

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA



TESIS DOCTORAL

**MODELO PARA EL ANÁLISIS SÍSMICO DE PRESAS BÓVEDA
INCLUYENDO LOS EFECTOS DE INTERACCIÓN SUELO-AGUA-
ESTRUCTURA**

ORLANDO MAESO FORTUNY

Las Palmas de Gran Canaria, 1992



BIBLIOTECA UNIVERSITARIA	
LAS PALMAS DE G. CANARIA	
N.º Documento	<u>340403</u>
N.º Copia	<u>340417</u>

TESIS

MODELO PARA EL ANÁLISIS SÍSMICO DE PRESAS BÓVEDA INCLUYENDO LOS EFECTOS DE INTERACCIÓN SUELO-AGUA-ESTRUCTURA

Autor : Orlando Maeso Fortuny

Ingeniero Industrial por la E.T.S.I.I.
de la Universidad Politécnica de Canarias

Director : José Dominguez Abascal

Catedrático de Estructuras
de la E.T.S.I.I. de Sevilla

presentada en la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

para la obtención del

Grado de Doctor Ingeniero Industrial

Enero, 1992

Esta Tesis ha sido realizada en la Cátedra de Estructuras de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Sevilla, haciendo uso de los medios informáticos del Centro Informático Científico de Andalucía.

Resulta difícil condensar en unas líneas la gratitud que siento hacia todas aquellas personas que han contribuido a que mi periodo en esta ciudad haya sido fructífero y lo que es más importante, realmente inolvidable. Soy consciente de mi deuda para con todos ellos.

En primer lugar y especialmente con José Domínguez Abascal, cuya contribución científica en este trabajo es incalculable y cuyo trato hacia mí durante todo el proceso de realización del mismo ha trascendido de una simple dirección profesional. Su ejemplo como científico y su calor humano forman parte de lo mejor que me llevo de Sevilla.

Con los profesores de la Cátedra Ramón Abascal y Fernando Medina, por su amistad, ayuda y buena predisposición en todo momento. Con mis compañeros becarios y alumnos colaboradores, y con todos los miembros de la Cátedra de Cinemática de la Escuela Bética.

Finalmente deseo manifestar mi gratitud a los compañeros del Departamento de Ingeniería Civil por la multitud de gestiones que hicieron por mí mientras estuve fuera, y a la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria que en parte financió este trabajo.

A todos ellos y a tantos otros, gracias.

a Juana Eugenia,
cuyo sacrificio en pro de esta tarea
no ha sido menor que el mío.

ÍNDICE :

I - INTRODUCCIÓN

I.1	Introducción.	I-2
I.2	Características del problema.	I-3
I.3	Factores que influyen en la respuesta sísmica.	I-4
I.4	Modelos numéricos.	I-6
I.5	Modelo propuesto. Presentación.	I-8
I.6	Antecedentes de Elementos de Contorno en problemas de interacción dinámica suelo-estructura.	I-9

II - BASES DEL COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE MEDIOS SÓLIDOS Y LÍQUIDOS

II.1	Propagación de ondas en medios viscoelásticos.	II-2
II.2	Ecuaciones que rigen el comportamiento dinámico del agua.	II-10
II.3	Propagación de ondas hidrodinámicas en un canal rígido infinito de sección rectangular.	II-14

III - EL M.E.C. PARA PROBLEMAS ARMÓNICOS TRIDIMENSIONALES

III.1	Formulación elastodinámica.	III-2
III.2	Formulación del problema escalar.	III-10
III.3	Elementos isoparamétricos de seis y nueve nodos.	III-15
III.4	Acoplamiento de subregiones sólidas y/o líquidas.	III-17

IV - ASPECTOS NUMÉRICOS Y DE IMPLEMENTACIÓN

IV.1	Definición geométrica de los elementos.	IV-2
IV.2	Criterios de integración numérica.	IV-6
IV.3	Procedimiento para la simplificación de la imposición de las condiciones de contorno.	IV-9
IV.4	Cálculo de los términos de la diagonal de H.	IV-13
IV.5	Coniciones de simetría y antimetría.	IV-20

V - MODELO DE ELEMENTOS DE CONTORNO PARA EL CÁLCULO SÍSMICO DE PRESAS BÓVEDA

V.1	Modelo de la presa y del suelo. Consideración de la interacción suelo-presa.	V-2
V.2	Modelo para el agua embalsada. Consideración de la interacción agua-presa.	V-7
V.3	Interacción conjunta suelo-agua-estructura.	V-14

VI - ANÁLISIS DE LA RESPUESTA DINÁMICA DE LA PRESA DE MORROW POINT

VI.1	Introducción.	VI-1
VI.2	Respuesta de la presa sobre base rígida. Embalse vacío.	VI-2
VI.3	Consideración de la interacción suelo-presa.	VI-9
VI.4	Consideración de la interacción agua-presa. Influencia de la geometría del vaso.	VI-23
VI.5	Interacción conjunta suelo-agua-presa.	VI-53

VII - CONCLUSIONES Y DESARROLLO FUTURO

VII.1	Revisión y conclusiones.	VII-1
VII.2	Desarrollos futuros.	VII-4

REFERENCIAS

APÉNDICE A: Campo de presiones en un canal rectangular infinito generadas por el movimiento de la base.

APÉNDICE B: Campo de movimientos y tensiones producidos por un tren de ondas planas que inciden verticalmente en un semiespacio.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

- I.1 - Introducción.
- I.2 - Características del problema.
- I.3 - Factores que influyen en la respuesta sísmica.
- I.4 - Modelos numéricos.
- I.5 - Modelo propuesto. Presentación.
- I.6 - Antecedentes de Elementos de Contorno en problemas de interacción dinámica suelo-estructura.

I.1 INTRODUCCIÓN

La seguridad de las presas es una cuestión de suma importancia social y económica ya que de ella dependen gran cantidad de recursos naturales, medios de producción y en numerosas ocasiones miles de vidas humanas. Debido a la conciencia de esta importancia por parte de técnicos y promotores puede decirse que el número de catástrofes ocurridas en el mundo por el fallo de presas ha sido pequeño y la sociedad confía en la seguridad de las mismas. No obstante, la magnitud de una catástrofe de este tipo, y el nivel de ignorancia que aún existe sobre algunos aspectos del comportamiento de una presa a lo largo de su vida hacen muy necesarios nuevos estudios científicos y técnicos. En particular, el comportamiento sísmico de presas es un aspecto que requiere de grandes esfuerzos de investigación ya que aún no se conocen bien los distintos factores que influyen en el mismo ni, en muchos casos, cómo obtener de una manera precisa la respuesta del sistema ante la eventualidad de un terremoto.

La presente Tesis está dedicada al estudio sísmico de un tipo concreto de presas: las presas bóveda. Su estudio resulta necesario dado el número de ellas existentes y la importancia de las mismas. Es además un reto, al ser probablemente el análisis sísmico de estas presas el más complejo y el que aún hoy presenta mayores carencias. El que las presas existentes hayan demostrado su idoneidad frente a las acciones sísmicas (Prisco, 1985), el que no se conozca fallo alguno de presa de hormigón ante una sollicitación sísmica, o el que la presa bóveda de Pacoima resistiera sin daños visibles el fuerte terremoto de San Fernando en 1971 (Housner y Jennings, 1972), son hechos que no deben inducir a subestimar la importancia y necesidad del estudio dinámico de este tipo de construcciones. Sólo la responsabilidad y buen juicio de los técnicos, así como costosísimas precauciones debidas a ignorancia del comportamiento explican el anterior resultado. Debe tenerse en cuenta que la mayoría de estudios realizados hasta hoy demuestran que las tensiones dinámicas inducidas son del mismo orden que las debidas a la presión hidrostática.

En los últimos años se ha producido un gran avance en el conocimiento del comportamiento sísmico de presas; sin embargo, existen numerosos aspectos que deben ser todavía estudiados ya que los modelos teóricos y numéricos existentes incluyen grandes simplificaciones y están aún lejos de representar la realidad con una precisión aceptable. Este hecho justifica la presente Tesis, que presenta un modelo numérico para el análisis dinámico de presas en el que se tienen en cuenta adecuadamente factores de importancia que hasta ahora otros modelos no habían podido considerar, o solamente lo habían hecho de una manera burda. Esta Tesis no es un estudio aislado sino la continuación de una línea que se ha mantenido en el Grupo de Estructuras de la E.T.S.I.I. de Sevilla en los últimos diez años. Debe mencionarse especialmente la Tesis de Fernando Medina (1987) en la que se introdujo un modelo numérico similar al que aquí se presenta pero válido, en aquel caso, para presas de gravedad que puedan ser analizadas como sistemas bidimensionales. Ahora, en esta Tesis, se presenta un modelo numérico válido para presas bóveda las cuales han de ser analizadas sísmicamente considerando el problema en su realidad tridimensional. El modelo incluye por primera vez una representación rigurosa de los factores más importantes que influyen en la respuesta sísmica de este tipo de presas.

I.2 CARACTERÍSTICAS DEL PROBLEMA

El análisis sísmico de una presa no es un problema sencillo debido a la existencia de medios de diversas características (hormigón, roca, agua, sedimentos de fondo), cada uno de los cuales presenta un comportamiento propio diferente de los demás. Ante una sollicitación sísmica estos medios (Figura I-1) interaccionan entre sí formando un sistema acoplado en el que ninguna de las partes puede ser estudiada aisladamente. Además, los dominios son muy extensos o prácticamente infinitos. Este hecho dificulta el estudio ya que a diferencia del análisis estático, en el caso dinámico accidentes muy alejados de un punto pueden tener una gran influencia sobre el movimiento y tensiones a que éste se ve sometido.

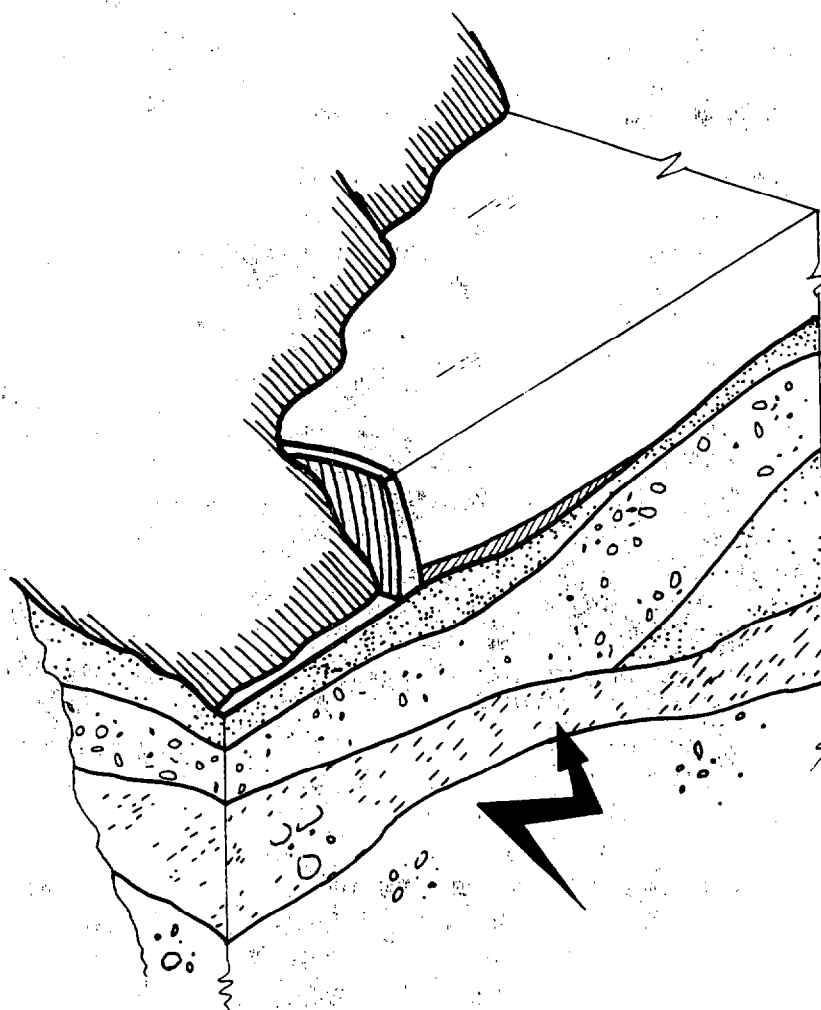


Fig. I-1

En el caso de presas bóveda el problema tiene una geometría que no permite simplificación dimensional alguna y ha de ser estudiado con su carácter tridimensional. Este hecho no es así en numerosas presas de gravedad en las cuales puede suponerse que

el sistema conjunto formado por la presa, el embalse y el suelo que los contiene, tiene un comportamiento que es básicamente el de un sistema plano (Medina et al. 1990).

Cualquier modelo que se utilice para el análisis sísmico de presas bóveda debe pues incluir una representación realista de la presa, el embalse y el suelo o roca que los alberga. Debe además, ser capaz de considerar la interacción dinámica que entre todos ellos se produce cuando son alcanzados por una sollicitación sísmica.

I.3 FACTORES QUE INFLUYEN EN LA RESPUESTA SÍSMICA

Además de la geometría y propiedades de los materiales de la presa, existen una serie de factores que pueden tener gran influencia en el comportamiento sísmico del sistema acoplado suelo-presa-embalse. Pueden mencionarse tres tipos de ellos:

a) Factores relacionados con el emplazamiento

Estos factores tienen una influencia doble: por una parte determinan en gran medida la sollicitación a considerar para una localización concreta, y por otra determinan la respuesta como consecuencia de los fenómenos de interacción dinámica.

a.1 Características geológicas y geotécnicas del emplazamiento, incluyendo discontinuidades subterráneas próximas.

La influencia de las características geotécnicas del emplazamiento sobre el movimiento de la superficie libre ha sido puesta de manifiesto muy claramente tanto por estudios teóricos como por registros experimentales de terremotos. Esto ha dado lugar a la adopción, por parte de las normas sismorresistentes de distintos países, entre ellos España, de modificaciones en la sollicitación de diseño teniendo en cuenta tales propiedades. Igualmente ha sido puesta de manifiesto la influencia de estas características sobre la respuesta de la estructura debido a los efectos de interacción dinámica suelo-estructura.

No sólo es importante el tipo de suelo inmediatamente debajo de la construcción, sino también lo son las propiedades y disposición geométrica de las zonas de materiales diferentes que puedan existir en el subsuelo próximo al emplazamiento. Los primeros estudios de la influencia de las características geotécnicas del emplazamiento tenían en cuenta únicamente las propiedades del suelo en la vertical del punto de ubicación de la construcción, y hacían la hipótesis de que el perfil se extendía uniformemente hasta el infinito en la dirección horizontal. Esto supuso un avance importante y dio lugar a numerosos estudios de amplificación local y de interacción suelo-estructura. Más tarde, coincidiendo en el tiempo con los estudios de la influencia de la topografía, se han estudiado los efectos de las propiedades geológicas y geotécnicas de una zona más amplia, próxima al emplazamiento, en la cual pueden darse variaciones de las características del subsuelo. Los trabajos de Wong y Trifunac (1974), Sánchez-Sesma y Esquivel (1979), Dravinsky (1982), Abascal y Domínguez (1986), y Domínguez y Abascal (1987,1989) han puesto claramente de

manifiesto la gran influencia que la variación de las propiedades del subsuelo en zonas próximas al emplazamiento tiene sobre la amplificación local y la interacción suelo-estructura.

Los estudios antes citados se refieren fundamentalmente a depósitos aluviales y a estratigrafías con un cierto ángulo de buzamiento. Del conjunto de ellos puede extraerse la conclusión de que un modelo realista ha de tener en cuenta la geometría de las discontinuidades subterráneas que eventualmente existan en una zona relativamente amplia próxima al emplazamiento. Únicamente así se tendrá una evaluación fiable de la acción sísmica en un lugar concreto, así como de los efectos de interacción dinámica suelo-estructura.

a.2 Topografía local.

De acuerdo con los resultados teóricos, la difracción de ondas sísmicas por irregularidades topográficas puede generar grandes variaciones del movimiento en puntos situados entre sí a distancias cortas (Bouchon, 1973). La experiencia de los efectos destructores de algunos terremotos así lo demuestra. Este es el caso del terremoto del sur de Italia el 23 de Noviembre de 1980, donde se observaron incrementos de aceleración debido a la topografía de hasta dos grados en la escala MSK (Siro, 1980). Desgraciadamente no existen en el día de hoy registros que permitan evaluar directamente los efectos de la amplificación topográfica. Sin embargo, la certeza de la importancia de estos efectos, hace necesaria su consideración por los procedimientos disponibles, para las grandes estructuras como presas, puentes o centrales eléctricas.

En los últimos veinte años se han publicado numerosos artículos sobre el problema de la difracción de ondas sísmicas por irregularidades topográficas. Entre estos trabajos pueden citarse como más importantes los de Boore (1972), Trifunac (1973), Wong y Trifunac (1974), Sánchez-Sesma y Rosemblyeth (1979), Lee (1982), Sánchez-Sesma (1983), Nowak (1989), Zhang y Chopra (1991). Estos estudios, referentes a formas topográficas sencillas, muestran que el movimiento es muy dependiente de la geometría general del problema, de la posición del punto de observación, del tipo de onda incidente, de la frecuencia de la sollicitación y del ángulo de incidencia de las ondas. La importancia de la topografía en general y de los factores antes indicados, da lugar a unos movimientos muy dependientes de la geometría real del desplazamiento, así como la ubicación y forma concreta de la construcción en estudio. Se hace pues necesario, para una estimación lo más realista posible de las acciones, realizar un modelo del emplazamiento, que incluya los accidentes topográficos cercanos más importantes.

b) Factores con influencia directa sobre la presión hidrodinámica

Sobre la presión hidrodinámica influyen directa y fundamentalmente tres factores:

b.1 Compresibilidad del agua.

b.2 Geometría del vaso.

b.3 Presencia de sedimentos de fondo.

La importancia de estos factores ha sido claramente puesta de manifiesto por Chopra y sus colaboradores en diversos estudios para presas de gravedad y presas bóveda (Chopra y Chakrabarti, 1981; Hall y Chopra, 1982, Fenves y Chopra, 1983,1984,1985; Fok y Chopra, 1986).

Resulta claro que la no consideración de la compresibilidad del agua, la geometría real del vaso o los sedimentos (que tienen un efecto de absorción de las ondas que llegan al fondo), no permite una representación realista de los fenómenos de propagación de ondas que se dan en el interior del agua y por tanto de la presión hidrodinámica en el trasdós de la presa.

c) Desplazamientos diferenciales debidos al tamaño de la estructura

Las dimensiones de este tipo de estructuras imponen, incluso en campo libre, la consideración de posibles desplazamientos diferenciales dependientes de la dirección de las ondas. Considérese por ejemplo el período de 0.2 sg. para el que se produce el máximo del espectro en suelo rocoso. Una velocidad típica de propagación de las ondas S en estos medios es del orden de 2500 m/sg, para la cual la longitud de onda asociada es de 500 m. Esto indica que en distancias del orden de 125 m se pueden producir grandes desplazamientos relativos.

Debe indicarse por último, que en lo que se refiere a presas bóveda los estudios realizados hasta el momento ponen de manifiesto que los efectos de interacción agua-presa y de la absorción de ondas en el fondo y contorno del embalse tienen más importancia que en las de gravedad y no deben ser olvidados en ningún caso.

Un modelo para el análisis sísmico de presas bóveda que no contemplara adecuadamente la mayor parte de los factores antes señalados estaría representando un problema muy distinto del real. De él sería no sólo arriesgado sino absurdo extraer conclusiones.

I.4 MODELOS NUMÉRICOS

Existen un número de modelos numéricos para el análisis dinámico de algunos aspectos del problema de la respuesta sísmica de presas bóveda. Así por ejemplo, se han desarrollado diversos modelos para el cálculo de la presión hidrodinámica mediante Elementos Finitos (Hall y Chopra, 1983), Elementos de Contorno (Aubry y Crepel, 1986; Jablonsky y Humar, 1990) y Diferencias Finitas (Wang y Hung, 1990).

Sin embargo, existe prácticamente un único modelo global que sea utilizado para el análisis sísmico de presas bóveda teniendo en cuenta la geometría tridimensional y los efectos de interacción entre suelo, agua y presa (Fok y Chopra, 1986a, b y c). Es un modelo de Elementos Finitos y dada su importancia y difusión se comentan a continuación algunas de sus características.

El modelo emplea para la discretización de la presa elementos de tipo lámina gruesa cuya idoneidad ha sido ya claramente demostrada. El agua embalsada es modelada en

la zona más próxima a la presa, que puede ser de geometría irregular, mediante Elementos Finitos tridimensionales para un comportamiento definido por la ecuación de Helmholtz. Para poder considerar el conjunto del embalse sin un costo desorbitado se supone una geometría que se extiende uniformemente hasta el infinito. Este canal uniforme es discretizado mediante elementos infinitos. El suelo es supuesto como un semiespacio uniforme y representado mediante elementos tridimensionales hasta una distancia determinada de los estribos de la presa. Como una interrupción de la discretización produciría una serie de reflexiones de ondas indeseadas, el suelo se supone que es un material deformable con densidad nula. La interacción entre la presa y el suelo deformable se realiza acoplando los elementos de la interfase. La interacción entre el agua y el vaso se modela de una manera aproximada mediante un coeficiente de absorción basado en la propagación de ondas monodimensional.

El modelo reseñado supuso un extraordinario avance en el cálculo sísmico de presas bóveda, pero presenta aún importantes carencias:

a) La base es necesariamente un semiespacio elástico.

b) La simplificación de que la base tiene densidad nula sólo está justificada por la necesidad de resolver el problema de algún modo. Con esta simplificación los fenómenos de interacción suelo-estructura no son bien considerados y el efecto de la distribución espacial del movimiento del suelo, el cual produce una excitación no uniforme, no puede ser tenido en cuenta. En general puede decirse que los agentes locales de tipo geológico, geotécnico y topográfico no son tenidos en cuenta por este modelo. Muy recientemente Zhoung y Chopra (1991) han comenzado a estudiar alternativas al modelo que eviten estos problemas haciendo uso de una formulación integral bidimensional.

c) La interacción entre el agua y la base no es representada rigurosamente y requiere la estimación de un factor de absorción que está basado en una aproximación monodimensional de la interacción. En el caso de que haya sedimentos de fondo o el semiespacio no sea uniforme este factor es muy incierto.

d) No se considera la interacción conjunta agua-suelo-presa ya que el modelo de suelo sólo es empleado para la interacción suelo-estructura siendo independientemente considerada la interacción agua-suelo.

e) La geometría del embalse sólo puede ser representada con fiabilidad en la zona muy próxima a la presa. La hipótesis de canal uniforme infinito puede ser claramente errónea.

Debe indicarse que en los últimos años se han desarrollado diversos trabajos que abordan la introducción de los fenómenos no lineales que puedan producirse en la respuesta sísmica de presas (Dowling y Hall, 1989; El-Aidi y Hall, 1989; Vargas-Loli y Fenves, 1989). En la presente Tesis no se abordan este tipo de fenómenos que si bien son de gran interés tienen una importancia relativa en la mayor parte de los casos. Tiene sentido abordarlos una vez resueltas las carencias de los modelos lineales antes indicados.

I.5 MODELO PROPUESTO. PRESENTACIÓN

A la vista de la geometría del problema, que incluye varios medios tridimensionales de gran extensión, y de los factores que influyen sobre la respuesta sísmica de una presa bóveda, que han sido reseñados en el apartado I.3, un modelo que emplee Elementos de Contorno se presenta como una alternativa de gran interés. La idoneidad de este método para diversos problemas dinámicos de interacción suelo-estructura ha sido claramente demostrada en los últimos quince años. El modelo que se presenta en esta Tesis incluye las siguientes representaciones de los distintos medios:

- a) La presa: Es considerada como un medio tridimensional viscoelástico uniforme. Se discretiza mediante Elementos de Contorno con geometría y representación de las variables de tipo parabólico en las dos direcciones. Se emplean elementos de tipo triangular y cuadrilátero.
- b) El agua: Se considera como un fluido no viscoso, compresible y sometido a pequeñas perturbaciones dinámicas. Se comporta dinámicamente según la ecuación de Helmholtz. Se representa mediante Elementos de Contorno de tipo parabólico en dos direcciones tanto para las variables de campo como para la geometría. Dado que sólo son discretizados los contornos del embalse (no lo es la superficie libre) pueden ser representados grandes volúmenes de agua y la geometría del embalse puede ser reproducida con precisión en una gran extensión. Si es necesario puede incluirse una representación de tipo canal infinito como en el caso de Elementos Finitos, pero esto sólo se hará a grandes distancias de la presa.
- c) El suelo: Se representa como un medio tridimensional viscoelástico uniforme. Su superficie es discretizada hasta una distancia considerable de la presa haciendo uso de Elementos de Contorno parabólicos en dos direcciones tanto para la geometría como para las variables de campo. Este tipo de representación permite reproducir con bastante precisión la topografía cercana y tener en cuenta la distribución espacial de la excitación. Ambos factores han sido señalados como de importancia en la respuesta sísmica de la presa y ambos no podían ser tenidos en cuenta en el modelo de Elementos Finitos. El modelo del suelo puede incluir distintas zonas viscoelásticas con propiedades diferentes. La consideración de sedimentos de fondo como una zona poroelástica saturada, cuya formulación de Elementos de Contorno ha sido recientemente desarrollada, Dominguez (1991), puede llevarse a cabo con facilidad. Si bien no se incluirá en el modelo empleado en esta Tesis, es uno de los claros desarrollos futuros del modelo.
- d) Interacciones: La interacción sólido-sólido y sólido-líquido se hace de una manera rigurosa aplicando condiciones de equilibrio y compatibilidad entre los movimientos. Esto permite una buena representación de la interacción dinámica entre el embalse y la presa, entre el embalse y el suelo y entre el suelo y la presa. Al ser incluidos los tres medios y sus interacciones en un único modelo la interacción conjunta entre los tres es considerada automáticamente.

En 1987 los Profesores Clough y Guahdgou señalaban como conclusiones del "China-US Workshop" celebrado en Pekín algunas necesidades urgentes de mejora de los modelos

existentes. Entre ellas se mencionaban las siguientes: la distribución espacial del movimiento del suelo debe ser tomada en cuenta; el suelo debe ser considerado realmente como un sólido continuo. Estos y otros avances son alcanzados en el modelo de Elementos de Contorno que se presenta.

I.6 ANTECEDENTES DE ELEMENTOS DE CONTORNO EN PROBLEMAS DE INTERACCIÓN DINÁMICA SUELO-ESTRUCTURA

Dada su capacidad de representar adecuadamente el comportamiento dinámico de regiones muy extensas o infinitas, el M.E.C. ha sido empleado en los últimos doce años para estudios de diversos problemas de interacción dinámica suelo-estructura. La formulación más extendida de M.E.C. (la directa) ha sido aplicada para el cálculo de rigideces de cimentaciones superficiales o enterradas. Dominguez y Roësset (1978), Chapel (1981), Abascal (1984), Von Estorff y Schmid (1984), Abascal y Dominguez (1984), Gómez-Lera et al. (1985), Rizzo et al. (1985), Alarcón et al. (1989) y Emperador y Dominguez (1989) han calculado rigideces dinámicas de cimentaciones de varias formas geométricas sobre suelos homogéneos, estratificados o con inclusiones de diversa geometría trabajando en el dominio de la frecuencia. Karabalis y Beskos (1984), y Karabalis et al. (1984) lo hicieron en el dominio del tiempo. La formulación indirecta ha sido también empleada para el cálculo de rigideces de cimentaciones; normalmente en combinación con una solución fundamental del semiespacio (Apsel, 1979).

El análisis de la respuesta dinámica de cimentaciones sometidas a ondas incidentes ha sido también acometido por diversos autores empleando el M.E.C. tanto en su formulación directa como indirecta. Pueden mencionarse, Abascal y Dominguez (1990), Spyarakos (1984) y Karabalis (1984).

Otros trabajos importantes que abordan distintos problemas, dentro del terreno de la interacción dinámica suelo-estructura usando el M.E.C. son los de: Antes y Von Estorff (1987, 1988), Chapel (1987), Kontoni et al. (1987), Hillmer y Schmid (1988), Von Estorff y Kausel (1989), Von Estorff et al. (1990) y Banarjee y Mamoon (1990). Por último deben reseñarse los trabajos que hacen uso del M.E.C. para problemas de dinámica de presas. Entre ellos cabe destacar los de Antes y Von Estorff (1987) y Medina et al. (1990) además de los ya citados de Aubry y Crepel (1986) y Jablonsky y Humar (1990).

CAPÍTULO II**BASES DEL COMPORTAMIENTO DINÁMICO
DE MEDIOS SÓLIDOS Y LÍQUIDOS**

- II.1 - Propagación de ondas en medios viscoelásticos
- II.2 - Ecuaciones que rigen el comportamiento dinámico del agua
- II.3 - Propagación de ondas hidrodinámicas en un canal rígido infinito de sección rectangular

En el problema del análisis de la respuesta sísmica de presas están involucrados diferentes medios, de distinta naturaleza, que componen el sistema global bajo estudio. Presa, terreno y agua embalsada forman un sistema cuyo comportamiento es sensiblemente distinto al de cada uno de ellos por separado. Antes de abordar el estudio acoplado de los tres medios será necesario plantear las ecuaciones matemáticas que sirven para representar el comportamiento dinámico de cada fase, y que corresponden a modelar las fases sólidas como medios viscoelásticos, lineales, homogéneos e isotrópicos, y la fase líquida como un fluido compresible de viscosidad despreciable, en un estado lineal de pequeñas perturbaciones. En este capítulo se exponen brevemente estas ecuaciones empezando por las correspondientes a la fase sólida, y continuando con las del agua. Finalmente se aborda el estudio de canales infinitos en los que se produce una propagación estacionaria de ondas en la dirección del canal que no se amortiguan con la distancia.

II.1 PROPAGACIÓN DE ONDAS EN MEDIOS VISCOELÁSTICOS

La ecuación de Navier se puede escribir:

$$(\lambda + 2G) \underline{\nabla} \underline{\nabla} \cdot \underline{u} - G \underline{\nabla} \times \underline{\nabla} \times \underline{u} = \rho \ddot{\underline{u}} \quad (2.1)$$

Si se tiene en cuenta que la dilatación cúbica y el vector rotación son respectivamente:

$$\begin{aligned} \theta &= \underline{\nabla} \cdot \underline{u} \\ \underline{\Omega} &= \frac{1}{2} \underline{\nabla} \times \underline{u} \end{aligned} \quad (2.2)$$

la ecuación de Navier se transforma en

$$(\lambda + 2G) \underline{\nabla} \theta - 2G \underline{\nabla} \times \underline{\Omega} = \rho \ddot{\underline{u}}. \quad (2.3)$$

Tomando la divergencia y el rotacional, y teniendo en cuenta

$$\begin{aligned} \underline{\nabla} (\underline{\nabla} \times \underline{\Omega}) &= 0 \\ \underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \theta) &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

se obtiene:

$$(\lambda + 2G) \nabla^2 \theta = \rho \ddot{\theta} \quad (2.5)$$

y

$$\begin{aligned} -2G \underline{\nabla} \times \underline{\nabla} \times \underline{\Omega} &= \rho \underline{\nabla} \times \ddot{\underline{u}} \\ -2G (\underline{\nabla} \underline{\nabla} \cdot \underline{\Omega} - \nabla^2 \underline{\Omega}) &= 2\rho \ddot{\underline{\Omega}} \\ G \nabla^2 \underline{\Omega} &= \rho \ddot{\underline{\Omega}}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

y llamando:

$$c_s^2 = \frac{G}{\rho}, \quad c_p^2 = \frac{\lambda + 2G}{\rho} \quad (2.7)$$

queda

$$\nabla^2 \theta = \frac{1}{c_p^2} \ddot{\theta} \quad (2.8)$$

$$\nabla^2 \underline{\Omega} = \frac{1}{c_s^2} \ddot{\underline{\Omega}}.$$

Ahora bien, una onda propagándose en una dirección definida por el vector $\underline{p}$ es una perturbación que responde a la forma:

$$f(-\underline{p} \cdot \underline{x} + ct) \quad (2.9)$$

Lo que pasa en $\underline{x}_1$ en el instante t_1 es lo mismo que lo que pasa en $\underline{x}_2$ en el instante t_2 siempre que

$$\begin{aligned} f(-\underline{p} \cdot \underline{x}_1 + ct_1) &= f(-\underline{p} \cdot \underline{x}_2 + ct_2) \\ \underline{p} \cdot (\underline{x}_2 - \underline{x}_1) &= c(t_2 - t_1) \end{aligned} \quad (2.10)$$

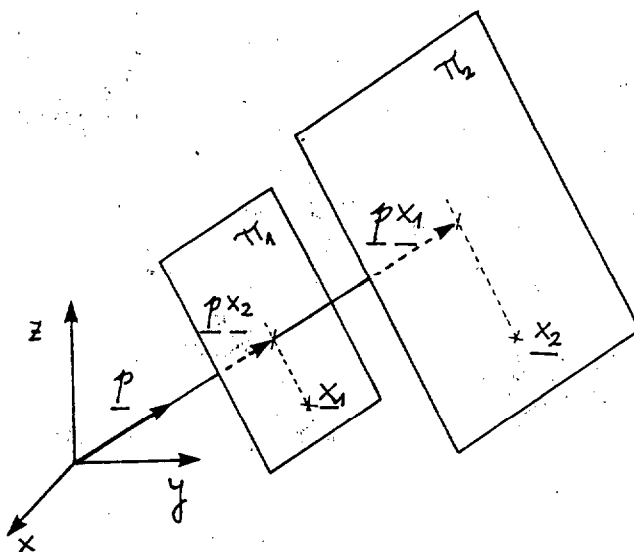


Fig. II-1

y por tanto c es una velocidad de propagación.

Teniendo en cuenta la primera de las ecuaciones (2.8), y admitiendo un estado de movimientos armónico con pulso ω , una solución de la ecuación será:

$$\theta = A \exp[i(\omega t - kx)] \quad (2.11)$$

que se puede expresar como

$$\theta = A \exp \left[\frac{i\omega}{c_p} (c_p t - lx - my - nz) \right] \quad (2.12)$$

$$p_x = l = \frac{k_x}{\omega} c_p \quad p_y = m = \frac{k_y}{\omega} c_p \quad p_z = n = \frac{k_z}{\omega} c_p$$

derivando:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \theta &= - \left(\frac{\omega}{c_p} \right)^2 (l^2 + m^2 + n^2) \theta \\ \ddot{\theta} &= -\omega^2 \theta \end{aligned} \right\} \nabla^2 \theta = \frac{1}{c_p^2} \ddot{\theta} \Rightarrow l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (2.13)$$

de manera que c_p es la velocidad de propagación y $\mathbf{p}(l,m,n)$ es el vector unitario en la dirección de propagación.

Llamando:

$$f_p = \exp \left[\frac{i\omega}{c_p} (c_p t - lx - my - nz) \right] \quad (2.14)$$

$$\theta = A f_p$$

los movimientos correspondientes a este tipo de ondas pueden obtenerse de

$$\theta = u_{p,x} + v_{p,y} + w_{p,z} \quad (2.15)$$

de manera que

$$\left. \begin{aligned} u_p &= A_p l f_p \\ v_p &= A_p m f_p \\ w_p &= A_p n f_p \end{aligned} \right\} ; \quad A_p = \frac{ic_p}{\omega} A \quad (2.16)$$

Además debe cumplirse

$$\underline{\nabla} \times \underline{u}_p = 0 \quad (2.17)$$

por lo que la onda recibe el nombre de 'irrotacional'. Así pues se trata de una onda que se propaga con velocidad c_p y cuyos movimientos u_p v_p w_p siguen la dirección de propagación.

De forma semejante se procede para la segunda ecuación de onda:

$$\nabla^2 \underline{\Omega} = \frac{1}{c_s^2} \ddot{\underline{\Omega}} \quad (2.18)$$

$$\underline{\Omega} = B \exp \left[\frac{i\omega}{c_s} (c_s t - l' x - m' y - n' z) \right]$$

y llamando:

$$f_s = \exp \left[\frac{i\omega}{c_s} (c_s t - l' x - m' y - n' z) \right] \quad (2.19)$$

$$B_s = 2 \frac{ic_s}{\omega} B$$

el campo de movimientos correspondiente es:

$$\left. \begin{aligned} u_s &= (n' B_{ys} - m' B_{zs}) f_s \\ v_s &= (l' B_{zs} - n' B_{xs}) f_s \\ w_s &= (m' B_{xs} - l' B_{ys}) f_s \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

y

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u}_s = 0 \quad (2.21)$$

cumpléndose simultáneamente que

$$\left. \begin{array}{l} \underline{\nabla} \cdot \underline{\Omega} = 0 \\ \underline{u}_s = (\underline{s} \times \underline{B}_s) f_s \end{array} \right\} \begin{array}{l} \underline{s} \cdot \underline{B} = 0 \\ \underline{u}_s \cdot \underline{s} = 0 \\ \underline{u}_s \cdot \underline{B} = 0 \end{array} \quad (2.22)$$

$\underline{u}_s$, $\underline{B}$ y la dirección de propagación $\underline{s}$ forman un sistema de tres vectores perpendiculares entre sí.

La solución total del campo de movimientos será:

$$\underline{u} = \underline{u}_p + \underline{u}_s \quad (2.23)$$

En cuanto a la onda S, es posible descomponer el movimiento $\underline{u}_s$ en dos direcciones ortogonales, en un plano perpendicular a $\underline{s}$. Así, se definen:

$\underline{u}_{SH}$ contenido en un plano horizontal (sin componente z),

$\underline{u}_{SV}$ perpendicular a $\underline{u}_{SH}$ y $\underline{s}$ a la vez;

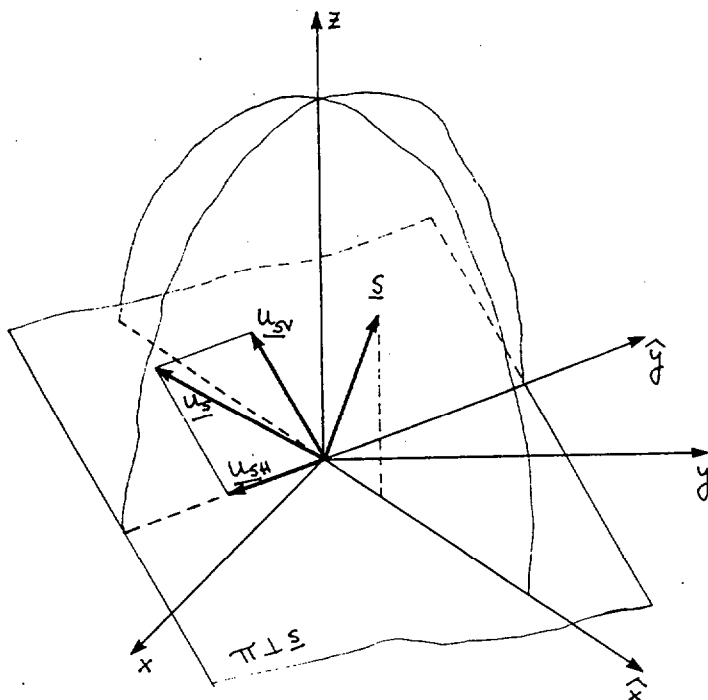


Fig. II-2

definiendo las amplitudes

$$A_{SH} = 2i \frac{c_s}{\omega} \frac{B_z}{\sqrt{l'^2 + m'^2}} \quad (2.24)$$

$$A_{SV} = 2i \frac{c_s}{\omega} \frac{l' B_y - m' B_x}{\sqrt{l'^2 + m'^2}}$$

los movimientos u_s se expresan:

$$\begin{aligned} u_s &= \left(\frac{l' n'}{\sqrt{l'^2 + m'^2}} A_{SV} - \frac{m'}{\sqrt{l'^2 + m'^2}} A_{SH} \right) f_s \\ v_s &= \left(\frac{m' n'}{\sqrt{l'^2 + m'^2}} A_{SV} + \frac{l'}{\sqrt{l'^2 + m'^2}} A_{SH} \right) f_s \\ w_s &= - \sqrt{l'^2 + m'^2} A_{SV} f_s \end{aligned} \quad (2.25)$$

Las ecuaciones previas son válidas con l, m, n y l', m', n' tanto reales como complejos, pero la interpretación física de las direcciones de propagación debe ser revisada para el caso de valores complejos. Sea el ejemplo:

$$p \equiv \begin{cases} l = \sqrt{1 + \alpha^2} \\ m = 0 \\ n = i\alpha \end{cases} ; \begin{aligned} f_p &= \exp \left[\frac{i\omega}{c_p} (c_p t - \sqrt{1 + \alpha^2} x - i\alpha z) \right] \\ f_p &= \exp \left(\frac{\alpha \omega z}{c_p} \right) \exp \left[\frac{i\omega}{c_p'} (c_p' t - x) \right] \\ c_p' &= \frac{c_p}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \end{aligned} \quad (2.26)$$

es decir, el movimiento corresponde a una onda propagándose según x con una velocidad c_p y una amplitud que crece o decrece exponencialmente con z . El caso general es que decrezca, encontrando las llamadas ondas superficiales (ondas de Rayleigh o Love), que sólo son posibles como consecuencia de condiciones de contorno (semiespacios) o de discontinuidades en las propiedades del medio. En el medio infinito isótropo y homogéneo la solución siempre puede ser expresada en términos de ondas de volumen.

Ondas que se propagan en un plano

El sistema de referencia puede elegirse convenientemente de tal manera que la dirección de propagación esté contenida en un plano coordenado. Así, si ocurre que $m=m'=0$, y las ondas se propagan en el plano xz , las ecuaciones de onda se simplifican obteniéndose:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + 2G) \nabla^2 \theta &= \rho \ddot{\theta} \\ G \nabla^2 \Omega_y &= \rho \ddot{\Omega}_y \\ G \nabla^2 v &= \rho \ddot{v} \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

y la solución general para un movimiento armónico estacionario viene dada por un sumatorio de términos de la forma:

$$\begin{aligned} u &= l A_p f_p + n' A_{sv} f_s \\ v &= A_{sh} g_s \\ w &= n A_p f_p - l' A_{sv} f_s \end{aligned} \quad (2.28)$$

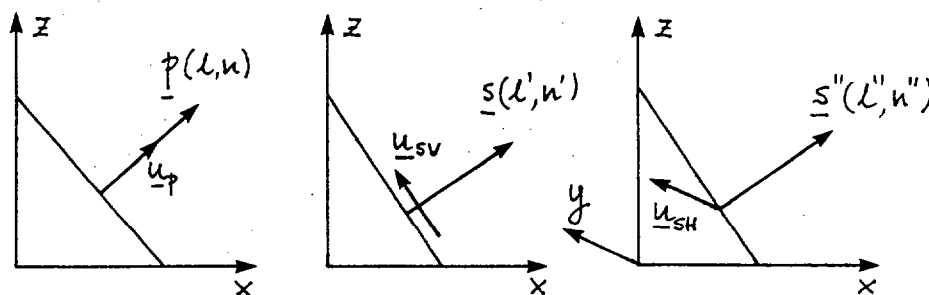


Fig. II-3

donde:

$$l^2 + m^2 = 1 \quad , \quad l'^2 + m'^2 = 1 \quad , \quad l''^2 + m''^2 = 1$$

$$f_p = \exp \left[\frac{i\omega}{c_p} (c_p t - l x - n z) \right]$$

$$f_s = \exp \left[\frac{i\omega}{c_s} (c_s t - l' x - n' z) \right]$$

$$g_s = \exp \left[\frac{i\omega}{c_s} (c_s t - l'' x - n'' z) \right]$$

(2.29)

Propagación de ondas monodimensional

Si las propiedades del sólido y las condiciones de contorno sólo dependen de una de las coordenadas, por ejemplo de z , todas las ondas tendrán la misma variación según el eje x , lo que se traduce en

$$\frac{i\omega}{c_p} l = \frac{i\omega}{c_s} l' \Rightarrow \frac{l}{c_p} = \frac{l'}{c_s} \quad (2.30)$$

de este modo:

$$f_p = e^{-\frac{i\omega}{c_p} n z} e^{\frac{i\omega}{c_p} (c_p t - l x)} = e^{-\frac{i\omega}{c_p} n z} f(x, t) \quad (2.31)$$

$$f_s = e^{-\frac{i\omega}{c_s} n' z} e^{\frac{i\omega}{c_s} (c_s t - l' x)} = e^{-\frac{i\omega}{c_s} n' z} f(x, t)$$

con

$$\frac{l}{c_p} = \frac{l'}{c_s} \quad , \quad n^2 = 1 - l^2 \quad , \quad n'^2 = 1 - l'^2 \quad (2.32)$$

y l/c_p constante con la profundidad.

Para un valor dado de l , l' está fijado, pero n y n' pueden tomar el signo positivo y negativo de las raíces. Existirán ondas P y SV propagándose en sentido positivo (A_p y A_{sv}) y negativo de z (A_p y A_{sv}), y la solución general del campo de movimientos puede ponerse como:

$$\begin{aligned}
 u &= \left[l A_p e^{\frac{i\omega}{c_r} n z} + l A_p' e^{-\frac{i\omega}{c_r} n z} - n' A_{SV} e^{\frac{i\omega}{c_s} n' z} + n' A_{SV}' e^{-\frac{i\omega}{c_s} n' z} \right] \\
 &\quad \cdot f(x, t) \\
 v &= \left[-n A_p e^{\frac{i\omega}{c_r} n z} + n A_p' e^{-\frac{i\omega}{c_r} n z} - l' A_{SV} e^{\frac{i\omega}{c_s} n' z} - l' A_{SV}' e^{-\frac{i\omega}{c_s} n' z} \right] \\
 &\quad \cdot f(x, t)
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

con

$$n = \sqrt{1 - l^2} \quad , \quad n' = \sqrt{1 - l'^2} \quad . \tag{2.34}$$

II.2 ECUACIONES QUE RIGEN EL COMPORTAMIENTO DINÁMICO DEL AGUA

El punto de partida serán las ecuaciones de Navier-Stokes para un estado de equilibrio

1. Así, la condición de continuidad se expresa como:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla (\rho_1 v_1) = 0 \tag{2.35}$$

y la ecuación de equilibrio dinámico:

$$\rho_1 \frac{\partial v_1}{\partial t} + \rho_1 v_1 \nabla v_1 = -\nabla p_1 + \mu \nabla^2 v_1 \quad . \tag{2.36}$$

Considerando un estado de pequeñas perturbaciones las variables pueden ser linealizadas:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= p_0 + p \\
 \rho_1 &= \rho_0 + \rho \\
 v_1 &= v_0 + v
 \end{aligned}
 \tag{2.37}$$

donde p representa la presión hidrodinámica (incremento sobre la presión hidrostática), ρ la variación de densidad que provoca la presión y v la velocidad, y donde se ha notado con el subíndice 0 las variables correspondientes a un estado inicial de reposo,

$$v_0 = 0, \quad v_1 = v \tag{2.38}$$

La sustitución en (2.35) proporciona:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho_0 + \rho) \nabla v + v \nabla (\rho_0 + \rho) &= 0 \\
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla v + \rho \nabla v + v \nabla \rho_0 + v \nabla \rho &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.39}$$

y despreciando términos de orden inferior se obtiene la ecuación de continuidad para pequeñas perturbaciones:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla v = 0 \tag{2.40}$$

A su vez, la ecuación de equilibrio se transforma en:

$$(\rho_0 + \rho) \frac{\partial v}{\partial t} + (\rho_0 + \rho) \frac{\partial v_0}{\partial t} + (\rho_0 + \rho) v \nabla v = -\nabla p - \nabla p_0 + \mu \nabla^2 v \tag{2.41}$$

del planteamiento de la ecuación de equilibrio en el estado de reposo se deduce:

$$\rho_0 \frac{\partial v_0}{\partial t} = -\nabla p_0 \tag{2.42}$$

por lo que despreciando ρ frente a ρ_0 en el segundo sumando del primer término:

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial t} + (\rho_0 + \rho) v \nabla v = -\nabla p + \mu \nabla^2 v \quad (2.43)$$

y despreciando los términos de segundo orden y el término de viscosidad, la ecuación de equilibrio para pequeñas perturbaciones es

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\nabla p \quad (2.44)$$

Definiendo la celeridad como

$$c^2 = \frac{p}{\rho} \quad (2.45)$$

(2.44) se transforma en:

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + c^2 \nabla \rho = 0 \quad (2.46)$$

Derivando la ecuación de continuidad respecto al tiempo y tomando divergencia de la ecuación de equilibrio:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla v &= 0 \\ c^2 \nabla^2 \rho + \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla v &= 0 \end{aligned} \quad (2.47)$$

restando ambas ecuaciones y teniendo en cuenta la definición de celeridad se obtiene la ecuación que se conoce como ecuación de ondas:

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (2.48)$$

y que gobierna el movimiento, siendo p la presión hidrodinámica y c la velocidad de propagación.

De forma parecida, tomando el gradiente en la ecuación de continuidad, derivando la de equilibrio con respecto a t , y restando ambas, se obtiene una ecuación análoga para las velocidades:

$$\nabla^2 v = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2.49)$$

Cuando la excitación y las condiciones de contorno siguen una ley armónica, con pulso ω , la presión puede expresarse como

$$p(x, t) = p(x; \omega) e^{i\omega t} \quad (2.50)$$

donde $p(x; \omega)$ es la función de respuesta compleja. En estas condiciones la ecuación de ondas (2.48) se convierte en la conocida como ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 p + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0 \quad (2.51)$$

Esta ecuación será empleada para el estudio dinámico del agua, cuando ésta se considera como un fluido compresible, de viscosidad despreciable y en la hipótesis de pequeñas perturbaciones.

En el régimen armónico que se está suponiendo, la ecuación de equilibrio (2.44) permite obtener las relaciones

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} &= -\nabla p \\ i \rho_0 \omega v &= -\nabla p \end{aligned} \quad (2.52)$$

y para una dirección determinada η , el movimiento u_η según ella se expresa como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \eta} &= -i \rho_0 \omega v_\eta, \\ v_\eta &= \frac{\partial u_\eta}{\partial t} = i \omega u_\eta, \end{aligned} \quad (2.53)$$

obteniéndose finalmente

$$u_{\eta} = \frac{1}{\rho_0 \omega^2} \frac{\partial p}{\partial \eta} \quad (2.54)$$

II.3 PROPAGACIÓN DE ONDAS HIDRODINÁMICAS EN UN CANAL RÍGIDO INFINITO DE SECCIÓN RECTANGULAR

Sea un canal de agua de sección rectangular como el mostrado en la figura II-4, que se extiende uniformemente hasta el infinito.

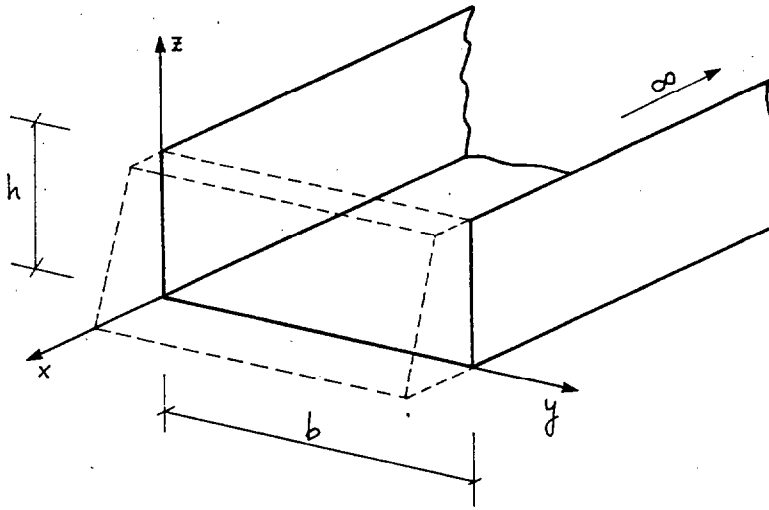


Fig. II-4

Un movimiento en la dirección anteroposterior del trasdós de la presa, producido por la excitación sísmica, provoca en el agua la aparición de ondas de presión hidrodinámica propagándose longitudinalmente hacia aguas arriba.

Como se ha visto, la ecuación que gobierna el comportamiento dinámico del agua en régimen armónico, cuando ésta se considera como un fluido compresible, no viscoso, en un estado de pequeñas perturbaciones, es:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0 \quad (2.55)$$

La solución de esta ecuación cuando se produce una propagación longitudinal de ondas en el sentido negativo del eje x es del tipo:

$$p = p(y, z) e^{Kx} \quad (2.56)$$

que transforma la ecuación de ondas en

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \left(K^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) p = 0 \quad (2.57)$$

cuya solución, para la sección rígida rectangular que se está considerando, es:

$$p(y, z) = p(y) p(z) = (A e^{i\lambda_y y} + A' e^{-i\lambda_y y}) (B e^{i\lambda_z z} + B' e^{-i\lambda_z z}) \quad (2.58)$$

e introducida en (2.57) lleva a obtener:

$$-\lambda_y^2 - \lambda_z^2 + K^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad (2.59)$$

$$K = \pm \sqrt{\lambda_y^2 + \lambda_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

En la base y la superficie libre del canal se imponen las condiciones de contorno:

$$\left. \begin{array}{lll} p = 0 & \text{en} & z = h \\ \frac{\partial p}{\partial z} = 0 & \text{en} & z = 0 \end{array} \right\} \forall y \quad (2.60)$$

obteniéndose:

$$\left. \begin{aligned} A e^{i\lambda_z h} + A' e^{-i\lambda_z h} &= 0 \\ i\lambda_z A - i\lambda_z A' &= 0 \Rightarrow A = A' \end{aligned} \right\} \quad (2.61)$$

$$A(e^{i\lambda_z h} + e^{-i\lambda_z h}) = 0, \quad \cos(\lambda_z z) = 0$$

$$\lambda_z = \frac{2n-1}{2h} \pi \quad n=1,2,3,\dots$$

y en las paredes laterales rígidas del canal se impone velocidad nula normal al contorno:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \quad \text{en} \quad y = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \quad \text{en} \quad y = b \end{aligned} \right\} \quad \forall z \quad (2.62)$$

con ello se tiene

$$\left. \begin{aligned} i\lambda_y B - i\lambda_y B' &= 0 \Rightarrow B = B' \\ i\lambda_y B e^{i\lambda_y b} - i\lambda_y B' e^{-i\lambda_y b} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.63)$$

$$i\lambda_y B(e^{i\lambda_y b} - e^{-i\lambda_y b}) = 0, \quad \sin(\lambda_y b) = 0$$

$$\lambda_y = \frac{m-1}{b} \pi \quad m=1,2,3,\dots$$

Por tanto la función de presiones toma la forma:

$$p(y)p(z) = A \cos(\lambda_z z) B \cos(\lambda_y y) \quad (2.64)$$

y la solución general para la ecuación (2.55) resulta ser

$$p = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} e^{K_{nm} x} \cos(\lambda_z^n z) \cos(\lambda_y^m y) \quad (2.65)$$

siendo

$$\begin{aligned}\lambda_z^n &= \frac{2n-1}{2h} \pi & n=1,2,3 \dots \\ \lambda_y^m &= \frac{m-1}{b} \pi & m=1,2,3 \dots \\ K_{nm} &= \sqrt{(\lambda_z^n)^2 + (\lambda_y^m)^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}\end{aligned}\quad (2.66)$$

Los movimientos en la dirección longitudinal hacia aguas arriba pueden obtenerse por derivación,

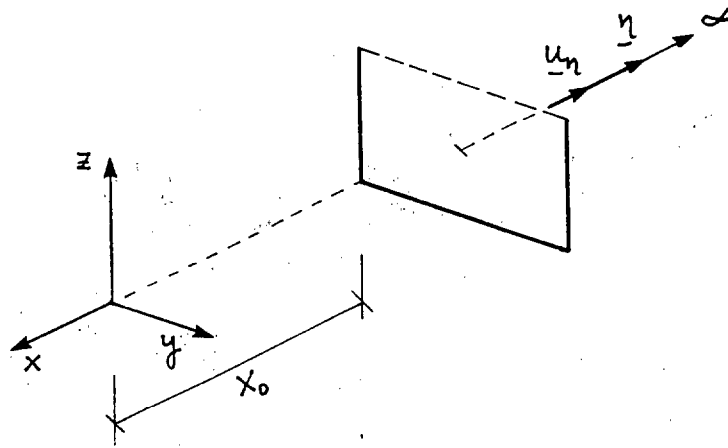


Fig. II-5

$$\begin{aligned}u &= \frac{1}{\rho \omega^2} \frac{\partial p}{\partial \eta} = -\frac{1}{\rho \omega^2} \frac{\partial p}{\partial x} \\ u &= -\frac{1}{\rho \omega^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} K_{nm} e^{K_{nm} x} \cos(\lambda_z^n z) \cos(\lambda_y^m y)\end{aligned}\quad (2.67)$$

En general, si en una sección $x=x_0$ se tiene un movimiento anteroposterior :

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=x_0} = \rho \omega^2 u_0(y, z) \quad (2.68)$$

el desarrollo de $u_0(y, z)$ proporciona

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=x_0} = \rho \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{(2n-1)(2m-1)} \cos(\lambda_z^n z) \cos(\lambda_y^m y) \quad (2.69)$$

y la solución del campo de presiones será del tipo:

$$p = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} e^{K_{nm}(x-x_0)} \cos(\lambda_z^n z) \cos(\lambda_y^m y) \quad (2.70)$$

luego

$$A_{nm} = \rho \omega^2 \frac{a_{(2n-1)(2m-1)}}{K_{nm}} \quad (2.71)$$

Del análisis del exponente de los términos de la ley de presiones, K_{nm} , se observa que para un valor dado de la frecuencia ω tal que

$$\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \leq (\lambda_z^n)^2 + (\lambda_y^m)^2 \quad (2.72)$$

todos los valores de K_{nm} son reales y aumentan con n y m . Por tanto, en este caso, todos los términos de la serie de la ecuación (2.70) decrecen al aumentar el valor absoluto de x en el sentido negativo del eje, y consecuentemente el número de términos necesarios para representar la ley de presiones será menor a medida que x disminuye. Sin embargo, para valores más altos de ω , uno o varios valores de K_{nm} se convierten en imaginarios y aparecen modos viajeros que no se amortiguan al aumentar la distancia aguas arriba. Para un valor dado de la frecuencia ω habrá tantos modos viajeros como frecuencias de corte existan, es decir,

$$\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 = (\lambda_z^n)^2 + (\lambda_y^m)^2 \quad (2.73)$$

mientras que los restantes términos de la serie corresponden a modos evanescentes.

Para una representación correcta de la presión a una cierta distancia $x < 0$ con un número finito de términos del desarrollo, será necesario considerar al menos todos aquellos que lleven asociado un valor de K_{nm} imaginario.

Si en el análisis del estado de presiones en una sección cualquiera $x = x_0 < 0$, el rango de frecuencias de interés requiere representar $N \times M$ términos de la serie, es posible

encontrar una relación matricial entre las presiones y los movimientos normales si para $N \times M$ puntos de dicha sección con $z \neq h$ se particularizan la expansión de presiones (2.70) y su derivada con $N \times M$ términos, eliminando α_{nm} :

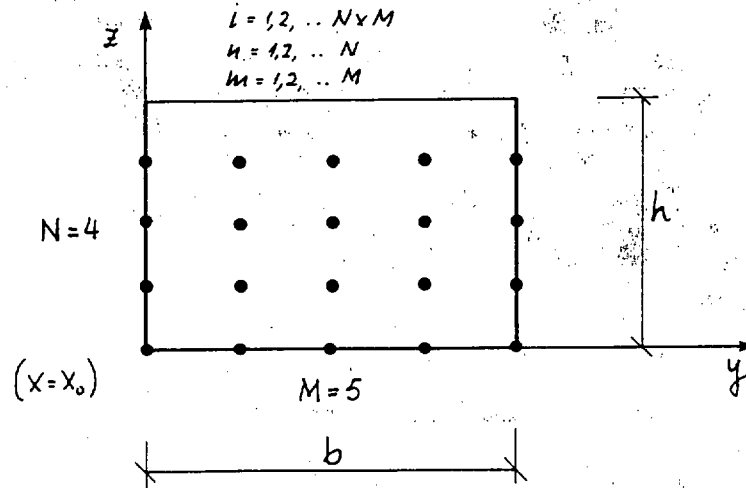


Fig. II-6

$$p_i = A_{i(nm)} \alpha_{(nm)} \quad (2.74)$$

$$u_i = B_{i(nm)} \alpha_{(nm)}$$

siendo p_i , u_i , y_i , z_i las presiones, movimientos normales y coordenadas (y, z) respectivamente, de los puntos i en la sección vertical considerada $x=x_0$, y donde

$$A_{i(nm)} = \rho \omega^2 \frac{\cos(\lambda_z^n z_i) \cos(\lambda_y^m y_i)}{K_{nm}} \quad (2.75)$$

$$B_{i(nm)} = -\cos(\lambda_z^n z_i) \cos(\lambda_y^m y_i)$$

Las relaciones, en forma matricial, quedan

$$p = A \alpha \quad (2.76)$$

$$u = B \alpha$$

y por tanto

$$A^{-1} p = B^{-1} u \quad (2.77)$$

siendo los coeficientes de A y B los ya definidos en las expresiones (2.75). Una vez decidido el número de puntos $N \times M$ en los que particularizar los desarrollos, y su colocación en la sección normal $x = x_0$, las matrices A y B serán completamente conocidas y por tanto lo será la relación entre presiones y movimientos normales en dichos puntos. La ecuación (2.77) puede también expresarse como

$$p = (A B^{-1}) u, \quad M = A B^{-1} \quad (2.78)$$

$$p = M u$$

Sea el modelo simplificado de embalse que se presenta en la figura II-7, consistente en una estructura de contención que cierra un canal de sección rectangular que se extiende indefinidamente aguas arriba.

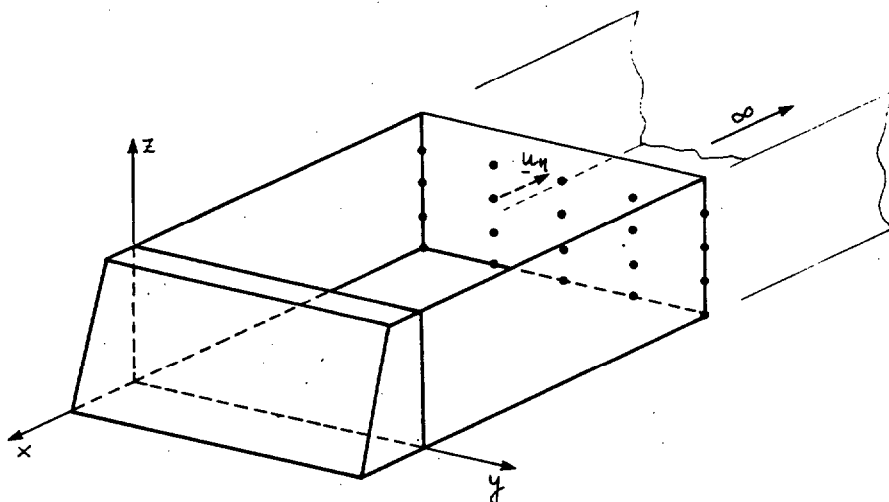


Fig. II-7

Una excitación de la base rígida en la dirección del eje x supone la aparición de movimientos en el paramento aguas arriba de la presa y por tanto de ondas de presión hidrodinámicas en el agua, lo que a su vez modifica la distribución de movimientos en el trasdós de la presa, por lo que ambos problemas (movimientos de la presa y estado hidrodinámico del fluido) deben ser analizados conjuntamente. Por otro lado, la naturaleza infinita del canal supone, como se ha visto, que para cierto rango de frecuencias de excitación existen modos no evanescentes de ondas propagándose en dirección longitudinal alejándose de la presa, y que deben necesariamente ser tenidos en cuenta.

Cuando se aborda numéricamente el problema mediante el M.E.C. y ante la imposibilidad de extender la discretización del canal hasta el infinito, la consideración de estos fenómenos implica discretizar el fondo y las paredes del canal hasta cierta distancia de la presa, en donde se hará uso de un nuevo contorno, perpendicular a la dirección de propagación, y donde se impondrá como condición de contorno la relación entre presiones y movimientos normales definida por (2.77) ó (2.78). La manera en que se ha formulado dicha relación resulta por otro lado, de muy cómodo manejo junto a las ecuaciones que proporciona el M.E.C.

Cuando las paredes rígidas del canal se encuentran excitadas según la dirección vertical (z) o transversal (y), en el entorno de la presa se producirá un estado hidrodinámico de presiones que provoca movimientos en el paramento aguas arriba con cierta componente longitudinal, y por tanto la existencia en el agua de ondas que se propagan en la dirección del canal. En una sección alejada, el campo total de presiones se compone en este caso de la suma de éste, producido por un foco lejano de movimientos (la presa) en dirección anteroposterior, y de un campo monodimensional (sin componente x) que corresponde al estado de presiones que se encuentra en un canal infinito (sin presa) cuyas paredes están sometidas a una aceleración vertical o transversal, según corresponda. Las expresiones matemáticas de estos campos de presiones están obtenidas en el Apéndice A para canales de sección rectangular, y como se verá más adelante deberán ser tenidas en cuenta a la hora de expresar la condición de contorno en la sección del canal en que se cierra la discretización.

CAPÍTULO III**EL M.E.C. PARA PROBLEMAS ARMÓNICOS TRIDIMENSIONALES**

- III.1 - Formulación elastodinámica
- III.2 - Formulación del problema escalar
- III.3 - Elementos isoparamétricos de seis y nueve nodos
- III.4 - Acoplamiento de subregiones sólidas y/o líquidas

En este capítulo se recogen en primer lugar, y de forma resumida, los aspectos más generales del planteamiento del Método de los Elementos de Contorno en el dominio de la frecuencia, como medio de abordar el problema elástico y el problema de potencial en medios tridimensionales. A continuación se introducen los tipos de elementos usados en esta Tesis. Finalmente se comentan aspectos relacionados con la resolución de problemas en los que se presentan acopladas diferentes regiones, sólidas y líquidas.

III.1 FORMULACIÓN ELASTODINÁMICA

El punto de partida es el teorema de reciprocidad (Wheeler y Sternberg, 1968) que constituye una extensión de la ley de Betty de la elastoestática. Para ello se toma en consideración una región regular Ω , de contorno Γ , caracterizada por una densidad ρ , y unas velocidades de propagación c_p y c_s , de las ondas longitudinales y transversales, respectivamente. Sobre dicha región se definen dos estados elastodinámicos

$$\begin{aligned} S(f, \rho, c_p, c_s; \Omega) &= [u, \sigma] \\ S^*(f^*, \rho, c_p, c_s; \Omega) &= [u^*, \sigma^*] \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde u es el campo de movimientos y σ es el tensor de tensiones, definidos en Ω , correspondientes a unas fuerzas de volumen f , y u^* , σ^* los correspondientes a las fuerzas de volumen f^* .

En el caso de condiciones iniciales nulas, el teorema se plantea como:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (t * u^*) d\Gamma + \rho \int_{\Omega} (\dot{f} * u^*) d\Omega = \\ \int_{\Gamma} (t^* * u) d\Gamma + \rho \int_{\Omega} (f^* * u) d\Omega \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde t y t^* son los vectores tracciones en Γ de los estados S y S^* respectivamente, que han de satisfacer la condición de equilibrio en el contorno con los tensores de tensiones correspondientes. El operador $*$ entre vectores representa la suma del producto de convolución de sus componentes.

El ámbito de aplicación de esta Tesis nace de considerar un caso particular de especial importancia, que es aquel en que las fuerzas másicas y la condiciones de contorno son armónicas en el tiempo, con frecuencia angular ω , es decir:

$$f(x, t) = f(x; \omega) e^{i\omega t} \quad (3.3)$$

En este caso el campo de movimientos puede representarse como:

$$u(x, t) = u^T(x, t) + u(x; \omega) e^{i\omega t} \quad (3.4)$$

donde $u^T(x, t)$ se conoce como "parte transitoria" de la solución, y se obtiene de la solución homogénea de las ecuaciones que rigen el estado elastodinámico bajo unas

determinadas condiciones iniciales. Es usual suponer que desaparece transcurrido un cierto intervalo de tiempo debido a los mecanismos internos de disipación de energía que presentan todos los sistemas físicos. En estas condiciones siempre será posible formular el problema en un instante de tiempo donde tan sólo exista la "parte permanente" de la solución $u(x; \omega)$, que en general será una función compleja con un posible desfase respecto a la función excitadora, y que se calcula de forma que satisfaga las condiciones de contorno bajo unas determinadas fuerzas másicas. Bajo esta hipótesis los campos de movimientos y tensiones, supuestas las propiedades del medio independientes del tiempo, pueden expresarse como:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u(x; \omega) e^{i\omega t} \\ \sigma(x, t) &= \sigma(x; \omega) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (3.5)$$

que substituidas en la ecuación de Navier proporcionan

$$(c_p^2 - c_s^2) u_{k,k}(x; \omega) + c_s^2 u_{l,kl}(x; \omega) + \omega^2 u_l(x; \omega) + f_l(x; \omega) = 0 \quad (3.6)$$

y en la ecuación de comportamiento-compatibilidad

$$\begin{aligned} \sigma_{kl}(x; \omega) &= \rho (c_p^2 - 2c_s^2) \delta_{kl} u_{m,m}(x; \omega) + \\ &\quad \rho c_s^2 (u_{k,l}(x; \omega) + u_{l,k}(x; \omega)) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Así pues, es posible definir un nuevo estado elastodinámico, denominado reducido $S_\omega \equiv [u, \sigma]$, con campo de desplazamientos $u(x; \omega)$ y tensiones $\sigma(x; \omega)$ correspondientes a unas fuerzas másicas $f(x; \omega)$ definidas en una región regular Ω , de densidad ρ y velocidades de ondas c_p y c_s .

Es posible encontrar significado matemático a la respuesta permanente $u(x; \omega)$, si se considera que una representación del campo de movimientos dado por la integral sobre todas las posibles frecuencias

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x; \omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (3.8)$$

es solución de las ecuaciones de campo para una función excitadora del tipo

$$f(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x; \omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (3.9)$$

para unas condiciones de contorno del mismo tipo, puesto que la ecuación diferencial (3.6) es lineal. Así, $2\pi f(x; \omega)$ es la transformada de Fourier de las fuerzas másicas $f(x, t)$. Del mismo modo $2\pi u(x; \omega)$ es solución de la transformada de Fourier de las ecuaciones de campo elastodinámicas. Por tanto, dado un espectro de frecuencias de la función excitadora, siempre será posible construir una solución general a través de la integral (3.8).

Interesa a continuación volver a plantear el teorema de reciprocidad para el caso que nos ocupa de dos estados elastodinámicos reducidos. Sean éstos:

$$\begin{aligned} S_{\omega}(f, \rho, c_p, c_s; \omega, \Omega) &= [u, \sigma] \\ S_{\omega}^*(f^*, \rho, c_p, c_s; \omega, \Omega) &= [u^*, \sigma^*] \end{aligned} \quad (3.10)$$

y sean t y t^* los vectores tracción (complejos) en el contorno Γ . En estas condiciones la expresión (3.2) se simplifica, desapareciendo los productos de convolución, quedando el teorema como

$$\int_{\Gamma} t u^* d\Gamma + \rho \int_{\Omega} f u^* d\Omega = \int_{\Gamma} t^* u d\Omega + \rho \int_{\Omega} f^* u d\Omega \quad (3.11)$$

El teorema de reciprocidad, establecido entre el estado elastodinámico que se pretende resolver y otro convenientemente escogido, será el que proporcione la representación integral en la que se basa el M.E.C. En efecto, va a considerarse un estado reducido $S_{\omega}^* = [u^*, \sigma^*]$ particular, conocido como estado de Stokes, correspondiente a una fuerza excitadora concentrada en un punto ξ en dirección e , esto es $\rho f^* = \delta(\xi) e^{i\omega t} e$, donde $\delta(\xi)$ es la función impulso o delta de Dirac. El teorema de reciprocidad se convierte entonces en:

$$u(\xi) = \int_{\Gamma} t u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u t^* d\Gamma + \rho \int_{\Omega} f u^* d\Omega \quad (3.12)$$

que es la representación integral del campo de desplazamientos del estado elastodinámico reducido $S_{\omega} = [u, \sigma]$.

En el caso de que el dominio sea no acotado, es natural considerar que todas las fuentes de excitación están en el interior de Ω y que no hay propagación de ondas desde el

infinito. Esto se traduce en decir que la contribución de todas las fuentes colocadas sobre Γ_∞ debe ser nula, y la integral de contorno de la representación integral debe cumplir

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_\infty} r^2 [tu^* - ut^*] d\tau = 0 \quad (3.13)$$

donde Γ_∞ es la superficie de una esfera centrada en ξ de radio r que tiende a infinito, y τ representa el ángulo sólido. Esta condición conduce a las siguientes (Eringen y Suhubi, 1975): descomponiendo u en sus componentes de Helmholtz $u = u_p + u_s$ deben verificarse las llamadas condiciones de radiación y de regularidad

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \frac{\partial u_\alpha}{\partial r} + \frac{i\omega}{c_\alpha} u_\alpha = 0 \quad (3.14)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u_\alpha = 0 \quad \alpha = P, S$$

que pueden ser interpretadas como condiciones de que el flujo de energía a través de Γ_∞ hacia el exterior sea siempre positivo.

La solución fundamental, esto es, la solución del campo de movimientos y tensiones correspondientes al estado de Stokes $S_\infty^* \equiv [u^*, \sigma^*]$ fue obtenida para el caso elastodinámico general en el dominio del tiempo por dicho autor en 1849. Para el correspondiente estado reducido, Cruse y Rizzo lo hacen en 1968 a partir de la solución general que Doyle había obtenido en 1966. Se omitirá aquí la obtención detallada de la solución, limitándonos a presentar ésta. Así, el movimiento en dirección k cuando la carga $\delta(\xi)$ tiene dirección l viene dado por

$$U_{lk} = \frac{1}{\alpha \pi \rho c_s^2} [\psi \delta_{kl} - \chi r_{,k} r_{,l}] \quad (3.15)$$

siendo r la distancia entre los puntos de aplicación ξ y de estudio, y $\alpha = 4$ en el caso tridimensional, y donde

$$\begin{aligned}\psi &= \left(1 + \frac{1}{z_s^2} - \frac{1}{z_s} \right) \frac{e^{z_s}}{r} - \left(\frac{c_s}{c_p} \right)^2 \left(\frac{1}{z_p^2} - \frac{1}{z_p} \right) \frac{e^{z_p}}{r} \\ \chi &= \left(1 + \frac{3}{z_s^2} - \frac{3}{z_s} \right) \frac{e^{z_s}}{r} - \left(\frac{c_s}{c_p} \right)^2 \left(1 + \frac{3}{z_p^2} - \frac{3}{z_p} \right) \frac{e^{z_p}}{r}\end{aligned}\quad (3.16)$$

siendo :

$$\begin{aligned}z_s &= -\frac{i\omega r}{c_s} \\ z_p &= -\frac{i\omega r}{c_p}\end{aligned}\quad (3.17)$$

La componente k del vector tensión sobre una superficie cuya normal unitaria exterior es $\underline{n}$ viene dada por

$$\begin{aligned}T_{ik} &= \frac{1}{\alpha\pi} \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{\chi}{r} \right) (\delta_{ki} \frac{\partial r}{\partial \eta} + r_{,k} \eta_{,i}) - \right. \\ &\quad \left. \frac{2}{r} \chi (\eta_{,k} r_{,i} - 2 r_{,k} r_{,i} \frac{\partial r}{\partial \eta}) - 2 \frac{\partial\chi}{\partial r} r_{,k} r_{,i} \frac{\partial r}{\partial \eta} + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{c_p^2}{c_s^2} - 2 \right) \left(\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{\partial\chi}{\partial r} - \frac{\alpha}{2r} \chi \right) r_{,i} \eta_{,k} \right]\end{aligned}\quad (3.18)$$

Planteando de nuevo la representación integral del campo de desplazamientos es posible llegar a la expresión

$$C_{ki}(\underline{\xi}) u_i(\underline{\xi}) = \int_{\Gamma} (U_{ik} t_k - T_{ik} u_k) d\Gamma + \rho \int_{\Omega} f_k U_{ik} d\Omega \quad (3.19)$$

donde $C_{ki}(\underline{\xi})$ vale δ_{ki} si $\underline{\xi} \in \Omega$ y es nulo si $\underline{\xi} \notin \Omega \cup \Gamma$. El caso en que $\underline{\xi} \in \Gamma$ requiere atención especial, puesto que ahora el punto de aplicación de la carga se encuentra dentro del contorno de Γ de integración, presentando entonces la primera integral del segundo miembro un punto singular.

Es usual extraer esta singularidad mediante un proceso de paso al límite, sustituyendo el contorno Γ por otro aproximado que evita la singularidad, y que está compuesto por dos contornos, $(\Gamma - \Gamma_\epsilon)$ y Γ_ϵ , siendo Γ_ϵ una esfera de radio $\epsilon \rightarrow 0$ como se vé en la figura.

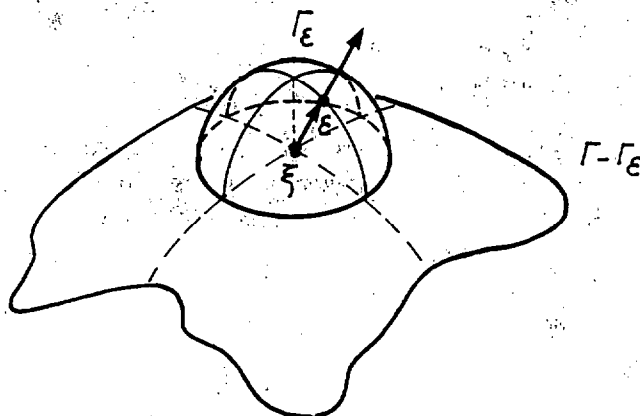


Fig. III-1

Tomando límites se tiene que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} U_{ik} t_k d\Gamma_\epsilon = 0 \quad (3.20)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} T_{ik} u_k d\Gamma_\epsilon = d_{ik}(\xi) u_k(\xi)$$

y es posible demostrar que las constantes d_{ik} al igual que ocurre en el caso de elasticidad estática (Dominguez, 1989) dependen exclusivamente de la geometría del contorno en el punto de aplicación ξ . Esta igualdad con el caso estático es debida a que el tipo de singularidad de ambas soluciones fundamentales son exactamente iguales, tal como se justificará más adelante.

Así pues, la expresión (3.19) es válida para un punto $\xi \in \Gamma$, siendo en este caso $C_{ik}(\xi) = 1 + d_{ik}(\xi)$, teniendo en cuenta entonces que la primera integral del segundo miembro hay que entenderla en el sentido del valor principal de Cauchy.

No supone restricción significativa asumir que las fuerzas de dominio sean nulas, pues en general los términos que contiene la integral de dominio de (3.19) son siempre completamente conocidos.

Por tanto, la representación del desplazamiento de un punto cualquiera ξ en función de los movimientos u y tracciones t en puntos exclusivamente del contorno Γ es

$$C_{ik}(\xi) u_k(\xi) + \int_{\Gamma} T_{ik} u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ik} t_k d\Gamma \quad (3.21)$$

Para puntos $\xi \in \Gamma$, la expresión anterior, junto a las condiciones de contorno, proporcionan una formulación cerrada para calcular los campos u y t sobre dicho contorno. Sin embargo, y salvo casos puntuales muy sencillos, no es posible la resolución analítica de (3.21), siendo necesaria en resolución numérica que es lo que da pie el Método de los Elementos de Contorno. Una exposición detallada del mismo puede encontrarse en Brebbia y Dominguez (1989).

Las integrales se realizan numéricamente discretizando, esto es, subdividiendo, el contorno en un número discreto de elementos, y los movimientos y tracciones se aproximan en función de sus valores en unos puntos determinados llamados nodos, mediante funciones de interpolación.

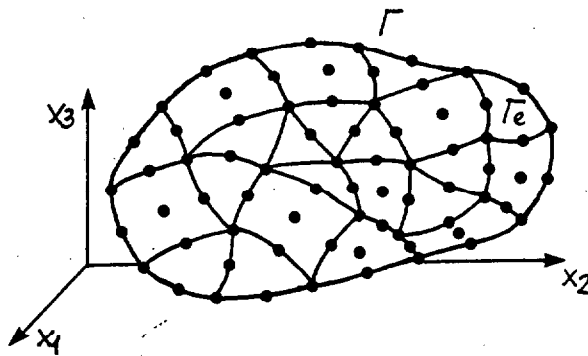


Fig. III-2

Adoptando una notación matricial, más compacta que la de índices empleada hasta ahora, las tres componentes del movimiento y la tracción en cualquier punto de un elemento genérico "j" vienen dados por

$$\begin{aligned} u &= \Phi u^j \\ t &= \Phi t^j \end{aligned} \quad (3.22)$$

donde u^j y t^j son vectores de dimensiones $3 \times Q$, siendo Q el número de nodos del elemento "j", y contienen todos los valores nodales de desplazamientos y tracciones, respectivamente, en dicho elemento. La matriz de funciones de interpolación Φ tiene dimensiones $3 \times 3Q$,

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 & \cdots & \phi_Q & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & \cdots & 0 & \phi_Q & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & \cdots & 0 & 0 & \phi_Q \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

y sus componentes son funciones de forma sobre las que se reparará más adelante.

De este modo, y representando las tensiones de la solución fundamental en forma matricial, (T^*, U^*) , la ecuación (3.21) para cada nodo "i" puede reescribirse como

$$C^i u^i + \int_{\Gamma} T^* u \, d\Gamma = \int_{\Gamma} U^* t \, d\Gamma \quad (3.24)$$

La discretización de esta ecuación integral y la sustitución de (3.22) conduce a la ecuación discretizada

$$C^i u^i + \sum_{j=1}^E \left\{ \int_{\Gamma_j} T^* \Phi \, d\Gamma_j \right\} u^j = \sum_{j=1}^E \left\{ \int_{\Gamma_j} U^* \Phi \, d\Gamma_j \right\} t^j \quad (3.25)$$

en la cual las integrales se han descompuesto en un sumatorio de integrales extendido al número total de elementos E. Γ_j representa la superficie de cada elemento "j"

Una vez integrada, paso al que está dedicado el apartado IV.2, la ecuación (3.25) puede ser escrita como:

$$C^i u^i + \sum_{n=1}^N \hat{H}^{in} u^n = \sum_{n=1}^N G^{in} t^n \quad (3.26)$$

donde de nuevo "i" es el nodo de colocación, habiendo extendido en este caso el sumatorio al número total de nodos N. Ahora los vectores u^n y t^n , (3×1) , representan las 3 componentes de desplazamiento y tracción del nodo genérico "n". Las matrices H y G, de dimensiones 3×3 , expresan la respuesta en el nodo "n" a la carga unidad en "i", por lo que generalmente se las conoce como matrices de influencia y son:

$$\begin{aligned} \hat{H}^{in} &= \sum_t \int_{\Gamma_t} T^* \phi_q \, d\Gamma \\ G^{in} &= \sum_t \int_{\Gamma_t} U^* \phi_q \, d\Gamma \end{aligned} \quad (3.27)$$

donde el sumatorio se extiende a todos los elementos a los que el nodo "n" pertenezca, y "q" representa la numeración local de "n" dentro del elemento "t".

Llamando

$$\begin{aligned}
 H^{in} &= \hat{H}^{in} & \text{si } i \neq n \\
 H^{in} &= \hat{H}^{in} + C^i & \text{si } i = n
 \end{aligned}
 \tag{3.28}$$

y escribiendo (3.26) para todos los nodos de la discretización, se obtiene un sistema de ecuaciones del tipo

$$H \cdot u = G \cdot t \tag{3.29}$$

donde pueden imponerse directamente las condiciones de contorno, y en general para un problema mixto es posible reordenar columnas entre **H** y **G** para pasar todas las incógnitas a un sólo vector **x**, y escribir el sistema en la forma normal

$$A \cdot x = F \tag{3.30}$$

De este modo el problema se reduce al cálculo de las matrices **H** y **G**, y a la resolución de un sistema lineal de ecuaciones algebraicas.

III.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA ESCALAR

En la hipótesis de pequeñas perturbaciones el comportamiento dinámico de un fluido no viscoso en el que se admite que es despreciable el efecto de las ondas de gravedad, viene gobernado por la ecuación:

$$\nabla^2 \bar{p}(x,t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{p}(x,t)}{\partial t^2} \tag{3.31}$$

donde $\bar{p}(x,t)$ representa la presión hidrodinámica, y c la velocidad de propagación de las ondas de presión en el medio. Para el caso particular en el que la excitación sea armónica, con pulso ω , es fácil obtener una nueva ecuación simplificada correspondiente al estado elastodinámico reducido. Así,

$$\bar{p}(x,t) = p(x,t) \cdot e^{i\omega t} \tag{3.32}$$

transforma (3.31) en

$$\nabla^2 p + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0 \quad (3.33)$$

La ecuación de partida para la obtención de la identidad integral en la que se basa el MEC es en este caso el segundo teorema de Green:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 p \cdot p^* - p \nabla^2 p^*) d\Omega = \int_{\Gamma} (p^* \frac{\partial p}{\partial \eta} - p \frac{\partial p^*}{\partial \eta}) d\Gamma \quad (3.34)$$

Donde las letras Ω , Γ y η tienen el mismo significado que un apartado anterior. p será la solución buscada de la ecuación (3.33) con condiciones de contorno en Γ , y se escoge una función p^* que sea solución fundamental, esto es, que cumpla en Ω que

$$\nabla^2 p^* + \frac{\omega^2}{c^2} p^* + \delta^i = 0 \quad (3.35)$$

siendo δ^i la función delta de Dirac que representa un impulso concentrado en el punto i del dominio. La solución de esta ecuación presenta simetría esférica, y es dependiente de la frecuencia ω y de la distancia r entre el punto de perturbación i y el de estudio:

$$p^* = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-\frac{i\omega r}{c}}}{r} \quad (3.36)$$

La obtención del flujo es inmediata. Derivando con respecto a la normal al contorno:

$$\frac{\partial p^*}{\partial \eta} = \frac{\partial p^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \eta} \quad (3.37)$$

resultando

$$\frac{\partial p^*}{\partial \eta} = \frac{1}{4\pi} \left(-\frac{\frac{i\omega}{c}}{r} - \frac{1}{r^2} \right) e^{-\frac{i\omega r}{c}} \frac{\partial r}{\partial \eta} \quad (3.38)$$

Ahora bien, la sustitución de la ecuación (3.35) en la (3.34) permite obtener:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 p \cdot p^* + p \frac{\omega^2}{c^2} p^* + p \delta^i) d\Omega = \int_{\Gamma} (p^* \frac{\partial p}{\partial \eta} - p \frac{\partial p^*}{\partial \eta}) d\Gamma \quad (3.39)$$

y recordando las propiedades de la función impulso queda

$$p^i + \int_{\Gamma} p \frac{\partial p^*}{\partial \eta} d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial \eta} p^* d\Gamma \quad (3.40)$$

que es la representación integral de la presión en un punto $p \in \Omega$ en función de las presiones y sus derivadas en el contorno.

Cuando se hace tender el punto de aplicación i hacia el contorno se aísla la singularidad del mismo modo que se empleó para el problema elástico, sustituyendo el contorno Γ por otro aproximado $(\Gamma - \Gamma_{\epsilon}) + \Gamma_{\epsilon}$, siendo Γ_{ϵ} una esfera de radio infinitesimal ϵ alrededor del punto singular. En este proceso de paso al límite es posible ver que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\epsilon}} \frac{\partial p}{\partial \eta} p^* d\Gamma = 0$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\epsilon}} p \frac{\partial p^*}{\partial \eta} d\Gamma = p^i \bar{C}^i \quad (3.41)$$

donde $\bar{C}^i$ depende exclusivamente de la geometría del contorno en el punto i . Así pues, la representación de la presión en puntos del contorno puede expresarse como

$$C^i p^i + \int_{\Gamma} p \frac{\partial p^*}{\partial \eta} d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial \eta} p^* d\Gamma \quad (3.42)$$

entendiéndose ahora que las integrales excluyen el punto i , y donde se ha tenido en cuenta que:

$$C^i = 1 + \bar{C}^i \quad (3.43)$$

La ecuación integral se discretiza descomponiendo las integrales sobre Γ en un sumatorio extendido al número total de elementos, sobre los cuales la presión y su derivada normal son aproximadas en función de sus valores nodales, mediante matrices de funciones de forma. Así, en un elemento genérico "j" puede expresarse que

$$p = \Phi p^j$$

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = \Phi \left. \frac{\partial p}{\partial \eta} \right|^j \quad (3.44)$$

donde, si Q es el número de nodos del elemento " j ", p^j y $\partial p / \partial \eta|^j$ son vectores de dimensión Q con los valores nodales de la presión y su derivada. La matriz de interpolación será del tipo

$$\Phi = [\phi_1 \phi_2 \dots \phi_Q] \quad (3.45)$$

siendo las funciones de forma las mismas que en el apartado anterior.

Con todo ello la ecuación discretizada correspondiente al nodo i puede escribirse como:

$$C^i p^i + \sum_{j=1}^E \left\{ \int_{\Gamma_j} \frac{\partial p^*}{\partial \eta} \Phi d\Gamma_j \right\} p^j =$$

$$\sum_{j=1}^E \left\{ \int_{\Gamma_j} p^* \Phi d\Gamma_j \right\} \left. \frac{\partial p}{\partial \eta} \right|^j \quad (3.46)$$

que una vez integrada puede visualizarse como :

$$C^i p^i + \sum_{n=1}^N \hat{H}^{in} p^n = \sum_{n=1}^N G^{in} \left. \frac{\partial p}{\partial \eta} \right|^n \quad (3.47)$$

habiendo extendido el sumatorio al mismo total de nodos N , y notando con el superíndice n los valores correspondientes a cada uno.

Las matrices de influencia son

$$\hat{H}^{in} = \sum_t \int_{\Gamma_t} \frac{\partial p^*}{\partial \eta} \phi_q d\Gamma$$

$$G^{in} = \sum_t \int_{\Gamma_t} p^* \phi_q d\Gamma \quad (3.48)$$

entendiéndose que al suma abarca todo los elementos " t " a los que nodo " n " pertenece, siendo " q " su numeración local en cada uno de ellos.

Estableciendo la ecuación discretizada para todo los nodos y llamando

$$\begin{aligned} H^{in} &= \hat{H}^{in} & \text{si } i \neq n \\ H^{in} &= \hat{H}^{in} + C^i & \text{si } i = n \end{aligned} \quad (3.49)$$

se obtiene un sistema de N ecuaciones

$$H p = G \frac{\partial p}{\partial \eta} \quad (3.50)$$

Ahora bien, teniendo en cuenta la relación que existe entre el flujo y el movimiento normal al contorno w :

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = \rho \omega^2 w \quad (3.51)$$

el sistema de ecuaciones puede reescribirse, sustituyendo G por $G \rho \omega^2$ como

$$H p = G w \quad (3.52)$$

Sobre el contorno se conocerá o bien la presión o bien el movimiento normal, por lo que una vez impuestas las condiciones de contorno se obtendrá un sistema de N ecuaciones con N incógnitas.

Método de las imágenes:

La formulación expuesta hasta ahora es totalmente general, pero puede ser simplificada en el caso particular de que existan contornos planos en los cuales la condición sea de presión nula, tal y como ocurre en la superficie libre del líquido. En este caso puede construirse una nueva solución fundamental a partir del método de las imágenes, de manera que proporcione una presión nula sobre dicho contorno, haciendo que sean idénticamente nulas las ecuaciones asociadas al mismo, por lo que no será necesario discretizarlo.

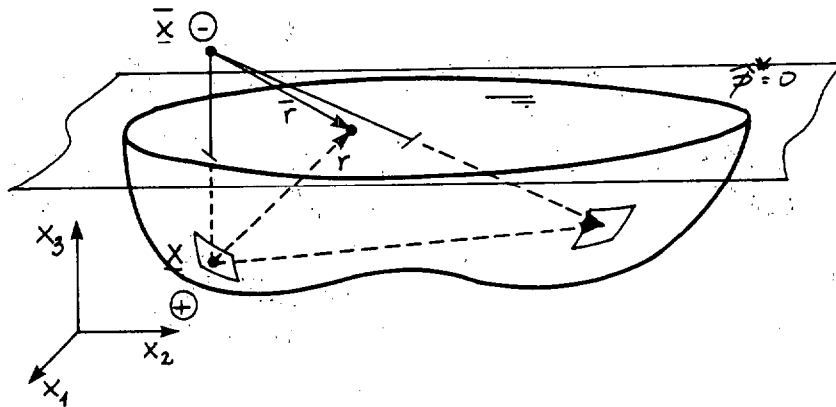


Fig. III-3

A la solución fundamental correspondiente a una excitación concentrada en el punto x se le resta la correspondiente a otro punto $\bar{x}$ simétrico a aquel con respecto a la superficie libre. El efecto total en cualquier punto del plano medio se anula ya que al ser $r = \bar{r}$, resulta $p^* = \bar{p}^*$ y por tanto $\hat{p}^* = p^* - \bar{p}^* = 0$.

Así pues, con la nueva solución fundamental $\hat{p}^*$ basta con discretizar los restantes contornos del dominio, lo cual supone una ventajosa disminución de grados de libertad del problema.

III.3 ELEMENTOS ISOPARAMÉTRICOS DE 6 Y 9 NODOS.

En esta Tesis las geometrías tridimensionales se discretizan mediante elementos de tipo cuadrilátero isoparamétrico de nueve nodos y elementos de tipo triángulo isoparamétrico de seis nodos (Fig. III-4). La combinación de estos dos tipos de elementos de doble curvatura permite definir con suficiente aproximación la geometría de la práctica totalidad de las superficies que pueden presentarse en la realidad. Las variables de campo sobre la superficie se aproximan a partir de los valores nodales mediante funciones parabólicas en dos direcciones. Se consigue así una tipología de elementos capaz de representar el comportamiento de flexión que es de gran importancia en el caso de presas bóveda, y que no resulta fácil considerar con elementos de orden inferior.

Las coordenadas x de un punto cualquiera del elemento j vienen determinadas por

$$x = \Phi(\xi_1, \xi_2) x^j \quad (3.53)$$

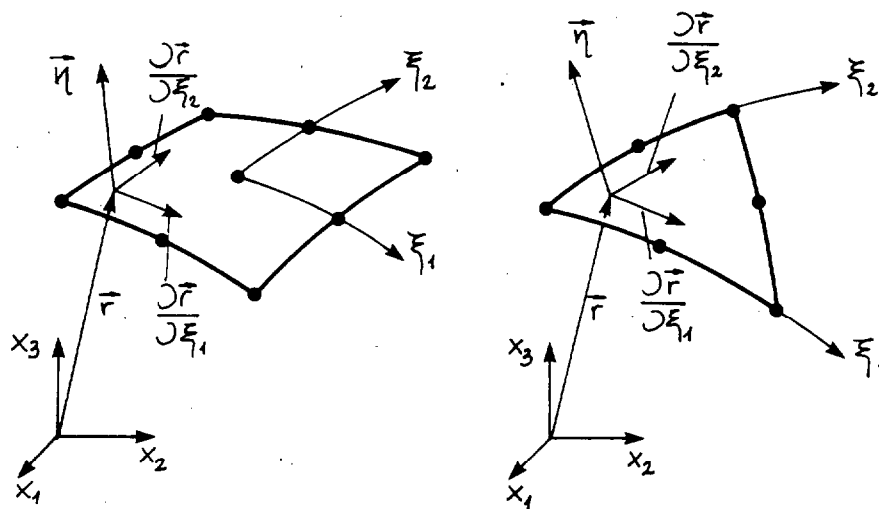


Fig. III-4

donde x^j es un vector que contiene las tres coordenadas globales los Q nodos de elemento. La matriz Φ ya ha sido definida en la ecuación (3.23), y sus componentes son las funciones de forma ϕ_i que son escritas en términos de las coordenadas naturales ξ_1 , ξ_2 , las cuales varían entre -1 y +1 en el caso del cuadrilátero y entre 0 y +1 en el caso del triángulo (Fig. III-5).

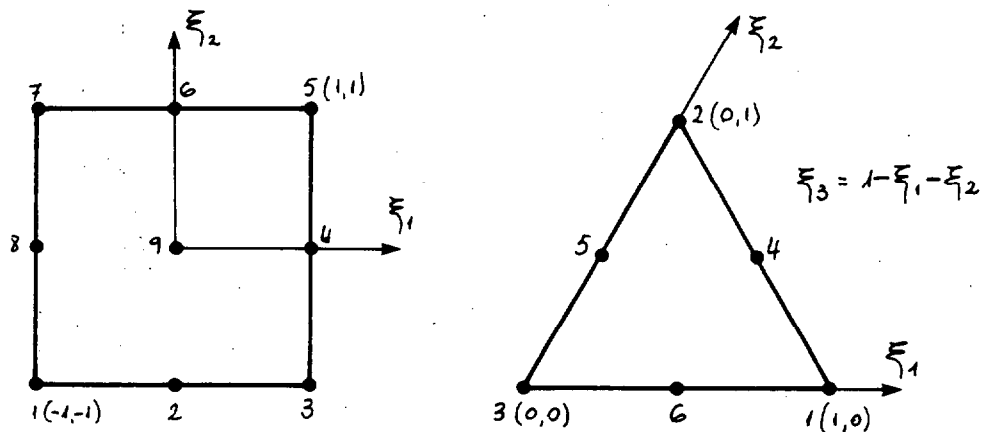


Fig. III-5

Como ya se ha expuesto, el mismo tipo de interpolación se emplea para representar desplazamientos y tracciones en el caso elástico, y presiones y movimientos normales en el caso de medios fluidos

$$\frac{u}{t} = \Phi \frac{u^j}{t^j} \quad \text{ó} \quad \frac{p}{w} = \Phi \frac{p^j}{w^j} \quad (3.54)$$

siendo Φ de dimensión $1 \times Q$ puesto que en este caso se trata de un medio escalar.

De forma explícita las funciones de forma y su tipología, así como los aspectos relativos a la definición geométrica de los elementos se presenta en el apartado IV.1.

III.4 ACOPLAMIENTO DE SUBREGIONES SÓLIDAS Y/O LÍQUIDAS.

Si el dominio en estudio está compuesto por una serie de subdominios con propiedades distintas, la representación integral y su discretización siguen siendo válidas para cada uno de los subdominios. Así, para el ejemplo de la figura III-6 se escribirán las ecuaciones para cada subregión independientemente para a continuación imponer las condiciones de equilibrio y de compatibilidad en las interfases.

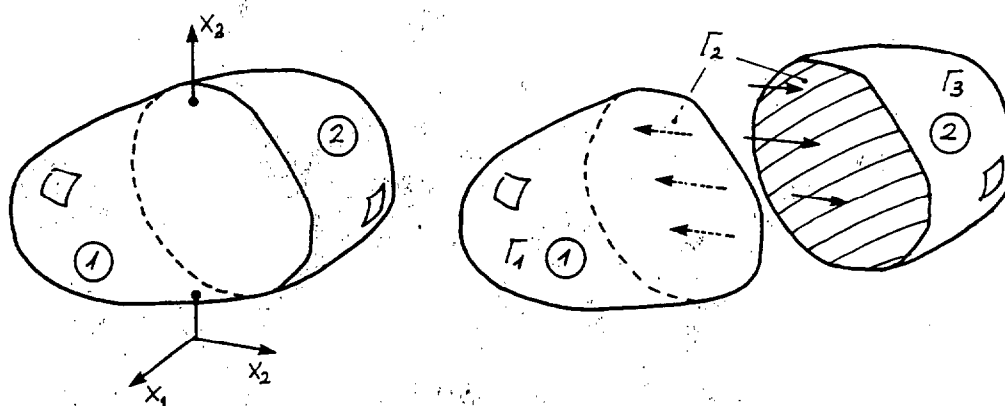


Fig. III-6

Si se trata de dominios sólidos las ecuaciones serán:

$$\begin{aligned} H_1^1 u_1^1 + H_2^1 u_2^1 &= G_1^1 t_1^1 + G_2^1 t_2^1 \\ H_2^2 u_2^2 + H_3^2 u_3^2 &= G_2^2 t_2^2 + G_3^2 t_3^2 \end{aligned} \quad (3.55)$$

que con

$$u_2^1 = u_2^2 = u_2 \quad ; \quad t_2^1 = t_2^2 = t_2 \quad (3.56)$$

permiten obtener un único sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} H_1^1 & H_2^1 & 0 \\ 0 & H_2^2 & H_3^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} G_1^1 & G_2^1 & 0 \\ 0 & -G_2^2 & G_3^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} t_1^1 \\ t_2^1 \\ t_3^1 \end{Bmatrix} \quad (3.57)$$

Si se trata de medios fluidos el planteamiento es similar, escribiéndose en la interfase las condiciones de contorno siguientes

$$p_2^1 = p_2^2 = p_2 \quad ; \quad w_2^1 = -w_2^2 = w_2 \quad (3.58)$$

para obtener un sistema análogo al (3.57) sustituyendo u por p , y t por w :

$$\begin{pmatrix} H_1^1 & H_2^1 & 0 \\ 0 & H_2^2 & H_3^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_3^1 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} G_1^1 & G_2^1 & 0 \\ 0 & -G_2^2 & G_3^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} w_1^1 \\ w_2^1 \\ w_3^1 \end{Bmatrix} \quad (3.59)$$

La resolución del caso en que se presentan acopladas regiones sólidas y líquidas requiere un tratamiento especial, puesto que la interfase entre ambas regiones presenta la particularidad de tener seis incógnitas por nodo ($u_x, u_y, u_z, t_x, t_y, t_z$), como perteneciente al contorno del sólido, y solamente dos (p, w), como perteneciente al líquido.

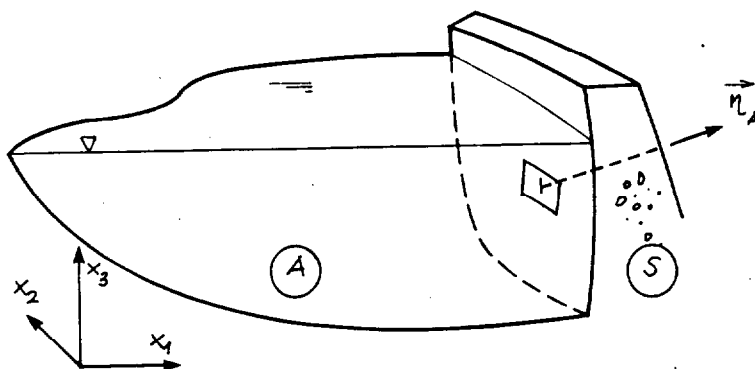


Fig. III-7

La condición de compatibilidad de movimientos en la interfase se expresa diciendo que el movimiento normal debe ser igual para el sólido y para el líquido. Si η_x η_y η_z son los cosenos directores de la normal al contorno del líquido, tal condición se establece como

$$w = u_x \eta_x + u_y \eta_y + u_z \eta_z \quad (3.60)$$

Las ecuaciones de equilibrio deben expresar la igualdad de la presión en el líquido con la tracción normal al contorno del sólido, y la ausencia en la interfase de tensión tangencial. Esto se traduce en

$$\begin{aligned} t_x &= p \eta_x \\ t_y &= p \eta_y \\ t_z &= p \eta_z \end{aligned} \quad (3.61)$$

Así pues, mediante (3.60) y (3.61) es posible expresar cuatro incógnitas en función de las otras cuatro, quedando p , u_x , u_y y u_z como las incógnitas en la interfase. Las cuatro ecuaciones necesarias que faltan serán las que suministra el MEC, tres en el sólido, correspondientes a cada una de las direcciones coordenadas y una en el líquido. En efecto, sea el ejemplo que se ilustra en la figura III-8 ,

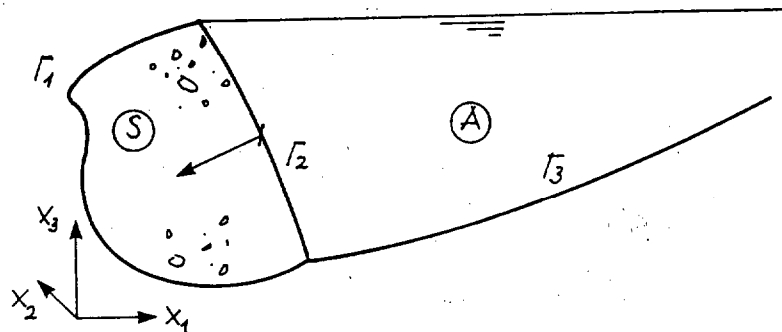


Fig. III-8

escribiendo las ecuaciones de cada subregión se tiene

$$\begin{aligned} S: \quad & H_1^S u_1 + H_2^S u_2 = G_1^S t_1 + G_2^S t_2 \\ A: \quad & H_2^A p_2 + H_3^A p_3 = G_2^A w_2 + G_3^A w_3 \end{aligned} \quad (3.62)$$

y recordando las expresiones (3.60) y (3.61) pueden desarrollarse las partes correspondientes a la interfase del siguiente modo:

$$\underline{G_2^S t_2} = \underline{G_2^S \left(\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} \right)_2} = \underline{G_2^S \left(\begin{Bmatrix} \eta_x p \\ \eta_y p \\ \eta_z p \end{Bmatrix} \right)_2} = \underline{G_2^{SA} p_2} \quad (3.63)$$

$$\underline{G_2^A w_2} = \underline{G_2^A (u_x \eta_x + u_y \eta_y + u_z \eta_z)_2} = \underline{G_2^{AS} \left(\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} \right)_2} = \underline{G_2^{AS} u_2}$$

de tal forma que, para un nodo j perteneciente a Γ_2 :

$$G_{ij}^{SA} = \sum_{k=1}^3 G_{i,3j-3+k}^S \eta_k \quad (3.64)$$

$$G_{i,3j-3+k}^{AS} = G_{ij}^A \eta_k \quad k = 1, 2, 3$$

Las dimensiones de G_2^{SA} serán $3(n_1 + n_2) * n_2$ siendo n_1 y n_2 el número de nodos de los contornos 1 y 2 respectivamente. G_2^{AS} tiene dimensiones $(n_2 + n_3) * 3n_2$.

Finalmente el sistema global de ecuaciones queda:

$$\begin{array}{c} 3n_1 \quad 3n_2 \quad n_2 \quad n_3 \\ \hline \begin{array}{c} 3(n_1+n_2) \\ \hline (n_2+n_3) \end{array} \left(\begin{array}{c|c|c|c} H_1^S & H_2^S & -G_2^{SA} & 0 \\ \hline 0 & -G_2^{AS} & H_2^A & H_3^A \end{array} \right) \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} G_1^S t_1 \\ G_3^A w_3 \end{Bmatrix} \begin{array}{c} \textcircled{S} \\ \textcircled{A} \end{array} \quad (3.65) \\ \hline \Gamma_1 \quad \Gamma_2 \quad \Gamma_2 \quad \Gamma_3 \end{array}$$

CAPÍTULO IV**ASPECTOS NUMÉRICOS Y DE IMPLEMENTACIÓN**

- IV.1 - Definición geométrica de los elementos
- IV.2 - Criterios de integración numérica
- IV.3 - Procedimiento para la simplificación de la imposición de las condiciones de contorno
- IV.4 - Cálculo de los términos de la diagonal
- IV.5 - Simetría y antisimetría

En este capítulo se comentan aspectos del trabajo que tienen que ver con la implementación numérica del MEC, empezando por cuestiones generales comunes en cualquier programa tridimensional, tales como la definición de elementos y la integración sobre ellos de las soluciones fundamentales. A continuación se tratan otros aspectos que tienen que ver de forma más específica con problemas que plantea un programa que aborde el análisis dinámico de regiones sólidas y líquidas acopladas, finitas o no, y algunas de sus posibles soluciones.

IV.1 DEFINICIÓN GEOMÉTRICA DE LOS ELEMENTOS

En el apartado III.3 se introdujeron los tipos de elementos de contorno que se verán en este apartado (figuras III-4 y III-5). Se trata ahora de presentar las expresiones que permitan su total definición geométrica, empezando por la expresión ya conocida que aproxima las coordenadas globales de cualquier punto de un elemento j en función de las coordenadas de sus Q nodos, por medio de las variables adimensionales ξ_1, ξ_2 (figura III-5) mediante funciones de interpolación parabólicas:

$$\mathbf{x} = \Phi(\xi_1, \xi_2) \cdot \mathbf{x}^j \quad (4.1)$$

(3×1) (3×3Q) (3Q×1)

De forma explícita las funciones de forma y su tipología son:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{4} \xi_1 (\xi_1 - 1) \xi_2 (\xi_2 - 1) & \phi_1 &= \xi_1 (2\xi_1 - 1) \\ \phi_2 &= \frac{1}{2} (1 - \xi_1^2) \xi_2 (\xi_2 - 1) & \phi_2 &= \xi_2 (2\xi_2 - 1) \\ \phi_3 &= \frac{1}{4} \xi_1 (\xi_1 + 1) \xi_2 (\xi_2 - 1) & \phi_3 &= \xi_3 (2\xi_3 - 1) \\ \phi_4 &= \frac{1}{2} \xi_1 (\xi_1 + 1) (1 - \xi_2^2) & \phi_4 &= 4\xi_1 \xi_2 \\ \phi_5 &= \frac{1}{4} \xi_1 (\xi_1 + 1) \xi_2 (\xi_2 + 1) & \phi_5 &= 4\xi_2 \xi_3 \\ \phi_6 &= \frac{1}{2} (1 - \xi_1^2) \xi_2 (\xi_2 + 1) & \phi_6 &= 4\xi_1 \xi_3 \\ \phi_7 &= \frac{1}{4} \xi_1 (\xi_1 - 1) \xi_2 (\xi_2 + 1) & & \\ \phi_8 &= \frac{1}{2} \xi_1 (\xi_1 - 1) (1 - \xi_2^2) & & \\ \phi_9 &= (1 - \xi_1^2) (1 - \xi_2^2) & & \end{aligned} \quad (4.2)$$

($\xi_3 = 1 - \xi_1 - \xi_2$)

cuadriláteros

triángulos

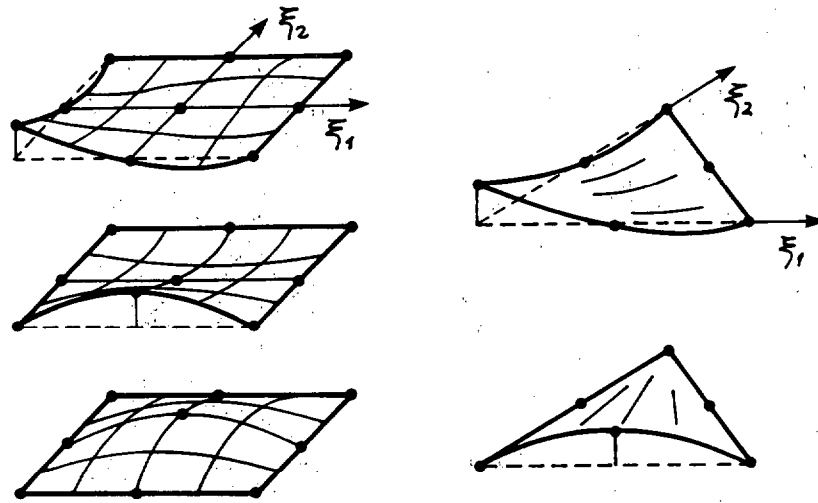


Fig. IV-1

La transformación del espacio tridimensional cartesiano x_1 x_2 x_3 al espacio local adimensional ξ_1 ξ_2 exige la consideración del jacobiano correspondiente. La distancia entre el punto de aplicación y el de estudio es

$$r = \sqrt{(x_1 - x_1^i)^2 + (x_2 - x_2^i)^2 + (x_3 - x_3^i)^2} \quad (4.3)$$

y recordando la aproximación (4.1) queda $r = f(\xi_1, \xi_2)$. La derivada con respecto a la normal se puede calcular como:

$$\frac{\partial r}{\partial \eta} = \frac{\partial r}{\partial x_1} \eta_1 + \frac{\partial r}{\partial x_2} \eta_2 + \frac{\partial r}{\partial x_3} \eta_3 = \frac{\partial r}{\partial x_k} \cdot \eta_k \quad k = 1, 2, 3 \quad (4.4)$$

Ahora bien, como:

$$\frac{\partial r}{\partial x_k} = \frac{x_k - x_k^i}{r} \quad (4.5)$$

se obtiene finalmente:

$$\frac{\partial r}{\partial \eta} = \frac{1}{r} (r \cdot \underline{\eta}) \quad (4.6)$$

La determinación de la normal unitaria $\underline{\eta}$ y del diferencial de superficie $d\Gamma$ en función de ξ_1, ξ_2 puede hacerse simultáneamente:

$$d\Gamma = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} \right| d\xi_1 d\xi_2 = |G| d\xi_1 d\xi_2 \quad (4.7)$$

$$\underline{\eta} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} \right|} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2}}{|G|}$$

donde

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_i} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_i} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \xi_i} \end{Bmatrix} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i} \mathbf{x}^j \quad (4.8)$$

(3×1) (3×3Q) (3Q×1)

Nótese que

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

$$|G| = \sqrt{g_1^2 + g_2^2 + g_3^2}$$

Desde un punto de vista computacional el cálculo de $\underline{\eta}$ puede simplificarse. En efecto, es posible escribir

$$\frac{\partial x_k}{\partial \xi_l} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi_l} x_k^j \quad \begin{matrix} k = 1, 2, 3 \\ l = 1, 2 \end{matrix} \quad (4.10)$$

(1×Q) (Q×1)

de forma que:

$$\frac{\partial x_k}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_m}{\partial \xi_2} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi_1} x_k^j \right) \frac{\partial \phi}{\partial \xi_2} x_m^j = x_k^{j^T} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi_1} \right)^T \frac{\partial \phi}{\partial \xi_2} \right] x_m^j$$

(1×Q) (Q×1) (1×Q) (Q×1)

(4.11)

$$\frac{\partial x_k}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_m}{\partial \xi_1} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi_2} x_k^j \frac{\partial \phi}{\partial \xi_1} x_m^j = x_k^{j^T} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi_2} \right)^T \frac{\partial \phi}{\partial \xi_1} x_m^j =$$

$$x_k^{j^T} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi_1} \right)^T \frac{\partial \phi}{\partial \xi_2} \right]^T x_m^j$$

y

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi_1} \right)^T \frac{\partial \phi}{\partial \xi_2} = DC = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial \phi_Q}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial \phi_Q}{\partial \xi_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \frac{\partial \phi_Q}{\partial \xi_1} \frac{\partial \phi_Q}{\partial \xi_2} \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

y por tanto

$$\frac{\partial r}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial r}{\partial \xi_2} = \begin{Bmatrix} x_2^{j^T} [DC - DC^T] x_3^j \\ x_3^{j^T} [DC - DC^T] x_1^j \\ x_1^{j^T} [DC - DC^T] x_2^j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

y a partir de aquí se obtienen $\underline{n}$ y $d\Gamma$ mediante las expresiones ya conocidas.

IV.2 CRITERIOS DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA

La evaluación de las integrales de las soluciones fundamentales sobre los elementos de contorno para así calcular los coeficientes del sistema de ecuaciones, constituye uno de los pasos más importantes del método y que mayor influencia tiene sobre su precisión. Las integrales a evaluar son del tipo

$$\begin{aligned} HW &= \int_{\Gamma} T_{ij}^* \phi^k d\Gamma & hw &= \int_{\Gamma} \frac{\partial p^*}{\partial \eta} \phi^k d\Gamma \\ GW &= \int_{\Gamma} U_{ij}^* \phi^k d\Gamma & gw &= \int_{\Gamma} p^* \phi^k d\Gamma \end{aligned} \quad \delta \quad (4.14)$$

dependiendo de que se trate de un medio elástico o escalar, respectivamente. Γ representa el elemento de contorno sobre el que se hace la integración.

En cualquiera de las integrales anteriores, son bien diferentes las situaciones dependiendo de que el punto de colocación de la solución fundamental esté o no sobre el elemento sobre el que se integra, pues en el primero de los casos se produce una singularidad del tipo $O(1/r^2)$ en las tracciones (o flujos), y una del tipo $O(1/r)$ en los desplazamientos (o presiones). La integración de estos núcleos se realiza empleando la estrategia utilizada por Han et al. (1985) y generalizada por Cerrolaza y Alarcón (1989), y cuya idea se ilustra en la figura IV-2.

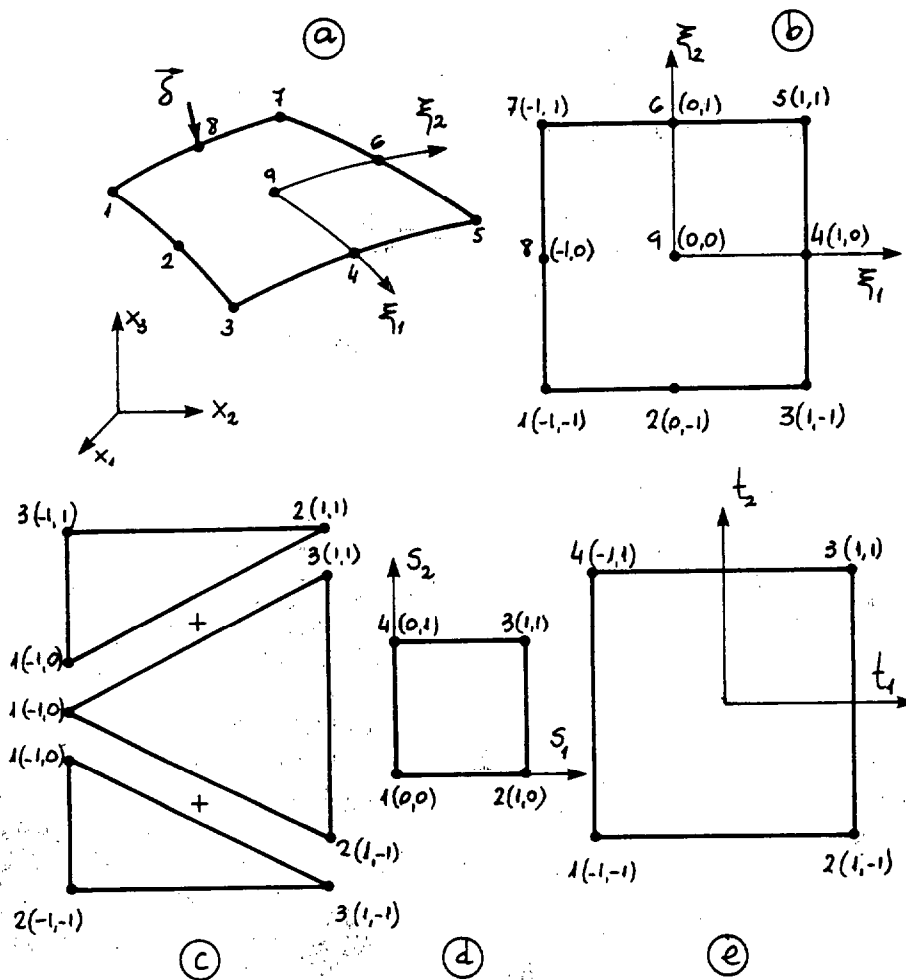


Fig. IV-2

Se basa en la subdivisión del elemento en triángulos tomando como vértice el punto de colocación de la carga concentrada. Posteriormente estos subdominios triangulares, o el elemento triangular completo, son transformados a cuadrados mediante un cambio de coordenadas que hace nulo el jacobiano en el vértice donde está la singularidad y que por tanto disminuye en una unidad el orden de la misma:

$$\xi_i = (1-s_1)\xi_i^1 + s_1(1-s_2)\xi_i^2 + s_1s_2\xi_i^3 \quad i = 1,2 \quad (4.15)$$

donde ξ_i^j son las coordenadas adimensionales de los j vértices del triángulo y la s_i son las coordenadas del nuevo espacio. A esta transformación va asociado un jacobiano cuyo determinante vale

$$|J_2| = s_1 \cdot 2 \cdot A \quad ; \quad d\xi_1 d\xi_2 = |J_2| ds_1 ds_2 \quad (4.16)$$

"A" representa el área del triángulo en coordenadas adimensionales ξ_1, ξ_2 , y donde no se ha impuesto ningún tipo de restricción al tipo de coordenadas ξ_i utilizadas.

Para la aplicación de una cuadratura convencional de Gauss los cuadrados de lado unidad se transforman finalmente a otros de lado dos mediante

$$s_i = \frac{t_i + 1}{2}, \quad i = 1, 2 \quad (4.17)$$

$$ds_1 ds_2 = |J_3| dt_1 dt_2 = \frac{1}{4} dt_1 dt_2$$

y cualquiera de la integrales (4.14) puede ser evaluada como

$$g_w = \sum^{n^{\circ} \text{ triang.}} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} p^*(t_1, t_2) \cdot \phi^k(t_1, t_2) \cdot |G(t_1, t_2)| \cdot (t_1 + 1) A \frac{1}{4} dt_1 dt_2 \quad (4.18)$$

Teóricamente, el procedimiento anterior sólo sería preciso para la función de forma correspondiente al nodo de aplicación, puesto que las restantes se anulan en el punto singular, con lo cual el problema debería obviarse. Sin embargo la experiencia demuestra que los resultados mejoran sensiblemente cuando el procedimiento se generaliza para las Q funciones de forma del elemento.

Asimismo, es importante notar que cuando $r \rightarrow 0$, $(\partial r / \partial \eta) \rightarrow 0$, lo cual suaviza la complejidad del núcleo (3.38) (del flujo) en un problema escalar. Sin embargo, en el caso de las tracciones de la solución fundamental, T_{ij} , no todos los términos del tensor están multiplicados por $(\partial r / \partial \eta)$, por lo que ni siquiera con esta transformación de coordenadas se consigue un núcleo verdaderamente integrable en el sentido del valor principal de Cauchy. En este caso se hace preciso un procedimiento alternativo para el cálculo de tales coeficientes, y a él se hará referencia en el apartado IV.4.

La integración de la solución fundamental sobre un elemento en el que no se produce singularidad, se realiza mediante cuadratura de Gauss para dominios rectangulares o triangulares según el caso (Stroud y Secrest, 1966). Los resultados son satisfactorios con órdenes en integración reducidos cuando la distancia entre el punto de aplicación y el elemento es del orden del tamaño del mayor de los bordes del mismo, o superior. En este caso son suficientes 4x4 puntos de integración en cuadriláteros, y 3x3 en triángulos. Sin embargo cuando la relación entre ambas longitudes se reduce es necesario aumentar el volumen de puntos de integración. Pruebas sucesivas pusieron de manifiesto que en el caso más desfavorable eran suficientes 6x6 puntos para cuadriláteros y 4x4 para triángulos.

IV.3 PROCEDIMIENTO PARA LA SIMPLIFICACIÓN DE LA IMPOSICIÓN DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO

Quizás el paso del MEC que mayor abanico de soluciones posibles a adoptar presenta es el del montaje de los coeficientes de influencia en el sistema global de ecuaciones. Cada opción supone una serie de ventajas e inconvenientes desde el punto de vista numérico y computacional, y su elección depende del tipo de problema que se pretende resolver y de los medios informáticos disponibles.

En una geometría tridimensional, el número de elementos a los que un nodo puede pertenecer simultáneamente está por regla general indeterminado. Si se trata además de una situación de borde o un punto anguloso, (figura IV-3), el vector normal asociado a cada uno de los elementos, a cada lado del nodo compartido, puede ser diferente, y en el caso más general las condiciones de contorno de estos elementos también lo serán. La situación además se complica porque los elementos pueden pertenecer a una o varias subregiones distintas, y éstas ser de igual o diferente fase (sólidas o líquidas).

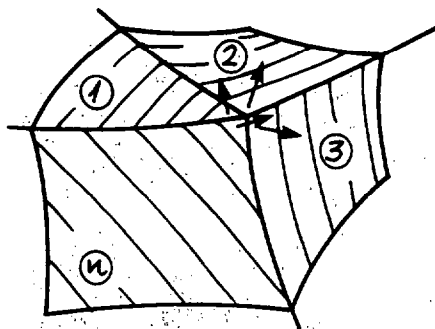


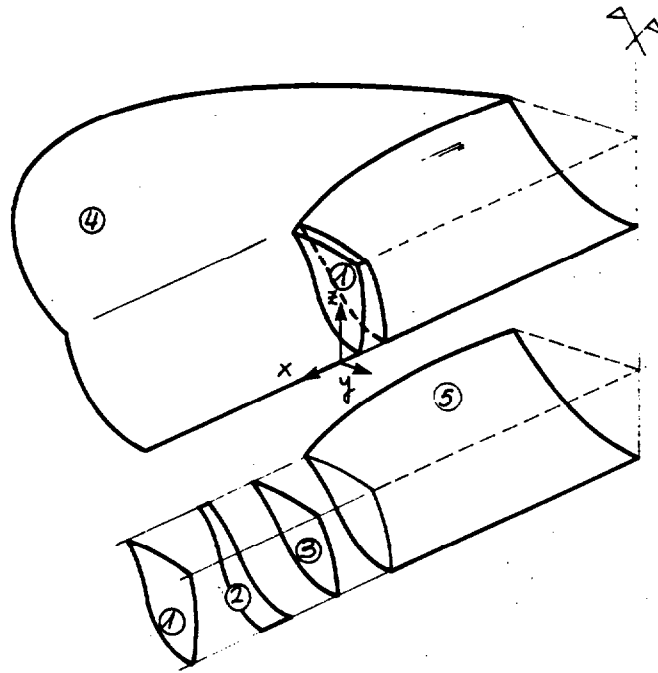
Fig. IV-3

La confluencia de fases implica la consideración de un número diferente de grados de libertad para el nodo según que cada elemento lo sea de un contorno de región sólida o líquida. La existencia de diferentes normales implica considerar vectores tracción y/o flujos distintos asociados a cada normal. Como consecuencia, el número de incógnitas de un nodo compartido depende simultáneamente de las condiciones de contorno de los elementos a los que pertenece, y del número de normales diferentes en él cuando tracciones y/o flujos no sean dato.

El montaje de las ecuaciones correspondientes a un nodo requiere por tanto, evaluar en primer lugar el número y tipo de incógnitas asociadas (movimientos o tracciones, flujos o presión); asignar posición de fila y columna para cada una dentro del sistema, y almacenar esta configuración para posibilitar solapes sucesivos en la matriz global. Hay que tener en cuenta que el movimiento (o presión) es único por nodo, y será dato desde que lo sea como perteneciente a uno de los elementos. Tracciones y flujos están asociados a cada normal, y serán datos o incógnitas dependiente de la condición de contorno de cada elemento, independientemente de los demás.

El modo clásico de actuar es mediante la definición de un "catálogo" de casos posibles asignando a cada uno un código identificativo, tratando de que sea lo más extenso posible como para recoger todas las posibles situaciones. El programa discriminaría para cada nodo qué caso corresponde, en función de la geometría (suave, arista o vértice), de la combinación de condiciones de contorno de los elementos involucrados, y de la eventual confluencia de diferentes regiones, sólidas o líquidas.

El montaje en estas condiciones es un proceso complicado en el que deben tenerse en cuenta múltiples situaciones particulares distintas posibles. A continuación se presenta una alternativa orientada a facilitar y generalizar el procedimiento.



	$\sqrt{1}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{4}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	
P	H_1^P	H_2^P	H_3^P	$-G_2^P$			$-G_3^{PA}$		u_1
									u_2
									u_3
S		H_2^S		G_2^S	H_4^S	H_5^S	$-G_5^{SA}$		t_2^P
									u_4
									u_5
A			$-G_3^{AP}$			$-G_5^{AS}$	H_3^A	H_5^A	p_3^A
									p_5^A
									$=$
									$G_1^P \bar{t}_1$
									$G_4^S \bar{t}_4$
									0

Fig. IV-4

En este trabajo el contorno total de cada subregión se considera constituido por una serie de zonas o Áreas diferenciadas entre sí por sus tipos de condición de contorno. Esquemáticamente la idea se ilustra en la figura IV-4.

Según lo dicho, en la subregión presa pueden distinguirse tres Áreas:

- 1 contorno libre de tracciones (paramento aguas abajo y coronación)
- 2 interfase con el suelo (cimentación)
- 3 interfase con el agua (paramento aguas arriba)

El suelo, además de la 2, consta de las Áreas

- 4 zonas libre de tracciones (superficie libre); y
- 5 interfase en el agua (fondo del embalse).

Finalmente los contornos que definen el embalse, para el modelo de la figura, serían los ya definidos 3 y 5.

La superficie de cada una de estas Áreas será lo suficientemente suave como para poder considerar que sólo existe un vector tensión, (o valor de flujo) asociado a cada nodo, cuando éstos sean incógnitas. En los bordes frontera entre varias Áreas se considerarán tantos nodos como Áreas confluyan, (figura IV-5) de manera que a cada nodo sólo se asocie una normal, o dicho de otra forma, cada nodo sólo pertenezca a un Área. Con ello se consigue desvincular los grados de libertad de las distintas Áreas y montar las columnas de cada una de ellas independientemente del resto. Se logra así una simplificación notable del procedimiento de montaje eliminando la casuística usual en este tipo de situaciones, (que se ve complicada en el caso de geometrías tridimensionales), y obtener una distribución sencilla de los ceros del sistema, lo cual puede ser útil en determinados procedimientos de resolución. Asimismo facilita la incorporación al programa de nuevos tipos de subregiones con distinto número de grados de libertad.

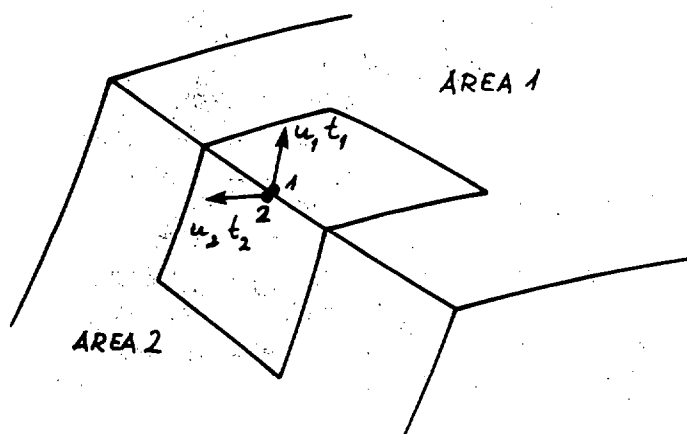


Fig. IV-5

Por contra este procedimiento supone la consideración de un número de grados de libertad mayor de estrictamente necesario puesto que asocia a los nodos duplicados incógnitas independientes en desplazamientos (en las subregiones sólidas), o en presión, (en el agua). Hay que decir sin embargo que, para una geometría determinada, el número de bordes en los que se duplican nodos está restringido, y por lo tanto, el porcentaje de nuevas ecuaciones con respecto al total disminuye rápidamente al aumentar o refinar las discretizaciones.

Sea de nuevo el caso representado en la figura IV-5. Como se ha dicho, la duplicación del nodo provoca el desdoblamiento de la ecuación nodal en dos filas y dos columnas. Si se trata de contornos de sólido se obtiene, para cada dirección coordenada:

$$\begin{aligned} 1: \quad & a_{11} u_1 + a_{12} u_2 + b t_1 + c t_2 + \dots = \bar{d} \\ 2: \quad & a_{21} u_1 + a_{22} u_2 + b t_1 + c t_2 + \dots = \bar{d} \end{aligned} \quad (4.19)$$

donde la contribución de los términos libres se ha incluido en los coeficientes de la diagonal a_{11} y a_{22} . Las posibles condiciones de contorno para este caso son:

$$\begin{aligned} 1) \quad & t_1 = \bar{t}_1 \quad t_2 = \bar{t}_2 \\ 2) \quad & t_1 = \bar{t}_1 \quad u_2 = \bar{u}_2 \\ 3) \quad & u_1 = \bar{u}_1 \quad t_2 = \bar{t}_2 \\ 4) \quad & u_1 = \bar{u}_1 \quad u_2 = \bar{u}_2 \quad \text{con} \quad \bar{u}_1 = \bar{u}_2 = \bar{u} \end{aligned}$$

En cualquiera de las tres primeras situaciones el sistema (4.19) es suficiente para obtener las otras dos incógnitas nodales. Así, en el caso 1) se obtienen u_1 y u_2 que resultarán iguales $u_1 = u_2$; en el caso 2) se obtienen u_1 y t_2 siendo $u_1 = u_2$, y en el caso 3) se obtienen t_1 y u_2 , siendo $u_2 = u_1$.

El caso 4) requiere un tratamiento especial puesto que en este caso las dos ecuaciones de (4.19) se hacen idénticas y el sistema de ecuaciones es singular. Este problema, conocido como problema de esquina, no es abordado en esta Tesis puesto que no se presenta en ninguno de los nodos del modelo general presentado en la figura IV-4. Un posible y elegante procedimiento de resolución sería la extensión al caso tridimensional del procedimiento empleado por Medina (1987) para geometrías bidimensionales, y que se basa en la duplicación de la ecuación nodal para una posición ligeramente desplazada de la carga concentrada, con lo que los coeficientes del sistema ya no serán iguales, y éste no será singular. Una idea similar es la empleada en el código BEASY (1986), que para estas situaciones conflictivas localiza los nodos en el interior del elemento, fuera del borde.

IV.4 CÁLCULO DE LOS TÉRMINOS DE LA DIAGONAL DE H

Subregiones sólidas

La diagonal principal en la matriz H está compuesta por submatrices h_{ij} de dimensión 3×3 que, son el resultado de la superposición

$$h_{ii} = C + \hat{h}_{ii} \quad (4.20)$$

siendo C la matriz de términos libres, cuyos valores dependen de la geometría local del contorno en el punto considerado, y $\hat{h}_{ii}$ es el resultado de la integración del tensor de la solución fundamental T_{ik}^* en el propio elemento, para la función de forma correspondiente al nodo de colocación.

Ya se han comentado las dificultades que presenta el cálculo de h_{ii} ya que cuando $r \rightarrow 0$ el tensor T_{ik}^* presenta singularidades del tipo $O(1/r^2)$ que no pueden ser integradas eficientemente con el procedimiento general. Es por ello que para el cálculo de las submatrices h_{ii} sea preciso utilizar de un procedimiento indirecto, que será expuesto a continuación.

Para él, se hace uso de la particularidad de que la imposición de un movimiento como sólido rígido sobre un dominio acotado no provoca tracciones sobre él. Por tanto, la correspondiente formulación estática del MEC producirá un sistema del tipo

$$H^e \cdot \bar{u}^e = 0 \quad (4.21)$$

lo cual implica que la suma de todos los coeficientes de cada fila de H^e debe dar un resultado idénticamente nulo o, de otro modo:

$$h_{ii}^e = - \sum_{i \neq j} \hat{h}_{ij}^e \quad (3.22)$$

y por tanto es posible la obtención de la diagonal a partir de los restantes coeficientes de la fila.

El procedimiento anterior, aun cuando ha sido presentado para un caso estático puede seguir siendo válido en el caso de problemas armónicos debido a que el tipo de singularidad que presentan las correspondientes soluciones fundamentales son exactamente iguales. En efecto, la solución fundamental T_{ik}^* , ya presentada en (3.18) puede también ser expresada en la forma:

$$T_{lk}^* = \frac{1}{4\pi} \left\{ A \left(\frac{\partial r}{\partial \eta} \delta_{lk} + r_{,k} \eta_l \right) + B r_{,l} r_{,k} \frac{\partial r}{\partial \eta} + C r_{,l} \eta_k \right\} \quad (4.23)$$

donde

$$\begin{aligned} A &= \frac{d\psi}{dr} - \frac{\chi}{r} \\ B &= \frac{4\chi}{r} - 2 \frac{d\chi}{dr} \\ C &= \left(\frac{c_p^2}{c_s^2} - 2 \right) \left(\frac{d\psi}{dr} - \frac{d\chi}{dr} - 2 \frac{\chi}{r} \right) - 2 \frac{\chi}{r} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Sustituyendo los exponenciales de ψ y χ por sus desarrollos en serie, en el entorno de $(\omega r) \rightarrow 0$ puede llegarse a las expresiones

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{r^2} \frac{c_s^2}{c_p^2} + k_s^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{(n+2)(n+4)} \left(1 + \left(\frac{c_s}{c_p} \right)^{n+4} \right) \frac{(k_s r)^n}{n!} \\ B &= -\frac{3}{r^2} \left(1 - \frac{c_s^2}{c_p^2} \right) - k_s^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(n-1)}{(n+2)(n+4)} \left(1 - \left(\frac{c_s}{c_p} \right)^{n+4} \right) \frac{(k_s r)^n}{n!} \\ C &= \frac{1}{r^2} \frac{c_s^2}{c_p^2} + k_s^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left\{ -2 + (n+4) \left(\frac{c_s}{c_p} \right)^{n+2} - 2(n+3) \left(\frac{c_s}{c_p} \right)^{n+4} \right\}}{(n+2)(n+4)} \frac{(k_s r)^n}{n!} \end{aligned} \quad (4.25)$$

siendo $k_s = - (i\omega/c_s)$

Sólo los primeros términos de A, B y C son singulares, y es fácil ver que su sustitución en la expresión (4.23) convierte a ésta última en la solución fundamental estática. Los sumatorios restantes no contienen singularidad y su cálculo no ofrece otra dificultad que la de la necesidad de tomar el suficiente número de términos de las series que garantice su convergencia.

En estas condiciones, el cálculo de la submatriz diagonal h_{ii} en un problema armónico puede llevarse a cabo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 h_{ii} &= C + \hat{h}_{ii} = (C + \hat{h}_{ii}^e) + (\hat{h}_{ii} - \hat{h}_{ii}^e) \\
 &= - \sum_{i \neq j} \hat{h}_{ij}^e + (\hat{h}_{ii} - \hat{h}_{ii}^e) \\
 &= (a) + (b)
 \end{aligned}
 \tag{4.26}$$

donde (b) corresponde a la integración de la nueva solución fundamental que surge de restar la parte estática a la solución armónica, y que como se ha visto no es singular. El superíndice "e" indica solución fundamental estática.

Cuando la posición en la diagonal corresponda a un nodo duplicado es preciso hacer una breve revisión del procedimiento:

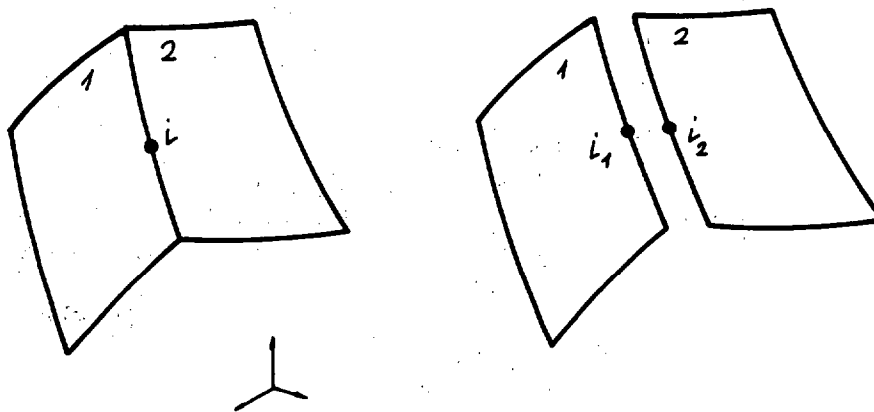


Fig. IV-6

para el segundo caso de la figura la matriz queda

$$\begin{array}{cc}
 & i_1 & i_2 \\
 i_1 & V_{11} - E_e & V_{12} + E_d \\
 i_2 & V_{21} + E_d' & V_{22} - E_e'
 \end{array}
 \tag{4.27}$$

V_{11} , V_{12} , V_{13} y V_{14} serían los valores exactos, mientras que E_e y E_d son los errores numéricos cometidos al integrar las soluciones fundamentales estática y armónica, respectivamente:

E_e : error numérico que se comete en uno de los términos del sumatorio (a)

En concreto $\hat{h}_{i_1 i_1}^e$

E_d : error que se comete en el cálculo de $\hat{h}_{i_1 i_2}$ al integrar la solución fundamental armónica.

El sistema obtenido (4.27) sólo será válido si

$$\begin{aligned}(V_{11} - E_e) + (V_{12} + E_d) &= V_{11} + V_{12} \\ (V_{21} + E_d') + (V_{22} - E_e') &= V_{21} + V_{22}\end{aligned}\quad (4.28)$$

lo cual implicaría que

$$E_e = E_d \quad \text{y} \quad E_e' = E_d' \quad (4.29)$$

Aún cuando se ha visto que las singularidades de las soluciones fundamentales son matemáticamente idénticas, no es posible garantizar la igualdad numérica de (4.29). Sin embargo, una pequeña modificación del procedimiento puede eliminar la presencia de tales errores: si de nuevo se tiene en cuenta que la integral desde i_1 sobre i_2 puede descomponerse en la parte estática ($\hat{h}_{i_1 i_2}^e$) y en la restante (no singular), se puede expresar:

$$\begin{aligned}h_{i_1 i_1} &= \left(- \sum_{\substack{j \neq i_1 \\ j \neq i_2}} \hat{h}_{i_1 j}^e \right) + (\hat{h}_{i_1 i_1} - \hat{h}_{i_1 i_1}^e) + \langle -\hat{h}_{i_1 i_2}^e \rangle = \\ &= V_{11}' + \langle -\hat{h}_{i_1 i_2}^e \rangle \\ h_{i_1 i_2} &= (\hat{h}_{i_1 i_2} - \hat{h}_{i_1 i_2}^e) + \langle \hat{h}_{i_1 i_2}^e \rangle = \\ &= V_{12}' + \langle \hat{h}_{i_1 i_2}^e \rangle\end{aligned}\quad (4.30)$$

donde ya no será necesaria la evaluación de $(\hat{h}_{i_1 i_2}^e)$, habiendo de cumplirse que

$$\begin{aligned}V_{11}' + V_{12}' &= V_{11} + V_{12} \\ V_{21}' + V_{22}' &= V_{21} + V_{22}\end{aligned}\quad (4.31)$$

Cuando se trata de regiones infinitas la aplicación del procedimiento del movimiento de sólido rígido requiere acotar el contorno ya que las tensiones en el infinito no están determinadas. La subregión se cierra en este caso con un nuevo contorno que sólo tiene como misión la posibilidad de integrar la solución fundamental estática sobre él pero que no introduce nuevas incógnitas (figura IV-7). Por tanto la forma de este "contorno ficticio" puede ser cualquiera, eligiéndose en general la más sencilla. Por la misma razón no es necesario que su discretización sea fina, siendo suficiente con muy pocos elementos, aun cuando estos sean de gran tamaño.

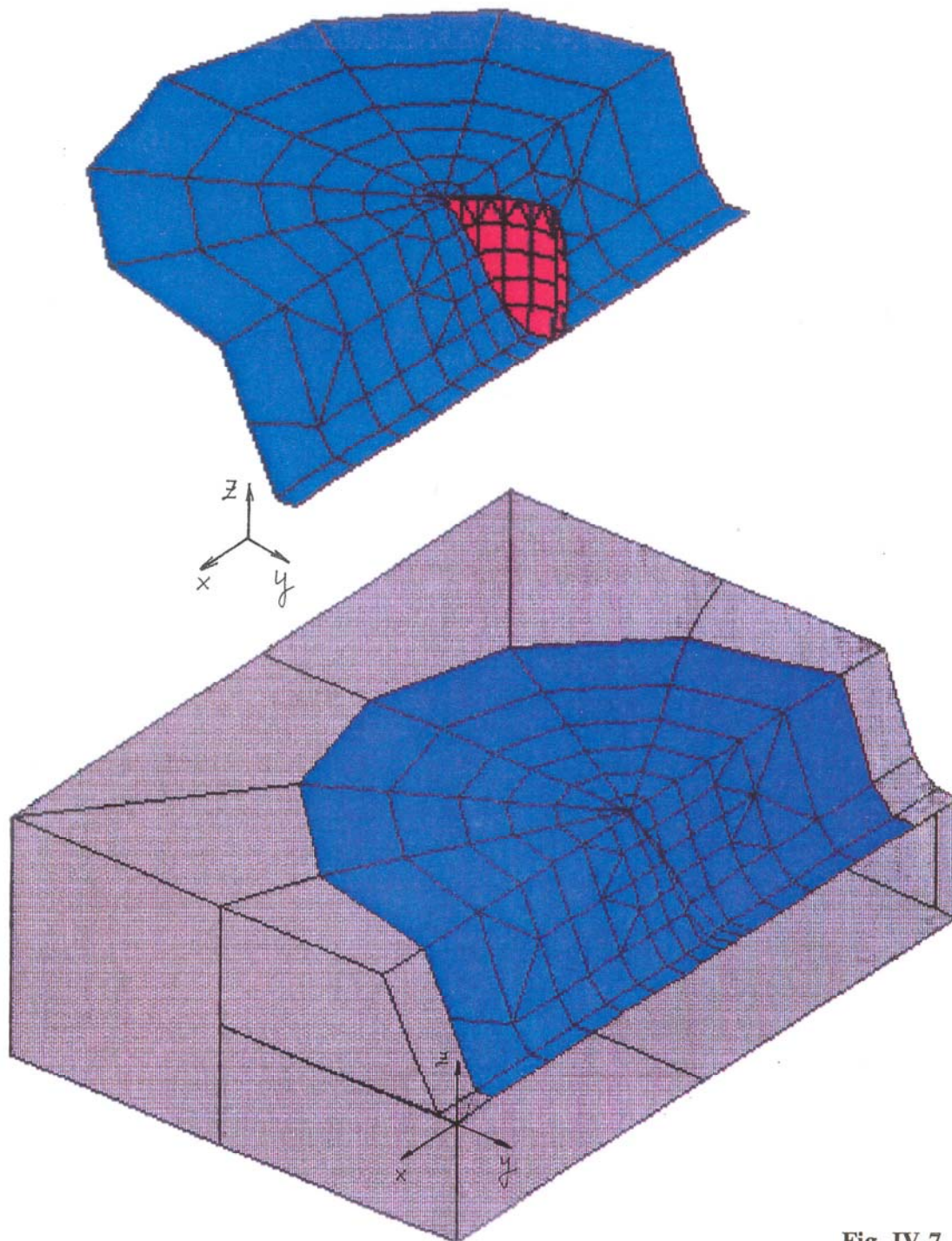


Fig. IV-7

Región líquida. Embalse

Un planteamiento similar al anterior puede hacerse para la subregión agua si tenemos en cuenta que un campo equipotencial estático produce flujos nulos en el contorno:

$$\begin{aligned} H^e \cdot \bar{p} &= 0 \\ \left(\int q^* \right) \cdot \bar{p} &= 0 \end{aligned} \quad (4.32)$$

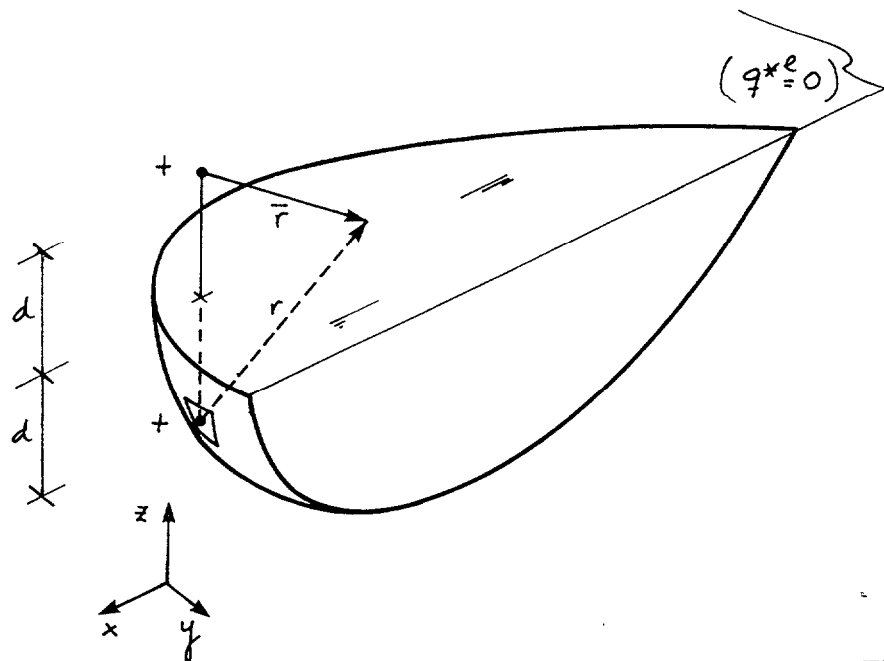
y de nuevo la diagonal principal de la matriz **H** puede calcularse como

$$h_{ii} = C + \hat{h}_{ii} = \left(- \sum_{i \neq j} \hat{h}_{ij}^e \right) + [\hat{h}_{ii} - \hat{h}_{ii}^e] \quad (4.33)$$

evitando así el engorroso cálculo de los términos libres. Las expresiones de las soluciones fundamentales están en este caso suavizadas por $\partial r / \partial \eta$ que tiende a cero cuando r disminuye. Por este motivo el tratamiento numérico de (4.33) se simplifica y puede ser tratado sin problemas en la siguiente forma:

$$h_{ii} = \left(- \sum_{i \neq j} \hat{h}_{ij}^e \right) + \hat{h}_{ii} - \hat{h}_{ii}^e \quad (4.34)$$

y no hay necesidad de hacer ninguna revisión especial en los nodos duplicados.

**Fig. IV-8**

La incorporación del método de las imágenes se hace añadiendo a la excitación estática otra del mismo signo simétricamente situada respecto de la superficie libre, lo cual produce flujos nulos en el plano de simetría, y por tanto no es necesaria su discretización.

IV.5 CONDICIONES DE SIMETRÍA Y ANTISIMETRÍA

En el caso particular de que la geometría del problema muestre un plano de simetría y las condiciones de contorno sean simétricas o antimétricas respecto de aquél, puede alterarse el planteamiento general en orden a economizar recursos disponibles, puesto que en este caso se reduce el número de integraciones a realizar, y sobre todo disminuye sensiblemente la dimensión del sistema de ecuaciones a resolver.

Sea el problema esquematizado en la figura IV-9 del que se desea conocer la respuesta frente a dos tipos de condición de contorno que guardan relación de simetría o antimetría, con respecto del plano de simetría geométrica. El planteamiento general llevaría a un sistema como:

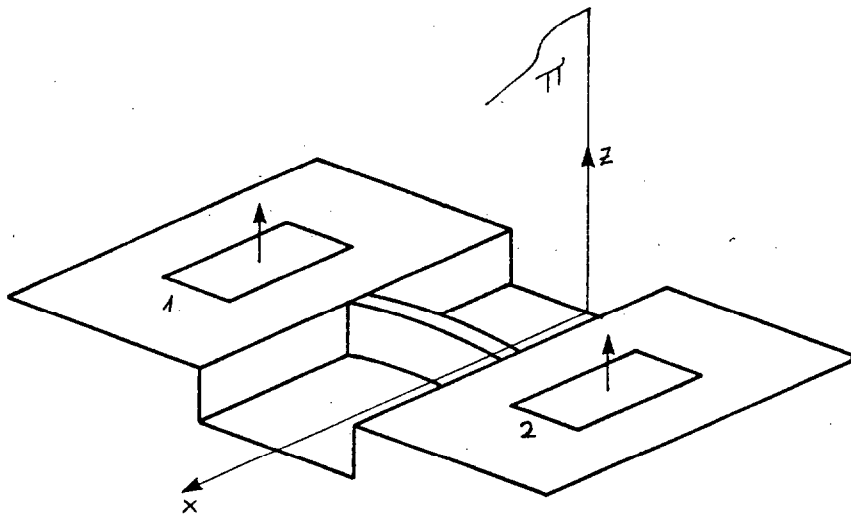


Fig. IV-9

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 & | & y_1 \\ & | & \\ x_2 & | & y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_1 & | & C_1 \\ & | & \\ B_2 & | & C_2 \end{Bmatrix} \quad (4.35)$$

Ahora bien, las condiciones de simetría permiten definir las relaciones

$$\begin{aligned}x_1 &= \alpha x_2 & ; & & B_1 &= \alpha B_2 \\y_1 &= \beta y_2 & ; & & C_1 &= \beta C_2\end{aligned}\tag{4.36}$$

donde los escalares α y β serán conocidos, y su signo dependerá del tipo de relación. El sistema se convierte en:

$$\left. \begin{aligned}(A_{11} + \alpha A_{12}) x_1 &= B_1 \\(A_{11} + \beta A_{12}) y_1 &= C_1\end{aligned} \right\} \tag{4.37}$$

Así pues sólo será preciso el cálculo de las matrices A_{1i} (la mitad de las integraciones), y resolver un sistema de ecuaciones cuatro veces menor. Hay que notar que si $\alpha \neq \beta$ será necesario efectuar dos ensamblajes de matrices y dos resoluciones de sistemas de ecuaciones.

CAPÍTULO V

MODELO DE ELEMENTOS DE CONTORNO PARA EL CÁLCULO SÍSMICO DE PRESAS BÓVEDA

- V.1 - Modelos de la presa y del suelo. Consideración de la interacción suelo-presa.
- V.2 - Modelo para el agua embalsada. Consideración de la interacción agua-presa.
- V.3 - Interacción conjunta suelo-agua-estructura.

Hasta ahora se han presentado las bases teóricas necesarias para comprender el problema que se pretende abordar, como son las ecuaciones que siguen los fenómenos de propagación de ondas en medios viscoelásticos y en medios fluidos compresibles. También se han presentado las bases del método numérico de resolución y se han comentado algunos aspectos particulares de implementación. A continuación y en este capítulo se va a explicar la forma en que el MEC puede ser aplicado al cálculo dinámico de presas bóveda incluyendo los fenómenos de interacción, y haciendo hincapié en la manera en que se modela el comportamiento de cada medio: presa, agua y suelo. En particular son importantes aspectos como la definición del campo libre de movimientos en el suelo, o la diferenciación en la consideración del agua embalsada como medio finito o infinito, caso éste último en que se hace necesaria la correcta modelización de la zona de agua no discretizada.

El análisis se presenta en fases sucesivas correspondiendo a las distintas situaciones posibles de interacción. En primer lugar se aborda el estudio a embalse vacío, haciendo distinción entre el caso de una base infinitamente rígida, o una base deformable que interacciona con la presa. Seguidamente se presenta el análisis de la interacción entre el agua y la presa, supuesta una base rígida, y finalmente se aborda el problema de interacción conjunta.

V.1 MODELO DE LA PRESA Y DEL SUELO. CONSIDERACIÓN DE LA INTERACCIÓN SUELO-PRESA

Bajo la hipótesis de base rígida, las tensiones dinámicas que se producen en la interfase entre la presa y el suelo en presencia de una sollicitación sísmica, se suponen totalmente absorbidas por el terreno de cimentación sin que se produzcan deformaciones en él. En este caso la respuesta puede obtenerse estudiando tan sólo la subregión presa, imponiendo en la interfase con la cimentación el mismo campo de movimientos (conocido y uniforme) que se produce en la superficie libre del suelo rígido en zonas alejadas de la presa, como consecuencia de las ondas que se propagan en su interior. La presa se modela con una discretización de elementos de contorno como un medio viscoelástico lineal e isótropo, y su contorno total puede suponerse descompuesto en el contorno Γ_1 , correspondiente a los paramentos y la coronación, donde las tracciones son conocidas, y el contorno Γ_2 , correspondiente a la cimentación, donde como se ha dicho se impone un campo uniforme de movimientos conocidos de valor $\bar{u}$.

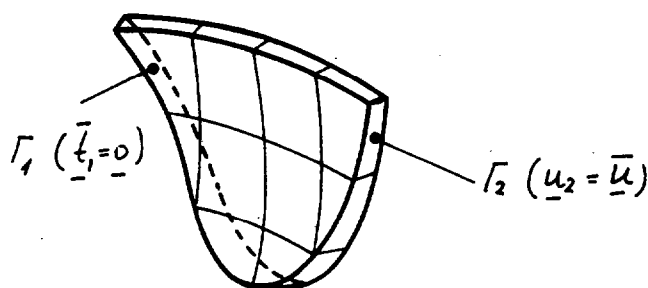


Fig. V-1

El sistema de ecuaciones para los contornos discretizados será:

$$H_1 u_1 + H_2 u_2 = G_1 t_1 + G_2 t_2 \quad (5.1)$$

con

$$\begin{aligned} t_1 &= 0 & \text{en } \Gamma_1 \\ u_2 &= \bar{u} & \text{en } \Gamma_2 \end{aligned} \quad (5.2)$$

con lo que

$$H_1 u_1 - G_2 t_2 = B \quad (5.3)$$

El término independiente resulta ser:

$$B = - \{H_2 \cdot \bar{u}_2\} = - \{H_2 \cdot \bar{u}\} \quad (5.4)$$

Cuando se considera la deformabilidad del suelo, las tracciones en la interfase con la presa provocan una distorsión del campo de movimientos de las inmediaciones de ésta con respecto al que se produce en zonas alejadas. Al campo incidente que producen las ondas sísmicas en el suelo, supuesta la superficie libre de tracciones (u_I), hay que sumar pues el campo difractado (u_D) que ocasiona la presencia de la presa, mientras que en ésta sólo existe campo difractado. El problema total puede abordarse mediante un proceso de subestructuración, escribiendo las ecuaciones independientemente para la presa y el suelo, para después imponer las condiciones de contorno adecuadas en la interfase. Para ilustrar el planteamiento podemos considerar un problema simplificado consistente en un medio sólido que interacciona con un semiespacio elástico. La descomposición puede ser visualizada como se indica en la figura.

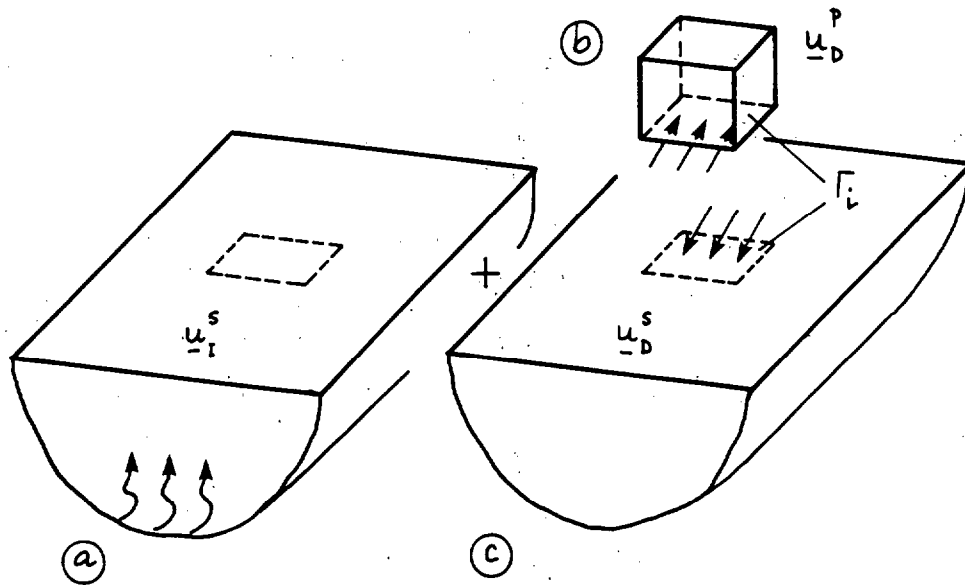


Fig. V-2

Los campos totales en cada dominio serán:

$$u_T^S = u_I^S + u_D^S \quad (5.5)$$

$$u_T^P = u_D^P$$

El problema (a) tiene una solución que se conoce explícitamente y los problemas (b) y (c) se modelan mediante el MEC tratando el suelo como un medio viscoelástico lineal e isótropo con un cierto amortiguamiento viscoso. El sistema puede plantearse

$$\left\{ \begin{array}{l} H^S u_D^S = G^S t_D^S \\ H^P u_D^P = G^P t_D^P \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} H^S u_T^S - G^S t_T^S = [H^S u_I^S - G^S t_I^S] \\ H^P u_T^P - G^P t_T^P = 0 \end{array} \right. \quad (5.6)$$

Donde tan sólo falta imponer las condiciones de contorno, que serán conocidas en los contornos exteriores y de continuidad y equilibrio en la interfase Γ_i

$$\begin{array}{ll} u_T^S = u_T^P & u_I^S + u_D^S = u_D^P \\ t_T^S = -t_T^P & t_I^S + t_D^S = -t_D^P \end{array} \quad \text{en } \Gamma_i \quad (5.7)$$

con lo que se obtiene una formulación cerrada para el problema conjunto.

El campo difractado cumple en el medio infinito las condiciones de regularidad y radiación, por lo que puede suponerse amortiguado a cierta distancia de la presa. Ello permite tan sólo tener que discretizar los contornos interiores, y los contornos cercanos de aquellos que se extienden indefinidamente. Sea de nuevo el sistema idealizado que estamos considerando,

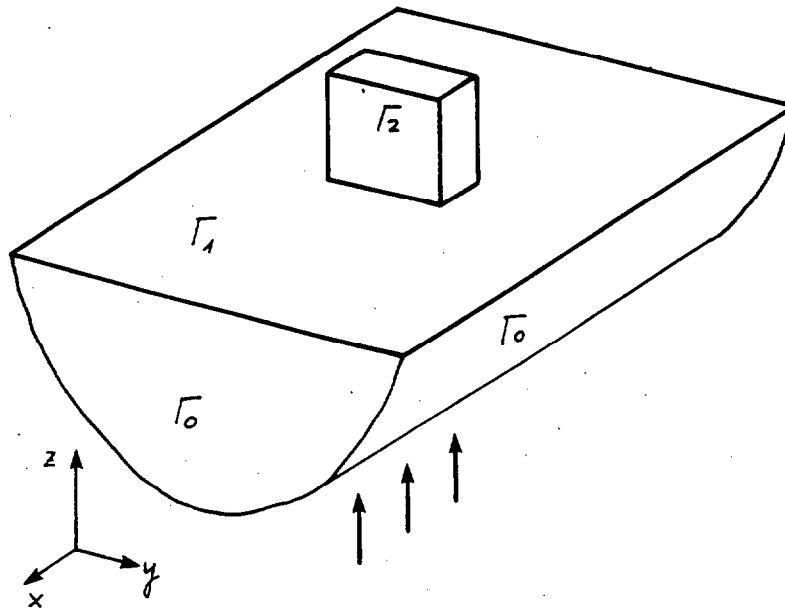


Fig. V-3

según lo dicho sobre los contornos lejanos Γ_0 puede suponerse $u_T = u_I$ y $t_T = t_I$ con lo que el planteamiento del sistema para el campo total será:

$$\begin{aligned} H^1 u_T^1 + H^0 u_I^0 &= G^1 t_T^1 + G^0 t_I^0 \\ H^2 u_T^2 &= G^2 t_T^2 \end{aligned} \quad (5.8)$$

Ahora bien, puesto que el campo incidente debe satisfacer las ecuaciones del medio es factible escribir

$$H^1 u_I^1 + H^0 u_I^0 = G^1 t_I^1 + G^0 t_I^0 \quad (5.9)$$

que restadas a las del sistema permiten obtener otro equivalente en donde no aparecen los términos correspondientes a los contornos Γ_0 por lo que no será preciso su discretización:

$$\begin{aligned} H^1 u_T^1 &= G^1 t_T^1 + [H^1 u_I^1 - G^1 t_I^1] \\ H^2 u_T^2 &= G^2 t_T^2 \end{aligned} \quad (5.10)$$

siendo el corchete completamente conocido

En el problema ideal hasta ahora considerado la geometría del suelo, se ha simplificado y se ha tratado como un semiespacio. La geometría real que conforman una presa bóveda y el recipiente que la soporta debe incluir el perfil del cañón que sirve de cauce al río.

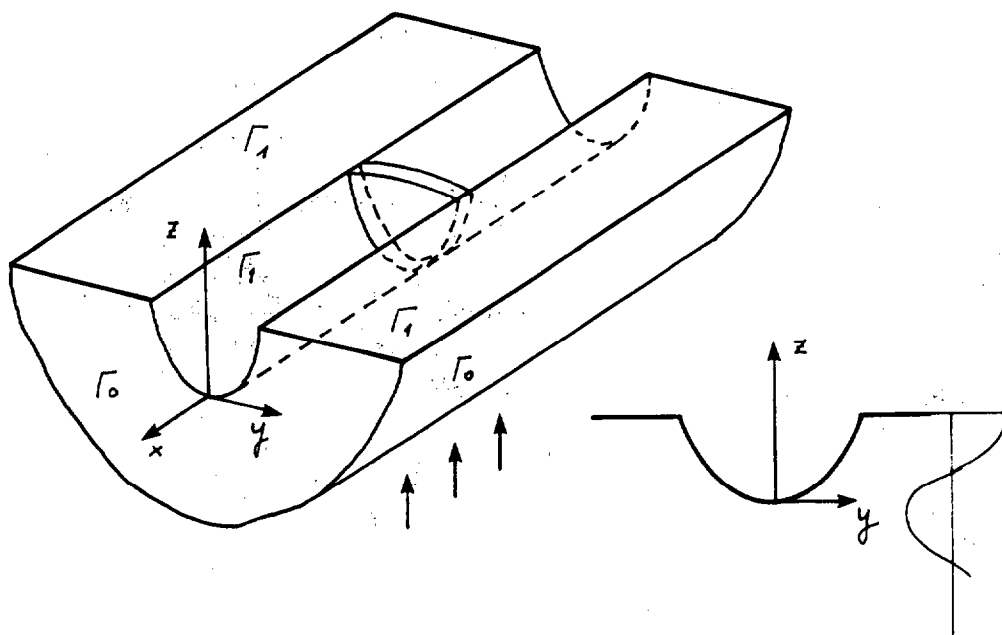


Fig. V-4

En este caso, y en ausencia de la presa, la presencia de un tren de ondas planas en el terreno produce un campo incidente (u_{IC}) que no se corresponde con el campo incidente del semiespacio, al menos en las zonas cercanas al cañón. La dificultad consiste en que la definición del campo libre de movimientos y tracciones de la nueva geometría no puede ser evaluada de forma analítica. Sin embargo, es posible validar el planteamiento anterior usando el campo incidente conocido del semiespacio, (u_I) si se considera el difractado como la suma del dos: el producido por la presa (u_{DP}) y el producido por el cauce (u_{DC}):

$$u_{IC} = u_I + u_{DC} \quad (5.11)$$

$$u_T = u_{IC} + u_{DP} = u_I + (u_{DC} + u_{DP}) = u_I + u_D$$

las ecuaciones de la subregión suelo planteadas para el campo total serán:

$$H^1 u_T^1 + H^0 u_T^0 = G^1 t_T^1 + G^0 t_T^0, \quad (5.12)$$

ecuaciones que deben satisfacer el campo incidente del semiespacio:

$$H^1 u_I^1 + H^0 u_I^0 = G^1 t_I^1 + G^0 t_I^0 \quad (5.13)$$

Restando ambas se obtiene

$$H^1 u_T^1 = G^1 t_T^1 + [H^1 u_I^1 - G^1 t_I^1] - [H^0 (u_T^0 - u_I^0) - G^0 (t_T^0 - t_I^0)] \quad (5.14)$$

El primer corchete será siempre completamente conocido. El segundo corchete será estrictamente nulo allí donde $u_T^0 = u_I^0$ y $t_T^0 = t_I^0$, es decir, en las zonas suficientemente alejadas del cañón. Habrá una zona finita, (rayada en la figura V-5), donde ese corchete no se anula, pero se hará la consideración de que el error cometido en las inmediaciones de esta zona finita como consecuencia de anular dicho corchete no perturba la solución, (se amortigua), en las inmediaciones de la presa.

La validez de esta argumentación ha sido comprobada numéricamente, observándose que discretizaciones que se extienden aguas arriba y aguas abajo de la presa, longitudes del orden de dos veces la altura de la misma ofrecen resultados completamente satisfactorios.

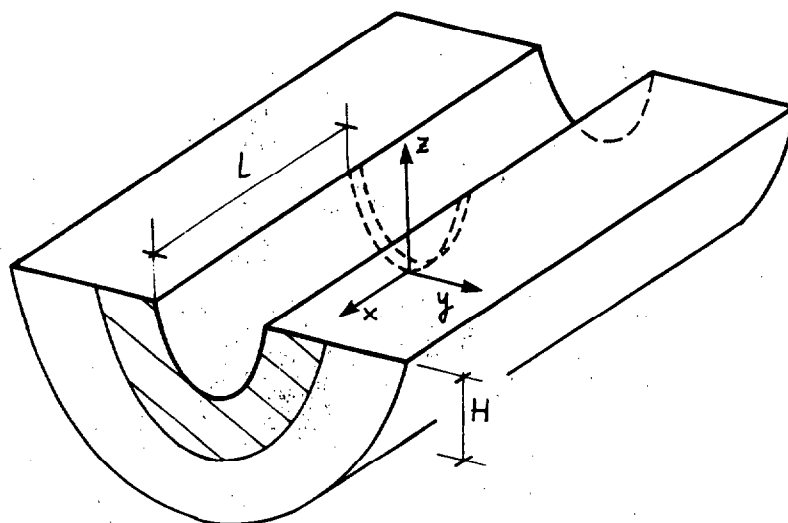


Fig. V-5

La argumentación además es directamente aplicable al caso más general en que las secciones del cañón sean diferentes a uno y otro lado de la presa, o simplemente para el caso embalses finitos.

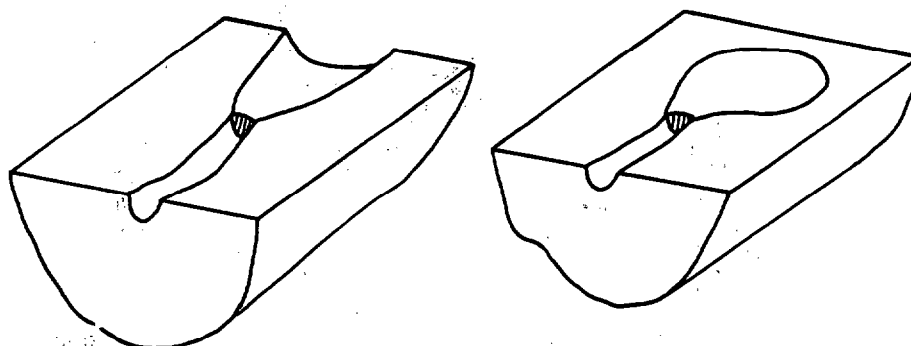


Fig. V-6

V.2 MODELO PARA EL AGUA EMBALSADA. CONSIDERACIÓN DE LA INTERACCIÓN AGUA-PRESA

El sistema se compone de un medio sólido, la presa, considerada como una subregión viscoelástica, lineal e isotrópica, que interacciona con una subregión líquida, el agua embalsada, modelada como medio compresible no viscoso, dentro del rango de pequeñas perturbaciones. Bajo la hipótesis de suelo indeformable, la excitación se traduce en un campo de movimientos conocido y uniforme en la cimentación de la presa y en el fondo del embalse. El movimiento conocido se aplica según cada uno de los ejes coordenados.

En cuanto a la modelización de la subregión agua, son bien diferentes los casos correspondientes a la consideración del embalse como un medio finito, esto es, una zona de agua cerrada y acotada, y la situación correspondiente a un embalse abierto, consistente en una región irregular cercana a la presa (cerrada del embalse) y una zona infinita, simulada como un canal de sección uniforme que se extiende indefinidamente aguas arriba. Ambas situaciones se representan de forma esquemática en la figura V-7.

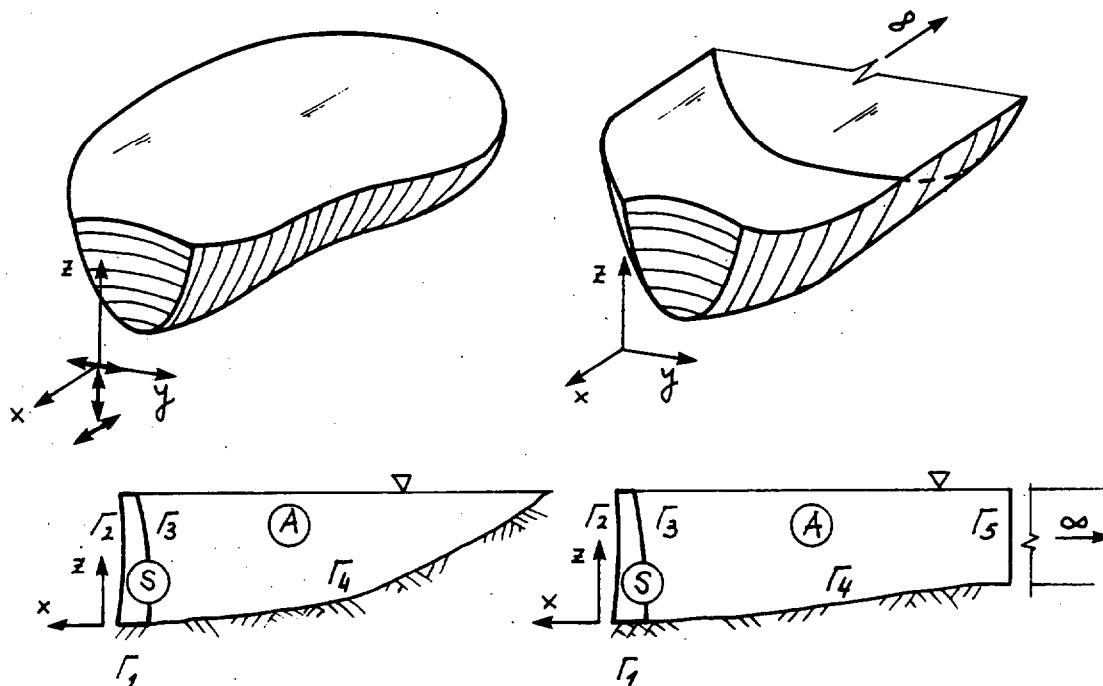


Fig. V-7

Para el caso de embalse cerrado, las ecuaciones correspondientes a los contornos discretizados de las regiones sólida (P) y líquida (A) son respectivamente:

$$\begin{aligned} P : \quad & H_1^P u_1 + H_2^P u_2 + H_3^P u_3 = G_1^P t_1 + G_2^P t_2 + G_3^P t_3 \\ A : \quad & H_3^A p_3 + H_4^A p_4 = G_3^A w_3 + G_4^A w_4 \end{aligned} \quad (5.15)$$

En los contornos exteriores se imponen las condiciones conocidas:

$$\begin{aligned} u_1 = (\{\bar{u}\}) &= \begin{pmatrix} \bar{u} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ó } \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{u} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ó } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{u} \end{pmatrix} & \text{ en } \Gamma_1 \\ t_2 &= 0 & \text{ en } \Gamma_2 \\ w_4 &= [\eta_n^A] \cdot \bar{u} & \text{ en } \Gamma_4 \end{aligned} \quad (5.16)$$

donde $[\eta_n^A]$ representa la matriz de vectores normales en cada nodo de la subregión agua.

En cada nodo de la interfase sólido-agua se establece continuidad de movimientos en dirección normal, igualdad de presiones normales y ausencia de tensiones tangenciales:

$$\begin{aligned} t_x^n &= p^n \eta_x^{A*} \\ t_y^n &= p^n \eta_y^{A*} \\ t_z^n &= p^n \eta_z^{A*} \end{aligned} ; \quad w^n = u_x^n \eta_x^{A*} + u_y^n \eta_y^{A*} + u_z^n \eta_z^{A*} \quad \text{en } \Gamma_3 \quad (5.17)$$

Con todo ello el sistema de ecuaciones queda:

$$\begin{aligned} -G_1^S t_1 + H_2^S u_2 + H_3^S u_3 - G_3^{SA} p_3 &= B^S \\ H_3^A p_3 + H_4^A p_4 - G_3^{AS} u_3 &= B^A \end{aligned} \quad (5.18)$$

Las matrices G_3^{SA} y G_3^{AS} se obtienen respectivamente a partir de G_3^S y G_3^A , de la forma ilustrada en las expresiones (3.63) y (3.64), de tal manera que en la interfase se toman como incógnitas la presión p en el agua y las componentes u_x , u_y , u_z del movimiento en el sólido.

Los vectores de términos independientes del sistema resultan ser:

$$\begin{aligned} B^S &= -H_1^S (\{\bar{u}\}) \\ B^A &= G_4^A [\eta_n^A] \bar{u} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Cuando el embalse continúa indefinidamente aguas arriba, (o en cualquier otra dirección), y el agua es compresible, el cabeceo de la presa provoca un tren de ondas de presión cuyo desarrollo contiene términos complejos del tipo $e^{k \cdot x}$ que no se amortiguan al aumentar la distancia a la presa. El problema necesita entonces una simulación correcta de la zona de embalse no discretizada. Esto se lleva a cabo mediante un nuevo contorno (contorno Γ_5) perpendicular a la dirección del canal, en el que se plantean las ecuaciones del MEC, y en donde se impone como condición de contorno la relación entre las presiones y sus derivadas normales que corresponde al problema de la propagación de ondas en el canal rígido infinito de sección uniforme que se supone existe aguas arriba.

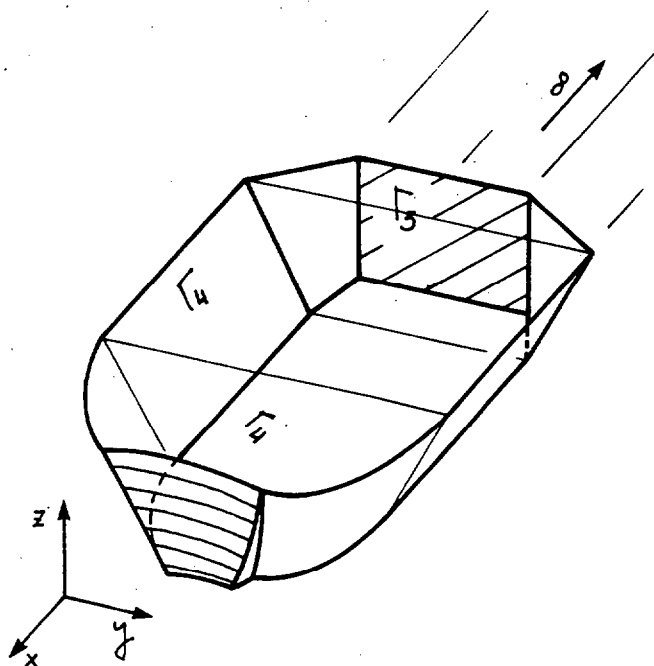


Fig. V-8

La misión de este nuevo contorno es introducir en el sistema una forma de absorber la energía que corresponde a los términos de presión que no se amortiguan con la distancia. Por otro lado, la idealización de un embalse infinito como una canal infinito de sección uniforme está muy lejos de la realidad en la mayoría de las situaciones que se dan en la práctica, sea cual sea la sección elegida. Con esta filosofía, en este trabajo se ha escogido una sección rectangular para el canal infinito, la cual presenta frente a cualquier otra la importante ventaja de que permite conocer analíticamente los términos del desarrollo de presiones. El método no por ello pierde generalidad, pero para cualquier otra sección sería preciso evaluar numéricamente la relación $p-w$ resolviendo previamente un problema bidimensional de autovalores.

Así pues, el modelo de elementos de contorno del embalse incluye a cierta distancia de la presa una zona de transición hacia una geometría rectangular, donde se sitúa el contorno Γ_5 , que por su especial condición de contorno permite expulsar (absorber) ondas longitudinales de presión, simulando la existencia de un canal infinito aguas arriba.

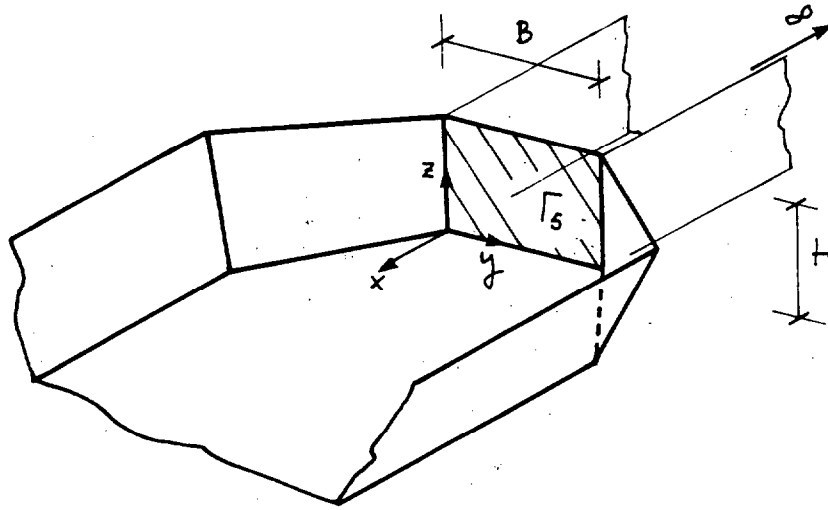


Fig. V-9

En la propagación longitudinal de ondas en el canal, cada término de la ley de presiones es de la forma:

$$p_{nm} = A_{nm}(y, z) e^{k_{nm}x} e^{i\omega t} \quad (5.20)$$

siendo:

$$k_{nm} = \pm \sqrt{(\lambda_z^n)^2 + (\lambda_y^m)^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \quad (5.21)$$

y

$$\lambda_z^n = \frac{2n-1}{2H} \pi \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.22)$$

$$\lambda_y^m = \frac{m-1}{B} \pi \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Para frecuencias

$$\frac{\omega^2}{c^2} \leq (\lambda_z^n)^2 + (\lambda_y^m)^2 \quad (5.23)$$

el exponente es real, de manera que para que la onda de presión se amortigue al aumentar la distancia a la presa, (con $-x$), será necesario tomar el signo (+) en (5.21).

Cuando

$$\frac{\omega^2}{c^2} > (\lambda_z^n)^2 + (\lambda_y^m)^2 \quad (5.24)$$

el exponente es complejo y la onda de presión no se amortigua. En este caso:

$$p_{nm} = A_{nm}(y, z) \exp \left(\pm i \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - [(\lambda_z^n)^2 + (\lambda_y^m)^2]} \cdot x \right) \exp(i\omega t) \quad (5.25)$$

Para que esto sea una onda que se propaga según $-x$ será necesario tomar el signo (+) del exponente, de este modo

$$p_{nm} = A_{nm}(y, z) \exp \left\{ i \left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - [(\lambda_z^n)^2 + (\lambda_y^m)^2]} \cdot x + \omega t \right) \right\} \quad (5.26)$$

consiguiéndose el efecto deseado.

Cuando el movimiento de la base rígida es vertical, esto es, según z , o transversal a la dirección del canal, según y , se genera en el canal infinito un campo de presiones p_s^I , que no tiene asociadas ondas longitudinales, y que habrá que sumar al otro producido por las ondas que se propagan según $-x$. Así pues, la relación entre las presiones y los movimientos normales en los nodos del contorno Γ_s puede expresarse, en el caso más general, de la forma

$$p_s = M \cdot w_s + p_s^I \quad (5.27)$$

donde, en el segundo miembro, el primer sumando representa la contribución de las ondas longitudinales de presión, y el segundo corresponde a la presión ocasionada por el movimiento de las paredes rígidas del canal.

En el Apéndice A pueden encontrarse las expresiones del campo p_5^I para el canal rectangular que se está considerando.

Las ecuaciones del MEC para el sistema presa-embalse infinito deberán incluir el nuevo contorno:

$$\begin{aligned} S : \quad & -G_1^S t_1 + H_2^S u_2 + H_3^S u_3 - G_3^{SA} p_3 = B^S \\ A : \quad & H_3^A p_3 + H_4^A p_4 - G_3^{AS} u_3 + H_5^A p_5 - G_5^A w_5 = B^A \end{aligned} \quad (5.28)$$

En donde se han impuesto en Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 y Γ_4 las mismas condiciones de contorno que para el caso de embalse cerrado. Con la introducción de (5.27) el sistema queda:

$$\begin{aligned} S : \quad & -G_1^S t_1 + H_2^S u_2 + H_3^S u_3 - G_3^{SA} p_3 = B^S \\ A : \quad & H_3^A p_3 + H_4^A p_4 - G_3^{AS} u_3 + (H_5^A M - G_5^A) w_5 = B^A + D^A \end{aligned} \quad (5.29)$$

donde

$$D^A = -H_5^A p_5^I \quad (5.30)$$

que será nulo en el caso de excitación anteroposterior.

Conviene aclarar que la discretización del contorno especial Γ_5 vendrá determinada por el número de términos que deban tomarse para expresar el desarrollo de presiones y movimientos en él, en función del rango de frecuencias a barrer y de la distancia existente entre dicho contorno y el trasdós de la presa. Es evidente que al aumentar ésta, tanto mejor será la representación de la influencia del movimiento horizontal de la presa.

V.3 INTERACCIÓN CONJUNTA SUELO-AGUA-ESTRUCTURA

Cuando se considera el sistema completo constituido por los tres medios, suelo-presa-embalse, y se tiene en cuenta la deformabilidad del suelo, se produce una interacción en la interfase agua-suelo que hasta ahora no ha sido considerada y que afecta sensiblemente al comportamiento dinámico del conjunto.

La deformabilidad del suelo altera, por un lado, la distribución de presiones en el fondo del embalse. Por otro, la interacción suelo-presa modifica los movimientos en el paramento aguas arriba de ésta, lo que provoca a su vez una nueva alteración de las presiones en el embalse. Es por tanto imposible desligar el efecto que tiene la existencia de un medio en el comportamiento de los demás, y se hace necesario el estudio conjunto de los tres medios. Como ya se ha visto en los apartados anteriores, se han de plantear separadamente las ecuaciones del MEC para cada una de las subregiones (presa, suelo y agua) para a continuación imponer las condiciones de contorno adecuadas en las interfases, de la forma ya conocida.

La excitación se modela como un tren incidente de ondas planas que asciende verticalmente desde el infinito, produciendo un campo conocido de movimientos y tracciones en zonas suficientemente alejadas de la presa. Se hacen aquí las mismas consideraciones que en el apartado V.1 en cuanto al tratamiento del campo difractado en el suelo, de manera que sólo los contornos cercanos introducen incógnitas. Las ecuaciones del MEC se plantean en campo total y se restan las correspondientes al campo incidente del semiespacio (conocido) que pasarán directamente al vector de términos independientes.

De nuevo son bien distintas las situaciones que se presentan en el estudio de la región agua en función de si se modela el embalse como un medio cerrado, o si se considera que a cierta distancia de la presa el embalse se extiende indefinidamente como un canal de sección uniforme. Ambas situaciones se esquematizan en la figura V-10.

En el segundo de los casos es necesario hacer uso de un contorno especial Γ_6 , en el que se imponen unas condiciones de contorno apropiadas para simular la presencia de ondas longitudinales que ascienden por el canal no discretizado. La formulación es análoga al caso ya visto en el apartado anterior, con la salvedad de que para el caso de base deformable es despreciable el efecto que en la presa produce el campo de presiones p^I en el canal aguas arriba de Γ_6 cuando bajo el canal deformable incide un tren de ondas.

La discretización estará formada por los siguientes contornos :

- | | |
|--------------|--|
| Γ_1 | Cimentación de la presa. Interfase presa-suelo. |
| Γ_2 | Paramento aguas abajo de la presa. Contorno exterior. |
| Γ_3 | Paramento aguas arriba de la presa. Interfase presa-embalse. |
| Γ_4 | Superficie libre del suelo. |
| Γ_5 | Fondo del embalse. Interfase suelo-embalse. |
| (Γ_6) | Contorno absorbente. (Sólo si el embalse es infinito). |
| Γ_0 | Contorno ficticio sobre el que no se hace la representación integral (no introduce incógnitas) y sólo se emplea para integrar sobre él la solución fundamental estática. |

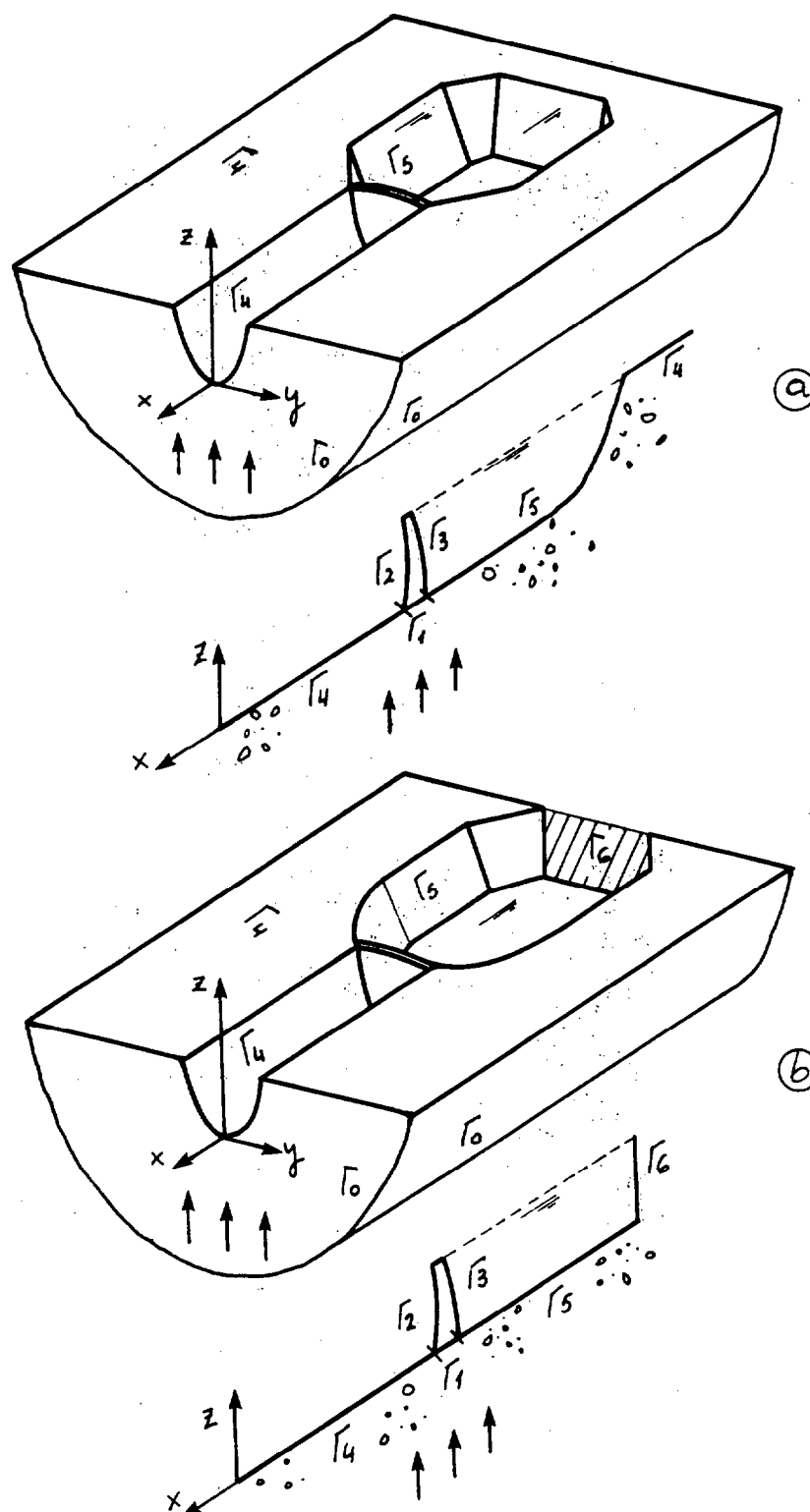


Fig. V-10

Según todo lo dicho hasta ahora, el planteamiento de las ecuaciones del MEC permite obtener un sistema cerrado de ecuaciones, que para el caso de embalse finito viene a ser:

$$\begin{aligned}
 P : \quad & H_1^P u_1 + H_2^P u_2 + H_3^P u_3 - G_1^P t_1^P - G_3^{SA} p_3^A = 0 \\
 S : \quad & H_1^S u_1 + H_4^S u_4 + H_5^S u_5 + G_1^S t_1^P - G_5^{SA} p_5^A = B^S \quad (5.31) \\
 A : \quad & H_3^A p_3^A + H_5^A p_5^A - G_3^{AS} u_3 - G_5^{AS} u_5 = 0
 \end{aligned}$$

en donde se ha impuesto en los contornos exteriores

$$\begin{aligned}
 t_2^P &= 0 & \text{en } \Gamma_2 \\
 t_4^S &= 0 & \text{en } \Gamma_4,
 \end{aligned} \quad (5.32)$$

en la interfase entre sólidos que:

$$\begin{aligned}
 t_1^S &= -t_1^P \\
 u_1^S &= u_1^P = u_1 & \text{en } \Gamma_1
 \end{aligned} \quad (5.33)$$

y las interfases sólido-agua se han tratado de la forma ya conocida. El vector de términos independientes surge de la representación del campo incidente del semiespacio en el suelo:

$$B^S = (H_4^S u_4^I - G_4^S t_4^I) + (H_1^S u_1^I - G_1^S t_1^I) + (H_5^S u_5^I - G_5^S t_5^I) \quad (5.34)$$

Cuando el embalse se modela como una subregión infinita, las ecuaciones correspondientes al agua habrán de contemplar el contorno Γ_6 :

$$A : H_3^A p_3^A + H_5^A p_5^A + (H_6^A M - G_6^A) w_6 - G_3^{AS} u_3 - G_5^{AS} u_5 = 0 \quad (5.35)$$

en donde se ha tenido en cuenta la relación especial entre p - w en los nodos del contorno Γ_6

$$p_6 = M w_6. \quad (5.36)$$

CAPÍTULO VI

ANÁLISIS DE LA RESPUESTA DINÁMICA DE LA PRESA DE MORROW POINT

- VI.1 - Introducción
- VI.2 - Respuesta de la presa sobre base rígida. Embalse vacío
- VI.3 - Consideración de la interacción suelo-presa
- VI.4 - Consideración de la interacción agua-presa
Influencia de la geometría del vaso
- VI.5 - Interacción conjunta suelo-agua-estructura

VI.1 INTRODUCCIÓN

Se ha escogido para el análisis la presa de Morrow Point, situada en el río Gunnison, estado de Colorado, (U.S.A.). Se trata de una presa bóveda prácticamente simétrica que tiene una altura máxima de 142 metros y en la cota de coronación abarca un arco de circunferencia de 112.5° con un radio medio de 113 metros (figura VI-1). Su definición geométrica puede encontrarse en la referencia de Hall, J.F. y Chopra, A.K. (1983). El motivo de esta elección radica en la gran cantidad de estudios y resultados publicados que existen de esta presa, obtenidos mediante un modelo basado en el Método de los Elementos Finitos (Hall y Chopra (1983) y Fok y Chopra (1986)). La comparación de estos resultados con los obtenidos con el MEC para el mismo problema, permitirá poner de manifiesto las discrepancias que derivan de las diferencias inherentes a cada modelo en cuanto a la forma de representar los distintos fenómenos físicos involucrados en el comportamiento del sistema.

A continuación y en los próximos apartados se evaluará la respuesta de la presa a excitaciones armónicas según las direcciones anteroposterior (x), vertical (z) y transversal (y), (tomando como referencia la dirección de la cerrada). El estudio se llevará a cabo separadamente para las diferentes situaciones posibles de interacción. Asimismo se estudiará la importancia que sobre el comportamiento de la presa tiene la consideración de diferentes geometrías para el embalse.

VII.2 RESPUESTA DE LA PRESA SOBRE BASE RÍGIDA. EMBALSE VACIO

La primera de las condiciones de estudio corresponde a la hipótesis de suelo indeformable para la situación de embalse vacío, y sirve como punto de referencia para análisis sucesivos. La presa en este caso puede ser estudiada aisladamente, modelándose como un dominio viscoelástico lineal sometido a una excitación que es uniforme en todos los puntos de la cimentación.

La discretización empleada para el modelo es la que se muestra en la figura VI-1, y consta de una combinación de elementos cuadriláteros y triangulares con un total de 124. Se ha comprobado que esta discretización resulta suficientemente precisa para el rango de frecuencias a barrer, y se mantendrá uniforme para todas las situaciones de interacción.

Las propiedades del hormigón son:

densidad	$\rho = 2641.65 \text{ Kg/m}^3$
módulo de elasticidad transversal	$G = 11500 \text{ MPa}$
coeficiente de Poisson	$\nu = 0.2$

y un coeficiente de amortiguamiento $\beta = 0.05$.

La respuesta del sistema se expresa mediante una variable adimensional que representa la amplitud del movimiento relativo en dirección anteroposterior en un punto de la coronación, respecto a la del movimiento en la superficie libre (a la cota de coronación) en zonas suficientemente alejadas de la presa. Para las excitaciones correspondientes a las direcciones anteroposterior y vertical, la respuesta se presenta para el punto medio de la coronación en el plano de simetría (punto A de la figura VI-1). Para la excitación transversal se presenta la respuesta en el punto B, situado asimismo en la coronación de la presa, y distanciado del punto A un ángulo de 13.25° medido desde el centro del arco de circunferencia de esa cota.

La primera frecuencia de resonancia de la presa para excitaciones simétricas (con respecto al plano de simetría geométrica) resulta $\omega_1^s = 27.22 \text{ rd/s}$. Para la excitación antimétrica la frecuencia natural obtenida es $\omega_1^a = 24.65 \text{ rd/s}$. Estos valores servirán para adimensionalizar las frecuencias de excitación en las curvas que se presentan a continuación.

En la figura VI-2 se muestra la amplificación anteroposterior del punto A para las excitaciones anteroposterior y vertical en un rango de frecuencias entre 0 y 120 rd/s, comparándose los resultados con los obtenidos por Chopra y colaboradores para el mismo problema mediante el M.E.F. (Hall y Chopra (1983), Fok y Chopra (1986)) La figura VI-3 corresponde a la excitación antimétrica. En todos los casos se observa una buena concordancia en los resultados, apreciándose tan sólo algunas diferencias en el valor de los picos de amplificación, en el entorno de las frecuencias naturales. En concreto el modelo de elementos de contorno proporciona picos levemente superiores en los dos primeros modos simétricos, y menores en el tercero. Para la excitación transversal se obtiene un pico ligeramente inferior en el primer modo y algo superior en

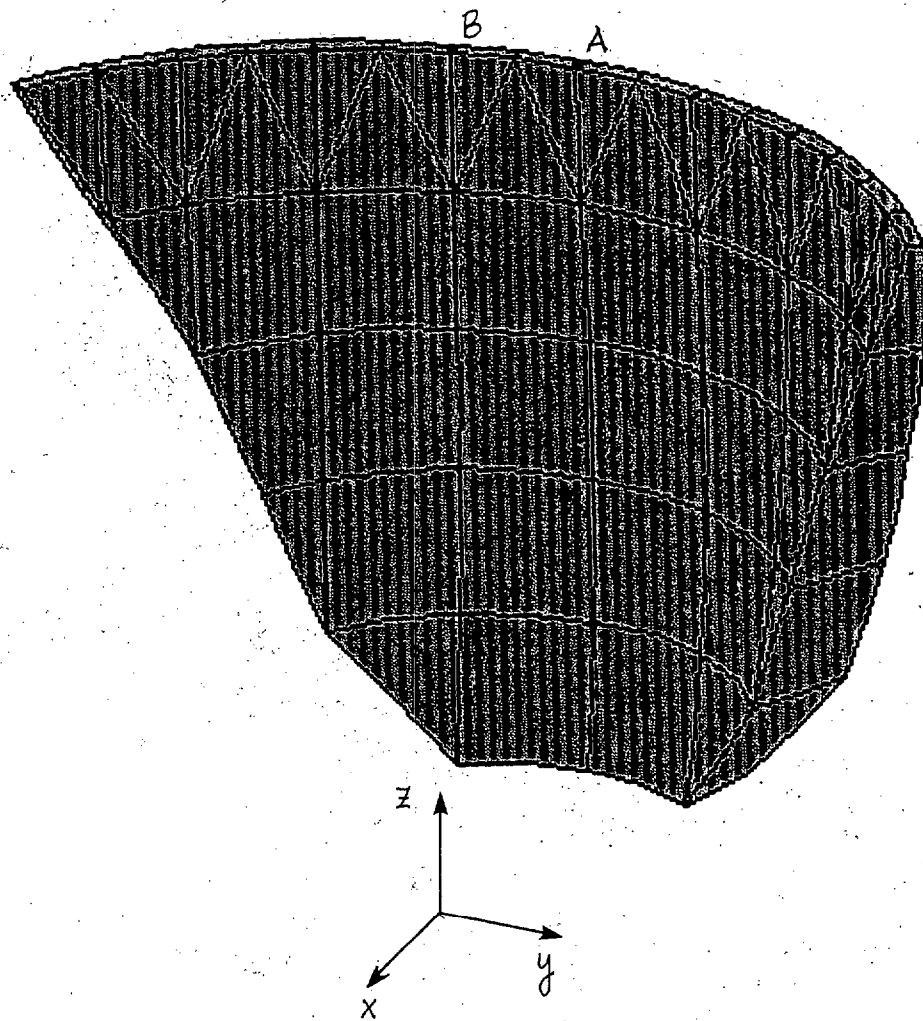


Fig. VI-1 Discretización de Elementos de Contorno de la presa bóveda de Morrow Point.

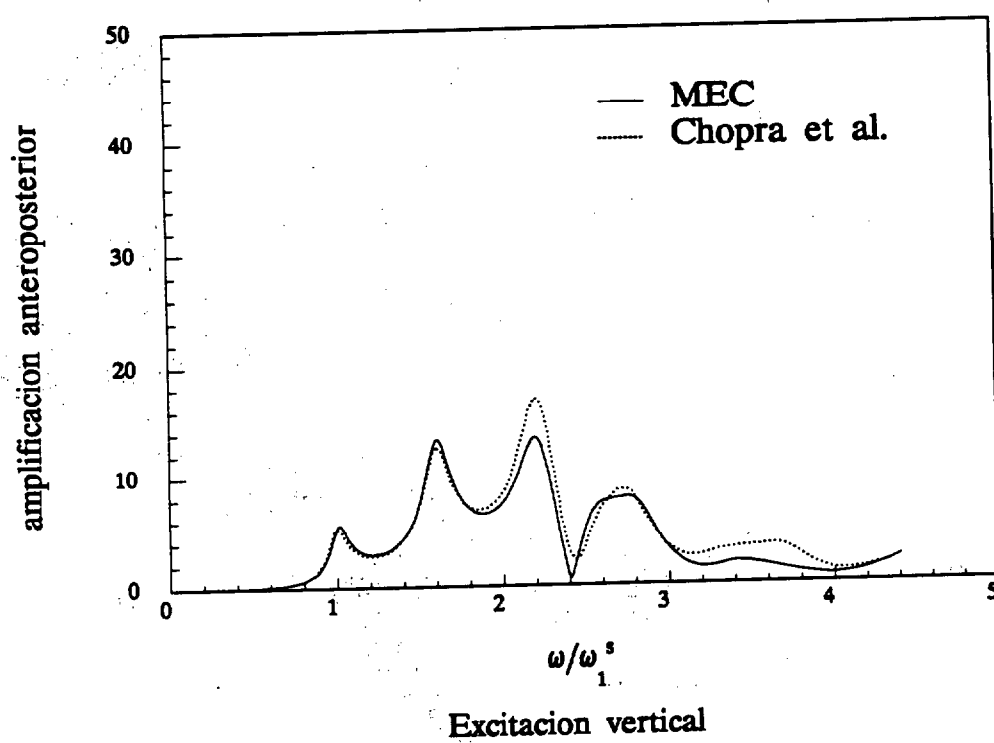
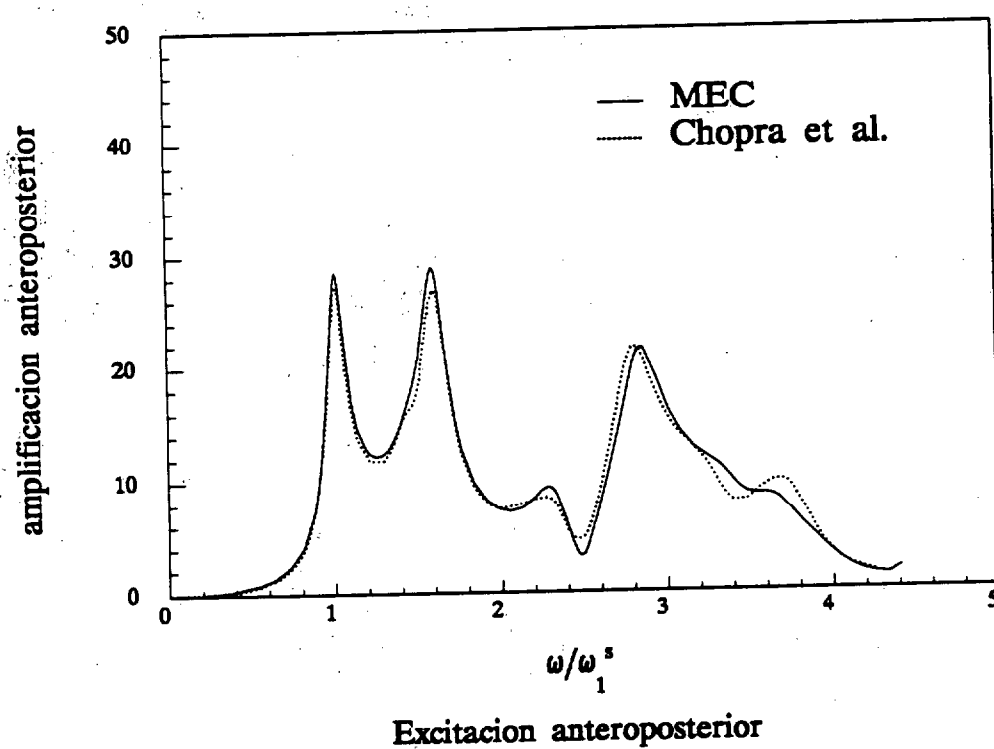


Fig. VI-2 Amplificación anteroposterior en el punto A de la coronación. Base rígida y embalse vacío.

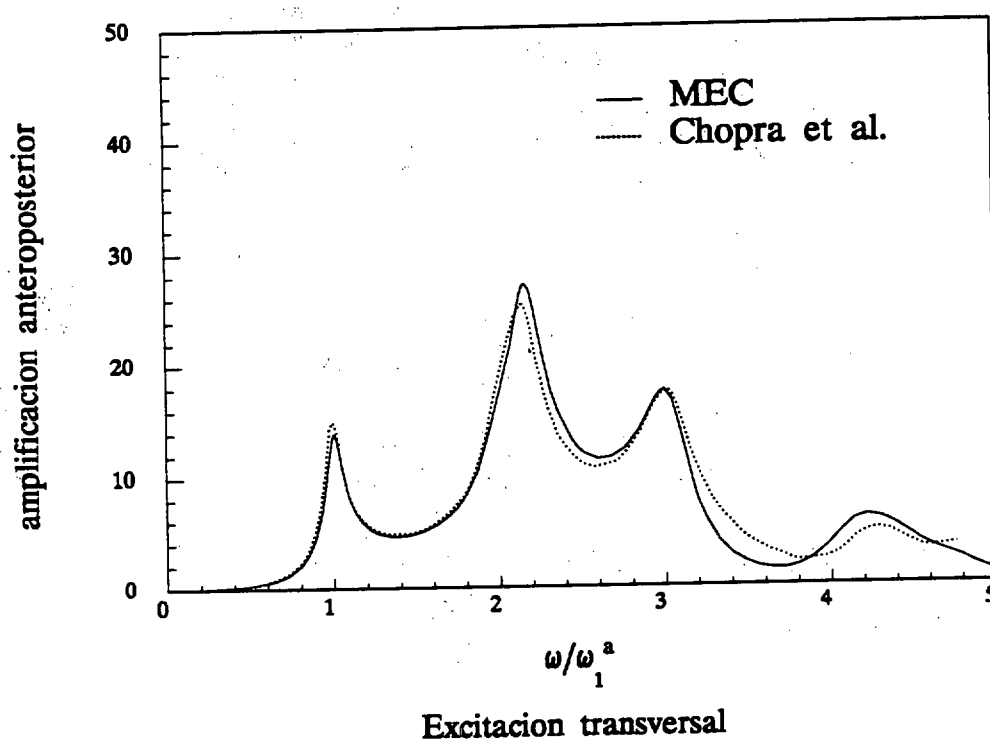


Fig. VI-3 Amplificación anteroposterior en el punto B de la coronación. Base rígida y embalse vacío.

el segundo. Se observa asimismo que el ajuste de los resultados es algo peor para las frecuencias más altas.

Es importante notar que los picos de amplificación de la respuesta son superiores para la segunda frecuencia de resonancia (simétrica y antismétrica) que para la primera correspondiente. Para las excitaciones vertical y transversal ocurre lo mismo para el pico de los terceros modos. Se aprecia también que las amplificaciones son importantes hasta frecuencias altas, del orden de ω/ω_1^s y $\omega/\omega_1^a = 3$.

VI.3 CONSIDERACIÓN DE LA INTERACCIÓN SUELO-PRESA

Para evaluar la influencia que tiene la deformabilidad del suelo en la respuesta de la presa a embalse vacío es preciso considerar un modelo que incluya ambos medios (presa y suelo) acopladamente y sea capaz de representar de forma adecuada la interacción mutua.

La presa se considera con las mismas propiedades y geometría que en el apartado anterior, y el suelo se modela como un sólido viscoelástico lineal con las siguientes propiedades:

densidad	$\rho = 2641.65 \text{ Kg/m}^3$
coeficiente de Poisson	$\nu = 0.2$
módulo de elasticidad transversal	$G = 11500 \text{ MPa}$

y un coeficiente de amortiguamiento $\beta = 0.05$. En la parte superior de la figura VI-4 se muestra la primera discretización empleada para la presa y el suelo, en donde se ha considerado que la geometría del vaso se extiende indefinidamente hacia el infinito con sección rectangular uniforme. La discretización sólo incluye la mitad de la geometría total al ser ésta simétrica. La subregión suelo se discretiza hasta cierta distancia de la presa (en este caso del orden de dos veces y medio la altura de la misma), en donde queda abierta. En la parte inferior de la figura se presenta la discretización del suelo (zona coloreada), y se han incluido los contornos ficticios (en color gris), que sólo se emplean para posibilitar el cálculo de ciertos términos de la matriz H (tal y como se ha visto en el apartado VI.4). Hay que hacer hincapié en que tales contornos ficticios no son parte del modelo del M.E.C. para el suelo, puesto que sobre ellos no se hace la representación integral y por lo tanto no introduce incógnitas.

Un modelo más realista para la geometría del vaso es el que se presenta en la figura VI-5, que corresponde a un embalse que se cierra a cierta distancia de la presa. En la parte superior se muestra la discretización del M.E.C. y en la inferior la subregión suelo con sus contornos ficticios. De nuevo resaltar que los contornos en color gris no forman parte del modelo.

Aunque discretizaciones más groseras y menos extensas hubieran sido suficientes para el suelo (del orden de dos veces la altura de la presa), se han empleado discretizaciones

más extensas y refinadas en la zona de vaso para homogeneizar resultados con respecto a los casos de embalse lleno que se estudiarán en próximos apartados.

El análisis de la respuesta de la presa para ambas geometrías cuando el embalse está vacío proporciona resultados casi idénticos. Se deduce de ello que la topografía del suelo lejos de la presa no tiene influencia en la respuesta en condiciones de embalse vacío. Por este motivo y para mayor claridad de los resultados, en esta Tesis sólo se presentarán los resultados correspondientes a la figura VI-4.

Las figuras VI-6 y VI-7 muestran las curvas de amplificación anteroposterior del sistema acoplado, para los casos de excitaciones simétricas y antimétrica respectivamente. La comparación con la respuesta correspondiente a la base rígida pone de manifiesto que la deformabilidad del suelo produce una disminución de las frecuencias naturales de la presa y un sensible descenso de los picos de amplificación, especialmente en el rango de frecuencias bajo y medio. Así, se aprecia que la primera frecuencia de resonancia baja hasta el entorno de $\omega/\omega_1 = 0.9$. En la excitación anteroposterior casi han desaparecido los picos de amplificación, con excepción del correspondiente al primer modo. Para las excitaciones vertical y transversal se obtienen asimismo curvas muy amortiguadas con respecto a la respuesta sobre base rígida. Por contra, las amplificaciones no decaen en el rango más alto de frecuencias, y son aún importantes para la excitación anteroposterior en el entorno de $\omega/\omega_1^s = 4$.

La comparación de estos resultados con los publicados por Fok y Chopra (1986) para el mismo problema pone de manifiesto diferencias muy importantes, que se muestran en las figuras VI-8 y VI-9. Es fácil demostrar que estas diferencias se deben a que el modelo de elementos finitos hace severas simplificaciones en la consideración del suelo, tratándolo como un medio acotado no viscoso y sin masa, que por lo tanto no puede representar la distribución espacial de la excitación. Hay que tener en cuenta que los desplazamientos diferenciales entre puntos separados entre sí una distancia del orden de las dimensiones de la presa, o menor, pueden ser muy importantes cuando se considera un valor correcto de la velocidad de propagación de las ondas en el suelo.

Para demostrar la argumentación anterior, el programa de elementos de contorno se ha pasado de nuevo para la misma discretización, adoptando esta vez para el suelo una viscosidad nula y una densidad tendente a cero, lo cual se traduce en la práctica en tomar una densidad mil veces inferior a la real (valores inferiores de la densidad no produjeron diferencias significativas). En este caso los resultados, tal como se aprecia en las figuras VI-8 y V-9, se encuentran muy próximos a los del modelo de elementos finitos.

Se deduce pues que la falta de consideración espacial de la excitación conduce a sobreestimaciones importantes de la respuesta, que puede llegar a ser hasta tres veces superior a la obtenida con un modelo más realista, como ocurre para el segundo pico de amplificación del modo antimétrico.

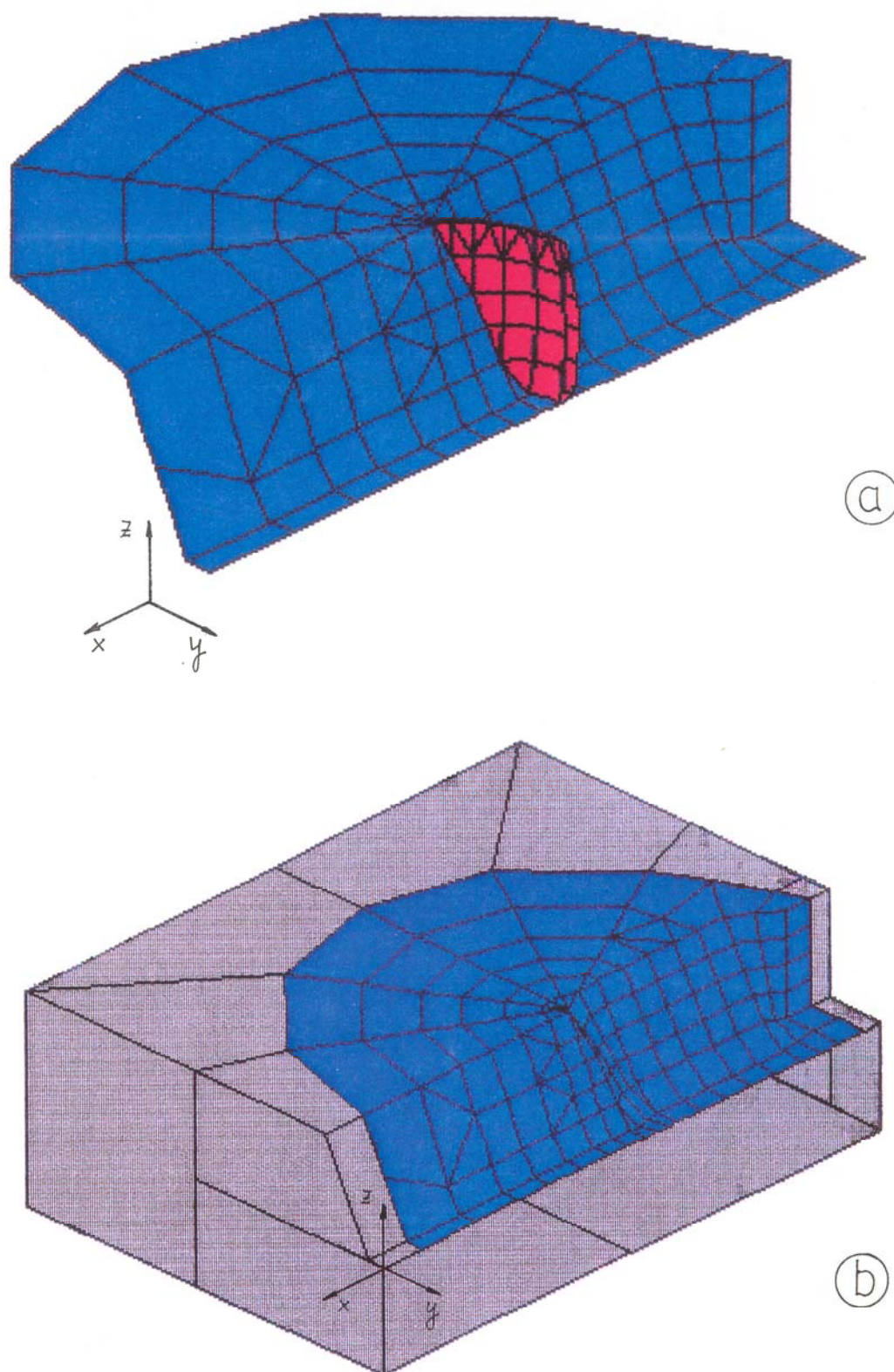


Fig. VI-4

- (a) Geometría y discretización de Elementos de Contorno para el estudio del sistema acoplado suelo-presa. Modelo de embalse abierto.
(b) Subregión suelo y contornos ficticios.

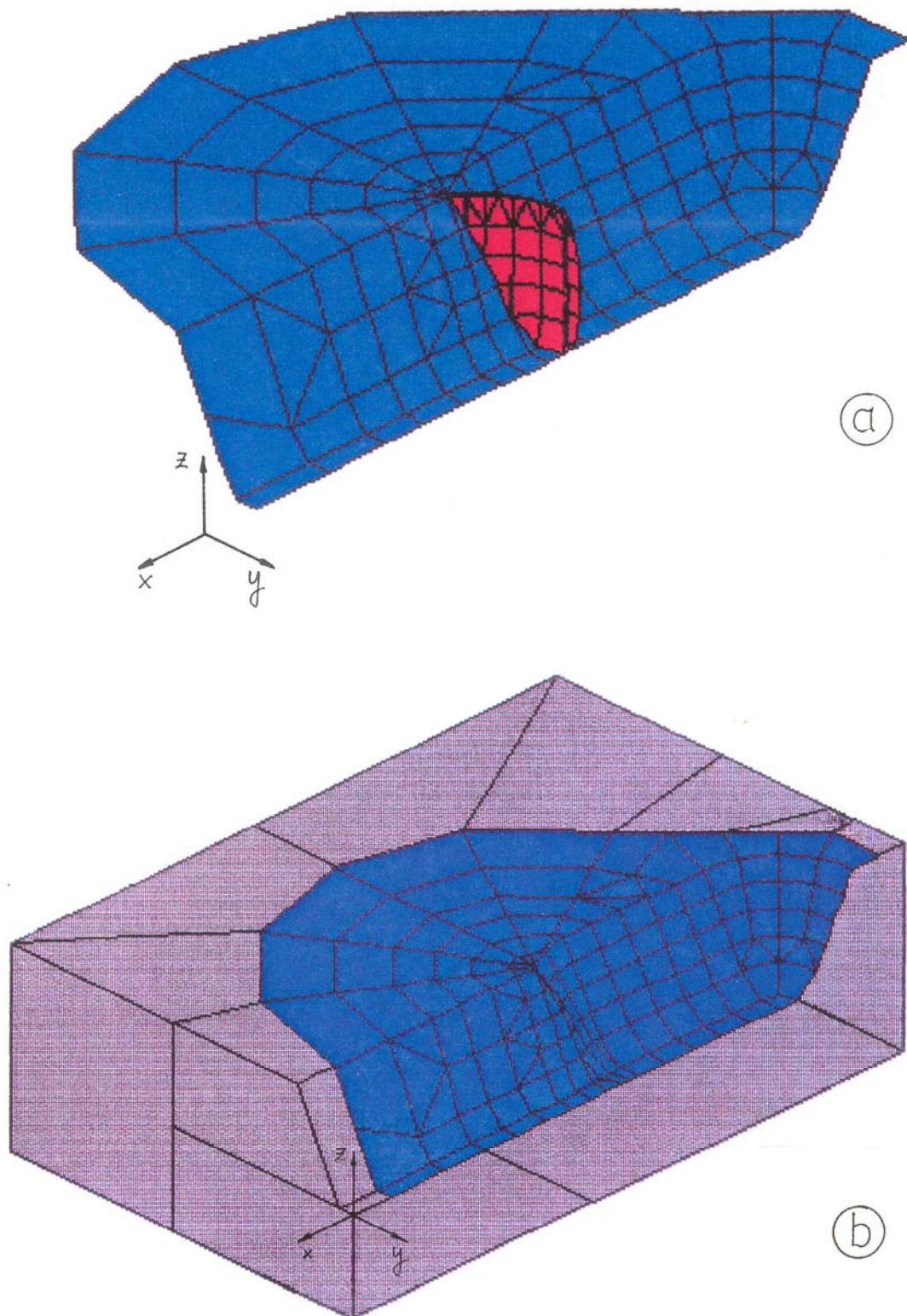


Fig. VI-5

- (a) Geometría y discretización de Elementos de Contorno para el estudio del sistema acoplado suelo-presa. Modelo de embalse cerrado.
(b) Subregión suelo y contornos ficticios.

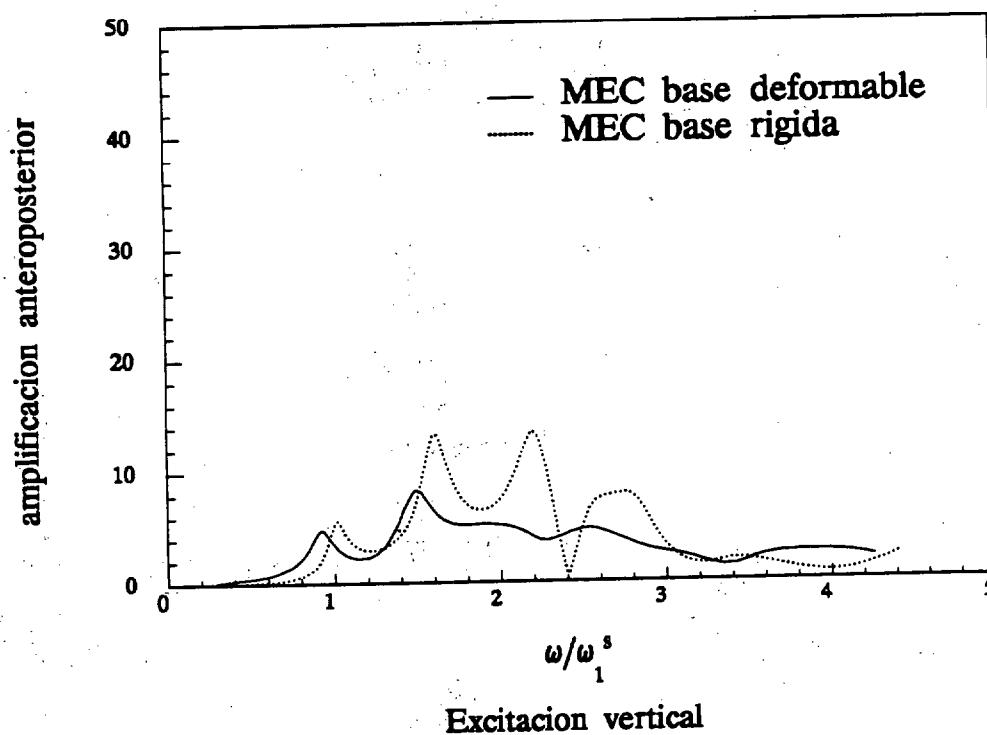
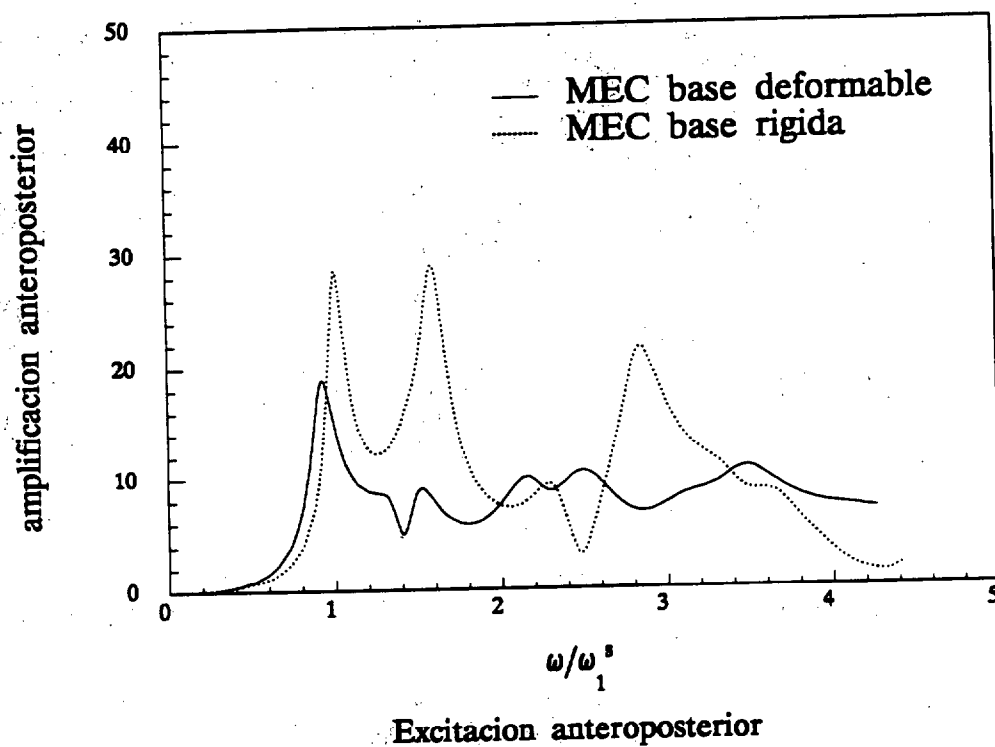


Fig. VI-6

Amplificación anteroposterior del punto A de la coronación. Base deformable y base rígida. Embalse vacío.

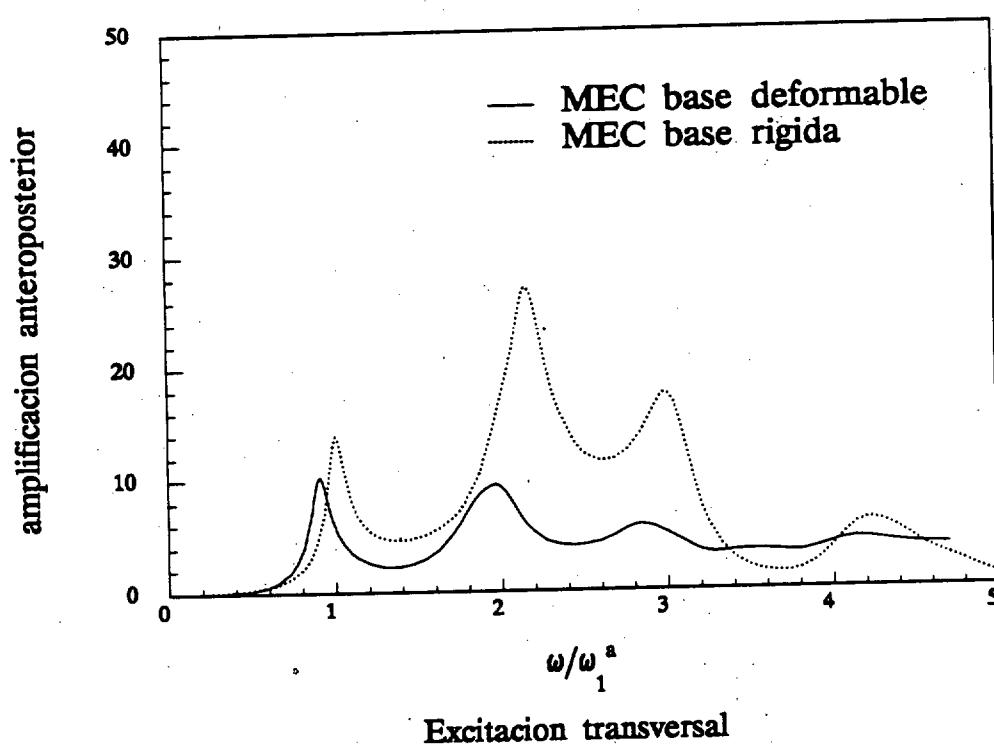


Fig. VI-7

Amplificación anteroposterior del punto B de la coronación. Base deformable y base rígida. Embalse vacío.

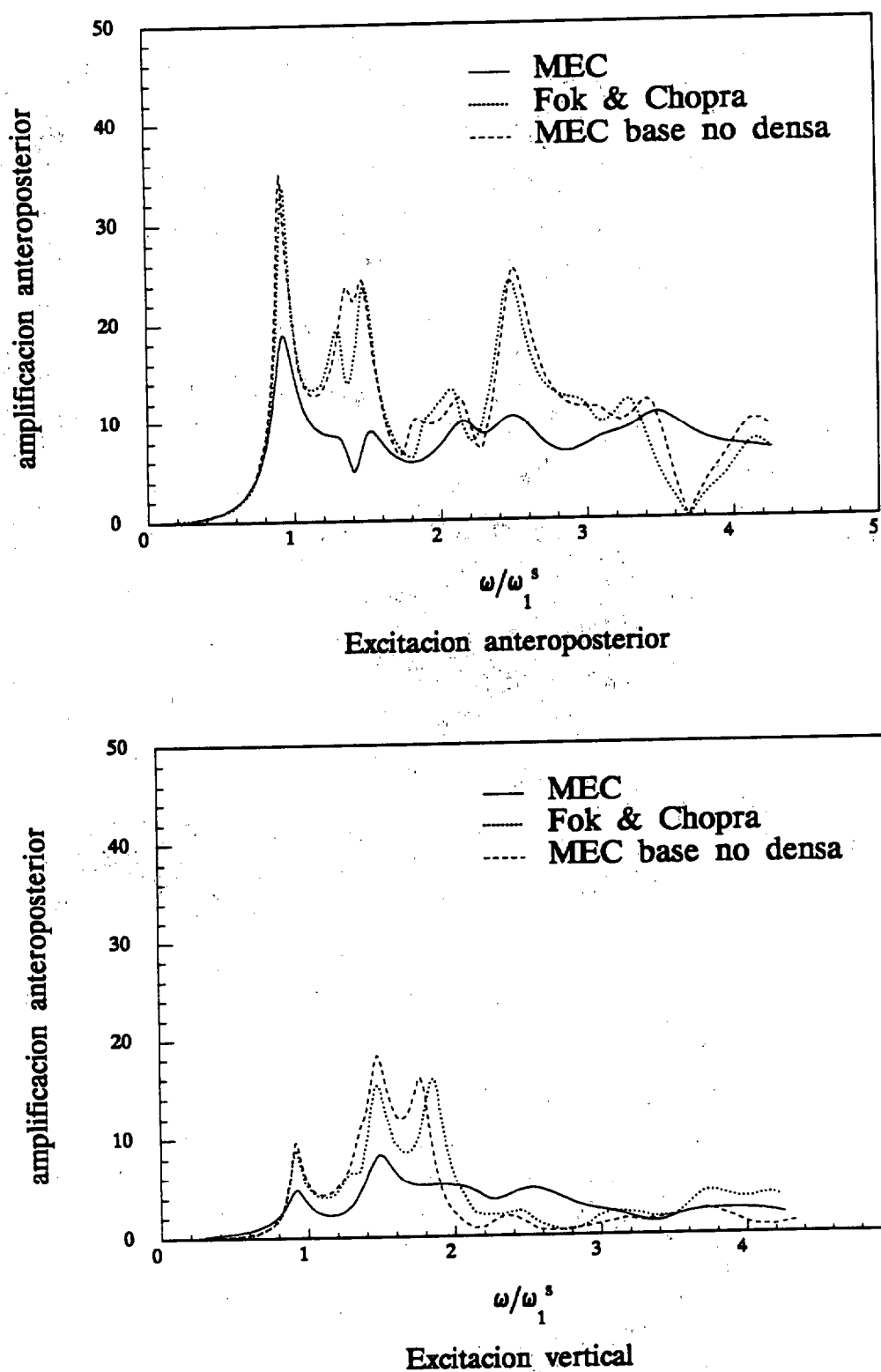


Fig. VI-8

Amplificación anteroposterior del punto A de la coronación. Base deformable. Embalse vacío.

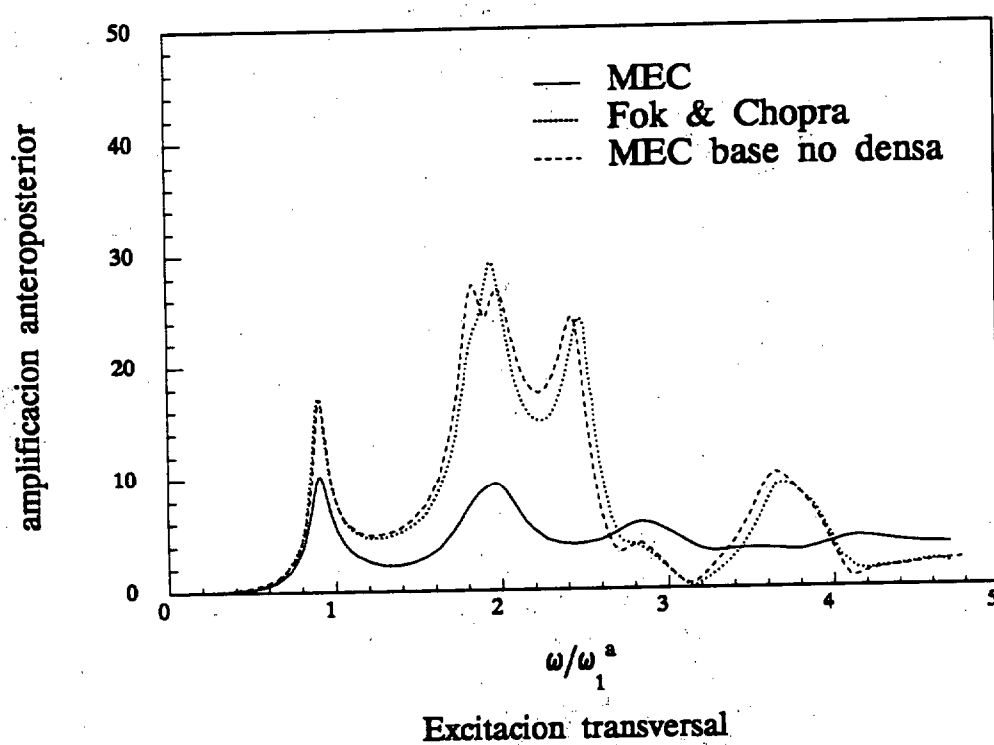


Fig. VI-9

Amplificación anteroposterior del punto B de la coronación. Base deformable. Embalse vacío.

VI.4 CONSIDERACIÓN DE LA INTERACCIÓN AGUA-PRESA. INFLUENCIA DE LA GEOMETRÍA DEL VASO.

Se trata de evaluar la influencia que tiene la interacción entre el agua embalsada y la presa, desligándola del efecto de la deformabilidad del suelo. Para ello se emplea un modelo acoplado constituido por la presa y el embalse, de manera que la cimentación de la presa y el fondo del embalse se consideran infinitamente rígidos, y están sometidos a una excitación uniforme.

La presa se modela como un sólido viscoelástico lineal con la misma geometría y propiedades consideradas hasta ahora. El agua se considera como un fluido compresible, no viscoso, dentro del rango de pequeñas perturbaciones, y las propiedades que lo definen son su densidad $\rho = 1000 \text{ Kg/m}^3$ y la velocidad de propagación de las ondas en él, $C = 1438.6 \text{ m/s}$.

La discretización del primero de los modelos estudiados se presenta en la figura VI-10, y corresponde a la mitad de la geometría simétrica completa. La zona irregular cercana a la presa (en la figura entre las secciones a y b) es idéntica a la del modelo de elementos finitos estudiados por Fok y Chopra (1986). En tales estudios sólo esta pequeña región irregular es discretizada, considerando que el canal continua indefinidamente aguas arriba con un perfil uniforme idéntico al de la sección b.

El modelo de elementos de contorno analizado aquí prolonga el canal una cierta distancia sin modificaciones de sección (tramo b-c), e introduce una zona de transición hacia una geometría rectangular de dimensiones $H \times B$, que se supone se prolonga indefinidamente. Para ello se dispone en la sección e un contorno de cierre en el que se establece una relación matricial conocida entre las presiones y los movimientos normales. La discretización empleada permite recoger sobradamente los términos del desarrollo involucrados dentro del rango de frecuencias. Las dimensiones H y B se han escogido de manera que las secciones del canal rectangular (del M.E.C.) y el poligonal (M.E.F.) tengan la misma superficie y la misma altura máxima. Con estas condiciones resultan unos valores:

$$H = 142 \text{ m}$$

$$B = 165 \text{ m}$$

Las frecuencias naturales del canal rectangular son aquellas que anulan el exponente en la expresión de los términos del desarrollo de presiones,

$$k_{nm} = \sqrt{\left(\frac{2n-1}{2H} \pi\right)^2 + \left(\frac{m-1}{B} \pi\right)^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \quad (6.1)$$

$$n, m = 1, 2, 3 \dots$$

es decir, aquellas que cumplen

$$\omega = c \pi \sqrt{\left(\frac{2n-1}{2H}\right)^2 + \left(\frac{m-1}{B}\right)^2} \quad (6.2)$$

y que se han recogido en la tabla siguiente:

m → n ↓	1	2	3	4
1	15.9 (0.58)	31.7 (1.28)	57.1 (2.32)	83.9 (3.40)
2	47.8 (1.75)	55.1 (2.23)	72.8 (2.95)	95.2 (3.86)
3	79.7 (2.92)	84.3 (3.42)	96.8 (3.92)	
4	111.6 (4.10)	114.9 (4.66)		

Tabla VI-1

En cada recuadro el número superior corresponde a la frecuencia expresada en radianes por segundo. El número inferior es la frecuencia adimensionalizada, de tal manera que dentro de la zona recuadrada se ha adimensionalizado con respecto a ω_1^a , y fuera de ella con respecto a ω_1^s . Sólo se han considerado aquellas frecuencias que caen dentro del rango de estudio.

La respuesta de amplificación anteroposterior en la coronación se presenta en las figuras VI-11 y VI-12, para las diferentes excitaciones. Cuando la excitación es anteroposterior se observa una sustancial disminución de la primera frecuencia de resonancia del sistema, acercándose al valor de la primera frecuencia natural del canal infinito. También se observa una sensible disminución de la respuesta para el resto de las frecuencias con respecto a la que se obtiene en embalse vacío, lo cual es debido a la pérdida de energía por radiación a través de la cola del embalse aguas arriba.

La curva de amplificación correspondiente a la excitación vertical presenta de nuevo una clara disminución de las frecuencias de máxima respuesta. La presencia del embalse produce la aparición de picos significativos que corresponden a las frecuencias de resonancia del sistema acoplado, si bien se observa que no todas se encuentran en el entorno de las frecuencias naturales del canal rectangular. Es particularmente destacable el aumento de la respuesta que se obtiene para la primera frecuencia, y la disminución de ésta en respecto a la situación de embalse vacío.

Cuando la excitación es transversal (figura VI-12) se confirma el efecto de disminución de las frecuencias de resonancia de la presa. La influencia del embalse se manifiesta por un aumento importante de la amplificación para el segundo modo de vibración, si bien para el primero y tercero la respuesta es inferior a la obtenida para embalse vacío. La curva muestra asimismo picos muy altos y abruptos (aunque finitos), que en este caso (y a diferencia de las otras excitaciones) coinciden con gran aproximación con las frecuencias de resonancia del canal rectangular infinito.

Para evaluar la influencia que la geometría del vaso tiene sobre la respuesta del sistema se estudian a continuación dos modelos diferentes, que introducen como principal peculiaridad, el considerar el embalse como una región finita y acotada que se extiende hasta una cierta distancia de la presa, lo cual constituye un modelo más realista en la mayoría de las situaciones.

La figura VI-13 presenta un modelo simétrico que se basa en el ya analizado anteriormente (figura VI-10). La cola del embalse se cierra mediante una superficie de revolución que toma como generatriz el perfil poligonal en la sección c. La parte superior de la figura muestra una vista de la geometría completa, y en la parte inferior se presenta la discretización de elementos de contorno utilizada.

La figura VI-14 muestra dos vistas de un modelo asimétrico en forma de riñón que embalsa el mismo volumen de agua que el simétrico de la figura VI-13. La geometría se ha obtenido a partir de esta última, distorsionando el eje longitudinal del canal entre las secciones b y c hacia un arco de circunferencia que barre un ángulo de 90° . En este caso la geometría asimétrica requiere el uso de una discretización completa para el modelo de elementos de contorno.

Las curvas de amplificación para las diferentes excitaciones que se están considerando se presentan en las figuras VI-15 y VI-16 para el modelo simétrico, y en las figuras VI-17 y VI-18 para el modelo asimétrico. En todos los casos las curvas muestran un perfil muy complejo, con multitud de picos abruptos de amplificación que corresponden a las frecuencias de resonancia del sistema acoplado. Las diferencias con los resultados correspondientes a embalse abierto son grandes para las tres direcciones de excitación, pero de forma más radical en el caso correspondiente a la excitación anteroposterior, debido al hecho de que el canal cerrado no puede expulsar energía aguas arriba, lo que se traduce en una fuerte amplificación de los fenómenos de resonancia.

La comparación de los resultados de las tres situaciones consideradas hasta ahora (embalse infinito, embalse finito simétrico y embalse finito asimétrico) se muestra en la figura VI-19 para las excitaciones anteroposterior y vertical, y en la figura VI-20 para la excitación transversal. En el primero de los casos se observa una total coincidencia en cuanto al valor de la primera frecuencia natural del sistema, a partir de la cual el comportamiento del modelo de embalse abierto es claramente más suave por las razones ya comentadas. Se aprecia asimismo que las curvas correspondientes a los dos modelos finitos son muy parecidas para frecuencias inferiores a $\omega/\omega_1 = 1$. Se deduce de ello que el comportamiento de la presa a bajas frecuencias está principalmente condicionado por la geometría cercana del embalse, que es la misma en ambos casos.

Los mismos comentarios pueden hacerse para las curvas de excitación vertical, si bien en este caso el comportamiento de los modelos de embalse guardan semejanzas notables entre sí en un rango más amplio de frecuencias. Se observa también que los picos de amplificación correspondientes al modelo infinito se encuentran en el entorno de algunas de las frecuencias naturales de los modelos finitos, si bien éstos presentan mayores amplitudes de respuesta al ser modelos menos amortiguados.

Para el caso de excitación transversal, sin embargo, la situación es diferente. Se observa en la figura VI-20 que los picos de amplificación para el modelo infinito se encuentran situados sobre las frecuencias de resonancia del canal rectangular, y se manifiestan claramente definidos. Los picos además no coinciden con los correspondientes a los modelos acotados, ni los de éstos entre sí. Se aprecia también que las curvas de los dos modelos simétricos (abierto y cerrado) están prácticamente superpuestas (con excepción al pico correspondiente a la primera frecuencia del canal infinito), hasta frecuencia del orden del segundo modo antismétrico de vibración de la presa acoplada, si bien la amplificación para este modo es mayor en el modelo menos amortiguado. La curva de respuesta que corresponde al modelo cerrado no simétrico no presenta semejanzas apreciables con ninguna otra en todo el rango.

En cualquier caso, la importancia que sobre la respuesta del sistema tiene una correcta definición de la topografía del vaso hasta distancias relativamente grandes de la presa, es decisiva. En este aspecto el M.E.C. resulta una herramienta más apropiada que el M.E.F. debido a que reduce sensiblemente el número de grados de libertad involucrados en la discretización del embalse.

La comparación con resultados, obtenidos con el método de los elementos finitos sólo es posible para el modelo de embalse abierto que se extiende indefinidamente con sección uniforme, pues esta es la única situación estudiada con dicho método. En la figura VI-21 se presenta la comparación para las excitaciones anteroposterior y vertical. Se observa un razonable acuerdo de los resultados, si bien el M.E.C. proporciona amplificaciones menores para la primera frecuencia de resonancia del sistema. Es destacable que los picos de amplificación, cuando la excitación es vertical, se encuentran situados sobre los correspondientes del Modelo de Fok y Chopra, aunque las secciones de los canales infinitos sean diferentes en ambos modelos. Hay que decir que el M.E.F. proporciona para estas frecuencias amplificaciones infinitas, al contrario que el M.E.C. Ello no debería ser así puesto que el sistema cuenta con la flexibilidad y el amortiguamiento de la presa.

Para la excitación transversal (fig. VI-22), la situación de los picos abruptos de amplificación están condicionados por las frecuencias naturales del canal infinito, (geometría lejana), por lo que no son coincidentes en ambos modelos. Las amplificaciones en la primera y tercera frecuencia natural de la presa acoplada son algo mayores para el modelo de elementos de contorno, e inferior en la segunda.

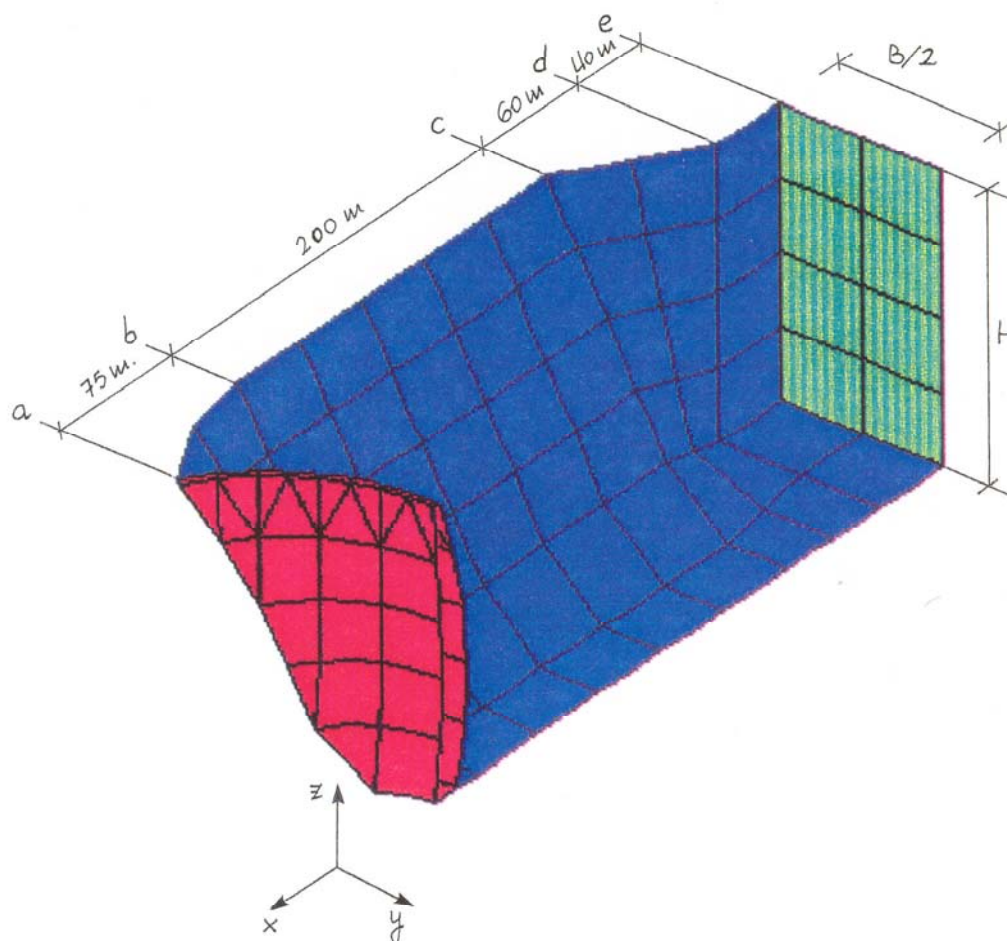


Fig. VI-10 Geometría y discretización de Elementos de Contorno para el estudio de la interacción presa-embalse. Modelo de embalse abierto. Base rígida. (Mitad de la geometría simétrica completa)

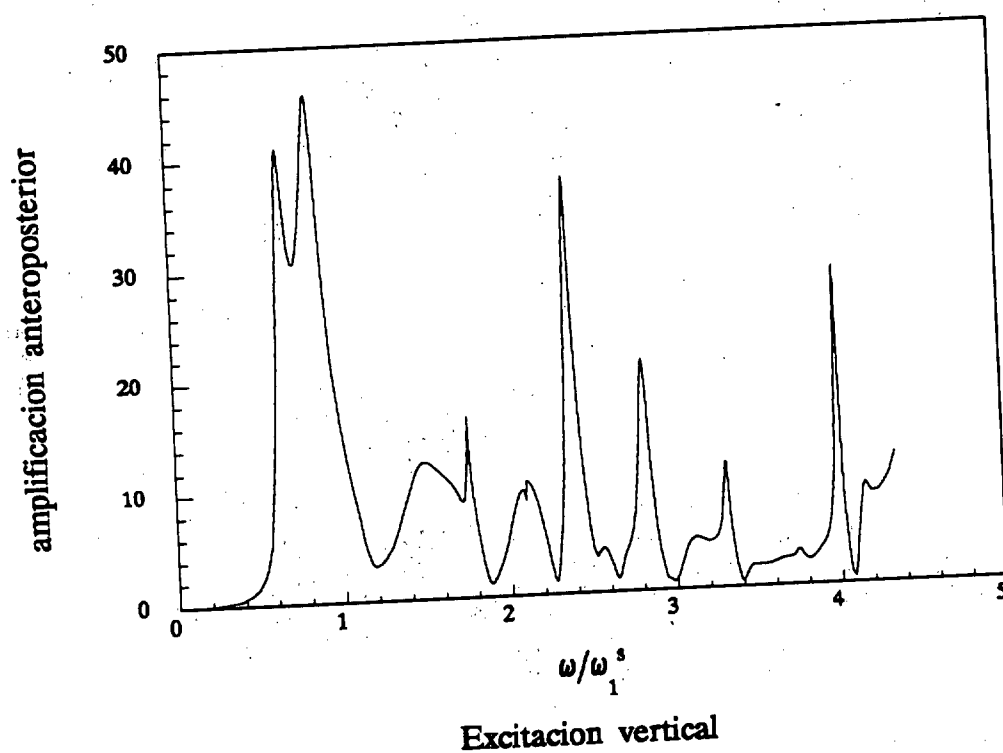
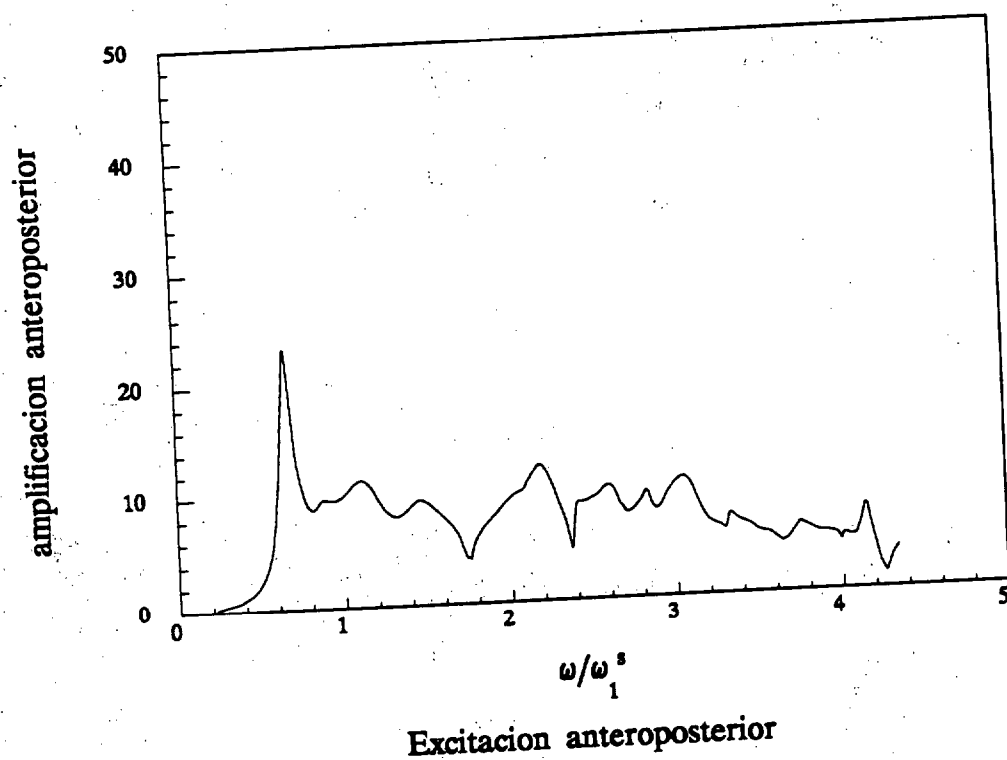


Fig. VI-11 Amplificación anteroposterior del punto A de la coronación. Base rígida. Embalse abierto simétrico lleno de agua.

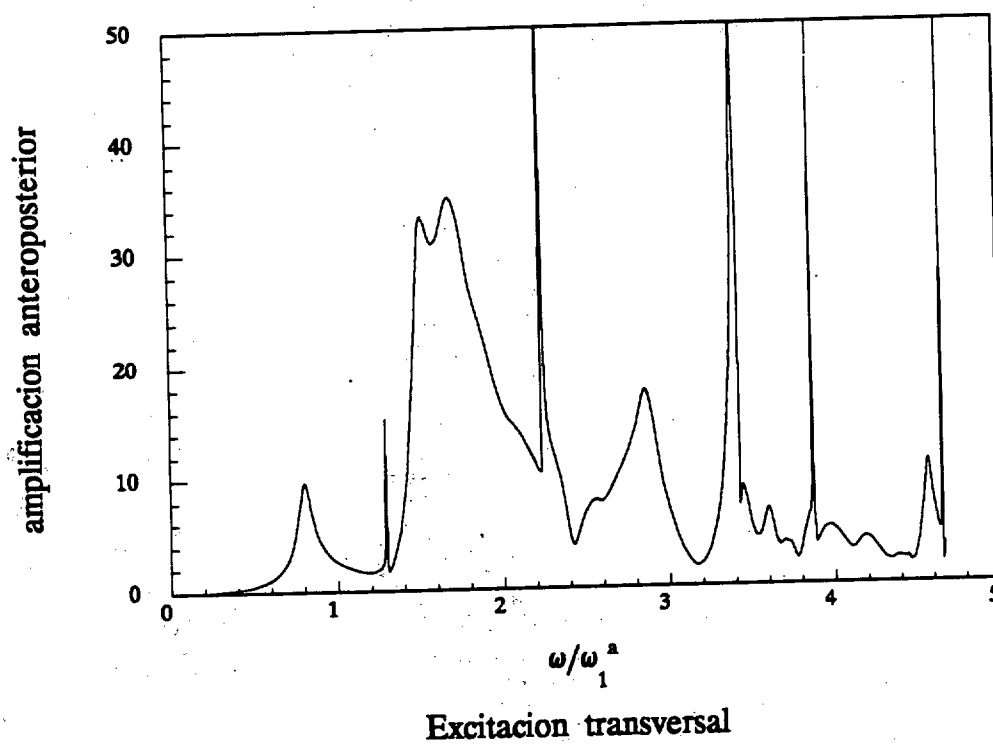


Fig. VI-12 Amplificación anteroposterior del punto B de la coronación. Base rígida. Embalse abierto simétrico lleno de agua.

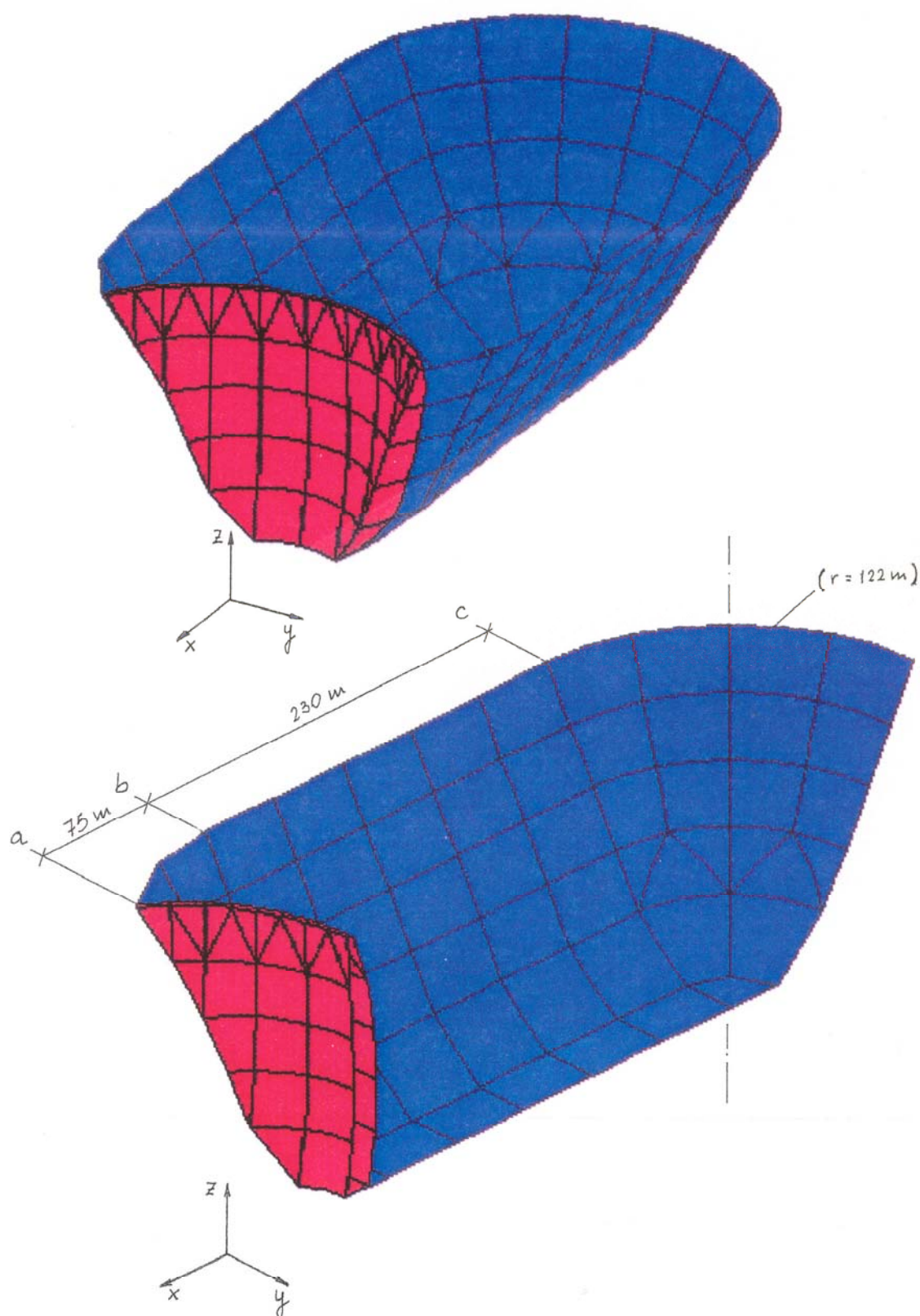


Fig. VI-13

Vista de la geometría completa y discretización de Elementos de Contorno utilizada para el estudio del sistema acoplado presa-embalse. Modelo de embalse cerrado simétrico. Base rígida.

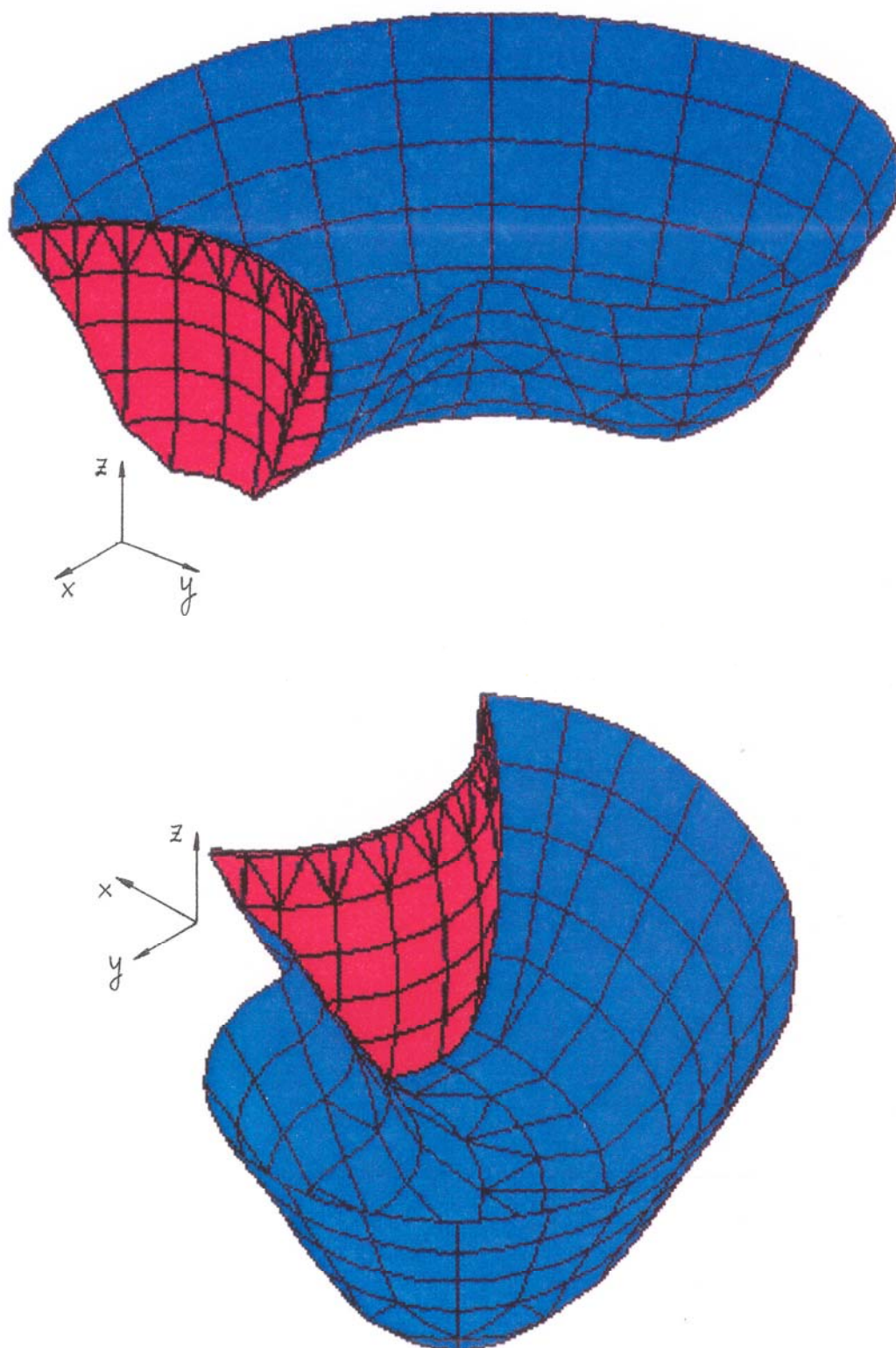
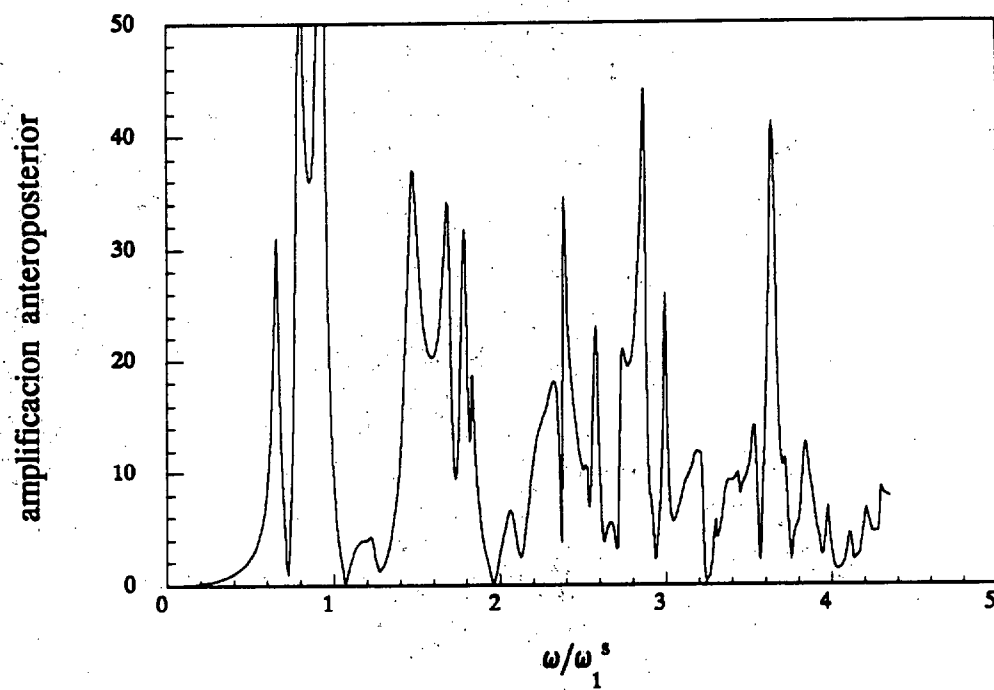
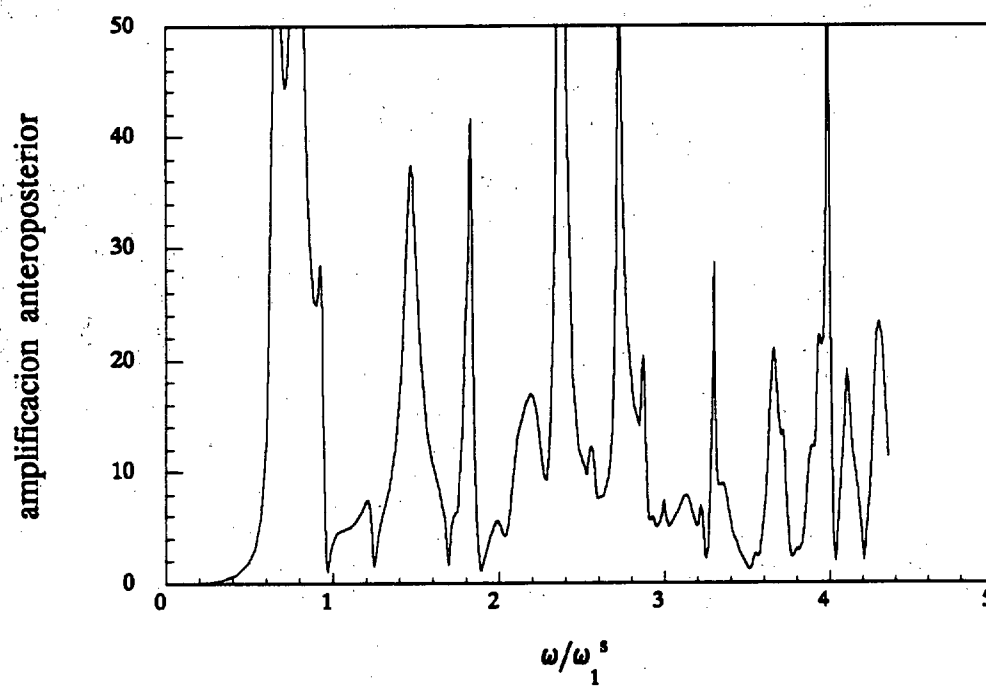


Fig. VI-14 Dos perspectivas de la geometría y discretización de Elementos de Contorno para el estudio del sistema acoplado presa-embalse. Modelo de embalse cerrado asimétrico. Base rígida.



Excitacion anteroposterior



Excitacion vertical

Fig. VI-15 Amplificación anteroposterior del punto A de la coronación. Base rígida. Embalse cerrado simétrico lleno de agua.

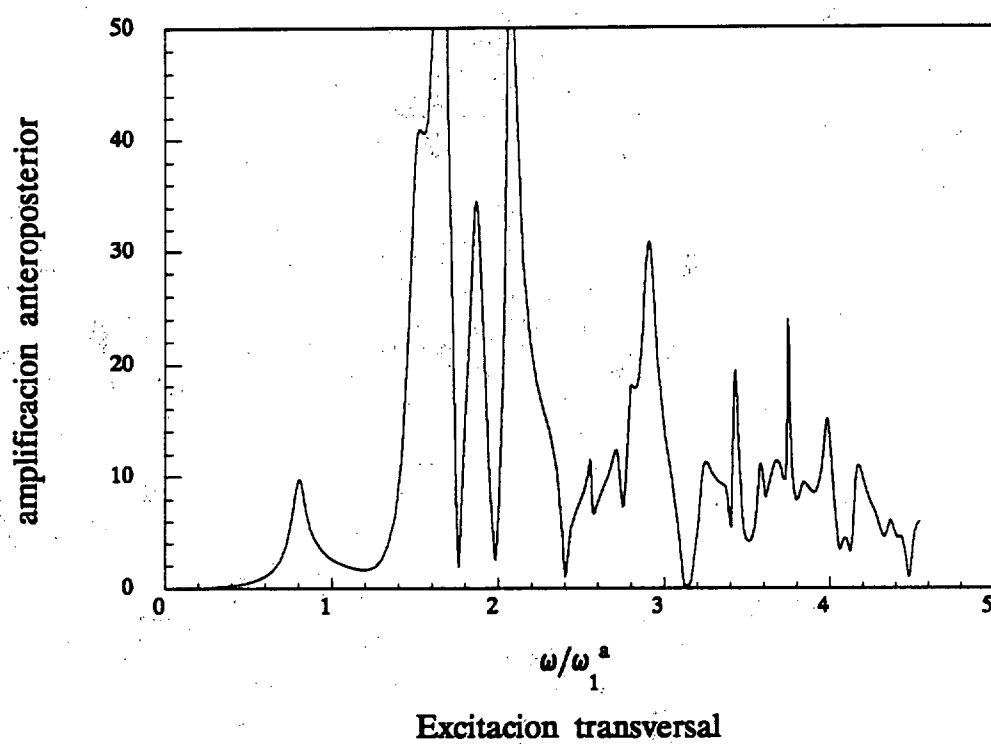
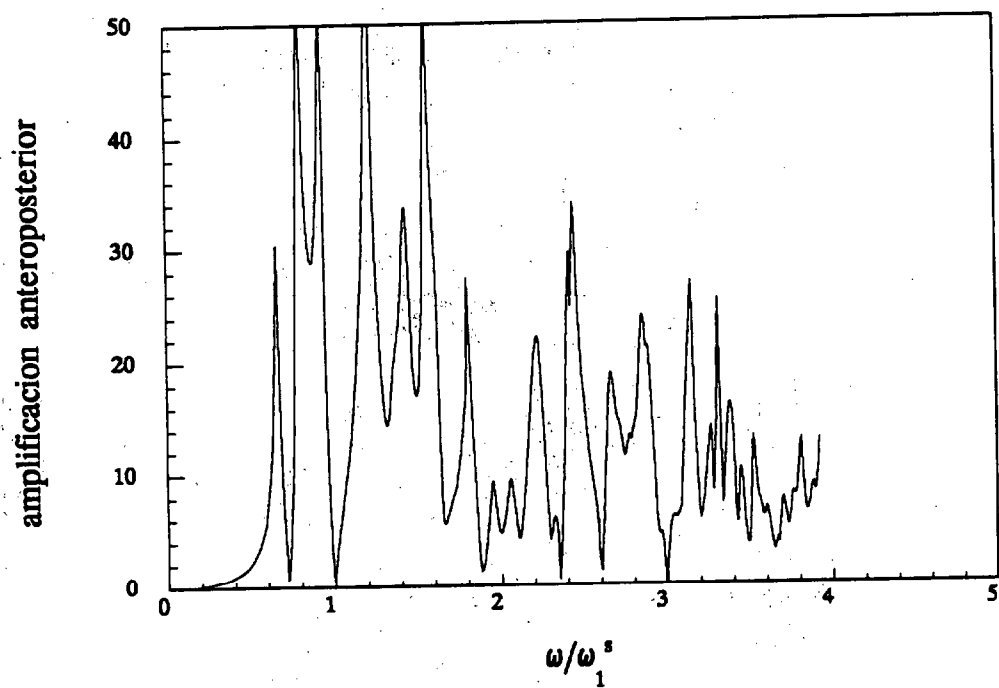
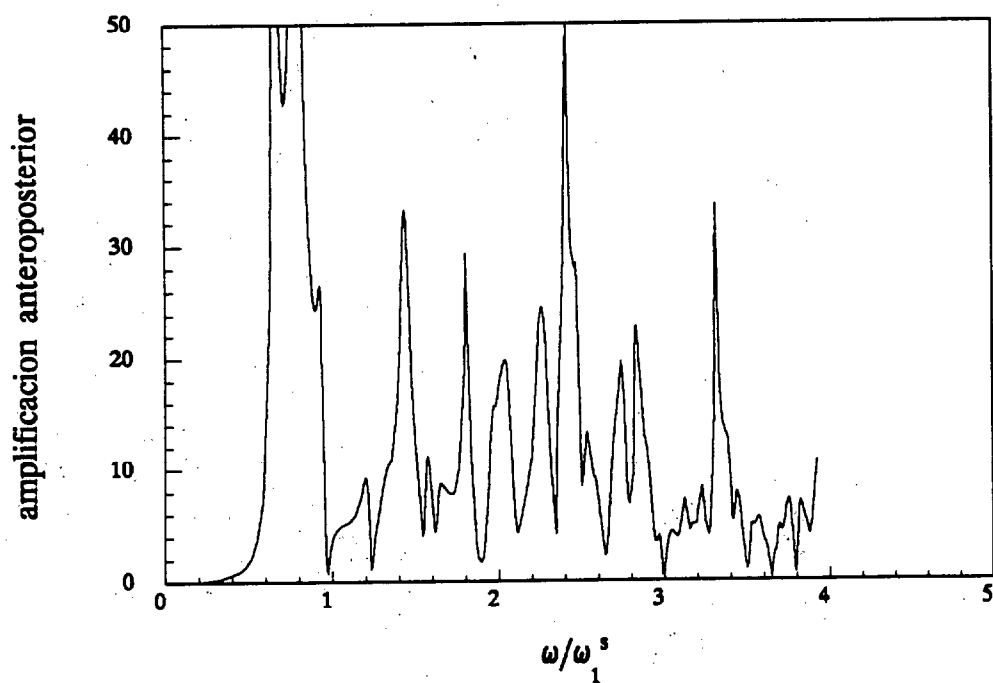


Fig. VI-16 Amplificación anteroposterior del punto B de la coronación. Base rígida. Embalse cerrado simétrico lleno de agua.



Excitacion anteroposterior



Excitacion vertical

Fig. VI-17 Amplificación anteroposterior del punto A de la coronación. Base rígida. Embalse cerrado asimétrico lleno de agua.

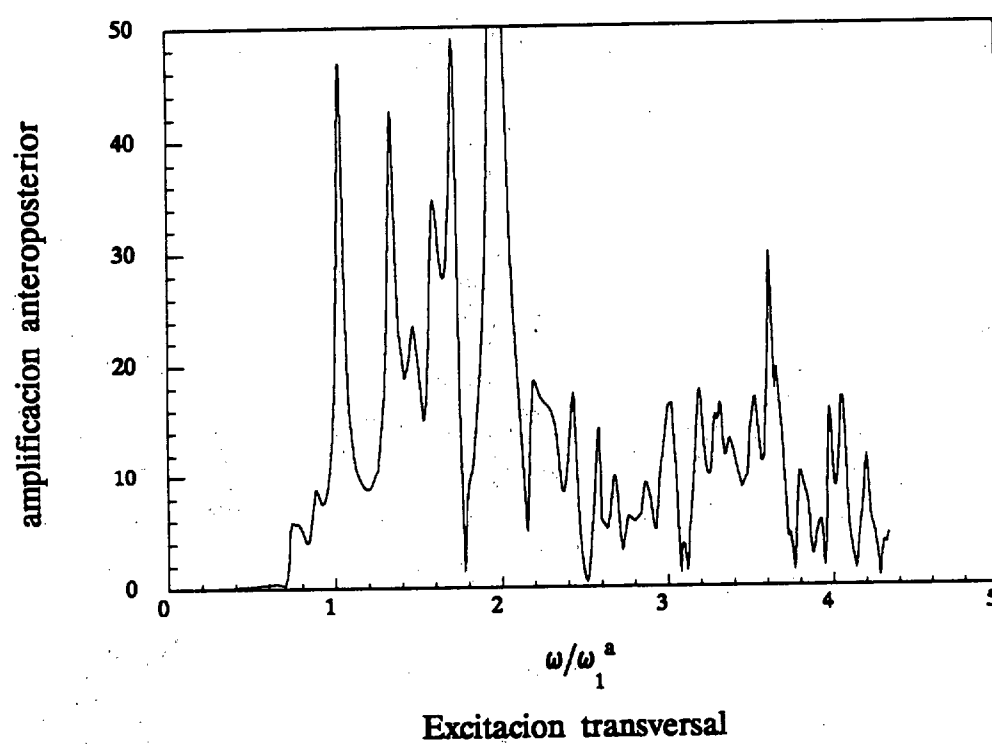


Fig. VI-18

Amplificación anteroposterior del punto B de la coronación. Base rígida.
Embalse cerrado asimétrico lleno de agua.

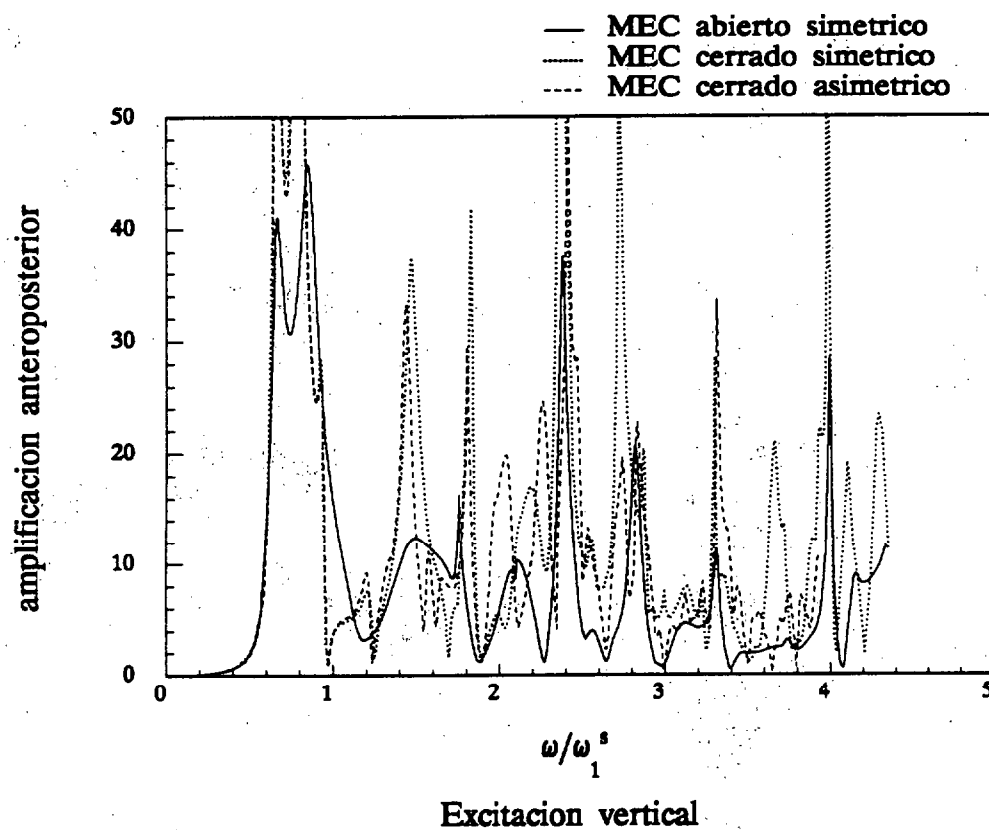
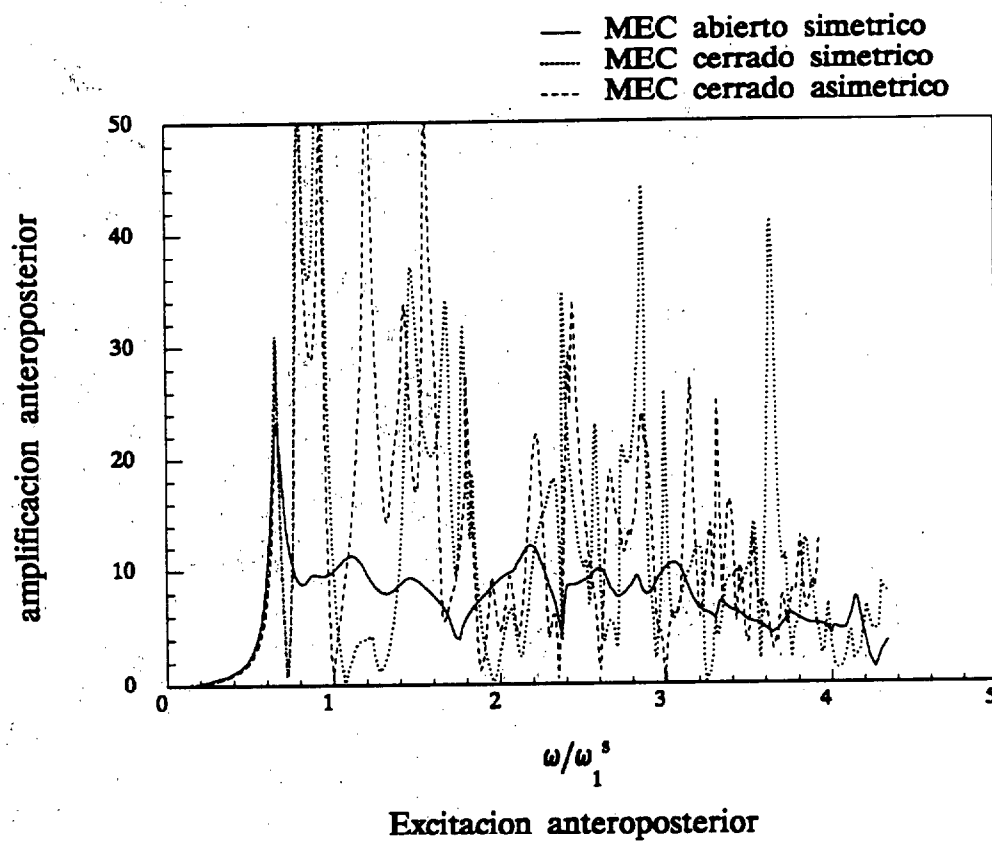


Fig. VI-19 Amplificación anteroposterior del punto A de la coronación. Base rígida. Diferentes modelos de embalse llenos de agua.

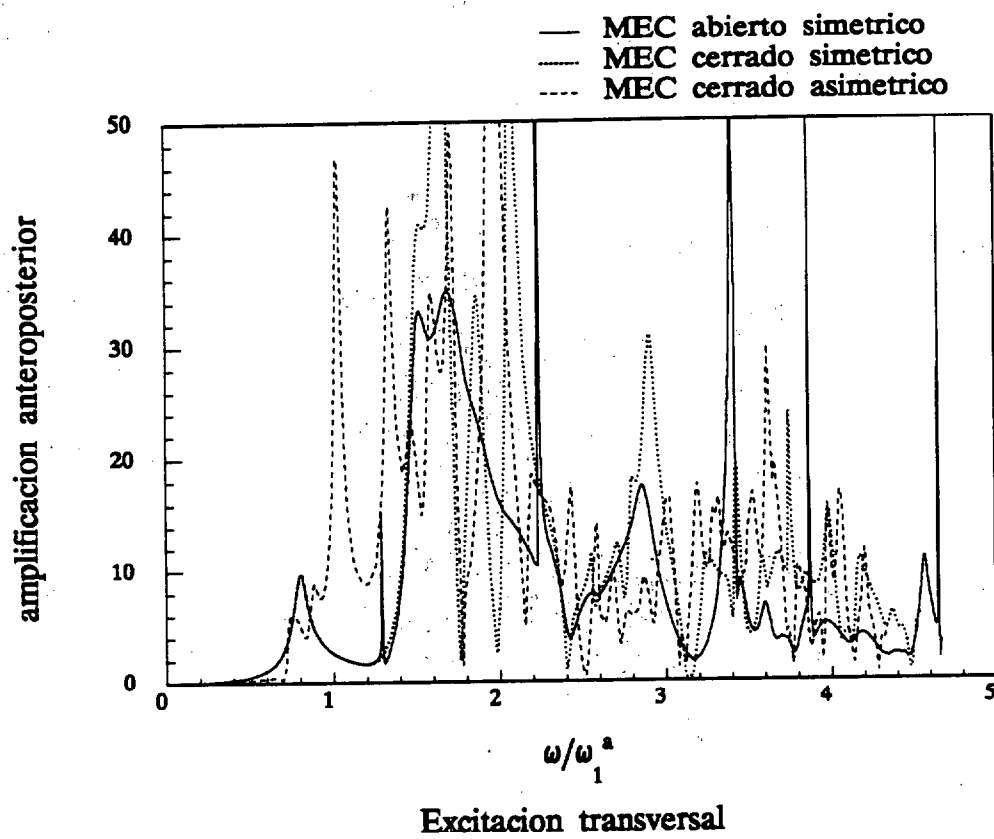


Fig. VI-20 Amplificación anteroposterior del punto B de la coronación. Base rígida. Diferentes embalses llenos de agua.

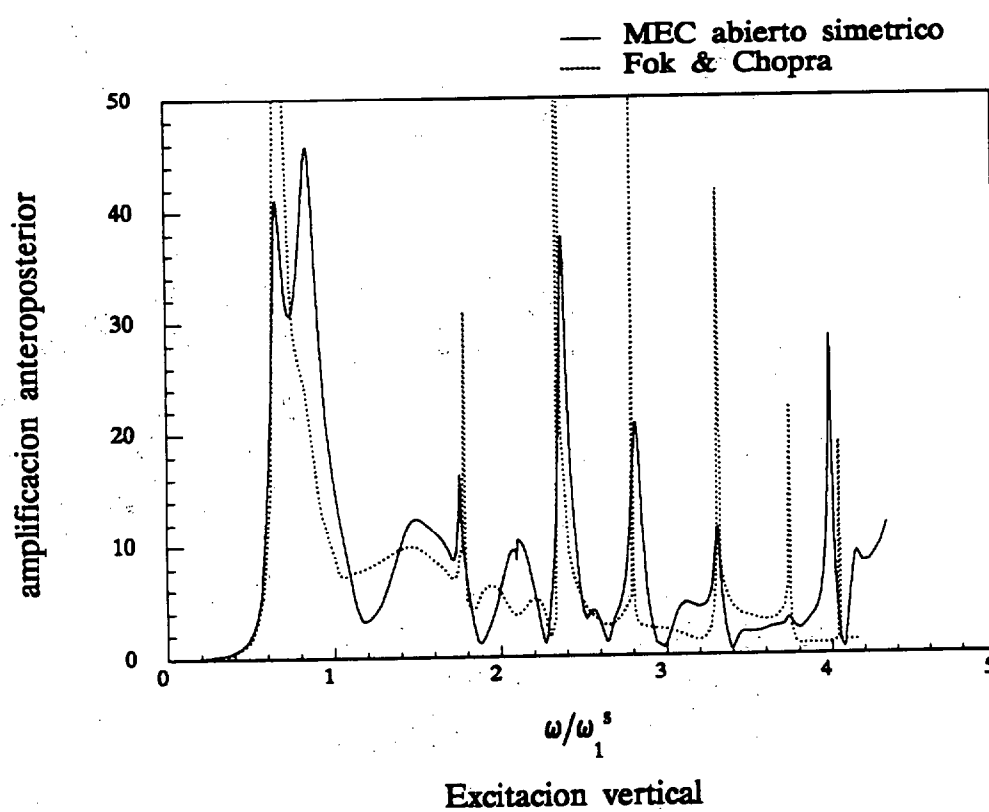
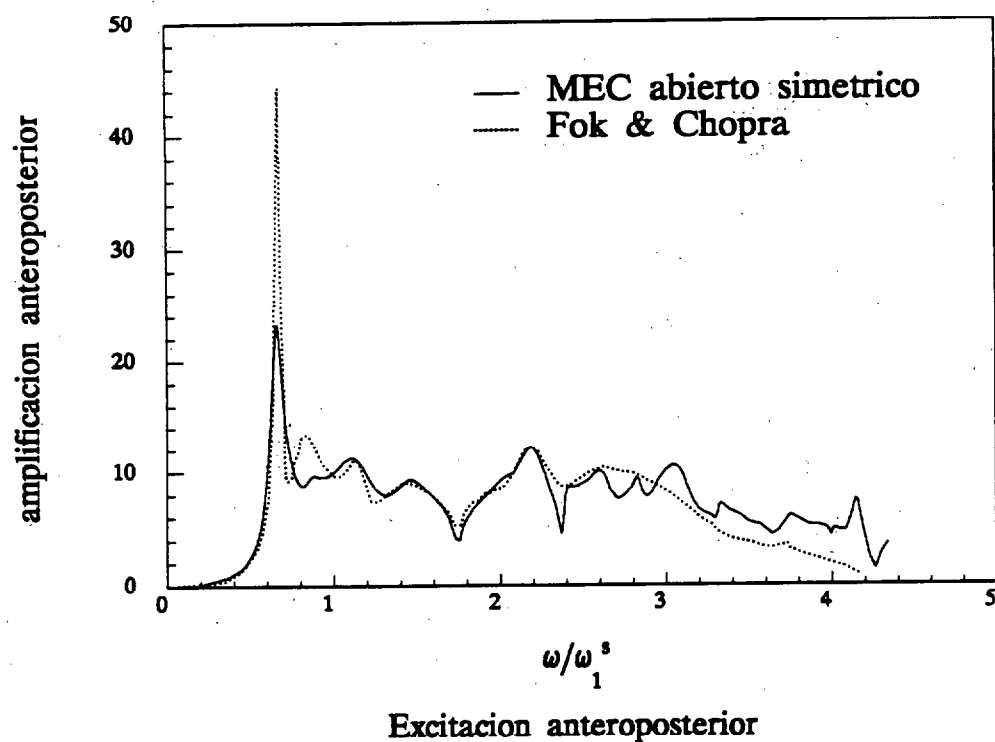


Fig. VI-21 Amplificación anteroposterior del punto A de la coronación. Base rígida. Embalse abierto simétrico lleno de agua.

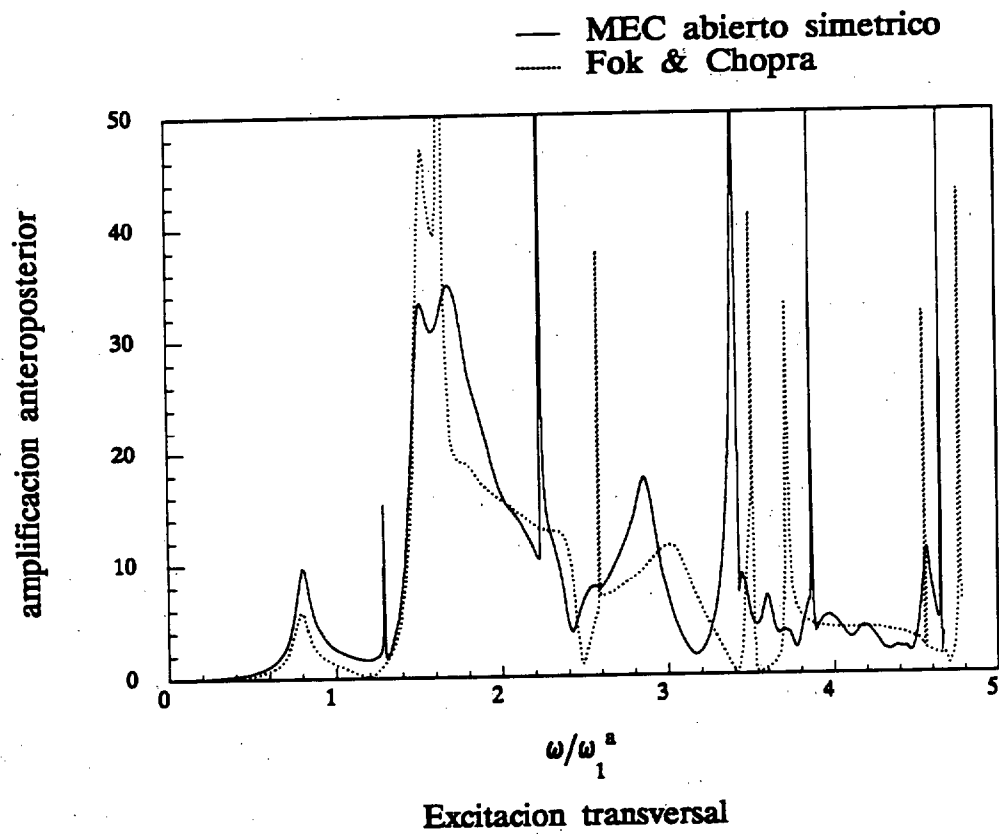


Fig. VI-22 Amplificación anteroposterior del punto B de la coronación. Base rígida. Embalse abierto simétrico lleno de agua.

VI.5 INTERACCIÓN CONJUNTA SUELO-AGUA-PRESA

Se trata de evaluar la importancia que tiene la interacción entre el suelo y el sistema presa-embalse. Además del efecto ya estudiado de interacción suelo estructura, la deformabilidad del fondo del embalse modifica en él la distribución de presiones, lo que a su vez conduce a una redistribución de presiones en el paramento de la presa.

El primer modelo que se presenta es el de la figura VI-23, correspondiente al embalse abierto ya tratado con anterioridad. Las propiedades de los distintos medios son las que se han considerado hasta ahora, y la geometría y discretización del suelo corresponde al modelo de la figura VI-4.

Las curvas de amplificación anteroposterior para las excitaciones simétricas se muestran en la figura VI-24, y para la excitación asimétrica en la figura VI-25. Se observa que la deformabilidad del suelo suaviza considerablemente la respuesta con respecto a la del sistema presa-embalse. Ello se debe por un lado al amortiguamiento por radiación que el suelo introduce, y por otro a la modificación de la excitación con respecto a la de base rígida.

Los resultados ponen de manifiesto serias diferencias con los existentes obtenidos mediante el M.E.F. tal como se muestra en las figuras VI-26 y VI-27(a). Así, para la excitación anteroposterior la curva del M.E.C. presenta un pico de amplificación retrasado y de menor valor que el correspondiente al M.E.F., y en general una respuesta más baja, excepto en el rango más alto de frecuencias. Para la excitación vertical la respuesta es más baja sólo en frecuencias inferiores a $\omega/\omega_1 = 1.5$. A partir de aquí el M.E.C. encuentra nuevos picos de resonancia y predice una respuesta mucho más elevada que la del modelo existente.

La curva de excitación transversal muestra amplificaciones mayores en el entorno de las frecuencias naturales, y sigue apareciendo el pico correspondiente al tercer modo asimétrico que el M.E.F. ya no encuentra. De nuevo el M.E.C. predice respuestas importantes (el tercer pico es incluso más elevado que el primero) en todo el rango elevado de frecuencias, para el cual la respuesta del M.E.F. se ha amortiguado.

Para entender el motivo de las discrepancias comentadas hay que tener en cuenta las simplificaciones que el modelo de elementos finitos introduce en cuanto a la forma de considerar los distintos fenómenos de interacción. Por un lado, el M.E.F. considera un suelo sin masa, con lo que ello supone de distorsión de la excitación. Por otro, el modelo de elementos finitos evalúa de una manera aproximada la interacción que se produce entre el suelo y el agua embalsada. Para ello considera un coeficiente de absorción (de valor empírico) que define el porcentaje de la amplitud de onda de presión hidrodinámica que es reflejada por el contorno interfase. La condición de contorno en el fondo del embalse se establece entonces como (Hall y Chopra (1982)) :

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = \rho_a \omega^2 u_n + i \omega q p \quad (6.3)$$

el coeficiente de amortiguamiento es:

$$q = \frac{\rho_a}{\rho_s c_p} \quad ; \quad \begin{array}{l} a \equiv \text{agua} \\ s \equiv \text{suelo} \end{array} \quad (6.4)$$

que puede relacionarse con el coeficiente de reflexión α en la forma:

$$q = \frac{1}{c} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \quad (6.5)$$

La aproximación anterior sólo es estrictamente cierta en un sistema de propagación monodimensional, y pierde fiabilidad para el modelo de embalse tridimensional que se está considerando.

Una versión modificada del programa en orden a evaluar la interacción suelo-agua de la forma que se acaba de exponer, y suponiendo un suelo sin masa, lleva a obtener los resultados que también se muestran en las figuras VI-26 y VI-27(a). El valor de α considerado es de 0.75, que corresponde al más cercano de los usados por Fok y Chopra con respecto a las propiedades del suelo según la ecuación 6.4. Se aprecia que bajo estas condiciones (menos realistas), el M.E.C. proporciona unas curvas de respuesta que coinciden sensiblemente con las del M.E.F. Tan sólo para el segundo pico de amplificación en la excitación transversal, los puntos quedan por encima de los resultados de Fok y Chopra. Un estudio concentrado en el rango de frecuencias en el que se producen estas discrepancias se presenta en la figura VI-27(b), donde se ha ampliado la escala de abscisas para mayor claridad. La conclusión más importante es que el modelo de elementos de contorno muestra un comportamiento más consecuente para esta frecuencia natural de excitación, de tal manera que las amplificaciones son más altas cuanto mayor sea el coeficiente de reflexión considerando, cosa que no ocurre para el modelo de elementos finitos con las curvas de $\alpha = 0.5$ y $\alpha = 0.0$.

Todos los resultados que se han obtenido ponen de manifiesto la gran importancia que tiene una consideración rigurosa de los fenómenos de interacción suelo-agua, así como una modelización adecuada de la excitación de campo libre.

A continuación se presentan las curvas de respuesta que corresponden a un modelo acoplado (suelo-agua-estructura) que considera un embalse finito para evaluar cómo ello afecta al comportamiento dinámico del sistema. El modelo empleado es el mostrado en la figura VI-5, y los resultados se contrastan en las figuras VI-28 y VI-29 con los correspondientes al modelo de embalse abierto. Las diferencias mostradas son especialmente importantes para los casos de excitación anteroposterior y vertical, observándose picos de amplificación sensiblemente más altos cuando al embalse se considera cerrado. Para la excitación vertical se aprecian además cambios en el perfil de las curvas en el intervalo de frecuencia adimensional 0.6 a 1.6 y una disminución de la primera frecuencia natural. Cuando la excitación es transversal es destacable que las

curvas se mantienen superpuestas hasta el entorno de la segunda frecuencia de resonancia del sistema, para el cual se encuentra ahora un valor de amplificación acusadamente superior. En todos los casos las curvas correspondientes al modelo de embalse cerrado presentan mayores oscilaciones. Ello es debido a que en este caso el único amortiguamiento posible de las ondas de presión en el agua es la radiación a través del suelo, sin la posibilidad de expulsar energía aguas arriba, como ocurre en el caso de canal infinito.

En los casos estudiados hasta ahora el embalse se ha considerado como un medio completamente abierto, o como uno completamente cerrado. Es claro que ninguno de ellos representa correctamente una situación real; el primero considera una geometría idealizada del vaso, muy alejada de la verdadera, con lo que ello implica de cambio en el comportamiento dinámico de la región líquida (modificación de modos y frecuencias de resonancia). Asimismo el modelo abierto supone una capacidad de expulsión de energía aguas arriba mucho mayor de la que es previsible encontrar en un caso práctico, si se tiene en cuenta la sucesiva disminución de profundidad del embalse que normalmente se encuentra al aumentar la distancia a la presa. Por contra, el modelo de embalse cerrado propuesto hasta ahora es capaz de reproducir con fidelidad la topografía del fondo hasta distancias considerables, pero tiene el inconveniente de restringir por completo la posibilidad de expulsar energía en ninguna dirección, lo cual puede ser una modelización excesivamente severa en muchas situaciones.

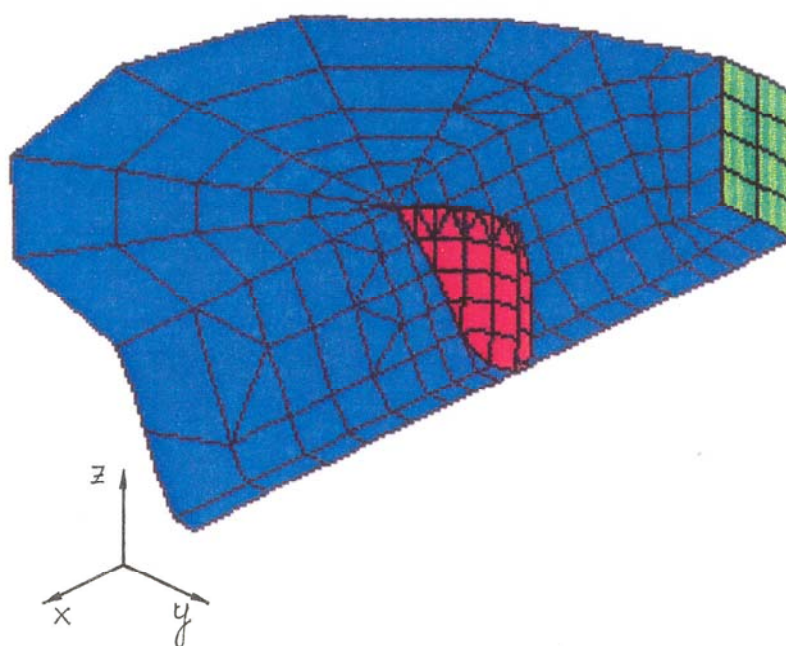
A continuación se presenta un nuevo modelo (figura VI-30) que pretende ser una situación intermedia, de manera que sin dejar de recoger la geometría real del vaso lo más correctamente posible, se introduzca en el sistema una forma de expulsar energía tal como lo haría la presencia de un canal infinito. El embalse está constituido por una región (normalmente irregular) que se extiende una cierta distancia y, alejado de la presa, un canal de alimentación que se prolonga indefinidamente. Las dimensiones de la sección del canal deben ser considerablemente menores que las de una sección del embalse cerca de la presa. Se ha escogido un canal rectangular de 60 metros de ancho y 57 de alto.

Los resultados para este nuevo modelo se presentan en la figura VI-31 y es de destacar que son prácticamente iguales a los del modelo de embalse cerrado. De nuevo se pone de manifiesto la gran importancia que tiene el modelar correctamente la geometría del vaso, incluso hasta distancias grandes de la presa. También se deduce hasta que punto puede ser comprometida (en los casos en que esto no coincida con la realidad) la idealización del embalse como un canal que se extiende indefinidamente con sección uniforme.

Para finalizar esta presentación de resultados, en la próxima figura se analizará la influencia que tiene la consideración de la flexibilidad del suelo, y su interacción con el sistema presa-embalse. En primer lugar se presenta la comparación para el caso de embalse abierto (figuras VI-32 y VI-33) y a continuación en el estudio se repite para la situación de embalse cerrado (figuras VI-34 y VI-35).

Como ya se ha comentado, la consideración de la deformabilidad del suelo produce una considerable amortiguación de la respuesta en el entorno de las frecuencias de resonancia, y una mayor suavidad de la misma. Cuando el canal es abierto, desaparecen

los picos abruptos que corresponden a la frecuencias naturales del canal. Se producen asimismo algunos adelantos o retrasos de alguna de las frecuencias de máxima amplificación. En este sentido, la tónica es consistente cuando la excitación es antimétrica, observándose que las frecuencias de resonancia disminuyen, y los picos de respuesta bajan cuando la base es flexible.

**Fig. VI-23**

Vista general y discretización de Elementos de Contorno empleada para el estudio del sistema completo presa-suelo-embalse. Modelo de embalse abierto simétrico.

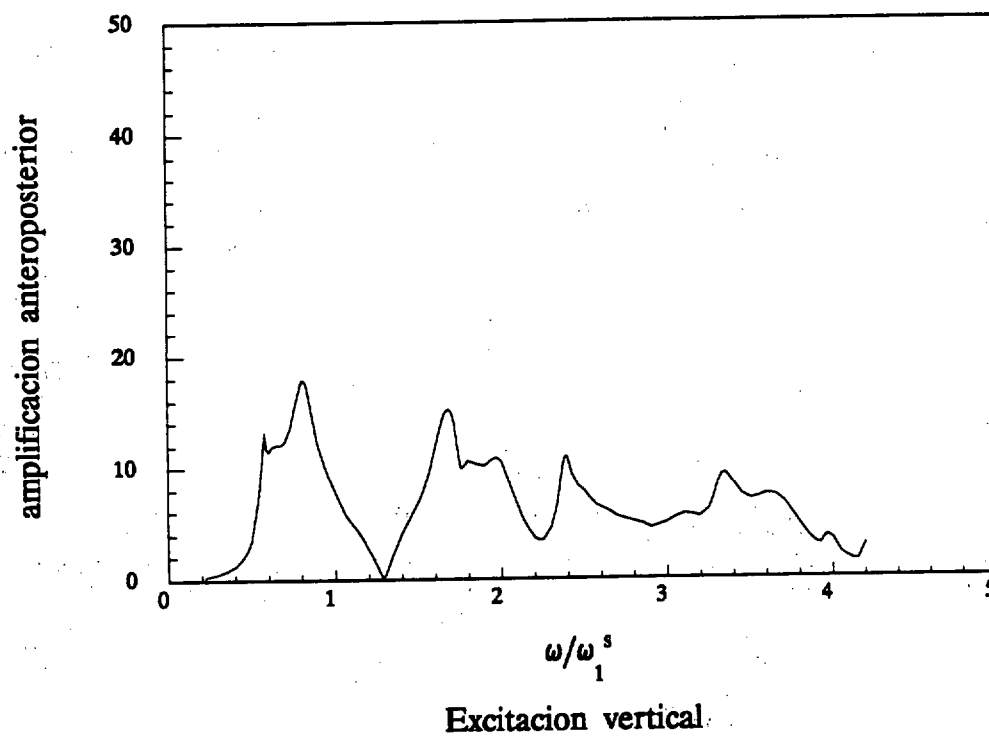
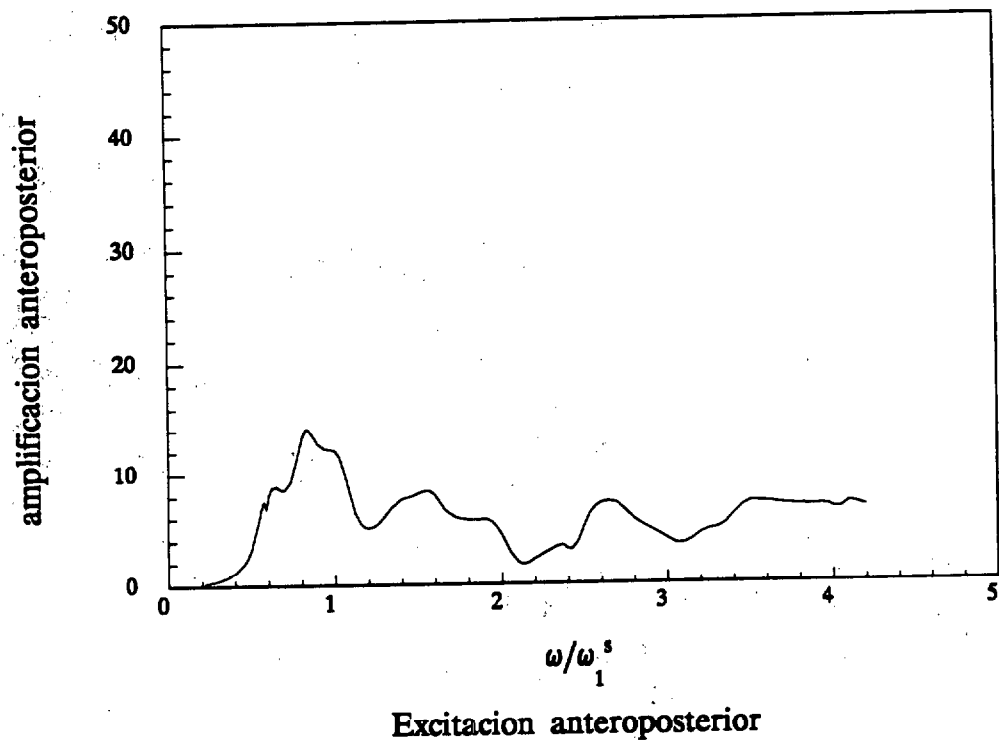


Fig. VI-24 Amplificación anteroposterior del punto A de la coronación. Base deformable. Embalse abierto simétrico lleno de agua.

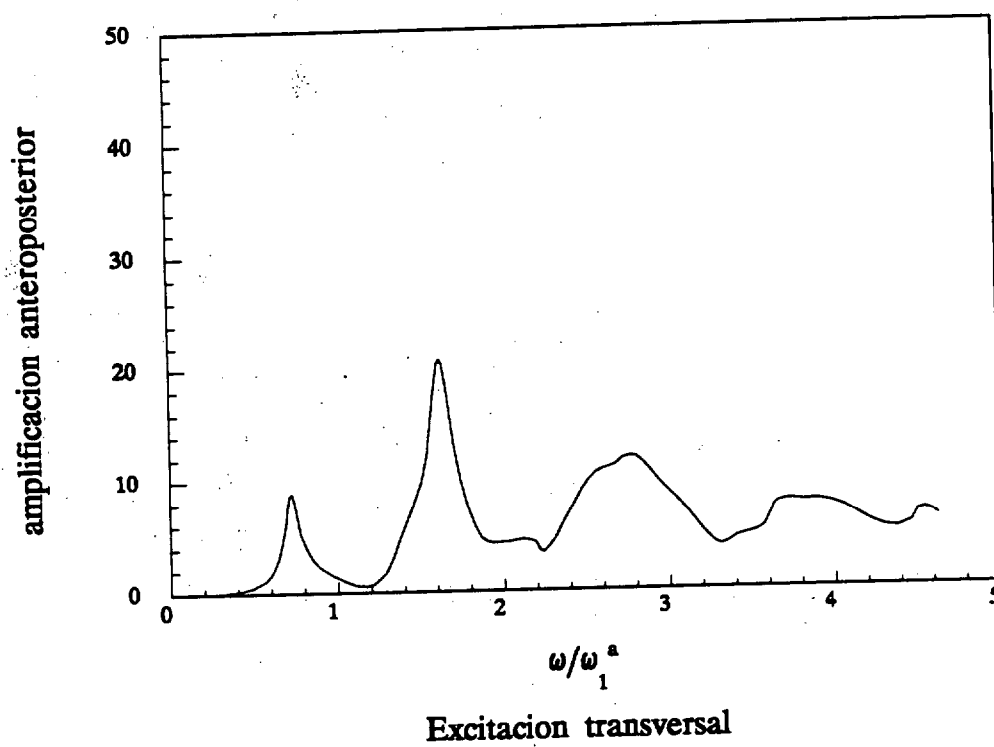


Fig. VI-25 Amplificación anteroposterior del punto B de la coronación. Base deformable. Embalse abierto simétrico lleno de agua.

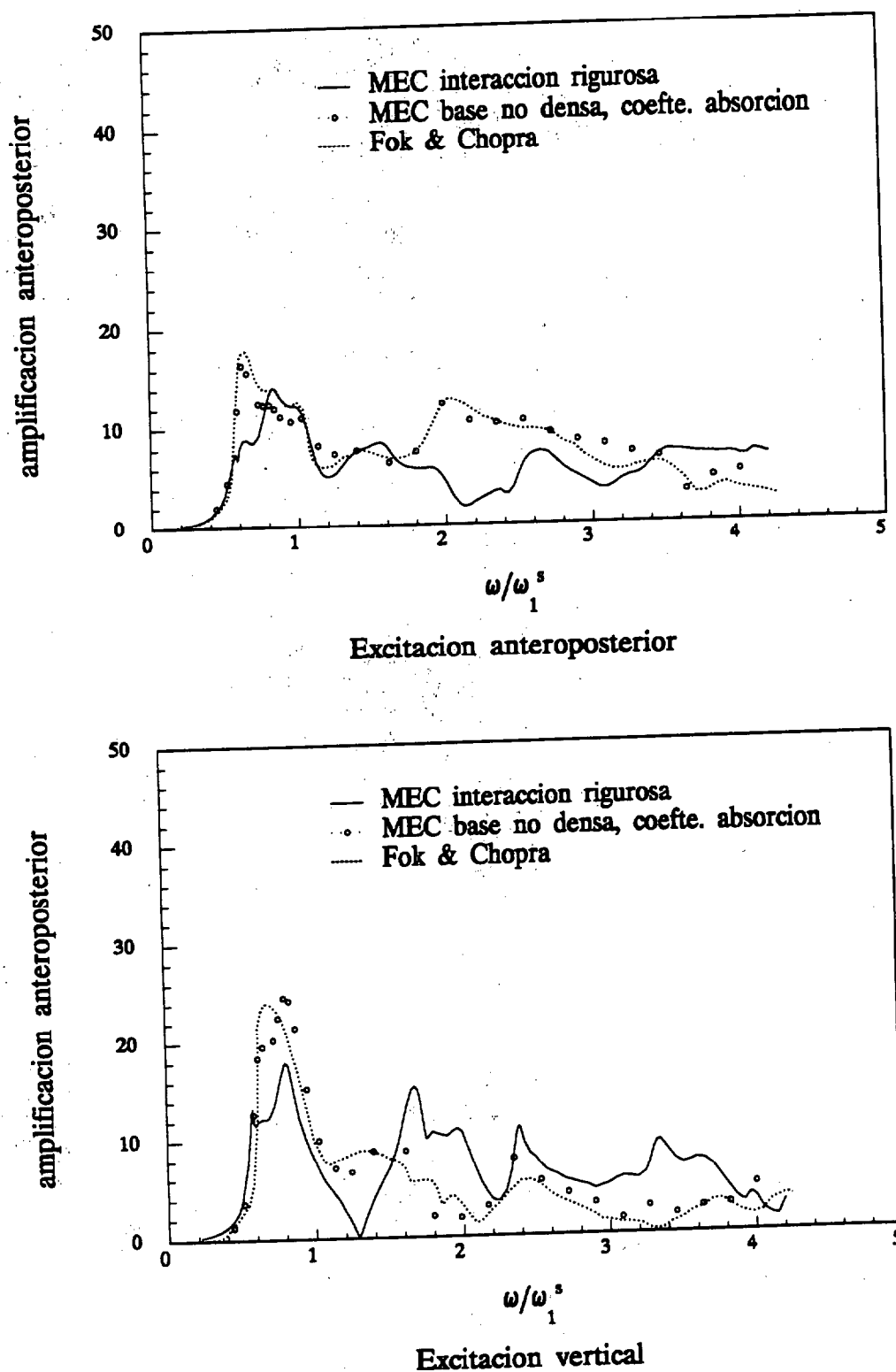


Fig. VI-26 Amplificación anteroposterior del punto A de la coronación. Base deformable. Embalse abierto simétrico lleno de agua. ($\alpha=0.75$)

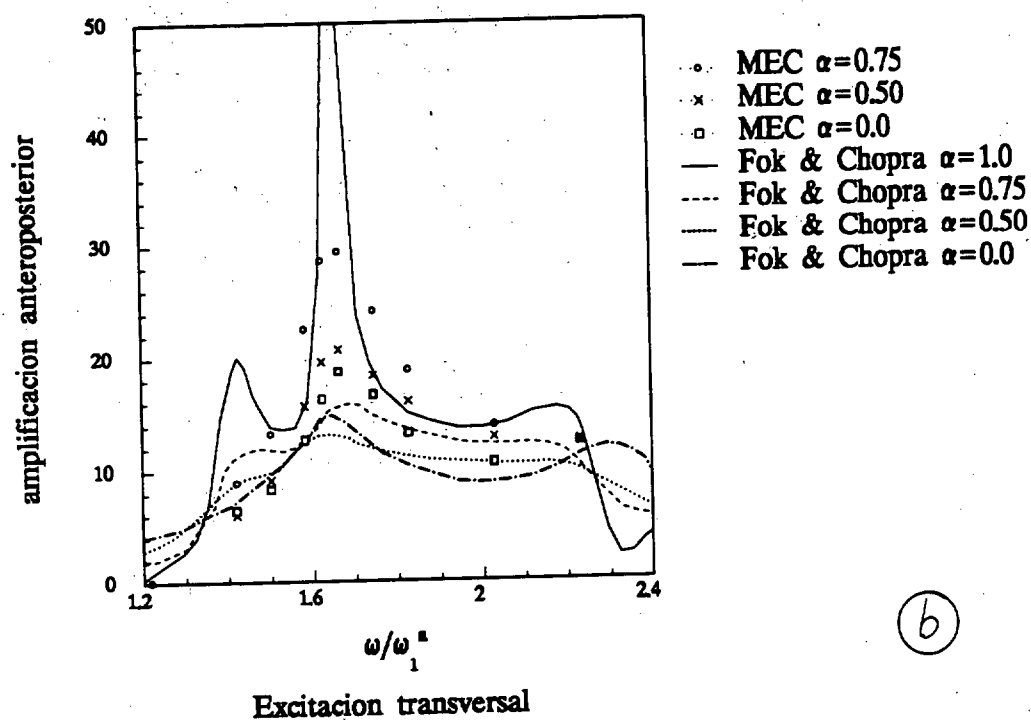
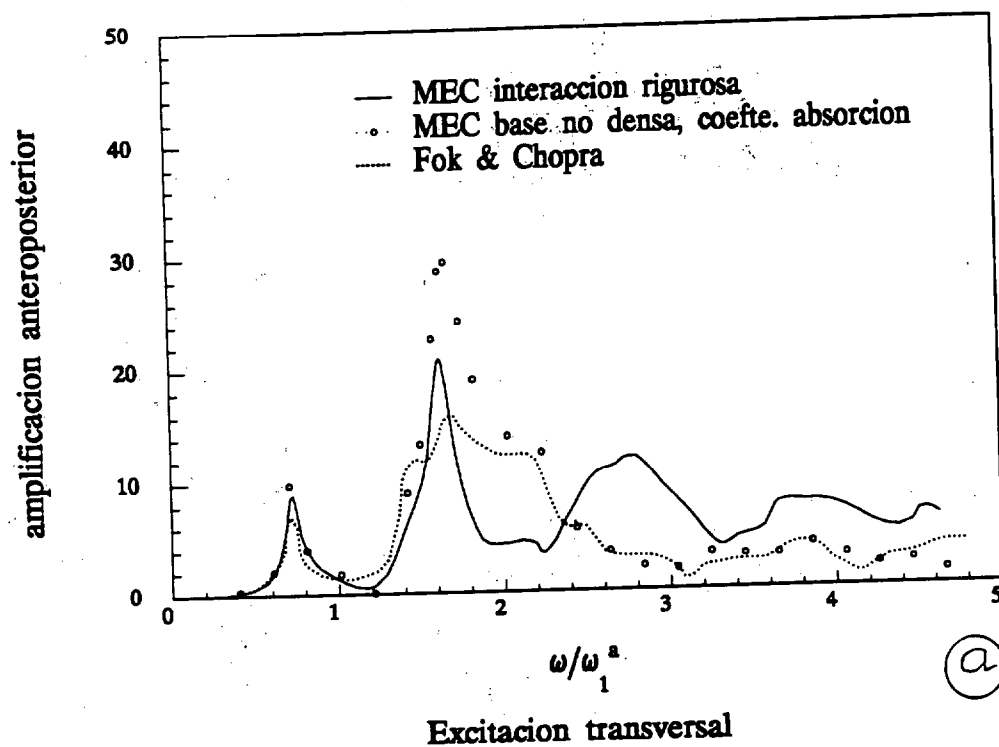


Fig. VI-27 Amplificación anteroposterior del punto B de la coronación. Base deformable. Embalse abierto simétrico lleno de agua.
(a) $\alpha=0.75$ (b) (ampliación). Diferentes valores de α .

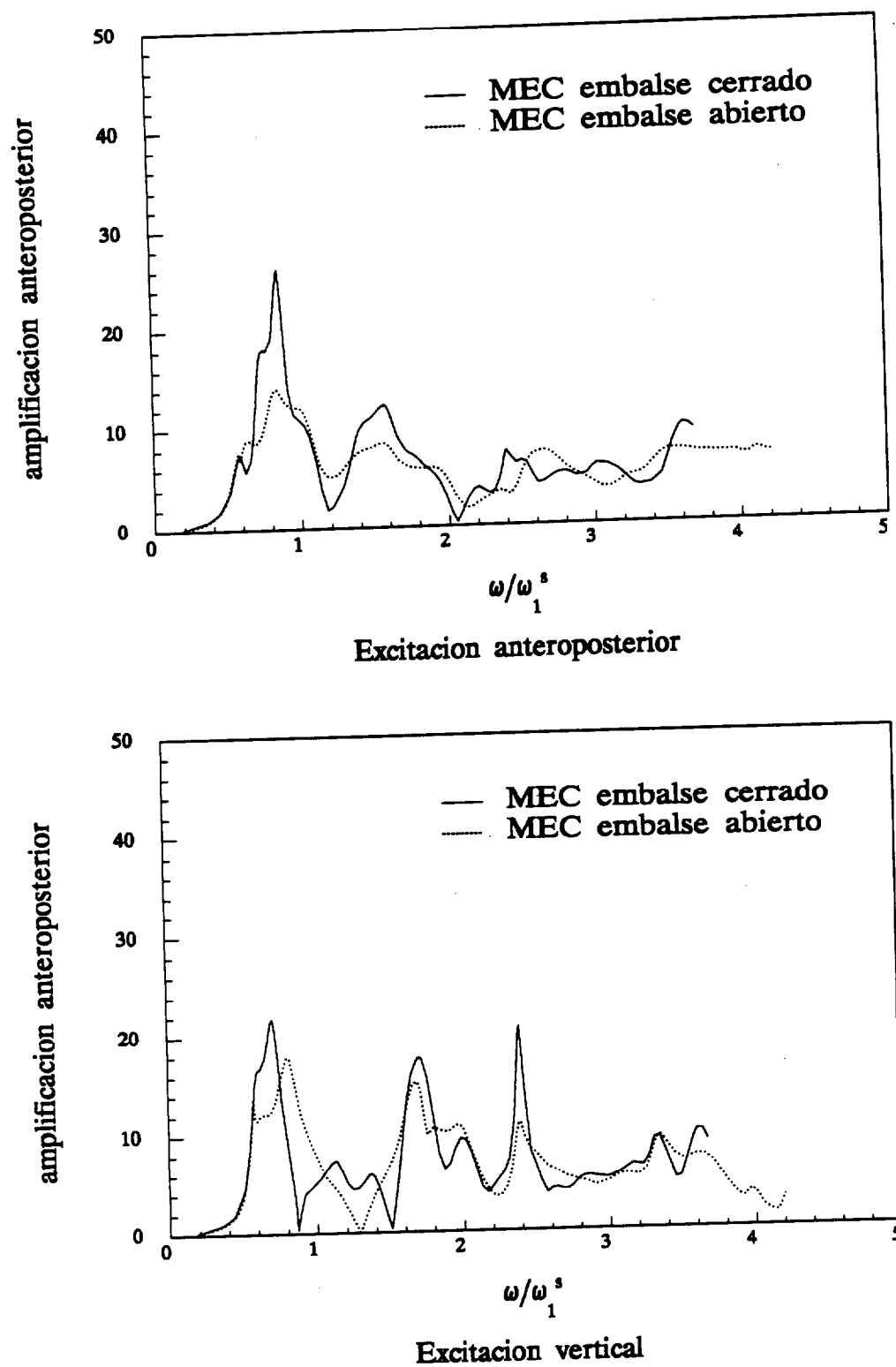


Fig. VI-28 Amplificación anteroposterior del punto A de la coronación. Base deformable. Embalses abierto y cerrado, simétricos, llenos de agua.

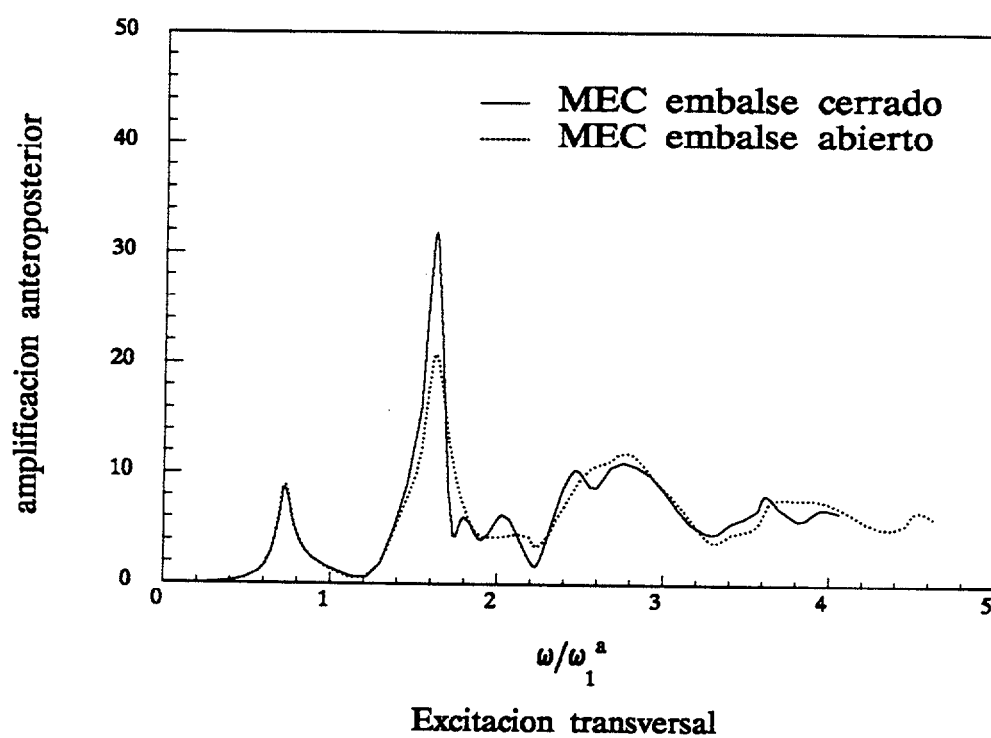


Fig. VI-29 Amplificación anteroposterior del punto B de la coronación. Base deformable. Embalses abierto y cerrado, simétricos, llenos de agua.

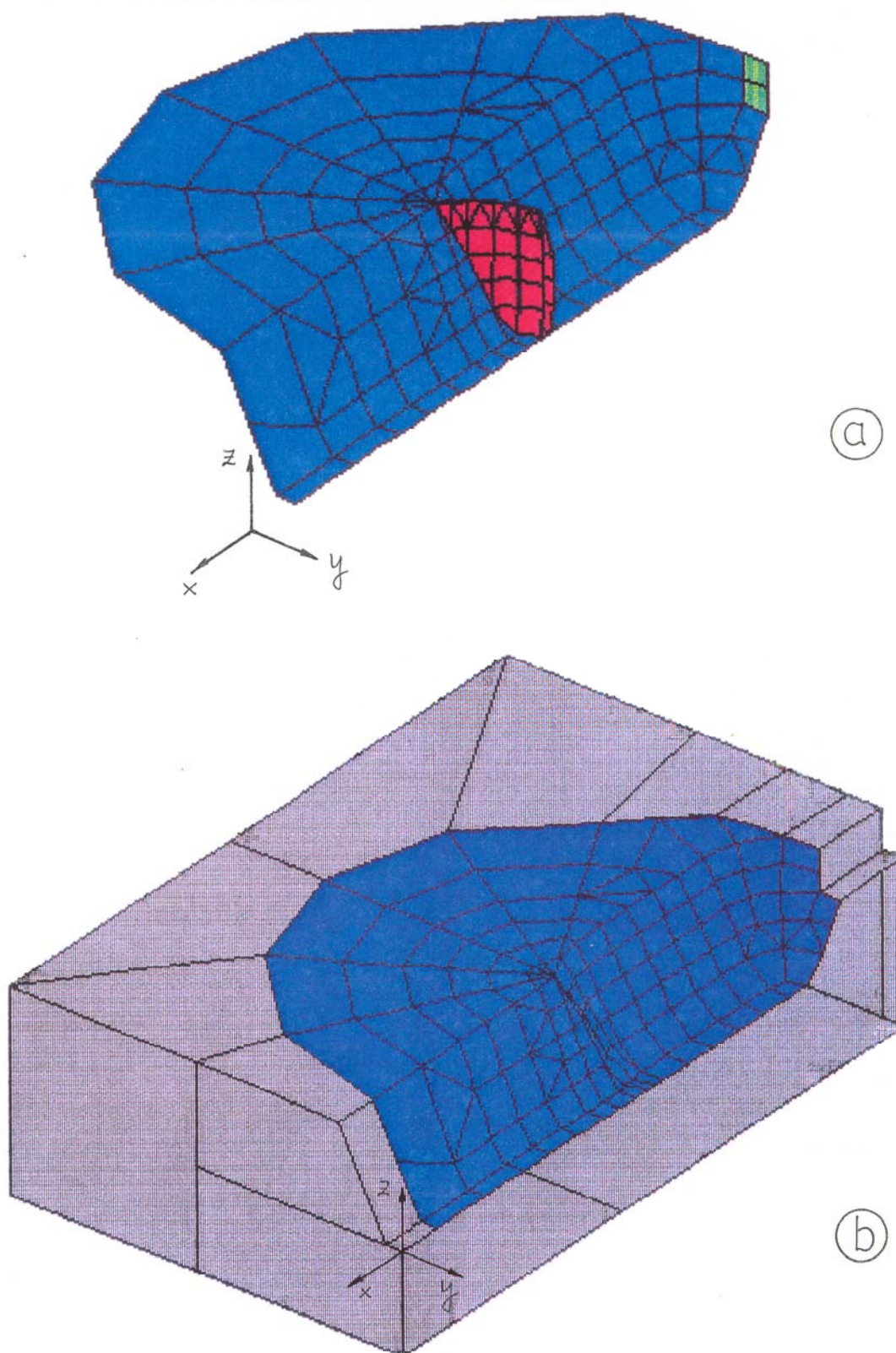


Fig. VI-30 (a) Discretización de Elementos de Contorno para el estudio del sistema acoplado suelo-presa-embalse. Modelo de embalse semiabierto.
(b) Subregión suelo y contornos ficticios.

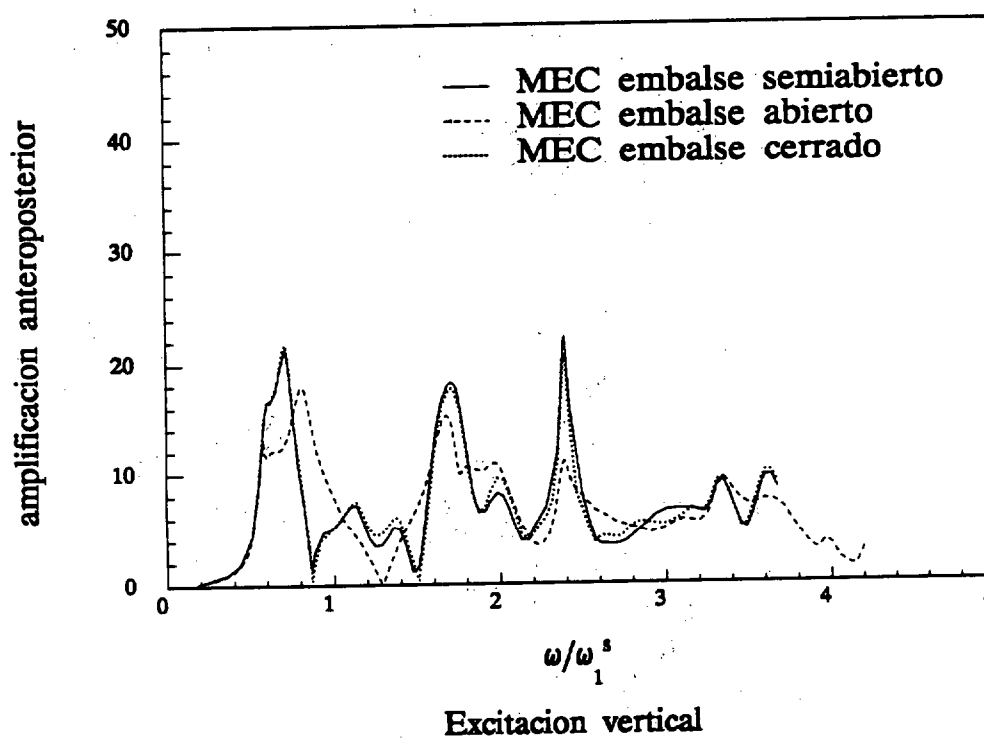
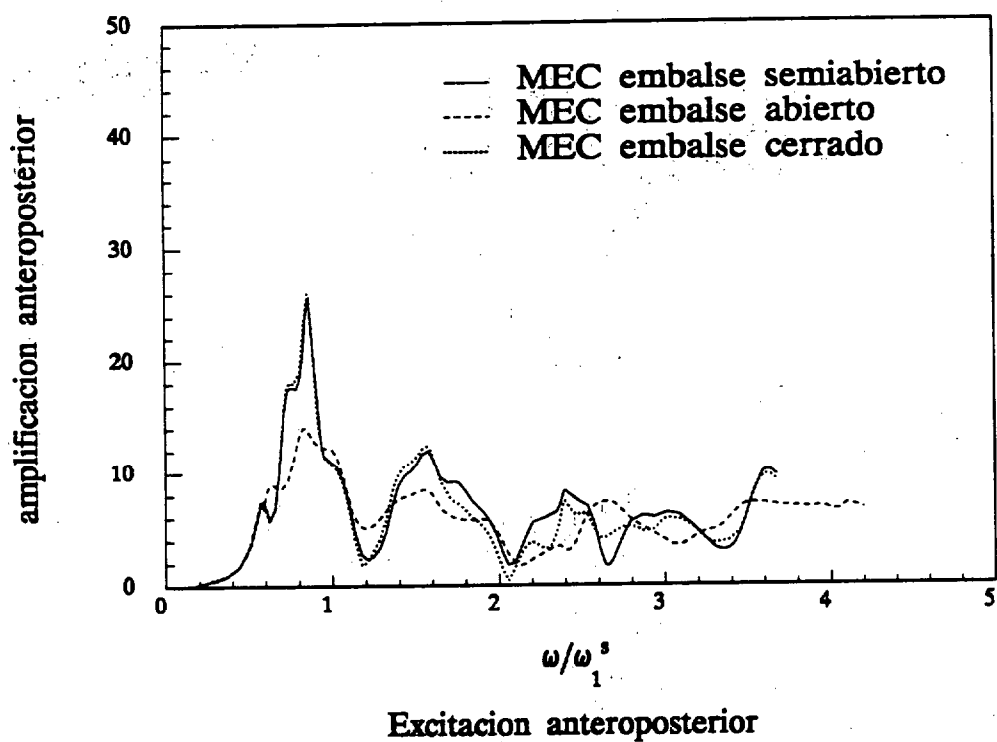


Fig. VI-31 Amplificación anteroposterior del punto A de la coronación. Base deformable. Embalses abierto, cerrado y semiabierto, simétricos, llenos de agua.

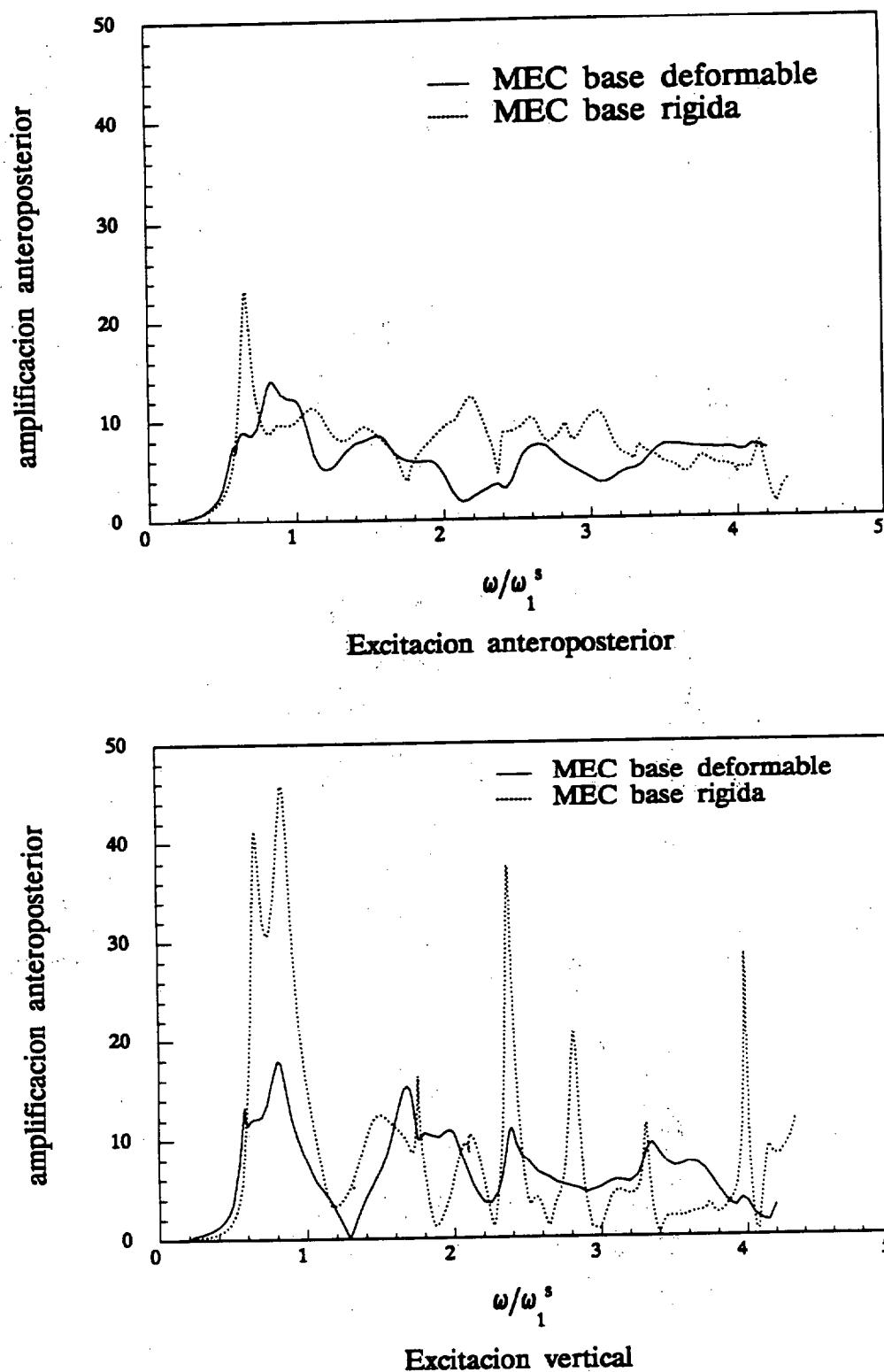


Fig. VI-32

Amplificación anteroposterior del punto A de la coronación. Embalse abierto lleno de agua. Influencia de la flexibilidad del suelo.

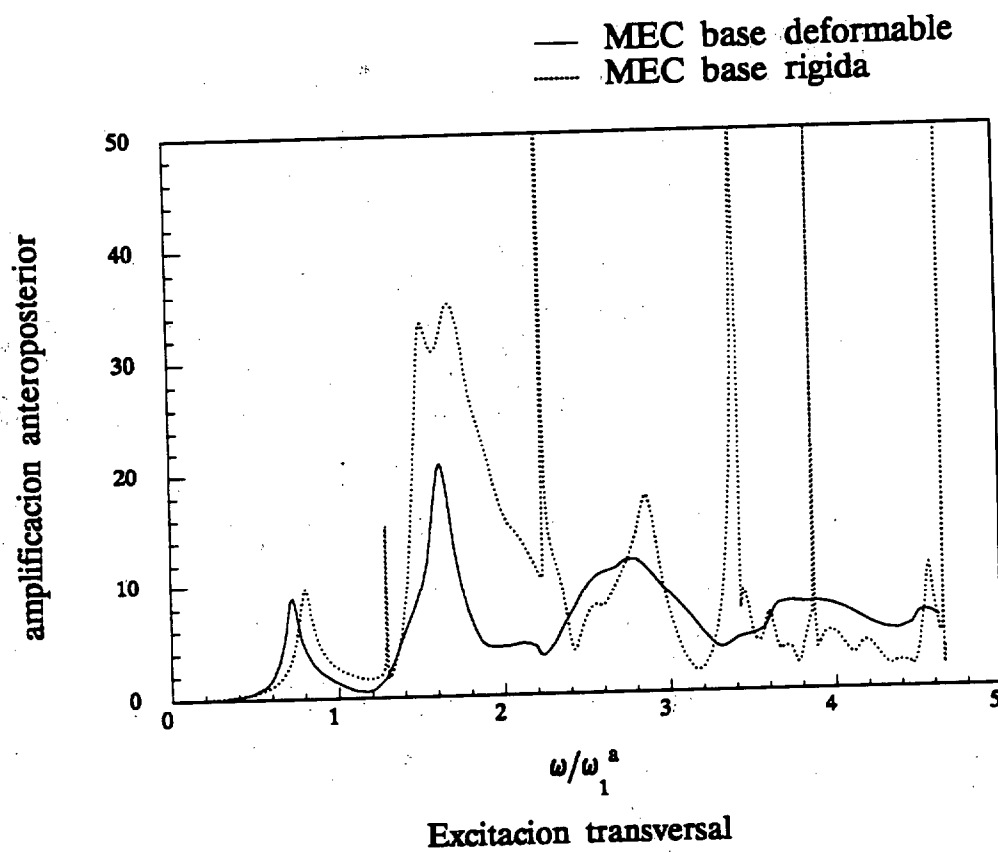


Fig. VI-33

Amplificación anteroposterior del punto B de la coronación. Embalse abierto lleno de agua. Influencia de la flexibilidad del suelo.

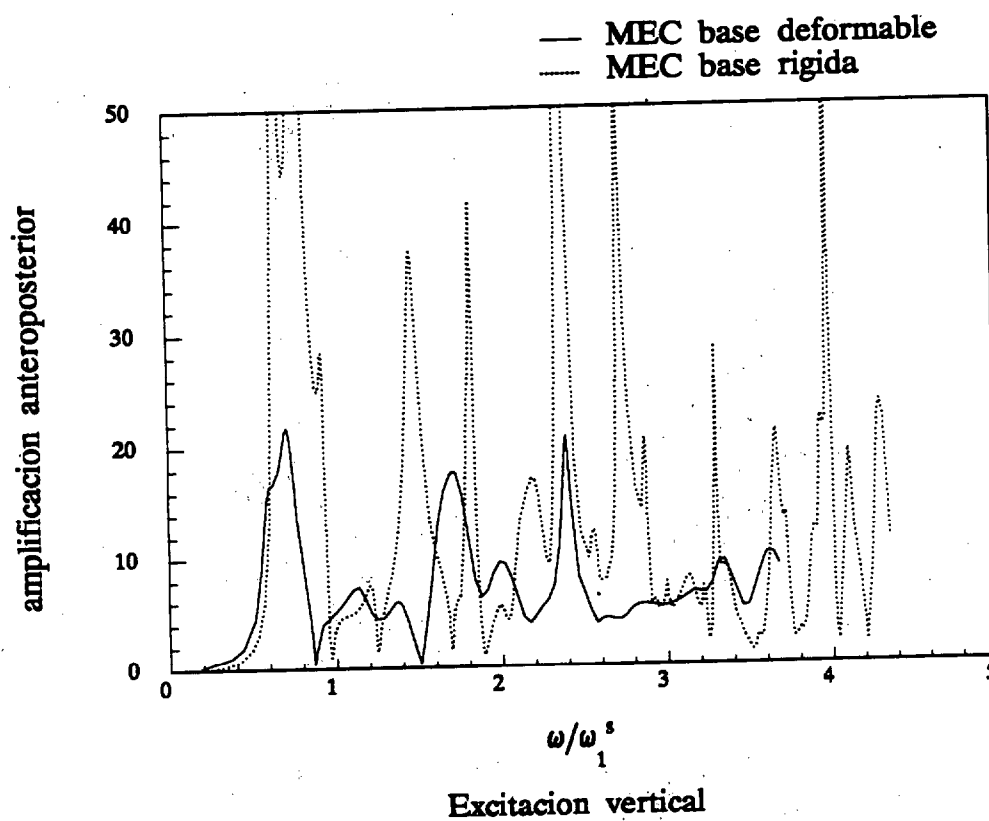
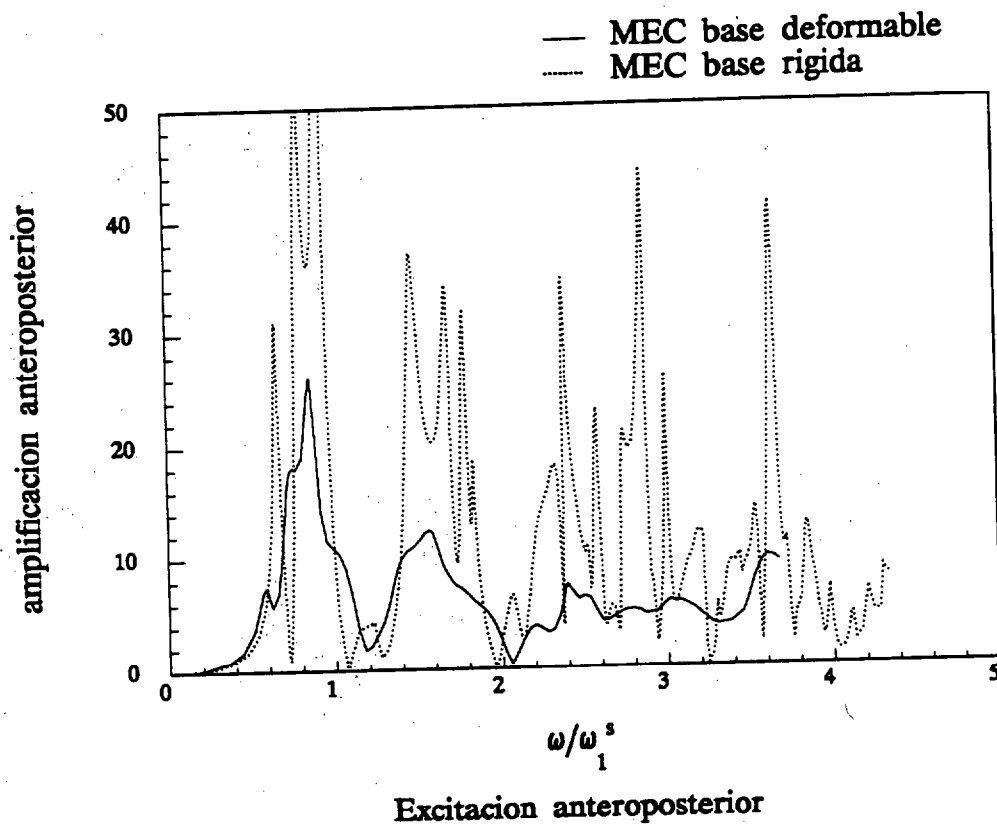


Fig. VI-34 Amplificación anteroposterior del punto A de la coronación. Embalse cerrado simétrico lleno de agua. Influencia de la flexibilidad del suelo.

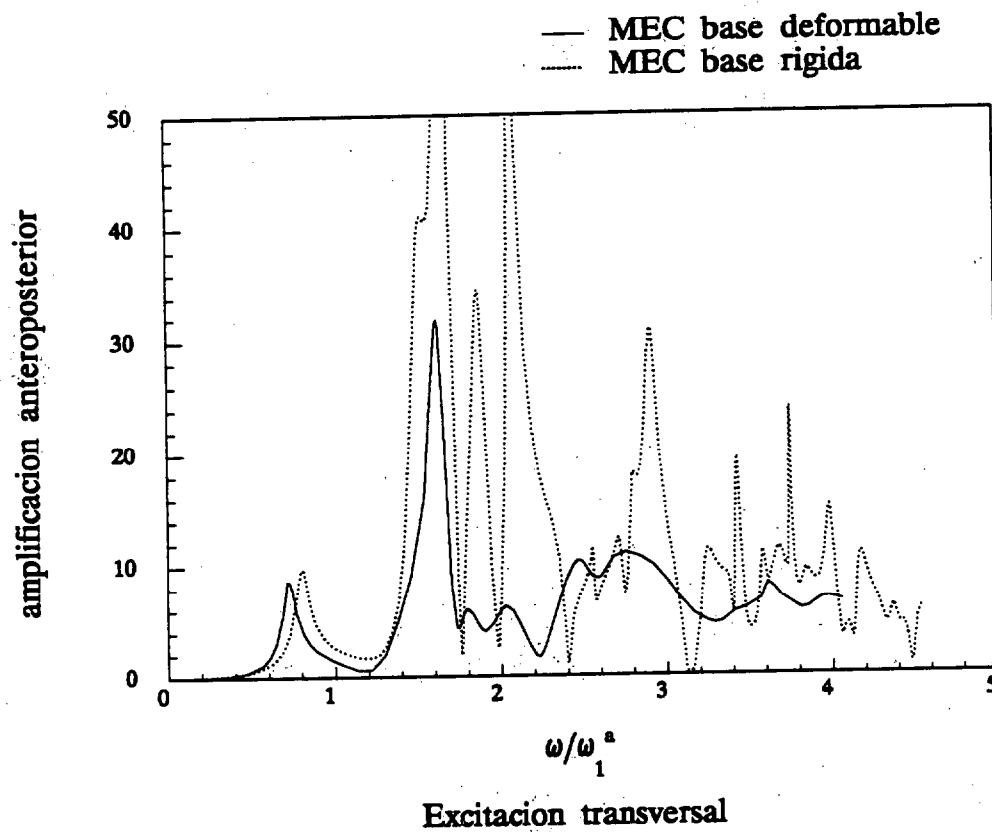


Fig. VI-35

Amplificación anteroposterior del punto B de la coronación. Embalse cerrado simétrico lleno de agua. Influencia de la flexibilidad del suelo.

CAPÍTULO VII

CONCLUSIONES Y DESARROLLO FUTURO

VII.1 REVISIÓN Y CONCLUSIONES

Esta Tesis trata de ser un paso más en el avance del estudio dinámico de presas bóveda, en la comprensión de su comportamiento y en la valoración de los factores físicos que más lo determinan. Para ello, se ha tomado en consideración un sistema formado por una estructura (la presa), el terreno sobre el que ésta se cimenta y que da forma al vaso, y el agua embalsada por ambos. El conjunto así definido se ha analizado en régimen dinámico, en el dominio de la frecuencia, haciendo uso de un modelo numérico basado en el Método de los Elementos de Contorno. La formulación elastodinámica, y la formulación en mecánica de fluidos con pequeñas perturbaciones de dicho método permiten, como se ha visto, representar adecuadamente los fenómenos de propagación de ondas que se producen en las fases sólidas y líquida, respectivamente, en presencia de una sollicitación sísmica. Los efectos de acoplamiento conjunto pueden ser tratados asimismo de una manera directa y rigurosa, imponiendo en las interfases condiciones de contorno apropiadas.

El estudio del sistema suelo-presa-embalse se ha llevado a cabo teniendo en cuenta la naturaleza tridimensional de la geometría real. Se ha desarrollado una tipología de elementos parabólicos, cuadriláteros y triangulares, de doble curvatura. La combinación de ambos tipos de elementos permite una buena definición de las geometrías irregulares que aparecen en el problema, y una representación correcta del comportamiento de flexión de la bóveda.

En cuanto a la implementación, puede comentarse que las integrales de la solución fundamental se han resuelto numéricamente, y se ha empleado un procedimiento indirecto para la evaluación de los términos que incluyen la singularidad. La duplicación de nodos en las situaciones de borde se revela como una estrategia interesante, y compensa el costo computacional asociado por la simplificación que introduce en el montaje del sistema. En este sentido el empleo del método de las imágenes en la región líquida y la consideración (cuando ello es posible) de las propiedades de simetría del modelo, permiten un ahorro considerable de los recursos.

Cuando el embalse se considera como una canal infinito, el uso de un contorno absorbente con condiciones de contorno especiales permite una buena representación de la zona de agua no discretizada.

El suelo se ha modelado como un semiespacio elástico a través del cual incide verticalmente un tren de ondas planas que simulan la excitación sísmica. En él, el

planteamiento en campo difractado reduce las superficies a discretizar a los contornos cercanos a la presa.

En cuanto a los resultados obtenidos, se ha visto que los fenómenos de acoplamiento y de interacción entre los diferentes medios que componen el sistema condicionan totalmente el comportamiento dinámico del conjunto. Se deduce que un análisis de la presa como un medio aislado, sin incluir en el modelo la presencia del suelo y del agua embalsada, conduce a unos resultados que no se corresponden con los que cabe esperar en una situación real.

No sólo es precisa la incorporación en el modelo de los efectos de interacción mutua, sino también que su representación sea lo más correcta y rigurosa posible. El procedimiento empleado en esta Tesis supone un avance respecto de los existentes pues permite el estudio simultáneo de los tres medios (presa-suelo-embalse), incluyendo en el mismo modelo la presencia de todos ellos teniendo en cuenta las verdaderas propiedades de cada uno, e introduciendo los efectos de interacción mutua mediante la aplicación de condiciones físicas de equilibrio y compatibilidad en las interfases.

Por otro lado se observa que en determinadas situaciones de interacción la respuesta puede ser importante para frecuencias elevadas, por lo que el rango de estudio debe ser elegido cuidadosamente.

El modelo del suelo debe incluir su flexibilidad, y contemplar adecuadamente la naturaleza espacial de la excitación. Se ha puesto de manifiesto que la idealización de la base como un semiespacio elástico sin masa, al tiempo de no reproducir correctamente el efecto de interacción suelo-estructura, es incapaz de representar la naturaleza propagatoria del terreno, puesto que falsea su densidad. El modelo del M.E.C. realmente considera el suelo como un sólido continuo tridimensional con sus verdaderas propiedades, y permite una definición correcta del campo libre de movimientos y tracciones en él. Así, no sólo se tiene en cuenta la presencia de desplazamientos diferenciales que son importantes debidos al tamaño de la estructura, sino que también admite representar otros factores (topográficos, geológicos, etc) que afectan a la definición de la excitación.

En ausencia de agua, se observa que la deformabilidad del suelo produce (con respecto a la situación de base rígida) una importante disminución simultánea de las frecuencias naturales de excitación y de las amplitudes asociadas a cada una. Estos resultados discrepan sensiblemente con los existentes obtenidos con un modelo de Elementos Finitos que supone un suelo sin masa, y que han podido ser reproducidos aquí mediante el M.E.C., modificando el modelo de suelo en orden a anular su densidad. En este caso se aprecia una importante sobreestimación de la respuesta, especialmente en el entorno de las frecuencias de resonancia, que no es esperable encontrar con un modelo más realista de las propiedades del suelo y de la naturaleza de la excitación.

En cuanto al embalse, debe destacarse que la formulación matemática del comportamiento del medio habrá de considerar necesariamente la compresibilidad del agua. Se aprecia también que una correcta modelización de la geometría real del vaso es decisiva; por un lado la topografía del fondo condiciona la distribución de presiones hidrodinámicas puesto que determina las frecuencias naturales y modos de vibración. Por

otro, el comportamiento dinámico también está influido por la idealización infinita o no del embalse, puesto que un modelo abierto e infinito mayor la capacidad de expulsión de energía del sistema. Habrá que evaluar minuciosamente la hipótesis de canal infinito de sección uniforme ya que, como se ha puesto de manifiesto, cambios de geometría a distancias relativamente grandes de la presa (o cambios importantes de sección si el embalse se modela como un canal), conducen a resultados muy diferentes entre sí. Esto se traduce en la necesidad de discretizar fielmente la geometría irregular del fondo hasta distancias considerables de la bóveda, por lo que de nuevo el M.E.C. se presenta como la alternativa más apropiada por cuanto significa de reducción en el número de grados de libertad.

Destacar asimismo la importancia que tiene una correcta consideración de los fenómenos de interacción entre el agua embalsada y el recipiente que la soporta (el suelo). Simplificaciones en orden a considerar este fenómeno mediante coeficientes de absorción, de valor empírico y siempre dudoso, conducen a resultados discordantes que en algunas ocasiones infravaloran la respuesta en el rango medio y alto de frecuencias. Suponiendo un suelo sin masa y modelando la interacción suelo-agua mediante coeficientes de absorción, se han podido reproducir con el M.E.C. los resultados obtenidos con un modelo de Elementos Finitos que requiere de tales simplificaciones.

En general, cuando la base se considera infinitamente rígida, la presencia de agua en el embalse se traduce en una disminución de las frecuencias de resonancia de la presa y en un aumento del valor de los movimientos en ella, al tiempo que se observa que la importancia de la definición geométrica del vaso es crucial. Si se considera un canal infinito y la excitación se aplica según la dirección longitudinal del mismo, las amplificaciones se amortiguan después de la primera frecuencia natural debido a la radiación de ondas hidrodinámicas que en este caso se produce hacia aguas arriba. Para las demás direcciones de excitación aparecen picos muy altos en el entorno de las frecuencias de resonancia del sistema. Para el modelo de embalse cerrado la imposibilidad de radiar ondas se traduce en una mayor oscilación y amplificación de la respuesta.

Cuando se considera el efecto simultáneo del agua y de flexibilidad del suelo se aprecia una redistribución de las frecuencias de máxima amplificación al tiempo que las curvas se suavizan, lo que se debe al amortiguamiento por radiación que el suelo introduce y a la condición espacial de la excitación. A pesar de ello se observa que la idealización de embalse abierto conduce a valores de respuesta muy inferiores a los obtenidos con una geometría más real del vaso, especialmente para frecuencias elevadas. De nuevo se pone de manifiesto la necesidad de una representación correcta de la geometría.

Finalmente y en cuanto al procedimiento empleado, puede decirse que el M.E.C., por sus especiales características, permite tener en cuenta todos estos fenómenos de una manera más directa y sencilla que otros procedimientos de modelado numérico.

VII.2 DESARROLLOS FUTUROS

Como se ha puesto de manifiesto, el algoritmo de análisis desarrollado en esta Tesis posee en el momento actual suficiente generalidad como para ser aplicado al estudio dinámico de embalses reales, en particular con presas bóveda, y permite una definición correcta y exhaustiva de la geometría de la estructura y de la topografía de las superficies, especialmente del vaso, hasta distancias considerables de la presa.

Una mejor comprensión del comportamiento sísmico del conjunto aconseja un análisis de la influencia que sobre el mismo puedan tener ciertos factores relativos a la geometría o las propiedades de los elementos que componen el sistema. Se trataría de hacer un estudio paramétrico de la influencia de cada uno sobre el comportamiento global, y pueden citarse como más interesantes los siguientes:

- estudio de la influencia de diferentes propiedades de suelo para una misma presa, o en general, de la modificación en la relación de módulos de elasticidad entre hormigón y suelo.
- Influencia de la altura de llenado del embalse
- Influencia de la presencia de perturbaciones graves en la topografía del vaso cercana a la presa, o simplemente de modificaciones geométricas del vaso.
- Influencia de la existencia de más de un canal infinito de alimentación, con diferentes direcciones de propagación.

En cuanto a los posibles desarrollos futuros de este trabajo se encuentran todos aquellos que contribuyan al progresivo acercamiento del modelo a la realidad. En primer lugar hay que citar aquellas ampliaciones más directas e inmediatas que partiendo de la metodología ya existente, tan sólo requieran una revisión o avance de la misma :

- En cuanto a la definición de la excitación, incluir en el modelo la presencia de ondas incidentes con diferentes ángulos de incidencia. Especialmente interesante será el estudio de la respuesta del sistema cuando la excitación contiene ondas de Rayleigh, en cuyo caso pueden producirse movimientos en desfase en puntos situados a la misma cota, en orillas opuestas del embalse.
- En cuanto a una modelización más general del suelo, incluir la posibilidad de definir éste como un medio estratificado sobre un semiespacio o una base rígida, y en general, la posibilidad de incluir la presencia de discontinuidades.
- La inclusión en el embalse de sedimentos de fondo, que suponen un factor muy importante de perturbación de la distribución de presiones hidrodinámicas en la región líquida, se presenta como uno de los avances más directos. Se propone la modelización de los sedimentos como una nueva región que se comporta como un medio poroelástico y que se encuentra acoplada con las demás. La organización del algoritmo desarrollado facilita la incorporación en el sistema de esta nueva región.

En cuanto a estudios que requieren el uso de formulaciones diferentes a la empleada pueden citarse:

- Estudio del problema en régimen transitorio, lo cual puede ser abordado mediante el uso de algoritmos de transformada inversa de Fourier a partir de los resultados en el dominio de la frecuencia, o bien mediante una formulación específica en el dominio del tiempo.
- El tratamiento de no linealidades geométricas en el comportamiento de la bóveda, y el estudio de problemas de fisuración en el hormigón son asimismo aspectos importantes a analizar en estudios futuros. Para ello se propone un modelo acoplado que emplee Elementos Finitos para la presa y Elementos de Contorno para el suelo y el embalse.

REFERENCIAS:

Abascal,R. (1984), "Estudio de Problemas Dinámicos en Interacción Suelo-Estructura por el MEC", Tesis Doctoral, E.T.S.I.I. de Sevilla.

Abascal,R., Dominguez,J. (1986), "Vibrations of Footings on Zoned Viscoelastic Soils", *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, **112**, No. 5, 433-447.

Abascal,R., Dominguez,J. (1990), "Dynamic Response of Two-Dimensional Flexible Foundations Allowed to Uplift", *Computers and Geotechnics*, **9**, 113-129.

Abramovitz,M., Stegun,I. (1972), "Handbook of Mathematical Functions", Doves. New York.

Achembach,J.D. (1973), "Wave Propagation in Elastic Solids", North-Holland, 3ª ed.

Alarcón,E., Dominguez,J., Caño,F. (1980), "Dynamic Stiffness of Foundation", C.A.Brebbia, Ed., *New Development in Boundary Elements Methods. Proc. of the Second Seminar on Recent Advances in Boundary Elements Methods*, Univ. of Southampton, 264-280.

Alarcón,E., Reyero,P. (1984), "Elementos de Contorno", E.T.S.I.I. de Madrid.

Alarcón,E., Cano,J.J., Dominguez,J. (1989), "Boundary Element Approach to the Dynamic Stiffness Functions of Circular Foundations". *Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **13**, 645-664.

Alarcón,E., Dominguez,J. (1990), "Consideraciones sobre el Cálculo Sísmico de Presas-Boveda", *Terceras Jornadas Españolas de Presas*, Comité Español de Grandes Presas, 545-559.

Antes,H., Von Estorff,O. (1987), "Analysis of Absorption Effects on The Dynamic Response of Dam Reservoir Systems by Boundary Element Methods", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **15**, 1023-1036.

Antes,H., Von Estorff,O. (1987), "Transient Behavior of Strip Foundations Resting on Different Soil Profiles by a Time Domain BEM". *Int. A.S. Cakmak (ed.). Development in Geotechnical Engineering*, **44**, 291-306. Amsterdam, Elsevier.

Antes,H., Von Estorff,O. (1988), "Seismic Response Amplification Due to Topographic Influences". *Proc. 9th. World Conference on Earthquake Engineering*, **3**, Tokyo-Kyoto, Japón.

Apsel,R.J. (1979), "Dynamic Green's Functions for Layered Media and Applications to Boundary-Value Problems". Ph. D. Thesis, Univ. of California, San Diego.

Aubry,D., Crepel,J.M. (1986), "Interaction Sismique Fluide-Structure. Application aux barrages route", *Congres Francais Génú Parasismique*, 1-12.

Banaugh,R.P., Goldsmith,W. (1963 a), "Diffraction of Steady Acoustic Waves by Surfaces of Arbitrary Shape", *J.A.S.A.*, **35**, 1590-601.

- Banaugh, R.P., Goldsmith, W. (1963 b), "Diffraction of Steady Elastic Waves by Surfaces of Arbitrary Shape", J. Appl. Mech., **30**, 589-95.
- Banerjee, P.K., Mamoon, S.M. (1990), "A Fundamental Solution Due to a Periodic Point Force in the Interior of an Elastic Half-Space", Earth. Eng. and Struc. Dyn., **19**, 91-105.
- BEASY, Boundary Element Analysis System (1986), Computational Mechanics Centre. Manual. Southampton. U.K.
- Betti, E. (1872), "Teoría dell Elasticita", Il Nuovo Cimento, **7-10**.
- Boore, D.M. (1972), "A Note on the Effect of Simple Topography on Seismic SH Waves". Bull. Seis. Soc. Am., **62**, 275-284.
- Bouchon, M. (1973), "Effects of Topography on Surface Motion". Bull. Seis. Soc. Am., **63**, 615-632.
- Brebbia, C.A., Dominguez, J. (1989), "Boundary Elements: An Introductory Course", CMP McGraw-Hill.
- Cerrolaza, M. (1988), "Elementos de Contorno P-Adaptables: Desarrollo y Aplicaciones en Teoría del Potencial y Elastodinámica", Tesis Doctoral, E.T.S.I.I. de Madrid.
- Cerrolaza, M., Alarcón, E. (1989), "A Bicubic Coordinate Transformation for the Evaluation of the Cauchy Principal Value Integrals", Int. Journ. Num. Meth. Eng., **28**, 987-1000.
- Clough, R.W., Guandou, Z. (1987), "Findings and Comments. Earthquake Behaviour of Arch Dams", Procc. China-U.S Workshop. Pergamon Press.
- Cole, D.M., Kosloff, D.D., Minster, J.B. (1978), "A Numerical Boundary Integral Equation Method for Elastodynamics I", Research Report of Seismological Laboratory of the California Institute of Technology.
- Cruse, T.A., Rizzo, F.J. (1968), "A Direct Formulation and Numerical Solution of the General Transient Elastodynamic Problem I", Jour. Math. Anal. Appl., **22**, 244-259.
- Chakrabarti, P., Chopra, A.K. (1974), "Hydrodynamic Effects in Earthquake Response of Gravity Dams", Journal of the Structural Division, ASCE, **100**, No.ST6, 1211-1224.
- Chapel, F. (1981), "Application de la Methode des Equations Integrales a la Dynamique des Soles. Structures sur Pieux". Ph. D. Thesis, Ecole Central des Arts et Manufactures.
- Chapel, F. (1987), "Boundary Element Method Applied to Linear Soil-Structure Interaction on a Heterogeneous Soil". Earthquake Engineering and Structural Dynamics, **15**, 815-829.
- Chirino, F. (1987), "Cálculo de Factores Dinámicos de Intensidad de Tensiones mediante el Método de los Elementos de Contorno", Tesis Doctoral. E.T.S.I.I. de Las Palmas.

Chopra,A.K. (1968), "Earthquake Response of Reservoir-Dam Systems", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, **94**, No.EM4, 1475-1499.

Chopra,A.K. (1970), "Earthquake Response of Concrete Gravity Dams ", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, **96**, No.EM4, 443-454.

Chopra,A.K., Chakrabarti,P. (1981), "Earthquake Analysis of Concrete Gravity Dams Including Dam-Water-Foundation Rock Interaction", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, **9**, No.4, 363-383.

Dominguez,J. (1991), "An Integral Formulation for Dynamic Poroelasticity". J. Applied Mech. ASME, **58**, 588-591.

Dominguez,J., Roësset,J.M. (1978), "Dynamic Stiffness of Rectangular Foundations". Research Report R78-20, Department of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass.

Dominguez,J., Alarcón,E., Abascal,R (1982), "The Boundary Element Method in Elastodynamics", Procc. 10th IMAC S Wold Congress, Montreal.

Dominguez,J., Abascal,R. (1984), "On Fundamental Solutions for the Boundary Integral Equations Method in Static and Dynamic Elasticity", Eng. Anal., **1**, No.3, 128-134.

Dominguez,J., Abascal,R. (1987), "Effects of an Irregular Soil Profile on Site Amplification", Proc. 3rd Soil Dynamics and Earthquake Eng. Conf., A. Cakmak and C.A.Brebbia, ED., Elsevier.

Dominguez,J., Abascal,R. (1989), "Seismic Response of Strip Footings on Zoned Viscoelastic Soils", Journal of Engineering Mechanics, ASCE, **115**, No. 5, 913-934.

Dominguez,J., Medina,F. (1989), "Boundary Elements for the Analysis of Dams Including Dam-Water-Foundation Interaction Effects II", Eng. Analysis with Boundary Elements, **6**, 158-163.

Dominguez,J., Medina,F., Maeso,O. (1990), "Seismic Analysis of Dams Including Soil-Structure-Fluid Interaction", Procc. European Conf. Struct. Dyn. EURODYN'90, 811-818, Bochum, A.A.Balkema, Rotterdam,

Dominguez,J., Maeso,O. (1991), "Boundary Element Model for the Seismic Analysis of Arch Dams", Symp. Int. Assoc. for BEM, IABEM'91, Kyoto, Japón (En prensa).

Dominguez,J., Meise,T. (1991), "On the use of the BEM for Wave Propagation in Infinite Domains", Eng. Anal. with B.E., **8**, No.3, 132-138.

Dowling,M.J., Hall,J.F. (1989), "Nonlinear Seismic Analysis of Arch Dams". Journal of Engineering Mechanics, **115**, No.4, ASCE.

Doyle,J.M. (1966), "Integration of Laplace Transformed Equations of Classics Elastokenetics", Jour. Math. Anal. and Appl., **13**, 118-131.

Dravinsky, M. (1982), "Scattering of SH Waves by Subsurface Topography", J. Eng. Mech. Div. ASCE, **108**, 1-31.

El-Haidi, B., Hall, J.F. (1989), "Non-Linear Earthquake Response of Concrete Gravity Dams, Part 1: Modelling". Earthquake Engineering and Structural Dynamics, **18**, 837-851.

Emperador, J.M. (1988), "El Método de los Elementos de Contorno en Problemas Elastodinámicos con Simetría de Revolución", Tesis Doctoral, E.T.S.I.I. de Las Palmas.

Emperador, J.M., Dominguez, J. (1989), "Dynamic Response of Axisymmetric Embedded Foundations", Earth. Eng. and Struc. Dyn., **18**, 1105-1117.

Eringen, A.C., Suhubi, E. (1975), "Elastodynamics, II, Linear Theory", Academic Press.

Fenves, G., Chopra, A.K. (1983), "Effects of Reservoir Bottom Absorption on Earthquake Engineering and Structural Dynamics, **11**, No.6, 809-829.

Fenves, G., Chopra, A.K. (1984), "Earthquake Analysis of Concrete Gravity Dams Including Reservoir Bottom Absorption and Dam-Water-Foundation Rock Interaction", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, **12**, 663-680.

Fenves, G., Chopra, A.K. (1985), "Effects of Reservoir Bottom Absorption and Dam-Water-Foundation Rock Interaction on Frequency Response Functions for Concrete Gravity Dams", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, **13**, 13-31.

Fok, K.L., Chopra, A.K. (1986 a), "Earthquake Analysis of Arch Dams Including Dam-Water-Interaction Reservoir Boundary Absorption and Foundation Flexibility", Earthq. Eng. Struc. Dyn., **14**, 155-184.

Fok, K.L., Chopra, A.K. (1986 b), "Frequency Response Functions for Arch Dams: Hydrodynamic and Foundation Flexibility Effects", Earthq. Eng. Struct. Dyn., **14**, 769-795.

Fok, K.L., Chopra, A.K. (1986 c), "Hydrodynamic and Foundation Flexibility Effects in Earthquake Response of Arch Dams", J. Struct. Eng. ASCE, **112**, 1810-1828.

Gallego, R. (1990), "Estudios Numéricos de Problemas de Fractura Elastodinámica", Tesis Doctoral, E.T.S.I.I de Sevilla.

Gomez-Lera, M.S., Dominguez, J., Alarcón, E. (1985), "On the Use of 3-D Fundamental Solutions for Axisymmetric Steady-State Dynamic Problems". Proc. 7th. Int. Conf. BEM, **6**, 127-6,136.

Gradshteyn, I.S., Ryzhik, I.M. (1965), "Table of Integrals, Series and Products", Academic Press Inc.

Hall, J.F. (1986), "Study of the Earthquake Response of Pine Flat Dam", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, **14**, 281-295.

- Hall,J.F., Chopra,A.K. (1982), "Two-Dimensional Dynamic Analysis of Concrete Gravity and Embankment Dams Including Hydrodynamic Effects", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **10**, No.2, 305-332.
- Hall,J.F., Chopra,A.K. (1982), "Hidrodynamic Effects in the Response of Concrete Gravity Dams", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **10**, No.2, 333-345.
- Hall,J.F., Chopra,A.K. (1983), "Dynamic Analysis of Arch Dams Including Hidrodynamic Effects", *J. Eng. Mech. Div. ASCE*, **109**, 149-163.
- Han,G., Li,H., Hang,H. (1985), "A New Method for Evaluating Singular Integrals in Stress Analysis of Solids by the Direct BEM", *Int. J. Num. Met. Eng.*, **21**, 2071-2098.
- Hillmer,P., Schmid,G. (1988), "Calculation of Foundation Uplift Effects Using a Numerical Laplace Transform". *Earth. Eng. and Struc. Dyn.*, **16**, 789-801.
- Housner,G.W., Jennings,P.C. (1972), "The San Fernando California Earthquakes", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **1**, 5-31.
- Humar,J. y Jablonski,A.M. (1988), "Boundary Element Reservoir Model for Seismic Analysis of Gravity Dams", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **16**, 1129-1156.
- Jablonsky,A.M., Humar,J.L. (1990), "Three-Dimensional Boundary Element Reservoir Model for Seismic Analysis of Arch and Gravity Dams", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **19**, 359-376.
- Karabalis,D.L. (1984), "Dynamic Response of Three Dimensional Foundations", Ph. D. Thesis, Univ. of Minnesota, Minneapolis.
- Karabalis,D.L., Beskos,D.E. (1984), "Dynamic Response of 3-D Rigid Surface Foundations by Time Domain Boundary Element Method". *Earth. Eng. Struc. Dyn.*, **12**, No.1, 73-94.
- Karabalis,D.L., Spyrakos,C.C., Beskos,D.E. (1984), "Dynamics Response of Surface Foundations by Time Domain BEM", *Int. Symposium on Dynamic Soil-Struct. Int.*, Minneapolis, Balkema, Rotterdam.
- Kontoni,D.N., Beskos,D. Manolis,G.D. (1987), "Uniform Half-Space Elastodynamic Problems by an Approximate Boundary Element Method". *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, **6**, No.4, 227-238.
- Kutt,H.R. (1975), "Quadrature Formulae for Finite-Part Integrals", CSRI Special Report, WISK 178, National Research Institute for Mathematical Sciences, Pretoria, Republic of South Africa.
- Lachat,J.C., Watson,J.O. (1976), "Effective Numerical Treatment of Boundary Integral Equations: a Formulation of Three Dimensional Elastostactics", *Int. J. Mech. Eng.*, **10**, 991-1005.

Lee,V.W. (1982), "A Note on the Scattering of Elastic Plane Waves by Hemispherical Canyon", Soil Dyn. Earthquake Eng., 122-139.

Liu,P.L.-F., Cheng,A.H.-D. (1984), "Boundary Solutions for Fluid-Structure Interaction", Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 110, No.1, 51-64.

Liu,P.L., Liggett (1984), "Boundary Element Formulations and Solutions for some Nonlinear Water Wave Problems", Developements in B.E.M.-3. Edit.P.K. Banerjee y S.Mukherjee. Elsevier, Londres.

Lofti,V., Roësset,J.M., Tassoulas,J. (1987), "A Technique for the Analysis of the Response of Dams to Earthquakes", Earthquakes Engineering and Structural Dynamics, 15, 463-490.

Love,A.E.H. (1944), "A Teatrise on the Mathematical Theory of Elasticity", Dover, New York.

Medina,F. (1987), "Análisis de la Respuesta Sísmica de Presas Incluyendo Efectos de Interacción Suelo-Fluido-Estructura", Tesis doctoral, E.T.S.I.I. Sevilla.

Medina,F., Dominguez,J. (1989), "Boundary Elements for the Analysis of Dams Including Dam-Water-Foundation Interaction Effects.I", Eng. Analysis with Boundary Elements, 6, 151-157.

Medina,F., Dominguez,J., Tassoulas,J.L. (1990), "Response of Dams to Earthquakes Including Effects of Sediments", J. Struct. Eng. ASCE, 116, No. 11, 3108-3121.

NowaK,P.S. (1989), "Effect of Nonuniform Seismic Input on Arch Dams", Ph. D. Thesis, California Institute of Technology, Pasadena.

O'Connor,J.P.F., Boot,J.C. (1988), "A Solution Procedure for the Earthquake Analysis of Arch Dam-Reservoir Systems with Comprensible Water", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 16, 757-773.

Porter,C.S., Chopra,A.K. (1982), "Hydrodynamic Effects in Dynamic Response of Simple Arch Dams", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 10,No.3, 417-431.

Priscu,R., Popovici,A., Stematiu,D., Stere,D. (1985), "Earthquake Engineering for Lage Dams", J. Wiley.

Rizzo,F.J., Shippy,D.J. (1968), "A Formulation and Solution Procedure for the General Non-Homogeneous Elastic Inclusion Problem", Int. J. Solids Struct., 4, 1161-1179.

Rizzo,F.J., Shippy,D.J., Rezayat,M. (1985), "A Boundary Integral Equation Method for Time-Harmonic Radiation and Scattering in an Elastic Half-Space". Advanced Topics in Boundary Element Analysis, AMD, 72, ASME, 83-90.

1. Roësset, J.M., Kausel, E. (1976), "Dynamic Soil Structure Interaction", ASCE, Proc. of the Second Int. Conf. on Num. Meth. in Virginia Polytechnical Institute and State Univ., 1.
- Saini, S.S., Bettess, P., Zienkiewicz, O.C. (1978), "Coupled Hydrodynamic Response of Concrete Gravity Dams Using Finite and Infinite Elements", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 6, No.4, 363-374.
- Sánchez-Sesma, F.J. (1983), "Diffraction of Elastic Waves by Three-Dimensional Surface Irregularities", *Bull. Seism. Soc. Am.*, 1621-1636.
- Sánchez-Sesma, F.J., Esquivel, J.A. (1979), "Ground Motion on Alluvial Valley Under Incident Plane SH Waves", *Bull. Seism. Soc. Am.*, 1107-1120.
- Sánchez-Sesma, F.J., Rosenblueth, E. (1979), "Ground Motion at Canyons of Arbitrary Shape Under Incident SH Waves", *Earthq. Eng. Struct. Dyn.*, 7, 441-450.
- Siro, L. (1980), "Emergency Microzonations by Italian Geodynamics Projects after November 23 Earthquake. A Short Technical Report", *Proc. 3rd. Int. Conf. Microzonation, Seattle, Wash.*, 3, 1417-1427.
- Somigliana, C. (1889), "Sulle Equazioni della Elasticità", *Annali di Matematica*, Series 2, 17, 17.
- Spyrakos, C.C. (1984), "Dynamic Response of Two Dimensional Foundations", Ph. D. Th., Univ. Minnesota, Minneapolis, MN.
- Spyrakos, C.C., Antes, H. (1986), "Time Domain Boundary Element Method Approaches in Elastodynamics: A Comparative Study", *Comput. Struct.*, 24, 529-535.
- Stokes, G.G. (1849), "On the Dynamical Theory of Diffraction", *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, 9, 793-797.
- Stroud, A.H., Secrest, D. (1966), "Gaussian Quadrature Formulas", Prentice-Hall, New York.
- Trifunac, M.D. (1973), "Scattering of Plane SH Waves by a Semicylindrical Canyon", *Earthq. Eng. Struct. Dyn.*, 1, 267-281.
- Tsai, Chogn-Shien, Lee, G.C. (1987), "Arch Dam-Fluid Interactions: By Fem-Bem and Substructure Concept", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24, 2367-2388.
- Vargas-Loli, L.M., Fenves, G.L. (1988), "Effects of Concrete Cracking on the Earthquake Response of Gravity Dams", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 18, 575-592.
- Von Estorff, O., Schmid, G. (1984), "Application of the Boundary Element Method to the Analysis of Vibration Behavior of Strip Foundations on a Soil Layer", *International Symposium on Dynamic Soil-Structure Interaction*, Minneapolis. Beskos et al. eds.,

Balkema, Rotterdam.

Von Estorff, O., Kausel, E. (1989), "Coupling of Boundary and Finite Elements for Soil-Structure Interaction Problems". *Earth. Eng. and Struc. Dyn.*, **18**, 1065-1075.

Von Estorff, O., Pais, A.L., Kausel, E. (1990), "Some Observations on Time Domain and Frequency Domain Boundary Elements". *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, **29**, 785-800.

Wang, M.H., Hung, T.K. (1990), "Three-Dimensional Analysis of Pressures on Dams", *Journal of Engineering Mechanics*, **116**, No. 6, ASCE.

Westergaard, H.M. (1933), "Water Pressures on Dams During Earthquakes", *Transactions, ASCE*, **98**, 418-433.

Wheeler, L.T., Sternberg, E. (1968), "Some Theorems in Classical Elastodynamics", *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **31**, 51-90.

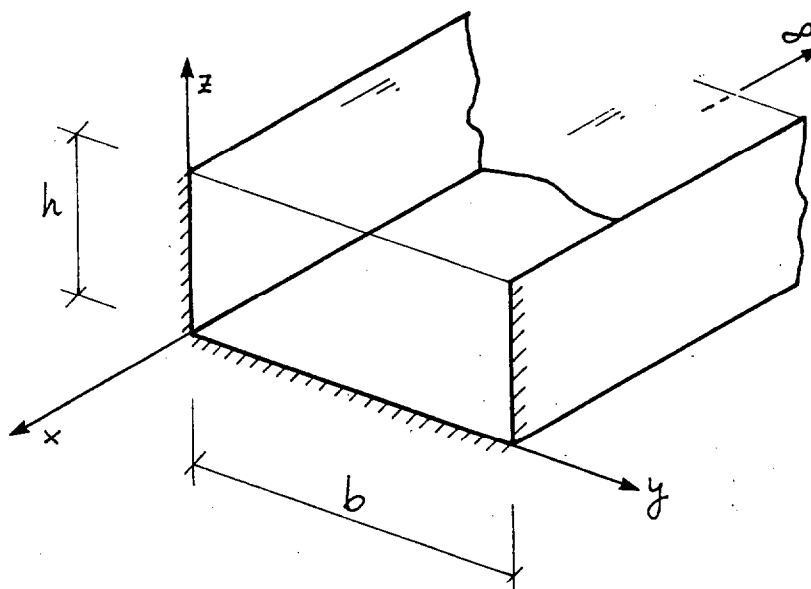
Wong, H.L., Trifunac, M.D. (1974), "Surface Motion of a Semi-Elliptical Alluvial Valley for Incident Plane SH Waves", *Bull. Seism. Soc. Am.*, 1389-1406.

Zhang, L., Chopra, A.K. (1991), "Impedance Functions for Three-Dimensional Foundations Supported on an Infinitely-Long Canyon of Uniform Cross-Section in a Homogeneous Half-Space", *Earthquakes Engineering and Structural Dynamics*, **20**, 1011-1027.

APÉNDICE A

CAMPO DE PRESIONES EN UN CANAL RECTANGULAR INFINITO GENERADAS POR EL MOVIMIENTO DE LA BASE.

Cuando las paredes rígidas de un canal rectangular como el de la figura se encuentran sometidas a una excitación armónica en dirección vertical o transversal al canal, se generan en el medio fluido contenido en él un campo de presiones, de tal forma que si la excitación es uniforme en la dirección x , no habrá propagación de ondas en dirección longitudinal.



EXITACIÓN VERTICAL DE LA BASE RÍGIDA.

En este caso las paredes verticales no producen perturbación alguna en el agua y el problema equivale al de una lámina de agua infinita sobre una base rígida que está excitada verticalmente. Se trata pues de un problema monodimensional en el que sólo existe gradiente de presiones en dirección vertical. La solución buscada debe satisfacer la ecuación

$$\nabla^2 p + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0 \quad (1)$$

y las condiciones de contorno serán de presión nula en la superficie y velocidad constante en la base:

$$\begin{aligned} p &= 0 & \text{en } z &= h \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= 1 & \text{en } z &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Puede ensayarse

$$p = p(z) = A e^{\lambda(z-H)} \quad (3)$$

que sustituida en (1) proporciona

$$\lambda^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad (4)$$

$$\lambda = \pm i \frac{\omega}{c}$$

lo cual lleva a representar la solución de presiones como:

$$p(z) = A e^{i \frac{\omega}{c}(z-H)} + A' e^{-i \frac{\omega}{c}(z-H)} \quad (5)$$

Imponiendo ahora las condiciones de contorno es posible obtener finalmente la expresión

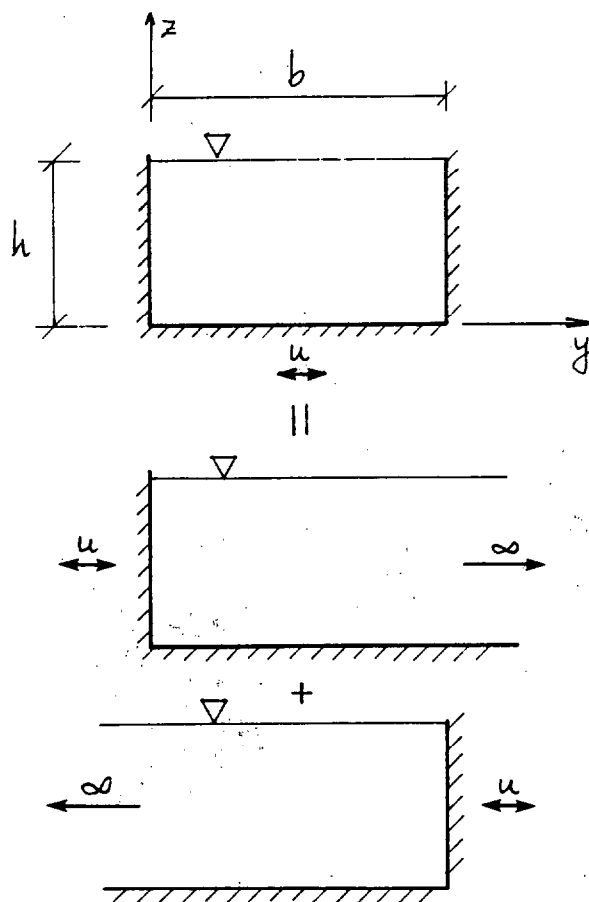
$$p(z) = \frac{c}{\omega} \frac{\sin \frac{\omega}{c}(z-H)}{\cos \frac{\omega}{c}H} \quad (6)$$

EXCITACIÓN TRANSVERSAL DEL CANAL RÍGIDO

En este caso el agua se encuentra sometida a un estado de presiones hidrodinámicas producidas por la aceleración normal de las paredes del canal que es constante a lo largo de z . Si la excitación no varía en dirección longitudinal se producirá un campo bidimensional de presiones independiente de la coordenada x , y la ecuación de gobierno del fluido compresible se convierte en:

$$\frac{\partial^2 p(y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p(y,z)}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} p(y,z) = 0 \quad (7)$$

El problema puede visualizarse como la suma de otros dos más sencillos:



La solución será del tipo:

$$p = p(y, z) = p(z) \cdot (B e^{-ky} + B' e^{k(y-b)}) \quad (8)$$

que sustituida en (7) conduce a la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 p(z)}{\partial z^2} + (k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}) p(z) = 0 \quad (9)$$

cuya solución general es

$$p(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{i\lambda_n z} + A'_n e^{-i\lambda_n z}) \quad (10)$$

Por sustitución se obtiene

$$-\lambda_n^2 + k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad (11)$$

$$k = \pm \sqrt{\lambda_n^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

y por tanto

$$p = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{i\lambda_n z} + A'_n e^{-i\lambda_n z}) (B e^{-k_n y} + B' e^{k_n(y-b)}) \quad (12)$$

donde se ha considerado

$$k_n = \sqrt{\lambda_n^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \quad (13)$$

En la superficie libre y en el fondo se imponen las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} p &= 0 & \text{en } z=h \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 & \text{en } z=0 \end{aligned} \quad (14)$$

las cuales, sustituidas en (12), conducen a a las expresiones

$$\left. \begin{aligned} A_n e^{i\lambda_n h} + A'_n e^{-i\lambda_n h} &= 0 \\ i\lambda_n A_n - i\lambda_n A'_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \forall n=1,2,3... \quad (15)$$

y por tanto

$$A_n = A'_n$$

$$A_n (e^{i\lambda_n h} + e^{-i\lambda_n h}) = 2 A_n \cos(\lambda_n h) = 0 \quad (16)$$

de donde

$$\lambda_n = \frac{2n-1}{2h} \pi \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (17)$$

y la solución general de presiones queda

$$p = \sum_{n=1}^{\infty} A_n (B e^{-k_n y} + B' e^{k_n (y-b)}) \cos(\lambda_n z) \quad (18)$$

La condición de contorno en las paredes verticales es de aceleración normal constante, es decir:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{y=0}^{y=b} = 1 \quad (19)$$

por tanto:

$$\left. \begin{aligned} y=0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} A_n k_n (B' e^{-k_n b} - B) \cos(\lambda_n z) &= 1 \\ y=b, \quad \sum_{n=1}^{\infty} A_n k_n (B' - B e^{-k_n b}) \cos(\lambda_n z) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

lo cual implica que

$$B' e^{-k_n b} - B = B' - B e^{-k_n b} \quad ;$$

$$B' (e^{-k_n b} - 1) = B (1 - e^{-k_n b}) \Rightarrow$$

$$B = B' \quad (21)$$

y llamando

$$C_n = A_n B \quad (22)$$

la ley de presiones es

$$p(y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n (e^{-k_n y} - e^{k_n (y-b)}) \cos(\lambda_n z) \quad (23)$$

Si de nuevo se impone la condición de contorno en una de las paredes verticales, y recordando el desarrollo en serie de cosenos para la función $f(z)=1$ entre $-h$ y $+h$:

$$\begin{aligned} - \sum_{n=1}^{\infty} C_n k_n (1 + e^{-k_n b}) \cos \lambda_n z &= 1 = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{m\pi}{2h} z\right) \\ m &= 1, 2, 3, \dots \quad \text{ó} \quad m = 2n-1 \quad ; \\ - \sum_{n=1}^{\infty} C_n k_n (1 + e^{-k_n b}) \cos \lambda_n z &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2h} z\right) \\ \text{con} \quad a_{2n-1} &= -\frac{4}{\pi} \frac{(-1)^n}{2n-1} \end{aligned} \quad (24)$$

es decir:

$$\begin{aligned} - C_n k_n (1 + e^{-k_n b}) &= a_{2n-1} \quad ; \\ C_n &= -\frac{a_{2n-1}}{k_n} \frac{1}{1 + e^{-k_n b}} = \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^n}{(2n-1) k_n} \frac{1}{1 + e^{-k_n b}} \end{aligned} \quad (25)$$

Si el movimiento prescrito en las paredes del canal ($y=0$, $y=b$) tiene valor u_0 :

$$\left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{y=0}^{y=b} = \rho \omega^2 u_0 \quad (26)$$

entonces:

$$C_n = \frac{4}{\pi} \rho \omega^2 u_0 \frac{(-1)^n}{(2n-1)k_n} \frac{1}{1 + e^{-k_n b}} \quad (27)$$

y la solución general del campo de presiones en el agua es

$$p(y, z) = \frac{4\rho\omega^2 u_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)k_n} \frac{1}{1 + e^{-k_n b}} (e^{-k_n y} - e^{k_n(y-b)}) \cos(\lambda_n z) \quad (28)$$

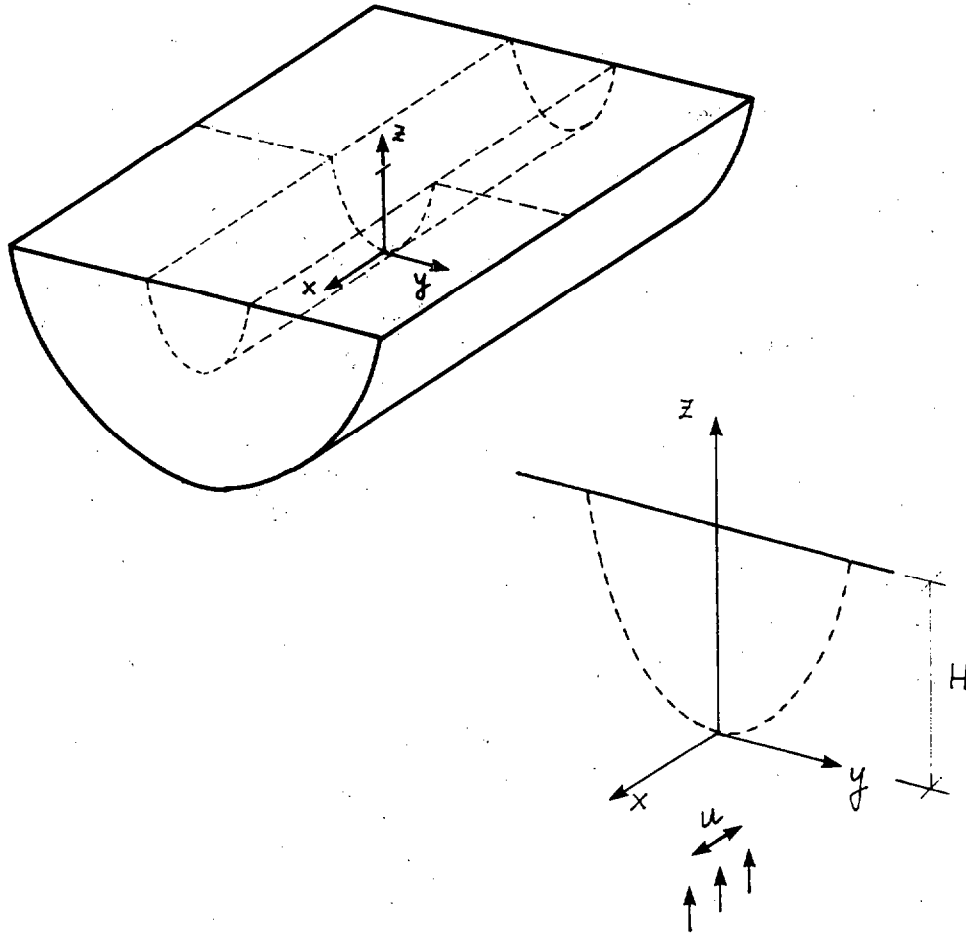
$$\lambda_n = \frac{2n-1}{2h} \pi$$

$$k_n = \sqrt{\lambda_n^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

APÉNDICE B

CAMPO DE MOVIMIENTOS Y TENSIONES PRODUCIDOS POR UN TREN DE ONDAS PLANAS QUE INCIDE VERTICALMENTE EN UN SEMIESPACIO

Onda SV vertical ascendente. Movimiento paralelo al plano xz.



Para el sistema de referencia escogido una onda de este tipo produce la excitación anteroposterior, esto es, según la dirección longitudinal de la cerrada. La dirección de propagación queda definida por los cosenos directores:

$$l' = m' = 0 ; n' = 1 \quad (1)$$

de manera que

$$u = \left(-A_s e^{\frac{i\omega}{c_s} z} + A_s' e^{-\frac{i\omega}{c_s} z} \right) f(x, t) \quad (2)$$

$$v = w = 0$$

con

$$f(x, t) = e^{\frac{i\omega}{c_s}(c_s t - l' x)} = e^{i\omega t} \quad (3)$$

Las tensiones asociadas se obtienen por derivación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(z; \omega)}{\partial x} &= \left(-A_s e^{\frac{i\omega}{c_s} z} + A_s' e^{-\frac{i\omega}{c_s} z} \right) \left(-\frac{i\omega}{c_s} l' \right) = 0 \\ \frac{\partial u(z; \omega)}{\partial z} &= -\frac{i\omega}{c_s} \left(A_s e^{\frac{i\omega}{c_s} z} + A_s' e^{-\frac{i\omega}{c_s} z} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

de manera que

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_z = 0 \quad ; \quad (\sigma_y = \tau_{yx} = \tau_{yz} = 0) \\ \tau_{xz} = G \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \quad (5)$$

En la superficie libre se imponen las condiciones de contorno:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= 0 \\ u &= 1 \end{aligned} \right\} \quad \text{en } z = H \quad (6)$$

de la primera de ellas se obtiene:

$$\begin{aligned} A_s' &= -A_s e^{2\frac{i\omega}{c_s} H} \\ u &= -A_s \left(e^{\frac{i\omega}{c_s} z} + e^{\frac{i\omega}{c_s} (2H-z)} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

y de la segunda:

$$1 = -A_s \left(e^{\frac{i\omega}{c_s} H} + e^{\frac{i\omega}{c_s} H} \right) \quad (8)$$

$$A_s = -\frac{1}{2} e^{-\frac{i\omega}{c_s} H}$$

y las expresiones del campo de movimientos quedan:

$$u = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{i\omega}{c_s} (z-H)} + e^{\frac{i\omega}{c_s} (H-z)} \right) \quad (9)$$

$$v = w = 0$$

y del campo de tensiones:

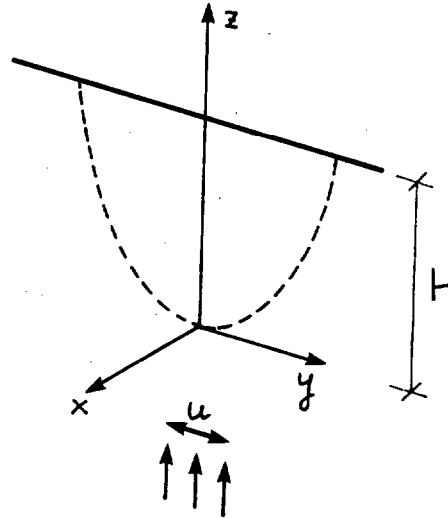
$$\tau_{xz} = G \frac{i\omega}{c_s} \frac{1}{2} \left(e^{\frac{i\omega}{c_s} (z-H)} - e^{\frac{i\omega}{c_s} (H-z)} \right) \quad (10)$$

Las tracciones asociadas a una dirección $\eta_x \eta_y \eta_z$ son

$$t_x = \tau_{xz} \eta_z \quad ; \quad t_y = 0 \quad ; \quad t_z = \tau_{xz} \eta_x \quad (11)$$

Onda SV vertical ascendente. Movimiento paralelo al plano yz.

Para el sistema de referencia utilizado el movimiento en este caso es transversal a la dirección del canal.



$$l' = m' = 0 \quad ; \quad n' = 1$$

$$v = \left(-A_s e^{\frac{i\omega}{c_s} z} + A_s' e^{-\frac{i\omega}{c_s} z} \right) f(y, t) \quad (12)$$

$$u = w = 0$$

$$\tau_{yz} = G \frac{\partial v}{\partial z} = G \frac{i\omega}{c_s} \left(-A_s e^{\frac{i\omega}{c_s} z} - A_s' e^{-\frac{i\omega}{c_s} z} \right) f(y, t)$$

con

$$f(y, t) = e^{\frac{i\omega}{c_s} (c_s t - m' x)} = e^{i\omega t} \quad (13)$$

Las condiciones de contorno son:

$$\left. \begin{array}{l} \tau_{yz} = 0 \\ \nu = 1 \end{array} \right\} \quad \text{en } z = H \quad (14)$$

con lo que

$$\begin{aligned} A_s' &= -A_s e^{2 \frac{i\omega}{c_s} H} \\ A_s &= -\frac{1}{2} e^{-\frac{i\omega}{c_s} H} \end{aligned} \quad (15)$$

obteniéndose:

$$\nu(z; \omega) = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{i\omega}{c_s}(z-H)} + e^{\frac{i\omega}{c_s}(H-z)} \right) \quad (16)$$

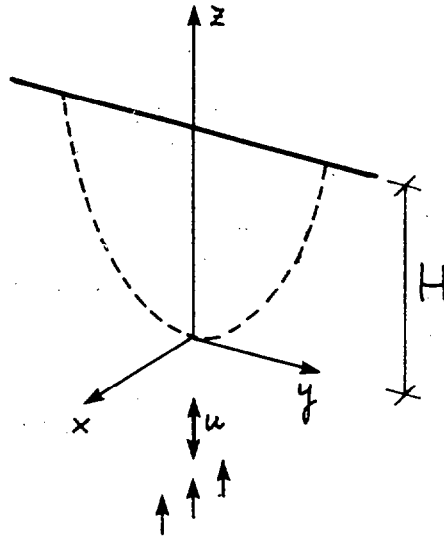
$$u = w = 0$$

y las tensiones

$$\begin{aligned} \tau_{yz} &= G \frac{i\omega}{c_s} \frac{1}{2} \left(e^{\frac{i\omega}{c_s}(z-H)} - e^{\frac{i\omega}{c_s}(H-z)} \right) \\ \sigma_y = \sigma_z &= 0, \quad (\sigma_x = \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} t_x &= 0 \\ t_y &= \tau_{yz} \eta_z \\ t_z &= \tau_{yz} \eta_y \end{aligned}$$

Onda P vertical ascendente. Movimiento vertical.



$$l = m = 0 ; n = 1 \quad (18)$$

así pues:

$$w(z; \omega) = -A_p e^{\frac{i\omega}{c_r} z} + A_p' e^{-\frac{i\omega}{c_r} z} \quad (19)$$

$$u = v = 0$$

En este caso las tensiones existentes son:

$$\sigma_x = \lambda e + 2G \varepsilon_x = \lambda \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\sigma_y = \lambda \frac{\partial w}{\partial z} = \sigma_x \quad (20)$$

$$\sigma_z = \lambda \frac{\partial w}{\partial z} + 2G \frac{\partial w}{\partial z} = (\lambda + 2G) \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

con:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{i\omega}{c_p} \left(A_p e^{\frac{i\omega}{c_r} z} + A_p' e^{-\frac{i\omega}{c_r} z} \right) \quad (21)$$

En la superficie libre se imponen las condiciones de contorno:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_z = 0 \quad (\sigma_x = \sigma_y = 0) \\ w = 1 \end{array} \right\} \quad \text{en } z = H \quad (22)$$

obteniéndose unas amplitudes:

$$\begin{aligned} A_p' &= -A_p e^{2\frac{i\omega}{c_r} H} \\ A_p &= -\frac{1}{2} e^{-\frac{i\omega}{c_r} H} \end{aligned} \quad (23)$$

y por tanto los movimientos:

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} \left(e^{\frac{i\omega}{c_r}(z-H)} + e^{\frac{i\omega}{c_r}(H-z)} \right) \\ u &= v = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

Las tensiones resultan ser:

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y &= \lambda \frac{1}{2} \frac{i\omega}{c_p} \left(e^{\frac{i\omega}{c_r}(z-H)} - e^{\frac{i\omega}{c_r}(H-z)} \right) \\ \sigma_z &= (\lambda + 2G) \frac{1}{2} \frac{i\omega}{c_p} \left(e^{\frac{i\omega}{c_r}(z-H)} - e^{\frac{i\omega}{c_r}(H-z)} \right) \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} t_x &= \sigma_x \eta_x \\ t_y &= \sigma_y \eta_y \\ t_z &= \sigma_z \eta_z \end{aligned}$$

