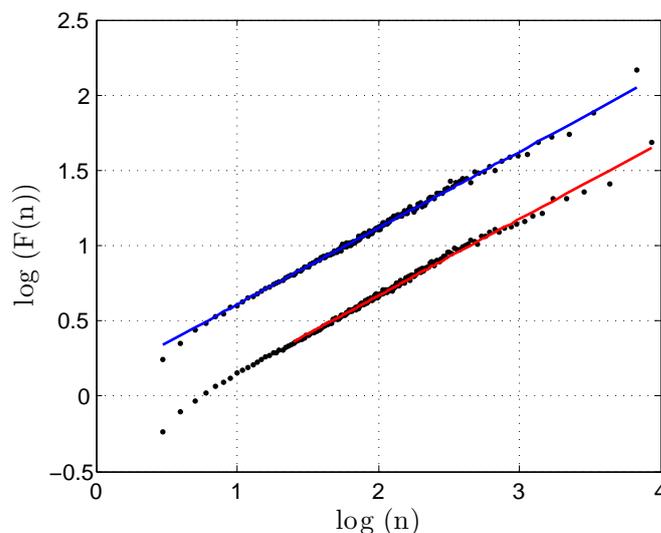


Figura 3.40: Ajustes lineales obtenidos mediante el análisis *DFA* de las series temporales desordenadas aleatoriamente correspondientes a velocidades de corriente a 1000 y 3000 metros de profundidad, en azul y rojo respectivamente, y con $H \sim 0,5$ en ambos casos.

para los datos originales y las correspondientes a los datos subrogados. Esto pone de manifiesto la posibilidad de que a 1000 metros exista una contribución no lineal, que afecta precisamente al comportamiento de escala de las fluctuaciones a largo plazo.

Atendiendo a estos resultados, parece lógico pensar que es la componente lineal la que domina el comportamiento de escala de las fluctuaciones de las intensidades de velocidad de corriente en profundidad, si bien los efectos no lineales parecen tener cierta importancia relativa a 1000 metros.

Una forma de verificar la intensidad de las contribuciones lineal y no lineal es mediante el test de las series de volatilidad.

La comparación de los resultados del análisis *DFA* obtenidos para las series de volatilidad y las series de volatilidad subrogadas correspondientes, resumidos en la tabla 3.9, muestran una ligera disminución del exponente de escala a 1000 metros de profundidad, y ninguna variación del mismo a 3000 metros. Esto parece indicar, que existe una pequeña contribución no lineal a 1000 metros de profundidad, que

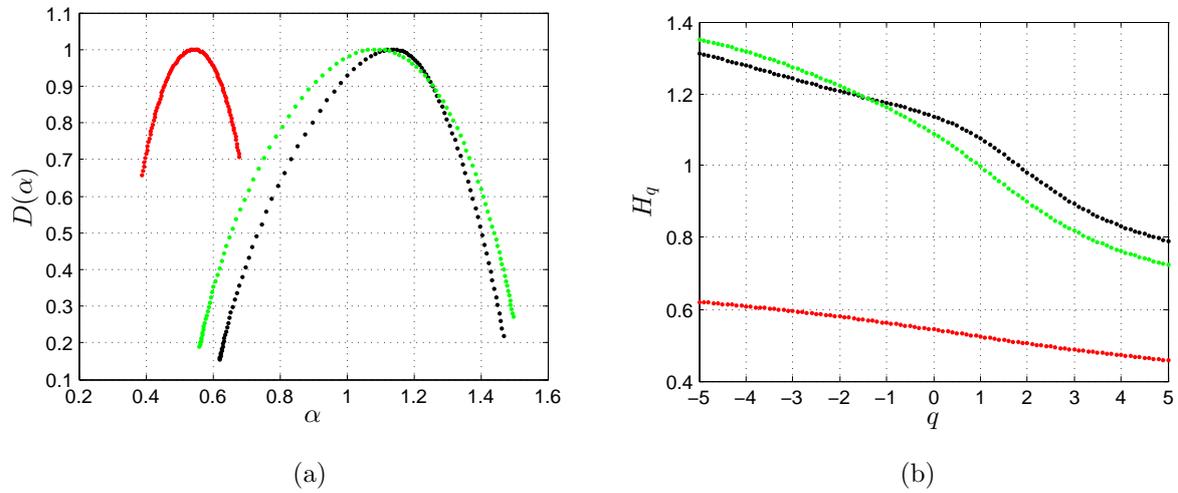


Figura 3.41: Análisis multifractal de las series temporales original, desordenada y subrogada, en negro, rojo y verde respectivamente, correspondientes a las intensidades de velocidad de corriente a 1000 metros de profundidad. (a) Espectros multifractales y (b) respectivas variaciones de H_q con q .

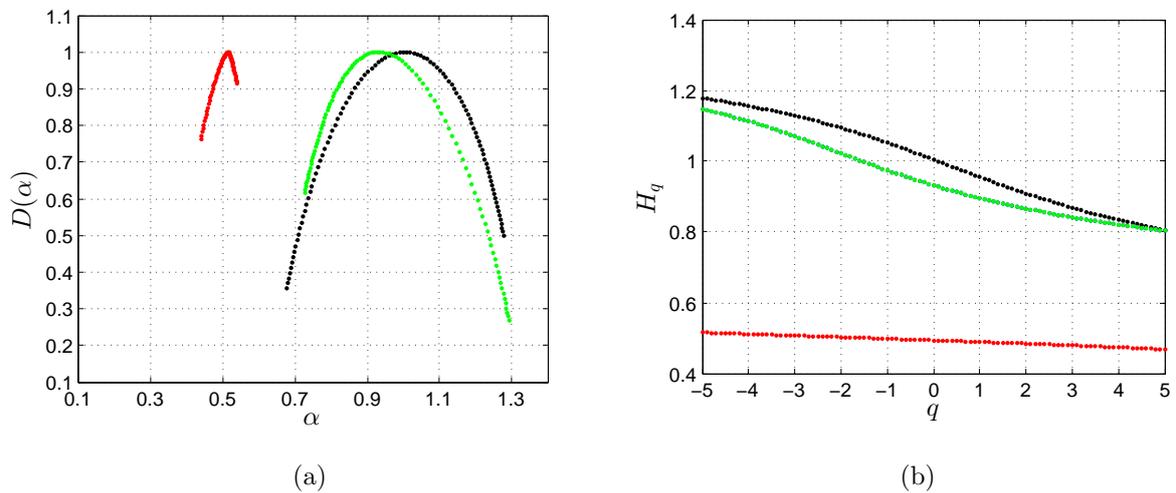


Figura 3.42: Análisis multifractal de las series temporales original, desordenada y subrogada, en negro, rojo y verde respectivamente, correspondientes a las intensidades de velocidad de corriente a 3000 metros de profundidad. (a) Espectros multifractales y (b) respectivas variaciones de H_q con q .

se refleja precisamente en la disminución de H al subrogar las series de volatilidad, mientras que a mayor profundidad no se aprecian cambios en el exponente de escala. Ashkenazy & Gildor (2009) realizan el mismo análisis obteniendo un exponente de escala en las series de volatilidad significativamente menor al de la serie original, revelando una contribución no lineal más intensa de la obtenida en este trabajo. No obstante, teniendo en cuenta que estos autores realizan el estudio para corrientes superficiales y haciendo una comparación con lo obtenido aquí, parece lógico pensar que la contribución no lineal es tanto más intensa cuanto más cerca se esté de la superficie, donde la cantidad de procesos que interactúan es significativamente mayor.

Profundidad (metros)	H^{volat}	H_{surr}^{volat}
1000 m	0.82	0.76
3000 m	0.74	0.74

Cuadro 3.9: Exponentes de escala obtenidos mediante el análisis DFA de las series de volatilidad y de las de volatilidad subrogadas de los datos correspondientes a velocidades de corriente a 1000 y 3000 metros respectivamente.

3.3.3. Conclusiones

El análisis monofractal de las series temporales de intensidad de corriente en profundidad revela un comportamiento diferente a dos escalas temporales diferentes. Entre 7 y 50 – 55 días presentan exponentes de escala $0,8 < H < 0,85$ y entre 50 – 55 días y 7,7 años $H > 1$. Estos resultados sugieren la presencia de correlaciones a largo plazo a escalas temporales hasta un mes. Para escalas temporales superiores, los valores de H obtenidos apuntan un comportamiento tipo movimiento browniano a 1000 metros de profundidad, y un proceso con *d.l.p.*, pero que ya no sigue una ley de potencias, a 3000 metros.

El análisis $MF DFA$ revela un comportamiento multifractal en las fluctuaciones de intensidad de corriente definido por más de una escala temporal, hecho que queda reflejado en los valores de $\Delta\alpha$, 0,40 y 0,66 a 1000 y 3000 metros de profundidad,

respectivamente. Asimismo, la forma del espectro indica que las propiedades de las fluctuaciones a largo plazo dominan sobre las correspondientes a corto plazo.

La evaluación de la influencia de las contribuciones lineal y no lineal sobre el comportamiento de escala de las intensidades de corriente en profundidad, ponen de manifiesto que, en general, dicho comportamiento parece estar dominado por la contribución lineal, y por tanto por las correlaciones a largo plazo. Sin embargo, cabe señalar, que a 1000 metros se obtienen resultados que apuntan a un comportamiento ligeramente más complejo, donde ambas contribuciones están presentes, aunque el efecto de la contribución no lineal sea significativamente menor.

Existe un desplazamiento del espectro multifractal hacia la izquierda a mayor profundidad. Asimismo el espectro es más ancho y asimétrico a menor profundidad, indicando un aumento de la complejidad del proceso a medida que nos acercamos a la superficie, probablemente consecuencia del aumento en el número de fenómenos físicos que están interaccionando.

3.4. Propiedades de escala de la altura de ola significativa

El término oleaje se refiere a las oscilaciones de la elevación de la superficie del mar generadas por el viento, con periodos comprendidos en el rango entre 2 y 25 segundos, aproximadamente, actuando la fuerza gravitatoria terrestre como fuerza restauradora del equilibrio en la superficie del mar. Las intensidades de dichas fluctuaciones varían en función de la intensidad del viento que las genera, del tiempo durante el cual sopla el viento sobre la superficie del mar, con intensidad y dirección aproximadamente constantes, o duración del viento, así como del espacio que recorren las mismas captando energía del viento, conocido como zona de generación o *fetch*. Así, el contenido energético que alcanza un campo de oleaje generado por un campo de vientos dado no sólo depende de la intensidad del viento que lo genera, sino también del tiempo durante el cual éste pueda transmitir energía al oleaje en su propagación dentro de la zona de generación. En consecuencia, el aumento de la intensidad del viento soplando sobre áreas de extensión creciente durante periodos cada vez más prolongados da lugar a la intensificación de la severidad del campo de oleaje resultante. El oleaje que se encuentra dentro de la zona de generación, recibiendo energía del viento de forma activa, es denominado *oleaje de viento*. Una vez que éste abandona el *fetch* deja de recibir energía del campo de vientos generador transformándose en *oleaje de fondo*.

Desde un punto puramente práctico, el estudio del oleaje resulta de gran interés en campos como la ingeniería naval, la ingeniería oceanográfica y de costas, por representar el fenómeno más energético que ejerce esfuerzos sobre las estructuras o sistemas desarrollados en dichos campos (Tucker & Pitt 2001). Por otro lado, el oleaje es uno de los mecanismos más importantes en el control de la transferencia de energía y materia en la interfase entre la atmósfera y el océano, desempeñando por tanto un papel esencial en el comportamiento de la atmósfera (Babanin 2011).

Desde una perspectiva puramente científica, el conocimiento de los mecanismos de generación, propagación y disipación del oleaje, representan un reto para el hombre y conllevan la mejora en la capacidad de predicción de este fenómeno extremadamente complejo. No obstante, todos estos aspectos de la dinámica del oleaje consti-

tuyen procesos no lineales altamente complejos, resultantes de la energía transferida desde un campo de vientos hacia la superficie del mar, a través de mecanismos físicos que implican un fuerte acoplamiento entre las capas límite atmosférica y oceánica. Parte de la energía transferida por la atmósfera al campo de oleaje es almacenada por éste para su generación y crecimiento, mientras que otra parte resulta disipada en forma de turbulencia. Por otro lado, la energía captada por determinadas componentes del oleaje es redistribuida lentamente entre diferentes componentes, mediante interacciones no lineales, posibilitando un crecimiento adicional significativo del contenido energético del campo de oleaje (Komen et al. 1994; Janssen 2009). La estructura tan compleja del proceso resultante hace que éste sea considerado como un fenómeno físico de naturaleza aleatoria, con propiedades diferentes en función de las escalas espaciales y temporales consideradas.

Las propiedades estadísticas características del oleaje pueden ser consideradas como temporalmente estacionarias y espacialmente homogéneas sobre determinadas escalas temporales y espaciales. En particular, cada uno de los periodos durante el cual las condiciones de oleaje permanecen localmente estacionarias recibe el nombre de *estado de mar*. Esto permite definir diferentes parámetros integrales de altura, periodo y dirección del oleaje, característicos de cada estado de mar, que varían lentamente a escalas temporales y espaciales superiores. El análisis del comportamiento estocástico de estos parámetros característicos de múltiples estados de mar individuales, sobre periodos de tiempo mucho más extensos, representa la descripción de las condiciones de oleaje denominada generalmente como análisis a largo plazo, que es la de mayor interés práctico.

El parámetro más frecuentemente utilizado para caracterizar las condiciones de oleaje durante un estado de mar es la altura de ola significativa, denotada como H_s , o también como $H_{1/3}$. Esta última notación deriva de su definición como el valor medio del tercio de olas más altas presentes en un registro obtenido durante un determinado estado de mar. Esta altura de ola es similar a la altura de ola que un observador experimentado asignaría a la altura de ola predominante durante el periodo en el que realiza observaciones visuales de las condiciones de oleaje. Por otra parte, la altura de ola significativa también puede ser estimada a partir del espectro direccional del oleaje, función que permite identificar las direcciones de procedencia

y las frecuencias asociadas a las diferentes componentes armónicas que se asumen dan lugar, mediante superposición lineal, al campo de oleaje observado. En tal caso, su valor es obtenido como cuatro veces la raíz cuadrada del momento espectral de orden cero y la notación empleada para denotar dicho parámetro es H_{m_0} . En teoría, la correspondencia entre H_{m_0} y $H_{1/3}$ es válida para procesos de banda estrecha. Sin embargo, en la mayoría de los casos las diferencias no alcanzan el 5% (WMO 1998).

Dado el interés existente en poder predecir condiciones extremas de oleaje sobre periodos de tiempo del orden de decenas y centenas de años, partiendo de registros de duración sustancialmente inferior, y el gran esfuerzo realizado con dicho fin durante varias décadas, haciendo uso de técnicas de análisis estadístico de valores extremos, Feder (1988) señala que efectivamente estas predicciones deben estar basadas en la comprensión del comportamiento estadístico de las series de altura de ola significativa y que, en consecuencia, resulta de gran interés examinar si éstas poseen una estructura fractal. Así, dicho autor analiza una serie de alturas de ola significativa, H_s , registrada en el mar de Noruega (Tromsøflaket), cada tres horas durante el periodo 1980-1983, empleando el método R/S, y observa un punto de transición en torno a los 10-20 días, delimitando dos comportamientos claramente diferenciados para escalas temporales inferiores y superiores. Para escalas temporales hasta los 10-20 días observa un comportamiento persistente, con un valor del exponente de Hurst $H \approx 0,98$, mientras que para periodos superiores el comportamiento es completamente aleatorio, con $H \approx 0,52$ (indistinguible de 0,5). Estos resultados fueron corroborados aplicando la metodología *box-counting*.

Partiendo de una serie temporal de valores medios diarios de H_{m_0} , resultantes del promedio de valores horarios registrados durante 12 años (1988-2009) en aguas profundas (382 metros) fuera del Cabo de Estaca de Bares, Coruña, al noroeste de España, Cabrera & Rodríguez (2011) aplican la metodología *DFA* y observan la existencia de dos puntos de cruce en la representación doblemente logarítmica de la función de fluctuaciones frente a la escala temporal. Estos puntos evidencian la presencia de tres escalas temporales con diferentes valores del parámetro H . Para escalas de aproximadamente 10 días, el proceso muestra un comportamiento con $H = 1,36 > 1$, que presenta un efecto de *d.l.p.* pero cuyas correlaciones ya no siguen una ley de potencias (Talkner & Weber 2000; Chen et al. 2005). Sin embargo,

como ya se ha comentado en secciones anteriores, los casos donde $1 < H < 1,5$ presentan en la bibliografía una gran diferencia en los criterios, así $H = 1$ es un caso especial que sigue un comportamiento tipo $1/f$, (ver sección 2.4.3). Entre 10 y 110 días, aproximadamente, el proceso presenta correlaciones persistentes a largo plazo, $H = 0,79$, según la ecuación 2.49. Mientras que para escalas superiores, se admite que el proceso adquiere una estructura temporal completamente aleatoria, con $H = 0,47$. Aunque, que dicho valor podría indicar una transición desde un régimen persistente a otro antipersistente, resulta difícil admitir una diferencia estadísticamente significativa entre dicho valor y 0,5.

Roman et al. (2008), con el fin de examinar la existencia de correlaciones a largo plazo en series de H_s , analizan la estructura de una serie temporal de valores dicho parámetro registrados cada 30 minutos en una estación cerca de la costa italiana, en el Adriático Central, durante un periodo de cinco años (1993-1997), aplicando la metodología *FA* (Peng et al, 1994). Los resultados revelan que para escalas de tiempo inferiores a 1 día el parámetro de Hurst adopta un valor $H \approx 0,97$, indicando la presencia de fuertes auto-correlaciones en dicho rango de periodos, aunque también se pondría admitir que $H \sim 1$ y que por tanto, el sistema sigue un comportamiento tipo $1/f$ (ver sección 2.4.3). El rango de periodos comprendidos entre 1 y 20 días, aproximadamente, se encuentra delimitado por dos puntos de cruce en las citadas escalas temporales, con una pendiente $H \approx 0,6$ correspondiente a un régimen persistente. Para escalas superiores a las del punto de cruce localizado en torno a los 20 días la serie de H_s presenta un valor $H \approx 0,3$, lo cual podría indicar un comportamiento anti-persistente. Es decir la existencia de anticorrelaciones en las fluctuaciones de H_s sobre escalas de tiempo superiores a los 20 días, aproximadamente.

Con la misma finalidad que los estudios antes citados, Ozger (2011a) examina las propiedades de escala de series de altura de ola significativa horarias de duración entre 2 y 9 años, haciendo uso de la técnica *DFA*. Las series temporales de H_{m_o} analizadas corresponden a 25 estaciones de medida de oleaje ubicadas en aguas de profundidad variable, entre 50 y 4600 metros, aproximadamente, fuera de la costa Oeste de los Estados Unidos. Los resultados revelan que en el rango de escalas considerado, entre horas y meses, existe un comportamiento similar en todas las estaciones examinadas. En concreto, es posible observar dos escalas temporales cla-

ramente diferenciadas a ambos lados de un punto de cruce localizado entorno a los 4-5 días. Para escalas inferiores, los valores del exponente de Hurst oscilan entre 1,35 y 1,5, indicando un comportamiento con $1 < H < 1,5$, mientras que para escalas superiores los valores H oscilan entre 0,68 y 0,91, sugiriendo un comportamiento del tipo ruido $1/f$ (ver sección 2.4.3).

Es interesante notar que, en general, y a pesar de emplear datos registrados en regiones oceánicas diferentes, los pocos estudios realizados al respecto revelan comportamientos con tendencias similares, aunque existen algunas diferencias apreciables. En general, para escalas temporales inferiores a unos pocos días, entre 5 y 20, aproximadamente, se aprecia un comportamiento con $H \geq 1$, mientras para escalas significativamente elevadas, los resultados sugieren un comportamiento totalmente aleatorio, o incluso antipersistente. No obstante, algunos de los resultados comentados ponen de manifiesto un rango de escalas intermedio, entre unos pocos días y 1 o 2 meses, en el que el proceso presenta dependencias a largo plazo persistentes, con valores de H entre 0,6 y 0,8, aproximadamente.

Entre otros factores, las diferencias observadas entre los diferentes trabajos podrían ser atribuidas a aspectos como las diferencias en duración (entre 2 y 12 años), al intervalo entre datos (desde 1/2 hasta 24 horas) y, especialmente, a la presencia de huecos en las series empleadas que, aunque en algunos casos no se menciona, con toda seguridad está presente en todos los casos. En los casos en los que se cita este problema, se han adoptado dos alternativas diferentes. Ozger (2011a) restringe el uso de las series disponibles a aquellas en las que el porcentaje de datos perdidos sea inferior al 10 % y los huecos de duración inferior a 5 días. Para los registros que verifican estas condiciones emplea un modelo ARMA(3,3) para rellenar los huecos. Por el contrario, Cabrera & Rodríguez (2011), siguiendo las recomendaciones de Chen et al. (2002), utilizan el procedimiento de juntar los trozos de la serie sin rellenar los huecos (ver sec. 2.4.5).

Los estudios previamente citados asumen una estructura monofractal. Sin embargo, sus resultados indican la presencia de al menos uno o dos puntos de cruce entre diferentes comportamientos de escala, sugiriendo una naturaleza multifractal del fenómeno. El único estudio existente hasta el momento, en conocimiento del autor, en el que se examina la naturaleza multifractal de las series temporales de altura

de ola significativa, H_{m_0} , se debe a Ozger (2011b). Este autor, emplea el método conocido como *Wavelet transform modulus maxima*, *WTMM*, (Muzy et al, 1991, 1993, 1994), para derivar el espectro multifractal de 24 series horarias de altura de ola significativa, registradas en la costa oeste de Estados Unidos, con una duración promedio de unos 3-4 años, aunque oscila entre 2 y 9 años. Al igual que en su estudio monofractal, (Ozger 2011a), las series presentan huecos que rellena empleando un modelo ARMA(3,3). Los resultados del estudio revelan que el espectro multifractal varía con la posición geográfica, de modo que los parámetros característicos del espectro en cada punto de medida toman valores diferentes. Además, Las estaciones ubicadas en aguas más profundas, *offshore*, presentan exponentes de escala más altos que en las estaciones costeras. Según el autor, este hecho podría estar relacionado con los mecanismos de generación del oleaje. En particular, dado que las estaciones *offshore* pueden recibir mas *swell* que las costeras y están expuestas a tormentas a gran escala, tienden a ser más persistentes y presentar exponentes mayores.

3.4.1. Zona de estudio y Datos

La serie de alturas de ola significativa empleadas en esta sección fue registrada mediante una boya acelerométrica en las proximidades del campo de extracción petrolífero denominado Haltenbanken, de modo que la estación de medida recibe el mismo nombre. Esta zona se encuentra localizada en el Mar de Noruega, Atlántico Norte, bastante más al sur de la estación (Tromsøflaket) empleada por Feder (1988), figura 3.43.

Esta zona se encuentra inmersa en el denominado cinturón de tormentas del Atlántico Norte, entre los 40°N y 65°N aproximadamente. En la figura 3.44 se muestra la intensidad y dirección media del viento sobre el océano a escala global, durante los periodos de verano e invierno, obtenidos por Semedo et al. (2011) haciendo uso de la base de datos de reanálisis ERA-40. En dicho trabajo se pone de manifiesto que el océano global está dominado por el oleaje de fondo, el cual transporta la mayor parte de la energía presente en la superficie del océano. Además observan que la probabilidad de encontrar condiciones de predominio de oleaje de fondo es sustancialmente superior a la de observar situaciones en las que predomina el oleaje de viento, incluso en zonas de latitudes medias y altas, a lo largo de las trayectorias

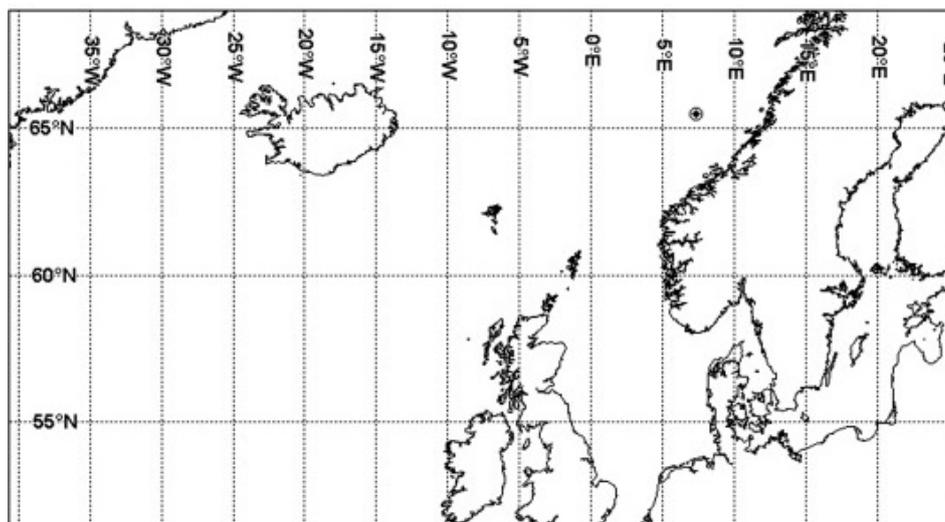


Figura 3.43: Localización de la boya en Haltenbanken. (Mazas & Hamm 2011)

de las tormentas extratropicales, donde las velocidades del viento y la intensidad de la altura de ola de la componente de viento del oleaje son mayores. Por otra parte, observan un marcado carácter estacional de las velocidades y direcciones del viento, así como de la altura y el periodo del oleaje resultante, especialmente en el hemisferio Norte.

Semedo et. al (2011) presentan un estudio más detallado de las condiciones de viento y de oleaje, tanto de fondo como de viento, en la zona del Mar de Noruega y mares adyacentes, haciendo uso de los resultados del estudio de reanálisis de alta resolución *Norwegian Reanalysis 10 km*, denominado como NORA10.

En la figura 3.45 se muestran las condiciones medias de intensidad y dirección en dichas zonas durante el invierno y el verano. Resulta fácil apreciar el comportamiento estacional antes citado, aunque algo menos pronunciado que en el océano abierto. Además, es notable como en la zona al sureste del dominio, entre Islandia y Escocia, la intensidad de los vientos es mayor y la dirección media está orientada hacia el Mar de Noruega. Esto es debido, al menos en parte, a que el Mar de Noruega constituye la trayectoria preferente de las tormentas extratropicales en el Atlántico Norte (Chang et al. 2002).

En general, al sur de Islandia los vientos superficiales soplan predominantemente desde el suroeste, girando ligeramente en sentido antihorario al entrar al Mar de Noruega, tanto en invierno como en verano. Al norte de los 68°, aproximadamente, el

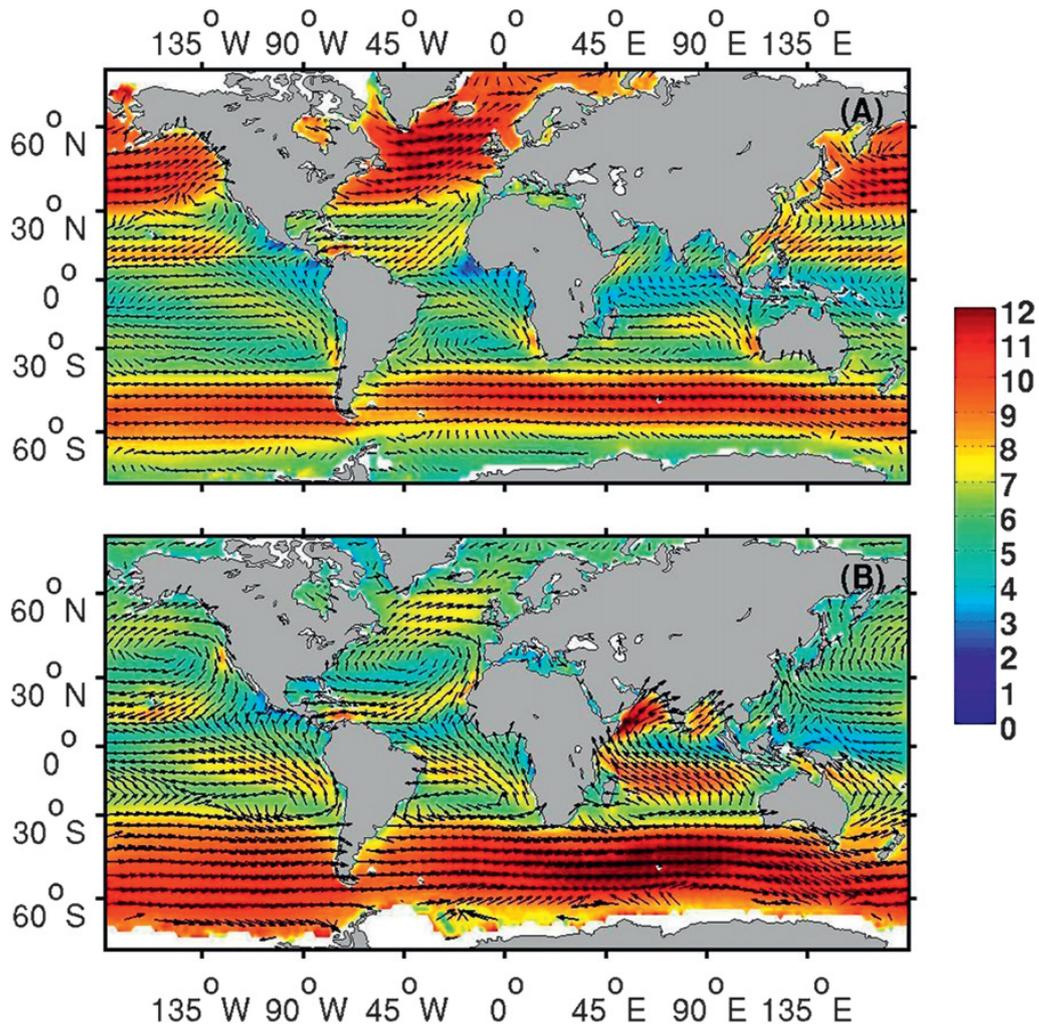


Figura 3.44: Condiciones medias de intensidad y dirección del viento sobre el océano en invierno (a) y verano (b) (Semedo et al. 2011).

viento sopla desde el noreste, como parte de los vientos polares del este, delimitando el frente polar en dicho área, tanto en verano como en invierno. Mientras que tanto los vientos del suroeste como los del noreste pueden generar oleaje de viento sobre el mar de Noruega, los primeros generan campos de oleaje en océano abierto que se propagan hacia el interior del Mar de Noruega en forma de oleaje de fondo. Estos hechos quedan reflejados en la figura 3.46, en la que se muestran las condiciones medias de oleaje total, de fondo y de viento, durante el verano y el invierno.

En océano abierto, la altura de ola significativa asociada al oleaje de fondo es mayor que la correspondiente al oleaje de viento. Sin embargo, esto no es necesariamente cierto dentro del Mar de Noruega, debido a la limitación de las zonas de

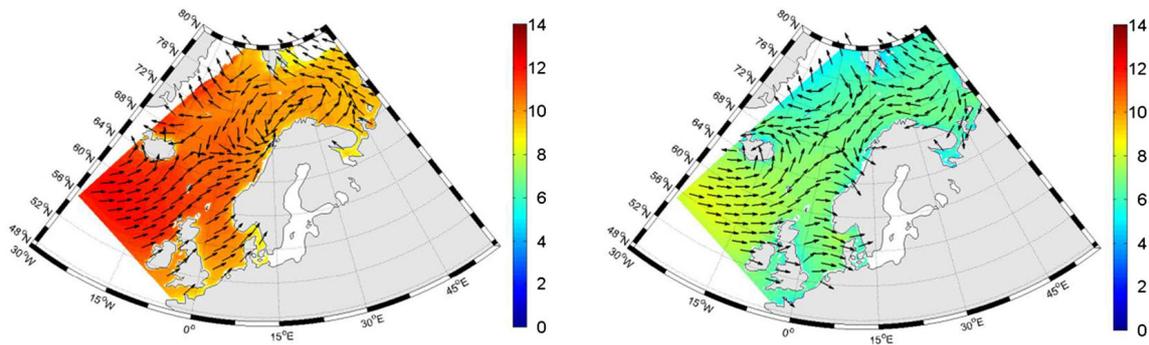


Figura 3.45: Condiciones medias de intensidad y dirección del viento en el Mar del Norte en invierno y verano. Los vectores de dirección no están a escala con los valores de intensidad (Semedo et al. 2015).

generación de oleaje y a los efectos de bloqueo ejercidos por Islandia, el Reino Unido, Las Islas Shetland y las Faroe. Así, tanto en invierno como en verano el oleaje dominante es oleaje de fondo, propagándose en dirección Noroeste, mientras el oleaje de viento, en general menos intenso, puede ser generado por los vientos que soplan dentro del Mar de Noruega en dirección Noroeste, como aquellos soplando desde el Noreste. No obstante, aunque la altura de ola resultante disminuye dentro del Mar de Noruega, respecto a la observada en el océano abierto en las aguas entre Islandia y el Reino Unido, esta alcanza valores que oscilan entre 3-4 metros durante el invierno y en el rango entre 1-2 metros en verano. Bajo condiciones extremas la situación cambia notablemente. Así, durante los temporales generados por tormentas que se propagan fundamentalmente desde el sur de Islandia hacia el interior del Mar de Noruega, el oleaje de viento es claramente predominante y alcanza valores de altura significativa en torno a los 11 metros con periodos de retorno de 1 año, mientras que el periodo de retorno asociado la altura de 12 metros es de unos 5 años (Mazas & Hamm 2011).

Los datos de altura de ola significativa empleados en esta sección consisten en una serie temporal de 9 años de duración (1980-1988), registrados en la estación en Haltenbanken, ver figura 3.43, cerca de la costa Noruega ($65,5^{\circ}\text{N}$ y $7,34^{\circ}\text{E}$), en aguas de profundidad en torno a los 280 metros. Los datos originales, estimados cada tres horas, han sido promediados para obtener un valor medio diario. El valor máximo de H_s registrado durante este periodo es de 12.5 metros. Los huecos presentes en

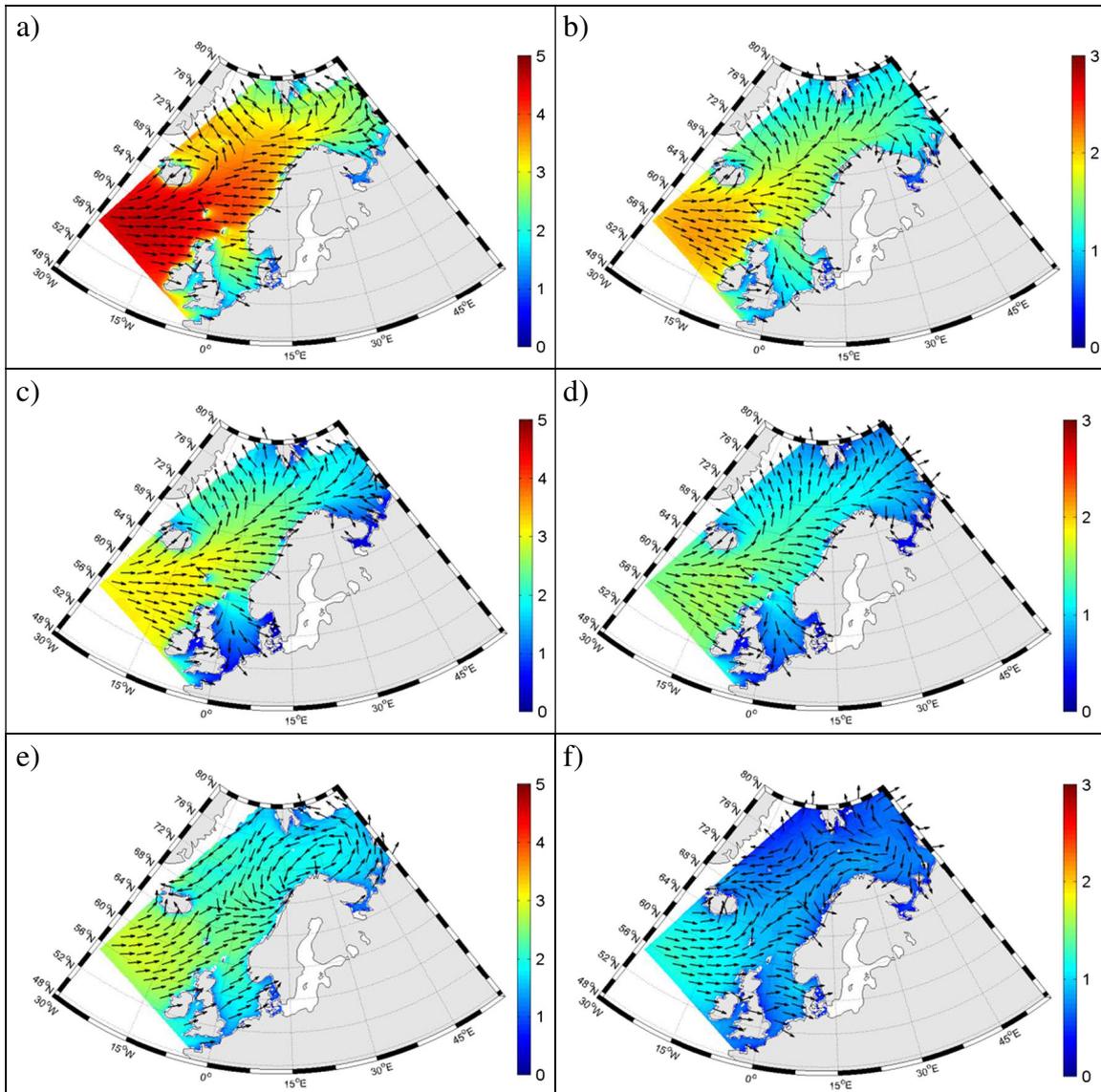


Figura 3.46: Condiciones medias de oleaje en el Mar de Noruega: Altura de ola significativa y dirección media total en invierno (a), verano (b). Altura significativa y dirección media del oleaje de fondo en invierno (c) y verano (d). Altura significativa y dirección media del oleaje de viento en invierno (e) y verano (f). Los vectores de dirección no están a escala con los valores de intensidad (Semedo et. al 2015).

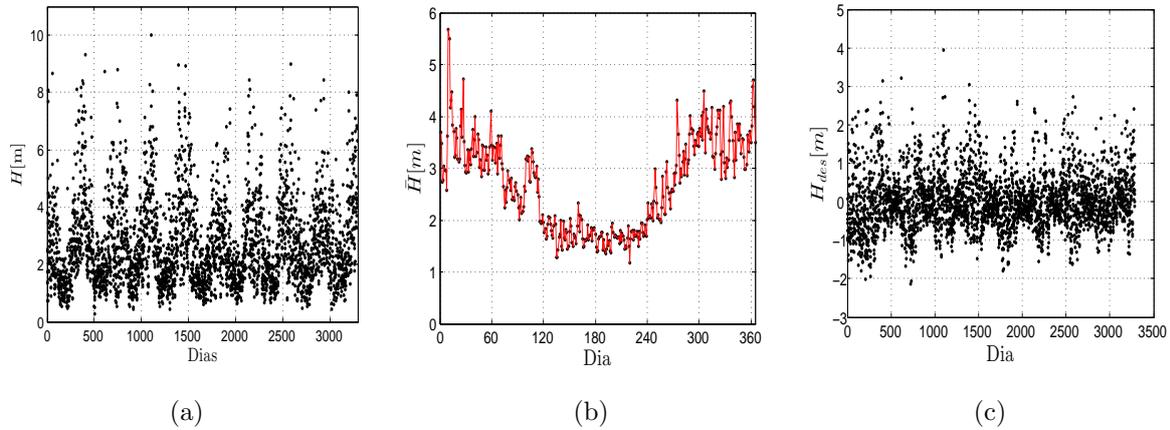


Figura 3.47: Desarrollo temporal del registro de alturas de ola: (a) Serie temporal original, (b) ciclo anual y (c) serie desestacionalizada.

la serie temporal se rellenaron con modelos de retrosección mediante interpolación lineal (Eide et al. 1986). La calidad de los datos de dicha serie queda refrendada por el elevado número de estudios en los que ha sido empleada, en el contexto del análisis extremal del oleaje. En particular, esta serie de datos ha sido utilizada como serie de referencia por el grupo de trabajo especializado en análisis extremal del oleaje de la *IAHR Working Group on Extreme Wave Analysis* (van Vledder et al. 1994).

En la figura 3.47 se muestra tanto la evolución temporal de la serie original de alturas de ola, como su ciclo anual y la serie desestacionalizada. Un simple análisis visual revela la presencia de un patrón más o menos regular en la serie original, un ciclo anual. Éste presenta alturas de ola que son significativamente mayores en los meses de primavera e invierno, por encima de los 4 metros, que en los meses de verano y otoño, que difícilmente superan los 2 metros.

3.4.2. Resultados y Discusión

En esta sección se presentan los resultados obtenidos para el análisis fractal de las series temporales de alturas de ola en la región oceanográfica ya descrita. De forma análoga a las secciones anteriores, el objetivo es evaluar el comportamiento de escala de dichos registros y analizar el origen del mismo.

En la figura 3.48(a) están representados los perfiles correspondientes a la serie

DFA	H	H ^{da}
	0.89	0.48

Cuadro 3.10: Exponentes de escala obtenidos mediante el análisis *DFA* para la serie temporal original y desordenada aleatoriamente (da) de alturas de ola.

original y a la serie desordenada de manera aleatoria. El análisis conjunto sugiere la presencia de un efecto de *d.l.p.*, y no de tendencias lineales, que desaparece al desordenar la serie temporal y se refleja en la disminución de las variaciones del perfil. Los ajustes derivados del análisis *DFA*, obtenidos también para las fluctuaciones de la serie original y de la serie desordenada aleatoriamente, se muestran en la figura 3.48(b) y los exponentes de escala, H , correspondientes, están resumidos en la tabla 3.48.

En base a los valores de H obtenidos es fácil comprobar como las fluctuaciones de la serie original exhiben un efecto de *d.l.p.* con $H = 0,89$, cubriendo un intervalo temporal que va desde los 10 días hasta los 2.3 años. Este efecto desaparece al realizar el mismo análisis a la serie desordenada, que da como resultado $H \sim 0,5$, lo que está de acuerdo con lo obtenido previamente en el perfil. Sin embargo, los estudios realizados en este mismo contexto, obtienen que las fluctuaciones de altura de ola presentan un comportamiento diferente a escalas temporales diferentes (Feder 1988; Cabrera & Rodríguez 2011; Roman et al. 2008; Ozger 2011a; Ozger 2011b), aunque cabe destacar que dichos estudios se realizan en regiones oceanográficas diferentes y sobre escalas temporales sustancialmente diferentes, además de contar con series temporales muy reducidas y en todos los casos incompletas.

Independientemente de los resultados obtenidos en el análisis monofractal, ya se ha comentado que lo normal es que los procesos naturales presenten un comportamiento complejo gobernado por más de un exponente de escala. Por tanto, parece razonable evaluar el comportamiento multifractal de los registros de altura de ola, así como la influencia de las contribuciones lineal y no lineal a la dinámica del proceso.

La figura 3.49(a), muestra los espectros multifractales de la serie original, de la desordenada aleatoriamente y de la subrogada obtenidos mediante el *MF DFA*. En

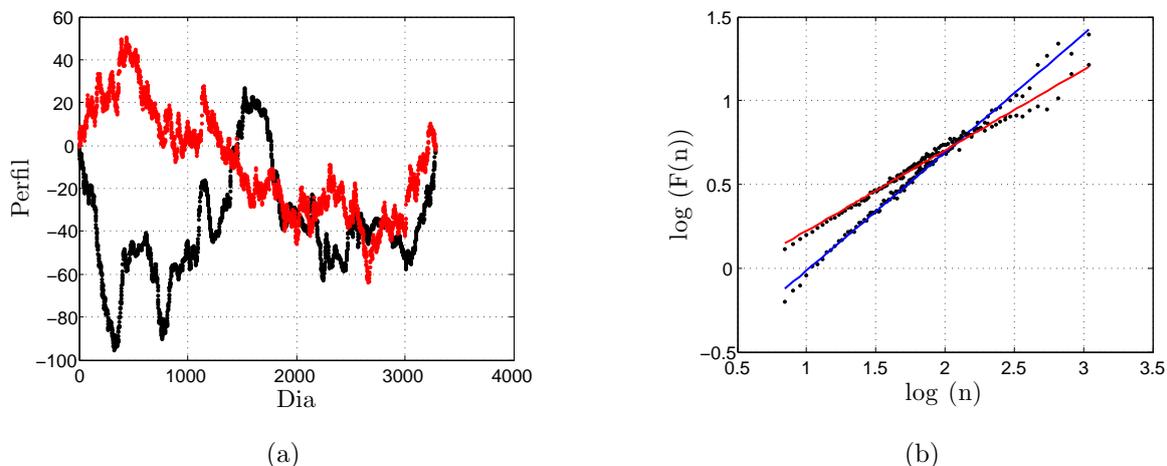


Figura 3.48: Análisis *DFA* de las series temporales de alturas de ola: (a) Perfiles de las series original y desordenada aleatoriamente, en negro y rojo respectivamente y (b) ajustes lineales de las fluctuaciones frente al intervalo temporal de las series original y desordenada aleatoriamente, en azul y rojo respectivamente.

primer lugar, cabe destacar que efectivamente las fluctuaciones de los registros de altura de ola presentan un comportamiento multifractal, ya que $\Delta\alpha \sim 0,2$, que es un valor sustancialmente más pequeño que los obtenidos por Ozger (2011b), pero suficientemente elevado para considerar que el comportamiento aquí obtenido no es monofractal, 3.49(a) línea azul. Este hecho viene respaldado por la figura 3.49(b), que muestra como las variaciones de H_q con q van desde valores por debajo de 0,7, para fluctuaciones a largo plazo, hasta aproximadamente 0,85, para fluctuaciones a corto plazo. En cuanto a la forma, el espectro multifractal original exhibe una cola más larga a la derecha, lo que indica que los registros de altura de ola presentan un comportamiento que está más influenciado por las fluctuaciones a corto plazo, hecho que también se pone de manifiesto en el estudio desarrollado por Ozger (2011b). Sin embargo, en relación a la localización de los máximos de los espectros multifractales obtenidos por este autor, cabe señalar que obtiene valores por debajo de 0,5, lo que implica que las series temporales de altura de ola presentan un comportamiento antipersistente. Feder (1988), Cabrera & Rodríguez (2011), Roman et al. (2008) y Ozger (2011a), aunque únicamente realizan un análisis monofractal, observan que $H > 0,5$ siempre.

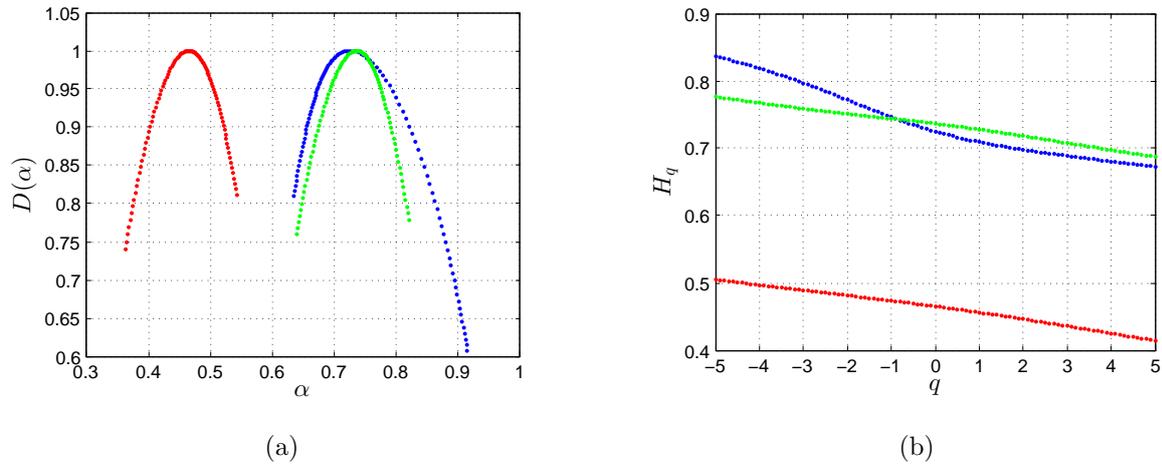


Figura 3.49: Análisis *MF DFA* de las series temporales de alturas de ola: (a) Espectros de las series original, desordenada aleatoriamente y subrogada, en azul, verde y rojo respectivamente. (b) Dependencia de H_q con q de las series original, desordenada aleatoriamente y subrogada, en azul, verde y rojo respectivamente.

Por otro lado, en el análisis conjunto de los espectros multifractales representados en la figura 3.49(a), es fácil comprobar el cambio que sufre el espectro al desordenar la serie temporal aleatoriamente (línea roja), como cabía esperar de los resultados derivados del *DFA*. Es decir, el efecto de la contribución lineal, y por tanto de las *d.l.p.*, parece ser significativo en el comportamiento de escala de las series temporales de altura de ola. Sin embargo, el espectro y la variación de H_q de la serie subrogada también cambian en comparación con lo obtenido para la serie original. Así, se puede ver como el espectro se estrecha ligeramente y como las variaciones de H_q con q son del mismo orden que las que muestra la serie desordenada de forma aleatoria. Incluso, nótese como dichas variaciones son mayores para $q < 0$, sugiriendo que el efecto debido a la contribución no lineal es más significativo en el comportamiento de escala de las fluctuaciones a corto plazo.

Para verificar la presencia e influencia que ejercen las contribuciones lineal y no lineal sobre las fluctuaciones de las series temporales de altura de ola se emplea el test de volatilidad. Los ajustes lineales que se obtuvieron para las fluctuaciones de las series de volatilidad de altura de ola se muestran en las figuras 3.50(a) y (b). El exponente resultado del primer ajuste, $H = 0,92$, verifica que el origen del compor-

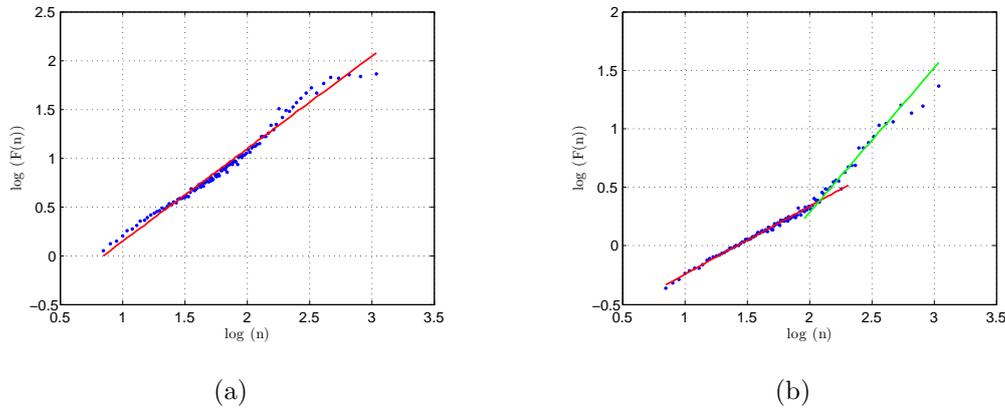


Figura 3.50: Análisis *DFA* de las series de volatilidad de los datos temporales de alturas de ola: (a) Ajuste para las fluctuaciones de la volatilidad frente al intervalo temporal. (b) Ajuste para las fluctuaciones de la serie de volatilidad subrogada frente al intervalo temporal.

tamiento es efectivamente multifractal. Por otro lado, el mismo análisis aplicado a las series de volatilidad subrogadas presenta dos comportamientos diferentes a dos escalas temporales diferentes, $H_1 = 0,5$ y $H_2 \sim 1,2$. Así y en concordancia con lo obtenido anteriormente, a escalas por debajo de aproximadamente 120 días es el efecto no lineal es el que domina el comportamiento multifractal, mientras que a escalas temporales superiores, donde $H_2 > 1$, es la componente lineal, y por tanto las *d.l.p.*, la que influye en el comportamiento de escala de las fluctuaciones de las series temporales de altura de ola.

3.4.3. Conclusiones

Los resultados generales del análisis fractal para las fluctuaciones de las series temporales de altura de ola sugieren que, en principio, no sólo existe un efecto de *d.l.p.* sino que además e independientemente de lo obtenido en el análisis monofractal y según la forma del espectro multifractal, el comportamiento de las fluctuaciones se comporta diferente a diferentes escalas temporales. Además, la forma del espectro multifractal muestra una forma ligeramente asimétrica, indicando un comportamiento de escala dominado por las fluctuaciones a corto plazo.

La evaluación de las contribuciones lineal y no lineal revela la presencia tanto de

efectos lineales como no lineales.

El test de volatilidad además de poner de manifiesto el origen multifractal de las series temporales, revela que los efectos no lineales son más influyentes en las fluctuaciones a corto plazo, mientras que a largo plazo domina la componente lineal y por tanto, las *d.l.p.*

Capítulo 4

Conclusiones y líneas de investigación futuras

En general, el análisis fractal de los parámetros oceanográficos seleccionados en este trabajo revela que el comportamiento de escala de los fenómenos oceánicos está dominado por la presencia de dependencias a largo plazo. La complejidad de los procesos se pone de manifiesto a través de una estructura multifractal, resultado de la interacción de diversos fenómenos operando sobre diferentes escalas temporales. Tanto las estructuras monofractales como multifractales muestran una clara dependencia con la localización geográfica. Asimismo, cabe mencionar que, los procesos exhiben una ligera contribución no lineal que afecta a las propiedades de escala, aunque con menor importancia relativa que las correlaciones temporales.

En particular, en los registros de temperatura superficial del mar, *SST*, se observa que la elección del tamaño de la ventana, al emplear información espacial procedente de sensores remotos, no afecta, cualitativamente, al comportamiento a largo plazo de las series temporales. Por otra parte, la evaluación del análisis monofractal de la *SST*, en el área oceanográfica del Atlántico Norte, pone de manifiesto una distribución de los exponentes de escala similar al norte y sur del área de interés, con H entre $0,8 - 0,9$, mientras que en latitudes medias los valores máximos de H , por encima de 1, se distribuyen desde detrás del archipiélago canario hacia el suroeste, creciendo a medida que la distancia a la costa es mayor. En general, estos resultados sugieren la presencia de correlaciones a largo plazo. Los valores en torno

a 1 pueden implicar bien un comportamiento tipo *SOC* o bien que el proceso tiene naturaleza multifractal. El análisis *MF DFA* verifica la dependencia que existe entre el comportamiento de escala y la localización geográfica, así como el origen complejo del fenómeno, que es menos evidente en latitudes medias y en áreas alejadas de la costa. En definitiva, las propiedades de escala de la *SST* se deben principalmente a la presencia de dependencias a largo plazo, *d.l.p.*, aunque el análisis de las series temporales desordenadas de forma aleatoria revela la presencia de una contribución no lineal en la región norte de las Islas Canarias, que se refleja en las variaciones del espectro multifractal.

El análisis de fluctuaciones sin tendencia, *DFA*, evaluado sobre las series temporales de energía cinética turbulenta, en las subáreas correspondientes al sur de Madeira, Cabo Ghir, sur de Canarias, Cabo Blanco, sur de Cabo Verde y costa de Dakar, muestra un comportamiento diferente para las distintas escalas temporales sobre las que los fenómenos implicados están actuando. Así, por encima de un año el comportamiento de escala sugiere la presencia de correlaciones a largo plazo, mientras que entre 7 días y un año las correlaciones a largo plazo están presentes pero no siguen una ley de potencias. El análisis multifractal de fluctuaciones sin tendencia, *MF DFA*, revela la fuerte influencia de las fluctuaciones a corto plazo sobre las propiedades de escala y la naturaleza compleja de las series temporales de *EKE*, reflejada en los espectros multifractales, cuyas características cambian en función del subárea que se considere. De esta manera, la costa de Dakar y Cabo Blanco presentan los mayores anchos espectrales. Los resultados ponen de manifiesto que existe una ligera contribución no lineal que afecta a las propiedades de escala, especialmente en la costa de Dakar y en Cabo Ghir, no obstante son las *d.l.p.* las que dominan el comportamiento multifractal.

El análisis monofractal de las series temporales de intensidad de corriente con la profundidad, en un punto de medida en la llanura abisal de Madeira, muestra la presencia de correlaciones a largo plazo que siguen una ley de potencias entre aproximadamente 50 días hasta por encima de 7 años. A escalas temporales menores se obtiene, para el punto localizado a 1000 metros de profundidad, un comportamiento tipo ruido browniano, es decir sin *d.l.p.*, mientras que a 3000 metros se observa la presencia de correlaciones a largo plazo que no siguen una ley de potencias. El

MF DFA confirma el origen complejo de las series de intensidad de corriente y la variación de las propiedades del espectro multifractal refleja la dependencia de dichas propiedades con la profundidad. Asimismo, el comportamiento de escala está básicamente dominado por las *d.l.p.*, no obstante la intensidad de las contribuciones no lineales es superior en la capa más próxima a la superficie, así como el grado de complejidad, lo cual resulta consecuente con el aumento del número de fenómenos que interaccionan en las proximidades de la interfase atmósfera-océano.

Las series temporales de altura de ola en un punto localizado en el Mar de Noruega, revelan un comportamiento fractal dominado por las *d.l.p.*. El análisis multifractal pone de manifiesto la estructura compleja del proceso, así como la importancia que tienen las fluctuaciones a corto plazo sobre el comportamiento de escala. En cuanto al origen de la multifractalidad, la evaluación de la intensidad de las contribuciones lineal y no lineal sobre las propiedades de escala muestra que para intervalos temporales inferiores a 120 días la contribución no lineal posee un efecto significativo, mientras que para escalas superiores son las correlaciones a largo plazo las que dominan el comportamiento fractal.

Líneas de trabajo futuras

Entre las posibles líneas futuras de investigación que se han detectado a lo largo del desarrollo del presente trabajo, se pueden señalar las siguientes:

Evaluación de los factores que influyen en la intensidad de la contribución no lineal en el comportamiento de escala de los diferentes fenómenos empleando técnicas de análisis específicas para examinar este tipo de efectos.

Estudio en mayor profundidad, haciendo uso de señales sintéticas, de la información proporcionada por los perfiles de las series temporales.

Profundizar en el estudio del comportamiento de los exponentes de escala detrás del archipiélago canario tanto para la temperatura superficial del mar como para la energía cinética turbulenta y la posible relación existente entre ambos fenómenos.

Análisis detallado de los efectos de la metodología empleada para eliminar las componentes estacionales de las series temporales.

Estudiar las posibles implicaciones del desplazamiento del espectro multifractal respecto al exponente de escala, α .

Bibliografía

- [1] Abry, P., Veitch, D., (1998). *Wavelet analysis of long-range-dependent traffic*, IEEE Transactions on information theory, 44(1), 2–15.
- [2] Adler, R. J., Feldman, R. E., Taqqu, M. S., (1998). *A practical guide to heavy tails: Statistical techniques and applications*, Birkhauser, Boston, USA.
- [3] Alvarez-Ramirez, J., Alvarez, J., Dagdug, L., Rodriguez, E., Echeverria, J.C., (2008). *Long-term memory dynamics of continental and oceanic monthly temperatures in the recent 125 years*, Physica A, 387, 3629–3640.
- [4] Alves, M.L.G.R., Colin de Verdière, A., (1999). *Instability dynamics of a subtropical jet and applications to the Azores Front Current system: Eddy-driven mean flow*, Journal of Physical Oceanography, 29, 837—864.
- [5] Arbic, B., Scott, R., Chelton, D., Richman, J., Shriver, J., (2012). *Effects of stencil width on surface ocean geostrophic velocity and vorticity estimation from gridded satellite altimeter data*, Journal of Geophysical Research, 117, 10.1029/2011JC007367.
- [6] Arneodo, A., Bacry, E., Gaves, P.V., Muzy, J.F., (1995). *Characterizing long-range correlations in DNA sequences from wavelet analysis*, Physical Review Letters, 74, 3293.
- [7] Aschwanden, M., (2011). *Self-Organized Criticality in Astrophysics. The statistics of nonlinear processes in the universe*, Springer/Praxis, New York, ISBN 978-3-642-15000-5.

- [8] Ashkenazy, Y., Baker, D.R., Gildor, H., Havlin, S., (2003a). *Nonlinearity and multifractality of climate change in the past 420.000 years*. Geophysical Research Letters, 30(22), 018099.
- [9] Ashkenazy, Y., Havlin, S., Ivanov, P.Ch., Peng, C.-K. Shulte-Frohlinde, V., Stanley, H.E., (2003b). *Magnitude and sign scaling in power-law correlated time series*. Physica A, 323,19–41.
- [10] Ashkenazy, Y., Gildor, H., (2009). *Long-range temporal correlations of ocean surface currents*. Journal of Geophysical Research, 114, C09009.
- [11] Babanin, A., (2011). *Breaking and Dissipation of Ocean Surface Waves*, Cambridge University Press.
- [12] Baillie, R. T., (1996). *Long memory processes and fractional integration in econometrics*, Journal of Econometrics, 73, 5—59.
- [13] Bak, P., Tang, C., Wiesenfeld, K., (1987). *Self-Organized Criticality: An Explanation of 1/f noise*, Physical Review Letters, 59(4), 381–384.
- [14] Bak, P., Tang, C., Wiesenfeld, K., (1988). *Self-Organized Criticality*, Physical Review A, 38(1), 364–374.
- [15] Barton, E. D., Basterretxea, G., Flament, P., Mitchelson-Jacob, E. G., Jones, B., Arístegui, J., Herrera, F., (2000). *Lee region of Gran Canaria*, Journal of Geophysical Research, 105, 17173—17193.
- [16] Barton, E. D., Inall, M. E., Sherwin, T. J., Torres, R., (2001). *Vertical structure, turbulent mixing and fluxes during Lagrangian observations of an upwelling filament system off northwest Iberia*, Progress in Oceanography, 51, 249–267.
- [17] Barton, E. D., Arístegui, J., Tett, T., Navarro-Pérez, E., (2004). *Variability in the Canary Islands area of filament-eddy exchanges*, Progress in Oceanography, 62, 71–94.
- [18] Barunik, J., Aste, T., Di Matteo, T., Liu, R., (2012). *Understanding the source of multifractality in financial markets*, Physica A, 391, 4234–4251.

- [19] Bendat, J. S., Piersol, A. G., (1971). *Random data: Analysis and measurement procedures*, Wiley & Sons, New York.
- [20] Beran, J., (1994). *Statistics for long-memory processes*, Chapman Hall, New York.
- [21] Bhattacharya, R. N., Gupta, V. K., Waymire, E., (1983). *The Hurst effect under trends*, Journal of applied Probability, 20, 649—662.
- [22] Blender, R., Fraedrich, K. (2003). *Long time memory in global warming simulations*, Geophysical Research Letters, 30(14), 017666.
- [23] Bottomley, M. Folland, C.K., Hsiung, J., Newell, R.E., Parker, D.E., (1990). *Global Ocean Surface Temperature Atlas, GOSTA*, Meteorological Office, Bracknell, UK and the Department of Earth Atmospheric and Planetary Sciences, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, USA.
- [24] Box, G.E.P., Jenkins, G.M., Reinsel, G.C., (1976). *Time series analysis: Forecasting and control*, San Francisco, CA.
- [25] Brachet, S., Le Traon, P. Y., Le Provost, C. L, (2004). *Mesoscale variability from a high-resolution model and from altimeter data in the North Atlantic Ocean*, Journal of Geophysical Research, 109, 10.1029/2004JC002360.
- [26] Brockwell, P. J., Davies, R. A., (1991). *Time series: Theory and methods*, Springer series in statistics, Springer, Berlin.
- [27] Brown, R., (1828). *A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies*, Philosophical Magazine, 4, 161–173.
- [28] Bunde, A., Havlin, S., Kantelhardt, J.W., Penzel, T., Peter, J.H., Voigt, K., (2000). *Correlated and uncorrelated regions in heart-rate fluctuations during sleep*, Physical Review Letters, 85, 3736.
- [29] Bunde, A., Havlin, S., (2002). *Power-law persistence in the atmosphere and in the oceans*, Physica A, 314, 15–24.

- [30] Bunde, A., Lennartz, S., (2012). *Long-Term Correlations in Earth Sciences*, Acta Geophysica A, 60(3), 562–588.
- [31] Cabrera, L., Rodríguez, G.R., (2011). *Detrended fluctuation analysis of significant wave height time series*, WIT Transactions on Ecology and the Environment, 149, 333–341.
- [32] Cabrera-Brito, L., (2012). *Análisis de persistencias en la temperatura superficial del mar*, Diploma de Estudios Avanzados, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, España.
- [33] Caccia, D. C., Percival, D., Cannon, M. J., Raymond, G., Bassingthwaite, J. B., (1997). *Analyzing exact fractal time series: evaluating dispersional analysis and rescaled range methods*, Physica A, 246, 609–632.
- [34] Caldeira, R. M. A., Stegner, A., Couvelard, X., Araújo, I. B., Testor, P., Lorenzo, A., (2014). *Evolution of an oceanic anticyclone in the lee of Madeira Island: In situ and remote sensing survey*, Journal of Geophysical Research, 119, 1195—1216.
- [35] Carton, J.A., Cao, X., Giese, B.S., Da Silva, A.M., (1996). *Decadal and interannual SST variability in the tropical Atlantic Ocean*, Journal of Physical Oceanography, 26, 1165–1175.
- [36] Casey, K.S., Cornillon, P. (1999). *A comparison of satellite and in situ based sea surface temperature climatologies*, Journal of Climate, 12 (6), 1848–1863.
- [37] Chang, E.K., Lee, S., Swanson, K.L. (2002). *Storm track dynamics*, Journal of Climate, 15(16), 2163–2183.
- [38] Chen, Z., Ivanov, P. C., Hu, K., Stanley, H. E., (2002). *Effect of nonstationarities on detrended fluctuation analysis*, Physical Review E, 65, 041107.
- [39] Chen, Z., Carpena, P., Hu, K., Bernaola-Galvan, P., Stanley, H.E., Ivanov, P.C., (2005). *Effect of nonlinear filters on detrended fluctuation analysis*, Physical Review E, 71, 011104.

- [40] Cipollini, P., Cromwell, D., Jones, M.S., Quartly, G. D., Challenor, P.G., (1997). *Concurrent altimeter and infrared observations of Rossby wave propagation near 34° N in the Northeast Atlantic*, Geophysical Research Letters, 24, 889–892.
- [41] Cont, R., (2005). *Long range dependence in financial markets*, Fractals Engineering, Springer Verlag, 159–180.
- [42] Coronado, A. V., Carpena, P., (2005). *Size Effects on Correlation Measures*, Journal of Biological Physics, 31, 121–133.
- [43] Cox, D. R., (1984). *Long-range dependence: A review*, Statistics: an appraisal. Proceedings 50th Anniversary Conference, Iowa State Statistical Laboratory. H.A. David and H.T. David, editors.
- [44] Dahlstedt, K., Jensen, H., (2005). *Fluctuation spectrum and size scaling of river flow and level*, Physica A, 348, 596.
- [45] Davis, A., Marshak, A., Wiscombe, W., Cahalan, R., (1994). *Multifractal characterizations of nonstationarity and intermittency in geophysical fields: observed, retrieved, or simulated*, Journal of Geophysical Research, 99, 8055–8072.
- [46] De Souza, J., Duarte, S.M., Grimm, A.M., (2013). *Components of multifractality in the central England temperature anomaly series*, Chaos, 23(2), 10.1063/1.4811546.
- [47] Devynck, P., Wang, G., Antar, G., Bonhomme, G., (2000). *The Hurst exponent and long-time correlation*, 27th EPS Conference on Contr. Fusion and Plasma Phys. (Budapest), 24B, 632—635.
- [48] Dolan, K.T., Spano, M.L., (2001). *Surrogate for nonlinear time series analysis*, Physical Review E, 64, 046128.
- [49] Drozd, S., Kwapien, J., Oswiecimka, P., Rak, R., (2009). *Quantitative features of multifractal subtleties in time series*, Europhysics Letters, 88, 10.1209/0295-5075/88/60003.

- [50] Ducet, N., Traon, L.P., Reverdin, G., (2000). *Global high-resolution mapping of ocean circulation from TOPEX/Poseidon and ERS-1 and-2*, Journal of Geophysical Research, 105, 19477–19498.
- [51] Efstathiou, M.N., Tzanis, C., Cracknell, A.P., Varotosos, C.A., (2011). *New features of land and sea surface temperatures*, International Journal of Remote Sensing, 32(11), 3231–3238.
- [52] Eichner, J.F., Koscielny-Bunde, E.A., Bunde, S., Havlin, S., Schellnhuber, H.J., (2003). *Power-law persistence and trends in the atmosphere: A detailed study of long temperature records*, Physical Review E, 68(4), 046133.
<http://www.eoearth.org/article/Barentssea>.
- [53] Falconer, K., (1997). *Techniques in Fractal Geometry*, John Wiley & Sons, 185–206.
- [54] Feder, J., (1988). *Fractals*, Plenum Press, New York.
- [55] Feller, W., (1971). *An introduction to probability theory and its Applications*, 2, Wiley, New York.
- [56] Ferrari, R., Wunsch, C., (2009). *Ocean Circulation Kinetic Energy, Reservoirs, Sources, and Sinks*, Annual Review of Fluid Mechanics, 41, 253–282.
- [57] Fraedrich, K., Blender, R., (2003). *Scaling of Atmosphere and Ocean Temperature Correlations in Observations and Climate Models*, Physical Review Lett., 90(10), 1–4.
- [58] Fraedrich, K., Blender, R., Zhu, X., (2009). *Continuum climate variability: Long-term memory, extremes, and predictability*, International Journal of Modern Physics B, 23, 1–14.
- [59] García-Weil, L., Ramos, A. G., Coca, J., Redondo, A., (2014). *Mesoscale dynamics in the Canary Islands area as observed through complementary remote sensing techniques*, Remote Sensing of the African Seas, Springer, 97–118.

- [60] Gilmore, M., Yu, C. X., Rhodes, T. L., Peebles, W. A., (2002). *Investigation of rescaled range analysis, the Hurst exponent, and long-time correlations in plasma turbulence*, Physics of Plasmas, 9(4), 1312–1317.
- [61] Gneiting, T., Schlather, M., (2004). *Stochastic models that separate fractal dimension and the Hurst effect*, SIAM Rev., 46, 269—282.
- [62] Gong, W.-B., Liu, Y., Misra, V., Towsley, D., (2005). *Self-similarity and long range dependence on the internet: a second look at the evidence, origins and implications*, Computer networks, 48, 377–399.
- [63] Govindan, R., Narayanan, K., Gopinathan, M.S., (1998). *On the evidence of deterministic chaos in ECG: Surrogate and predictability analysis*, Chaos, 8(2), 495–502.
- [64] Gouyet, J.F., (1996). *Physics and fractal structures*, Springer, Paris, Masson, 0387941533.
- [65] Granger, C.W.J., (1980). *Long memory relationships and the aggregation of dynamic models*, Journal of econometrics, 14, 227–238.
- [66] Granger, C.W.J., Joyeux, R., (1980). *An introduction to long-memory time series models and fractional differencing*, Journal of time series analysis, 1, 15–29.
- [67] Hagen, E., Zulicke, C., Feistel, R., (1996). *Near-surface structures in the Cape Ghir filament off Morocco*, Oceanologica Acta, 19, 577—598.
- [68] Hausdorff, J.M., Peng, C.K., (1996). *Multiscaled randomness: A possible source of $1/f$ noise in biology*, Physical Review E, 54(2), 2154–2157.
- [69] Haynes, R., Barton, E. D., Pilling, I., (1993). *Development, persistence and variability of upwelling filaments off the Atlantic coast of the Iberian Peninsula*, Journal of Geophysical Research, 98, 22681—22692.
- [70] Hosking, J. R. M., (1981). *Fractional differencing*, Biometrika, 68(1), 165—176.

- [71] Hu, K., Ivanov, P.Ch., Chen, Z., Carpena, P., Stanley, H.E. (2001). *Effect of trends on detrended fluctuation analysis*, Physical Review E, 64, 011114.
- [72] Hurst, H.E., (1951). *Long-term storage capacity of reservoirs*, Transactions Am. Soc. Civil Engineers, 116, 770–799.
- [73] Ihlen, E.A., (2012). *Introduction to multifractal detrended fluctuation analysis in Matlab*, Frontiers in physiology, 3, 10.3389/fphys.2012.00141.
- [74] Ishikawa, Y., Awaji, T., Akitomo, K., (1997). *Global Surface Circulation and Its Kinetic Energy Distribution Derived from Drifting Buoys*, Journal of Oceanography, 53, 489–416.
- [75] Janssen, P., (2009). *The Interaction of Ocean Waves and Wind*, Cambridge University Press.
- [76] Kalisky, T., Ashkenazy, Y., Havlin, S., (2005). *Volatility of linear and nonlinear time series*, Physical Review E, 72, 011913.
- [77] Kantelhardt, J.W., Koscielny-Bunde, Rego, H.H.A., Havlin S., Bunde, A., (2001). *Detecting long-range correlations with detrended fluctuation analysis*, Physica A, 295, 441–454.
- [78] Kantelhardt, J.W., Zschiegner, S.A., Koscielny-Bunde, E., Havlin S., Bunde, A., Stanley, E., (2002). *Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series*, Physica A, 316, 87–114.
- [79] Kantelhardt, J.W., Rybski, D., Zschiegner, S.A., Braun, P., Koscielny-Bunde, E., Livina, V., Havlin, S., Bunde, A., (2003). *Multifractality of river runoff and precipitation: comparison of fluctuation analysis and wavelet methods*, Physica A, 330(1), 240–245.
- [80] Kantelhardt, J. W., Koscielny-Bunde, E., Rybski, D., Braun, P., Bunde, A., Havlin S., (2006). *Long-term persistence and multifractality of precipitation and river runoff records*, Journal of Geophysical Research, 111, 01106.

- [81] Kaplan, A., Cane, M.A., Kushnir, Y., Clement, A.C., Blumenthal, M.B., Rajagopalan, B., (1998). *Analyses of global sea surface temperature 1856-1991*, Journal of Geophysical Research, 103(C9), 18567–18589.
- [82] Kaplan, D., Glass, L., (2012). *Understanding Nonlinear Dynamics*, Springer Science & Business Media.
- [83] Katsev, S., L'Heureux, I., (2003). *Are Hurst exponents estimated from short or irregular time series meaningful?*, Computers & Geosciences, 29, 1085–1089.
- [84] Kwapien, J., Oswiecimka, P., Drozd, S., (2005). *Components of multifractality in high-frequency stock returns*, Physica A, 350, 466–474.
- [85] Kilpatrick, K. A., Podest, G. P., Evans, R., (2001). *Overview of the NOAA/NASA advanced very high resolution radiometer Pathfinder algorithm for sea surface temperature and associated matchup database*, Journal Of Geophysical Research, 106(C5), 9179–9197.
- [86] Király, A., Jánosi, I.M., (2005). *Detrended fluctuation analysis of daily temperature records: Geographic dependence over Australia*, Meteorological and Atmospheric Physics, 88, 119–128.
- [87] Király, A., Bartos, I., Jánosi, I.M., (2006). *Correlation properties of daily temperature anomalies over land*, Tellus, 58A, 593–600.
- [88] Klein, B., Siedler, G., (1989). *On the origin of the Azores Current*, Journal of Geophysical Research, 94, 6159–6168.
- [89] Knudsen, P., Bingham, R., Andersen, O., Rio, M.-H., (2011). *A global mean dynamic topography and ocean circulation estimation using a preliminary GOCE gravity model*, Journal of Geodesy, 85, 861–879.
- [90] Kolmogorov, A.N., (1941). *The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers*, Proceedings of the USSR Academy of Sciences, (30) 299—303, (translated into English by Levin, V. 1991).

- [91] Komen, G. J., Cavaleri, L., Donelan, M., Hasselmann, K., Hasselmann, S., Janssen, P.A.E.M., (1994). *Dynamics and Modelling of Ocean Waves*, Cambridge University Press.
- [92] Koscielny-Bunde, E.A., Bunde, S., Havlin, S. Goldreich, Y., (1996). *Analysis of daily temperature fluctuations* Physica A, 231, 393–396.
- [93] Koscielny-Bunde, E.A., Bunde, S., Havlin, S., Roman, H.E., Goldreich, Y., Schellnhuber, H.J., (1998). *Indication of a universal persistence law governing atmospheric variability*, Physical Review Letters, 81(3), 729–732.
- [94] Koscielny-Bunde, E., Kantelhardt, J. E., Braun, P., Bunde, A., Havlin, S., (2006). *Long-term persistence and multifractality of river runoff records: Detrended fluctuation studies*, Journal of Hydrology, 322, 1201–137.
- [95] Kumar, S., Deo, N., (2009). *Multifractal properties of the Indian financial market*, Physica A, 388, 1593–1602.
- [96] Lamperti, J. W.,(1962). *Semi-stable stochastic processes*, Transactions of the American Mathematical Society, 104(1), 62–78.
- [97] Lázaro, C., Fernandes, M., Santos, A., Oliveira, P., (2005). *Seasonal and inter-annual variability of surface circulation in the Cape Verde region from 8 years of merged T/P and ERS-2 altimeter data*, Remote Sensing of Environment, 98, 45–62.
- [98] Le Traon, P.Y. DeMey, P.J., (1994). *The eddy field associated with the Azores Front east of the Mid-Atlantic Ridge as observed by the Geosat altimeter*, Journal Of Geophysical Research, 99, 9907–9923.
- [99] Le Traon, P.Y., Ogor, F., (1998). *ERS-1/2 orbit improvement using TOPEX/POSEIDON: The 2cm challenge*, Journal of Geophysical Research, 103, 8045–8057.
- [100] Le Traon, P.Y., Nadal, F., Ducet, N. (1998). *An improved mapping method of multisatellite altimeter data*, Journal of Atmospheric and Oceanic Technology, 15, 522–534.

- [101] Le Traon, P.Y., Morrow, R., (2001). *Ocean currents and eddies. En Satellite altimetry and Earth Sciences*, Editado por L.-L. Fu y A. Cazenave, 17–215, Academic, San Diego, California.
- [102] Lee, H., Chang, W., (2015). *Multifractal regime detecting method for financial time series*, 70, 117–129.
- [103] Leland, W. E., Taqqu, M. S., Willinger, W., Wilson, D. V., (1994). *On the self-similar nature of Ethernet traffic*, IEEE/ACM Transactions On Networking, 2(1), 1–15.
- [104] Levy, P.(1937). *Theorie de l'Addition des Variables Aleatoires*, Paris: Gauthier-Villars.
- [105] Lewis, P.A.W., Ray, B.K., (1997). *Modeling long-range dependence, nonlinearity, and periodic phenomena in sea surface temperatures using TSMARS*, Journal of the American Statistical Association, 92(439), 881–893.
- [106] Lin, M., Yan, S., Zhao, G., Wang, G., (2013). *Multifractal Detrended Fluctuation Analysis of Interevent Time Series in a Modified OFC Model*, Communications in Theoretical Physics, 59, 1–6.
- [107] Liu, Y., Cizeau, P., Meyer, M., Peng, C.K., Stanley, H.E., (1997). *Correlations in economic time series*, Physica A, 245, 437–440.
- [108] Liu, Y., Gopikrishnan, P., Cizeau, P., Meyer, M., Peng, C.-K., Stanley, H.E., (1999). *The statistical properties of the volatility of price fluctuations*, Physical Review E, 60(2), 1390–1400.
- [109] Lloyd, E.H., (1967). *Stochastic reservoir theory*, *Advances in Hydroscience*, 4, 281–339, Academic, San Diego, California.
- [110] Lumpkin, R., Johnson, G., (2013). *Global ocean surface velocities from drifters: Mean, variance, El Niño–Southern Oscillation response, and seasonal cycle*, Journal of Geophysical Research, 118.
- [111] Luo, M., Leung, Y., Zhou, Y., Zhang, W., (2013) *Scaling behavior of global mean sea surface temperature anomalies*, The 33rd asian conference on remote

- sensing (ACRS 2012) Asian Association on Remote Sensing (AARS), Curran Associates, Inc.
- [112] Luo, M. Wang, L., (2014) *Multifractal scaling properties of global land surface air temperature*, Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS), IEEE International, 3113–3116, 10.1109/IGARSS.2014.6947136.
- [113] Luo, M., Leung, Y., Zhou, Y., Zhang, W., (2015). *Scaling behaviors of global sea surface temperature*, Journal of climate, 28, 3122–3132.
- [114] Makowiec, D., Fulinski, A., (2010). *Multifractal detrended fluctuation analysis as the estimator of long-range dependence*, Acta Physica Polonica B, 41, 1025–1050.
- [115] Malamud, R. D., Turcotte, D. L., (1999). *Self-affine time series: measures of weak and strong persistence*, Journal of Statistical Planning and Inference, 80, 173–196.
- [116] Mandelbrot, B. B., (1967). *How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension*, Science, 156, 636–638.
- [117] Mandelbrot, R. D., Wallis, S. C., (1969). *Robustness of the Rescaled Range R/S in the Measurement of Noncyclic Long Run Statistical Dependence*, Water Resources Research, 5(5), 967–988.
- [118] Mandelbrot, B. B., Van Ness, S. C., (1968). *Fractional brownian motions, fractional noises and applications*, SIAM Review, 10(4), 422–437.
- [119] Mandelbrot, B. B. (1982). *The fractal geometry of nature*, Freeman and Company, San Francisco.
- [120] Mazas, F., Hamm, L., (2011). *A multi-distribution approach to POT methods for determining extreme wave heights*. Coastal Engineering, 58, 385–394.
- [121] Monetti, R.A., Havlin, S., Bunde, A., (2003). *Long-term persistence in the sea surface temperature fluctuations*, Physica A, 320, 581–589.

- [122] Movahed, M.S., Jafari, G.R., Ghasemi, F., Rahvar, S., Rahimi Tabar, M.R., (2006). *Multifractal detrended fluctuation analysis of sunspot time series*, Journal of Statistical Mechanics: Theory and experiment, 10.1088/1742-5468/2006/02/P02003.
- [123] Müller, T. J., Waniek, J. J., (2013). *KIEL276 Time Series Data from Moored Current Meters*, Kiel, Germany
- [124] Müller, T. J., Siedler, G., (1992). *Multi-year current time series in the eastern North Atlantic Ocean*, Journal of Marine Research, 50, 63–98.
- [125] Nagarajan, R., Kavasseri, R., (2005). *Minimizing the effect of trends on detrended fluctuation analysis of long-range correlated noise*, Physica A, 354, 182–198.
- [126] Ogurtsov, M.G., (2004). *New evidence for long-term persistence in the sunss activity*, Solar Physics, 220, 93–105.
- [127] Oh, G., Eom, C., Havlin, S., Jung, W-S., Wang, F., Stanley H.E., Kim, S., (2012). *A multifractal analysis of Asian foreign exchange market*, European Physical Journal B, 85, 10.1140/epjb/e2012-20570-0.
- [128] Oliveira, L., Piola, A., Mata, M., Soares, I., (2009). *Brazil Current surface circulation and energetics observed from drifting buoys*, Journal of Geophysical Research, 114.
- [129] Ossadnik, S.M., Buldyrev, S.V., Goldberger, A.L., Havlin, S., Mantegna, R.N., Peng, C.K., Simons, M., Stanley, H.E., (1994). *Correlation Approach to Identify Coding Regions in DNA Sequences*, Biophysical Journal, 67, 64–70.
- [130] Oswiecimka, P., Kwapien, J., Drozd, S., Rak, R., (2005). *Investigating multifractality of stock market fluctuations using wavelet and detrending fluctuation methods*, Acta Physica Polonica B, 36(8), 2447–2457.
- [131] Oswiecimka, P., Kwapien, J., Drozd, S., (2006). *Wavelet versus detrended fluctuation analysis of multifractal structures*, Physical Review E, 74, 016103.
- [132] Outcalt, S. I., Hinkel, K. M., Meyer, E., Brazel, A. J., (1997). *Application of Hurst rescaling to geophysical serial data*, Geographical Analysis, 29(1), 64–70.

- [133] Ozger, M., (2011a). *Scaling characteristics of ocean wave height time series*, Physica A, 390, 981–989.
- [134] Ozger, M., (2011b). *Investigating the multifractal properties of significant wave height time series using a wavelet-based approach*, Journal of Waterway, port, coastal, and ocean engineering, 137, 34–42.
- [135] Papadopoulos, A., Bird, N.R.A., Mooney, S.J., Whitmore, A. P., (2007). *Fractal analysis of pore roughness in images of soil using the slit island method*, Physical Review E, 7(2), 456—460.
- [136] Parker, D.E., Jones, P.D., Folland, C.K., Bevan, A., (1994). *Interdecadal changes of surface temperature since the late nineteenth century*, Journal of Geophysical Research, 99(14), 373–399.
- [137] Pattantyus-Abraham, M., Kiraly, A., Janosi, I.M., (2004). *Nonuniversal atmospheric persistence: Different scaling of daily minimum and maximum temperatures*, Physical Review E, 69, 021110.
- [138] Peitgen, D. B., Saupe, A. T., (1988). *The science of fractal images*, Springer-Verlag, New York, USA.
- [139] Peng, C.-K., Buldyrev, S. V., Havlin, S., Simons, M., Stanley, H. E., Goldberger, A. L., (1994). *Mosaic organization of DNA nucleotides*, Physical Review E, 49(2), 1685–1689.
- [140] Peng, C.-K., Havlin, S., Hausdorff, J.M., Mietus, J.E., Stanley, H.E., Goldberger, A.L., (1995). *Fractal mechanisms and heart rate dynamics. Long-range correlations and their Breakdown with disease*, Journal of Electrocardiology, 28, S.1, 59–65.
- [141] Pérez, F.F., Gilcoto M., Ríos, A. F., (2003). *Large and mesoscale variability of the water masses and the deep chlorophyll maximum in the Azores Front*, Journal of Geophysical Research, 108, 10.1029/2000JC000360.
- [142] Peters, E. E., (1994). *Fractal Market Analysis*, Wiley & Sons, New York, USA.

- [143] Peters, E. E., (1996). *Chaos and Order in the Capital Markets*, Wiley & Sons, New York, USA.
- [144] Pinet, P.R., (2009). *Invitation to Oceanography, 5th edition*. Sudbury, Massachusetts. Jones and Bartlett.
- [145] Pingree, R., Sinha, B., (2001). *Westward moving waves or eddies (Storms) on the Subtropical/Azores Front near 32.5° N? Interpretation of the Eulerian currents and temperature records at Moorings 155 (35.58° W) and 156 (34.48° W)*, Journal of Marine Systems, 29, 239–276.
- [146] Pollard, R.T., Griffiths, M.J., Cunningham, S.A., Read, J.F., Pérez, F.F., Rios, A.F., (1996). *Vivaldi 1991 — A study of the formation, circulation and ventilation of Eastern North Atlantic Central Water*, Progress in Oceanography, 37, 167–192.
- [147] Press, W. H., (1978). *Flicker noises in astronomy and elsewhere*. Comments on Modern Physics, Part C - Comments on Astrophysics, 7(4), 103–119.
- [148] Rangarajan, G., Ding M., (2000). *Integrated approach to the assessment of long range correlation in time series data*, Physical Review E, 61(5), 4991–5001.
- [149] Reynolds, R.W., Smith, T.M., (1994). *Improved global sea surface temperature analyses using optimum interpolation*, Journal of Climate, 7, 929–948.
- [150] Richardson, P., (1983). *Eddy kinetic energy in the North Atlantic from surface drifters*, Journal of Geophysical Research, 88, 4355–4367.
- [151] Rio, M.-H., Hernandez, F., (2004). *A mean dynamic topography computed over the world ocean from altimetry, in situ measurements, and a geoid model*, Journal of Geophysical Research, 109.
- [152] Rybski, D., Bunde, A., von Storch, H., (2008). *Long-term memory in 1000-year simulated temperature records*, Journal of Geophysical Research, 113, 02106.
- [153] Robinson, P. M., (1994). *Rates of convergence and optimal spectral bandwidth for long range dependence*, Probability Theory and Related Fields, 99, 443–473.

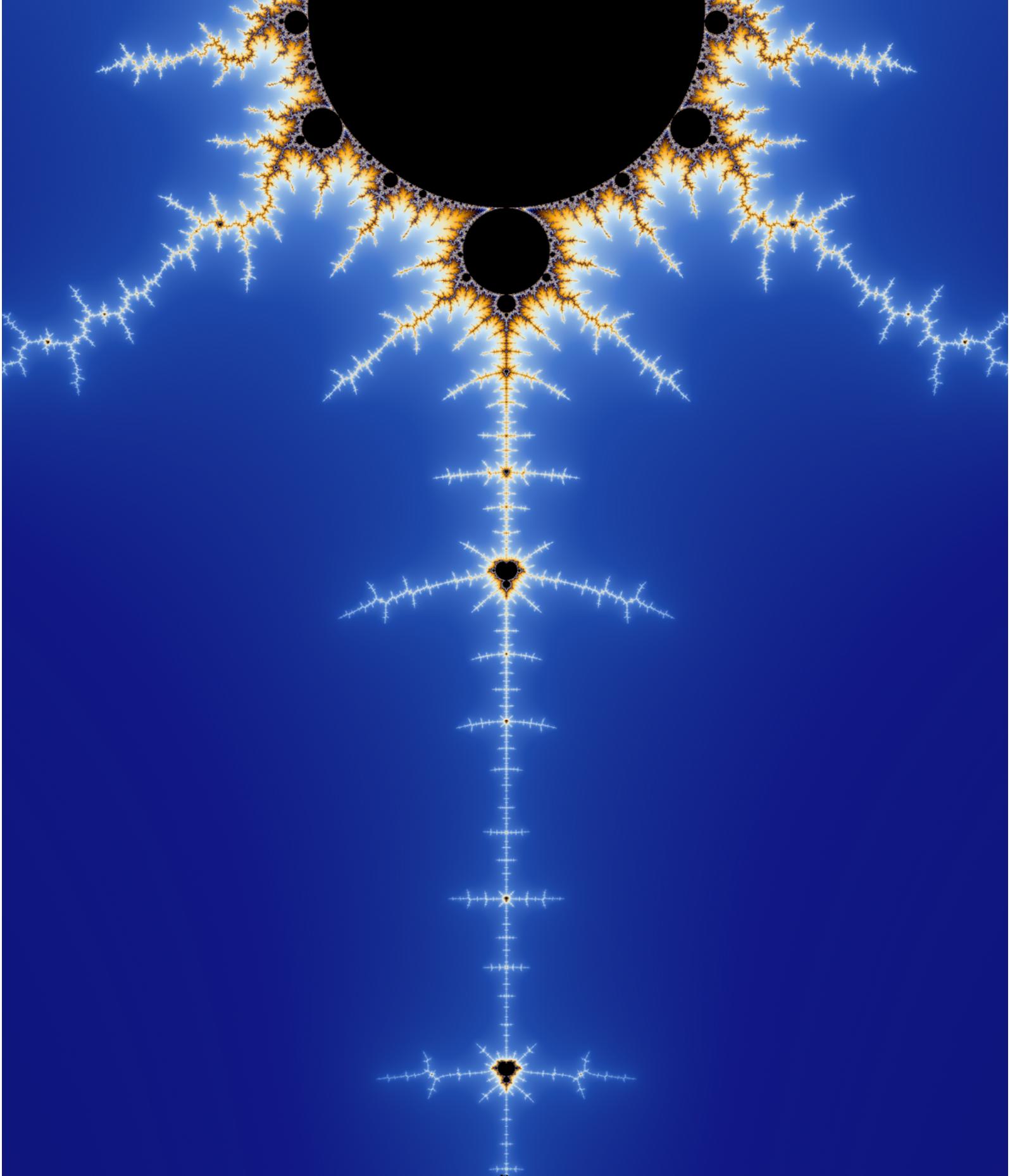
- [154] Robinson, I. S., (2004). *Measuring the Oceans from Space*, Berlin: Springer/Praxis Publishing, 669pp.
- [155] Roman, H.E., Celi, A., De Filippi, G., (2008). *Fluctuation analysis of meteorological data*, European Physical Journal Special Topics, 161, 195-205.
- [156] Samorodnitsky, G., Taqqu, M.S., (1994). *Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance*, ISBN 0-412-05171-0, Chapman and Hall, New York.
- [157] Scharffenberg, M., Stammer, D., (2010). *Seasonal variations of the large-scale geostrophic flow field and eddy kinetic energy inferred from the TOPEX/Poseidon and Jason-1 tandem mission data*, Journal of Geophysical Research, 115.
- [158] Schepers, H.E., van Beek, J.H.G.M., Bassingthwaite, J.B., (1992). *Four methods to estimate the fractal dimension from self-affine signals*, Engineering in Medicine and Biology Magazine, 11, 57-64.
- [159] Schlesinger, M.F., West, B.J., Klafter, J., (1987). *Lévy Dynamics of Enhanced Diffusion: Application to Turbulence*, Physical Review Letters, 58(11), 1100-1103.
- [160] Schlesinger, M.F., West, B.J., (1988). *Random Fluctuations and Pattern Growth: Experiments and Models*, Kluwer Academic, Boston.
- [161] Schreiber, T., Schmitz, A., (1996). *Improved Surrogate Data for Nonlinearity Tests*, Physical Review Letters, 77(4), 635-638.
- [162] Schreiber, T., Schmitz, A., (2000). *Surrogate time series*, Physica D, 142, 346-382.
- [163] Semedo, A., Rutgersson, A., Suselj, K., Sterl, A., (2011). *A Global View on the Wind Sea and Swell Climate and Variability from ERA-40*, Journal of climate, 24, 1461-1479.

- [164] Semedo, A., Vettor, R., Breivik, O., Sterl, A., Reistad, M., Guedes Soares, C., Lima, D., (2015). *The wind sea and swell waves climate in the Nordic seas*, Ocean Dynamics, 65, 223–240.
- [165] Seuront, L., Schmitt, F., Lagadeuc, Y., Schertzer, D., Lovejoy, S., Frontier, S., (1996). *Multifractal analysis of phytoplankton biomass and temperature in the ocean*, Geophysical Research Letters, 23(24), 3591–3594.
- [166] Sheluhin, O.I., Smolskiy, S.M., Osin, A.V., (2007). *Principal Concepts of Fractal Theory and Self-Similar Processes*, in Self-Similar Processes in Telecommunications, John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, UK, 10.1002/9780470062098.
- [167] Siedler, G., Armi, L., Müller, T., (2005). *Meddies and decadal changes at the Azores Front from 1980 to 2000*, Deep Sea Research II, 52, 583–604.
- [168] Stammer, D., Wunsch, C., (1999). *Temporal changes in eddy energy of the oceans*, Deep-Sea Research II, 46, 77–108.
- [169] Stanley, H.E., (1999). *Scaling, universality, and renormalization: Three pillars of modern critical phenomena*, Reviews of Modern Physics, 71, 358–366.
- [170] Streich, S., Herrera, P., (2005). *Detrended Fluctuation Analysis of Music Signals: Danceability Estimation and further Semantic Characterization*, 118th Convention Audio Engineering Society, Barcelona, Spain.
- [171] Taft, B., Hickey, B., Wunsch, C., Baker, D.Jr., (1974). *Equatorial Undercurrent and deeper flows in the central Pacific*, Deep Sea Research, 2I, 403–430.
- [172] Talkner, P., Weber, R.O., (2000). *Power spectrum and detrended fluctuation analysis: Application to daily temperatures*, Physical Review E, 62(1), 150–160.
- [173] Taqqu, L., Teverovsky, M., (1998). *A practical guide to heavy tails: Statistical techniques and applications*, Birkhauser, Boston, MA, 177–217.
- [174] Taqqu, L., Teverovsky, M., Willinger, W., (1995). *Estimators for Long-Range Dependence: An Empirical Study*, Fractals, 3(4), 785–798.

- [175] Telesca, L., Lapenna, V., Machiato, M., (2004). *Mono- and multi-fractal investigation of scaling properties in temporal patterns of seismic sequences*, Chaos, Solitons and Fractals, 19(1), 1–15.
- [176] Tejera, A., García-Weil, L., Heywood, K., Cantón-Garbín, M., (2002). *Observations of oceanic mesoscale features and variability in the Canary Islands area from ERS-1 altimeter data, satellite infrared imagery and hydrographic measurements*, International Journal of Remote Sensing, 23, 4897–4916.
- [177] Teverovsky, Taqqu, M. S., Willinger, W., (1999). *A critical look at Lo's modified R/S statistic*, Journal of Statistical Planning and Inference, 80, 211–227
- [178] Theiler, J., Eubank, S., Longtin, A., Galdrikian, B., Farmer, J.D., (1992). *Testing for nonlinearity in time series: the method of surrogate data*, Physica D, 58, 77–94.
- [179] Tokmakian, R. T., Challenor, P.G., (1993). *Observations in the Canary Basin and the Azores frontal region using Geosat data*, Journal of Geophysical Research, 98, 4761–4773.
- [180] Tucker, M.J., Pitt, E.G., (2001). *Waves in Ocean Engineering*, Elsevier.
- [181] Turcotte, D. L., (1997). *Fractals and chaos in geology and geophysics*, Cambridge University Press, United Kingdom.
- [182] van Aken, H.M., (2007). *The Oceanic Thermohaline Circulation: An Introduction*, Springer Science & Business Media, New York, ISBN 978-0-387-36637-1.
- [183] van Camp, L., Nykjaer, L., Mittelstaedt, E., Schlittenhardt, P., (1991). *Upwelling and boundary circulation off Northwest Africa as depicted by infrared and visible satellite observations*, Progress in Oceanography, 26, 357–402.
- [184] Varotsos, C.A., Efstathiou, M.N., (2013). *On the scaling effect in global surface air temperature anomalies*, Atmospheric chemistry and physics discussions, 13, 5243–5253.

- [185] Varotsos, C.A., Efstathiou, M.N., Cracknell, A.P., (2013). *Plausible reasons for the inconsistencies between the modeled and observed temperatures in the tropical troposphere*, Geophysical Research Letters, 40(18), 4906–4910.
- [186] Venema, V., Meyer, S., Gimeno-García, S., Kniffka, A., Simmer, C., Crewell, S., Löhnert, U., Trautmann, U., Macke, A., (2006). *Surrogate cloud fields generated with the Iterative Amplitude Adapted Fourier Transform algorithm*, Tellus, 58A, 104–120.
- [187] Volkov, D., (2004). *Propagating features in the eddy field of the North Atlantic Current*, Geophysical Research Letters, 31, 10.1029/2004GL021401.
- [188] Volkov, D., (2005). *Interannual Variability of the Altimetry-Derived Eddy Field and Surface Circulation in the Extratropical North Atlantic Ocean in 1993–2001*, Journal of Physical Oceanography, 35, 405–426.
- [189] Volkov, D., Fu, L., (2011). *Interannual variability of the Azores Current strength and eddy energy in relation to atmospheric forcing*, Journal of Geophysical Research, 116, 10.1029/2011JC007271.
- [190] Weber, R.O., Talkner, P., (2001). *Spectra and correlations of climate data from days to decades*, Journal of Geophysical Research, 106(D17), 20, 131–144.
- [191] Wells, N.C., (2001). *Ocean Circulation*, Encyclopedia of Ocean Sciences, Academic Press, 1936–1946.
- [192] Weron, R., (2006). *Modeling and Forecasting Electricity Loads and Prices: A Statistical Approach*, Wiley Finance, 978-0-470-05753-7.
- [193] Weron, R., (2002). *Estimating long-range dependence: finite sample properties and confidence intervals*, Physica A, 312, 285–299.
- [194] Weron, R., (2006). *Modeling and Forecasting Electricity Loads and Prices - A Statistical Approach*, John Wiley & Sons, England.
- [195] Willinger, W., Taqqu, M. S., Leland, W. E., Wilson, D. V., (1995). *Self-similarity in high speed packet traffic: Analysis and modeling of ethernet traffic measurements*, Statistical Science, 10, 67–85.

- [196] World Meteorological Organization, (1998). *Guide to wave analysis and forecasting*, Secretariat of the World Meteorological Organization, Geneva, Switzerland, WMO-No.702.
- [197] Wunsch, C., Ferrari, R., (2004). *Vertical mixing, energy and the general circulation of the oceans*, Annual Review of Fluid Mechanics, 36, 281—314.
- [198] Wyrтки, K., Magaard, L., Hager, J., (1976). *Eddy energy in the oceans*, Journal of Geophysical Research, 81, 2641—2646.
- [199] Xu, N., Shang, P., Kamae, S., (2009). *Minimizing the effect of exponential trends in detrended fluctuation analysis*, Chaos, Solitons and Fractals, 41, 311—316.
- [200] Xu, C., Shang, X.-D., Huang, R., (2014). *Horizontal eddy energy flux in the world oceans diagnosed from altimetry data*, Scientific Reports, 4, 5316.
- [201] Zhang, W.F., Zhao, Q., (2015). *Asymmetric long-term persistence analysis in sea surface temperature anomaly*, Physica A, 428, 314—318
- [202] Zhou, W.X., (2012). *Finite-size effect and the components of multifractality in financial volatility*, Chaos, Solitons & Fractals, 45, 147—155.
- [203] Zunino, L., Figliola, A., Tabak, B.M., Pérez, D.G., Garavaglia, M., Rosso, O.A., (2009). *Multifractal structure in Latin-American market indices*, Chaos, Solitons & Fractals, 41, 2331—2340.



Clouds are not spheres, mountains are not cones,
coastlines are not circles, and bark is not smooth, nor
lightenings travel in a straight line.

Benoit Mandelbrot