

# Análisis de Onda Completa mediante el Método de los Momentos de Estructuras Microtira Eléctricamente Grandes

Eugenio Jiménez Yguácel<sup>1</sup>, Fco. José Cabrera Almeida<sup>1</sup>, Jesús Gustavo Cuevas del Río<sup>2</sup>

<sup>1</sup>E.T.S.I. Telecomunicación, Dpto. de Electrónica y Telecomunicación, U.L.P.G.C  
Campus de Tafira S/N, 35017 Las Palmas de Gran Canaria. Tfno: 928-452863, Fax: 928-451243  
eugenio@cibeles.teleco.ulpgc.es, francis@cibeles.teleco.ulpgc.es

<sup>2</sup>E.T.S.I. Telecomunicación, Dpto. de Sistemas, Señales y Radicomunicaciones, U.P.M.  
Ciudad Universitaria S/N, 28040 Madrid. Tfno: 91-5495700, Fax: 91-3367350  
gustavo@gus.xyz.ssr.upm.es

## ABSTRACT

In this paper we will present a comparison between numerical and asymptotic evaluation of Sommerfeld kind integrals when working with real microstrip problems. We have focused our attention in the time required for both methods. Asymptotic methods are less time consuming than numerical ones, but when you have to compare the time involved in the computation of the Green's function with the time required to fill the MoM matrix, the former is very little in front of the latter.

## 1 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Sean dos elementos metalizados de dimensiones  $l_i \cdot w_i$  y  $l_j \cdot w_j$  orientados según el eje  $x$ . Suponiendo que; la corriente sólo varía según la dirección longitudinal  $x$  y siendo conocida su variación transversal  $y$ , la densidad de corriente  $J_s^m$  en el elemento  $m$  se puede expresar como  $J_s^m \equiv J_x^m = T_x^m(x)Q_y^m(y)$  siendo  $T_x^m(x)$  y  $Q_y^m(y)$  funciones conocidas.

En estas condiciones, el elemento de la matriz  $Z$  resultante del acoplo entre las distribuciones de corriente de los elementos  $i$  y  $j$  se puede escribir como :

$$Z_{ij} = \int_{w_i} Q_i(y') dy' \int_{w_j} Q_j(y) dy \left\{ C_1 \int_{l_i} T_i(x') dx' \int_{l_j} T_j(x) G_x(x, y; x', y') dx + C_2 \int_{l_i} \frac{\partial}{\partial x'} T_i(x') dx' \int_{l_j} \frac{\partial}{\partial x} T_j(x) G_v(x, y; x', y') dx \right\}$$

## 2 CÁLCULO DE LOS TÉRMINOS $Z_{ij}$

Supongamos que los dos elementos de corriente tienen las mismas dimensiones  $l_j=l_i$  y  $w_j=w_i$  y que las distribuciones de corriente, en ambos elementos, se pueden aproximar como :

$$J_x^m(x, y) = Q(y)T(x) \quad Q(y) = \frac{1}{\pi \sqrt{w^2 - y^2}} \quad T(x) = \frac{\sin(l - |x - x_m|)}{\sin k_e l}$$

siendo  $x_m$  el punto medio del segmento y  $k_e$  la cte. de propagación efectiva de la línea.

Para mayor simplicidad dividiremos el término  $Z_{ij}$  en dos términos. Uno incluirá las derivadas de la corriente y el otro no

### 2-1 Primer Término:

Reescribiendo el primer término tenemos:

$$Z_{ij}^1 = \frac{C_1}{\pi^2 \sin^2 k_e l} \int_{-w}^w \frac{1}{\sqrt{y'^2 - w^2}} dy' \int_{-w}^w \frac{1}{\sqrt{y^2 - w^2}} dy \int_{-l+x}^{l+x_i} \sin(k_e [l - |x' - x_i|]) dx' \int_{-l+x}^{l+x_j} \sin(k_e [l - |x - x_j|]) dy G_x(x, y; x', y') dx$$

Mediante los cambios de variable,

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y' + y) \quad v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y' - y) \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + x) \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - x) \quad du_1 dv_1 = dy dy' \quad du_2 dv_2 = dx dx'$$

y tras algunas tediosas manipulaciones, podemos llegar a las siguientes expresiones:

$$I = \frac{C_1}{C} \left\{ \int_{-\frac{l}{\sqrt{2}}}^0 du \int_0^{\infty} \tilde{F}_1(u, k_e, l) H(v) G_x(\rho_{uv}) dv + \int_0^{\frac{l}{\sqrt{2}}} du \int_0^{\infty} \tilde{F}_2(u, k_e, l) H(v) G_x(\rho_{uv}) dv + \right. \\ \left. \int_{-\frac{l}{\sqrt{2}}}^{\frac{l}{\sqrt{2}}} du \int_0^{\infty} \tilde{F}_3(u, k_e, l) H(v) G_x(\rho_{uv}) dv + \int_{\frac{l}{\sqrt{2}}}^l du \int_0^{\infty} \tilde{F}_4(u, k_e, l) H(v) G_x(\rho_{uv}) dv \right\}$$

$$C = \pi^2 \sin^2 k_e l \quad \rho_{uv} = \sqrt{(u\sqrt{2} - x_i + x_j)^2 + 4w^2} e^{-4v} \quad H(v) = 8 \frac{K(\tanh^2 v)}{\cosh v} e^{-v}$$

Siendo  $K(x)$  la integral elíptica completa de primera especie y  $F_i$  unas ciertas funciones trigonométricas. De este modo hemos reducido una integral cuadruple a una doble. También hemos eliminado las discontinuidades en  $y' = +/-w$  e  $y = +/-w$  reduciéndolas a una sola discontinuidad cuando  $v \rightarrow \infty$ . Las integrales con intervalos finitos se evalúan fácilmente mediante una cuadratura de Gauss-Legendre sencilla mientras que las de intervalo semi-infinito se evaluarán mediante una cuadratura de Gauss-Laguerre.

## 2-2 Segundo término

Reescribiendo el segundo término obtenemos:

$$Z_{ij}^2 = \frac{C_2}{\pi^2 \sin^2 k_e l} \int_{-w}^w \frac{1}{\sqrt{y'^2 - w^2}} dy' \int_{-w}^w \frac{1}{\sqrt{y^2 - w^2}} dy$$

$$\int_{-l+x}^{l+x_i} \frac{\partial}{\partial x'} \sin(k_e [l - |x' - x_i|]) dx' \int_{-l+x}^{l+x_j} \frac{\partial}{\partial x} \sin(k_e [l - |x - x_j|]) dy G_v(x, y, x', y') dx$$

Obrando como en el caso anterior, llegamos a las siguientes expresiones:

$$I = \frac{C_2}{C} \left\{ \int_{-\frac{l}{\sqrt{2}}}^0 du \int_0^{\infty} \tilde{T}_1(u, k_e, l) H(v) G_v(\rho_{uv}) dv + \int_0^{\frac{l}{\sqrt{2}}} du \int_0^{\infty} \tilde{T}_2(u, k_e, l) H(v) G_v(\rho_{uv}) dv + \right. \\ \left. \int_{-\frac{l}{\sqrt{2}}}^{\frac{l}{\sqrt{2}}} du \int_0^{\infty} \tilde{T}_3(u, k_e, l) H(v) G_v(\rho_{uv}) dv + \int_{\frac{l}{\sqrt{2}}}^l du \int_0^{\infty} \tilde{T}_4(u, k_e, l) H(v) G_v(\rho_{uv}) dv \right\}$$

$$C = \frac{\pi^2 \sin^2 k_e l}{k_e^2} \quad \rho_{uv} = \sqrt{(u\sqrt{2} - x_i + x_j)^2 + 4w^2} e^{-4v} \quad H(v) = 8 \frac{K(\tanh^2 v)}{\cosh v} e^{-v}$$

Dónde las funciones  $T_i$  juegan el mismo papel que las  $F_i$

En el caso de que trabajáramos con funciones sinusoidales definidas sobre subdominios no uniformes,  $l_i$  y  $l_j$  habría que descomponerlas en cuatro;  $l_{1i}$ ,  $l_{2i}$ ,  $l_{1j}$ ,  $l_{2j}$ . El método antes expuesto seguiría siendo válido sólo que un poco más engorroso. Para subdominios anchos ( $w/h > 1$ ) la distribución transversal de corriente puede suponerse cte. y de valor  $1/w$ . Una elección de tipo  $J(y) = \sum \cos(m\pi y/w) / \sqrt{w^2 - y^2}$  sería más útil en un caso totalmente general.

## 3 CÁLCULO DE LAS FUNCIONES $G_v$ Y $G_x$

Dada una geometría, las funciones  $G_v$  y  $G_x$  sólo se evalúan en un cierto rango de valores de la distancia radial. Para evitar cálculos repetitivos, crearemos unas tablas de valores de dichas funciones e interpolaremos a partir de ellas [1]. En el caso que nos ocupa, los valores de  $\rho$  elegidos no son distribuidos uniformemente sino que están concentrados para los valores de  $\rho$  cercanos al origen. Esto se hace así debido a la singularidad que presentan las funciones  $G$  en dicho punto.

Para evaluar las funciones  $G_v$  y  $G_x$  se utilizan dos tipos de algoritmos; uno puramente numérico y otro de tipo asintótico [2]. El paso de uno a otro se realiza de la siguiente manera:

- Comenzamos calculando la función por ambos métodos.
- Comparamos, por separado, las partes reales e imaginarias obtenidas por ambos métodos.

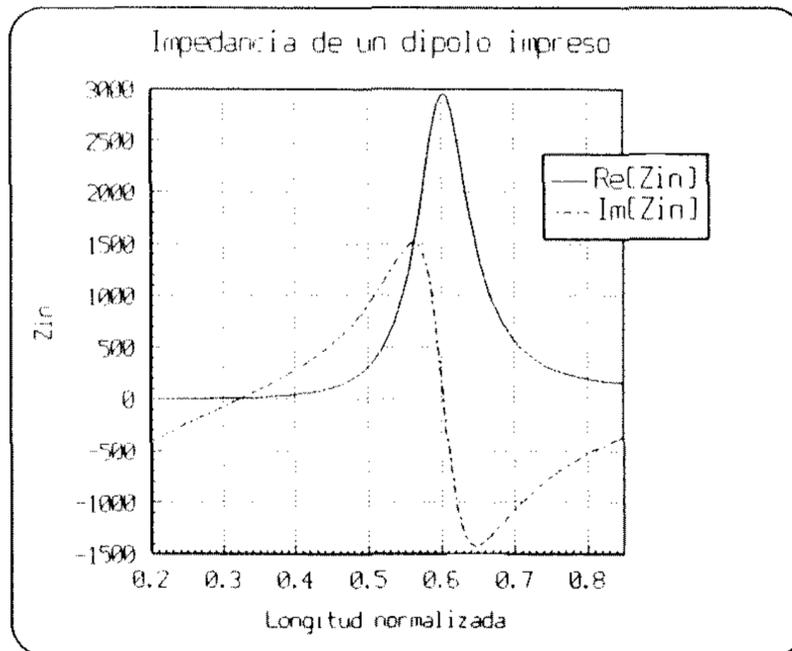
- Si ambas comparaciones superan un cierto umbral (vg. difieren menos de un 10%) cambiamos de algoritmo y sólo utilizamos el asintótico.

Para evitar cambios *falsos*, una vez superado el umbral no se pasa a la formulación asintótica inmediatamente. Esperaremos un cierto número de evaluaciones, un *periodo de gracia*, para comprobar que ambas formulaciones siguen difiriendo en menos del umbral establecido.

## 4 RESULTADOS

A continuación se presentan varios resultados obtenidos.

### 4-1 Dipolo Impreso



La curva siguiente muestra la impedancia de entrada de un dipolo impreso de las siguientes características: espesor del dieléctrico  $h=3.048\text{mm}$  ( $0.1016\lambda$  a  $10\text{GHz}$ ), cte. del dieléctrico  $\epsilon=3.25$ , longitud del dipolo  $L=1.5\text{cm}$  ( $0.5\lambda$  a  $10\text{GHz}$ ), ancho del dipolo  $w=6\cdot 10^{-3}\text{mm}$  ( $0.0002\lambda$  a  $10\text{GHz}$ ), alimentación central tipo  $\delta$ -gap, modelado de la corriente mediante 9 subdominios del tipo PWS. El ejemplo ha sido tomado de [3] pero con ligeras modificaciones; en dicho artículo se modela el dipolo como un hilo de radio  $a=5\cdot 10^{-5}\lambda$  manteniendo el radio eléctrico del hilo cte. en todo el barrido de frecuencia. En nuestro caso el dipolo se modela como una tira de ancho  $w=4a$  pero con la anchura física fija, variando por tanto la anchura eléctrica. En [3] la impedancia de entrada para  $L=0.5\lambda$  resulta

ser de  $Z=330+j880\Omega$ . En nuestros cálculos obtenemos  $Z=316+j914\Omega$ .

Las curvas que se presentan han sido obtenidas con umbrales del 0,5,10,15 y 20%. En todos los casos son indistinguibles unas de otras. Esto no se debe a la *bondad* de la formulación asintótica sino que es debido a que ésta es muy poco usada. La longitud máxima de la geometría ( $0.85\lambda$ ) y los parámetros del sustrato apenas dan cabida a la utilización de dicha formulación.

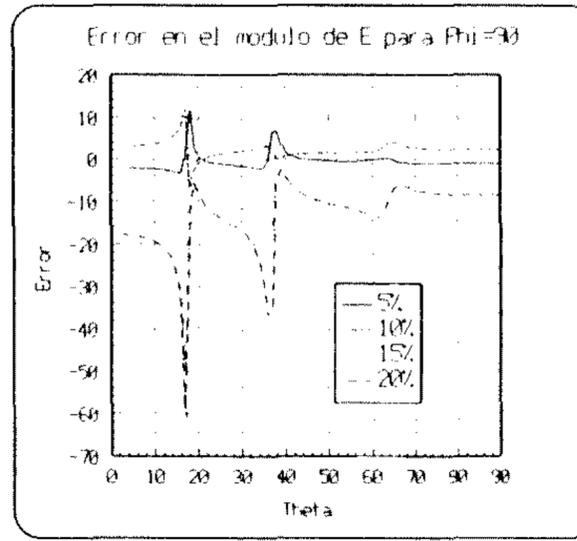
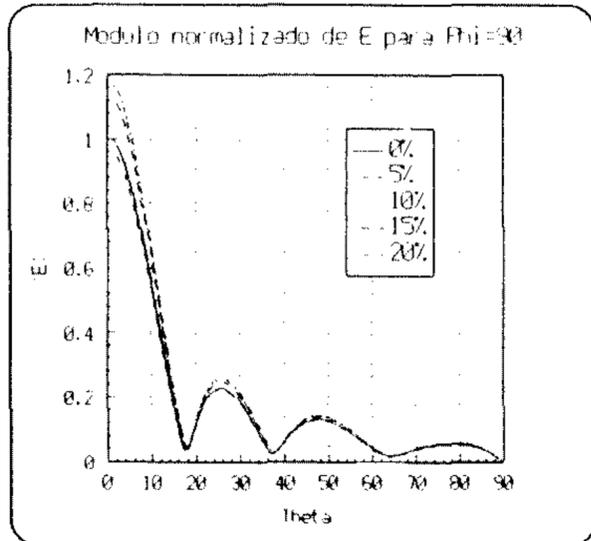
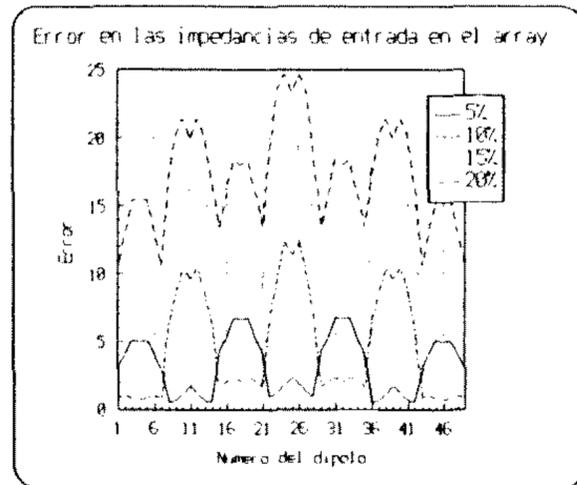
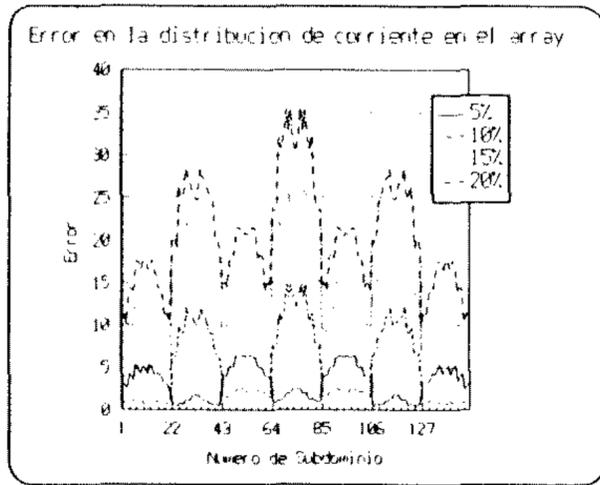
En la tabla siguiente se presentan los tiempos de cálculo de las funciones G en el caso más favorable ( $L=0.85\lambda$ ) siendo 50 el número de puntos en el que se evalúan ambas funciones.

Umbral	$G_x$	$G_y$	$ZG_x$	$ZG_y$
0%	2.83 sg.	7.62 sg.	14.71 sg.	14.71 sg.
20%	2.33 sg.	6.12 sg.	14.71 sg.	14.71 sg.

Aparte de servir como ejemplo, este resultado pone en evidencia el verdadero problema que surge al abordar estructuras reales. El tiempo de cálculo de las tablas de interpolación es poco importante si se compara con el invertido en el cálculo de los elementos  $Z_{ij}$ . Lo que es peor, el cálculo de los elementos de la matriz crece de forma cuadrática con el número de subdominios mientras que el de las tablas crece de forma lineal con el tamaño.

### 4-2 Array De Dipolos Impresos

A continuación se presentan los resultados obtenidos al analizar un array de dipolos impresos de las siguientes características: espesor del dieléctrico  $h=0.19\lambda$ , cte. del dieléctrico  $\epsilon=2.55$ , número de elementos  $7\times 7$ , longitud de los dipolos  $L=0.39\lambda$ , anchura  $w=0.01\lambda$ , distancia entre los centros de los dipolos  $d_x=d_y=0.5\lambda$ , orientación de los dipolos según el eje x, todos los dipolos alimentados en su centro con un  $\delta$ -gap, modelado de la corriente con 3 subdominios tipo PWS por dipolo (147 subdominios en total). Las gráficas siguientes muestran el error cometido en el cálculo de la corriente y la impedancia de entrada de cada elemento para varios umbrales ( $100(F[0\%]-F[*\%])/F[0\%]$ ). También se han incluido gráficas que indican el error cometido en el cálculo del diagrama de radiación en uno de los cortes principales para varios umbrales. El campo eléctrico está normalizado respecto al valor máximo calculado sin evaluación asintótica (umbral del 0%). Para finalizar, en la última tabla siguiente se comparan los tiempos de cálculo invertidos en el cálculo de las funciones G (303 puntos de evaluación) y los utilizados en la matriz total.



Umbral	$G_x$	$G_y$	$ZG_x$	$ZG_y$
0%	6.32 sg.	25.52 sg.	497.71 sg.	496.20 sg.
5%	4.27 sg.	18.07 sg.	497.69 sg.	496.21 sg.
10%	3.85 sg.	16.95 sg.	497.64 sg.	496.17 sg.
15%	3.47 sg.	16.89 sg.	497.70 sg.	496.10 sg.
20%	3.38 sg.	14.91 sg.	497.64 sg.	496.20 sg.

Una vez más observamos que el tiempo ahorrado al utilizar la formulación asintótica es importante si se compara con la formulación numérica. Si se compara con el invertido en el cálculo de la matriz  $Z$ , este ahorro es insignificante, amén de que en este caso particular, los errores cometidos pueden llegar a ser significativos.

## 5 CONCLUSIONES

La evaluación asintótica de integrales tipo Sommerfeld es muy eficaz cuando sólo hay que hacer eso, evaluarlas. Al abordar problemas reales, el ahorro de tiempo obtenido por este tipo de formulación queda capitidismuido frente a al tiempo invertido en otras partes del problema, más concretamente frente cálculo de la matriz del MoM. Soluciones a este problema vendrían de la mano de: cálculo *inteligente* de la matriz  $Z$  (descomposición en submatrices tipo Toeplitz) e interpolación *local* de las funciones  $G$  que permitirían expresiones analíticas de los elementos de la matriz. En ello estamos y los resultados pueden llegar a ser sorprendentes.

## 6 BIBLIOGRAFÍA

- [1] J.R. Mosig, F.E. Gardiol, "Analytical and Numerical Techniques in the Green's Function Treatment of Microstrip Antennas and Scatterers", IEE Proc. H, vol 130, pt H, N°2, pp 175-182, March 1983.
- [2] M.Marin, S. Barkeshli, P.H. Pathak, "Efficient Analysis of Planar Microstrip Geometries Using a Closed-Form Asymptotic Representation of the Grounded Dielectric Slab Green's Function", IEEE Tran. MTT, vol MTT-37, N°4, pp 669-679, April 1989.
- [3] I. Rana, N.G. Alexopoulos, "Current Distribution and Input Impedance of Printed Dipoles", IEEE Tran. AP, vol AP-29, N°1, pp 99-105, January 1981.